



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

MAIGAN STEFANNE DA SILVA ALCÂNTARA

CATEGORIAS RELACIONAIS PARA COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

Recife

2021

MAIGAN STEFANNE DA SILVA ALCÂNTARA

CATEGORIAS RELACIONAIS PARA COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ciência da Computação do Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação.

Área de Concentração: Mídia e Interação

Orientador: Sílvio de Barros Melo

Coorientador: Wilson Rosa de Oliveira Júnior

Recife

2021

Catálogo na fonte
Bibliotecária: Mônica Uchôa, CRB4-1010

A347c Alcântara, Maigan Stefanne da Silva.
Categorias relacionais para computação quântica / Maigan Stefanne da
Silva Alcântara. – 2021.
127 f.: il., fig., tab.

Orientador: Sílvio de Barros Melo.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. Cln.
Programa de Pós-graduação em Ciência da Computação. Recife, 2021.
Inclui referências.

1. Teoria das categorias. 2. Mecânica quântica categórica. 3.
Computação quântica. 4. Espaços de Chu. 5. Conjuntos fuzzy.. I. Melo,
Sílvio de Barros. (Orientador). II. Título.

681.3 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2021 - 157

MAIGAN STEFANNE DA SILVA ALCÂNTARA

“CATEGORIAS RELACIONAIS PARA COMPUTAÇÃO QUÂNTICA”

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação.

Aprovado em: 03/09/2021.

Orientador: Sílvio de Barros Melo

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Adenilton José da Silva
Centro de Informática / UFPE

Prof. Dr. Antonio Murilo Santos Macedo
Departamento de Física / UFPE

Prof. Dr. Regivan Hugo Nunes Santiago
Departamento de Informática e Matemática Aplicada / UFRN

Prof. Dr. Leon Denis da Silva
Departamento de Matemática / UFRPE

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva
Departamento de Matemática / UFRPE

RESUMO

Propomos um estudo sistemático das categorias *relacionais* como modelos da computação quântica através da abordagem categórica de Coecke-Abramsky. As categorias relacionais são aquelas que os objetos ou os morfismos são relações. Esses modelos são importantes para o desenvolvimento da ciência da computação quântica porque nos fornecem uma linguagem abstrata para descrever processos quânticos. Isso nos dá um alto nível de compreensão de como a teoria quântica funciona e o que podemos fazer com ela. Além disso, é interessante explorar modelos que generalizem a teoria quântica e a relacionem com outras teorias. As categorias compacta *dagger* foram aplicadas com sucesso nos fundamentos da mecânica quântica em geral. Investigamos as propriedades categóricas dos espaços de Chu como um modelo para a mecânica quântica categórica e, especificamente, como modelos para a computação quântica. Definimos duas categorias com base nos espaços de Chu, **ChuRel** e **RelChu**, e provamos que elas são modelos categóricos robustos para computação quântica. Mais precisamente, mostramos que a categoria **ChuRel** é uma categoria compacta *dagger* e possui duas estruturas de base complementares, semelhantes à conhecida categoria de conjuntos e relações finitos, **FRel**, utilizada na literatura. Mostra-se também que a categoria dos espaços de Chu é uma categoria regular, portanto é possível obter a categoria **RelChu**, por meio da construção geral de Heunen e Tull, e explorar suas propriedades quânticas. Além disso, essa tese revisa quatro categorias de relações \mathbb{L} -fuzzy, cada uma modelando áreas onde a teoria dos conjuntos fuzzy pode ser aplicada. Uma relação \mathbb{L} -fuzzy é uma relação valorada em um reticulado completo \mathbb{L} com uma estrutura monoidal. Revisamos as noções dessas relações binárias multi-valoradas e apresentamos algumas propriedades básicas das categorias correspondentes visando aplicações em áreas como ciência da computação, lógica linear e mecânica quântica. A ênfase está nos aspectos monoidais das categorias. As categorias monoidais são um dos tipos de categorias mais aplicadas, uma vez que todas as categorias com uso em física, topologia, computação e lógica, são monoidais. Uma visão monoidal das relações fuzzy pode ampliar o espectro de aplicações da teoria dos conjuntos fuzzy.

Palavras-chaves: teoria das categorias; mecânica quântica categórica; computação quântica; espaços de Chu; conjuntos fuzzy; relações fuzzy.

ABSTRACT

We propose a systematic study of relational categories as models of quantum computing through the Coecke-Abramsky categorical approach. The relational categories are those objects or morphisms are relations. These models are important for the development of quantum computer science because they provide us with an abstract language to describe quantum processes. This gives us a high level of understanding of how quantum theory works and what we can do with it. Moreover, it is interesting to explore models that generalize quantum theory and relate it to other theories. The compact dagger categories have been successfully applied to the fundamentals of quantum mechanics in general. We investigate the categorical properties of Chu spaces as a model for categorical quantum mechanics and, specifically, as models for quantum computing. We define two categories based on Chu spaces, **ChuRel** and **RelChu** and we prove that they are robust categorical models for quantum computing. More precisely, we show that the category **ChuRel** is a dagger compact category that has two complementary basis structures, similar to the well-known category of finite sets and relations, **FRel**, used in the literature. It is also shown that the category of Chu spaces is a regular category, so it is possible to obtain the category **RelChu**, through the general construction of Heunen and Tull, and explore its quantum properties. Furthermore, this thesis reviews four categories of \mathbb{L} -fuzzy relations each modelling an area where Fuzzy Set Theory can be applied. An \mathbb{L} -fuzzy relation is a relation valued on a complete lattice \mathbb{L} with a monoidal structure. We review the notions of these multivalued binary relations and present some basic properties of the corresponding categories aiming at applications in areas such as computing science, linear logic and quantum mechanics. The emphasis is on the monoidal aspects of the categories. Monoidal categories are one of the most applied kinds of categories, since all categories with use in physics, topology, computation, and logic are monoidal. A monoidal view of fuzzy relations may widen the spectrum of applications of fuzzy set theory.

Keywords: category theory; chu space; quantum mechanics; quantum computing; fuzzy sets; fuzzy relations.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	MOTIVAÇÃO	9
1.2	TRABALHOS RELACIONADOS	12
1.3	ORGANIZAÇÃO DA TESE	14
2	OBJETIVOS	17
2.1	OBJETIVO GERAL	17
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	17
3	CONTRIBUIÇÕES E RESULTADOS	19
3.1	ARTIGO: CHU SPACE AS A TOY MODEL FOR QUANTUM MECHANICS	19
3.2	ARTIGO: CHU RELATIONAL MODELS FOR QUANTUM COMPUTING	19
3.3	ARTIGO: A SURVEY OF CATEGORICAL PROPERTIES OF \mathbb{L} -FUZZY RELATIONS	20
4	CONCEITOS BÁSICOS	22
4.1	TEORIA DAS CATEGORIAS	22
4.1.1	Functor	26
4.1.2	Transformações Naturais	28
4.1.3	Limites e Colimites	29
4.2	COMPUTAÇÃO QUÂNTICA	33
4.2.1	Qubit	33
4.2.1.1	<i>Esfera de Bloch</i>	35
4.2.2	Operadores	36
4.2.2.1	<i>O princípio de incerteza de Heisenberg</i>	37
4.2.3	Produto Tensorial	37
4.2.4	Emaranhamento	38
4.3	TEORIA FUZZY - CONJUNTOS E RELAÇÕES FUZZY	39
4.3.1	Reticulados (<i>Lattices</i>)	39
4.3.2	Conjuntos <i>crisp</i> vs conjuntos <i>fuzzy</i>	40
4.3.3	Relações <i>crisp</i> vs relações <i>fuzzy</i>	40
4.3.4	Condições no Reticulado	41

5	MECÂNICA QUÂNTICA CATEGÓRICA	43
5.1	CATEGORIAS MONOIDAIS	43
5.2	SIMETRIA	44
5.3	DAGGER	45
5.4	COMPACIDADE	47
5.5	PROPRIEDADES DAS CATEGORIAS COMPACTAS <i>DAGGER</i>	48
5.5.1	Escalares e Estado	48
5.5.2	Produto interno	49
5.5.3	Medição	50
5.5.4	Notação de Dirac Estendida	50
5.5.5	Traço e dimensão	51
5.5.6	Estruturas de base	52
6	ESPAÇO DE CHU	55
6.1	CATEGORIA Chu_K	58
6.2	CONSTRUÇÕES BÁSICAS	59
6.3	REGULARIDADE DA CATEGORIA Chu_K	64
6.4	ESTRUTURAS CATEGÓRICAS NA CATEGORIA Chu_K	68
6.5	LÓGICA LINEAR	69
7	MODELOS RELACIONAIS DE CHU PARA COMPUTAÇÃO QUÂN-	
	TICA	71
7.1	RelChu	71
7.2	ChuRel	73
7.2.1	Estrutura de base em FChuRel	78
7.3	DESTAQUES DO MODELO ChuRel	87
7.4	A NÃO EQUIVALÊNCIA DAS CATEGORIAS RelChu E ChuRel	88
8	PROPRIEDADES CATEGÓRICAS DE RELAÇÕES L-FUZZY	90
8.1	Rel : A CATEGORIA DE CONJUNTOS <i>CRISP</i> E RELAÇÕES <i>CRISP</i>	91
8.1.1	Produto and Co-produto em Rel	91
8.1.2	Produto tensorial e estrutura monoidal simétrica em Rel	92
8.1.3	Negação e estrutura <i>dagger</i> em Rel	92
8.1.4	Monoides and co-monoides em Rel	93
8.1.5	Dualidade e Compacidade em Rel	93
8.2	$\text{Rel}(\mathbb{L})$: A CATEGORIA DE CONJUNTOS \mathbb{L} -FUZZY E RELAÇÕES <i>CRISP</i>	93

8.2.1	Produto e Co-produto em $\text{Rel}(\mathbb{L})$	94
8.2.2	Produto tensorial e estrutura monoidal simétrica em $\text{Rel}(\mathbb{L})$	95
8.2.3	Negação e estrutura dagger em $\text{Rel}(\mathbb{L})$	97
8.2.4	Monoides e Co-monoides em $\text{Rel}(\mathbb{L})$	98
8.2.5	Dualidade e Compacidade em $\text{Rel}(\mathbb{L})$	99
8.3	$\mathbb{L}\text{Rel}$: A CATEGORIA DE CONJUNTOS <i>CRISP</i> E RELAÇÕES \mathbb{L} -FUZZY	100
8.3.1	Produto e Co-produto em $\mathbb{L}\text{Rel}$	101
8.3.2	Produto tensorial e estrutura monoidal simétrica em $\mathbb{L}\text{Rel}$	101
8.3.3	Negação e estrutura <i>dagger</i> em $\mathbb{L}\text{Rel}$	104
8.3.4	Monoides e co-monoides em $\mathbb{L}\text{Rel}$	105
8.3.5	Dualidade e Compacidade em $\mathbb{L}\text{Rel}$	106
8.4	$\text{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$: A CATEGORIA DE CONJUNTOS \mathbb{L} -FUZZY E RELAÇÕES \mathbb{L} -FUZZY	107
8.4.1	Produto e Co-produto em $\text{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$	109
8.4.2	Produto tensorial e estrutura monoidal simétrica em $\text{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$	110
8.4.3	Negação e estrutura <i>dagger</i> em $\text{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$	112
8.4.4	Monoides e co-monoides em $\text{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$	112
8.4.5	Dualidade e Compacidade em $\text{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$	113
8.5	CATEGORIA DE KLEISLI	114
9	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	117
	REFERÊNCIAS	120

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

As bases matemáticas do modelo proposto para a teoria quântica foram formuladas por Von Neumann em termos de espaços de Hilbert (HOVE, 1958; RÉDEI; STÖLTZNER, 2013). Nos últimos anos, trabalhos significativos foram realizados no desenvolvimento de métodos mais avançados para a computação quântica usando a teoria das categorias (ABRAMSKY; COECKE, 2004; COECKE; DUNCAN, 2008; ABRAMSKY; COECKE, 2009; COECKE; PAVLOVIC, 2007). Esta abordagem via teoria das categorias é o foco desta tese.

Embora o uso tradicional de espaços de Hilbert possa descrever sistemas quânticos, muitas vezes encontramos resultados muito intuitivos que podem parecer excessivamente complicados ou inacessíveis. A abordagem da teoria das categorias nos permite uma perspectiva para ver o quadro geral e chegar à essência de um determinado resultado. As três propriedades mais atraentes para essa abordagem sejam: primeiro, podemos identificar a propriedade de nossos sistemas quânticos que dá origem a um resultado. Em segundo lugar, podemos representar os resultados usando uma forma diagramática e intuitiva. Em terceiro lugar, a teoria das categorias nos dá uma estrutura para estudar a computação quântica sem o uso dos espaços de Hilbert. Isso não apenas nos dá uma nova perspectiva para a computação quântica, mas abre todo o mundo da matemática como lugares possíveis onde a computação quântica pode ocorrer, ou seja, permite utilizarmos outras estruturas matemáticas como base para modelar computação quântica. Esta terceira propriedade é a mais relevante para esta tese, visto que estaremos estudando a computação quântica fora de seus contextos usuais.

Teoria das categorias pode descrever estruturas abstratas gerais em matemática e como essas estruturas interagem ou se relacionam. É uma teoria originalmente criada por Eilenberg e Lane (1945), como uma decorrência de seus trabalhos em topologia algébrica. Uma categoria é uma estrutura abstrata constituída de *objetos* e *setas* entre os objetos, com uma propriedade fundamental que é a *composicionalidade das setas* (ABRAMSKY; TZEVELEKOS, 2010).

A estrutura das categorias monoidais tem inúmeras aplicações em diversas áreas (STREET et al., 2012). Por exemplo, em lógica pode ser usada para definir modelos para lógica linear (SEELY, 1987; SCHALK, 2004; BLUTE; SCOTT, 2004). Por outro lado, em ciência da computação, categorias monoidais simétricas e seu cálculo gráfico (diagramas de *string*) (HOTZ, 1965) são usados para modelar diagramas em uma linguagem diagramática de estilo de rede(

network-style) (FONG, 2016; BAEZ; FONG, 2018) e esta linguagem gráfica tem aplicações em muitos campos, como aprendizado de máquina (FONG; SPIVAK; TUYÉRAS, 2019), teoria dos jogos (GHANI et al., 2018), linguagem de programação (FELICE; TOUMI; COECKE, 2020), concorrência (BONCHI; SOBOCIŃSKI; ZANASI, 2014), programação funcional (RILEY, 2018), dentre outras aplicações (BROWN; HUTTON, 1994; ABRAMSKY, 1996). Além disso, as categorias simétricas monoidais *dagger* têm aplicações na mecânica quântica (mecânica quântica categórica), na teoria dos sistemas quânticos abertos, e na teoria das cordas, entre outras (ABRAMSKY; COECKE, 2004; COECKE; PAQUETTE; PAVLOVIC, 2008; PAVLOVIC, 2011).

Do ponto de vista físico, a teoria das categorias é uma ferramenta para descrever processos físicos de forma abstrata. Os objetos de uma categoria representam os sistemas físicos e os morfismos representam a evolução do estado de um sistema.

Com a abordagem da mecânica quântica categórica (CQM, do inglês *Categorical Quantum Mechanics*), podemos axiomatizar alguns fenômenos quânticos básicos com o uso da linguagem das categorias compactas *dagger* que foram introduzidas por Abramsky e Coecke (2004), como um modelo alternativo para a teoria quântica. Esta estrutura pode ser usada para expressar e verificar alguns protocolos fundamentais de informação quântica, tais como: teletransporte quântico (BOUWMEESTER et al., 1997), preparações e medidas de estados emaranhados (MINTERT et al., 2005), produto interno, traço, codificação densa, positividade completa, estados de Bell, entre outros (YANOFSKY; MANNUCCI, 2008; NIELSEN; CHUANG, 2001).

Além disso, as estruturas de base axiomatizam o conceito de bases ortonormais no modelo dos espaços de Hilbert e são uma ferramenta útil para analisar os fundamentos conceituais da computação quântica (COECKE; DUNCAN, 2008). Os observáveis quânticos são axiomatizados como estrutura de base no contexto da mecânica quântica categórica (COECKE; PAVLOVIC, 2007).

Ao contrário das abordagens axiomáticas tradicionais que visam reconstruir a teoria quântica com o aparato tradicional dos espaços de Hilbert, a CQM não busca uma axiomatização completa da mecânica quântica e isso pode levar a novos modelos alternativos que descrevem fenômenos quânticos que podem ser úteis para a conexão com outras teorias como teoria *fuzzy* e lógica linear, consequentemente abrindo novas perspectivas para trabalhos futuros. Um modelo de brinquedo, (*toy model*) é um modelo simplista muito usado para descrever mecanismos de forma sucinta. Neste sentido, a categoria **Rel**, de conjuntos e relações, junto com sua subcategoria **Spek** (modelo categórico do modelo de brinquedo de Spekkens) são modelos alternativos e expressam muitas características da mecânica quântica (EVANS et al.,

2009; SPEKKENS, 2007; COECKE; EDWARDS, 2011). No entanto, existem apenas alguns modelos alternativos na literatura, como **Rel** e **Spek**, que foram estudados em detalhes.

Apesar do sucesso da mecânica quântica categórica na física quântica, estamos principalmente interessados na computação quântica. Nossa principal motivação é buscar um modelo finito para computação quântica, não apenas os de dimensão finita. Como tal, damos atenção especial às categorias que possuem espaços finitos como objetos. Nesta tese, restringimos ainda mais um dos nossos focos para as categorias \star -*autonomous* (CHU, 1979).

A universalidade dos espaços de Chu permite que muitas categorias concretas podem ser incorporadas à categoria de espaços de Chu sobre um conjunto adequado (PRATT, 1999b). Além disso, os espaços de Chu fornecem modelos de lógica linear, em particular para a lógica linear multiplicativa (MLL) (DEVARAJAN et al., 1999). Assim, um dos objetivos desta tese é fornecer novos modelos finitos alternativos, vindos dos espaços de Chu, para a computação quântica.

Existem aplicações dos espaços de Chu em várias áreas, incluindo a teoria dos conjuntos *fuzzy*. Os conjuntos *fuzzy* podem ser vistos como tipos especiais de espaços de Chu (espaço de Chu *fuzzy*) (NGUYEN; NGUYEN; KREINOVICH, 2000). As operações entre espaços de Chu *fuzzy* fornecem representações dos conectivos da lógica linear intuicionista, bem como negação *fuzzy*. Além disso, os espaços de Chu podem representar qualquer estrutura relacional *fuzzy* (PAPADOPOULOS; SYROPOULOS, 2000). A relação entre a teoria dos conjuntos *fuzzy* e os fundamentos da mecânica quântica (QM), em particular a lógica quântica, é explorada por vários autores (SCHMITT; NÜRNBERGER; LEHRACK, 2009; PYKACZ, 2013; CASTILLO-MUSSOT; DIAS, 1992).

A teoria dos conjuntos *fuzzy* lida com problemas caracterizados por incertezas e imprecisões em dados e informações (ZIMMERMANN, 2011). A teoria dos conjuntos *fuzzy* foi aplicada com sucesso em áreas como ciência da computação (KRUSE; GEBHARDT; KLOWON, 1994), lógica (YEN; LANGARI, 1999), mecânica quântica (PYKACZ, 2013; CASTILLO-MUSSOT; DIAS, 1992), lógica quântica (SCHMITT; NÜRNBERGER; LEHRACK, 2009), medicina (DE; BISWAS; ROY, 2001), engenharia de controle e inteligência artificial (ZIMMERMANN, 2011; GEN; TSUJIMURA; ZHENG, 1997; LEE, 1996).

Embora a teoria das categorias e a teoria dos conjuntos *fuzzy* sejam desenvolvidas de forma independente, muitas abordagens e aplicações as conectam (GOGUEN, 1967; BARR, 1986; WALKER, 2004). Um aspecto particularmente interessante para a presente pesquisa é sua abordagem do que é uma relação, uma vez que utilizamos categorias relacionais.

Como todo subconjunto $S \subseteq A$ está associado à uma função característica $\chi_S : U \rightarrow \mathbb{B}$, então uma relação binária $R \subseteq A \times B$ pode ser representada como uma função da forma $R : A \times B \rightarrow \mathbb{B}$, onde $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ (KORNÍŁOWICZ, 1997).

Generalizando a valoração do conjunto $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ para um conjunto arbitrário K nos leva ao contexto dos conjuntos multi-valorados e relações multi-valoradas. A terminologia comum é chamar entidades de multi-valoradas com $K = \mathbb{B}$, de entidades *crisp*. Em contraste, quando a valoração do o conjunto é o intervalo unitário $[0, 1]$, as entidades são chamadas de entidades *fuzzy*.

A restrição $K = \mathbb{L}$, onde \mathbb{L} é um reticulado brouweriano completo, foi proposto por Goguen (GOGUEN, 1967). Partindo do trabalho de Goguen, consideramos as valorações em um reticulado monoidal \mathbb{L} para obtermos as estruturas adicionais nas categorias correspondentes.

Devido ao sucesso recente dos fundamentos categóricos em várias áreas (SCHALK, 2004; CORRADINI; ASPERTI, 1992; HAGHVERDI; SCOTT, 2006; COECKE; EDWARDS, 2011), outro propósito desta tese é fornecer uma descrição categórica dos vários tipos de abordagens para relações multi-valoradas. O ponto de vista adotado aqui de usar modelos categóricos monoidais como base para a teoria dos conjuntos *fuzzy* e permitir uma apresentação "mais limpa" da teoria visando abrir um caminho para a cooperação dos campos envolvidos. Em particular, ampliando a gama de aplicações da teoria dos conjuntos *fuzzy*.

Finalmente, é possível alcançar um nível mais alto de abstração e generalidade usando a construção da categoria de Kleisli, um caminho que não seguimos no presente trabalho (ver Seção 8.5 para comentários detalhados). Além disso, podemos realizar a popularização dos modelos categóricos relacionais para os pesquisadores da teoria dos conjuntos *fuzzy*. Optamos por uma abordagem mais concreta dando explicitamente as construções, uma vez que um dos propósitos da presente pesquisa é mostrar à comunidade dos conjuntos *fuzzy* as relações entre as categorias dos conjuntos *fuzzy* e modelos (categóricos) da mecânica quântica, lógica linear e ciência da computação. Consequente, exibir as possíveis categorias de relações *fuzzy* que são modelos para computação quântica. Procuramos enumerar concretamente e sistematicamente as propriedades das categorias e contrastar os modelos.

1.2 TRABALHOS RELACIONADOS

Existem na literatura diversos modelos que fazem uso da teoria das categorias (ABRAMSKY; COECKE, 2004) que apresentam características para modelos diversos fenômenos quânticos,

sem necessariamente descrever o formalismo completo da mecânica quântica (COECKE; DUNCAN, 2008; COECKE; PAVLOVIC, 2007; COECKE; PAQUETTE; PAVLOVIC, 2008; BAEZ, 2006).

Coecke e Edwards (2011) exploram alguns exemplos concretos de categorias monoidais simétricas *dagger* (\dagger -SMCs) para modelar características essenciais da mecânica quântica, por exemplo, o protocolo de teletransporte quântico. Esses autores provam dois fatos cruciais: que o modelo de brinquedo de Spekkens (2007) é um exemplo da axiomática quântica categórica e que na categoria **FRel**, de conjuntos finitos e relações, o conjunto de dois elementos $II = \{0, 1\}$ vem equipado com dois observáveis complementares.

Neste contexto, os espaços de Chu são universais e possuem uma gama de aplicações em diversas áreas (PRATT, 2003b; NGUYEN et al., 2001). A construção de um novo modelo para CQM pode surgir de espaços de Chu, de modo a obtermos um novo modelo alternativo com o advento da lógica linear capaz de modelar princípios como a não clonagem e transformações, além de descrever o protocolo do teletransporte .

Os espaços de Chu são uma construção que apareceu pela primeira vez no apêndice do livro de M. Barr (BARR, 1979), escrito por seu então aluno de mestrado Chu (1979). O interesse na categoria de espaços Chu vem do fato de eles fornecerem modelos para lógica linear multiplicativa (MLL).

A construção Chu sobre a categoria **Set**, de conjuntos e funções, foi proposta por (LAFONT; STREICHER, 1991), e mais tarde Pratt e outros autores produziram várias obras revelando vários aspectos atraentes dos espaços de Chu (PRATT, 1999b; PRATT, 1999a; PRATT, 1995).

Samson Abramsky propôs um grande modelo de brinquedo baseado em espaços Chu sob o intervalo unitário (ABRAMSKY, 2012). Sua abordagem consiste na definição de um espaço de Chu (quântico) correspondente a um dado espaço de Hilbert (ABRAMSKY, 2012). Em contraste, propomos oferecer novos modelos derivados de espaços de Chu (sobre qualquer conjunto) na abordagem da mecânica quântica categórica. Em particular, nossos morfismos são pares de relações adjuntas (sendo possível definir o funtor *dagger*), enquanto (ABRAMSKY, 2012) usa como morfismos os pares usuais de funções adjuntas, levando a diferentes categorias. A abordagem em (ABRAMSKY, 2012) afirma ter um sabor operacional (ABRAMSKY; HEUNEN, 2016).

Existem diferentes propostas de modelos categóricos para lógica linear com uma perspectiva *fuzzy* (BARR, 1996). Schalk e Paiva descrevem um método para construção de modelos de lógica linear baseado na categoria de conjuntos e relações (**Rel**) (SCHALK; PAIVA, 2004).

As categorias de Dedekind são uma das formalizações algébricas vistas em (KAWAHARA;

FURUSAWA, 1999) para desenvolver o cálculo relacional *fuzzy*. Além disso, a teoria das categorias de Goguen (baseada nas categorias de Dedekind) constitui uma boa estrutura para pensar sobre controladores \mathbb{L} -*fuzzy* e outras aplicações dos fundamentos da teoria *fuzzy* em ciência da computação (WINTER, 2004; WINTER, 2007).

Marsden e Genovese definem a categoria $\mathbf{Rel}(\mathbf{Q})$ de conjuntos *crisp* e relações valoradas em um quantale Q (MARSDEN; GENOVESE, 2017). Eles incorporam uma estrutura de *assinatura algébrica*, uma Q -*relação algébrica* (Σ, E) , para capturar a convexidade, um de seus objetivos. Eles também mostram que essas construções fornecem descrições concretas dos objetos matemáticos de interesse, adequado para uso em aplicações. Eles aplicam sua técnica para a construção de novos e existentes modelos para processamento de linguagem natural e aplicações em cognição (MARSDEN; GENOVESE, 2017).

Atenção especial é então dada às categorias que possuem relações multi-valoradas como morfismos. Começando com a estrutura da categoria \mathbf{Rel} e suas inúmeras aplicações (COECKE; EDWARDS, 2011; BREUVART, 2013), e relacionando categorias monoidais com noções de relações *fuzzy*, esperamos ampliar o escopo de futuras aplicações de ambos os campos e fortalecer seu relacionamento.

Queremos enfatizar nossa abordagem para investigar as propriedades monoidais das categorias envolvidas visando aplicações. Em (HARDING; WALKER; WALKER, 2014) os autores definiram a categoria com conjuntos e relações *fuzzy* - $\mathbf{Rel}[0, 1]$, investigaram propriedades categóricas básicas e enriqueceram esta categoria com a estrutura monoidal proveniente de *t*-normas, mas aqui investigamos as propriedades monoidais do caso mais geral de relações avaliadas em um reticulado brouweriano completo geral \mathbb{L} . Em seu trabalho, B. Coecke em (COECKE, 2011) e M. Barr em (BARR, 1996) respectivamente, estudam os aspectos monoidais das categorias \mathbf{Rel} (conjuntos *crisp* e relações *crisp*) e $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$ (conjuntos \mathbb{L} -*fuzzy* e relações \mathbb{L} -*fuzzy*), mas nesta tese adicionamos o estudo da estrutura \dagger -SMC (categorias monoidais simétricas *dagger*) na categoria $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$. Finalmente, M. Winter e E. Jackson não investigam as propriedades monoidais da categoria $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ (conjuntos *crisp* e relações \mathbb{L} -*fuzzy*) em (WINTER; JACKSON, 2016), o que fazemos aqui.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA TESE

No capítulo 2, descrevemos os objetivos gerais e específicos da nossa pesquisa. O capítulo 3 apresenta, de forma sucinta, os nossos resultados e contribuições.

Esta tese envolve conceitos e abordagens de diferentes áreas e teorias. Dessa forma, o capítulo 4 possui uma breve introdução à teoria das categorias, computação quântica e teoria *fuzzy*. No capítulo 5 fornecemos uma base à abordagem categórica à computação quântica.

O capítulo 6 oferece uma visão geral dos espaços de Chu e algumas propriedades, uma breve descrição dos conectivos lógicos sob a interpretação Chu, assim como sua construção categórica: \mathbf{Chu}_K , mostramos que essa categoria dos espaços de Chu é uma categoria regular. Nesse mesmo capítulo, seguindo o lema de Abramsky de que novos modelos muitas vezes podem sugerir novos axiomas (ABRAMSKY, 2012), e motivados pelo trabalho de Bob Coecke e Bill Edwards em (COECKE; EDWARDS, 2011), exploramos a categoria dos espaços de Chu, \mathbf{Chu}_K , sua relevância e possíveis usos na computação quântica. Embora a categoria \mathbf{Chu}_K não seja \dagger -SMC porque \mathbf{Chu}_K carece de um funtor *dagger* óbvio em qualquer morfismo que não seja um isomorfismo.

Estabelecemos uma categoria que chamamos \mathbf{ChuRel} , cujos objetos são espaços Chu e os morfismos são *Relações de Chu* (pares de relações adjuntas) (PRATT, 1999b). Provamos que esta categoria é \dagger -SMC e também uma categoria compacta, de modo que todos os objetos são auto-duais, *i.e.*, $A^* = A$ para todo $A \in \mathbf{ChuRel}$. Esta definição dual é diferente daquela dada para os espaços Chu no contexto da lógica linear multiplicativa (DEVARAJAN et al., 1999). Além disso, assim como no caso de \mathbf{FRel} (COECKE; EDWARDS, 2011), mostramos que na categoria \mathbf{ChuRel} , o espaço Chu discreto com dois pontos sobre o conjunto $K = \{0, 1\}$ é equipado com dois observáveis complementares. Apontamos as principais vantagens da categoria \mathbf{ChuRel} como um modelo quântico de brinquedo para computação quântica. Chris Heunen e Sean Tull mostram que categorias $\mathbf{Rel}(\mathbf{C})$, de relações sobre categorias regulares \mathbf{C} , fornecem famílias de modelos de teoria quântica (HEUNEN; TULL, 2015). Assim, após comprovar que a categoria \mathbf{Chu}_K é uma categoria regular, estudamos a categoria $\mathbf{Rel}(\mathbf{Chu})$ e exploramos suas propriedades quânticas. Todos esses resultados dos modelos relacionais de Chu para computação quântica encontram-se no capítulo 7.

A partir dos resultados obtidos com a categoria \mathbf{ChuRel} nesta tese e o exemplo na categoria \mathbf{Rel} em (COECKE; EDWARDS, 2011), observamos que a limitação desses modelos em representar um maior número de estados quânticos poderia ser resolvida com a multi-valorização em seus respectivos morfismos. Desse modo, iniciamos os estudos das propriedades categóricas das relações \mathbb{L} -*fuzzy*. No capítulo 8 apresentamos uma outra proposta desta tese que é coletar em um lugar, de forma sistemática (mesma sequencia de verificações), as propriedades das seguintes categorias monoidais com relações multi-valoradas como morfismos:

1. **Rel**: conjuntos *crisp* e relações *crisp* (COECKE, 2011, p.223).
2. **Rel**(\mathbb{L}): conjuntos \mathbb{L} -fuzzy e relações *crisp* (HARDING; WALKER; WALKER, 2014).
3. **\mathbb{L} Rel**: conjuntos *crisp* e relações \mathbb{L} -fuzzy (WINTER; JACKSON, 2016).
4. **Rel** $_{\mathbb{L}}$ (\mathbb{L}): conjuntos \mathbb{L} -fuzzy e relações \mathbb{L} -fuzzy ¹ (BARR, 1996).

Em cada caso investigamos as propriedades que cada categoria possui e quando é possível obter um modelo categórico (monoidal), e em particular para computação quântica. (HOVEY, 1999).

Finalmente, o Capítulo 9 contém uma conclusão da nossa pesquisa e dos resultados obtidos, além de uma breve discussão sobre como a categoria **ChuRel** abre uma nova perspectiva para a conexão entre a computação quântica e a lógica linear. Essa forte conexão é um dos focos de nossos trabalhos futuros.

¹ Veremos mais tarde que os reticulados em **Rel** $_{\mathbb{L}}$ (\mathbb{L}) **devem** ser os mesmos.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Nosso objetivo é investigar a adequabilidade das categorias relacionais como modelo para computação quântica. Analisar e explorar diferentes estruturas categóricas e propor modelos alternativos simplificados relevantes à computação quântica. Mostrar a importância desses modelos para o desenvolvimento da ciência da computação quântica porque nos fornecem uma linguagem abstrata para descrever processos quânticos. Isso nos dá um nível de compreensão de como a teoria das categorias funciona e o que podemos fazer com ela. Queremos explorar modelos que generalizem a teoria quântica e a relacionem com outras teorias.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Investigar as propriedades categóricas dos espaços de Chu com o propósito de usar esses espaços como um modelo para a mecânica quântica categórica;
- Introduzir a noção da categoria **ChuRel**, a categoria dos espaços de Chu e relações de Chu dadas em (PRATT, 1999b);
- Mostrar que a categoria **ChuRel** possui as estruturas das categorias *quantum-like* (COECKE, 2011, p.217);
- Investigar quais propriedades da computação quântica podemos modelar utilizando a categoria **ChuRel**;
- Verificar se a categoria **Chu_K** é regular;
- Determinar a categoria **RelChu**;
- Explorar as particularidades quânticas da categoria **RelChu**;
- Analisar as possíveis estruturas de base na categoria **ChuRel**;
- Verificar a equivalência entre as categorias **RelChu** e **ChuRel**;
- Estudar e enumerar de forma concreta e sistemática as propriedades das categorias relacionais \mathbb{L} -fuzzy e contrastar os modelos, com o objetivo de mostrar se é possível modelar

diferentes fenômenos em muitas aplicações, como lógica linear, mecânica quântica e ciência da computação;

- Propor a popularização dos modelos categóricos relacionais para os pesquisadores da teoria dos conjuntos *fuzzy*;

3 CONTRIBUIÇÕES E RESULTADOS

3.1 ARTIGO: CHU SPACE AS A TOY MODEL FOR QUANTUM MECHANICS

Exploramos a categoria de espaços de Chu, \mathbf{Chu}_K , sua relevância e possíveis usos na computação quântica. Embora a categoria \mathbf{Chu}_K não seja \dagger -SMC pois essa categoria carece de um funtor *dagger* óbvio em qualquer morfismo que não seja um isomorfismo. Esse resultado sucedeu num artigo para anais da ETMF (ALCANTARA; OLIVEIRA; DIAS, 2016) (ALCANTARA; OLIVEIRA; DIAS, 2016). Em detalhe:

- Desenvolvemos concretamente a estrutura monoidal simétrica da categoria \mathbf{Chu}_K ;
- Mostramos que a categoria \mathbf{Chu}_K não é uma categoria *dagger*;
- Visto que \mathbf{Chu}_K não possui a estrutura do funtor involutivo *dagger*, determinamos uma subcategoria, \mathbf{gChu} - grupóides¹, com a estrutura \dagger -SMC, sendo capaz de modelar o operador adjunto.

3.2 ARTIGO: CHU RELATIONAL MODELS FOR QUANTUM COMPUTING

Definimos duas categorias com base nos espaços de Chu, \mathbf{ChuRel} e \mathbf{RelChu} . Provamos que essas categorias são modelos categóricos para computação quântica. Este trabalho fortalece as conexões entre a lógica linear e a computação quântica ao apresentarmos um modelo, \mathbf{ChuRel} , que modela ambos os fragmentos: a lógica linear multiplicativa (MLL) e mecânica quântica categórica (CQM). Com estes resultados obtemos um artigo que está em revisão. Mais precisamente:

- Construimos explicitamente os limites, co-limites e subobjetos na categoria \mathbf{Chu}_K ;
- Mostramos que a categoria \mathbf{Chu}_K é uma categoria regular e, a partir disso, definimos a categoria \mathbf{RelChu} que satisfaz algumas propriedades quânticas categóricas proveniente dos resultados em (HEUNEN; TULL, 2015);
- Definimos a categoria \mathbf{ChuRel} , determinamos a estrutura monoidal simétrica e mostramos que \mathbf{ChuRel} é uma categoria compacta *dagger*;

¹ Categoria onde todos os morfismos são invertíveis.

- Obtemos duas estruturas de base complementares em **ChuRel**, análogo a **FRel**, rica o suficiente para simular os protocolos de teletransporte e codificação densa;
- Provamos que as categorias **ChuRel** e **RelChu** não são equivalentes, em consequência disto obtivemos duas categorias provenientes dos espaços de Chu que são modelos alternativos para computação quântica. Esses modelos são importantes para o desenvolvimento da ciência da computação quântica porque nos fornecem uma linguagem abstrata para descrever processos quânticos;
- Contribuímos com a disseminação do uso de espaços de Chu para a modelagem quântica;

3.3 ARTIGO: A SURVEY OF CATEGORICAL PROPERTIES OF \mathbb{L} -FUZZY RELATIONS

Propomos uma revisão sistemática de categorias com conjuntos e relações no ambiente \mathbb{L} -fuzzy e investigamos algumas propriedades categóricas básicas como produto, coproduto, tensor, negação, estrutura *dagger*, monoide interno e co-monoide. Enfatizando os aspectos monoidais das categorias para obter modelos para diferentes áreas. Este trabalho deu origem ao artigo aceito na revista *Fuzzy Sets and Systems* (ALCANTARA et al., 2021):

- Apresentamos para a comunidade dos conjuntos *fuzzy* as relações entre categorias de conjuntos *fuzzy* e modelos (categóricos) da mecânica quântica, lógica linear e ciência da computação;
- Concedemos uma abordagem mais concreta dando explicitamente as construções nas quatro categorias aqui endereçadas;
- Exibimos as diferenças e semelhanças das propriedades monoidais de cada categoria investigada, contrastando os modelos com vista a futuras aplicações;
- Com o propósito de obtermos modelos para computação quântica seguindo a abordagem da mecânica quântica categórica, preenchemos as lacunas da literatura com as nossas seguintes contribuições:
 - **Rel(\mathbb{L})**: proposição 8.5 (bifunctor monoidal), teorema 8.6 (estrutura monoidal simétrica), proposição 8.8 (subcategoria *dagger*), teorema 8.12 (não compacidade), teorema 8.9 (monoide e co-monoide interno), corolário 8.10 e corolário 8.11.

