



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANA CRISTINA BARRETO SABINO DE ARAÚJO

DIMENSÃO DE HAUSDORFF DE FRACTAIS AUTO-AFINS

Recife

2020

ANA CRISTINA BARRETO SABINO DE ARAÚJO

DIMENSÃO DE HAUSDORFF DE FRACTAIS AUTO-AFINS

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Orientador (a): Ricardo Turolla Bortolotti

Recife

2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária: Mônica Uchôa, CRB4-1010

A663d Araújo, Ana Cristina Barreto Sabino de.
Dimensão de Hausdorff de fractais auto-afins / Ana Cristina Barreto Sabino de Araújo. – 2021.
125 f.: il., fig.

Orientador: Ricardo Turolla Bortolotti.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN.
Programa de Pós-graduação em Matemática. Recife, 2021.
Inclui referências e apêndices.

1. Fractal auto-afim. 2. Dimensão de Hausdorff. 3. Função valor singular.
I. Bortolotti, Ricardo Turolla (Orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2021 - 177

ANA CRISTINA BARRETO SABINO DE ARAÚJO

DIMENSÃO DE HAUSDORFF DE FRACTAIS AUTO-AFINS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 16/01/2020.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Ricardo Turolla Bortolotti
DMat - UFPE

Examinador Interno: Prof. Hildeberto
Eulalio Cabral
DMat - UFPE

Examinador Externo: Prof. Carlos Bocker
Neto
DM - UFPB

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha mãe, Petronila, e ao meu pai, Gonçalo, por me encorajarem sempre. Por estarem ao meu lado nos momentos difíceis e por sempre comemorarem cada uma das pequenas vitórias no caminho. Obrigada!

Agradeço também aos meus irmãos e à minha irmã, Tácio, Vinícius e Estela, cuja companhia e convivência me trouxe paz e força para continuar lutando pelo que quero para minha vida. Obrigada pela torcida e pelo carinho imenso.

Agradeço ao meu orientador, Ricardo, por me incentivar em todas as nossas conversas. Obrigada pelo apoio e pelos muitos ensinamentos.

Agradeço a todas as pessoas queridas que estiveram ao meu lado e me ajudaram a ver os problemas por um novo ângulo. Luiz, Michelle, João, Milena, Patricia, Sofia, Luísa, Elys, Catarina, Karl e Pedro: sou muito grata pela presença de cada um de vocês na minha vida.

Um último agradecimento especial à minha tia Joana, à tia Neta, ao meu tio Talo, ao meu avô Zé e às minhas avós Quita e Nete.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Whilst it is possible in some ways to appreciate fractals with little or no knowledge of their mathematics, an understanding of the mathematics that can be applied to such a diversity of objects certainly enhances one's appreciation. The phrase 'the beauty of fractals' is often heard—it is the author's belief that much of their beauty is to be found in their mathematics. (FALCONER, 2003).

RESUMO

Nesse trabalho expomos um método para calcular a dimensão de Hausdorff de fractais auto-afins. Inicialmente, discutimos um exemplo mais simples, que são os fractais auto-semelhantes, e demonstramos a Fórmula de Bowen-Manning. Em seguida, abordamos o problema principal desta dissertação: dadas k transformações afins contrativas no \mathbb{R}^n , existe um único conjunto invariante F , que é um fractal auto-afim; o objetivo deste trabalho é calcular a dimensão de Hausdorff de F . Utilizamos a Função Valor Singular como ferramenta para encontrar um valor $d(F)$ candidato a ser a dimensão de Hausdorff de F . Por fim, provamos que a dimensão de Hausdorff de F é, para quase todo ponto, igual a $\min\{d(F), n\}$, onde n é a dimensão do espaço.

Palavras-chaves: fractal auto-afim; dimensão de Hausdorff; função valor singular.

ABSTRACT

The main goal of this dissertation is to present a method to calculate the Hausdorff dimension of self-affine fractals. First, we discuss a simpler example, which are the self-similar fractals, and demonstrate the Bowen-Manning Formula. After that, we discuss the central problem: given k affine contractive transformations on \mathbb{R}^n , there is a unique invariant set F , which is a self-affine fractal; the objective of this dissertation is to calculate the Hausdorff dimension of F . The tool we use to find a candidate $d(F)$ for the dimension is the Singular Value Function. We finally prove that the Hausdorff dimension of F is $\min\{d(F), n\}$, for almost every point, where n is the dimension of the space.

Keywords: self-affine fractal; Hausdorff dimension; singular value function.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do domínio e contradomínio da aplicação f	34
Figura 2 – Gráfico da função $\Psi(t)$	46
Figura 3 – Gráfico da função $\phi^s(T)$ em $(0, 1]$	53
Figura 4 – Gráfico da função $\phi^s(T)$ em $(0, 2]$	54
Figura 5 – Gráfico da função $\phi^s(T)$	54
Figura 6 – Elipsoide \hat{E}	58
Figura 7 – Elipsoide $S_{\mathbf{u}}(B_{\rho})$	87

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	GEOMETRIA FRACTAL	10
1.2	FRACTAIS AUTO-AFINS	12
2	DINÂMICA SIMBÓLICA E PRESSÃO TOPOLÓGICA	14
2.1	NOÇÕES INICIAIS	14
2.2	PRESSÃO TOPOLÓGICA	16
2.3	DINÂMICA SIMBÓLICA	20
3	MEDIDA E DIMENSÃO DE HAUSDORFF	28
3.1	MEDIDA EXTERIOR	28
3.2	MEDIDA E DIMENSÃO DE HAUSDORFF	32
3.3	REPULSORES CONFORMES	34
3.4	FÓRMULA DE BOWEN-MANNING	36
3.4.1	Distorção e Conformidade	36
3.4.2	Existência e Unicidade de d_0	40
3.4.3	Cota Superior	46
3.4.4	Cota Inferior	48
4	DIMENSÃO DE HAUSDORFF DE FRACTAIS AUTO-AFINS	51
4.1	INTRODUÇÃO AO PROBLEMA	51
4.2	FUNÇÃO VALOR SINGULAR	52
4.3	PRODUTOS DE MATRIZES INDEXADAS POR SEQUÊNCIAS	60
4.4	MEDIDAS EM J_∞	74
4.5	CALCULANDO A DIMENSÃO	85
4.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	95
	REFERÊNCIAS	97
	APÊNDICE A – VALORES SINGULARES E MEDIDA	98
	APÊNDICE B – JACOBIANOS E O LEMA 4.2.1	105
	APÊNDICE C – UM RESULTADO TÉCNICO SOBRE A MEDIDA	
	\mathcal{M}^s EM J_∞	116

1 INTRODUÇÃO

Fractal geometry will make you see everything differently. There is danger in reading further. You risk the loss of your childhood vision of clouds, forests, galaxies, leaves, feathers, flowers, rocks, mountains, torrents of water, carpets, bricks, and much else besides. Never again will your interpretation of these things be quite the same. (BARNSELY, 1993, pg.1)

É com a frase acima que Michael Barnsley inicia a introdução do seu livro sobre fractais, sua geometria e a matemática envolvida nesse contexto. De fato, o estudo dos fractais traz uma série de novos e intrigantes aprendizados e formas de ver o mundo. Neste trabalho desenvolveremos uma parte da matemática necessária para entender e explorar a geometria fractal (especificamente com relação aos fractais auto-afins e auto-semelhantes). Nos dedicamos a calcular a *dimensão* de tais fractais, pois este fator desempenha um papel chave no estudo de suas propriedades geométricas.

1.1 GEOMETRIA FRACTAL

A Geometria é pensada e estudada pela humanidade desde tempos antigos, mesmo antes da grande obra de Euclides, Os Elementos, ser escrita, no século 3 a.C.. Esta obra estabeleceu a base para o desenvolvimento da geometria clássica ocidental. O aprofundamento dos estudos em geometria foi acompanhado pelo surgimento de desafios, que se mostraram incompatíveis com os métodos euclidianos, revelando a necessidade de novos métodos, definições e resultados inéditos para estudá-los. A geometria clássica se firmou ao encarar esses novos obstáculos e desenvolver formas de superá-los, sem receio de buscar auxílio em outras áreas da matemática, principalmente a Análise.

Apesar dos diferentes ramos da geometria clássica abordarem seu objeto de estudo por perspectivas próprias, um elemento se manteve comum: a preferência por curvas e superfícies suaves, formas regulares e conjuntos bem "comportados". As funções e conjuntos considerados "patológicos" foram ignorados pela grande maioria dos matemáticos.

No último século essa postura mudou. Porém, foi preciso percorrer um longo caminho para enfim formalizar a construção dos fractais e a descoberta de suas propriedades. Esta trajetória iniciou-se no século XVII com a noção de recursividade, passou pelas descobertas de Georg Cantor sobre teoria dos conjuntos e pelas funções patológicas estudadas

por Karl Weierstrass (ambas no século XIX); avançou pelos conjuntos "monstruosos" estudados por Gaston Julia e Pierre Fatou; e pelo desenvolvimento da teoria envolvendo a medida e a dimensão de Hausdorff, de Felix Hausdorff (estas últimas no séc. XIX e XX). Ainda houveram estudos decisivos feitos por Patrick Moran e Abram Besicovitch (séc. XX).

Só em 1977 Benoît Mandelbrot deu o nome "fractal" (do latim, *fractus*, que significa: *fração, quebrado*) às estruturas rugosas e intrincadas que ganhavam cada vez mais notoriedade na matemática. A geometria clássica não abarcava o necessário para descrever estruturas com infinitos detalhes, como são os fractais. É dessa necessidade que surge a Geometria Fractal. Em seu livro "Fractals: Form, Chance and Dimension", deste mesmo ano, Mandelbrot se dedicou a explorar as possibilidades desse novo campo.

Mandelbrot definiu fractal como sendo todo conjunto cuja dimensão de Hausdorff é estritamente maior que sua dimensão topológica. A dimensão topológica de um conjunto é sempre um número inteiro: é 0, se o conjunto é totalmente desconexo; 1, se cada ponto possui vizinhanças arbitrariamente pequenas com fronteiras de dimensão 0, e assim por diante. Já a dimensão fractal pode ser fracionária. Na verdade, podemos encontrar objetos cuja dimensão é qualquer número real positivo.

Porém, a definição dada por Mandelbrot não é satisfatória, uma vez que exclui uma série de conjuntos que claramente devem ser considerados fractais. Outras definições foram propostas com o passar dos anos, mas todas acabam deixando de fora conjuntos importantes.

Definir fractal não é uma tarefa fácil e até hoje não conseguimos uma definição ampla e formal o bastante. Entretanto, podemos identificar um fractal a partir da sua estrutura (se possui detalhes em qualquer escala, por menor que seja), se é auto-semelhante em algum nível (possivelmente de forma aproximada ou estatística), se o conjunto é definido de maneira recursiva, entre outras propriedades.

A cerca desde assunto Kenneth Falconer afirma que:

My personal feeling is that the definition of a 'fractal' should be regarded in the same way as a biologist regards the definition of 'life'. There is no hard and fast definition, but just a list of properties characteristic of a living thing, such as the ability to reproduce or to move or to exist to some extent independently of the environment. Most living things have most of the characteristics on the list, though there are living objects that are exceptions to each of them. (FALCONER, 2003, pg.x)

Com base neste raciocínio do Falconer, consideraremos como sendo "fractal" os con-

juntos que apresentam todas, ou boa parte, das propriedades mencionadas anteriormente, tais quais: algum grau de auto-semelhança, construção recursiva, possui dimensão de Hausdorff maior que sua dimensão topológica, entre outras.

1.2 FRACTAIS AUTO-AFINS

Este trabalho é dedicado a um tipo específico de fractal, denominado *auto-afim*, obtido através de um sistema com k funções afins contrativas $S_1 = T_1 + a_1, \dots, S_k = T_k + a_k$, onde T_ℓ é transformação linear pertencente a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e a_ℓ é um vetor do \mathbb{R}^n . Existe um único conjunto compacto não-vazio $F \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$F = \bigcup_{\ell=1}^k S_\ell(F).$$

Este conjunto é denominado *conjunto invariante* do sistema $\{S_1, \dots, S_k\}$. De maneira geral, F é um fractal. Nosso objetivo é calcular a *dimensão de Hausdorff* deste tipo de fractal. Para isso, desenvolvemos algumas ferramentas de álgebra linear e medida, em especial medida de Hausdorff.

Existe um tipo particular de fractal auto-afim que são os auto-semelhantes (quando as T_i 's são semelhanças de razão λ_i , $|\lambda_i| < 1$). A teoria desenvolvida no Capítulo 4 pode ser aplicada ao caso auto-semelhante sem alardes. Todavia, podemos utilizar um outro caminho para calcular a dimensão de F , quando este é auto-semelhante e satisfaz algumas hipóteses adicionais: através da Fórmula de Bowen-Manning, que utiliza o conceito de *pressão topológica* para encontrar um valor exato para a dimensão desse tipo de fractal. É válido enfatizar que a Fórmula de Bowen-Manning funciona para um grupo muito seletivo de conjuntos, por isso, torna-se mais vantajoso o estudo dos casos mais gerais.

No Capítulo 2 introduzimos a noção de pressão topológica, discutimos uma dinâmica simbólica denominada *deslocamento* e damos a definição para o repulsor Λ de um sistema composto por uma função afim f , definida na união disjunta de intervalos fechados em \mathbb{R} .

No Capítulo 3 iniciamos o estudo de medidas. Primeiramente, definimos e exploramos a noção de medida exterior. Logo em seguida, definimos a medida de Hausdorff e, conseqüentemente, a dimensão de Hausdorff. Depois, iniciamos o tópico envolvendo repulsores conformes, de forma análoga ao que foi discutido no final do Capítulo 2. Além disso, nos concentramos em demonstrar a Fórmula de Bowen-Manning, a qual é uma maneira eficiente de encontrar a dimensão de Hausdorff de repulsores conformes.

O Capítulo 4 é a parte central desta dissertação. É nele que apresentamos os fractais auto-afins, com os quais iremos trabalhar. A fim de calcular a dimensão destes conjuntos, desenvolvemos ferramentas baseadas nas propriedades dos *valores singulares* e da *função valor singular*. O resultado obtido é bastante forte e geral, sendo válido para Lebesgue-quase todo ponto do \mathbb{R}^{nk} e garantimos uma das desigualdades (a cota superior) para Lebesgue-todo ponto do \mathbb{R}^{nk} .

Neste trabalho o Apêndice desempenha um papel igualmente importante, pois nele desenvolvemos a teoria necessária para responder questões que nos aparecem no decorrer dos capítulos, mas que não caberia serem respondidas no corpo do trabalho, sob o risco de tirar o foco da discussão central.

Na maior parte do texto, utilizamos as notações encontradas no artigo do Falconer (FALCONER, 1988) e algumas foram importadas do livro do Viana-Oliveira (VIANA; OLIVEIRA, 2019), com ajustes feitos pensando na clareza da escrita e priorizando o uso de uma mesma notação em todo o trabalho.

2 DINÂMICA SIMBÓLICA E PRESSÃO TOPOLÓGICA

Neste capítulo introduziremos algumas definições e resultados básicos que serão necessários ao longo deste e dos próximos capítulos, o que nos dá a chance de entendermos o contexto geral no qual esta teoria será desenvolvida e de nos familiarizarmos com a notação utilizada.

2.1 NOÇÕES INICIAIS

Uma *métrica* em um conjunto M é uma função

$$\begin{aligned} d : M \times M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

onde $d(x, y)$ é dita a *distância* entre os pontos x e y e satisfazendo as seguintes propriedades:

1. (Não-negativa) $d(x, y) \geq 0$ (com $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$);
2. (Simétrica) $d(x, y) = d(y, x)$;
3. (Desigualdade triangular) Dado $z \in M$ qualquer: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Um *espaço métrico* é representado pelo par (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica em M . Uma *cobertura* α de M é uma família $\alpha = (A_\lambda)_{\lambda \in I}$ de subconjuntos de M que, quando unidos, cobre o conjunto M inteiro, i.e., $M \subset \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$. Quando cada $A_\lambda \in \alpha$ é um conjunto aberto, chamamos α de *cobertura aberta*.

O *diâmetro* da cobertura α é definido por

$$\text{diam } \alpha = \sup_{A \in \alpha} (\text{diam } A) \tag{2.1}$$

onde $\text{diam } A = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$.

Caso exista um subconjunto $\tilde{\alpha}$ de α que continue cobrindo M (isto é, $\tilde{\alpha} = (A_\lambda)_{\lambda \in \tilde{I}}$, onde $\tilde{I} \subset I$ e, além disso, $M \subset \bigcup_{\lambda \in \tilde{I}} A_\lambda$) dizemos que $\tilde{\alpha}$ é *subcobertura* de α . Se o conjunto de índices \tilde{I} for finito, então $\tilde{\alpha}$ diz-se uma *subcobertura finita* de α . Quando toda cobertura aberta de M possui uma subcobertura finita, M é denominado espaço métrico *compacto*.

Agora, sejam α e β coberturas de M . Dizemos que α é *menos fina* que β (e escrevemos $\alpha \prec \beta$) se todo elemento de β está contido em um elemento de α . E denominamos por $\alpha \vee \beta$ a sua *soma*, que é a cobertura cujos elementos são dados pelas interseções $A \cap B$ onde $A \in \alpha$ e $B \in \beta$. Podemos estender a definição de soma para n coberturas de M : sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ coberturas de M , temos que $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_n$ é a cobertura cujos elementos são dados por $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ onde $A_i \in \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$. É fato que $\alpha_i \prec (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_n)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Afirmção 2.1.1. *Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação contínua. Se α é cobertura aberta de M , então $f^{-i}(\alpha) = \{f^{-i}(A); A \in \alpha\}$ também o é.*

Prova. De fato, dado $x \in M$, temos que $f^i(x) \in M$. Como α é cobertura de M , $\exists A \in \alpha$ tal que $f^i(x) \in A$. Então, por definição de imagem inversa, $x \in f^{-i}(A)$. O último detalhe é perceber que $f^{-i}(\alpha)$ é cobertura *aberta*, pois f^i é uma função contínua e cada elemento da cobertura $f^{-i}(\alpha)$ é a imagem inversa (por f^i) de conjuntos abertos, portanto são também abertos. ■

Agora podemos definir a cobertura α^n . Dada uma transformação contínua $f : M \rightarrow M$ definimos:

$$\alpha^n = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha).$$

Afirmção 2.1.2. *α^n é cobertura aberta de M .*

Prova. De fato, temos que $\alpha, f^{-1}(\alpha), \dots, f^{-n+1}(\alpha)$ são todas coberturas de M , então, dado $x \in M$, $\exists A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ (com $A_0 \in \alpha, A_1 \in f^{-1}(\alpha), \dots, A_{n-1} \in f^{-n+1}(\alpha)$) tais que $x \in A_i, \forall 0 \leq i \leq n-1$. Portanto, $x \in A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$, que é um elemento da cobertura α^n . Além disso, sabemos que a interseção finita de conjuntos abertos é aberta, portanto cada elemento da cobertura α^n é um aberto em M . ■

Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências em \mathbb{R} . Dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é *subaditiva* se $x_{m+n} \leq x_m + x_n, \forall m, n \in \mathbb{N}$. E denominamos $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência *submultiplicativa* se $y_{m+n} \leq y_m \cdot y_n, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.1.1. *Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é uma sequência subaditiva, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} x_n = \inf_n \frac{1}{n} x_n \in [-\infty, \infty).$$

Demonstração. Seja $L = \inf_n \frac{x_n}{n}$. Dado ϵ , fixe k tal que

$$L \leq \frac{x_k}{k} < L + \epsilon.$$

Pela subaditividade é válido que $x_{kq} \leq q x_k$, logo $\frac{x_{kq}}{kq} \leq \frac{q x_k}{kq} \leq L + \epsilon$. Tome $\alpha = \max\{a_1, \dots, a_k\}$. Para $n > k$, escrevemos $n = qk + r$, onde $1 \leq r < k$ e $q \geq 1$. Logo

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{a_{qk} + a_r}{n} \leq \frac{a_{qk}}{qk} + \frac{\alpha}{n} < L + \epsilon + \frac{\alpha}{n}.$$

Portanto $L \leq \frac{a_n}{n} < L + \epsilon$ para todo n suficientemente grande, e isso garante que $\lim_n \frac{a_n}{n} = L = \inf_n \frac{a_n}{n}$.

□

2.2 PRESSÃO TOPOLÓGICA

A seguir, apresentaremos o conceito de pressão e entropia, ambas palavras empregadas originalmente na física (na termodinâmica, mecânica estatística, etc) e que foram introduzidas na matemática por pesquisadores da área de Teoria Ergódica. Posteriormente, foi proposta uma noção de entropia mais ampla, conhecida como entropia topológica: essa definição não depende de medidas invariantes e é possível calcular a entropia de qualquer transformação contínua em um espaço topológico compacto. A entropia topológica é a taxa de crescimento exponencial do número de órbitas que são distinguíveis dentro de um certo grau de precisão, arbitrariamente pequeno. Já a pressão topológica pode ser encarada como uma versão ponderada da entropia, onde os pesos são dados de acordo com a escolha do potencial empregado. Optamos por desenvolver o conceito de pressão e definir a entropia como sendo um caso particular desta, embora seja possível defini-la de forma completamente independente.

Seja $f : M \rightarrow M$ contínua em um espaço métrico compacto M . Um *potencial* em M é qualquer função contínua $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos $\varphi_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i$, note que se trata de uma função contínua. Agora, dado um subconjunto \tilde{M} qualquer de M , definimos

$$\varphi_n(\tilde{M}) = \sup \{\varphi_n(x); x \in \tilde{M}\}. \quad (2.2)$$

E, dada uma cobertura aberta α de M , temos:

$$P_n(f, \varphi, \alpha) = \inf \left\{ \sum_{A \in \tilde{\alpha}} e^{\varphi_n(A)} : \tilde{\alpha} \text{ é subcobertura finita de } \alpha \right\}. \quad (2.3)$$

Afirmção 2.2.1. *A sequência $P_n(f, \varphi, \alpha)$ é submultiplicativa.*

Prova. Note que

$$\phi_{n+m}(x) = \sum_{i=0}^{n+m-1} \phi(f^i(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i(x)) + \sum_{i=0}^{m-1} \phi(f^i(f^n(x)))$$

logo, $\phi_{n+m} = \phi_n + \phi_m \circ f^n$.

Sejam $\beta \subset \alpha^n$ e $\gamma \subset \alpha^m$ subcoberturas finitas tais que

$$P_n(f, \phi, \alpha) = \sum_{U \in \beta} e^{\phi_n(U)} \quad \text{e} \quad P_m(f, \phi, \alpha) = \sum_{V \in \gamma} e^{\phi_m(V)}.$$

Seja $\beta \vee f^{-n}(\gamma) = \{U \cap f^{-n}(V), U \in \beta \text{ e } V \in \gamma\}$ uma subcobertura de α^{n+m} . Daí, temos que:

$$\begin{aligned} P_{n+m}(f, \phi, \alpha) &\leq \sum_{A \in \beta \vee f^{-n}(\gamma)} e^{\phi_{n+m}(A)} \leq \sum_{\substack{A = U \cap f^{-n}(V) \\ A \in \beta \vee f^{-n}(\gamma)}} e^{\phi_n(A)} e^{\phi_m(f^n(A))} \\ &\leq \sum_{U \in \beta} e^{\phi_n(U)} \sum_{V \in \gamma} e^{\phi_m(V)} = P_n(f, \phi, \alpha) P_m(f, \phi, \alpha). \end{aligned}$$

■

Dessa forma, a sequência $\log P_n(f, \varphi, \alpha)$ é subaditiva. Portanto, pelo Lema 2.1.1, o limite

$$P(f, \varphi, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n(f, \varphi, \alpha) \quad (2.4)$$

existe. Provaremos a seguir que o limite de $P(f, \varphi, \alpha)$ quando o diam α tende a zero é o mesmo independente da sequência de coberturas que se escolha para efetuar este limite. Isto nos permite definir o $P(f, \varphi)$ como $\lim_{\text{diam } \alpha \rightarrow 0} P(f, \varphi, \alpha)$ e a este valor damos o nome de *pressão* (ou *pressão topológica*) do potencial φ em relação a f .

Lema 2.2.1. *O limite*

$$\lim_{\text{diam } \alpha \rightarrow 0} P(f, \varphi, \alpha)$$

existe, i.e.,

$$\lim_i P(f, \varphi, \alpha_i) = P(f, \varphi) \in [0, \infty]$$

para toda sequência $(\alpha_i)_i$ de coberturas abertas tais que $\text{diam } \alpha \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$.

Demonstração. Dadas duas sequências de coberturas $(\alpha_i)_i$ e $(\beta_i)_i$ com $\text{diam } \alpha_i$ e $\text{diam } \beta_i$ tendendo a 0, vamos verificar que os limites de $P(f, \phi, \alpha_i)$ e de $P(f, \phi, \beta_i)$ existem e são iguais.

Dado $\epsilon > 0$, pela continuidade uniforme de ϕ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica $|\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon$. Temos que $\text{diam } \alpha_i < \delta$ para todo i suficientemente grande e que para cada i existe um número de Lebesgue ρ_i para a cobertura α_i . Fixamos i suficientemente grande e $\rho = \rho_i$. Também temos que $\text{diam } \beta_i < \rho$ para todo i suficientemente grande.

Dessa forma, todo $B \in \beta_j^n$ está contido em algum $A \in \alpha_i^n$ e para todo $x \in A$ existe algum $y \in B$ que satisfaz $d(f^k(x), f^k(y)) < \delta$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$, logo

$$\phi_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(x)) - \phi(f^k(y)) \right) + \phi_n(y) \leq n\epsilon + \phi_n(y).$$

Daí segue que $\phi_n(A) \leq n\epsilon + \phi_n(B)$, o que implica que $P_n(f, \phi, \alpha_i) \leq e^{n\epsilon} P_n(f, \phi, \beta_j)$ e, portanto, $P(f, \phi, \alpha_i) \leq \epsilon + P(f, \phi, \beta_j)$.

Quando $j \rightarrow +\infty$, $i \rightarrow +\infty$ e $\epsilon \rightarrow 0$, temos que

$$\limsup_i P(f, \phi, \alpha_i) \leq \liminf_j P(f, \phi, \beta_j).$$

Analogamente verificamos que $\limsup_j P(f, \phi, \beta_j) \leq \liminf_i P(f, \phi, \alpha_i)$, o que demonstra o que queríamos. \square

Uma vez estabelecido o conceito de pressão topológica, podemos definir a entropia topológica simplesmente por

$$h(f) = P(f, 0), \tag{2.5}$$

ou seja, a entropia de uma transformação contínua f é a pressão do potencial nulo relativamente a f . É válido pontuar que podemos definir entropia por meio de coberturas abertas, já que estamos em um espaço métrico compacto, mas esta construção não será abordada neste trabalho.

Sejam M, N espaços topológicos compactos e $f : M \rightarrow M, g : N \rightarrow N$ transformações contínuas. Se existe uma aplicação contínua sobrejetiva $\Psi : M \rightarrow N$ tal que $\Psi \circ f =$

$g \circ \Psi$, então g é dito um *fator topológico* de f . Caso exista homeomorfismo Ψ satisfazendo $\Psi \circ f = g \circ \Psi$, dizemos que f e g são transformações *topologicamente conjugadas* e Ψ é denominado *conjugação topológica* entre f e g .

A entropia é um invariante por conjugação topológica. Note que este fato segue da proposição abaixo tomando o potencial nulo.

Proposição 2.2.1. *Sejam M, N espaços métricos compactos e $f : M \rightarrow M$, $g : N \rightarrow N$ transformações contínuas. Se existe $\Psi : M \rightarrow N$ homeomorfismo tal que $\Psi \circ f = g \circ \Psi$, então $P(g, \varphi) = P(f, \varphi \circ \Psi)$ para todo potencial φ em N .*

Demonstração. Da relação $\Psi \circ f = g \circ \Psi$ segue que $\Psi(f^{-j}(A)) = g^{-j}(\Psi(A))$, logo

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha^n) &= \{\Psi(A_1 \cap f^{-1}(\Psi(A_2)) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(A_n)); A_1, \dots, A_n \in \alpha\} \\ &= \{\Psi(A_1) \cap g^{-1}(\Psi(A_2)) \cap \dots \cap g^{-(n-1)}(\Psi(A_n)); A_1, \dots, A_n \in \alpha\} \\ &= \Psi(\alpha)^n. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} P_n(f, \phi \circ \Psi, \alpha) &= \inf \left\{ \sum_{U \in \gamma} e^{\phi_n(\Psi(U))}, \gamma \text{ subcobertura finita de } \alpha^n \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{\Psi(U) \in \Psi(\gamma)} e^{\phi_n(\Psi(U))}, \Psi(\gamma) \text{ subcobertura finita de } \Psi(\alpha^n) \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{V \in \tilde{\gamma}} e^{\phi_n(V)}, \tilde{\gamma} \text{ subcobertura finita de } \Psi(\alpha)^n \right\} \\ &= P_n(g, \phi, \Psi(\alpha)) \end{aligned}$$

Considerando uma sequência de coberturas α com diâmetro convergindo para 0, pela continuidade uniforme de Ψ o diâmetro de $\Psi(\alpha)$ também converge a 0, logo pelo Lema 2.2.1 $P(f, \phi \circ \Psi) = P(g, \phi)$.

□

Algumas das propriedades da pressão topológica são as seguintes:

Dada qualquer constante $c \in \mathbb{R}$, temos $P_n(f, \phi + c, \alpha) = e^{cn} P_n(f, \phi, \alpha)$, $\forall n \geq 1$.

Logo,

$$P(f, \phi + c, \alpha) = P(f, \phi, \alpha) + c, \tag{2.6}$$

para toda cobertura aberta α .

Dados dois potenciais ψ e ϕ tais que $\phi \leq \psi$, então temos $P_n(f, \phi, \alpha) \leq P_n(f, \psi, \alpha)$, para todo $n \geq 1$. Assim,

$$\phi \leq \psi \implies P(f, \phi, \alpha) \leq P(f, \psi, \alpha). \quad (2.7)$$

Para calcularmos $P(f, \varphi)$ é suficiente considerarmos uma cobertura aberta α tal que $\text{diam } \alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e calcularmos $P(f, \varphi, \alpha)$.

Proposição 2.2.2. *Seja M espaço métrico compacto e $f : M \rightarrow M$ transformação contínua. Se α é cobertura aberta de M tal que $\text{diam } \alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, então $P(f, \varphi) = P(f, \varphi, \alpha)$ para todo potencial φ em M .*

Demonstração. Vamos demonstrar que $P(f, \phi, \alpha) = P(f, \phi, \alpha^k)$ para todo inteiro $k \geq 1$. Esse fato, junto com o Lema 2.2.1 e com o diâmetro convergir a 0, implica que $P(f, \phi) = \lim_k P(f, \phi, \alpha^k) = P(f, \phi, \alpha)$.

Seja α uma cobertura aberta de M . Note que

$$(\alpha^k)^n = \bigcup_{j=0}^{n-1} f^{-j} \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} f^{-i} \alpha \right) = \bigcup_{i=0}^{n-1} \bigcup_{j=0}^{k-1} f^{-(i+j)} \alpha = \bigcup_{l=0}^{n+k-1} f^{-l} \alpha = \alpha^{n+k}.$$

Se $L = \sup |\phi|$, então $-kL + \phi_n(x) \leq \phi_{n+k}(x) \leq \phi_n(x) + kL$ para todo $x \in M$. Daí segue que

$$e^{-kL} P_n(f, \phi, \alpha^k) \leq P_{n+k}(f, \phi, \alpha) \leq e^{kL} P_n(f, \phi, \alpha^k).$$

Portanto $P(f, \phi, \alpha^k) = P(f, \phi, \alpha)$. □

Proposição 2.2.3. *A função pressão é Lipschitz, com constante de Lipschitz 1: $|P(f, \phi) - P(f, \psi)| \leq |\phi - \psi|$ para quaisquer potenciais ϕ, ψ .*

Demonstração. Temos que $\phi \leq \psi + |\phi - \psi|$. Logo, pelas propriedades (2.6) e (2.7), concluímos que

$$P(f, \phi) \leq P(f, \psi) + |\phi - \psi|.$$

Fazendo a mesma conta com ψ no lugar de ϕ e vice-versa, obtemos a outra desigualdade. □

2.3 DINÂMICA SIMBÓLICA

Dado $k \in \mathbb{Z}$, $k > 1$, considere o conjunto $\Sigma_k^+ = \{1, 2, \dots, k\}^{\mathbb{N}}$ das sequências $x = (i_1(x), i_2(x), i_3(x), \dots)$, onde $i_j(x) \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Definimos $\sigma : \Sigma_k^+ \rightarrow \Sigma_k^+$ como $\sigma(x) = (i_2(x), i_3(x), \dots)$, função que chamaremos de *mapa deslocamento*. Note que σ é não inversível, pois não é injetiva: $\sigma^{-1}((i_2(x), i_3(x), \dots)) = \{(1, i_2(x), i_3(x), \dots), (2, i_2(x), i_3(x), \dots), \dots, (k, i_2(x), i_3(x), \dots)\}, \forall x \in \Sigma_k^+$.

Definimos a seguinte distância $d : \Sigma_k^+ \times \Sigma_k^+ \rightarrow \mathbb{R}$ em Σ_k^+ : dado $\lambda > 1$, para cada $x, y \in \Sigma_k^+$, temos

$$d(x, y) = \begin{cases} \lambda^{-\theta} & , \text{ se } x \neq y \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}, \quad (2.8)$$

onde $\theta = \theta(x, y) \in \mathbb{N}$ é o menor inteiro tal que $i_\theta(x) \neq i_\theta(y)$.

Vamos mostrar que d de fato é uma distância em Σ_k^+ e que Σ_k^+ é um espaço métrico compacto. Além disso, provaremos que o mapa deslocamento σ é uma transformação contínua.

Afirmção 2.3.1. d é uma distância em Σ_k^+ .

Prova. Dados x, y, z quaisquer em Σ_k^+ , temos que:

- Se $x \neq y$, $d(x, y) = \lambda^{-\theta}$, onde $\lambda > 1$ e $\theta \geq 1$, temos que $d(x, y) > 0$. Por (2.8):
 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

- Trivialmente, temos $d(x, y) = d(y, x)$.

- Sejam: $d(x, y) = \lambda^{-\theta_1}$, $d(x, z) = \lambda^{-\theta_2}$ e $d(z, y) = \lambda^{-\theta_3}$, onde θ_1, θ_2 e θ_3 são os menores números naturais tais que: $i_{\theta_1}(x) \neq i_{\theta_1}(y)$, $i_{\theta_2}(x) \neq i_{\theta_2}(z)$ e $i_{\theta_3}(z) \neq i_{\theta_3}(y)$.

Perceba que se $\theta_2 > \theta_1$ e $\theta_3 > \theta_1$, então $i_{\theta_1}(x) = i_{\theta_1}(z)$ e $i_{\theta_1}(z) = i_{\theta_1}(y)$, mas isto implica que $i_{\theta_1}(x) = i_{\theta_1}(y)$, o que contradiz a definição de θ_1 . Portanto, temos obrigatoriamente que: $\theta_2 \leq \theta_1$ ou $\theta_3 \leq \theta_1$. Logo, $\lambda^{-\theta_1} \leq \lambda^{-\theta_2}$ ou $\lambda^{-\theta_1} \leq \lambda^{-\theta_3}$.

Concluimos que:

$$d(x, y) = \lambda^{-\theta_1} \leq \lambda^{-\theta_2} + \lambda^{-\theta_3} = d(x, z) + d(z, y).$$

■

Afirmção 2.3.2. (Σ_k^+, d) é um espaço métrico compacto.

Prova. Vamos verificar que toda sequência possui uma subsequência convergente. Seja $x_n = (i_1(x_n), i_2(x_n), \dots)$ uma sequência qualquer em Σ_k^+ .

Fazemos um argumento diagonal: como $i_1(x_n) \in \{1, \dots, k\}$, existe $i_1 \in \{1, \dots, k\}$ tal que $i_1(x_n) = i_1$ para infinitos n 's, os quais formam uma subsequência $(n_i^1)_i$. Da mesma maneira, existe $i_2 \in \{1, \dots, k\}$ tal que $i_2(x_{n_i^1}) = i_2$ para infinitos i 's, os quais formam uma subsequência $(n_i^2)_i$ de $(n_i^1)_i$. Repetindo esse procedimento, para todo j existe i_j e $(n_i^j)_i$ subsequencia de $(n^{-(j-1)})_i$ tal que $i_j(x_{n_i^j}) = i_j$.

Considerando $x = (i_1, i_2, \dots)$ e a subsequencia $(n_j^j)_j$, vamos provar que $x = \lim_j x_{n_j^j}$. Dado $\epsilon > 0$ existe um inteiro θ tal que $\lambda^{-\theta} < \epsilon$. Para j suficientemente grande, n_j^j pertence às sequências $(n_i^1)_i, (n_i^2)_i, \dots, (n_i^\theta)_i$, logo para tais j 's, $i_q(x) = i(x_{n_j^j})$ para $q = 1, 2, \dots, \theta$, o que implica que as primeiras θ coordenadas de x e de $x_{n_j^j}$ são iguais. Portanto $d(x, x_{n_j^j}) \leq \lambda^{-\theta} < \epsilon$.

■

Afirmção 2.3.3. $\sigma : \Sigma_k^+ \rightarrow \Sigma_k^+$ é uma transformação contínua.

Prova. Dados $x, y \in \Sigma_k^+$, temos que $d(x, y) = \lambda^{-\theta}$, onde θ é o menor número natural tal que $i_\theta(x) \neq i_\theta(y)$. Ao aplicarmos o mapa deslocamento em x e y , excluimos o primeiro termo das sequências que compõem esses elementos. Assim, $d(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \lambda^{-(\theta-1)} = \lambda d(x, y)$. Isto prova que σ é Lipschitz com constante λ e, portanto, contínua.

■

Chamamos de *cilindro de tamanho n* o conjunto

$$[j_1, j_2, \dots, j_n] = \{x = (i_1(x), i_2(x), i_3(x), \dots) \in \sum_k^+ \text{ tal que } i_\theta(x) = j_\theta, 1 \leq \theta \leq n\}, \quad (2.9)$$

com $j_\theta \in \{1, 2, \dots, k\}, 1 \leq \theta \leq n$.

Consideremos $\alpha = \{[1], [2], \dots, [k]\}$ o conjunto dos cilindros de tamanho um. Note que:

- α é cobertura aberta de Σ_k^+ .

Dado $x \in \Sigma_k^+$ temos que $i_1(x) \in \{1, 2, \dots, k\}$, isto implica que $x \in [i_1(x)]$, que é um dos cilindros pertencentes à α . Para ver que α é cobertura aberta basta notar que o cilindro $[j_1]$ (com $j_1 \in \{1, 2, \dots, k\}$) é a bola aberta de centro $x = (j_1, j_1, j_1, \dots)$ e raio $r = \lambda^{-1}$. Note que o centro não é necessariamente esse, podemos escolher qualquer ponto x em Σ_k^+ com $i_1(x) = j_1$ para ser o centro dessa bola).

