UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

JHON LOURENÇO DA SILVA

APRENDENDO E SE DIVERTINDO COM COMBINATÓRIA: uma proposta com uso do Jogo Master Mind para anos finais do Ensino Fundamental

CARUARU, 2017

JHON LOURENÇO DA SILVA

APRENDENDO E SE DIVERTINDO COM COMBINATÓRIA: uma proposta com uso do Jogo Master Mind para anos finais do Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática

Área de Concentração: Ensino (Matemática)

Orientadora: Meª. Cristiane de Arimatéa Rocha

CARUARU, 2017

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Marcela Porfírio CRB/4 - 1878

S586a Silva, Jhon Lourenço da.
Aprendendo e se divertindo com combinatória : uma proposta com uso do Jogo Master Mind para anos finais do ensino fundamental. / Jhon Lourenço da Silva. – 2017.
60f. ; il. : 30 cm.

Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2017.
Inclui Referências.

1. Jogos no ensino de matemática. 2. Matemática recreativa. 3. Análise combinatória. I. Rocha, Cristiane de Arimatéa (Orientadora). II. Título.

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2017-380)

JHON LOURENÇO DA SILVA

APRENDENDO E SE DIVERTINDO COM COMBINATÓRIA: UMA PROPOSTA COM USO DO JOGO MASTER MIND PARA ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco para a obtenção do grau/título de bacharel/licenciado em Matemática.

Aprovado em: 21 / 12 /2017.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Cristiane de Arimatéa Rocha (Orientadora)

Universidade Federal de Pernambuco

Prof. José Jefferson da Silva (Examinador Externo)

Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Débora Karyna dos Santos Araújo (Examinadora Externa)

Universidade Estadual de Campinas

DEDICATÓRIA

Dedico a minha família em especial a minha avó que deram e dão o apoio necessário e suficiente para a conclusão de mais um degrau na minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe e minha avó que são minhas heroínas que me deram muito apoio, incentivo nas horas difíceis de desânimo e cansaço.

A minha avó que infelizmente hoje em dia não encontra mais presente entre nós, mas sei que onde ela tá, estar sempre torcendo por mim e muito feliz por essa minha nova etapa de vida.

A minha irmã, noiva (Josilene) e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse nessa nova etapa da minha vida.

À professora Cristiane de Arimatéa Rocha pela paciência nas orientações e incentivo para tornar possível a conclusão desta monografia.

***A**gradeço a todos os professores por me proporcionar conhecimentos nesse processo de formação profissional.*

Aos meus amigos e irmãos que vou levar por toda a vida: Elton, Rayanne, Iris, Francy, Bruna, Luan, Emerson, entre outros.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

RESUMO

A presente pesquisa se trata de uma intervenção aplicada em duas turmas do 8º ano do ensino fundamental de uma escola pública do município de Caruaru. Teve como objetivo investigar o efeito de intervenções com uso do jogo Master Mind, para fixação ou introdução de conceitos relativos a problemas combinatórios, analisando o desempenho dos grupos na resolução desses problemas e observando impressões dos alunos com relação às intervenções. As turmas de aplicação foram determinadas como Grupo A (fixação de conceitos) e Grupo B (introdução de conceitos). No geral o Grupo B teve um desempenho um pouco melhor que o A, mas ambos os desempenhos foram considerados satisfatórios. O grupo A teve melhor desempenho no problema de permutação, já o grupo B teve desempenho maior nos problemas de arranjo e de combinação. Nenhum dos grupos obteve acertos totais no problema de combinação. As estratégias de resolução utilizadas pelos grupos no problema de permutação foram o diagrama de árvore/percepção de regularidade. No problema de arranjo houve diferenças, o grupo A não apresentou estratégias e em seguida utilizou o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), e o Grupo B usou diagrama de árvore e listagem. No de combinação o Grupo A utilizou o PFC, enquanto que o grupo B não apresentou estratégia, seguido por diagrama de árvore. Entre as impressões deixadas pelo jogo, constatou-se que os alunos consideraram que ele desenvolve o raciocínio, torna a aula mais dinâmica o que proporcionou aprendizagens sobre procedimentos de resolução de problemas combinatórios e ganhos com relação a atitudes pessoais em relação a matemática. O grupo B considerou cansativa a listagem de todas as possibilidades.

Palavras-chave: Combinatória. Jogos Matemáticos. Jogo Master Mind.

ABSTRACT

The present research deals with an intervention applied in two 8th grade classes of an elementary school in the public sector in Caruaru. The objective was to investigate the effect of interventions by using the game Master Mind, to introduce and fix concepts related to combinatorial problems, analyzing the groups' performance in solving these problems and observing the students' impressions concerning the interventions. The classes in which these tests occured were determined as Group A (concept fixation) and Group B (concept introduction). Overall Group B had a slightly better performance than group A, but both performances were considered satisfactory. Group A had better performance in the permutation problem, however, group B had a greater performance in the arrangement and combination problems. None of the groups obtained total score on the combination problem. The resolution strategies used by the groups in the permutation problem were the tree diagram / perception of regularity. In the arrangement problem there were diferences, group A did not present strategies and then used the Fundamental Principle of Counting (FPC), and Group B used tree and listing diagram. In the combination, Group A used the FPC, while group B did not present a strategy, followed by tree diagram. Among the impressions left by the game, it was found that the students considered it to develop thought, make classes more dynamic which provided learning on combinatorial problem solving procedures and gains regarding personal attitudes towards mathematics. Group B considered tiresome the listing of all possibilities.

Keywords: Combinatorial. Mathematical games. Master Mind Game

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho utiliza no tema o termo divertir pelo fato de investigar o ensino de Matemática, especificamente Combinatória, por meio de um jogo. Jogos é o termo do latim “jocus” que significa segundo o dicionário brincadeira, divertimento. Há muito tempo que propostas de inserção de jogos nas aulas de matemática são defendidas por pesquisadores em Educação Matemática, como Grando (2000), Smole, Diniz e Milani (2007), Strapason (2011), entre outros. No entanto, eles também advertem sobre alguns cuidados ao utilizar jogos durante o decorrer das aulas, para que não se torne apenas uma atividade recreativa, e sim, fazer com que os alunos entendam que os jogos é uma atividade diferenciada utilizada para facilitar a aquisição de conhecimentos.

Pode-se dizer que respeitado alguns limites os jogos matemáticos propiciam aprendizagens mais motivadoras e interessantes, tanto para o aluno quanto para o professor. Inúmeras habilidades matemáticas podem ser desenvolvidas por meio dos jogos, entre elas, o raciocínio reflexivo, pois é necessário sempre pensar muito bem antes de realizar qualquer jogada e a cada nova jogada, um novo raciocínio pode surgir.

Quando pensamos em relacionar conteúdos matemáticos as atividades com jogos matemáticos surgem alguns questionamentos: De que modo podemos utilizar os jogos nas aulas de matemática? Como podemos fazer com que a discussão sobre conceitos matemáticos sejam potencializadas com uso de jogos? Será que existem modos que potencializam ainda mais a aprendizagem de conceitos matemáticos?