- $\mathbb{L}\text{-Rel}$: proposição 8.15 (produto e co-produto), teorema 8.17 (estrutura monoidal simétrica), teorema 8.20 (estrutura compacta dagger) e teorema 8.19 (monoide e co-monoide).
- $\text{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$: proposição 8.22 (produto e co-produto), proposição 8.23 (bifunctor monoidal), teorema 8.24 (estrutura monoidal simétrica), teorema 8.26 (não compacidade) e teorema 8.25 (monoide e co-monoide).

4 CONCEITOS BÁSICOS

Este capítulo oferece uma breve introdução à teoria das categorias, álgebra linear, computação quântica e teoria *fuzzy*, suficiente para tornar o texto autocontido. Para mais detalhes sobre os tópicos abordados neste capítulo, o leitor deve consultar os textos referenciados em cada seção. A seção 4.1 fornece uma introdução à teoria das categorias. Na seção 4.2 relembremos os fundamentos da teoria quântica, incluindo a interpretação padrão de estados, dinâmica e medição e o procedimento de teletransporte quântico. Por fim, na seção 4.3 fornecemos uma introdução à teoria *fuzzy*, em particular, aos conjuntos e relações *fuzzy*.

4.1 TEORIA DAS CATEGORIAS

Como uma primeira aproximação, pode-se dizer que a teoria das categorias é o estudo matemático da álgebra (abstrata) de funções. Assim como a teoria de grupos é a abstração da ideia de um sistema de permutações de um conjunto ou simetrias de um objeto geométrico, teoria das categorias surge da ideia de um sistema de funções entre alguns objetos.

A principal força por trás do desenvolvimento da teoria das categorias é a sua capacidade de unificar conceitos abstratos.

Alguns conceitos e exemplos abordados neste capítulo são explicitamente baseados nas seguintes referências: (COECKE, 2011; ABRAMSKY; TZEVELEKOS, 2010; BARR; WELLS, 1990; AWODEY, 2010; COECKE, 2006).

Definição 4.1. Uma **categoria** \mathbf{C} é uma estrutura que consiste de:

- uma coleção $Obj(\mathbf{C})$ de *objetos*: A, B, C, \dots ;
- para cada par de objetos A e B , uma coleção $\mathbf{C}(A, B)$ de *morfismos*, com $f : A \rightarrow B$ onde $f \in \mathbf{C}(A, B)$;
- para todos morfismos $f \in \mathbf{C}(A, B), g \in \mathbf{C}(B, C)$, temos a *composição* $g \circ f \in \mathbf{C}(A, C)$;
- Para cada objeto A , existe um morfismo *identidade* $Id_A : A \rightarrow A$;

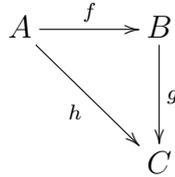
para todos objetos A, B, C, D e todos morfismos $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$ as seguintes propriedades são satisfeitas:

- associatividade: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

- identidade: $f \circ id_A = f = id_B \circ f$.

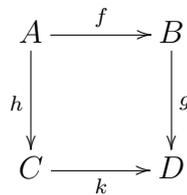
Uma ferramenta importante na teoria das categorias é a representação por diagramas.

Dizer que o seguinte triângulo comuta



é exatamente equivalente a afirmar a equação $g \circ f = h$.

Da mesma forma, dizer que o seguinte quadrado comuta

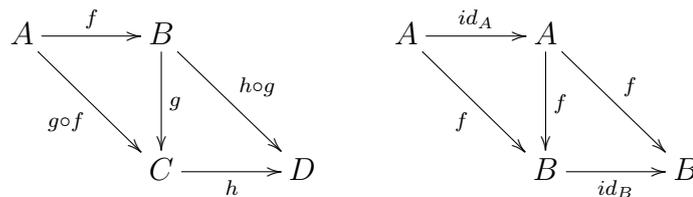


significa que $g \circ f = k \circ h$.

Assim, podemos representar as equações:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f, \quad f \circ id_A = f = id_B \circ f,$$

usando os seguintes diagramas comutativos, respectivamente:



Exemplo 4.2. 1. Qualquer tipo de estrutura matemática e as funções que as preservam, formam uma categoria. Estas são chamadas de *categorias concretas*, exemplos deste tipo que o leitor pode já estar familiarizado.

- **Set**: Conjuntos e funções;
- **Mon**: Monoides e homomorfismos monoides;
- **Grp**: Grupos e homomorfismos de grupo;
- **Vect_K**: Espaços vetoriais sobre um corpo K e transformações lineares;
- **Pos**: Conjuntos parcialmente ordenados e funções monótonas;

- **Top:** Espaços topológicos e funções contínuas;
2. **Rel:** objetos são conjuntos, as setas $R : X \rightarrow Y$ e $S : Y \rightarrow Z$ são *relações* $R \subseteq X \times Y$ e $S \subseteq Y \times Z$. Onde a composição relacional, denotada por $R \circ S$, é dada por:

$$R \circ S(x, z) \iff \exists y. R(x, y) \wedge S(y, z)$$

3. Seja K um corpo (por exemplo, os números reais ou complexos). Considere a seguinte categoria: Mat_K . Os objetos são conjuntos de números naturais. Um morfismo $M : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}$ é uma matriz $\mathbf{n} \times \mathbf{m}$, com entradas em K .
4. Monoides são categorias com apenas um objeto. As setas correspondem aos elementos do monoide, com a operação do monoide sendo composição de seta e a unidade do monoide sendo a seta identidade.

Exemplo 4.3. Para nossos propósitos no capítulo 8, um exemplo importante de uma categoria é a categoria degenerada \mathbf{C} onde $|\mathbf{C}|$ é um conjunto e para cada par de objetos existe no máximo um morfismo, então $|\mathbf{C}|$ é na verdade apenas um poset (conjunto parcialmente ordenado).

Muitas noções matemáticas podem ser expressas no nível geral de categorias.

Definição 4.4. Seja \mathbf{C} uma categoria. Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathbf{C} é:

- **mônico** (ou um *monomorfismo*) se $f \circ g = f \circ h \implies g = h$;
- **épico** (ou um *epimorfismo*) se $g \circ f = h \circ f \implies g = h$.

Definição 4.5. Um *isomorfismo* em \mathbf{C} é uma seta $i : A \rightarrow B$ de tal modo que existe uma seta $j : B \rightarrow A$ (o inverso de i) satisfazendo:

$$j \circ i = id_A, \quad i \circ j = id_B.$$

Denotam-se isomorfismos por $i : A \xrightarrow{\cong} B$ e escreve-se i^{-1} para o inverso da i . Dizemos que A e B são isomorfos, $A \cong B$, se existir algum $i : A \xrightarrow{\cong} B$.

Assim, temos a noção fundamental de isomorfismo de uma forma que se aplica a todos os contextos matemáticos. Este é um primeiro interesse do nível de generalidade que a teoria das categorias proporciona naturalmente. Já identificamos os monoides como categorias com um único objeto. Agora podemos identificar os grupos como sendo uma categoria com um único

objeto em que cada seta é um isomorfismo. Isto também leva a uma generalização natural, de considerável importância em matemática atual:

Grupóide: Categoria em que cada morfismo é um isomorfismo.

A direcionalidade das setas dentro de uma categoria \mathbf{C} pode ser invertida sem quebrar as condições de ser uma categoria, isso gera a noção de categoria oposta.

Definição 4.6. Dada uma categoria \mathbf{C} , a **categoria oposta** (ou 'dual') \mathbf{C}^{OP} tem os mesmos objetos que \mathbf{C} , e

$$\mathbf{C}^{OP}(A, B) := \mathbf{C}(B, A).$$

Composição e identidades são herdadas de \mathbf{C} .

Observe que, se tivermos:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

em \mathbf{C}^{OP} , isso significa

$$A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$

em \mathbf{C} , assim a composição $g \circ f$ em \mathbf{C}^{OP} corresponde a $f \circ g$ em \mathbf{C} .

Exemplo 4.7. Seja a ordem parcial $P = (\mathbb{Z}, \leq)$, então $P^{OP} = (\mathbb{Z}, \geq)$.

Considerações de categorias opostas levam ao princípio de dualidade: Uma declaração S é verdade sobre \mathbf{C} se e somente se seu dual (ou seja, aquele obtido a partir de S , invertendo todas as setas) é verdade sobre \mathbf{C}^{OP} .

Por exemplo, um morfismo f é mônico em \mathbf{C}^{OP} se e somente se é épico em \mathbf{C} . De fato, f é mônico em \mathbf{C}^{OP} se e somente se para todo $g, h : C \rightarrow B$ em \mathbf{C}^{OP} ,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h,$$

se e somente se para todo $g, h : B \rightarrow C$ em \mathbf{C} ,

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h,$$

se e somente se f é épico em \mathbf{C} . Dizemos que mônico e épico são noções duais.

Outra maneira de obter novas categorias de antigas é restringindo seus objetos ou a coleção de seus morfismos.

Definição 4.8. Seja \mathbf{C} uma categoria e as seguintes coleções de:

$$Ob(\mathbf{D}) \subseteq Ob(\mathbf{C}), \quad \forall A, B \in Ob(\mathbf{D}), \quad e \quad \mathbf{D}(A, B) \subseteq \mathbf{C}(A, B).$$

Dizemos que \mathbf{D} é uma **subcategoria** de \mathbf{C} se

$$A \in Ob(\mathbf{D}) \Rightarrow id_A \in (A, A),$$

$$f \in \mathbf{D}(A, B), g \in \mathbf{D}(B, C) \Rightarrow g \circ f \in \mathbf{D}(A, C).$$

Portanto, \mathbf{D} é uma categoria.

Em particular, \mathbf{D} é:

- Uma subcategoria *full* de \mathbf{C} se para quaisquer $A, B \in Ob(\mathbf{D})$, $\mathbf{D}(A, B) = \mathbf{C}(A, B)$.
- Uma subcategoria *lluf* de \mathbf{C} se $Ob(\mathbf{D}) = Ob(\mathbf{C})$.

Exemplos

1. A categoria de conjuntos finitos forma uma subcategoria *full* da categoria de conjuntos (**Set**);
2. **Grp** é uma subcategoria *full* de **Mon**;
3. **Set** é uma subcategoria *lluf* de **Rel**.

4.1.1 Funtor

Não devemos olhar só para os objetos, devemos também olhar para as setas ou "mapeamentos" entre as categorias. Um 'morfismo entre categorias' chama-se *funtor*.

Definição 4.9. Dado duas categorias \mathbf{C} e \mathbf{D} , um **funtor** $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ é dado por:

- Um mapa-objeto, atribuindo um objeto FA de \mathbf{D} para cada objeto A de \mathbf{C} .
- Um mapa-seta, atribuindo uma seta $Ff : FA \rightarrow FB$ de \mathbf{D} para cada seta $f : A \rightarrow B$ de \mathbf{C} , de tal forma que a composição e as identidades são preservadas:

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff, \quad Fid_A = id_{FA}.$$

Uma vez que funtores preservam o domínio e o contradomínio de setas, para cada par de objetos A, B de \mathbf{C} , temos uma estrutura bem definida.

$$F_{A,B} : \mathbf{C}(A, B) \rightarrow \mathbf{D}(FA, FB)$$

As condições que expressam a preservação de identidade e composição são chamadas de **functorialidade**.

Exemplo 4.10. Continuando com o nosso exemplo importante para a abordagem no capítulo 8, um functor em um poset (visto como uma categoria) é apenas uma função monótona $f : A \rightarrow B$, i.e, se $a \leq b$, então $f(a) \leq f(b)$.

Definição 4.11. Um **bifunctor** (também conhecido como functor binário) é um functor cujo domínio é uma categoria de produto. Sejam $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ e \mathbf{D} categorias, um functor $F : \mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2 \rightarrow \mathbf{D}$ também é chamado de bifunctor de \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 a \mathbf{D} .

Por definição, o mapa-seta de um functor F é *covariante* se ele preserva o sentido das setas, i.e., se $f : A \rightarrow B$ então $Ff : FA \rightarrow FB$. O functor é *contravariante* se ele inverte o sentido da seta, i.e., se $f : A \rightarrow B$ então $Ff : FB \rightarrow FA$. Uma maneira concisa de expressar a contravariância é dada pela seguinte definição.

Definição 4.12. Sejam \mathbf{C}, \mathbf{D} categorias. Um functor **contravariante** F a partir de \mathbf{C} a \mathbf{D} é um functor $F : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{D}$. (De forma equivalente, um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}^{op}$.)

Explicitamente, um functor contravariante F é dado por uma atribuição de:

- um objeto FA em \mathbf{D} para cada objeto A em \mathbf{C} ;
- uma seta $Ff : FB \rightarrow FA$ em \mathbf{D} para cada seta $f : A \rightarrow B$ em \mathbf{C} , tal que

$$F(g \circ f) = Ff \circ Fg, \quad Fid_A = id_{FA}.$$

Exemplo 4.13. O functor espaço dual em espaços vetoriais:

$$(_)^* : \mathbf{Vect}_k^{op} \longrightarrow \mathbf{Vect}_k := V \mapsto V^*.$$

Definição 4.14. Um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ é dito ser:

- **fiel** (*faithful*) se cada mapa $F_{A,B} : \mathbf{C}(A, B) \rightarrow \mathbf{D}(FA, FB)$ é injetivo;
- **pleno** (*full*) se cada mapa $F_{A,B} : \mathbf{C}(A, B) \rightarrow \mathbf{D}(FA, FB)$ é sobrejetivo.

Definição 4.15. Um funtor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ é dito ser:

- uma **imersão** (*embedding*) se F é full, faithful, e injetivo em objetos;
- uma **equivalência** se F é fiel, pleno, e essencialmente sobrejetivo, isto é, para cada objeto B de \mathbf{D} existe um objeto A de \mathbf{C} de tal modo que $F(A) \cong B$;
- um **isomorfismo** se existe um funtor $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ de tal modo que

$$G \circ F = Id_{\mathbf{C}}, \quad F \circ G = Id_{\mathbf{D}}.$$

Observação 4.16. Dizemos que as categorias \mathbf{C} e \mathbf{D} são *isomorfas*, $\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$, se existe um isomorfismo entre elas.

4.1.2 Transformações Naturais

Categorias foram introduzidas para permitir que funtores sejam definidos, funtores foram introduzidos para permitir que as transformações naturais sejam definidas. Ou seja, uma transformação natural é um morfismo de funtores.

Definição 4.17. Sejam $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ funtores. Uma **transformação natural**

$$t : F \longrightarrow G$$

é uma família de morfismos em \mathbf{D} indexados por objetos A de \mathbf{C} ,

$$\{ t_A : FA \longrightarrow GA \}_{A \in \text{Ob}(\mathbf{C})}$$

tal que, para todos $f : A \rightarrow B$, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{Ff} & FB \\ t_A \downarrow & & \downarrow t_B \\ GA & \xrightarrow{Gf} & GB \end{array}$$

Esta condição é conhecida como **naturalidade**. Se cada t_A é um isomorfismo, dizemos que t é um **isomorfismo natural**:

$$t : F \xrightarrow{\cong} G.$$

Exemplo 4.18. Seja Id o funtor identidade em **Set**, e seja $\times \circ \langle Id, Id \rangle$ o funtor levando cada conjunto X a $X \times X$ e cada função f para $f \times f$. Então, há transformação natural $\Delta : Id \rightarrow \times \circ \langle Id, Id \rangle$ dada por:

$$\Delta_X : X \rightarrow X \times X := x \mapsto (x, x).$$

A Naturalidade equivale a afirmar que para qualquer função $f : X \rightarrow Y$, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \Delta_X \downarrow & & \downarrow \Delta_Y \\ X \times X & \xrightarrow{f \times f} & Y \times Y \end{array}$$

Chamamos Δ a transformação diagonal em **Set**. De fato, Δ é a *única* transformação natural entre estes funtores.

4.1.3 Limites e Colimites

Não vamos descrever o caso geral aqui, mas apenas os casos especiais de produtos, *pull-backs*, equalizadores, objetos terminais e suas noções duais.

Definição 4.19. Um objeto I em uma categoria \mathcal{C} é **inicial** se, para cada objeto A , existe uma única seta de I para A , que escrevemos $\iota_A : I \rightarrow A$.

Definição 4.20. Um objeto T em uma categoria \mathcal{C} é **terminal** se, para cada objeto A , existe uma seta única de A para T , que escrevemos $\tau_A : A \rightarrow T$.

Observe que os objetos iniciais e finais são noções duais: T é o terminal em \mathcal{C} se e somente se é inicial na \mathcal{C}^{op} .

Exemplo 4.21. 1. Em **Set**, o conjunto vazio é um objeto inicial, enquanto qualquer conjunto unário $\{\bullet\}$ é terminal. Observe que **Set** tem apenas um objeto inicial, mas muitos objetos terminais.

2. Em **Pos**, a ordem parcial (\emptyset, \emptyset) é um objeto inicial, enquanto todo poset com um único elemento $(\{\bullet\}, \{(\bullet, \bullet)\})$ é terminal.

3. Em **Top**, o espaço $(\emptyset, \{\emptyset\})$ é um objeto inicial, enquanto $(\{\bullet\}, \{\emptyset, \{\bullet\}\})$ é terminal.

4. Em \mathbf{Vect}_K , o espaço de um elemento 0 é inicial e terminal.

Definição 4.22. Sejam A, B objetos de uma categoria \mathbf{C} . Um **produto** de A e B consiste de:

1. um objeto $A \times B \in \mathbf{C}$, e
2. um par de morfismos, π_1 e π_2 , $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$

tal que para cada tripla $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$ existe um único morfismo

$$\langle f, g \rangle : C \longrightarrow A \times B$$

de tal modo que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{\pi_1} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B \\
 & \searrow f & \uparrow \langle f, g \rangle & \nearrow g & \\
 & & C & &
 \end{array}
 \quad \left(\begin{array}{l} \pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f \\ \pi_2 \circ \langle f, g \rangle = g \end{array} \right)$$

Além disso, para todo A, B e $C \in \mathbf{C}$, a operação

$$(\pi_1 \circ _, \pi_2 \circ _) : \mathbf{C}(C, A \times B) \rightarrow \mathbf{C}(C, A) \times \mathbf{C}(C, B)$$

admite uma inversa $\langle _, _ \rangle_{C, A, B}$.

Exemplo 4.23. 1. Em \mathbf{Set} , os produtos são os produtos cartesianos habituais.

2. Em \mathbf{Pos} , os produtos são produtos cartesianos com a ordem produto.

3. Em \mathbf{Top} , os produtos são produtos cartesianos com a topologia produto.

4. Em \mathbf{Vect}_K , os produtos são somas diretas.

Definição 4.24. Sejam A, B objetos de uma categoria \mathbf{C} . Um **coproduto** de A e B consiste de:

1. um objeto $A + B \in \mathbf{C}$, e
2. um par de morfismos, ι_1 e ι_2 , $A \xrightarrow{\iota_1} A + B \xleftarrow{\iota_2} B$

tal que, para cada tripla $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ existe um *único* morfismo $[f, g] : A + B \rightarrow C$ de tal forma que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota_1} & A + B & \xleftarrow{\iota_2} & B \\ & \searrow f & \downarrow [f, g] & \swarrow g & \\ & & C & & \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} [f, g] \circ \iota_1 = f \\ [f, g] \circ \iota_2 = g \end{array} \right)$$

Além disso, para todo A, B e $C \in \mathbf{C}$, a operação

$$(_ \circ \iota_1, _ \circ \iota_2) : \mathbf{C}(A + B, C) \rightarrow \mathbf{C}(A, C) \times \mathbf{C}(B, C)$$

admite uma inversa $\langle _, _ \rangle_{C, A, B}$.

Exemplo 4.25. 1. Em **Set**, o coproduto é a união disjunta de conjuntos;

2. Em **Pos**, uniões disjuntas (com as ordens herdadas) são coprodutos.

3. Em **Top**, uniões topológicas disjuntas são coprodutos.

4. Em $\mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}$, somas diretas são coprodutos, que consiste nos elementos do produto direto que possuem apenas termos finitos diferentes de zero. (Portanto, coincide exatamente com o produto direto no caso de fatores finitos).

Exemplo 4.26. Em um poset P , o ínfimo entre dois elementos é o produto: pois para $p, q \in P$, temos $p \times q = p \wedge q$ com as projeções $p \times q \leq p$, $p \times q \leq q$ e se para qualquer elemento a , $a \leq p$ e $a \leq q$ então $a \leq p \times q$. Similarmente, o supremo é o co-produto.

A noção de *pullbacks*, como a de um produto, é aquela que surge com muita frequência em matemática e lógica.

Definição 4.27. Considere um par de morfismos $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$. O **pullback** de f ao longo de g é um par $A \xleftarrow{p} D \xrightarrow{q} B$ de tal modo que $f \circ p = g \circ q$ e, para qualquer par $A \xleftarrow{p'} D' \xrightarrow{q'} B$ temos que $f \circ p' = g \circ q'$, existe uma única $h : D' \rightarrow D$ tal que $p' = p \circ h$ and $q' = q \circ h$.

Diagramaticamente,

$$\begin{array}{ccccc} & & D' & & \\ & & \searrow h & & \searrow q' \\ & & D & \xrightarrow{q} & B \\ & \swarrow p' & \downarrow p & & \downarrow g \\ & & A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

Exemplo 4.28. Em Set o *pullback* de $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ é definido como um subconjunto do produto cartesiano:

$$A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}.$$

Dualizando a definição de *pullback* obtemos a definição de *pushout*.

Definição 4.29. Considere um par de setas paralelas $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} B$. Um **equalizador** de (f, g) é uma seta $e : E \rightarrow A$ tal que $f \circ e = g \circ e$ e, para qualquer seta $h : D \rightarrow A$ tal que $f \circ h = g \circ h$, existe uma única $\hat{h} : D \rightarrow E$ tem-se $h = e \circ \hat{h}$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e} & A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} B \\ \uparrow \hat{h} & \nearrow h & \\ D & & \end{array}$$

Exemplo 4.30. Em Set , o equalizador de f, g é dada pela inclusão

$$\{x \in A \mid f(x) = g(x)\} \hookrightarrow A.$$

Isto permite que a noção de subconjuntos definidos equacionalmente seja definida como equalizadores. Por exemplo, considere o par de funções

$$\mathbb{R}^2 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} \mathbb{R}$$

onde

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2, \quad g : (x, y) \mapsto 1.$$

O equalizador é o círculo unitário como um subconjunto de \mathbb{R}^2 .

Co-equalizadores é o dual de equalizadores.

Definição 4.31. Uma categoria \mathbf{C} é chamada de **pequena** se $\text{obj}(\mathbf{C})$ (objetos de \mathbf{C}) e $\text{Hom}(\mathbf{C})$ (morfismos de \mathbf{C}) são conjuntos e não classes próprias. Uma categoria **localmente pequena** é uma categoria tal que, para todos os objetos a e b , a classe $\text{Hom}(a, b)$ é um conjunto, denominado *homset*.

Uma categoria pequena pode ser vista como uma estrutura algébrica semelhante a um monoide, mas sem exigir propriedades de fechamento.

Definição 4.32. Uma categoria é **completa** se todo diagrama $F : J \rightarrow C$ (onde J é pequena) tem um limite em C . Uma categoria C é **co-completa** se possui todos os *small* colimites. Uma categoria C é **bicompleta** se for uma categoria completa e também uma categoria co-completa.

4.2 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

Nesta seção vamos abordar alguns conceitos básicos importantes dos fundamentos da computação quântica, o campo das possíveis aplicações dos modelos categóricos desenvolvidos nessa pesquisa. Os conceitos abordados nessa seção são explicitamente baseados nas seguintes referências: (MCMAHON, 2007; YOUNG, 1988; YANOFSKY; MANNUCCI, 2008; NIELSEN; CHUANG, 2001; BERBERIAN, 1999; COHEN, 2012; HEUNEN; VICARY, 2019). Aqui nos contemos aos constituintes básicos e não abrangemos os assuntos de circuitos e algoritmos quânticos, o leitor pode encontrar esses conceitos e demais detalhes nas referências citadas. Antes de iniciar a nossa discussão precisamos introduzir a seguinte notação:

Notação Dirac: Dirac inventou a notação “*bra-ket*” e é muito útil na mecânica quântica. A notação define o vetor *ket*, denotado por $|\psi\rangle$ e $\langle\phi|$ sendo seu conjugado transposto (também chamado de conjugado hermitiano: o *bra*). O braket é então definido por $\langle\phi|\psi\rangle$.

Os espaços de Hilbert é a base matemática que fundamenta a teoria quântica. Nos espaços vetoriais complexos de dimensão finita que surgem na computação quântica e nas informações quânticas, um espaço de Hilbert é exatamente a mesma coisa que um espaço de produto interno (NIELSEN; CHUANG, 2001). Em dimensões infinitas, os espaços Hilbert satisfazem restrições técnicas adicionais além dos espaços internos do produto, com os quais não precisamos nos preocupar uma vez que o foco dessa tese está na teoria quântica finitária.

4.2.1 Qubit

Em computação quântica, usamos vetores de estado para descrever o estado do nosso sistema. Um qubit é unidade básica de informação na computação quântica. Assim como um bit clássico tem um estado - 0 ou 1 - um qubit também tem um estado. Dois estados possíveis para um qubit são os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, que como você pode imaginar correspondem aos estados 0 e 1 para um bit clássico (NIELSEN; CHUANG, 2001). A diferença entre bits e qubits é que um qubit pode estar em um estado diferente de $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Isto significa que também é

possível formar combinações lineares de estados, **superposições**:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

onde α e β são números complexos e $|\psi\rangle$ tem norma 1.

Assim, diferentemente de um bit em um computador comum, um qubit pode existir no estado $|0\rangle$ ou no estado $|1\rangle$, mas também pode existir no estado de superposição. Os dois estados formam uma base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ e qualquer outro estado do qubit pode ser escrito como uma superposição $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ para α e β tais que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ (normalizados).

Em teoria quântica, um objeto usando a notação “ $|_ \rangle$ ” pode ser chamado de estado, vetor ou ket da notação de Dirac.

Em suma, qubits são apenas *kets* ou vetores de estado em um espaço vetorial bidimensional (MCMAHON, 2007).

Uma vez que podemos escrever elementos de um espaço vetorial como um vetor de coluna n -dimensional, é possível usar essa notação para descrever os qubits. Escrevemos isso em um formato vetorial de coluna:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Quando um conjunto de vetores é linearmente independente e eles abrangem o espaço, o conjunto é conhecido como *base*. Em termos de base, os estados quânticos em n dimensões são generalizações diretas de qubits. Um estado quântico $|\psi\rangle$ pode ser escrito como uma combinação linear de um conjunto da base $|v_i\rangle$ com coeficientes complexos c_i como

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |v_i\rangle = c_1 |v_1\rangle + c_2 |v_2\rangle + \dots + c_n |v_n\rangle.$$

O módulo ao quadrado de um dado coeficiente c_i dá a probabilidade de que a medição encontra o sistema no estado $|v_i\rangle$.

Para calcular o produto interno entre dois vetores, devemos calcular o **conjugado hermitiano** de um vetor $(|u\rangle)^\dagger = \langle u|$, também conhecido como *bra* na notação de Dirac. Se um *ket* é um vetor coluna, o vetor dual ou *bra* é um vetor linha cujos elementos são os conjugados complexos dos elementos do vetor coluna.

Desse modo, escrevemos o **produto interno** entre dois vetores $|u\rangle$ e $|v\rangle$ com a notação $\langle u|v\rangle$ e é calculado da seguinte maneira:

$$\langle u|v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i^* v_i,$$

onde u_i^* corresponde as entradas (conjugadas complexas) do *bra* $\langle u|$.

Dizemos que $|u\rangle$ e $|v\rangle$ são ortogonais se $\langle u|v\rangle = 0$. Podemos usar o produto interno para definir uma **norma** (ou comprimento) - calculando o interno produto de um vetor consigo mesmo $\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle}$. Quando a norma de um vetor é a unidade, dizemos que o vetor é **normalizado**, ou seja, se $\langle u|u\rangle = 1$. Se cada elemento de um conjunto de vetores for normalizado e os elementos forem ortogonais em relação um ao outro, dizemos que o conjunto é **ortonormal**.

Uma base ortonormal definida para qubits também a partir de vetores normalizados são $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4.2.1.1 Esfera de Bloch

Lembre que o vetor de estados em computação quântica é o vetor $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ onde α e β são números complexos. A partir da representação em coordenadas polares para números complexos, temos que: $\alpha = |\alpha|e^{\gamma i}$ e $\beta = |\beta|e^{(\gamma+\varphi)i}$ tomando $|\alpha| = \cos(\frac{\theta}{2})$ e $|\beta| = \sin(\frac{\theta}{2})$. Segue que:

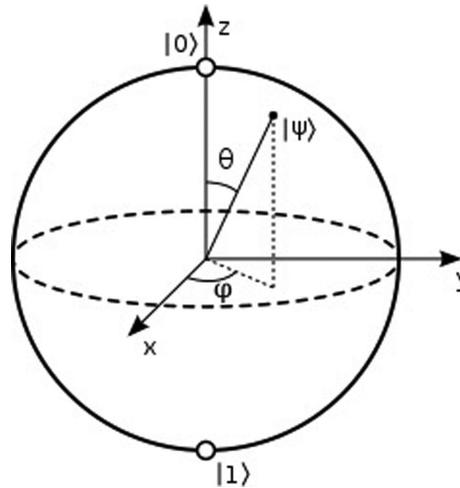
$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\gamma i}|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{(\gamma+\varphi)i}|1\rangle = e^{\gamma i}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{\varphi i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\right).$$

Os qubits não possuem representação única, o vetor $e^{\gamma i}|a\rangle$ representa o mesmo estado que o vetor $|a\rangle$ por isso a fase global $e^{\gamma i}$ pode ser descartada. Fazendo uma mudança de base, uma vez que não possui informações que ajudem na localização do estado na esfera de Bloch. Portanto,

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{\varphi i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle.$$

Os ângulos θ e φ representam as coordenadas esféricas do ponto sobre a esfera onde está o estado $|\psi\rangle$.

Figura 1 – Esfera de Bloch



Fonte: página do Wikipedia: Bloch sphere¹

4.2.2 Operadores

Definição 4.33. Um **operador** P é uma função que transforma um *ket* $|\psi\rangle$ em um determinado *ket* $|\phi\rangle$:

$$P|\psi\rangle = |\phi\rangle.$$

Operadores também podem agir em *bras*.

Definição 4.34. Dados números complexos α, β e estados $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$, dizemos que um operador P é **linear** se:

$$P(\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle) = \alpha(P|\psi_1\rangle) + \beta(P|\psi_2\rangle).$$

Definição 4.35. Seja P um operador, seu operador **conjugado Hermitiano** é o operador P^\dagger tal que para quaisquer estados $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ temos:

$$\langle\psi|P^\dagger|\phi\rangle = \langle\phi|P|\psi\rangle^*.$$

Definição 4.36. Um operador P é **Hermitiano** se $P = P^\dagger$.

Definição 4.37. Dizemos que um operador U é **unitário** se $U^\dagger U = U U^\dagger = I$, onde I é o operador identidade. Além disso, um operador P é **normal** se $P^\dagger P = P P^\dagger$.

Dada a representação matricial de um operador, o **traço** desse operador é a soma dos elementos da diagonal principal.

Na teoria quântica, variáveis dinâmicas como posição, momento, momento angular e energia são chamadas de observáveis. Isso ocorre porque os observáveis são coisas que medimos

para caracterizar o estado quântico de uma partícula. Acontece que um postulado importante da teoria quântica é que existe um operador que corresponde para cada observável físico.

Definição 4.38. Toda quantidade física mensurável é descrita por um operador P ; esse operador é chamado de **observável**.

4.2.2.1 O princípio de incerteza de Heisenberg

Definição 4.39. A **esperança** ou **valor médio** de um operador P com respeito a um estado quântico $|\psi\rangle$ é definido por $\langle P \rangle = \langle \psi | P | \psi \rangle$.

É possível calcular os momentos de operador mais elevados como o valor médio de P^2 , que é dado por $\langle P^2 \rangle = \langle \psi | P^2 | \psi \rangle$.

A **incerteza** ΔP , que é uma medida estatística da propagação das medições sobre a média, é dado por

$$\Delta P = \sqrt{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2}.$$

Então, para dois operadores P e Q , pode-se mostrar que o produto de suas incertezas satisfaz:

$$\Delta P \Delta Q \geq \frac{1}{2} |\langle [P, Q] \rangle|$$

onde $[P, Q]$ é o **comutador** dos dois operadores P e Q definido por $[P, Q] = PQ - QP$ (MCMAHON, 2007).

Esta é uma generalização do famoso princípio da incerteza de Heisenberg. Isso nos diz que há um limite para a precisão com a qual podemos saber os valores de dois observáveis incompatíveis simultaneamente (MCMAHON, 2007).

4.2.3 Produto Tensorial

Para tratar do problema de várias partículas na computação quântica é necessário construir um espaço de Hilbert H que é um composto dos espaços de Hilbert independentes que estão associados a cada partícula individual. Para modelar fenômenos quânticos com várias partículas precisaremos dos conceitos de **produto tensorial** ou **produto Kronecker**. Ou seja, o produto tensorial é uma maneira de colocar espaços vetoriais juntos para formar espaços vetoriais maiores, essa construção é essencial para o entendimento da mecânica quântica de sistemas multipartículas.

Definição 4.40. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão m e n respectivamente. Então o produto tensorial $V \otimes W$ é um espaço vetorial dimensional mn . Os elementos de $V \otimes W$ são combinações lineares de 'produtos tensores' $|v\rangle \otimes |w\rangle$ de elementos $|v\rangle$ de V e $|w\rangle$ de W .

A definição de produto tensorial pode se tornar muito mais concreto movendo-se para uma representação de matriz conveniente conhecida como **produto Kronecker**. Suponha que A seja uma matriz m por n e B seja uma matriz p por q . Então temos a representação da matriz nq por mp :

$$(A \otimes B) := \begin{pmatrix} (A_{11}B) & (A_{12}B) & \dots & (A_{1n}B) \\ (A_{21}B) & (A_{22}B) & \dots & (A_{2n}B) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_{m1}B) & (A_{m2}B) & \dots & (A_{mn}B) \end{pmatrix}$$

Nesta representação, os termos como $A_{11}B$ denotam submatrizes p por q cujas entradas são proporcionais a B , com constante de proporcionalidade geral A_{11} .

4.2.4 Emaranhamento

Um dos aspectos existente na mecânica quântica é o fato de que partículas ou sistemas podem ficar *emaranhados* (MCMAHON, 2007). O **emaranhamento** quântico ocorre quando grupos de partículas interagem de forma que o estado quântico de cada uma não pode ser descrito independentemente, e ao invés disso, um estado quântico deve ser dado para o sistema como um todo (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935). As propriedades de sistemas emaranhados podem se tornar correlacionados mesmo quando os sistemas estão espacialmente separados (BENNETT et al., 1993).

Associados ao conceito de sistemas emaranhados, temos o **sistema bipartido** que é quando um sistema consiste em dois subsistemas (MCMAHON, 2007, cap.4).

Um exemplo de base muito usada para um sistema bipartido é a **base de Bell** (NIELSEN; CHUANG, 2002), cujos membros dessa base são chamados de **estados de Bell**, são quatro estados que representam exemplos de emaranhamento:

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}.$$

4.3 TEORIA FUZZY - CONJUNTOS E RELAÇÕES FUZZY

Nessa seção apresentamos alguns conceitos preliminares relacionados à Teoria Fuzzy que estão fortemente ligados à pesquisa e aos resultados obtidos no capítulo 8.

4.3.1 Reticulados (*Lattices*)

Considere (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado - *poset* (do inglês *partially ordered set*), *i.e.*, um conjunto P parcialmente ordenado por \leq . Dados os elementos $a, b \in P$, a menor cota superior do conjunto $\{a, b\}$ em P , é chamado o **supremo** (ou *join*) de a e b , denotado por $\sup\{a, b\}$. Similarmente, a maior cota inferior do conjunto $\{a, b\}$ é chamado de **ínfimo** (ou *meet*) de a e b , denotado por $\inf\{a, b\}$. Observe que, para um poset arbitrário P , tanto o supremo como o ínfimo podem não existir e quando eles existem são únicos.

Definição 4.41. Um **reticulado** (*lattice*) L é um poset tal que para todo $a, b \in L$ existe o supremo (*join*) $a \vee b$ e o ínfimo (*meet*) $a \wedge b$.

Sendo L um reticulado e dada a unicidade do supremo e do ínfimo de um conjunto $\{a, b\}$, pode-se definir as seguintes operações:

$$\begin{aligned} \vee : L \times L &\longrightarrow L \\ (a, b) &\longmapsto a \vee b = \sup\{a, b\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \wedge : L \times L &\longrightarrow L \\ (a, b) &\longmapsto a \wedge b = \inf\{a, b\} \end{aligned}$$

Se P é um conjunto ordenado e $S \subseteq P$, denotaremos:

$$\sup S \text{ ou } \bigvee_{s \in S} s \quad \text{e} \quad \inf S \text{ ou } \bigwedge_{s \in S} s.$$

Para nossos propósitos, a classe mais importante de reticulados é a seguinte:

Definição 4.42. Seja L um reticulado e $a, b \in L$. Um **pseudo-complemento relativo** $a \rightarrow b$ de a em b é o elemento máximo do conjunto

$$T(a, b) = \{c \in L; c \wedge a \leq b\}.$$

Note que

$$c \wedge a \leq b \Leftrightarrow c \leq a \rightarrow b.$$

Se cada par de elementos de L tem um pseudo-complemento relativo dizemos que L é um **reticulado Brouwerian**. Além disso, um **reticulado completo** é um reticulado em que qualquer subconjunto A tem supremo e ínfimo.

Exemplo 4.43. (DIAS; JÚNIOR, 2013) O conjunto \mathbb{N} dos números naturais, parcialmente ordenado pela divisibilidade, é um reticulado. Nesse caso, o supremo e o ínfimo de dois elementos são, respectivamente, o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum entre eles.

Exemplo 4.44. (DIAS; JÚNIOR, 2013) Toda cadeia é um reticulado, pois quaisquer dois de seus elementos são comparáveis. Logo, o supremo de um par $\{a, b\}$ será o maior entre a e b , e o ínfimo será o menor entre eles.

Exemplo 4.45. (DIAS; JÚNIOR, 2013) O conjunto das partes de um conjunto E , parcialmente ordenado pela relação de inclusão, é um reticulado. Observe que o supremo e o ínfimo de dois subconjuntos de E são, respectivamente, sua união e sua interseção.

4.3.2 Conjuntos *crisp* vs conjuntos *fuzzy*

Definição 4.46. Seja L um reticulado arbitrário. Um conjunto *L-fuzzy* é um par (X, α) onde X é um conjunto e α é uma função $\alpha : X \rightarrow L$. O valor de $\alpha(x) \in L$ chama-se *grau de pertinência* ou *membresia* de x . Um conjunto *L-fuzzy* é chamado conjunto *crisp* (ou conjunto clássico) se $L = \{0, 1\}$. Quando L é o intervalo unitário $[0, 1]$, (X, α) é chamado *conjunto fuzzy*.