- $\alpha^2 = \alpha \vee \sigma^{-1}(\alpha)$ é o conjunto dos cilindros de tamanho dois.

Perceba que

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}([j]) &= \{i_2(x) = j\} \\ \text{e } [i, j] &= [i] \cap \sigma^{-1}([j])\end{aligned}$$

De modo mais geral, temos que $\alpha^n = \{[j_1, j_2, \dots, j_n], \text{ onde } j_1, j_2, \dots, j_n \in \{1, \dots, k\}\}$, ou seja, é o conjunto dos cilindros de tamanho n . Note que α^n é uma cobertura minimal para Σ_k^+ , i.e., se retirarmos um elemento qualquer da cobertura α^n o conjunto resultante não é mais cobertura de Σ_k^+ . Dito ainda de outra maneira: α^n não admite subcoberturas.

Vamos agora calcular a *entropia topológica* de σ . Pela equação (2.5), temos que:

$$h(\sigma) = P(\sigma, 0).$$

Logo, utilizando a cobertura α dada acima:

$$\begin{aligned}P_n(\sigma, 0, \alpha) &= \inf \left\{ \sum_{A \in \tilde{\alpha}} e^0 : \tilde{\alpha} \text{ é subcobertura finita de } \alpha^n \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{A \in \tilde{\alpha}} 1 : \tilde{\alpha} \text{ é subcobertura finita de } \alpha^n \right\} \\ &= \inf \{ |\tilde{\alpha}| : \tilde{\alpha} \text{ é subcobertura finita de } \alpha^n \} \\ &= k^n,\end{aligned}$$

onde $|\tilde{\alpha}|$ é a quantidade de conjuntos que compõem a subcobertura $\tilde{\alpha}$. Como α^n é cobertura minimal, temos $|\alpha^n| = k^n$ (exatamente a quantidade de cilindros de tamanho n). Daí, concluímos que:

$$\begin{aligned}P(\sigma, 0, \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log k^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} n \log k \\ &= \log k,\end{aligned}$$

Por fim, note que:

$$\text{diam}[j_1, j_2, \dots, j_n] = \sup_{x, y \in [j_1, j_2, \dots, j_n]} d(x, y).$$

Como no cilindro acima todos os seus elementos possuem os primeiros n termos iguais, a maior distância que pode haver entre x e $y \in [j_1, j_2, \dots, j_n]$ é $\lambda^{-(n+1)}$. E isto vale para qualquer cilindro de tamanho n . Então, visto que

$$\text{diam } \alpha^n = \sup_{[j_1, j_2, \dots, j_n] \in \alpha^n} \text{diam } [j_1, j_2, \dots, j_n],$$

concluimos que $\text{diam } \alpha^n = \lambda^{-(n+1)}$ e, portanto, $\text{diam } \alpha^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Finalmente, pela Proposição 2.2.2,

$$P(\sigma, 0) = P(\sigma, 0, \alpha).$$

Logo,

$$h(\sigma) = P(\sigma, 0) = \log k.$$

De modo mais geral, podemos refazer o cálculo acima para calcularmos $P(\sigma, \alpha)$ no caso em que o potencial φ é constante em cada cilindro de tamanho 1, i.e., $\varphi((i_1, i_2, \dots)) = \eta_{i_1}$.

Considerando α como acima, temos:

$$\begin{aligned} P_n(\sigma, \varphi, \alpha) &= \inf \left\{ \sum_{A \in \tilde{\alpha}} e^{\varphi_n(A)} : \tilde{\alpha} \text{ subcobertura finita de } \alpha^n \right\} \\ &= \sum_{A \in \alpha^n} e^{\varphi_n(A)}. \end{aligned}$$

Como o valor de φ_n em um cilindro de tamanho n é $\varphi([j_1, j_2, \dots, j_n]) = \eta_{j_1} + \eta_{j_2} + \dots + \eta_{j_n}$, temos que:

$$P_n(\sigma, \varphi, \alpha) = \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \\ \in \{1, \dots, k\}}} e^{\eta_{j_1}} e^{\eta_{j_2}} \dots e^{\eta_{j_n}} = \left(\sum_{j \in \{1, \dots, k\}} e^{\eta_j} \right)^n,$$

logo: $P(\sigma, \varphi, \alpha) = \log \sum_{j=1}^k e^{\eta_j}$.

Como $\text{diam } \alpha^n \rightarrow 0$, segue que

$$P(\sigma, \varphi) = \log \sum_{j=1}^k e^{\eta_j}. \quad (2.10)$$

Note que o valor $\log k$ da entropia topológica corresponde justamente ao caso em que $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_k = 0$.

Na continuação vamos apresentar uma dinâmica na reta que servirá de exemplo para o cálculo de dimensão que será feito no próximo capítulo.

Exemplo 2.3.1. *Sejam L, L_1, L_2, \dots, L_k intervalos fechados em \mathbb{R} com $L_i \subset L, \forall i \in \{1, \dots, k\}$, $L_i \cap L_j = \emptyset$, para $j \neq i$, e $L_* = \bigcup_{1 \leq i \leq k} L_i$. Dada $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $f(L_i) = L$, suponhamos que $f_i = f|_{L_i} : L_i \rightarrow L$ seja uma função afim com derivada $\lambda_i > 1$.*

Definimos:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{x \in L_* ; f^n(x) \in L_*, \forall n \geq 0\} \\ &= \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(L_*). \end{aligned}$$

Chamamos Λ de repulsor.

Proposição 2.3.1. *Do contexto apresentado no Exemplo 2.3.1 acima, concluímos que:*

- a. Λ é um conjunto de Cantor.
- b. A função $\psi(x) = (i_0(x), i_1(x), \dots)$ definida por $f^n(x) \in L_{i_n(x)}$ é uma conjugação topológica entre $f|_\Lambda$ e o deslocamento de k símbolos.
- c. Se $|f'(x)| = \lambda_i > 1, \forall x \in L_i$, então $P(f|_\Lambda, s \log f'(\cdot)) = \log((\lambda_1)^s + \dots + (\lambda_k)^s), \forall s \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Denotando $K_n = \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(L_*)$, temos que

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} K_n.$$

Note que K_n é a união disjunta de k^n intervalos fechados, os quais denotamos por

$$K_{i_0 \dots i_{n-1}} := L_{i_0} \cap f^{-1}(L_{i_1}) \cap \dots \cap f^{-n-1}(L_{i_{n-1}}),$$

onde $i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in \{1, \dots, k\}$.

Como a restrição de f a cada $K_{i_0 \dots i_{j-1}}$ é uma bijeção afim entre $K_{i_0 \dots i_{j-1}}$ e $K_{i_0 \dots i_{j-2}}$, segue que a restrição de f^n ao intervalo $K_{i_0 \dots i_{n-1}}$ é uma bijeção afim entre $K_{i_0 \dots i_{n-1}}$ e L . Note ainda que $K_{i_0 \dots i_{n-1}}$ é a união disjunta $K_{i_0 \dots i_{n-1} 1} \cup \dots \cup K_{i_0 \dots i_{n-1} k}$. Então Λ é a interseção de uma sequência decrescente de intervalos fechados, portanto é um conjunto compacto.

Se $x, y \in K_{i_0 \dots i_{n-1}}$, então pelo Teorema do Valor Médio:

$$\begin{aligned} |f^n(x) - f^n(y)| &= \lambda_{i_{n-1}} |f^{n-1}(x) - f^{n-1}(y)| \\ &= \lambda_{i_{n-1}} \lambda_{i_{n-2}} |f^{n-2}(x) - f^{n-2}(y)| \\ &= \dots = \lambda_{i_{n-1}} \lambda_{i_{n-2}} \dots \lambda_{i_0} |x - y|. \end{aligned}$$

Em particular, temos que

$$|x - y| \leq \lambda^{-n} |f^n(x) - f^n(y)| \leq (\min\{\lambda_i\})^{-n} \text{diam } L, \quad \forall x, y \in K_{i_0 \dots i_{n-1}}. \quad (2.11)$$

A partir daí podemos provar o item a, pois $\text{diam } K_{i_0 \dots i_{n-1}}$ converge para 0 quando n tende a infinito. Isso garante que Λ é um conjunto compacto totalmente desconexo, portanto é um conjunto de Cantor.

Para o item *b*, verificamos que ψ é: injetiva, sobrejetiva, contínua, sua inversa é contínua e $\sigma \circ \psi = \psi \circ f|_{\Lambda}$.

Se $\psi(x) = \psi(y) = (i_0, i_1, \dots)$, então $x, y \in K_{i_0 \dots i_{n-1}}$ para todo n . Então mandamos n para infinito em (2.11) e provar que $|x - y| = 0$, logo $x = y$, isso implica que ψ é injetiva. Para provarmos que ψ é sobrejetiva, considere (i_0, i_1, \dots) e note que $\bigcap_{n=0}^{+\infty} K_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}$ é uma interseção de compactos encaixados, em particular é não-vazia. Tomando x um elemento de $\bigcap_{n=0}^{+\infty} K_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}$, tem-se $\psi(x) = (i_0, i_1, \dots)$.

Agora verificamos que ψ é contínua: dado $\epsilon > 0$, seja θ tal que $\lambda^{-\theta} < \epsilon$. Como os conjuntos $\{K_{i_0 \dots i_{\theta-1}}\}_{i_0, \dots, i_{\theta-1} \in \{1, \dots, k\}}$ são dois-a-dois disjuntos, existe $\delta > 0$ para o qual $|x - y| < \delta$ implica que x e y pertencem ao mesmo $K_{i_0 \dots i_{\theta-1}}$. Portanto, se $|x - y| < \delta$ então $\psi(x)$ e $\psi(y)$ tem as primeiras θ coordenadas iguais, logo $d(\psi(x), \psi(y)) \leq \lambda^{-\theta} < \epsilon$. Portanto f é contínua e, como seu domínio é compacto, f é uniformemente contínua. Isso implica que f^{-1} também é contínua, pois toda função invertível e contínua em um domínio compacto tem inversa contínua.

Por fim, se $\psi(x) = (i_0, i_1, \dots)$ então $f^j(x) \in L_{i_j}$, para todo j . Considerando σ o deslocamento de k símbolos, temos que $\sigma \circ \psi(x) = (i_1, i_2, \dots)$. Como $f^j(f(x)) \in L_{i_{j+1}}$, segue que $\psi(f(x)) = (i_1, i_2, \dots) = \sigma(\psi(x))$.

Para demonstrarmos o item *c*, vamos utilizar o cálculo já visto na equação (2.10) para a pressão de um potencial localmente constante. Se $\phi(x) = s \log f'(x)$, então $\phi(x) = s \log \lambda_i$ para todo $x \in L_i$, logo $\phi(h^{-1}(u)) = \lambda_i$ para todo $u \in [i]$.

Por (2.10), temos que $P(\sigma, \phi \circ h^{-1}) = \log \sum_{j=i}^l e^{s \log \lambda_j} = \log \sum_{j=i}^l \lambda_j^s$. Pela Proposição 2.2.1, concluímos que $P(f|_{\Lambda}, \phi) = \log \sum_{j=i}^l \lambda_j^s$. \square

Generalizando o resultado acima para dimensões superiores, temos o mesmo fato:

Proposição 2.3.2. *Considere D, D_1, D_2, \dots, D_k conjuntos convexos fechados com $D_i \subset D$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, e $D_i \cap D_j = \emptyset$, para $j \neq i$. Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $f(D_i) = D$ e $\|Df(x)v\| > 1$, $\forall x \in D_* = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$ e para todo $v \in \mathbb{R}^l$.*

Seja $\Lambda := \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(D_) = \{x \in D_* ; f^n(x) \in D_*, \forall n \geq 0\}$.*

Então, concluímos que:

- Λ é um conjunto de Cantor.
- A função $\psi(x) = (i_0(x), i_1(x), \dots)$ definida por $f^n(x) \in D_{i_n(x)}$ é uma conjugação topológica entre $f|_{\Lambda}$ e o deslocamento de k símbolos.

Demonstração. A prova é análoga a da proposição anterior.

□

3 MEDIDA E DIMENSÃO DE HAUSDORFF

3.1 MEDIDA EXTERIOR

Seja M espaço métrico. Uma *medida exterior* em M é uma função $\mu^* : \mathcal{O}(M) \rightarrow [0, \infty]$ que satisfaz:

- i. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- ii. $\mu^*(B_2) \leq \mu^*(B_1)$, se $B_2 \subset B_1$;
- iii. $\mu^*(\cup_{\ell=1}^{\infty} B_{\ell}) \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu^*(B_{\ell})$.

Para obtermos uma medida exterior podemos iniciar com uma família \mathcal{F} de subconjuntos "elementares" de M , onde uma noção de medida é definida, e se aproximar de subconjuntos arbitrários de M por meio da união enumerável de elementos da família \mathcal{F} . Perceba que o item iii. acima nos dá um norte: as aproximações de conjuntos arbitrários devem ser feitas "por fora" ou "por cima", ou seja, aproximaremos os conjuntos por meio de coberturas.

Proposição 3.1.1. *Sejam $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(M)$ e $\gamma : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ tais que $\emptyset \in \mathcal{F}$, $M \in \mathcal{F}$ e $\gamma(\emptyset) = 0$. Para $B \subset M$ qualquer, definimos:*

$$\mu^*(B) = \inf \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} \gamma(E_{\ell}) : E_{\ell} \in \mathcal{F} \text{ e } B \subset \bigcup_{\ell=1}^{\infty} E_{\ell} \right\}.$$

Daí, μ^ é medida exterior.*

Demonstração. Dado $B \subset M$, existe uma família enumerável de subconjuntos de M $\{E_{\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ contida em \mathcal{F} tal que $B \subset \cup_{\ell=1}^{\infty} E_{\ell}$ (basta tomar cada $E_{\ell} = M$, por exemplo). Isto nos garante que μ^* está bem definida.

É fácil perceber que $\mu^*(\emptyset) = 0$, basta tomar $E_{\ell} = \emptyset$, para todo ℓ . Note também que $\mu(B_1) \leq \mu(B_2)$ para $B_1 \subset B_2$, pois o conjunto sob o qual o ínfimo é tomado em relação a B_2 está contido no conjunto correspondente a B_1 .

A fim de provar a subaditividade enumerável de μ^* , suponha $\{B_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{O}(M)$ e $\delta > 0$. Para cada j existe $\{E_{\ell}^j\}_{\ell=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ tal que

$$B_j \subset \bigcup_{\ell=1}^{\infty} E_{\ell}^j \quad \text{e} \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} \rho(E_{\ell}^j) \leq \mu^*(B_j) + \delta 2^{-j},$$

pois μ^* é o ínfimo. Logo, se $B = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$, temos:

$$B \subset \bigcup_{\substack{\ell \geq 1 \\ j \geq 1}} E_{\ell}^j \quad \text{e} \quad \sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ j \geq 1}} \rho(E_{\ell}^j) \leq \sum_{j \geq 1} \mu^*(B_j) + \delta,$$

daí,

$$\mu^*(B) \leq \sum_{j \geq 1} \mu^*(B_j) + \delta.$$

Como δ é arbitrário, $\mu^*(B) \leq \sum_{j \geq 1} \mu^*(B_j)$. □

Se μ^* é medida exterior, um conjunto $B \subset M$ é dito μ^* -mensurável se

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c), \quad \text{para todo } E \subset M.$$

A inequação $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$ é válida para qualquer B, E em M . Então, para B ser μ^* -mensurável basta provar a desigualdade contrária. Note que esta última é trivial se $\mu^*(E) = \infty$. Daí, vemos que B é μ^* -mensurável se e somente se:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c), \quad \text{para todo } E \subset M \text{ tal que } \mu^*(E) < \infty.$$

Teorema 3.1.1 (Teorema de Carathéodory). *Se μ^* é uma medida exterior em M , a coleção \mathbf{M} de conjuntos μ^* -mensuráveis é uma σ -álgebra e a restrição de μ^* a \mathbf{M} é uma medida completa¹.*

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que \mathbf{M} é σ -álgebra. Perceba que \mathbf{M} é fechado sob complementos, pois a definição de μ^* -mensurabilidade do conjunto A é simétrica com relação ao complemento de A .

Dados $A, B \in \mathbf{M}$ e $E \subset M$, temos:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c). \end{aligned}$$

Mas, $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$. Então, pela subaditividade de μ^* ,

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) \leq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B),$$

logo,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c).$$

¹ Dizemos que uma medida é *completa* se para todo conjunto E μ^* -mensurável, com $\mu^*(E) = 0$, temos que cada subconjunto de E é também μ^* -mensurável.

Com isso concluímos que $A \cup B$ pertence a \mathbf{M} . Basta agora mostrar que \mathbf{M} é fechado pela união enumerável de conjuntos disjuntos. Sejam $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbf{M}$, com $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$, $B_m = \cup_{j=1}^m A_j$ e $B = \cup_{m=1}^{\infty} B_m$. Dado $E \subset M$, temos:

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap B_m) &= \mu^*(E \cap B_m \cap A_m) + \mu^*(E \cap B_m \cap A_m^c) \\ &= \mu^*(E \cap A_m) + \mu^*(E \cap B_{m-1}). \end{aligned}$$

Utilizando o princípio da indução, temos que:

$$\mu^*(E \cap B_m) = \sum_{j=1}^m \mu^*(E \cap A_j).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B_m) + \mu^*(E \cap B_m^c) \\ &\geq \sum_{j=1}^m \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B_m^c), \end{aligned}$$

fazendo $m \rightarrow \infty$ obtemos

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c) \\ &\geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E \cap A_j\right) + \mu^*(E \cap B^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E). \end{aligned}$$

Portanto, $B \in \mathbf{M}$. Se tomarmos $E = B$, temos que $\mu^*(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$, então está provada a aditividade.

Finalmente, se $\mu^*(A) = 0$, para qualquer $E \subset X$, temos:

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E),$$

então $A \in \mathbf{M}$.

Portanto, $\mu^*|_{\mathbf{M}}$ é uma medida completa. □

Seja d uma métrica em M . Uma medida exterior μ^* em M é dita uma *medida exterior métrica* se

$$\mu^*(B_1 \cup B_2) = \mu^*(B_1) + \mu^*(B_2), \quad \text{sempre que } d(B_1, B_2) > 0.$$

Proposição 3.1.2. *Se μ^* é uma medida exterior métrica em M , então todo subconjunto boreliano de M é μ^* -mensurável.*

Demonstração. A σ -álgebra de Borel de um espaço M pode ser gerada também pelos conjuntos fechados de M . Dito isto, para mostrar que todo boreliano de M é μ^* -mensurável, basta mostrar que todo conjunto fechado F de M é μ^* -mensurável. Dado $A \subset M$, com $\mu^*(A) < \infty$, queremos mostrar que:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c).$$

Seja $B_m = \{x \in A \setminus F : d(x, F) \geq m^{-1}\}$. Temos que $\{B_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de conjuntos cuja união é igual a $A \setminus F$ (já que F é fechado) e $d(B_m, F) \geq m^{-1}$. Portanto,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*((A \cap F) \cup B_m) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(B_m),$$

então será suficiente mostrar que $\mu^*(A \setminus F) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu^*(B_m)$.

Seja $C_m = B_{m+1} \setminus B_m$, ou seja, $C_m = \{x \in A \setminus F : (m+1)^{-1} \leq d(x, F) < m^{-1}\}$. Se $x \in C_{m+1}$ e $d(x, F) < (m(m+1))^{-1}$, então

$$\begin{aligned} d(y, F) &\leq d(x, y) + d(x, F) < \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m} \\ &\implies y \notin B_m. \end{aligned}$$

Logo, $d(C_{m+1}, B_m) \geq (m(m+1))^{-1}$. Por indução, obtemos

$$\begin{aligned} \mu^*(B_{2k+1}) &\geq \mu^*(C_{2k} \cup B_{2k-1}) = \mu^*(C_{2k}) + \mu^*(B_{2k-1}) \\ &\geq \mu^*(C_{2k}) + \mu^*(C_{2k-2} \cup B_{2k-3}) \\ &\geq \sum_{j=1}^k \mu^*(C_{2j}). \end{aligned}$$

E de forma similar, chegamos que $\mu^*(B_{2k}) \geq \sum_{j=1}^k \mu^*(C_{2j-1})$. Já que $\mu^*(B_m) \leq \mu^*(A) < \infty$, segue que as séries $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(C_{2j})$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(C_{2j-1})$ são convergentes. Por outro lado, pela aditividade de μ^* , temos:

$$\mu^*(A \setminus F) \leq \mu^*(B_m) + \sum_{j=m+1}^{\infty} \mu^*(C_j).$$

Quando $m \rightarrow \infty$, a última soma tende a zero e obtemos

$$\mu^*(A \setminus F) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \mu^*(B_m) \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \mu^*(B_m) \leq \mu^*(A \setminus F),$$

como queríamos. □

3.2 MEDIDA E DIMENSÃO DE HAUSDORFF

O termo "dimensão fractal" assume significados diferentes a depender da definição escolhida. A definição mais antiga foi desenvolvida por Hausdorff e ainda é uma das mais importantes. Sua vantagem reside em estar definida para qualquer conjunto e, além disso, no fato de se basear em medidas (instrumento de fácil manipulação e amplamente conhecido). Por outro lado, é difícil estimar esta dimensão por métodos computacionais.

Seja M um espaço métrico. Dados $s, \delta \in \mathbb{R}$, $s > 0$, $\delta > 0$ e $F \subset M$, definimos²:

$$m_s(F, \delta) = \inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^s : \mathcal{U} \text{ cobertura de } F \text{ com } \text{diam } U < \delta \right\}. \quad (3.1)$$

Nessa definição tomamos todas as coberturas abertas \mathcal{U} de F com diâmetro menor que δ e procuramos minimizar a soma dos diâmetros dos subconjuntos $U \in \mathcal{U}$ elevados a s .

Os conjuntos $U \in \mathcal{U}$ em (3.1) são abertos de M . Porém, podemos definir a medida $m_s(\cdot, \delta)$ exigindo que as coberturas \mathcal{U} sejam compostas apenas por conjuntos fechados, pois $\text{diam } U = \text{diam } \bar{U}$, onde \bar{U} é o fecho do conjunto U .

Note que $m_s(F, \delta)$ varia monotonamente com relação a δ : quando δ diminui, diminui a parcela de coberturas admissíveis e, portanto, o ínfimo aumenta ou continua o mesmo. Dados $\delta_1 > \delta_2 > 0$: $m_s(F, \delta_1) \leq m_s(F, \delta_2)$. Dessa forma, $m_s(F, \delta)$ se aproxima de um limite quando δ tende a zero.

Definimos

$$m_s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} m_s(F, \delta) \quad (3.2)$$

onde $m_s(F) \in [0, \infty]$ é denominada *medida s -dimensional de Hausdorff de F* . Este limite existe para qualquer subconjunto F de M , mas seu valor pode ser (e frequentemente é) 0 ou ∞ .

A medida de Hausdorff generaliza a ideia de comprimento, área, volume, etc. Para subconjuntos do \mathbb{R}^n , a medida n -dimensional de Hausdorff coincide, a menos da multiplicação por uma constante, com a medida n -dimensional de Lebesgue (o volume usual no \mathbb{R}^n). Mais precisamente, dado $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$

$$m_n(F) = \frac{\mathcal{L}^n(F)}{\omega_n},$$

² As coberturas nesta definição são abertas, mas podemos tomar apenas coberturas fechadas e a definição seria equivalente (basta notar que $\text{diam } U = \text{diam } \bar{U}$, para todo $U \subset \mathcal{U}$, onde \bar{U} é o fecho de U).

onde ω_n é a medida de Lebesgue da bola n -dimensional de diâmetro 1.

A seguir veremos uma propriedade importante de $m_s(\cdot, \delta)$:

Afirmção 3.2.1. *Dados $s_1 > s_2 > 0$, temos que:*

$$m_{s_1}(F, \delta) \leq \delta^{s_1-s_2} m_{s_2}(F, \delta)$$

para todo $\delta > 0$.

Prova. De fato, por (3.1):

$$\begin{aligned} m_{s_1}(F, \delta) &= \inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^{s_1} : \mathcal{U} \text{ cobertura com } \text{diam } \mathcal{U} < \delta \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^{s_2+(s_1-s_2)} : \mathcal{U} \text{ cobertura com } \text{diam } \mathcal{U} < \delta \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^{s_2} (\text{diam } U)^{s_1-s_2} : \mathcal{U} \text{ cobertura com } \text{diam } \mathcal{U} < \delta \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{U}} \text{diam } U^{s_2} \delta^{s_1-s_2} : \mathcal{U} \text{ cobertura com } \text{diam } \mathcal{U} < \delta \right\} \\ &= \delta^{s_1-s_2} \inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^{s_2} : \mathcal{U} \text{ cobertura com } \text{diam } \mathcal{U} < \delta \right\} \\ &= \delta^{s_1-s_2} m_{s_2}(F, \delta). \end{aligned}$$

■

Como a Afirmção 3.2.1 é válida para todo $s_1 > s_2 > 0$, então dado $s > 0$, temos:

$$(a) \ m_s(F) > 0 \implies m_t(F) = \infty, \forall t < s.$$

$$(b) \ m_s(F) < \infty \implies m_t(F) = 0, \forall t > s.$$

Os itens (a) e (b) acima implicam na igualdade:

$$\sup\{s : m_s(F) = \infty\} = \inf\{s : m_s(F) = 0\}.$$

Isto nos mostra que existe um único valor $\tilde{s} = \tilde{s}(F) \in [0, \infty]$ tal que $m_s(F) = \infty$ para todo $s < \tilde{s}$ e $m_s(F) = 0$ para todo $s > \tilde{s}$. O valor \tilde{s} é o que chamamos de *dimensão de Hausdorff* de F e denotamos por $\dim_{\mathcal{H}} F$. A medida $\dim_{\mathcal{H}} F$ -dimensional de Hausdorff de F pode assumir qualquer valor em $[0, \infty]$.

Os casos mais convenientes de serem estudados são aqueles em que

$$0 < m_{\dim_{\mathcal{H}} F}(F) < \infty,$$

pois se provarmos que $0 < m_{\tilde{s}}(F) < \infty$ para algum \tilde{s} temos, obrigatoriamente, que \tilde{s} é a dimensão de Hausdorff de F . Ou seja, neste caso o empenho de achar a dimensão de Hausdorff de um conjunto F se restringe à prova de que sua medida de Hausdorff é finita e maior que zero em algum \tilde{s} .

3.3 REPULSORES CONFORMES

Sejam D, D_1, D_2, \dots, D_k conjuntos compactos e convexos em \mathbb{R}^n tais que $D_i \subset D$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ e $D_i \cap D_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Além disso, definimos $D_* = \cup_{i=1}^k D_i$ e supomos que $\mathcal{L}^n(D \setminus D_*) \neq 0$, onde \mathcal{L}^n é a medida de Lebesgue n -dimensional.

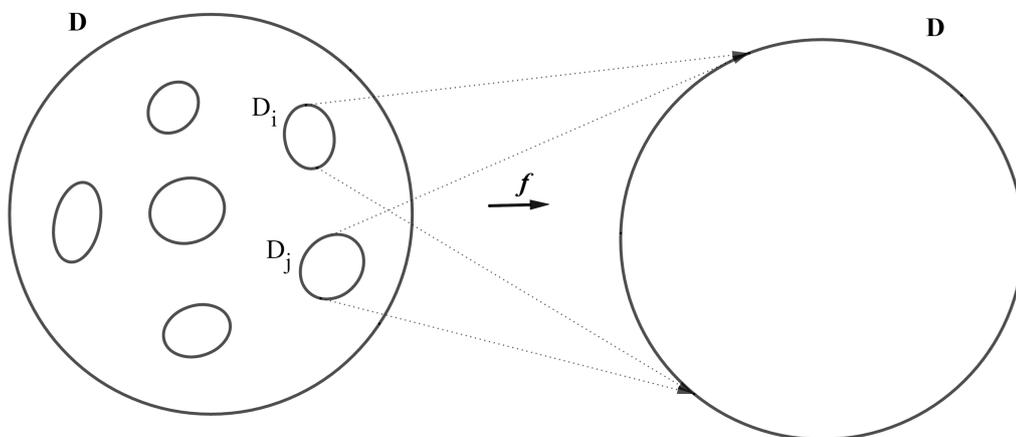
Dada $f : D_* \rightarrow D$ aplicação tal que sua restrição a cada D_i é um difeomorfismo em D , temos que a sequência de pré-imagens $f^{-m}(D)$ é não-crescente: i.e., $f^{-(m+1)}(D) \subset f^{-m}(D)$.

Chamamos *repulsor* de f a sua interseção:

$$\Lambda = \bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-m}(D_*) \quad (3.3)$$

Em outras palavras, Λ é o conjunto dos pontos x cujos iterados $f^m(x)$ estão definidos para todo $m \geq 0$. É claro que Λ é compacto e que $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$ (ver Exemplo 2.3.1, pois é análogo). No que segue, suporemos que a aplicação $f : D_* \rightarrow D$ é de classe C^1 (para

Figura 1 – Representação do domínio e contradomínio da aplicação f .



pontos na fronteira do domínio isso quer dizer que f se estende a uma aplicação C^1 numa vizinhança). Também faremos as seguintes hipóteses adicionais:

1. f é expansora, i.e., existe $\lambda > 1$ tal que:

$$\|Df(x)v\| \geq \lambda \|v\|, \text{ para todo } x \in D_* \text{ e todo } v \in \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

2. O logaritmo do jacobiano de f é Hölder, ou seja, existem $C > 0$ e $\theta > 0$ tais que:

$$\log \frac{|\det Df(x)|}{|\det Df(y)|} \leq C \|x - y\|^\theta, \quad (3.5)$$

para todo $x, y \in D_*$.

3. A aplicação f é conforme, i.e.,

$$\|Df(x)\| \|Df(x)^{-1}\| = 1, \quad (3.6)$$

para todo $x \in D_*$.

Teorema 3.3.1 (Fórmula de Bowen-Manning). *Suponha que $f : D_* \rightarrow D$ satisfaz as condições (3.4), (3.5) e (3.6). Então, a dimensão de Hausdorff do repulsor Λ é dada por*

$$\dim_{\mathcal{H}}(\Lambda) = d_0 n, \quad (3.7)$$

onde $d_0 \in (0, 1)$ é o único número tal que $P(f, -d_0 \log |\det Df|) = 0$.

Deixaremos a demonstração deste Teorema para a próxima seção.

Vamos agora, por meio da Fórmula de Bowen-Manning, calcular a dimensão de Hausdorff do repulsor Λ do Exemplo 2.3.1.

Exemplo 3.3.1. *Considere o contexto do Exemplo 2.3.1 de forma que a restrição de f a cada componente conexa L_i é afim (neste caso, o valor absoluto da derivada de f_i é constante e igual a $\lambda_i = \frac{|L|}{|L_i|} > 1$). Note que o potencial $\varphi(x) = -d \log |\det Df(x)|$ é localmente constante e, por (2.10), temos:*

$$P(f, \varphi) = \log \sum_{i=1}^k \lambda_i^{-d}$$

Portanto, a dimensão de Hausdorff do repulsor $\Lambda = \bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-m}(L_*)$ é o único número d tal que $\sum_{i=1}^k \left(\frac{|L_i|}{|L|}\right)^d = 1$.

O conjunto de Cantor usual da reta, K , corresponde ao caso $L = [0, 1]$, $L_1 = [0, \frac{1}{3}]$, $L_2 = [\frac{2}{3}, 1]$, $f_1(x) = 3x$ e $f_2(x) = 3x - 2$. Em particular, $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Logo, a sua dimensão de Hausdorff é $\frac{\log 2}{\log 3}$, pois este é o único número d que satisfaz

$$3^{-d} + 3^{-d} = 1.$$

3.4 FÓRMULA DE BOWEN-MANNING

Esta seção é dedicada à demonstração da Fórmula de Bowen-Manning.

3.4.1 Distorção e Conformidade

Seja $f_i := f|_{D_i} : D_i \rightarrow D$. Pela definição de f , sabemos que f_i é difeomorfismo em D . Isto implica na existência de uma função $g_i : D \rightarrow D_i$ diferenciável tal que $g_i = f_i^{-1}$. Chamamos g_i de *ramo inverso de f* . A função f possui k ramos inversos: g_1, g_2, \dots, g_k . De maneira mais geral, definimos o ramo inverso de f^m como sendo

$$g^m = g_{i_0} \circ g_{i_1} \circ \dots \circ g_{i_{m-1}},$$

com $i_0, i_1, \dots, i_{m-1} \in \{1, \dots, k\}$. Denotaremos por \mathcal{I}^m a família dos ramos inversos de f^m . Note que as imagens $g^m(D)$, com $g^m \in \mathcal{I}^m$, são duas-a-duas disjuntas e que

$$\Lambda \subset \bigcup_{g^m \in \mathcal{I}^m} g^m(D).$$

Por (3.4), f_i satisfaz:

$$\begin{aligned} \| Df_i(x)v \| &\geq \lambda \| v \|, \quad \forall x \in D_i, \forall v \in \mathbb{R}^n \\ \implies \| Df_i(x) \| &\geq \lambda, \quad \forall x \in D_i. \end{aligned}$$

Das relações acima concluímos que $Df_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva e, conseqüentemente, um isomorfismo. A hipótese (3.6) de conformidade nos dá:

$$\| Df_i(x) \| \| Df_i(x)^{-1} \| = 1, \quad \forall x \in D_i.$$

Por (3.4):

$$\lambda \| Df_i(x)^{-1} \| \leq 1, \quad \forall x \in D_i.$$

Mas, $Df_i(x)^{-1} = Df_i^{-1}(f(x)) = Dg_i(f(x))$, então:

$$\begin{aligned} \lambda \| Dg_i(f(x)) \| &\leq 1 \\ \| Dg_i(f(x)) \| &\leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall x \in D_i. \\ \implies \| Dg_i(y) \| &\leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall y \in D. \end{aligned}$$

Então, como D é um conjunto convexo, a Desigualdade do Valor Médio (Teorema A.0.8) nos garante que:

$$\|g_i(z) - g_i(w)\| \leq \lambda^{-1} \|z - w\|, \quad \forall z, w \in D, \quad (3.8)$$

ou seja, g é uma contração.

Para cada ramo inverso g^m de f^m , consideremos

$$g^{m-p} := g_{i_p} \circ g_{i_{p+1}} \circ \dots \circ g_{i_{m-1}}, \quad p = 0, 1, \dots, m-1.$$

Note que $g^{m-p}(D) \subset D_{i_p}$, para cada p , pois $g^{m-p}(D) = g_{i_p}(g_{i_{p+1}} \circ \dots \circ g_{i_{m-1}}(D)) \subset D_{i_p}$.

Por (3.8), segue que g^{m-p} é uma λ^{p-m} contração. Dessa forma, temos que:

$$\text{diam } g^{m-p}(D) \leq \lambda^{p-m} \text{diam } D, \quad (3.9)$$

para todo $p = 0, 1, \dots, m-1$, pois

$$\begin{aligned} \text{diam } g^{m-p}(D) &= \sup_{x, y \in g^{m-p}(D)} \|x - y\| = \sup_{z, w \in D} \|g^{m-p}(z) - g^{m-p}(w)\| \\ &\leq \sup_{z, w \in D} \lambda^{p-m} \|z - w\| \\ &\leq \lambda^{p-m} \sup_{z, w \in D} \|z - w\| \\ &\leq \lambda^{p-m} \text{diam } D. \end{aligned}$$

Dado qualquer isomorfismo linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, temos que

$$|\det L| \leq \|L\|^n. \quad (3.10)$$

De fato, pelos estudos realizados no Apêndice B e pelo Teorema Máx-Min (A.0.2), concluímos que $|\det L| = |\alpha_1| \dots |\alpha_n|$, onde $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n > 0$ são os valores singulares de L e que $\alpha_1 = \|L\|$. Logo, (3.10) é válida.

Obtemos uma desigualdade análoga para a inversa L^{-1} . Dessa forma, obtemos

$$1 = |\det L| |\det L^{-1}| \leq (\|L\| \|L^{-1}\|)^n.$$

Então, $\|L\| \|L^{-1}\| = 1$ implica $|\det L| = \|L\|^n$ e $|\det L^{-1}| = \|L^{-1}\|^n$. Logo, pela hipótese de conformidade 3.6, temos que

$$|\det Df(y)| = \|Df(y)\|^n, \quad (3.11)$$

para todo $y \in D_*$.

O objetivo central desta seção é provar a seguinte estimativa geométrica, que servirá de base para demonstrar o Teorema 3.3.1:

Proposição 3.4.1. *Existe $C_0 > 1$ tal que para todo $m \geq 1$ e todo ramo inverso $g^m \in \mathcal{I}^m$, todo $E \subset g^m(D)$ e todo $x \in g^m(D)$, tem-se as desigualdades:*

$$\frac{1}{C_0}(\text{diam } f^m(E))^n \leq (\text{diam } E)^n |\det Df^m(x)| \leq C_0(\text{diam } f^m(E))^n \quad (3.12)$$

A fim de demonstrar este resultado necessitaremos do lema abaixo:

Lema 3.4.1. *Existe $C_1 > 1$ tal que, para todo $m \geq 1$ e todo ramo inverso g^m de f^m , vale*

$$\log \prod_{p=0}^{m-1} \frac{|\det Df(z_p)|}{|\det Df(w_p)|} \leq C_1,$$

para quaisquer z_p, w_p na envolvente convexa de $g^{m-p}(D)$ para $p = 0, \dots, m-1$.