Dentre esses conceitos, nos deteremos sobre o ensino e aprendizagem de Combinatória nos anos finais do Ensino Fundamental. Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN desse nível de ensino orientam o trabalho com combinatória a partir do princípio multiplicativo (ou Princípio Fundamental da Contagem), além de apresentar como objetivos diferentes representações e contagens do total de possibilidades nas diferentes situações combinatórias (BRASIL, 1998).

Ao escolher a Combinatória como conceito a ser investigado, devemos considerar, o que autores como Batanero, Godino, Navarro-Pelayo(1996), Pessoa e Borba(2010), Ferreira e Almeida (2009) discutem sobre o trabalho inicial com esse conteúdo antes do Ensino Médio, incentivando a elaboração de estratégias pessoais de resolução, antes mesmo de iniciar o trabalho com fórmulas, portanto, deve-se pensar em oportunizar aos alunos a criação e reformulação de estratégias, pensando também nas diferenças de cada situação combinatória (arranjo, permutação e combinação).

Pensando nessas diferentes situações nos deparamos com o jogo Master Mind, também conhecido como jogo Senha, que possibilita a partir de adaptações por nós realizadas, discutir diferentes aspectos de cada situação, como por exemplo, propriedades como a ordenação ou não de elementos, ou a escolha ou não de elementos apresentados por Pessoa e Borba (2010), Borba (2013), Rocha(2011).

Tal jogo foi aplicado em dois grupos de alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, de duas maneiras, a primeira introduzindo o conteúdo da análise combinatória (arranjo, combinação e permutação) sem a utilização de fórmulas, com intuito que os alunos assimilassem e entendessem tais problemas a partir do jogo. E a segunda após ser introduzida à combinatória, com objetivo de fixação de conteúdo. Definido o jogo, o conteúdo e as formas de introduzi-los delimitamos o seguinte problema para essa pesquisa: *Que efeito tem as intervenções com o jogo Master Mind (introdução ou fixação de conceitos) no desempenho de alunos sobre problemas combinatórios?*

A escolha desse jogo se justifica a partir das experiências vivenciadas no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID-UFPE/CAA). Nesse programa tive a oportunidade de trabalhar com jogos relacionados a conteúdos matemáticos, a fim de tornar as aulas de Matemática mais atrativas, motivadoras e interessantes. O Master Mind foi utilizado para o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória (arranjo, combinação e permutação). Como as turmas que geralmente trabalhamos é no Ensino Médio, me questionava se esse jogo poderia também ser aplicado no Ensino Fundamental. Quando tive a oportunidade de assumir como professor algumas turmas do Ensino Fundamental decidi verificar se é viável o trabalho com o Master Mind no ensino de Combinatória dos anos finais do Ensino Fundamental.

Outro motivo, que justifica a escolha do conteúdo é devido ao tratamento dado ao mesmo, a combinatória durante minha vida escolar, enquanto estudante, foi ensinada sempre com ênfase nas fórmulas, e por meio desse jogo trazer uma proposta diferente, no qual o aluno possa listar as possibilidades. O jogo também proporciona uma interação entre alunos no qual colocam sua ideia de como chegou à conclusão ao achar a senha escolhida.

Além disso, de acordo com algumas pesquisas tal assunto é considerado um dos assuntos mais difíceis na matemática, tanto para os alunos aprenderem, como a dificuldade em que os professores têm em ensinar (ROCHA, 2011). Com o auxílio do jogo pode ser possível ensinar Combinatória de uma forma diferente, apresentando diferentes elementos que não aparecem quando se prefere um ensino fundamentado nas fórmulas de arranjo, combinação e permutação. Além disso, o jogo pode possibilitar algo divertido, então porque não juntar o útil ao agradável, o aprender ao divertir e tentar mudar essa dificuldade no processo ensino e aprendizagem da análise combinatória e assim motivar o aluno a aprender.

Com base no exposto na discussão do problema da pesquisa organizamos o seguinte objetivo geral: *Investigar o efeito de intervenções com uso do jogo Master Mind, para fixação ou introdução de conceitos relativos a problemas combinatórios.* Para auxiliar na discussão dos efeitos das intervenções delimitamos os seguintes objetivos específicos:

- Verificar o desempenho dos estudantes com relação aos tipos de problemas combinatórios nas intervenções (jogo para fixação ou introdução de conceitos).
- Analisar os procedimentos de resolução dos tipos de problemas combinatórios nos diferentes grupos
- Identificar as impressões dos alunos com relação aos dois processos de intervenção utilizados.

Para auxiliar essa discussão subdividimos esse trabalho em alguns capítulos. No primeiro capitulo trataremos um pouco sobre o raciocínio combinatório no Ensino Fundamental, expondo elementos dos documentos curriculares oficiais sobre Combinatória e o que alguns teóricos que discutem sobre o ensino desse conteúdo.

Na segunda seção, retomamos a discussão de jogos matemáticos enquanto recurso para o ensino e aprendizagem de matemática e fazemos a apresentação do jogo Master Mind e a relação com a Combinatória.

Após isso, no terceiro capítulo apresentamos a metodologia da pesquisa, na qual delimitamos o campo e instrumentos de coleta utilizados. No quarto capítulo, expusemos e discutimos os resultados encontrados nesse trabalho. Por fim tecemos as considerações finais.

2 O RACIOCÍCIO COMBINATÓRIO NO ENSINO FUNDAMENTAL

O raciocínio combinatório é uma forma de pensar na qual combinamos e encontramos variadas maneiras para enumerar ou realizar contagem de diferentes possibilidades. Desenvolvido apenas no âmbito escolar os PCN orientam que o trabalho nos anos finais do Ensino Fundamental o trabalho do professor com a combinatória visa:

> [...] levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades (BRASIL, 1998, p.52)

Alguns traços do raciocínio combinatório podem estar presentes no cotidiano das pessoas, desde as coisas mais simples, como por exemplo, a escolha de roupas, calça jeans e camisa; escolha de sabores de sorvete, ordenação de livros em uma estante; como também em coisas mais complexas, apostas em jogos de loterias, ou jogos de azar como o jogo do bicho, ou mesmo na confecção de senhas, ou de códigos como um todo. Borba (2016) traz diversas discussões sobre raciocínio combinatório em situações extraescolares e o conhecimento aprendido dentro da escola.

> Em situações combinatórias do cotidiano não é necessário (e na maioria das vezes não é possível) combinar todos os elementos entre si. Se tivéssemos que listar todas as possibilidades de combinações de itens do café da manhã ou levantar todas as combinações de roupas para vestirmos ou de escolhas em restaurantes para nossas refeições, não conseguimos dar conta de nossas atividades usuais (BORBA, 2016, p.2).

A diferença é que no contexto escolar Borba (2016) diz que nos problemas combinatórios se faz necessário que se liste todas as opções ou determine a quantidade total de possiblidades, que é bem diferente das situações que enfrentamos no cotidiano no qual não é necessário realizar a listagem de todos esses procedimentos.