No caso de conjuntos usuais, eles têm apenas dois graus de pertinência: “pertence a” (valor 1) ou “não pertence a” (valor 0).

4.3.3 Relações *crisp* vs relações *fuzzy*

Nesta subseção, apresentamos a definição de relações *crisp* e *fuzzy* (LEE, 2006) e algumas de suas propriedades (KAWAHARA; FURUSAWA, 1999; HUSSAIN, 2010).

Definição 4.47. Sejam os conjuntos X e Y . Dado um reticulado arbitrário L , uma **relação L-fuzzy** R de X para Y , $R : X \rightarrow Y$, é uma função $R : X \times Y \rightarrow L$.

Para $(x, y) \in X \times Y$ o valor $R(x, y) \in L$ significa o grau em que x e y estão relacionados em R .

Uma relação L -fuzzy R está contida em uma relação L -fuzzy S , $R \subseteq S$, se $R(x, y) \leq S(x, y)$, para todo $(x, y) \in X \times Y$.

As relações L -fuzzy mais conhecidas são as seguintes:

- Relações **Crisp**: $R : A \times B \rightarrow \mathbb{B}$, onde $\mathbb{B} = \{0, 1\}$;
- Relações **Fuzzy**: $R : A \times B \rightarrow [0, 1]$;

No caso em que $\mathbb{L} = (L, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top)$ é um reticulado brouweriano completo com menor elemento \perp e maior elemento \top . Vamos lembrar brevemente alguns fundamentos sobre relações \mathbb{L} -fuzzy (WINTER, 2007). A relação zero $0_{X,Y}$ e a relação universal $1_{X,Y}$ são relações \mathbb{L} -fuzzy com $0_{X,Y}(u, v) = \perp$ e $1_{X,Y}(u, v) = \top$ para todo $(u, v) \in X \times Y$ e significando, respectivamente, que u e v não se relacionam e u e v se relacionam com grau máximo de certeza.

Para uma família $\{R_i\}_i$ de relações \mathbb{L} -fuzzy, temos:

$$\left(\bigcup_i R_i\right)(x, y) = \bigvee_i R_i(x, y)$$

e

$$\left(\bigcap_i R_i\right)(x, y) = \bigwedge_i R_i(x, y).$$

Para um caso particular, as relações $R_1, R_2 : A \rightarrow B$ o *meet* e *join* das mesmas são definidos por:

$$(R_1 \wedge R_2)(a, b) = R_1(a, b) \wedge R_2(a, b)$$

e

$$(R_1 \vee R_2)(a, b) = R_1(a, b) \vee R_2(a, b).$$

4.3.4 Condições no Reticulado

Um dos nossos principais interesses é obter uma estrutura monoidal nas categorias \mathbb{L} -fuzzy (que abordaremos mais adiante no capítulo 8) para modelar aspectos de diferentes áreas. Precisamos impor algumas condições e operações no reticulado considerado como uma categoria como no Exemplo 4.3. Essas condições, apresentadas na seguinte definição, determina quando uma categoria construída em um reticulado com estrutura monoidal tem uma estrutura monoidal (STOUT, 2010).

Definição 4.48. (STOUT, 2010) Seja $\mathbb{L} = (L, \leq, \vee, \wedge, \perp, \top)$ um reticulado *Brouwerian* completo onde \perp é o elemento inferior (*bottom*) e \top é o elemento superior (*top*). Uma estrutura monoidal (\star, u) em \mathbb{L} é composto por um bifuntor $\star : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ e uma unidade $u \in \mathbb{L}$ satisfazendo:

1. Bifuntorialidade: se $x \leq y$ e $z \leq t$ então $x \star z \leq y \star t$.
2. Associatividade: $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$;
3. Comutatividade: $x \star y = y \star x$;
4. Idempotência: $x \star x = x$;
5. Unidade: $x \star u = x = u \star x$;
6. Distributividade: *distributividade a esquerda* $x \star (\bigvee_{\lambda} y_{\lambda}) = \bigvee_{\lambda} (x \star y_{\lambda})$ and *distributividade a direita* $(\bigvee_{\lambda} y_{\lambda}) \star x = \bigvee_{\lambda} (y_{\lambda} \star x)$.
7. Adjunto (ou estrutura fechada): $x \searrow y = \bigvee \{z \mid x \star z \leq y\}$ (adjunto a esquerda) e $y \swarrow x = \bigvee \{z \mid z \star x \leq y\}$ (adjunto a direita);
8. $x \star _$, sendo um adjunto a esquerda, preserva o *bottom*, i.e. $x \star \perp = \perp$, e $_ \star x$, sendo um adjunto a direita, preserva o *bottom*, i.e. $\perp \star x = \perp$;

A estrutura monoidal simétrica em \mathbb{L} é dado pela bifuntorialidade de um \star com associatividade, comutatividade e unidade da Definição 4.48.

Observação 4.49. A estrutura e as condições da definição 4.48 podem ser entendidas no ambiente da teoria dos conjuntos *fuzzy*. O bifuntor corresponde a uma função isotônica com a generalização da noção de t-norma para reticulados (BEDREGAL, 2010), associada as noções de t-norma idempotente e a definição de *R*-implicação (BEDREGAL et al., 2007).

Exemplo 4.50. Quando $\star = \wedge$, a unidade é $u = \top$.

Denotaremos $\mathbb{L} = (L, \leq, \vee, \wedge, \perp, \top, \star, u)$ sendo um reticulado brouweriano completo com estrutura monoidal (\star, u) da Definição 4.48.

5 MECÂNICA QUÂNTICA CATEGÓRICA

Neste capítulo vamos abordar alguns tópicos específicos da teoria das categorias na perspectiva da mecânica quântica categórica dos trabalhos de Coecke (COECKE, 2011). Mais adiante utilizaremos essa abordagem para a verificação das categorias relacionais como modelos para computação quântica. As definições utilizadas são baseadas em (COECKE, 2006).

A mecânica quântica categórica é o estudo no qual os aspectos dos fundamentos quânticos e informações quânticas baseados nos espaços de Hilbert são abstraídos ao nível de categorias monoidais (HEUNEN; VICARY, 2017). Os objetos representam sistemas físicos, os morfismos representam a evolução do estado de um sistema, enquanto os tensores descrevem sistemas compostos. Podemos dizer que a teoria das categorias é uma ferramenta para descrever processos físicos de forma abstrata.

5.1 CATEGORIAS MONOIDAIS

A noção de uma categoria monoidal é a categorização da noção de um monoide, onde temos o conceito de um objeto monoidal e uma ação associada nos objetos. A estrutura básica das categorias monoidais é usada para definir modelos em diferentes áreas e formam a base matemática para a mecânica quântica categórica.

Definição 5.1. Uma **categoria monoidal** é uma categoria \mathbf{C} equipada com um bifuntor $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, um objeto unidade \mathbf{I} , tal que para todos os objetos A, B e morfismos f, g, h, k , do tipo apropriado, temos:

$$(g \circ f) \otimes (k \circ h) = (g \otimes k) \circ (f \otimes h) \quad \text{e} \quad Id_A \otimes Id_B = Id_{A \otimes B}$$

e três isomorfismos naturais:

1. Associatividade: $\alpha_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow{\sim} (A \otimes B) \otimes C$;
2. Unidade esquerda: $\lambda_A : \mathbf{I} \otimes A \xrightarrow{\sim} A$;
3. Unidade direita: $\rho_A : A \otimes \mathbf{I} \xrightarrow{\sim} A$.

Esses três isomorfismos naturais sujeitos a certas condições de coerência:

- Para todo $A, B, C, D \in \mathbf{C}$, o diagrama pentágono (Mac Lane) (MACLANE, 1998) comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \\
 \alpha \nearrow & & \searrow \alpha \\
 A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) & & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\
 \downarrow Id_A \otimes \alpha & & \uparrow \alpha \otimes Id_D \\
 A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D
 \end{array}$$

- Para todo $A, B \in \mathbf{C}$, o seguinte diagrama triângulo comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes B & \xrightarrow{Id_A \otimes \lambda_B} & A \otimes (\mathbf{1} \otimes B) \\
 \searrow \rho_A \otimes Id_B & & \downarrow \alpha_{A, \mathbf{1}, B} \\
 & & (A \otimes \mathbf{1}) \otimes B
 \end{array}$$

- Além disso, temos que $\lambda_{\mathbf{1}} = \rho_{\mathbf{1}}$.

Exemplo 5.2. **Set**, a categoria de conjuntos e funções. O tensor é dado pelo produto cartesiano, o objeto unidade é o conjunto unitário $\{*\}$. A associatividade é a função $\alpha_{A,B,C}((a,b),c) = (a,(b,c))$ em todos os elementos $a \in A, b \in B, c \in C$. As unidades esquerda e direita são as funções $\lambda_A(*,a) = a$ e $\rho_A(a,*) = a$ para todo $a \in A$.

Exemplo 5.3. **Rel**, a categoria de conjuntos e relações, esta é uma categoria monoidal exatamente da mesma maneira que **Set** também é.

Exemplo 5.4. **FdHilb**, a categoria de espaços de Hilbert de dimensão finita e mapas lineares é monoidal. O produto tensorial é o produto tensorial comum dos espaços de Hilbert, o objeto unidade é o espaço de Hilbert unidimensional \mathbb{C} .

5.2 SIMETRIA

Se interpretarmos o produto tensorial como separação espacial de sistemas, é razoável argumentar que $A \otimes B$ é mais ou menos igual a $B \otimes A$. Isso se torna preciso pela seguinte definição.

Definição 5.5. Uma categoria monoidal é **simétrica** se houver um quarto isomorfismo natural

$$\sigma = \{A \otimes B \xrightarrow{\sigma_{A,B}} B \otimes A \mid A, B \in \mathbf{C}\},$$

tal que para todo A, B, C, D e f, g do tipo apropriado, os seguinte diagramas comutam:

- Condição de naturalidade:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes B & \xrightarrow{\sigma_{A,B}} & B \otimes A \\
 f \otimes g \downarrow & & \downarrow g \otimes f \\
 C \otimes D & \xrightarrow{\sigma_{C,D}} & D \otimes C
 \end{array}$$

- Condição do isomorfismo de simetria

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes B & \xrightarrow{\sigma_{A,B}} & B \otimes A \\
 \searrow Id_{A \otimes B} & & \downarrow \sigma_{B,A} \\
 & & A \otimes B
 \end{array}$$

- Condições de coerência

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes \mathbf{1} & \xrightarrow{\sigma_{A,\mathbf{1}}} & \mathbf{1} \otimes A \\
 \searrow \rho_A & & \downarrow \lambda_A \\
 & & A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\sigma_{(A \otimes B),C}} & C \otimes (A \otimes B) \\
 \downarrow 1_A \otimes \sigma_{B,C} & & & & \downarrow \alpha \\
 A \otimes (C \otimes B) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes C) \otimes B & \xrightarrow{\sigma_{A,C} \otimes 1_B} & (C \otimes A) \otimes B
 \end{array}$$

A estrutura básica de uma categoria monoidal simétrica permite que sistemas compostos sejam descritos de uma forma sensível aos recursos (os teoremas de "não clonagem" e "não exclusão" da mecânica quântica) (NIELSEN; CHUANG, 2002).

5.3 DAGGER

As categorias monoidais simétricas não capturam um análogo do produto interno dos espaços de Hilbert. Esta é uma propriedade definidora dos espaços de Hilbert, que é usada para formular a regra de Born. A regra de Born nos permite determinar a distribuição de probabilidade nos resultados possíveis de uma medição (LANDSMAN, 2009). O produto interno corresponde à noção de adjuntos, que pode ser generalizada por um functor *dagger*. Ou seja, temos a noção que generaliza o operador adjunto entre os espaços de Hilbert, em que obtemos a estrutura das categorias monoidais *dagger*, definida a seguir.

Definição 5.6. Uma categoria monoidal **dagger** é uma categoria monoidal \mathbf{C} equipada com um functor contravariante involutivo

$$\dagger : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{C},$$

que é a identidade em objetos, satisfazendo a equação:

$$(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger.$$

Mais precisamente, isto significa que ele associa a cada morfismo $f : A \rightarrow B$ em \mathbf{C} seu adjunto $f^\dagger : B \rightarrow A$ tal que para todos $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, temos:

- $id_A = id_A^\dagger : A \rightarrow A$;
- $(g \circ f)^\dagger = f^\dagger \circ g^\dagger$;
- $(f^\dagger)^\dagger = f : A \rightarrow B$.

Em uma categoria *dagger* \mathbf{C} , um morfismo f é chamado

- Unitário : $f^\dagger = f^{-1}$;
- Auto-Adjunto: $f = f^\dagger$ (isto só é possível para um endomorfismo $f : A \rightarrow A$).

Definição 5.7. Uma **categoria monoidal simétrica dagger** (\dagger -SMC, do inglês *dagger symmetric monoidal category*) é uma categoria monoidal simétrica \mathbf{C} , que também tem uma estrutura dagger tal que para todos $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ temos:

1. $(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger : B \otimes D \rightarrow A \otimes C$;
2. $\alpha_{A,B,C}^\dagger = \alpha_{A,B,C}^{-1} : (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$;
3. $\rho_A^\dagger = \rho_A^{-1} : A \rightarrow A \otimes I$;
4. $\lambda_A^\dagger = \lambda_A^{-1} : A \rightarrow I \otimes A$;
5. $\sigma_{A,B}^\dagger = \sigma_{A,B}^{-1} : B \otimes A \rightarrow A \otimes B$.

α, ρ, λ e σ são os isomorfismos naturais que formam a estrutura monoidal simétrica.

Exemplo 5.8. A categoria **FdHilb** de espaços de Hilbert de dimensão finita e mapas lineares tem uma estrutura *dagger*. Dado um mapa linear $f : A \rightarrow B$, o mapeamento $f^\dagger : B \rightarrow A$ é seu adjunto Hermitiano no sentido usual. Assim, **FdHilb** é uma categoria monoidal simétrica dagger.

5.4 COMPACIDADE

Na Teoria das Categorias, *categorias compactas fechadas* são um contexto geral para o tratamento de objetos duais. A ideia de um objeto dual generaliza o conceito mais familiar de um espaço vetorial dual de dimensão finita.

Na teoria quântica, existem diferentes níveis de emaranhamento com um limite superior, que chamamos de estado de emaranhamento máximo (GUO, 2019). Isso é formalizado em termos de objetos duais.

A estrutura compacta fechada permite que as preparações e medições dos estados emaranhados sejam descritos e que suas principais propriedades sejam provadas (ABRAMSKY; COECKE, 2009).

Definição 5.9. Uma **categoria compacta fechada** \mathbf{C} é uma categoria monoidal simétrica tal que para todo $A \in \mathbf{C}$ existe A^* , o dual de A , com um par de morfismos

$$\mathbf{I} \xrightarrow{\eta_A} A^* \otimes A \quad \text{e} \quad A \otimes A^* \xrightarrow{\epsilon_A} \mathbf{I},$$

chamados, respectivamente, unidade e co-unidade, de modo que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho_A} & A \otimes \mathbf{I} \xrightarrow{Id_A \otimes \eta_A} A \otimes (A^* \otimes A) \\ Id_A \downarrow & & \downarrow \alpha_{A, A^*, A} \\ A & \xleftarrow{\lambda_A^{-1}} & \mathbf{I} \otimes A \xleftarrow{\epsilon_A \otimes Id_A} (A \otimes A^*) \otimes A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A^* & \xrightarrow{\lambda_{A^*}} & \mathbf{I} \otimes A^* \xrightarrow{\eta_A \otimes Id_{A^*}} (A^* \otimes A) \otimes A^* \\ Id_{A^*} \downarrow & & \downarrow \alpha_{A^*, A, A^*}^{-1} \\ A^* & \xleftarrow{\rho_{A^*}^{-1}} & A^* \otimes \mathbf{I} \xleftarrow{Id_{A^*} \otimes \epsilon_A} A^* \otimes (A \otimes A^*) \end{array}$$

As categorias compactas *dagger* podem ser usadas para expressar e verificar alguns protocolos de informação quântica fundamentais, como por exemplo: teletransporte, teletransporte de portão lógico e teletransporte quântico. Além dos conceitos padrões como unitariedade, produto interno, traço, estados de Bell e muitas outras noções são capturadas pela linguagem das categorias compactas *dagger* (ABRAMSKY; COECKE, 2004).

Definição 5.10. Uma **categoria compacta dagger** \mathbf{C} é tanto uma categoria compacta quanto uma categoria monoidal simétrica *dagger*, de tal modo que para todo $A \in \mathbf{C}$,

$$\eta_A = \sigma_{A,A^*} \circ \epsilon_A^\dagger \quad (\epsilon_A = \eta_A^\dagger \circ \sigma_{A,A^*}).$$

Exemplo 5.11. A categoria \mathbf{FdHilb} é uma categoria fechada compacta *dagger*. O dual de um espaço H é o espaço de Hilbert H^* , de funções lineares contínuas de H para \mathbb{C} . Seja $\{x_i\}$ uma base ortonormal de um espaço de Hilbert H . O morfismo $\eta_H : \mathbb{C} \rightarrow H^* \otimes H$ é o único mapa linear tal que $\eta_H(1) = x_i^* \otimes x_i$, onde $\{x_i\}$ é a coleção de estados que corresponde à base ortonormal de H . Além disso, $\epsilon_H : H \otimes H^* \rightarrow \mathbb{C}$ é definido como $\epsilon_H(x_i, x_j^*) = \langle x_i | x_j \rangle$ na base $\{(x_i, x_j^*)\}$ de $H \otimes H^*$.

5.5 PROPRIEDADES DAS CATEGORIAS COMPACTAS DAGGER

A mecânica quântica categórica usa categorias compactas *dagger* como uma estrutura base em relação às noções da mecânica quântica, como os estados, observáveis quânticos e complementaridade dos mesmos, podem ser definidas abstratamente, dentro dessa estrutura categórica.

P. Selinger mostra que as categorias compactas *dagger* são completas em relação aos espaços de Hilbert de dimensão finita (SELINGER, 2012), ou seja, que vários teoremas e propriedades dos espaços de Hilbert podem ser generalizadas neste modelo (HASEGAWA; HOFMANN; PLOTKIN, 2008). Isso forma a base para uma abordagem de alto nível para o processamento de informações quânticas.

5.5.1 Escalares e Estado

Definição 5.12. Em uma categoria monoidal \mathbf{C} , os **escalares** são os morfismos $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}$.

Exemplo 5.13. Em \mathbf{Hilb} , os escalares $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ correspondem a números complexos $f(1) \in \mathbb{C}$. Composição de escalares $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ corresponde à multiplicação de números complexos, como $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = f(1) \cdot g(1)$. Ou seja, os escalares em \mathbf{Hilb} são os números complexos sob multiplicação.

Exemplo 5.14. Em \mathbf{Set} , os escalares são funções $f : \{*\} \rightarrow \{*\}$. Existe apenas uma única função, a identidade $Id_{\{*\}} : * \rightarrow *$. Portanto, os escalares em \mathbf{Set} formam o monoide de um elemento trivial.

Os escalares são comutativos em qualquer categoria monoidal (lema 2.3 em (HEUNEN; VICARY, 2017)). Seja $k : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}$ um escalar e $f : A \rightarrow B$ um morfismo, multiplicação escalar $k \bullet f$ é dado pelo morfismo que faz o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{k \bullet f} & B \\
 \lambda_A^{-1} \downarrow & & \downarrow \lambda_B \\
 \mathbf{I} \otimes A & \xrightarrow{k \otimes f} & \mathbf{I} \otimes B
 \end{array}$$

Essa multiplicação escalar abstrata satisfaz muitas propriedades com as quais estamos familiarizados na multiplicação escalar de espaços vetoriais, mais detalhes ver seção 2.1 de (HEUNEN; VICARY, 2017).

Definição 5.15. Em uma categoria monoidal, um **estado** de um objeto A é um morfismo $\mathbf{I} \rightarrow A$.

Exemplo 5.16. Em \mathbf{Hilb} , os estados de um espaço de Hilbert H são funções lineares $f : \mathbb{C} \rightarrow H$, que correspondem aos elementos de H considerando a imagem de $1 \in \mathbb{C}$;

Exemplo 5.17. Em \mathbf{Rel} , estados de um conjunto A são relações $R : \{\bullet\} \rightarrow A$, que correspondem aos subconjuntos de A considerando todos os elementos relacionados a $\{\bullet\}$.

Definição 5.18. Uma categoria monoidal está *bem definida* (**well-pointed**), se para todos os pares paralelos de morfismos $f, g : A \rightarrow B$, temos $f = g$ quando $f \circ a = g \circ a$ para todos os estados $a : \mathbf{I} \rightarrow A$.

A ideia é que, em uma categoria bem definida, podemos dizer se os morfismos são iguais ou não apenas vendo como eles afetam os estados de seus domínios.

Definição 5.19. Em uma categoria monoidal, um **co-estado** para um objeto A é um morfismo $A \rightarrow \mathbf{I}$.

5.5.2 Produto interno

Um dos operadores centrais de um espaço de Hilbert é o produto interno. Veremos como os produtos internos podem ser descritos abstratamente usando o funtor involutivo contravariante *dagger*.

Definição 5.20. O **produto interno abstrato** em uma categoria monoidal *dagger* \mathbf{C} é uma operação $\langle _ | _ \rangle$ que atribui um escalar a um par de estados (ϕ, ψ) de um objeto. Em detalhes, sejam $\phi, \psi : \mathbf{I} \rightarrow A$ em \mathbf{C} . O produto interno é o escalar:

$$\langle \phi | \psi \rangle =: \phi^\dagger \circ \psi : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}$$

Esta operação é dada por $\langle \phi | \psi \rangle = \phi^\dagger \circ \psi$.

5.5.3 Medição

A regra fundamental de Born da Mecânica Quântica associa medidas a probabilidades.

Se $a : \mathbf{I} \rightarrow A$ é um estado e $x : A \rightarrow \mathbf{I}$ é um co-estado, interpretamos o escalar $x \circ a : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}$ como a amplitude do resultado de medição x^\dagger imediatamente após preparar o estado a ; na notação bra-ket, seria $\langle x^\dagger | a \rangle$. A *probabilidade* de que essa história tenha ocorrido é o quadrado de seu valor absoluto, que é $|\langle x^\dagger | a \rangle|^2 = \langle a | x^\dagger \rangle \cdot \langle x^\dagger | a \rangle = \langle a | x^\dagger \rangle \circ x(a)$ na notação bra-ket. Isso faz sentido para escalares em qualquer categoria monoidal *dagger*.

Definição 5.21. (Probabilidade) Se $a : \mathbf{I} \rightarrow A$ é um estado, a $x : A \rightarrow \mathbf{I}$ um co-estado, em uma categoria monoidal *dagger*, definimos:

$$Prob(x, a) = a^\dagger \circ x^\dagger \circ x \circ a : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}.$$

Exemplo 5.22. Em \mathbf{Hilb} , as probabilidades são números reais não negativos $|\langle x^\dagger | a \rangle|^2$.

5.5.4 Notação de Dirac Estendida

A forte estrutura das categorias compacta *dagger* traz as noções centrais de adjunto, produto interno e unitariedade, permitindo uma involução, como a conjugação complexa, e dá origem a uma generalização bidimensional do cálculo do *bra-ket* de Dirac (DIRAC, 1981).

Um *ket* é simplesmente uma seta $\psi : \mathbf{I} \rightarrow A$ que podemos escrever como $|\psi\rangle$. Pensamos em *kets* como estados, de um determinado tipo de sistema A . O *bra* correspondente será $\psi^\dagger : A \rightarrow \mathbf{I}$ que podemos pensar como um co-estado.

Por definição, temos que:

$$\begin{aligned}
 \langle f^\dagger \circ \psi | \phi \rangle &= (f^\dagger \circ \psi)^\dagger \circ \phi \\
 &= (\psi^\dagger \circ f) \circ \phi \\
 &= \psi^\dagger \circ (f \circ \phi) \\
 &= \langle \psi | f \circ \phi \rangle.
 \end{aligned}$$

Observe que morfismos unitários, $U^\dagger = U^{-1}$, preservam o produto interno:

$$\begin{aligned}
 \langle U \circ \psi | U \circ \phi \rangle &= \langle U^\dagger \circ (U \circ \psi) | \phi \rangle \\
 &= \langle (U^\dagger \circ U) \circ \psi | \phi \rangle \\
 &= \langle \psi | \phi \rangle.
 \end{aligned}$$

Resumindo, temos:

Dirac	matriz	†-SMC
$ \psi\rangle$	$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$	$\mathbf{I} \xrightarrow{\psi} A$
$\langle\phi $	$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 & \dots & \bar{\phi}_n \end{pmatrix}$	$A \xrightarrow{\phi} \mathbf{I}$
$\langle\phi \psi\rangle$	$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 & \dots & \bar{\phi}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$	$\mathbf{I} \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\phi^\dagger} \mathbf{I}$
$ \psi\rangle\langle\phi $	$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 & \dots & \bar{\phi}_n \end{pmatrix}$	$A \xrightarrow{\phi^\dagger} \mathbf{I} \xrightarrow{\psi} A$

Em particular, note que na linguagem de categorias monoidais simétricas *dagger*, tanto um *bra-ket* e um *ket-bra* são composições de morfismos: $\phi^\dagger \circ \psi$ e $\psi \circ \phi^\dagger$ respectivamente.

5.5.5 Traço e dimensão

Definição 5.23. Para qualquer morfismo $f : A \rightarrow A$ em uma categoria compacta *dagger*, a definição abstrata de **traço** é definido como a composição $Tr(f) := \epsilon_A \circ (f \otimes Id_A) \circ \sigma_{A^*, A} \circ \eta_A$.

Exemplo 5.24. Se aplicarmos isso a um morfismo $f : H \rightarrow H$ da categoria **Hilb** temos o escalar $\sum_{i,j} f_{i,j} \langle x_j | x_i \rangle = \sum_i f_{i,i}$, onde $\{x_i\}$ é a base de H e $f_{i,j}$ são os escalares tal que $f(x_i) = \sum_j f_{i,j} x_j$. Isto é exatamente o traço da matriz f .

Definição 5.25. Em uma categoria compacta *dagger*, a **dimensão** de um objeto A é o escalar $\dim(A) = \text{Tr}(Id_A)$

5.5.6 Estruturas de base

O teorema da completude implica que as noções básicas dos espaços de Hilbert são transportadas para qualquer categoria compacta *dagger* (SELINGER, 2012; HASEGAWA; HOFMANN; PLOTKIN, 2008). A noção de base é dada em termos de co-álgebras.

Definição 5.26. Um **co-monóide interno** (X, δ, ϵ) em categoria monoidal \mathbf{C} é um objeto X com um par de morfismos

$$X \xrightarrow{\delta} X \otimes X \quad e \quad X \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{1},$$

onde δ é a co-multiplicação (ou operação *copying*) e ϵ é a co-unidade (ou operação *deleting*), tais que os seguintes diagramas comutam (chamados de co-associatividade e co-uniticidade):

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta} & X \otimes X \\ \delta \downarrow & & \downarrow 1_X \otimes \delta \\ X \otimes X & \xrightarrow{\delta \otimes 1_X} & X \otimes X \otimes X \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \swarrow \simeq & \downarrow \delta & \searrow \simeq & \\ I \otimes X & \xleftarrow{\epsilon \otimes 1_X} & X \otimes X & \xrightarrow{1_X \otimes \epsilon} & X \otimes I \end{array}$$

Um co-monóide é co-comutativo se tivermos um diagrama de comutação:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\delta} & A \otimes A \\ & \searrow \delta & \downarrow \sigma_{A,A} \\ & & A \otimes A \end{array}$$

Como o dual de co-monóide, temos a definição de monóide interno:

Definition 5.27. Um **monóide interno** é um objeto B em uma categoria monoidal juntamente com um par de morfismos $\mu : B \otimes B \rightarrow B$ (multiplicação) e $e : \mathbf{1} \rightarrow B$ (unidade multiplicativa) satisfazendo as seguintes equações:

1. Associatividade: $\mu \circ (Id_B \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes Id_B)$;

$$2. \text{ Unicidade: } \mu \circ (e \otimes Id_B) = \mu \circ (Id_B \otimes e) = Id_B.$$

Um monoide é comutativo quando satisfaz a seguinte equação: $\mu \circ \sigma_{A,A} = \mu$.

Exemplo 5.28. Em qualquer categoria monoidal, a unidade tensorial $\mathbf{1}$ pode ser equipada com a estrutura de um monoide, com $\mu = \rho_{\mathbf{1}} (= \lambda_{\mathbf{1}})$ e $e = Id_{\mathbf{1}}$.

Exemplo 5.29. Em Set , um monoide é simplesmente a noção matemática comum de um monoide.

As estruturas de co-monoide interno e monoide interno (dual) permitem a geração de estados emaranhados, necessários em protocolos como o teletransporte quântico (COECKE, 2011).

Definição 5.30. Dado um objeto A em uma categoria compacta *dagger* \mathbf{C} . A **base** (ou **estrutura de base**) é um co-monoide interno co-comutativo $(A, \delta : A \rightarrow A \otimes A, \epsilon : A \rightarrow 1)$ que obedece aos seguintes axiomas:

1. **Co-multiplicatividade:** $(Id_A \otimes \epsilon) \circ \delta = Id_A = (\epsilon \otimes Id_A) \circ \delta$;
2. **Co-associatividade:** $(Id_A \otimes \delta) \circ \delta = (\delta \otimes Id_A) \circ \delta$;
3. **Co-comutatividade:** $\sigma_{A,A} \circ \delta = \delta$;
4. **Isometria:** $\delta^\dagger \circ \delta = Id_A$;
5. **Identidade de Frobenius:** $\delta \circ \delta^\dagger = (\delta^\dagger \otimes Id_A) \circ (Id_A \otimes \delta)$.

Os nomes sugestivos de *cópia* e *exclusão* para os operadores de co-multiplicação (δ) e co-unidade (ϵ) vêm da ideia de que o teorema de não-clonagem e o teorema de não-exclusão (ABRAMSKY, 2009) afirmam que os únicos vetores que é possível copiar ou excluir são vetores de base ortogonal.

A partir da definição de base, vários resultados para espaços de Hilbert podem ser definidos para categorias compactas *dagger*. Segue alguns deles baseados na referência (COECKE, 2010):

- Uma base também pode ser entendida como correspondendo a um **observável**. Ou seja, um observável é representado por um objeto A juntamente com os dois morfismos que definem uma base: (A, δ, ϵ) ;

-
- Um auto-estado (*eigenstate*) de um observável (A, δ, ϵ) é qualquer objeto $\psi : \mathbb{I} \rightarrow A$ tal que $\delta \circ \psi = \psi \otimes \psi$;
 - Um objeto $\psi : \mathbb{I} \rightarrow A$ é complementar ao observável (A, δ, ϵ) se $\delta^\dagger \circ (\bar{\psi} \otimes \psi) = \epsilon^\dagger$;
 - Dois observáveis $(A, \delta_X, \epsilon_X)$ e $(A, \delta_Z, \epsilon_Z)$ são complementares se $\delta_Z^\dagger \circ \delta_X = \epsilon_Z \circ \epsilon_X^\dagger$;
 - Objetos complementares geram transformações unitárias. Ou seja, $\delta^\dagger \circ (\psi \otimes Id_A)$ é unitário se e somente se ψ é complementar ao observável (A, δ, ϵ) .

6 ESPAÇO DE CHU

Os espaços de Chu fornecem uma representação simples, universal e bem estruturada para uma gama de objetos na matemática. Eles são simples em virtude de serem meramente uma matriz retangular cujas linhas representam pontos, as colunas representam estados duais, e as entradas são provenientes de um conjunto K .

Espaços de Chu são universais no sentido em que todos os objetos convencionalmente transformáveis da matemática são representáveis por espaços de Chu dentro de um quadro não tipificado unicamente, ou seja, podemos generalizar os espaços de Chu para a noção de espaços topológicos, largando os requisitos que o conjunto de conjuntos abertos é fechado sob união e interseção finita (PRATT, 1995; LAFONT; STREICHER, 1991).

Espaço de Chu é um caso especial de uma construção que apareceu originalmente na monografia de Po-Hsiang Chu (CHU, 1979), como um apêndice ao livro de M. Barr (BARR, 1979).

O interesse em categorias *-autônomas, com o advento da Lógica Linear (GIRARD, 1987), vem de que essas categorias fornecem modelos para lógica linear multiplicativa- MLL (e com os pressupostos adicionais para toda lógica linear).

A construção Chu aplicada à categoria \mathbf{Set} , de conjuntos e funções, foi introduzida de forma independente (com o nome de 'games') por (LAFONT; STREICHER, 1991) e subsequentemente (sob o nome de espaços de Chu) foi objeto de uma série de artigos produzidos por Pratt e seus colaboradores (PRATT, 1999b; PRATT, 1999a; PRATT, 2003b; PRATT, 1995).

Espaço de Chu tem vários aspectos interessantes, dentre eles:

- Eles têm uma estrutura rica que em particular formam modelos de Lógica Linear (PRATT, 2003a).
- Eles possuem uma teoria de representação preciosa: muitas categorias concretas de interesse podem ser totalmente incorporadas em espaços de Chu.
- Há uma noção natural de 'lógica local' em espaços de Chu (BARWISE; SELIGMAN et al., 1997) e uma caracterização interessante de transferência de informação através de morfismos de Chu.
- Uma estrutura de co-monoide eficiente (PRATT, 2003a) para tratarmos estruturas de base.

Aplicações de espaços Chu têm sido propostas em uma série de áreas, incluindo a concorrência (PRATT, 2003b), teoria dos jogos (VANNUCCI, 2004), sistemas fuzzy (NGUYEN et al., 2001) e estudos matemáticos sobre a construção de Chu (em termos categóricos) (BARR, 1998).

Neste capítulo vamos dar uma breve conceituação dos espaços de Chu, apresentar algumas operações e propriedades categóricas da categoria Chu_K .

Algumas noções que veremos nesta parte inicial são baseadas explicitamente nas notas de aula de Pratt (PRATT, 1999b) e no livro (BARR, 1979).

De modo geral, um espaço de Chu é simplesmente uma matriz retangular sobre um conjunto K . Mas, ao contrário das matrizes de álgebra linear, que servem como representações de transformações lineares, espaços de Chu servem como representações dos objetos da matemática, e sua essência reside na forma de como eles se transformam. Vamos formalizar da seguinte forma.

Definição 6.1. Um **espaço de Chu** $\mathcal{A} = (A, r, X)$ sobre um conjunto K , consiste em um conjunto A de *pontos*, um conjunto X de *estados*, e uma função $r : A \times X \rightarrow K$.

Note que a função $r : A \times X \rightarrow K$ pode ser considerada como uma matriz com linhas em A , colunas em X e valores em K , particularmente quando os conjuntos envolvidos são finitos.

É conveniente visualizar os espaços de Chu organizados seja por linhas ou por colunas. Assim, definimos $\hat{r} : A \rightarrow (X \rightarrow K)$ como $\hat{r}(a)(x) = r(a, x)$, e referimos a função $\hat{r}(a) : X \rightarrow K$ como a linha a de \mathcal{A} . Dualmente definimos $\check{r} : X \rightarrow (A \rightarrow K)$ como $\check{r}(x)(a) = r(a, x)$ e chamamos a função $\check{r}(x) : A \rightarrow K$ como a coluna x de \mathcal{A} .

Quando \hat{r} é injetora, isto é, todas as linhas distintas, chamamos \mathcal{A} de **separável**

$$[\forall a_1, a_2 \in A, x \in X. \quad r(a_1, x) = r(a_2, x)] \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Similarmente para as colunas, quando \check{r} é injetora, chamamos \mathcal{A} de **extensional**

$$[\forall x_1, x_2 \in X, a \in A. \quad r(a, x_1) = r(a, x_2)] \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Quando \mathcal{A} é ambos separável e extensional chamamos de **biextensional**.

Definimos o **colapso biextensional** de $\mathcal{A} = (A, r, X)$ sendo $(\hat{r}(A), r', \check{r}(X))$ onde $r'(\hat{r}(a), \check{r}(x)) = r(a, x)$. Intuitivamente, o colapso biextensional simplesmente identifica linhas e colunas iguais. No entanto, seus pontos não são mais elementos de A , mas sim funções de X para K , assim como os estados são funções de A para K .

Exemplo 6.2. Seja o seguinte espaço de Chu com $K = 2 = \{0, 1\}$, o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ e o conjunto de estados sendo $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4
a_1	0	1	1	0
a_2	1	0	0	1
a_3	1	1	1	1
a_4	0	1	1	0
a_5	1	0	0	1

Note que este espaço não é separável e nem extensional. Assim, o colapso biextensional é dado por: $A' = \hat{r}(A) = \{0110, 1001, 1111\}$, $X' = \check{r}(X) = \{01101, 10110\}$ onde $r(a'_1, x'_1) = r(a'_2, x'_2) = 0$, $r(a'_1, x'_2) = r(a'_2, x'_1) = 1$ e $r(a'_3, x'_1) = r(a'_3, x'_2) = 1$, ou seja, anulam-se as linhas e colunas repetidas:

	x'_1	x'_2
a'_1	0	1
a'_2	1	0
a'_3	1	1

Matrizes possuem um princípio semelhante ao da dualidade de reticulados, assim como a ordem dupla de uma estrutura é uma outra estrutura, a transposta de uma matriz é outra matriz. Denotamos a transposta de $\mathcal{A} = (A, r, X)$ como $\mathcal{A}^\perp = (X, \check{r}, A)$ onde $\check{r}(x, a) = r(a, x)$.

Dizemos que o espaço de Chu é **discreto** se todos os K^A estados possíveis são permitidos.

Chamamos de espaço de Chu **normal** quando para espaços extensionais, tratamos as colunas como auto-identificação: cada coluna é uma função de A para K , isto é, $X \subseteq K^A$. Usamos a notação abreviada (A, X) com r entendido como uma aplicação, ou seja, $r(a, x)$ é considerado como sendo $x(a)$, cada $x \in X$ sendo agora uma função $x : A \rightarrow K$.

6.1 CATEGORIA \mathbf{Chu}_K

A classe de todos os espaços de Chu forma uma categoria, definindo uma noção adequada de morfismo.

