UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE

NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

INVESTIGANDO A NOÇÃO DE EQUAÇÃO NO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA

JOSÉ EDMILSON MELO DA SILVA

Caruaru

2017

JOSÉ EDMILSON MELO DA SILVA

INVESTIGANDO A NOÇÃO DE EQUAÇÃO NO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática sob a orientação do professor Dr. Edelweis Jose Tavares Barbosa.

Caruaru

2017

Catalogação na fonte:

Bibliotecária – Marcela Porfírio – CRB/4-1878

S586i Silva, José Edmilson Melo da.
Investigando a noção de equação no livro didático de matemática. / José Edmilson Melo da Silva. - 2017.
127f.: il.; 30 cm.

Orientador: Edelweis Jose Tavares Barbosa.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Matemática, 2017.
Inclui Referências.

1. Matemática – Ensino. 2. Livros didáticos. 3. Álgebra. I. Barbosa, Edelweis Jose Tavares (Orientador). II. Título.

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2017-091)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Formação Docente
Curso de Matemática - Licenciatura

INVESTIGANDO A NOÇÃO DE EQUAÇÃO NO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA

José Edmilson Melo da Silva

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA - Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e _______________ em 05 de julho de 2017.

Banca Examinadora:

____

Profº. Edelweis Jose Tavares Barbosa
(Orientador)

____

Profº. Paulo Roberto Câmara de Souza
(Examinador(a) Interno(a))

____

Profº. Sidney Allessandro da Cunha Damasceno
(Examinador(a) Externo(a))

RESUMO

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa qualitativa na perspectiva da Educação Matemática, que investigou a noção de equação no Ensino Fundamental II a partir do livro didático. Pesquisa essa que se justifica nas constantes dificuldades de aprendizagem e de ensino relacionadas a esse conceito tão importante na Matemática e no cotidiano. Diante dos problemas associados ao ensino e à aprendizagem de equação, surge um questionamento a cerca de quais contextos contemplam a noção de equação e de como a mesma é tratada nestes contextos no decorrer do Ensino Fundamental. A fim de responder às constantes inquietações derivadas desse questionamento, optamos por investigar a cerca da abordagem das equações ancorada na análise do livro didático de Matemática. Nosso objetivo, portanto, foi identificar como a noção de equação é concebida no livro didático com relação ao contexto em que se insere e a forma com que é tratada. A priori, apreciamos uma revisão de literatura a cerca das equações na história, apresentamos como as recomendações curriculares sugerem a abordagem desse conceito e investigamos como os significados de equação, apresentados na pesquisa de Ribeiro (2007), são concebidos por professores de Matemática e alunos do Ensino Médio, utilizando-nos das investigações de Barbosa (2009) e de Dorigo (2010), respectivamente. Então, abraçando o perfil conceitual de equação, proposto por Ribeiro (2013), selecionamos uma coleção de livro didático do Ensino Fundamental II, aprovada no PNLD 2017, para investigar as atividades que exploraram o trabalho com as equações no livro. Para tal, utilizamo-nos, como passos metodológicos, de uma sondagem das atividades que contemplam esse conceito ao longo de cada volume da coleção e, em seguida, de uma análise das mesmas, categorizando-as quanto a sua pertinência com as zonas do perfil conceitual referido, a fim de encontrar pontos importantes para a pesquisa. Pudemos, então, identificar como os contextos prático, geométrico, estrutural e processual trabalham as equações e como se fazem presentes os tratamentos intuitivo, dedutivo, generalista, tecnicista e aplicacional no decorrer dos quatro volumes da coleção e, assim, verificar como as equações são concebidas durante os quatro anos do Ensino Fundamental II a partir do livro didático analisado.

Palavras-chave: Álgebra. Ensino de Matemática. Equação. Matemática. Pensamento Algébrico.

ABSTRACT

This study presents the results of a qualitative research from the Mathematics Education perspective, which investigated the notion of equation from Secondary School textbooks. This research is justified by the constant difficulties of learning and teaching this important concept in Mathematics and in everyday life. In the face of problems associated with teaching and learning equation, a question arises about which contexts contemplate the notion of equation and how they treat it throughout Secondary School. In order to answer the constant concerns derived from this question, we propose an investigation about the approach of equations based on the analysis of Mathematics textbook. We aimed to identify how the notion of equation is conceived in the textbook regarding the context in which it is inserted as well as the way it is treated. Firstly, we identified a literature review about equations throughout History, followed by presenting how the curricular recommendations suggest approaching this concept and then investigated how the meanings of equation, presented in the research of Ribeiro (2007), are conceived by high-school students and Mathematics teachers, based on the investigations carried out by Barbosa (2009) and Dorigo (2010). Then, by embracing the conceptual profile of equation proposed by Ribeiro (2013), we selected a textbook collection from Secondary Education, approved at PNLD 2017, to carry out an investigation about the activities that explored equations in the book. For this aim, we employed as methodological steps a survey of the activities that contemplate this concept throughout each volume of the collection and then an analysis, categorizing them regarding their relevance to the profile zones in order to find important points for the research. We were able to identify how the practical, geometric, structural and procedural contexts work the equations and how the intuitive, deductive, generalist, technicist and application treatments are present throughout the four volumes of the collection and thus verify how the equations are conceived during the four years of secondary school based on the textbook analysed.

Keywords: Algebra. Mathematics Teaching. Equation. Mathematics. Algebraic Thinking.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho foi motivado pelas dificuldades de aprendizagem frequentemente presentes nos alunos quando se iniciam no estudo da Álgebra. Em minhas experiências lecionando no Ensino Fundamental pude perceber que grande parte dos alunos demonstram incompreensões e dificuldades constantes no trabalho com incógnitas ou variáveis, especialmente quando se trata de equações, em que os mesmos sentem dificuldades em interpretá-las e até mesmo em apenas resolvê-las.

Com a finalidade de entender um pouco mais a cerca dessa problemática, debrucei-me a investigar um pouco sobre a Álgebra, o pensamento algébrico e as equações e a partir de tais pesquisas comecei a me questionar sobre o ensino das equações e sobre os diferentes contextos a que esse conceito está relacionado.

Levando em conta o importante papel desempenhado pelo livro didático dentro e fora da sala de aula, levantei a seguinte questão: "Em quais contextos as equações encontram-se presentes e como esses contextos são tratados no livro didático da Educação Básica, especialmente do Ensino Fundamental II?".

A partir desse questionamento, aprofundei nossa pesquisa, passando a estudar o surgimento e o desenvolvimento das equações ao longo da história e algumas pesquisas a cerca da Álgebra e das equações. Durante esses estudos, identifiquei-me bastante com algumas pesquisas no âmbito da Educação Matemática, essas que tratavam das concepções atribuídas à noção de equação. Então, estudando tais pesquisas percebemos inúmeras relações entre a forma como as equações eram concebidas durante o seu surgimento e desenvolvimento com a forma que elas aparecem nos contextos atuais do ensino.

Os relatos históricos do livro *O romance das equações algébricas* em parceria com a Teoria dos Multissignificados de Equação, proposta por Ribeiro (2007) em sua tese de doutorado, foram meus guias iniciais na busca de sanar nosso questionamento, levantado anteriormente.

Seguindo um pouco mais a fundo, investigamos a abordagem de Barbosa (2009), que propôs uma investigação a respeito dos significados da noção de equação concebidas por professores de Matemática, pesquisa essa que se baseava nos estudos da Teoria de Ribeiro (2007). Os resultados de tal pesquisa foram bastante inquietantes e serão relatados no decorrer desse trabalho.

Continuando nossas investigações, analisamos os resultados obtidos por Dorigo (2010), que também propunha uma investigação a cerca dos significados da noção de equação, porém com alunos do Ensino Médio e identificamos também alguns pontos que nos fizeram refletir e aprofundar nossas investigações.

Aliando todos esses estudos citados e alguns outros, Ribeiro (2013) propõe a formulação de um perfil conceitual da noção de equação, em que apresenta 5 zonas que estabelecem os diferentes significados em que as equações apresentaram-se no decorrer das investigações por ele realizadas.

Essas zonas apresentam os diferentes contextos em que as equações são evidenciadas e a forma com que elas são tratadas em cada contexto. Assim, pudemos levantar pontos importantes para responder ao nosso questionamento inicial, uma vez que os contextos e tratamentos diferentes dados às equações são apreciados nas cinco zonas desse perfil conceitual de equação.

Restando-nos ainda responder ao questionamento a cerca de como esses diferentes contextos e tratamentos, abordados nesse perfil conceitual, são estabelecidos no Ensino Fundamental. Tendo em vista os trabalhos de Barbosa (2009) e Dorigo (2010) que fizeram importantes investigações com relação aos significados da noção de equação concebidas em diferentes contextos por professores e alunos, decidimos, então, investigar também um grande envolvido nos processos de ensino e de aprendizagem, dentro e fora da sala de aula, o livro didático.

Isto posto, ao reconhecermos a importância que o livro didático detêm e que muitas vezes ele acaba por influenciar nos processo de ensino e de aprendizagem, foi que decidimos investigar como a noção de equação é concebida no livro didático em relação aos diferentes contextos e tratamentos em que a mesma está inserida e para isso abraçamos o perfil conceitual de equação proposto por Ribeiro (2013) para investigar as equações no livro didático de Matemática do Ensino Fundamental II.

Diante disso, nosso objetivo foi identificar como a noção de equação é concebida numa coleção de livro didático de Matemática do Ensino Fundamental II com relação ao contexto em que se insere e a forma com que é tratada. Para alcançar o objetivo geral de nossa pesquisa a partir do perfil conceitual que adotamos para nossas investigações, traçamos alguns objetivos menores com a intensão de nos conduzir durante nossas investigações, são eles:

- Investigar como se distribuem as atividades do livro que contemplam a noção de equação;

- Analisar como se distribuem as cinco zonas do perfil conceitual de equação proposto por Ribeiro (2013) nas atividades que contemplam o trabalho com equação no livro didático;
- Identificar quais são as zonas mais e menos frequentes nos trabalhos com equação e como essas zonas estão situadas no livro;
- Discutir possíveis implicações que estejam relacionadas aos resultados encontrados.

Desse modo, o presente trabalho se qualifica como um estudo qualitativo de caráter investigativo no campo da Educação Matemática. Pois, encontramos justificativa para nossa pesquisa nos constantes problemas e dificuldades presenciados no ensino e na aprendizagem de equações na Educação Básica. Problemas esses que desencadeiam uma série de rejeições à Matemática por parte dos alunos. Seja na resolução de equações, na identificação ou na compreensão das mesmas, inúmeras barreiras aparecem e são palcos de diversas discussões no campo da Educação Matemática.

Os procedimentos e técnicas de resolução são por si só desencadeadores de dificuldades, uma vez que as manipulações com letras parecem ser bastante abstratas em alguns anos da escolarização. Ademais, a esse fator, esses procedimentos mecânicos configuram-se como a forma com que muitos compreendem o conceito de equação. Assim, a ideia de equação é entendida, por muitos, apenas como um conjunto de procedimentos e técnicas que se operam sobre letras e números para se chegar ao valor desconhecido de uma incógnita, normalmente x.

Nesse sentido, os problemas citados acima, além de frequentes entre os alunos, são também presenciados na concepção de professores, como discutiremos no decorrer deste trabalho e que influenciam diretamente na forma como o conceito de equação é compreendido.

Assim, ao investigar as concepções abordadas no livro didático, entendemos que a relevância deste trabalho está diretamente relacionada com a qualidade do ensino e da aprendizagem da noção de equação na Educação Básica, pois diz respeito aos diferentes contextos e tratamentos aos quais as equações estão inseridas.

No decorrer do nosso trabalho abordamos alguns estudos com o objetivo de conhecer o desenvolvimento histórico das equações e apresentar perspectivas para seu ensino, enfatizando a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico. Além disso, discutimos sobre a teoria adotada, sua construção e as principais pesquisas relacionadas a ela.

No Capítulo 2 apresentamos, em nossa fundamentação teórica, uma breve introdução à história da Matemática, em que buscamos identificar registros de trabalhos com equações ao longo dos tempos em diferentes sociedades. Nossa finalidade foi compreender não somente quando surgiram, mas também entender quais necessidades levaram a humanidade ao desenvolvimento das equações e da Álgebra. Para isso, fizemos um resumo dos trabalhos desenvolvidos pelos babilônios, egípcios, gregos, árabes, hindus e europeus renascentistas.

Em seguida, discutimos sobre o ensino da Matemática com ênfase nas equações. Para tal, utilizamo-nos de uma revisão de literatura em que abordamos perspectivas para o ensino das equações no contexto da Educação Matemática. Nesse capítulo, contemplamos discussões importantes de diversos teóricos e recomendações das diretrizes curriculares. Como não poderia ser diferente, nossa abordagem para o ensino de equações a indiscutível importância do desenvolvimento do pensamento algébrico na construção de uma aprendizagem sólida em Álgebra e, consequentemente, em equações.

Seguindo um pouco mais, entenderemos a construção da Teoria dos Multissignificados de Equação por Ribeiro (2007), discutiremos as pesquisas de Barbosa (2009) e Dorigo (2010) e apresentaremos a construção do perfil conceitual de equação proposto por Ribeiro (2013), este que nos conduzirá em nossa investigação.

Partindo então para a nossa pesquisa, selecionamos para a análise a coleção “Praticando Matemática” do 6º ao 9º ano. Tal coleção foi escolhida por satisfaz a algumas condições, entre elas, ter sido aprovada no PNLD 2017 e por ser a coleção mais adotada no Colégio Osvaldo Benício Vaz Cavalcante, localizado no município de São Joaquim do Monte - PE.

A partir da coleção selecionada, nossos passos metodológicos foram planejados de forma a possibilitarem satisfazer os objetivos anteriormente traçados. Assim, pretendíamos analisar os quatro volumes da coleção “Praticando Matemática” do Ensino Fundamental II, a fim de investigar como se dava o trabalho com equação em cada volume e o que mudava de um volume para outro.

Em nossa pesquisa, analisamos as atividades abordadas na coleção, volume a volume, fazendo um levantamento das que trabalhavam a ideia de equação. Selecionadas essas atividades, fizemos uma séria de análises para classificar o trabalho das mesmas, a cada volume, quanto a sua pertinência às zonas do perfil conceitual de Ribeiro (2013) e, posteriormente, analisamos num panorama mais geral como a noção de equação é contemplada na coleção a partir dos resultados obtidos.

Durante a referida análise, identificamos que a coleção aborda um trabalho bastante significativo com as equações e com as múltiplas zonas categorizadas por Ribeiro (2013), em que algumas aparecem mais frequentemente, outras menos. Percebemos, ainda, algumas relações bastante inquietantes na forma como o trabalho com as equações é estabelecido no decorrer dos volumes analisados.

Percebemos, em geral, que os contextos em que as equações surgem de situações práticas, geométricas ou meramente processuais são bastante evidenciados nos volumes e que atividades mais abstratas não foram muito evidenciadas, possivelmente por se tratar de uma abordagem no Ensino Fundamental e com características ainda introdutórias.

Dessa forma, a investigação possibilitou entender como as equações são apresentadas, em relação ao contexto em que inserem e a forma como são tratadas, além de que possibilitou uma reflexão com relação às implicações de cada uma das zonas categorizadas no perfil conceitual adotado para o desenvolvimento da noção de equação ao longo dos quatro anos do Ensino Fundamental II.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As equações estão presentes em diversos contextos e, a partir da forma que recebem, podem representar ou estabelecer inúmeras situações. Entretanto, devido a sua importância, antes de prosseguirmos, abordamos uma definição para tal noção. O difícil é encontrar uma definição que o satisfaça bem, visto que a amplitude das aplicações das equações está por toda parte e assim fica difícil ou até mesmo impossível limitarmos essa noção a uma definição precisa.

A definição para essa noção matemática pode ser expressa de diversas formas, tanto por matemáticos, como por educadores, bem como por demais estudiosos. Traremos abaixo uma definição bastante direta e trivial do que podemos entender, pelo menos de partida, como sendo uma equação, lembrando que esta por si só não dá conta da amplitude de tal conceito.

Segundo o dicionário da língua portuguesa Aurélio Buarque de Holanda Ferreira, equação é “qualquer igualdade entre seres matemáticos que só é satisfeita para alguns valores dos respectivos domínios”. (FERREIRA, 2010, p. 818).

Destacamos que, outras definições desse conceito serão abordadas mais a diante, durante as discussões sobre a construção da Teoria dos Multissignificados de Equação. Pois, embora pareça-nos bastante óbvio o que seja uma equação, é importante, inicialmente, entendermos um pouco mais sobre elas, visto que estas não se restringem apenas a área da Matemática. A aplicação das equações permeia por várias áreas do conhecimento científico e pelo dia a dia das mais variadas sociedades, podendo, assim, receber alterações em suas definições.

O sal de cozinha, por exemplo, é um dos principais condimentos utilizados nos alimentos em todo o mundo e sua obtenção pode ser dada a partir da reação química de síntese, expressa, quimicamente, através da equação:

$$2\,Na_{(S)} + Cl_{2(G)} \rightarrow 2\,NaCl_{(S)}$$

Além disso, várias relações matemáticas e fenômenos físicos podem ser expressos a partir de equações. Essas equações são comumente utilizadas como fórmulas para aplicações em diversas situações. Como exemplo disso, podemos citar a famosa fórmula física de força em função da massa e da aceleração, representada como:

$$F = m.a$$

No cotidiano, muitas situações apresentam noções de equação e permitem que possamos fazer uso das mesmas para melhor interpretar e solucionar problemas diversos. A esse respeito, o livro *O Romance das Equações Algébricas*, nos permite fazer uma grande viajem pelo fantástico mundo da Matemática e entender o desenvolvimento do conceito de equação ao longo da história da humanidade. Neste livro, o autor destaca que, “as equações (...) constituem, pelo menos do ponto de vista prático, a parte mais importante da Matemática” (GARBI, 2010, p. 1).

Inicialmente, a palavra equação tem origem latina e deriva da noção de igual ou igualdade. É perceptível que, na maioria dos casos, a noção de equação está direta ou indiretamente ligada a ideia de igualdade ou de equilíbrio e pode ser utilizada para solucionar problemas dos mais diversos. Para Garbi (2010, p. 1) “qualquer problema que possa ser solucionado através dos números certamente será tratado direta ou indiretamente, por meio de equações”.

Diante de sua importância, buscamos entender mais a diante como as equações surgiram no decorrer dos processos históricos da humanidade e de que forma eram concebidas. Além disso, procuramos estabelecer relações comparativas entre as diferentes formas como as equações são estabelecidas durante a evolução das sociedades e como essas manifestações das equações ainda influenciam hoje em dia.

Buscamos, em seguida, aliar o estudo histórico com a importância do trabalho pedagógico que permeia o ensino das equações, seguindo as principais perspectivas da Educação Matemática, a fim de estabelecer relações importantes entre o desenvolvimento das equações e os significados que as mesmas comtemplam em diferentes situações. Assim, objetivamos entender o que é importante no trabalho com as equações e como se trabalha tais pontos de modo a possibilitar o maior aproveitamento possível.

Contudo, buscamos aliar esses estudos para compreender as zonas de um perfil conceitual de equação, proposto por Ribeiro (2013), a fim de que possamos entender melhor como as equações podem estabelecer diferentes significações a partir de contextos e situações diferentes, baseando-nos nas investigações contempladas neste trabalho, bem como na análise de outras pesquisas relacionadas.

2.1 As Equações na História da Matemática.

No decorrer do desenvolvimento da humanidade, a Matemática foi o centro das atenções de muitos estudos e pesquisas, isso porque mostrava-se muito eficaz na resolução e generalização de problemas cotidianos nas mais diversas sociedades e culturas, bem como essencial para o desenvolvimento de tecnologias para o progresso da humanidade.

O desenvolvimento da Matemática, nos primórdios dessa ciência, esteve relacionado especialmente às atividades ligadas à agricultura, economia e engenharia. Isso porque com o crescimento da população e aumento das necessidades de produção e infraestrutura fizeram necessário o aperfeiçoamento dessas atividades. Para Eves (2004, p. 57):

> Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir a terra e a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis.

Dessa forma, a Matemática antiga era proveniente da busca por soluções de problemas cotidianos, normalmente de ordem geométrica ou aritmética, que ajudassem no desenvolvimento das sociedades.

Com a importância que ganhava a Matemática, a partir da evolução da Aritmética e da Geometria foi nascendo a Álgebra e com ela as equações bem como uma Geometria teórica, de caráter dedutivo. Os principais registros do trabalho com Álgebra nas civilizações antigas são, basicamente, resoluções de equações aplicadas à situações práticas, extraídas de problemas de origem Geométrica ou aritmética, assim não se fazia presente, nos primórdios, o trabalho com demonstrações de resultados, o mais comum eram registros descritivos de passos para a resolução de equações. (EVES, 2004)

Porém, ao decorrer da evolução e desenvolvimento da Matemática, a Álgebra ganha espaço e vai tomando profundidade. Isso porque, segundo Ribeiro e Cury (2015, p. 11) a Álgebra “é objeto de pesquisas desde que a humanidade se debruçou sobre a realidade para construir seu conhecimento, chegando às abstrações que permitem novas visões sobre cada conceito criado”. Assim, a Álgebra desenvolveu-se paralelamente ao desenvolvimento tecnológico da humanidade e foi ferramenta-chave para inúmeras aquisições científicas e tecnológicas.

A partir daí, a Álgebra e as equações começam a roubar a cena nos estudos matemáticos. Além disso, o desenvolvimento da mesma ao longo da história compreende uma série de acontecimentos e momentos que mudaram os rumos da Matemática. A Álgebra e as equações nasceram da necessidade de se resolver problemas práticos, mas evoluíram ao passo que as diferentes sociedades entenderam seu potencial, tomando características mais próprias, inclusive um simbolismo próprio.

Infelizmente as aquisições matemáticas de algumas civilizações antigas ficaram praticamente perdidas e hoje pouco se conhece sobre seus trabalhos. Diversos são os motivos dessas percas e na maioria deles a má conservação de seus instrumentos de registro foi a principal causa das perdas.

Diante disso, abordaremos neste capítulo, de forma breve, o desenvolvimento da Matemática ao longo da história, em especial atentando para a presença de registros das atividades com equações, apresentando assim a Matemática dos babilônios, dos egípcios, dos gregos, dos hindus e árabes e dos europeus renascentistas.

Por fim, procuraremos sintetizar de uma forma mais geral todo o percurso pelo qual as equações passaram ao longo de alguns milênios.

2.1.1 A Matemática dos babilônios

Os babilônios concentravam seus escritos em tábuas, já que enfrentavam escassez de papiros. Essas tábulas, produzidas normalmente a partir de argila amolecida permitiram uma melhor conservação de seus registros. Muitas dessas tábulas se fizeram preservadas ao longo do tempo e possibilitaram que hoje possa se ter uma ideia de seus trabalhos. Antigamente pouco se conhecia da Matemática desses povos, mas durante expedições arqueológicas do final do século XIX na região da antiga Mesopotâmia foram descobertas inúmeras tábulas dos antigos babilônios.

Segundo Eves (2004), de cerca de meio milhão de tábulas encontradas, em torno de 400 se referem a tópicos exclusivamente matemáticos, essas que datam desde 2100 a.C. até 300 d.C. Esses registros, feitos em escritas cuneiformes, deixam claro que os mesmos adotavam um sistema de numeração de base 60, que até hoje está presente em alguns conceitos matemáticos. Na maioria dos casos, esses registros matemáticos continham lista de problemas e suas resoluções, além de anotações comerciais.

Dentre os assuntos presentes nessas tábulas, inúmeros registros de distribuição de produtos e cálculos aritméticos, notas promissórias, uso de juros simples e compostos e documentos de empresas que lidavam com sistemas de pesos e medidas. Essas descrições mostram o notável uso da Aritmética entre esses povos. Analisando o calendário babilônico é ainda possível assegurar que os mesmos já dominavam uma determinada aritmética de contagem desde uns cinco séculos antes de Cristo. (EVES, 2004).

Como pôde ser percebido, seus principais registros matemáticos apontam para um trabalho com uma Matemática cotidiana, expressa a partir de situações práticas da agricultura, economia e comércio. Antes, pouco se tinha conhecimento de seus trabalhos, como apontado anteriormente, porém a partir dos resultados de expedições exploratórias muito pôde-se descobrir sobre as construções dos babilônios, seja em sua geometria pouco significativa ou em seus traços marcantes de uma Álgebra retórica significativa.

Segundo Eves (2004, p.63), em sua geometria, os babilônicos já dominavam, por volta do ano 2000 a.C. métodos para cálculo de áreas e volumes, inclusive utilizando um arredondamento para o valor de л em 3 1/8, o que corresponde a 3,125. Devemos aos babilônios a divisão do círculo de uma circunferência em 360 partes iguais, assim como usamos ainda hoje. Sua Geometria já era de caráter predominantemente algébrico, sendo estes considerados "mais fortes em Álgebra do que em Geometria".

Os babilônios demonstravam habilidades com uma Álgebra envolvida na resolução de vários tipos de equações. Nos escritos babilônicos, as equações eram comumente apresentadas em situações geométricas, e eram usadas como fórmulas gerais e aplicadas em seus problemas geométricos. Segundo Eves (2004, p. 61-62): "Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro)".

Foram encontradas inúmeras tábuas de cálculos que compõem as tábulas de Yale, que apontam para uma forte presença da Álgebra entre os babilônios, que eram, segundo Eves (2004), grandes construtores de tábuas, calculistas habilidosos e muito bons em Álgebra. Os babilônios conheciam a relação do teorema de Pitágoras, muito antes de Pitágoras e sabiam trabalhar com relações de semelhança e proporcionalidade em triângulos e apresentavam equações para o cálculo de volumes.

Eves (2004, p. 61) destaca a presença de um problema datado possivelmente de 1600 a.C. em uma das tábulas da coleção de Yale em que uma equação cúbica surge da eliminação de z na resolução de uma situação de volume de troncos de uma pirâmide envolvendo um sistema de equações do tipo:

$z(x^2 + y^2) = A,$

$z = ay + b,$

$x = c.$

Na coleção de tábulas G. A. Plimpton da Universidade de Columbia, catalogada sob o número 322, a famosa *Plimpton 322*, datada de, aproximadamente entre 1900 e 1600 a. C., é "talvez a mais notável das tábulas matemáticas babilônias já analisadas". (EVES, 2004, p. 63).

Figura 1: *Plimpton 322*.

Fonte: Eves (2004, p. 65).

Mesmo danificada, essa tábula mostra o trabalho dos babilônios com hipotenusas e catetos de triângulos retângulos, mostrando que possuíam certo conhecimento do que mais tarde ficou conhecido como ternos pitagóricos, que foram, posteriormente aperfeiçoados pelos gregos. Para o autor: "Parece evidente que os babilônios desse remoto período tinham ciência da representação paramétrica geral dos ternos pitagóricos primitivos". (EVES, 2004, p. 66).

É possível concluir que os babilônicos antigos dessa época já dominavam uma Álgebra retórica bastante desenvolvida e apresentavam trabalhos relevantes com equações em contextos aritméticos e geométricos. Em suas resoluções de equações quadráticas (grau 2), os babilônios, em uma de suas tábulas, apresentam o que provavelmente seriam os primeiros registros de trato com mudança de variáveis. (PITOMBEIRA, 2004).

Para se ter ideia de seus trabalhos com equações, apresentamos um típico exemplo de como esses povos manipulavam as equações a partir de seus problemas práticos, que traduzido para o sistema de numeração de base 10 pode ser entendido como: “Achar o lado de um quadrado se sua área menos seu lado é igual a 870” (PITOMBEIRA, 2004, p. 2-3).

Cabe lembrar que, na resolução de seus problemas, o simbolismo algébrico não era evidenciado, mas a predominância era de descrição de passos operacionais aritméticos que levassem a resolução do problema, inclusive problemas de caráter algébrico.

Mas não foi só o povo babilônico que desenvolveu a Matemática cedo, registros do antigo Egito mostram os trabalhos desse povo no desenvolvimento da mesma, embora, segundo Eves (2004, p. 67), “a matemática no Egito antigo nunca alcançou o nível obtido pela matemática babilônica.” Fato esse que pode ser consequência do desenvolvimento econômico mais avançado da Babilônia.

Sigamos, então, para uma viagem pela história da Matemática egípcia em busca de trabalhos significativos com Álgebra e, especificando um pouco mais, com equações. Durante essa viagem, abordamos algumas discussões que relacionam as atividades algébricas de tais povos com os babilônios.

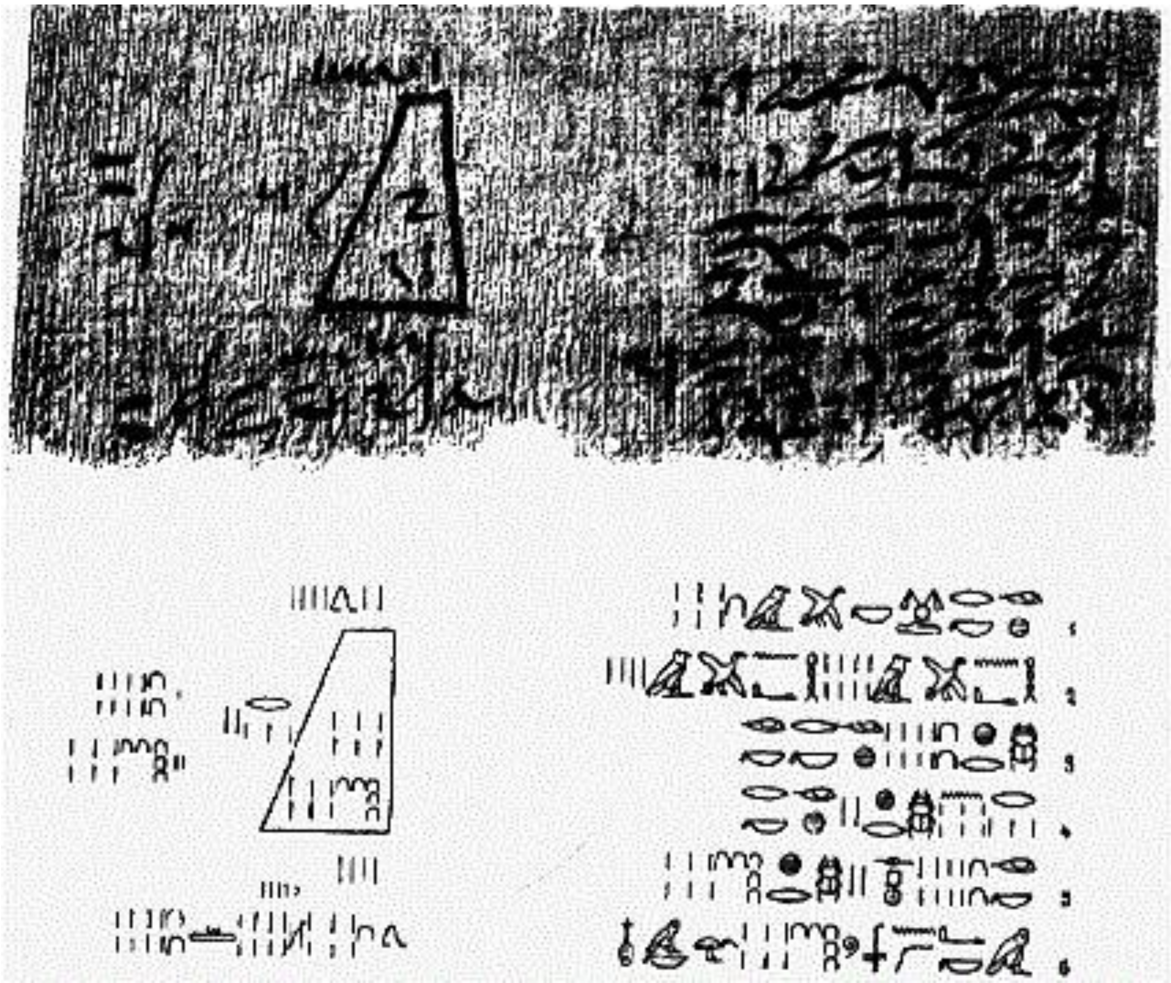
2.1.2 A Matemática dos egípcios

Os egípcios antigos destacaram-se numa engenharia prática que demonstrava um excelente domínio da Aritmética e de medidas e formas geométricas. Seus trabalhos arquitetônicos são realmente brilhantes, suas construções contém níveis de precisão admiráveis, levando-se em conta a tecnologia disponível na época. Traços significativos de sua Aritmética de contagem ficam evidentes no museu de Oxford onde um cetro (3100 a.C.) “que superestimava resultados de uma vitoriosa campanha militar” continha números de ordem de milhões. (EVES, 2004, p. 67).

Segundo Eves (2004, p. 67), a pirâmide Gizé (2600 a.C.) é repleta de problemas matemáticos e de engenharia, com aproximadamente 52 611 m^2 de área, a pirâmide foi construída com mais de 2 milhões de blocos de mais de 2 toneladas cada, alguns tetos foram construídos com blocos de granito pesando mais de 50 toneladas trazidos de muito longe e colocados a uma altitude relativamente grande do solo. Além disso, essa pirâmide continha imperfeições de escala insignificante, como erros de 1/14 000 entre os lados da base quadrada e erros de 1/27 000 nos ângulos retos dos vértices da base. Construções como essa evidenciam a forte presença da Matemática entre os egípcios.

Os principais vestígios escritos da Matemática egípcia estão dispostos, principalmente, nos famosos papiros de Rhind (1650 a.C.) e de Moscou (1850 a.C.). O papiro de Rhind contém 85 problemas matemáticos escritos por Ahmes de trabalhos mais antigos. Já o papiro de Moscou, contém 25 problemas matemáticos da época e encontra-se no museu de Berlim. (EVES, 2004, p. 70).

Figura 2: Parte do papiro de Moscou



Fonte: http://www.matematica.br/historia/pmoscou.html

Para Eves (2004,p. 70):

> O papiro Rhind é uma fonte primaria rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos.

Figura 3: Parte do papiro de Rhind.

Fonte: http://www.matematica.br/historia/prhind.html

A descoberta de inúmeros outros papiros como o papiro de Rollin (1350 a.C.) e de Harris (1167 a.C.) também foram de suma importância para conhecermos a Matemática desses povos, mas os 110 problemas dispostos nos papiros de Moscou e Rhind formam os maiores registros escritos de sua Matemática.

Para Ribeiro e Cury (2015, p. 30) e Eves (2004, p. 73), as atividades matemáticas dos egípcios surgiam, em grande parte, de problemas de ordem prática, envolvendo pão, cerveja, balanceamento de rações, armazenamento de alimentos e outras atividades.

A partir desses problemas de ordem prática pode ser notada a presença das equações na cultura matemática egípcia. Como aponta Eves (2004, p.73), grande parte desses problemas envolvia a resolução de equações lineares simples de uma incógnita, resolvidos na sua maioria pelo que mais tarde ficou conhecido como regra de “falsa posição”.

Para entendermos melhor, ilustramos abaixo como funciona a regra de “falsa posição”, utilizada pelos egípcios nos problemas dessa época.

Queremos solucionar a Equação (*) para a incógnita *“x”:*

$4x – (3x/2) = 15$ (*)

Podemos supor $x = 2$, como possível solução e encontramos que:

$4.2 – (3.2/2) = 5$ (**)

Observe que para se chegar a 15 temos que multiplicar 5 (da Equação (**)) por 3, daí, para solucionar a Equação (*) multiplicamos o valor suposto ($x=2$) por 3, obtendo $x = 6$ como solução.