Nos Parâmetros Curriculares da Educação Básica do Estado de Pernambuco de Matemática (PCPE) existe a indicação para o trabalho com problemas combinatórios a partir do 8º ano no qual estabelecem que tal trabalho deverá “Usar diferentes técnicas de contagem (diagrama de árvores, permutação, combinação e arranjo, sem uso de fórmulas) para determinar o número de resultados possíveis de um experimento” (PERNAMBUCO, 2012, p.100).

Esse documento adverte que para os anos finais do Ensino Fundamental o trabalho com Combinatória pode possibilitar:

> Atividades que explorem a representação e a contagem, em uma situação de combinatória devem levar o estudante à construção do conceito de princípio multiplicativo como recurso fundamental, mas não único, na resolução de diversos problemas. (PERNAMBUCO, 2012, p.112)

Borba (2016) afirma que com o avanço de escolarização o desempenho dos estudantes em problemas combinatórios melhora, mas ainda não o suficiente para os diferentes tipos de problemas combinatórios e atesta “[...] que experiências do cotidiano em interação com a aprendizagem escolar favorecem avanços em conhecimentos matemáticos.” (BORBA, 2016, p.4-5).

O interesse do estudo da Combinatória se deu ao fato da dificuldade no processo ensino e aprendizagem da mesma, alguns autores afirmam que:

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema.[...]se a aprendizagem desses conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas. (MORGADO, CARVALHO, CARVALHO e FERNANDEZ, 2006, p.2).

O ensino da Combinatória não precisa ser necessariamente mecânico ou focalizado apenas em uso de fórmulas, pode ser ensinado e aprendido de maneira diferente, como por exemplo, por meio do jogo Master Mind no qual o aluno poderá desenvolver seu próprio raciocínio lógico e chegar a sua própria conclusão. Dessa maneira, poderá proporcionar o que orienta os Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio (PCN+)

> [...]decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. (BRASIL, 2002, p.115).

Hadar e Hadass (1981) afirmaram que alguns erros comuns na resolução de problemas combinatórios perpassam o reconhecimento do conjunto correto para enumerar, a escolha de notações apropriadas para cada caso, a ideia de fixar elementos para facilitar a sistematização da enumeração, ou mesmo, a utilização de procedimentos que possibilitam a generalização de soluções.

Acreditamos que algumas dessas dificuldades tanto com relação ao esgotamento do número de possibilidades apontados por Borba (2016) quanto de elaboração de diferentes estratégias de resolução de problemas combinatórios discutidos por Hadar, Haddas (1981) podem ser desenvolvidas com auxílio de recursos didáticos, que enfatizem aspectos como as propriedades de problemas combinatórios.

3 JOGOS MATEMÁTICOS COMO RECURSO PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA: CONHECENDO O JOGO MASTER MIND

Nos últimos anos, verificamos um crescente aumento de pesquisas e discussões sobre a qualidade do ensino no Brasil, voltada principalmente para uma formação que traga uma condição de cidadania a população brasileira. Indícios dessa preocupação são observados no Plano Nacional da Educação quando desde 2014 traçou 20 metas para 2024 voltadas para o desenvolvimento da Educação Brasileira (BRASIL, 2014). Dentre as metas destacamos aquelas que se direcionam aos anos finais do Ensino Fundamental, tais como as metas 2 e 9 que se propõem a:

> [...] universalizar o ensino fundamental de 9 (nove) anos para toda a população de 6 (seis) a 14 (quatorze) anos e garantir que pelo menos 95% (noventa e cinco por cento) dos alunos concluam essa etapa na idade recomendada, até o último ano de vigência deste PNE.[...]fomentar a qualidade da educação básica em todas as etapas e modalidades, com melhoria do fluxo escolar e da aprendizagem, de modo a atingir as seguintes médias nacionais para o Ideb: 6,0 nos anos iniciais do ensino fundamental; 5,5 nos anos finais do ensino fundamental; 5,2 no ensino médio. (BRASIL, 2014, p.9,10).

Para isso as pesquisas em Educação Matemática orientam que a prática docente deve ser reflexiva, e deve permitir ao aluno a participação ativa no processo de sua aprendizagem. Esta prática tenta se opor aquela que procura impor uma aprendizagem mecânica, fundamentada mais em regras e no ensino de algo por algoritmos, deixando a compreensão em segundo plano. Para auxiliar na busca pelo interesse dos alunos, e na promoção de práticas nas quais os alunos sejam ativos existem recursos didáticos que podem auxiliar o professor nessa demanda. Dentre os diferentes recursos didáticos apresentados nos PCN, tais como o uso da Tecnologia, Resolução de Problemas e a História da Matemática, destacamos nessa pesquisa o papel dos jogos matemáticos (BRASIL, 1998). De acordo com os PCN o trabalho com tais recursos didáticos

> [...] precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática. (BRASIL, 1998, p. 19).

Segundo Strapason (2011) o papel dos jogos como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática tem sido salientada em inúmeras pesquisas. Os jogos é uma das diversas maneiras de quebrar os obstáculos enfrentados pelos alunos ao se depararem com alguns assuntos matemáticos. Segundo Macedo (2000) qualquer jogo pode ser utilizado.

> [...]quando o objetivo é propor atividades que favorecem a aquisição de conhecimento. A questão não está no material, mas no modo que como ele é explorado. Pode-se dizer, portanto, que serve qualquer jogo, mas não de qualquer jeito. (MACEDO et al, 2000, apud CARDOSO, 2008, p.8).

Mas é preciso ter muito cuidado ao utilizar jogos durante a aula, principalmente para auxiliar que alunos entendam que é uma atividade diferenciada utilizada para facilitar a aquisição de conhecimentos e não apenas uma atividade recreativa.

> [...] as atividades lúdicas podem ser consideradas como uma estratégia que estimula o raciocínio levando o aluno a enfrentar situações conflitantes relacionadas com o seu cotidiano e, também, a utilização dos jogos vem corroborar o valor formativo da Matemática, não no sentido apenas de auxiliar na estruturação do pensamento e do raciocínio dedutivo, mas, também, de auxiliar na aquisição de atitudes (LARA, 2003, p.2)

Ressalta-se ainda o papel interdisciplinar dos jogos matemáticos destacado pelos PCPE que orientam "[...]muitos dos jogos propiciam a integração de várias áreas da Matemática – aritmética, álgebra, geometria, combinatória etc –, o que tem sido uma das mais ricas características dessa ciência". (PERNAMBUCO, 2012, p.36).

Grando (2000) esclarece algumas vantagens e desvantagens do uso de jogos matemáticos enquanto recurso para o ensino e aprendizagem dessa disciplina, dentre as vantagens destacamos:

> -**fixação de conceitos** aprendidos de uma forma motivadora para o aluno; - **introdução e desenvolvimento de conceitos** de difícil compreensão; - desenvolvimento de **estratégias de resolução de problemas** (desafio dos jogos); [...] - as atividades com jogos permitem ao professor identificar, diagnosticar, alguns erros de aprendizagem, as atitudes e as dificuldades dos alunos. (GRANDO, 2000, p.35, grifo da autora).