Definição 6.3. A categoria \mathbf{Chu}_K tem como seus objetos os espaços de Chu (A, r, X) sobre K , e o morfismo

$$(f, g) : (A, r, X) \rightarrow (B, s, Y)$$

é o par de funções

$$f : A \rightarrow B \quad e \quad g : Y \rightarrow X$$

tal que para todo $a \in A$ e $y \in Y$, temos:

$$s(f(a), y) = r(a, g(y)).$$

Essa equação é uma forma primitiva de adjunção e a chamamos de **condição adjunta**. O par (f, g) será chamado de **par adjunto**. Dado os pares adjuntos $(f, g) : (A, r, X) \rightarrow (B, s, Y)$ e $(f', g') : (B, s, Y) \rightarrow (C, u, Z)$ a composta é dada por

$$(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g \circ g').$$

Esta composta é por si só um par adjunto pois para todo $a \in A$ e $z \in Z$ temos:

$$u(f' \circ f(a), z) = s(f(a), g'(z)) = r(a, g \circ g'(z)).$$

A associatividade desta composição é herdada da composição em \mathbf{Set} (categoria de conjuntos e funções), de fato, uma vez que a composição é definida explicitamente em termos de morfismos, podemos verificar. Considere os seguintes pares de morfismos:

$$(f, g) : (A, r, X) \longrightarrow (B, s, Y)$$

$$(h, k) : (B, s, Y) \longrightarrow (C, u, Z)$$

$$(l, m) : (C, u, Z) \longrightarrow (D, v, W)$$

então,

$$\begin{aligned} ((l, m) \circ (h, k)) \circ (f, g) &= (l \circ h, k \circ m) \circ (f, g) \\ &= ((l \circ h) \circ f, g \circ (k \circ m)) \\ &= (l \circ (h \circ f), (g \circ k) \circ m) \\ &= (l, m) \circ (h \circ f, g \circ k). \end{aligned}$$

Enquanto que o par $(1_A, 1_X)$ de mapas identidades, respectivamente A e X , é a identidade do morfismo em (A, r, X) , ou seja, $id_A : (id_A, id_X) : (A, r, X) \rightarrow (A, r, X)$. Seus isomorfismos são aqueles morfismos (f, g) para os quais f e g são ambos bijeções.

Dizemos que dois espaços de Chu são **equivalentes** quando seus respectivos colapsos biextensional são isomorfos.

Definição 6.4. Continuidade: Dados os espaços $\mathcal{A} = (A, r, X)$ e $\mathcal{B} = (B, s, Y)$, uma função $f : A \rightarrow B$ entre conjuntos, pode ser referida como uma função $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ entre espaços de Chu, onde uma função de \mathcal{B}^\perp para \mathcal{A}^\perp significa uma função de Y para X . Dizemos que uma função entre espaços de Chu $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é **contínua** quando se tem um adjunto de \mathcal{B}^\perp para \mathcal{A}^\perp , isto é, quando existe uma função $g : Y \rightarrow X$ fazendo (f, g) um morfismo de \mathbf{Chu}_K , $s(f(a), y) = r(a, g(y))$.

Observação 6.5. É possível definir a categoria $\mathbf{Chu}_K(\mathbf{C})$ para qualquer categoria \mathbf{C} . Os objetos de $\mathbf{Chu}_K(\mathbf{C})$ consistem da tripla (A, r, X) onde A, X são objetos em \mathbf{C} e $r : A \times X \rightarrow K$ é um morfismo em \mathbf{C} . Um morfismo de (A, r, X) para (B, s, Y) é um par (f, g) adjunto, onde $f : A \rightarrow B$ e $g : Y \rightarrow X$ são morfismos em \mathbf{C} . A composição é definida explicitamente em termos de morfismos em \mathbf{C} . Além disso, $Id_{(A, r, X)} = (Id_A, Id_X)$ é a identidade óbvia (CHU, 1979). A categoria \mathbf{Chu}_K , na definição 6.3, é $\mathbf{Chu}_K(\mathbf{Set})$ na verdade. Posteriormente, trabalharemos com $\mathbf{Chu}_K(\mathbf{Rel})$. Neste capítulo, nos concentramos em $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$ para simplicidade da apresentação e nenhum resultado mais profundo é obtido no cenário geral com uma categoria arbitrária \mathbf{C} . Além disso, a maioria dos resultados aqui podem ser obtidos a partir de $\mathbf{Chu}_K(\mathbf{Set})$ para qualquer $\mathbf{Chu}_K(\mathbf{C})$.

6.2 CONSTRUÇÕES BÁSICAS

Nesta seção vamos definir uma série de operações em espaços de Chu. Operações estas que vêm de lógica linear (GIRARD, 1987), uma abordagem realizada por Lafont e Streicher (1991) e o processo de álgebra com interpretação sobre espaços de Chu (GUPTA, 1994).

- **Dual (perp):** Definimos o dual \mathcal{A}^\perp de $\mathcal{A} = (A, r, X)$ como $\mathcal{A}^\perp = (X, \check{r}, A)$, onde $\check{r}(x, a) = r(a, x)$. Observe evidentemente que quando \mathcal{A} é separável (todas as linhas distintas), \mathcal{A}^\perp é extensional (todas as colunas distintas). Da mesma forma quando \mathcal{A} é extensional, \mathcal{A}^\perp é separável. Assim, o dual preserva biextensionalidade.

A definição de \mathcal{A}^\perp faz $\mathcal{A}^{\perp\perp}$ não apenas isomorfo a \mathcal{A} mas igual a ele, dando-nos a nossa primeira lei:

$$\mathcal{A}^{\perp\perp} = \mathcal{A}.$$

De fato, para $\mathcal{A}^\perp = (X, \check{r}, A)$, temos $\mathcal{A}^{\perp\perp} = (A, \tilde{r}, X)$, onde $\tilde{r}(x, a) = (\check{r}(x, a))^\perp = \check{r}(a, x) = r(x, a) \Rightarrow \tilde{r} = r$.

Exemplo 6.6. Considere o espaço de Chu do exemplo 6.2 dado por

	x_1	x_2	x_3	x_4
a_1	0	1	1	0
a_2	1	0	0	1
a_3	1	1	1	1
a_4	0	1	1	0
a_5	1	0	0	1

Assim, temos como o dual \mathcal{A}^\perp :

$$r(a_1, x_1) = 0 = \check{r}(x_1, a_1)$$

$$r(a_1, x_2) = 1 = \check{r}(x_2, a_1)$$

$$r(a_1, x_3) = 1 = \check{r}(x_3, a_1)$$

$$r(a_1, x_4) = 0 = \check{r}(x_4, a_1)$$

⋮

$$r(a_5, x_4) = 1 = \check{r}(x_4, a_5).$$

01101
10110
10110
01101

Observe que como \mathcal{A} não é separável e nem extensional, temos que \mathcal{A}^\perp também não o é.

• **Tensor:** O produto tensorial $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ de $\mathcal{A} = (A, r, X)$ e $\mathcal{B} = (B, s, Y)$ é definido como $(A \times B, t, \mathcal{F})$ onde $\mathcal{F} \subset Y^A \times X^B$ é o conjunto de todos os pares (f, g) de funções $f : A \rightarrow Y$

e $g : B \rightarrow X$ para qual vale a adjunção, i.e., $s(b, f(a)) = r(a, g(b))$ para todo $a \in A$ e $b \in B$, $t : (A \times B) \times \mathcal{F} \rightarrow K$ é dado por $t((a, b), (f, g)) = s(b, f(a)) (= r(a, g(b)))$.

Relacionado com o produto tensorial temos a unidade tensorial $\mathbf{1}$, ou seja, o espaço de Chu $(*, r, K)$, que corresponde ao espaço com 1 ponto e $|K|$ estados, onde $r(*, k) = k$ para $k \in K$.

Quando \mathcal{A} e \mathcal{B} são extensionais, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é extensional por definição: duas funções distintas em \mathcal{F} devem diferir em um determinado ponto (a, b) . Ele não precisa, contudo, ser separável.

Exemplo 6.7. Seja o espaço $\mathcal{A} = (A, r, X)$ dado por:

	x_1	x_2
a_1	0	0
a_2	0	1

Vamos calcular $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

Observe que teremos uma matriz com 4 linhas $A \times A$. Para nossa \mathcal{F} , como estamos fazendo o produto entre o mesmo espaço temos que $f : A \rightarrow X$ e $g : A \rightarrow X$, ou seja, teremos cadeias de tamanho dois de um conjunto de dois elementos (X). Assim, todas as possibilidades de f são: $\{x_1x_1, x_1x_2, x_2x_1, x_2x_2\}$, onde o primeiro elemento de cada cadeia é o $f(a_1)$ e o segundo $f(a_2)$. O mesmo acontece para a g .

Portanto, teremos quatro combinações possíveis de a e b ($a = b$ para este nosso exemplo que temos $A \times A$) para verificar que $s(b, f(a)) = r(a, g(b))$, dadas f e g fixas, sabendo que são 4×4 possíveis pares (f, g) , totalizando então $4 \times 4 \times 4$ testes.

Vamos começar com a primeira *string* de f com a primeira *string* de g ($f = x_1x_1, g = x_1x_1$):

	$r(a, g(b))$	$s(b, f(a))$
a_1b_1	0	0
a_1b_2	0	0
a_2b_1	0	0
a_2b_2	0	0

Logo, para este caso, temos que todas satisfazem $s(b, f(a)) = r(a, g(b))$, assim nossa primeira coluna será 0000.

Prosseguindo agora com a primeira string de $f(x_1, x_1)$ com a segunda string de $g(x_1x_2)$:

	$r(a, g(b))$	$s(b, f(a))$
a_1b_1	0	0
a_1b_2	0	0
a_2b_1	0	0
a_2b_2	0	1

Observe que para este caso a última combinação não satisfaz $s(b, f(a)) = r(a, g(b))$, portanto o desconsideramos.

Prosseguindo desta forma, obtemos os seguintes resultados, no qual geramos um programa para obtenção dos mesmos para maior agilidade:

{Verdadeiro, Verdadeiro, Falso, Verdadeiro}

{Verdadeiro, Verdadeiro, Falso, Falso}

{Verdadeiro, Verdadeiro, Verdadeiro, Falso}

{Verdadeiro, Verdadeiro, Verdadeiro, Verdadeiro}

{Verdadeiro, Verdadeiro, Falso, Falso}

{Verdadeiro, Verdadeiro, Falso, Verdadeiro}

{Verdadeiro, Falso, Verdadeiro, Verdadeiro}

{Verdadeiro, Falso, Verdadeiro, Falso}

{Verdadeiro, Falso, Falso, Verdadeiro}

{Verdadeiro, Falso, Falso, Falso}

{Verdadeiro, Falso, Verdadeiro, Falso}

{Verdadeiro, Falso, Verdadeiro, Verdadeiro}

{Verdadeiro, Falso, Falso, Falso}

{Verdadeiro, Falso, Falso, Verdadeiro}

Onde, verdadeiro indica que $s(b, f(a)) = r(a, g(b))$, e falso para $s(b, f(a)) \neq r(a, g(b))$.

Assim,

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} = \begin{array}{|c|} \hline 00 \\ \hline 00 \\ \hline 00 \\ \hline 01 \\ \hline \end{array}$$

cujo colapso biextensional é $\begin{array}{|c|} \hline 00 \\ \hline 01 \\ \hline \end{array}$.

Observação 6.8. Em alguns casos o produto tensorial de dois espaços de Chu corresponde ao espaço de Chu vazio (0), ou seja, de todas as possíveis combinações nenhuma satisfaz $s(b, f(a)) = r(a, g(b))$, assim dizemos que o produto é 0 (o espaço de Chu vazio, não tendo pontos e contendo um estado). Um exemplo são os espaços $\begin{array}{|c|} \hline 00 \\ \hline 01 \\ \hline \end{array}$ e $\begin{array}{|c|} \hline 01 \\ \hline 10 \\ \hline \end{array}$ cujo produto é 0.

Definimos até agora o dual e o produto tensorial apenas para espaços de Chu. Vamos agora fazer essas operações em funtores em Chu_K estendendo seus respectivos domínios para incluir morfismos.

Dado $(f, g) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, seja $(f, g)^\perp : \mathcal{B}^\perp \rightarrow \mathcal{A}^\perp$ definido por (g, f) . Podemos usar para este caso a notação $f^\perp = g$.

Dada as funções $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ e $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$, definimos $f \otimes g : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'$ sendo a função $(f \otimes g)(a, b) = (f(a), g(b))$. Quando f e g são contínuas, também é $f \otimes g$, de fato $(f \otimes g)^\perp$ de \mathcal{G} para \mathcal{F} (onde \mathcal{G} e \mathcal{F} consiste respectivamente dos pares $(h' : A' \rightarrow Y', k' : B' \rightarrow X')$ e $(h : A \rightarrow Y, k : B \rightarrow X)$) envia $h' : A' \rightarrow Y'$ para $g^\perp \circ h' \circ f : A \rightarrow Y$ e $k' : B' \rightarrow X'$ para $f^\perp \circ k' \circ g : B \rightarrow X$.

Proposição 6.9. (PRATT, 1999b) O tensor é comutativo e associativo, a menos de isomorfismos naturais: $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \cong \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) \cong (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C}$.

Proposição 6.10. A unidade do tensor se comporta como tal, isto é $\mathcal{A} \otimes \mathbf{1} \cong \mathcal{A} \cong \mathbf{1} \otimes \mathcal{A}$ através do evidente emparelhamento do isomorfismo $(a, *)$ com a .

Prova. Sejam os espaços $\mathcal{A} = (A, r, X)$ e $\mathbf{1} = (*, s, K)$. O produto $\mathcal{A} \otimes \mathbf{1}$ é dado por $(A \times *, t, \mathcal{F})$, onde \mathcal{F} é o conjunto de todos os pares (f, g) , com $f : A \rightarrow K$ e $g : * \rightarrow X$ de modo que $s(*, f(a)) = f(a) = r(a, g(*))$, onde a f corresponde a respectivas linhas de \mathcal{A} e g

a uma letra da linha dada. Assim, o par (f, g) satisfaz uma coluna de \mathcal{A} e daí \mathcal{F} corresponde a todas colunas de \mathcal{A} que é equivalente ao X . Assim,

$$\begin{aligned} t & : A \times \{*\} \times \mathcal{F} \rightarrow K \\ & : A \times X \rightarrow K \\ \therefore \mathcal{A} \otimes \mathbf{1} & \cong \mathcal{A} \end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos provar que $\mathbf{1} \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{A}$, além disso como sabemos que o tensor é comutativo $\mathcal{A} \otimes \mathbf{1} \cong \mathbf{1} \otimes \mathcal{A}$, o que implica que $\mathcal{A} \otimes \mathbf{1} \cong \mathcal{A} \cong \mathbf{1} \otimes \mathcal{A}$, como desejado. \square

Exemplo 6.11. Um exemplo em Chu_2 , do isomorfismo da proposição anterior, é dado pelo produto:

$$A \otimes \mathbf{1} = \begin{array}{|c|} \hline 00 \\ \hline 01 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 01 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 00 \\ \hline 01 \\ \hline \end{array}$$

• **Aditivos (União disjunta):** Os conectivos aditivos (da lógica linear) são a soma $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ e o seu dual $\mathcal{A} \& \mathcal{B}$, com respectivas unidades 0 e \top .

$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ é definido como $(A + B, t, X \times Y)$ onde $A + B$ é a união disjunta de A e B tal que $t(a, (x, y)) = r(a, x)$ e $t(b, (x, y)) = s(b, y)$. Sua unidade 0 é o espaço vazio discreto que não tem ponto e possui apenas um estado. Para morfismos $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ temos $f \oplus g : \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}' \oplus \mathcal{B}'$ que leva $a \in \mathcal{A}$ para $f(a) \in \mathcal{A}'$ e $b \in \mathcal{B}$ para $g(b) \in \mathcal{B}'$. $\mathcal{A} \& \mathcal{B}$ como o *dual De Morgan* de $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ é definido para ambos os objetos e morfismos por, $\mathcal{A} \& \mathcal{B} = (\mathcal{A}^\perp \oplus \mathcal{B}^\perp)^\perp$, com $\top = 0^\perp$.

Proposição 6.12. A soma \oplus não é comutativa.

Prova. De fato, tome como contra exemplo os espaços 10 e 01 :

$$\begin{array}{|c|} \hline 10 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 01 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1100 \\ \hline 0101 \\ \hline \end{array} \neq \begin{array}{|c|} \hline 01 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 10 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0011 \\ \hline 1010 \\ \hline \end{array}.$$

\square

6.3 REGULARIDADE DA CATEGORIA Chu_K

C. Heunen e S. Tull mostram que categorias de relações sobre categorias regulares formam uma família de modelos de teoria quântica, $\mathbf{Rel}(\mathbf{C})$, em que \mathbf{C} é uma categoria regular (HEUNEN; TULL, 2015). Nesta seção, mostramos que Chu_K é uma categoria regular.

O leitor deve estar familiarizado com alguns conceitos categóricos, como limites finitos, equalizadores e pullback (abordados no Capítulo 4).

Definição 6.13. Uma categoria é **regular** quando possui limites finitos, co-equalizadores de pares de kernel e epimorfismos regulares são estáveis sob pullback.

Pratt afirma que \mathbf{Chu}_K é bicompleto, com todos os limites e colimites finitos herdados da categoria **Set** (PRATT, 1999b, p.27).

Lema 6.14. O limite de um diagrama D em \mathbf{Chu}_K é dado por $(\lim D, t, \text{colim} D)$ onde $\lim D$ é o limite em **Set** e $\text{colim} D$ é o colimite em **Set**.

Prova. Como em Pratt (PRATT, 1999b), o limite de qualquer diagrama $D : J \rightarrow \mathbf{Chu}_K$, onde J é uma categoria *small*, é obtido independentemente por pontos e estados, respectivamente **Set** e \mathbf{Set}^{OP} . De fato, o funtor D é o mesmo que uma família de espaços de Chu $\{D(j)_{j \in J}\}$, indexados por J . Considere $D(j)_{j \in J} = (A_j, r_j, X_j)$ e $D(f : j \rightarrow i)$ corresponde ao par de funções $f_1 : A_j \rightarrow A_i, f_2 : X_i \rightarrow X_j$, tal que $r_j(a_j, f_2(x_i)) = r_i(f_1(a_j), x_i)$ para cada $a_j \in A_j$ e $x_i \in X_i$. O funtor D induz dois diagramas: $F : J \rightarrow \mathbf{Set}$ com $F(j) = A_j$ e $E : J \rightarrow \mathbf{Set}$ com $E(j) = X_j$.

Assim, $\lim D = (\lim A_j, t, \text{colim} X_j)$ onde $\lim A_j$ é o limite do diagrama F . E o limite pode ser realizado como um subconjunto do produto $\prod_{j \in J} F(j)$:

$$\lim F(j) = \{(a_j) \in \prod_{j \in J} F(j) \mid \forall f : j \rightarrow i, F(f)(a_j) = a_i\}.$$

Por outro lado, $\text{colim} X_j$ é o colimite do diagrama E , que corresponde a um conjunto quociente da união disjunta $\bigsqcup_{j \in J} E(j)$:

$$\text{colim} E(j) = \bigsqcup_{j \in J} E(j) / \sim$$

onde a relação de equivalência \sim é dada por $(x_j \in E(j)) \sim (x_i \in E(i))$ se $\exists f : j \rightarrow i$ com $E(f)(x_i) = x_j$.

Segue que, $t : \lim A_j \times \text{colim} X_j \rightarrow K$ é definido por $t((a_j), [x_j]) = r_j(a_j, x_j)$. Se $[x_j] = [x_i]$ então $\exists f : j \rightarrow i$ tal que $E(f)(x_i) = f_2(x_i) = x_j$ e $F(f)(a_j) = f_1(a_j) = a_i$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
 t((a_j), [x_j]) &= r_j(a_j, x_j) \\
 &= r_j(a_j, f_2(x_i)) \\
 &= r_i(f_1(a_j), x_i) \\
 &= r_i(a_i, x_i) \\
 &= t((a_j), [x_i]).
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 6.15. Produto em \mathbf{Chu}_K : Seja $\mathcal{A} = (A, r, X)$, $\mathcal{B} = (B, s, Y)$ e $\mathcal{C} = (C, w, Z)$ objetos na categoria \mathbf{Chu}_K . O produto entre \mathcal{A} e \mathcal{B} consiste de um objeto $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ com um par de setas $\mathcal{A} \xleftarrow{p} \mathcal{A} \times \mathcal{B} \xrightarrow{q} \mathcal{B}$ tal que para cada tripla $\mathcal{A} \xleftarrow{f} \mathcal{C} \xrightarrow{g} \mathcal{B}$ existe um único morfismo $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ de modo que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{A} & \xleftarrow{p} & \mathcal{A} \times \mathcal{B} & \xrightarrow{q} & \mathcal{B} \\
 & \searrow f & \uparrow u & \nearrow g & \\
 & & \mathcal{C} & &
 \end{array}
 \quad \left(\begin{array}{l} p \circ u = f \\ q \circ u = g \end{array} \right)$$

ou seja,

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{A} & \xleftarrow{p_1} & \mathcal{A} \times \mathcal{B} & \xrightarrow{q_1} & \mathcal{B} & X & \xrightarrow{p_2} & X + Y & \xleftarrow{q_2} & Y \\
 & \searrow f_1 & \uparrow u_1 & \nearrow g_1 & & & \searrow f_2 & \downarrow u_2 & \nearrow g_2 & \\
 & & \mathcal{C} & & & & & \mathcal{Z} & &
 \end{array}$$

O primeiro diagrama corresponde a um produto em **Set** e o segundo diagrama é o dual do primeiro diagrama, o coproduto em **Set**. Assim, $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ é definido por $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, t, X + Y)$, onde $X + Y$ é a união disjunta de X e Y com $t((a, b), x) = r(a, x)$ e $t((a, b), y) = s(b, y)$.

Exemplo 6.16. Equalizador em \mathbf{Chu}_K : Seja $f, g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Um equalizador (f, g) em \mathbf{Chu}_K consiste de um objeto $\mathcal{C} = (C, u, Z)$ e um morfismo h de \mathcal{C} para \mathcal{A} , tal que $f \circ h = g \circ h$. Dado um objeto $\mathcal{D} = (D, v, W)$ tal que para qualquer seta $i : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$, se $f \circ i = g \circ i$ então existe uma única seta $j : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $h \circ j = i$ como mostra o diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{h} & \mathcal{A} \xrightarrow[f]{g} \mathcal{B} \\
 \uparrow j & \nearrow i & \\
 \mathcal{D} & &
 \end{array}$$

Temos o morfismo $h = (h_1, h_2)$ onde h_1 corresponde à inclusão em A de um subconjunto de equações definido por

$$\{a \in A \mid f_1(a) = g_1(a)\} \hookrightarrow A,$$

e h_2 é construído pelo quociente de X pela relação de equivalência gerada pelas equações $f_2(y) = g_2(y)$, e $h_2 : X \rightarrow X/\sim$ com $x \mapsto [x]$ satisfaz a condição adjunta $u(c, h_2 \circ f_2(y)) = u(c, h_2 \circ g_2(y)) = s(f_1 \circ h_1(c), y) = s(g_1 \circ h_1(c), y)$.

Portanto, $\mathcal{C} = (C \subseteq A, u, Z = X/\sim)$ e j é único, uma vez que h é um monomorfismo. Dualizando a construção do equalizador, obtemos o coequalizador.

Exemplo 6.17. Pullback em \mathbf{Chu}_K : dados $\mathcal{A} = (A, r, X)$, $\mathcal{B} = (B, s, Y)$ e $\mathcal{C} = (C, u, Z)$ espaços de Chu. Considere o par de morfismos $\mathcal{A} \xrightarrow{f'} \mathcal{C} \xleftarrow{g'} \mathcal{B}$, satisfazendo a condição adjunta. O pullback de f' e g' em \mathbf{Chu}_K é um par de setas $\mathcal{A} \xleftarrow{q} \mathcal{A} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{B} \xrightarrow{p} \mathcal{B}$, tal que $f' \circ q = g' \circ p$ com $\mathcal{A} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{B} = (A \times_{\mathcal{C}} B, t, X +_Z Y)$ onde $A \times_{\mathcal{C}} B := \{(a, b) \in A \times B \mid f_1(a) = g_1(b)\}$ e $X +_Z Y \simeq X + Y/\sim$ onde $X + Y$ é a união disjunta de X e Y , além disso $x \sim y$ se $g_2(z) \sim f_2(z)$ para algum $z \in Z$ com $g_2(z) = y$ e $f_2(z) = x$.

$t : (A \times_{\mathcal{C}} B) \times (X +_Z Y) \rightarrow K$ é definido por:

$$t((a, b), \bar{\alpha}) = \begin{cases} r(a, x), & \text{se } \bar{\alpha} = \{x\}, \\ s(b, y), & \text{se } \bar{\alpha} = \{y\}, \\ r(a, x) = s(b, y), & \text{se } \bar{\alpha} = \{x, y\}. \end{cases}$$

Onde $\bar{\alpha} = \{x, y\} \Leftrightarrow \exists z \in Z$ tal que $f_2(z) = g_2(z)$. Além disso, se $\bar{\alpha} = \{x, y\} = \bar{x} = \bar{y}$, temos que $p_2(x) = \bar{x} = \bar{\alpha}$ e $q_2(y) = \bar{y} = \bar{\alpha}$.

O co-equalizador de um par de morfismos em \mathbf{Chu}_K é um epimorfismo regular. Em particular, todo epimorfismo regular é um epimorfismo.

Exemplo 6.18. Epimorfismos em \mathbf{Chu}_K são o pares (f_1, f_2) para qual f_1 é uma função sobrejetiva f_2 é uma função injetiva, monomorfismos em \mathbf{Chu}_K são da forma (f_2, f_1) .

Proposição 6.19. \mathbf{Chu}_K é uma categoria regular.

Prova. Pelo lema 6.14, \mathbf{Chu}_K possui limites finitos e co-equalizadores de pares de kernel. Devemos mostrar que epimorfismos regulares são estáveis sob pullback. De fato, todo epimorfismo em \mathbf{Chu}_K é regular ou equivalentemente todos os monomorfismos são regulares. Além disso, como os monomorfismos são dados como limites, segue que os monomorfismos em \mathbf{Chu}_K são pares de um (mono, epi) de \mathbf{Set} . Em \mathbf{Set} todo monomorfismo $X \rightarrow Y$ é o equalizador de seu par de kernel, e todo epimorfismo é o coequalizador de seu par de kernel.

Portanto, todo monomorfismo em \mathbf{Chu}_K é o equalizador de seu par de kernel, ou seja, é regular. Ademais, os monomorfismos são sempre estáveis sob pullbaks. Assim, \mathbf{Chu}_K é regular. \square

Observação 6.20. Se \mathbf{C} é bicompleta, então $\mathbf{Chu}_K(\mathbf{C})$ também é. É fácil ver que se \mathbf{C} é uma categoria regular, então $\mathbf{Chu}_K(\mathbf{C})$ também é.

6.4 ESTRUTURAS CATEGÓRICAS NA CATEGORIA \mathbf{Chu}_K

Nesta seção vamos abordar algumas estruturas categóricas na categoria \mathbf{Chu}_K relacionados à mecânica quântica categórica.

Teorema 6.21. (ALCANTARA; OLIVEIRA; DIAS, 2016) \mathbf{Chu}_K com o produto tensorial \otimes , é uma categoria monoidal simétrica (SMC).

Uma categoria $*$ -autonomous é uma categoria monoidal simétrica equipada com um objeto dualizador \perp . \mathbf{Chu}_K é uma categoria $*$ -autonomous com seu espaço dual \mathcal{A}^\perp como o objeto dual do espaço \mathcal{A} e o objeto dualizador definido por $\perp = \mathbf{1}^\perp$.

Seguindo o fato que muitos estudos em mecânica quântica categórica evidenciaram a importância do funtor *dagger* (\dagger) para expressar as estruturas essenciais da mecânica quântica em uma categoria simétrica monoidal, mostramos que \mathbf{Chu}_K só possui estrutura do funtor *dagger* caso todos os morfismos sejam bijeções (um subconjunto dos morfismos de \mathbf{Chu}_K) (ALCANTARA; OLIVEIRA; DIAS, 2016).

Teorema 6.22. Sejam $\mathcal{A} = (A, r, X)$ e $\mathcal{B} = (B, s, Y)$ espaços de \mathbf{Chu} e $f = (f_1, f_2)$ são morfismo de \mathbf{Chu} entre \mathcal{A} e \mathcal{B} onde $f = (f_1, f_2)$ tal que f_1 e f_2 são bijeções, então existe $f^\dagger = (f_1^\dagger, f_2^\dagger)$ entre \mathcal{B} e \mathcal{A} onde $f_1^\dagger = f_1^{-1}$ e $f_2^\dagger = f_2^{-1}$.

Prova. Queremos mostrar que, com a restrição que fizemos, temos:

$$s(b, f_2^\dagger(x)) = r(f_1^\dagger(b), x) \quad \forall b \in B, x \in X.$$

Com a hipótese de que f_1 e f_2 são bijeções, dado $b \in B$ existe um único a tal que $f_1(a) = b$ e um único y tal que $f_2(y) = x$. Assim,

$$s(b, f_2^\dagger(x)) = s(f_1(a), f_2^\dagger(x)) = r(a, f_2(f_2^\dagger(x))) = r(a, x)$$

e

$$r(f_1^\dagger(b), x) = r(f_1^\dagger(f_1(a)), x) = r(a, x).$$

□

Esse resultado corresponde a uma subcategoria, \mathbf{gChu}_K , da categoria \mathbf{Chu}_K , esta subcategoria possui espaços Chu como objetos e bijeções como morfismos. Que remete a um grupóide (uma categoria na qual cada morfismo tem um inverso).

6.5 LÓGICA LINEAR

Os espaços de Chu e suas funções contínuas formam uma categoria \star -autônoma (BARR, 1979), que é auto-dual e monoidal simétrica. Isso os coloca diretamente no domínio do discurso da lógica linear de Girard (BARR, 1991; GIRARD, 1987).

Nesta seção daremos uma breve introdução da conexão dos espaços de Chu com a Lógica Linear e seu fragmento multiplicativo, seguindo o trabalho (PRATT, 1999a).

Na lógica comum, os conectivos lógicos denotam operações em valores de verdade. A lógica linear, entretanto, faz mais sentido quando entendida como uma lógica categórica, cujos conectivos são funtores ao invés de meras operações.

A linguagem da lógica linear multiplicativa consiste em variáveis proposicionais P, Q , fórmulas A, B, C e os conectivos lógicos A^\perp (negação linear), $A \otimes B$ (conjunção multiplicativa), $A \wp B$ (disjunção multiplicativa), $A \multimap B$ (implicação linear).

Na interpretação da lógica linear com os espaços de Chu, todas as fórmulas são interpretadas como espaços de Chu. O dual \mathcal{A}^\perp do espaço de Chu \mathcal{A} representa a operação lógica *negação linear*. A operação \otimes é dada pelo tensor em espaços de Chu $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ apresentado na Seção 6.2. A operação $\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}$ é interpretada como o espaço de Chu que consiste nas representações das funções contínuas desde a interpretação $\mathcal{A} = (A, r, X)$ de A até a interpretação $\mathcal{B} = (B, s, Y)$ de B . Definimos a implicação linear $\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}$ como sendo $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}^\perp)^\perp$. Segue que $\mathcal{A} \multimap \mathcal{B} = (\mathcal{F}, t, A \times Y)$ onde \mathcal{F} é o conjunto de todos os pares (f, g) , $f : A \rightarrow B$ e $g : Y \rightarrow X$, satisfazendo a condição adjunta para um morfismo de Chu. Além disso, definimos a operação $\mathcal{A} \wp \mathcal{B}$ como $(\mathcal{A}^\perp \otimes \mathcal{B}^\perp)^\perp = \mathcal{A}^\perp \multimap \mathcal{B}$.

A função dual $g : \mathcal{B}^\perp \rightarrow \mathcal{A}^\perp$ pode ser representada como uma matriz $Y \times A$ sobre K , ou seja, $m(y, a) = r(a, g(y))$. Para tais espaços temos então uma caracterização alternativa de

continuidade: a função é contínua apenas quando o inverso (transposição) da sua representação é uma função de \mathcal{B}^\perp para \mathcal{A}^\perp .

Com uma transposta adicional a definição de implicação linear, tal implicação pode ser transformada em $\mathcal{A}\#\mathcal{B}$, definido como $(\mathcal{A}^\perp \otimes \mathcal{B}^\perp)^\perp$. $\mathcal{A}\#\mathcal{B}$ é simplesmente o dual *De Morgan* de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, analogamente para a dualidade De Morgan de conjunção e disjunção na lógica booleana. $\mathcal{A}\#\mathcal{B}$ é produto direto ou categórico.

Em (PRATT, 1997), Pratt inicia o projeto de provar a completude da lógica linear interpretada sobre espaços Chu, mostrando que para fórmulas de lógica linear multiplicativa tendo no máximo duas ocorrências de cada variável, que os *cut-free proof-nets* (OLIVEIRA, 2001, p.27) dessas fórmulas estão em correspondência bijetiva com os elementos dinaturais dos funtores correspondentes. Posteriormente, os autores em (DEVARAJAN et al., 1999) mostram que ao fortalecer a condição de naturalidade para logicidade, ou seja, invariância sob relações lógicas usando relações de Chu, eles estendem a integridade total para toda a MLL.

7 MODELOS RELACIONAIS DE CHU PARA COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

Como \mathbf{Chu}_K carece de um óbvio funtor *dagger* em quaisquer morfismos que não sejam isomorfismos, e motivados pela estrutura da categoria \mathbf{Rel} de conjuntos e relações (COECKE, 2011, p.223), neste capítulo vamos considerar novos modelos relacionais dos espaços de Chu.

7.1 RelChu

Nesta seção, apresentamos a categoria $\mathbf{RelChu} = \mathbf{Rel}(\mathbf{Chu}_K)$ obtida através da uma construção geral de Heunen e Tull (HEUNEN; TULL, 2015).

Definição 7.1. Um **subobjeto** de um objeto C em uma categoria \mathbf{C} é uma classe de equivalência de monomorfismos sob isomorfismo com co-domínio C , onde identificamos dois monomorfismos $m : B \rightarrow C, m' : B' \rightarrow C$ como equivalente apenas se houver um isomorfismo $f : B \rightarrow B'$ tal que $m = m' \circ f$.

Definição 7.2. Um **objeto quociente** de um objeto C em uma categoria \mathbf{C} é um subobjeto de C na categoria oposta \mathbf{C}^{OP} . Explicitamente, é uma classe de equivalência de epimorfismos com domínio C , onde identificamos dois epimorfismos $e : C \rightarrow B$ e $e' : C \rightarrow B'$ como equivalente apenas se houver um isomorfismo $f : B' \rightarrow B$ tal que $e = f \circ e'$.

Lema 7.3. O subobjeto de um objeto A em \mathbf{Chu}_K é dado por $\mathcal{S} = (S_1, s, S_2)$ onde S_1 é o subobjeto em \mathbf{Set} e S_2 é o objeto quociente em \mathbf{Set} .

Prova. Lembre-se que um monomorfismo $m : \mathcal{S} \rightarrow A$ entre espaços Chu são dados como limites, segue que monos em \mathbf{Chu}_K são pares de um (mono, epi) de \mathbf{Set} , i.e., $m = (f, g)$ para qual $f : S_1 \rightarrow A$ é injetiva e $g : X \rightarrow S_2$ é sobrejetiva. Logo, (S_1, f) corresponde ao subobjeto de A em \mathbf{Set} . A classe de isomorfismo de tal monomorfismo $f : S_1 \rightarrow A$ pode ser identificado com o subconjunto $f(S_1)$ de A . Similarmente, (S_2, g) induz uma classe de equivalência em X , onde a classe de equivalência do morfismo g é precisamente o conjunto de todas as funções sobrejetivas com domínio X cuja imagem é o conjunto representativo S_2 . Se $x \sim x'$ onde $x, x' \in g^{-1}(s_2)$, então $g(x) = g(x')$ e temos que $s(s_1, s_2) = r(f(s_1), x) = s(s_1, g(x)) = s(s_1, g(x')) = r(f(s_1), x')$. \square

Definition 7.4. (HEUNEN; TULL, 2015) Seja \mathbf{C} uma categoria regular. A categoria $\mathbf{Rel}(\mathbf{C})$ de relações tem os mesmos objetos que a categoria \mathbf{C} , e subobjetos $R \mapsto A \times B$ como

morfismos $A \rightarrow B$, com mapas diagonais $A \rightarrow A \times A$ como identidades, e composição dada por $S \circ R = [(a, c), \in A \times C | (\exists b \in B) R(a, b) \wedge S(b, c)]$.

A definição de $\mathbf{Rel}(\mathbf{C})$ para uma categoria regular geral \mathbf{C} dada na Definição em 7.4 utiliza a lógica interna de uma categoria regular para definir $S \circ R$ usando elementos (HEUNEN; TULL, 2015).

A categoria $\mathbf{Rel}(\mathbf{C})$ é uma categoria dagger compacta com o produto \times de \mathbf{C} induzindo \otimes em $\mathbf{Rel}(\mathbf{C})$ (HEUNEN; TULL, 2015).

Definition 7.5. Definimos a categoria dagger compacta $\mathbf{RelChu} = \mathbf{Rel}(\mathbf{Chu}_K)$ de acordo com a definição 7.4.

Explicitamente, temos que a categoria \mathbf{RelChu} tem os mesmos objetos da categoria \mathbf{Chu}_K , os morfismos $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ correspondem aos subobjetos de \mathbf{Chu} $R \leq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, com $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = (A \times B, t, X + Y)$, onde $X + Y$ é a união disjunta de X e Y , tal que $t((a, b), x) = r(a, x)$ e $t((a, b), y) = s(b, y)$, de modo que $R = (R_1, U_1)$ onde R_1 é um subobjeto de $A \times B$ e U_1 é um subobjeto de $X + Y$.

A identidade é subobjeto $(Id_A, r', Id_X) \subseteq (A \times A, r, X + X)$ onde Id_A relaciona a ao par (a, a) e $Id_X := \{(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})\}$, ou seja, cópias dos elementos de X . Neste caso, estamos considerando os espaços biextensionais com $x_i \neq x_j$ onde $i \neq j, \forall x_{i,j} \in X$.

A composição é dada $(R_1, U_1) : (A, r, X) \rightarrow (B, s, Y)$ e $(R_2, U_2) : (B, s, Y) \rightarrow (C, w, Z)$, temos que $(R_2, U_2) \circ (R_1, U_1) = (R_2 \circ R_1, U_1 \circ U_2)$ onde

1. $R_2 \circ R_1 := \{(a, c) | \exists b \in B \text{ tal que } aR_1b \text{ e } bR_2c\}$;
2. $U_1 \circ U_2 := \{(x, 0) | x \in U_1\} \cup \{(z, 2) | z \in U_2\}$ onde $U_1 \subseteq \{(x, 0) | x \in X\} \cup \{(y, 1) | y \in Y\}$ e $U_2 \subseteq \{(y, 1) | y \in Y\} \cup \{(z, 2) | z \in Z\}$.

As estruturas de Frobenius desempenham um papel central na mecânica quântica categórica (COECKE; EDWARDS, 2011). Heunen e Tull mostram que se \mathbf{C} é uma categoria regular, então as estruturas Frobenius em $\mathbf{Rel}(\mathbf{C})$ representam grupóides internos em \mathbf{C} (HEUNEN; TULL, 2015).