Demonstração do Lema 3.4.1. A envolvente convexa de um subconjunto do \mathbb{R}^n é a união de todos os segmentos de reta cujos extremos pertencem ao conjunto. Então, claramente, o diâmetro da envolvente convexa de um subconjunto qualquer do \mathbb{R}^n coincide com o diâmetro do próprio conjunto.³

Usando (3.5), temos:

$$\log \frac{|\det Df(z_p)|}{|\det Df(w_p)|} \leq C \|z_p - w_p\|^\theta \leq C(\text{diam } g^{m-p}(D))^\theta,$$

para $p = 0, \dots, m-1$. Logo,

$$\log \prod_{p=0}^{m-1} \frac{|\det Df(z_p)|}{|\det Df(w_p)|} \leq \sum_{p=0}^{m-1} C(\text{diam } g^{m-p}(D))^\theta \leq C(\text{diam } D)^\theta \sum_{p=0}^{m-1} \lambda^{(p-m)\theta},$$

por (3.9). Portanto, basta tomar $C_1 = C(\text{diam } D)^\theta \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j\theta}$. \square

Demonstração da Proposição 3.4.1. Considere m, g^m, E e x como no enunciado. Seja $y \in D$ um ponto onde a norma de Dg^m atinge seu máximo. Então, pela Desigualdade do Valor Médio (Teorema A.0.8),

$$|x_1 - x_2| \leq \|Dg^m(y)\| |f^m(x_1) - f^m(x_2)|, \quad (3.13)$$

para todos $x_1, x_2 \in E$. Observe que:

$$\begin{aligned} Dg^m(y)^{-1} &= D(g^m)^{-1}(g^m(y)) \\ &= Df^n(z), \end{aligned}$$

³ Como D_i é convexo para todo i , a envolvente convexa de $g^{m-p}(D)$ está contida em D_{i_p} , para $p = 0, \dots, m-1$. Além disso, temos que a derivada Df está definida em todo ponto da envolvente convexa.

onde $z = g^m(y)$. Somando isto à hipótese de conformidade (3.6), temos:

$$\begin{aligned}
\|Df(z)\| \|Df^{-1}(z)\| = 1 &\implies \|Df^m(z)\| \|Df^m(z)^{-1}\| = 1 \\
&\implies \|Df^m(z)\| \|Dg^m(y)\| = 1, \text{ onde } y = f^m(z). \\
&\implies \|Dg^m(y)\| = \|Df^m(z)\|^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

A primeira implicação se deve ao fato de que, pela Regra da Cadeia,

$$Df^m(x) = \prod_{p=0}^{m-1} Df(f^p(x))$$

e daí,

$$\begin{aligned}
1 &= \|\text{Id}\| \leq \|Df^m(x)\| \|Df^m(x)^{-1}\| \\
&\leq \prod_{p=0}^{m-1} \|Df(f^p(x))\| \|Df(f^p(x))^{-1}\| \\
&= \prod_{p=0}^{m-1} 1 = 1.
\end{aligned}$$

Utilizando o Lema 3.4.1 e a igualdade (3.11), chegamos à

$$|\det Df^m(x)| \leq e^{C_1} |\det Df^m(z)| = e^{C_1} \|Df^m(z)\|^n. \tag{3.15}$$

Das desigualdades (3.13) e (3.15) concluimos que

$$\|x_1 - x_2\|^n \leq e^{C_1} |\det Df^m(x)|^{-1} \|f^m(x_1) - f^m(x_2)\|^n.$$

Tomando o supremo para $x_1, x_2 \in E$, obtemos

$$(\text{diam } E)^n \leq e^{C_1} |\det Df^m(x)|^{-1} (\text{diam } f^m(E))^n.$$

Agora basta tomar $C_0 \geq e^{C_1}$ e provamos a segunda desigualdade em (3.12).

Seguiremos de maneira análoga para demonstrar a outra desigualdade. Seja z_p um ponto de máximo para $\|Df\|$ restrita à envolvente conexa de $g^{m-p}(D)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\|f^{p+1}(x_1) - f^{p+1}(x_2)\| &\leq \|Df(z_p)\| \|f^p(x_1) - f^p(x_2)\| \\
&= |\det Df(z_p)|^{\frac{1}{n}} \|f^p(x_1) - f^p(x_2)\|,
\end{aligned}$$

para todo p e todos $x_1, x_2 \in E$. Daí, fazendo $p = 0, 1, \dots, m-1$,

$$\|f^m(x_1) - f^m(x_2)\|^n \leq \prod_{p=0}^{m-1} |\det Df(z_p)| \|x_1 - x_2\|^n.$$

Pelo Lema 3.4.1, temos

$$\prod_{p=0}^{m-1} |\det Df(z_p)| \leq e^{C_1} |\det Df^m(x)|.$$

Tomando $C_0 \geq e^{C_1}$, concluímos que

$$\|f^m(x_1) - f^m(x_2)\|^n \leq C_0 |\det Df^m(x)| \|x_1 - x_2\|^n.$$

Tomando o supremo para $x_1, x_2 \in E$, chegamos à

$$(\text{diam } f^m(E))^n \leq C_0 |\det Df^m(x)| (\text{diam } E)^n.$$

E com isto concluímos a prova desta proposição. \square

3.4.2 Existência e Unicidade de d_0

Nosso foco agora é provar a existência e a unicidade do número d_0 tal que $P(f, -d_0 \log |\det Df|) = 0$.

Seja $\phi = -\log |\det Df|$ e $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Psi(t) = P(f, t\phi)$. Queremos mostrar que existe um único d_0 tal que $\Psi(d_0) = 0$.

Segue da Proposição 2.2.3 que Ψ é contínua. Então, para mostrar a existência de d_0 basta provar que $\Psi(1) < 0 < \Psi(0)$.

Afirmção 3.4.1. $\Psi(0) > 0$.

Prova. Seja β a cobertura aberta de D de modo que os elementos de β são as imagens $g(D)$ pelos ramos inversos de f . Lembre que

$$\beta^m = \beta \vee f^{-1}(\beta) \vee \dots \vee f^{-(m-1)}(\beta),$$

onde cada elemento B de β^m é obtido através das interseções $B_0 \cap B_1 \cap \dots \cap B_{m-1}$, onde $B_\ell \in f^{-\ell}(\beta)$ e $f^{-\ell}(\beta) = \{f^{-\ell}(A) : A \in \beta\}$, i.e.,

$$B_0 = g_{i_0}(D), \text{ para } i_0 \in \{1, \dots, k\},$$

$$B_1 = f^{-1}(g_{i_1}(D)) = g_{i_2}g_{i_1}(D) \text{ para } i_1, i_2 \in \{1, \dots, k\},$$

$$B_2 = f^{-2}(g_{i_3}(D)) = g_{i_5}g_{i_4}g_{i_3}(D) \text{ para } i_3, i_4, i_5 \in \{1, \dots, k\};$$

e assim por diante. Então, para cada $m \geq 1$, a cobertura β^m é formada pelas imagens $g^m(D)$ de D pelos ramos inversos de f^m . Da desigualdade (3.9) segue que $\text{diam } \beta^m \leq$

$\lambda^{-m} \text{diam } D, \forall m \geq 1$, e daí $\text{diam } \beta^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Então, pela Proposição 2.2.2, concluimos que

$$P(f, \psi) = P(f, \psi, \beta), \quad \text{para todo potencial } \psi. \quad (3.16)$$

Em particular, $\Psi(0) = P(f, 0) = P(f, 0, \beta)$. Por outro lado,

$$P(f, 0, \beta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log P_m(f, 0, \beta),$$

onde

$$\begin{aligned} P_m(f, 0, \beta) &= \inf \left\{ \sum_{B \subset \tilde{\beta}} e^0 : \tilde{\beta} \text{ subcobertura de } \beta^m \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{B \subset \tilde{\beta}} 1 : \tilde{\beta} \text{ subcobertura de } \beta^m \right\}. \end{aligned}$$

Note que $\sum_{B \subset \tilde{\beta}} 1 = \#\tilde{\beta}$ (quantidade de elementos em $\tilde{\beta}$) e que β^m é cobertura minimal de D (i.e., nenhuma subfamília própria de β^m cobre D). Logo,

$$P_m(f, 0, \beta) = \sum_{B \subset \beta^m} 1 = \#\beta^m.$$

Daí,

$$\begin{aligned} P(f, 0, \beta) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log P_m(f, 0, \beta) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \#\beta^m \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log (\#\beta)^m \\ &= \log \#\beta = \log k > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Psi(0) = P(f, 0) = P(f, 0, \beta) > 0. \quad \blacksquare$$

Afirmção 3.4.2. $\Psi(1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \mathcal{L}^n(f^{-m}(D)) < 0$.

Prova. Pela equação (3.16), temos que $\Psi(1) = P(f, \phi, \beta)$. Mas,

$$P(f, \phi, \beta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log P_m(f, \phi, \beta),$$

onde

$$P_m(f, \phi, \beta) = \inf \left\{ \sum_{B \subset \tilde{\beta}} e^{\phi_m(B)} : \tilde{\beta} \text{ subcobertura de } \beta^m \right\}.$$

Como β^m é cobertura minimal de D , $\phi_m(x) = \sum_{p=0}^{m-1} \phi \circ f^p(x)$, para $x \in D_*$, e $\phi_m(B) = \sup\{\phi_m(x) : x \in B\}$, temos

$$P_m(f, \phi, \beta) = \sum_{B \in \beta^m} e^{\phi_m(B)}.$$

Além disso,

$$\phi_m(B) = \phi_m(g^m(D)) = \sup\{\phi_m(x) : x \in g^m(D)\},$$

para algum ramo inverso g^m de f^m . Mas, dado $y \in D_*$ temos $\phi(y) = |\det Df(y)|$, então:

$$\phi_m(x) = \sum_{p=0}^{m-1} -\log |\det Df(f^p(x))| = \sum_{p=0}^{m-1} \log \left(\frac{1}{|\det Df(f^p(x))|} \right).$$

Daí,

$$\phi_m(g^m(D)) = \sup_{x \in g^m(D)} \sum_{p=0}^{m-1} \log \left(\frac{1}{|\det Df(f^p(x))|} \right).$$

Isto quer dizer que

$$\Psi(1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \sum_{g^m \in \mathcal{I}^m} \sup_{g^m(D)} \frac{1}{|\det Df^m|}. \quad (3.17)$$

Pela fórmula de mudança de variáveis em integrais múltiplas,

$$\mathcal{L}^n(f^{-m}(D)) = \sum_{g^m \in \mathcal{I}^m} \mathcal{L}^n(g^m(D)) = \sum_{g^m \in \mathcal{I}^m} \int_D \frac{1}{|\det Df^m|} \circ g^m,$$

pois,

$$\mathcal{L}^n(g^m(D)) = \int_{g^m(D)} 1 = \int_D |\det Dg^m| = \int_D \frac{1}{|\det Df^m|} \circ g^m.$$

O Lema 3.4.1 nos diz que:

$$\prod_{p=0}^{m-1} |\det Df(g^{m-p}(x_1))| \leq e^{C_1} \prod_{p=0}^{m-1} |\det Df(g^{m-p}(x_2))|,$$

$x_1, x_2 \in D$. Se $\tilde{z}, \tilde{w} \in D$, existem $z, w \in g^m(D)$ tais que:

$$\begin{aligned} f^p(z) &= f^p(g^m(\tilde{z})) = g^{m-p}(\tilde{z}) \\ \text{e} \quad f^p(w) &= f^p(g^m(\tilde{w})) = g^{m-p}(\tilde{w}). \end{aligned}$$

Assim, escolhemos z e $w \in g^m(D)$ tais que

$$g^{m-p}(x_1) = f^p(z) \quad \text{e} \quad g^{m-p}(x_2) = f^p(w).$$

Logo,

$$\prod_{p=0}^{m-1} |\det Df(f^p(z))| \leq e^{C_1} \prod_{p=0}^{m-1} |\det Df(f^p(w))|.$$

Pela Regra da Cadeia,

$$|\det Df^m(z)| \leq e^{C_1} |\det Df^m(w)|.$$

Tomando o ínfimo em $g^m(D)$, concluímos que:

$$\inf_{g^m(D)} |\det Df^m| \leq |\det Df^m| \leq e^{C_1} \inf_{g^m(D)} |\det Df^m|,$$

$z \in g^m(D)$. Dessa forma,

$$\mathcal{L}^n(f^{-m}(D)) \leq \sum_{g^m \in \mathcal{I}^m} \sup_{g^m(D)} \frac{1}{|\det Df^m|} \leq e^{c_1} \mathcal{L}^n(f^{-m}(D)).$$

Ao tomarmos o log e dividirmos por $\frac{1}{m}$, nesta ordem, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \log \mathcal{L}^n(f^{-m}(D)) &\leq \frac{1}{m} \log \sum_{g^m \in \mathcal{I}^m} \sup_{g^m(D)} \frac{1}{|\det Df^m|} \\ &\leq \frac{1}{m} \log e^{c_1} + \frac{1}{m} \log \mathcal{L}^n(f^{-m}(D)) \\ &\leq \frac{C_1}{m} + \frac{1}{m} \log \mathcal{L}^n(f^{-m}(D)). \end{aligned}$$

Note que $\frac{C_1}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Então, por (3.17), concluímos que:

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \mathcal{L}^n(f^{-m}(D)) &\leq \Psi(1) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \mathcal{L}^n(f^{-m}(D)) \\ \implies \Psi(1) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \mathcal{L}^n(f^{-m}(D)). \end{aligned}$$

Para mostrar que $\Psi(1) < 0$ vamos provar que $\mathcal{L}^n(f^{-m}(D))$ decai exponencialmente com relação a m , ou seja, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\frac{\mathcal{L}^n(f^{-(m+1)}(D))}{\mathcal{L}^n(f^{-m}(D))} \leq e^{-\gamma}, \quad \forall m \geq 0.$$

Primeiramente, note que $f^{-(m+1)}(D) = f^{-m}(D_*)$ é a união disjunta das imagens $g^m(D_*)$ com $g^m \in \mathcal{I}^m$. Logo,

$$\frac{\mathcal{L}^n(f^{-(m+1)}(D))}{\mathcal{L}^n(f^{-m}(D))} = \frac{\sum_{g^m \in \mathcal{I}^m} \mathcal{L}^n(g^m(D_*))}{\sum_{g^m \in \mathcal{I}^m} \mathcal{L}^n(g^m(D))} \leq \max_{g^m \in \mathcal{I}^m} \frac{\mathcal{L}^n(g^m(D_*))}{\mathcal{L}^n(g^m(D))}. \quad (3.18)$$

Pela fórmula de mudança de variável,

$$\mathcal{L}^n(g^m(D)) = \int_D \frac{1}{|\det Df^m|} \circ g^m.$$

De forma análoga,

$$\mathcal{L}^n(g^m(D \setminus D_*)) = \int_{D \setminus D_*} \frac{1}{|\det Df^m|} \circ g^m.$$

Pelo Lema 3.4.1, existe \tilde{C}_1 , tal que

$$|\det Df^m(z)| \leq \tilde{C}_1 |\det Df^m(w)|,$$

para $z, w \in g^m(D)$. Logo,

$$\frac{1}{|\det Df^m(z)|} \geq \frac{1}{\tilde{C}_1} \frac{1}{|\det Df^m(w)|}.$$

Fixando w e integrando em $D \setminus D_*$, temos

$$\mathcal{L}^n(g^m(D \setminus D_*)) \geq \frac{1}{\tilde{C}_1} \frac{1}{|\det Df^m(w)|} \mathcal{L}^n(D \setminus D_*). \quad (3.19)$$

Por outro lado, fixando z e integrando em D , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{C}_1} \mathcal{L}^n(g^m(D)) &\leq \frac{1}{|\det Df^m(z)|} \mathcal{L}^n(D) \\ \implies \frac{1}{\mathcal{L}^n(g^m(D))} &\geq \frac{1}{\tilde{C}_1} |\det Df^m(z)| \frac{1}{\mathcal{L}^n(D)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Multiplicando as desigualdades (3.19) e (3.20) (considerando o caso $x = z = w$), temos

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}^n(g^m(D \setminus D_*))}{\mathcal{L}^n(g^m(D))} &\geq \frac{1}{\tilde{C}_1} \frac{1}{|\det Df^m(x)|} \mathcal{L}^n(D \setminus D_*) \frac{1}{\tilde{C}_1} |\det Df^m(x)| \frac{1}{\mathcal{L}^n(D)} \\ &\geq \frac{1}{\tilde{C}_1^2} \frac{\mathcal{L}^n(D \setminus D_*)}{\mathcal{L}^n(D)}, \end{aligned}$$

para todo $g^m \in \mathcal{I}^m$. Por hipótese, $\frac{\mathcal{L}^n(D \setminus D_*)}{\mathcal{L}^n(D)} > 0$. Tomamos $\gamma > 0$ suficientemente pequeno que satisfaça $1 - e^{-\gamma} \leq \frac{1}{\tilde{C}_1^2} \frac{\mathcal{L}^n(D \setminus D_*)}{\mathcal{L}^n(D)}$. Então, temos

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}^n(g^m(D \setminus D_*))}{\mathcal{L}^n(g^m(D))} &\geq 1 - e^{-\gamma} \\ \implies \frac{\mathcal{L}^n(g^m(D) \setminus g^m(D_*))}{\mathcal{L}^n(g^m(D))} &\geq 1 - e^{-\gamma}, \end{aligned}$$

para todo $g^m \in \mathcal{I}^m$. Daí,

$$\frac{\mathcal{L}^n(g^m(D) \setminus g^m(D_*))}{\mathcal{L}^n(g^m(D))} = \frac{\mathcal{L}^n(g^m(D)) - \mathcal{L}^n(g^m(D_*))}{\mathcal{L}^n(g^m(D))} = 1 - \frac{\mathcal{L}^n(g^m(D_*))}{\mathcal{L}^n(g^m(D))},$$

logo,

$$1 - \frac{\mathcal{L}^n(g^m(D_*))}{\mathcal{L}^n(g^m(D))} \geq 1 - e^{-\gamma}.$$

Então,

$$\frac{\mathcal{L}^n(g^m(D_*))}{\mathcal{L}^n(g^m(D))} \leq e^{-\gamma}.$$

Combinando isto com a desigualdade (3.18), obtemos

$$\frac{\mathcal{L}^n(f^{-(m+1)}(D))}{\mathcal{L}^n(f^{-m}(D))} \leq e^{-\gamma}, \quad \text{para todo } m \geq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \log(\mathcal{L}^n(f^{-m}(D))) - \log(\mathcal{L}^n(f^{-(m-1)}(D))) &\leq -\gamma \\ \log(\mathcal{L}^n(f^{-(m-1)}(D))) - \log(\mathcal{L}^n(f^{-(m-2)}(D))) &\leq -\gamma \\ &\vdots \\ \log(\mathcal{L}^n(f(D))) - \log(\mathcal{L}^n(D)) &\leq -\gamma \end{aligned}$$

Realizando uma soma telescópica e dividindo por m , temos:

$$\frac{\log(\mathcal{L}^n(f^{-(m+1)}(D)))}{m} - \frac{\log(\mathcal{L}^n(D))}{m} \leq \frac{m-1}{m}(-\gamma)$$

Daí,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \mathcal{L}^n(f^{-m}(D)) \leq -\gamma < 0.$$

■

Isto finaliza a prova da existência de d_0 tal que $\Psi(d_0) = 0$. Agora vamos mostrar a unicidade deste valor.

Por f ser aplicação expansora conforme, temos que

$$\phi = \log |\det Df|^{-1} = n \log \|Df\|^{-1} \leq n \log \frac{1}{\lambda} \leq -n \log \lambda.$$

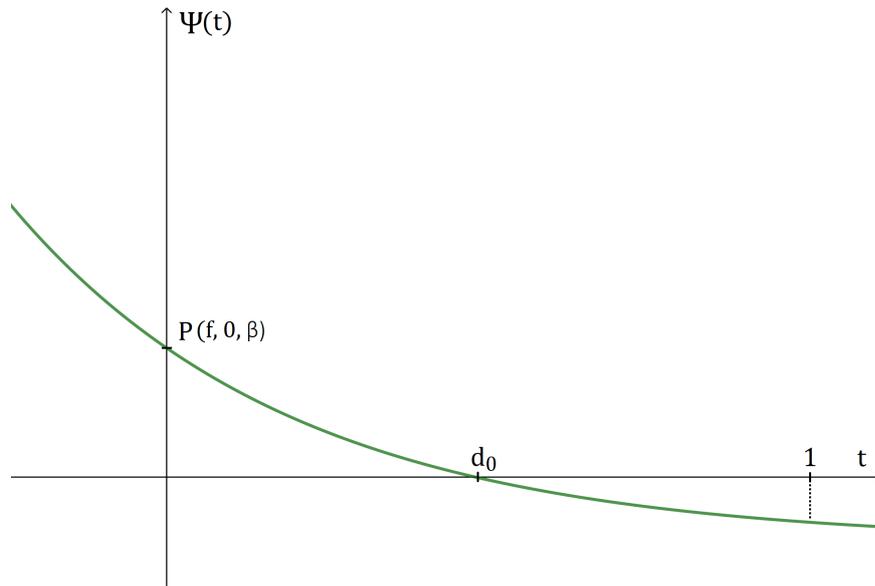
Daí, dados quaisquer $s < t$,

$$(t-s)\phi \leq (t-s)(-n \log \lambda) \implies t\phi \leq s\phi - (t-s)n \log \lambda.$$

Pelas propriedades (2.6) e (2.7), segue que

$$P(f, t\phi) \leq P(f, s\phi) - (t-s)n \log \lambda < P(f, s\phi).$$

Concluimos que Ψ é estritamente decrescente. Então, existe apenas um valor d_0 tal que $\Psi(d_0) = 0$. A Figura 2 resume o que foi discutido ao longo desta sub-seção.

Figura 2 – Gráfico da função $\Psi(t)$.

Fonte: A autora (2020)

3.4.3 Cota Superior

Seja $d(\Lambda)$ a dimensão de Hausdorff do repulsor Λ .

O objetivo desta seção é provar que $d_0 n$ é cota superior para $d(\Lambda)$. Para isso, vamos mostrar que $d(\Lambda) \leq bn$ para todo b tal que $\Psi(b) = P(f, b\phi) < 0$. Como Ψ é contínua, podemos estender a desigualdade para quando $\Psi(b) = 0$, no caso, quando $b = d_0$ e concluir que $d(\Lambda) \leq d_0 n$.

A ideia é mostrar a validade da implicação

$$P(f, b\phi) < 0 \quad \implies \quad m_{bn}(\Lambda) = 0.$$

E, daí, concluir que $d(\Lambda) \leq d_0 n$.

Seja β cobertura de D cujos elementos são as imagens $g(D)$ pelos ramos inversos de f . Como já vimos antes, para cada $m \geq 1$, a cobertura β^m é formada pelas imagens $g^m(D)$ de D pelos ramos inversos de f^m . Além disso, por 3.9, temos que $\text{diam } \beta^m \leq \lambda^{-m} \text{diam } D$, então $\text{diam } \beta^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Logo, a Proposição 2.2.2 nos garante que $P(f, \psi) = P(f, \psi, \beta)$, para qualquer potencial ψ . Em particular,

$$P(f, b\phi) = P(f, b\phi, \beta) < -\kappa,$$

para algum $\kappa > 0$, por hipótese. Pela definição de $P(f, b\phi, \beta)$, temos

$$P(f, b\phi, \beta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log P_m(f, b\phi, \beta),$$

onde

$$P_m(f, b\phi, \beta) = \inf \left\{ \sum_{B \subset \tilde{\beta}} e^{(b\phi)_m(B)} : \tilde{\beta} \text{ subcobertura de } \beta^m \right\}.$$

Mas, β^m é cobertura minimal de D , então

$$P_m(f, b\phi, \beta) = \sum_{B \subset \beta^m} e^{(b\phi)_m(B)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(f, b\phi, \beta) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \left(\sum_{B \subset \beta^m} e^{(b\phi)_m(B)} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \log \left(\sum_{B \subset \beta^m} e^{(b\phi)_m(B)} \right)^{\frac{1}{m}} < -\kappa. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{B \subset \beta^m} e^{(b\phi)_m(B)} < e^{-\kappa m}, \quad (3.21)$$

para m suficientemente grande. Dado $x \in D_*$, temos que

$$(b\phi)_m(x) = \sum_{p=0}^{m-1} (b\phi) \circ f^p(x) = b \sum_{p=0}^{m-1} \phi \circ f^p(x) = b\phi_m(x).$$

Dado $B \in \beta^m$, temos que B é compacto na topologia induzida por Λ e que

$$\phi_m(B) = \sup \{ \phi_m(x) : x \in B \}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} e^{(b\phi)_m(B)} = e^{b\phi_m(B)} &= e^{b \sup \{ \sum_{p=0}^{m-1} \phi \circ f^p(x), x \in B \}} \\ &= e^{b \sup \{ \sum_{p=0}^{m-1} -\log |\det Df(f^p(x))|, x \in B \}} \\ &= \sup_{x \in B} e^{\sum_{p=0}^{m-1} \log |\det Df(f^p(x))|^{-b}} \\ &= \sup_{x \in B} |\det Df^m(x)|^{-b} \\ &= |\det Df^m(y)|^{-b}, \end{aligned}$$

para algum $y \in B$, pela compacidade. Temos também que $f^m(B) = \Lambda$ para todo $B \in \beta^m$.

Logo, tomando $E = B$ na Proposição 3.4.1:

$$\begin{aligned} (\text{diam } B)^{bn} |\det Df^m(x)|^b &\leq C_0^b (\text{diam } f^m(B))^{bn} \\ \implies (\text{diam } B)^{bn} e^{-b\phi_m(B)} &\leq C_0^b (\text{diam } f^m(B))^{bn} \\ \implies (\text{diam } B)^{bn} e^{-b\phi_m(B)} &\leq C_0^b (\text{diam } D)^{bn} \\ \implies (\text{diam } B)^{bn} &\leq e^{b\phi_m(B)} C_0^b (\text{diam } D)^{bn}. \end{aligned}$$

Combinando esta desigualdade com (3.21), concluimos que

$$\sum_{B \in \beta^m} (\text{diam } B)^{bn} \leq \sum_{B \in \beta^m} e^{b\phi_m(B)} C_0^b (\text{diam } D)^{bn} \leq C_0^b (\text{diam } D)^{bn} e^{-\kappa m},$$

para todo m suficientemente grande.

Vamos agora relembrar a definição de $m_{bn}(\Lambda)$.

$$m_{bn}(\Lambda) = \lim_{\delta \rightarrow 0} m_{bn}(\Lambda, \delta),$$

onde

$$m_{bn}(\Lambda, \delta) = \inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^{bn} : \mathcal{U} \text{ cobertura de } \Lambda, \text{ com } \text{diam } \mathcal{U} < \delta \right\}.$$

Seja $(\delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sequência real positiva tal que $\delta_m = 2 \text{diam } \beta^m$. Consequentemente, $\delta_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Então, podemos afirmar que

$$m_{bn}(\Lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} m_{bn}(\Lambda, \delta_m).$$

Note que β^m é cobertura de Λ com $\text{diam } \beta^m < \delta_m$, então

$$m_{bn}(\Lambda, \delta_m) \leq \sum_{B \in \beta^m} (\text{diam } B)^{bn} \leq C_0^b (\text{diam } \Lambda)^{bn} e^{-\kappa m},$$

para m suficientemente grande. Tomando o limite quando $m \rightarrow \infty$,

$$m_{bn}(\Lambda) \leq C_0^b (\text{diam } \Lambda)^{bn} \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-\kappa m} = 0.$$

O que implica $m_{bn}(\Lambda) = 0$.

3.4.4 Cota Inferior

Nosso objetivo agora é provar que $an \leq d(\Lambda)$, para todo a tal que $P(f, a\phi) > 0$, pois isto implica que $d(\Lambda) \geq d_0 n$, o que completa a demonstração do Teorema 3.3.1.

Em resumo, o que queremos provar é a implicação

$$P(f, a\phi) > 0 \quad \implies \quad m_{an}(\Lambda) > 0,$$

e, assim, concluir que $an \leq d(\Lambda)$.

De início, procederemos de forma análoga à seção anterior: tomamos a cobertura β cujos elementos são as imagens $g(D)$ pelos ramos inversos de f . Como vimos anteriormente,

- $P(f, \psi) = P(f, \psi, \beta)$, para todo potencial ψ .
- β^m é cobertura minimal de D cujos elementos são as imagens $g^m(D)$, $g^m \in \mathcal{I}^m$.

Logo, pela escolha de a , existe $\kappa > 0$, tal que

$$P_m(f, a\phi, \beta) = \sum_{B \in \beta^m} e^{a\phi_m(B)} \geq e^{\kappa m},$$

para m suficientemente grande. Fixe m que satisfaz a desigualdade acima. Seja $\varepsilon > 0$, tal que

$$\text{dist}(B, \tilde{B}) \geq \varepsilon, \quad \forall B, \tilde{B} \in \beta^m,$$

ou seja, ε é um minorante para a distância entre dois elementos quaisquer de β^m . Note que existe tal ε , pois os elementos de β^m são compactos e disjuntos entre si.

Afirmção 3.4.3. *Fixe $\rho \in (0, \varepsilon^{an})$. Então,*

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^{-an} \geq 2^{an} \rho, \quad (3.22)$$

para toda cobertura \mathcal{U} de Λ .

Suponha que esta afirmação é verdadeira. Por definição, a desigualdade (3.22) implica que $m_{an}(\Lambda) \geq 2^{-an} \rho > 0$ e, por conseguinte, $d(\Lambda) > an$, como queríamos.

Portanto, para finalizar a demonstração do Teorema 3.3.1 basta provar a afirmação acima.

Prova da Afirmação 3.4.3.

Vamos supor que existe uma cobertura de Λ que não satisfaz (3.22). Sabemos que se usarmos apenas coberturas abertas ou apenas coberturas fechadas na definição da medida de Hausdorff de um conjunto o resultado é o mesmo. Então, existe uma cobertura aberta \mathcal{U} de Λ com

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^{an} < 2^{-an} \rho < \rho < \varepsilon^{an}. \quad (3.23)$$

Como Λ é compacto, podemos supor que \mathcal{U} é finita. De (3.23), temos:

$$\begin{aligned} (\text{diam } U)^{an} &\leq \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^{an} < \varepsilon^{an} \\ \implies \text{diam } U &< \varepsilon, \quad \forall U \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Isto implica, pela escolha de ε , que cada $U \in \mathcal{U}$ intersecta no máximo um elemento $B \in \beta^m$. Como β^m cobre Λ e U é subconjunto não-vazio de Λ , concluímos que U intersecta

pelo menos um elemento B de β^m . Portanto, cada $U \in \mathcal{U}$ intersecta exatamente um $B \in \beta^m$. Dessa forma,

$$\mathcal{U}_B = \{U \in \mathcal{U} : U \cap B \neq \emptyset\}.$$

Os abertos $U \in \mathcal{U}$ são subconjuntos de Λ , então:

$$U \in \mathcal{U}_B \implies \begin{cases} U \cap B \neq \emptyset, \\ U \cap \tilde{B} = \emptyset, \forall \tilde{B} \in \beta^m, \tilde{B} \neq B. \end{cases} \implies U \subset B.$$

Consideramos agora as famílias $f^m(\mathcal{U}_B) = \{f^m(U) : U \in \mathcal{U}_B\}$. Note que $f^m(\mathcal{U}_B)$ é cobertura de Λ , para todo $m \geq 1$. Então, pela Proposição 3.4.1

$$\begin{aligned} \sum_{V \in f^m(\mathcal{U}_B)} (\text{diam } V)^{an} &= \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } f^m(U))^{an} \\ &\leq C_0 e^{-a\phi_m(B)} \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^{an}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^{an} = \sum_{B \in \beta^m} \sum_{U \in \mathcal{U}_B} (\text{diam } U)^{an} \geq \sum_{U \in \mathcal{U}} C_0 e^{-a\phi_m(B)} \sum_{V \in f^m(\mathcal{U}_B)} (\text{diam } V)^{an}.$$

Suponhamos que

$$\sum_{V \in f^m(\mathcal{U}_B)} (\text{diam } V)^{an} \geq \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^{an},$$

para todo $B \in \beta^m$. Daí, concluímos que:

$$\begin{aligned} \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^{an} &\geq \sum_{B \in \beta^m} C_0^{-1} e^{a\phi_m(B)} \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^{an} \\ &\geq C_0^{-1} e^{\kappa m} \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^{an}. \end{aligned}$$

O que é uma contradição, pois $e^{\kappa m} > C_0$ para m suficientemente grande. Então, existe $B \in \beta^m$ tal que:

$$\sum_{V \in f^m(\mathcal{U}_B)} (\text{diam } V)^{an} \leq \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^{an} < \rho. \quad (3.24)$$

Podemos repetir todo o procedimento anterior para $f^m(\mathcal{U}_B)$ no lugar de \mathcal{U} , onde B é exatamente o subconjunto de β^m que satisfaz (3.24). Porém,

$$\#f^m(\mathcal{U}_B) = \#\mathcal{U}_B < \#\mathcal{U}.$$

Este processo deveria parar após um número finito de etapas. Mas, observamos que sempre há um elemento B em β^m que permite a realização deste procedimento, ou seja, poderíamos repeti-lo infinitamente. O que é uma contradição. Assim, finalizamos a prova do Teorema 3.3.1.

4 DIMENSÃO DE HAUSDORFF DE FRACTAIS AUTO-AFINS

4.1 INTRODUÇÃO AO PROBLEMA

Sejam S_1, \dots, S_k contrações em \mathbb{R}^n , ou seja, $|S_\ell(x) - S_\ell(y)| \leq c_\ell |x - y|$ para $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $0 < c_\ell < 1$. Uma aplicação elegante do teorema da aplicação contrativa do Hutchinson (HUTCHINSON, 1981), mostra que existe um único conjunto compacto não-vazio $F \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$F = \bigcup_{\ell=1}^k S_\ell(F).$$

O conjunto F é chamado *conjunto invariante* de $\{S_1, \dots, S_k\}$. Se E for um conjunto compacto não vazio do \mathbb{R}^n tal que $S_\ell(E) \subset E$ para cada ℓ , então é fácil mostrar que $F = \bigcap_{r=1}^{\infty} F_r$, onde

$$F_r = \cup S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(E) \quad (4.1)$$

onde a união é feita sobre todas as sequências de comprimento r $\{(i_1, i_2, \dots, i_r) : 1 \leq i_\ell \leq k\}$. Em geral, F é um fractal e nosso interesse é calcular a *dimensão de Hausdorff* de F ($\dim_{\mathcal{H}} F$) em termos dos mapas S_i .

Se S_i são semelhanças, ou seja, se:

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i |x - y| \quad (1 \leq i \leq k),$$

então, $\dim_{\mathcal{H}} F$ é o único número s satisfazendo $\sum_{i=1}^k c_i^s = 1$.

Para obter este resultado a partir do Teorema 3.3.1 seria necessário uma hipótese adicional: assumir que existe um compacto convexo D tal que $S_i(D) \subset D$ e $S_i(D) \cap S_j(D) = \emptyset$, se $i \neq j$. No caso que estamos estudando neste capítulo, é suficiente que $\{S_1, \dots, S_k\}$ satisfaça a chamada *open set condition* (em uma tradução literal: "condição do conjunto aberto"), que diz: existe um conjunto aberto U tal que $U \supset \bigcup_{i=1}^k S_i(U)$ com a união sendo disjunta. Porém, este valor de s frequentemente nos dá a dimensão de Hausdorff de F mesmo que a condição do conjunto aberto não seja satisfeita.

É interessante estudar a situação mais geral, quando S_1, \dots, S_k são afins (ao invés de considerarmos apenas semelhanças). As aplicações S_ℓ podem ser escritas como $S_\ell = T_\ell + a_\ell$, onde T_ℓ é transformação linear em \mathbb{R}^n e a_ℓ é vetor do \mathbb{R}^n .

4.2 FUNÇÃO VALOR SINGULAR

Ao longo deste capítulo trabalharemos com transformações lineares $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ as quais assumiremos ser contrações não-singulares. É claro que o produto de transformações deste tipo continua sendo uma contração não-singular. Os *valores singulares* de T , denotados por $\alpha_i(T)$ com $1 \leq i \leq n$, são os comprimentos dos semi-eixos principais (mutuamente perpendiculares) de $T(B_1)$, onde B_1 é a bola unitária centrada na origem em \mathbb{R}^n . De forma equivalente, eles são as raízes quadradas positivas dos autovalores de T^*T , onde T^* é a adjunta de T . Nós adotamos a convenção $1 > \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n > 0$ para ordenar os n valores singulares da transformação T . Perceba que, quando o contexto permitir (i.e., quando não houver ambiguidade), usaremos α_i ao invés de $\alpha_i(T)$ para suavizar a notação.

A *função valor singular* $\phi^s(T)$, definida em termos dos valores singulares de T , é fundamental neste trabalho. Para $0 \leq s \leq n$, defina:

$$\phi^s(T) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m^{s-m+1}, \quad (4.2)$$

onde m é o inteiro tal que $m-1 < s \leq m$, i.e., $m = \lceil s \rceil$.

É tecnicamente interessante atribuir um valor para $\phi^s(T)$ para todo $s \geq 0$. Então escrevemos para $s > n$:

$$\phi^s(T) = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^{\frac{s}{n}} = (\det(T))^{\frac{s}{n}}. \quad (4.3)$$

Veremos a seguir que $\phi^s(T)$ é contínua e estritamente decrescente em s .

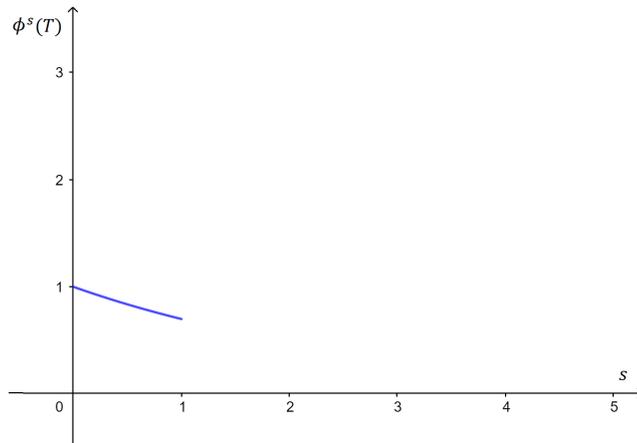
Breve estudo da função valor singular: Iremos esboçar o gráfico da função $\phi^s(T)$ em relação a s , analisar a continuidade e outras propriedades de $\phi^s(T)$.

Para $0 < s \leq 1$: Neste intervalo, $\phi^s(T) = \alpha_1^s = \exp(s \ln \alpha_1)$. A derivada desta função em um ponto $\tilde{s} \in (0, 1]$ é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \phi^s(T)(\tilde{s}) &= \phi^{\tilde{s}}(T) \ln \alpha_1 \\ &= \alpha_1^{\tilde{s}} \ln \alpha_1. \end{aligned}$$

Como $0 < \alpha_1 < 1$, então: para $0 < \tilde{s} < 1$, $\frac{d}{ds} \phi^s(T)(\tilde{s}) < 0$. Concluimos que a função é decrescente neste intervalo.

Em $\tilde{s} = 1$, podemos calcular as derivadas laterais (à direita e à esquerda), mas elas não são necessariamente iguais. Até agora o que podemos afirmar é que $\phi^1(T) = \alpha_1$ e que $\lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{\phi^s(T) - \phi^1(T)}{s-1} = \alpha_1 \ln \alpha_1$.

Figura 3 – Gráfico da função $\phi^s(T)$ em $(0, 1]$.

Fonte: A autora (2020)

Para $1 < s \leq 2$: Inicialmente, note que $\phi^s(T) = \alpha_1 \alpha_2^{s-1}$ (para todo $s \in (1, 2]$) e que $\lim_{s \rightarrow 1^+} \phi^s(T) = \alpha_1$ (o que demonstra a continuidade no ponto $s = 1$). De forma análoga a anterior, chegamos a conclusão que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \phi^s(T) (\tilde{s}) &= \phi^{\tilde{s}}(T) \ln \alpha_2 \\ &= \alpha_1 \alpha_2^{\tilde{s}-1} \ln \alpha_2 \end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{\phi^s(T) - \phi^1(T)}{s - 1} = \alpha_1 \ln \alpha_2 < 0.$$

Isto implica que $\phi^s(T)$ não é necessariamente diferenciável em $s = 1$, pois, dependendo dos valores de α_1 e α_2 , suas derivadas laterais podem não coincidir nesse ponto.