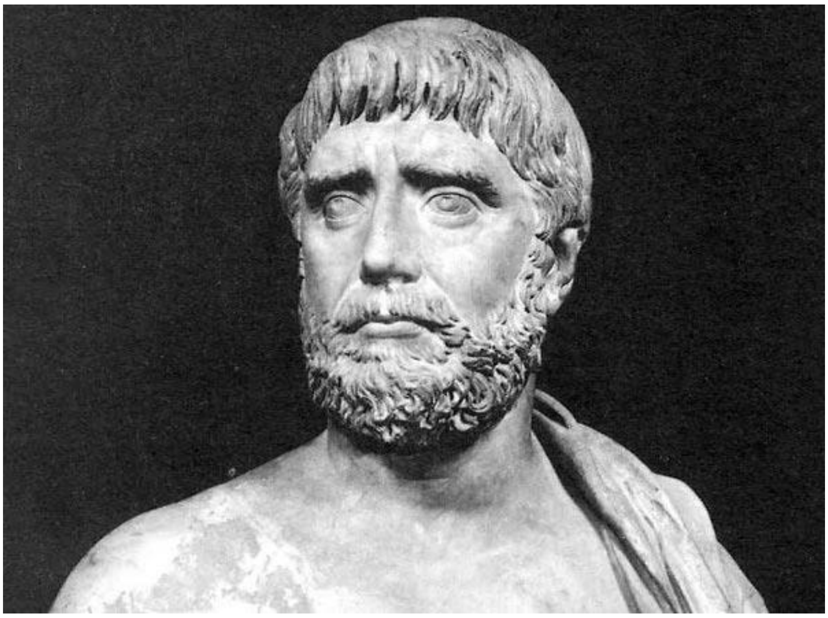
Para Ribeiro e Cury (2015, p. 30), esse método é bastante similar ao método das tentativas. Os autores ainda pontuam que em suas soluções, os egípcios normalmente não faziam uso de grandes métodos ou raciocínios, mas praticamente ao uso da regra de falsa posição. No papiro de Rhind, principal fonte da Matemática egípcia, são encontrados traços de uma notação simbólica para a Álgebra, segundo Eves (2004, p.74) encontram-se símbolos para *mais ou menos,* para *igual,* e para a *incógnita.* Em geral, o trabalho com Álgebra ficou mais evidente na Matemática dos babilônios, embora que, sem uso de simbolismos algébricos ou de justificativas, as principais atividades eram registradas detalhando os passos para a solução, usando expressões como “faça isso”.

Partiremos agora para uma viagem pela Matemática desenvolvida pelos gregos, que, por sua vez, não se conformaram tanto com as soluções aritméticas sem muita justificativa com a qual lhe davam os babilônios e os egípcios. Os gregos sentiram a necessidade pela busca de explicações lógicas para as regras e cálculos usados e investiram em uma Matemática mais generalista, com ênfase para uma Geometria dedutiva muito forte e influente até hoje.

2.1.3 A Matemática dos gregos

Na história da Matemática grega muitos nomes de repercussão surgem, em especial no trabalho com Geometria. Geometria essa que era mais abstrata que a dos babilônios e egípcios. Essa Geometria avançada, de caráter demonstrativo surge com Tales de Mileto (por volta de 640 a.C. à 564 a.C.), homem rico e considerado “um dos sete sábios da Grécia antiga”. (GARBI, 2009, p. 21).

Figura 4: Tales de Mileto



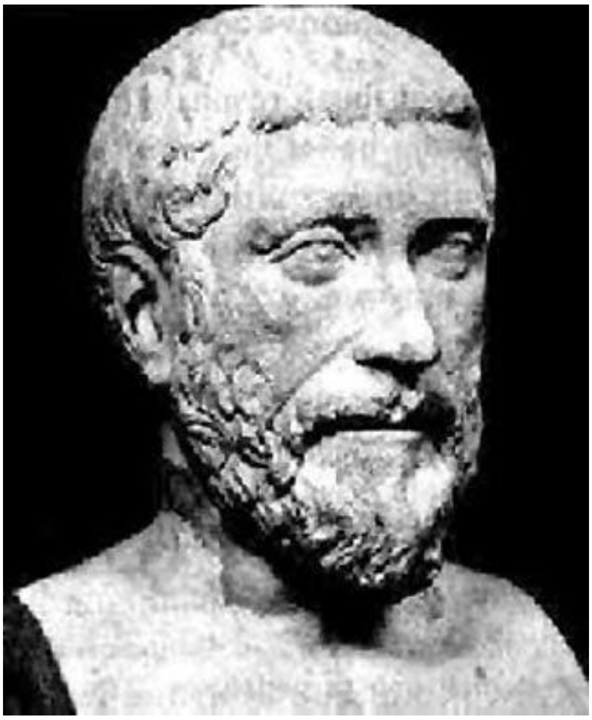
Fonte: https://br.pinterest.com/pin/212865519866012165/

Homem de comércio, Tales costumava dedicar seu tempo às suas paixões, a Filosofia, a Matemática e a Astronomia, das quais muitas vezes o faziam se ausentar de seus interesses comerciais. Em certo momento protagonizou uma situação bastante curiosa para a época, quando em uma visita ao Egito, acompanhado do faraó Amasis, mediu a sombra da pirâmide de Quéops e de um bastão que havia posicionado anteriormente na areia, calculando, assim, a altura da grande pirâmide por meio de relações de triângulos semelhantes. Fato esse que, segundo o autor, foi “(...) um dos acontecimentos máximos da História da Geometria” (GARBI, 2009, p. 22).

Assim, dedicando-se a estudar e divulgar suas descobertas, Tales de Mileto mudou as perspectivas da Matemática, mostrando a importância das justificativas lógicas na Matemática e, assim, dando origem a uma Matemática solidificada nas demonstrações. Nesse momento, a Matemática deixa um pouco de lado a busca por encontrar soluções particulares para problemas cotidianos, passando a reivindicar demonstrações e provas de resultados mais genéricos. A partir daí, a Matemática começava a elaboração e demonstração de teoremas, alguns dos quais, o próprio Tales o fez. Algumas décadas depois, surgia outro marcante nome da Matemática grega, Pitágoras.

Quando Pitágoras (586 a.C. - 500 a.C.) demonstrou o famoso teorema dos triângulos retângulos, o popular Teorema de Pitágoras, em que vale que $a^2 = b^2 + c^2$, foi que, pela primeira vez, na Europa antiga se produziu uma equação do 2º grau, 1.200 anos depois dos babilônios. Mesmo os babilônios já usufruírem das relações provadas no Teorema de Pitágoras mais de mil anos antes de Pitágoras, ainda assim se dá aos pitagóricos o reconhecimento por tal feito (GARBI, 2010).

Figura 5: Pitágoras



Fonte: https://br.pinterest.com/pin/212865519866012165/

Mesmo tendo sido Tales o precursor da Matemática demonstrativa, os pitagóricos deram incontável contribuição para o desenvolvimento de inúmeras demonstrações. Os pitagóricos desenvolveram vários teoremas que ainda hoje são bastante expressivos na Aritmética e na Geometria e, como vimos, proporcionaram também uma alavancada no trabalho algébrico, abrindo as portas para as equações do 2º grau. Além disso, tiveram importantes trabalhos desenvolvidos em outras áreas, como Física e Música, por exemplo. Assim, a antiga Álgebra de caráter mais aritmético passava a desenvolver-se para uma Álgebra de caráter mais geométrico.

Por volta de 300 a.C., a Matemática grega toma um novo brilho, Os *Elementos* de Euclides tomam o centro das atenções, sintetizando sistematicamente todo o conhecimento Matemático que se tinha até então. Esse escrito foi tão importante que, segundo o autor, a Matemática grega que se tinha antes dessa obra foi praticamente descartada ou ficou esquecida. (EVES, 2004).

Figura 6: Euclides

Fonte: https://br.pinterest.com/pin/212865519866012165/

A partir dos trabalhos nos *Elementos* de Euclides, muito se pôde evoluir no trabalho com a Álgebra e as equações. Vale ressaltar que, neste momento, a Álgebra evoluía bastante para os trabalhos com Aritmética, mas era na Geometria que se concentravam os principais trabalhos dos gregos antigos. Começavam-se a se validar métodos hoje usuais na resolução de equações dos mais variados tipos. Assim, os gregos puderam convencionar e provar inúmeras verdades matemáticas, entre elas, se temos uma equação podemos somar ou subtrair um mesmo valor de ambos os membros sem perder o equilíbrio entre os membros, foram aquisições propiciadas a partir dos trabalhos de Euclides.

Nos escritos do II livro dos *Elementos* de Euclides, por exemplo, aparecem importantes relações matemáticas percebidas geometricamente e provadas algebricamente, relações que hoje ainda representam uma parcela importante do que se trabalha em Álgebra na Educação Básica. Podemos citar, como exemplo, o cálculo do quadrado da soma de dois termos: "$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$". Essa relação era interpretada de forma totalmente geométrica, em que a e b representavam medidas de seguimentos. (EVES, 2004, p. 107).

Avançando um pouco mais na história da Matemática grega, encontramos diversos nomes, mas destacamos por grandes contribuições no desenvolvimento das equações, Diofanto de Alexandria (250 – 250 d.C.), que foi considerado o maior algebrista grego. Para Ribeiro e Cury (2015), ele contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Álgebra, uma vez que propiciou o aperfeiçoamento da simbologia e da linguagem escrita da Matemática algébrica. Além disso, o mesmo contempla, em seu trabalho, *Arithmética*, uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números. Dessa forma, Diofanto revolucionou a Álgebra antiga, de caráter retórico e, a partir de seus trabalhos, iniciou o desenvolvimento de uma Álgebra simbólica, mais próxima da Álgebra abstrata e de linguagem própria que viria a ser concebida.

Percebemos, no decorrer desses momentos históricos, que a Matemática grega já toma mais características algébricas e, assim, inicia-se o desenvolvimento de muitas das teorias e teoremas dos quais nos aproveitamos ainda nos dias atuais. Foi nesse momento que a Matemática começou a ser encarada de forma mais genérica e careceu de demonstrações e provas, dando contribuições significativas para o desenvolvimento do trabalho algébrico, que começou a ser formalizado e enriqueceu e muito o trabalho com as equações.

Seguindo um pouco nessa perspectiva, deixava-se um pouco de lado os anseios por soluções particulares e se produziam trabalhos mais voltados para o desenvolvimento de noções mais gerais e o aprimoramento de justificativas lógicas. Assim, apresentamos em sequência os trabalhos dos árabes e hindus.

2.1.4 A Matemática dos hindus dos e árabes

Da Matemática disseminada na Índia antiga pouco se sabe, mas, ainda sim podemos relatar um notável trabalho. No decorrer dessa seção entenderemos algumas curiosidades e conquistas marcantes dos hindus e dos árabes no desenvolvimento da Matemática e das equações.

Em sua Aritmética de contagem, podemos citar algumas curiosidades dos hindus. Os mesmos possivelmente efetuavam operações de adição da esquerda para a direita. Por exemplo, para calcular a soma 37 + 49, os hindus colocavam esses dois números um sob o outro e efetuavam a soma 3 + 4 = 7, colocando o 7 como resultado na casa da dezena, porém, ao somar 7 + 9 = 16, inseriam o 6 na casa da unidade e riscavam o 7, que fora colocado na casa da dezena e somavam mais uma unidade, ficando com 86 como resultado. Além disso, vários métodos eram usados para a multiplicação.

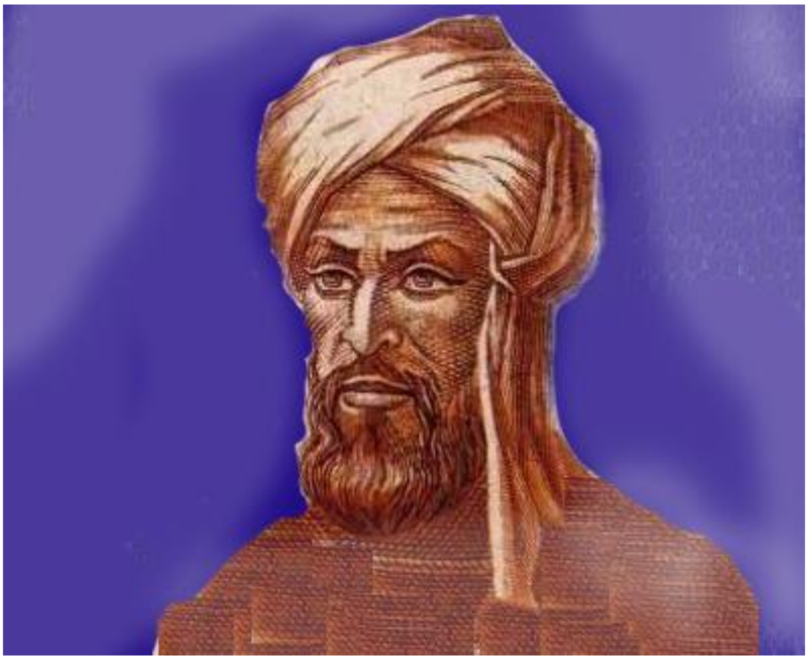
Foi na Índia que iniciou-se o desenvolvimento de uma série de algoritmos, dos quais originaram-se muitos dos que utilizamos hoje. Segundo Eves (2004), esses algoritmos desenvolvidos pela Aritmética hindu foram adotados pelos árabes e, posteriormente, repassados à Europa Ocidental. Costumavam utilizar, para solucionar problemas aritméticos ou algébricos, os métodos da “falsa posição”, já mencionado aqui neste trabalho e o método conhecido como “inversão”, que consistia em resolver problemas operando de trás para frente com operações inversas. (EVES, 2004).

Em sua Geometria, traços do trabalho com Álgebra também se fazem notáveis, aplicações das relações pitagóricas e uso de simbologia algébrica. Além disso, muitas fórmulas desenvolvidas para cálculos geométricos mostravam o importante trabalho desses povos com uma Álgebra envolvida na generalização de noções de Aritmética e Geometria.

Nessa perspectiva, Brahmagupta, que viveu na Índia central por volta do ano 628, encontrou soluções gerais das equações quadráticas. Ele teria sido o primeiro a encontrar todas as possíveis soluções inteiras da equação linear diofantina $ax + by = c$, com a, b e c inteiros. (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 34).

Bháskara (1114 – 1185) deu grandes contribuições para os trabalhos com equações em seu trabalho *Lilavati*, que abordava diversos conteúdos da Matemática, entre as quais equações lineares e quadráticas. Para Ribeiro e Cury (2015), a obra *Lilavati*, de Bháskara foi quem preencheu as lacunas deixadas pelos trabalhos anteriores, com destaque para as descobertas de Brahmagupta.

Figura 7: Bháskara.



Fonte: https://doutormatematico.blogspot.com.br/2011/04/exercicios-9-ano-equacao-de-2-grau.html

Um detalhe que podemos destacar sobre os hindus é que, enquanto para Diofanto era importante encontrar "uma qualquer das soluções racionais" para determinada equação, na perspectiva dos hindus buscavam-se encontrar "todas as soluções inteiras possíveis" da mesma, mostrando a busca por soluções mais gerais. Em suma, os hindus são considerados fracos em Geometria se comparados aos gregos, tendo se destacado mais como calculistas bastante hábeis. (EVES, 2004, p. 256).

Assim, percebemos a forte presença do desenvolvimento de algoritmos e cálculos, sendo a Geometria menos influente nessa cultura. Ainda, os trabalhos com Álgebra e equações são bastante relevantes ao passo que os mesmos engajaram-se em investigações bastante profundas no trabalho com equações do 2º grau e equações diofantinas.

A cultura árabe foi muito importante na preservação dos conhecimentos gregos e hindus. Como já mencionado anteriormente, muitos algoritmos desenvolvidos pelos hindus foram traduzidos e preservados pelos árabes que, posteriormente, propiciaram que esses saberes fossem traduzidos para outras línguas e se difundissem na Europa.

Por volta de 766, escritos de Brahmagupta foram traduzidos para o árabe. Já no reinado do califa Harun al-Rashid (786 a 808), que ficou conhecido por *As mil e uma noites*, houve a tradução de muitos trabalhos gregos, entre os quais partes importante dos *Elementos* de Euclides. Essas traduções possibilitaram que tais obras se disseminassem na Europa. (EVES, 2004, p. 261).

Os árabes também deram suas próprias contribuições para a Matemática, escrevendo trabalhos sobre números e Álgebra elementar. Dentre os nomes de destaque, podemos citar al-Khwarizmi, que escreveu sobre Matemática e Astronomia. Segundo Ribeiro e Cury (2015, p. 33), nos trabalhos de al-Khwarizmi, as equações poderiam ser reduzidas a seis tipos, "uma preocupação constante em buscar formas canônicas que possibilitassem resolver qualquer tipo de equação quadrática.". Percebe-se, então, um cuidado com a resolução das equações não apenas para se encontrar soluções particulares quaisquer, mas objetivando-se encontrar todas as soluções possíveis para todas as formas em que a equação possa se apresentar.

Outro nome notável foi Abu´l-Wefa (940-998), que traduziu obras de Diofanto e contribuiu notavelmente para os trabalhos com trigonometria. Voltando para a Álgebra, durante os séculos X e XI, podemos citar Abu Kamil, que fez comentários importantes sobre a obra de Al-Khwarizmi e que, posteriormente teve seu trabalho usado por Leonardo Fibonacci (1202); e também Al-Karkhi, que produziu um trabalho chamado *Fakhri*, que contribuiu bastante para o desenvolvimento da Álgebra árabe. Omar Khayyam (1100) marcou a Álgebra da época com a resolução geométrica das equações cúbicas e por seu trabalho *Rubaiyat*, bastante difundido pela Europa. (EVES, 2004).

Em sua Aritmética, utilizaram-se de alguns sistemas de numeração e costumavam utilizar-se dos algoritmos traduzidos dos hindus para efetuar inúmeros cálculos. Podemos dar destaque, nessa cultura, ao uso da regra de três, conhecimento que possivelmente originou-se na China e foi adquirido pelos árabes, ficando muito aplicado em suas atividades comerciais. (EVES, 2004).

Além disso, trabalhavam resolução de equações lineares, de equações quadráticas de forma aritmética e geométrica e, como mencionado, de equações cúbicas geometricamente. Assim, na resolução de problemas algébricos, em geral, era bastante notável o trabalho desses povos com resoluções nem sempre algébricas, que recorriam a interpretações geométricas ou a técnicas aritméticas para tais, como a regra de "falsa posição", por exemplo. Mas, em geral, desenvolveram trabalhos mais profundos na Álgebra, objetivando encontrar soluções gerais ao invés de soluções particulares aplicadas a casos específicos.

2.1.5 A Matemática dos europeus renascentistas

No início do segundo milênio, Gerbert d´Aurillac (950 – 1003) de origem francesa estudou na Espanha mulçumana e familiarizou-se com a Matemática dos árabes. Quando assumiu o trono de São Pedro, como papa Silvestre II, Gerbert estimulou o ensino de Matemática e tentou introduzir o sistema de algarismos indo-arábico em substituição aos romanos, mas sofreu oposição dos cardeais, que consideravam "feitiçaria satânica" tudo aquilo que se advinha do mundo islâmico. (GARBI, 2010).

O inglês Adelard de Bath (1075 – 1160), que viajou por vários países mulçumanos conseguiu contrabandear para a Inglaterra uma cópia da versão árabe dos *Elementos* de Euclides e traduzi-la para o latim, disseminando a Matemática grega na Inglaterra e tentando novamente estimular o uso da numeração indo-arábica. Por fim, o sistema de numeração indo-arábico é recebido com sucesso na Europa ocidental, inicialmente na Itália, a partir do trabalho *Liber* Abaci, de Leonardo Fibonacci (1175-1250). Posteriormente, Leonardo Fibonacci publicou outra obra importante, a *Pratica Geometriae*. (GARBI, 2010).

Assim, com a substituição dos algarismos romanos pelos indo-arábicos esperava-se desenvolver avanços nos estudos da Matemática, pois este novo sistema de numeração mostrava-se mais adequado para os processos de contagem e manipulações.

Como vimos anteriormente, não foi só o sistema de numeração indo-arábico que foi herdado pelos europeus, mas as traduções e preservações feitas pelos árabes propiciaram aos mesmos que conseguissem apropriar-se de alguns dos grandes conhecimentos da Matemática produzidos historicamente, em especial pelos hindus e gregos e utilizaram-se destes para dar continuidade ao desenvolvimento da Matemática.

Durante os séculos XIV e XVI na Europa era vivenciado um período de muitos avanços no comércio e desenvolvimento das cidades. Nesse período, que ficou conhecido como Renascimento, houve grandes avanços artísticos, literários e científicos e, com isso, muitos avanços foram realizados na Matemática, em especial em Álgebra. Destacaremos a seguir as principais descobertas no trabalho com equações nesse período e depois dele na Europa.

Luca Pacioli (1455-1514) foi outro grande matemático italiano, dedicado a Aritmética, ficou conhecido como o pai da contabilidade moderna. Luca Pacioli, em sua obra *Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportioni et Propportionalita,* sintetizou o conhecimento que se tinha produzido na Europa e algumas das grandes contribuições dos *Elementos* de Euclides. (GARBI, 2010). Na tentativa de preencher as lacunas deixadas na obra de Pacioli no que diz respeito as equações do 3º grau, Girolamo Cardano (1501-1576) e Nicolò Fontana, o Tartaglia (1499-1557) vivenciam uma longa história de disputas e rivalidade.

Tartaglia, assim conhecido por sua gagueira, originária de uma chacina da qual escapou com inúmeras cicatrizes, teve de sair da escola muito cedo, devido ao fato de mãe não ter condições de pagar sua escola. Sem dinheiro para adquirir papel, pena e tinta e com pouquíssimos livros, começou a estudar sozinho, dirigindo-se à noite ao cemitério, onde escrevia com carvão nas lápides dos túmulos. Em 1535 foi professor de ciências e publicou diversas descobertas. (GRABI, 2010).

Em meados de 1510, um professor de Matemática da Universidade de Bolonha, Scipione del Ferro, encontrou uma forma geral para as equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Segundo Garbi (2010), o mesmo veio a falecer antes de publicar sua descoberta, mas havia revelado tal descoberta a um aluno, Antonio Maria Fior. Fior, por sua vez, usando-se das descobertas de seu professor, decidiu desafiar Tartaglia para uma disputa de conhecimentos matemáticos, em que Fior possivelmente usaria de seus saberes repassados por seu professor para tirar vantagens sobre Tartaglia.

Sentindo-se aflito, relata: “mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1535”. Tartaglia teria sim descoberto a forma geral para solucionar equações do tipo $x^3 + px + q = 0$ e, mais que isso, também as do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$ (Cabe ressaltar que essa terminologia algébrica não era adotada na época). (GARBI, 2010, p. 37).

Cardano, italiano de vida bastante conturbada, dedicava-se a Astrologia e Matemática, foi autor do *Liber de Ludo Aleae*, onde introduziu as noções de probabilidade que hoje conhecemos e ensinou formas de trapacear em jogos de asar. Em outra obra, *Ars Magma*, publicada na Alemanha, apresentou uma Álgebra mais evoluída do que se tinha até então. Acredita-se que a principal descoberta publicada nessa obra seja da autoria de Tartaglia e não de Cardano, o que gerou uma séria de conflitos e rivalidades entre ambos que permaneceu por um bom período da história da Matemática. (GARBI, 2010).

Por volta de 1540, Ferrari (1522-1560), o mais famoso discípulo de Cardano, recebeu de seu mestre o desafio de solucionar a equação $x^4 + 6x^2 – 60x + 36 = 0$. Cardano já após inúmeras tentativas havia desistido de solucionar tal equação e eis que Ferrari desvenda a resolução da equação quártica, descoberta essa que foi publicada na obra de seu mestre Cardano. (GARBI, 2010).

A partir dessas descobertas evidenciou-se um novo marco na Matemática, não só pelo que diz respeito aos trabalhos empenhados por Ferro, Tartaglia e Cardano na resolução das equações de grau 3 ou na resolução das equações de grau 4 por Ferrari, mas também porque observavam-se detalhes importantes na resolução dessas equações, em especial as de grau 3, proporcionando vários questionamentos a cerca da raiz quadrada de números negativos. Esses questionamentos viriam a se transformar o universo da Matemática com grandes novas pesquisas que se seguiriam.

Segundo Garbi (2010, p. 48), na tentativa de se resolver as equações cúbicas se recaía na mesma situação das equações quadráticas, ou seja, na raiz quadrada de números negativos, mas ainda pior, em raízes cúbicas de seres desconhecidos até então. Estudando tais situações, Bombelli (1526-1572) mostra a insuficiência do Conjunto dos Números Reais para as situações que a Matemática vivenciara na época e introduz uma séria de regras para o trabalho com o número $\sqrt{-1}$ e dá inicio, então, ao que se tornaria a Teoria dos Números Complexos, um vasto campo de estudos da Matemática que estava nascendo.

Na França, François Viète (1540-1603), formado em leis, chegou a trabalhar durante quatro anos em tribunais. Tempos depois, desenvolvendo a atividade de professor, escreveu diversos livros-texto e adquiriu muito conhecimento de Matemática. Viète desenvolveu seus trabalhos principalmente em trigonometria e Álgebra, fazendo importantíssimas inovações no simbolismo algébrico. Em sua Álgebra, as letras começaram a ser utilizadas para representar incógnitas e coeficientes, de modo que as vogais representavam incógnitas e as consoantes seriam coeficientes conhecidos. Em seus trabalhos, muito se destacaram seus processos de substituição de incógnitas para facilitar a resolução das equações algébricas. (GARBI, 2010).

Com seus dons, conseguiu por substituição de incógnitas estabelecer um caminho para as soluções das equações de grau 3 diferente do método de Tartaglia. Em um problema com a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, Viète, que não conseguira solucionar a mesma, pois os métodos até então recairiam ao caso das raízes de negativos, situação cujos estudos estavam apenas se iniciando, eis que Viète, então, por uma ideia genial novamente de substituição de incógnita, resolveu a mesma encontrando uma solução trigonométrica para a equação. (GARBI, 2010).

Pouco antes de Viète falecer, nascia, também na França, outros dois nomes que ficariam para a história da Matemática, René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). Descartes deu fortes contribuições para o desenvolvimento da Álgebra e das equações, como veremos a seguir e, paralelamente com Fermat, iniciaram o desenvolvimento daquilo que hoje conhecemos como Geometria Analítica.

Fermat, sem qualquer formação matemática, dedicou-se aos estudos de Astronomia e Matemática, fazendo importantes descobertas na Teoria dos Números, descobrindo e provando inúmeros teoremas, dos quais, usou-se de um trato um tanto algébrico para isso. Além disso, Fermat dá o primeiro passo no desenvolvimento da Geometria Analítica, um maravilhoso ramo da Matemática que relaciona de forma inseparável a Geometria e a Álgebra.

Segundo Garbi (2010, p. 69-70), “Fermat havia desenvolvido uma técnica de associar equações a linhas geométricas para estuda-las, como se faz modernamente em Geometria Analítica”. Com seus conhecimentos, Fermat iniciou os estudos com funções e deu origem a métodos mais tarde aperfeiçoados por Newton para tópicos do Cálculo Diferencial.

Os trabalhos com a Geometria Analítica, Teoria dos Números e com as funções permitiram a Fermat estudar uma Álgebra ainda não explorada, com bastante uso das equações e proporcionou um grande avanço na cultura matemática da época, fazendo dele o Príncipe dos Amadores.

Praticamente paralelamente aos trabalhos de Fermat, o também grande matemático, Descartes, foi o primeiro a divulgar os trabalhos com Geometria Analítica ao mundo, isso porque Fermat não demonstrou interesse em divulga-los. Com a divulgação de seu trabalho, *Discurso sobre o Método para bem conduzir a Razão e encontrar a Verdade nas Ciências,* em 1637, Descartes mostra ao mundo como a Álgebra já havia evoluído e como influenciava na Geometria. (GARBI, 2010).

Em sua Geometria Analítica, Descartes deu incontáveis contribuições para o trabalho com equações e funções, estabeleceu aceitação das soluções negativas para as equações, algo que antes ainda era desprezado e dá importantes contribuições para o desenvolvimento do que hoje conhecemos como sistema cartesiano.

A partir de Descartes inicia-se uma Álgebra inovadora. Descartes inicia um processo na Matemática pelo qual a Álgebra permite que se possam investigar as equações por si próprias e não apenas por situações. Assim, começa a ser possível "descobrir conexões entre conceitos e estratégias e então aplicar essas descobertas" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001, p. 3 apud RIBEIRO; CURY, 2015, p. 38).

Outro grande nome de destaque na Matemática, assim como em demais áreas, foi Isaac Newton (1642-1727), que junto com Leibniz (1646-1716) e outros matemáticos, propiciou o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Newton fez bastantes contribuições para o mundo das equações ao passo em que desenvolvia sua teoria. Essas contribuições são, em geral:

> (...) métodos algébricos aproximados para o encontro de raízes reais, um método aproximado não algébrico (utilizando elementos do Cálculo Diferencial e amplamente conhecido como método de Newton) e um conjunto de critérios numéricos para a pesquisa de raízes. Como a determinação dos números chamados cotas inferiores e superiores (...) (GARBI, 2010, p. 86)

Dando continuidade a história da Matemática, encontramos as obras de Leonhard Euler (1707-1783), especializado bastante no trabalho com números complexos, embora tenha feito realizações em diversos ramos da Matemática. Segundo Garbi (2010), estipula-se que cerca de 800 trabalhos matemáticos são creditados a Euler, trabalhos sobre Cálculo, Álgebra, Aritmética, Mecânica, Probabilidade, entre outras áreas. Desses, destacamos três trabalhos que foram de notável importância para o desenvolvimento da Teoria das Equações Algébricas: a Simbologia, o número "*e*" e os Números Complexos.

Nesses trabalhos, Euler consegue aperfeiçoar a simbologia utilizada para a Álgebra, em especial o trabalho com as Equações Algébricas, não só ao passo que implementou uma melhor notação para as mesmas, mas também a partir de descobertas fantásticas durante seus trabalhos com Números complexos. Na busca por raízes enésimas de números complexos, Euler conseguiu demonstrar que há apenas n raízes enésimas para qualquer polinômio complexo não nulo, descoberta essa que estende-se também para o caso dos números reais. (GARBI, 2010).

Segundo Ribeiro e Cury (2015), essa descoberta estimulou muitos matemáticos da época, pois como já se conheciam que as equação de 3º e 4º grau tinham, respectivamente 3 e 4 raízes, começaram então a conjecturar que haviam *n* raízes para equações polinomiais de grau *n*.

A partir desses e de outros feitos, Euler é reconhecido ainda hoje como um dos maiores matemáticos que já existiram. Outra realização que leva seu nome é a famosa relação de Euler para alguns poliedros: $F + V = A + 2$, em que F, V e A representam, respectivamente a quantidade de faces, vértices e arestas dos mesmos.

Avançando um pouco mais ao longo da história, encontramos aquele que ficou conhecido como o Príncipe dos Matemáticos. O alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) começou muito cedo e realizou inúmeros feitos na Matemática, que contribuíram significativamente no desenvolvimento da Álgebra e das equações.

Segundo Garbi (2010), Gauss, aos 3 anos de idade, já corrigia os cálculos equivocados de seu pai, que era trabalhador braçal. Uma genialidade que nascia muito cedo e que fez com que Gauss seja, ainda hoje considerado um dos três maiores matemáticos do mundo, se não o maior. Este grande matemático fez, desde sua infância pobre, diversas descobertas e estudos avançados, entre os quais discutia a obra *Elementos* de Euclides.

É de conhecimento popular que, aos 10 anos de idade, em sua sala de aula, desvendou um resultado até hoje empregado nos estudos de progressão aritmética, a relação que carrega seu nome como Fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma P. A. ou, simplesmente, Fórmula da Soma de Gauss. Foi a partir de um questionamento do professor à classe para que os alunos somassem os 100 primeiros números naturais, ou seja, de 1 a 100, que Gauss percebeu que *1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 100 + 1*. A Partir daí, seja S a soma dos números de 1 a 100, tem-se:

$$S = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100 \ (*)$$

$$S = 100 + 99 + \cdots + 2 + 1 \ (**)$$

Somando-se (*) e (**), obtemos:

$$2S = 100 \,.\, 101 \rightarrow S = \frac{100 \,.\, 101}{2} \rightarrow S = \ 5050$$

A partir daí, generalizando tal situação, tem-se, para uma soma P de *n* termos:

$$P = 1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n \ (***)$$

$$P = n + (n - 1) + \cdots + 2 + 1 \ (****)$$

Somando-se (***) e (****), temos que:

$$2P = n(n+1) \rightarrow P = \frac{n(n+1)}{2}$$

Que é a famosa Fórmula da Soma de Gauss.

Gauss, com 15 anos, demonstrou o teorema geral das potências binomiais, desenvolvido, mas não provado por Newton. Na Geometria, Gauss foi o primeiro a conseguir desenhar com régua e compasso um polígono regular de 17 lados e provar que isso seria possível para primos cujos lados sejam da forma $2^{2^n} + 1$. Pesquisou e se aprofundou em geometrias não euclidianas. Gauss deu a primeira demonstração completa para o Teorema Fundamental da Álgebra, que afirma que "toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz." (GARBI, 2010, p. 116).

A partir das demonstrações, inclusive da do teorema Fundamental da Álgebra, Gauss contribuiu significativamente no estudo e desenvolvimento das equações algébricas, dando possibilidades para diversas outras investigações, entre elas a construção do Teorema de Bolzano, por Bolzano. Além disso, destacaram-se, em especial em trabalhos que desenvolveram as equações depois de Gauss os nomes de Niels Abel (1802 – 1829) e Évariste Galois (1811-1832), dos quais trataremos a seguir.

Nascido na Noruega, Abel começou desde cedo a demonstrar talento pela Matemática e a se apoderar de ricos conhecimentos construídos até então. Em uma tentativa frustrada de encontrar uma fórmula geral para as equações de grau cinco, Abel passa a sentir uma obsessão por tais equações e a dedicar-se a estudar mais sobre trabalhos que o pudessem ajudar. Com uma vida bastante sofrida e com pouquíssimos recursos, dedicou-se aos estudos como forma de tentar superar suas dificuldades e ajudar seus parentes, conseguindo ser admitido na Universidade de Oslo, onde foi crescendo e continuando seus estudos sobre as equações de quinto grau. (GARBI, 2010)

Abel conseguiu provar que "exceto em casos particulares, de um modo geral é impossível resolvê-la utilizando-se apenas de operações algébricas (soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação"), o que foi um feito bastante promissor no campo das equações algébricas. Dedicando-se ao estudo das funções elípticas, Abel fez importantes descobertas nesse campo e desenvolveu trabalhos feitos anteriormente, inclusive por Euler. Alguns de seus trabalhos, em especial os mais importantes ele costumava publicar em francês para obter maior disseminação, fazendo-lhe para um de seus renomados trabalhos, que ficou conhecido como Grande Teorema de Abel ou Teorema Geral sobre as Integrais. (GARBI, 2010, p. 148).

Galois, nascido na França, viveu praticamente na mesma época que Abel, porém sem conhecer sobre seus frutos. Galois dedicou-se ao estudo da Matemática ainda cedo e fez descobertas marcantes. Em uma situação similar a de Abel, Galois também acreditou ter encontrado a solução geral das equações de quinto grau, porém equivocava-se. Dominando praticamente toda a matemática que se tinha produzida até então, Galois avança em seus estudos e descobertas e publica, em 1829, dois importantes trabalhos no campo algébrico, um deles: *Demonstração de um teorema sobre as frações contínuas periódicas* e, o mais relevante destes: *Pesquisas sobre as equações algébricas de grau primo*. Além disso, Galois envolveu-se em uma área bastante abstrata da Álgebra, trabalhando situações cada vez mais estruturais, como é o caso do que mais tarde viria a ser "sua glória póstuma: a Teoria dos Grupos". Durante sua vida, Galois ainda fez incontáveis contribuições para a resolução algébrica de equações, resolução de equações numéricas e Teoria dos Números. (GARBI, 2010, p. 160).