Teorema 7.6. (HEUNEN; TULL, 2015) *Para qualquer categoria regular \mathbf{C} , estruturas de Frobenius dagger especiais em $\mathbf{Rel}(\mathbf{C})$ são os mesmos que os grupóides internos em \mathbf{C} .*

Corolário 7.7. *Grupóides internos em \mathbf{Chu}_K induz estruturas especiais de Frobenius em \mathbf{RelChu} .*

Temos através da construção feita por C. Heunen and S. Tull (HEUNEN; TULL, 2015), **RelChu** é um modelo alternativo para a computação quântica.

7.2 ChuRel

Pratt definiu a relação de Chu (PRATT, 1999b, p.55) para obter uma plenitude completa da lógica linear multiplicativa (MLL) para espaços de Chu. Nesta seção, vamos apresentar a categoria **ChuRel** = **Chu_K(Rel)**.

Definição 7.8. (PRATT, 1999b) Uma **Relação de Chu** $R = (R^+, R^-) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ entre espaços de Chu $\mathcal{A} = (A, r, X)$ e $\mathcal{B} = (B, s, Y)$ é um par de relações binárias ordinárias $R^+ \subseteq A \times B$ e $R^- \subseteq X \times Y$ satisfazendo a seguinte condição de adjacência: Para todos a, b, x, y tal que aR^+b e xR^-y , temos $r(a, x) = s(b, y)$.

Em particular, quando R^+ é uma função de A para B e R^- é uma função de Y para X , uma relação de Chu é exatamente um morfismo em **Chu_K**. Assim, relações de Chu generalizam morfismos de **Chu_K** (PRATT, 1999b).

Com base na definição de Relações de Chu, definimos a categoria **ChuRel**.

Definição 7.9. A categoria de espaços de Chu e relações de Chu, **ChuRel**, é definida da seguinte maneira:

1. Os objetos são espaços de Chu, $\mathcal{A} = (A, r, X), \mathcal{B} = (B, s, Y), \mathcal{C} = (C, u, Z)$;
2. Os morfismos são relações de Chu, $R = (R^+, R^-) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$;
3. A identidade $id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ corresponde ao par de relações identidades $1_A := \{(a, a) | a \in A\}$ e $1_X := \{(x, x) | x \in X\}$;
4. A composição é dada por pares de relações $(R^+, R^-) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ e $(R'^+, R'^-) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $(R'^+, R'^-) \circ (R^+, R^-) = (R'^+ \circ R^+, R'^- \circ R^-)$ onde $R'^+ \circ R^+ := \{(a, c) | \exists b \in B; aR^+b \wedge bR'^+c\}$ e $R'^- \circ R^- := \{(x, z) | \exists y \in Y; xR^-y \wedge yR'^-z\}$, satisfaz a condição de adjacência $r(a, x) = s(b, y) = t(c, z)$.

Definição 7.10. (PRATT, 1999b) Seja (A, B, R) sendo uma estrutura relacional *two-sorted* com uma relação binária $R \subseteq A \times B$. Tome uma segunda estrutura (A', B', R') do mesmo tipo de similaridade. Chamamos um par de funções $f : A \rightarrow A'$ e $g : B \rightarrow B'$ um **homomorfismo two-sorted** quando para todo aRb temos $f(a)R'g(b)$.

O tensor é dado nos objetos como em \mathbf{Chu}_K , para tornar o produto tensor um bifunctor em \mathbf{ChuRel} precisamos da extensão dessas operações para morfismos: dados $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ e $R' : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B}'$, definimos $R \otimes R' : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}'$ por (i) $(a, a')(R \otimes R')^+(b, b')$ e (ii) $(f_1, f_2)(R \otimes R')^-(g_1, g_2)$ se e somente se (f_1, g_1) é um homomorfismo *two-sorted* de R^+ para R'^- e (f_2, g_2) é um homomorfismo *two-sorted* de R'^+ para R^- (PRATT, 1999b).

Observação 7.11. \mathbf{ChuRel} tem os mesmos objetos e tensor que \mathbf{Chu}_K e herda seus isomorfismos de coerência. Considere os espaços de Chu $\mathcal{A} = (A, r, X)$, $\mathcal{B} = (B, s, Y)$ e $\mathcal{C} = (C, u, Z)$, temos que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = (A \times B, t_{AB}, F_{AB})$ e $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} = (B \times C, t_{BC}, F_{BC})$ onde $F_{AB} = \{(f_1, f_2) | f_1 : A \rightarrow Y, f_2 : B \rightarrow X\}$ e $F_{BC} = \{(f'_1, f'_2) | f'_1 : B \rightarrow Z, f'_2 : C \rightarrow Y\}$ tal que $t_{BC}((b, c), (f'_1, f'_2)) = s(b, f'_2(c)) = u(c, f'_1(a))$. Como todo morfismo em \mathbf{Chu}_K é um morfismo em \mathbf{ChuRel} e o produto tensorial é associativo e comutativo (proposição 6.9), os morfismos

$$\sigma_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} := \begin{cases} \sigma^+ := \{((a, b), (b, a)) | a \in A \wedge b \in B\}, \\ \sigma^- := \{((f_1, f_2), (f_2, f_1)) | (f_1, f_2) \in F_{AB}\}. \end{cases}$$

e

$$\alpha_{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}} : \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} := \begin{cases} \alpha^+ := \{((a, (b, c)), ((a, b), c))\}, \\ \alpha^- := \{((m, n), (m', n'))\}, \end{cases}$$

são isomorfismos, onde $a \in A, b \in B \wedge c \in C, m : A \rightarrow F_{BC}, n : B \times C \rightarrow X, m' : A \times B \rightarrow Z, n' : C \rightarrow F_{AB}$.

Observação 7.12. Seja $\mathbf{1} \otimes \mathcal{A} = (A \times \{*\}, t_{1A}, F_{1A})$, onde $F_{1A} = \{(h_1, h_2) | h_1 : \{*\} \rightarrow X, h_2 : A \rightarrow K\}$. Na Proposição 6.10 vimos que $\mathcal{A} \otimes \mathbf{1} \cong \mathcal{A} \cong \mathbf{1} \otimes \mathcal{A}$, então os morfismos

$$\lambda_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{1} \otimes \mathcal{A} := \begin{cases} \lambda_{\mathcal{A}}^+ := \{(a, (*, a)) | a \in A\}, \\ \lambda_{\mathcal{A}}^- := \{(x, (h_1(x), h_2(x))) | x \in X, (h_1, h_2) \in F_{1A}\}. \end{cases}$$

e

$$\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathbf{1} := \begin{cases} \rho_{\mathcal{A}}^+ := \{(a, (a, *)) | a \in A\}, \\ \rho_{\mathcal{A}}^- := \{(x, (h_2(x), h_1(x))) | x \in X\}, \end{cases}$$

são isomorfismos em \mathbf{ChuRel} , onde $h_1(x) : \{*\} \rightarrow X$ leva $*$ para x e $h_2(x) : A \rightarrow K$ leva a para $r(a, x)$.

Teorema 7.13. \mathbf{ChuRel} , com o produto tensorial \otimes , é uma categoria monoidal simétrica.

Prova. A naturalidade dos isomorfismos $\sigma, \alpha, \lambda, \rho$ (nas Observações 7.11 e 7.12) segue imediatamente dos isomorfismos correspondentes \mathbf{Set} porque essas relações são todas de valor

único, são funções (isomorfismos) e, como mostrado \mathbf{Chu}_K (PRATT, 1999b) são os mesmos que em \mathbf{Set} .

É fácil verificar que $(S_1 \otimes S_2) \circ (R_1 \otimes R_2) = (S_1 \circ R_1) \otimes (S_2 \circ R_2)$. Além disso, dados $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = (A \times B, t_{AB}, F_{AB})$, temos que $((a, b), (a, b)) \in (Id_{\mathcal{A}} \otimes Id_{\mathcal{B}})^+$ e $((f, g), (f, g)) \in (Id_{\mathcal{A}} \otimes Id_{\mathcal{B}})^-$ tal que $t_{AB}((a, b), (f, g)) = s(b, (f(a))) = r(a, g(b))$. Portanto $Id_{\mathcal{A}} \otimes Id_{\mathcal{B}} = Id_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$.

Logo, \otimes é compatível com os morfismos de composição e a identidade em \mathbf{ChuRel} , desse modo \otimes é um bifunctor. As equações de coerência são mantidas porque vêm de \mathbf{Chu}_K que é uma categoria monoidal simétrica (LAFONT; STREICHER, 1991). Consequentemente, \mathbf{ChuRel} é uma categoria monoidal simétrica e \mathbf{Chu}_K é uma subcategoria monoidal simétrica de \mathbf{ChuRel} . \square

Teorema 7.14. *\mathbf{ChuRel} é uma categoria compacta (fechada).*

Prova. Determinaremos em \mathbf{ChuRel} os morfismos $\eta_{\mathcal{A}}$ (unidade) e $\epsilon_{\mathcal{A}}$ (co-unidade) que faça \mathbf{ChuRel} uma categoria compacta. Considere $\mathcal{A} = (A, r, X)$, $\mathbf{1} = (*, r', K)$ e $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} = (A \times A, t_{AA}, F_{AA})$ onde F_{AA} consiste de todos os pares (l_1, l_2) tal que $l_1(k) : A \rightarrow X$ e $l_2(k) : A \rightarrow X$. temos que

$$\eta_{\mathcal{A}} : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} := \begin{cases} \eta^+ := \{(*, (a, a)) \mid x \in X \wedge a \in A\}, \\ \eta^- := \{(k, (l_1(k), l_2(k))) \mid k \in K, (l_1, l_2) \in F_{AA}\}. \end{cases}$$

$$\epsilon_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{1} := \begin{cases} \epsilon^+ := \{((a, a), *) \mid a \in A\}, \\ \epsilon^- := \{((l_1(k), l_2(k)), k) \mid (l_1, l_2) \in F_{AA}, k \in K\}, \end{cases}$$

para o qual $t_{AA}((a, a), (l_1, l_2)) = r'(*, k) = k = r(a, (l_2(a))) = r(a, l_1(a))$.

Existe claramente um funtor monoidal da adaga $F : \mathbf{ChuRel} \rightarrow \mathbf{Rel}$ enviando (A, r, X) para A e (R^+, R^-) para R^+ . A estrutura compacta em \mathbf{ChuRel} é essencialmente herdada de \mathbf{Rel} , uma vez que as unidades e co-unidade têm suas relações $(_)^+$ sendo as mesmas que as unidades e co-unidades em \mathbf{Rel} . Portanto, todas as verificações das equações de compactação envolvendo $(_)^+$ serão ignoradas porque elas são verificadas da mesma forma que em \mathbf{Rel} .

Pela definição de categoria compacta (COECKE, 2011), devemos mostrar que:

$$(i) \lambda_{\mathcal{A}}^{-1} \circ (\epsilon_{\mathcal{A}} \otimes I_{\mathcal{A}}) \circ \alpha_{\mathcal{A}, \mathcal{A}^+, \mathcal{A}} \circ (I_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}}) \circ \rho_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{A}};$$

$$(ii) \rho_{\mathcal{A}^+}^{-1} \circ (I_{\mathcal{A}^+} \otimes \epsilon_{\mathcal{A}}) \circ \alpha_{\mathcal{A}^+, \mathcal{A}, \mathcal{A}^+}^{-1} \circ (\eta_{\mathcal{A}} \otimes I_{\mathcal{A}^+}) \circ \lambda_{\mathcal{A}^+} = I_{\mathcal{A}^+}.$$

Vamos mostrar que $(\lambda_{\mathcal{A}}^{-1} \circ (\epsilon_{\mathcal{A}} \otimes I_{\mathcal{A}}) \circ \alpha_{\mathcal{A}, \mathcal{A}^+, \mathcal{A}} \circ (I_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}}) \circ \rho_{\mathcal{A}})^- = I_{\mathcal{A}}^-$.

1. Pela observação 7.12, $\rho_{\mathcal{A}}^- := \{(x, (h_2(x), h_1(x))) \mid x \in X\}$ onde $h_1(x) : * \rightarrow X$ leva $*$ para x e $h_2(x) : A \rightarrow A$ leva a para $r(a, x)$. Considere o seguinte espaço de Chu

$\mathcal{A} \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) = (A \times (A \times A), t_{AA}^A, F_{AA}^A)$ onde $F_{AA}^A := \{(f, g) | f : A \rightarrow F_{AA}, g : A \times A \rightarrow X\}$, e o espaço de Chu $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \otimes \mathcal{A} = ((A \times A) \times A, t_A^{AA}, F_A^{AA})$ onde $F_A^{AA} := \{(g, f) | g : A \times A \rightarrow X, f : A \rightarrow F_{AA}\}$.

Assim, o morfismo $(I_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}})^- : \mathcal{A} \otimes \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{A} \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ é dado por

$$(I_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}})^- := \{((h_1(x), h_2(x)), (f, g))\},$$

onde $(h_1(x), h_2(x)) \in F_{1A}$, $(f, g) \in F_{A,A}^A$, da functorialidade tensorial $(a, a) \in I_{\mathcal{A}}^+ \Rightarrow (h_2(x)(a), f(a)) \in \eta_{\mathcal{A}}^-$ e $(*, (a', a')) \in \eta_{\mathcal{A}}^+ \Rightarrow (h_1(x)(*), g(a', a')) \in I_{\mathcal{A}}^-$, desta forma $g(a', a') = x$ e $f = (l_1, l_2)$. Além disso, $r(a', l_1(a)) = r(a', l_2(a)) = h_2(x)(a) = k$. Assim, $l_1(a) = x = l_2(a) \quad \forall a \in A$. Uma vez que

$$((I_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}}) \circ \rho_{\mathcal{A}})^- := \{(x, (f, g)) | x \in X\},$$

$(h_2(x), h_1(x))$ é tal que $(x, (h_2, h_1)) \in (p_{\mathcal{A}})^-$ e $((h_2, h_1), (f, g)) \in (I_{\mathcal{A}} \circ \eta_{\mathcal{A}})^-$.

2. O morfismo $\alpha_{\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A}}^- := \{(((l_1, l_2), g), (f'_1, (f'_2, g')))\}$ onde se $(f, g) = ((f_1, f_2), g)$, então

- a) $f'_1(x) : A \times A \rightarrow X$ com $f'_1(x)(a, a) = l_1(a) = x$;
- b) $f'_2(x) : A \rightarrow X$ onde $f'_2(x)(a) = l_2(a) = x$;
- c) $g' : A \rightarrow X$ com $g'(a) = g(a, a) = x$.

O domínio desses mapas muda devido ao mapeamento da associatividade α . Então, temos a seguinte composição

$$(\alpha_{\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A}} \circ ((I_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}}) \circ \rho_{\mathcal{A}})^- := \{(x, (f'_1, (f'_2, g')))\} | x \in X\}.$$

3. O morfismo $(\epsilon_{\mathcal{A}} \otimes I_{\mathcal{A}})^- : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{1} \otimes \mathcal{A}$ é dado por

$$(\epsilon_{\mathcal{A}} \otimes I_{\mathcal{A}})^- := \{((f'_1, (f'_2, g')), (h_1(x), h_2(x)))\}.$$

Pela functorialidade tensorial $((a, a), *) \in \epsilon_{\mathcal{A}}^+ \Rightarrow (f'_1(a, a), h_1(x)(*)) \in I_{\mathcal{A}}^-$ e $(a, a) \in I_{\mathcal{A}}^+ \Rightarrow ((f'_2, g'), h_2(x)(a)) \in \epsilon_{\mathcal{A}}^-$. O fato de os espaços serem biextensionais garante que $h_1(x)(*)) = x$. Além disso, $t_{AA}((a, a), (l_2, g)) = r'(*, h_2(x)(a)) = h_2(x)(a)$ e $r(a, f'_1(a, a)) = r(a, f'_2(a)) = r(a, g(a, a)) = r(a, x)$.

Pela definição de f'_1 temos que $r(a', l_1(a)) = h_2(x)(a) = r(a', x)$. Novamente, a condição dos espaços Chu serem biextensionais garante que $l_1(a) = x$.

Portanto, temos a seguinte composição:

$$((\epsilon_{\mathcal{A}} \otimes I_{\mathcal{A}}) \circ (\alpha_{\mathcal{A},\mathcal{A},\mathcal{A}} \circ (I_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}}) \circ \rho_{\mathcal{A}}))^{-} := \{(x, (h_1(x), h_2(x))) | x \in X\},$$

onde $(f'_1, (f'_2, g'))$ é tal que

$$(x, (f'_1, (f'_2, g'))) \in (\alpha_{\mathcal{A},\mathcal{A},\mathcal{A}} \circ (I_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}}) \circ \rho_{\mathcal{A}})^{-} \text{ e } ((f'_1, (f'_2, g')), (h_1, h_2)) \in (\epsilon_{\mathcal{A}} \otimes I_{\mathcal{A}})^{-}.$$

4. Finalmente, temos que $((*, a), a) \in (\lambda_{\mathcal{A}}^{-1})^{+}$ e $((h_1, h_2), x) \in (\lambda_{\mathcal{A}}^{-1})^{-}$. Então, o isomorfismo natural $\lambda_{\mathcal{A}}^{-1}$ composto com a composição do item anterior, produz um morfismo do tipo $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, então

$$(\lambda_{\mathcal{A}}^{-1} \circ (\epsilon_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \circ \alpha_{\mathcal{A},\mathcal{A},\mathcal{A}} \circ (1_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}}) \circ \rho_{\mathcal{A}})^{-} := \{(x, x) | x \in X\}.$$

Além disso, como os espaços Chu são biextensionais segue que (h_1, h_2) é tal que $(x, (h_1, h_2)) \in ((\epsilon_{\mathcal{A}} \otimes I_{\mathcal{A}}) \circ (\alpha_{\mathcal{A},\mathcal{A},\mathcal{A}} \circ (I_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}}) \circ \rho_{\mathcal{A}}))^{-}$ e $((h_1, h_2), x) \in (\lambda_{\mathcal{A}}^{-1})^{-}$.

Essa é a relação de identidade, conforme necessário, e os dois diagramas a seguir comutam:

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{A}}^{-}} & (h_2(x), h_1(x)) & \xrightarrow{(I_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}})^{-}} & ((l_1, l_2), g) \\ \downarrow I_{\mathcal{A}}^{-} & & & & \downarrow \alpha_{\mathcal{A},\mathcal{A},\mathcal{A}}^{-} \\ x & \xleftarrow{(\lambda_{\mathcal{A}}^{-1})^{-}} & (h_1(x), h_2(x)) & \xleftarrow{(\epsilon_{\mathcal{A}} \otimes I_{\mathcal{A}})^{-}} & (f'_1, (f'_2, g')) \end{array}$$

A comutatividade do diagrama dual (item 2 do teorema) é feita de maneira análoga. \square

A categoria **ChuRel** é uma categoria compacta de modo que todos os seus objetos são *self-duais*, isto é, $A^* = A$ para todo $A \in \mathbf{ChuRel}$, mas o objeto dual de uma objeto \mathcal{A} em **ChuRel** usado para a lógica linear multiplicativa é o *perp*, \mathcal{A}^{\perp} (PRATT, 1999b).

Em **ChuRel**, o candidato para o *dagger* R^{\dagger} é o par de relações conversas. Seja $R = (R^+, R^-) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $R^+ \subseteq A \times B$ e $R^- \subseteq X \times Y$, com aR^+b e xR^-y sse $r(a, x) = s(b, y)$, sua conversa $R^{\cup} = ((R^{\cup})^+, (R^{\cup})^-) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ é dada por $(R^{\cup})^+ := \{(b, a) | aR^+b\}$ e $(R^{\cup})^- := \{(y, x) | xR^-y\}$. Definimos o funtor *dagger* por $\dagger : \mathbf{ChuRel} \rightarrow \mathbf{ChuRel} :: R \mapsto R^{\cup}$.

Teorema 7.15. **ChuRel** é uma categoria compacta *dagger*.

Prova. Sejam $R_1 = (R_1^+, R_1^-) : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{B}_1$ e $R_2 = (R_2^+, R_2^-) : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{B}_2$. $(R_1 \otimes R_2)^{\dagger} = R_1^{\dagger} \otimes R_2^{\dagger}$. Note que $((R_1 \otimes R_2)^{\dagger})^{-} = \{((g_1, g_2), (f_1, f_2))\} = (R_1^{\dagger} \otimes R_2^{\dagger})^{-}$, uma vez que (g_1, f_1) é um homomorfismo *two-sorted* de R_1^+ para R_2^- e (g_2, f_2) é um homomorfismo *two-sorted* de R_2^+ para R_1^- . A prova de $((R_1 \otimes R_2)^{\dagger})^{+} = (R_1^{\dagger} \otimes R_2^{\dagger})^{+}$ é semelhante a prova em **Rel**.

A condição $Id_{\mathcal{A}} = Id_{\mathcal{A}}^{\dagger}$ e $f^{\dagger\dagger} = f$ segue diretamente da definição. Dados $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ e $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ morfismos em **ChuRel**, então $(g \circ f)^{\dagger} = f^{\dagger} \circ g^{\dagger}$ segue do fato que $((g \circ f)^{\dagger})^{-} = \{(z, x) \in Z \times X \mid \exists y \in Y; xf^{-y} \wedge yg^{-z}\} = (f^{\dagger} \circ g^{\dagger})^{-}$. Analogamente, $((g \circ f)^{\dagger})^{+} = (f^{\dagger} \circ g^{\dagger})^{+}$.

O fato que $\alpha^{\dagger} = \alpha^{-1}$, $\lambda^{\dagger} = \lambda^{-1}$, $\rho^{\dagger} = \rho^{-1}$, $\sigma^{\dagger} = \sigma^{-1}$ é trivial, uma vez que o inverso de todos esses morfismos é a conversa relacional em **ChuRel**, e o fato de que esses morfismos são bijeções. A condição $\epsilon_{\mathcal{A}}^{\dagger} \circ \sigma_{\mathcal{A}, \mathcal{A}} = \eta_{\mathcal{A}}$ segue do fato que os seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{(\epsilon_{\mathcal{A}}^{\dagger})^{+}} & (a, a) \\ & \searrow \eta_{\mathcal{A}}^{+} & \downarrow \sigma_{\mathcal{A}, \mathcal{A}}^{+} \\ & & (a, a) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{(\epsilon_{\mathcal{A}}^{\dagger})^{-}} & (l_1, l_2) \\ & \searrow \eta_{\mathcal{A}}^{-} & \downarrow \sigma_{\mathcal{A}, \mathcal{A}}^{-} \\ & & (l_1, l_2) \end{array}$$

comutam. □

Observação 7.16. Po-Hsiang Chu mostra que se \mathbf{C} é uma categoria monoidal fechada, então $\mathbf{Chu}_{\mathbf{K}}(\mathbf{C})$ é enriquecida com \mathbf{C} se está equipada com certos objetos e morfismos para satisfazer os axiomas necessários (CHU, 1979, p.105). Pode ser facilmente visto que se \mathbf{C} é uma categoria compacta *dagger*, então $\mathbf{Chu}_{\mathbf{K}}(\mathbf{C})$ também é enriquecido com \mathbf{C} .

7.2.1 Estrutura de base em FChuRel

Com base na teoria quântica finitária abordada por Abramsky e Coecke em (ABRAMSKY; COECKE, 2004), e a motivação para procurar um modelo finito para computação quântica, nesta seção, consideraremos a categoria compacta *dagger* **FChuRel** de espaços de Chu finitos $\mathcal{A} = (A, r, X)$ (com A e X finitos) e relações de Chu.

Nesta seção apresentamos um espaço Chu \mathcal{A} que representa um sistema com dois observáveis complementares, semelhante à construção feita em **FRel** in (COECKE; EDWARDS, 2011).

Estruturas de base são normalmente definidas como estruturas de Frobenius comutativas *dagger* especiais.

Definição 7.17. (COECKE; EDWARDS, 2011) Uma **estrutura de base** em uma categoria monoidal simétrica é um co-monóide interno co-comutativo $(A, \delta : A \rightarrow A \otimes A, \epsilon : A \rightarrow 1)$ que além disso é isométrico ($\delta^{\dagger} \circ \delta = 1_A$) e obedece à identidade Frobenius ($\delta \circ \delta^{\dagger} = (\delta^{\dagger} \otimes 1_A) \circ (1_A \otimes \delta)$).

Considere o espaço de Chu discreto $\mathcal{A} = (A, r, X)$ with $K = 2$, onde $A = \{a_1, a_2\}$ e $X = K^A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Representamos r pela seguinte matriz:

	x_1	x_2	x_3	x_4
a_1	0	0	1	1
a_2	0	1	0	1

Assim, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} = (A \times A, t, \mathcal{F})$ onde \mathcal{F} é o conjunto dos pares de funções $\{(f_0, g_0), (f_1, g_1, f_{15}, g_{15})\}$ (colunas), que corresponde ao espaço com todos os $K^{A \times A}$ possíveis estados permitidos, t constitui a seguinte matriz:

(a_1, a_1)	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
(a_1, a_2)	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
(a_2, a_1)	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
(a_2, a_2)	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Considere a primeira estrutura de base $Z = (\mathcal{A}, \delta_Z, \epsilon_Z)$ onde $\delta_Z = (\delta_Z^+, \delta_Z^-)$ com $\delta_Z^+ : A \rightarrow A \times A$ e $\delta_Z^- : X \rightarrow \mathcal{F}$, e $\epsilon_Z : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{1}$ onde $\mathbf{1} = (\{*\}, s, K)$:

$$\delta_Z^+ := \begin{cases} a_1 \sim (a_1, a_1) \\ a_2 \sim (a_2, a_2) \end{cases} \quad \text{e} \quad \delta_Z^- := \begin{cases} x_1 \sim (f_0, g_0) \\ x_2 \sim (f_6, g_6) \\ x_3 \sim (f_9, g_9) \\ x_4 \sim (f_{15}, g_{15}) \end{cases}$$

e

$$\epsilon_Z^+ : A \rightarrow \{*\} = \begin{cases} a_1 \sim * \\ a_2 \sim * \end{cases} \quad \text{e} \quad \epsilon_Z^- : X \rightarrow K = \begin{cases} x_1 \sim 0 \\ x_4 \sim 1 \end{cases}$$

onde $x\delta_Z^-(f, g)$ tal que $f : A \rightarrow X$ e $g : A \rightarrow X$ tal que $r(a, g(a')) = r(a', f(a))$, dado que o produto tensorial de espaços discretos Chu é um espaço discreto Chu. Além disso, os morfismos δ_Z e ϵ_Z satisfazem a condição de adjacência da relação de Chu. De fato, temos que:

- Se $a_1\delta_Z^+(a_1, a_1)$ e $x_1\delta_Z^-(f_0, g_0) \Rightarrow r(a_1, x_1) = 0 = t((a_1, a_1), (f_0, g_0))$;
- Se $a_2\delta_Z^+(a_2, a_2)$ e $x_1\delta_Z^-(f_0, g_0) \Rightarrow r(a_2, x_1) = 0 = t((a_2, a_2), (f_0, g_0))$;
- ⋮
- Se $a_2\delta_Z^+(a_2, a_2)$ e $x_4\delta_Z^-(f_{15}, g_{15}) \Rightarrow r(a_2, x_4) = 1 = t((a_2, a_2), (f_{15}, g_{15}))$.

e para o morfismo ϵ_Z :

- $r(a_1, x_1) = 0 = s(*, 0)$ e $r(a_1, x_4) = 1 = s(*, 1)$;
- $r(a_2, x_1) = 0 = s(*, 0)$ e $r(a_2, x_4) = 1 = s(*, 1)$.

O espaço de Chu \mathcal{A} sob $K = 2$ possui outra estrutura de base: $Y = (\mathcal{A}, \delta_X, \epsilon_X)$, where:

$$\delta_Y^+ := \begin{cases} a_1 \sim \{(a_1, a_1), (a_2, a_2)\} \\ a_2 \sim \{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\} \end{cases} \quad \text{e} \quad \delta_Y^- := \begin{cases} x_1 \sim (f_0, g_0) \\ x_2 \sim (f_6, g_6) \\ x_3 \sim (f_9, g_9) \\ x_4 \sim (f_{15}, g_{15}) \end{cases}$$

e

$$\epsilon_Y^+ : A \rightarrow \{*\} = \left\{ a_1 \sim * \right\} \quad \text{and} \quad \epsilon_Y^- : X \rightarrow K = \begin{cases} x_1 \sim 0 \\ x_2 \sim 0 \\ x_3 \sim 1 \\ x_4 \sim 1 \end{cases}$$

satisfazendo a condição adjunta:

- $r(a_1, x_1) = 0 = t((a_1, a_1), (f_0, g_0))$;
- $r(a_1, x_2) = 0 = t((a_2, a_2), (f_6, g_6))$;
- $r(a_1, x_3) = 0 = t((a_1, a_2), (f_9, g_9))$;
- $r(a_1, x_4) = 1 = t((a_2, a_1), (f_{15}, g_{15}))$

e para o morfismo ϵ_Y :

- $r(a_1, x_1) = 0 = s(*, 0) = 0 = r(a_1, x_2)$;
- $r(a_1, x_3) = 1 = s(*, 1) = 1 = r(a_1, x_4)$.

Ambas as estruturas satisfazem a condições de isometria e a condição de Frobenius:

Verificação da condição de isometria : $\delta^\dagger \circ \delta = I_{\mathcal{A}}$

1. Estrutura de base Z :

- i) $(\delta_Z^\dagger \circ \delta_Z)^+ =: \{(a_1, a_1), (a_2, a_2)\} = I_{\mathcal{A}}^+$; De fato (a_1, a_1) e (a_2, a_2) pertencem a $I_{\mathcal{A}}^+$ pois $A = (a_1, a_2)$, tal que existe (a_1, a_1) e $(a_2, a_2) \in A \times A$ com $a_1 \delta_Z^+(a_1, a_1)$ e

$(a_1, a_1)\delta_Z^+ a_1$. O mesmo para o par (a_2, a_2) . Os pares (a_1, a_2) e (a_2, a_1) não pertencem à $(\delta_Z^\dagger \circ \delta_Z)^+$ pois não estão relacionados de acordo com o morfismo δ_Z .

$$\text{ii)} (\delta_Z^\dagger \circ \delta_Z)^- := \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_4, x_4)\} = I_X^-.$$

2. Estrutura de base Y :

i) $(\delta_Y^\dagger \circ \delta_Y)^+ := \{(a_1, a_1), (a_2, a_2)\} = I_A^+$; De fato (a_1, a_1) e (a_2, a_2) pertencem a I_A^+ pois $A = (a_1, a_2)$, tal que existe $(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_1, a_2), (a_2, a_1) \in A \times A$ com $a_1 \delta_Z^+(a_1, a_1)$ e $(a_1, a_1)\delta_Z^+ a_1$. O mesmo para os pares $(a_2, a_2), (a_1, a_2), (a_2, a_1)$. Os pares (a_1, a_2) e (a_2, a_1) não pertencem à $(\delta_Y^\dagger \circ \delta_Y)^+$ pois não estão relacionados de acordo com o morfismo δ_Y .

$$\text{ii)} (\delta_Y^\dagger \circ \delta_Y)^- := \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_4, x_4)\} = I_X^-.$$

Verificação da condição de Frobenius: $\delta \circ \delta^\dagger = (\delta^\dagger \otimes I_A) \circ (I_A \otimes \delta)$

1. Estrutura de base Z :

i) No primeiro lado da igualdade temos:

$$(\delta_Z \circ \delta_Z^\dagger)^+ := \{((a_1, a_1), (a_1, a_1)), ((a_2, a_2), (a_2, a_2))\}$$

Para o lado direito da igualdade temos dois produtos que compõem uma composta:

$$\begin{aligned} \text{a)} (\delta_Z^\dagger \otimes I_A)^+ : (A \times A) \times A &\rightarrow A \times A := \\ \{(((a_1, a_1), a_1), (a_1, a_1)), (((a_1, a_1), a_2), (a_1, a_2)), \\ &(((a_2, a_2), a_1), (a_2, a_1)), (((a_2, a_2), a_2), (a_2, a_2))\} \end{aligned}$$

Satisfazendo a definição da functorialidade do produto tensorial de que $(a, a')(R \otimes R')^+(b, b')$ sse aR^+b e $a'R'^+b'$.

$$\begin{aligned} \text{b)} (I_A \otimes \delta_Z)^+ : A \times A &\rightarrow A \times (A \times A) := \\ \{((a_1, a_1), (a_1, (a_1, a_1))), ((a_1, a_2), (a_1, (a_2, a_2))), \\ &((a_2, a_1), (a_2, (a_1, a_1))), ((a_2, a_2), (a_2, (a_2, a_2)))\} \end{aligned}$$

Também satisfazendo a condição da functorialidade do tensor. Assim, temos a composta:

$$(\delta_Z^\dagger \otimes I_A)^+ \circ (I_A \otimes \delta_Z)^+ := \{(((a_1, a_1), (a_1, a_1)), ((a_2, a_2), (a_2, a_2)))\}.$$

Pois, com associatividade do produto tensorial os pares $(a_1, (a_1, a_1))$ e $((a_1, a_1), a_1)$ podem ser vistos como (a_1, a_1, a_1) . Além disso, pela comutatividade do tensorial, esses pares são isomorfos.

$$\therefore (\delta_Z \circ \delta_Z^\dagger)^+ = (\delta_Z^\dagger \otimes I_{\mathcal{A}})^+ \circ (I_{\mathcal{A}} \otimes \delta_Z)^+$$

ii) No lado esquerdo da igualdade temos:

$$(\delta_X \circ \delta_Z^\dagger)^- : F \rightarrow F := \{((f_0, g_0), (f_0, g_0)), ((f_6, g_6), (f_6, g_6)), \dots, ((f_{15}, g_{15}), (f_{15}, g_{15}))\}.$$

De forma análoga ao item i), vamos analisar os componentes da composta do lado direito da igualdade. Pra efeito, vamos desconsiderar o parenteses devido o isomorfismo associativo:

$$\mathbf{a)} (I_{\mathcal{A}} \otimes \delta) : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}).$$

O produto $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) = (A \times (A \times A), w', G')$ onde G' consiste de todos os pares (g', f') . Assim,

$$(f, g)(I_{\mathcal{A}} \otimes \delta_Z)^-(g', f')$$

se e somente se:

1. (f, g') for um homomorfismo *two-sorted* de $I_{\mathcal{A}}^+$ para δ_Z^- . Isto é, $aI_{\mathcal{A}}^+a \Rightarrow f(a)\delta_Z^-g'(a)$ para todo $a \in A$. Tal que $r(a, f(a)) = r(a, g'(a)) = r(a, g'_1(a)) = r(a, g'_2(a))$ onde $g' = (g'_1, g'_2) \in F_{A,A}$.
2. (g, f') for um homomorfismo *two-sorted* de δ_Z^+ para $I_{\mathcal{A}}^-$. Isto é, $a\delta_Z^+(a, a) \Rightarrow g(a)1_{\mathcal{A}}^-f'(a, a)$. Tal que $r(a, g(a)) = r(a, f'(a, a)) \forall a \in A$.

$$\mathbf{b)} (\delta^\dagger \otimes I_{\mathcal{A}}) : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}.$$

Como $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} = (A \times A, t, F)$, onde F consiste de todos os pares de funções (f, g) com $f : A \rightarrow X$ e $g : A \rightarrow X$, temos que o produto $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \otimes \mathcal{A} = ((A \times A) \times A, w, G)$, onde G consiste de todos os pares (f', g') tais que $f' : A \times A \rightarrow X$ e $g' : A \rightarrow F$ satisfazendo $t((a, a'), g'(a)) = r(a, f'(a, a'))$.

Pela funtorialidade do tensor em **FChuRel**:

$$(f', g')(\delta^\dagger \otimes 1_{\mathcal{A}})^-(\tilde{f}, \tilde{g})$$

se e somente se:

1. (f', \tilde{f}) é um homomorfismo *two-sorted* de $(\delta_Z^\dagger)^+$ para $1_{\mathcal{A}}^-$. Isto é, $(a, a)(\delta_Z^\dagger)^+a \Rightarrow f'(a, a)1_{\mathcal{A}}^-\tilde{f}(a)$; tal que $r(a, \tilde{f}(a)) = r(a, g'_1(a)) = r(a, f(a)) \Rightarrow \tilde{f} = f$.
2. (g', \tilde{g}) é um homomorfismo *two-sorted* de $1_{\mathcal{A}}^+$ para δ_Z^- . Isto é $a1_{\mathcal{A}}^+a \Rightarrow g'(a)(\delta_Z^-)\tilde{g}(a)$. Tal que $r(a, f(a)) = r(a, g(a)) = r(a, g'_2(a)) = r(a, f'(a)) = r(a, \tilde{g}(a)) \Rightarrow \tilde{g} = g$.

Como o espaço de chu \mathcal{A} é completo, o produto $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \otimes \mathcal{A}$ é o espaço de Chu completo com 8 pontos e 256 estados, ou seja, todos os 256 pares de funções (f', g') satisfazem a definição do tensorial. Logo, nesse caso sempre terá um (f'_i, g'_i) que satisfaça a condição da functorialidade do produto tensorial em **FChuRel**.

Logo, $(\delta^\dagger \otimes 1_{\mathcal{A}})^- \circ (1_{\mathcal{A}} \otimes \delta)^- := \{((f_0, g_0), (f_0, g_0)), \dots, ((f_{15}, g_{15}), (f_{15}, g_{15}))\}$.

Visto que, pela comutatividade do produto tensorial, os pares (f', g') e (g', f') são isomorfos.

$$\therefore (\delta_Z \circ \delta_Z^\dagger)^- = (\delta_Z^\dagger \otimes 1_{\mathcal{A}})^- \circ (1_{\mathcal{A}} \otimes \delta_Z)^-$$

A verificação é análoga para a estrutura de base Y .

Definição 7.18. (COECKE; EDWARDS, 2011) Um estado $\phi : I \rightarrow A$ é clássico em relação a $\{A, \delta, \epsilon\}$ se é um homomorfismo co-monoide real, i. e.,

$$\delta \circ \phi = \phi \otimes \phi \quad e \quad (\epsilon \circ \phi) = 1_I.$$

Definição 7.19. (COECKE; EDWARDS, 2011) Dada uma estrutura de base $\{A, \delta, \epsilon\}$ e um estado $\varphi : I \rightarrow A$ podemos formar uma operação $\Lambda(\varphi) = \delta^\dagger \circ (\varphi \otimes 1_A)$. Um estado φ é *imparcial* em relação a $\{A, \delta, \epsilon\}$ se $\Lambda(\varphi)$ é unitário - um morfismo é unitário sse $f^\dagger = f^{-1}$.