Essas diferentes vantagens apresentada pela autora, em especial, a fixação de conceitos e a introdução de conceitos, refletem sobre o momento que esse professor irá aplicar o jogo, nas perguntas e linguagens utilizadas por ele ao longo dessas aplicações, ocasionando em diferentes planejamentos e preparações para esse fim.

A autora apresenta ainda algumas ressalvas sobre a o jogo enquanto recurso para o ensino e aprendizagem dessa disciplina, das quais separamos:

> - quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um **caráter puramente aleatório**, tornando-se um **"apêndice" em sala de aula**.[...] - o **tempo gasto** com as atividades de jogo em sala de aula **é**

> **maior** e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo; [...] a **perda da "ludicidade" do jogo** pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo; (GRANDO, 2000, p.35, grifo da autora).

Portanto, o professor que escolhe o caminho de utilizar essa metodologia de ensino e aprendizagem de matemática, pode levar em consideração esse tempo em seu planejamento, além de se policiar e tentar perceber como suas ações e escolhas refletem na motivação e aprendizagem dos alunos inseridos nessa situação.

Aspectos como diferentes possibilidades de resolução de situação do jogo, na busca da vitória podem refletir em diferentes aprendizagens para os estudantes, aspectos como o discutido por Grando (2000, p.37) como "A linguagem matemática, de difícil acesso e compreensão do aluno, pode ser simplificada através da ação no jogo".

Nessa perspectiva a autora aconselha o papel do registro em atividades com o jogo, para poder acompanhar questões de linguagens e dúvidas ao longo da atividade. Para autora "O registro no jogo, gerado por uma necessidade, pode representar um dos caminhos à construção desta linguagem matemática" (GRANDO, 2000, p.37).

Outro aspecto que pode auxiliar em aprendizagens é comentado por Oliveira (1998) que entende o jogo matemático no ensino e aprendizagem de matemática por meio de uma relação com a resolução de problemas, afirmando que:

> O jogo tem fortes componentes da resolução de problemas na medida em que jogar envolve uma atitude psicológica do sujeito que, ao se predispor para isso, coloca em movimento estruturas do pensamento que lhe permitem participar do jogo [...] O jogo, no sentido psicológico, desestrutura o sujeito que parte em busca de estratégias que o levem a participar dele. Podemos definir jogo como um problema em movimento. Problema que envolve a atitude pessoal de querer jogar tal qual o resolvedor de problema que só os tem quando estes lhes exigem busca de instrumentos novos de pensamento (OLIVEIRA, 1998, p.53).

A partir do exposto nos questionamos se existem diferenças ou semelhanças no trabalho com jogos matemáticos para introdução ou fixação de conceitos? O que devemos fazer e como fazer para que os alunos tenham interesse e aprendam conceitos por meio de jogos matemáticos? Na seção a segui apresentamos o jogo escolhido para a ser utilizado nessa pesquisa.

3.1 Jogo Master Mind

O jogo Master Mind, no Brasil conhecido como Senha, foi criado por Mordecai Meirowitz na década de 1970. Tal recurso pode ajudar no desenvolvimento do raciocínio lógico e pode ser utilizado no processo de ensino e aprendizagem da Combinatória (arranjo, combinação e permutação).

A meta do jogo é descobrir a "senha" criada pelo adversário ou pelo computador. Geralmente, esta senha é gerada por uma sequência de quatro círculos coloridos, pinos ou números. É preciso descobrir a ordem e, as cores ou números que aparecem. São usadas as cores disponibilizadas no jogo que se está trabalhando (de quatro a seis cores, em geral) e, para cada tentativa, é dada uma informação, relatando se existem cores certas, ou seja, que fazem parte da senha e se estão no espaço correto, mas sem informar qual a cor certa.

Depois da primeira tentativa (uma possibilidade explicitada, a pessoa que sabe a senha, apresentará algumas dicas sobre se as cores estão certas, se as posições estão certas) para que o jogador a partir delas faça alterações na sua tentativa inicial (surgem outras possibilidades). O jogador possui apenas dez tentativas para acertar a senha. Na Figura 1 apresentamos o tabuleiro do jogo.

Figura 1 – Jogo Mastermid ou super senha

Fonte: Varani, 1997

O jogo Master Mind tem disponível em forma de Software e também em tabuleiros, em sua forma de tabuleiro pode ser construído com diversos materiais diferentes.

Ferreira, Sales e Mendes (2015) aplicaram o jogo senha em uma turma de 2º ano do Ensino Médio, com a intenção de trabalhar problemas de Permutação, uma atividade desenvolvida por bolsistas do Programa Institucional de bolsas de Iniciação a Docência(PIBID). Para isso disponibilizaram de um tabuleiro e cinco canetas de hidrocor colorido para cada dupla. De início disponibilizaram três cores para a senha e depois ampliaram para quatro cores. Dessa forma, os autores queriam perceber se os alunos observariam que a partir de um palpite o número de possibilidades iria diminuindo.

Em outro momento, os autores utilizaram de perguntas para o desenvolvimento da matemática do jogo como a apresentada a seguir: “Sabendo que o desafiador fez a seguinte aposta (rosa, amarelo, verde) e recebeu a dica a seguir (•, X, X), qual a melhor estratégia para a próxima jogada?” (FERREIRA et al, 2015, p.4). Após isso, os alunos foram questionados sobre as diferentes estratégias que utilizariam para descobrir a senha. Tais autores afirmam que

> A abordagem feita através do jogo “A Senha” sem que fosse mencionado o conteúdo, fez com que os alunos argumentassem sobre algo não comentado e chegassem por meio do próprio raciocínio, à idéia de Permutação, usando suas próprias palavras, “mudar as cores de lugar”, “inverter as posições”, todas relacionadas às ordens dos elementos (FERREIRA, et al, 2015, p.5).

A partir do extrato desses autores, podemos ver que a questão da linguagem foi também trabalhada com o uso do jogo senha. A inserção de questionamentos para trabalhar o que foi desenvolvido no jogo corrobora com Smole, Diniz e Milani (2007, p.19) quando afirmam que o “durante o jogo, enquanto você observa os alunos jogando, você pode pedir para que eles expliquem uma jogada, ou porque tomaram uma decisão e não outra, e até mesmo perguntar se não há uma jogada que dificulte a próxima ação.”.

Haas (2012) também utilizou o jogo senha em aulas de Combinatória no 2º ano do Ensino Médio. Para isso dividiu sua pesquisa em três momentos: a familiarização como jogo, discutindo diferentes possibilidades de composição de senha e estratégias eficientes de jogadas (palpites); a apresentação do Método de Contagem, para os problemas de Arranjo, Combinação e Permutação; posteriormente os alunos elaboraram um projeto de Modelagem Matemática para relacionar os conteúdos a situações reais.

A autora relata que para introduzir os conceitos por meio do jogo senha “sem quaisquer menções do conteúdo fez com que os alunos relutassem um pouco em responder o questionário, argumentando que não poderiam responder um assunto que não foi explicado” (HASS, 2012, p.64). Apesar dessa dificuldade a autora considerou o jogo como estratégia de ensino divertida que possibilita outra visão para matemática.