Então, o que podemos afirmar até agora é que: $\phi^s(T)$ é contínua e decrescente em $(0, 2)$.

Esta análise que estamos desenvolvendo pode ser facilmente estendida para $s \in (m - 1, m]$, com $m \leq n$. Basta prosseguir de forma análoga a anterior. Por fim, faremos a análise detalhada da função nos intervalos $(n - 1, n]$ e (n, ∞) .

Para $n - 1 < s$: Temos que $\phi^s(T) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n^{s-n+1}$, quando $s \in (n - 1, n]$. E que $\phi^s(T) = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n)^{\frac{s}{n}}$, quando $s > n$. Então:

- É válido que

$$\begin{aligned} \phi^n(T) &= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n \\ e \quad \lim_{s \rightarrow n^+} \phi^s(T) &= \lim_{s \rightarrow n^+} [(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n)^{\frac{s}{n}}] = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n. \end{aligned}$$

Portanto, $\phi^s(T)$ é contínua em $s = n$.

- Além disso,

$$\frac{d}{ds} \phi^s(T) (\tilde{s}) = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n)^{\frac{\tilde{s}}{n}} \frac{\ln \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}{n} < 0.$$

O que nos garante que $\phi^s(T)$, com $s > n$, é decrescente.

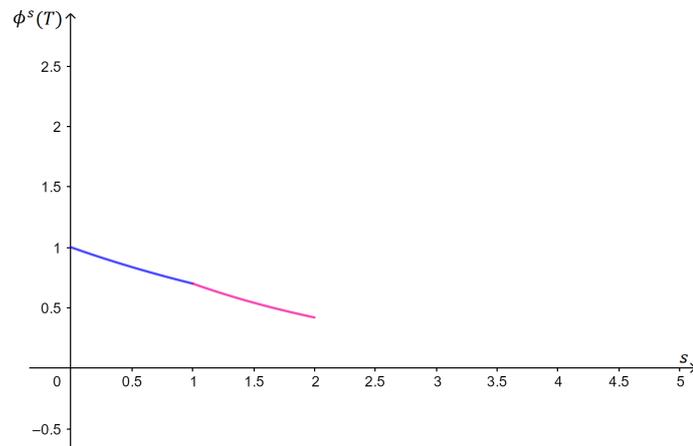
Para garantir a continuidade em $s = 0$ definimos $\phi^0(T)$ como sendo igual a 1, visto que $\lim_{s \rightarrow 0^+} \phi^s(T) = 1$.

Desta forma, vemos que $\phi^s(T)$ é contínua e decrescente em todo seu domínio.

Lema 4.2.1. *Se s é um inteiro com $1 \leq s \leq n$, então*

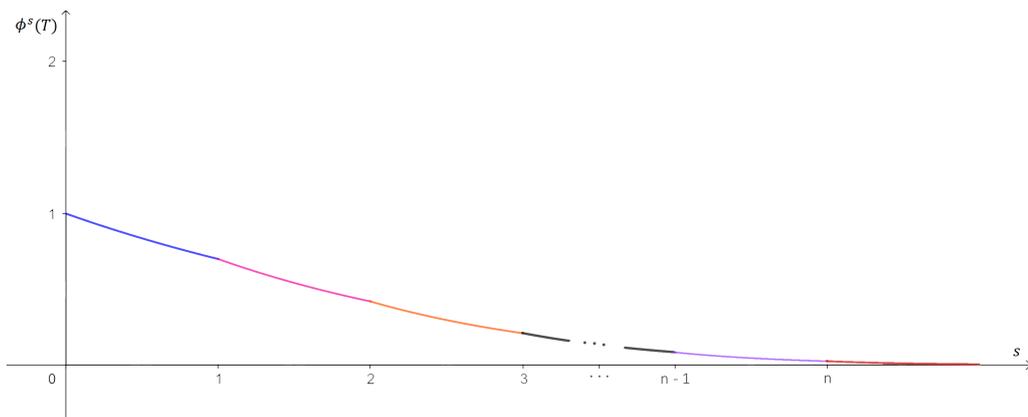
$$\phi^s(T) = \alpha_1 \dots \alpha_s = \sup \frac{\mathcal{L}^s(T(E))}{\mathcal{L}^s(E)}, \quad (4.4)$$

Figura 4 – Gráfico da função $\phi^s(T)$ em $(0, 2]$.



Fonte: A autora (2020)

Figura 5 – Gráfico da função $\phi^s(T)$



Fonte: A autora (2020)

onde \mathcal{L}^s é a medida s -dimensional de Lebesgue e o supremo é tomado sobre o conjunto dos elipsoides s -dimensionais E em \mathbb{R}^n .

Demonstração. O Apêndice B é dedicado à demonstração deste resultado. \square

Lema 4.2.2. Para cada $s \geq 0$, ϕ^s é submultiplicativa, isto é:

$$\phi^s(TU) \leq \phi^s(T)\phi^s(U), \quad (4.5)$$

para $T, U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Se $1 \leq s \leq n$ é um inteiro e \tilde{E} é um elipsoide s -dimensional, nós temos, usando (4.4):

$$\mathcal{L}^s(TU(\tilde{E})) = \mathcal{L}^s(T(U(\tilde{E}))) \leq \frac{\mathcal{L}^s(T(U(\tilde{E})))}{\mathcal{L}^s(U(\tilde{E}))} \mathcal{L}^s(U(\tilde{E}))$$

Se \tilde{E} é elipsoide s -dimensional, então $U(\tilde{E})$ está contido em um elipsoide s -dimensional.

Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^s(TU(\tilde{E})) &\leq \mathcal{L}^s(U(\tilde{E})) \sup_{\substack{E \text{ elipsoide} \\ s\text{-dimensional} \\ \text{em } \mathbb{R}^n}} \frac{\mathcal{L}^s(T(U(E)))}{\mathcal{L}^s(U(E))} \\ &\leq \phi^s(T) \mathcal{L}^s(U(\tilde{E})) \\ &\leq \phi^s(T) \mathcal{L}^s(\tilde{E}) \frac{\mathcal{L}^s(U(\tilde{E}))}{\mathcal{L}^s(\tilde{E})} \\ &\leq \phi^s(T) \mathcal{L}^s(\tilde{E}) \sup_{\substack{E \text{ elipsoide} \\ s\text{-dimensional} \\ \text{em } \mathbb{R}^n}} \frac{\mathcal{L}^s(U(E))}{\mathcal{L}^s(E)} \\ &\leq \phi^s(T)\phi^s(U)\mathcal{L}^s(\tilde{E}). \end{aligned}$$

Logo, $\frac{\mathcal{L}^s(TU(\tilde{E}))}{\mathcal{L}^s(\tilde{E})} \leq \phi^s(T)\phi^s(U)$ e isto é válido para todo elipsoide \tilde{E} s -dimensional em \mathbb{R}^n . Portanto, vale também para o supremo:

$$\sup_{\substack{E \text{ elipsoide} \\ s\text{-dimensional} \\ \text{em } \mathbb{R}^n}} \frac{\mathcal{L}^s(TU(\tilde{E}))}{\mathcal{L}^s(\tilde{E})} = \phi^s(TU) \leq \phi^s(T)\phi^s(U)$$

Concluimos que (4.5) é válida para s inteiro, $s \leq n$.

Se $m - 1 < s \leq m$ onde $m \in \mathbb{Z}, m \leq n$, temos:

$$\begin{aligned}\phi^s(TU) &= \alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m^{s-m+1} \\ &= (\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m)^{s-m+1} (\alpha_1 \dots \alpha_{m-1})^{m-s} \\ &= [\phi^m(TU)]^{s-m+1} [\phi^{m-1}(TU)]^{m-s}\end{aligned}$$

No caso inteiro, com $s \leq n$, já sabemos que (4.5) funciona, então:

$$\begin{aligned}\phi^m(TU) &\leq \phi^m(T)\phi^m(U) \\ \phi^{m-1}(TU) &\leq \phi^{m-1}(T)\phi^{m-1}(U)\end{aligned}$$

Desta forma:

$$\begin{aligned}\phi^s(TU) &= [\phi^m(TU)]^{s-m+1} [\phi^{m-1}(TU)]^{m-s} \\ &\leq [\phi^m(T)\phi^m(U)]^{s-m+1} [\phi^{m-1}(T)\phi^{m-1}(U)]^{m-s} \\ &\leq [\phi^m(T)]^{s-m+1} [\phi^{m-1}(T)]^{m-s} [\phi^m(U)]^{s-m+1} [\phi^{m-1}(U)]^{m-s} \\ &\leq \phi^s(T)\phi^s(U)\end{aligned}$$

O que prova a validade de (4.5) neste caso.

Por fim, se $s > n$ então a regra para o produto de determinantes implica que ϕ^s é multiplicativa (em particular, submultiplicativa).

□

A estimativa a seguir, em termos da função valor singular, será necessária mais a frente. No que segue, consideramos B_ρ a bola do \mathbb{R}^n centrada na origem e com raio ρ .

Lema 4.2.3. *Seja $s \in (0, n)$ um número não-inteiro. Então, existe um número $\lambda < \infty$, dependente de n, s e ρ tal que:*

$$I = \int_{B_\rho} \frac{dx}{|Tx|^s} \leq \frac{\lambda}{\phi^s(T)}$$

para toda $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ não singular.

Demonstração. É fato que, para toda transformação linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $|Tx| = \sqrt{\langle Tx, Tx \rangle}$ e que $\langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle$, onde T^* é a matriz adjunta de T . Daí:

$$\begin{aligned}I &= \int_{B_\rho} \frac{dx}{\langle Tx, Tx \rangle^{\frac{s}{2}}} \\ &= \int_{B_\rho} \frac{dx}{\langle x, T^*Tx \rangle^{\frac{s}{2}}}\end{aligned}$$

O operador T^*T é auto-adjunto, visto que $(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$. E, portanto, diagonalizável. Além disso, T^*T é um operador não-negativo. Isto implica que todos os seus autovalores são não-negativos. Assim sendo, podemos representar cada um dos seus n autovalores como o quadrado dos valores singulares de T .

Escolhemos eixos coordenados x_1, \dots, x_n nas direções dos autovetores de T^*T correspondentes aos autovalores $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2$. Tomando $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ como sendo a base ortonormal de autovetores de T^*T , de forma que:

- u_i está relacionado ao autovalor α_i^2 .
- o eixo x_i está na direção do autovetor u_i .

Então, dado $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x = x_1u_1 + \dots + x_nu_n = \sum_{i=1}^n x_iu_i,$$

com $x_i \in \mathbb{R}$. Daí,

$$\begin{aligned} T^*T(x) &= T^*T\left(\sum_{i=1}^n x_iu_i\right) = \sum_{i=1}^n x_iT^*T(u_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i(\alpha_i^2u_i) \\ &= (\alpha_1^2x_1, \dots, \alpha_n^2x_n), \end{aligned}$$

em coordenadas na base $\{u_1, \dots, u_n\}$. Então,

$$\langle x, T^*Tx \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (\alpha_1^2x_1, \dots, \alpha_n^2x_n) \rangle = \alpha_1^2x_1^2 + \dots + \alpha_n^2x_n^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &= \int_{B_\rho} \frac{dx}{\langle x, T^*Tx \rangle^{\frac{5}{2}}} \\ &\leq \int \dots \int_{B_\rho} \frac{dx_1 \dots dx_n}{(\alpha_1^2x_1^2 + \dots + \alpha_n^2x_n^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

Substituindo $y_i = \frac{\alpha_i x_i}{\rho}$, temos:

$$y_i = \frac{\alpha_i x_i}{\rho} \quad \implies \quad \alpha_i^2 x_i^2 = \rho^2 y_i^2$$

Daí,

$$\alpha_1^2 x_1^2 + \dots + \alpha_n^2 x_n^2 = \rho^2 (y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

$$\implies dx_i = \frac{\rho}{\alpha_i} dy_i.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1 \dots dx_n}{(\alpha_1^2 x_1^2 + \dots + \alpha_n^2 x_n^2)^{\frac{s}{2}}} &= \frac{\rho^n}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{dy_1 \dots dy_n}{(\rho^2)^{\frac{s}{2}} (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{\frac{s}{2}}} \\ &= \frac{\rho^{n-s}}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{dy_1 \dots dy_n}{(y_1^2 + \dots + y_n^2)^{\frac{s}{2}}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\rho^{s-n} (\alpha_1 \dots \alpha_n) I \leq \int \dots \int_P \frac{dy_1 \dots dy_n}{(y_1^2 + \dots + y_n^2)^{\frac{s}{2}}}, \quad (4.6)$$

onde P é o paralelepípedo retangular $\{y = (y_1, \dots, y_n) : |y_i| \leq \alpha_i\}$. Note que:

$$\begin{aligned} B_\rho &= \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| \leq \rho\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n ; \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \rho\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n ; x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq \rho^2\}. \end{aligned}$$

Então,

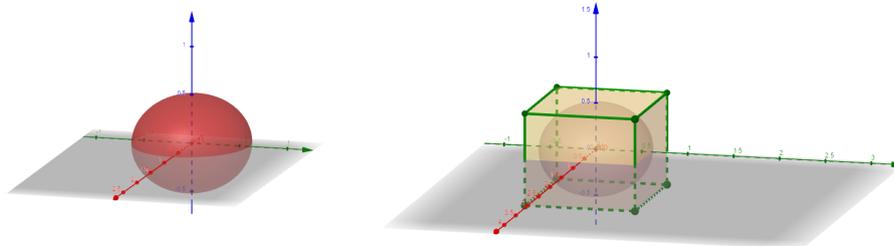
$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = \rho^2 \left(\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \dots + \frac{y_n^2}{\alpha_n^2} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} x \in B_\rho &\Leftrightarrow \rho^2 \left(\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \dots + \frac{y_n^2}{\alpha_n^2} \right) \leq \rho^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \dots + \frac{y_n^2}{\alpha_n^2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow y \in \hat{E}, \end{aligned}$$

onde \hat{E} é o elipsoide com eixos principais na direção dos vetores u_1, \dots, u_n e com semieixos de tamanho $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Por fim, note que $\hat{E} \subset P$. Então, a desigualdade (4.6) é válida.

Figura 6 – Elipsoide \hat{E}



Fonte: A autora (2020).

- I. Representação do elipsoide \hat{E} em \mathbb{R}^3 .
- II. Visualização da inclusão $\hat{E} \subset P$ em \mathbb{R}^3 .

Seja m o número inteiro tal que $m - 1 < s \leq m$. Escrevendo:

$$P_1 = \{y \in P : y_1^2 + \cdots + y_m^2 \leq 4\alpha_m^2\} \quad (4.7)$$

$$e \quad P_2 = \{y \in P : y_1^2 + \cdots + y_{m-1}^2 > \alpha_m^2\} \quad (4.8)$$

nós temos que $P \subset P_1 \cup P_2$.

De fato, digamos que $y = (y_1, \dots, y_{m-1}, y_m, \dots, y_n) \in P$ e que $y \notin P_1 \cap P_2$, i.e.,

$$\begin{aligned} y_1^2 + \cdots + y_m^2 &> 4\alpha_m^2 \\ y_1^2 + \cdots + y_{m-1}^2 &\leq \alpha_m^2, \end{aligned}$$

daí, teríamos que:

$$4\alpha_m^2 < y_1^2 + \cdots + y_{m-1}^2 + y_m^2 \leq \alpha_m^2 + y_m^2 \leq 2\alpha_m^2,$$

já que $|y_m| \leq \alpha_m$ em P , o que é impossível. Isto implica que:

$$P \subset P_1 \cup P_2.$$

Note que:

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_P \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{s}{2}}} &\leq \int \cdots \int_{P_1} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{s}{2}}} + \int \cdots \int_{P_2} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{s}{2}}} \\ &\leq \int \cdots \int_{P_1} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(y_1^2 + \cdots + y_m^2)^{\frac{s}{2}}} + \int \cdots \int_{P_2} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(y_1^2 + \cdots + y_{m-1}^2)^{\frac{s}{2}}}, \end{aligned}$$

pois $y_1^2 + \cdots + y_{m-1}^2 \leq y_1^2 + \cdots + y_m^2 \leq y_1^2 + \cdots + y_n^2$ e $s \geq 0$.

Além disso, temos que:

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_{P_1} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(y_1^2 + \cdots + y_m^2)^{\frac{s}{2}}} &= \int_{-\alpha_{m+1}}^{\alpha_{m+1}} \cdots \int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} dy_{m+1} \cdots dy_n \int \cdots \int_{P_1} \frac{dy_1 \cdots dy_m}{(y_1^2 + \cdots + y_m^2)^{\frac{s}{2}}} \\ &= \tilde{c}_1 \alpha_{m+1} \cdots \alpha_n \int_0^{2\alpha_m} \frac{r^{m-1} dr}{r^s}, \end{aligned}$$

ao passarmos para coordenadas polares. De maneira análoga, obtemos que

$$\int \cdots \int_{P_2} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(y_1^2 + \cdots + y_{m-1}^2)^{\frac{s}{2}}} \leq \tilde{c}_2 \alpha_m \cdots \alpha_n \int_{\alpha_m}^{\infty} r^{-s} r^{m-2} dr.$$

Assim, nós obtemos de (4.6):

$$\begin{aligned} \rho^{s-n} (\alpha_1 \cdots \alpha_n) I &\leq \int \cdots \int_P \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(y_1^2 + \cdots + y_m^2)^{\frac{s}{2}}} \\ &\leq \tilde{c}_1 \alpha_{m-1} \cdots \alpha_n \int_0^{2\alpha_m} r^{-s} r^{m-1} dr \\ &\quad + \tilde{c}_2 \alpha_{m+1} \cdots \alpha_n \int_{\alpha_m}^{\infty} r^{-s} r^{m-2} dr. \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\leq \tilde{c}_1 \alpha_{m+1} \cdots \alpha_n \alpha_m^{m-s} + \tilde{c}_2 \alpha_m \cdots \alpha_n \alpha_m^{m-s-1}, \quad (4.10)$$

com $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{\tilde{c}}_1, \tilde{\tilde{c}}_2 \in \mathbb{R}$.

A desigualdade (4.10) é provada calculando as integrais em (4.9).

Finalmente, concluímos que:

$$\begin{aligned} \rho^{s-n}(\alpha_1 \dots \alpha_n) I &\leq \tilde{\tilde{c}}_1 \alpha_{m+1} \dots \alpha_n \alpha_m^{m-s} + \tilde{\tilde{c}}_2 \alpha_{m+1} \dots \alpha_n \alpha_m^{m-s} \\ &\leq (\tilde{\tilde{c}}_1 + \tilde{\tilde{c}}_2) \alpha_{m+1} \dots \alpha_n \alpha_m^{m-s} \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{1}{\rho^{s-n}(\alpha_1 \dots \alpha_n)} (\tilde{\tilde{c}}_1 + \tilde{\tilde{c}}_2) \alpha_{m+1} \dots \alpha_n \alpha_m^{m-s} \\ &\leq \frac{\tilde{\tilde{c}}_1 + \tilde{\tilde{c}}_2}{\rho^{s-n}} \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m^{s-m+1}} \\ &\leq \lambda \frac{1}{\phi^s(T)}, \end{aligned}$$

onde $\lambda = \frac{\tilde{\tilde{c}}_1 + \tilde{\tilde{c}}_2}{\rho^{s-n}}$ é, de fato, uma constante que depende apenas de n, s e ρ . \square

4.3 PRODUTOS DE MATRIZES INDEXADAS POR SEQUÊNCIAS

Para $r \geq 1$ seja $J_r = \{(w_1, \dots, w_r) : 1 \leq w_\ell \leq k\}$ o conjunto das sequências de tamanho r formadas pelos números inteiros de 1 a k . Adotamos a convenção que J_0 é o conjunto formado pela sequência vazia (\emptyset). Denotamos o conjunto de todas as sequências finitas por $J = \bigcup_{r=0}^{\infty} J_r$ e chamamos de $J_\infty = \{(i_1, i_2, i_3, \dots) : 1 \leq i_\ell \leq k\}$ o conjunto das sequências infinitas. Abreviamos o membro (w_1, \dots, w_r) de J por \mathbf{w} e (i_1, i_2, i_3, \dots) de J_∞ por \mathbf{i} .

Denotamos o número de termos em $\mathbf{w} \in J$ por $|\mathbf{w}|$ (se $\mathbf{w} \in J_r$, por exemplo, então $|\mathbf{w}| = r$). Podemos obter sequências a partir da justaposição de duas outras: se $\mathbf{w}, \mathbf{u} \in J$ denotamos por $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$ a sequência obtida por justaposição dos termos de \mathbf{w} e \mathbf{u} , neste caso $|\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}| = |\mathbf{w}| + |\mathbf{u}|$. Note que nada nos impede de justapor um termo de J com uma sequência infinita, em J_∞ : dados $\mathbf{w} \in J$ e $\mathbf{i} \in J_\infty$ está bem definida a sequência $\mathbf{w} \cdot \mathbf{i} \in J_\infty$.

Se $\mathbf{u} \in J$ é um encurtamento de $\mathbf{w} \in J$, ou seja, se existe $\mathbf{w}' \in J$ tal que $\mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}'$, então escrevemos $\mathbf{u} < \mathbf{w}$. Perceba que podemos estender a definição acima para sequências infinitas: $\mathbf{u} \in J$ é dito um encurtamento de $\mathbf{i} \in J_\infty$ se existir $\mathbf{i}' \in J_\infty$ tal que $\mathbf{i} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}'$, neste caso também dizemos que $\mathbf{u} < \mathbf{i}$. Para \mathbf{i}, \mathbf{j} distintos (podem ser elementos de J ou de J_∞), definimos $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$ como sendo a maior sequência tal que $(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) < \mathbf{i}$ e $(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) < \mathbf{j}$.

Denotando elementos genéricos:

- $\mathbf{w} \in J$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_r)$, com $1 \leq w_\ell \leq k$, ou seja, $\mathbf{w} \in J_r$.
- $\mathbf{u} \in J$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, com $1 \leq u_\ell \leq k$, ou seja $\mathbf{u} \in J_m$.
- $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in J_\infty$, $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots)$ e $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots)$, com $1 \leq i_\ell, j_\ell \leq k$.

temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} &= (w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_m), \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= (u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_r), \\ |\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}| &= |\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}| = r + m, \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{i} &= (w_1, \dots, w_r, i_1, i_2, \dots) \in J_\infty, \\ \mathbf{w} < \mathbf{u} &\iff w_\ell = u_\ell, \ell \in \{1, \dots, r\} \text{ (em particular, } r \leq m). \end{aligned}$$

Além disso, se $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = (v_1, \dots, v_p)$ então:

$$\begin{aligned} i_1 = v_1 = j_1 \quad , \quad i_2 = v_2 = j_2 \\ \dots \quad , \quad i_p = v_p = j_p \\ \text{e} \quad i_{p+1} \neq j_{p+1}. \end{aligned}$$

Perceba que, se $i_1 \neq j_1$, então $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$ é a sequência vazia (\emptyset), e que $(\emptyset) < \mathbf{i}$, para toda sequência \mathbf{i} em J e em J_∞ .

Exemplo 4.3.1. *Sejam*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = (1, 1, 2) \quad , \quad \mathbf{u}' = (1, 1, 2, 4, 8, 7) \quad , \quad \mathbf{u}'' = (2, 2, 2, 2, 2) \\ \mathbf{w} = (9, 5, 6) \quad , \quad \mathbf{w}' = (9, 5, 6, 3, 7, 7) \quad , \quad \mathbf{i} = (1, 1, 2, 3, 4, 1, \dots) \\ \mathbf{i}' = (2, 2, 1, 5, 1, \dots) \quad , \quad \mathbf{j} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots) \quad , \quad \mathbf{j}' = (2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots) \end{aligned}$$

As seguintes relações são verdadeiras:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} < \mathbf{u}' \quad , \quad \mathbf{w} < \mathbf{w}' \quad , \quad \mathbf{u}'' < \mathbf{j}' , \\ \mathbf{i} \wedge \mathbf{i}' = (\emptyset) \quad , \quad \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = (1, 1) , \\ \mathbf{j}' \wedge \mathbf{w}' = (\emptyset) \quad , \quad \mathbf{i}' \wedge \mathbf{j}' = (2, 2) . \end{aligned}$$

Nosso objetivo agora é realizar composições com as transformações lineares T_1, \dots, T_k em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, utilizando as sequências finitas $\mathbf{u} \in J$ para indexar tais produtos. Sempre assumimos que $k \geq 2$.

Desta forma, se $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)$, definimos

$$T_{\mathbf{u}} = T_{u_1} \circ T_{u_2} \circ \dots \circ T_{u_r},$$

com $T_{(\emptyset)} = Id$, o mapa identidade em \mathbb{R}^n .

Pelo Lema 4.2.2 concluímos que

$$\phi^s(T_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}) \leq \phi^s(T_{\mathbf{u}})\phi^s(T_{\mathbf{w}}), \quad (4.11)$$

pois, $T_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}} = T_{\mathbf{u}} \circ T_{\mathbf{w}}$.

Agora, assumindo que T_ℓ ($1 \leq \ell \leq k$) são contrações injetivas com valores singulares satisfazendo¹

$$1 > a \geq \alpha_1(T_\ell) \geq \alpha_2(T_\ell) \geq \dots \geq \alpha_n(T_\ell) \geq b > 0, \quad (4.12)$$

para todo $1 \leq \ell \leq k$, então para todo $\mathbf{u} \in J$:

$$b^{s|\mathbf{u}|} \leq \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \leq a^{s|\mathbf{u}|}. \quad (4.13)$$

Afirmção 4.3.1. *As desigualdades em (4.13) são válidas.*

Prova. Para $0 \leq s \leq n$, temos que:

$$\phi^s(T) = \alpha_1(T)\alpha_2(T) \dots \alpha_{m-1}(T)\alpha_m^{s-m+1}(T), \text{ onde } m-1 < s \leq m.$$

Então,

$$\phi^s(T_\ell) = \alpha_1(T_\ell)\alpha_2(T_\ell) \dots \alpha_{m-1}(T_\ell)\alpha_m^{s-m+1}(T_\ell) \leq \underbrace{a \dots a}_{m-1 \text{ vezes}} a^{s-m+1} = a^s$$

Como $T_{\mathbf{u}} = T_{u_1} \circ \dots \circ T_{u_r}$, onde $1 \leq u_j \leq k$, e ϕ^s é submultiplicativa:

$$\phi^s(T_{\mathbf{u}}) \leq \phi^s(T_{u_1})\phi^s(T_{u_2}) \dots \phi^s(T_{u_r}) \leq \underbrace{a^s a^s \dots a^s}_{r = |\mathbf{u}| \text{ vezes}} = a^{s|\mathbf{u}|}.$$

Pelo Lema A.0.1,

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{u}} &= T_{u_1} \circ T_{u_2} \circ \dots \circ T_{u_r} = T_{u_1} \circ (T_{u_2} \circ \dots \circ T_{u_r}) \\ &\implies \alpha_n(T_{u_1})\alpha_v(T_{u_2} \circ \dots \circ T_{u_r}) \leq \alpha_v(T_{\mathbf{u}}). \end{aligned}$$

¹ Todas as T_ℓ 's são contrações não-singulares, o que nos leva a afirmar que: $1 > \alpha_1(T_\ell) \geq \alpha_2(T_\ell) \geq \dots \geq \alpha_n(T_\ell) > 0$ para toda T_ℓ . Como há um número finito de transformações, existem constantes a, b tais que a equação (4.12) é verdadeira para todo T_ℓ ($1 \leq \ell \leq k$).

Mas, $T_{u_2} \circ \dots \circ T_{u_r} = T_{u_2} \circ (T_{u_3} \circ \dots \circ T_{u_r})$, então: $\alpha_n(T_{u_1}) \alpha_n(T_{u_2}) \alpha_v(T_{u_3} \circ \dots \circ T_{u_r}) \leq \alpha_v(T_{\mathbf{u}})$. Repetindo este procedimento, temos que

$$\alpha_n(T_{u_1}) \alpha_n(T_{u_2}) \dots \alpha_n(T_{u_{r-1}}) \alpha_v(T_{u_r}) \leq \alpha_v(T_{\mathbf{u}}).$$

E, como (4.12) é satisfeita por todo T_ℓ , $1 \leq \ell \leq k$, então $b^{|\mathbf{u}|} \leq \alpha_v(T_{\mathbf{u}})$, $\forall v \in \{1, \dots, n\}$. Finalmente, concluimos que

$$\phi^s(T_{\mathbf{u}}) = \alpha_1(T_{\mathbf{u}}) \alpha_2(T_{\mathbf{u}}) \dots \alpha_{m-1}(T_{\mathbf{u}}) \alpha_m^{s-m+1}(T_{\mathbf{u}}) \geq \underbrace{b^{|\mathbf{u}|} \dots b^{|\mathbf{u}|}}_{m-1 \text{ vezes}} b^{|\mathbf{u}|(s-m+1)} \geq b^{|\mathbf{u}|s}.$$

Para $s > n$ segue de maneira análoga. ■

Se $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots) \in J_\infty$ e $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^{nk}$, escrevemos:

$$x_i(\mathbf{a}) = \lim_{r \rightarrow \infty} (T_{i_1} + a_{i_1})(T_{i_2} + a_{i_2}) \dots (T_{i_r} + a_{i_r})(0) \quad (4.14)$$

$$= a_{i_1} + T_{i_1} a_{i_2} + T_{i_1} T_{i_2} a_{i_3} + \dots \quad (4.15)$$

$$= a_{i_1} + \sum_{\ell=1}^{\infty} T_{i_1} \dots T_{i_\ell} a_{i_{\ell+1}}. \quad (4.16)$$

O limite descrito em (4.14) converge para a série $a_{i_1} + \sum_{\ell=1}^{\infty} T_{i_1} \dots T_{i_\ell} a_{i_{\ell+1}}$, basta observar a tendência abaixo:

$$\begin{aligned} & (T_{i_1} + a_{i_1})(T_{i_2} + a_{i_2}) \dots (T_{i_{r-2}} + a_{i_{r-2}})(T_{i_{r-1}} + a_{i_{r-1}})(T_{i_r} + a_{i_r})(0) \\ = & (T_{i_1} + a_{i_1})(T_{i_2} + a_{i_2}) \dots (T_{i_{r-2}} + a_{i_{r-2}})(T_{i_{r-1}} + a_{i_{r-1}})(T_{i_r}(0) + a_{i_r}) \\ = & (T_{i_1} + a_{i_1})(T_{i_2} + a_{i_2}) \dots (T_{i_{r-2}} + a_{i_{r-2}})(T_{i_{r-1}}(a_{i_r}) + a_{i_{r-1}}) \\ = & (T_{i_1} + a_{i_1})(T_{i_2} + a_{i_2}) \dots (T_{i_{r-2}}(T_{i_{r-1}}(a_{i_r}) + a_{i_{r-1}}) + a_{i_{r-2}}) \\ = & (T_{i_1} + a_{i_1})(T_{i_2} + a_{i_2}) \dots (T_{i_{r-2}} T_{i_{r-1}}(a_{i_r}) + T_{i_{r-2}}(a_{i_{r-1}}) + a_{i_{r-2}}) \\ \dots & \\ = & T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_{r-2}} T_{i_{r-1}}(a_{i_r}) + T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_{r-2}}(a_{i_{r-1}}) + \dots + T_{i_1} T_{i_2}(a_{i_3}) + T_{i_1}(a_{i_2}) + a_{i_1}. \end{aligned}$$

Afirmação 4.3.2. A definição de $x_i(\mathbf{a})$ não depende do ponto inicial, i.e., podemos definir

$$x_i(\mathbf{a}) = \lim_{r \rightarrow \infty} (T_{i_1} + a_{i_1})(T_{i_2} + a_{i_2}) \dots (T_{i_r} + a_{i_r})(z), \quad (4.17)$$

para qualquer $z \in \mathbb{R}^n$.

Prova. Seja $y_r = S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(y)$. Temos que:

$$\begin{aligned} & |y_r - S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(0)| \\ &= |S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(y) - S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(0)| \\ &= |S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_{r-1}}(T_{i_r}(y) + a_{i_r}) - S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_{r-1}}(T_{i_r}(0) + a_{i_r})| \\ &= |S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_{r-2}}(T_{i_{r-1}}(T_{i_r}(y) + a_{i_r}) + a_{i_{r-1}}) - S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_{r-2}}(T_{i_{r-1}}(a_{i_r}) + a_{i_{r-1}})| \\ &= |S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_{r-2}}(T_{i_{r-1}} T_{i_r}(y) + T_{i_{r-1}} a_{i_r} + a_{i_{r-1}}) - S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_{r-2}}(T_{i_{r-1}}(a_{i_r}) + a_{i_{r-1}})| \\ &\quad \vdots \\ &= |(T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_{r-1}} T_r(y) + T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_{r-1}} a_{i_r} + \dots + T_{i_1} T_{i_2} a_{i_3} + T_{i_1} a_{i_2} + a_{i_1}) \\ &\quad - (T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_{r-1}} a_{i_r} + \dots + T_{i_1} T_{i_2} a_{i_3} + T_{i_1} a_{i_2} + a_{i_1})| \\ &= |T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_r}(y)|. \end{aligned}$$

Sabemos que T_ℓ ($1 \leq \ell \leq k$) são transformações lineares contrativas. Então,

$$|T_\ell(y)| \leq c_\ell |y|,$$

com $c_\ell < 1$. Seja $c = \max_{1 \leq \ell \leq k} c_\ell$. Temos que:

$$\begin{aligned} |y_r - S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(0)| &= |T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_r}(y)| \\ &\leq c^r |y|. \end{aligned}$$

Como y é um ponto fixado do \mathbb{R}^n , sua norma é constante. Então,

$$|y_r - S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(0)| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Pela unicidade do limite,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} y_r = \lim_{r \rightarrow \infty} S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(0) = x_i(\mathbf{a}).$$

■

Provaremos agora que o conjunto invariante é dado por

$$F(\mathbf{a}) = \bigcup_{\mathbf{i} \in J_\infty} x_i(\mathbf{a}). \quad (4.18)$$

Afirmção 4.3.3. *A igualdade (4.18) é válida.*

Prova. Inicialmente vamos provar que $F(\mathbf{a}) \subset \bigcup_{\mathbf{i} \in J_\infty} x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a})$.

Dado um conjunto compacto não-vazio $E \subset \mathbb{R}^n$ tal que $S_\ell(E) \subset E$ para todo $1 \leq \ell \leq k$, temos que:

$$F(\mathbf{a}) = \bigcap_{r=1}^{\infty} F_r, \quad \text{onde } F_r = \bigcup_{\mathbf{u} \in J_r} S_{\mathbf{u}}(E).$$

Assim, dado $x \in F(\mathbf{a})$, é fato que $x \in \bigcap_{r=1}^{\infty} F_r$, i.e., $x \in F_r$, para todo r . Dessa forma, dado $r \in \mathbb{N}$, $x = S_{\mathbf{u}^r}(y_r)$, para alguma sequência $\mathbf{u}^r = (u_1^r, u_2^r, \dots, u_r^r)$ e para algum $y_r \in E$. Então, temos:

$$\begin{aligned} x &= S_{u_1^1}(y_1) \\ x &= S_{u_1^2} S_{u_2^2}(y_2) \\ x &= S_{u_1^3} S_{u_2^3} S_{u_3^3}(y_3) \\ &\vdots \\ x &= S_{u_1^r} S_{u_2^r} \dots S_{u_{r-1}^r} S_{u_r^r}(y_r) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Cada um dos termos da sequência infinita $(u_1^r)_{r \in \mathbb{N}}$ pertence ao conjunto $\{1, \dots, k\}$. Então, pelo Princípio da Casa dos Pombos, existe $w_1 \in \{1, \dots, k\}$ tal que $u_1^r = w_1$ para infinitos valores de r . Definimos $\Omega_1 = \{r \in \mathbb{N} : u_1^r = w_1\}$ e tomamos a subsequência $(u_1^{r_\ell^1})_{\ell \in \mathbb{N}}$ de $(u_1^r)_{r \in \mathbb{N}}$, onde $r_\ell^1 \in \Omega_1$, para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Ou seja, $u_1^{r_\ell^1} = w_1$, para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Agora temos:

$$\begin{aligned} x &= S_{u_1^{r_1^1}} S_{u_2^{r_1^1}} \dots S_{u_{r_1^1}^{r_1^1}}(y_{r_1^1}) \\ x &= S_{u_1^{r_2^1}} S_{u_2^{r_2^1}} \dots S_{u_{r_2^1}^{r_2^1}}(y_{r_2^1}) \\ x &= S_{u_1^{r_3^1}} S_{u_2^{r_3^1}} \dots S_{u_{r_3^1}^{r_3^1}}(y_{r_3^1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que cada termo da sequência infinita $(u_2^{r_\ell^1})_{\ell \in \mathbb{N}}$ pertence a $\{1, \dots, k\}$. Então, como anteriormente, o Princípio da Casa dos Pombos nos garante a existência de $w_2 \in \{1, \dots, k\}$ tal que $u_2^{r_\ell^1} = w_2$ para infinitos ℓ 's em \mathbb{N} . De forma análoga definimos $\Omega_2 = \{r_\ell^1 \in \mathbb{N} : u_2^{r_\ell^1} = w_2\}$ e tomamos a subsequência $(u_2^{r_\ell^2})_{\ell \in \mathbb{N}}$ tal que $r_\ell^2 \in \Omega_2$, para todo $\ell \in \mathbb{N}$, i.e.,

$u_2^{r_\ell^2} = w_2$, para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Dessa forma, temos as igualdades:

$$\begin{aligned} x &= S_{w_1} S_{w_2} \dots S_{u_{r_1^1}^{r_1^1}}(y_{r_1^2}) \\ x &= S_{w_1} S_{w_2} \dots S_{u_{r_2^1}^{r_2^1}}(y_{r_2^2}) \\ x &= S_{w_1} S_{w_2} \dots S_{u_{r_3^1}^{r_3^1}}(y_{r_3^2}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Seguindo este argumento, seja \tilde{r} a subsequência de $r, r_\ell^1, r_\ell^2, r_\ell^3, \dots$ tal que $u_\ell^{\tilde{r}} = w_\ell$, para todo $\ell \in \mathbb{N}$.

Definimos $z_{\tilde{r}} = S_{w_1} S_{w_2} \dots S_{w_{\tilde{r}}}(0)$ e denotamos $\mathbf{j} = (w_1, w_2, \dots, w_{\tilde{r}}, \dots)$. Por (4.14), $z_{\tilde{r}} \xrightarrow{\tilde{r} \rightarrow \infty} x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a})$. Vamos mostrar que $x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a}) = x$.