Definição 7.20. (COECKE; EDWARDS, 2011) Duas estruturas de base $\{A, \delta_Z, \epsilon_Z\}$ e $\{A, \delta_X, \epsilon_X\}$ são complementares sse:

1. sempre que $\phi : I \rightarrow A$ é clássico para $\{A, \delta_X, \epsilon_X\}$ e é *imparcial* para $\{A, \delta_Z, \epsilon_Z\}$;
2. sempre que $\varphi : I \rightarrow A$ é clássico para $\{A, \delta_Z, \epsilon_Z\}$ e é *imparcial* para $\{A, \delta_X, \epsilon_X\}$;
3. ϵ_X^\dagger é clássico para $\{A, \delta_Z, \epsilon_Z\}$ e ϵ_Z^\dagger é clássico para $\{A, \delta_X, \epsilon_X\}$.

A estrutura de base $Z = \{A, \delta_Z, \epsilon_Z\}$ possui dois pontos clássicos, z_0 e z_1 , e um imparcial y_0 :

1. $z_0^+ : \{*\} \rightarrow A : * \sim a_1$; e $z_0^- : K \rightarrow X = \begin{cases} 0 \sim x_1 \\ 1 \sim x_4 \end{cases}$
2. $z_1^+ : \{*\} \rightarrow A : * \sim a_2$; e $z_1^- : K \rightarrow X = \begin{cases} 0 \sim x_1 \\ 1 \sim x_4 \end{cases}$

$$3. x_0^+ : \{*\} \rightarrow A : * \sim \{a_1, a_2\}; \text{ e } y_0^- : K \rightarrow X = \begin{cases} 0 \sim x_1 \\ 1 \sim x_4 \end{cases}$$

- z_0 e z_1 são clássicos para a estrutura Z .

$$1. \delta_Z \circ z_0 = z_0 \otimes z_0$$

$$\text{i) } (\delta_Z \circ z_0)^+ := \{(*, (a_1, a_1))\} = (z_0 \otimes z_0)^+.$$

$$\text{ii) } (\delta_Z \circ z_0)^- := \{(0, (f_0, g_0)), (1, (f_{15}, g_{15}))\}.$$

Para $(z_0 \otimes z_0)$ temos que:

$(z_0 \otimes z_0) : \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ onde $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = (\{*\} \times \{*\}, t_{1,1}, F_{1,1})$ com $F_{1,1} = (j_1 : * \rightarrow K, j_2 : * \rightarrow K) = K$ e $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} = (A \times A, t_{A,A}, F_{A,A})$ onde $F_{A,A} = (f : A \rightarrow X, g : A \rightarrow X)$.

$$\text{iii) } * = (*, *)((z_0 \otimes z_0)^+(a_1, a_1) \Leftrightarrow *z_0^+a_1.$$

iv) $(j_1, j_2)(z_0 \otimes z_0)^-(f, g)$ onde:

(j_1, f) é um homomorfismo *two-sorted* de z_0^+ para z_0^- , i.e., $*z_0^+a_1 \Rightarrow j_1(*)z_0^-f(a_1)$.

Se $j_1(*) = 0 \Rightarrow f(a_1) = x_1$, se $j_1(*) = 1 \Rightarrow f(a_1) = x_4$.

(j_2, g) é um homomorfismo *two-sorted* de z_0^+ para z_0^- , i.e., $*z_0^+a_1 \Rightarrow j_2(*)z_0^-g(a_1)$.

Se $j_2(*) = 0 \Rightarrow g(a_1) = x_1$, se $j_2(*) = 1 \Rightarrow g(a_1) = x_4$.

Com $r(a_1, f(a_1)) = r(a_1, g(a_1)) = r'(*, k)$. Portanto,

- $K = 0 \Rightarrow f(a_1) = g(a_1) = x_1$;
- $K = 1 \Rightarrow f(a_1) = g(a_1) = x_4$.

Dado esses casos, os únicos pares que satisfazem a condição adjunta, $r(a, g(b)) = s(b, f(a))$, da definição do produto tensorial dos espaços de Chu são os pares (f_0, g_0) para $K = 0$ e (f_{15}, g_{15}) para $K = 1$.

Logo, $(z_0 \otimes z_0)^- = \{(0, (f_0, g_0)), (1, (f_{15}, g_{15}))\}$.

$$2. (\epsilon_Z \circ z_0) = I_1$$

$$\text{i) } (\epsilon_Z \circ z_0)^+ := \{(*, *)\} = 1_1^+$$

$$\text{ii) } (\epsilon_Z \circ z_0)^- = \{(0, 0), (1, 1)\} = 1_1^-.$$

Procedendo de maneira análoga para z_1 .

- y_0 é imparcial para a estrutura Z :

Dado $\Lambda(\varphi) = \delta^\dagger \circ (\varphi \otimes 1_A)$, temos que $\Lambda^\dagger(\varphi) = (\varphi^\dagger \otimes 1_A) \circ \delta$.

i) $(y_0 \otimes 1_A)^+ := \{((*, a_1), (a_1, a_1)), ((*, a_1), (a_2, a_1)), ((*, a_2), (a_1, a_2)), ((*, a_2), (a_2, a_2))\}$.

E assim, $(\delta_Z^\dagger \circ (y_0 \otimes 1_A))^+ := \{(a_1, a_1), (a_2, a_2)\}$.

Por outro lado, $(y_0 \otimes 1_A)^+ := \{((a_1, a_1), (*, a_1)), ((a_1, a_2), (*, a_2)), ((a_2, a_1), (*, a_1)), ((a_2, a_2), (*, a_2))\}$.

Portanto,

$$(\Lambda^\dagger(y_0))^+ := \{(a_1, a_1), (a_2, a_2)\} = (\Lambda^{-1}(y_0))^+.$$

ii) $(y_0 \otimes 1_A)^- = \{(x_1, (f_0, g_0)), (x_4, (f_{15}, g_{15}))\}$.

Logo, $(\delta_Z^\dagger \circ (y_0 \otimes 1_A))^- := \{(x_1, x_1), (x_4, x_4)\}$.

Consequentemente, $(y_0 \otimes 1_A)^- : \{((f_0, g_0), x_1), ((f_{15}, g_{15}), x_4)\}$. Logo,

$$(\Lambda^\dagger(y_0))^- := \{(x_1, x_1), (x_4, x_4)\} = (\Lambda^{-1}(y_0))^-.$$

De modo análogo, temos que:

- ϵ_X^\dagger é clássico para a estrutura Z , assim como ϵ_Z^\dagger é clássico para a estrutura Y ;
- y_0 é clássico para a estrutura Y ;
- z_0 e z_1 são imparciais para a a estrutura Y .

Teorema 7.21. (COECKE; DUNCAN, 2008) *Em uma categoria com pontos "suficientes", cada par de estruturas básicas complementares forma uma bialgebra Hopf (em escala) com antípoda trivial.*

As estruturas de base $(\mathcal{A}, \delta_Z, \epsilon_Z)$ e $(\mathcal{A}, \delta_Y, \epsilon_Y)$ em **FChuRel** sob $K = 2$ são complementares no sentido da Definição 7.20 e do Teorema 7.21.

Existe claramente um funtor monoidal *dagger* $F : \mathbf{FChuRel} \rightarrow \mathbf{FRel}$ enviando \mathcal{A} para $II = \{0, 1\}$ e (δ^+, δ^-) para δ^+ e (ϵ^+, ϵ^-) para ϵ^+ . As estruturas de base em **FChuRel** é essencialmente herdada de **FRel**. Assim, o espaço de Chu $\mathcal{A} = (\{a_1, a_2\}, r, K^A)$ sob $K = 2$ in **FChuRel** representa um sistema com dois observáveis complementares, bem como **FRel**, e pode modelar o comportamento de um qubit consideravelmente.

Proposição 7.22. (COECKE; EDWARDS, 2011) *A estrutura de dois observáveis $((II, (\delta_Z, \epsilon_Z), (\delta_X, \epsilon_X))$ em \mathbf{FRel} é rico o suficiente para simular os protocolos de teletransporte quântico e de codificação densa - incluindo a comunicação clássica e a decoerência devido à medição.*

A Proposição 7.22 também é válida para a estrutura $((\mathcal{A}, (\delta_Z, \epsilon_Z), (\delta_Y, \epsilon_Y))$ em $\mathbf{FChuRel}$ porque para qualquer par de estruturas de base complementares é possível obter uma estrutura de base chamada "base-Bell" $(A, B : A \otimes A \rightarrow B)$, e foi mostrado em (COECKE; DUNCAN, 2008) que o teletransporte quântico e a codificação densa podem ser simulados sempre que houver uma base-Bell (COECKE; EDWARDS, 2011).

Além disso, qualquer fenômeno quântico resultante da existência de estruturas de bases complementares que possam ser simuladas em II em \mathbf{FRel} (COECKE; EDWARDS, 2011) também pode ser simulado em $\mathcal{A} = (\{a_1, a_2\}, r, K^A)$ em $\mathbf{FChuRel}$.

Coecke e Edwards exibem o fato de que morfismos em \mathbf{FdHilb} , mapas lineares podem ser representados como matrizes de números complexos. Em \mathbf{FRel} também é possível representarmos os morfismos por matrizes com entradas agora extraídas do semi-anel booleano de dois elementos $\mathbb{B} = (\{0, 1\}, \wedge, \vee)$ (COECKE; EDWARDS, 2011).

Em $\mathbf{FChuRel}$ sob $K = 2$ temos matrizes como objetos, mas também podemos representar os morfismos

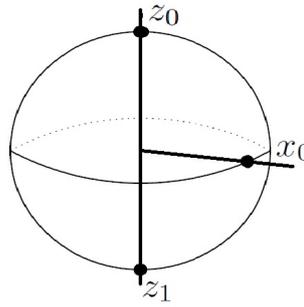
os como pares de matrizes semelhantes a \mathbf{FRel} . Em $\mathbf{FChuRel}$, nossos pontos clássicos e imparciais correspondem aos pares de relações binárias que podem ser representados da seguinte forma (matriz de representação de pares $((_)^+, (_)^-)$):

$$z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

As representações matriciais para z_0^-, z_1^- e y_0^- são representados de maneira semelhante, podemos considerar as matrizes z_0^+, z_1^+ e y_0^+ de relações para fins de comparação com os modelos \mathbf{FdHilb} e \mathbf{FRel} .

Como não há elemento em \mathbb{B} para desempenhar o papel de -1 em \mathbf{FRel} e $\mathbf{FChuRel}$ sob $K = 2$ não tem nenhum ponto para representar negativos como o modelo \mathbf{FdHilb} . Assim, os estados da esfera de Bloch capturados por $\mathbf{FChuRel}$ são isomorfos aos de \mathbf{FRel} . No entanto, comparando as matrizes de $|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle$ com os elementos z_0, z_1, y_0 em $\mathbf{FChuRel}$ correspondem aos pares de matrizes como vimos anteriormente.

Figura 2 – Esfera de Bloch - FChuRel



Fonte: Compilação do autor¹.

Temos que **FChuRel** é uma nova categoria que se apresenta como um modelo interessante que permite simular várias características quânticas em um nível de maior complexidade (objetos são estruturas relacionais e não apenas conjuntos) com relação a categoria **FRel**.

7.3 DESTAQUES DO MODELO **ChuRel**

V. Pratt em (PRATT, 1993) apresenta uma extensão da lógica quântica usando a lógica linear de Girard e conectivos dinâmicos. Além disso, os espaços Chu exibem os fenômenos da mecânica quântica de complementaridade e incerteza (PRATT, 1994) que produz a relação de incerteza de Heisenberg usual e essa incerteza pode ser calculada numericamente de uma forma atraente e simples. Em contraste com a categoria **Rel** que não satisfaz o princípio da incerteza de Heisenberg (HEUNEN; TULL, 2015). Além de poder obter um funtor completo e fiel do grupoide de espaços de Hilbert e suas simetrias com os espaços Chu (ABRAMSKY, 2012).

Por outro lado, ao contrário da categoria de espaços Chu (**Chu_K**), mostramos que **ChuRel** é uma categoria compacta *dagger* capaz de modelar fenômenos como emaranhamento, teletransporte quântico e a transição de estados.

Assim, a categoria **ChuRel** é um modelo que captura fenômenos quânticos de uma forma mais abrangente do que as categorias **Rel** e **Chu_K**. Uma vez que **ChuRel** é um modelo quântico de brinquedo mais vantajoso do que **Rel** pela riqueza de seus objetos que são espaços Chu, que são universais e possuem diversas aplicações como mencionamos no capítulo 6 além de produzir a relação de incerteza de Heisenberg. E **ChuRel** apresenta mais aspectos quânticos do que **Chu_K** devido às características de seus morfismos que são relações.

Dada a conexão da lógica linear e computação quântica como em (PRATT, 1993; DUNCAN et al., 2006; ABRAMSKY; DUNCAN, 2006), **ChuRel** pode transcrever os fenômenos quânticos

através da tradução de fenômenos descritos por MLL (com seus conectivos lógicos) e pode se tornar um ambiente natural para algoritmos quânticos.

7.4 A NÃO EQUIVALÊNCIA DAS CATEGORIAS \mathbf{RelChu} E \mathbf{ChuRel}

Os morfismos na categoria \mathbf{RelChu} diferem daqueles da categoria \mathbf{ChuRel} , uma vez que os morfismos em \mathbf{RelChu} são subobjetos de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ enquanto os morfismos em \mathbf{ChuRel} são pares de relações binárias cujos elementos estão relacionados se satisfazem a condição adjunta.

Definição 7.23. Um funtor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ é fiel (*faithful*) se para quaisquer $A, B \in \mathbf{C}$ e para quaisquer morfismos $f, g : A \rightarrow B$ temos que

$$Ff = Fg : FA \rightarrow FB \quad \text{implica} \quad f = g : A \rightarrow B.$$

Definição 7.24. Um funtor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ é pleno (*full*) se para quaisquer $A, B \in \mathbf{C}$ e para qualquer $g : FA \rightarrow FB$ existe $f : A \rightarrow B$ tal que $Ff = g$.

Teorema 7.25. (COECKE, 2011, p.278) *Um funtor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ é uma equivalência de categorias se, e somente se, é ao mesmo tempo pleno (full) e fiel (faithfull), e se cada objeto $B \in \mathbf{D}$ é isomorfo a um objeto FA para algum $A \in \mathbf{C}$.*

Teorema 7.26. *As categorias \mathbf{ChuRel} e \mathbf{RelChu} não são equivalentes.*

Prova. Em primeiro lugar, observe que dados quaisquer objetos \mathcal{A} e \mathcal{B} em $\mathbf{Rel}(\mathbf{Chu}_K)$, sempre existe um subobjeto g de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Logo, $\mathbf{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \neq \emptyset$.

Afirmamos que existem $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Chu}_K(\mathbf{Rel}))$ para o qual não há morfismo entre eles *i.e.* $\mathbf{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \emptyset$. É suficiente exibir dois espaços Chu de modo que $r(a, x) \neq s(b, y)$, para todo $a \in A, b \in B, x \in X, y \in Y$. Podemos supor, sem perda de generalidade $0, 1 \in K$. É fácil ver que $\mathcal{A} = (\{*\}, r, \{*\}) = (0)$ e $\mathcal{B} = (\{*\}, s, \{*\}) = (1)$ satisfaz a condição desejada. Portanto, $\mathbf{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \emptyset$.

Finalmente, suponha $F : \mathbf{Chu}_K(\mathbf{Rel}) \rightarrow \mathbf{Rel}(\mathbf{Chu}_K)$ sendo uma equivalência de categorias. Tome $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Chu}_K(\mathbf{Rel}))$ tal que $\mathbf{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \emptyset$, mas $\mathbf{Hom}(F(\mathcal{A}), F(\mathcal{B})) \neq \emptyset$. Desse modo, F não pode ser pleno (*full*). Pelo Teorema 7.25 as categorias $\mathbf{Chu}_K(\mathbf{Rel})$ e $\mathbf{Rel}(\mathbf{Chu}_K)$ não são equivalentes.

□

Temos visto na literatura de que muitas características da teoria quântica podem ser captada para categorias compactas *dagger* (COECKE, 2011) e, nesse sentido, apresentamos dois modelos quânticos alternativos.

8 PROPRIEDADES CATEGÓRICAS DE RELAÇÕES L-FUZZY

A partir dos resultados obtidos com a categoria \mathbf{ChuRel} nesta tese e o exemplo na categoria \mathbf{Rel} em (COECKE; EDWARDS, 2011), observamos que a limitação desses modelos em representar um maior número de estados quânticos poderia ser resolvida com a multi-valoração em seus respectivos morfismos. Desse modo, iniciamos os estudos das propriedades categóricas das relações \mathbb{L} -fuzzy.

Neste capítulo apresentamos as noções das categorias com relações binárias multi-valoradas e algumas propriedades básicas correspondentes visando aplicações em áreas como ciência da computação, lógica linear e mecânica quântica. A ênfase está nos aspectos monoidais das categorias. Uma visão monoidal das relações fuzzy pode ampliar o espectro de aplicações da teoria dos conjuntos fuzzy.

Uma das propostas é coletar em um lugar, de forma sistemática, as propriedades das seguintes categorias monoidais com relações multi-valoradas como morfismos:

1. \mathbf{Rel} : conjuntos *crisp* and *crisp* relações *crisp* (COECKE, 2011, p.223).
2. $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$: conjuntos \mathbb{L} -fuzzy e relações *crisps* (HARDING; WALKER; WALKER, 2014).
3. $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$: conjuntos *crisp* e relações \mathbb{L} -fuzzy (WINTER; JACKSON, 2016).
4. $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$: conjuntos \mathbb{L} -fuzzy e relações \mathbb{L} -fuzzy ¹ (BARR, 1996).

Em cada caso investigamos as propriedades que cada categoria possui e quando é possível obter um modelo categórico (monoidal), e em particular para computação quântica (HOVEY, 1999).

Em detalhe, nossas principais contribuições neste capítulo são:

- $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$: proposição 8.5, teorema 8.6, teorema 8.8, teorema 8.12, teorema 8.9, corolário 8.10 e corolário 8.11.
- $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$: proposição 8.15, teorema 8.17, teorema 8.20 e teorema 8.19.
- $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$: proposição 8.22, proposição 8.23, teorema 8.24, teorema 8.26 e teorema 8.25.

Um dos nossos principais interesses é obter uma estrutura monoidal nas categorias \mathbb{L} -fuzzy para modelar aspectos de diferentes áreas. Como mencionamos na seção 4.3, precisamos

¹ Veremos mais tarde que os reticulados em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$ **devem** ser os mesmos.

impor algumas condições e operações no reticulado considerado como uma categoria como no Exemplo 4.3. Dessa forma, o reticulado das categorias abordadas nesse capítulo terá a estrutura monoidal que definimos na Seção 4.3.4, especificamente na Definição 4.48.

Além disso, é possível alcançar um nível mais alto de abstração e generalidade usando a construção da Categoria de Kleisli, um caminho que não seguimos no presente trabalho (veja a Seção 8.5 para comentários detalhados).

Em suma, propomos uma revisão sistemática de categorias com conjuntos e relações no ambiente \mathbb{L} -fuzzy, preenchendo algumas lacunas da literatura (destacadas acima as nossas contribuições), e investigamos algumas propriedades categóricas básicas como produto, co-produto, tensor, negação, estrutura *dagger*, monoide e co-monoide interno.

Veremos que as quatro categorias aqui abordadas têm uma estrutura monoidal simétrica (a estrutura necessária para vários modelos categóricos).

8.1 \mathbf{Rel} : A CATEGORIA DE CONJUNTOS *CRISP* E RELAÇÕES *CRISP*

Nesta seção, cobrimos as propriedades da categoria \mathbf{Rel} (COECKE, 2011), categoria de conjuntos *crisp* e relações *crisp* (*Crisp-Crisp*).

Definição 8.1. A categoria \mathbf{Rel} é definida da seguinte forma:

1. Os objetos são conjuntos *crisp*: A, B, C, \dots ;
2. Os morfismos são relações *crisp* $R : A \rightarrow B$, i.e. $R : A \times B \rightarrow \mathbb{B}$;
3. Para $R : A \rightarrow B$ e $S : B \rightarrow C$ a composição é definido por:

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B; (a, b) \in R, (b, c) \in S\};$$

4. A identidade é definida por: $Id_A := \{(a, a) \in A \times A \mid a \in A\}$.

8.1.1 Produto and Co-produto em \mathbf{Rel}

Em \mathbf{Rel} , tanto o produto quanto o coproduto de uma família de conjuntos X_i são dados pela *união disjunta* $\coprod X_i$ de conjuntos juntamente com as relações $p_i := \{(x, i), x\}; x \in X_i\}$ para o produto $q_i := \{x, (x, i)\}; x \in X_i\}$ para o co-produto.

8.1.2 Produto tensorial e estrutura monoidal simétrica em \mathbf{Rel}

A categoria \mathbf{Rel} é uma categoria monoidal simétrica com o produto cartesiano como o produto monoidal de dois conjuntos *crisp*, a unidade tensorial da estrutura é qualquer conjunto unitário. Dadas duas relações *crisp* $R : A \rightarrow B$ e $T : C \rightarrow D$, o produto monoidal $R \times T$ é:

$$R \times T := \{((a, c), (b, d)) \in ((A \times C) \times (B \times D))\},$$

onde $(a, b) \in R$, $(c, d) \in T$. Os isomorfismos naturais são definidos como segue:

1. associatividade: $\alpha_{A,B,C} := \{(((a, b), c), (a, (b, c))) | a \in A, b \in B, c \in C\}$;
2. unidade esquerda: $\lambda_A := \{(a, (*, a)) | a \in A\}$;
3. unidade direita: $\rho_A := \{(a, (a, *)) | a \in A\}$;
4. comutatividade: $\sigma_{A,B} := \{((a, b), (b, a)) | a \in A, b \in B\}$.

Essas relações são todas de valor único, portanto, também são funções e esses isomorfismos naturais satisfazem todas as condições de coerência (COECKE, 2011).

8.1.3 Negação e estrutura *dagger* em \mathbf{Rel}

Em \mathbf{Rel} , o functor *dagger* é a conversa relacional. A conversa $R^\cup : B \rightarrow A$ de uma relação *crisp* $R : A \rightarrow B$ é dada por $R^\cup := \{(b, a) | (a, b) \in R\}$. Assim, o functor involutivo contravariante com identidade-em-objetos é dado por:

$$\dagger : \mathbf{Rel} \rightarrow \mathbf{Rel} :: R \mapsto R^\cup.$$

Para duas relações *crisp* $R : A \rightarrow B$ e $T : C \rightarrow D$, temos:

$$(R \times T)^\dagger = \{((b, d), (a, c))\} = R^\dagger \times T^\dagger.$$

onde $(a, b) \in R$, $(c, d) \in T$. Além disso, $\alpha_{A,B,C}^\dagger = \alpha_{A,B,C}^{-1}$, $\lambda_A^\dagger = \lambda_A^{-1}$, $\rho_A^\dagger = \rho_A^{-1}$, $\sigma_{A,B}^\dagger = \sigma_{A,B}^{-1}$, uma vez que o inverso de todos esses morfismos em \mathbf{Rel} é a conversa relacional. Portanto, \mathbf{Rel} é \dagger -SMC como esperado.

8.1.4 Monoides and co-monoides em \mathbf{Rel}

Um co-monoide interno em \mathbf{Rel} é um conjunto A com relações:

1. $\delta : A \rightarrow A \times A := \{(a, (a, a)) \mid a \in A\}$;
2. $\varepsilon : A \rightarrow \{*\} := \{(a, *) \mid a \in A\}$.

É facilmente verificável que essas relações satisfazem as condições de Definição 5.26.

Dado um co-monoide interno (A, δ, ε) em \mathbf{Rel} , definimos um monoide interno (A, μ, e) por $\mu = \delta^\dagger$ e $e = \varepsilon^\dagger$.

8.1.5 Dualidade e Compacidade em \mathbf{Rel}

A categoria \mathbf{Rel} é compacta fechada com objectos auto-duais, isto é, $A^* = A$, para todo $A \in \mathbf{Rel}$. O morfismo η_A e ϵ_A são dados por:

$$\eta_A := \{(*, (a, a)) \mid a \in A\} \quad \text{and} \quad \epsilon_A := \{((a, a), *) \mid a \in A\}.$$

É fácil verificar que $\lambda_A^{-1} \circ (\epsilon_A \otimes I_A) \circ \alpha_{A,A,A} \circ (I_A \otimes \eta_A) \circ \rho_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Além disso, o transposto e o adjunto coincidem, ou seja, para uma relação *crisp* $R : A \rightarrow B$, temos que:

$$R^\dagger = (I_A \times \epsilon_B) \circ (I_A \times R \times I_B) \circ (\eta_A \times I_Y) = R^*.$$

Segue que $\eta_A^\dagger := \{((a, a), *) \mid a \in A\}$, consequentemente $\eta_A^\dagger \circ \sigma_{A,A^*} = \eta_A^\dagger = \epsilon_A$. Logo, \mathbf{Rel} é uma categoria compacta *dagger*.

8.2 $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$: A CATEGORIA DE CONJUNTOS \mathbb{L} -FUZZY E RELAÇÕES CRISP

Goguen em (GOGUEN, 1967) explora as propriedades categóricas da categoria de conjuntos \mathbb{L} -fuzzy e *funções*. Em (HARDING; WALKER; WALKER, 2014) os autores definiram a categoria de conjuntos *fuzzy* e relações.

Nesta seção, apresentamos a categoria $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ de conjuntos \mathbb{L} -fuzzy e relações *crisp* (*LFuzzy - Crisp*). Descrevemos o produto e co-produto com base na construção em \mathbf{Rel} (proposição 8.4). Além disso, estudamos a estrutura monoidal em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ (proposição 8.5) e mostramos que $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ é uma categoria monoidal simétrica (teorema 8.6).

Veremos que existe um funtor involutivo (\dagger) apenas para uma subcategoria de $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ (teorema 8.8) e provamos que $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ não é uma categoria compacta (teorema 8.12). Por fim, definimos as estruturas do co-monoide e monoide interno (teorema 8.9).

Definição 8.2. Seja \mathbb{L} um reticulado brouweriano completo com estrutura monoidal (\star, u) . A categoria de conjuntos \mathbb{L} -fuzzy e relações *crisp*, $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$, é definida da seguinte forma:

1. Os objetos são conjuntos \mathbb{L} -fuzzy (A, α) onde $\alpha : A \rightarrow \mathbb{L}$;
2. Morfismos são relações *crisp* $R : (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ tal que $(a, b) \in R$ implica $\alpha(a) \leq \beta(b) \forall a \in A, b \in B$;
3. A composição dos morfismos é a composição usual da relação *crisp*, dados $R : (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ e $S : (B, \beta) \rightarrow (C, \gamma)$ então $S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B; (a, b) \in R, (b, c) \in S\}$ tal que $\alpha(a) \leq \gamma(c)$ pela transitividade de $\alpha(a) \leq \beta(b)$ e $\beta(b) \leq \gamma(c)$.
4. A identidade é a relação de identidade em (X, α) , logo $Id_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$.

A composição de relações *crisp* é associativa e observe que $Id_B \circ R = R \circ Id_A = R$ também é satisfeita em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$.

Se $\mathbb{L} = [0, 1]$ é tomada, obtemos a categoria de conjuntos *fuzzy* e relações *crisp*:

Definição 8.3. (HARDING; WALKER; WALKER, 2014) Considere $\mathbb{I} = [0, 1]$. A categoria de conjuntos *fuzzy* e relações *crisp* $\mathbf{Rel}(\mathbb{I})$ tem conjuntos *fuzzy* como objetos (X, α) onde $\alpha : X \rightarrow [0, 1]$, e os morfismos são relações *crisp* $R : (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ tal que $(a, b) \in R$ então $\alpha(a) \leq \beta(b) \forall a \in A, b \in B$. Identidades e composição são a identidade e composição usuais de relações *crisp*.

8.2.1 Produto e Co-produto em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$

A primeira questão é se a categoria $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ tem produto e co-produto, e motivado pela estrutura em \mathbf{Rel} , o candidato tanto para produto quanto para co-produto é a união disjunta.

Proposição 8.4. Em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$, tanto o produto quanto o co-produto $(A, \alpha) + (B, \beta)$ de dois conjuntos \mathbb{L} -fuzzy é sua união disjunta

$$(A, \alpha) + (B, \beta) = \{(a, 1); a \in (A, \alpha)\} \cup \{(b, 2); b \in (B, \beta)\},$$

com projeções de produto e injeções de co-produto, respectivamente:

$$\pi_1 = \{((a, 1), a); a \in (A, \alpha)\} \quad e \quad \pi_2 = \{((b, 2), b); b \in (B, \beta)\};$$

$$i_1 = \{(a, (a, 1)); a \in (A, \alpha)\} \quad e \quad i_2 = \{(b, (b, 2)); b \in (B, \beta)\}.$$

Prova. Análogo ao caso quando $\mathbb{L} = [0,1]$, para mais detalhes veja (HARDING; WALKER; WALKER, 2014).

□

8.2.2 Produto tensorial e estrutura monoidal simétrica em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$

O bifuntor \otimes em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ é construído em um reticulado com uma estrutura monoidal.

Proposição 8.5. *Seja $\mathbb{L} = (L, \wedge, \vee, \perp, \top, \star, u)$ um reticulado brouweriano completo com estrutura monoidal simétrica. Existe um bifuntor \otimes em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ dado por:*

1. $(A, \alpha) \otimes (B, \beta) = (A \times B, \alpha \star \beta)$;
2. $R \otimes S$ é o produto tensorial usual de relações crisp $R \times S$;
3. *Unidade tensorial:* se u é a unidade para \star então $I = (\{*\}, u)$ é a unidade para \otimes , onde u é uma função constante $u(*) = u$;
4. \star é associativo $\Rightarrow \otimes$ é associativo (up to isomorphism);
5. \star é comutativo $\Rightarrow \otimes$ é comutativo (up to isomorphism).

Prova. De fato, seja $R : (A, \alpha) \rightarrow (A', \alpha')$ e $S : (B, \beta) \rightarrow (B', \beta')$ morfismos em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$, se $(a, b)R \otimes S(a', b')$ então aRa' e bSb' implica que $\alpha(a) \leq \alpha'(a')$ e $\beta(b) \leq \beta'(b')$, uma vez que \star é um bifuntor em \mathbb{L} , temos que $\alpha(a) \star \beta(b) \leq \alpha'(a') \star \beta'(b')$ (pela Definição 4.48). Portanto, $R \otimes S = R \times S$ é um morfismo em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$.

Além disso, dados os morfismos $R_1 : (A_1, \alpha_1) \rightarrow (B_1, \beta_1)$, $R_2 : (A_2, \alpha_2) \rightarrow (B_2, \beta_2)$, $S_1 : (B_1, \beta_1) \rightarrow (C_1, \gamma_1)$ e $S_2 : (B_2, \beta_2) \rightarrow (C_2, \gamma_2)$, temos:

$$(S_1 \otimes S_2) \circ (R_1 \otimes R_2) = \{((a_1, a_2), (c_1, c_2))\} = (S_1 \circ R_1) \otimes (S_2 \circ R_2)$$

tal que $\alpha_1(a_1) \star \alpha_2(a_2) \leq \gamma_1(c_1) \star \gamma_2(c_2)$, visto que $\alpha_1(a_1) \star \alpha_2(a_2) \leq \beta_1(b_1) \star \beta_2(b_2)$ e $\beta_1(b_1) \star \beta_2(b_2) \leq \gamma_1(c_1) \star \gamma_2(c_2)$.

Ademais, é fácil ver que $Id_{(A,\alpha)} \otimes Id_{(B,\beta)} = Id_{(A,\alpha) \otimes (B,\beta)}$. Uma vez que \otimes é compatível com morfismos de composição e identidade, segue que \otimes é um bifuntor.

Podemos definir os seguintes isomorfismos naturais $\alpha_{A,B,C}$, $\sigma_{A,B}$, λ_A e ρ_A em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$:

1. $\alpha_{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)} := \{(((a,b),c), (a,(b,c)))\}$ onde $a \in (A,\alpha)$, $b \in (B,\beta)$, $c \in (C,\gamma)$.

Visto que \star é associativo em \mathbb{L} , então $(\alpha(a) \star \beta(b)) \star \gamma(c) = \alpha(a) \star (\beta(b) \star \gamma(c))$;

2. $\sigma_{(A,\alpha),(B,\beta)} := \{((a,b), (b,a)) \mid a \in (A,\alpha), b \in (B,\beta)\}$ como \star is comutativo em \mathbb{L} , temos que $\alpha(a) \star \beta(b) = \beta(b) \star \alpha(a)$;

3. $\lambda_{(A,\alpha)} := \{(a, (*, a)) \mid a \in (A,\alpha)\}$ e $\rho := \{(a, (a, *)) \mid a \in (A,\alpha)\}$ dado que u é a unidade em \mathbb{L} , i.e. $u \star k = k \star u = k, \forall k \in \mathbb{L}$, então $u(*) \star \alpha(a) = \alpha(a) = \alpha(a) \star u(*)$.

Assim, devido à functorialidade de \star , esses isomorfismos naturais estão bem definidos em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$. Portanto, $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ tem um bifuntor \otimes com estrutura monoidal simétrica. \square

Teorema 8.6. *A categoria $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ com o produto tensorial \otimes (definido na Proposição 8.5) é uma categoria monoidal simétrica (SMC).*

Prova. A estrutura monoidal simétrica do bifuntor \otimes given na proposição 8.5 faz de $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ uma categoria monoidal simétrica. O diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 (A, \alpha) \otimes (B, \beta) & \xrightarrow{Id_{(A,\alpha)} \times \lambda_{(B,\beta)}} & (A, \alpha) \otimes ((\{*\}, u) \otimes (B, \beta)) \\
 & \searrow \rho_{(A,\alpha)} \times Id_{(B,\beta)} & \downarrow \alpha_{(A,\alpha), (\{*\}, u), (B,\beta)} \\
 & & ((A, \alpha) \otimes (\{*\}, u)) \otimes (B, \beta)
 \end{array}$$

comuta já que ambos os caminhos agora são iguais a

$$\{((a,b), ((a,*), b)); a \in (A,\alpha), b \in (B,\beta)\}.$$

Logo $\alpha(a) \star \beta(b) \leq (\alpha(a) \star u(*)) \star \beta(b)$ uma vez que $\alpha(a) \star \beta(b) \leq \alpha(a) \star (u(*) \star \beta(b)) \leq (\alpha(a) \star u(*)) \star \beta(b)$.

As outras condições de coerência (COECKE, 2011, p.209-210) são verificados de forma análoga. \square

Harding et al. determinaram as propriedades categóricas da categoria $\mathbf{Rel}(\mathbb{I})$, e considerou sua relação com outras categorias familiares (HARDING; WALKER; WALKER, 2014).

A ideia de adicionar estruturas a partir do intervalo $[0, 1]$ (tal como t -normas e t -conormas) permitiu estruturas adicionais na categoria. Portanto, para qualquer t -norma T em $[0, 1]$ a

categoria $(\mathbf{Rel}(\mathbb{I}), \otimes_T)$ é uma categoria monoidal simétrica, para mais detalhes veja (HARDING; WALKER; WALKER, 2014).

8.2.3 Negação e estrutura dagger em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$

Assuma que \mathbb{L} tem uma negação $\neg : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ tal que dado um conjunto \mathbb{L} -fuzzy (A, α) temos $\neg(\neg(\alpha)) = \alpha$ (negação *strong* (BEDREGAL, 2010)). Existe uma involução \ddagger em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ definido como segue:

1. $(A, \alpha)^\ddagger = (A, \alpha^\ddagger)$ onde $\alpha^\ddagger(a) = \neg(\alpha(a)) \forall a \in A$;
2. Para morfismo $R : (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ temos $R^\ddagger : (B, \beta)^\ddagger \rightarrow (A, \alpha)^\ddagger$ é a relação conversas R^\cup .

O funtor \ddagger é uma involução contravariante em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ mas não é a identidade nos objetos.

Neste contexto, queremos definir um funtor contravariante *dagger* (\dagger), com a identidade em objetos, os morfismos também são definidos como a conversas relacional R^\cup , mas com a exigência $(A, \alpha)^\dagger = (A, \alpha)$ nos objetos. Portanto, para o morfismo $R : (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$, gostaríamos de definir $R^\dagger : (B, \beta) \rightarrow (A, \alpha)$. Desse modo, devemos ter que $R^\dagger = R^\cup$. O problema é que R^\cup não está bem definido para qualquer morfismo em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$. No próximo Lema, caracterizamos os morfismos em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ em que a conversas é bem definida.

Lema 8.7. *Para uma bijeção $R : (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$, as seguintes são equivalentes:*

1. Sua conversas $R^\cup : (B, \beta) \rightarrow (A, \alpha)$ é um morfismo em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$.
2. $\alpha(a) = \beta(b)$ e $\alpha = \beta \circ R$, i.e., *preserva o grau*.
3. R é um isomorfismo em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$.

Prova. A prova deste lema é baseada na prova da Proposição 3.14 em (HARDING; WALKER; WALKER, 2014). (1 \Rightarrow 2) Suponha que R é uma bijeção e sua conversas R^\cup visto como um morfismo em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$. Isto implica que se aRb então $\alpha(a) \leq \beta(b)$ e $\beta(b) \leq \alpha(a)$, logo $\alpha(a) = \beta(b)$. Segue que $\alpha = \beta \circ R$. (2 \Rightarrow 3) Uma vez que R é uma bijeção em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ satisfazendo $\alpha = \beta \circ R$. Pela unicidade do inverso, R é um isomorfismo com o seu converso sendo o seu inverso, i. e., R^\cup é única relação tal que $R \circ R^\cup = Id_{(B, \beta)}$ e $R^\cup \circ R = Id_{(A, \alpha)}$ em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$. (3 \Rightarrow 1) Dado R um isomorfismo, segue que R tem um inverso em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$. Neste

caso, esse inverso deve ser sua conversa R^\cup visto como um morfismo de (B, β) para (A, α) em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$. \square

Como consequência, chegamos ao seguinte resultado:

Proposição 8.8. *Considere uma subcategoria de $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ de modo que todo morfismo é uma bijeção e preserva graus. Existe um funtor contravariante involutivo, identidade nos objetos, (\dagger) nesta subcategoria.*

Prova. Seja $R : (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ uma bijeção em que R é preservador de grau, i.e., se aRb então $\alpha(a) = \beta(b)$. Segue do Lema 8.7 que R^\cup é um morfismo em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$. Logo, a involução definida por $R^\dagger = R^\cup$ é um funtor na subcategoria de $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ em que todo morfismo é uma bijeção. Note que o funtor (\dagger) é a identidade nos objetos e R é um isomorfismo. \square

8.2.4 Monoides e Co-monoides em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$

Teorema 8.9. *Dados (A, α) e (B, β) objetos em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$. As relações*

$$\delta = \{(a, (a, a)); a \in (A, \alpha)\} \text{ e } \varepsilon = \{(a, *); a \in (A, \alpha)\}$$

definem um co-monoide interno em (A, α) na categoria $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ sse $\alpha(a) \leq u, \forall a \in (A, \alpha)$. E as relações

$$\mu = \{((b, b), b); b \in (B, \beta)\} \text{ and } e = \{(*, b); b \in (B, \beta)\}$$

definem um monoide interno em (B, β) na categoria $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ sse $u \leq \beta(b), \forall b \in (B, \beta)$.