Nas duas pesquisas aqui apresentadas o Jogo Master Mind foi utilizado no Ensino Médio, talvez por ser nessa etapa que o conteúdo de Combinatória e trabalhado de maneira efetiva. Como entendemos e concordamos com as pesquisas de Borba (2016), Lima (2015), Rocha(2011) o trabalho com a Combinatória pode ser desenvolvido desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, apresentamos na seção seguinte uma proposta de discussão dos tipos de problemas combinatórios por meio do Jogo Master Mind.

3.2 Atividades com o jogo Master Mind nas diferentes situações combinatórias

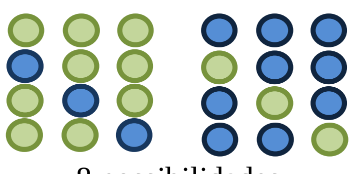
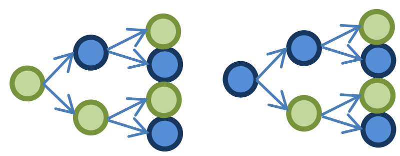
As situações combinatórias aqui discutidas serão o arranjo, a combinação e a permutação. Morgado et al (2006, p.2) afirmam que um motivo para privilegiar tais situações é que “eles são certamente os mais simples e de uso mais amplo”.

Arranjo de n elementos dispostos p a p, com p menor ou igual a n, é uma escolha de p entre esses n objetos na qual a ordem importa. Uma maneira de calcular o total de possibilidades de um arranjo é pela fórmula dada por $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$. Essa notação não é tão adequada para o nível que essa atividade se destina, podemos pensar em diferentes procedimentos ou estratégias de resolução.

No jogo Master Mind para trabalhar com uma situação de arranjo, será necessário uma quantidade de cores no qual o aluno terá que descobrir quais cores e em que ordem elas estarão na senha,

O jogo ainda permite o trabalho com a propriedade da Repetição, além da questão de ordenação de elementos das diferentes possibilidades. Suponha um Master Mind com três posições, e duas cores Azul e Verde. Quantas senhas diferentes podemos formar? Esse problema é um *arranjo com repetição* de elementos, no caso, podemos ter diferentes estratégias para resolvê-lo, no quadro a seguir apresentamos algumas delas.

Quadro 1 - Diferentes Estratégias de resolução do problema de arranjo com repetição

Listagem	Àrvore de Possibilidades
 8 possibilidades	 8 possibilidades

Fonte: A pesquisa, 2017.

Para buscar uma generalização poderíamos ampliar o número de casas para a senha, se fossem quatro casas, com duas cores quantas possibilidades diferentes de senha seriam? Assim poderiam ser introduzido o Princípio Fundamental da Contagem(PFC) ou Princípio Multiplicativo. Morgado et al (2006, p.18) definem o PFC como “Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1 , a decisão

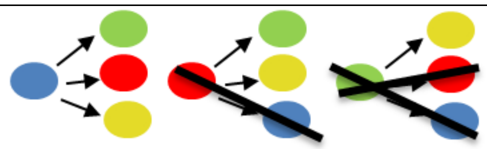
d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de se tornarem as decisões d_1 e d_2 é xy.” Analogamente para k escolhas cada uma com n_k possibilidades teremos um total de $n_1 . n_2 . n_3 . .... . n_k$ decisões. Portanto, nessa situação a solução seria $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$. Sobre o PFC e o conhecimento dos professores de matemática, Lima (2015) afirma que:

> [...] se os professores têm conhecimento de como o PFC pode ser utilizado na resolução de distintas situações combinatórias e de como este princípio é base das fórmulas de Análise Combinatória, o ensino e a aprendizagem da Combinatória podem ser facilitados. (LIMA, 2015, p.26)

Combinação de n elementos tomados p a p são escolhas não ordenadas desses elementos, o total de possibilidades distintos podem ser calculados pela expressão dada por $C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. De maneira análoga aos problemas de arranjo, essa notação de fórmula de combinação, também poderá causar problemas de compreensão nos anos finais do Ensino Fundamental, pois faz uso de números binomiais, além de conceitos de fatorial. Para trabalhar combinação a partir do jogo o aluno tem uma quantidade de cores disponíveis, porém terá que descobrir apenas as cores corretas dentre as disponíveis, já que a ordem nesse caso não importa, ou seja, a ordenação de elementos das possibilidades não gera novas opções.

Suponha um Master Mind dispondo de quatro cores (azul, verde, amarelo e vermelho). De quantas formas podemos escolher 2 cores para iniciarmos o jogo? Esse problema é uma *combinação* de elementos, no caso, podemos ter diferentes estratégias para resolvê-lo, no quadro a seguir apresentamos algumas delas.

Quadro 2 - Diferentes Estratégias de resolução do problema de Combinação

Listagem	Àrvore de Possibilidades
 6 possibilidades	 6 possibilidades

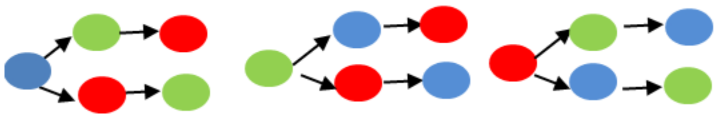
Fonte: A pesquisa, 2017.

Nesse quadro observamos dois procedimentos de resolução do problema com base na representação de peças do jogo Master Mind. Na primeira por listagem fixamos a primeira cor e alteramos as demais, e na segunda utilizamos a árvore de possibilidade excluindo as opções que se repetem quando desconsiderada a ordenação de elementos.

A **permutação** de n elementos distintos é um agrupamento ordenado desses elementos. Poderá ter seu total de possibilidades distintas calculada pela expressão $P_n = n!$. Notamos que essa expressão se justifica pela a ideia de fatorial, essa ideia pode ser compreendida nos anos finais do ensino fundamental, no entanto a ênfase em notações pode ser complicadas, principalmente com relação a simplificação de expressões. Ela deve ser utilizada quando você quiser contar quantas possibilidades existem de se organizar um número de objetos de forma distinta. Para trabalhar permutação as cores já estarão definidas e o aluno teria que adivinhar em qual ordem elas estão colocadas.

Suponha um Master Mind dispondo de três cores, azul, verde e vermelho. Quantas senhas diferentes podemos formar escolhendo 3 cores sem repeti-las? Esse problema é uma *permutação sem repetição* de elementos, no caso, podemos ter diferentes estratégias para resolvê-lo, no quadro a seguir apresentamos algumas delas.

Quadro 3 - Diferentes Estratégias de resolução do problema de Permutação

Listagem	**Àrvore de Possibilidades**
 6 possibilidades	 6 possibilidades

Fonte: A pesquisa, 2017.

Os diferentes procedimentos apresentados pode ser, além do PFC, alternativas para a resolução de problemas combinatórios, inclusive na permutação, podem ser abordadas questões relativas a sistematização da enumeração, como a fixar elementos e alternar as possibilidades simetricamente.