Assim, esses dois grandes nomes da Matemática: Abel e Galois, são, sem dúvida, grandes marcas do que esse período da história na Europa reservara para a Matemática. Percebem-se não apenas nesses, mas nos demais trabalhos desenvolvidos nessa época que a Álgebra já se desenvolvera adquirindo uma simbologia e notação própria e que os estudos algébricos passaram, nessa época, a objetivar investigações cada vez menos particulares e a se dedicar a situações mais estruturais e gerais.

2.1.6 Síntese

Diante dos relatos e discussões vivenciados nas seções anteriores, buscamos sintetizar alguns dos principais pontos que marcaram o estudo das equações no decorrer da história da Matemática. Pretendemos, então, propiciar condições para que se compreendam as diferentes formas como as equações eram compreendidas em diversos momentos históricos, a fim de estabelecer uma relação com os diferentes significados da noção de equação que serão apresentados neste trabalho.

A princípio, percebemos que os babilônios desenvolveram uma Álgebra retórica significativa, da qual trabalhavam a noção de equação de forma bastante aritmética, ou seja, não havia notação ou simbolismo algébrico desenvolvido, nem mesmo estudos mais gerais.

Em suma, as equações surgiam de contextos do cotidiano e suas soluções eram guiadas a partir de resoluções bastante particulares, com detalhamento passo a passo da resolução.

Na cultura egípcia vimos que a Álgebra praticada era menos desenvolvida do que a dos babilônios. Em geral, os problemas apresentados principalmente nos papiros de Rhind e Moscou apontam para um trabalho muito pouco significativo com as equações, onde as mesmas eram, em geral, equações lineares resolvidas a partir de passos aritméticos, assim como se fazia com os babilônios, só que, para os egípcios, com problemas de nível menos elevado.

Observando essas duas civilizações antigas, percebemos certas similaridades nos trabalhos com equações. Buscavam-se sempre soluções particulares para problemas, usando-se de artifícios aritméticos e sem a preocupação por investigações mais gerais que, por sua vez, foram ganhando espaço a partir do desenvolvimento da Álgebra.

Na cultura grega, observam-se algumas mudanças nos trabalhos com equação, uma vez que as mesmas começam a ser encaradas basicamente a partir de situações geométricas. Outro fator relevante é que com Tales de Mileto a Matemática começa a viver um momento de transformação, surgia a necessidade por justificativas lógicas e abria-se caminho para um longo processo de descobertas e demonstrações que foram, posteriormente, aperfeiçoados pelos pitagóricos. Assim, Euclides em sua obra: *Elementos* traz incontáveis contribuições para o trabalho com uma Geometria forte de caráter dedutivo, em que as demonstrações e justificativas se tornam o centro das atenções e proporcionam o desenvolvimento da Álgebra e das equações a partir da dedução de situação geométricas em geral.

Percebe-se, nesse momento, uma mudança no cenário com a qual as equações se apresentam. Se antes elas eram compreendidas a partir de situações práticas, em especial em contextos aritméticos, agora, por sua vez, são evidenciadas a partir de contextos geométricos. Além disso, cada vez mais foi dando-se importância para investigações dedutivas e com rigor matemático proporcionado por meio das justificativas lógicas e demonstrações, algo que antes não se fazia presente, pois as resoluções baseavam-se unicamente em manipulações aritméticas aplicadas a casos particulares.

Dando continuidade, vimos os relatos do desenvolvimento da Matemática por parte dos hindus e árabes. Nesse momento destacamos os trabalhos dos hindus como grandes desenvolvedores de algoritmos. Os nomes de Brahmagupta e Bháskara são facilmente citados como os mais influentes matemáticos dessa época na Índia. Os problemas relacionados a equações normalmente eram trabalhados de forma aritmética, pois, como vimos, esses povos tinham bastante interesse em trabalhos aritméticos. Um destaque muito importante que não se pode passar despercebido é fato de que no trabalho com equações os hindus demonstram um interesse mais geral nas suas soluções, deixando-se um pouco de lado a busca por soluções apenas particulares para os problemas.

Neste sentido, Eves (2004, p. 256) estabelece uma importante comparação entre o trabalho com equação na Grécia antiga e na Índia, ao analisar que enquanto para Diofanto, de Alexandria, era importante encontrar “uma qualquer das soluções racionais” para determinada equação, para os hindus se objetivavam encontrar “todas as soluções inteiras possíveis” da equação.

Notamos, assim, um trabalho mais generalizador no trato com as equações por parte dos hindus, tendo desenvolvido grandes descobertas principalmente em equações quadráticas e diofantinas. Mesmo assim, esses povos ainda abstraiam seus problemas em grande parte do próprio cotidiano.

Já os árabes, que conseguiram utilizar-se de conhecimentos dos hindus e dos gregos, estabeleceram um estudo bastante desenvolvido com relação às equações, uma vez que contemplavam as mesmas sob investigações mais generalistas, buscando formas gerais para generalizar os trabalhos com as mesmas, como também é ressaltado em Ribeiro e Cury (2015).

Dentre os trabalhos de destaque entre os árabes, podemos citar as importantes contribuições de al-Khwarizmi no trabalho com equações quadráticas, estudando-as em sua forma geral, além da resolução geométricas das equações cúbicas por Omar Khayyam. Esses trabalhos, produzidos pelos hindus e pelos árabes, apontam para um desenvolvimento no trabalho com as equações, em que as mesmas passam a ser encaradas em sua forma mais geral, tanto dando contribuições para as descobertas mais estruturais a cerca das equações como dando continuidade ao que iniciara na Grécia com Tales, onde se buscavam tratar as situações não como casos isolados, mas buscando-se relações mais gerais, a partir de justificativas lógicas e demonstrações.

Ribeiro e Cury (2015, p. 35) ainda reforçam, reafirmando que a partir dos trabalhos dos hindus e dos árabes, “o conceito de equação passa a apresentar uma concepção mais estrutural”, isso porque não se olhava mais para tais como antes faziam os babilônios e egípcios, mas agora se observando propriedades e características bem definidas.

Percebe-se, então, uma modificação na forma de se olhar para as equações, forma essa que permitiu que se fossem reconhecidos entes estruturais que foram cada vez mais explorados e desempenharam papel fundamental no desenvolvimento de diversas teorias e áreas da Matemática no decorrer dos séculos seguintes. Dessa forma, os europeus, fazendo uso dos conhecimentos já conquistados até então, aceleraram o processo de descobertas e criações cada vez mais sofisticadas e com foco estrutural.

No período do renascimento europeu, nomes como Ferro, Tartaglia e Cardano foram de fundamental importância nos trabalhos com as equações, uma vez que propuseram métodos para as soluções das tão curiosas equações cúbicas. Trabalhos esses que deram brechas para a construção de demais teorias, entre elas a Teoria dos Números Complexos. Nota-se nesse momento um trabalho com equações focado em suas estruturas, em que as equações não eram necessariamente extraídas de qualquer contexto, seja aritmético ou geométrico, mas eram operadas sobre si mesmas por meio de suas propriedades, com o objetivo de se explorar características e soluções gerais.

Demais trabalhos notáveis dessa época, como os de Viéte, Fermat e Descartes também foram de suma importância, ao passo que contribuíram significativamente no trabalho com as equações e no desenvolvimento de uma linguagem algébrica simbólica. Além disso, Euler contribui para a Teoria das Equações Algébricas ao descobrir que há apenas n raízes enésimas para qualquer polinômio complexo não nulo.

Percebe-se que o caminho que foi se seguindo tornava-se cada vez mais fundamentado em aspectos estruturais e pouco relacionado com os problemas cotidianos. A Álgebra começa a ganhar cada vez mais atenção e, como já mencionado, simbolismo próprio, caracterizando a passagem da antiga Álgebra retórica evidenciada nos relatos de trabalhos dos babilônios e egípcios para a Álgebra simbólica.

Seguindo essa ideologia bastante generalista e estrutural, o famoso Gauss constrói inúmeros trabalhos em diversas áreas e desenvolve uma demonstração para o Teorema Fundamental da Álgebra, dando suporte para que mais teorias e estudos se desenvolvessem na área e assim se fez. Além disso, muitos outros nomes citados no decorrer desse período de ouro vivenciado na Europa contribuíram de forma significativa no desenvolvimento das equações. Finalizamos com os trabalhos de Galois e Abel que se dedicaram bastante na busca por soluções gerais para as equações quínticas, um verdadeiro avanço nos trabalhos com equação.

Assim, percebemos como se deu o desenvolvimento da Álgebra, em especial das equações ao longo da história, sendo ancorada em diferentes contextos. Desde o seu surgimento a partir de problemas práticos, em especial pelos babilônios e egípcios, ao passo que ganha um grande avanço na Geometria dedutiva grega e, posteriormente no desenvolvimento mais generalista vivenciado pelos hindus e árabes, dando suporte para os grandes avanços que se seguiram tempos depois na Europa.

2.2 O Pensamento Algébrico e o Ensino de Equação

Vimos que com o desenvolvimento da Matemática, a Álgebra tornou-se ferramenta fundamental para a humanidade e é com base nessa importância que inúmeras pesquisas a detêm como o centro de suas atenções. Diante da necessidade de desenvolvermos e de perpetuarmos o conhecimento da Álgebra ao longo das gerações, muitas pesquisas buscam soluções para que esse conhecimento seja passado de geração para geração, abrindo possibilidade para novas descobertas, eis aí a grande importância que hoje se dá a qualidade de seu ensino.

Nas escolas, ela ocupa uma parte significativa do que se convenciona por Matemática. A Álgebra não é apenas um conteúdo ou uma área isolada das demais, como muitos pensam, ela está presente em diversas áreas do conhecimento e no cotidiano, assim como pudemos evidenciar nos relatos históricos.

É possível perceber, através dos relatos históricos do capítulo anterior, que a Álgebra surgiu como fruto da evolução da Aritmética e da Geometria, a fim de dar conta de soluções e generalizações que antes não eram possíveis. Problemas práticos começavam a ser encarados genericamente e a Álgebra começava a se desenvolver. É possível ainda notar que, no decorrer desse desenvolvimento e a partir das diferentes necessidades que se tinham da Álgebra, ela muitas vezes assumia papéis diferentes no contexto de seus problemas originários.

Nesse contexto, Usiskin (1995) faz um relevante estudo sobre a Álgebra escolar e as variáveis, que sem dúvida, como o mesmo afirma, "**As finalidades da álgebra** são determinadas por, ou relacionam-se com, **concepções** diferentes **da álgebra** que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos **usos das variáveis**." (USISKIN, 1995, p. 13, grifo do autor). Ainda, Gomes (2013) menciona que "As letras não representam sempre o mesmo papel, e o estudante precisa não apenas compreender esses diferentes papéis, mas também realizar ações variadas vinculadas a esses papéis no contexto das atividades que realiza na escola." (GOMES, 2013, p. 8).

Estamos falando, é claro, da Álgebra dos dias de hoje, com riqueza de simbolismo próprio e inúmeras propriedades. Mais que isso ainda, uma Álgebra que encontra dificuldades em se desenvolver dentro do contexto das salas de aula. O ensino dessa Álgebra, rica em simbolismo e em propriedades é, muitas vezes, abordado nas escolas de forma a privar o educando de explorações mais profundas, limitando os alunos a um mero jogo de operações e manipulações das quais o aluno só precisa saber para ser "aprovado em sua avaliação escolar".

A compreensão adequada da mesma deve permitir ao educando capacidades reflexivas, que o façam questionar, testar, reformular ideias e descobrir novas coisas. Esse ato de pensar matematicamente para a Álgebra engloba uma série elementos que compõem o chamado pensamento algébrico.

Para Ponte, Branco e Matos (2009), a capacidade de interpretar a Álgebra dentro de situações, de lidar com sua resolução vão ser partes do que podemos chamar de pensamento algébrico, que envolve muito além de práticas apenas tecnicistas e mecânicas de manipulações algébricas. A definição dada por Ponte, Branco, Matos (2009), apesar de simples, é bastante rica no que se entende por pensamento algébrico, porém, segundo Lins e Gimenes (1997), não existe uma definição única do que seja esse pensamento.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) também acreditam ser impossível definir de forma definitiva o que seja o pensamento algébrico, mas pontuam alguns pontos importantes desse tipo de raciocínio, entre eles, os autores acreditam que a percepção de regularidades ou a tentativa de generalizações são elementos importantes que caracterizam a presença desse tipo de pensamento. Além disso, a modelagem de situações práticas a partir de equações por meio da interpretação de tal situação é também um típico exemplo desse tipo de raciocínio.

Percebemos que o pensamento algébrico envolve elementos importantes para a aprendizagem e é claro que as técnicas e manipulações mecânicas de resolução não estão desassociadas desse trabalho, mas se complementam. O problema é que muitas vezes o ensino de Álgebra é ancorado na prática mecânica e tecnicista sem a preocupação com a assimilação profunda do conceito, mas apenas de técnicas puramente mecânicas.

Como vimos no capítulo anterior, os povos babilônicos, por exemplo, não tinham uma Álgebra baseadas em provas e demonstrações, mas suas atividades destacavam o detalhamento de passos sistemáticos aritméticos para a resolução de exemplos de problemas contidos em seu cotidiano, onde as equações são interpretadas a partir dos problemas, caracterizando elementos do pensamento algébrico.

Dessa forma, o desenvolvimento de raciocínios característicos do pensamento algébrico, aliado com os estudos de técnicas e regras é fundamental para a resolução dos problemas de ordem prática, que exigem reflexão e interpretação do contexto em que o mesmo está inserido e para a compreensão de aspectos estruturais das equações, bem como propriedades. Por outro lado, exercícios de "calcule o valor de *x*" normalmente não enfatizam a busca pelo raciocínio, apenas pelo uso de técnicas ou fórmulas prontas, o que são importantes para o desenvolvimento de habilidades de cálculo, mas podem deixar a desejar no trabalho mental dos educandos.

É muito importante que os estudantes possam desenvolver cedo conhecimento e habilidades com essa área do conhecimento, visto que a mesma enfrenta inúmeros obstáculos em seu ensino e sua aprendizagem. Muitas pesquisas em Educação Matemática têm mostrado que os educandos ainda mantêm uma identidade sobre equações muito presa ao uso de procedimentos e técnicas de resolução. Reforçando essa afirmação, os autores, baseados em análises de pesquisas anteriores sobre a aprendizagem em equação, concluem que:

> As pesquisas acima analisadas parecem indicar que, mesmo ao final da escolaridade básica, após vivenciarem processos de aprendizagem de conceitos algébricos fundamentais, como é o caso do conceito de equação, os alunos não reconhecem as estruturas desse ente matemático, não são capazes de apresentar uma caracterização para esse conceito e somente evocam os procedimentos e técnicas de resolução. (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 18)

Assim, evidenciamos a necessidade de se investigar os trabalhos com a Álgebra durante a formação básica do educando, em especial que esta se inicie deste os anos iniciais do Ensino Fundamental, proporcionando mais possibilidades de sucesso no desenvolvimento do pensamento algébrico. Mas, ainda, é necessário que se façam nas escolas um ensino que possibilite esse desenvolvimento, isso porque as práticas ainda parecem enfatizarem apenas as regras e técnicas e tiram o foco do desenvolvimento do pensamento crítico do aluno e a compreensão consistente. Diante disso, os autores pontuam que:

> Consideramos que a Álgebra, trabalhada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, pode ser o fio condutor do currículo escolar e o desenvolvimento do pensamento algébrico pode permitir que sejam realizadas abstrações e generalizações que estão na base dos processos de modelagem matemática da vida real. (RIBEIRO; CURY, 2015, p 11)

Porém, é importante também que se considere que os aspectos pertinentes a Álgebra a serem desenvolvidos nos anos iniciais não devem evocar para uma exploração estrutural ou ainda processual dos aspectos envolvidos na Álgebra. A respeito disso, Brasil (1997) nos aponta que:

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações,

> variáveis e incógnitas) e conhecendo a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação. (BRASIL, 1997, p. 39).

Assim, pretende-se capacitar os alunos para o desenvolvimento de capacidades pertinentes ao pensamento algébrico, a fim de que os mesmos estabeleçam uma melhor compreensão da Álgebra e das equações quando inseridos em contextos mais tecnicistas ou estruturais, não ficando presos apenas a uma compreensão mecânica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam, dentre outras coisas, que o ensino de entes algébricos, como funções e equações deve ser estabelecido a partir da contextualização e da interdisciplinaridade, além de dar devida importância à sua relevância histórica. (BRASIL, 2002). A importância dessa abordagem se deve ao fato de que, segundo os autores:

> No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental para Terceiro e Quarto Ciclo (Brasil, 1998) repetem os argumentos dos autores já citados, considerando que o ensino de Álgebra é, muitas vezes, ancorado na manipulação algébrica, sem o desenvolvimento das capacidades de abstração e generalização. (RIBEIRO e CURY, 2015, p. 16).

Ou seja, o trabalho com Álgebra nos anos atuais está, ainda, distante de formar indivíduos com capacidades críticas. Não se pode desenvolver habilidades e pensamento crítico apenas com a reprodução de manipulações algébricas, essas que são sim muito importantes para os cálculos operacionais, mas não são a chave do trabalho com Álgebra. Assim, Rocha (2011) vai apontar que:

> Para que o ensino da Álgebra atinja seus objetivos, assegurando ao aluno um acervo de habilidades e conhecimentos úteis e funcionais, no sentido de prepará-lo, capacitando-o a enfrentar os problemas do dia a dia, é preciso introduzir uma nova metodologia para o ensino, onde se pode trabalhar o concreto, o abstrato e as aplicações. (ROCHA, 2011, p. 1).

Pois é necessário que o aluno saiba manipular, mas é, em especial, essencial que ele possua a capacidade de entender, compreender, refletir sobre o que está fazendo, para que a aprendizagem em Álgebra tenha real sentido, possibilitando que o mesmo consiga identificá-la ao seu redor, abstrair, generalizar, aplicar e construir ideias a partir de sua reflexão.

Como mencionado, esse ensino mecânico desenvolve nos educandos a ideia de que a resolução de questões de equações ou expressões, por exemplo, são meros cálculos para se chegar a um valor que se deseja encontrar e que era, até então, desconhecido. Pois como apontam Veloso e Ferreira (2010):

> De acordo com minha experiência docente, percebo que muitas vezes os alunos não aceitam uma expressão algébrica simplificada como resposta final de um exercício. Para eles, apenas o estabelecimento de uma expressão e manipulação da afirmação geral não são suficientes e eles comumente acreditam que devem apresentar uma resposta numérica. (VELOSO; FERREIRA, 2010, p. 61),

Isso aponta ainda que quando o ensino algébrico ocorre de modo a privar o aluno do reconhecimento dos diversos significados que o conceito de equação pode apresentar, então o aluno passa a não compreender as situações a partir de contextos práticas ou de origem geométrica, por exemplo, ou ainda sentem incompreensão quanto a estrutura algébrica desses entes matemáticos, como foi muito bem ressaltado por Veloso e Ferreira (2010) na citação acima.

A noção de equação está distante de ser apenas aquela evidenciada apenas por processos mecânicos de resolução e se faz presente em inúmeros contextos práticos, geométricos e possui um conjunto amplo de propriedades e característica de caráter estrutural, que não deve passar despercebido aos olhos dos alunos, ou ainda, aos olhos dos próprios professores que, muitas vezes também não conseguem conceber a noção de equação a partir de determinados contextos. Assim, o trabalho com Álgebra quando iniciado nos anos iniciais do ciclo escolar pode abrir caminhos para a formação de pensamento algébrico nos educandos, antes mesmo da apresentação de processos e regras de resoluções.

Destacamos, então, que o trabalho com equação na Educação Básica deve estar inteiramente ligado ao desenvolvimento do raciocínio crítico, do pensamento algébrico, a fim de conduzir os educando para processos de aprendizagem consistentes que os permitam reinventar, refletir e compreender aquilo com o qual estão lhe dando, sem esboçar apenas o famoso “decoreba” de técnicas fortemente evidenciado nas discussões acima.

Ainda, é importante que os mesmos consigam perceber e saber lhe dar com as diferentes formas como o significado na noção de equação pode aparecer. Os alunos precisam compreender as equações a partir de situações práticas, geométricas, a partir de generalizações e também desenvolver habilidades com as técnicas de resolução das mesmas, pois apenas assim se constituirá uma aprendizagem sólida a respeito das equações.

Diante dessas reflexões, apresentaremos a seguir alguns estudos sobre as equações e seus diferentes significados para que possamos, posteriormente, pesquisar no âmbito da Educação Básica as formas com que os significados de equação estão distribuídos em uma coleção de livro didático de Matemática.

2.3 Um Perfil Conceitual de Equação

Ao passo das discussões que foram feitas, apresentamos nas seções que se seguem os percursos trilhados por alguns pesquisadores do campo da Educação Algébrica no que diz respeito a investigações do significado da noção de equação.

Para entendermos tal construção precisamos ter em mente os principais pontos que foram discutidos neste trabalho ate então. Será levado em conta o contexto histórico em que as equações foram contempladas ao longo da história da Matemática. Além disso, levamos em consideração os aspectos tratados na seção ligeiramente anterior, onde discutimos sobre os diferentes contextos com os quais as equações se apresentam na perspectiva do Ensino de Matemática e eventuais dificuldades de assimilação dessa noção em determinadas situações.

Assim, apresentamos o desenvolvimento de pesquisas que contribuíram para o desenvolvimento da Teoria dos Multissignificados de Equação de Ribeiro (2007). Abordamos, em seguida, pesquisas propostas por Barbosa (2009) e Dorigo (2010) que investigaram professores de Matemática e alunos do Ensino Médio, respectivamente, quanto aos significados de equação por eles concebidos quando expostos a determinadas situações.

Em suma, apresentamos, a partir da análise dessas pesquisas, os pressupostos que fundamentaram a elaboração de um Perfil Conceitual de Equação, proposto por Ribeiro (2013) e que contempla algumas categorias, denominadas de Zonas, que buscam sintetizar as formas como a noção de equação é estabelecida em diferentes contextos.

2.3.1 A Teoria dos Multissignificados de Equação

Ao longo desse estudo discutimos formas de se definir equação propostas por diversos estudiosos e analisadas por Ribeiro (2007) na construção da Teoria dos Multissignificados de Equação e diversas formas de trato das equações nos mais variados contextos.

As equações aparecem no cotidiano, na escola e na tecnologia de diferentes formas, cada forma como essas equações surgem remetem a métodos de resolução e interpretações diferentes sobre as mesmas. Por exemplo, nos primeiros anos da escolarização aprende-se a interpretação e resolução de problemas que tratam de equações de primeiro grau com uma incógnita e, ainda, de sistemas de equação de primeiro grau. Mais a diante, surgem as equações de segundo grau, equações exponenciais, etc. No decorrer dos avanços no estudo da Matemática da Academia as equações surgem em contextos mais avançados e exigem técnicas e métodos mais sofisticados e trabalhosos para suas resoluções, além de diferentes compreensões sobre seus significados, como é o caso das equações diofantinas e das equações diferenciais, essa última em que a incógnita deixa de restringir-se apenas a valores numéricos desconhecidos e passa a representar funções desconhecidas.

Voltando nossos olhares para o ensino de Matemática, em especial, na Educação Básica, é perceptível que diante das constantes inquietações que surgem no trato da Matemática e de seu ensino, muitas pesquisas têm se empenhado em investigar metodologias, significados conceituais, materiais didáticos, conteúdos e diversos outros aspectos envolvidos na prática do ensino da Matemática a fim de encontrar possibilidades para melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem matemática.

No campo da Álgebra, inúmeras dificuldades de compreensão aparecem no decorrer dos processos de ensino e de aprendizagem, muitos motivados por dificuldades de assimilação da Álgebra em si e muitos outros decorrentes de problemas oriundos da Aritmética, como apontam Teles (2004) e Veloso e Ferreira (2010).

Nas equações, inúmeras pesquisas têm mostrado que os alunos encontram uma série de dificuldades que os levam a cometer diversos tipos de erros em situações variadas, além de demonstrarem pouca ou nenhuma compreensão do conceito de Equação. É o que afirma Ribeiro e Cury (2015), que concluem que mesmo após terem sido trabalhados inúmeros conceitos algébricos, os alunos não conseguem reconhecer a estrutura matemática desse conceito, como ocorre no caso das equações e que leva os alunos a associarem ao conceito de equação apenas procedimentos e técnicas de resolução. Essa deficiência pode acarretar diversos problemas de compreensão, em especial quando uma equação não surge pronta, mas precisa ser interpretada e deduzida a partir de um contexto.

Como fica evidente, a noção de equação não se refere a um único significado, pois como já citado, essas podem sim evocar praticamente técnicas de resolução, mas também podem surgir em outros contextos e ter outros significados. Nessa perspectiva, motivado por investigar as diferentes formas de se conceber a Álgebra, Usiskin (1995) conclui que as finalidades da álgebra estão relacionadas com suas concepções.

Não distante, as equações se apresentam tanto na vida real como na sala de aula de diversas formas, com diversas finalidades que se relacionam com diferentes significados. Com base nisso, alguns pesquisadores do campo da Educação Matemática desenvolveram relevantes investigações a cerca do trato com as equações centradas em diferentes formas de investigação, dos quais discursaremos sobre eles a seguir.

Objetivando investigar os significados do conceito de Equação na perspectiva do ensino da Matemática, Ribeiro (2007), em sua tese de doutorado, analisou o desenvolvimento epistemológico do conceito de equação. Para tal, Ribeiro fez investigações epistemológica-histórica e didática.

Em sua investigação epistemológica-histórica, Ribeiro (2007) apresenta como as equações surgiram nos diversos contextos históricos e como eram concebidas pelos diferentes povos e épocas, apresentando algumas das principais aquisições dessa área feitas pelas civilizações da antiguidade. O autor percebe, então, que os povos atribuíam as equações em situações diferentes. As equações surgiam de problemas de ordem prática, derivando de situações aritméticas ou geométricas, surgiam de necessidades de generalização, de aplicação como fórmulas, de contextos geométricos e de noções mais estruturais.

Os babilônios e egípcios, por exemplo, foram povos que utilizaram de equações principalmente para resolver problemas de origem prática, apresentando equações como formas mais intuitivas com a ideia básica de igualdade entre expressões. Neste caso, não havia tanta preocupação com soluções gerais, mas com soluções particulares para determinados problemas. (RIBEIRO, 2007).

Os gregos ampliaram o uso das equações em situações menos práticas, houve também um aumento por problemas geométricos, em uma geometria dedutiva, uma vez que os babilônicos e egípcios abordavam mais situações de origem aritmética. Ainda encontravam-se nas soluções pouca generalidade, os problemas objetivavam soluções para equações particulares. (RIBEIRO, 2007).

Os árabes e hindus se caracterizaram por ter trabalhado com situações de origem prática, mas com foco em situações de origem geométrica mais generalista do que os demais povos citados, desenvolvendo aspectos mais estruturais. (RIBEIRO, 2007).

Os europeus se destacaram pelo trabalho com uma Matemática bastante algébrica, “(...) dentro de um sistema estrutural com propriedades e características bem definidas.” (RIBEIRO, 2007, p. 81). O trabalho com as equações buscava, basicamente, a compreensão de sua estrutura e a descoberta de soluções gerais, diferentemente dos egípcios e babilônios, por exemplo.

A partir do estudo Epistemológico-histórico, o autor consegue identificar algumas categorias para as diferentes formas como o significado de equação era concebido historicamente. Tais categorias são apresentadas na tabela abaixo acompanhadas de uma breve descrição:

Quadro 1: Categorias identificadas a partir do estudo epistemológico-histórico

Categoria	**Breve descrição**
Pragmática	Equação concebida a partir de problemas originários em contextos específicos, geralmente de ordem prática.
Intuitiva	Busca por soluções particulares, as quais normalmente se fundamentam em conhecimentos aritméticos.
Geométrica	Equação concebida a partir de situações envolvendo entes geométricos, geralmente em contextos teóricos.
Dedutiva	Busca por soluções particulares, as quais são deduzidas a partir de conhecimentos geométricos ou utilizando-se deles.
Estrutural	Equação concebida a partir de sua estrutura interna, independentemente do contexto no qual está inserida.
Generalista	Busca por soluções gerais, para classes de equações, as quais geralmente se fundamentam em conhecimentos algébricos.

Fonte: Ribeiro, 2013, p. 61.

Caminhando mais a fundo, Ribeiro (2007, p. 88) explica que para ele “(...) até alguns anos atrás, equação era ‘algo’ da Matemática que deveria ser resolvido, segundo alguns procedimentos e regras, com a finalidade de se encontrar o valor de ‘*x*’”. Nesta perspectiva, o autor destaca o tipo de pensamento não só dele, mas de uma grande maioria de alunos e que o motivou em sua pesquisa nesse tema.

Assim, o autor encara o desafio de fazer uma investigação ancorada no ensino da Matemática, buscando compreender o que é importante no ensino de equação, além das técnicas e procedimentos de resolução, que facilmente são os pontos mais percebidos pelos alunos no que se refere a sua compreensão sobre as equações.

No decorrer de seus estudos, Ribeiro (2007) identifica diversas concepções a respeito do que vários autores definem como equação. O autor identifica a partir de livros de fundamentos de Matemática, de dicionários etimológicos, dicionários matemáticos, livros didáticos e artigos que as definições dadas à equação são expressas de maneiras diferentes e faz algumas considerações a cerca dessas distinções.

Alguns dos autores pesquisados por Ribeiro (2007, p. 92) definiam equação de um ponto de vista bastante relacionado com suas técnicas de resolução, objetivando encontrar as raízes. Nesse caso o autor explica que “(...) essa é a maneira como eu concebia equação até algum tempo (...) e corrobora com a interpretação operacional de expressões algébricas”. Esse tipo de situação é comumente apresentada quando busca-se investigar o conceito de equação, onde a mesma é encarada a partir de seus passos operacionais de resolução.

O autor ainda identifica definições que destacam as equações a partir de problemáticas do cotidiano, enfatizando que tais definições relacionam-se com o ensino antigo, onde "(...) se procurava sempre relacionar a Matemática com a prática, com a resolução de problemas" (RIBEIRO, 2007, p. 97). Neste caso, podemos entender uma relação com a Matemática dos antigos babilônios e egípcios, por exemplo, onde a Matemática e as equações surgiam de problemas de ordem prática.

Para o autor, algumas das definições por ele pesquisadas associavam à equação um significado bastante semelhante ao significado atribuído pelos europeus, em que destaca: "Parecem conceber equação de maneira semelhante à dos **europeus**, como Descartes, Abel e Galois, os quais consideravam a **equação por si própria** e operavam sobre ela também de forma a considerar sua própria estrutura". Ainda é destacável que a diferenciação desse tipo de definição em relação às demais apresenta um "(...) grande apelo **conjuntista** que emana de suas caracterizações para a noção de equação". (RIBEIRO, 2007, p. 115, grifos do autor).

Durante essas investigações bibliográficas, de caráter didático, o autor identifica outras formas com as quais o significado se equação se relacionava, essas novas formas caracterizam-se como novos significados atribuídos à noção de equação e podem ser observados no quadro abaixo:

Quadro 2: Categorias identificadas a partir do estudo didático

Categoria	**Breve descrição**
Conjuntista	Equação normalmente reconhecida como uma ferramenta intimamente ligada ao conceito de função, de relação entre conjuntos.
Processual	Equação concebida a partir de seus próprios processos de resolução.
Tecnicista	Busca por soluções geralmente relacionadas a alguma técnica ou algoritmo particular.
Axiomática	Equação concebida como uma noção primitiva, sem necessidade de uma definição.

Fonte: Ribeiro, 2013, p. 62.

A partir dos resultados encontrados, tanto na forma como as equações eram concebidas pelas civilizações estudadas, em sua investigação epistemológica, bem como pelas definições analisadas, Ribeiro (2007) propôs uma categorização para os significados de equação, conforme apresentaremos abaixo:

Intuitivo-Pragmático: A equação é concebida como noção intuitiva e advém de problemas de ordem prática. (RIBEIRO, 2007). O significado intuitivo-pragmático era bastante evidenciado na forma como babilônios e egípcios lidavam com equações, ou seja, sem o trato com generalizações ou com sua estrutura interna, mas com a resolução de situações particulares do cotidiano, principalmente ligadas a suas atividades de agricultura e de engenharia. Além disso, Ribeiro (2007) leva em conta duas significativas definições de equação por ele analisadas, uma delas explica que:

> (...) escrevemos algebricamente as relações que o enunciado estabelece entre as quantidades conhecidas e as desconhecidas. “Chega-se assim a uma expressão de duas quantidades iguais que é chamada de equação”. (BOURDON, 1897 apud Ribeiro, 2007, p. 123)

Percebe-se, então, uma característica típica da resolução de problemas que envolvem a ideia de equação, substitui-se o valor desconhecido por uma letra e encontra expressões que devem satisfaz a alguma equivalência. Ainda, Ribeiro (2007) vai perceber essa mesma intenção na definição a seguir:

> A álgebra nos proporciona um novo recurso para resolver certos problemas: representamos o número desconhecido por uma letra e traduzimos o enunciado do problema, obtendo uma sentença chamada equação. (...) Equações são igualdades, ou seja, nelas aparece o sinal de =. O número desconhecido representado pela letra é chamado incógnita. Ao resolver a equação, estamos procurando o número desconhecido, ou seja, o valor da incógnita. (IMENES E LELLIS 2002, apud Ribeiro, 2007, p. 123)

Percebemos que ambas definições entendem a equação como proveniente de um enunciado de um problema que é traduzido para uma linguagem algébrica e que esse enunciado permite que seja estabelecida uma relação de igualdade entre entes matemáticos. Essas duas definições reforçam a ideia de equação concebida a partir de problemas práticos, assim como ocorria com os babilônios e egípcios e dão a justificativa para a elaboração do significado intuitivo-pragmático.

Dedutivo-Geométrico: A equação é concebida a partir de situações geométricas, medidas de seguimentos, etc. (RIBEIRO, 2007)

Já na formulação do significado dedutivo-geométrico, Ribeiro (2007) levou em conta o trabalho matemático estabelecido pelos gregos, que desenvolveram uma Geometria dedutiva bastante forte. Nesse contexto, entendemos que as equações são originárias de situações geométricas e frequentemente trabalhadas também de forma geométrica a partir de determinadas deduções. Como exemplo desse tipo de situação podemos citar a resolução geométrica das equações cúbicas pelo árabe Omar Khayyam. Além disso, o autor encontrou fortes indícios da presença desse significado na Geometria das Curvas.

Estrutural-Generalista: "(...) a noção de equação é concebida como uma noção estrutural definida e com propriedades e características próprias" (RIBEIRO, 2007, p. 124). Neste caso as equações são entendidas e operadas a partir de sua estrutura interna, não objetivando solução particular para determinado problema. Percebe-se nesse momento um apelo mais abstrato para o trato com as equações. Essa forma de trabalho algébrico foi presenciado nos relatos dos principais trabalhos desenvolvidos pelos europeus renascentistas, como Descartes, Galois, Abel, Gauss e outros.

Ribeiro (2007), ainda destaca que esse tipo de trabalho já iniciara com a Matemática de al-Khwarizmi, que "embora as equações com que ele trabalhava eram originárias de problemas de ordem prática, sua atenção estava focada para a determinação da resolução de qualquer equação quadrática". (p. 124)

Estrutural-Conjuntista: Neste caso, a noção de equação continua sendo bastante estrutural, porém relacionada à noção de conjuntos, sendo utilizada para resolver ou generalizar problemas envolvendo relações entre conjuntos. (RIBEIRO, 2007).