Temos que:

$$|x - z_{\tilde{r}}| = |S_{w_1} S_{w_2} \dots S_{w_{\tilde{r}-1}} S_{w_{\tilde{r}}}(y_{\tilde{r}}) - S_{w_1} S_{w_2} \dots S_{w_{\tilde{r}-1}} S_{w_{\tilde{r}}}(0)|.$$

Mas,

$$S_{w_1} S_{w_2} \dots S_{w_{\tilde{r}-1}} S_{w_{\tilde{r}}}(y_{\tilde{r}}) - S_{w_1} S_{w_2} \dots S_{w_{\tilde{r}-1}} S_{w_{\tilde{r}}}(0) = T_{w_1} T_{w_2} \dots T_{w_{\tilde{r}-1}} T_{w_{\tilde{r}}}(y_{\tilde{r}}).$$

Portanto,

$$|x - z_{\tilde{r}}| = |T_{w_1} T_{w_2} \dots T_{w_{\tilde{r}-1}} T_{w_{\tilde{r}}}(y_{\tilde{r}})|.$$

Tomando $c = \max_{1 \leq \ell \leq k} c_\ell < 1$, satisfazendo $|T_\ell(y)| \leq c_\ell |y|$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Temos que:

$$|x - z_{\tilde{r}}| = |T_{w_1} T_{w_2} \dots T_{w_{\tilde{r}-1}} T_{w_{\tilde{r}}}(y_{\tilde{r}})| \leq c^{\tilde{r}} |y_{\tilde{r}}| \leq c^{\tilde{r}} (\text{diam } E + \text{dist}(0, E)),$$

onde:

- $\text{dist}(0, E)$ é a distância entre conjunto E e a origem 0 do \mathbb{R}^n . Como E está fixado, $\text{dist}(0, E)$ é constante.
- E é um conjunto compacto no \mathbb{R}^n , logo é limitado: $\text{diam } E < \infty$.
- c é constante menor que 1.

Logo:

$$|x - z_{\tilde{r}}| \xrightarrow{\tilde{r} \rightarrow \infty} 0 \quad \implies \quad x \xrightarrow{\tilde{r} \rightarrow \infty} 0.$$

Pela unicidade do limite, temos que $x = x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a})$. Então, dado $x \in F(\mathbf{a})$, $\exists \mathbf{j} \in J_\infty$ tal que $x = x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a})$. Dessa forma, $F(\mathbf{a}) \subset \bigcup_{\mathbf{i} \in J_\infty} x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a})$.

Agora vamos mostrar que $\bigcup_{\mathbf{i} \in J_\infty} x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) \subset F(\mathbf{a})$.

Por definição, temos que:

$$x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) = \lim_{r \rightarrow \infty} S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(0).$$

Podemos escrever $x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a})$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) &= \lim_{r \rightarrow \infty} S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(0) \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(S_{i_{r+1}} \dots S_{i_{r+\ell}}(0)) \\ &= S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(\lim_{\ell \rightarrow \infty} S_{i_{r+1}} \dots S_{i_{r+\ell}}(0)) \\ &= S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(x_{\mathbf{i}^{(r)}}(\mathbf{a})) \end{aligned}$$

onde $\mathbf{i}^{(r)} = (i_{r+1}, i_{r+2}, i_{r+3}, \dots) \in J_\infty$, ou seja, $\mathbf{i}^{(r)}$ é a sequência \mathbf{i} subtraída dos seus r primeiros termos.

Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto não-vazio tal que $S_\ell(E) \subset E$ para todo $1 \leq \ell \leq k$ e suponha que $0 \in E$. Daí, dado $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3, \dots) \in J_\infty$:

$$\begin{aligned} 0 &\in E \\ S_{j_1}(0) &\in E \\ S_{j_1} S_{j_2}(0) &\in E \\ &\vdots \\ S_{j_1} S_{j_2} S_{j_r}(0) &\in E \\ &\vdots \end{aligned}$$

Seja $z_r = S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(0)$. Temos que $z_r \in E$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Como E é compacto, então $\lim_{r \rightarrow \infty} z_r \in E \implies x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a}) \in E$. Portanto, se $0 \in E$, então $x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a}) \in E$, para todo $\mathbf{j} \in J_\infty$.

Já vimos que $x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) = S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(x_{\mathbf{i}^{(r)}}(\mathbf{a}))$ e, como $0 \in E$, temos que $x_{\mathbf{i}^{(r)}}(\mathbf{a}) \in E$. Dessa forma, fica claro que dado $r \in \mathbb{N}$, existe $x_{\mathbf{i}^{(r)}}(\mathbf{a}) \in E$ tal que $x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) = S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(x_{\mathbf{i}^{(r)}}(\mathbf{a}))$. Portanto, $x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) \in F_r$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Isto implica que $x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) \in F(\mathbf{a})$.

Agora, caso $0 \notin E$, tomamos $y \in E$ qualquer e definimos $y_r = \lim_{\ell \rightarrow \infty} S_{i_{r+1}} S_{i_{r+2}} \dots S_{i_{r+\ell}}(y)$. É fato que $y_r \in E$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Queremos provar que $z_r = x_{\mathbf{i}^{(r)}}(\mathbf{a})$. Este resultado segue da Afirmação 4.3.2.

■

Por razões técnicas é conveniente assumir que $\|T_\ell\| < \frac{1}{3}$ para todo ℓ , onde $\|\cdot\|$ é o operador norma induzido pela norma Euclidiana usual.

Lema 4.3.1. *Se s é um número não-inteiro com $0 < s < n$ e $\|T_\ell\| < \frac{1}{3}$ ($1 \leq \ell \leq k$), então existe um número $\lambda < \infty$ tal que*

$$\int_{\mathbf{a} \in B_p \subset \mathbb{R}^{nk}} \frac{d\mathbf{a}}{|x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) - x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a})|^s} \leq \frac{\lambda}{\phi^s(T_{\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}})}, \quad (4.19)$$

para todo \mathbf{i} e \mathbf{j} distintos em J_∞ .

Demonstração. Sejam

$$\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_{p+1}, i_{p+2}, \dots)$$

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_{p+1}, j_{p+2}, \dots)$$

de modo que $i_\ell = j_\ell$ para $1 \leq \ell \leq p$ e $i_{p+1} \neq j_{p+1}$. Dizemos que $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{p} \in J$, com $p = |\mathbf{p}|$, ou seja, $\mathbf{i} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{i}'$ e $\mathbf{j} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{j}'$ com $\mathbf{i}', \mathbf{j}' \in J_\infty$. Portanto, $\mathbf{i}' = (i_{p+1}, i_{p+2}, i_{p+3}, \dots)$ e $\mathbf{j}' = (j_{p+1}, j_{p+2}, j_{p+3}, \dots)$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $i_{p+1} = 1$ e $j_{p+1} = 2$. (Note que $i_{p+1} \neq j_{p+1}$, obrigatoriamente, graças a definição de $\mathbf{p} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$). Daí,

$$x_{\mathbf{i}'}(\mathbf{a}) = a_1 + T_{i_{p+1}} a_{i_{p+2}} + T_{i_{p+1}} T_{i_{p+2}} a_{i_{p+3}} + \dots$$

$$x_{\mathbf{j}'}(\mathbf{a}) = a_2 + T_{j_{p+1}} a_{j_{p+2}} + T_{j_{p+1}} T_{j_{p+2}} a_{j_{p+3}} + \dots$$

Então,

$$\begin{aligned} x_{\mathbf{i}'}(\mathbf{a}) - x_{\mathbf{j}'}(\mathbf{a}) &= a_1 - a_2 + (T_{i_{p+1}} a_{i_{p+2}} + T_{i_{p+1}} T_{i_{p+2}} a_{i_{p+3}} + \dots) \\ &\quad - (T_{j_{p+1}} a_{j_{p+2}} + T_{j_{p+1}} T_{j_{p+2}} a_{j_{p+3}} + \dots) \\ &= a_1 - a_2 + E(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Note que E é transformação linear, com $E : \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Mais precisamente, podemos escrever $E(\mathbf{a}) = E_1(a_1) + E_2(a_2) + \dots + E_k(a_k)$, onde cada E_ℓ é uma soma de composições de operadores lineares em \mathbb{R}^n .

Afirmção 4.3.4. *A norma de E é no máximo igual a $2 \sum_{i=1}^{\infty} \eta^i = \frac{2\eta}{1-\eta}$ onde $\eta = \max_{1 \leq \ell \leq k} \|T_\ell\|$.*

Prova. De fato,

$$E(\mathbf{a}) = (T_{i_{p+1}}a_{i_{p+2}} + T_{i_{p+1}}T_{i_{p+2}}a_{i_{p+3}} + \dots) - (T_{j_{p+1}}a_{j_{p+2}} + T_{j_{p+1}}T_{j_{p+2}}a_{j_{p+3}} + \dots),$$

então

$$\begin{aligned} \|E(\mathbf{a})\| &= \|(T_{i_{p+1}}a_{i_{p+2}} + T_{i_{p+1}}T_{i_{p+2}}a_{i_{p+3}} + \dots) - (T_{j_{p+1}}a_{j_{p+2}} + T_{j_{p+1}}T_{j_{p+2}}a_{j_{p+3}} + \dots)\| \\ &\leq \|T_{i_{p+1}}a_{i_{p+2}}\| + \|T_{i_{p+1}}T_{i_{p+2}}a_{i_{p+3}}\| + \dots + \|T_{j_{p+1}}a_{j_{p+2}}\| + \|T_{j_{p+1}}T_{j_{p+2}}a_{j_{p+3}}\| + \dots \\ &\leq (\eta + \eta^2 + \eta^3 + \dots + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \dots) \|\mathbf{a}\| \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \eta^i \|\mathbf{a}\| = \frac{2\eta}{1-\eta} \|\mathbf{a}\|, \end{aligned}$$

como $\eta < \frac{1}{3}$, então $\frac{2\eta}{1-\eta} < 1$. Além disso, $\|T_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_r}\| \leq \|T_{i_1}\| \|T_{i_2}\| \dots \|T_{i_r}\| \leq \eta^r$.

■

Na integral abaixo fazemos a seguinte substituição linear:

$$y = a_1 - a_2 + E(\mathbf{a}), \quad a_2 = a_2, \quad \dots, \quad a_k = a_k. \quad (4.20)$$

Podemos representar a substituição acima como uma transformação linear

$$S(a_1, a_2, \dots, a_k) = (a_1 - a_2 + E(\mathbf{a}), a_2, \dots, a_k).$$

A matriz jacobiana de S é dada por:

$$DS(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} Id + E_1 & -Id + E_2 & E_3 & \dots & E_k \\ 0 & Id & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Id & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Id \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$|\det DS(\mathbf{a})| = |\det(Id + E_1)|.$$

A mudança de variáveis S é invertível, pois $\det DS(\mathbf{a})$ é diferente de zero. Isto se deve ao fato de $\det(Id + E_1) \neq 0$, uma vez que $\|E_1\| \leq \|E\| < 1$ e, dessa forma, podemos fazer uso do Lema A.0.2, conhecido como Perturbação da Identidade.

Portanto,

$$|\det DS(\mathbf{a})| = |\det(Id + E_1)| > 0.$$

São válidas as seguintes desigualdades:

$$\int_{\mathbf{a} \in B_\rho \subset \mathbb{R}^{nk}} \frac{d\mathbf{a}}{|x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) - x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a})|^s} = \int_{\mathbf{a} \in B_\rho} \frac{d\mathbf{a}}{|T_{\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}}(x_{\mathbf{i}'}(\mathbf{a}) - x_{\mathbf{j}'}(\mathbf{a}))|^s} \quad (4.21)$$

$$\leq \tilde{c}_1 \int_{\substack{y \in B_{(2+k)\rho} \subset \mathbb{R}^n \\ a_\ell \in B_\rho \subset \mathbb{R}^n}} \frac{dy da_2 \dots da_k}{|T_{\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}}(y)|^s} \quad (4.22)$$

$$\leq \frac{\lambda}{\phi^s(T_{\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}})}. \quad (4.23)$$

A igualdade (4.21) é verdadeira, pois:

$$\begin{aligned} x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) - x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a}) &= (a_{i_1} + T_{i_1} a_{i_2} + T_{i_1} T_{i_2} a_{i_3} + \dots + T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_{p-1}} a_{i_p} + T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_p} a_{i_{p+1}} + \dots) \\ &\quad - (a_{j_1} + T_{j_1} a_{j_2} + T_{j_1} T_{j_2} a_{j_3} + \dots + T_{j_1} T_{j_2} \dots T_{j_{p-1}} a_{j_p} + T_{j_1} T_{j_2} \dots T_{j_p} a_{j_{p+1}} + \dots). \end{aligned}$$

Mas, $i_\ell = j_\ell$ para todo $\ell \in \{1, 2, \dots, p\}$. Então,

$$\begin{aligned} x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) - x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a}) &= T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_p} a_{i_{p+1}} + T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_p} T_{i_{p+1}} a_{i_{p+2}} + \dots \\ &\quad - T_{j_1} T_{j_2} \dots T_{j_p} a_{j_{p+1}} - T_{j_1} T_{j_2} \dots T_{j_p} T_{j_{p+1}} a_{j_{p+2}} - \dots \\ &= T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_p} (a_{i_{p+1}} + T_{i_{p+1}} a_{i_{p+2}} + T_{i_{p+1}} T_{i_{p+2}} a_{i_{p+3}} + \dots) \\ &\quad - T_{j_1} T_{j_2} \dots T_{j_p} (a_{j_{p+1}} + T_{j_{p+1}} a_{j_{p+2}} + T_{j_{p+1}} T_{j_{p+2}} a_{j_{p+3}} + \dots) \\ &= T_{\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}} (x_{\mathbf{i}'}(\mathbf{a}) - x_{\mathbf{j}'}(\mathbf{a})). \end{aligned}$$

Para provar a desigualdade (4.22) vamos inicialmente observar os limites de integração.

Há dois aspectos que valem a pena pontuar:

- $\mathbf{a} \in B_\rho \subset \mathbb{R}^{nk} \Rightarrow |a_\ell|^2 \leq \rho^2, \forall \ell \in 1, 2, \dots, k \Rightarrow a_\ell \in B_\rho \subset \mathbb{R}^n, \forall \ell \in 1, 2, \dots, k.$

O que implica na desigualdade

$$\int_{\mathbf{a} \in B_\rho \subset \mathbb{R}^{nk}} d\mathbf{a} \leq \int_{a_\ell \in B_\rho \subset \mathbb{R}^n} \dots \int da_1 da_2 \dots da_k.$$

- Quando fazemos a mudança $y = a_1 - a_2 + E(\mathbf{a})$, temos que: $a_1, a_2 \in B_\rho \subset \mathbb{R}^n$ e $E(\mathbf{a}) = E_1(a_1) + E_2(a_2) + \dots + E_k(a_k)$, com E_ℓ contração. Daí,

$$|E(\mathbf{a})| \leq |E_1(a_1)| + |E_2(a_2)| + \dots + |E_k(a_k)| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_k| \leq k\rho.$$

Então,

$$|y| \leq |a_1| + |a_2| + |E(\mathbf{a})| \leq \rho + \rho + k\rho = (2 + k)\rho.$$

Na desigualdade (4.22) ocorre também a mudança de variáveis (4.20). Logo, simbolicamente:

$$\begin{aligned} |\det DS(\mathbf{a})| d\mathbf{a} &= dyda_2 \dots da_k \\ \implies d\mathbf{a} &= \frac{1}{|\det DS(\mathbf{a})|} dyda_2 \dots da_k. \\ &= \tilde{c}_1 dyda_2 \dots da_k. \end{aligned}$$

Note que $\tilde{c}_1 = \frac{1}{|\det DS(\mathbf{a})|}$ está bem definido, pois $|\det DS(\mathbf{a})| > 0$.

Finalmente, a desigualdade (4.23) segue do Lema 4.2.3. \square

O lema que acabamos de demonstrar tem um papel importante na demonstração do teorema principal deste trabalho, que será apresentado posteriormente (ver Seção 5, Capítulo 4). Por meio de estudos como os de Edgar (EDGAR, 1992) e Solomyak (SOLOMYAK, 1998) foi possível chegar em um resultado mais geral, estendendo a restrição das normas das transformações. Hoje se sabe que o resultado apresentado no Lema 4.3.1 é válido para $\|T_\ell\| < \frac{1}{2}$ e falha para $\|T_\ell\| < \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Lema 4.3.2. *O Lema 4.3.1 é válido para $\|T_\ell\| < \frac{1}{2}$ ($1 \leq \ell \leq k$).*

Demonstração. Seguimos conforme o início da prova do Lema 4.3.1. Partiremos do fato:

$$\begin{aligned} x_{i'}(\mathbf{a}) - x_{j'}(\mathbf{a}) &= a_1 - a_2 + (T_{i_{p+1}}a_{i_{p+2}} + T_{i_{p+1}}T_{i_{p+2}}a_{i_{p+3}} + \dots) \\ &\quad - (T_{j_{p+1}}a_{j_{p+2}} + T_{j_{p+1}}T_{j_{p+2}}a_{j_{p+3}} + \dots). \end{aligned}$$

Uma vez definida a transformação E como anteriormente, temos que:

$$x_{i'}(\mathbf{a}) - x_{j'}(\mathbf{a}) = a_1 - a_2 + E(\mathbf{a}).$$

A partir daqui podemos seguir dois caminhos:

- Podemos fazer a mudança de variáveis descrita em (4.20), i.e., $y = a_1 - a_2 + E(\mathbf{a})$, $a_2 = a_2, \dots, a_k = a_k$. E, a fim de utilizar a Perturbação da Identidade e concluir que $Id + E_1$ é invertível, precisamos de que $\|E_1\| < 1$.
- Por outro lado, podemos realizar uma outra mudança de variáveis: $a_1 = a_1$, $y = a_1 - a_2 + E(\mathbf{a})$, $a_3 = a_3, \dots, a_k = a_k$. De forma análoga, o objetivo é utilizar a Perturbação da Identidade para concluir que $Id - E_2$ é inversível, pois: chamando

de $\tilde{S}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) = (a_1, a_1 + a_2 + E(\mathbf{a}), a_3, \dots, a_k)$, temos que a matriz jacobiana de \tilde{S} é

$$D\tilde{S}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} Id & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Id + E_1 & -Id + E_2 & E_3 & \dots & E_k \\ 0 & 0 & Id & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Id \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$|\det D\tilde{S}(\mathbf{a})| = |\det -Id + E_2| = |\det Id - E_2|.$$

Então, para que $Id - E_2$ seja inversível, é suficiente que $\|E_2\| < 1$.

Portanto, fica claro que o resultado do Lema 4.3.1 é válido se $\|E_1\| < 1$ ou $\|E_2\| < 1$.

Sejam:

- $\eta = \max_{1 \leq \ell \leq k} \|T_\ell\| < \frac{1}{2}$;
- $t = \min\{\ell : i_{p+\ell} = j_{p+\ell}\}$ (note que $2 \leq t \leq \infty$);
- $\nu \in \{1, 2\}$ é tal que $i_{p+t} = j_{p+t} \neq \nu$, ou seja,

$$\text{se } i_{p+t} = j_{p+t} = 1 \quad , \quad \text{então } \nu = 2.$$

$$\text{se } i_{p+t} = j_{p+t} = 2 \quad , \quad \text{então } \nu = 1.$$

$$\text{se } i_{p+t} = j_{p+t} \notin \{1, 2\} \quad , \quad \text{então } \nu = 1 \text{ ou } \nu = 2.$$

Por meio de um exemplo rápido, é possível entender melhor as definições acima.

Exemplo 4.3.2. *Considerando $k = 9$ e dados*

$$\mathbf{i}' = (1, 2, 4, 6, 5, 7, 3, 2, 1, \dots)$$

$$\mathbf{j}' = (2, 3, 1, 1, 2, 5, 2, 1, 1, \dots)$$

$$\mathbf{j}'' = (2, 4, 2, 2, 5, 3, 6, 1, 2, \dots)$$

temos que:

- *Em relação a \mathbf{i}' e \mathbf{j}' : $t = 9$ e $\nu = 2$.*
- *Em relação a \mathbf{i}' e \mathbf{j}'' : $t = 5$ e ν pode ser 1 ou 2.*

A transformação E_ν pode ser escrita da seguinte forma:

$$E_\nu = \sum_{\ell=2}^{\infty} (\delta_{\nu, i_{p+\ell}} T_{i_{p+1}} \cdots T_{i_{p+\ell-1}} - \delta_{\nu, j_{p+\ell}} T_{j_{p+1}} \cdots T_{j_{p+\ell-1}}),$$

onde

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, note que:

1. $i_{p+t} = j_{p+t} \neq \nu \implies \delta_{\nu, i_{p+t}} = \delta_{\nu, j_{p+t}} = 0$.
2. $\forall \ell < t : i_{p+\ell}$ e $j_{p+\ell}$ não são ambos iguais a ν , pois $i_{p+\ell} \neq j_{p+\ell}$.
3. Para $\ell > t$ é possível que $i_{p+\ell} = j_{p+\ell} = \nu$ para uma quantidade indefinida, possivelmente infinita, de ℓ 's.

Dessa forma, podemos reescrever E_ν :

$$\begin{aligned} E_\nu &= \sum_{\ell=2}^{t-1} (\delta_{\nu, i_{p+\ell}} T_{i_{p+1}} \cdots T_{i_{p+\ell-1}} - \delta_{\nu, j_{p+\ell}} T_{j_{p+1}} \cdots T_{j_{p+\ell-1}}) \\ &\quad + \sum_{\ell=t+1}^{\infty} (\delta_{\nu, i_{p+\ell}} T_{i_{p+1}} \cdots T_{i_{p+\ell-1}} - \delta_{\nu, j_{p+\ell}} T_{j_{p+1}} \cdots T_{j_{p+\ell-1}}), \end{aligned}$$

assim:

$$\begin{aligned} \|E_\nu\| &\leq \sum_{\ell=2}^{t-1} \eta^{\ell-1} + \sum_{\ell=t+1}^{\infty} 2\eta^{\ell-1} \\ &\leq \eta \frac{(1 - \eta^{t-2})}{1 - \eta} + 2 \left(\frac{\eta}{1 - \eta} - \frac{\eta(1 - \eta^{t-1})}{1 - \eta} \right) \\ &\leq \eta \frac{(1 - \eta^{t-2})}{1 - \eta} + 2 \frac{\eta^t}{1 - \eta} \\ &\leq \frac{\eta}{1 - \eta} + \frac{\eta^t}{1 - \eta} (2 - \eta^{-1}) \\ &< 1, \end{aligned}$$

pois, $\eta^{-1} > 2$.

Isto conclui a demonstração. □

A demonstração de que o Lema 4.3.1 falha no caso $\|T_\ell\| < \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, envolve conceitos de Teoria dos Números e, por isso, foge do escopo deste trabalho. Mas, pode ser encontrado no trabalho do Solomyak (SOLOMYAK, 1998).

4.4 MEDIDAS EM J_∞

Uma vez introduzido o conjunto das sequências infinitas com termos em $\{1, 2, \dots, k\}$, J_∞ , vamos agora definir uma métrica neste conjunto. Dados $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in J_\infty$, definimos:

$$d(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ 2^{-|\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}|} & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Afirmção 4.4.1. d é uma métrica em J_∞ e (J_∞, d) é espaço métrico compacto.

Prova. A demonstração de que d é uma distância em J_∞ é equivalente à encontrada na Afirmção 2.3.1. Já a compacidade de (J_∞, d) se dá de forma completamente análoga à feita na Afirmção 2.3.2, por meio do argumento diagonal. ■

Seja $\mathbf{u} \in J_r$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$, $r \in \mathbb{N}$. Definimos o cilindro $N_{\mathbf{u}}$ de tamanho r da seguinte maneira:

$$N_{\mathbf{u}} = \{\mathbf{j} \in J_\infty; \mathbf{u} < \mathbf{j}\},$$

que representa as sequências infinitas \mathbf{j} que iniciam com a palavra \mathbf{u} .

Por exemplo, dado $\mathbf{u} \in J_2$, $\mathbf{u} = (1, 1)$, temos que:

$$\mathbf{j} = (1, 1, 1, 1, 1, \dots) \in N_{(1,1)} \quad \text{e} \quad \mathbf{j}' = (1, 1, 0, 0, 0, \dots) \in N_{(1,1)}.$$

E, é fácil ver que, dado $\mathbf{u}' = (1, 1, 2)$, $N_{(1,1,2)} \subset N_{(1,1)}$. De maneira mais geral, se $\mathbf{u} < \mathbf{u}'$, então $N_{\mathbf{u}'} \subset N_{\mathbf{u}}$.

Dizemos que um conjunto de sequências finitas A é uma cobertura para J_∞ se $J_\infty \subset \bigcup_{\mathbf{u} \in A} N_{\mathbf{u}}$. Em outras palavras, $A \subset J$ é uma cobertura para J_∞ se para todo $\mathbf{i} \in J_\infty$ existe $\mathbf{u} \in A$ com $\mathbf{u} < \mathbf{i}$.

Note que $A = J$ e $A = \{(1), (2), \dots, (k-1), (k)\} = J_1$ são coberturas para J_∞ .

De maneira bastante natural a métrica d induz uma topologia em J_∞ , que denotaremos por τ_d , definida a seguir:

$$\tau_d = \{S \in \mathcal{P}(J_\infty) : \forall i \in S, \exists r > 0 \text{ tal que } B(\mathbf{i}, r) \subset S\},$$

onde $\mathcal{P}(J_\infty)$ é o conjunto das partes de J_∞ e $B(\mathbf{i}, r)$ é a bola aberta de centro $\mathbf{i} \in J_\infty$ e raio r . A fim de visualizar melhor os elementos desta topologia vamos explorar um pouco

a definição de $B(\mathbf{i}, r)$:

$$B(\mathbf{i}, r) = \{\mathbf{j} \in J_\infty; d(\mathbf{i}, \mathbf{j}) < r\} = \{\mathbf{j} \in J_\infty, 2^{-|\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}|} < r\}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} 2^{-|\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}|} < r &\implies |\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}| > \frac{-\log r}{\log 2} \\ &\implies |\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}| \geq \lceil -\frac{\log r}{\log 2} \rceil. \end{aligned}$$

É importante considerar que: dados $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in J_\infty$, temos $0 \leq d(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \leq 1$, por definição. Então, se $r > 1$: $B(\mathbf{i}, r) = J_\infty$, para todo $\mathbf{i} \in J_\infty$. Sendo assim, tomaremos $0 < r \leq 1$ e, dessa forma, $\log r \leq 0$. Agora, seja $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3, \dots) \in J_\infty$ e

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_\nu), \text{ com } w_\ell = i_\ell \text{ (} 1 \leq \ell \leq k \text{) e } \nu = \lceil -\frac{\log r}{\log 2} \rceil,$$

logo, temos que:

$$\mathbf{j} \in B(\mathbf{i}, r) \iff \mathbf{j} \in N_{\mathbf{w}}.$$

Portanto, $B(\mathbf{i}, r) = N_{\mathbf{w}}$. Disso concluímos que as bolas abertas em J_∞ são cilindros.

Dizemos que um subconjunto \mathcal{C} de τ_d é uma *base* para esta topologia se

$$\tau_d = \left\{ \bigcup_{C \in \Omega} C, \Omega \subset \mathcal{C} \right\},$$

ou seja, se todo aberto da topologia pode ser escrito como a união de abertos da base.

Um critério para provar que um subconjunto \mathcal{C} é base de τ_d é o seguinte:

$$\mathcal{C} \text{ é base para uma topologia em } J_\infty \iff \left\{ \begin{array}{l} \bullet J_\infty = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C, \text{ e} \\ \bullet \text{ Para todos } C_1, C_2 \in \mathcal{C}, \text{ se } \mathbf{i} \in C_1 \cap C_2, \text{ então} \\ \text{ existe } C_3 \in \mathcal{C} \text{ tal que } \mathbf{i} \in C_3 \subset C_1 \cap C_2. \end{array} \right.$$

Afirmção 4.4.2. $\mathcal{C} = \{N_{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \in J\}$ é base para τ_d .

Prova. O resultado segue do critério acima e notando que:

- Claramente temos que $J_\infty = \bigcup_{\mathbf{u} \in J} N_{\mathbf{u}}$, pois J é cobertura de J_∞ .
- Sejam $N_{\mathbf{u}}$ e $N_{\mathbf{w}} \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \in N_{\mathbf{u}} \cap N_{\mathbf{w}} &\implies \mathbf{u} < \mathbf{i} \text{ e } \mathbf{w} < \mathbf{i}, \\ &\implies (\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) < \mathbf{i}, \\ &\implies \mathbf{i} \in N_{\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{i} \in N_{\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}} \subset (N_{\mathbf{u}} \cap N_{\mathbf{w}})$.

■

É possível construir uma medida exterior em J_∞ baseando-nos na definição de medida de Hausdorff. Para isso, fixe s . Dado $E \in \mathcal{O}(J_\infty)$, para cada inteiro positivo r , definimos:

$$\mathcal{M}_r^s(E) = \inf \left\{ \sum_{\mathbf{u}} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) : E \subset \bigcup_{\mathbf{u} \in A} N_{\mathbf{u}}, |\mathbf{u}| \geq r \right\}. \quad (4.24)$$

Note que essa definição é de fato similar à da medida de Hausdorff, havendo uma substituição de $(\text{diam } U_\ell)^s$ para $\phi^s(T_{\mathbf{u}})$. A família "elementar" de subconjuntos de J_∞ escolhida para construir a medida exterior \mathcal{M}_r^s foi $\mathcal{C}_r = \{N_{\mathbf{u}}, |\mathbf{u}| \geq r\} \cup \{J_\infty, \emptyset\}$, que também é base da topologia τ_d .

Afirmção 4.4.3. *Para cada r , \mathcal{M}_r^s é uma medida exterior.*

Prova. Fixe s e r . Seja $\gamma : \mathcal{C}_r \rightarrow [0, \infty]$ definida da seguinte forma:

$$\begin{cases} \gamma(\emptyset) &= 0, \\ \gamma(N_{\mathbf{u}}) &= \phi^s(T_{\mathbf{u}}), \forall \mathbf{u}, |\mathbf{u}| \geq r, \\ \gamma(J_\infty) &= \gamma(N_{(\emptyset)}) = \phi^s(T_{(\emptyset)}) = \phi^s(\text{Id}) = 1. \end{cases}$$

Daí, pela proposição 3.1.1, \mathcal{M}_r^s é medida exterior.

■

Perceba que $\text{diam } N_{\mathbf{u}} \leq a^{|\mathbf{u}|}$ (onde a vem de (4.12)), $\mathbf{u} \in J_r$, daí $\text{diam } N_{\mathbf{u}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.

O limite

$$\mathcal{M}^s(E) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{M}_r^s(E) \quad (4.25)$$

também é uma medida exterior métrica (do tipo Hausdorff) que, como vimos na Proposição 3.1.2, se restringe a uma medida nos subconjuntos de Borel de J_∞ . As relações a seguir são análogas as já vistas no Capítulo 2 (com relação a medida de Hausdorff): sejam

$s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ com $s_1 > s_2$, usando (4.12) e o Lema A.0.1, temos:

$$\begin{aligned}
\phi^{s_1}(T_{\mathbf{u}}) &= \alpha_1(T_{\mathbf{u}}) \alpha_2(T_{\mathbf{u}}) \dots \alpha_{\lfloor s_1 \rfloor}(T_{\mathbf{u}}) \alpha_{\lfloor s_1 \rfloor + 1}(T_{\mathbf{u}})^{s_1 - \lfloor s_1 \rfloor} \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\lfloor s_1 \rfloor} \alpha_{\lfloor s_1 \rfloor + 1}^{s_1 - \lfloor s_1 \rfloor} \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\lfloor s_2 \rfloor} \alpha_{\lfloor s_2 \rfloor + 1} \dots \alpha_{\lfloor s_1 \rfloor} \alpha_{\lfloor s_1 \rfloor + 1}^{s_1 - \lfloor s_1 \rfloor} \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\lfloor s_2 \rfloor} \alpha_{\lfloor s_2 \rfloor + 1}^{s_2 - \lfloor s_2 \rfloor} \alpha_{s_2 + 1}^{1 - (s_2 - \lfloor s_2 \rfloor)} \alpha_{\lfloor s_2 \rfloor + 2} \dots \alpha_{\lfloor s_1 \rfloor} \alpha_{\lfloor s_1 \rfloor + 1}^{s_1 - \lfloor s_1 \rfloor} \\
&= \phi^{s_2}(T_{\mathbf{u}}) \alpha_{s_2 + 1}^{1 - (s_2 - \lfloor s_2 \rfloor)} \alpha_{\lfloor s_2 \rfloor + 2} \dots \alpha_{\lfloor s_1 \rfloor} \alpha_{\lfloor s_1 \rfloor + 1}^{s_1 - \lfloor s_1 \rfloor} \\
&\leq \phi^{s_2}(T_{\mathbf{u}}) a^{r[1 - (s_2 - \lfloor s_2 \rfloor)]} \underbrace{a^r \dots a^r}_{\lfloor s_1 \rfloor - (\lfloor s_2 \rfloor + 2) + 1 \text{ vezes}} a^{r(s_1 - \lfloor s_1 \rfloor)} \\
&\leq \phi^{s_2}(T_{\mathbf{u}}) a^{r(s_1 - s_2)}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_r^{s_1}(E) &= \inf \left\{ \sum_{\substack{\mathbf{u} \in J_r \\ E \subset \cup N_{\mathbf{u}} \\ |\mathbf{u}| \geq r}} \phi^{s_1}(T_{\mathbf{u}}) \right\} \leq \inf \left\{ \sum_{\substack{\mathbf{u} \in J_r \\ E \subset \cup N_{\mathbf{u}} \\ |\mathbf{u}| \geq r}} a^{r(s_1 - s_2)} \phi^{s_2}(T_{\mathbf{u}}) \right\} \\
&\leq a^{r(s_1 - s_2)} \inf \left\{ \sum_{\substack{\mathbf{u} \in J_r \\ E \subset \cup N_{\mathbf{u}} \\ |\mathbf{u}| \geq r}} \phi^{s_2}(T_{\mathbf{u}}) \right\} = a^{r(s_1 - s_2)} \mathcal{M}_r^{s_2}(E).
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\mathcal{M}_r^{s_1}(E) \leq a^{r(s_1 - s_2)} \mathcal{M}_r^{s_2}(E). \quad (4.26)$$

Fazendo $r \rightarrow \infty$, temos:

- se $\mathcal{M}^{s_2} < \infty$, então $\mathcal{M}^{s_1} = 0$.
- se $\mathcal{M}^{s_1} = \infty$, então $\mathcal{M}^{s_2} = \infty$.
- se $\mathcal{M}^{s_1} > 0$, então $\mathcal{M}^{s_2} = \infty$.
- se $\mathcal{M}^{s_2} = 0$, então $\mathcal{M}^{s_1} = 0$.

Nós podemos utilizar as medidas \mathcal{M}^s para definir uma dimensão $d(T_1, T_2, \dots, T_k)$ de maneira completamente análoga à definição de dimensão de Hausdorff usando medidas de Hausdorff.

Proposição 4.4.1. *Os números a seguir existem e são todos iguais.*

$$(a) \inf\{s : \mathcal{M}^s(J_\infty) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{M}^s(J_\infty) = \infty\},$$

(b) O único $s > 0$ tal que $\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right]^{\frac{1}{r}} = 1$,

(c) $\inf\{s : \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) < \infty\} = \sup\{s : \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) = \infty\}$.

Denotamos este valor comum por $d(T_1, \dots, T_k)$.

Demonstração. Dividimos esta demonstração em várias afirmações.

Afirmção 4.4.4. *O ínfimo e o supremo do item (a) são iguais.*

Prova. Digamos que $\bar{s} = \sup\{s : \mathcal{M}^s(J_{\infty}) = \infty\}$ e $\underline{s} = \inf\{s : \mathcal{M}^s(J_{\infty}) = 0\}$.

Suponha, inicialmente, que $\bar{s} < \underline{s}$. Seja $t \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{s} < t < \underline{s}$. Como \underline{s} é o ínfimo, claramente $\mathcal{M}^t(J_{\infty}) > 0$. Graças a isso, temos que $\mathcal{M}^s(J_{\infty}) = \infty$, para todo $s < t$, por (iii.). Mas, isto significa que existe um número real \tilde{s} , $\bar{s} < \tilde{s} < t$ tal que $\mathcal{M}^{\tilde{s}}(J_{\infty}) = \infty$, o que contradiz a definição de \bar{s} .

Suponha agora que $\bar{s} > \underline{s}$. Seja $t \in \mathbb{R}$ tal que $\underline{s} < t < \bar{s}$. Pela propriedade do ínfimo e do supremo existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\underline{s} < t_1 < t \text{ com } \mathcal{M}^{t_1}(J_{\infty}) = 0$$

$$t < t_2 < \bar{s} \text{ com } \mathcal{M}^{t_2}(J_{\infty}) = \infty$$

Com isso temos uma contradição, pois:

- Se $\mathcal{M}^{t_1}(J_{\infty}) = 0$, então $\mathcal{M}^s(J_{\infty}) = 0$, para todo $s > t_1$.
- E se $\mathcal{M}^{t_2}(J_{\infty}) = \infty$, então $\mathcal{M}^s(J_{\infty}) = \infty$ para todo $s < t_2$.

O que não ocorre, já que $t_1 < t < t_2$.

Portanto, a igualdade do item (a) é verdadeira. ■

Afirmção 4.4.5. *O ínfimo e o supremo do item (c) são iguais.*

Prova. Sejam $\bar{s} = \sup\{s : \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) = \infty\}$ e $\underline{s} = \inf\{s : \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) < \infty\}$.

Suponha que $\bar{s} > \underline{s}$: dado t , $\underline{s} < t < \bar{s}$, existem $\underline{s} < t_1 < t$ e $t < t_2 < \bar{s}$ tais que:

$$\sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^{t_2}(T_{\mathbf{u}}) = \infty \quad \text{e} \quad \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^{t_1}(T_{\mathbf{u}}) < \infty. \quad (4.27)$$

Mas, sabemos que $\phi^s(T)$ é decrescente em relação a s . Então:

$$\begin{aligned} \phi^{t_2}(T_{\mathbf{u}}) < \phi^{t_1}(T_{\mathbf{u}}), \forall \mathbf{u} \in J &\implies \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^{t_2}(T_{\mathbf{u}}) < \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^{t_1}(T_{\mathbf{u}}) \\ &\implies \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^{t_2}(T_{\mathbf{u}}) < \infty, \end{aligned}$$

que contradiz (4.27).

Suponha agora que $\bar{s} < \underline{s}$: dado $t, \bar{s} < t < \underline{s}$, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^t(T_{\mathbf{u}}) < \infty, \text{ pois } t > \bar{s} \\ \text{e } \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^t(T_{\mathbf{u}}) = \infty, \text{ pois } t < \underline{s}, \end{aligned}$$

o que nos leva a uma contradição.

Concluimos, então, que $\bar{s} = \underline{s}$.

■

Quanto ao limite do item (b), note que:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{u} \in J_{q+r}} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) &= \sum_{\mathbf{u} \in J_q} \sum_{\mathbf{w} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}} T_{\mathbf{w}}) \\ &\leq \sum_{\mathbf{u} \in J_q} \sum_{\mathbf{w} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \phi^s(T_{\mathbf{w}}) \\ &= \sum_{\mathbf{u} \in J_q} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \sum_{\mathbf{w} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{w}}), \end{aligned}$$

por (4.11).