4 METODOLOGIA

Essa pesquisa tem natureza quali-quantitativa, pois a mesma estabelece relações entre aspectos qualitativos como as impressões dos estudantes com relação ao jogo e aspectos quantitativos com relação a média de acertos ou desempenho dos estudantes na resolução de problemas combinatórios, já que para descrever o que observamos, precisamos de algumas estruturas como percentuais e gráficos para esse fim. Gatti (2004) afirma que essa natureza pode viabilizar uma melhor compreensão entre os fenômenos:

> Os métodos de análise de dados que se traduzem por números podem ser muito úteis na compreensão de diversos problemas educacionais. Mais ainda, a combinação deste tipo de dados com dados oriundos de metodologias qualitativas, podem vir a enriquecer a compreensão de eventos, fatos, processos. As duas abordagens demandam, no entanto, o esforço de reflexão do pesquisador para dar sentido ao material levantado e analisado. (GATTI, 2004, p. 13)

Para auxiliar nessa reflexão, nossa pesquisa parte de algumas atividades anteriormente desenvolvidas com o jogo. O Master Mind foi adaptado a partir de experiências no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) nas quais a tarefa que todos os monitores realizavam possuía como objetivo trabalhar com Jogos relacionados a conteúdos matemáticos, afim de tornar as aulas de matemática mais atrativas, motivadora e interessante. Esse jogo foi utilizado para a discussão das diferentes situações de Combinatória (arranjo, combinação e Permutação).

O jogo utilizado no PIBID foi construído com os seguintes materiais: isopor e papel A4 (tabuleiro, no papel A4 foi impresso alguns círculos e números e depois colado sobre o isopor), cartolina de cores distintas (peças que serão a senha), cola de isopor e cola branca como mostra na figura abaixo.

Figura 2 - Tabuleiro do jogo confeccionado no PIBID UFPE

Fonte: acervo do PIBID UFPE – CAA, 2014

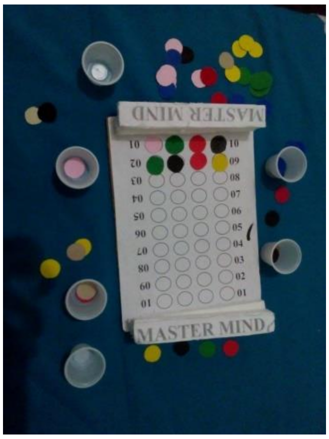
Como mostra a figura, nesse caso, há dez tentativas para acertar a senha que é composta por 4 cores. Mas o jogo, como discutido anteriormente o jogo pode ser adaptado para trabalhar com diversas situações combinatórias. Para sistematizar as etapas dessa pesquisa foi sistematizado um estudo piloto o qual descreveremos na próxima seção.

4.1 Estudo piloto

Antes da realização da pesquisa houve uma aplicação piloto do jogo em uma oficina no evento do III Encontro de Matemática do Agreste Pernambucano (III EMAP). A oficina contou com quatro etapas: explicação do conteúdo abordado, regras do jogo, construção do master mind e sua aplicação. Foi aplicado com 20 estudantes de licenciatura em matemática.

A construção do jogo contou com um material diferente da construção que foi utilizada no PIBID, nessa construção foi utilizado os seguintes materiais: papelão, isopor, cola branca, cola de isopor, papel A4, cartolina colorida como mostra a figura a baixo:

Figura 3 - Master Mind Confeccionado

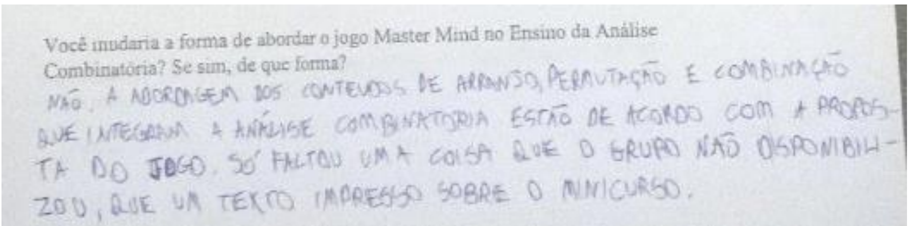


Fonte: O autor (2016)

Durante a oficina houve uma avaliação com todos que estavam presentes, a maioria era de licenciandos em Matemática, o que possibilitou a reflexão e a elaboração de algumas mudanças referente a oficina, o conteúdo (arranjo, combinação e permutação) e do jogo Master Mind.

Com relação ao conteúdo, um licenciando destacou os problemas combinatórios evidenciados no jogo, como apresenta a figura abaixo.

Figura 4 – Protocolo do licenciando 3

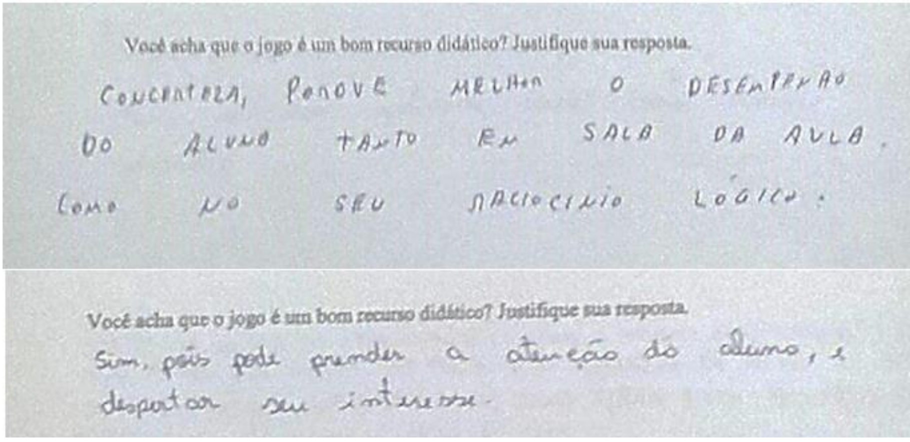

Você mudaria a forma de abordar o jogo Master Mind no Ensino da Análise Combinatória? Se sim, de que forma?

NÃO, A ABORDAGEM DOS CONTEUDOS DE ARRANJO, PERMUTAÇÃO E COMBINAÇÃO QUE INTEGRAM A ANÁLISE COMBINATÓRIA ESTÃO DE ACORDO COM A PROPOSTA DO JOGO. SÓ FALTOU UMA COISA QUE O GRUPO NÃO DISPONIBILIZOU, QUE UM TEXTO IMPRESSO SOBRE O MINICURSO.

Fonte: O autor (2016)

Com relação ao jogo os licenciandos pontuaram aspectos como o desenvolvimento do raciocínio lógico e com relação a potencialização do interesse dos alunos, como vemos nos extratos na figura 4

Figura 5- Protocolo dos licenciandos 1 e 2 no Estudo Piloto


Você acha que o jogo é um bom recurso didático? Justifique sua resposta.

CONCENTRA, PROMOVE MELHOR O DESEMPENHO DO ALUNO TANTO EM SALA DE AULA. COMO NO SEU RACIOCINIO LÓGICO.

Você acha que o jogo é um bom recurso didático? Justifique sua resposta.

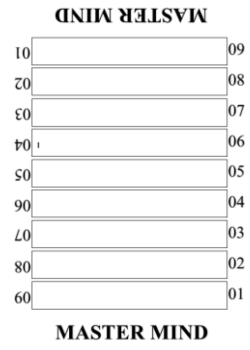
Sim, pois pode prender a atenção do aluno, e despertar seu interesse.