Ao investigar as definições dadas à noção de equação, o autor identifica definições de caráter bastante estrutural, mas que se diferenciam das anteriores por uma ligação muito forte com a ideia de conjuntos. Vejamos duas das definições que fizeram o autor propor esse significado:

> Seja f: E → F uma aplicação, e y um elemento de F. Dizemos que queremos resolver a **equação** (e_f,y), e notamos ($e_{f,}$y): **f(x) = y**, **quando estamos a procura** de um elemento x de E cuja imagem por f é y (podemos dizer que estamos a procura de um antecedente x de y). Dizemos que x é a **incógnita**, e que y é **dado**. Um elemento x de E que responde à questão é chamado de uma **solução** da equação. Quando o dado y está destinado a variar em F, satisfazemo-nos algumas vezes em notar (e_f) a equação f(x) = y; quando não há risco de ambiguidade, satisfazemo-nos algumas vezes em notar (e) uma tal equação. **Uma equação está assim ligada a uma aplicação f** e, portanto a dois conjuntos E e F: y é dado m F, e procuramos a incógnita x em E.. (ROGALSKI, 2001, p. 18 apud RIBEIRO, 2007, p. 125, grifo do autor).

Fica bastante evidente a apresentação estrutural e conjuntista que é dada a noção de equação pela definição acima, diferenciando-se bastante das definições apresentadas anteriormente. Ainda, com respeito a essa ótica conjuntista, outra definição levada em consideração pelo autor para a implementação do significado estrutural-conjuntista foi a seguinte:

> Problema que consiste em procurar, em um conjunto *E*, os elementos *x* que satisfazem a uma relação *R(x)*; *x* é a **incógnita**, e *xi*, tal que $R(x_i)$, é um valor aceitável para a incógnita se $x_i \in E$. Sob essa forma, o problema é muito amplo, e, por exemplo, contém os conceitos de **inequação** numérica e de pesquisa do lugar geométrico. Também se reserva, geralmente, o nome de equação ao caso particular onde *E* = *R*, *C*, *Rn* ou *Cn* , e onde *R(x)* pode ser escrita na forma: *f(x)* = 0 (...) **Resolver** uma equação é encontrar todas as raízes dela, e se necessário determinar a ordem de cada uma. (WARUSFEL, 1966, p. 168 apud RIBEIRO, 2007, p. 125, grifo do autor).

Processual-Tecnicista: A equação é encarada por meio de seus procedimentos e técnicas de resolução. (RIBEIRO, 2007). A partir de investigações no campo da Educação Matemática o autor percebe que um dos mais usuais significados atribuídos à equação é a partir de seus processos de resolução, isso porque muitas pesquisas vêm mostrando que os alunos e também professores constantemente entendem por equação os procedimentos e técnicas utilizados para sua resolução. Vejamos algumas das pesquisas que apontam para tal situação e que motivaram o autor a propor tal significado:

> Cotret (1997) que apresenta que tanto professores como alunos não conseguem justificar de maneira satisfatória suas escolhas por essa ou aquela equação, quando do equacionamento de problemas, a não ser pela sua própria resolução, caracterizando o significado da equação em sua resolução e não na expressão algébrica elaborada a partir do problema posto. (RIBEIRO, 2007, p. 126).

Percebe-se, na citação acima, que não apenas alunos, mas também professores muitas vezes estão presos a esse significado. Quando a presença desse significado excede alguns limites e se apresenta basicamente como o único significado que os indivíduos atribuem a equação, então pode ser um fator gerador de dificuldades nos processos de Ensino e de Aprendizagem em Matemática. Ainda, reafirmando o que foi tratado anteriormente, Ribeiro apresenta outra pesquisa que aponta para o mesmo significado:

> Dreyfus & Hoch (2004), que argumentam que alunos, ao serem questionados sobre o que é uma equação, utilizam-se de respostas que evidenciam suas compreensões sobre essa noção como sendo a própria resolução da equação, a partir dos procedimentos e técnicas utilizados para encontrar a sua solução. (RIBEIRO, 2007, p. 126).

Axiomático-Postulacional: Entende-se por equação uma noção matemática que não carece ser definida, do qual se originam outras noções. “(...) a noção de equação é utilizada no mesmo sentido de Noção Primitiva, como ponto, reta e plano na Geometria Euclidiana”. (RIBEIRO, 2007, p. 127). Para o autor, tal significado foi identificado a partir da Teoria da Transposição Didática, de Chevallard, onde Ribeiro (2007) destaca:

> Chevallard, o qual, de forma indireta concebe equação com esse significado em seu trabalho sobre a Transposição Didática, ao se referir às noções matemáticas e paramatemáticas, pois a noção de equação não pode ser concebida como uma noção matemática, por não ter uma "definição" única, aliás, nem precisa, afinal, ela é uma noção paramatemática, servindo como um saber auxiliar quando se trabalha com alguma noção matemática propriamente dita. (RIBEIRO, 2007, p. 127).

Assim, o autor define essas 6 categorias como significados diferentes para a noção de equação, dos quais foram referencial principal para demais pesquisas, incluindo as dissertações de seus orientandos Barbosa (2009) e Dorigo (2010) que buscaram investigar a noção de equação a partir dos significados propostos por Ribeiro (2007) junto a professores e a alunos. Dessa forma, seguiremos apresentando algumas das contribuições desses dois trabalhos citados anteriormente para o desenvolvimento da Teoria.

2.3.2 As Principais Pesquisas Fundamentadas na Teoria

A partir dessas categorias que ficaram conhecidas como Multissignificados de Equação, Barbosa (2009) investigou, em sua dissertação, a ideia de equação a partir da ótica dos professores de Matemática. Seu objetivo era "investigar quais significados de equação estão presentes nas concepções dos professores de Matemática (...)" (BARBOSA, 2009, p. 11).

Barbosa (2009) utilizou-se basicamente da Teoria dos Multissignificados de Equação, da qual tratamos anteriormente e da Teoria de Imagem de Conceito e Definição de Conceito (TALL; VINNER, 1981 apud BARBOSA, 2009, p. 11). Assim, o autor investigou três professores da Educação Básica a partir de entrevistas semiestruturadas quanto aos significados de equação por esses evocados quando expostos a situações que remetem a noção de equação.

Durante a pesquisa, foram apresentadas duas atividades aos professores, dos quais a atividade 1 se dividia em doze itens e a atividade 2 em dois itens. Os itens da atividade 1 apresentados aos professores eram compostos por situações diversas que abordavam, em sua maioria, situações de equação.

No item (a) pretendia-se investigar os sujeitos quanto a uma situação que remete ao significado processual-tecnicista, o mesmo que pode ser enunciado como: "**a) Determine os valores de y para os quais a expressão $(y-1)^2$ é igual a -4y.**" (BARBOSA, 2009, p. 81, grifo do autor).

Durante a análise das considerações e manipulações feitas pelos três professores pôde ser constatado que ambos recorriam de partida a operar mecanicamente sobre o quadrado da diferença, utilizando-se da igualdade para relacionar as duas expressões ditas iguais no enunciado e recorrer a fórmula de Bháskara para solução da incógnita. Nem todos os professores acertaram a solução, porém os três professores associaram tal situação aos seus processos e técnicas de resolução, caracterizando uma presença do significado processual-tecnicista na noção de equação concebida pelos três, como já se esperava. (BARBOSA, 2009).

No item (b), os professores foram questionados quanto a uma situação que deveria explorar os significados: estrutural-conjuntista e intuitivo-pragmático. Tal situação é apresentada a seguir:

Figura 8: Item (b)

b) Um boato se espalha da seguinte maneira: no 1° dia duas pessoas ficam sabendo do boato, no 2° dia cada uma dessas duas pessoas conta o boato para outras duas pessoas, no 3° dia cada uma das quatro pessoas conta o boato para outras duas pessoas, e assim por diante.

- **Quantas pessoas saberão do boato após 5 dias?**
- **Quantos dias deverão se passar para que 1.048.576 pessoas saibam do boato?**

Independente do número de dias como essa situação pode ser traduzida matematicamente?

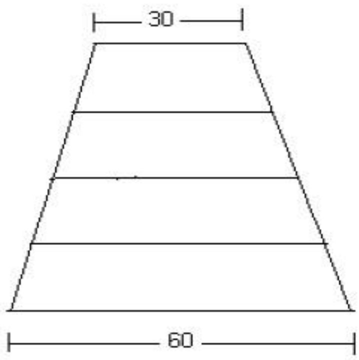
Fonte: Adaptado de Barbosa, 2009, p. 86.

Diante da análise das respostas obtidas a tal situação, foi notado que dois professores, A e B, que se perderam nos raciocínios demonstraram não compreender ligação entre tal situação e relações entre conjuntos. Apenas o processor C conseguiu expressar uma maior compreensão quanto a relação conjuntista do problema, porém de forma ainda insatisfatória, segundo o autor. No geral, foi percebido que os significados concebidos pelos professores, foram um tanto diferentes do que se esperava. Em destaque podemos citar que houve a presença, nesta situação, de uma preocupação, por parte dos professores, na aplicação de fórmulas de P.A. (BARBOSA, 2009).

No item (c) se objetivava desenvolver simultaneamente os significados intuitivo-pragmático e dedutivo-geométrico, uma vez que se abordavam características de ambos os significados, observem:

Figura 9: Item (c)

c) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm conforme a figura. Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira. Qual deve ser o comprimento dessa peça, desconsiderando os lados da escada? [11]



Fonte: Adaptado de Barbosa, 2009, p. 90-91

Neste item, o professor A tenta recorrer a fórmula de área do trapézio, porém, sem êxito desiste da questão e não se percebeu nele detalhes que evidenciem a interpretação dedutiva e nem a obtenção de equação por meio da situação geométrica, buscando o mesmo recorrer a aplicação direta e manipulações mecânicas. Na resposta do professor B foi constatado também o uso da aplicação de fórmula e a busca por operar de forma processual, sem o emprego de dedução ou a interpretação de equação. O professor C também desistiu do item por não conseguir um raciocínio que o conduzisse a resolver o problema. (BARBOSA, 2009)

Como podemos notar nesses exemplos, há situações em que os significados estabelecidos por Ribeiro (2007) não se fazem presentes. Em geral, foi percebido em todos os casos acima uma busca eminente por aplicações diretas de fórmulas ou algoritmos processuais para a resolução das situações.

Além desses, outros nove itens foram aplicados aos professores como partes da atividade 1. Em seguida, os professores, individualmente, foram questionados quanto aos dois itens da atividade 2. O primeiro questionava*:* ”**Atividade 2a: Existe um objeto matemático que está presente em algumas das situações da Atividade 1. Qual é este objeto matemático e em quais situações ele está presente? Justifique como você chegou a esta conclusão**” (BARBOSA, 2009, p. 68, grifo do autor).

Objetivava-se, então, verificar se os professores identificavam a ideia de equação nas atividades vivenciadas. Em seguida, o segundo questionamento era: “**Atividade 2b: O objeto matemático ao qual nos referimos na Atividade 2a é EQUAÇÃO. Retomando as situações da Atividade 1, em quais delas você reconhece este objeto matemático? Justifique sua resposta**”. (BARBOSA, 2009, p. 70, grifo do autor).

A partir dos resultados obtidos, Barbosa (2009) conclui, quanto as atividades que remetiam especialmente ao significado processual-tecnicista que todos os professores demonstraram busca por algoritmos de resolução e conceberam formas de resolução e justificativas pertinentes ao significado esperado.

Quanto às atividades que remetem ao significado dedutivo-geométrico, foi percebido que, mesmo os professores tendo encontrado relações com equação ou com incógnitas, nenhum dos professores demonstrou raciocínio que remeta a esse significado. (Barbosa, 2009).

Ao analisar as atividades que dizem respeito ao significado intuitivo-pragmático, o autor percebeu que os três professores, embora recorressem a tentativas mais práticas, como fórmulas prontas ou algoritmos, na maioria dos casos demonstravam uma interpretação pertinente a tal significado.

Dando continuidade a análise, o autor percebe que nas situações que dizem respeito ao significado estrutural-conjuntista nenhum dos professores consegue identificar tal significado nas situações, recorrendo a tentativas por métodos mais processuais.

Buscando identificar a presença do significado estrutural-generalista, o autor percebe, a partir da análise dos resultados obtidos, que os professores não demonstraram elementos suficientes para que se perceba a presença de tal significado em suas compreensões.

Com relação ao significado axiomático-postulacional, o autor destaca que “entendemos que ele permeie todos os outros significados e torna-se mais estruturado, na medida em que os demais significados sejam construídos ou consolidados na imagem de conceito dos indivíduos”. Assim, conclui que o significado se faz presente entre os professores, mas ainda tem muito potencial de desenvolvimento. (Barbosa, 2009, p. 164).

Assim, a partir desse estudo, pôde-se perceber que em muitos casos os significados pré-estabelecidos não estão em acordo com o que as concepções apresentadas pelos professores estabeleceram durante as atividades vivenciadas. Além disso, foi bastante evidenciado o significado intuitivo-pragmático e, com maior destaque, o processual tecnicista.

Dando continuidade às investigações nesse campo, Dorigo (2010), em sua dissertação, investiga um grupo de estudantes do Ensino Médio, buscando compreender quais os significados apresentados anteriormente por Ribeiro (2007), os mesmos tratados por Barbosa (2009), se fazem presentes na compreensão dos alunos e como estes alunos se relacionam com tais significados.

O público escolhido pelo autor foi composto por 16 estudantes do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública de São Paulo, que foram agrupados em duplas. As investigações se deram a partir de situações envolvendo equações polinomiais, exponenciais, trigonométricas e logarítmicas.

Durante suas investigações, o autor aplica a primeira atividade, composta de 8 situações que buscavam remeter os alunos a situações pertinentes a equação. Em outro momento os alunos receberam suas atividades e deveriam analisar as mesmas quanto ao seguinte questionamento: "**Na atividade 1, existe um objeto matemático que chamamos de equação, que está presente em cada uma das situações. Você reconheceu ou utilizou esse objeto matemático? Se sim, em quais das situações e por quê? Se não, justifique o porquê não utilizou.**" (DORIGO, 2010, p. 54, grifo do autor)

Diante das análises das atividades, o autor percebe que em várias situações os significados evocados pelos alunos durante suas resoluções não foram os esperados, além de que muitas vezes os alunos demonstravam não ter compreendido a noção do objeto matemático equação.

Por fim, o autor pontua que durante a análise dos dados coletados na pesquisa foi evidenciado uma predominância, por parte das resoluções dos alunos, de características pertinentes a significado intuitivo-pragmático, isso porque os alunos buscavam raciocínios mais intuitivos e utilizavam-se de procedimentos aritméticos e do método das tentativas para solucionar muitas das situações das quais era esperada outra postura. Quanto a isso, Dorigo (2010, p. 117) pontua:

> Com isso, ratificamos que, em nossas análises, foi observada uma forte tendência dos alunos para utilizar métodos de tentativas. Tais procedimentos já haviam sido previstos por nós nas análises preliminares. Exemplificamos a persistência de tal uso nas situações 'a', 'b', 'c', 'e', 'g' e ´'h da atividade 1.).

Além disso, o pesquisador ainda aponta que as formas de resolução e interpretação das situações também apontavam para uma grande frequência de raciocínios pertinente o significado processual-tecnicista, onde se concebe equação pelas suas técnicas de resolução.

Percebe-se, então, a partir dos trabalhos de Barbosa (2009) e Dorigo (2010) que o significado de equação evocado pelos alunos, na pesquisa de Dorigo ou pelos professores, na pesquisa de Barbosa, nem sempre caminhou segundo as expectativas dos pesquisadores, atentando para certas incoerências, em que os alunos ou professores apelavam para significados diferentes dos esperados. Além disso, em ambos os casos foi percebida uma forte presença dos significados intuitivo-pragmático e processual-tecnicista na compreensão dos alunos e dos professores pesquisados.

Com base nesses estudos, Ribeiro (2013) vai apresentar algumas considerações sobre os significados de equação e propor uma reformulação das categorias anteriormente definidas, com o objetivo de melhor reajustar os significados anteriormente propostos para a realidade que se constatou nos trabalhos de Barbosa (2009) e Dorigo (2010). Dessa forma, Ribeiro inicia um estudo a cerca dos conceitos de equações, propondo a construção de um perfil conceitual de equação.

2.3.3 A Apresentação das Zonas de um Perfil Conceitual de Equação

Em sua tese de doutorado, Ribeiro (2007, p. 28) apresentou, como objetivo principal: “Investigar os significados da noção de equação no processo de ensino da matemática”. Assim, propôs seis diferentes significados para o conceito de equação, constituindo a Teoria dos Multissignificados de Equação.

A partir das reflexões dos trabalhos de seus dois orientandos de mestrado Barbosa (2009) e Dorigo (2010), Ribeiro (2013) apresenta uma proposta de reorganização dos significados anteriormente propostos. Para isso, o autor recapitula um pouco do que o fez propor tais significados. Segundo o autor:

> A partir das reflexões e das análises propiciadas pelo estudo epistemológico, foi possível estabelecer um primeiro esboço, com algumas zonas de um perfil conceitual de equação. Vale lembrar que, neste momento, estão sendo consideradas, preliminarmente, as diferentes formas de se conceber e de tratar equação de um ponto de vista epistemológico, o qual se fundamenta no estudo ora apresentado. (RIBEIRO, 2013, p. 61)

Essas zonas, citadas pelo autor, estão descritas no quadro a seguir, acompanhadas de uma rápida descrição de sua caracterização.

Quadro 3: Primeiras categorias identificadas e sua breve descrição.

Categoria	**Breve descrição**
Pragmática	Equação concebida a partir de problemas originários em contextos específicos, geralmente de ordem prática.
Intuitiva	Busca por soluções particulares, as quais normalmente se fundamentam em conhecimentos aritméticos.
Geométrica	Equação concebida a partir de situações envolvendo entes geométricos, geralmente em contextos teóricos.
Dedutiva	Busca por soluções particulares, as quais são deduzidas a partir de conhecimentos geométricos ou utilizando-se deles.
Estrutural	Equação concebida a partir de sua estrutura interna, independentemente do contexto no qual está inserida.
Generalista	Busca por soluções gerais, para classes de equações, as quais geralmente se fundamentam em conhecimentos algébricos.

Fonte: Ribeiro (2013, p. 61)

Mas, como o próprio autor trata, estes são significados preliminares e muito trabalho estava pela frente, inclusive um estudo didático. Para o autor, o estudo que se seguiria poderia apontar para novos significados com que a noção de equação é concebida.

> Dando continuidade ao seu trabalho, Ribeiro (2007) desenvolveu um estudo didático que possibilitou a observação de outros significados para o conceito de equação. É fato que alguns desses novos significados tiveram forte influência das reflexões que nasceram a partir da elaboração do estudo epistemológico, fato esse ratificado pelo próprio autor ao longo de sua tese de doutoramento. (RIBEIRO, 2013, p. 61)

Diante desse estudo, o autor pôde descrever mais quatro novos significados, são eles:

Quadro 4: Novas categorias identificadas e sua breve descrição.

Categoria	**Breve descrição**
Conjuntista	Equação normalmente reconhecida como uma ferramenta intimamente ligada ao conceito de função, de relação entre conjuntos.
Processual	Equação concebida a partir de seus próprios processos de resolução.
Tecnicista	Busca por soluções geralmente relacionadas a alguma técnica ou algoritmo particular.
Axiomática	Equação concebida como uma noção primitiva, sem necessidade de uma definição.

Fonte: Ribeiro (2013, p. 62)

Diante disso, Ribeiro (2013) continuando seus estudos e recebendo contribuições das pesquisas de Barbosa (2009) e Dorigo (2010), pôde estabelecer uma nova organização do que se tinha feito até então.

> Ao se produzir uma nova categorização das zonas identificadas a partir dos dados obtidos e discutidos até o momento, procura-se elaborar outra nomenclatura e/ou descrições que sejam capazes de harmonizar pequenos ajustes que se fizeram necessários na/para a construção das novas zonas. (RIBEIRO, 2013, p. 62).

A fim de estabelecer uma reorganização das categorias anteriormente propostas, Ribeiro (2013) baseia na ideia de perfil conceitual, onde:

> [...] a ideia de que um único conceito pode ter diferentes zonas que correspondem a diferentes maneiras de ver, representar e significar o mundo, e são usadas pelas pessoas em contextos diferenciados. [...] Segundo esta noção, qualquer indivíduo pode possuir mais de uma forma de compreensão de um determinado conceito, ou seja, diferentes zonas de um perfil conceitual podem conviver no mesmo indivíduo, correspondendo a formas distintas de pensar e falar, que podem ser usadas em contextos específicos. (COUTINHO; MORTIMER; EL-HANI, 2007, p. 116 apud RIBEIRO, 2013, p. 58)

Assim, reanalisando suas construções preliminares em Ribeiro (2007) e com apoio das pesquisas de Barbosa (2009) e Dorigo (2010), eis que Ribeiro (2013) chega na caracterização representada no quadro 5:

Quadro 5: Novas categorias que relacionam as dos quadros 2 e 3 e sua breve descrição.

Categoria	**Breve descrição**	**Categoria(s) originária(s)**
Pragmática	Equação interpretada a partir de problemas de ordem prática. Equação admitida como uma noção primitiva. Busca pela solução predominantemente aritmética.	Pragmática. Intuitiva. Axiomática
Geométrica	Equação interpretada a partir de problemas geométricos. Busca pela solução predominantemente geométrica.	Geométrica. Dedutiva
Estrutural	Equação interpretada a partir de sua estrutura interna. Busca pela solução predominantemente algébrica.	Estrutural. Generalista. Tecnicista.
Processual	Equação interpretada a partir de processos de resolução. Busca pela solução aritmética ou algébrica.	Processual. Tecnicista. Intuitiva.
Aplicacional	Equação interpretada a partir de suas aplicações. Busca pela solução aritmética ou algébrica.	Pragmática. Conjuntista. Intuitiva.

Fonte: Ribeiro (2013, p. 63).

O autor pretende, portanto, estabelecer uma melhor comunicação entre o que as investigações desenvolvidas até o momento apontam. Cabe destacar ainda que o próprio autor pontua que essas zonas na maioria dos casos não surgem desassociadas umas das outras, mas que há importantes relações em comum que torna bastante sútil a diferenciação entre as mesmas. É, portanto, essa última caracterização que utilizaremos no decorrer de nossa análise.

Fazendo uma breve discussão sobre a categoria pragmática, entendemos que a mesma relaciona a noção de equação a situações cotidianas, onde de forma intuitiva a noção de equação pode se fazer presente e direcionar a elaboração de uma equação como modeladora da situação. Além disso, buscam-se, na grande maioria das situações, resultados numéricos que satisfaçam a valores desconhecidos.

A categoria geométrica, que surge da dedutiva-geométrica, tem demonstrado o interesse em contemplar situações similares as que eram estabelecidas pelos gregos antigos, uma geometria menos intuitiva e mais dedutiva. Nessa categoria, as situações são apresentadas em contexto geométrico e visam trabalhar noções de dedução para a elaboração de equações ou de raciocínios algébricos ligados a noção de equação para a aquisição de soluções que podem ser numéricas ou algébricas, a depender do contexto.

As atividades que contemplam a zona estrutural detêm um detalhe particular: não objetivam necessariamente uma solução, uma resposta para valores desconhecidos. Nessa categoria é estabelecido o trabalho com as propriedades e características da equação. Objetiva-se cálculo algébrico sobre a própria equação, manipulando-as sobre si mesma de forma a identificar noções gerais. Além disso, noções como generalizações de processos de regularidade da Aritmética podem ser consideradas elementos caracterizadores do trabalho com essa categoria, como aponta Ribeiro e Cury (2015).

No que diz respeito a categoria processual, percebemos as famosas atividades de “encontre o valor de *x*”, onde as equações não emergem de contextos, mas são dadas aos alunos de forma que se objetiva apenas que se manipule sobre as mesmas para se obter solução numérica ou algébrica. Nessa categoria, busca-se dos educandos trabalhar habilidades e técnicas mecânicas de processos de resolução de equação.

Com relação à categoria aplicacional, entendemos que, por se tratarem de situações muito similares as pragmáticas, em muitos casos é difícil estabelecer se o enfoque é mais pragmático ou aplicacional uma vez que ambas emergem de um contexto prático. No geral, o que vai diferenciar as duas situações é, basicamente, a forma como se dá a resolução da mesma, ou seja, se o estudando vai buscar evidenciar uma equação de forma intuitiva, caracterizando um raciocínio pragmático ou se ele consegue estabelecer uma equação que se aplique para solucionar o problema, caracterizando o pensamento aplicacional. No trabalho de Barbosa (2009), pôde-se se perceber isso, quando determinadas situações que objetivavam o trabalho intuitivo do antigo significado intuitivo-pragmático, discutido anteriormente, eram solucionadas a partir de equações aplicadas, causando uma incoerência entre o significado proposto e a solução, o que deve ter sido o fator mais influente para a elaboração dessa nova zona, a aplicacional.

Com base nisso, utilizamos dessa última caracterização, composta de cinco zonas, para dar início a uma investigação no campo da Educação Matemática, aproveitando-se das pesquisas anteriormente citadas para agora explorar essas zonas do perfil conceitual de equação de Ribeiro (2013) não com os alunos do Ensino Médio, como fez Dorigo (2010) e nem com professores de Matemática, como fez Barbosa (2009), mas no livro didático de Matemático, este que é um dos grandes aliados do professor em sala de aula e, em muitos casos, é adotado equivocadamente até como direcionador principal do currículo. Daremos sequência, portanto, à apresentação dos passos metodológicos que permeiam nossa pesquisa e que devem nos guiar a alcançar os objetivos estabelecidos.

3 METODOLOGIA DA PESQUISA

Nossa pesquisa comtempla uma abordagem Qualitativa no campo da Educação Matemática. De acordo com os nossos objetivos anteriormente traçados, detalharemos a seguir os critérios que foram utilizados para a seleção de uma coleção de livro didático do Ensino Fundamental II e de como procedemos quanto à coleta e análise dos dados.

3.1 A Escolha do Livro Didático

Inicialmente, pretendíamos investigar a noção de equação na Educação Básica, porém de forma diferente dos trabalhos de Barbosa (2009) e Dorigo (2010), que pesquisaram professores de Matemática e alunos do Ensino Médio, respectivamente. Tendo em vista a ampla utilização do livro didático nos processos de ensino e de aprendizagem na Educação Básica, resolvemos analisar os significados de equação a partir do livro didático sob a ótica do Perfil Conceitual de Equação desenvolvido por Ribeiro (2013).

Inicialmente, pensamos em focar nosso trabalho para o nível Fundamental, uma vez que nos possibilitaria acompanhar os anos em que o conteúdo de equação é inserido nas discussões escolares. Embora o conteúdo de equação oficialmente é apresentado no 7º ano, decidimos por analisar não apenas esse volume, mas sim todos os quatro anos que compõem esse ciclo escolar, a fim de evidenciar as possíveis concepções trabalhadas desde antes do conteúdo de equação ser inserido, no 6º ano até os trabalhos no 9º ano. Portanto, optamos por trabalhar uma coleção completa do Ensino Fundamental II.

O nosso objetivo era investigar situações que trabalhem com equações e identificar as zonas conceituais pertinentes a essas situações, a fim de entender em quais contextos a noção de equação apresenta-se e como a mesma é tratada na Educação Básica, em especial no Ensino Fundamental. Então, decidimos focar na análise das atividades que são apresentadas na coleção. Ou seja, pretendíamos investigar como essas atividades evocavam as zonas do Perfil Conceitual de Equação elaborado por Ribeiro (2013). Para selecionar o livro a ser adotado, estipulamos que fossem satisfeitos três critérios, em ordem decrescente de prioridade, são eles:

- Que a coleção tenha sido aprovada no PNLD 2017;

- Que esteja sendo adotada no município de São Joaquim do Monte – PE;
- Que seja a mais utilizada no Colégio Municipal Osvaldo Benício Vaz Cavalcante, localizado em São Joaquim do Monte - PE.

Durante pesquisas no site do Guia Digital do PNLD (BRASIL, 2017) pudemos constatar a aprovação das seguintes coleções para o Ensino de Matemática no Ensino Fundamental II:

Quadro 6: Coleções do Ensino Fundamental II de Matemática aprovadas no PNLD-2017

Praticando Matemática.
Descobrindo e Aplicando a Matemática.
Matemática do Cotidiano.
Matemática - Compreensão e Prática.
Projeto Teláris – Matemática.
Projeto Araribá – Matemática.
Matemática – Ideias e Desafios.
Matemática Bianchini.
Matemática nos Dias de Hoje – Na Medida Certa.
Convergências – Matemática.
Vontade de Saber.

Fonte: O autor

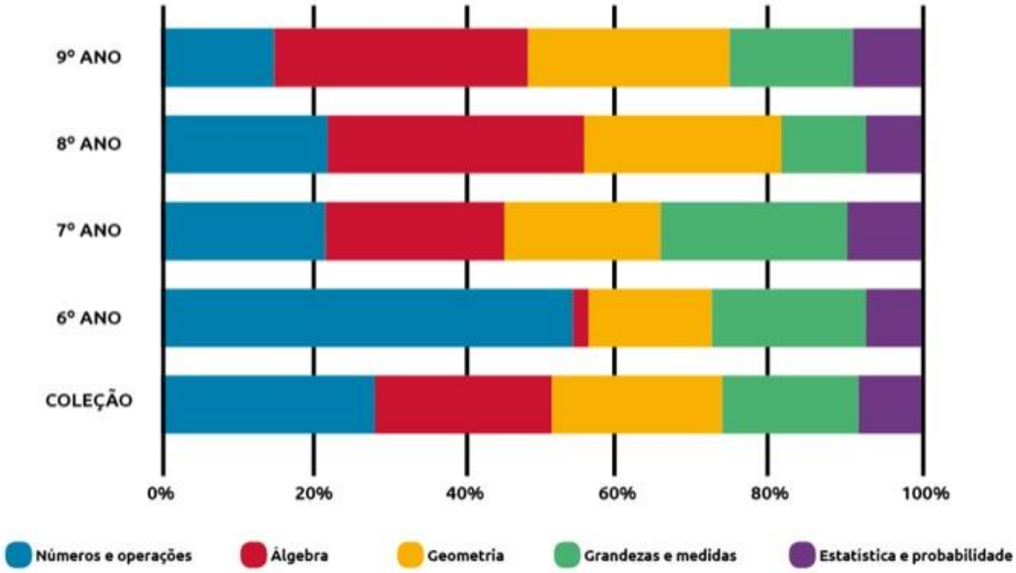
Munidos dessas informações, nosso próximo passo foi estabelecer qual dessas coleções seria escolhida para a análise a partir dos dois últimos critérios estabelecidos. Durante pesquisa junto a Secretaria de Educação do município de São Joaquim do Monte – PE e ao colégio municipal Osvaldo Benício Vaz Cavalcante foi possível compreender como se dá a seleção dos livros didáticos. Os mesmos, que serão utilizados durante um triênio, são escolhidos a partir de uma reunião entre os professores das turmas de toda a escola. Os professores votam e o livro mais escolhido é então solicitado para toda a escola.

Pudemos, assim, constatar que a coleção que satisfaz os três itens acima é a coleção “Praticando Matemática”, que está sendo utilizada unanimemente no colégio referido e é também a coleção mais utilizada no município em questão. Munidos dessa informação, seguimos de volta ao Guia Digital do PNLD (BRASIL, 2017) a fim de obter maiores informações a respeito da coleção selecionada para poder dar início a estruturação da coleta de dados.

Durante essa pesquisa, percebemos que esta coleção aborda os conteúdos com base em exemplos, trabalha muitos exercícios e apresenta trabalho relevante quanto a valorização da resolução de problemas cotidianos, inclusive problemas relacionados à Álgebra. Estes detalhes foram bastante importantes, visto que objetivamos analisar as atividades propostas na coleção. (BRASIL, 2017)

De acordo com o Guia Digital do PNLD (BRASIL, 2017) os campos da Matemática nessa coleção estão distribuídos por volume da seguinte forma:

Figura 10: Distribuição dos campos da Matemática por volume da coleção



Fonte: http://www.fnde.gov.br/pnld-2017/

Nesta coleção, os volumes são divididos em unidades, estas que separam os temas abordados. Nas atividades, percebemos que os autores dividem cada unidade em seções de atividades que evoluem em nível de dificuldade. Assim, as atividades vêm sendo trabalhadas já desde a apresentação do conteúdo em seções como: “Interagindo”, “Conectando Saberes” e “Refletindo”. Logo após a introdução de algo novo, com o objetivo de trabalhar aquele novo conteúdo, são inseridas seções de atividades como: “Seção Livre”, “Exercícios” e “Desafio”. Ao final de cada unidade, propõem-se as seções “Revisando” e “Autoavaliação”, em que as atividades sobre os assuntos de toda a unidade são misturados e se trabalham juntos. Assim, decidimos concentrar nossa análise a cerca de todas essas seções de atividades abordadas a cada unidade de cada volume.

A figura 10 já nos revela, de antemão, que temos uma representação significativa de trabalhos algébricos na coleção, com exceção apenas do volume referente ao 6º ano, o que já era esperado, pois as principais atividades com Álgebra são abordadas com maior força a partir do sétimo ano.

Ainda segundo o Guia Digital do PNLD (BRASIL, 2017), as situações apresentadas de Álgebra são introduzidas mesmo antes das unidades temáticas específicas, de forma introdutória. Além disso, a Álgebra é constantemente relacionada nas situações abordadas no livro com demais campos da Matemática, como Geometria e Grandezas e Medidas, por exemplo. Ainda são pontuados o destaque dado ao trabalho algébrico nas situações envolvendo regra de três e equação do 2º grau.

Esse destaque justifica ainda mais a extensão da nossa análise por todos os volumes da coleção, pois como era esperado o livro didático aborda noções algébricas relacionando-as com os demais campos matemáticos. Assim, esperamos encontrar trabalhos com equações do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental e perpassando por entre os tópicos de Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Números e Operações e talvez até em Estatística e Probabilidade.

Assim, escolhida a coleção para análise e já se conhecendo tais detalhes sobre a coleção, descreveremos a seguir como se darão os processos de coleta e análise das situações envolvendo a noção de equação no decorrer de todos os volumes da coleção.

3.2 Coleta e Análise dos Dados

De acordo com a nossa proposta, objetivamos investigar as noções de equação abordadas no decorrer dos volumes de uma coleção de livro didático de Matemática do Ensino fundamental II a partir das zonas do Perfil Conceitual de Equação de Ribeiro (2013). Para isso, faremos uma análise com foco nas atividades que são propostas. Destacamos ainda que não pretendemos desprezar a abordagem do livro quanto à apresentação do conteúdo, pois objetivamos a partir desses detalhes ter mais condições de identificar o que determinadas situações pretendem explorar.

Isso porque, como apontam Beltrame e Bianchini (2009) e Verceze e Silvino (2008), o livro didático desempenha um papel muito importante, visto que é um dos poucos ou o único instrumento em muitas escolas, cabendo a este grande influência na qualidade da educação.

A partir da coleção que foi selecionada: “Praticando Matemática”, em nossa investigação, faremos, inicialmente, uma leitura da abordagem do conteúdo, a fim de identificar as finalidades dos trabalhos com os conteúdos. Posteriormente, faremos uma busca no livro didático procurando encontrar questões que envolvam a noção de equação. Desse modo, apresentaremos, a priori, um levantamento da distribuição de situações que envolvam a noção de equação ao longo de cada volume da coleção.

Separadas as questões pertinentes a ideia de equação, analisaremos individualmente cada uma delas a fim de identificar qual ou quais das zonas do perfil conceitual proposto por Ribeiro (2013) se fazem presentes em cada situação. Trago abaixo as cinco categorias (zonas) do perfil conceitual trabalhado que serão utilizadas na análise das atividades propostas no livro didático:

1- Pragmática: Neste caso, a equação é interpretada a partir de problemas que estão dentro de um determinado contexto. A equação, neste caso, se comporta como uma noção primitiva e possibilita, por meio de sua resolução, a solução do problema. Além disso, é característica dessa categoria o problema trazer uma abordagem que requer uma solução predominantemente aritmética. (RIBEIRO, 2013).