Prova. Se $(a, (a, a)) \in \delta$, isto implica que $\alpha(a) \leq \alpha(a) \star \alpha(a)$, e se $((b, b), b) \in \mu$ implica que $\beta(b) \star \beta(b) \leq \beta(b)$. Pela idempotência de \star , temos que $\alpha(a) \star \alpha(a) = \alpha(a)$ e $\beta(b) \star \beta(b) = \beta(b)$.

Se $(a, *) \in \varepsilon$ então $\alpha(a) \leq u(*)$, que exige que $\alpha(a) \leq u, \forall a \in (A, \alpha)$. Similarmente, se $(*, b) \in e$ implica que $u(*) \leq \beta(b)$ é equivalente exigir que $u \leq \alpha(a), \forall b \in B$.

A composta $(Id_A \otimes \delta) \circ \delta : (A, \alpha) \rightarrow (A, \alpha) \otimes ((A, \alpha) \otimes (A, \alpha))$ é o conjunto de tuplas $\{(a, (a_1, (a_2, a_3)))\}$ tal que $(a_4, a_5) \in ((A, \alpha) \otimes (A, \alpha))$ com $(a, (a_4, a_5)) \in \delta$ e $((a_4, a_5), (a_1, (a_2, a_3))) \in (Id_A \otimes \delta)$.

Pela definição de δ temos $a = a_4 = a_5 = a_2 = a_3$. Além disso, pela definição de Id_A temos $a_4 = a_1$. Assim, isso implica que $(Id_A \otimes \delta) \circ \delta := \{(a, (a, (a, a)))\}; a \in (A, \alpha)$. Analogamente, $(\delta \otimes Id_A) \circ \delta := \{(a, ((a, a), a)); a \in (A, \alpha)\}$.

Uma vez que o tensor é associativo, temos que $(Id_A \otimes \delta) \circ \delta = (\delta \otimes Id_A) \circ \delta$. A condição $\mu \circ (e \otimes Id_A) = \mu \circ (Id_A \otimes \mu)$ para o monoide interno é verificada de forma análoga. A verificação de outras condições das Definições 5.26 e 5.27 são deixados para o leitor. \square

Corolário 8.10. *Em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$, se o produto tensorial $\star = \wedge$ com a unidade $u = \top$ em \mathbb{L} , então todo objeto (A, α) carrega uma estrutura co-monoide interno.*

Prova. De fato, se $(a, (a, a)) \in \delta$ implica que $\alpha(a) \leq \alpha(a) \wedge \alpha(a)$ e se $(a, *) \in \varepsilon$, então $\alpha(a) \leq \top, \forall a \in A$. \square

Corolário 8.11. *Se o produto tensorial $\star = \wedge$ com a unidade $u = \top$ em \mathbb{L} , um objeto (B, β) em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ tem uma estrutura monoide interna se o grau de pertinência (membership) de todos os elementos de B é igual ao maior elemento, i.e. $\beta(b) = \top, \forall b \in B$.*

Prova. Se $((b, b), b) \in \mu$ implica que $\beta(b) \wedge \beta(b) \leq \beta(b)$ e se $(*, b) \in e$ implica que $\top \leq \beta(b)$ é equivalente a exigir que $\beta(b) = \top, \forall b \in B$. \square

8.2.5 Dualidade e Compacidade em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$

Podemos definir uma dualidade em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$:

$$(A, \alpha)^* = (A, \alpha^*) \quad \text{onde} \quad \alpha^*(a) = \neg(\alpha(a)) \quad \forall a \in A.$$

Assumindo que \mathbb{L} tem uma negação $\neg : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ tal que dado um conjunto \mathbb{L} -fuzzy (A, α) temos que $\neg(\neg(\alpha)) = \alpha$.

Existem na literatura vários candidatos para a negação em \mathbb{L} , mas se determinarmos o produto tensorial específico em \mathbb{L} , independentemente da escolha do objeto dual, a categoria não será compacta fechada como mostramos abaixo.

Teorema 8.12. *A categoria $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ não é uma categoria compacta.*

Prova. Considere (A, \perp) em $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ onde $\perp(a)$ é a função constante $\perp(a) = \perp \forall a \in A$. O morfismo $\eta_{(A, \perp)} : (\{\star\}, u) \rightarrow (A, \perp)^* \otimes (A, \perp)$ só pode ser a relação vazia, caso contrário, se houver $\{(*, (a, a))\} \in \eta_{(A, \perp)}$ teríamos $u \leq \perp^*(a) \star \perp$ (*bottom* é preservado para $a \star _$ sendo um adjunto esquerdo) e independente da escolha do dual $\perp^*(a)$, temos $u \leq \perp$ implica que $u = \perp$ que contradiz a definição de u e \perp . Portanto, $\eta_{(A, \perp)} = \emptyset$ e não satisfaz as condições da Definição 5.9. \square

8.3 $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$: A CATEGORIA DE CONJUNTOS *CRISP* E RELAÇÕES \mathbb{L} -FUZZY

Os autores em (KAWAHARA; FURUSAWA, 1999; HUSSAIN, 2010) desenvolveram propriedades categóricas monoidais com a categoria de conjuntos e relações *fuzzy*.

A generalização para a categoria $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$, de conjuntos e relações \mathbb{L} -fuzzy, é vista em (WINTER, 2007) como um caso particular das categorias de Dedekind e as categorias de Goguen.

Nesta seção, exibimos o produto e co-produto da categoria $\mathbb{L}\mathbf{-Rel}$ (proposição 8.15), mostramos que esta categoria é monoidal simétrica (teorema 8.17) e compacta *dagger* (teorema 8.20). Além disso, definimos as estruturas de monoide e co-monoide interno (teorema 8.19).

Como mencionado anteriormente, o reticulado *Brouwerian* completo deve ter uma estrutura monoidal algébrica para a estrutura monoidal categórica em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ (*Crisp-LFuzzy*).

Definição 8.13. Seja \mathbb{L} um reticulado brouweriano completo com estrutura monoidal (\star, u) . A categoria de conjuntos crisp e relações \mathbb{L} -fuzzy, $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$, é definida da seguinte forma:

1. Os objetos são conjuntos não vazios;
2. Os morfismos são relações \mathbb{L} -**fuzzy**: uma relação $R : A \rightarrow B$ entre dois conjuntos A e B é uma função $R : A \times B \rightarrow \mathbb{L}$;
3. Para $R : A \rightarrow B$ e $S : B \rightarrow C$ relações \mathbb{L} -fuzzy, a composição é definida por:

$$(S \circ R)(a, c) = \bigvee_{b \in B} (R(a, b) \star S(b, c));$$

4. A identidade no conjunto A é dada por:

$$Id_A(x, y) := \begin{cases} \perp & \text{se } x \neq y \\ u & \text{se } x = y \end{cases}$$

A composição de relações \mathbb{L} -fuzzy é associativa e se R é uma relação \mathbb{L} -fuzzy de X para Y então $Id_Y \circ R = R = R \circ Id_X$, para mais detalhes veja (GOGUEN, 1967).

Se $\star = \wedge$ com $u = \top$ então a estrutura da categoria $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ é de fato uma categoria Dedekind (WINTER, 2007).

Quando \mathbb{L} é o intervalo unitário $[0, 1]$, temos a categoria de conjuntos e relações *fuzzy*:

Definição 8.14. Seja $[0, 1]$ o intervalo unitário. A categoria de conjuntos e relações *fuzzy*, $[0, 1]\mathbf{-Rel}$, tem conjuntos *crisp* como objetos, e os morfismos são relações *fuzzy* $R : A \rightarrow B$

com $A \times B \rightarrow [0, 1]$. A composição é dada por $S \circ R(a, c) = \bigvee_{b \in B} (R(a, b) \wedge S(b, c))$, a identidade $Id_A(x, y) = 0$ se $x \neq y$ e $Id_A(x, y) = 1$ se $x = y$.

Para mais detalhes, referimos os trabalhos (KAWAHARA; FURUSAWA, 1999; HUSSAIN, 2010) onde os autores mostraram algumas propriedades categóricas adicionais.

8.3.1 Produto e Co-produto em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$

Proposição 8.15. *Em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$, tanto o produto quanto o coproduto de dois conjuntos são sua união disjunta $A + B = \{(a, 1); a \in A\} \cup \{(b, 2); b \in B\}$ com as relações de projeções do produto $\pi_1 : A + B \rightarrow A$, $\pi_2 : A + B \rightarrow B$ e as injeções do co-produto $i_1 : A \rightarrow A + B$, $i_2 : B \rightarrow A + B$ definidos respectivamente:*

$$\pi_1((a', 1), a) := \begin{cases} u, & \text{se } a = a'; \\ \perp, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \pi_2((b', 2), b) := \begin{cases} u, & \text{se } b = b'; \\ \perp, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e

$$i_1(a, (a', 1)) := \begin{cases} u, & \text{se } a = a'; \\ \perp, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i_2(b, (b', 2)) := \begin{cases} u, & \text{se } b = b'; \\ \perp, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prova. Seja $R_1 : X \rightarrow A$ e $R_2 : X \rightarrow B$ morfismos $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$. Defina uma relação \mathbb{L} -fuzzy $U : X \rightarrow A + B$ definida por $U(x, (a, 1)) = R_1(x, a)$ e $U(x, (b, 2)) = R_2(x, b) \forall a \in A, \forall b \in B$. é fácil ver que U é um morfismo em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$, e também temos que U é o único morfismo tal que $\pi_1 \circ U(x, a) = R_1(x, a)$ e $\pi_2 \circ U(x, b) = R_2(x, b)$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{\pi_1} & A + B & \xrightarrow{\pi_2} & B \\ & \swarrow R_1 & \uparrow U & \searrow R_2 & \\ & & C & & \end{array}$$

As propriedades do co-produto são mostradas analogamente. □

8.3.2 Produto tensorial e estrutura monoidal simétrica em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$

Marsden e Genovese em (MARSDEN; GENOVESE, 2017) definem a categoria $\mathbf{Rel}(Q)$ de conjuntos crisp e relações valoradas em um quantal Q . Mas para capturar a convexidade, um dos objetivos dos autores, eles encontraram uma maneira de incorporar uma estrutura de

assinatura algébrica, (Σ, E) -álgebras, com conjuntos de operações Σ e equações E , obtendo uma Q -relação algébrica.

(Σ, E) -álgebras e Q -relações algébrica formam a categoria $\mathbf{Rel}_{(\Sigma, E)}(Q)$. Os autores mostram que a categoria $\mathbf{Rel}_{(\Sigma, E)}(Q)$ é uma categoria monoidal simétrica e que também é uma categoria hipergráfica (MARSDEN; GENOVESE, 2017).

Apesar disso, não exigimos tal estrutura algébrica (Σ, E) para a categoria $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$. A prova da existência da estrutura monoidal simétrica é semelhante.

Proposição 8.16. *Seja \mathbb{L} um reticulado Brouwerian completo com uma estrutura monoidal (\star, u) . Existe um bifuntor \otimes em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ dado por:*

1. $A \otimes B = A \times B$;
2. Dados $R_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ e $R_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ morfismos em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ temos que

$$R_1 \otimes R_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = R_1(x_1, y_1) \star R_2(x_2, y_2);$$

3. *Unidade tensorial:* $I = \{\star\}$.

Prova. R_1 e R_2 são morfismos em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ e $R_1(x_1, y_1) \star R_2(x_2, y_2) \in \mathbb{L}$. É fácil ver que $R_1 \otimes R_2$ é um morfismo de $X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$. Além disso, identidades e composições são preservadas:

$$\begin{aligned} Id_A \otimes Id_B(a, b, a', b') &= Id_A(a, a') \star Id_B(b, b') \\ &= \perp \star \perp = \perp \\ &= Id_{A \otimes B}(a, b, a', b'). \end{aligned}$$

Se $a = a'$ e $b = b'$ então temos que:

$$\begin{aligned} Id_A \otimes Id_B(a, b, a', b') &= Id_A(a, a') \star Id_B(b, b') \\ &= u \star u = u \\ &= Id_{A \otimes B}(a, b, a', b'). \end{aligned}$$

Isso mostra que \otimes é compatível com o morfismo identidade. Para a composição, seja $R_1 : A_1 \rightarrow B_1, R_2 : A_2 \rightarrow B_2, S_1 : B_1 \rightarrow C_1$ e $S_2 : B_2 \rightarrow C_2$, logo:

$$\begin{aligned}
& (S_1 \otimes S_2) \circ (R_1 \otimes R_2)(a_1, a_2, c_1, c_2) = \\
& = \bigvee_{b_1, b_2} [(R_1 \otimes R_2)(a_1, a_2, b_1, b_2) \star (S_1 \otimes S_2)(b_1, b_2, c_1, c_2)] \\
& = \bigvee_{b_1, b_2} [R_1(a_1, b_1) \star R_2(a_2, b_2) \star S_1(b_1, c_1) \star S_2(b_2, c_2)] \\
& = \bigvee_{b_1, b_2} [R_1(a_1, b_1) \star S_1(b_1, c_1) \star R_2(a_2, b_2) \star S_2(b_2, c_2)] \\
& = \bigvee_{b_1} [R_1(a_1, b_1) \star S_1(b_1, c_1)] \star \bigvee_{b_2} [R_2(a_2, b_2) \star S_2(b_2, c_2)] \\
& = (S_1 \circ R_1(a_1, c_1)) \star (S_2 \circ R_2(a_2, c_2)) \\
& = (S_1 \circ R_1) \otimes (S_2 \circ R_2)(a_1, a_2, c_1, c_2).
\end{aligned}$$

Isso verifica que \otimes é também compatível com a composição. Portanto, \otimes é um bifuntor. \square

Teorema 8.17. *A categoria $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ com o produto tensorial \otimes (definido na Proposição 8.16) é uma categoria monoidal simétrica.*

Prova. Os isomorfismos naturais em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ são dados por:

$$1. \alpha_{A,B,C}(((a, b), c), (a', (b', c'))) := \begin{cases} u, & \text{se } a = a', b = b' \text{ e } c = c'; \\ \perp, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$2. \sigma_{A,B}((a, b), (a', b')) := \begin{cases} u, & \text{se } a = a', b = b'; \\ \perp, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$3. \lambda_A(a, (*, a')) := \begin{cases} u, & \text{se } a = a'; \\ \perp, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$4. \rho_A(a, (a', *)) := \begin{cases} u, & \text{se } a = a'; \\ \perp, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

que satisfazem as condições de coerência. Em detalhes,

$$\begin{aligned}
& \alpha_{A,I,B} \circ (Id_A \otimes \lambda_B)((a, b), ((a'', *), b'')) = \\
& = \bigvee_{a', *, b'} [Id_A \otimes \lambda_B((a, b), (a', (*, b')))] \star \alpha_{A,I,B}((a', (*, b')), ((a'', *), b'')) \\
& = \bigvee_{a', *, b'} [Id_A(a, a') \star \lambda_B(b, (*, b'))] \star \alpha_{A,I,B}((a', (*, b')), ((a'', *), b''))
\end{aligned}$$

e

$$\rho_A \otimes Id_B((a, b), ((a'', *), b'')) = \rho_A(a, (a'', *)) \star Id_B(b, b'').$$

Quando $a = a' = a''$ e $b = b' = b''$ temos que

$$\alpha_{A,I,B} \circ (Id_A \otimes \lambda_B)((a, b), ((a'', *), b'')) = u = \rho_A \otimes Id_B((a, b), ((a'', *), b'')).$$

caso contrário

$$\alpha_{A,I,B} \circ (Id_A \otimes \lambda_B)((a, b), ((a'', *), b'')) = \perp = \rho_A \otimes Id_B((a, b), ((a'', *), b'')).$$

Assim, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{Id_A \otimes \lambda_B} & A \times (\{*\} \times B) \\ & \searrow \rho_A \otimes Id_B & \downarrow \alpha_{A,I,B} \\ & & (A \times \{*\}) \times B \end{array}$$

As outras condições de coerência em (COECKE, 2011, p.209-210) são verificadas de forma análoga. \square

8.3.3 Negação e estrutura *dagger* em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$

A relação conversada de $R : A \rightarrow B$ em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ é a relação \mathbb{L} -fuzzy $R^\cup : B \rightarrow A$ tal que $R^\cup(b, a) = R(a, b)$. O candidato óbvio para o *dagger* é a conversada relacional.

Portanto, o funtor contravariante involutivo identidade nos objetos, *dagger*, em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ é dado por: $(_)\dagger : \mathbb{L}\mathbf{Rel}^{Op} \rightarrow \mathbb{L}\mathbf{Rel} :: R \mapsto R^\cup$.

Proposição 8.18. *A categoria $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ é uma categoria monoidal simétrica *dagger* (\dagger -SMC) com um funtor contravariante involutivo identidade nos objetos, \dagger , dado pela conversada.*

Prova. Dados $R : A \rightarrow B$ e $S : B \rightarrow C$ morfismos em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$, a conversada é compatível com a composição e a identidade, em detalhes:

$$\begin{aligned} (S \circ R)^\cup(c, a) &= (S \circ R)(a, c) \\ &= \bigvee_b (R(a, b) \star S(b, c)) \\ &= \bigvee_b (R^\cup(b, a) \star S^\cup(c, b)) \\ &= \bigvee_b (S^\cup(c, b) \star R^\cup(b, a)) \\ &= (R^\cup \circ S^\cup)(c, a). \end{aligned}$$

$$Id_A^\cup(a, a') = Id_A(a', a) = u = Id_A(a, a') \text{ se } a = a' \quad ;$$

$$Id_A^\cup(a, a') = Id_A(a', a) = \perp = Id_A(a, a') \text{ caso contrário.}$$

Além disso, dados $R_1 : A_1 \rightarrow B_1$ e $R_2 : A_2 \rightarrow B_2$ morfismos em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$, temos:

$$\begin{aligned} (R_1^\cup \otimes R_2^\cup)(b_1, b_2, a_1, a_2) &= R_1^\cup(b_1, a_1) \star R_2^\cup(b_2, a_2) \\ &= R_1(a_1, b_1) \star R_2(a_2, b_2) \\ &= R_1 \otimes R_2(a_1, a_2, b_1, b_2) \\ &= (R_1 \otimes R_2)^\cup(b_1, b_2, a_1, a_2). \end{aligned}$$

É fácil ver que $(R^\cup)^\cup = R$. Ademais, para o isomorfismo natural σ , temos que σ^{-1} é definido por $\sigma^{-1}((b', a'), (a, b)) = u$ se $b = b'$ e $a' = a$, e $\sigma^{-1}((b', a'), (a, b)) = \perp$, caso contrário. Como um resultado, $\sigma^{-1} \circ \sigma = Id_{A \otimes B}$ e $\sigma \circ \sigma^{-1} = Id_{B \otimes A}$. Assim,

$$\sigma^{-1}((b', a'), (a, b)) = \sigma((a, b), (b', a')) = \sigma^\cup((b', a'), (a, b)),$$

uma vez que a inversa de isomorfismos naturais em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ é a conversa relacional. O mesmo é verdade para os demais isomorfismos α, λ e ρ . \square

Portanto, a categoria $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ é uma categoria é uma categoria monoidal simétrica *dagger* (\dagger -SMC).

8.3.4 Monoides e co-monoides em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$

Teorema 8.19. *As relações \mathbb{L} -fuzzy*

$$\delta(a_1, (a_2, a_3)) := \begin{cases} u, & \text{se } a_1 = a_2 = a_3; \\ \perp, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e } \varepsilon(a, *) = u.$$

definem um co-monoide interno sobre A em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$.

E as relações \mathbb{L} -fuzzy

$$\mu((b_1, b_2), b_3) := \begin{cases} u, & \text{se } b_1 = b_2 = b_3 \\ \perp, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e } e(*, b) = u.$$

definem um monoide interno sobre A em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$.

Prova. Considere a composições

$$(Id_A \otimes \delta) \circ \delta(a_1, a_2, a_3, a_4) = \bigvee_{a_5, a_6} [\delta(a_1, (a_5, a_6)) \star (Id_A(a_5, a_2) \star \delta(a_6, (a_3, a_4)))]$$

e

$$(\delta \otimes Id_A) \circ \delta(a_1, a_2, a_3, a_4) = \bigvee_{a_5, a_6} [\delta(a_1, (a_5, a_6)) \star (\delta(a_5, (a_2, a_3)) \star Id_A(a_6, a_4))],$$

quando $a_5 = a_6 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ temos $(Id_A \otimes \delta) \circ \delta(a_1, a_2, a_3, a_4) = u = (\delta \otimes Id_A) \circ \delta(a_1, a_2, a_3, a_4)$ caso contrário $(Id_A \otimes \delta) \circ \delta(a_1, a_2, a_3, a_4) = \perp = (\delta \otimes Id_A) \circ \delta(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

Similarmente, $\mu \circ (\mu \otimes Id_A)(b_1, b_2, b_3, b_4) = \mu \circ (Id_A \otimes \mu)(b_1, b_2, b_3, b_4)$. As demais condições são de fáceis verificação e deixamos a cargo do leitor. \square

8.3.5 Dualidade e Compacidade em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$

Como \mathbf{Rel} , os objetos (conjuntos *crisp*) em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ são self-duais, i. e., $A^* = A$.

Teorema 8.20. *A categoria $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ é uma categoria compacta dagger.*

Prova. Vamos estabelecer os morfismos η_A e ϵ_A in $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ que integra a definição de categoria compacta.

$$\eta_A(*, (a, a')) := \begin{cases} u, & \text{se } a = a' \\ \perp, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \epsilon_A((a, a'), *) := \begin{cases} u, & \text{se } a = a' \\ \perp, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pela definição de categoria compacta, devemos mostrar que:

1. $\lambda_A^{-1} \circ (\epsilon_A \otimes Id_A) \circ \alpha_{A, A^*, A} \circ (Id_A \otimes \eta_A) \circ \rho_A(a, a') = Id_A(a, a')$;
2. $\rho_{A^*}^{-1} \circ (Id_{A^*} \otimes \epsilon_A) \circ \alpha_{A^*, A, A^*}^{-1} \circ (\eta_A \otimes Id_{A^*}) \circ \lambda_{A^*}(a', a) = Id_{A^*}(a', a)$.

Uma vez que em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ os objetos são self-duais, $A^* = A$ então vamos mostrar que $(\lambda_A^{-1} \circ (\epsilon_A \otimes Id_A) \circ \alpha_{A, A^*, A} \circ (Id_A \otimes \eta_A) \circ \rho_A)(a, a') = Id_A(a, a')$.

A composta no lado esquerdo da equação é dado por:

$$\bigvee_{*, a_8} \bigvee_{a_5, a_6, a_7} \bigvee_{a_1, a_2, a_3} \bigvee_{a_3, *} [\rho_A(a, (a_1, *)) \star (Id_A \otimes \eta_A)((a_1, *), (a_2, (a_3, a_4))) \star \alpha((a_2, (a_3, a_4)), ((a_5, a_6), a_7)) \star (\epsilon_A \otimes Id_A)((a_5, a_6), a_7), (*, a_8)) \star \lambda_A^{-1}((* , a_8), a')].$$

Portanto, pela definição dos morfismos, esta composição é igual a u se $a = a_1 = a_2$, $a_3 = a_4$, $a_5 = a_2$, $a_6 = a_3$, $a_7 = a_4$, $a_5 = a_6$, $a_7 = a_8$ e $a_8 = a'$. Assim, $a = a_1 = a_2 = a_5 = a_6 = a_3 = a_4 = a_7 = a_8 = a'$, conseqüentemente $a = a'$ e $Id_A(a, a') = u$ é a relação de

identidade conforme necessário. Caso contrário, ambos os lados da equação 1 serão iguais a \perp . Logo, os dois diagramas a seguir comutam:

$$\begin{array}{ccccc}
 a & \xrightarrow{\rho_A} & (a_1, *) & \xrightarrow{Id_A \otimes \eta_A} & (a_2, (a_3, a_4)) \\
 \downarrow Id_A & & & & \downarrow \alpha_{A,A,A} \\
 a' & \xleftarrow{\lambda_A^{-1}} & (*, a_8) & \xleftarrow{\epsilon_A \otimes Id_A} & ((a_5, a_6), a_7)
 \end{array}$$

A comutatividade do diagrama dual (item 2) é feito de forma análoga.

Por último, a condição $\epsilon_A = \eta_A^\dagger \circ \sigma_{A,A}$ segue de:

$$\begin{array}{ccc}
 (a, b) & \xrightarrow{\sigma_{A,A}} & (b', a') \\
 & \searrow \epsilon_A & \downarrow \eta_A^\dagger \\
 & & *
 \end{array}$$

temos $\epsilon_A = u = \eta_A^\dagger \circ \sigma_{A,A}$ se $a = b = a' = b$, caso contrário temos que $\epsilon_A = \perp = \eta_A^\dagger \circ \sigma_{A,A}$.

□

Desse modo, a categoria $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ é enriquecida com estrutura suficiente para a abordagem mecânica quântica categórica (ABRAMSKY; COECKE, 2004).

Abramsky e Heunen (ABRAMSKY; HEUNEN, 2012) exemplificam a categoria $\mathbf{Mat}(\mathbf{S})$ com \mathbf{S} sendo um semianel comutativo. $\mathbf{Mat}(\mathbf{S})$ tem conjuntos finitos como objetos, e os morfismos são mapas $m : A \times B \rightarrow \mathbf{S}$ (visto como matrizes). A composição é dada pela multiplicação de matrizes e a identidade é a matriz identidade. A categoria $\mathbf{Mat}(\mathbf{S})$ é uma generalização das categorias \mathbf{FdHilb} (categoria de espaços de Hilbert de dimensões finita) quando $\mathbf{S} = \mathbb{C}$ e a categoria \mathbf{FRel} (categoria de conjuntos finitos e relações) quando $\mathbf{S} = \mathbb{B}$.

Seja $\mathbb{L}\mathbf{FRel}$, a categoria de conjuntos finitos e relações \mathbb{L} -fuzzy, uma subcategoria de $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$. Se tomarmos $\mathbf{S} = \mathbb{L}$, a categoria $\mathbf{Mat}(\mathbf{S})$ é equivalente a $\mathbb{L}\mathbf{FRel}$. Observe que a categoria $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ é um modelo que captura os fundamentos da computação quântica assim como a categoria \mathbf{Hilb} .

8.4 $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$: A CATEGORIA DE CONJUNTOS \mathbb{L} -FUZZY E RELAÇÕES \mathbb{L} -FUZZY

M. Barr mostrou que a categoria de conjuntos \mathbb{L} -fuzzy e relações \mathbb{L} -fuzzy com \mathbb{L} sendo um reticulado $*$ -autonomous completo é uma categoria $*$ -autonomous e mostrou que essa categoria é um modelo para lógica linear (BARR, 1996).

Nesta seção, sistematizamos propriedades e estruturas da categoria $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$ de conjuntos \mathbb{L} -fuzzy e relações \mathbb{L} -fuzzy (*LFuzzy-LFuzzy*).

Algumas propriedades e definições nesta seção foram baseadas na construção do M. Barr's (BARR, 1996). Em particular, descrevemos o produto e co-produto na categoria $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$ (proposição 8.22), desenvolvemos a estrutura monoidal desta categoria (proposição 8.23). Provamos que a categoria $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$ é monoidal simétrica (teorema 8.24) e mostramos que essa categoria não é uma categoria compacta (teorema 8.26). Além disso, definimos as estruturas do co-monoide e monoide internos (teorema 8.25).

Definição 8.21. Seja \mathbb{L} um reticulado brouweriano completo com uma estrutura monoidal (\star, u) . A categoria de conjuntos \mathbb{L} -fuzzy e relações \mathbb{L} -fuzzy, $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$, é definido como segue:

1. Os objetos são conjuntos \mathbb{L} -fuzzy (A, α) , com $\alpha : A \rightarrow \mathbb{L}$;
2. Os morfismos são relações \mathbb{L} -fuzzy $R : A \rightarrow B$, onde $R : (A, \alpha) \times (B, \beta) \rightarrow \mathbb{L}$ tal que $\alpha(a) \star R(a, b) \leq \beta(b)$;
3. Se $R : (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ e $S : (B, \beta) \rightarrow (C, \gamma)$ são morfismos, a composta $S \circ R : (A, \alpha) \rightarrow (C, \gamma)$ é dada por:

$$S \circ R(a, c) := \bigvee_b (R(a, b) \star S(b, c)),$$

tal que $\alpha(a) \star R(a, b) \star S(b, c) \leq \beta(b) \star S(b, c) \leq \gamma(c)$.

4. A identidade $Id_A : (A, \alpha) \rightarrow (A, \alpha)$ é dada por:

$$Id_A(a_1, a_2) := \begin{cases} \perp & \text{se } a_1 \neq a_2 \\ u & \text{se } a_1 = a_2 \end{cases}$$

com $\alpha(a_1) \star Id_A(a_1, a_2) \leq \alpha(a_2)$.

A associatividade da composição é verificada de forma análoga à associatividade em $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$.

Se R é um morfismo de A para B , então $Id_B \circ R(a, b) = \bigvee_{b'} (R(a, b') \star Id_B(b', b)) = R(a, b) = \bigvee_{a'} (Id_A(a, a') \star R(a', b)) = R \circ Id_A(a, b)$.

Quando \mathbb{L} é o intervalo unitário $[0, 1]$ com $\star = \wedge$, $u = 1 = \top$ e $\perp = 0$, temos a categoria de conjuntos *fuzzy* e relações *fuzzy*.

8.4.1 Produto e Co-produto em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$

Proposição 8.22. Em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$, ambos o produto e co-produto $(A, \alpha) + (B, \beta)$ de dois conjuntos \mathbb{L} -fuzzy são a sua união disjunta $(A, \alpha) + (B, \beta) = \{(a, 1); a \in (A, \alpha)\} \cup \{(b, 2); b \in (B, \beta)\}$ com relações \mathbb{L} -fuzzy de projeções do produto $\pi_1 : (A, \alpha) + (B, \beta) \rightarrow (A, \alpha)$, $\pi_2 : (A, \alpha) + (B, \beta) \rightarrow (B, \beta)$ e as injeções do co-produto $i_1 : (A, \alpha) \rightarrow (A, \alpha) + (B, \beta)$, $i_2 : (B, \beta) \rightarrow (A, \alpha) + (B, \beta)$ definidas respectivamente:

$$\pi_1((a', 1), a) := \begin{cases} u, & \text{se } a = a'; \\ \perp, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \pi_2((b', 2), b) := \begin{cases} u, & \text{se } b = b'; \\ \perp, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e

$$i_1(a, (a', 1)) := \begin{cases} u, & \text{se } a = a'; \\ \perp, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i_2(b, (b', 2)) := \begin{cases} u, & \text{se } b = b'; \\ \perp, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prova. Considere $S_1 : (C, \gamma) \rightarrow (A, \alpha)$ e $S_2 : (C, \gamma) \rightarrow (B, \beta)$ morfismos em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$. Defina uma relação \mathbb{L} -fuzzy $T : (A, \alpha) + (B, \beta) \rightarrow (C, \gamma)$ por

$$T((a, 1), c) = S_1(a, c) \text{ e } T((b, 2), c) = S_2(b, c).$$

Dado que S_1 e S_2 são morfismos, então

$$\alpha((a, 1)) \star T((a, 1), c) = \alpha(a) \star S_1(a, c) \leq \gamma(c)$$

e

$$\beta((b, 2)) \star T((b, 2), c) = \beta(b) \star S_2(b, c) \leq \gamma(c).$$

Assim, T é um morfismo em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$, e, além disso, T é o único morfismo tal que:

$$\begin{aligned} T \circ i_1(a, c) &= \bigvee_{(a', 1)} (i_1(a, (a', 1)) \star T((a', 1), c)) \\ &= T((a, 1), c) \\ &= S_1(a, c), \end{aligned}$$

e analogamente $T \circ i_2(b, c) = S_2(b, c)$. Portanto, $(A, \alpha) + (B, \beta)$ com os morfismos i_1 e i_2 são o co-produto em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$.

A prova do produto é análoga. □

8.4.2 Produto tensorial e estrutura monoidal simétrica em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$

O bifuntor \otimes também é construído em um reticulado com uma estrutura monoidal (\star, u) .

Proposição 8.23. *Seja \mathbb{L} um reticulado brouweriano completo com uma estrutura monoidal simétrica (\star, u) . Existe um bifuntor \otimes em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$ definido por:*

1. $(A, \alpha) \otimes (B, \beta) = (A \times B, \alpha \star \beta)$;
2. *Seja $R : (A, \alpha) \rightarrow (A', \alpha')$ e $S : (B, \beta) \rightarrow (B', \beta')$ morfismos, a relação $R \otimes S : (A \times B, \alpha \star \beta) \rightarrow (A' \times B', \alpha' \star \beta')$ é dada por:*

$$R \otimes S(a, b, a', b') = R(a, a') \star S(b, b');$$

3. *A unidade tensorial é $I = (\{\ast\}, u)$ onde $u(\ast) = u$ e u é a unidade para \star em \mathbb{L} .*

Prova. Se R e S são morfismos, então $\alpha(a) \star R(a, a') \leq \alpha'(a')$ e $\beta(b) \star S(b, b') \leq \beta'(b')$. Logo, $(\alpha \star \beta)(a, b) \star R \otimes S(a, b, a', b') = \alpha(a) \star \beta(b) \star R(a, a') \star S(b, b') = \alpha(a) \star R(a, a') \star \beta(b) \star S(b, b') \leq \alpha'(a') \star \beta'(b')$.

Portanto, $R \otimes S$ é um morfismo em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$. Ademais, identidades e composições são preservadas:

$$\begin{aligned} Id_{(A, \alpha)} \otimes Id_{(B, \beta)}(a, b, a', b') &= Id_{(A, \alpha)}(a, a') \star Id_{(B, \beta)}(b, b') \\ &= \perp \star \perp = \perp = Id_{(A, \alpha) \otimes (B, \beta)}(a, b, a', b'), \end{aligned}$$

se $a = a'$ e $b = b'$ então temos:

$$\begin{aligned} Id_{(A, \alpha)} \otimes Id_{(B, \beta)}(a, b, a', b') &= Id_{(A, \alpha)}(a, a') \star Id_{(B, \beta)}(b, b') \\ &= u \star u = u = Id_{(A, \alpha) \otimes (B, \beta)}(a, b, a', b'), \end{aligned}$$

tal que $(\alpha \star \beta)(a, b) \star (Id_{(A, \alpha)} \otimes Id_{(B, \beta)})(a, b, a', b') = (\alpha \star \beta)(a, b) \star Id_{(A, \alpha) \otimes (B, \beta)}(a, b, a', b') \leq (\alpha \star \beta)(a', b')$ Desse modo, \otimes é compatível com morfismos identidade.

Para a composição, seja $R_1 : (A_1, \alpha_1) \rightarrow (B_1, \beta_1)$, $R_2 : (A_2, \alpha_2) \rightarrow (B_2, \beta_2)$, $S_1 : (B_1, \beta_1) \rightarrow (C_1, \gamma_1)$ e $S_2 : (B_2, \beta_2) \rightarrow (C_2, \gamma_2)$. É fácil ver que

$$(S_1 \otimes S_2) \circ (R_1 \otimes R_2)(a_1, a_2, c_1, c_2) = (S_1 \circ R_1) \otimes (S_2 \circ R_2)(a_1, a_2, c_1, c_2)$$

tal que $(\alpha_1 \star \alpha_2)(a_1, a_2) \star (R_1 \otimes R_2)(a_1, a_2, b_1, b_2) \star (S_1 \otimes S_2)(b_1, b_2, c_1, c_2) \leq (\beta_1 \star \beta_2)(b_1, b_2) \star (S_1 \otimes S_2)(b_1, b_2, c_1, c_2) \leq (\gamma_1 \cdot \gamma_2)(c_1, c_2)$.

Logo, \otimes é compatível com a composição. E assim, \otimes é um bifuntor. \square

Teorema 8.24. *A categoria $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$ com o produto tensorial \otimes , definido na proposição 8.23, é uma categoria monoidal simétrica.*

Prova. Para não sobrecarregar a prova, considere aqui a notação A para conjuntos \mathbb{L} -fuzzy (A, α) .

Os isomorfismos naturais em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$ são definidos da seguinte forma:

$$\alpha_{A,B,C}(((a, b), c), (a', (b', c'))) := \begin{cases} u, & \text{se } a = a', b = b' \text{ and } c = c' \\ \perp, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

tal que

$$(\alpha \star (\beta \star \gamma))(a, (b, c)) \star \alpha_{A,B,C}((a, (b, c)), ((a', b'), c')) \leq ((\alpha \star \beta) \star \gamma)((a', b'), c'),$$

implica que $\perp \leq ((\alpha \star \beta) \star \gamma)((a', b'), c')$, mas se $a = a', b = b'$ e $c = c'$ então $\alpha(a) \star (\beta(b) \star \gamma(c)) = (\alpha(a') \star \beta(b')) \star \gamma(c')$, uma vez que \star é associativo.

$$\sigma_{A,B}((a, b), (a', b')) := \begin{cases} u, & \text{se } a = a', b = b' \\ \perp, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

tal que $(\alpha \star \beta)(a, b) \star \sigma_{A,B}((a, b), (b', a')) \leq (\beta \star \alpha)(b', a')$ implica que $\perp \leq \beta(b') \star \alpha(a')$, mas se $a = a'$ e $b = b'$ então $\alpha(a) \star \beta(b) = \beta(b') \star \alpha(a')$ uma vez que \star é comutativo.

$$\lambda_A(a, (*, a')) := \begin{cases} u, & \text{se } a = a' \\ \perp, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad \rho_A(a, (a', *)) := \begin{cases} u, & \text{se } a = a' \\ \perp, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

tal que $\alpha(a) \star \lambda_A(a, (*, a')) \leq (u \star \alpha)(* , a')$ implica que $\perp \leq \alpha(a')$, mas se $a = a'$ então $\alpha(a) = u(*) \star \alpha(a')$, pela definição de u , temos $\alpha(a) = \alpha(a')$.

Alem disso, $\alpha(a) \star \rho_A(a, (a', *)) \leq (u \star \alpha)(* , a')$ implica $\perp \leq \alpha(a')$, mas se $a = a'$ então $\alpha(a) = u(*) \star \alpha(a')$, logo $\alpha(a) = \alpha(a')$, garantindo que satisfaz as condições de coerência.