Com isso, concluimos que $\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}})$ é submultiplicativa. Consequentemente, $\log \sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}})$ é uma sequência subaditiva e, pelo Lema 2.1.1, $\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}} = \exp \left(\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log \sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)$ existe para cada s .

Note agora que se $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ possui valores singulares α_ℓ , então para $h > 0$:

$$\phi^s(T) \alpha_n^h \leq \phi^{s+h}(T) \leq \phi^s(T) \alpha_1^h \quad (4.28)$$

pois,

$$\phi^{s+h}(T) = \phi^s(T) \alpha_{[s]+1}^{1-(s-[s])}(T) \alpha_{[s]+2}(T) \dots \alpha_{[s+h]}(T) \alpha_{[s+h]+1}^{(s+h)-[s+h]}(T).$$

Então, dado $\mathbf{u} = (i_1, i_2, \dots, i_r) \in J_r$, temos que:

$$\begin{aligned} \phi^{s+h}(T_{\mathbf{u}}) &\leq \alpha_1(T_{\mathbf{u}}) \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \\ &\leq \alpha_1(T_{i_1, i_2, \dots, i_r}) \phi^s(T_{\mathbf{u}}). \end{aligned}$$

Pelo Lema A.0.1,

$$\begin{aligned}\alpha_1(T_{i_1, i_2, \dots, i_r}) &\leq \alpha_1(T_{i_1})\alpha_1(T_{i_2}) \dots \alpha_1(T_{i_r}) \\ &\leq a^r,\end{aligned}$$

onde a vem de (4.12).

Portanto,

$$\phi^{s+h}(T_{\mathbf{u}}) \leq a^{rh} \phi^s(T_{\mathbf{u}}), \quad (4.29)$$

para $\mathbf{u} \in J_r$.

Consequentemente,

$$\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^{s+h}(T_{\mathbf{u}}) \leq a^{rh} \sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}).$$

Calculando a estimativa inferior de maneira análoga, obtemos:

$$b^{rh} \leq \frac{\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^{s+h}(T_{\mathbf{u}})}{\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}})} \leq a^{rh}, \quad (4.30)$$

onde a, b vêm de (4.12).

Perceba que, $\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}}$ é estritamente decrescente em s graças a (4.30) e ao fato de a^{rh} ser menor que 1.

Afirmção 4.4.6. $\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}}$ é contínuo em s .

Prova. Sabendo que $\phi^s(T)$ é contínua em s , $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, T contração não singular, temos que $\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}})$ é uma soma finita de funções contínuas, portanto também é contínua em s .

Definindo $\psi(s) := \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}}$ e tomando o limite quando $r \rightarrow \infty$ em (4.30), temos que:

$$b^h \leq \frac{\left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^{s_0+h}(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^{s_0}(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}}} \leq a^h \quad \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \quad b^h \leq \frac{\psi(s_0+h)}{\psi(s_0)} \leq a^h, \quad \text{para todo } s_0 \geq 0.$$

Fazendo $h \rightarrow 0$, vemos que

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \psi(s) = \psi(s_0), \quad (4.31)$$

o que significa que ψ é contínua.

Perceba que os resultados acima são válidos para $h > 0$, mas se quisermos calcular o limite (4.31) à esquerda de s_0 basta tomar $s + h = s_0$ em (4.30).

■

Afirmação 4.4.7. *Existe um único s tal que $\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}} = 1$.*

Prova. Para $s = 0$, temos que $\phi^0(T_{\mathbf{u}}) = 1, \forall \mathbf{u} \in J_r, \forall r \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^0(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} 1 \right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{r \rightarrow \infty} (k^r)^{\frac{1}{r}} = k \geq 2.$$

Por outro lado, da desigualdade (4.13), temos que:

$$\phi^s(T_{\mathbf{u}}) \leq a^{rs}, \quad \mathbf{u} \in J_r.$$

Portanto,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} a^{rs} \right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{r \rightarrow \infty} (k^r a^{sr})^{\frac{1}{r}} = ka^s.$$

Concluimos que, para s suficientemente grande, $\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}} < 1$.

Como já vimos, este limite é contínuo e estritamente decrescente em s , portanto existe apenas um valor positivo de s que satisfaça:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}} = 1.$$

■

Denotemos por (a),(b) e (c) o número real definido em cada item.

Afirmação 4.4.8. (b) = (c).

Prova. Note que

$$\sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}})$$

converge (ou diverge) conforme o $\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}}$ for menor (ou maior) que 1. Isto vem do estudo de convergência da série $\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}})$, que pode ser desenvolvido da seguinte maneira:

Considerando

$$p_r := \sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}),$$

note que:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} (p_r)^{\frac{1}{r}} < 1 &\implies (p_\ell)^{\frac{1}{\ell}} < \gamma < 1, \text{ para } \ell \geq N \\ &\implies p_\ell < \gamma^\ell < 1, \text{ para } \ell \geq N, \end{aligned}$$

para algum $N = N(\gamma)$ natural suficientemente grande. Neste caso, $\sum_{\ell > N} \gamma^\ell$ converge, pois $\gamma < 1$. Então, por comparação, $\sum_{\ell > N} p_\ell$ (que é menor ou igual a $\sum_{\ell > N} \gamma^\ell$) também converge.

Analogamente,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} (p_r)^{\frac{1}{r}} > 1 &\implies (p_\ell)^{\frac{1}{\ell}} > \gamma > 1, \text{ para } \ell \geq N \\ &\implies p_\ell > \gamma^\ell > 1, \text{ para } \ell \geq N \\ &\implies \sum_{\ell \geq 1} p_\ell \text{ é divergente.} \end{aligned}$$

Isto implica que (b)=(c), pois

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}} < 1 &\implies \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) < \infty \\ \therefore \inf \left\{ s : \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) < \infty \right\} &\leq \inf \left\{ s : \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}} < 1 \right\}, \end{aligned}$$

e, além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}} > 1 &\implies \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) = \infty \\ \therefore \sup \left\{ s : \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) = \infty \right\} &\geq \sup \left\{ s : \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}} > 1 \right\}. \end{aligned}$$

Resta-nos provar que $\inf \left\{ s : \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}} < 1 \right\}$ e $\sup \left\{ s : \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}} > 1 \right\}$ coincidem. E isto segue da Afirmação 4.4.6 e do fato do $\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}}$ ser estritamente decrescente em relação a s .

■

Afirmação 4.4.9. (a) \leq (c).

Prova. Perceba que se $\sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) < \infty$ então $\mathcal{M}^s(J_\infty) = 0$, pois

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_r^s(J_\infty) &= \inf \left\{ \sum_{\mathbf{u}} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) : J_\infty \subset \bigcup_{\mathbf{u}} N_{\mathbf{u}}, |\mathbf{u}| \geq r \right\} \\ \therefore \mathcal{M}_r^s(J_\infty) &\leq \sum_{|\mathbf{u}| > r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) = \sum_{n=r}^{\infty} \sum_{\mathbf{u} \in J_n} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) = S - S_r, \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde $S = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{u} \in J_n} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) = \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^s(T_{\mathbf{u}})$ ($S < \infty$, por hipótese) e $S_r = \sum_{n=1}^r \sum_{\mathbf{u} \in J_n} \phi^s(T_{\mathbf{u}})$ é a r -ésima soma parcial da série. Portanto, $\lim_{r \rightarrow \infty} S - S_r = 0$.

Quando fazemos $r \rightarrow \infty$ em (4.32), temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^s(J_\infty) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{M}_r^s(J_\infty) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} (S - S_r) = 0 \\ &\implies \mathcal{M}^s(J_\infty) = 0. \end{aligned}$$

E daí, concluímos que (a) \leq (c):

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) < \infty &\implies \mathcal{M}^s(J_{\infty}) = 0 \\ \therefore \inf\{s : \mathcal{M}^s(J_{\infty}) = 0\} &\leq \inf\{s : \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) < \infty\}. \end{aligned}$$

■

Afirmação 4.4.10. (b) \leq (a)

Prova. Suponha que $\mathcal{M}^s(J_{\infty}) < 1$ para algum s . Então, existe uma cobertura A de J_{∞} tal que $\sum_{\mathbf{u} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \leq 1$.

Seja $p = \max\{|\mathbf{u}| : \mathbf{u} \in A\}$. Definimos outras coberturas A_r ($r \geq p$) da seguinte forma:

$$A_r = \{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_q : \mathbf{u}_\ell \in A, |\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_q| \geq r \text{ e } |\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_{q-1}| < r\}.$$

Note que A_r é cobertura de J_{∞} . De fato, podemos descrever a construção de A_r a partir de A_{r-1} da seguinte forma:

$$\text{A cada } \mathbf{u} \in A_{r-1} \text{ associamos } \begin{cases} \mathbf{u} \in A_r & , \text{ se } |\mathbf{u}| \geq r, \\ \{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} ; \mathbf{w} \in A\} & , \text{ se } |\mathbf{u}| < r, \text{ em particular } |\mathbf{u}| = r - 1. \end{cases} \quad (4.33)$$

Dessa forma, fica claro que A_r cobre A_{r-1} , para todo $r \in \mathbb{N}$. Além disso, temos que:

$$A_1 = \{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_q : \mathbf{u}_\ell \in A, |\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_q| \geq 1 \text{ e } |\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_{q-1}| < 1\}.$$

Para ocorrer $|\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_{q-1}| = 0$, temos que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \cdots = \mathbf{u}_{q-1} = \emptyset$. Logo, concluímos que $A_1 = A$.

Como A é cobertura de J_{∞} e A_r cobre A , fica claro que A_r é também cobertura de J_{∞} .

Segue da submultiplicidade de ϕ^s que

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{u} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{u}_1} \cdots T_{\mathbf{u}_q} T_{\mathbf{u}}) &\leq \phi^s(T_{\mathbf{u}_1} \cdots T_{\mathbf{u}_q}) \sum_{\mathbf{u} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \\ &\leq \phi^s(T_{\mathbf{u}_1} \cdots T_{\mathbf{u}_q}), \end{aligned} \quad (4.34)$$

pois $\sum_{\mathbf{u} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \leq 1$.

Utilizando a relação que existe entre A_r e A_{r-1} , presente em (4.33), temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{u} \in A_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) &= \sum_{\substack{\mathbf{u} \in A_{r-1} \\ |\mathbf{u}| \geq r}} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) + \sum_{\substack{\mathbf{u} \in A_{r-1} \\ |\mathbf{u}| \leq r-1}} \sum_{\mathbf{w} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}) \\
&\leq \sum_{\substack{\mathbf{u} \in A_{r-1} \\ |\mathbf{u}| \geq r}} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) + \sum_{\substack{\mathbf{u} \in A_{r-1} \\ |\mathbf{u}| \leq r-1}} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \\
&= \sum_{\mathbf{u} \in A_{r-1}} \phi^s(T_{\mathbf{u}}),
\end{aligned}$$

por (4.34).

Recorrendo a uma indução, concluímos que:

$$\sum_{\mathbf{u} \in A_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \leq \dots \leq \sum_{\mathbf{u} \in A_1} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) = \sum_{\mathbf{u} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \leq 1.$$

Se $\mathbf{u} \in J_{r+p}$, então $\mathbf{u} = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{w}$ para algum $\mathbf{u}' \in A_r$ e $|\mathbf{w}| \leq p$. Além disso, para cada \mathbf{u}' existe no máximo k^p \mathbf{w} 's.

Já que $\phi^s(T_{\mathbf{u}}) \leq \phi^s(T_{\mathbf{u}'})$,

$$\sum_{\mathbf{u} \in J_{r+p}} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \leq \sum_{\substack{\mathbf{u}' \in A_r \\ |\mathbf{w}| \leq p}} \phi^s(T_{\mathbf{u}'}) \phi^s(T_{\mathbf{w}}) \leq k^p \sum_{\mathbf{u}' \in A_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}'}) \leq k^p.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_{r+p}} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r+p}} &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} (k^p)^{\frac{1}{r+p}} = \lim_{r \rightarrow \infty} k^{\frac{p}{r+p}} \\
&\leq k^{\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{p}{r+p}} = k^0 = 1.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \right)^{\frac{1}{r}} \leq 1.$$

Finalmente, concluímos que (b) \leq (a). ■

□

Agora enunciaremos um lema técnico que será decisivo na demonstração do Teorema principal deste trabalho (o Teorema 4.5.1).

Lema 4.4.1. *Suponha que $\mathcal{M}^s(J_\infty) = \infty$ para algum s . Então, existe um conjunto compacto $E \subset J_\infty$ tal que $0 < \mathcal{M}^s(E) < \infty$ e uma constante \tilde{c}_1 tal que*

$$\mathcal{M}^s(E \cap N_{\mathbf{u}}) \leq \tilde{c}_1 \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \quad (\mathbf{u} \in J) \quad (4.35)$$

Demonstração. A demonstração deste resultado é feita no Apêndice C. □

4.5 CALCULANDO A DIMENSÃO

Agora mostraremos que o conjunto auto-afim $F(\mathbf{a})$ que satisfaz $F(\mathbf{a}) = \bigcup_{\ell=1}^k S_\ell(F(\mathbf{a})) = \bigcup_{\ell=1}^k (T_\ell + a_\ell)(F(\mathbf{a}))$ tem dimensão de Hausdorff igual a $d(T_1, \dots, T_k)$ para Lebesgue quase todo ponto $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^{nk}$, onde $d(T_1, \dots, T_k)$ é o número definido na Proposição 4.4.1. A estimativa superior, obtida através de um simples argumento de cobertura, é verdadeira para todo \mathbf{a} .

Proposição 4.5.1. *Se $\mathcal{M}^s(J_\infty) < \infty$ então $m_s(F(\mathbf{a})) < \infty$ para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{nk}$. Em particular, $\dim_{\mathcal{H}} F(\mathbf{a}) \leq d(T_1, \dots, T_k)$.*

Demonstração. Fixe \mathbf{a} e seja B uma bola de diâmetro pelo menos 1 e grande o suficiente para garantir que $S_\ell(B) \subset B$ para todo $1 \leq \ell \leq k$, onde $S_\ell = T_\ell + a_\ell$.

Afirmção 4.5.1. *Existe uma bola B centrada na origem com raio $\rho \geq \frac{1}{2}$ de forma que $S_\ell(B) \subset B, \forall \ell \in \{1, \dots, k\}$.*

Prova. Sejam $S_\ell = T_\ell + a_\ell$ transformações afins com T_ℓ transformação linear contrativa e a_ℓ um vetor do \mathbb{R}^n que realiza uma translação. Digamos que a bola B que procuramos tem raio $\rho \in \mathbb{R}, \rho > 0$. Definimos

$$\eta = \max_{1 \leq \ell \leq k} \|T_\ell\|,$$

e

$$\tilde{a} = \max_{1 \leq \ell \leq k} \|a_\ell\|.$$

Daí, dado $x \in B$, temos:

$$\begin{aligned} \|S_\ell(x)\| &= \|T_\ell(x) + a_\ell\| \leq \|T_\ell(x)\| + \|a_\ell\| \\ &\leq \eta \|x\| + \tilde{a} \\ &\leq \eta\rho + \tilde{a} \end{aligned}$$

Queremos que $\|S_\ell(x)\|$ seja menor ou igual que ρ , para isso forçamos a seguinte desigualdade:

$$\|S_\ell(x)\| \leq \eta\rho + \tilde{a} \leq \rho. \quad (4.36)$$

Para garantir a veracidade de (4.36), fazemos:

$$\begin{aligned} \eta\rho + \tilde{a} &\leq \rho \\ \iff \tilde{a} &\leq \rho(1 - \eta) \\ \iff \rho &\geq \frac{\tilde{a}}{1 - \eta}, \end{aligned}$$

lembrando que $\eta < 1$, então foi possível dividir por $1 - \eta$ e o sinal da desigualdade não se inverteu.

Para finalizar, tomamos:

$$\rho = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{\tilde{a}}{1 - \eta}\right\}. \quad (4.37)$$

Isto nos garante que $S_\ell(B) \subset B$, para $\ell = 1, \dots, k$ e que B tem diâmetro no mínimo igual a $\frac{1}{2}$. ■

Dado $\delta > 0$ existe um inteiro r tal que $\text{diam } S_{\mathbf{u}}(B) < \delta$ se $|\mathbf{u}| \geq r$, pois:

$$\text{diam } S_{\mathbf{u}}(B) = \sup_{x, y \in B} \| S_{\mathbf{u}}(x) - S_{\mathbf{u}}(y) \|,$$

i.e., é a maior distância entre dois pontos de $S_{\mathbf{u}}(B)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \| S_{\mathbf{u}}(x) - S_{\mathbf{u}}(y) \| &= \| S_{u_1 u_2 \dots u_p}(x) - S_{u_1 u_2 \dots u_p}(y) \| \\ &\leq \| T_{u_1} \| \| S_{u_2 \dots u_p}(x) - S_{u_2 \dots u_p}(y) \| \\ &\quad \vdots \\ &\leq \| T_{u_1} \| \| T_{u_2} \| \dots \| T_{u_p} \| \| x - y \| \\ &\leq \| T_{u_1} \| \| T_{u_2} \| \dots \| T_{u_p} \| \rho. \end{aligned}$$

Como cada $\| T_{u_\ell} \|$ é menor que $\frac{1}{2}$, para p suficientemente grande podemos garantir que $\| S_{\mathbf{u}}(x) - S_{\mathbf{u}}(y) \| < \delta$.

Afirmção 4.5.2. *Seja A cobertura qualquer de J_∞ tal que $|\mathbf{u}| \geq r$ para cada $\mathbf{u} \in A$. Então, $F(\mathbf{a}) \subset \bigcup_{\mathbf{u} \in A} S_{\mathbf{u}}(B)$.*

Prova. Dado $\mathbf{i} \in J_\infty$, vamos inicialmente mostrar que:

$$S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r} S_{i_{r+1}}(B) \subset S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}(B) \quad (r \in \mathbb{N}).$$

Seja $y \in S_{i_1}S_{i_2} \cdots S_{i_r}S_{i_{r+1}}(B)$, temos que

$$\begin{aligned} \exists x \in B \text{ tal que : } \quad y &= S_{i_1}S_{i_2} \cdots S_{i_r}S_{i_{r+1}}(x) \\ &= S_{i_1}S_{i_2} \cdots S_{i_r}(S_{i_{r+1}}(x)). \end{aligned}$$

Mas, $S_{i_{r+1}}(x) \in S_{i_{r+1}}(B) \subset B \implies S_{i_{r+1}}(x) \in B \implies y \in S_{i_1}S_{i_2} \cdots S_{i_r}(B)$.

Agora, tome $z \in B$:

$$x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) = \lim_{r \rightarrow \infty} S_{i_1}S_{i_2} \cdots S_{i_r}(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} z_r, \text{ onde } z_r = S_{i_1}S_{i_2} \cdots S_{i_r}(z) \in \mathbb{R}^n.$$

Como A é cobertura de J_∞ , existe $\mathbf{u} \in A$ tal que $\mathbf{i} \in N_{\mathbf{u}}$, i.e., $\mathbf{u} < \mathbf{i}$. Denotaremos \mathbf{u} por $\mathbf{u} = (i_1, i_2, \dots, i_{r_0})$. Dessa forma, temos que:

$$z_r \in S_{i_1}S_{i_2} \cdots S_{i_{r_0}}(B), \quad \text{para } r \geq r_0.$$

Além disso, note que $S_{i_1}S_{i_2} \cdots S_{i_{r_0}}(B)$ é compacto, pois B é compacto e cada S_ℓ é contínua. Portanto,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} z_r = x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) \in S_{i_1}S_{i_2} \cdots S_{i_{r_0}}(B).$$

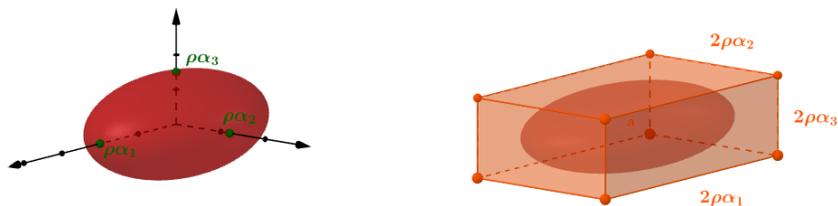
E isto é válido para qualquer \mathbf{i} em J_∞ e, portanto, para qualquer $x_{\mathbf{i}}$ em $F(\mathbf{a})$. Desta forma, concluímos que:

$$F(\mathbf{a}) \subset \bigcup_{\mathbf{u} \in A} S_{\mathbf{u}}(B). \quad (4.38)$$

■

A Proposição A.0.1 nos garante que a transformação afim $S_{\mathbf{u}}$, com $\mathbf{u} \in A$, leva a bola $B = B_\rho$ em um elipsoide $E_{\mathbf{u}}$. Fica fácil ver que os semi-eixos principais de $S_{\mathbf{u}}(B_\rho)$ tem tamanhos $\alpha_1\rho, \alpha_2\rho, \dots, \alpha_n\rho$, onde $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ são os valores singulares de $T_{\mathbf{u}}$. Portanto, $S_{\mathbf{u}}(B_\rho)$ está contido em um paralelepípedo retangular de lados $2\alpha_1\rho, 2\alpha_2\rho, \dots, 2\alpha_n\rho$.

Figura 7 – Elipsoide $S_{\mathbf{u}}(B_\rho)$.



Fonte: A autora (2020).

I. Representação de $S_{\mathbf{u}}(B_\rho)$ em \mathbb{R}^3 .

II. Visualização da inclusão mencionada no parágrafo acima.

Se $m = \lceil s \rceil$ (i.e., $m - 1 < s \leq m$), nós podemos dividir o paralelepípedo acima em

$$\lceil 2\rho \frac{\alpha_1}{\alpha_m} \rceil \lceil 2\rho \frac{\alpha_2}{\alpha_m} \rceil \cdots \lceil 2\rho \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} \rceil \lceil (2\rho)^{n-m+1} \rceil \quad (4.39)$$

cubos de aresta α_m e, conseqüentemente, de diâmetro $\sqrt{n}\alpha_m$. De fato,

$$\begin{aligned} 2\rho\alpha_1 & \text{ é coberto por } \lceil \frac{2\rho\alpha_1}{\alpha_m} \rceil \text{ cópias de } \alpha_m, \\ 2\rho\alpha_2 & \text{ é coberto por } \lceil \frac{2\rho\alpha_2}{\alpha_m} \rceil \text{ cópias de } \alpha_m, \\ & \vdots \\ 2\rho\alpha_{m-1} & \text{ é coberto por } \lceil \frac{2\rho\alpha_{m-1}}{\alpha_m} \rceil \text{ cópias de } \alpha_m, \\ 2\rho\alpha_m & \text{ é coberto por } \lceil \frac{2\rho\alpha_m}{\alpha_m} \rceil = 2\rho \text{ cópias de } \alpha_m, \\ & \vdots \\ 2\rho\alpha_n & \text{ é coberto por } \lceil \frac{2\rho\alpha_n}{\alpha_m} \rceil \leq 2\rho \text{ cópias de } \alpha_m. \end{aligned}$$

E como não nos interessa o número mínimo de cubos de tamanho α_m necessários para cobrir o paralelepípedo, tomamos o valor em (4.39), e assim fica garantido que é possível cobrir o paralelepípedo com uma quantidade de cubos menor ou igual ao valor em (4.39).

Por (3.1), temos que

$$m_s(F(\mathbf{a}), \sqrt{n}\delta) = \inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^s : \mathcal{U} \text{ cobertura de } F(\mathbf{a}) \text{ com } \text{diam } \mathcal{U} < \sqrt{n}\delta \right\}.$$

Além disso, dada uma cobertura $\tilde{\mathcal{U}}$ de $F(\mathbf{a})$ com $\text{diam } \tilde{\mathcal{U}} < \sqrt{n}\delta$, temos que

$$m_s(F(\mathbf{a}), \sqrt{n}\delta) \leq \sum_{U \in \tilde{\mathcal{U}}} (\text{diam } U)^s.$$

Das discussões anteriores, sabemos que $F(\mathbf{a}) \subset \bigcup_{\mathbf{u} \in A} S_{\mathbf{u}}(B_\rho)$ e que cada $S_{\mathbf{u}}(B_\rho)$ está contido na união de cubos de aresta $\alpha_m(T_{\mathbf{u}})$. Perceba que escolhemos A de maneira que $\text{diam } S_{\mathbf{u}}(B_\rho) < \delta, \forall \mathbf{u} \in A$. Conseqüentemente, o diâmetro de cada pequeno cubo $\sqrt{n}\alpha_m(T_{\mathbf{u}})$ é menor que $\sqrt{n}\delta$. Então, podemos escolher a cobertura $\tilde{\mathcal{U}}$ como sendo o conjunto dos cubos descritos anteriormente, os quais cobrem $S_{\mathbf{u}}(B_\rho), \forall \mathbf{u} \in A$. Daí, temos:

$$\begin{aligned} m_s(F(\mathbf{a}), \sqrt{n}\delta) & \leq \sum_{\mathbf{u} \in A} \sum_{\substack{\text{cubos com} \\ \text{aresta } \alpha_m(T_{\mathbf{u}})}} (\sqrt{n}\alpha_m(T_{\mathbf{u}}))^s \\ & \leq \sum_{\mathbf{u} \in A} (4\rho)^n \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{m-1} \alpha_m^{1-m} (\sqrt{n}\alpha_m)^s \\ & \leq (4\rho)^n (\sqrt{n})^s \sum_{\mathbf{u} \in A} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{m-1} \alpha_m^{s-m+1} \\ & \leq (4\rho)^n (\sqrt{n})^s \sum_{\mathbf{u} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{u}}). \end{aligned}$$

Isto é válido para toda cobertura A com $|\mathbf{u}| \geq r$ se $\mathbf{u} \in A$. Então,

$$m_s(F(\mathbf{a}), \sqrt{n}\delta) \leq (4\rho)^n (\sqrt{n})^s \mathcal{M}_r^s(J_\infty),$$

pois, por definição,

$$\mathcal{M}_r^s(J_\infty) = \inf \left\{ \sum_{\mathbf{u}} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) : J_\infty \subset \bigcup_{\mathbf{u}} N_{\mathbf{u}} \text{ e } |\mathbf{u}| \geq r \right\}. \quad (4.40)$$

Daí,

$$\begin{aligned} m_s(F(\mathbf{a}), \sqrt{n}\delta) &\leq \inf \left\{ (4\rho)^n (\sqrt{n})^s \sum_{\mathbf{u} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) : J_\infty \subset \bigcup_{\mathbf{u} \in A} N_{\mathbf{u}} \text{ e } |\mathbf{u}| \geq r \right\} \\ &\leq (4\rho)^n (\sqrt{n})^s \inf \left\{ \sum_{\mathbf{u} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) : J_\infty \subset \bigcup_{\mathbf{u} \in A} N_{\mathbf{u}} \text{ e } |\mathbf{u}| \geq r \right\} \\ &\leq (4\rho)^n (\sqrt{n})^s \mathcal{M}_r^s(J_\infty). \end{aligned}$$

Para δ fixado, fazemos $r \rightarrow \infty$:

$$m_s(F(\mathbf{a}), \sqrt{n}\delta) \leq (4\rho)^n (\sqrt{n})^s \mathcal{M}^s(J_\infty).$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, temos:

$$m_s(F(\mathbf{a})) \leq (4\rho)^n (\sqrt{n})^s \mathcal{M}^s(J_\infty).$$

Logo, para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{nk}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^s(J_\infty) < \infty &\implies m_s(F(\mathbf{a})) < \infty \\ \implies \dim_{\mathcal{H}} F(\mathbf{a}) &\leq d(T_1, T_2, \dots, T_k). \end{aligned}$$

□

A fim de encontrar uma estimativa inferior para a dimensão de Hausdorff de $F(\mathbf{a})$, utilizaremos o seguinte lema:

Lema 4.5.1. *Suponha que μ é uma medida de Borel em J_∞ com $0 < \mu(J_\infty) < \infty$ tal que para algum $s < n$:*

$$\int_{J_\infty} \int_{J_\infty} \int_{\mathbf{a} \in B_\rho} \frac{d\mathbf{a} d\mu(\mathbf{i}) d\mu(\mathbf{j})}{|x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) - x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a})|^s} < \infty. \quad (4.41)$$

Então, para quase todo $\mathbf{a} \in B_\rho \subset \mathbb{R}^{nk}$ (relativamente a medida nk -dimensional de Lebesgue), temos $\dim_{\mathcal{H}} F(\mathbf{a}) \geq s$.

Demonstração. Seja $f_r(\mathbf{a}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) : \mathbb{R}^{nk} \times J_\infty \times J_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções reais, com $r \in \mathbb{N}$, onde $f_r(\mathbf{a}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = \min\{r, |x_i(\mathbf{a}) - x_j(\mathbf{a})|^{-s}\}$. Note o seguinte:

- A função $\varphi_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\varphi_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) = x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a})$, é contínua em \mathbf{a} .

Sejam \mathbf{a} e $\mathbf{a}' \in \mathbb{R}^{nk}$,

$$\begin{aligned} |\varphi_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) - \varphi_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}')| &= |x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) - x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}')| \\ &= \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} T_{i_1 \dots i_{\ell-1}}(a_{i_\ell} - a'_{i_\ell}) \right| \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \eta^{\ell-1} |\mathbf{a} - \mathbf{a}'| \\ &= c |\mathbf{a} - \mathbf{a}'|, \end{aligned}$$

onde $\eta = \max_{1 \leq \ell \leq k} \|T_\ell\| < 1$ e $c \in \mathbb{R}^+$. Isto prova que $\varphi_{\mathbf{i}}(\mathbf{a})$ é Lipschitz em \mathbf{a} e, portanto, contínua.

- A função $\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{i}) : J_\infty \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{i}) = x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a})$, é contínua em \mathbf{i} .

Sejam $\mathbf{a} \in B_\rho$ e $\mathbf{i}, \mathbf{i}' \in J_\infty$ tais que $i_\ell = i'_\ell$ para todo $\ell \in \{1, \dots, p\}$, $p \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\begin{aligned} |\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{i}) - \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{i}')| &= |x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) - x_{\mathbf{i}'}(\mathbf{a})| \\ &= |a_{i_1} + T_{i_1} a_{i_2} + \dots + T_{i_1} \dots T_{i_{p-1}} a_{i_p} + T_{i_1} \dots T_{i_p} a_{i_{p+1}} + \dots \\ &\quad - a_{i'_1} - T_{i'_1} a_{i'_2} - \dots - T_{i'_1} \dots T_{i'_{p-1}} a_{i'_p} - T_{i'_1} \dots T_{i'_p} a_{i'_{p+1}} - \dots| \\ &= |T_{i_1} \dots T_{i_p} a_{i_{p+1}} + T_{i_1} \dots T_{i_{p+1}} a_{i_{p+2}} + \dots \\ &\quad - T_{i'_1} \dots T_{i'_p} a_{i'_{p+1}} - T_{i'_1} \dots T_{i'_{p+1}} a_{i'_{p+2}} - \dots| \\ &\leq \sum_{\ell=p}^{\infty} \|T_{i_1} \dots T_{i_\ell}\| |a_{i_{\ell+1}}| + \sum_{\ell=p}^{\infty} \|T_{i'_1} \dots T_{i'_\ell}\| |a_{i'_{\ell+1}}| \\ &\leq 2\rho \sum_{\ell=p}^{\infty} \eta^\ell \\ &= 2\rho \frac{\eta^p}{1-\eta}. \end{aligned}$$

Para que $2\rho \frac{\eta^p}{1-\eta}$ seja menor que um $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ dado, é necessário:

$$\begin{aligned} 2\rho \frac{\eta^p}{1-\eta} < \varepsilon &\iff 2\rho \eta^p < \varepsilon(1-\eta) \\ &\iff \eta^p < \varepsilon \frac{(1-\eta)}{2\rho} \\ &\iff p \log \eta < \log\left(\varepsilon \frac{(1-\eta)}{2\rho}\right) \\ &\iff p > \frac{\log\left(\varepsilon \frac{(1-\eta)}{2\rho}\right)}{\log \eta} \end{aligned}$$

Tomando $\tilde{\delta} := \frac{\log(\varepsilon \frac{1-\eta}{2\rho})}{\log \eta}$, temos:

$$\begin{aligned} 2\rho \frac{\eta^p}{1-\eta} < \varepsilon &\iff p > \tilde{\delta} \\ &\iff d(\mathbf{i}, \mathbf{i}') < 2^{-\tilde{\delta}} = \delta. \end{aligned}$$

Então,

$$d(\mathbf{i}, \mathbf{i}') < \delta \implies \|\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{i}) - \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{i}')\| < \varepsilon.$$

Dito isto, é fácil ver que a função $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) : \mathbb{R}^{nk} \times J_{\infty} \times J_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = |x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) - x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a})|$ é contínua em $(\mathbf{a}, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. Já a função $\psi(\mathbf{a}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) : \mathbb{R}^{nk} \times J_{\infty} \times J_{\infty} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, dada por $\psi(\mathbf{a}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = |x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) - x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a})|^{-s}$, com $0 < s < n$, vale $+\infty$ quando $x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) = x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a})$. Portanto, sua continuidade é verdadeira em $\mathbb{R}^{nk} \times J_{\infty} \times J_{\infty} \setminus \mathbb{R}^{nk} \times \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in J_{\infty} \times J_{\infty}, x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) = x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a})\}$. Perceba que as funções f_r não terão este problema, pois $f_r(\mathbf{a}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = r$ se $x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) = x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a})$. Concluimos que f_r é contínua em $(\mathbf{a}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathbb{R}^{nk} \times J_{\infty} \times J_{\infty}$, para todo r natural. Por ser contínua, temos que f_r é também Borel-mensurável (ver Teorema A.0.4). Além disso, note que $\psi(\mathbf{a}, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ é o limite da sequência não-decrescente de funções Borel-mensuráveis $(f_r)_{r \in \mathbb{N}}$, o que nos mostra que ψ é uma função não-negativa Borel-mensurável em $\mathbb{R}^{nk} \times J_{\infty} \times J_{\infty}$.

Utilizando o Teorema de Fubini-Tonelli (Teorema A.0.6), temos que, para quase todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{nk}$:

$$\int_{J_{\infty}} \int_{J_{\infty}} \frac{d\mu(\mathbf{i}) d\mu(\mathbf{j})}{|x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) - x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a})|^s} < \infty.$$

Para cada um desses \mathbf{a} 's nós podemos definir uma medida ν em \mathbb{R}^n por

$$\nu(E) = \mu(\{\mathbf{i} : x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) \in E\}), \quad E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

A princípio, perceba que o conjunto $\{\mathbf{i} : x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) \in E\}$, com $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, é μ -mensurável, pois $\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{i})$ é contínua (e, portanto, Borel-mensurável), então $\varphi_{\mathbf{a}}^{-1}(E) = \{\mathbf{i} : x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) \in E\} \in \mathcal{B}_{J_{\infty}}$. Agora vejamos que ν é de fato uma medida em \mathbb{R}^n :

- $\nu(\emptyset) = \mu(\{\mathbf{i} : x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) \in \emptyset\}) = \mu(\emptyset) = 0$.
- Dado $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, $\nu(E) = \mu(\{\mathbf{i} : x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) \in E\}) \geq 0$, pois μ é medida em J_{∞} .

- Dada uma coleção $(A_\ell)_{\ell=1}^\infty$ de elementos de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, dois-a-dois disjuntos, temos:

$$\begin{aligned} \nu(\cup_{\ell=1}^\infty A_\ell) &= \mu(\{\mathbf{i} : x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) \in \cup_{\ell=1}^\infty A_\ell\}) \\ &= \mu(\cup_{\ell=1}^\infty \{\mathbf{i} : x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) \in A_\ell\}) \\ &= \sum_{\ell=1}^\infty \mu(\{\mathbf{i} : x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) \in A_\ell\}) \\ &= \sum_{\ell=1}^\infty \nu(A_\ell). \end{aligned}$$

Segue que ν é medida de Borel em \mathbb{R}^n (com $\nu(\mathbb{R}^n) = \mu(J_\infty) < \infty$). Além disso, temos que $\varphi_{\mathbf{a}}(J_\infty) = F(\mathbf{a})$, por (4.18). Daí, $0 < \nu(F(\mathbf{a})) = \mu(J_\infty) < \infty$. Portanto, existe uma medida ν em $F(\mathbf{a})$ tal que $0 < \nu(F(\mathbf{a})) < \infty$. Pelo Lema A.0.3, concluímos que $\dim_{\mathcal{H}} F(\mathbf{a}) \geq s$.

□

Agora demonstraremos o resultado principal deste trabalho.

Teorema 4.5.1. *Assuma que $\|T_\ell\| < \frac{1}{2}$ para $1 \leq \ell \leq k$. Para quase todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{nk}$ (relativo à medida nk -dimensional de Lebesgue):*

$$\dim_{\mathcal{H}} F(\mathbf{a}) = \min\{n, d(T_1, \dots, T_k)\},$$

onde $d(T_1, \dots, T_k) = \inf\{s : \sum_{\mathbf{u} \in J} \phi^s(T_{\mathbf{u}}) < \infty\}$.

Demonstração. Inicialmente, note que $\dim_{\mathcal{H}} F(\mathbf{a}) \leq d(T_1, \dots, T_k)$ para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{nk}$, pela Proposição 4.5.1, e $\dim_{\mathcal{H}} F(\mathbf{a}) \leq n$, pois $F(\mathbf{a}) \subset \mathbb{R}^n$. Logo, $\min\{n, d(T_1, \dots, T_k)\}$ é cota superior para $\dim_{\mathcal{H}} F(\mathbf{a})$. Basta verificarmos que tal valor é cota inferior para quase todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{nk}$.