2- Geométrica: Neste caso, a equação também é interpretada por meio de problemas, mas de problemas não de ordem prática como a anterior e sim de problemas que se originam da Geometria. Além disso, busca-se encontrar, em geral, soluções geométricas. (RIBEIRO, 2013).

3- Estrutural: Nesta categoria, a solução pretendida não é aritmética ou geométrica, o estudo das estruturas genéricas internas são o foco do trabalho. Desse modo, a equação é intendida por meio de sua estrutura. (RIBEIRO, 2013).

4- Processual: A equação é interpretada a partir de processos mecânicos de resolução, caracterizando-se por ser descontextualizada de situações cotidianas. Procuram-se soluções, neste caso, tanto aritméticas como algébricas, dependendo da proposta em questão. (RIBEIRO, 2013).

5- Aplicacional: A equação é interpretada a partir de suas aplicações. Busca-se solução aritmética ou algébrica. Diferencia-se da Pragmática por uma abordagem aplicacional e menos intuitiva. (RIBEIRO, 2013).

Assim, após classificadas as atividades de equação quanto à(s) respectiva(s) categoria(s) que evocam, faremos uma análise quantitativa sobre a frequência com que cada zona do perfil conceitual de equação aparece por volume da coleção e, posteriormente, da coleção como um todo. Possibilitamos, então, que se identifiquem quais são e como se distribuem as zonas trabalhadas nas atividades do livro. Para isso, utilizaremos de gráficos que possibilitem não só a apresentação dos resultados, mas também a comparação entre as diferentes frequências com que foram trabalhadas as zonas abordadas.

A partir da análise quantitativa das zonas identificadas nas situações analisadas, iremos propor argumentos para dialogar sobre os resultados obtidos. Assim, esperamos chegar a algumas conclusões importantes sobre como se distribuem as zonas conceituais ao longo da coleção e se há ou não relações desses resultados com demais pesquisas na área. Pretendemos assim, estabelecer uma reflexão e um diálogo entre a nossa pesquisa e as demais pesquisas norteadas no estudo da noção de equação.

4 ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO “PRATICANDO MATEMÁTICA”: RESULTADOS E DISCUSSÕES

Durante a análise da coleção “Praticando Matemática” pôde-se evidenciar algumas situações destacadas por Ribeiro (2007), em que percebemos que, em vários casos, uma mesma situação evoca mais de um significado, ou seja, trabalha mais de uma zona conceitual. Além disso, outra condição percebida e, previamente anunciada pelo autor é que na categorização, “é importante ressaltar que as diferenças entre esses multisignificados são, às vezes, bastante sutis e que é tênue a linha que separa um significado de outro”. (RIBEIRO, 2007, p. 123).

Assim como especificado em nossa metodologia, apresentaremos a frequência com que as cinco zonas do perfil conceitual de equação se fizeram presentes no decorrer de cada volume e, posteriormente, numa ótica mais geral em relação à coleção. À medida que esses resultados são apresentados e discutidos, traremos simultaneamente alguns exemplos de situações encontradas nos volumes e suas respectivas análises, justificando o porque de tais situações terem sido categorizadas como pertinentes ao trabalho com determinada(s) zona(s) do perfil conceitual adotado. Dessa forma, agrupando a análise por volume esboçaremos gráficos que melhor possibilitem a compreensão e comparação das situações percebidas a partir da análise. Assim, buscamos identificar e comparar quais as zonas que se destacaram volume a volume.

Por fim, apresentaremos toda a análise realizada e exploraremos todo o conjunto da obra, verificando quais as principais zonas trabalhadas na coleção como um todo e discutiremos o que esses resultados podem mostrar a cerca do trabalho que é realizado pelo livro sobre a noção de equação. Assim, pretendemos encontrar respostas para os questionamentos a cerca dos contextos e dos tratamentos que as equações recebem ao longo dos quatro anos do Ensino Fundamental II a partir da abordagem do livro didático.

4.1 Análise do Volume do 6º Ano

No que segue, apresentamos a seguir alguns detalhes a cerca da organização do volume. Faremos, posteriormente, a apresentação e as discussões referentes aos resultados obtidos durante a análise dos dados extraídos do volume em questão. Assim, organizamos nossa análise por seções, em que subdividimos a análise de cada uma das zonas do perfil conceitual de equação analisadas.

4.1.1 Organização do Volume do 6º Ano

Os conteúdos trabalhados nesse volume foram organizados em 14 unidades. Essas unidades, destacadas no quadro logo a seguir, abordaram trabalhos mais focadas em aritmética, com poucas situações algébricas, o que era bastante esperado para o volume.

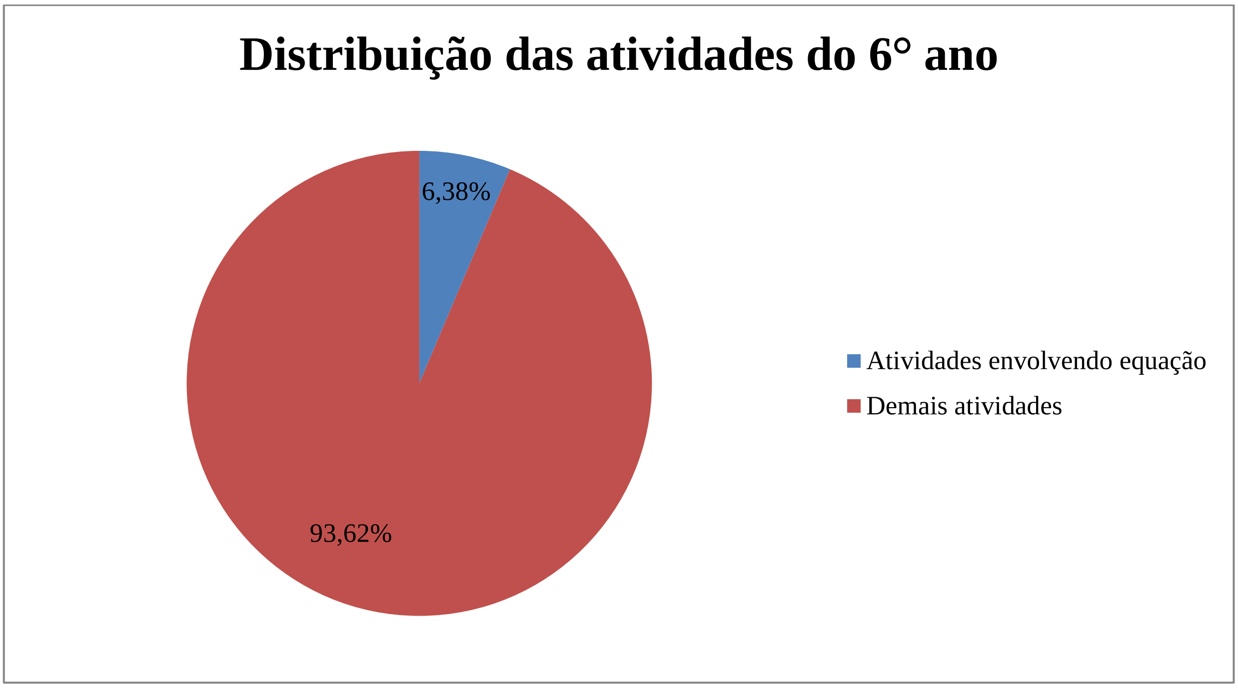
Quadro 7: Organização das unidades do volume do 6º ano

Unidade	**Tema**
01	Sistema de numeração decimal.
02	Números Naturais.
03	Adição e subtração de números naturais.
04	Multiplicação e divisão de números naturais.
05	Potenciação e raiz quadrada de números naturais.
06	Múltiplos e divisores.
07	Dados, tabelas e gráficos de barra.
08	Observando formas.
09	Ângulos.
10	Polígonos e circunferências.
11	Frações.
12	Números decimais.
13	Porcentagem.
14	Medidas.

Fonte: O autor

As atividades estão distribuídas em cada unidade temática por seções. Durante a análise do volume do 6º ano, percebemos a presença de 1145 atividades em geral, destas 73 apresentaram algum trabalho ou problemática que a relacionasse com a noção de equação. Em geral, esses pouco mais de 6% de situações que são pertinentes à noção de equação são situações bastante triviais e não exigiam domínios de técnicas algébricas para seu tratamento.

Gráfico 1: Distribuição das atividades do 6º ano



Fonte: O autor

Organizamos a seguir os resultados e alguns comentários da análise dessas 73 questões em relação às cinco zonas do perfil conceitual de equação que adotamos.

4.1.2 Zona Pragmática

Durante a análise, percebeu-se que esta zona foi a mais notada na abordagem de situações pertinentes a noção de equação. Seus principais trabalhos foram percebidos nas unidades 3 e 4, que dizem respeito às operações com números naturais. Em geral, essas situações emergiam de contextos práticos e apresentavam a ideia de valor desconhecido e podiam ser resolvidas a partir de procedimentos aritméticos, assim como faziam os povos babilônicos. No geral, identificamos a presença dessa zona em 42 das situações que abordam a noção de equação no decorrer do volume, o que equivale dizer que quase 58% das atividades que contemplaram a noção de equação apresentavam o trabalho com essa zona. Apresentamos, a seguir, um exemplo de situação pertinente a essa categoria, que foi presenciada na unidade 3, acompanhada de sua análise:

Figura 11: Questão 14 da unidade 3

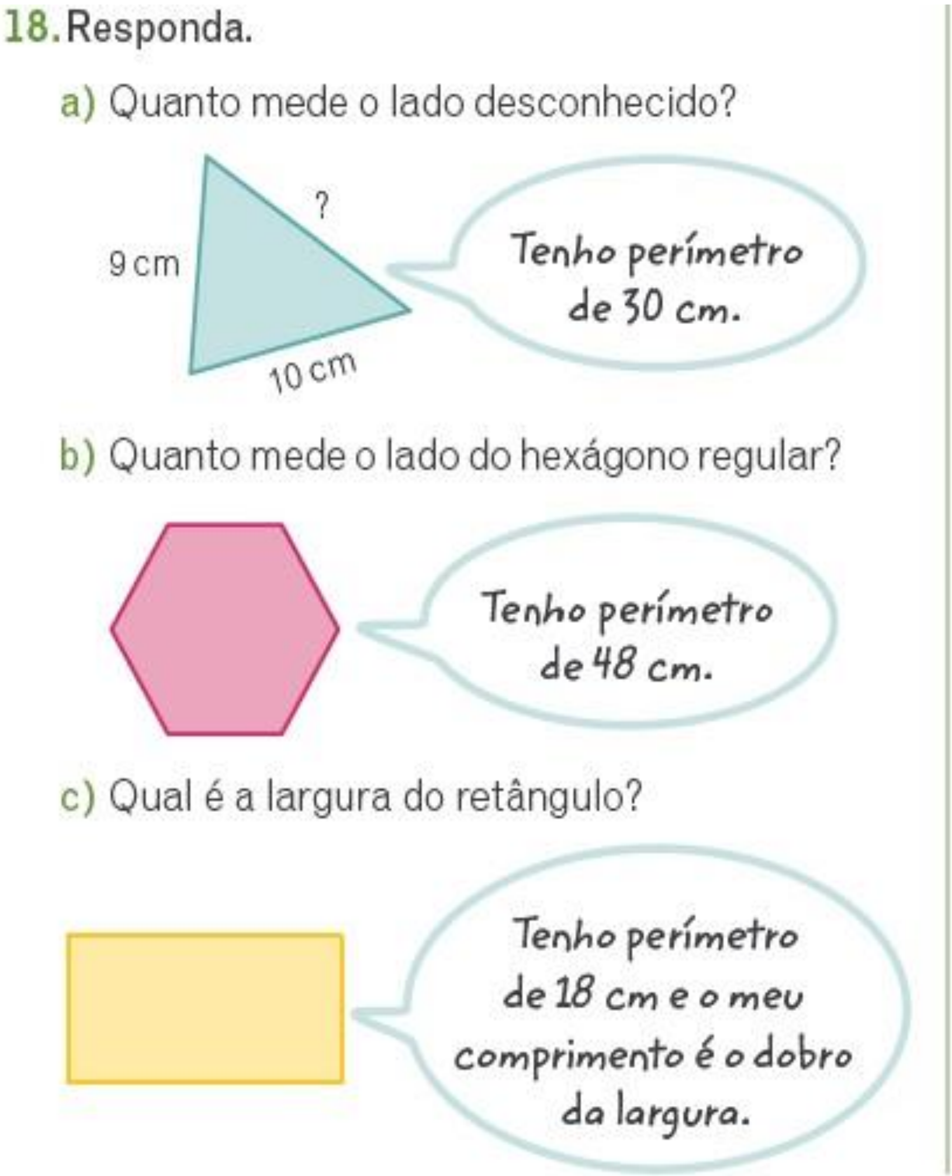
Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 6. 2015, p. 39.

A atividade proposta acima demonstra uma típica situação pragmática, em que um contexto prático, embora não enunciado, se apresenta em forma de figuras e exige do aluno uma compreensão sobre valor desconhecido e o manuseio de técnicas aritméticas para sua resolução. Tal problema ainda pode evidenciar o trabalho com sistemas de equações lineares, porém entendemos que esse não é o objetivo na questão, tendo-se em vista que esse conteúdo não está ao alcance dos alunos no momento. Mesmo assim, os manuseios aritméticos devem buscar satisfaz à duas condições simultaneamente: $C + B = 50$ e ainda $2C + 3B = 120$, em que C e B representam, respectivamente, os preços da camisa e da bola. Dessa forma, por contemplar a ideia de valor desconhecido através de um contexto prático que idealiza a noção de equação e permitindo-se soluções por métodos aritméticos, entendemos que tal situação remete a zona pragmática.

4.1.3 Zona Geométrica

Como vimos nos estudos anteriores, as situações geométricas se caracterizam por serem originárias de contextos geométricos e ainda por caracterizarem um raciocínio dedutivo, normalmente envolvendo medidas desconhecidas de seguimentos ou outros elementos geométricos. Percebe-se ao longo da análise do volume que apenas 12 situações exploram essa zona. Esse quantitativo representa um valor significativamente pequeno em relação às atividades de equação, pouco mais de 16% de tais atividades. A seguir, apresentamos a análise de uma das situações que contemplam essa zona:

Figura 12: Questão 18 da unidade 10



Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 6. 2015, p. 167.

Durante a análise de tal questão foi notado que as situações se originam de contextos geométricos. Em todos os itens se objetiva desenvolver raciocínios e cálculos para se encontrar valores desconhecidos de seguimentos dos polígonos apresentados. No item (a), o emprego de operações aritméticas dão conta de solucionar o valor desconhecido, que pode ser compreendido pela equação $9 + 10 + x = 30$. No item (b) basta dividir o perímetro de número de lados, pois o polígono é regular. No item (c) foi percebido que a obtenção do valor desconhecido não é tão intuitiva quanto os itens anteriores, sendo assim, além de estabelecer que $2L + 2C = 18$ (ou seja, o perímetro é a soma dos dois comprimentos com as duas larguras), ainda é preciso deduzir que como $C = 2L$, então teremos o perímetro como $2L + 2(2l) = 18 \rightarrow L = 3$. Assim, a atividade trabalha dentro de um contexto geométrico e aparecem situações dedutivas triviais. Destacamos ainda que não necessariamente a ideia do aluno deva ser expressa como fizemos, possivelmente o mesmo utilizará de uma linguagem menos simbólica ou até mesmo mental para expressar essa relação, o que é muito esperado tendo-se em vista que a linguagem algébrica simbólica ainda não está bem desenvolvida nesse momento. Portanto, consideramos que tal atividade contribui para o trabalho com a zona geométrica do perfil conceitual de equação adotado.

Tais situações envolvendo a zona geométrica estão distribuídas em algumas unidades do livro, destacando-se em três delas: a unidade 9, que trata de ângulos; a unidade 10, que aborda o conteúdo de polígonos e a unidade 14, que contempla o estudo das medidas. Em geral, tais situações buscavam dos alunos que se deduzissem relações geométricas a fim de descobrir algum valor desconhecido, que normalmente representava a medida de um seguimento ou ângulo.

4.1.4 Zona Estrutural

No decorrer da análise, os trabalhos percebidos que dizem respeito a significados de equação não comtemplaram a apreciação da zona estrutural do perfil de equação em questão. Essa zona parece não está adequada ao tipo de abordagem que se deseja fazer nesse momento inicial, visto que o conteúdo de equação em si só é apresentado oficialmente a partir do sétimo ano. Como vimos também nos relatos históricos no inicio desse trabalho que as atividades estruturais, além de bastante abstratas, exigem o domínio de propriedades que ainda não estão bem estabelecidas na compreensão dos alunos nesse momento inicial.

Assim, entendemos que nesse volume do 6º ano as experiências a que as situações propunham eram de desenvolvimento de raciocínios e principalmente de interpretação a partir de contextos práticos, não se fazendo uso de muitos simbolismos algébricos, nem se buscando operar as equações por sua estrutura.

4.1.5 Zona Processual

Assim como os trabalhos analisados de Barbosa (2009) e Dorigo (2010) também percebemos um forte apelo processual já desde o inicio dos trabalhos com equação. No decorrer do volume, identificamos que 19 atividades objetivam um trabalho que relaciona o significado de equação aos procedimentos e técnicas que a envolvem, caracterizando a presença da zona processual do perfil conceitual de equação de Ribeiro (2013).

Essas atividades foram mais presentes nas unidades 3 e 4, onde os trabalhos focam para as operações com números naturais. Embora essas 24 questões representem um quantitativo pequeno em relação ao total de questões gerais, percebemos que representa um valor significativo se comparado com as demais questões que trabalham equação, ou seja, 26% das mesmas. Esse detalhe pode ser melhor identificado no gráfico da frequência das zonas no volume do 6º ano, localizado na seção 4.1.7. Apresentamos, a seguir, a análise de uma das atividades que demonstraram a presença da zona processual no trabalho com equação.

Figura 13: Questão 57 da unidade 5

57. Se $2 + \sqrt{n} = 5$, então n é igual a:

a) 3 c) 9

b) 6 d) 23

Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 6. 2015, p. 90.

A questão apresentada não admite a equação a partir de problemas, nem de ordem prática, nem geométrica, além disso, caracteriza-se apenas pela busca de solução numérica a partir de algum procedimento, seja ele algébrico ou aritmético. Dessa forma, tal atividade remete a zona processual de equação, pois busca-se apenas manipular a equação, que é dada pronta ou atribuir a ela valores para se encontrar o valor da incógnita *x*.

Em suma, as atividades desse volume, quanto à zona processual, foram bastante similares à situação apresentada acima, em que as equações, normalmente lineares, eram apresentadas prontas para que se operasse sobre elas para encontrar o valor desconhecido. Além disso, na grande maioria dos casos, é possível que a solução se dê por métodos de substituição, já que se trata de situações triviais que visam introduzir a ideia de equação.

4.1.6 Zona Aplicacional

Neste caso, a zona aplicacional é compreendida a partir de situações normalmente de ordem prática, de forma similar a zona pragmática. Diferencia-se da pragmática ao passo que, enquanto na pragmática a equação é obtida de forma intuitiva, a fim de modelar a situação prática apresentada; na aplicacional a equação não é obtida de forma intuitiva, mas surge no contexto da resolução como uma aplicação para solucionar o problema.

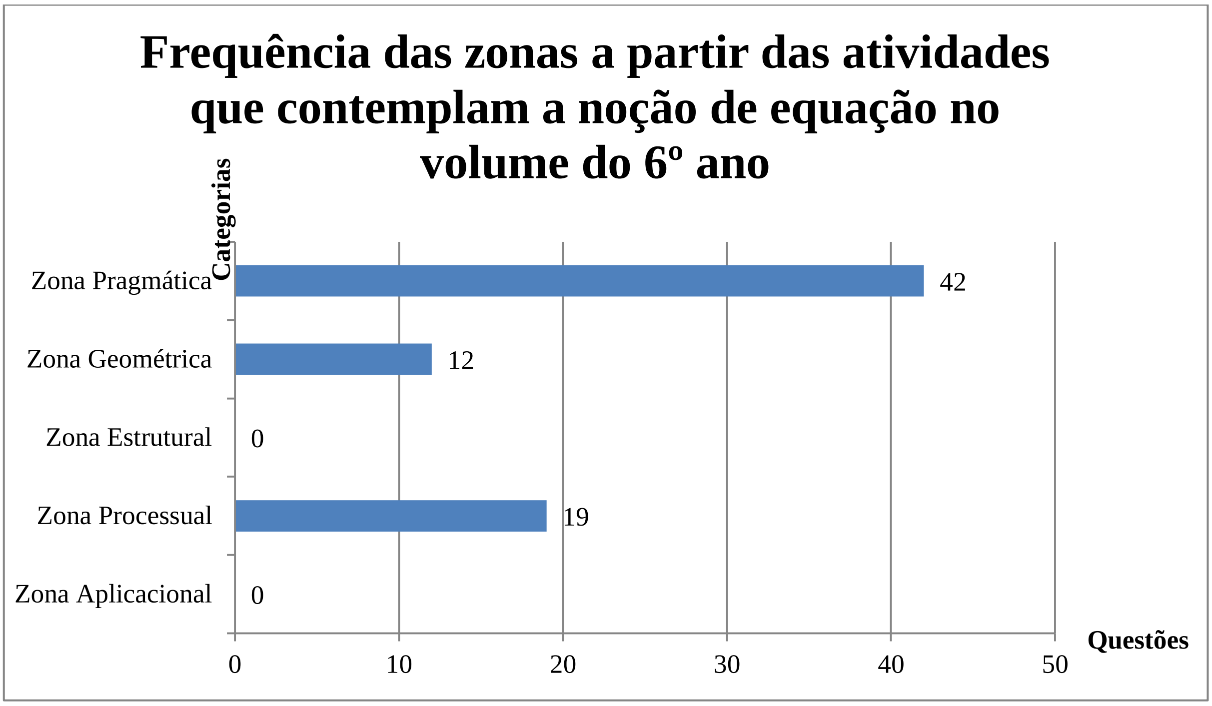
No decorrer desse volume percebeu-se que as atividades originárias de situações práticas remetiam a noções mais intuitivas. Assim, as atividades aplicacionais não foram evidenciadas.

Acreditamos, ainda, que essa ausência se deu pelo fato de que os alunos não possuem muita familiaridade com equações que possam ser aplicadas em problemas, o que deve ser aperfeiçoado nos volumes posteriores.

4.1.7 Resultados do Volume do 6º Ano

A partir das discussões que fizemos anteriormente, propomos agora uma apresentação estatística a respeito da frequência com que cada uma das zonas estabelecidas por Ribeiro (2013) se fizeram presentes no decorrer da análise do volume do 6º ano.

Gráfico 2: Frequência das zonas a partir das atividades que contemplam a noção de equação no volume do 6º ano



Fonte: O autor.

A partir dos dados apresentados no gráfico acima, podemos perceber que as atividades envolvendo o trabalho com equação exploraram principalmente a zona pragmática e, em segundo lugar, a zona processual do perfil de equação adotado. Percebe-se, então, uma similaridade com os resultados dos trabalhos realizados por Barbosa (2009) e Dorigo (2010), que perceberam maior frequência de noções pertinentes a essas zonas a partir de investigações com professores e alunos.

As situações pertinentes a zona geométrica parecem não ser o foco dos trabalhos nesse momento, aparecendo em poucas situações no decorrer do volume. Já a zona estrutural e a aplicacional não foram trabalhadas. Acreditamos que, por tratar-se de uma abordagem inicial com relação ao conteúdo de equação não tenhamos observado a presença de situações que trabalhem aspectos estruturais, justificando a ausência da zona estrutural. Além disso, entendemos que, nesse momento os alunos possivelmente não encontram conhecimentos de relações matemáticas algébricas desenvolvidas que os possibilite recorrer a aplicações ao invés de raciocínios intuitivos, justificando a ausência de situações aplicacionais. Prossigamos então para a análise do volume do sétimo ano, onde pretendemos estabelecer uma relação com os resultados até então apresentados.

4.2 Análise do Volume do 7º Ano

No que se segue, apresentamos, de forma similar ao que foi feito na análise do volume do 6º ano, uma explanação da organização dos conteúdos no decorrer desse volume. Posteriormente, apresentaremos os resultados obtidos quanto às zonas identificadas em nossa análise. Ainda, faremos uma discussão sobre os resultados obtidos no volume do 7º ano como um todo e uma comparação com o que foi obtido na análise do volume anterior, a fim de extrairmos pontos importantes sobre os resultados encontrados.

4.2.1 Organização do Volume do 7º Ano

Nesse volume, os conteúdos foram distribuídos em 11 unidades, das quais apresentaremos a seguir:

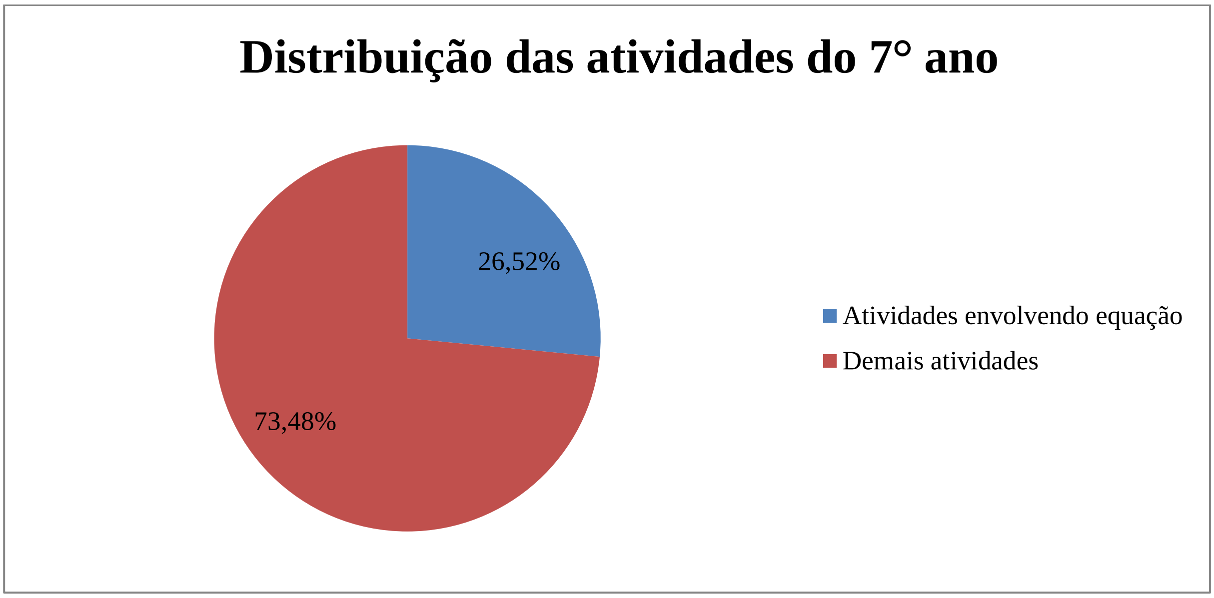
Quadro 8: Organização das unidades do volume do 7º ano

Unidade	**Tema**
01	Números naturais.
02	Frações e números decimais.
03	Números negativos.
04	Proporcionalidade.
05	Razões e Porcentagens.
06	Construindo e interpretando gráficos.
07	Sólidos geométricos.
08	Áreas e Volumes.
09	Equações.
10	Inequações.
11	Ângulos e triângulos.

Fonte: O autor

Apresentamos, então, um gráfico de setores a fim de melhor relacionarmos a presença das atividades com equação em relação ao volume como um todo. No mesmo, perceberemos como o percentual de atividades que contemplam a ideia de equação neste volume supera o que presenciamos no volume do 6º ano.

Gráfico 3: Distribuição das atividades do 7º ano



Fonte: O autor

No decorrer das unidades temáticas, foram analisadas 1135 atividades distribuídas no volume e percebemos que 301 abordavam a noção de equação, o que representa mais de 26% das atividades totais. Percebe-se, nesse momento, um aumento significativo na abordagem das situações que contemplam a ideia de equação em relação ao volume anteriormente analisado. Tal resultado deve-se ao fato de que o conteúdo de equação foi abordado com exclusividade na unidade 9 e permeou por outros conteúdos com muito mais frequência do que ocorrera no volume do 6º ano. Tendo em vista esses dados, apresentaremos, a seguir, como se apresentaram as cinco zonas pesquisadas a partir dessas 301 atividades identificadas.

4.2.2 Zona Pragmática

Diante da análise das atividades propostas, percebemos que dentre as 301 questões que contemplam a noção de equação, ocorre o trabalho com a zona pragmática de equação em 155 delas. Esse resultado nos aponta para um valor significativo no trabalho com essa zona em relação ao total de atividades pertinentes a equação, representando o equivalente a pouco mais de 51% das mesmas.

Novamente, percebe-se que a zona pragmática rouba a cena, sendo a mais evidenciada no volume. Os trabalhos com essa zona foram muito bem distribuídos no decorrer do volume, fazendo-se presente em quase todas as unidades temáticas. Além disso, foram percebidos registros mais significativos da presença dessa zona nas unidades 4, 5, onde se trabalhavam proporção, razão e porcentagem e, principalmente, na unidade 9, onde o conteúdo era equação.

Em geral, essas atividades buscavam abordar situações onde os alunos pudessem identificar a necessidade de encontrar um ou mais valores desconhecidos e modelar a situação a partir de uma equação, para, posteriormente, aplicar procedimentos de resolução, a fim de se encontrar soluções numéricas. Apresentamos, a seguir, um exemplo de situação que contempla o trabalha dessa zona no volume do 7º ano.

Figura 14: Questão 28 da unidade 9.

28. Um táxi inicia uma corrida marcando R$ 5,00 no taxímetro. Sabendo que cada quilômetro rodado custa R$ 3,00 e que o total da corrida ficou em R$ 47,00, calcule quantos quilômetros foram percorridos.

Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 7. 2015, p. 211.

Tal atividade permite que a partir da leitura do enunciado o aluno compreenda uma situação prática, onde o mesmo deve abstrair uma equação que modele o problema. Tal equação é do tipo: $5 + 3x = 47 \rightarrow x = 14$. Além disso, percebemos que a busca é por uma solução de caráter aritmético. Dessa forma, entendemos que as características apontam para uma equação que surge de forma intuitiva a partir da situação, portanto, evidenciamos um forte apelo pela zona conceitual pragmática nessa atividade.

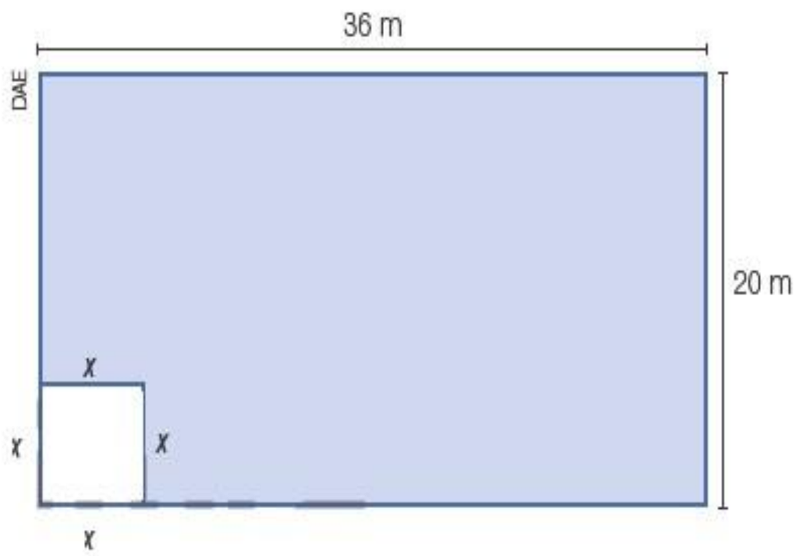
4.2.3 Zona Geométrica

Diante dos dados analisados, pudemos constatar um aumento significativo nas atividades que contemplam a noção de equação a partir da ótica da zona geométrica, onde as situações originam-se de contextos geométricos e objetivam trabalhos com deduções a fim de se solucionar a situação.

A zona geométrica foi identificada em 58 das atividades envolvendo equação, o que representa uma presença em pouco mais de 19% das situações que envolvem equação. Esse aumento, em relação ao quantitativo dessa mesma zona no volume do 6º ano deve-se consideravelmente ao fato da apresentação do conteúdo de equação neste volume e também a presença de unidades que trabalham com Geometria. As atividades que contemplaram essa zona foram evidenciadas com frequência nas unidades 8, 9 e 11, onde se trabalhavam os conteúdos de áreas, volumes, equação, ângulos e triângulos. A seguir, apresentamos uma das atividades analisadas no decorrer desse volume e que entendemos ser pertinente ao trabalho com a zona geométrica e, em seguida, sua análise:

Figura 15: Questão 69 da unidade 8

69. Na figura tem-se um terreno retangular no qual se pretende construir um galpão cujo lado deve medir *x* metros.



Se a área da parte colorida é 684 m², o lado do galpão mede, em metros:

a) 6
b) 8
c) 7,5
d) 8,5

Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 7. 2015, p. 201.

A partir da situação acima, percebemos se tratar da necessidade de achar um valor desconhecido x, que deve ser encontrado a partir de uma equação. Percebemos, ainda, que a abstração de uma equação que modele tal problema fica a cabo de algumas deduções realizadas a partir da figura geométrica em questão. Desse modo, a solução que nos parece mais evidente, embora não seja a única, é deduzir que a soma das áreas do quadrado que representa o galpão e da parte colorida devem ser iguais a área do retângulo grande que as contém. Daí, $x^2 + 684 = 720 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6$. Portanto, como se trata de uma medida, o aluno deve interpretar a mesma como a solução positiva da equação e, assim, assinalar a alternativa (a). Desse modo, entendemos que tal situação trabalha a zona geométrica do perfil conceitual de equação adotado.

Em geral, como já esperado, os principais trabalhos abordavam a presença de valores desconhecidos para medidas de seguimentos, de ângulos ou de áreas em contextos geométricos variados. Assim, a partir de deduções geométricas, objetivava-se encontrar equações que modelassem a situação para se chegar à soluções as vezes numéricas e as vezes algébricas, relacionadas diretamente a conceitos geométricos.

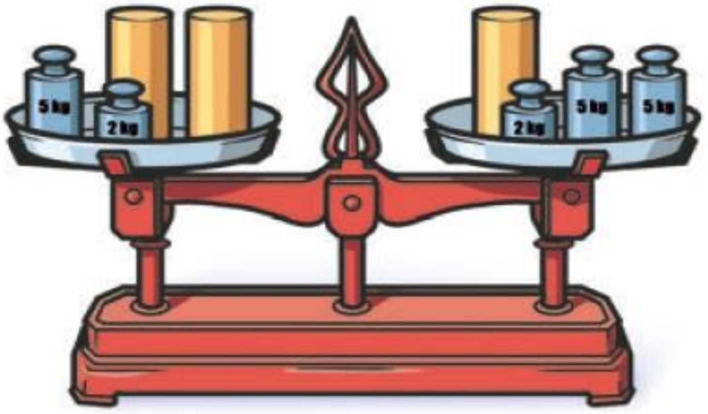
4.2.4 Zona Estrutural

Tendo-se em vista que, durante a análise do volume do 6º ano não encontramos situações que abordassem os aspectos estruturais das equações, nesse momento, por sua vez, esperávamos já de antemão notar uma possível existência dessa zona, mesmo que de forma ainda pouco significativa.

Durante a análise dos resultados coletados, percebemos que 19 situações, situadas praticamente todas na unidade 9 do volume, trabalham com um aspecto mais estrutural, o que contempla um pouco mais de 6% das situações que envolvem equação. É importante destacar que esse crescimento, em relação ao volume analisado anteriormente, foi conduzido pela apresentação mais formal do conteúdo de equação, realizada na unidade 9. Em geral, os aspectos estruturais percebidos não são exaustivamente abstratos, mas aparentemente introdutórios no trato de algumas características e propriedades existentes nas equações. Segue, logo a seguir, um exemplo de atividade que caracterizamos pelo trabalho mais estrutural sobre as equações e, em seguida, sua análise.