Semelhante ao que foi feito na categoria $\mathbf{Rel}(\mathbf{L})$, quando $a = a' = a''$ e $b = b' = b''$ temos que

$$\alpha_{A,I,B} \circ (Id_A \otimes \lambda_B)((a, b), ((a'', *), b'')) = u = \rho_A \otimes Id_B((a, b), ((a'', *), b'')).$$

Caso contrário,

$$\alpha_{A,I,B} \circ (Id_A \otimes \lambda_B)((a, b), ((a'', *), b'')) = \perp = \rho_A \otimes Id_B((a, b), ((a'', *), b'')),$$

tal que $(\alpha \star \beta)(a, b) \star \rho_A \otimes Id_B((a, b), (a'', *, b'')) \leq (\alpha(a'') \star u(*)) \star \beta(b'')$ e $(\alpha \star \beta)(a, b) \star Id_A \otimes \lambda_B((a, b), (a', (*, b'))) \star \alpha_{A,I,B}((a', (*, b')), ((a'', *, b''))) \leq (\alpha \star (u \star \beta))(a', (*, b')) \star \alpha_{A,I,B}((a', (*, b')), ((a'', *, b''))) \leq (\alpha(a'') \star u(*)) \star \beta(b'')$.

Assim, o diagrama a seguir comuta

$$\begin{array}{ccc} (A, \alpha) \otimes (B, \beta) & \xrightarrow{Id_A \otimes \lambda_B} & (A, \alpha) \otimes ((\{*\}, u) \otimes (B, \beta)) \\ & \searrow_{\rho_A \otimes Id_B} & \downarrow_{\alpha_{A,I,B}} \\ & & ((A, \alpha) \otimes (\{*\}, u)) \otimes (B, \beta) \end{array}$$

As outras condições de coerência em (COECKE, 2011, p.209-210) são verificadas de forma análoga. \square

8.4.3 Negação e estrutura *dagger* em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$

Assuma que \mathbb{L} tem uma negação $\neg : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ tal que dado um conjunto \mathbb{L} -fuzzy (A, α) temos $\neg(\neg(\alpha)) = \alpha$. Semelhante à categoria $\mathbf{Rel}(\mathbf{L})$, existe um funtor contravariante involutivo \ddagger em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$, mas não é a identidade nos objetos. Considere o morfismo $R : (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$. Definimos $R^\ddagger : (B, \beta^\ddagger) \rightarrow (A, \alpha^\ddagger)$ pela relação conversa R^\cup .

Uma vez que $\alpha(a) \star R(a, b) \leq \beta(b)$, então $\alpha(a) \star R^\ddagger(b, a) \leq \beta(b)$ implica $\beta^\ddagger(b) \star R^\ddagger(b, a) \leq \alpha^\ddagger(a)$, so R^\ddagger é um morfismo.

É fácil ver que $(S \circ R)^\ddagger(c, a) = (R^\ddagger \circ S^\ddagger)(c, a)$ e $I_A^\ddagger(a, a') = Id_A(a, a')$ (semelhante a verificação na categoria $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$).

8.4.4 Monoides e co-monoides em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$

Teorema 8.25. *Dados (A, α) e (B, β) objetos em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$. As relações \mathbb{L} -fuzzy:*

$$\delta(a_1, (a_2, a_3)) := \begin{cases} u, & \text{se } a_1 = a_2 = a_3 \\ \perp, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e } \varepsilon(a, *) = u.$$

definem um co-monoide interno sobre (A, α) em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$ sse $\alpha(a) \leq u \forall a \in (A, \alpha)$.

E as relações \mathbb{L} -fuzzy

$$\mu((b_1, b_2), b_3) := \begin{cases} u, & \text{se } b_1 = b_2 = b_3 \\ \perp, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e } e(*, b) = u.$$

definem um monoide interno sobre (B, β) em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$ sse $u \leq \beta(b) \forall b \in (B, \beta)$.

Prova. Seja δ um morfismo em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$, então $\alpha(a_1) \star \delta(a_1, (a_2, a_3)) \leq \alpha(a_2) \star \alpha(a_3)$. Quando $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ temos que $\perp \leq \alpha(a_2) \star \alpha(a_3)$. Se $a_1 = a_2 = a_3 = a$ pela indepotencia de \star , temos $\alpha(a_1) = \alpha(a_2) \star \alpha(a_3)$.

Além disso, uma vez que ε é um morfismo implica que $\alpha(a) \star \varepsilon(a, *) \leq u(*)$. É equivalente a exigir que $\alpha(a) \leq u, \forall a \in A$. Desse modo, o par de morfismos (δ, ε) satisfaz a definição de co-monoide interno.

Podemos obter as condições $(Id_A \otimes \delta) \circ \delta = (\delta \otimes Id_A) \circ \delta$ e $(\varepsilon \otimes Id_A) \circ \delta = (Id_A \otimes \varepsilon) \circ \delta = Id_A$ de forma análoga à categoria $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$.

A prova do monoide interno é deixada para o leitor.

□

8.4.5 Dualidade e Compacidade em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$

Como na categoria $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$, podemos definir uma dualidade em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$:

$$(A, \alpha)^* = (A, \alpha^*) \quad \text{onde } \alpha^*(a) = \neg(\alpha(a)) \quad \forall a \in A$$

assumindo que \mathbb{L} tem uma negação $\neg : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ tal que dado um conjunto \mathbb{L} -fuzzy (A, α) temos que $\neg(\neg(\alpha)) = \alpha$.

Teorema 8.26. *A categoria $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$ não é uma categoria compacta.*

Demonstração. A unidade tensorial para \otimes é $(\{*\}, u)$ onde $u(*) = u$ tal que u é a unidade para \star . Seja (A, \perp) um objeto em $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$ onde $\perp(a)$ é uma função constante $\perp(a) = \perp \forall a \in A$. O morfismo $\eta_{(A, \perp)} : (\{*\}, u) \rightarrow (A, \perp)^* \otimes (A, \perp)$ tem que satisfazer a condição $u(*) \star \eta_{(A, \perp)}(*, (a, a')) \leq \perp^*(a) \star \perp(a)$ (*bottom* é preservado para $a \star -$ sendo um adjunto esquerdo) e independentemente da escolha de dual $\perp^*(a)$, temos $\perp^*(a) \star \perp = \perp$, assim $\eta_{(A, \perp)}(*, (a, a')) \leq \perp$ isso implica que $\eta_{(A, \perp)}(*, (a, a')) = \{\perp; \forall a, a' \in A\}$ então a composta de $\lambda_A^{-1} \circ (\varepsilon_A \otimes Id_A) \circ \alpha_{A, A^*, A} \circ (Id_A \otimes \eta_A) \circ \rho_A(a, a')$ não corresponde a identidade $Id_A(a, a')$ conforme exigido na definição 5.9.

8.5 CATEGORIA DE KLEISLI

Descrevemos de forma separada e concreta algumas propriedades básicas de quatro categorias monoidais com relações multi-valoradas como morfismos. Como apontado por um dos revisores anônimos da revista *Fuzzy Sets and Systems*, as quatro categorias são casos particulares de um conceito mais geral e abstrato: a categoria de Kleisli de uma mônada em uma determinada categoria (KLEISLI, 1965).

Definição 8.27. A categoria de Kleisli de um mônada $(M : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, \mu, \eta)$, denotada \mathbf{C}_M , é uma categoria onde:

1. Um objeto de \mathbf{C}_M é um objeto C da categoria \mathbf{C} ;
2. Um morfismo $f : C \rightarrow_{\mathbf{C}_M} C'$ de \mathbf{C}_M é um morfismo $f : C \rightarrow_{\mathbf{C}} MC'$ de \mathbf{C} ;
3. A \mathbf{C}_M -identidade de um objeto C é o \mathbf{C} -morfismo $\eta_C : C \rightarrow_{\mathbf{C}} MC$;
4. A \mathbf{C}_M -composição de $f : C \rightarrow_{\mathbf{C}_M} C'$ e $g : C' \rightarrow_{\mathbf{C}_M} C''$ é a \mathbf{C} -composição $\mu_{C''} \circ M(g) \circ f$.

Na Definição 8.27, chamamos \mathbf{C} como a **categoria base**. A categoria de Kleisli é a subcategoria *full* de objetos T-álgebras livres da categoria de Eilenberg-Moore (FIORE; MENNI, 2005).

Exemplo 8.28. A categoria \mathbf{Rel} é isomorfa à categoria de Kleisli \mathbf{Set}_P onde (P, \diamond, ζ) é definida da seguinte forma:

1. $P : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ é uma função objeto definida por $P(X) = 2^X$;
2. \diamond é a composição-Kleisli de mapeamentos $f : X \rightarrow P(Y)$ e $g : Y \rightarrow P(Z)$ tal que $g \diamond f(x) = \cup_{y \in f(x)} g(y)$.
3. $\zeta_X : X \rightarrow P(X)$ é um mapa característico.

Assim como \mathbf{Rel} , as categorias $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$, $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$ e $\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$ são isomorfas a uma categoria de Kleisli \mathbf{C}_M onde M é uma mônada em uma determinada categoria de base \mathbf{C} . Uma vez

que a categoria \mathbf{C}_M pode ser considerada uma categoria de relações entre objetos de \mathbf{C} e seu morfismo f pode ser considerado como um tipo geral de relação de \mathbf{C} para \mathbf{C}' .

Na literatura, encontram-se os resultados mostrando que, sob os pressupostos adequados, as estruturas categóricas investigadas aqui são elevadas da categoria de base para a construção da categoria de Kleisli. J. Szigeti mostra que o cálculo dos limites na categoria de Kleisli \mathbf{C}_M pode ser facilmente derivado do cálculo dos limites correspondentes em \mathbf{C} (SZIGETI, 1983). A categoria de Kleisli \mathbf{C}_M é enriquecida sobre \mathbf{C} com uma mônada apropriado M . Dado um mônada forte comutativo em uma categoria monoidal simétrica, a categoria de Kleisli é monoidal simétrica de uma forma canônica (POWER; ROBINSON, 1997; KOCK, 1970). C. Heunen e M. Karvonen mostram, entre outras coisas, que para um mônada Frobenius em uma categoria dagger a construção de Kleisli preserva daggers, e as categorias de Kleisli de mônadas comutativos em categorias monoidais simétricas são novamente monoidais simétricas (HEUNEN; KARVONEN, 2016; HEUNEN; KARVONEN, 2015; KARVONEN, 2019). No entanto, essas obras são mais abstratas e não fornecem representações concretas das construções.

D. Marsden e F. Genovese comentam que a categoria de Eilenberg-Moore de qualquer mônada em \mathbf{Set} , ou qualquer categoria regular, é uma categoria regular. Eles fornecem as construções das propriedades categóricas da categoria de conjuntos e relações avaliadas em um quantal Q e apresentam muitos exemplos que ilustram a flexibilidade das técnicas utilizadas, particularmente para a construção de modelos novos e existentes de processamento de linguagem natural e aplicações de cognição (MARSDEN; GENOVESE, 2017).

Em (JENČOVÁ; JENČA, 2017) encontramos a construção de monoides em \mathbf{Rel} visto como uma categoria Kleisli e uma 2-categoria (*locally posetal*). M. Arbib e E. Manes provam propriedades categóricas destinadas a aplicações em máquinas fuzzy usando a categoria \mathbf{Rel} e a categoria de relações fuzzy vista como uma categoria de Kleisli (ARBIB; MANES, 1975). Além disso, as aplicações da Ciência da Computação com categorias de Kleisli, considerando a classe de categorias fechadas cartesianas juntamente com uma mônada enriquecido, pode ser encontrado em (POWER, 2001).

Como em (MARSDEN; GENOVESE, 2017), tomamos uma abordagem mais concreta, calculando explicitamente as construções, apesar do fato de que se pode obter os resultados em um ambiente mais geral e abstrato. Além disso, como em (POWER; ROBINSON, 1997; KOCK, 1970; HEUNEN; KARVONEN, 2016; HEUNEN; KARVONEN, 2015; KARVONEN, 2019) a categoria de Kleisli \mathbf{C}_M herda uma estrutura categórica particular através da construção apropriada do mônada M na categoria base \mathbf{C} que tem a estrutura desejada. Consequentemente, teríamos

que verificar as propriedades de cada categoria base como fizemos neste capítulo.

Nós nos esforçamos para enumerar concretamente e sistematicamente as propriedades das categorias e contrastar os modelos, com o objetivo de mostrar se é possível modelar diferentes fenômenos em muitas aplicações, como a Lógica Linear, Mecânica Quântica, e Ciência da Computação. Como é o caso com $\mathbb{L}\mathbf{Rel}$, que modela aspectos da computação quântica, ao contrário da categoria $\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$ que modela a Lógica Linear. Desta forma, resumimos as diferenças e semelhanças das propriedades monoidais de cada categoria investigadas com uma vista a futuras aplicações.

Abaixo temos uma tabela comparativa das estruturas categóricas que cada uma das categorias apresenta:

Categoria	Monoidal Simétrica	Dagger	Compacta
\mathbf{Rel}	Sim	Sim	Sim
$\mathbf{Rel}(\mathbb{L})$	Sim	Não	Não
$\mathbb{L}\mathbf{Rel}$	Sim	Sim	Sim
$\mathbf{Rel}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L})$	Sim	Não	Não

9 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Investigamos as propriedades categóricas dos espaços de Chu, definimos duas categorias com base nesses espaços, **ChuRel** e **RelChu**. Vimos que essas duas categorias são compactas *dagger* e, portanto, podem ser vistas como modelos categóricos alternativos para a computação quântica.

A categoria **ChuRel** destaca-se da categoria **Rel** quanto à lógica linear, no caso particular da lógica linear multiplicativa (MLL). Devarajan et al. (1999) usam a Relação de Chu nas transformações lógicas para alcançar a integridade total de MLL. Enquanto **Rel** é o modelo degenerado mais simples da lógica linear (LL) (ONG, 2017). Como resultado, alcançamos neste trabalho um modelo categórico com estrutura suficiente para representar vários aspectos da computação quântica e com uma lógica companheira.

ChuRel sendo um modelo da CQM, como mostramos, e da MLL (DEVARAJAN et al., 1999), traz a lógica (MLL) para a mecânica quântica categórica e com isso surge o interesse em investigarmos a relação entre CQM e LL com o uso das categorias relacionais aqui apresentadas. Saber como o potencial da lógica linear dos espaços de Chu pode ser usado para dar uma perspectiva diferente sobre a mecânica quântica, ou como uma ferramenta de computação quântica, é um dos pontos iniciais para nossos trabalhos futuros. Além disso, em contraste com **Rel** (HEUNEN; TULL, 2015, p.255), os espaços Chu exibem os fenômenos da mecânica quântica de complementaridade e incerteza (PRATT, 1994) que produz a relação da incerteza de Heisenberg usual.

Portanto, **ChuRel** abre uma nova perspectiva para a conexão da computação quântica com a lógica linear. Dal Lago e Faggian introduzem um sistema lógico, denominado QMLL, obtido dotando a lógica linear multiplicativa (MLL) de uma modalidade quântica (LAGO; FAGGIAN, 2011). Eles investigam a relação entre QMLL e circuitos quânticos. Além disso, eles fazem uma primeira investigação sobre o Gol subjacente (geometria de interação de Girard (GIRARD, 2011)) para obter um modelo que é concreto, juntamente com uma codificação eficiente (LAGO; FAGGIAN, 2011).

Nesse sentido, podemos deduzir uma transformação lógica entre as operações QMLL usando **ChuRel**. Além disso, **ChuRel** pode ser um modelo para QMLL que estreita as fortes relações entre a lógica linear e a computação quântica. Ademais, através da abordagem categórica que usamos nessa pesquisa e os resultados obtido no trabalho de Bergholm

e Biamonte (2011), queremos estudar o poder de expressão para computação com relação a linguagem utilizando teoria das categorias.

As categorias compactas *dagger* são geralmente consideradas como modelos degenerados de LL, pois assumem como dual $A^* = A$. No entanto, (PRATT, 1999b, p.55) usa *perp*, o que torna **ChuRel** um modelo completo de MML. A relação deste aspecto lógico com os sistemas quânticos está sendo investigada por nosso grupo.

Além disso, a mecânica quântica categórica tem sido usada como uma estrutura geral para diversas teorias físicas (COECKE, 2011; COECKE, 2010). Por exemplo, (COECKE; LAL, 2013) propõe a codificação de uma estrutura causal fixa dentro de uma categoria monoidal simétrica resultando em um teorema de covariância relativística. (GOGIOSO; GENOVESE, 2017) usa uma categoria compacta *dagger* adequada para a manipulação algébrica de operadores ilimitados, deltas de Dirac e ondas planas (*plane-waves*). Em (BAEZ, 2006) é proposta a interação entre a teoria quântica com a relatividade geral usando a lógica interna de uma categoria monoidal e uma \star -categoria. Todos os trabalhos citados acima são baseados em estruturas categóricas monoidais que **ChuRel** e **RelChu** possuem. Além de surgir interesses de tentar resolver algum exemplo concreto da teoria quântica em assuntos como ,por exemplo, teoria da representatividade (ETINGOF et al., 2011), álgebra de Lie (LAL, 2021) e regra de Born (LANDSMAN, 2009). Não desenvolvemos esta linha aqui, que é muito mais geral com aplicações em gravidade quântica, teoria quântica de campos topológica e relatividade geral. Há muito a explorar e é isso que pretendemos fazer na continuação deste trabalho.

Vimos também que **Rel**(\mathbb{L}) e **Rel** $_{\mathbb{L}}$ (\mathbb{L}) são categorias monoidais simétricas, mas não têm estrutura *dagger*. Em contraste, as categorias **Rel** e **\mathbb{L} Rel** são enriquecidas com estrutura suficiente para expressar muitas características da computação quântica (COECKE; PAVLOVIC, 2007; COECKE, 2011). Ademais, as categorias **Rel** e **Rel** $_{\mathbb{L}}$ (\mathbb{L}) são modelos para lógica linear. Todas as categorias aqui investigadas possuem a estrutura necessária para modelar diversos aspectos fundamentais da ciência da computação como em (FONG, 2016; BAEZ; FONG, 2018; BROWN; HUTTON, 1994; ABRAMSKY, 1996).

Esta pesquisa também apresentou uma ampla análise das relações \mathbb{L} -fuzzy de uma perspectiva categórica e forneceu uma gama de modelos categóricos para diferentes áreas que podem ser relacionadas à teoria dos conjuntos fuzzy.

Uma linha estimulante para pesquisas futuras é investigar as categorias de Kleisli que são modelos para computação quântica. Quais propriedades as categorias de base e os mônadas devem possuir para garantir que suas categorias de Kleisli sejam modelos para a computação

quântica? Analisar as categorias de Kleisli como forma de fornecer modelos da computação quântica. Além disso, possíveis aplicações, exemplos concretos e a busca de modelos no domínio de espaços infinitos são motivações para o estudo pósterio dessa tese.

REFERÊNCIAS

- ABRAMSKY, S. Retracing some paths in process algebra. *International Conference on Concurrency Theory*, Springer. Berlin, Heidelberg, p. 1–17, 1996.
- ABRAMSKY, S. No-cloning in categorical quantum mechanics. *Semantic Techniques in Quantum Computation*, p. 1–28, 2009.
- ABRAMSKY, S. Big toy models. *Synthese*, Springer, v. 186, n. 3, p. 697–718, 2012.
- ABRAMSKY, S.; COECKE, B. A categorical semantics of quantum protocols. *In: Proceedings of 19th IEEE conference on Logic in Computer Science*, IEEE, p. 415–425., 2004.
- ABRAMSKY, S.; COECKE, B. Categorical quantum mechanics. *Handbook of quantum logic and quantum structures*, Elsevier, v. 2, p. 261–325, 2009.
- ABRAMSKY, S.; DUNCAN, R. A categorical quantum logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, Cambridge University Press, v. 16, n. 3, p. 469–489, 2006.
- ABRAMSKY, S.; HEUNEN, C. H^* -algebras and nonunital frobenius algebras: first steps in infinite-dimensional categorical quantum mechanics. *Clifford Lectures*, v. 71, p. 1–24, 2012.
- ABRAMSKY, S.; HEUNEN, C. Operational theories and categorical quantum mechanics. *Logic and algebraic structures in quantum computing and information,, Lecture Notes in Logic*, v. 45, p. 88–122, 2016.
- ABRAMSKY, S.; TZEVELEKOS, N. Introduction to categories and categorical logic. *In: New structures for physics*. Berlin: Springer, 2010. p. 3–94.
- ALCANTARA, M.; OLIVEIRA, W.; DIAS, T. Chu spaces as a toy model for quantum mechanics. *In: 1a ESCOLA DE INFORMÁTICA TEÓRICA E MÉTODOS FORMAIS*. Natal/RN, Brasil: [s.n.], 2016. p. 33–42.
- ALCANTARA, M. S. d. S.; DIAS, T.; OLIVEIRA, W. R. de; MELO, S. d. B. A survey of categorical properties of l-fuzzy relations. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, 2021.
- ARBIB, M. A.; MANES, E. G. Fuzzy machines in a category. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Cambridge University Press, v. 13, n. 2, p. 169–210, 1975.
- AWODEY, S. *Category theory*. Oxford University press, 2010.
- BAEZ, J. C. Quantum quandaries: a category-theoretic perspective. *The Structural Foundations of Quantum Gravity*, Oxford University Press Inc., New York, p. 240–266, 2006.
- BAEZ, J. C.; FONG, B. A compositional framework for passive linear networks. *Theory & Applications of Categories*, v. 33, 2018.
- BARR, M. $*$ -Autonomous categories with an appendix by po-hsiang chu. Springer-Verlag, v. 752, 1979.
- BARR, M. Fuzzy set theory and topos theory. *Canadian Mathematical Bulletin*, Cambridge University Press, v. 29, n. 4, p. 501–508, 1986.

- BARR, M. *-autonomous categories and linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, Cambridge University Press, v. 1, n. 2, p. 159–178, 1991.
- BARR, M. Fuzzy models of linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, Cambridge University Press, v. 6, n. 3, p. 301–312, 1996. Fuzzy-fuzzy.
- BARR, M. The separated extensional Chu category. *Theory and Applications of Categories*, v. 4, n. 6, p. 137–147, 1998.
- BARR, M.; WELLS, C. Category theory for computing science. Prentice Hall New York, v. 1, 1990.
- BARWISE, J.; SELIGMAN, J. et al. Information flow: the logic of distributed systems. Cambridge University Press, 1997.
- BEDREGAL, B.; SANTIAGO, R. H.; REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P. Properties of fuzzy implications obtained via the interval constructor. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, v. 8, n. 1, p. 33–42, 2007.
- BEDREGAL, B. C. On interval fuzzy negations. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 161, n. 17, p. 2290–2313, 2010.
- BENNETT, C. H.; BRASSARD, G.; CRÉPEAU, C.; JOZSA, R.; PERES, A.; WOOTTERS, W. K. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Physical review letters*, APS, v. 70, n. 13, p. 1895, 1993.
- BERBERIAN, S. K. Introduction to hilbert space. American Mathematical Soc., v. 287, 1999.
- BERGHOLM, V.; BIAMONTE, J. D. Categorical quantum circuits. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 44, n. 24, p. 245304, 2011.
- BLUTE, R.; SCOTT, P. Category theory for linear logicians. *Linear logic in computer science*, Cambridge University Press Cambridge, v. 316, p. 3–64, 2004.
- BONCHI, F.; SOBOCIŃSKI, P.; ZANASI, F. A categorical semantics of signal flow graphs. *International Conference on Concurrency Theory*, Springer, p. 435–450, 2014.
- BOUWMEESTER, D.; PAN, J.-W.; MATTLE, K.; EIBL, M.; WEINFURTER, H.; ZEILINGER, A. Experimental quantum teleportation. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 390, n. 6660, p. 575–579, 1997.
- BREUVART, F. The resource lambda calculus is short-sighted in its relational model. *International Conference on Typed Lambda Calculi and Applications*, Springer, p. 93–108, 2013.
- BROWN, C.; HUTTON, G. Categories, allegories and circuit design. *Proceedings Ninth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, IEEE, p. 372–381, 1994.
- CASTILLO-MUSSOT, M. del; DIAS, R. C. Fuzzy sets and physics. *Revista Mexicana de Física*, v. 39, n. 2, p. 295–303, 1992.
- CHU, P.-H. *Constructing *-autonomous categories*. of Lecture Notes in Mathematics: *-Autonomous categories (Michael Barr), 1979. v. 752. 103–137 p.

- COECKE, B. Introducing categories to the practicing physicist. *What is category theory*, Polimetrica, p. 45–74, 2006.
- COECKE, B. Quantum picturalism. *Contemporary physics*, Taylor & Francis, v. 51, n. 1, p. 59–83, 2010.
- COECKE, B. New structures for physics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, v. 813, 2011.
- COECKE, B.; DUNCAN, R. W. Interacting quantum observables. In: *Proceedings of the 35th International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, v. 5126, p. 298–310, 2008.
- COECKE, B.; EDWARDS, B. Toy quantum categories. *Electronic notes in theoretical computer science*, Elsevier, v. 270, n. 1, p. 29–40, 2011.
- COECKE, B.; LAL, R. Causal categories: relativistically interacting processes. *Foundations of Physics*, Springer, v. 43, n. 4, p. 458–501, 2013.
- COECKE, B.; PAQUETTE, E. O.; PAVLOVIC, D. Classical structures and quantum structures. *Semantic Techniques in Quantum Computation and Information*, Cambridge University Press, 2008.
- COECKE, B.; PAVLOVIC, D. Quantum measurements without sums. In: *Mathematics of Quantum Computing and Technology*, G, p. 567–604, 2007.
- COHEN, D. W. An introduction to hilbert space and quantum logic. Springer Science & Business Media, 2012.
- CORRADINI, A.; ASPERTI, A. A categorical model for logic programs: Indexed monoidal categories. *Workshop/School/Symposium of the REX Project (Research and Education in Concurrent Systems)*, Springer, p. 110–137, 1992.
- DE, S. K.; BISWAS, R.; ROY, A. R. An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis. *Fuzzy sets and Systems*, Elsevier, v. 117, n. 2, p. 209–213, 2001.
- DEVARAJAN, H.; HUGHES, D.; PLOTKIN, G.; PRATT, V. Full completeness of the multiplicative linear logic of chu spaces. *Logic in Computer Science, 1999. Proceedings. 14th Symposium on*, IEEE, p. 234–243, 1999.
- DIAS, M. L.; JÚNIOR, A. P. B. *Introdução à Teoria dos Reticulados e Reticulados de Subgrupos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2013.
- DIRAC, P. A. M. The principles of quantum mechanics. Oxford university press, n. 27, 1981.
- DUNCAN, R. et al. *Types for quantum computing*. Tese (Doutorado) — University of Oxford, 2006.
- EILENBERG, S.; LANE, M. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 58, 1945.
- EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, APS, v. 47, n. 10, p. 777, 1935.

-
- ETINGOF, P. I.; GOLBERG, O.; HENSEL, S.; LIU, T.; SCHWENDNER, A.; VAINTROB, D.; YUDOVINA, E. Introduction to representation theory. American Mathematical Soc., v. 59, 2011.
- EVANS, J.; DUNCAN, R.; LANG, A.; PANANGADEN, P. Classifying all mutually unbiased bases in rel. *arXiv preprint arXiv:0909.4453*, 2009.
- FELICE, G. de; TOUMI, A.; COECKE, B. Discopy: Monoidal categories in python. *arXiv preprint arXiv:2005.02975*, 2020.
- FIORE, M.; MENNI, M. Reflective kleisli subcategories of the category of eilenberg-moore algebras for factorization monads. *Theory and Applications of Categories*, v. 15, n. 2, p. 40–65, 2005.
- FONG, B. The algebra of open and interconnected systems. *arXiv preprint arXiv:1609.05382*, 2016.
- FONG, B.; SPIVAK, D.; TUYÉRAS, R. Backprop as functor: A compositional perspective on supervised learning. *34th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, IEEE, p. 1–13, 2019.
- GEN, M.; TSUJIMURA, Y.; ZHENG, D. An application of fuzzy set theory to inventory control models. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 33, n. 3-4, p. 553–556, 1997.
- GHANI, N.; HEDGES, J.; WINSCHERL, V.; ZAHN, P. Compositional game theory. *Proceedings of the 33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, p. 472–481, 2018.
- GIRARD, J.-Y. Linear logic. *Theoretical computer science*, Elsevier, v. 50, n. 1, p. 1–101, 1987.
- GIRARD, J.-Y. The blind spot: lectures on logic. European Mathematical Society, 2011.
- GOGIOSO, S.; GENOVESE, F. Towards quantum field theory in categorical quantum mechanics. *arXiv preprint arXiv:1703.09594*, 2017.
- GOGUEN, J. A. L-fuzzy sets. *Journal of mathematical analysis and applications*, Academic Press, v. 18, n. 1, p. 145–174, 1967.
- GUO, Y. Introduction to quantum entanglement. AIP Publishing LLC, v. 2066, n. 1, p. 020009, 2019.
- GUPTA, V. *Chu Spaces: A Model of Concurrency*. [S.l.]: PhD thesis, Stanford University, 1994.
- HAGHVERDI, E.; SCOTT, P. A categorical model for the geometry of interaction. *Theoretical Computer Science*, Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1975-, v. 350, n. 2, p. 252–274, 2006.
- HARDING, J.; WALKER, C. L.; WALKER, E. A. Categories with fuzzy sets and relations. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 256, p. 149–165, 2014.
- HASEGAWA, M.; HOFMANN, M.; PLOTKIN, G. Finite dimensional vector spaces are complete for traced symmetric monoidal categories. *Pillars of computer science*, Springer, p. 367–385, 2008.

- HEUNEN, C.; KARVONEN, M. Reversible monadic computing. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Elsevier, v. 319, p. 217–237, 2015.
- HEUNEN, C.; KARVONEN, M. Monads on dagger categories. *arXiv preprint arXiv:1602.04324*, 2016.
- HEUNEN, C.; TULL, S. Categories of relations as models of quantum theory. *arXiv preprint arXiv:1506.05028*, 2015.
- HEUNEN, C.; VICARY, J. Categorical quantum mechanics: an introduction. *Retrieved on*, v. 5, n. 05, 2017.
- HEUNEN, C.; VICARY, J. Categories for quantum theory: an introduction. Oxford University Press, USA, 2019.
- HOTZ, G. Eine algebraisierung des syntheseproblems von schaltkreisen i. *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik*, v. 1, n. 3, p. 185–205, 1965.
- HOVE, L. V. Von neumann's contributions to quantum theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 64, n. 3, p. 95–99, 1958.
- HOVEY, M. Model categories, volume 63 of. *Mathematical Surveys and Monographs*, v. 63, 1999.
- HUSSAIN, M. *Fuzzy Relations*. 2010.
- JENČOVÁ, A.; JENČA, G. On monoids in the category of sets and relations. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 56, n. 12, p. 3757–3769, 2017.
- KARVONEN, M. The way of the dagger. *preprint arXiv:1904.10805*, 2019.
- KAWAHARA, Y.; FURUSAWA, H. An algebraic formalization of fuzzy relations. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 101, n. 1, p. 125–135, 1999. Crisp-fuzzy.
- KLEISLI, H. Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors. *Proceedings of the American Mathematical Society*, JSTOR, v. 16, n. 3, p. 544–546, 1965.
- KOCK, A. Monads on symmetric monoidal closed categories. *Archiv der Mathematik*, Springer, v. 21, n. 1, p. 1–10, 1970.
- KORNIŁOWICZ, A. Cartesian products of relations and relational structures. *Formalized Mathematics*, v. 6, n. 1, p. 145–152, 1997.
- KRUSE, R.; GEBHARDT, J. E.; KLOWON, F. Foundations of fuzzy systems. John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- LAFONT, Y.; STREICHER, T. Games semantics for linear logic. *Logic in Computer Science, 1991. LICS'91., Proceedings of Sixth Annual IEEE Symposium on*, IEEE, p. 43–50, 1991.
- LAGO, U. D.; FAGGIAN, C. On multiplicative linear logic, modality and quantum circuits. *QPL*, Citeseer, v. 95, p. 55–66, 2011.
- LAL, R. Algebra 4: Lie algebras, chevalley groups, and their representations. Springer Nature, 2021.

- LANDSMAN, N. P. Born rule and its interpretation. Springer, p. 64–70, 2009.
- LEE, H.-M. Applying fuzzy set theory to evaluate the rate of aggregative risk in software development. *Fuzzy sets and Systems*, Elsevier, v. 79, n. 3, p. 323–336, 1996.
- LEE, K. H. First course on fuzzy theory and applications. Springer Science & Business Media, v. 27, p. 1–86, 2006.
- MACLANE, S. Categories for the working mathematician. 2nd edition. Springer-Verlag, 1998.
- MARSDEN, D.; GENOVESE, F. Custom hypergraph categories via generalized relations. *arXiv preprint arXiv:1703.01204*, 2017.
- MCMAHON, D. Quantum computing explained. John Wiley & Sons, 2007.
- MINTERT, F.; CARVALHO, A. R.; KUŚ, M.; BUCHLEITNER, A. Measures and dynamics of entangled states. *Physics Reports*, Elsevier, v. 415, n. 4, p. 207–259, 2005.
- NGUYEN, N.; NGUYEN, H. T.; KREINOVICH, V. Chu spaces: Towards new justification for fuzzy heuristics. 2000.
- NGUYEN, N.; NGUYEN, H. T.; WU, B.; KREINOVICH, V. Chu spaces: Towards new foundations for fuzzy logic and fuzzy control. *with applications to information ow on the world wide web. JACIII*, v. 5, n. 3, p. 149–156, 2001.
- NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. Quantum computation and quantum information. American Association of Physics Teachers, 2002.
- NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. Quantum computation and quantum information. *Phys. Today*, v. 54, n. 2, p. 60, 2001.
- OLIVEIRA, A. G. *Proofs from a Geometric Perspective*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, Centro de informática, 2001.
- ONG, C.-H. L. Quantitative semantics of the lambda calculus: Some generalisations of the relational model. *2017 32nd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, IEEE, p. 1–12, 2017.
- PAPADOPOULOS, B. K.; SYROPOULOS, A. Fuzzy sets and fuzzy relational structures as chu spaces. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, World Scientific, v. 8, n. 04, p. 471–479, 2000.
- PAVLOVIC, D. Relating toy models of quantum computation: comprehension, complementarity and dagger mix autonomous categories. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Elsevier, v. 270, n. 2, p. 121–139, 2011.
- POWER, J. Models for the computational λ -calculus. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Elsevier, v. 40, p. 288–301, 2001.
- POWER, J.; ROBINSON, E. Premonoidal categories and notions of computation. *Mathematical structures in computer science*, Cambridge University Press, v. 7, n. 5, p. 453–468, 1997.
- PRATT, V. Chu spaces from the representational viewpoint. *Annals of Pure and Applied Logic*, Elsevier, v. 96, n. 1, p. 319–333, 1999.

- PRATT, V. Chu spaces: Notes for school on category theory and applications. University of Coimbra, Coimbra, Portugal, jul. 1999.
- PRATT, V. Chu spaces as a semantic bridge between linear logic and mathematics. *TCS*, v. 294, n. 3, p. 439–471, fev. 2003.
- PRATT, V. A crossword puzzle. Puzzle 1.5, 2003. Acesso em: 20 de jun. de 2021. Disponível em: <<http://thue.stanford.edu/puzzle.html>>.
- PRATT, V. R. Linear logic for generalized quantum mechanics. In: CITESEER. *Proceedings Workshop on Physics and Computation, Dallas, IEEE Computer Society*. [S.l.], 1993.
- PRATT, V. R. Chu spaces: Automata with quantum aspects. *Proceedings Workshop on Physics and Computation. PhysComp'94*, IEEE, p. 186–195, 1994.
- PRATT, V. R. The Stone gamut: A coordinatization of mathematics. *Proceedings of Tenth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, IEEE, p. 444–454, 1995.
- PRATT, V. R. Towards full completeness of the linear logic of chu spaces. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Elsevier, v. 6, p. 308–325, 1997.
- PRATT, V. R. Comonoids in chu: a large Cartesian closed sibling of topological spaces. 12 pp. (electronic), in *CMCS'03: Coalgebraic Methods in Computer Science, Proceedings of the 6th Workshop held in Warsaw*, Coalgebraic Methods in Computer Science, in CMCS'03, v. 82, n. 1, 2003.
- PRATT, V. R. Transition and cancellation in concurrency and branching time. *Mathematical Structures in Computer Science*, v. 13, n. 4, p. 485–529, 2003.
- PYKACZ, J. Fuzzy sets in foundations of quantum mechanics. *On Fuzziness*, Springer, p. 553–557, 2013.
- RÉDEI, M.; STÖLTZNER, M. John von neumann and the foundations of quantum physics. Springer Science & Business Media, v. 8, 2013.
- RILEY, M. Categories of optics. *arXiv preprint arXiv:1809.00738*, 2018.
- SCHALK, A. What is a categorical model of linear logic. *Manuscript, available from <http://www.cs.man.ac.uk/schalk/work.html>*, 2004.
- SCHALK, A.; PAIVA, V. D. Poset-valued sets or how to build models for linear logics. *Theoretical computer science*, Elsevier, v. 315, n. 1, p. 83–107, 2004. Fuzzy-crisp.
- SCHMITT, I.; NÜRNBERGER, A.; LEHRACK, S. On the relation between fuzzy and quantum logic. *Views on Fuzzy Sets and Systems from Different Perspectives*, Springer, p. 417–438, 2009.
- SEELY, R. A. Linear logic, *-autonomous categories and cofree coalgebras. Ste. Anne de Bellevue, Quebec: CEGEP John Abbott College, 1987.
- SELINGER, P. Finite dimensional hilbert spaces are complete for dagger compact closed categories. *arXiv preprint arXiv:1207.6972*, 2012.
- SPEKKENS, R. Evidence for the epistemic view of quantum states: A toy theory. *Physical Review A* 75, 2007.

-
- STOUT, L. N. When does a category built on a lattice with a monoidal structure have a monoidal structure? *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, v. 161, n. 9, p. 1162–1174, 2010.
- STREET, R. et al. Monoidal categories in, and linking, geometry and algebra. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, The Belgian Mathematic Society, v. 19, n. 5, p. 769–820, 2012.
- SZIGETI, J. On limits and colimits in the kleisli category. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, v. 24, n. 4, p. 381–391, 1983.
- VANNUCCI, S. On game formats and Chu spaces. Department of Economics University of Siena 417, Department of Economics, University of Siena, jan. 2004.
- WALKER, C. L. Categories of fuzzy sets. *Soft Computing*, Springer, v. 8, n. 4, p. 299–304, 2004.
- WINTER, M. Goguen categories. *Journal on Relational Methods in Computer Science*, v. 1, p. 339–357, 2004.
- WINTER, M. Goguen categories: a categorical approach to l-fuzzy relations. Springer Science & Business Media, v. 25, 2007.
- WINTER, M.; JACKSON, E. Categories of relations for variable-basis fuzziness. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 298, p. 222–237, 2016. Crisp-fuzzy.
- YANOFSKY, N. S.; MANNUCCI, M. A. Quantum computing for computer scientists. Cambridge University Press, 2008.
- YEN, J.; LANGARI, R. Fuzzy logic: intelligence, control, and information. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, v. 1, 1999.
- YOUNG, N. An introduction to hilbert space. Cambridge university press, 1988.
- ZIMMERMANN, H.-J. Fuzzy set theory—and its applications. Springer Science & Business Media, 2011.