Fonte: O autor (2016)

Na pergunta "Você acha que o jogo é um bom recurso didático? Justifique sua resposta", a resposta de todos se aproximaram de nossas expectativas. Na outra pergunta todos responderam "Não", ou seja, não mudariam a forma de como o jogo foi aplicado, porém apenas um no qual a resposta foi "Não" que explicou.

Em conversas com os licenciandos e com professores fizemos algumas adequações no tabuleiro para que a propriedade de ordenação não ficasse evidente, apenas quando destacada na situação. Dessa forma, o tabuleiro aplicado ficou de acordo com a figura a seguir:

Figura 6 - Tabuleiro do Jogo adaptado



Fonte: O autor (2017)

Nesse caso, permite o trabalho com combinação também, sem necessariamente ter a posição ou a ordenação envolvida.

4.2 Etapas da Pesquisa

A pesquisa foi realizada em duas turmas do 8º ano do Ensino Fundamental que denominamos Grupo A e Grupo B. Foi aplicado em uma turma do 8º ano porque de acordo com PCPE é onde se inicia o trabalho com a combinatória. A pesquisa ocorreu m uma escola pública do munícipio de Caruaru, o motivo da escolha dessa escola foi pelo fato que já sou professor dessa escola e possuo conhecimentos com esses alunos dessas turmas. A pesquisa se trata de duas intervenções: uma utilizando o jogo como fixação de conteúdo e a outra utilizando o jogo como introdução do conteúdo. A seguir detalhamos as diferentes intervenções.

4.2.1 Intervenções realizadas no grupo A e B

O grupo A era constituído por 32 alunos, foram organizadas duplas para a realização das atividades (tanto a intervenção quanto a resolução do questionário) totalizando 16 questionários para análise. Destacamos também que os alunos demostraram bastante participativos e atentos durante toda aula.

Essa foi a primeira vez que tiveram contato com a Combinatória e com a utilização de jogo na sala de aula como ferramenta de aprendizagem, segundo as informações dos alunos. O grupo A que foi a turma no qual foi utilizado o jogo para fixação de conceitos combinatórios, ou seja, utilizado depois da explicação.

Na intervenção desse grupo contou com as seguintes etapas: primeiro foi explicado o conceito de Combinatória, discutir as noções de que a partir de um conjunto finito é possível analisar todas as possibilidades; apresentar os principais agrupamentos da Combinatória (o arranjo, combinação e permutação) e a diferença entre cada uma delas.

No terceiro momento, foi focalizada a resolução de questões de combinatória com esses tipos de agrupamentos, utilizando diferentes formas de trabalhar, seja pelo diagrama de árvore, listagem ou PFC e por último a utilização do jogo.

Nessa etapa foram utilizados os exemplos que discutissem o contexto de escolha de cores, mas foi ressaltado após esses exemplos que poderiam ser aplicados em outros contextos:

1 - Dispondo de 4 cores, de quantas formas posso escolher três cores diferentes? (Problema de combinação).

2 - Dispondo de 4 cores, quantos modos podemos organizar senhas utilizando duas cores? (Problema de Arranjo)

3 - Dispondo de 4 cores, quantos modos podemos organizar senhas utilizando 4 cores? (Problema de permutação)

Os exemplos foram bem parecidos para poder mostrar aos alunos a diferença de cada problema, pois cada um se encaixava em um dos agrupamentos da combinatória e partem do mesmo conjunto de cores. No primeiro problema por não se tratar de organização, apenas escolha de cores, a ordem não vai gerar novas possibilidades é um problema de combinação, trata-se da escolha de subconjuntos de três elementos, portanto a ordem dos elementos dos subconjuntos não geram subconjuntos diferentes.

No segundo problema já é tratado da organização, ou seja, a ordem gera novas possibilidades, pois isso é um problema de arranjo, portanto a possibilidade (azul e vermelho) é diferente da possibilidade (vermelho e azul). Nesse caso, trata-se da escolha de pares ordenados, em que a ordem de cada elemento escolhido, gera outro par ordenado.

O terceiro problema como o conjunto inicial só precisa ser ordenado ($n = p$), pois, (quantidade de cores totais = quantidade de cores que serão utilizados), é um problema de permutação, que trata da ordenação de todas as cores do conjunto, apenas organizadas de formas diferentes, não há escolhas de subconjuntos ou pares ordenados.

Todos os exemplos foram resolvidos pelo diagrama de árvore e posteriormente pelo PFC, mas foi explicitado que pelo PFC apenas temos a quantidade de possibilidades diferentes enquanto no diagrama de árvore além de me possibilitar a quantidade de possibilidades, eu consigo registrar todas as possibilidades, que tem que ser feito de forma organizada.

Nessa última etapa foi explicado o que seria o jogo e foram trabalhadas diferentes questões com base nos três tipos de agrupamentos da combinatória apresentados anteriormente. Era lançada uma questão no qual o objetivo era descobrir a senha, lembrando que cada agrupamento tem sua diferenciação e eram discutidas com os alunos tais diferenças no jogo e sobre a quantidade de senhas para cada agrupamento. As questões que foram trabalhadas no jogo estão no “apêndice A”

O grupo B participaram 26 alunos, também realizada em duplas totalizando 13 questionários para análise. Destacamos também que os alunos demostraram bastante participativos e atentos durante toda aula. Essa foi a primeira vez que tiveram contato com a análise combinatória dentro da sala de aula e com a utilização de jogo na sala de aula como ferramenta de aprendizagem. O grupo B que foi utilizado o jogo como introdução do conteúdo, contou com etapas diferentes do grupo A. Inicialmente foi explicado o jogo, e a partir das atividades do Apêndice A foi explicado de que assunto se tratava o jogo e utilizado o jogo a partir de diferentes questões de combinatória, a partir de cada questão era questionado como que seria a senha, pois nosso objetivo era descobrir a senha.

No fim após ser jogado diferentes questões de combinatória com diferente agrupamento da cominatória foi discutido coletivamente cada situação no quadro. Mostrando assim que para cada questão se tratava de um tipo de agrupamento da combinatória, no qual cada um tinha sua particularidade, ou seja, sua diferença, assim foi mostrada quantas senhas eram possíveis de ser formadas em cada situação, destacando que foram utilizados para explicação diferente métodos de resolução seja por diagrama de arvore, listagem ou PFC.

4.2.2 Questionário aplicado

O questionário foi aplicado uma semana após da realização das intervenções. Ele possuía seis questões, divididas em dois grupos: as três primeiras relativas aos problemas combinatórios e as três últimas relativas as impressões dos estudantes sobre as intervenções realizadas O questionário se encontra no “apêndice B”.

O questionário é uma ferramenta importante e útil para pesquisa do Trabalho de Conclusão de Curso. O questionário, segundo Gil (1999, p.128 apud Chaer et al. 2011, p.260), pode ser definido “como a técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas etc.”.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo do trabalho será realizada a análise de atividades aplicadas aos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental envolvidas na pesquisa. Esta análise será organizada em tópicos e subtópicos de acordo com cada atividade e intervenção.