Figura 16: Questão 31 da unidade 9

31. Quais das seguintes ações manteriam a balança em equilíbrio?



a) Adicionar 3 kg em cada prato.
b) Tirar 5 kg de cada prato.
c) Passar uma lata do prato esquerdo para o prato direito.
d) Tirar uma lata de cada prato.
e) Tirar duas latas do prato esquerdo e uma do direito.

Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 7. 2015, p. 214.

Na análise da situação acima, percebemos que o trabalho não se caracteriza como pragmático e nem aplicacional, pois não objetivamos a identificação de uma equação que modele a situação, nem de uma equação aplicada para se chegar a valor numérico que solucione o problema. Na verdade também não queremos manipular mecanicamente para encontrar solução a partir de uma equação dada, não se caracterizando como processual. Ainda, a interpretação geométrica e o caráter dedutivo também não se fazem presentes. Se observarmos a situação e os itens perceberemos que se trata de uma condução para o aluno perceber, ainda que de forma pouco abstrata, propriedades que garante que adicionar ou retirar entes matemáticos equivalentes de ambos os membros da equação não alteram a igualdade (que é representada pelo equilíbrio dos pesos). Além disso, é possível verificar que algumas manipulações podem sim alterar o equilíbrio, isso se verifica no item (c) e (e). Essas propriedades, estabelecidas de uma forma bastante simples no problema, assemelham-se com a forma como eram concebidas nos *Elementos* de Euclides, onde se apresentam algumas manipulações como essas, caracterizando um trabalho mais voltado ao aspecto estrutural das equações. Portanto, entendemos que essa situação remete a zona estrutural do perfil conceitual de equação em questão.

4.2.5 Zona Processual

Baseados nos resultados do volume anterior, onde essa zona foi a segunda mais frequente na abordagem das equações, já esperávamos encontrar um resultado significativo no trabalho com zona no decorrer do volume do 7º ano. Percebemos, então, que 94 das 301 atividades atentavam para um trabalho com ênfase nos procedimentos e técnicas, o que representa quase um terço das situações pertinentes a noção de equação.

As situações envolvendo essa categoria (zona) tiveram, em relação ao volume anterior, um progresso no grau de dificuldade com a qual as questões eram apresentadas. Se por um lado as atividades processuais dessa zona no volume anterior ainda podiam, em grande parte, ser resolvidas pelo método das tentativas, substituindo valores às incógnitas; nesse volume, por sua vez, isso ficara mais complicado e exigia dos educando cada vez mais familiarização com as técnicas e processos de resolução específicos do trabalho com as equações, dando ainda mais ênfase a um trabalho característico dessa zona. Apresentamos a seguir, um exemplo de atividade pertinente a esse trabalho tecnicista e sua análise, a fim de apresentar como essa zona era concebida nesse volume.

Figura 17: Questão 67 da unidade 9

67. **Resolva as equações.**

a) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x-3}{3} = 6$

b) $\dfrac{x-2}{3} - \dfrac{x+1}{4} = 4$

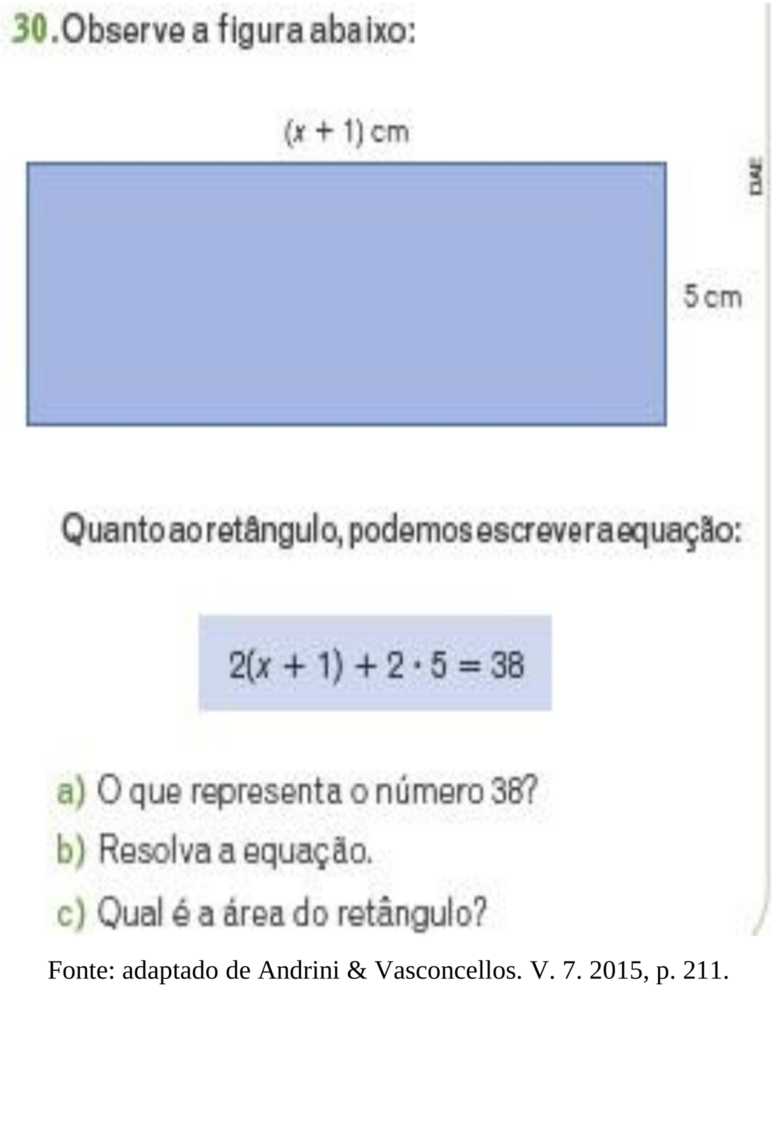
c) $\dfrac{2x-3}{4} - \dfrac{2-x}{3} = \dfrac{x-1}{3}$

Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 7. 2015, p. 220.

Durante a análise da situação acima, percebemos que a mesma aborda um tipo de atividade muito frequente no decorrer do volume, onde as técnicas e processos de resolução de equação de primeiro grau são fundamentais para se responder a questão. As equações apresentadas não surgem de nenhum contexto, mas são apresentadas de forma que os alunos só precisem operar a fim de encontrar o valor de *x* nos três itens. Portanto, caracterizamos tal situação como pertinente ao trabalho com a zona processual do perfil conceitual de equação de Ribeiro (2013).

É importante alertarmos novamente para o que Ribeiro (2015) apresenta em seu estudo, que algumas situações trabalham mais de uma zona conceitual e por isso o fato de uma determinada questão ter sido contabilizada pelo trabalho com determinada zona, isso não a exclui de ter sido contabilizada no trabalho com outra zona também, uma vez que não pretendemos categorizar cada questão como sendo de uma única zona, o que seria inadequado, mas pretendemos apontar em quantas situações tais zonas são evidenciadas. Em outras palavras, os conjuntos de situações pertinentes a cada zona não são, necessariamente, disjuntos, apresentando interseções (questões que trabalham mais de uma das zonas investigadas). Com base nisso, apresentamos a seguir uma das atividades que foram consideradas desencadeadoras de trabalhos com duas zonas distintas e que por esse motivo faz parte tanto do trabalho com a zona geométrica, como no trabalho com a zona processual.

Figura 18: Questão 30 da unidade 9



30. Observe a figura abaixo:

Quanto ao retângulo, podemos escrever a equação:

$$2(x + 1) + 2 \cdot 5 = 38$$

a) O que representa o número 38?

b) Resolva a equação.

c) Qual é a área do retângulo?

Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 7. 2015, p. 211.

Nesta atividade, percebemos o trabalho com a zona processual uma vez que é apresentada uma equação explícita e o item (b) apenas requer que se manipule mecanicamente para se solucionar a mesma, encontrando o valor de *x*, atividade que pode ser completamente desenvolvida sem que o aluno tenha qualquer compreensão geométrica da situação. Ao passo que nos debruçamos a analisar a figura apresentada e os itens (a) e (c), percebemos que a questão também dá enfoque ao trabalho dedutivo de origem em contexto geométrico, caracterizando um trabalho pertinente a zona geométrica do perfil conceitual de equação adotada para análise. Prossigamos, então, para a análise da zona aplicacional e suas possíveis implicações.

4.2.6 Zona Aplicacional

Neste volume percebemos um aumento em relação ao volume anterior, onde não havíamos encontrado situações que trabalhasse a zona aplicacional. Acreditamos que esse aumente se deve ao fato de que com uma exploração mais rigorosa das equações, surgem, neste volume, situações onde as equações já passam a ser interpretadas dentro de contextos pragmáticos a partir de sua aplicação para o problema e não concebida de forma intuitiva, como no caso da zona pragmática.

Das 301 atividades identificadas neste volume por trabalharem com a noção de equação, percebemos que 33 delas abordam contextos mais voltados para a zona aplicacional, o que representa quase 11% das mesmas. Apresentamos abaixo um exemplo de situação que contemplou essa zona, acompanhada de sua análise.

Figura 19: Questão 3 da unidade 7

3. Com base nas conclusões obtidas, responda quantos vértices e quantas arestas tem:

a) um prisma cujas bases são polígonos de 7 lados (heptágonos);

b) uma pirâmide cuja base é um polígono de 10 lados (decágono).

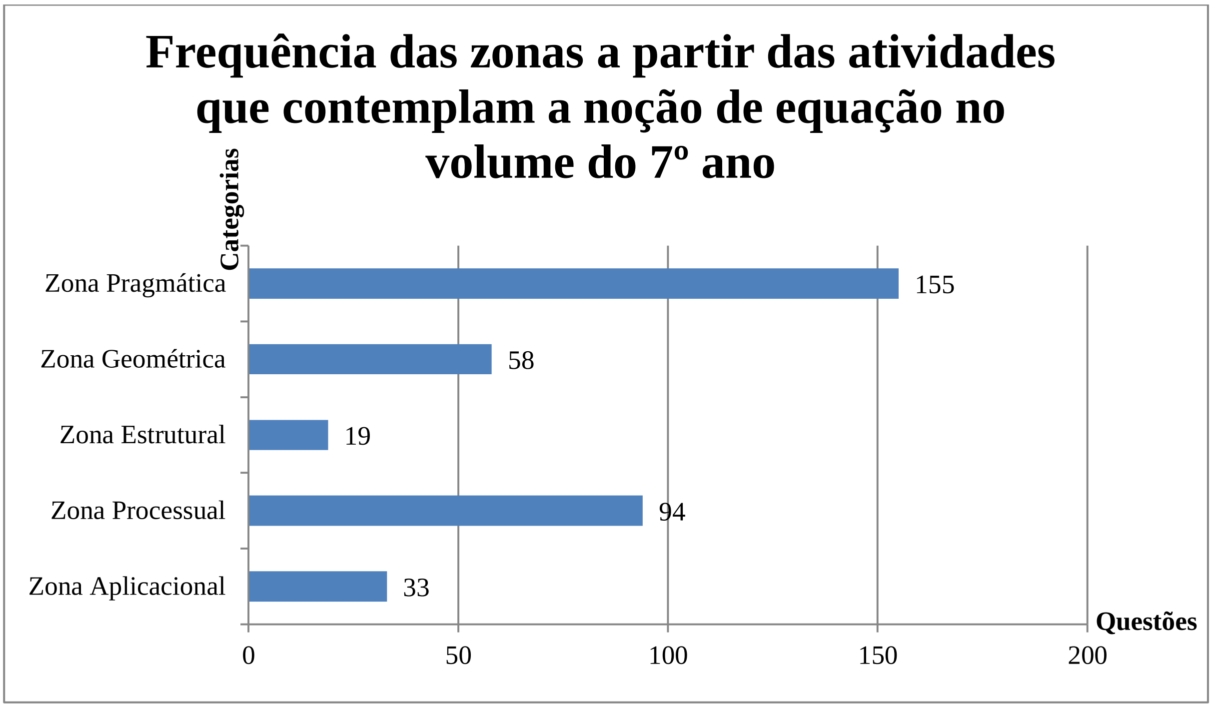
Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 7. 2015, p. 162.

A princípio percebemos que a situação não explora uma equação pronta para que se opere mecanicamente sobre ela ou ainda que aborde um contexto geométrico dedutivo, uma vez que não se pretende deduzir nada a partir dos poliedros referidos, mas sim aplicar relações que foram pré-estabelecidas durante a abordagem do conteúdo. Notamos que o trabalho é de ordem prática, objetiva solução aritmética e, como mencionamos, contempla a aplicação de equações pré-estabelecidas para se solucionar a situação. Para o item (a) espera-se relacionar a situação com a equação $L = \frac{V}{2} \rightarrow V = 2 * 7 \rightarrow V = 14$, onde L representa o números de lados da base do prisma e V representa a quantidade de vértices desse poliedro e também a equação $L = \frac{A}{3} \rightarrow A = 3 * 7 \rightarrow A = 21$, onde L representa o números de lados da base do prisma e A representa a quantidade de arestas do mesmo. Para o item (b), sendo análogas as definições para L, A e V, objetiva-se que o aluno aplique a equação $L = V - 1 \rightarrow V = 10 + 1 \rightarrow V = 11$, encontrando 11 com sendo a quantidade de vértices procurados na pirâmide referida e também a equação $L = \frac{A}{2} \rightarrow A = 2 * 10 \rightarrow A = 20$, encontrando a quantidade de arestas da mesma. Dessa forma, percebemos neste caso um trabalho que remete ao pensamento estabelecido por alguns dos professores pesquisados por Barbosa (2009) quando questionados quanto a algumas situações de ordem prática, onde os mesmo não relacionavam a equação de forma intuitiva, como se esperava de um ponto de vista pragmático, mas buscavam a aplicação de equações expressas como fórmulas para solucionar as situações. Percebemos, então, que essa situação aborda um trabalho característico da zona aplicacional do perfil conceitual de equação adotado.

4.2.7 Resultados do Volume do 7º Ano

Diante das discussões feitas anteriormente e dos resultados obtidos, apresentamos a seguir os resultados obtidos no decorrer de todo o volume do 7º ano quanto às cinco zonas investigadas, detalhando a frequência com que surgiram, a fim de podermos estabelecer considerações a cerca de como os trabalhos com equação se deram no decorrer desse volume com relação às diferentes abordagens da noção de equação. Apresentamos, a seguir, um gráfico com a frequência das zonas investigadas ao longo desse volume.

Gráfico 4: Frequência das zonas a partir das atividades que contemplam a noção de equação no volume do 7º ano



Fonte: O autor

Percebemos a partir da análise do gráfico que a distribuição das zonas conceituais no decorrer do volume se deu de forma similar ao que evidenciamos no caso do 6º ano no que diz respeito à presença marcante de situações pertinentes ao trabalho com a zona pragmática, que foi novamente a mais trabalhada e em segundo lugar outra vez tivemos a zona processual.

Destacamos ainda que nesse volume, não só se mantém a ordem das principais zonas, mas também se percebeu um aumento bastante significativo na forma como as equações foram contempladas no decorrer do volume, pois se no volume do 6º ano tivemos menos de 7% atividades contemplando equação, neste volume atingimos mais de 26% das situações abordadas.

Evidenciamos também que se trabalharam atividades estruturais, bem como aplicacionais, estas que não foram contempladas no volume do 6º ano. Entendemos, portanto, que o trabalho com equação passa a ser bem mais forte nesse ano e que surgem as necessidades de trabalho estrutural, onde as equações passam a ser vistas não só por seus processos de resolução ou por seu contexto, mas passam a ser percebidas em um contexto mais matemático, estrutural e generalista, onde se percebem relações, propriedades e generalizações de uma Álgebra mais encorpada no simbolismo, afastando-se da Álgebra mais retórica presenciada no volume do 6º ano.

4.3 Análise do Volume do 8º Ano

Dando sequência às nossas investigações, apresentamos a seguir como se deu a presença da noção de equação no volume do 8º ano e como essa noção foi abordada em relação às zonas do perfil conceitual de Ribeiro (2013) investigadas. Assim, abordamos algumas discussões que visam comparar os dados evidenciados neste volume com os volumes até então analisados.

4.3.1 Organização do Volume do 8º Ano

No volume do 8º ano, os conteúdos foram divididos em 15 unidades, que estão descritas abaixo:

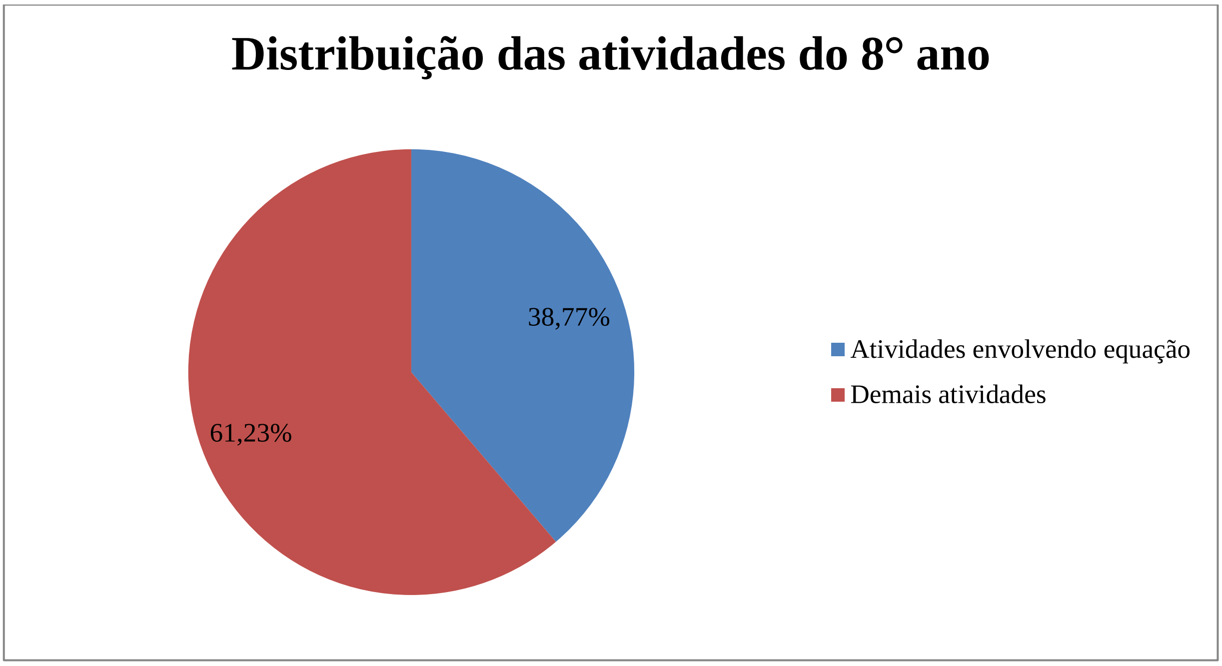
Quadro 9: Organização das unidades do volume do 8º ano

Unidade	**Tema**
01	Conjuntos numéricos.
02	Potência e notação científica.
03	Radiciação.
04	Cálculo algébrico.
05	Produtos notáveis.
06	Fatoração.
07	Frações algébricas.
08	Sistemas de equações.
09	Razões, proporções e regra de três.
10	Retas e ângulos.
11	Triângulos.
12	Triângulos: congruências e pontos notáveis.
13	Quadriláteros e outros polígonos.
14	Circunferência e círculo.
15	Possibilidades e estatística.

Fonte: O autor

Ao examinar previamente as unidades já se percebe que cinco unidades dedicam trabalho exclusivo para a Álgebra, isso sem contar com a grande frequência com que a Álgebra costuma ser abordada dentro de todos os outros conteúdos, inclusive de Geometria, como veio sendo notado na análise dos volumes anteriores. O gráfico a seguir mostra a distribuição das atividades desse volume:

Gráfico 5: Distribuição das atividades do 8º ano



Fonte: O autor

Desse modo, nossa análise já se deu com a expectativa de que a presença das equações nesse volume fosse bastante elevado, inclusive superando a significativa abordagem que foi dada no volume do 7º ano. Assim, nossa análise empenhou-se em investigar a noção de equação dentro de um total de 1233 atividades propostas no volume. Dessas, identificamos a presença de trabalhos com equação em 478, o que representa quase 39% das atividades do volume.

Dando sequência a análise, classificamos as referidas 478 atividades que contemplam a noção de equação quanto às zonas conceituais que estamos investigando e os resultados serão apresentados no decorrer das próximas seções.

4.3.2 Zona Pragmática

Na análise dos volumes anteriores, a presença de situações pragmáticas chamou a atenção, isso porque manteve-se isoladamente na liderança da abordagem feita pelo livro em relação as demais zonas. Neste volume percebemos uma quantidade ainda significativa de situações contemplando essa zona, porém ela registrou uma redução em relação ao quantitativo de situações pertinentes a equação. Identificamos que das 478 atividades que destacam a presença da noção de equação, tivemos 132 abordando a zona pragmática. Apesar de ser um número significativo de questões, representa que tal zona foi evidenciada na abordagem de quase 28% das situações, registrando uma queda percentual em relação aos volumes do 6º e 7º anos, que registraram, aproximadamente, 58% e 51%, respectivamente.

Essa queda pôde ser explicada por uma abordagem mais abstrata que foi dada a ideia de equação nesse volume, onde as unidades 4, 5, 6, 7 e 8 deram uma roupagem menos pragmática e mais processual no trabalho com cálculo algébrico, produtos notáveis, fatoração, frações algébricas e sistemas de equação, respectivamente. Além disso, muito foi desenvolvido no âmbito de situações geométricas. Apresentamos, a seguir, uma das situações apresentadas no decorrer do volume, acompanhada de sua análise:

Figura 20: Questão 31 da unidade 5

31. Em uma sala há três lâmpadas iguais, um televisor e um aparelho de ar condicionado. A TV consome o dobro dos quilowatts-hora (kWh) que uma das lâmpadas consome. O aparelho de ar condicionado consome 15 vezes o que consome uma lâmpada. Quando estão todos ligados ao mesmo tempo, o consumo total é de 1 200 kWh. Qual é o consumo do televisor?

CONECTANDO SABERES

Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 8. 2015, p. 110.

Nesta atividade propõe-se do educando que a partir de uma situação apresentada no enunciado, de características cotidianas, ele possa estabelecer uma equação que modele o problema em questão. Considerando x como sendo o consumo de uma lâmpada, a situação pode ser expressa e resolvida pela equação: $3x + 2x + 15x = 1200 \rightarrow 20x = 1200 \rightarrow x = 60,$ que nos dá o consumo de cada lâmpada em kWh e como o consumo do televisor é o dobro do consumo de uma lâmpada, então o consumo do televisor deve ser de $2 * 60\ kWh = 120$ kWh. Assim, a equação que surge no problema apresenta-se de forma intuitiva, decorrendo de uma abordagem prática, objetivando levar a solução do problema, caracterizando o problema como pertinente ao trabalho com a zona pragmática do perfil conceitual de equação adotado. Prosseguiremos agora a discussão dos resultados quanto à zona geométrica, onde faremos também relações com os resultados presenciados nas análises anteriores.

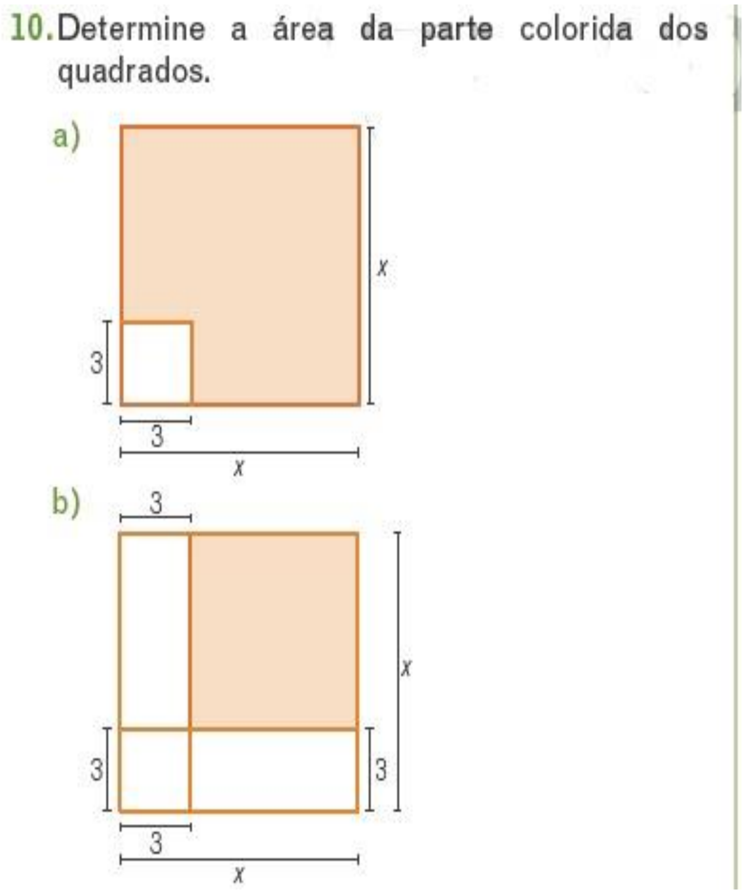
4.3.3 Zona Geométrica

Nas análises anteriores, percebemos que essa zona sempre apresentava-se nos trabalhos com equação de forma moderada, situando-se nos dois casos de forma intermediária, não estando entre as duas mais abrangidas, nem entre as duas menos abrangidas.

Durante a análise desse volume o que nos chama a atenção é a verdadeira explosão com que as situações pertinentes ao trabalho com essa zona são evidenciadas no decorrer do volume. Percebemos uma atividade moderada do trabalho com essa zona em três das unidades específicas de Álgebra, as unidades 4, 5, 6, já mencionadas por também enfatizarem a abordagem pragmática. Porém, das unidades 10 a 14, onde se abordaram conceitos geométricos como: retas, ângulos, triângulos, quadriláteros, circunferência, círculos, dentre outros; houve uma expansão da abordagem de equação no trabalho com situações originárias de contextos geométricos, onde as mesmas surgiam a partir de deduções diversas, em especial a cerca de ângulos e medidas de seguimentos.

Dessa forma, pudemos contabilizar que das 478 atividades destinadas ao trabalho com equação no decorrer do volume, tivemos 210 dedicando-se a abordagem da zona geométrica do perfil conceitual de equação de Ribeiro (2015), o que representa que tal zona foi trabalhada em quase 44% das atividades de equação ao longo do volume do 8º ano. Abordamos, a seguir, um exemplo contemplado ao longo do volume que contempla a presença da noção de equação sob a ótica da zona geométrica.

Figura 21: Questão 10 da unidade 5



Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 8. 2015, p. 107.

Diante da situação acima apresentada, percebemos um trabalho originário de um contexto puramente geométrico, onde temos medidas desconhecidas e objetiva-se o cálculo de áreas que devem ser expressas algebricamente. No item (a) a partir de deduções geométricas pode-se perceber que a área A da parte pintada pode ser compreendida como: $x^2 = 9 + A \rightarrow A = x^2 - 9$. Já no item (b) a área B da parte colorida pode ser deduzida como: $x^2 = 9 + 3(x-3) + 3(x-3) + B \rightarrow x^2 = 9 + 6x - 18 + B \rightarrow B = x^2 - 6x + 9.$ Esse trabalho com equação caracteriza uma abordagem dedutiva em contextos geométricos, estabelecendo relação com a zona geométrica.

A seguir, daremos continuidade à análise do volume do 8º ano, apresentando a abordagem do mesmo quanto à zona estrutural.

4.3.4 Zona Estrutural

A partir da análise desenvolvida no volume do 8º ano, pudemos perceber que a frequência com que a zona estrutural de equação é trabalhada aumenta quantitativamente em relação aos volumes anteriores. Seu principal destaque se deu na unidade 4, onde é abordado o conteúdo de cálculo algébrico. Percebemos que nessa unidade além de termos o mais significativo trabalho com o aspecto estrutural e generalista de todo o volume, ainda tivemos uma presença importante das demais zonas investigadas.

Nesse volume percebemos que 27 atividades dedicaram-se ao trabalho com essa zona. Esse quantitativo corresponde a quase 6% das 478 atividades que trabalham equação no volume. Apresentamos, a seguir, uma das atividades que contemplam o trabalho com a zona estrutural e sua devida análise.

Figura 22: Questão 18 da unidade 14

18. Mara desenhou **3** circunferências. Na primeira marcou 2 pontos, na segunda marcou 3 pontos e na terceira marcou 4 pontos. Em cada circunferência uniu todos os pontos por meio de cordas.

a) Desenhe mais três circunferências e faça o mesmo para o caso de 5, 6 e 7 pontos.

b) Conte o número de cordas traçadas em cada caso, a seguir copie e complete o quadro.

Número de pontos	2	3	4	5	6	7
Número de cordas	1	3	6			

c) Reúna-se com os colegas e descubra a regra de formação dessa sequência.

Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 8. 2015, p. 253.

Observando a situação acima, percebe-se que nenhuma equação é aplicada de partida. No trabalho com os itens (a) e (b) pretende-se que os educandos desenhem, contem e preencham o quadro com os resultados obtidos, sem se trabalhar conceitos algébricos. Porém, no item (c) é solicitado que se utilizem os resultados obtidos anteriormente para se deduzir um comportamento generalizador, ou seja, uma equação matemática que relacione os dados numéricos da primeira e da segunda linha do quadro. A equação pretendida é $C = \frac{(P-1)*P}{2}$, onde C e P são os números de cordas e de pontos, respectivamente. A respeito desse tipo de atividade, Ribeiro (2015, p. 89) pontua que “a capacidade de generalização e a possibilidade de usar linguagem algébrica para representar uma determinada situação que se apresente por meio de figuras têm sido bastante explorada por muitos autores.”. Percebemos, nesse momento, um trabalho generalizador que nos remete a zona estrutural do perfil conceitual de equação de Ribeiro (2013).

4.3.5 Zona Processual

No que diz respeito à zona processual, percebemos nas análises anteriores uma significativa frequência de questões que a contemplem. Neste volume, identificamos 107 atividades trabalhando aspectos da zona processual, o que corresponde a pouco mais de 22% das atividades que trabalham equação. Em suma, os principais trabalhos com essa zona se deram no decorrer das unidades 4 a 8, onde se abordaram os conteúdos de cálculo algébrico, produtos notáveis, fatoração, frações algébricas e sistemas de equações. A atividade a seguir apresenta um exemplo da abordagem processual que se deu no volume.

Figura 23: Questão 43 da unidade 7

43. Resolva as equações fracionárias.

a) $2 + \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$

b) $\frac{3}{x} - \frac{4}{5x} = \frac{1}{10}$

c) $\frac{3}{2} - \frac{x+2}{3x} = -\frac{11}{6x}$

Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 8. 2015, p. 139.

Como se percebe, tal atividade contempla apenas equações dadas explicitamente, onde se objetiva operar mecanicamente sobre as mesmas a fim de se conseguir chegar ao valor da incógnita *x*. Esse tipo de atividade está diretamente atrelado ao trabalho da zona processual, visto que não se pretende explorar nada além de técnicas de resolução.

4.3.6 Zona Aplicacional

Nas abordagens anteriores, vimos que no volume do 6º ano não encontramos situações práticas que explorassem o trabalho da zona aplicacional, já no do 7º ano, tivemos uma tímida presença dessa zona. Neste volume, percebemos uma redução das situações pragmáticas, discutida anteriormente, porém, tivemos um aumento quantitativo de situações de ordem prática atreladas a equações concebidas a partir de suas aplicações, favorecendo o desenvolvimento do trabalho com a zona aplicacional. Mesmo assim, em termo percentual essa abordagem ainda se manteve de forma tímida.

Das 478 atividades trabalhando equação neste volume, 44 se dedicaram a abordagem aplicacional. Esses pouco mais de 9% caracterizavam-se como situações cotidianas onde a resolução exigia a aplicação de uma equação, esta que não se estabelecia apenas pelo enunciado de forma intuitiva, diferenciando tais situações das pragmáticas. A seguir apresentamos um exemplo de tal situação percebida nesse volume, acompanhada de sua análise:

Figura 24: Questão 18 da unidade 13

18. A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é 900°. Qual é o polígono?

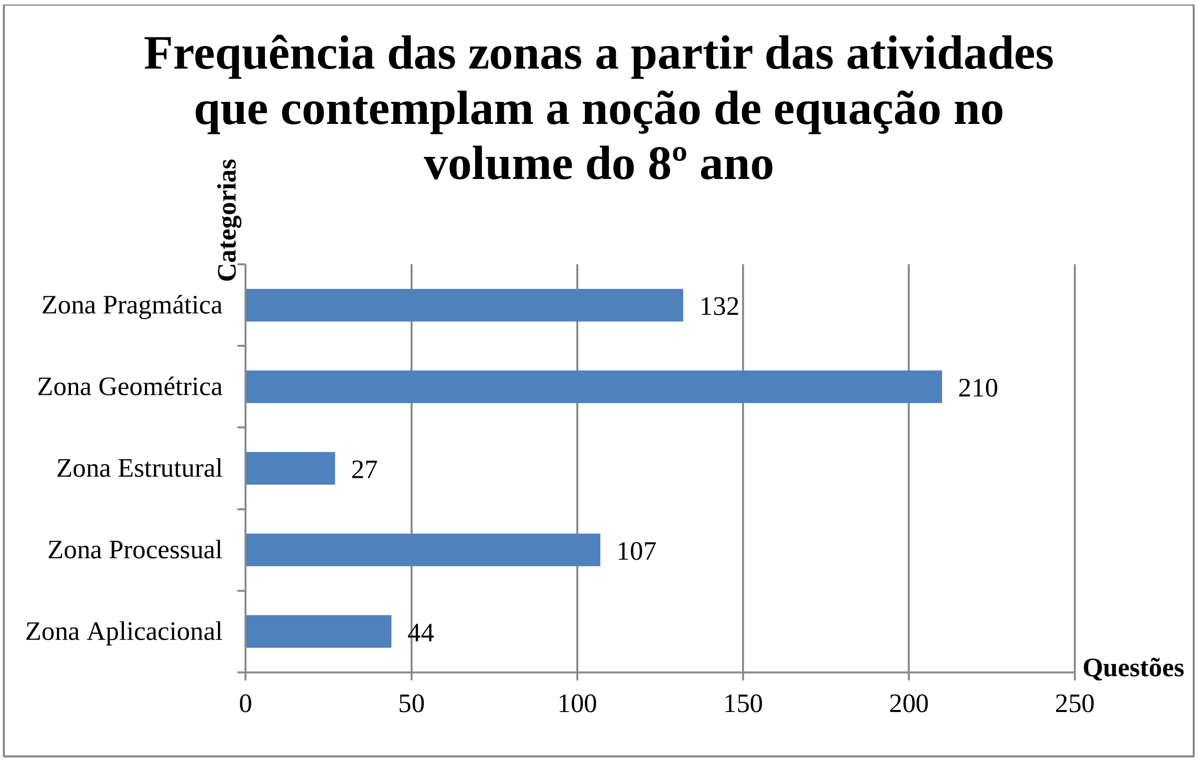
Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 8. 2015, p. 235.

Embora possa apresentar conceitos geométricos, tal situação não pretende que se estabeleçam relações a partir de deduções geométricas, isso fica mais evidente ainda quando analisamos a abordagem dada pelo livro ao conteúdo antes de tal atividade. Entendemos, então, que nesta situação o aluno, a partir da problemática enunciada, recorra à aplicação de uma equação anteriormente formalizada no decorrer do conteúdo, esta que estabelece uma relação entre o número de lados de um polígono e a soma de seus ângulos internos. Tal equação é $S = (n-2) * 180$, onde S e n são, respectivamente, a soma dos ângulos internos e o número de lados do polígono. Aplicando-a, o aluno deve chegar que $900 = (n-2) * 180 \rightarrow n = 7$, ou seja, trata-se de um polígono de 7 lados, um heptágono. Desse modo, evidenciamos que a equação surge como uma aplicação ao problema e não deduzida do problema, caracterizando o trabalho com a zona aplicacional.