Fixe $\rho > 0$. Seja t um número real não-inteiro tal que $0 < t < \min\{n, d(T_1, \dots, T_k)\}$ e escolha s tal que $t < s < \min\{n, d(T_1, \dots, T_k)\}$. Então, $\mathcal{M}^s(J_\infty) = \infty$, pois

$$\begin{aligned} s < \min\{n, d(T_1, \dots, T_k)\} &\implies s < d(T_1, \dots, T_k) = \sup\{d : \mathcal{M}^d(J_\infty) = \infty\} \\ &\implies \exists \tilde{s}, s < \tilde{s} < d(T_1, \dots, T_k), \text{ tal que } \mathcal{M}^{\tilde{s}}(J_\infty) = \infty, \\ &\implies \mathcal{M}^s(J_\infty) = \infty. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.4.1 existe um compacto $E \subset J_\infty$ tal que $0 < \mathcal{M}^s(E) < \infty$ e $\mathcal{M}^s(E \cap N_{\mathbf{u}}) \leq \tilde{c}_1 \phi^s(T_{\mathbf{u}})$, $\mathbf{u} \in J$. Definimos a medida de Borel μ em J_∞ por

$$\mu(A) = \mathcal{M}^s(E \cap A).$$

Dessa forma,

$$\mu(N_{\mathbf{u}}) \leq \tilde{c}_1 \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \quad (\mathbf{u} \in J). \quad (4.42)$$

Uma vez definida a medida μ , chegamos às seguintes desigualdades:

$$\int_{J_\infty} \int_{J_\infty} \int_{\mathbf{a} \in B_\rho \subset \mathbb{R}^{nk}} \frac{d\mathbf{a} d\mu(\mathbf{i}) d\mu(\mathbf{j})}{|x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) - x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a})|^t} \leq \lambda \int_{J_\infty} \int_{J_\infty} \phi^t(T_{\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}})^{-1} d\mu(\mathbf{i}) d\mu(\mathbf{j}) \quad (4.43)$$

$$\leq \lambda \sum_{\mathbf{p} \in J} \phi^t(T_{\mathbf{p}})^{-1} \mu(N_{\mathbf{p}})^2 \quad (4.44)$$

$$\leq \lambda \tilde{c}_1 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{p} \in J_r} \phi^t(T_{\mathbf{p}})^{-1} \phi^s(T_{\mathbf{p}}) \mu(N_{\mathbf{p}}) \quad (4.45)$$

$$\leq \lambda \tilde{c}_1 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{p} \in J_r} a^{r(s-t)} \mu(N_{\mathbf{p}}) \quad (4.46)$$

$$\leq \lambda \tilde{c}_1 \mu(E) \sum_{r=1}^{\infty} a^{r(s-t)} \quad (4.47)$$

$$< \infty. \quad (4.48)$$

Vejamos que cada uma das desigualdades acima é válida.

- O Lema 4.3.2 nos diz que: dado t não-inteiro, $0 < t < n$ e $\|T_\ell\| < \frac{1}{2}(1 \leq \ell \leq k)$, então existe $\lambda < \infty$ tal que

$$\int_{\mathbf{a} \in B_\rho \subset \mathbb{R}^{nk}} \frac{d\mathbf{a}}{|x_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}) - x_{\mathbf{j}}(\mathbf{a})|^t} \leq \frac{\lambda}{\phi^t(T_{\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}})},$$

para todos $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in J_\infty$ distintos. Portanto, a desigualdade (4.43) é verdadeira.

- A fim de provar a validade de (4.44), recorreremos a:

Sejam (X, \mathcal{B}, μ) espaço de medida e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ função mensurável. Dizemos que f é uma *função simples* se assume apenas um número finito de valores. Se tais valores são $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{R}$, então escrevemos:

$$f(x) = m_1 \mathcal{X}_{E_1}(x) + \dots + m_k \mathcal{X}_{E_k}(x),$$

onde \mathcal{X}_{E_ℓ} é a função característica de E_ℓ , $E_\ell = \{x \in X; f(x) = m_\ell\}$ e os E_ℓ 's são claramente disjuntos.

A integral de f com respeito a μ é:

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{\ell=1}^k m_\ell \mu(E_\ell). \quad (4.49)$$

Note que $f \in M^+(X, \mathcal{B})$ (que é o conjunto das funções mensuráveis não-negativas) se e somente se $m_\ell \geq 0$, $1 \leq \ell \leq k$.

Sejam $f_v : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis não-negativas ($f_v \in M^+(X, \mathcal{B}), \forall v \in \mathbb{N}$), definidas da seguinte forma:

$$f_v(x) = \sum_{\ell=1}^v m_\ell \mathcal{X}_{E_\ell}(x),$$

onde m_ℓ são números reais maiores ou iguais a zero.

Note que se $x \notin \bigcup_{\ell=1}^v E_\ell$, então $f_v(x) = 0$. Conseqüentemente, temos que $f_v(x) \leq f_{v+1}(x), \forall v$.

Além disso,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} f_v(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} m_\ell \mathcal{X}_{E_\ell}(x) =: f(x).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Monótona (Teorema A.0.7),

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{v \rightarrow \infty} \left[\int_X f_v(x) d\mu \right] = \lim_{v \rightarrow \infty} \left[\sum_{\ell=1}^v m_\ell \mu(E_\ell) \right] = \sum_{\ell=1}^{\infty} m_\ell \mu(E_\ell). \quad (4.50)$$

Temos aqui uma generalização do caso simples (4.49), pois (4.50) é verdadeira para funções que assumem uma quantidade enumerável de valores não-negativos.

Dessa forma, definimos

$$\begin{aligned} f : J_\infty \times J_\infty &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{i}, \mathbf{j}) &\mapsto \phi^t(T_{\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}})^{-1}. \end{aligned}$$

Seja $\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{i}} \wedge \tilde{\mathbf{j}}$. Note que $\phi^t(T_{\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}}) = \phi^t(T_{\mathbf{p}}), \forall \mathbf{i}, \mathbf{j} \in J_\infty$ tais que $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{p}$.

Então, podemos reescrever a função f :

$$f(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \sum_{\mathbf{p} \in J} \phi^t(T_{\mathbf{p}})^{-1} \mathcal{X}_{\{(\mathbf{i}, \mathbf{j}), \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{p}\}}(\mathbf{i}, \mathbf{j}).$$

Portanto, por (4.50):

$$\int_{J_\infty \times J_\infty} f(\mathbf{i}, \mathbf{j}) d(\mu \times \mu)(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \sum_{\mathbf{p} \in J} \phi^t(T_{\mathbf{p}})^{-1} (\mu \times \mu)(\{(\mathbf{i}, \mathbf{j}), \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{p}\}).$$

Note que se (\mathbf{i}, \mathbf{j}) são tais que $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{p}$, então $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in N_{\mathbf{p}} \times N_{\mathbf{p}}$. Daí,

$$(\mu \times \mu)(\{(\mathbf{i}, \mathbf{j}), \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{p}\}) \leq (\mu \times \mu)(N_{\mathbf{p}} \times N_{\mathbf{p}}) = \mu(N_{\mathbf{p}})^2.$$

Portanto,

$$\int_{J_\infty \times J_\infty} f(\mathbf{i}, \mathbf{j}) d(\mu \times \mu)(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \leq \sum_{\mathbf{p} \in J} \phi^t(T_{\mathbf{p}})^{-1} \mu(N_{\mathbf{p}})^2.$$

- A desigualdade (4.45) segue pelo uso de (4.42).
- Basta utilizar a desigualdade (4.29) para ver que (4.46) é válida.
- Sabemos que

$$\sum_{\mathbf{p} \in J_r} \mu(N_{\mathbf{p}}) = \mu\left(\bigcup_{\mathbf{p} \in J_r} N_{\mathbf{p}}\right) = \mathcal{M}^s(E \cap \bigcup_{\mathbf{p} \in J_r} N_{\mathbf{p}}) \leq \mathcal{M}^s(E) = \mu(E).$$

Consequentemente, é verdadeira a desigualdade (4.47).

- Por fim, (4.48) é válida, pois:

$$\mu(N_{\mathbf{p}}) = \mathcal{M}^s(E \cap N_{\mathbf{p}}) \leq \mathcal{M}^s(E) = \mu(E) < \infty.$$

E, além disso, $a < 1$ e $s > t$, portanto $\sum_{r=1}^{\infty} a^{r(s-t)} < \infty$.

Pelo Lema 4.5.1, $\dim_{\mathcal{H}} F(\mathbf{a}) \geq t$ para quase todo $\mathbf{a} \in B_{\rho}$, em relação à medida nk -dimensional de Lebesgue. Como ρ é arbitrário, $\dim_{\mathcal{H}} F(\mathbf{a}) \geq t$ para quase todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{nk}$. Isto é verdade para todo não-inteiro $t < \min\{n, d(T_1, \dots, T_k)\}$. Logo,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{H}} F(\mathbf{a}) &\geq t, \forall t < \min\{n, d(T_1, \dots, T_k)\} \\ \implies \dim_{\mathcal{H}} F(\mathbf{a}) &\geq \min\{n, d(T_1, \dots, T_k)\}, \end{aligned}$$

para quase todo \mathbf{a} em \mathbb{R}^{nk} .

Portanto,

$$\dim_{\mathcal{H}} F(\mathbf{a}) = \min\{n, d(T_1, \dots, T_k)\} \quad \text{qtp. } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{nk}. \quad (4.51)$$

□

4.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O valor $d(T_1, \dots, T_k)$ não é, em geral, fácil de calcular. Em alguns casos particulares, a forma apresentada na Proposição 4.4.1, item (b), se mostrou a mais fácil de manipular computacionalmente. Porém, não parece haver nenhum jeito fácil de estimar a taxa de convergência de $x_r^{1/r}$ onde $\{x_r\}$ é sequência subaditiva.

Em alguns casos especiais encontramos uma expressão simplificada para $d(T_1, \dots, T_k)$. Isto acontece quando as transformações lineares T_1, \dots, T_k são semelhanças, por exemplo:

se $T_\ell = c_\ell \text{Id}$, com $c_\ell < 1$, temos que $d(T_1, \dots, T_k)$ é o único s tal que $\sum_{\ell=1}^k c_\ell^s = 1$. Agora, se $T_1 = \dots = T_k = T$, onde T é auto-adjunta, temos que seus valores singulares coincidem com seus autovalores, então $\left(\sum_{\mathbf{u} \in J_r} \phi^s(T_{\mathbf{u}})\right)^{\frac{1}{r}} = k\phi^s(T)$ e podemos encontrar o valor de s que torna esta expressão igual a 1 facilmente.

A condição $\|T_\ell\| < \frac{1}{2}$ é um inconveniente técnico requerido na prova do Lema 4.3.2. Em certo sentido, esta condição poderia ser contornada: uma vez que T_ℓ são contrações, temos $\|T_\ell\| < 1$, então podemos substituir $\{T_1, \dots, T_k\}$ por $\{T_{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in J_r\}$, com r grande o suficiente para que $\|T_{\mathbf{u}}\| < \frac{1}{2}$ para todo $\mathbf{u} \in J_r$. Claramente, $d(\{T_{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in J_r\}) = d(T_1, \dots, T_k)$, mas o conjunto invariante F tem sua dimensão igual ao mínimo do Teorema 4.5.1 para Lebesgue-quase todo ponto de \mathbb{R}^{nk^r} , ou seja, F depende de uma família com k^r parâmetros, diferente do problema original com uma família de apenas k parâmetros (a_1, \dots, a_k) .

Por fim, note que os resultados discutidos acima também podem ser aplicados para repulsores de certos sistemas dinâmicos. Suponha que, para certo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{nk}$ o conjunto invariante $F(\mathbf{a})$ é tal que $T_\ell(F(\mathbf{a})) + a_\ell$ são disjuntos. Definimos uma função linear por partes $f : F(\mathbf{a}) \rightarrow F(\mathbf{a})$ por $f(x) = T_\ell^{-1}(x - a_\ell)$ se $x \in (T_\ell(F(\mathbf{a})) + a_\ell)$. Se f for a restrição à $F(\mathbf{a})$ de uma função cujo domínio é mais extenso, então $F(\mathbf{a})$ é um repulsor para f . Esta situação persiste para pequenas perturbações de \mathbf{a} , então a análise feita nesta dissertação nos dá a dimensão dos repulsores para quase todo \mathbf{a} .

REFERÊNCIAS

- BARNESLEY, M. F. *Fractals Everywhere*. 2. ed. [S.l.]: Academic Press Professional, 1993.
- EDGAR, G. A. Fractal dimension of self-affine sets: some examples. *Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, v. 28, p. 341–358, 1992.
- EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. *Measure Theory and Fine Property of Functions*. [S.l.]: CRC Press, 2015.
- FALCONER, K. The hausdorff dimension of self-affine fractals. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Cambridge University Press, v. 103, n. 2, p. 339–350, 1988.
- FALCONER, K. *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2003.
- FOLLAND, G. B. *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*. [S.l.]: John Wiley and Sons, Inc., 1999. 386 p.
- HUTCHINSON, J. E. Fractals and self similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, v. 30, p. 713–747, 1981.
- SOLOMYAK, B. Measure and dimension for some fractal families. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Cambridge University Press, v. 124, n. 3, p. 531–546, 1998.
- VIANA, M.; OLIVEIRA, K. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. 2. ed. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2019. 500 p.

APÊNDICE A – VALORES SINGULARES E MEDIDA

Esta parte do Apêndice consiste em um compilado de resultados que são importantes no decorrer no trabalho, mas cujos enunciados e/ou demonstrações não encaixavam no corpo principal desta dissertação.

RESULTADOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Teorema A.0.1 (Continuidade de Transformações lineares). *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow F$ transformação linear, sendo F um espaço vetorial normado qualquer. Então, T é contínua.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a base canônica do \mathbb{R}^n . Dado $x \in \mathbb{R}^n$ qualquer, $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$, temos que:

$$Tx = T(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1Te_1 + \dots + x_nTe_n.$$

Logo,

$$|Tx| \leq |x_1||Te_1| + \dots + |x_n||Te_n|.$$

Tome $\tilde{\eta} := \max_{1 \leq i \leq n} |Te_i|$. Temos que:

$$|Tx| \leq \tilde{\eta}(|x_1| + \dots + |x_n|) \leq \tilde{\eta}n|x|.$$

Então, para $x, y \in \mathbb{R}^n$ quaisquer, vale:

$$|Tx - Ty| = |T(x - y)| \leq \tilde{\eta}n|x - y|.$$

Disso concluímos que T é Lipschitz e, conseqüentemente, contínua. □

Teorema A.0.2 (Teorema Max-Min). *Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear auto-adjunta com valores singulares $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$, onde $n = \dim V$. Então,*

$$\alpha_i = \max_{\substack{U \subset V \\ \dim U = i}} \min_{u \in U - \{0\}} \frac{|T(u)|}{|u|},$$

para $i \in \{1, \dots, n\}$.

Teorema A.0.3 (Decomposição em Valores Singulares). *Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear de posto r entre espaços de dimensão finita com produto interno. Existem bases ortonormais $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ e $\{w_1, \dots, w_m\} \subset W$ tais que*

$$\begin{cases} Tv_i = \alpha_i w_i & \text{e} & T^* w_i = \alpha_i v_i & , & \text{com } \alpha_i > 0 \text{ para } i \in \{1, \dots, r\}. \\ Tv_i = 0, Tw_i = 0 & & & , & \text{se } i > r. \end{cases}$$

Lema A.0.1 (Propriedade dos Valores Singulares). *Dadas $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, temos que*

$$\alpha_n(A)\alpha_v(B) \leq \alpha_v(AB) \leq \alpha_1(A)\alpha_v(B), v \in \{1, \dots, n\}. \quad (\text{A.1})$$

Lema A.0.2 (Perturbação da Identidade). *Dada $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\|A\| < 1$, temos que $Id - A$ é inversível.*

Demonstração. Seja $B := Id + A + A^2 + A^3 + \dots = \sum_{\ell=0}^{\infty} A^\ell$, onde Id é a matriz identidade em \mathbb{R}^n . Como $\|A\| < 1$, a série converge e, assim, garantimos a existência de B .

Queremos mostrar que $(Id - A)B = B(Id - A) = Id$. Para isso, note que

$$(Id - A)(Id + A + A^2 + \dots + A^\ell) = Id - A^{\ell+1}, \quad (\text{A.2})$$

para $\ell \in \mathbb{N}, \ell \geq 1$.

Daí, temos que

$$(Id - A)B = \lim_{\ell \rightarrow \infty} (Id - A^{\ell+1}).$$

Como $\|A\| < 1$ e $\|A^\ell\| \leq \|A\|^\ell$, é fato que $A^\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$.

Então, $(Id - A)B = Id \Rightarrow B = (Id - A)^{-1}$. □

Proposição A.0.1. *Se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo com valores singulares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e B_1 é a bola unitária n -dimensional de centro na origem de \mathbb{R}^n , então $T(B_1)$ é um elipsoide de semi-eixos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.*

De modo mais geral, a imagem da bola B_ρ , de raio ρ e centro na origem, pela transformação linear T , como acima, é um elipsoide de semi-eixos $\alpha_1\rho, \alpha_2\rho, \dots, \alpha_n\rho$.

Demonstração. Pelo Teorema da Decomposição em Valores Singulares (Teorema A.0.3), existem bases ortonormais $\{u_1, \dots, u_n\}$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{R}^n tais que $Tu_i = \alpha_i v_i$, $T^*v_i = \alpha_i u_i$. Note que, sendo T invertível, todos os α_i são diferentes de zero.

Seja x um ponto de B_1 com coordenadas (x_1, \dots, x_n) , isto é

$$x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n,$$

então suas coordenadas satisfazem $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$. Por outro lado,

$$Tx = T(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) = x_1 T u_1 + \dots + x_n T u_n = x_1 \alpha_1 v_1 + \dots + x_n \alpha_n v_n.$$

Denotando por $y_i := x_i \alpha_i$, temos que (y_1, \dots, y_n) são as coordenadas de Tx na base $\{v_1, \dots, v_n\}$, e estas satisfazem:

$$\left(\frac{y_1}{\alpha_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{y_n}{\alpha_n}\right)^2 = \left(\frac{x_1 \alpha_1}{\alpha_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n \alpha_n}{\alpha_n}\right)^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1,$$

isto é, $Tx \in E$, onde E é o elipsoide de semi-eixos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, e, portanto, $T(B_1) \subset E$.

Reciprocamente, se $y \in E$, sejam (y_1, \dots, y_n) suas coordenadas na base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Note que, sendo T um isomorfismo, temos:

$$Tu_i = \alpha_i v_i \implies T^{-1}v_i = (\alpha_i)^{-1}u_i.$$

Por outro lado, existe um único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $y = Tx$, e vale:

$$\begin{aligned} x &= T^{-1}y = T^{-1}(y_1v_1 + \dots + y_nv_n) \\ &= y_1T^{-1}v_1 + \dots + y_nT^{-1}v_n \\ &= \left(\frac{y_1}{\alpha_1}\right)u_1 + \dots + \left(\frac{y_n}{\alpha_n}\right)u_n. \end{aligned}$$

Então as coordenadas $(\frac{y_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{y_n}{\alpha_n})$ de x na base $\{u_1, \dots, u_n\}$ satisfazem:

$$\left(\frac{y_1}{\alpha_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{y_n}{\alpha_n}\right)^2 \leq 1.$$

Isto é, $x \in B_1$. Assim $y = Tx$ para certo $x \in B_1$, e, portanto, $E \subset T(B_1)$.

A prova do caso geral é análoga.

Note que a hipótese de que B_ρ está centrada na origem é conveniente para os cálculos, mas não é necessária para demonstrar a proposição. Podemos considerar a bola $B(x, \rho)$ centrada em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e, ainda assim, sua imagem $T(B(x, \rho))$ seria um elipsoide com semi-eixos $\alpha_1\rho, \alpha_2\rho, \dots, \alpha_n\rho$.

□

RESULTADOS DE MEDIDA E ANÁLISE

Teorema A.0.4 (Toda Função Contínua é Borel-mensurável). *Sejam X, Y espaços métricos (ou topológicos). Toda função contínua $f : X \rightarrow Y$ é Borel-mensurável.*

Demonstração. Segue da definição:

$$f \text{ é contínua} \iff f^{-1}(U) \text{ é aberto para todo } U \subset Y \text{ aberto.}$$

E do fato da σ -álgebra de Borel ser gerada pelos conjuntos abertos.

□

Uma técnica para obter cotas inferiores para a dimensão de Hausdorff corresponde ao seguinte lema.

Lema A.0.3. *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. Se existe μ tal que $0 < \mu(F) < \infty$ e se*

$$I_s(\mu) = \iint \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(x)d\mu(y) < \infty,$$

então:

$$m_s(F) = +\infty \implies \dim F \geq s.$$

Demonstração. Defina $F_1 = \{x \in F; \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} > 0\}$. Temos que:

Afirmção A.0.1. $\mu(F_1) = 0$.

Afirmção A.0.2. *Dado $c \in \mathbb{R}$, se $\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} < c$, para todo $x \in E \subset F$, então:*

$$m_s(E) \geq \frac{\mu(E)}{c}.$$

Juntando as duas afirmações, considere $E = F - F_1$. Pela Afirmção A.0.1 concluímos que $\mu(E) = \mu(F) \in (0, \infty)$. Daí, temos:

$$\begin{aligned} m_s(F) &\geq m_s(E) \geq \frac{\mu(E)}{c}, \forall c \\ \implies m_s(F) &= +\infty. \end{aligned}$$

Agora vamos provar que as Afirmções A.0.1 e A.0.2 são verdadeiras.

Prova da Afirmção A.0.1: Para todo $x \in F_1$, existe $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ e $r_i = r_i(x) \rightarrow 0$ tais que:

$$\mu(B(x, r_i)) \geq \varepsilon r_i^s.$$

Isto se deve ao fato do $\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} > 0$, $x \in F_1$.

E como

$$\begin{aligned} I_s(\mu) &= \iint \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(x)d\mu(y) \\ &\geq \int_{F_1} \int_{F_1} \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(x)d\mu(y) \\ &\geq \int_{\{x\}} \int_{\{x\}} \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(x)d\mu(y) \\ &= +\infty, \text{ caso } \mu(x) \neq 0, \end{aligned}$$

concluímos que $\mu(\{x\}) = 0$, pois, por hipótese, $I_s(\mu) < +\infty$. Pela continuidade de μ , tomando q_i pequeno em relação a r_i :

$$\mu(B(x, r_i) - B(x, q_i)) \geq \frac{\varepsilon}{4} r_i^s \quad (0 < q_i < r_i).$$

Podemos supor que $r_{i+1} < q_i$ (mesmo que para isto seja preciso tomar uma subsequência de r_i), logo

$$A_i := B(x, r_i) - B(x, q_i)$$

são conjuntos dois-a-dois disjuntos. Note também que para $x, y \in A_i$ vale $|x - y| < r_i$, então $\frac{1}{|x-y|^s} > \frac{1}{r_i^s}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \tau_s(x) &:= \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \\ &\geq \sum_i \int_{A_i} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \\ &\geq \sum_i \int_{A_i} \frac{d\mu(y)}{r_i^s} \\ &\geq \sum_i \frac{\varepsilon}{4} r_i^s r_i^{-s} = +\infty. \end{aligned}$$

Isto nos mostra que: se $x \in F_1$, então $\tau_s(x) = +\infty$. Por fim, temos como hipótese que:

$$\begin{aligned} I_s(\mu) = \int \tau_s(x) d\mu(x) < +\infty &\implies \tau_s(x) < +\infty \text{ em } \mu\text{-qtp.} \\ &\implies \mu(F_1) = 0. \end{aligned}$$

■

Prova da Afirmação A.0.2: Dado $c \in \mathbb{R}$, seja $E \subset F$ tal que:

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^s} < c, \quad \forall x \in E.$$

Em outras palavras: dada uma sequência $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ com $r_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$, caso o limite $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu(B(x, r_i))}{r_i^s}$ exista, temos que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu(B(x, r_i))}{r_i^s} < c. \quad (\text{A.3})$$

Agora, para todo $\delta < 0$ defina

$$E_\delta = \{x \in E : \mu(B(x, r)) < cr^s, \text{ para todo } r \text{ com } 0 < r \leq \delta\}.$$

Note que, dado $x \in E$ e uma sequência $r_i = r_i(x) \rightarrow 0$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu(B(x, r_i))}{r_i^s}$ exista, existe $i' \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\mu(B(x, r_i))}{r_i^s} < c, \quad \forall i \geq i'.$$

Portanto, para cada $x \in E$ fica claro que a desigualdade $\mu(B(x, r)) < cr^s$ é válida para r suficientemente pequeno. Isto também deixa claro que $E = \cup_\delta E_\delta$.

Além disso, dados $\delta_1 > \delta_2 > 0$, temos $E_{\delta_1} \subset E_{\delta_2} \subset E$. Assim, $E_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} E$.

Seja $\{U_i\}$ cobertura de E em bolas de raio menor ou igual a $\frac{\delta}{2}$. A cada U_i que contém algum $x \in E_\delta$, seja $B = B(x, \text{diam } U_i)$, ou seja, $U_i \subset B$. Então, temos:

$$\mu(U_i) \leq \mu(B) < c(\text{diam } U_i)^s,$$

pois $x \in E_\delta$. Daí,

$$\mu(E_\delta) \leq \sum_{\substack{U_i \\ \text{intersecta} \\ E_\delta}} \mu(U_i) \leq c \sum_i (\text{diam } U_i)^s.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as coberturas e fazendo $\delta \rightarrow 0$, temos que:

$$\begin{aligned} \mu(E_\delta) &\leq c \sum_i (\text{diam } U_i)^s \\ \implies \mu(E_\delta) &\leq c m_s(E, \delta) \leq c m_s(E) \\ \implies \mu(E) &\leq c m_s(E). \end{aligned}$$

■

□

Teorema A.0.5 (Teorema de Egoroff). *Seja (X, \mathcal{B}_X, μ) um espaço de medida. Suponha que $\mu(X) < \infty$ e que f_1, f_2, f_3, \dots e f são funções μ -mensuráveis com contradomínio complexo e definidas em X tais que $f_\ell \rightarrow f$ em μ -quase todo ponto. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe um subconjunto E de X tal que $\mu(E) < \epsilon$ e $f_\ell \rightarrow f$ uniformemente em $X \setminus E$.*

Teorema A.0.6 (Teorema de Fubini-Tonelli). *Suponha que (X, \mathcal{X}, μ) e (Y, \mathcal{Y}, ν) são espaços métricos σ -finitos.*

- a. (Tonelli) *Se $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ é mensurável, considere as funções $f_x(y) = f(x, y)$ e $f^y(x) = f(x, y)$, daí $g(x) = \int f_x(y) d\nu$ e $h(y) = \int f^y(x) d\mu$ são funções não-negativas e mensuráveis. Além disso,*

$$\begin{aligned} \int f d(\mu \times \nu) &= \int \left[\int f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x) \\ &= \int \left[\int f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y). \end{aligned}$$

- b. (Fubini) *Se $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ é integrável, então f_x é integrável para μ -quase todo $x \in X$, f^y é integrável ν -para quase todo $y \in Y$. Além disso, as funções, definidas em quase todo ponto, $g(x) = \int f_x d\nu$ e $h(x) = \int f^y d\mu$ são integráveis.*

Teorema A.0.7 (Teorema da Convergência Monótona). *Sejam $(f_v)_{v \geq 1}$ funções em $M^+(X, \mathcal{B})$ tais que:*

- $f_v(x) \leq f_{v+1}(x), \forall x \in X$.
- $\lim_{v \rightarrow \infty} f_v(x) = f(x), \forall x \in X$.

Então,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_X f_v(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu.$$

Teorema A.0.8 (Desigualdade do Valor Médio). *Dado $A \subset \mathbb{R}^m$ aberto, seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável em cada ponto do segmento $(a, a+v)$, onde $a, a+v \in A$, e tal que sua restrição ao segmento fechado $[a, a+v] \subset A$ seja contínua. Seja $Df(x)$ a derivada da função f no ponto $x \in A$. Se $\|Df(x)\| \leq M$ para todo $x \in (a, a+v)$, então $|f(a) - f(a+v)| \leq M|v|$.*

APÊNDICE B – JACOBIANOS E O LEMA 4.2.1

Aqui estudaremos a definição de Jacobiano e outros fatos importantes de Álgebra Linear e de Medida. Aprofundaremos alguns resultados envolvendo medida de Hausdorff e sua relação com a medida de Lebesgue. Utilizaremos esta teoria para definir um Jacobiano para mapas lineares. As definições e resultados encontrados aqui servirão para provar o Lema 4.2.1 é verdadeira.

DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS EM ÁLGEBRA LINEAR

Definição B.0.1.

1. Uma transformação linear $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita ortogonal se $\langle O(x), O(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.¹
2. Dizemos que o mapa linear $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é simétrico se $\langle x, S(y) \rangle = \langle S(x), y \rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
3. Dada $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear, dizemos que D é diagonal se existem $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ tais que $D(x) = (d_1x_1, \dots, d_nx_n)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
4. A adjunta de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a transformação linear $T^* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz $\langle x, T^*(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$.
5. Dizemos que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é auto-adjunta quando $T = T^*$.

Lema B.0.1. *Algumas propriedades importantes das transformações definidas acima são:*

- (a) $T^{**} = T$, para qualquer transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$;
- (b) $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$, para quaisquer transformações lineares T_1, T_2 .
- (c) $O^* = O^{-1}$ se $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é ortogonal.
- (d) $S^* = S$ se e somente se $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é simétrica.

¹ Ao longo desta seção, consideramos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno canônico no \mathbb{R}^n .

(e) Se $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é simétrica, existe uma transformação linear $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma transformação diagonal $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que: $S = ODO^{-1}$.

(f) Se $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é ortogonal, então:

$$n \leq m, \quad O^*O = \text{Id}_n \quad \text{e} \quad OO^* = \text{Id}_m,$$

onde Id_n é a transformação identidade no \mathbb{R}^n e Id_m é a transformação identidade no \mathbb{R}^m .

Teorema B.0.1 (Decomposição Polar). *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ transformação linear com $n \leq m$. Existe uma transformação simétrica $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um mapa ortogonal $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tais que:*

$$T = OS. \tag{B.1}$$

Demonstração. Primeiramente, definimos a transformação linear $L = T^*T$, onde $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dessa forma, temos que:

$$\langle L(x), y \rangle = \langle T^*(T(x)), y \rangle = \langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, T^*(T(y)) \rangle = \langle x, T^*T(y) \rangle = \langle x, L(y) \rangle,$$

o que implica $L^* = L$, portanto L é auto-adjunta. Além disso,

$$\langle L(x), x \rangle = \langle T^*(T(x)), x \rangle = \langle T(x), T(x) \rangle \geq 0.$$

Logo, L é não-negativa definida. Portanto, existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ e uma base ortogonal $\{x_\ell\}_{\ell=1}^n$ de \mathbb{R}^n tais que:

$$L(x_\ell) = \lambda_\ell x_\ell \quad (\ell = 1, \dots, n).$$

Seja $\lambda_\ell = \alpha_\ell^2$, $\alpha_\ell \geq 0$ ($\ell = 1, \dots, n$).

Afirmção B.0.1. *Existe um conjunto ortogonal $\{z_\ell\}_{\ell=1}^n$ em \mathbb{R}^m tal que:*

$$T(x_\ell) = \alpha_\ell z_\ell \quad (\ell = 1, \dots, n). \tag{B.2}$$

Prova. Se $\alpha_\ell \neq 0$, defina $z_\ell := \frac{1}{\alpha_\ell} T(x_\ell)$. Daí, se $\alpha_{\ell_1}, \alpha_{\ell_2} > 0$, temos:

$$\begin{aligned} \langle z_{\ell_1}, z_{\ell_2} \rangle &= \frac{1}{\alpha_{\ell_1} \alpha_{\ell_2}} \langle T(x_{\ell_1}), T(x_{\ell_2}) \rangle \\ &= \frac{1}{\alpha_{\ell_1} \alpha_{\ell_2}} \langle L(x_{\ell_1}), x_{\ell_2} \rangle \\ &= \frac{\alpha_{\ell_1}^2}{\alpha_{\ell_1} \alpha_{\ell_2}} \langle x_{\ell_1}, x_{\ell_2} \rangle \\ &= \frac{\alpha_{\ell_1}}{\alpha_{\ell_2}} \delta_{\ell_1, \ell_2}. \end{aligned}$$

Concluimos que o conjunto $\{z_\ell : \alpha_\ell > 0\}$ é ortogonal.

Se $\alpha_\ell = 0$, defina z_ℓ como sendo qualquer vetor unitário tal que $\{z_\ell\}_{\ell=1}^n$ é ortonormal. ■

Definimos agora as transformações lineares

$$S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ dada por } S(x_\ell) = \alpha_\ell x_\ell \quad (\ell = 1, \dots, n),$$

e

$$O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ dada por } O(x_\ell) = z_\ell \quad (\ell = 1, \dots, n).$$

Dessa forma,

$$OS(x_\ell) = \alpha_\ell O(x_\ell) = \alpha_\ell z_\ell = T(x_\ell).$$

Como as imagens de OS e T coincidem numa base do domínio (\mathbb{R}^n), concluimos que:

$$L = OS.$$

Pelas definições dadas de O e S fica claro que S é simétrica e O é ortogonal. □

Definição B.0.2. *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear. Se $n \leq m$, escrevemos $T = OS$ como acima e definimos o Jacobiano de T como sendo*

$$\llbracket T \rrbracket = |\det S|. \quad (\text{B.3})$$

No caso $n = m$, o Jacobiano de T é $|\det T|$ (pois, $|\det T| = |\det S| |\det O|$ e $|\det O| = 1$), que é o Jacobiano usual.

Teorema B.0.2. *Seja T como na definição anterior. Se $n \leq m$, então $\llbracket T \rrbracket^2 = \det(T^*T)$.*

Demonstração. Pelo Teorema B.0.1, temos que existem transformações $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ simétrica e $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ortogonal tais que $T = OS$. Logo,

$$T^* = (OS)^* = S^*O^* = SO^*. \quad (\text{B.4})$$

Daí,

$$T^*T = SO^*OS = S^2,$$

pois O é ortogonal e $O^*O = \text{Id}_n$. Portanto,

$$\det(T^*T) = \det(S^2) = (\det S)^2 = \llbracket T \rrbracket^2.$$

□

Segue deste Teorema que a definição do Jacobiano de T não depende da escolha de S e O . Além disso, concluímos também que $[[T]] = [[T^*]]$.

DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS EM MEDIDA

Definição B.0.3. *Seja μ^* uma medida exterior em \mathbb{R}^n .*

1. *Dizemos que μ^* é medida regular se para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ existe um conjunto μ^* -mensurável B tal que $A \subset B$ e $\mu^*(B) = \mu^*(A)$.*
2. *Dizemos que μ^* é Borel-regular se μ^* é medida de Borel e para cada subconjunto A do \mathbb{R}^n existe um conjunto de Borel B tal que $A \subset B$ e $\mu^*(B) = \mu^*(A)$.*
3. *Dizemos que μ^* é medida de Radon se μ^* é Borel-regular e $\mu^*(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.*

Definição B.0.4. *Assuma que μ e ν são medidas de Borel no \mathbb{R}^n . A medida ν é absolutamente contínua com respeito a μ se $\mu(A) = 0$ implica $\nu(A) = 0$, para todo $A \subset \mathbb{R}^n$. Escrevemos $\nu \ll \mu$.*

Teorema B.0.3 (Aproximação por Conjuntos Abertos). *Seja μ^* uma medida de Radon em \mathbb{R}^n . Então para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ (não necessariamente μ^* -mensurável), temos*

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(U) : A \subset U, U \text{ aberto}\}.$$

Teorema B.0.4 (Medida de Hausdorff é Medida Borel-regular). *Seja m_s^* a medida s -dimensional de Hausdorff. Para todo $0 \leq s < \infty$, m_s é medida Borel-regular em \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Escolha $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $m_s(A) < \infty$, o que implica que $m_s(A, \delta) < \infty$, para todo $\delta > 0$. Pela propriedade do ínfimo, dado $k \geq 1$, existe uma coleção de conjuntos abertos \mathcal{U}_k tal que $\text{diam } \mathcal{U}_k \leq \frac{1}{k}$, $A \subset \cup_{U \in \mathcal{U}_k} U$ e

$$\sum_{U \in \mathcal{U}_k} (\text{diam } U)^s \leq m_s(A, \frac{1}{k}) + \frac{1}{k}.$$

Definimos:

$$A_k := \bigcup_{U \in \mathcal{U}_k} U \quad \text{e} \quad B := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Temos que B é de Borel, pois cada A_k é de Borel. E, como $A \subset A_k$, para todo k , então $A \subset B$. Além disso,

$$m_s(B, \frac{1}{k}) \leq \sum_{U \in \mathcal{U}_k} (\text{diam } U)^s \leq m_s(A, \frac{1}{k}) + \frac{1}{k}.$$

Quando fazemos $k \rightarrow \infty$, temos que: $m_s(B) \leq m_s(A)$. E, como $A \subset B$, temos também que $m_s(A) \leq m_s(B)$. Daí, $m_s(A) = m_s(B)$. \square

Definição B.0.5. *Sejam μ e ν medidas de Radon no \mathbb{R}^n . Para cada ponto x no \mathbb{R}^n , defina:*

$$\begin{aligned} \overline{D}_\mu \nu(x) &:= \begin{cases} \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} & , \text{ se } \mu(B(x,r)) > 0 \text{ para todo } r > 0, \\ +\infty & , \text{ se } \mu(B(x,r)) < 0 \text{ para algum } r > 0. \end{cases} \\ \underline{D}_\mu \nu(x) &:= \begin{cases} \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} & , \text{ se } \mu(B(x,r)) > 0 \text{ para todo } r > 0, \\ +\infty & , \text{ se } \mu(B(x,r)) < 0 \text{ para algum } r > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Definição B.0.6. *Quando $\overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x) < +\infty$, dizemos que ν é diferenciável com respeito a μ e escrevemos:*

$$D_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x).$$

$D_\mu \nu(x)$ é a derivada (ou densidade) de ν com respeito a μ .

Teorema B.0.5 (Diferenciação das Medidas de Radon). *Sejam μ, ν medidas de Radon no \mathbb{R}^n , com $\nu \ll \mu$. Então,*

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu \, d\mu, \tag{B.5}$$

para todo conjunto μ -mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema B.0.6. *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ transformação linear inversível. Se $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, i.e., E pertence ao conjunto de Borel do \mathbb{R}^n , então $T(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ e*

$$\mathcal{L}^n(T(E)) = |\det T| \mathcal{L}^n(E).$$

Teorema B.0.7 (Nos borelianos do \mathbb{R}^n as medidas n -dimensionais de Hausdorff e de Lebesgue são equivalentes, a menos de um produto por constante). *Existe uma constante $\omega_n > 0$ tal que*

$$m_n(B) = \frac{\mathcal{L}^n(B)}{\omega_n}, \tag{B.6}$$

para todo $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Demonstração. Ver Seção 2.2 de (EVANS; GARIEPY, 2015) ou Seção 11.2 de (FOLLAND, 1999). \square

LEMA 4.2.1

A fim de demonstrar o Lema 4.2.1, vamos nos utilizar do Teorema a seguir.

Teorema B.0.8. *Suponha que $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é linear, $n \leq m$. Então:*

$$m_n(T(A)) = \frac{\llbracket T \rrbracket}{\omega_n} \mathcal{L}^n(A),$$

para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Demonstração. O Teorema B.0.1 garante que T pode ser escrito como $T = OS$, com $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ortogonal e $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ simétrica.

Se $\llbracket T \rrbracket = 0$, então $\dim S(\mathbb{R}^n) \leq n - 1$ e, dessa forma, $\dim T(\mathbb{R}^n) \leq n - 1$. Consequentemente, $m_n(T(\mathbb{R}^n)) = 0$.