4.3.7 Resultados do Volume do 8º Ano

A partir dos resultados observados no decorrer das seções anteriores a cerca das cinco zonas investigadas, pudemos perceber algumas modificações em relação aos resultados obtidos nos volumes anteriores. Para melhor ilustrarmos um panorama mais geral desse volume, trazemos o gráfico da frequência com que as zonas investigadas foram contempladas nesse volume.

Gráfico 6: Frequência das zonas a partir das atividades que contemplam a noção de equação no volume do 8º ano



Fonte: O autor

Analisando os dados percebemos que as zonas pragmática e processual continuam fortes no trabalho com equação, porém a zona geométrica foi a mais contemplada nesse volume. Identificamos que tal fato se deu pela presença de várias unidades tratando sobre conceitos geométricos, estes que foram muito trabalhados sob um olhar algébrico, além de que muitas situações geométricas também foram contempladas nas unidades que tratavam especificadamente de tópicos da Álgebra.

Embora ainda significativa, a zona pragmática parece não ser mais tanto o foco dos trabalhos com equação como era nos volumes anteriores, perdendo para as abordagens geométricas. Ainda se tratando de contextos práticos, parece-nos que as situações aplicacionais vêm avançando nos últimos dois volumes em substituição as situações pragmáticas, uma vez que diminuiu a abordagem de situações onde as equações são obtidas intuitivamente e surgem as que buscam a equação como uma aplicação, uma vez que os alunos nesse momento já possuem mais conhecimentos algébricos.

As situações estruturais, por exemplo, em relação ao volume do 7º ano crescem quantitativamente de forma bastante sutil, apenas acompanhando o crescimento em relação à abordagem de equações que se deu no volume do 8º ano. Prossigamos, então, para os resultados obtidos no volume do 9º ano para finalizarmos as análises e explorarmos os resultados da coleção como um todo.

4.4 Análise do Volume do 9º Ano

Diante dos resultados já apresentamos, explanaremos, nas seções que se seguem, como a noção de equação é concebida no volume do 9º ano e como se distribuem com relação às zonas investigadas. Além disso, faremos comparativos com alguns dos resultados encontrados anteriormente, a fim de encontrar pontos importantes para a análise geral.

4.4.1 Organização do Volume do 9º Ano

No volume referente ao 9º ano, identificamos 894 atividades como um todo, divididas nas 10 unidades que apresentaremos a seguir:

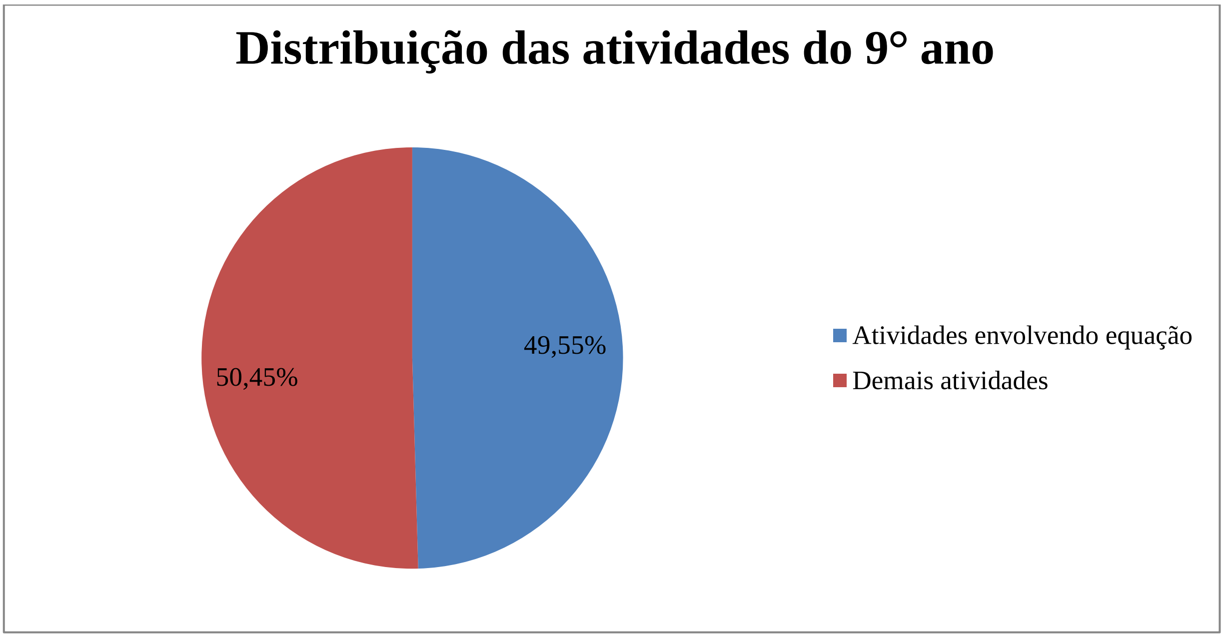
Quadro 10: Organização das unidades do volume do 9º ano

Unidade	Tema
01	Potenciação e radiciação.
02	Equações do 2° grau.
03	Sistema cartesiano.
04	Funções.
05	Noções de probabilidade.
06	Teorema de Tales e semelhança de triângulos.
07	Relações métricas no triângulo retângulo.
08	Trigonometria no triângulo retângulo.
09	Círculo e cilindro.
10	Porcentagem e juros.

Fonte: O autor

Com exceção das unidades 1, 3, 5 e 10, referidas acima, o trabalho com equação foi a chave da abordagem matemática desse volume. Tivemos, assim, dentre as 894 atividades mencionadas, um total de 443 atividades pertinentes ao trabalho com a noção de equação, com ênfase para a unidade 2 que se dedicou exclusivamente a abordagem das equações de 2º grau. Esse valor corresponde a quase 50% das atividades do volume. A seguir, apresentamos o gráfico da distribuição das questões nesse volume:

Gráfico 7: Distribuição das atividades do 9º ano



Fonte: O autor

De partida, ao analisarmos os conteúdos trabalhados a cada unidade, já foi possível especular a grande abordagem que se daria no trabalho com equação e, ainda, foi possível também suspeitar de uma grande ênfase para atividades oriundas de contextos geométricos, isso tendo-se em vista as unidades 6, 7, 8 e 9 que tratam de tópicos altamente relacionados com a Geometria e a Álgebra.

4.4.2 Zona Pragmática

Como havíamos notado no volume anterior, as situações pragmáticas sofreram uma queda e associamos tal fato a possibilidade de tais situações não serem mais o centro dos trabalhos com as equações. Ao analisarmos o volume do 9º ano, percebemos que realmente esse fenômeno continuou a seguir, uma vez que as atividades pragmáticas ficaram em baixa, enquanto que parece razoável dizer que as situações aplicacionais, que também têm origem prática, parecem ocupar esse lugar.

Das 443 atividades mencionadas, 80 foram consideradas referentes ao trabalho com a zona pragmática, por apresentarem contextos cotidianos ligados à resolução por meio de equações abstraídas intuitivamente do problema. Assim, esses cerca de 18% das atividades, representam uma significativa queda, que será discutida mais a diante. A seguir, contemplamos a apresentação e análise de mais uma situação pragmática, só que desta vez referente ao volume do 9º ano.

Figura 25: Questão 63 da unidade 2

83. O senhor Alípio dispõe de 100 m de tela para construir uma cerca em um terreno retangular com 600 m^2 de área. Quais são as dimensões dessa cerca?

Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 9. 2015, p. 77.

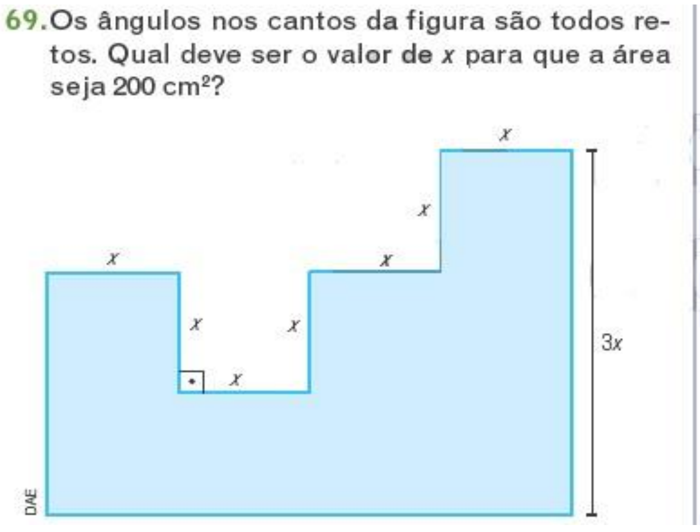
Nesta atividade, pretende-se que o educando intuitivamente perceba duas equações que modelam o problema e que devem ser satisfeitas simultaneamente, gerando um sistema de duas equações lineares. Se considerarmos que as dimensões do terreno sejam a e b, teremos a primeira equação como $a * b = 600$, pois é a área do terreno retangular. Já a segunda equação pode ser expressa como $2a + 2b = 100$, pois o comprimento do contorno do terreno equivale aos 100 m de tela. Daí, o aluno deve encontrar o par (a, b) = (20, 30) ou (a, b) = (30, 20) como solução do problema e entender que 20 m e 30 m são as dimensões procuradas. Essa atividade, portanto, contribui para o desenvolvimento da zona pragmática do perfil conceitual adotado.

4.4.3 Zona Geométrica

Nesse volume percebemos uma abordagem muito ampla das equações dentro de contextos geométricos, mais do que em abordagens anteriores. Desde as atividades do volume anterior, tais situações ganharam destaque em nossa análise, uma vez que nesses últimos dois volumes o trabalho com conceitos geométricos é bastante amplo e domina significativa parte dos livros. Ainda, destacamos que a forma algébrica como esses conceitos são tratados, provocando inúmeras inter-relações com contextos algébricos, dão condições para um trabalho bastante significativo com a zona geométrica.

No decorrer deste volume, as principais atividades com tal zona foram situadas nas unidades 6, 7, 8 e 9, que abordavam tópicos como: Teorema de Tales e semelhança de triângulos, relações métricas e trigonometria no triângulo retângulo, círculos e cilindros. Assim, encontramos 184 atividades pertinentes a essa zona, o que corresponde a quase 42% das atividades de equação. Abaixo, analisaremos uma situação que contempla a ideia de equação a partir de uma ótica geométrica.

Figura 26: Questão 69 da unidade 2



Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 9. 2015, p. 76.

Nessa situação espera-se que de uma forma dedutiva, o aluno possa perceber que há 8 quadrados de área x^2formando essa figura colorida e posteriormente igualar ao valor da área identificado no enunciado. Assim, $8x^2 = 200 \rightarrow\ x = \pm\sqrt{\frac{200}{8}} \rightarrow x = \pm\, 5$, encontrando como solução a raiz positiva da equação, ou seja, x = 5cm. Embora possa haver outros raciocínios, essa questão espera do aluno uma abordagem dedutiva que leva à abstração de uma equação que solucione o problema para a incógnita x. Portanto, tal atividade é pertinente a zona geométrica.

4.4.4 Zona Estrutural

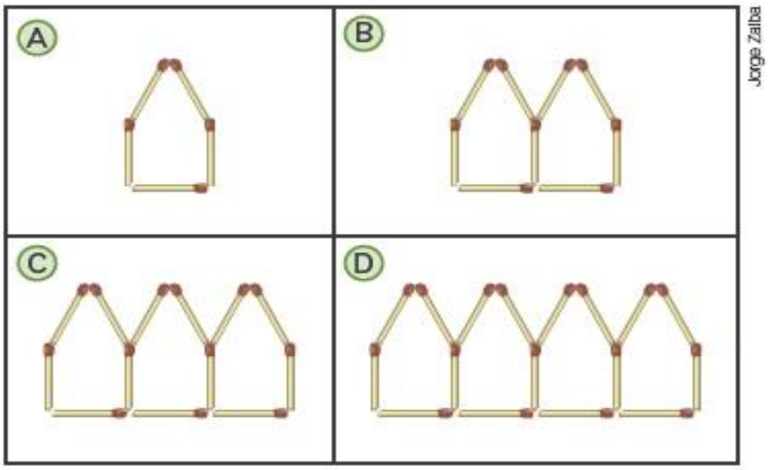
Como temos abordado até então, a zona estrutural atenta para um trabalho mais generalista e com foco nas propriedades das equações, não objetivando resoluções particulares de equações ou de problemas. Percebemos, no decorrer das análises anteriores, que essa zona sempre é evidenciada de forma tímida, apresentando nos trabalhos de um percentual de atividades. Neste volume identificamos a abordagem dessa zona em 47 das 443 atividades, o que representa um pouco menos de 11% das atividades dedicadas à equação.

Neste momento, notamos que o volume do 9º ano foi o que mais abordou situações pertinentes a esse trabalho mais estrutural, dando a entender que essas atividades sofrem a tendência de crescer ao passo que o trabalho com equação vai ficando mais rotineiro.

Os principais trabalhos algébricos na perspectiva estrutural das equações foram percebidos principalmente nas unidades 2 e 4, onde foram contemplados os assuntos de equação do 2º grau e função. Além disso, essas duas unidades dedicaram-se a um trabalho bastante significativo com as outras zonas investigadas, uma vez que contemplam conteúdos da grande área de Álgebra. Com relação a esse tipo de trabalho, apresentamos a seguir uma das atividades que contemplou tal aspecto e, em seguida, sua análise.

Figura 27: Questão 50 da unidade 4

50. Roberto arrumou palitos de fósforo como mostra a figura:



a) Quantos palitos Roberto usou para formar 4 “casas”?

b) Quantos palitos Roberto usaria para formar 10 “casas”?

c) Escreva a equação que expressa o total de palitos (p) em função do número de “casas” (c).

Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 9. 2015, p. 128.

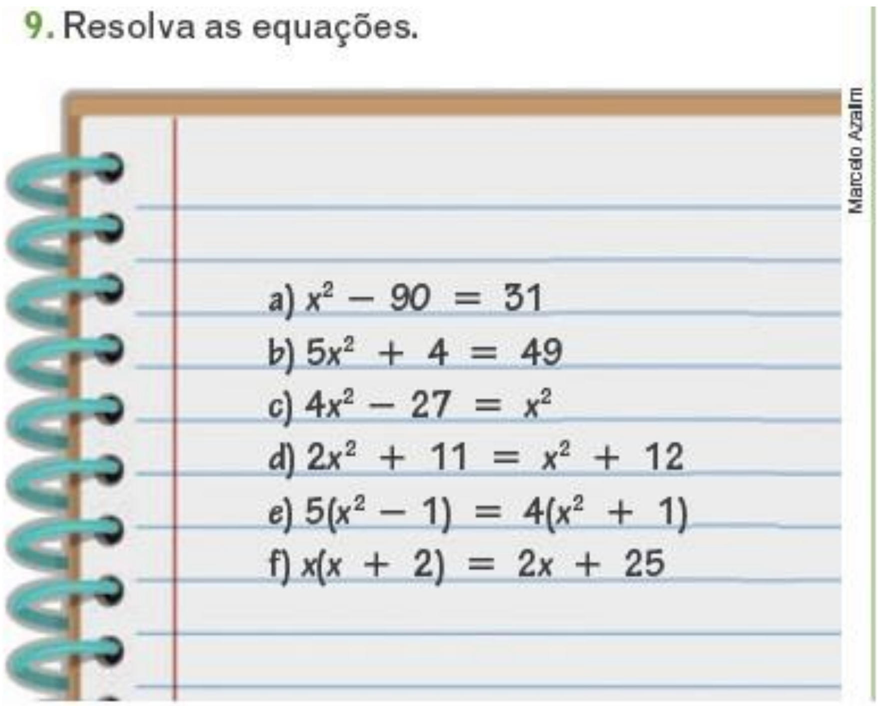
Durante a análise desta questão percebemos que os itens (a) e (b) ainda não contemplam necessariamente noções algébricas, porém ao analisarmos o item (c) notamos que o trabalho anterior foi proposto de forma a conduzir o aluno a encher uma particularidade que envolve essas sequências de figuras, identificando uma espécie de “lei de formação” e expressando-a na forma de equação com *p* em função de *c*. Esse tipo de atividade contempla a ideia de generalização, além de que é bastante proveitosa no trabalho com funções. Portanto, concluímos que as características trabalhadas nessa atividade dizem respeito a abordagem da zona estrutural do perfil conceitual de equação de Ribeiro (2013).

4.4.5 Zona Processual

Como víamos observando até então, a zona processual se faz presente em todos os volumes de forma significativa, representando boa parte dos trabalhos que se referem a noção de equação. Neste volume, as atividades processuais foram também muito trabalhadas, sendo registradas 120 ao longo do livro. Esse quantitativo representa aproximadamente 27% do trabalho que se fez com equação ao longo dessas 10 unidades.

Apesar de surgir em várias unidades, a trabalho processual, nesse volume se evidenciou com maior frequência de forma similar à zona estrutural, ou seja, nas unidades 2 e 4, permeando pelos tópicos de equação do 2º grau e funções. Em geral, tais situações apresentavam equações explicitamente e exigiam apenas que fossem manipuladas para obter o valor da incógnita, de forma similar ao que percebemos nas análises anteriores. Apresentamos, então, mais uma atividade contemplando a noção de equação pela ótica processual e a análise que nos levou a classificá-la como pertinente a tal zona.

Figura 28: Questão 9 da unidade 2



Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 9. 2015, p. 47

Ao analisarmos tal situação, percebemos que a mesma apenas exige dos educando a manipulação de técnicas e procedimentos de resolução de equação, isso porque as equações são apresentadas de forma explícita e apenas de objetiva que se encontre o valor da incógnita. Essas características foram suficientes para que tal atividade fosse categorizada como pertinente ao trabalho com a zona processual de equação.

4.4.6 Zona Aplicacional

Como víamos tratando nas análises anteriores, essa zona estava apresentando leves crescimentos que nos conduziram a supor que tais atividades estivessem aumentando ao passo que as pragmáticas diminuíam. Na análise desse volume, pudemos confirmar essa hipótese, anteriormente lançada, uma vez que novamente as atividades pragmáticas registraram baixa, ou seja, os trabalhos práticos mais intuitivos foram menos explorados; já as atividades práticas aplicacionais tomaram boa parte das atividades com equação no volume.

Essa zona se fez presente em atividades por várias das unidades do livro, inclusive em algumas onde as demais zonas praticamente não foram observadas, como na unidade 10, por exemplo. No geral, essas atividades emergiam de situações onde o raciocínio intuitivo ou dedutivo não davam conta de solucionar a situação, mas apresentava a necessidade de uma relação pré-estabelecida e que não se abstraia do problema em si. Assim, as equações passaram a surgir de forma a ser aplicadas nas situações, propiciando a resolução das mesmas. Para melhor ilustrar, apresentamos logo abaixo um exemplo de situação dessa zona presenciada no volume em questão.

Figura 29: Questão 18 da unidade 10

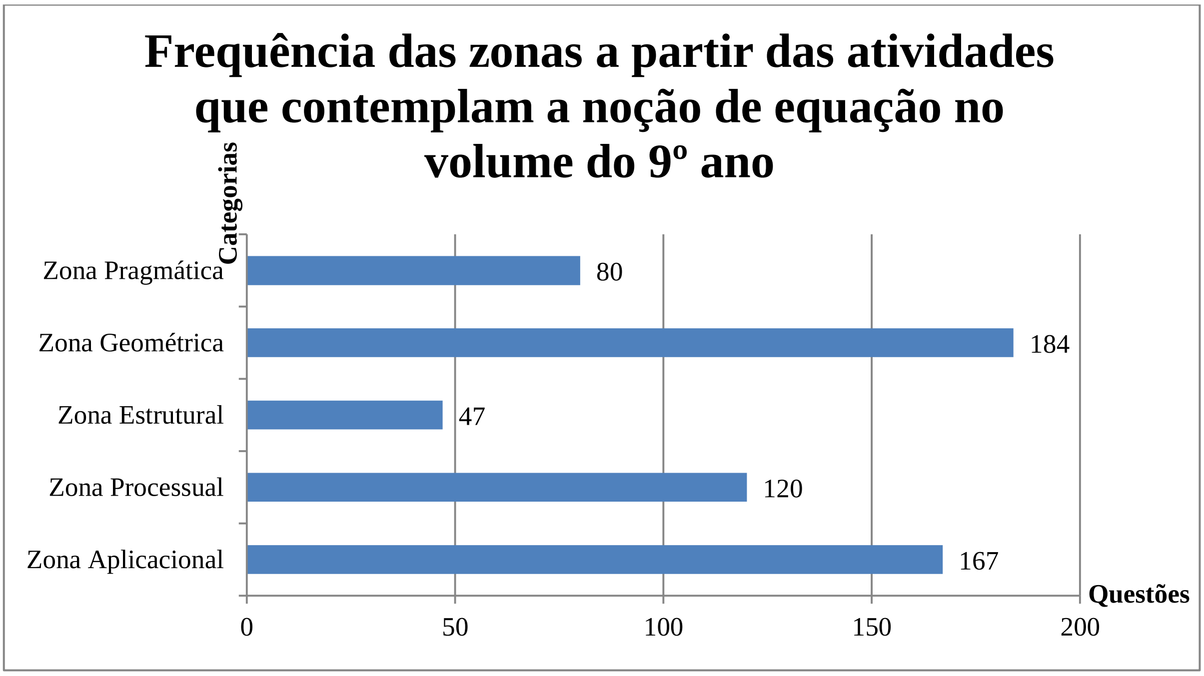
Fonte: adaptado de Andrini & Vasconcellos. V. 9. 2015, p. 256.

Tal situação apresenta um discurso típico dos trabalhos com matemática financeira. Ao analisarmos tal situação juntamente com a abordagem do capítulo e a resolução apresentada na seção do professor, percebemos que se objetiva nessa questão que o aluno estabeleça o juros como sendo $12 * 1500 - 15000 = 3000$. Assim, o mesmo deve aplicar uma equação muito famosa que relaciona juros (j) em função do capital (C), da taxa de juros (i) e do tempo (t). Neste caso, a solução do problema segue como $j = C * i * t \rightarrow 3000 = 15000 * i * 12 \rightarrow i = \frac{3000}{180000} \rightarrow i = 0{,}016666 \ldots$, encontrando-se a taxa de juros como sendo de aproximadamente 1,67% ao mês. Nesse caso, como a situação prática estabelece a necessidade de uma equação como aplicação para solucionar o problema, entendemos que tal atividade remete a noção de equação sob a ótica da zona aplicacional.

4.4.7 Resultados do Volume do 9º Ano

Apresentamos, nessa seção, uma breve discussão a cerca do que foi encontrado na análise do volume, comparando a frequência com que as cinco zonas investigadas se fizeram presentes no decorrer do volume. Ao observar o gráfico abaixo, identificamos a forte presença do trabalho algébrico nos conceitos de Geometria, além disso, as atividades práticas aparecem bem mais em contextos aplicacionais do que em contextos pragmáticos, diferenciando-se da abordagem introdutória da coleção.

Gráfico 8: Frequência das zonas a partir das atividades que contemplam a noção de equação no volume do 9º ano



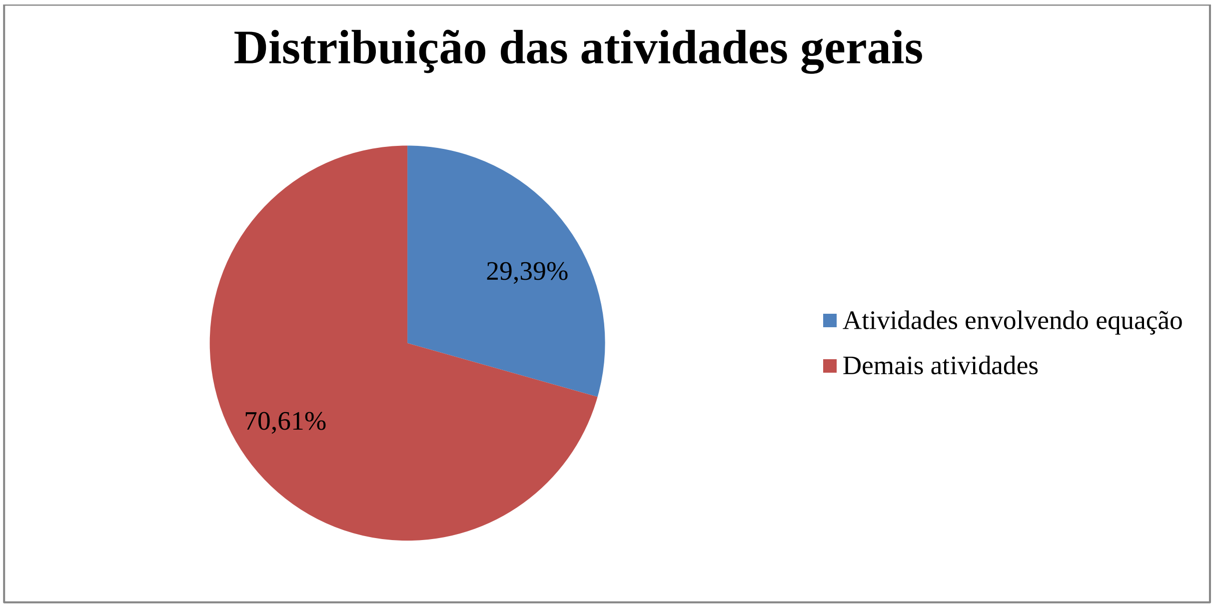
Fonte: O autor

A zona estrutural permanece tímida e isso deve ser efeito do fato de que o estudo das estruturas não seja a chave do trabalho com equações nesses quatro anos do Ensino Fundamental. Ainda, as atividades processuais permanecem sendo bem abordadas, apontando que o exercício de técnicas e procedimentos de resolução são parte bem trabalhadas ao longo do volume. A seguir apresentamos de forma mais clara como se deram as abordagens dessas cinco categorias ao longo dos volumes e discutiremos sobre as possíveis implicações desses resultados.

4.5 Análise Geral

Ao fazermos uso dos dados coletados até então e das discussões até aqui estabelecidas, pretendemos nesse momento, apreciar os resultados obtidos na coleção a partir de um panorama mais geral, identificando o que muda e o que permanece ao passo que passamos de um ano escolar para outro. A priori, apresentamos a seguir o gráfico da distribuição das atividades na coleção como um todo:

Gráfico 9: Distribuição das atividades gerais



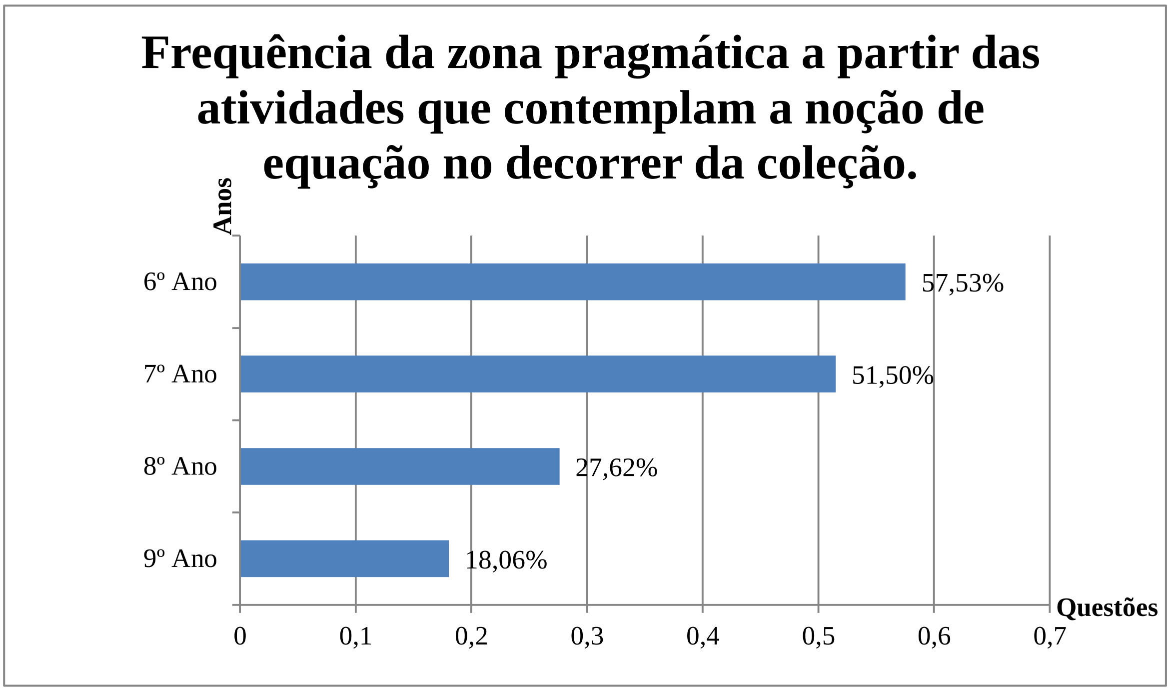
Fonte: O autor

Ao todo, das 4407 atividades do volume, identificamos que 1295 delas abordaram a noção de equação, ou seja, pouco mais de 29% das mesmas. Além disso, como pudemos acompanhar ao longo das análises de cada volume, essa frequência de atividades que dizem respeito a noção de equação foram surgindo de forma crescente volume a volume e também apresentaram diversas alterações no que diz respeito a frequência com que cada uma das zonas eram evidenciadas no decorrer dos volumes, havendo crescimento de algumas e decrescimento de outras.

4.5.1 Zona Pragmática

Buscando unificar os resultados até então obtidos a cerca das atividades pertinentes a essa zona, identificamos, de partida, como a mesma foi identificada no decorrer dos volumes analisados. Esses resultados estão dispostos no gráfico a seguir:

Gráfico 10: Frequência da zona pragmática a partir das atividades que contemplam a noção de equação no decorrer da coleção.



Fonte: O autor

Diante dos resultados apresentados no gráfico acima, percebemos que, embora o 6º ano tenha apresentado poucas situações de equação, quase 58% dessas dizem respeito à zona pragmática, uma vez que contemplam situações cotidianas de onde as equações podem ser compreendidas de forma intuitiva no próprio problema e, em muitos casos, apresentam-se de formas bastante triviais, possibilitando aos educandos resolver por manipulações aritméticas, sem uso de simbologia algébrica.

Esses tipos de atividades assemelham-se como a forma com que as equações eram presenciadas na abordagem dos babilônios, como visto no inicio desse trabalho. Esses povos abordavam equações extraídas do cotidiano e resolviam por manipulações aritméticas como a regra da falsa posição e o famoso método das tentativas. Entendemos, portanto, que essas atividades são bastante proveitosas no desenvolvimento de raciocínios e na apresentação de uma pré-Álgebra, de caráter retórico e ausente de simbolismos.

Ao passo que nossa análise continuou, constatamos que no volume do 7º ano as equações surgem ainda com numerosa frequência, apresentando-se em 51,5% das atividades pertinentes a equação. Esse resultado dá mais ênfase ao que concluímos acima, que essas situações são bastante proveitosas na apresentação inicial da Álgebra, pois nesse ano as atividades algébricas ainda são introdutórias e o conteúdo de equação é abordado apenas após a segunda metade do volume.

Nos volumes do 8º e 9º anos percebemos que esse tipo de atividade surge com menos influência e de forma decrescente. Assim, os indícios desse trabalho pragmático caem para menos de 28% no 8º ano e para cerca de 18% no 9º ano. Esses resultados apontam para uma redução da frequência com que essa zona surge quando a Álgebra toma caráter mais formal, ou seja, logo após o 7º ano.

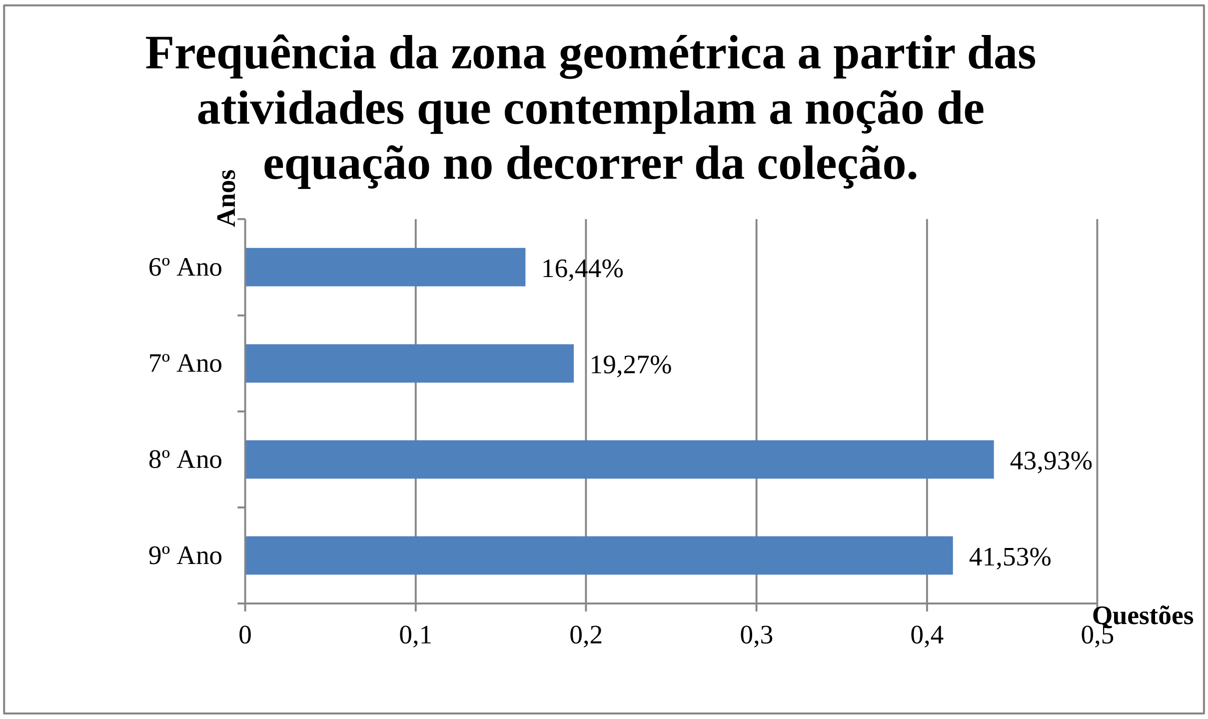
Em geral, percebemos que essas atividades mesmo diminuindo se fazem presentes em todos os anos, até porque são apontadas pelos PCN’s como importantes na relação entre a Matemática e o cotidiano e na introdução de elementos pré-algébricos. (BRASIL, 1997).

Assim, na sequência das nossas investigações passamos a verificação do que ocorreu com a zona geométrica no decorrer dos volumes analisados.

4.5.2 Zona Geométrica

As atividades que dizem respeito à zona geométrica, caracterizam-se por abordar situações dentro de um contexto geométrico, em que a equação surge dentro do problema a partir de deduções. Nessa perspectiva percebemos uma similaridade com a forma como os gregos tratavam as equações, a partir de contextos geométricos. Apresentamos, a seguir, os resultados destacados nos volumes, onde identificaremos o que mudou ao passar dos anos no que diz respeito a essa zona.

Gráfico 11: Frequência da zona geométrica a partir das atividades que contemplam a noção de equação no decorrer da coleção.



Fonte: O autor

As atividades que se dedicaram ao trabalho com essa zona normalmente trabalhavam a presença das equações a partir de deduções em medidas de seguimentos, áreas, ângulos e volumes. Nos dois anos iniciais da coleção, percebemos uma frequência baixa de atividades pertinentes ao trabalho com essa zona. Nesses anos o trabalho com equações estava mais associado a contextos práticos e, assim, os tópicos geométricos eram ainda poucos.

Nos volumes seguintes, percebe-se na abordagem do livro que muitas unidades estavam trabalhando com conceitos geométricos. Além disso, esses conceitos geométricos eram bastante explorados a partir de ideias algébricas que direcionavam as deduções para o surgimento de equações.

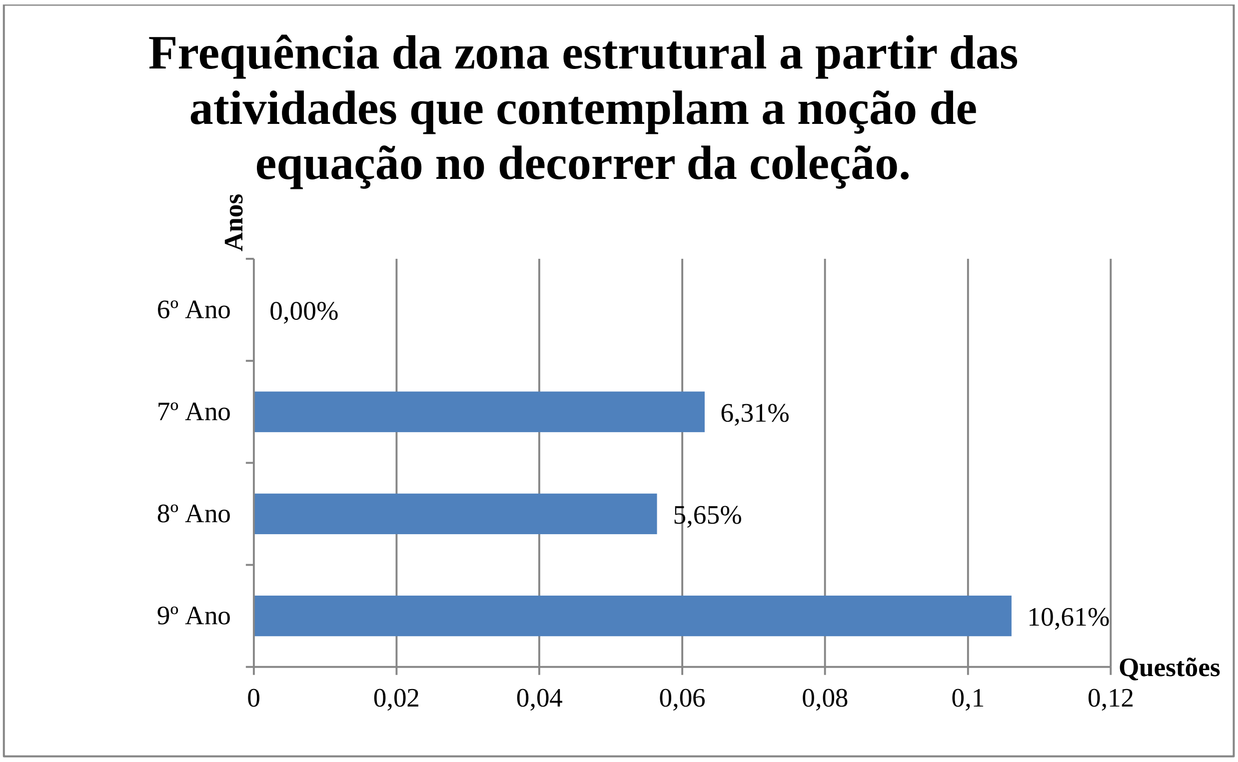
Assim, percebe-se que essa zona é bastante trabalhada na coleção, destacando-se nos dois anos finais, onde o conteúdo de equação já está melhor definido e as abstrações algébricas em entes geométricos parecem estar ao alcance dos estudantes. Apresentamos a seguir, os resultados observados sobre a zona estrutural.

4.5.3 Zona Estrutural

Essa zona caracteriza-se pelo estudo mais estrutural das equações, não estando diretamente atrelado a problemas de ordem geométrica ou cotidiana, mas podendo perpassar por esses e por outros contextos, bem como por situações contextualizadas apenas na própria Matemática.

Percebemos que atividades que atentam para esses trabalhos foram presenciadas ao longo a coleção, mas não necessariamente na abordagem de todos os volumes. Além disso, o crescente aumento desse tipo de atividade ocorre ao passo que o conteúdo é aprofundado. Esses resultados são apresentados no gráfico a seguir:

Gráfico 12: Frequência da zona estrutural a partir das atividades que contemplam a noção de equação no decorrer da coleção.



Fonte: O autor

Na análise do gráfico acima, percebemos que a princípio, no 6º ano, as atividades de equação não se caracterizaram pelo aspecto estrutural. Nos volumes seguintes, 7º e 8º anos, nota-se que essa característica já está presente nos trabalhos com equação, mas ainda representam um percentual significativamente pequeno de atividades.

Como os aspectos estruturais necessitam de uma abstração mais encorpada na simbologia algébrica, entendemos que pouco se trabalhou nesse aspecto nesses três volumes iniciais. No caso do volume do 9º ano, percebe-se que há um significativo aumento em relação aos anos anteriores, porém esse aumento ainda mantém essa zona como a menos trabalhada no volume.

Nos estudos históricos, do início desse trabalho, percebemos que os trabalhos mais estruturais começaram a ganhar significação com Diofanto de Alexandria, o que não quer dizer que não tenham sido importantes antes dele. A partir de Diofanto e seguindo pelos trabalhos dos árabes e principalmente dos europeus renascentistas, as equações, assim como a Álgebra, passaram a ser encarados sob suas características gerais e estruturais, onde deixavam-se de lado os estudos de problemas individuais e concentravam-se interesses em resoluções gerais.

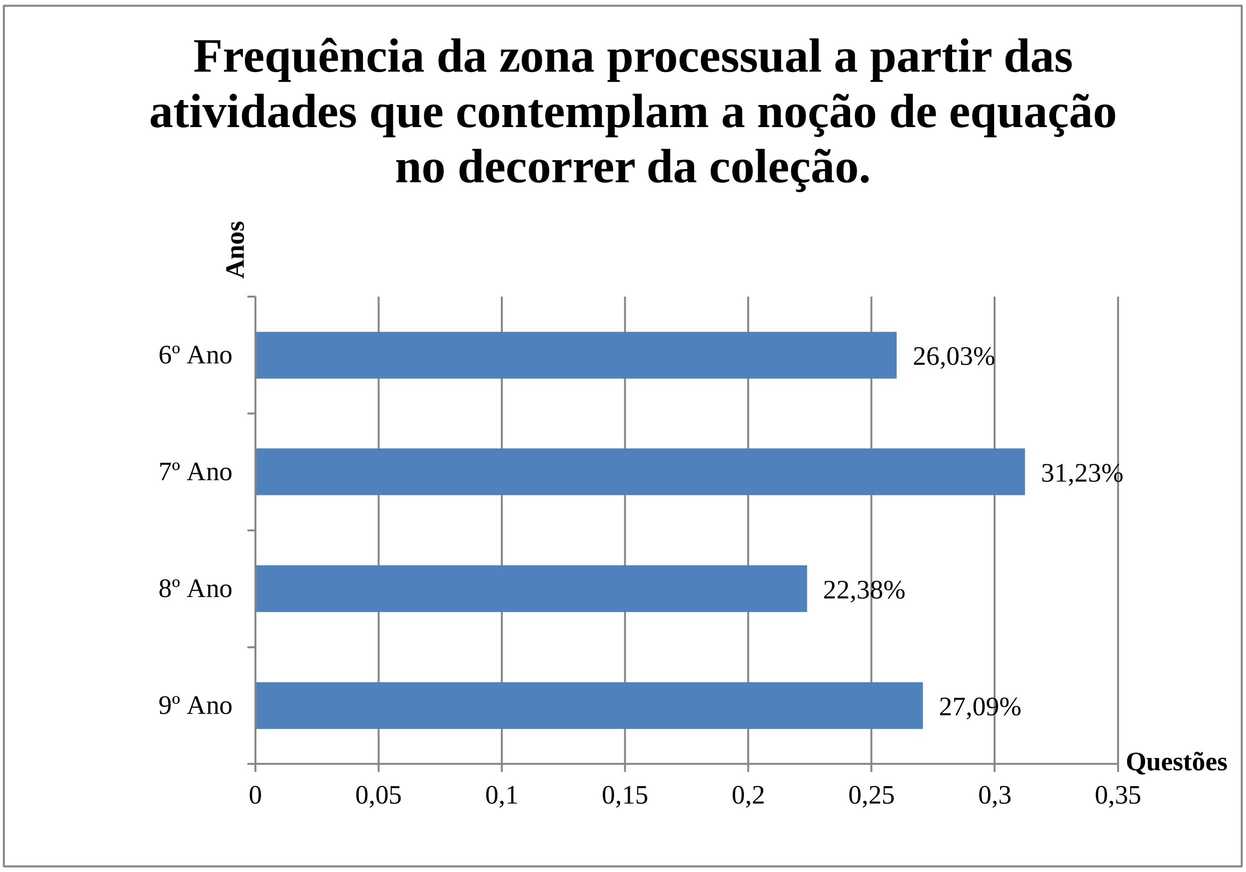
Em geral, entendemos que essas atividades não constituem o trabalho mais importante nesse momento, de acordo com a abordagem do livro. Acreditamos que esse fato se dê porque esses aspectos estruturais não parecem ser tão relevantes no Ensino Fundamental, onde os alunos ainda estão se habituando às equações e à simbologia algébrica.

Passemos, então, a discutir um pouco dos resultados encontrados no decorrer da coleção, apresentando os resultados encontrados quanto à zona processual.

4.5.4 Zona Processual

No que diz respeito à abordagem da zona processual no decorrer da coleção, pudemos perceber que em todos os volumes há uma forte presença de atividades que contemplam a ideia de equação a partir de suas técnicas de resolução, onde as equações são dadas explicitamente e espera-se dos educandos que apenas manipulem mecanicamente sobre elas a fim de encontrar soluções para as incógnitas. A seguir, apresentamos um gráfico com um panorama dos resultados obtidos nas análises dos volumes.

Gráfico 13: Frequência da zona processual a partir das atividades que contemplam a noção de equação no decorrer da coleção.



Fonte: O autor

A partir da análise do gráfico acima podemos identificar como as situações que contemplam o trabalho processual se distribuíram no decorrer da coleção e se houveram significativas alterações de um volume para outro. Notamos, ainda, que não há muitas variações, uma vez que a frequência com que esses tipos de atividades aparecem no decorrer da coleção varia entre 22% e 32%, mantendo-se de forma equilibrada em todos os volumes.

Entendemos que esse fato decorre da forma como os processos e técnicas de resolução são fortemente destacados quando se trata da ideia de equação, portanto todos os volumes dedicam significativa parte de suas atividades para exercitar as habilidades e processos destinados ao trabalho de resolução de equações.

Destacamos, ainda, que essa zona diz respeito também à forma mais tradicional como as equações são entendidas, isso se mostra em algumas pesquisas destacadas neste trabalho, pois em inúmeros casos tanto estudantes como professores entendem por equação apenas um conjunto de técnicas mecânicas para se encontrar o valor da incógnita.

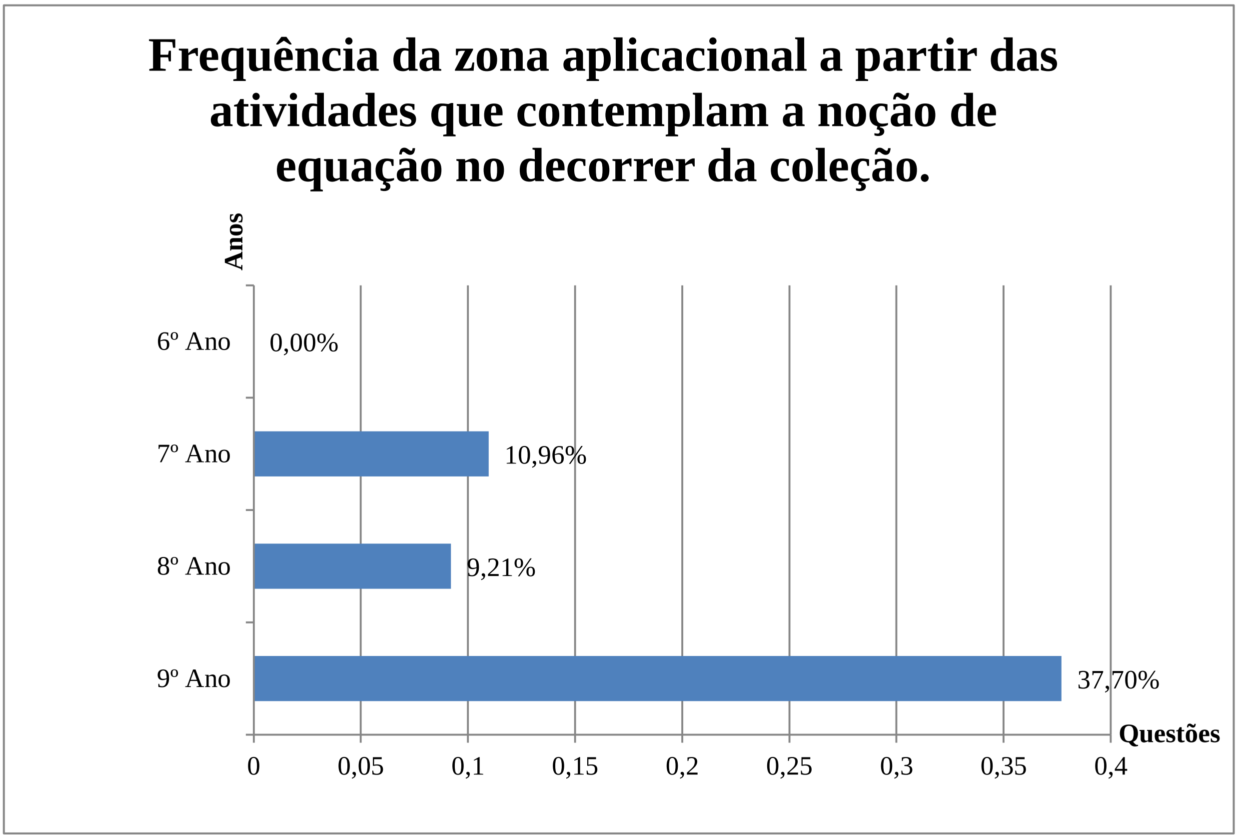
4.5.5 Zona Aplicacional

Por sua vez, a zona aplicacional é compreendida como uma abordagem dada às equações a partir de contextos práticos (cotidianos), onde a equação surge na situação como uma aplicação para a mesma. Assim, esse tipo de atividade não se destacou nos volumes iniciais, onde o trabalho com equação ainda não estava bem estabelecido e as situações pretendiam uma abordagem mais pragmática, onde as equações eram tratadas intuitivamente.

Ao investigarmos a zona aplicacional, percebemos que a mesma vai surgindo de forma crescente no decorrer dos volumes. Especulamos, inclusive, o fato de que elas crescem ao passo que as pragmáticas decrescem e chegamos a algumas considerações a esse respeito, que exploraremos mais nas considerações finais.

Para melhor analisarmos a abordagem dessa zona, apresentamos a seguir o gráfico da frequência com que essa zona surge em relação às atividades que abordam a noção de equação no decorrer dos quatro volumes da coleção:

Gráfico 14: Frequência da zona aplicacional a partir das atividades que contemplam a noção de equação no decorrer da coleção.



Fonte: O autor

Ao analisarmos o gráfico, identificamos que no 6º ano não se trabalharam situações aplicacionais e entendemos que tal fato se deve a forma mais intuitiva como a equação precisa ser tratada nesse ano inicial, pois as situações aplicacionais exigem dos educandos uma maior familiarização com situações que envolvam a noção de equação e também com resultados mais abstratos, como equações ou fórmulas que possam ser aplicadas para solucionar os problemas.

No geral, é percebido um pequeno aumento dessas situações ao passo que o conteúdo de equação vai se tornando mais comum na abordagem do livro. Ainda, nesse momento destacamos o fato de que as situações de ordem prática deixaram de explorar raciocínios mais intuitivos e passaram a dedicar-se a situações que exigiam aplicação de equações, onde se faz necessário maior conhecimento a cerca dessa noção.

Assim, pôde ser percebida na análise do volume do 9º ano que as situações pragmáticas então em baixa, se comparadas com a forma com que eram abordadas nos dois anos iniciais, já as aplicacionais aparecem muito influentes nesse momento.

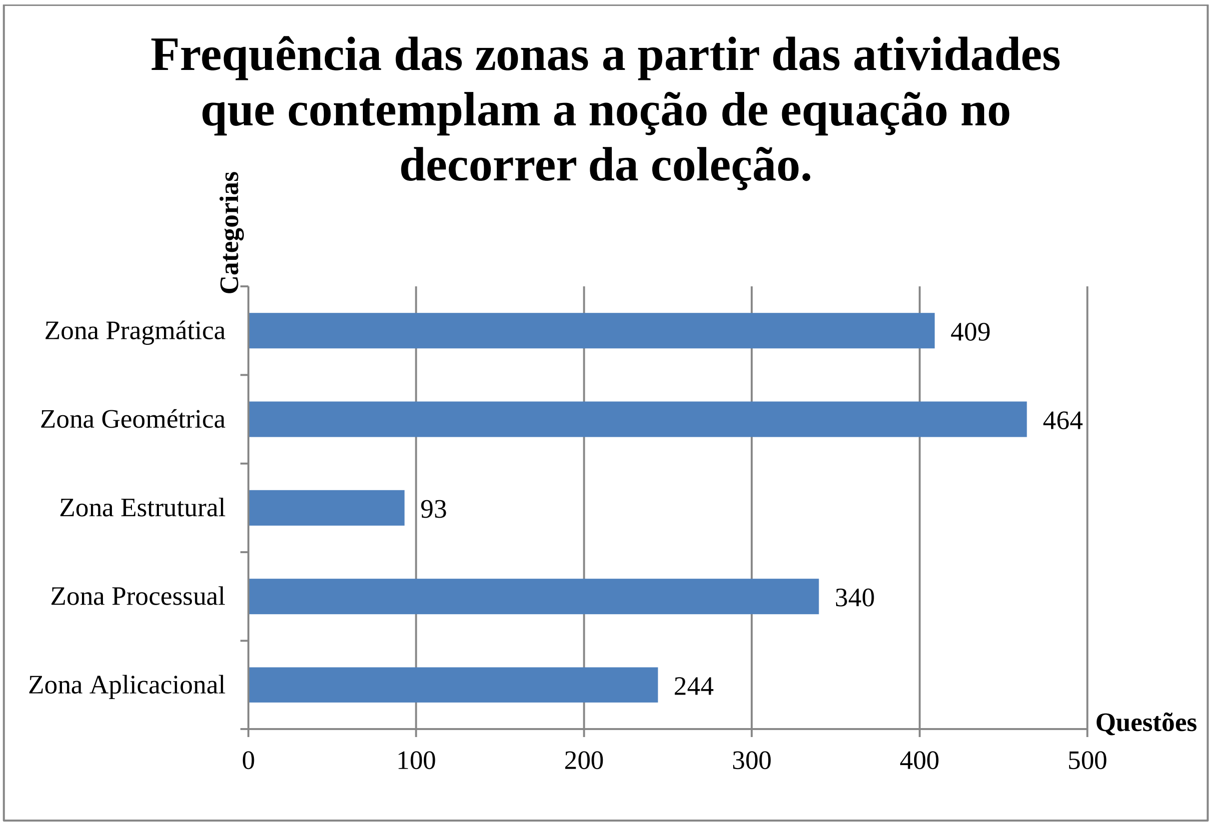
Prosseguiremos analisando um pouco mais dos resultados obtidos no decorrer na coleção. Nesse momento, apresentaremos as zonas não mais de forma isolada, mas lado a lado, para que possamos comparar como as mesmas se destacaram ao longo da coleção como um todo.

4.5.6 Resultados Gerais

Diante das discussões realizadas até o momento, apresentamos nessa seção um comparativo geral das zonas, onde podemos comparar suas frequências e identificar quais as abordagens que mais se destacaram na coleção como um todo e quais as que menos se destacaram.

O gráfico a seguir apresenta as cinco zonas investigadas na coleção “Praticando Matemática” e o respectivo somatório das atividades que contemplaram cada uma delas ao longo da coleção. A partir desses dados podemos evidenciar como essas se distribuíram e compreender quais foram as mais e as menos abordadas.

Gráfico 15: Frequência das zonas a partir das atividades que contemplam a noção de equação no decorrer da coleção.



Fonte: O autor

Percebe-se pelos resultados obtidos até então que o trabalho com equação foi bastante fervoroso na abordagem da coleção (para mais detalhes veja o gráfico 9, na seção 4.5), onde mais de 29% das atividades gerais da coleção abordam a ideia de equação, perpassando pelas várias zonas aqui abordadas.

Esses trabalhos foram crescendo volume a volume ao passo que os vários contextos e tratamentos das equações iam sendo explorados através de novos assuntos e, assim, a frequência de atividades que abordavam a ideia de equação passou de pouco mais de 6% no volume do 6º ano para quase 50% no 9º ano.

Novamente destacamos que como houve várias situações que abordaram o trabalho com mais de uma zona no decorrer dos volumes analisados, então os conjuntos das atividades que contemplam cada zona não são conjuntos disjuntos. Assim, ao considerarmos os resultados dispostos no gráfico 15, localizado acima, é importante ter em mente que, por exemplo, 409 atividades abordaram um trabalho com a zona pragmática, mas não necessariamente de forma exclusiva.

Ainda, obtivemos destaque para a zona geométrica, que foi bastante contemplada nos volumes do 8º e 9º anos, onde se trabalhavam conceitos geométricos a partir de uma abordagem bastante algébrica e também para a zona pragmática, que é o centro dos trabalhos com equação nos volumes iniciais e que ainda permanece presente nos volumes posteriores, mesmo que em menor incidência.

As atividades de ordem prática constituem-se na abordagem da zona pragmática, já citada acima, e da zona aplicacional, essa que não é bastante relevante no trabalho inicial com as equações, mas cresce de forma significativa no decorrer dos volumes, em especial no volume do 9º ano.

Essas atividades práticas abordaram desde situações triviais, cuja resolução poderia se dar por métodos aritméticos, até situações bem mais sofisticadas no que diz respeito à abordagem algébrica, dando condições para a exploração de equações lineares, sistemas e equações se 2º grau, além de reivindicarem equações diversas como aplicações, como no caso das aplicacionais.

Na abordagem da zona processual, onde as equações são vistas de um ponto de vista mais mecânico, as equações são dadas explicitamente e espera-se que se opere sobre elas para se obter o(s) valor(es) desconhecido(s). Essas atividades ficaram bem distribuídas no decorrer dos volumes, aparecendo sempre em mais de 22% das atividades de cada volume, o que representa uma valorização desse tipo de trabalho como desencadeador de habilidades no trato das equações.

Por sua vez, no trabalho com a zona estrutural são importantes alguns estudos mais generalistas e abstratos, onde se deixa de lado os casos particulares. Percebemos que a coleção aborda poucas situações com essa roupagem estrutural, sendo mais frequentes no volume do 9º ano, mas mesmo assim de forma pouco significativa se comparada com a abordagem das demais zonas.

Em geral, conseguimos evidenciar a presença de todas as zonas investigadas a partir da abordagem da coleção. Porém, a depender do volume, essas atividades mudavam bastante de foco, sendo a zona estrutural a que se manteve com a menor das frequências em todos os volumes. As demais apresentam-se constantemente nos volumes e proporcionam um trabalho com múltiplas formas de se conceber a noção de equação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer de nossas análises foi percebido, através da abordagem da coleção, um tratamento bastante vasto da noção de equação ao longo dos quatro anos do Ensino Fundamental II. Os trabalhos com equação vão desde o 6º ano, em que ainda não se insere o conteúdo de equação propriamente dito, até o 9º ano. Essa abordagem ocorre de forma crescente, ou seja, a cada volume analisado é identificada uma presença cada mais vez mais influente do trabalho com equação.

Com relação aos contextos que foram identificados nas atividades que trabalham com equação, podemos destacar quatro diferentes abordagens desse conceito ao longo do volume, são eles: geométrico, processual, prático (cotidiano) e estrutural. Nesses contextos, a forma como as equações são apresentadas e tratadas se diferenciam bastante e contribuem para compreensões diferentes a cerca desse conceito.

No que diz respeito ao contexto geométrico, vimos anteriormente que tal abordagem era muito comum na Geometria grega, iniciando com Tales de Mileto e sendo aperfeiçoada pelos pitagóricos e pela Geometria Euclidiana. Em situações desse tipo os trabalhos com equação normalmente sugerem a exploração da mesma a partir de deduções geométricas, assim caracteriza-se a zona geométrica definida por Ribeiro (2013).

No que diz respeito a esse contexto geométrico, que acompanha um tratamento dedutivo, pudemos perceber, ao longo da coleção, que boa parte dos estudos relacionados tanto à Álgebra como à Geometria fazem jus a essa abordagem, registrando um trabalho razoável com a zona geométrica nos dois volumes iniciais, que se referem ao 6º e 7º anos, onde a mesma varia entre 16% e 20% dos trabalhos com equação. Já nos volumes do 8º e 9º anos foram notados trabalhos bem mais significativos com essa zona, onde os conceitos geométricos são tratados de uma forma bastante algébrica, contemplando em cada um dos dois volumes um percentual superior a 40% das atividades dedicadas ao trabalho com equação.

Ao analisarmos o contexto prático, em que a ideia de equação surge de situações cotidianas, normalmente expressas em enunciados ou desenhos. Essas atividades normalmente eram concebidas pelos babilônios e egípcios, que tratavam equações a partir de problemas cotidianos extraídos da agricultura, engenharia e comércio. Pudemos perceber dois tipos distintos de tratamento para equações abordadas nesse contexto, eis que formam a zona pragmática e a aplicacional, propostas no perfil conceitual de Ribeiro (2013).

Percebemos que a zona pragmática representa o trabalho com situações advindas de contextos cotidianos e que explora a ideia de equação a partir de seu enunciado de forma intuitiva, sendo apontada pelos PCN como ideias para a introdução dos trabalhos com a Álgebra e interessantes ao ponto que relacionam a Álgebra escolar com o dia a dia, contextualizando a Matemática. Esse tipo de situação, tratada intuitivamente, foi bastante evidenciado nos volumes dos dois anos iniciais, estando presente em mais de 50% dos trabalhos com equação no 6º e no 7º anos. Nos volumes posteriores essa zona foi sofrendo uma queda, contemplando quase 28% dos trabalhos com equação no 8º ano e pouco mais de 8% na abordagem do 9º ano. O fato de serem mais exploradas nos anos iniciais justifica-se pelo que apontamos anteriormente, ou seja, são situações ideais para a introdução à Álgebra e ao conteúdo de equação.

Como já mencionado, outra forma como o contexto prático emerge nos trabalhos com equação ao longo da coleção é através do tratamento aplicacional, onde as equações não são exploradas apenas a partir do problema em questão, de forma intuitiva, mas exigem o tratamento de alguma equação como aplicação ao problema. Essas atividades não são ideais para o trabalho com os anos iniciais analisados, uma vez que as equações para serem aplicadas precisam estar bem definidas na compreensão dos alunos e estes somente se familiarizam com o conteúdo de equação propriamente dito a partir da segunda metade do 7° ano. Assim, no volume do 6º ano não identificamos a presença do trabalho com essa zona e nos volumes do 7º e 8º anos essa abordagem se deu de forma bastante tímida, aparecendo em menos de 11% das atividades que contemplam o trabalho com equação, fazendo com que esse tipo de tratamento das equações venha a surgir apenas no 7º ano e a crescer a partir daí. Assim, esses trabalhos foram destaque especialmente no volume do 9º ano, com mais de 37% dos trabalhos com equação do volume, pois nesse momento muito já se havia formalizado sobre as equações.

Com relação ao contexto processual, entendemos que nesse caso as equações sejam tratadas a partir de seus processos de resolução, ou seja, nas atividades que exploram esse contexto normalmente as equações são dadas prontas e espera-se encontrar as soluções das mesmas. Esse tipo de contexto e tratamento mecânico dado às equações contempla a zona processual de Ribeiro (2013) e é bastante presenciada em todos os volumes da coleção de forma praticamente constante, ou seja, sem sofrer relevantes crescimentos ou decrescimentos. Em geral, essa zona aparece com frequências variando entre 22% e 32% dos trabalhos com equação nos quatro volumes analisados. Entendemos, assim, que há uma preocupação eminente em todos os anos do Ensino Fundamental II pelo desenvolvimento de habilidades e procedimentos mecânicos de resolução de equações, segundo a abordagem da coleção.

No contexto estrutural, entendemos que a equação é compreendida a partir de sua estrutura, de suas propriedades e de elementos generalizadores, ou seja, não é o foco desse contexto a resolução da mesma para casos particulares ou mesmo a abstração intuitiva ou dedutiva em situações particulares. Esse tipo de contexto, em que o tratamento das equações se dá de forma bastante abstrata e generalista encorpada na grande maioria numa Álgebra simbólica é que se define a zona estrutural proposta por Ribeiro (2013). Neste tipo de atividade exige-se um abstrato conhecimento da noção de equação, o que normalmente não está estabelecido ainda nos trabalhos iniciais com as mesmas. Assim, percebemos que esse tipo de atividade vai surgindo aos poucos ao longo dos volumes, mas apresenta-se sempre como sendo a zona menos evidenciada, uma vez que não parece ser o foco dos trabalhos no Ensino Fundamental II, onde o contexto ainda é mais introdutório. Assim, essa zona não foi apreciada no volume do 6º ano. Nos volumes do 7º e 8º anos, percebemos que essa zona é trabalhada, porém aparece em menos de 7% dos trabalhos com equação nesses dois anos. Apenas no 9º ano é que apreciamos uma presença mais significativa dessa zona, porém ainda bastante tímida se comparada às demais, sendo contemplada em pouco mais de 10% da abordagem de equação no volume. Além disso, na maioria dos casos, esse contexto foi tratado na coleção de uma forma menos abstrata e menos simbólica, propiciando condições para a compreensão dos educandos que se iniciam na Álgebra.

Em suma, destacamos que a pesquisa nos proporcionou entender quais os diferentes contextos em que as equações surgem no Ensino Fundamental II, são eles: o geométrico, o prático (cotidiano), o processual e o estrutural. Além disso, nos possibilitou perceber os diferentes tratamentos que são dados às equações e que normalmente se relacionam com o contexto em que estão inseridos, tais como o tratamento intuitivo que se refere ao contexto prático; o tratamento aplicacional, normalmente originário também em contextos práticos; o tratamento dedutivo, que se origina em contextos geométricos; o tratamento mecânico e descontextualizado, este que se apresenta com bastante ênfase nas situações originárias de contextos processuais e, por fim, o tratamento mais generalista e estrutural, que se dá a partir de contextos mais abstratos, onde são abordadas situações mais gerais.

Além disso, pudemos perceber que as situações pertinentes à zona pragmática surgem com mais ênfase nos anos iniciais do trabalho com equação, dando ênfase ao desenvolvimento de raciocínios intuitivos introdutórios. As abordagens processuais se estabelecem de forma bastante equilibrada em todos os volumes da coleção, apontando para a importância que a coleção dá a aprendizagem de procedimentos e técnicas mecânicas de resolução das equações.

As situações aplicacionais aparecem especialmente no último volume quando existem condições suficientes para a aplicação de equações na resolução das situações, o que parece causar a redução das situações pragmáticas, que originam-se de contexto similar, porém admite um tratamento diferente para com a noção de equação. Já as situações geométricas aparecem em todos os volumes, destacando-se nos dois últimos, o que fez com que se tornassem a forma mais trabalhada das equações ao longo da coleção. Por fim, mas não menos importante, as equações tratadas sob uma abordagem estrutural não foram o centro das atenções, sendo o contexto estrutural o menos trabalhado em todos os volumes.

Consideramos, portanto, que a pesquisa desenvolvida propiciou condições para solucionar a problemática estabelecida inicialmente, pois forneceu resultados bastante promissores na investigação dos contextos e tratamentos dados a noção de equação no Ensino Fundamental II sob a abordagem do livro didático de Matemática.

Além disso, propiciou discussões relevantes ao passo que forneceu elementos significados para a investigação da noção de equação na abordagem do Ensino Fundamental e contribui para a exploração de reflexões a respeito dessa abordagem.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, A; VASCONCELLOS, M. J. *Coleção Praticando Matemática – Edição renovada* (Manual do professor*).* 4 ed. renovada. 4 v. – São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

BARBOSA, Y. O. **Multisignificados de equação**: uma investigação sobre as concepções de professores de Matemática. 2009. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2009.

BELTRAME, J. T.; BIANCHINI, B. L. O modelo 3UV e o ensino da álgebra: uma análise do livro didático. In: *X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador, 2010.

BRASIL. *Guia Digital do PNLD. 2017*. Disponível em <http://www.fnde.gov.br/pnld-2017/>. Acesso em: 25/04/2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática: ensino de primeira à quarta série.* Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* Brasília: MEC/SEF. V. 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2002.

DORIGO, M. *Investigando as concepções de equações de um grupo de alunos do ensino médio.* 2010. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

FERREIRA, A. B. H. *Dicionário Aurélio da língua portuguesa*. 5. ed. – Curitiba: Positivo, 2010.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar...a educação algébrica elementar. *Pro-Posições*. Campinas, v. 4, n. 1(10), p. 78-90, mar. 1993.

GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática.* 4. Ed. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GARBI, G. G. *O romance das equações algébricas*. 4. ed. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GOMES, Maria Laura Magalhães. *Álgebra e funções na educação básica*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas. Papirus, 1997.

PITOMBEIRA, J. B. *Revisitando uma velha conhecida.* Departamento de Matemática. PUC-Rio, 2004.

PONTE, J. P.; BRANCO. N.; MATOS, A. *Álgebra no ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação, 2009.

USISKIN, Z. *Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis.* In: As ideias da álgebra. COXFORD, A; SHULTE, A. Traduzido por Hygino h. Domingues. São Paulo, 1995.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. *Álgebra para a formação do professor. Explorando os conceitos de equação e de função*. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

RIBEIRO, A. J. Elaborando um perfil conceitual de equações: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de matemática. *Ciência & Educação*, Bauru, v. 19, n. 1, p. 55-71, 2013.

RIBEIRO, A. J. *Equações e seus multissignificados no ensino de matemática: contribuições de um estudo epistemológico.* 2007. 141 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ROCHA, E. A. R.; Sant'Ana. *Dificuldades no ensino e aprendizagem de aritmética e álgebra nas escolas públicas*. In: III Semana de Educação Matemática da UESB: Matemática: com carinho e com afeto, 2011, Vitória da Conquista – BA. Anais da III Semana de Educação Matemática da UESB: Matemática: com carinho e com afeto. Vitória da Conquista - BA, 2011.

TELES, R. A. M. A aritmética e a álgebra na matemática escolar. *Educação Matemática em Revista*. Número 16, 2004.

VELOSO, D. S; FERREIRA, A. C. Uma reflexão sobre as dificuldades dos alunos que se iniciam no estudo da álgebra. In: *Revista da Educação Matemática da UFOP*, Vol I, 2011 - X Semana da Matemática e II Semana da Estatística, Ouro Preto, 2010.

VERCEZE, R. M. A. N.; SILVINO, E. F. M. *O livro didático e suas implicações na prática do professor nas escolas públicas do Guarujá-Mirim*. Práxis Educacional, Vitoria da Conquista, V.4, N.4, p. 93-102, Jan. Jun. 2008.

http://www.matematica.br/historia/prhind.html

http://www.matematica.br/historia/prhind.html

https://br.pinterest.com/pin/212865519866012165/

https://doutormatematico.blogspot.com.br/2011/04/exercicios-9-ano-equacao-de-2-grau.html