Se $\llbracket T \rrbracket > 0$, então S é invertível e:

$$\frac{m_n(T(B(x, r)))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = \frac{m_n(O^*T(B(x, r)))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \quad (\text{B.7})$$

$$= \frac{\mathcal{L}^n(O^*T(B(x, r)))}{\omega_n \mathcal{L}^n(B(x, r))} \quad (\text{B.8})$$

$$= \frac{\mathcal{L}^n(O^*OS(B(x, r)))}{\omega_n \mathcal{L}^n(B(x, r))} \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{\mathcal{L}^n(S(B(x, r)))}{\omega_n \mathcal{L}^n(B(x, r))} \quad (\text{B.10})$$

$$= \frac{|\det S| \mathcal{L}^n(B(x, r))}{\omega_n \mathcal{L}^n(B(x, r))} \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{|\det S|}{\omega_n} = \frac{\llbracket T \rrbracket}{\omega_n}. \quad (\text{B.12})$$

A seguir veremos porque cada uma das igualdades acima é verdadeira:

- Equação (B.7): Pois, O^* é isometria.
- Equação (B.8): A relação entre medida de Hausdorff e medida de Lebesgue no \mathbb{R}^n nos diz que $m_n(O^*T(B(x, r))) = \omega_n^{-1} \mathcal{L}^n(O^*T(B(x, r)))$.
- Equação (B.9): $T = OS$.

- Equação (B.10): O é ortogonal, então $O^{-1} = O^*$. Daí, $O^*O = \text{Id}_n$.
- Equação (B.11): Teorema B.0.6.

Agora, definimos a medida $\nu(A) = m_n(T(A))$ para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Afirmção B.0.2. ν é medida de Radon e

$$D_{\mathcal{L}^n} \nu(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = \frac{\llbracket T \rrbracket}{\omega_n}.$$

Prova. O Teorema B.0.4 nos diz que m_s é medida de Borel regular em \mathbb{R}^n , para $0 \leq s < \infty$. Assim sendo, temos que: para cada $A \in \mathbb{R}^n$, existe um conjunto de Borel B tal que $A \subset B$ e $m_s(A) = m_s(B)$.

Dessa forma, dado $C \subset \mathbb{R}^n$, temos $\nu(C) = m_n(T(C))$. Note que $T(C) \subset \mathbb{R}^m$, então existe $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$ tal que $T(C) \subset D$ e $m_n(T(C)) = m_n(D)$. Como T pertence a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, então T é contínua e, conseqüentemente, Borel-mensurável (ver Teoremas A.0.1 e A.0.4). Logo, como $D \subset \mathbb{R}^m$ é de Borel, $T^{-1}(D) \subset \mathbb{R}^n$ pertence a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Mas, $C \subset T^{-1}(D)$ e

$$\nu(T^{-1}(D)) = m_n(T(T^{-1}(D))) = m_n(D) = \nu(C).$$

Concluimos que ν é Borel regular.

Agora seja $K \subset \mathbb{R}^n$, K compacto. Tomamos uma cobertura $\tilde{\mathcal{C}}$ de K por bolas abertas $\tilde{\mathcal{C}} = \{B(x_{\tilde{\ell}}, r_{\tilde{\ell}})\}_{\tilde{\ell}=1}^{\infty}$. Como K é compacto, $\tilde{\mathcal{C}}$ admite uma subcobertura finita $\mathcal{C} = \{B(x_{\ell}, r_{\ell})\}_{\ell=1}^p$. Logo,

$$\begin{aligned} \nu(K) &= m_n(T(K)) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^p m_n(T(B(x_{\ell}, r_{\ell}))) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^p \frac{\llbracket T \rrbracket}{\omega_n} \mathcal{L}^n(B(x_{\ell}, r_{\ell})) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Isto nos prova que ν é medida de Radon.

A igualdade (B.12) independente da escolha da bola $B(x, r)$, portanto:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\llbracket T \rrbracket}{\omega_n} = \frac{\llbracket T \rrbracket}{\omega_n}.$$

■

Note que $\nu \ll \mathcal{L}^n$. Então, para todo conjunto de Borel $B \subset \mathbb{R}^n$, o Teorema B.0.5 implica:

$$m_n(T(B)) = \frac{\llbracket T \rrbracket}{\omega_n} \mathcal{L}^n(B).$$

Sabemos que ν e \mathcal{L}^n são medidas de Radon. Agora, utilizando o Teorema B.0.3, temos que: dado $A \subset \mathbb{R}^n$ qualquer,

$$\nu(A) = \inf\{\nu(B) : A \subset B, B \text{ aberto}\}.$$

Mas, B aberto implica $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Então,

$$\nu(B) = \frac{\llbracket T \rrbracket}{\omega_n} \mathcal{L}^n(B).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \nu(A) = m_n(T(A)) &= \inf\{\nu(B) : A \subset B, B \text{ aberto}\} \\ &= \inf\left\{\frac{\llbracket T \rrbracket}{\omega_n} \mathcal{L}^n(B) : A \subset B, B \text{ aberto}\right\} \\ &= \frac{\llbracket T \rrbracket}{\omega_n} \inf\{\mathcal{L}^n(B) : A \subset B, B \text{ aberto}\} \\ &= \frac{\llbracket T \rrbracket}{\omega_n} \mathcal{L}^n(A). \end{aligned}$$

□

Tratando-se do Lema 4.2.1, temos que a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ está sendo aplicada no conjunto \mathcal{E}_s dos elipsóides de dimensão s em \mathbb{R}^n , com s inteiro. Seja E um desses elipsóides, definimos o conjunto \mathcal{G}_E como sendo o subespaço s -dimensional gerado pelo elipsóide E , e

$$L_E := T|_{\mathcal{G}_E} : \mathcal{G}_E \rightarrow T(\mathcal{G}_E).$$

Note que \mathcal{G}_E e $T(\mathcal{G}_E)$ são isomorfos a \mathbb{R}^s , uma vez que $\dim \mathcal{G}_E = s$ e T é injetiva.

Comparando esta situação com o Teorema B.0.8, percebemos que $n = m = s$, neste caso. E, dessa forma, dado $E \in \mathcal{E}_s$:

$$m_s(L_E(A)) = \frac{\llbracket L_E \rrbracket}{\omega_s} \mathcal{L}^s(A),$$

para todo $A \subset \mathcal{G}_E$.

Mas, para B pertencente aos borelianos de \mathcal{G}_E (i.e., $\mathcal{B}_{\mathcal{G}_E}$), temos que $m_s(L_E(B)) = \frac{\mathcal{L}^s(L_E(B))}{\omega_s}$, pois $L_E(B)$ está contido em um espaço isomorfo ao \mathbb{R}^s . Então,

$$\frac{\mathcal{L}^s(L_E(B))}{\mathcal{L}^s(B)} = \llbracket L_E \rrbracket, \tag{B.13}$$

para todo $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{G}_E}$ e todo $E \in \mathcal{E}_s$.

Sejam $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ os valores singulares da transformação T . São válidas as seguintes afirmações:

Afirmção B.0.3. $\llbracket L_E \rrbracket \leq \alpha_1 \dots \alpha_s$, para todo $E \in \mathcal{E}_s$.

Prova. Dado $E \in \mathcal{E}_s$, seja $\iota_E : \mathcal{G}_E \rightarrow \mathbb{R}^n$ a inclusão de \mathcal{G}_E em \mathbb{R}^n , i.e, $\iota_E(v) = v$, para todo $v \in \mathcal{G}_E$. Temos que $L_E = T \circ \iota_E$. Logo,

$$L_E^* L_E = (T \iota_E)^* T \iota_E = \iota_E^* T^* T \iota_E,$$

onde ι_E^* é a projeção ortogonal sobre \mathcal{G}_E .

Temos que, dado $v \in \mathcal{G}_E$, temos que:

$$|L_E^* L_E(v)| = |\iota_E^* T^* T \iota_E(v)| = |\iota_E^* T^* T(v)| \leq |T^* T(v)|.$$

Portanto, $|L_E^* L_E(v)| \leq |T^* T(v)|$, para todo $v \in \mathcal{G}_E$.

Sejam $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_s$ os valores singulares de L_E . Como $L_E^* L_E$ e $T^* T$ são auto-adjuntas seus valores singulares coincidem com os seus autovalores. Dessa forma, temos que $\gamma_1^2 \geq \gamma_2^2 \geq \dots \geq \gamma_s^2$ e $\alpha_1^2 \geq \alpha_2^2 \geq \dots \geq \alpha_n^2$ são os valores singulares de $L_E^* L_E$ e $T^* T$, respectivamente.

Pelo Teorema A.0.2, temos que:

$$\begin{aligned} \gamma_i^2 &= \max_{\substack{\dim V=i \\ V \subset \mathcal{G}_E}} \min_{v \in V - \{0\}} \frac{|L_E^* L_E(v)|}{|v|} \\ &\leq \max_{\substack{\dim V=i \\ V \subset \mathcal{G}_E}} \min_{v \in V - \{0\}} \frac{|T^* T(v)|}{|v|} \\ &\leq \max_{\substack{\dim V=i \\ V \subset \mathbb{R}^n}} \min_{v \in V - \{0\}} \frac{|T^* T(v)|}{|v|} = \alpha_i^2, \end{aligned} \tag{B.14}$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Pelo Teorema B.0.2, temos que:

$$\llbracket L_E \rrbracket = \sqrt{|\det L_E^* L_E|} = \sqrt{\gamma_1^2 \gamma_2^2 \dots \gamma_s^2}.$$

Portanto, por (B.14):

$$\llbracket L_E \rrbracket = \sqrt{\gamma_1^2 \gamma_2^2 \dots \gamma_s^2} \leq \sqrt{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_s^2} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s.$$

Note que isto vale para todo elipsóide s -dimensional E em \mathbb{R}^n .

■

Afirmação B.0.4. *Existe $E_0 \in \mathcal{E}_s$ tal que $\llbracket L_{E_0} \rrbracket \geq \alpha_1 \dots \alpha_s$.*

Prova. Pela Decomposição do Valor Singular (Teorema A.0.3), existem bases ortonormais $\{u_1, \dots, u_n\}$ de \mathbb{R}^n e $\{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{R}^n tais que:

$$Tu_\ell = \alpha_\ell v_\ell \quad \text{e} \quad T^*v_\ell = \alpha_\ell u_\ell.$$

Considere o elipsóide s -dimensional

$$E_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2 + \dots + \sigma_s u_s \quad \text{e} \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_s^2 \leq 1\},$$

que possui seus s eixos principais paralelos aos vetores u_1, \dots, u_s (correspondendo exatamente aos primeiros s valores singulares de T , $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_s$). Então,

$$L_{E_0}(u_\ell) = T(u_\ell) = \alpha_\ell v_\ell \quad \text{e} \quad L_{E_0}^*(v_\ell) = T^*(v_\ell) = \alpha_\ell u_\ell,$$

para $1 \leq \ell \leq s$.

Note que $\text{span}\{u_1, \dots, u_i\} \subset \mathcal{G}_{E_0}$, para todo $i \in \{1, \dots, s\}$. Além disso, dado $v \in \text{span}\{u_1, \dots, u_i\}$, temos:

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 u_1 + \dots + \beta_i u_i \\ \implies L_{E_0}^* L_{E_0}(v) &= \beta_1 L_{E_0}^* L_{E_0}(u_1) + \dots + \beta_i L_{E_0}^* L_{E_0}(u_i) \\ &= \beta_1 \alpha_1 L_{E_0}^*(v_1) + \dots + \beta_i \alpha_i L_{E_0}^*(v_i) \\ &= \beta_1 \alpha_1^2 u_1 + \dots + \beta_i \alpha_i^2 u_i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|L_{E_0}^* L_{E_0}(v)|^2 = \alpha_1^4 \beta_1^2 + \dots + \alpha_i^4 \beta_i^2,$$

mas, $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_i$, então:

$$|L_{E_0}(v)|^2 \geq \alpha_i^4 \beta_1^2 + \dots + \alpha_i^4 \beta_i^2 \geq \alpha_i^4 (\beta_1^2 + \dots + \beta_i^2) = \alpha_i^4 |v|^2. \quad (\text{B.15})$$

Sejam $\gamma_1^2, \dots, \gamma_s^2$ os valores singulares de $L_{E_0}^* L_{E_0}$. Logo, teremos:

$$\begin{aligned} \gamma_i^2 &= \max_{\substack{\dim V = i \\ V \subset \mathcal{G}_{E_0}}} \min_{v \in V - \{0\}} \frac{|L_{E_0}^* L_{E_0}(v)|}{|v|} \\ &\geq \min_{v \in \text{span}\{u_1, \dots, u_i\}} \frac{|L_{E_0}^* L_{E_0}(v)|}{|v|} \\ &\geq \alpha_i^2, \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, \dots, s\}$, graças a (B.15) e ao fato de $\text{span}\{u_1, \dots, u_i\} \subset \mathcal{G}_{E_0}$.

Por fim, temos que:

$$\llbracket L_{E_0} \rrbracket = \sqrt{\gamma_1^2 \gamma_2^2 \dots \gamma_s^2} \geq \sqrt{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_s^2} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s.$$

■

Por (B.13), temos:

$$\frac{\mathcal{L}^s(T(B))}{\mathcal{L}^s(B)} = \llbracket L_E \rrbracket,$$

para todo $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{G}_E}$ e todo $E \in \mathcal{E}_s$. Em particular,

$$\frac{\mathcal{L}^s(T(E))}{\mathcal{L}^s(E)} = \llbracket L_E \rrbracket,$$

para todo $E \in \mathcal{E}_s$.

Gracas às Afirmações B.0.3 e B.0.4, concluimos que:

$$\sup_{E \in \mathcal{E}_s} \frac{\mathcal{L}^s(T(E))}{\mathcal{L}^s(E)} = \alpha_1 \dots \alpha_s.$$

APÊNDICE C – UM RESULTADO TÉCNICO SOBRE A MEDIDA \mathcal{M}^s EM J_∞

Aqui demonstraremos um resultado técnico muito importante para a demonstração do Teorema 4.5.1, principal resultado deste trabalho.

O Lema 4.4.1 nos garante, caso $\mathcal{M}^s(J_\infty) = \infty$, a existência de um conjunto compacto $E \subset J_\infty$, com $0 < \mathcal{M}^s(E) < \infty$. Além disso, nos dá uma cota superior para a medida de $\mathcal{M}^s(E \cap N_{\mathbf{u}})$, $\mathbf{u} \in J$.

A fim de demonstrar o Lema 4.4.1, utilizaremos uma série de resultados intermediários, a saber:

Lema C.0.1. *Se $\mathcal{M}^s(J_\infty) = \infty$, então existe $E \subset J_\infty$ compacto tal que $0 < \mathcal{M}^s(E) < \infty$.*

A ideia que seguiremos na demonstração deste resultado é a seguinte:

- Vamos definir uma sequência decrescente de compactos $J_\infty \supset E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$ e tomaremos $E = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} E_\ell$.
- Tomaremos uma sequência monótona $\{e_r\}_{r=0}^{\infty}$, com $e_r \geq 1$, tal que o produto $e_0 e_1 e_2 \dots e_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e \in (0, \infty)$.

Queremos que os E_ℓ 's satisfaçam:

$$\frac{\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}})}{e_r} \leq \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}}) \leq \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}}), \quad (\text{C.1})$$

$\forall \mathbf{u} \in J_{r+k_0}$ e para um dado $k_0 \in \mathbb{R}$.

As desigualdades (C.1) tem como objetivo garantir que $\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r)$ decresça na medida que r aumenta (pois, queremos limitar $\mathcal{M}^s(E)$), mas devemos controlar este decaimento para evitar que $\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r)$ tenda a zero. Dessa forma, poderemos encontrar constantes \tilde{a}, \tilde{b} (ambas independentes de r), tais que:

$$0 < \tilde{b} \leq \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r) \leq \tilde{a} < \infty.$$

Assim, de forma recursiva, limitando a medida do conjunto E_{r+1} a partir do E_r , criaremos a sequência $\{E_\ell\}_{\ell=0}^{\infty}$.

Demonstração. Tome $E_0 = J_\infty$ e fixe k_0 tal que $\mathcal{M}_{k_0}^s(J_\infty) > 0$ (este número existe, pois $\mathcal{M}^s(J_\infty) = \infty$).

Para $r \geq 0$, vamos definir E_{r+1} especificando quem é $E_{r+1} \cap N_{\mathbf{w}}$, para todo \mathbf{w} , com $|\mathbf{w}| = r + k_0$. Seja $\mathbf{u} \in J_{r+k_0}$. Vamos dividir a construção de E_{r+1} em dois casos:

Caso 1: $\mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}}) \leq \phi^s(T_{\mathbf{u}})$.

Neste caso, tomamos $E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}} = E_r \cap N_{\mathbf{u}}$, o que implica $\mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}}) = \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}})$. De fato, da própria definição de \mathcal{M}_r^s , temos que $\mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}}) \geq \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}}) = \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}})$. Agora basta provarmos a desigualdade inversa.

Seja A cobertura de $E_r \cap N_{\mathbf{u}}$, com $|\mathbf{w}| \geq r + k_0$, para todo \mathbf{w} em A .

- $\mathbf{u} \notin A$: Se descartarmos os outros \mathbf{w} 's, com $|\mathbf{w}| = r + k_0$, ainda teremos uma cobertura \tilde{A} de $E_r \cap N_{\mathbf{u}}$. Agora cada \mathbf{w} que pertence \tilde{A} tem tamanho maior ou igual a $r + k_0 + 1$. Daí,

$$\sum_{\mathbf{w} \in \tilde{A}} \phi^s(T_{\mathbf{w}}) \geq \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}}).$$

- $\mathbf{u} \in A$: Neste caso,

$$\sum_{\mathbf{w} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{w}}) \geq \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \geq \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}}).$$

Logo, concluímos que dada qualquer cobertura A de $E_r \cap N_{\mathbf{u}}$, com $|\mathbf{w}| \geq r + k_0$, $\mathbf{w} \in A$, temos:

$$\sum_{\mathbf{w} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{w}}) \geq \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}}).$$

Tomando o ínfimo do lado esquerdo, temos que:

$$\mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}}) \leq \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}}) = \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}}).$$

Note que $\mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}}) = \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}})$ implica na validade da desigualdade (C.1).

Caso 2: $\mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}}) > \phi^s(T_{\mathbf{u}})$.

Neste caso, tomamos $E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}}$ como sendo um subconjunto compacto de $E_r \cap N_{\mathbf{u}}$ satisfazendo

$$\frac{\phi^s(T_{\mathbf{u}})}{e_r} \leq \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}}) \leq \phi^s(T_{\mathbf{u}}). \quad (\text{C.2})$$

Primeiramente, note que

$$\mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}}) > \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \implies \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}}) = \phi^s(T_{\mathbf{u}}). \quad (\text{C.3})$$

De fato, dada uma cobertura A de $E_r \cap N_{\mathbf{u}}$, tal que $|\mathbf{w}| \geq r + k_0$, $\mathbf{w} \in A$. Temos que:

- se $\mathbf{u} \notin A$: Podemos descartar os \mathbf{w} 's de A com $|\mathbf{w}| = r + k_0$ e ainda teremos uma cobertura \tilde{A} de $E_r \cap N_{\mathbf{u}}$. Esta subcobertura é composta de $\mathbf{w} \in J$ com $|\mathbf{w}| \geq r + k_0 + 1$. Daí,

$$\sum_{\mathbf{w} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{w}}) \geq \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}}) > \phi^s(T_{\mathbf{u}}).$$

- se $\mathbf{u} \in A$: $\sum_{\mathbf{w} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{w}}) \geq \phi^s(T_{\mathbf{u}})$.

Ao tomarmos o ínfimo, temos que: $\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}}) \geq \phi^s(T_{\mathbf{u}})$. Mas, $A = \{\mathbf{u}\}$ é cobertura de $E_r \cap N_{\mathbf{u}}$ e $|\mathbf{u}|$, então $\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}}) \leq \phi^s(T_{\mathbf{u}})$.

Por (C.3), fica claro que (C.2) implica em (C.1).

Agora vamos provar que existe compacto $E_{r+1} \subset E_r$ satisfazendo (C.2):

Tome

$$E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}} = E_r \cap N_{\mathbf{u}} \cap \left(\bigcup_{\substack{|\mathbf{w}|=t \\ \mathbf{w} \in A}} N_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}} \right),$$

com $A \subset J$. Pela desigualdade (4.13), temos que:

$$\phi^s(T_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}) \leq a^{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}|s} = a^{(|\mathbf{u}|+|\mathbf{w}|)s} = a^{(r+k_0)ts} \leq a^{ts}.$$

Como u, s, r e k_0 permanecem constantes, temos que:

$$a^{ts} \leq \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \left(1 - \frac{1}{e_r}\right),$$

para t suficientemente grande.

Nosso objetivo é escolher um conjunto $A \subset J_t$ adequado para que E_{r+1} satisfaça (C.2). Sabemos que:

- se $A = \emptyset$, então $E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}} = \emptyset$ e

$$\mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}}) = \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(\emptyset) = 0.$$

- se $A = J_t$, então $E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}} = E_r \cap N_{\mathbf{u}}$, daí

$$\mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}}) = \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}}) > \phi^s(T_{\mathbf{u}}).$$

A ideia aqui é nos valer da *continuidade discreta* de \mathcal{M}_r^s e ir adicionando elementos de J_t no conjunto A até que (C.2) seja satisfeita. Mais formalmente, dado $A \subset J_t$ e

$\mathbf{w}_0 \in J_t$, $\mathbf{w}_0 \notin A$, denotamos $\tilde{A} = A \cup \{\mathbf{w}_0\}$ e temos que:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}} \cap \left(\bigcup_{\substack{|\mathbf{w}|=t \\ \mathbf{w} \in \tilde{A}}} N_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}} \right)) \\ &= \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}} \cap \left(\bigcup_{\substack{|\mathbf{w}|=t \\ \mathbf{w} \in A}} N_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}} \right)) + \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}} \cap N_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}_0}). \end{aligned}$$

Mas, $E_r \cap N_{\mathbf{u}} \cap N_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}_0} \subset N_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}_0}$. Portanto,

$$\mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}} \cap N_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}_0} \leq \phi^s(T_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}_0}) \leq \left(1 - \frac{1}{e_r}\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}} \cap \left(\bigcup_{\substack{|\mathbf{w}|=t \\ \mathbf{w} \in \tilde{A}}} N_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}} \right)) \\ &= \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}} \cap \left(\bigcup_{\substack{|\mathbf{w}|=t \\ \mathbf{w} \in A}} N_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}} \right)) + \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \left(1 - \frac{1}{e_r}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

A fim de aliviar um pouco a notação, denotamos:

$$b_0 = \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}} \cap \left(\bigcup_{\substack{|\mathbf{w}|=t \\ \mathbf{w} \in A}} N_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}} \right)) \text{ quando } A = \emptyset \implies b_0 = 0,$$

e

$$b_{k^t} = \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}} \cap \left(\bigcup_{\substack{|\mathbf{w}|=t \\ \mathbf{w} \in A}} N_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}} \right)) \text{ quando } A = J_t \implies b_{k^t} > \phi^s(T_{\mathbf{u}}).$$

O índice p em b_p indica a quantidade de elementos de J_t que pertencem a A .

Por (C.4), temos que:

$$b_1 \leq b_0 + \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \left(1 - \frac{1}{e_r}\right).$$

E, de maneira geral,

$$b_p \leq b_{p-1} + \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \left(1 - \frac{1}{e_r}\right),$$

para todo $p \in \{0, 1, 2, \dots, k^t - 1, k^t\}$.

Seja $p_0 := \min\{p : b_p > \frac{\phi^s(T_{\mathbf{u}})}{e_r}\}$. Note que o conjunto $\{p : b_p > \frac{\phi^s(T_{\mathbf{u}})}{e_r}\}$ é não-vazio, pois k^t pertence a ele. Então, pela definição de p_0 , temos que:

$$b_{p_0-1} \leq \frac{\phi^s(T_{\mathbf{u}})}{e_r}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\phi^s(T_{\mathbf{u}})}{e_r} < b_{p_0} &\leq b_{p_0-1} + \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \left(1 - \frac{1}{e_r}\right) \\ &\leq \frac{\phi^s(T_{\mathbf{u}})}{e_r} + \phi^s(T_{\mathbf{u}}) \left(1 - \frac{1}{e_r}\right) \\ &\leq \phi^s(T_{\mathbf{u}}). \end{aligned}$$

Isto prova que existe $E_{r+1} \subset E_r$ tal que (C.2) seja verdadeira, basta garantir que

$$E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}} = E_r \cap N_{\mathbf{u}} \cap \left(\bigcup_{\substack{|\mathbf{w}|=t \\ \mathbf{w} \in A}} N_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}} \right),$$

onde $A \subset J_t$ possui exatamente p_0 elementos.

Dessa forma, construímos uma sequência decrescente de compactos $\{E_\ell\}_{\ell=0}^\infty$ que satisfazem:

$$\frac{\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}})}{e_r} \leq \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}}) \leq \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r \cap N_{\mathbf{u}}),$$

para todo $\mathbf{u} \in J_{r+k_0}$. Somando a desigualdade acima sobre todos os $N_{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u} \in J_{r+k_0}$, temos:

$$\frac{\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r)}{e_r} \leq \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_{r+1}) \leq \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r).$$

Mas,

$$\frac{\mathcal{M}_{r+k_0-1}^s(E_{r-1})}{e_{r-1}} \leq \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r) \leq \mathcal{M}_{r+k_0-1}^s(E_{r-1}).$$

Então,

$$\frac{\mathcal{M}_{r+k_0-1}^s(E_{r-1})}{e_{r-1}e_r} \leq \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_{r+1}) \leq \mathcal{M}_{r+k_0-1}^s(E_{r-1}).$$

Iterando, temos, por um lado:

$$0 < \frac{\mathcal{M}_{k_0}^s(J_\infty)}{e_0 e_1 \dots e_{r-1} e_r} \leq \frac{\mathcal{M}_{k_0}^s(E_0)}{e_0 e_1 \dots e_{r-1} e_r} \leq \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r). \quad (\text{C.5})$$

E, por outro lado,

$$\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r) \leq \mathcal{M}_{k_0}^s(E_0) = \mathcal{M}_{k_0}^s(J_\infty) < \infty.$$

Note que $\mathcal{M}_{k_0}^s(J_\infty) > 0$, pela escolha de k_0 e $\mathcal{M}_{k_0}^s(J_\infty) < \infty$, pois dada $A = J_{k_0}$ cobertura de J_∞ :

$$\mathcal{M}_{k_0}^s(J_\infty) \leq \sum_{\mathbf{w} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{w}}) \leq k^{k_0} a^{sk_0} < \infty.$$

Com isso, fica claro que existem constantes reais \tilde{a} e \tilde{b} , independentes de r , tais que:

$$0 < \tilde{b} \leq \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r) \leq \tilde{a} < \infty,$$

para todo $r \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Agora, seja $E = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} E_{\ell}$. Temos que:

$$\mathcal{M}^s(E) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathcal{M}_r^s(E_{\ell}) \right).$$

Note que a ordem dos limites não pode ser alterada sem tomar alguns cuidados antes. De fato, pela continuidade de \mathcal{M}_r^s , temos que:

$$\mathcal{M}_r^s(E) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathcal{M}_r^s(E_{\ell}), \quad (\text{C.6})$$

para todo $r_0 \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Mas, para afirmarmos que

$$\mathcal{M}^s(E) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathcal{M}^s(E_{\ell}),$$

precisaríamos, além da continuidade de \mathcal{M}^s , garantir que existe E_{ℓ_0} tal que $\mathcal{M}^s(E_{\ell_0}) < \infty$.

Afirmção C.0.1. $\mathcal{M}^s(E) < \infty$.

Prova. Dado $r_0 \geq 0$, temos que $E_{r_0} \supset E_{\ell}$, para todo $\ell \geq r_0$. Daí, $\mathcal{M}_{r_0}^s(E_{r_0}) \geq \mathcal{M}_{r_0}^s(E_{\ell})$, $\ell \geq r_0$. Logo, por (C.6):

$$\mathcal{M}_{r_0}^s(E) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathcal{M}_{r_0}^s(E_{\ell}) \leq \mathcal{M}_{r_0}^s(E_{r_0}) \leq \tilde{a} < \infty.$$

Concluimos que $\mathcal{M}_{r_0}^s(E) \leq \tilde{a} < \infty$, para todo $r_0 \geq 0$. Portanto, $\mathcal{M}^s(E) \leq \tilde{a} < \infty$. ■

Afirmção C.0.2. $\mathcal{M}^s(E) > 0$.

Prova. Queremos provar que

$$\frac{\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r)}{e_r} \leq \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_{r+1}), \quad (\text{C.7})$$

pois se esta desigualdade for válida, segue que:

$$\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r) \leq e_r \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_{r+1}) \leq e_r e_{r+1} \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_{r+2}) \leq \dots$$

Logo,

$$\frac{\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r)}{e_r e_{r+1} \dots e_{r+j-1} e_{r+j}} \leq \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_{r+j}).$$

Assim sendo, temos:

$$\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_{r+j}) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r)}{e_r e_{r+1} \dots e_{r+j-1} e_{r+j}} \geq \frac{\tilde{b}}{e_1 e_2 \dots e_{r-1}}.$$

Tomando o limite quando $r \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{M}^s(E) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E) \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\tilde{b}}{e_{e_1 e_2 \dots e_{r-1}}} = \tilde{b} > 0.$$

Para ver que (C.7) é válida, basta analisar a construção dos compactos E_ℓ , por meio dos dois casos descritos anteriormente:

Caso 1: Aqui tomamos $E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}} = E_r \cap N_{\mathbf{u}}$, então (C.7) vale, trivialmente.

Caso 2: Sabemos que $\mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_r) > \phi^s(T_{\mathbf{u}})$ e $\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r) = \phi^s(T_{\mathbf{u}})$. Daí, dada uma cobertura A de $E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}}$, com $|\mathbf{w}| \geq r + k_0$, $\mathbf{w} \in A$, temos que:

- $\mathbf{u} \notin A$: É possível descartar os outros elementos \mathbf{w} de J com $|\mathbf{w}| = r + k_0$ e, ainda assim, teremos uma cobertura de $E_{r+1} \cap N_{\mathbf{u}}$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{w} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{w}}) &\geq \sum_{\substack{\mathbf{w} \in A \\ |\mathbf{w}| \geq r+k_0+1}} \phi^s(T_{\mathbf{w}}) \\ &\geq \mathcal{M}_{r+k_0+1}^s(E_{r+1}) \\ &\geq \frac{\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r)}{e_r}, \end{aligned}$$

por (C.1).

- $\mathbf{u} \in A$: Então A também sobre $E_r \cap N_{\mathbf{u}}$. Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{w} \in A} \phi^s(T_{\mathbf{w}}) &\geq \mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r) \\ &\geq \frac{\mathcal{M}_{r+k_0}^s(E_r)}{e_r}. \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todas as coberturas A com $|\mathbf{w}| \geq r + k_0$, $\mathbf{w} \in A$, concluímos que (C.7) é válida. ■

□

Os próximos dois resultados serão importantes para provar a Proposição C.0.1

Lema C.0.2. *Seja \mathcal{C} cobertura de $F \subset J_\infty$ formada por bolas B . Existem finitas bolas $B_\ell \in \mathcal{C}$ disjuntas tais que*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \subset \bigcup_{\ell} \tilde{B}_\ell,$$

onde \tilde{B}_ℓ é a bola fechada concêntrica a B_ℓ e com raio 4 vezes maior.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha \mathcal{C} finita. Escolhemos B_1 como sendo a bola em \mathcal{C} com maior raio. A construção segue indutivamente: se $B_1, \dots, B_{\kappa-1}$ foram escolhidos, tome B_κ como sendo a bola (ou uma das bolas) de maior raio possível e que não intersecta $B_1, \dots, B_{\kappa-1}$.

Em algum momento não vai mais haver escolha viável e o processo cessa.

Daí, temos que:

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathcal{C} : \quad & \text{ou } B = B_\ell, \text{ para algum } \ell \implies B \subset \tilde{B}_\ell, \\ & \text{ou } B \neq B_\ell, \forall \ell. \text{ Mas, neste caso, } B \cap B_\ell \neq \emptyset, \text{ para algum } \ell, \text{ onde o} \\ & \text{raio de } B \text{ é menor ou igual ao raio de } B_\ell \text{ (caso contrário, deveríamos} \\ & \text{ter escolhido } B \text{ no lugar de } B_\ell \text{ durante a construção)} \implies B \subset \tilde{B}_\ell. \end{aligned}$$

Concluimos que $\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \subset \bigcup_{\ell} \tilde{B}_\ell$. □

Lema C.0.3. *Sejam μ uma medida com $0 < \mu(J_\infty) < \infty$ e \tilde{c} uma constante real positiva tais que:*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu(N_{\mathbf{u}(i,r)})}{\phi^s(T_{\mathbf{u}(i,r)})} > \tilde{c}, \quad \forall \mathbf{i} \in F \subset J_\infty,$$

onde $\mathbf{u}(i,r)$ é o ponto $\mathbf{u} \in J$ tal que $\mathbf{u} < \mathbf{i}$ e $|\mathbf{u}| = r$. Então,

$$\mathcal{M}^s(F) \leq \frac{\mu(J_\infty)}{a^{2s\tilde{c}}},$$

onde a constante a é a mesma que aparece em (4.12).

Antes de iniciar a demonstração deste lema, lembre que dados $\mathbf{i} \in J_\infty$ e $\delta > 0$, a bola de centro \mathbf{i} e raio δ é dada por:

$$B(\mathbf{i}, \delta) = N_{\mathbf{u}}, \text{ onde } \mathbf{u} < \mathbf{i} \text{ e } \frac{1}{2^{|\mathbf{u}|+1}} < \delta \leq \frac{1}{2^{|\mathbf{u}|}}.$$

Demonstração. Fixe $r_0 \in \mathbb{N}$ e $\delta_0 > 0$ tal que $2^{-(r_0+1)} < \delta_0 \leq 2^{-r_0}$.

Seja \mathcal{C} a coleção de bolas $\mathcal{C} = \{B(\mathbf{i}, \delta) : \mathbf{i} \in J_\infty, 0 < \delta \leq \delta_0 \text{ e } \mu(B(\mathbf{i}, \delta)) > \tilde{c}\phi^s(T_{\mathbf{u}(i,r)})\}$, onde $r \leq \frac{-\log \delta}{\log 2} < r+1$. Então, $F \subset \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B$.

Pelo Lema C.0.2, existem finitas bolas disjuntas $B_\ell \in \mathcal{C}$ tais que $\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \subset \bigcup_{\ell} \tilde{B}_\ell$, com \tilde{B}_ℓ sendo a bola concêntrica a B_ℓ com raio 4 vezes maior. Note que multiplicar o raio δ por 4 é análogo à subtrair 2 no tamanho de \mathbf{u} .

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{r_0-2}^s(F) &\leq \sum_{\ell} \phi^s(T_{\mathbf{u}(\mathbf{i}, r-2)}) \\
&\leq \sum_{\ell} a^{-2s} \phi^s(T_{\mathbf{u}(\mathbf{i}, r)}) \\
&\leq a^{-2s} \tilde{c}^{-1} \sum_{\ell} \mu(B_{\ell}) \\
&\leq a^{-2s} \tilde{c}^{-1} \mu(J_{\infty}).
\end{aligned}$$

Fazendo $\delta_0 \rightarrow 0$ ($r_0 \rightarrow \infty$), temos:

$$\mathcal{M}^s(F) \leq \frac{\mu(J_{\infty})}{a^{2s} \tilde{c}}.$$

□

Proposição C.0.1. *Seja $E \subset J_{\infty}$ compacto tal que $0 < \mathcal{M}^s(E) < \infty$, então existe $\tilde{E} \subset E$ compacto com $\mathcal{M}^s(\tilde{E}) > 0$, tal que*

$$\mathcal{M}^s(\tilde{E} \cap N_{\mathbf{u}}) \leq c \phi^s(T_{\mathbf{u}}),$$

para todo $\mathbf{u} \in J$ e para alguma constante $c > 0$.

Demonstração. Tome a medida $\mu(B) = \mathcal{M}^s(E \cap B)$, para $B \subset J_{\infty}$. Seja $F \subset J_{\infty}$ o conjunto dado por $F = \{\mathbf{i} \in J_{\infty} : \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu(N_{\mathbf{u}(\mathbf{i}, r)})}{\phi^s(T_{\mathbf{u}(\mathbf{i}, r)})} > 2a^{-2s}\}$, onde $N_{\mathbf{u}(\mathbf{i}, r)}$ é o cilindro de tamanho r que contém \mathbf{i} .

Note que

$$\begin{aligned}
\mu(J_{\infty}) &= \mathcal{M}^s(E \cap J_{\infty}) = \mathcal{M}^s(E) \\
&\implies 0 < \mu(J_{\infty}) < \infty.
\end{aligned}$$

Pelo Lema C.0.3, $\mathcal{M}^s(F) \leq \frac{1}{2} \mu(J_{\infty}) \leq \frac{1}{2} \mathcal{M}^s(E) = \frac{1}{2} \mu(E)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^s(E \setminus F) &\geq \mathcal{M}^s(E) - \mathcal{M}^s(F) \\
&\geq \mathcal{M}^s(E) - \frac{1}{2} \mathcal{M}^s(E) \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{M}^s(E) \\
&= \frac{1}{2} \mu^s(E) > 0.
\end{aligned}$$

Então, para $E_1 = E \setminus F$, temos que $\mathcal{M}^s(E_1) > 0$ e

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu(N_{\mathbf{u}(\mathbf{i}, r)})}{\phi^s(T_{\mathbf{u}(\mathbf{i}, r)})} \leq 2a^{-2s},$$

para todo $\mathbf{i} \in E_1$.

Pelo Teorema de Egoroff (Teorema A.0.5), existe $\tilde{E} \subset E_1$ compacto com $\mathcal{M}^s(\tilde{E}) > 0$ tal que $f_r = \frac{\mu(N_{\mathbf{u}(\mathbf{i},r)})}{\phi^s(T_{\mathbf{u}(\mathbf{i},r)})}$ converge uniformemente em \tilde{E} . Em particular, existe r_0 tal que

$$\frac{\mu(N_{\mathbf{u}(\mathbf{i},r)})}{\phi^s(T_{\mathbf{u}(\mathbf{i},r)})} \leq 2a^{-2s},$$

para todo $\mathbf{i} \in \tilde{E}$, para todo $r > r_0$.

Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^s(\tilde{E} \cap N_{\mathbf{u}(\mathbf{i},r)}) &\leq \mathcal{M}^s(E \cap N_{\mathbf{u}(\mathbf{i},r)}) \\ &\leq 2a^{-2s} \phi^s(T_{\mathbf{u}(\mathbf{i},r)}) \\ \implies \mathcal{M}^s(\tilde{E} \cap N_{\mathbf{u}}) &\leq 2a^{-2s} \phi^s(T_{\mathbf{u}}), \quad \forall \mathbf{u} \in J, \end{aligned}$$

pois, $\mathcal{M}^s(\tilde{E} \cap N_{\mathbf{u}(\mathbf{i},r)}) = 0$ se $\mathbf{i} \notin \tilde{E}$.

Basta tomar $c \geq 2a^{-2s}$.

□

O Lema C.0.1 e a Proposição C.0.1 juntos implicam na validade do Lema 4.4.1.