Resolvemos identificar os alunos voluntários que participaram na resolução das atividades pela abreviação A e B para assim preservar a identidade de cada aluno. Os alunos classificados como A, são os que participaram da intervenção utilizando o jogo para fixação de conceitos e os alunos classificados como B, são os que participaram da intervenção utilizando o jogo como introdução de conteúdo. O aluno do número 9 do grupo A, será nomeado, por exemplo, como A9, o mesmo acontece com o grupo B, que seria nomeado, por exemplo, como B8, assim por diante.

Serão analisados três problemas combinatórios relacionados ao jogo Master Mind, cada um referente a um tipo específico de agrupamento da análise combinatória, um sobre permutação, um de arranjo e um de combinação.

Para essas questões será considerado de 0 a 3 pontos, 0 pontos para aquele aluno que não acertou o resultado, 1 para aquele aluno que apresentou acerto parcial com enumeração de alguma possibilidade, porém não chegou nem a metade do número correto, 2 para aquele acerto parcial do aluno que ao menos atingiu a metade ou mais da enumeração das possibilidades e 3 para aquele aluno que acertou totalmente a questão.

Nesses problemas foram utilizadas diferentes estratégias de resolução como: diagrama de árvore, diagrama de árvore/listagem, diagrama de árvore/percepção de regularidade, PFC (Princípio Fundamental da Contagem) como também, aqueles que não utilizaram ou evidenciaram as estratégias de resolução, ou seja, havia apenas o resultado da resposta, sem nenhuma estratégia de resolução apresentada.

Será analisado também três questões, referente a impressões do jogo, uma delas de referente a avaliação do jogo, outra se o aluno faria algum tipo de alteração na proposição do jogo e a última sobre o conteúdo aprendido por meio da utilização do jogo. Em cada seção seguinte discutiremos a comparação entre as resoluções de cada atividade.

5.1 Análise comparativa da resolução do problema de permutação (Atividade 1)

Na atividade 1 se refere a resolução de um problema de permutação *"O jogo senha possui agora 4 letras (A,B,C,D). Quantas senhas de 4 letras podemos formar?"*. A resposta para esse problema é 24 possibilidades, um possível procedimento para sua resolução seria, pelo PFC, $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, posto que existem 4 possibilidades para escolher a letra da primeira posição, 3 para a segunda posição, 2 para a terceira e 1 para a quarta posição. A seguir apresentamos a pontuação atribuída os diferentes grupos, disponibilizados no Quadro 4.

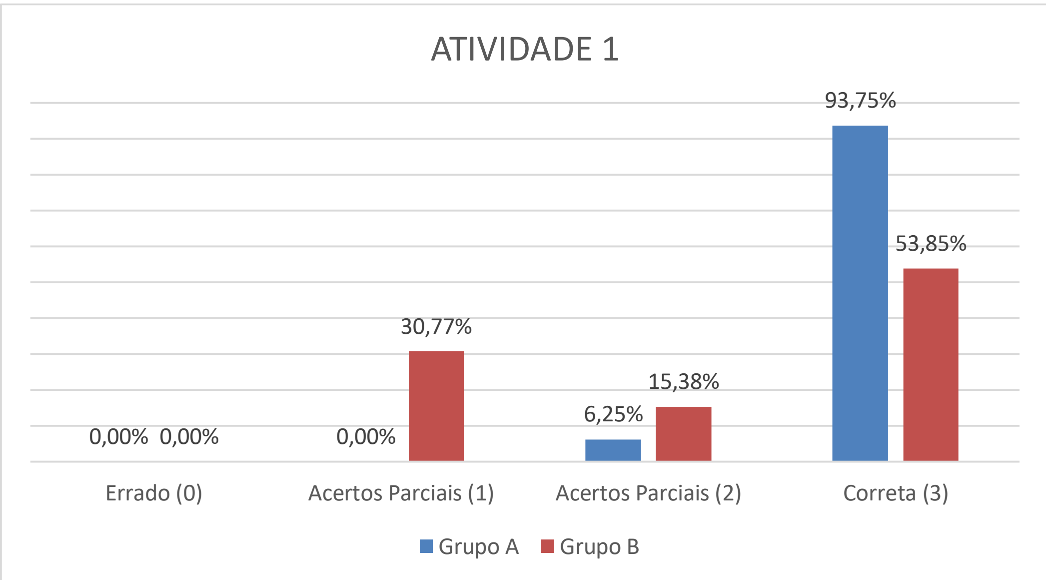
Quadro 4 – Resultado dos estudantes dos diferentes grupos na atividade 1

Categorias	GRUPO A FIXAÇÃO	GRUPO B INTRODUÇÃO	Percentual de acertos do grupo A	Percentual de acertos do grupo B
Errado (0)	-	-	-	-
Acertos Parciais (1)	-	B1, B2, B5, B8	-	30,77%
Acertos Parciais (2)	A6	B3, B6,	6,25%	15,38%
Correta (3)	A1, A2, A3, A4, A5, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16	B4, B7, B9, B10, B11, B12, B13	93,75%	53,85%

Fonte: A pesquisa, 2017.

Esse quadro permite compreender quem são os alunos que estão em cada categoria, observamos ainda que a grande maioria dos alunos da turma A acertou completamente a atividade 1, sobre permutação. No grupo B tiveram maior distribuição entre os nivelamentos de acertos. Vejamos o gráfico comparativo entre os dois grupos.

Gráfico 1 - Resultado dos estudantes dos diferentes grupos na atividade 1

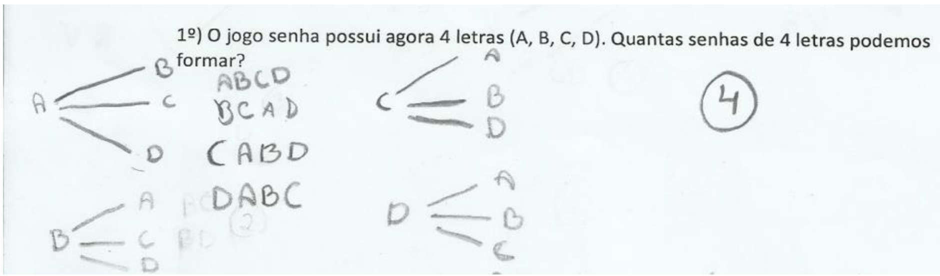


Fonte: A pesquisa, 2017

Como se pode notar na tabela nenhum aluno se enquadrou na categoria “Errado”, portanto, não houve nenhum aluno que não fez pelo menos em parte algumas possibilidades do resultado ou que não utilizaram uma estratégia adequada para o problema proposto.

Em relação à segunda categoria “Acertos parciais 1” gostaríamos de destacar o fato daqueles alunos que apresentaram acerto parcial com enumeração de alguma possibilidade, porém não chegou nem a metade do número correto. O grupo A não teve nenhum aluno que se enquadrou nessa categoria.

Figura 7 – Exemplo da categoria Acertos Parciais (1) retirado do Aluno B5

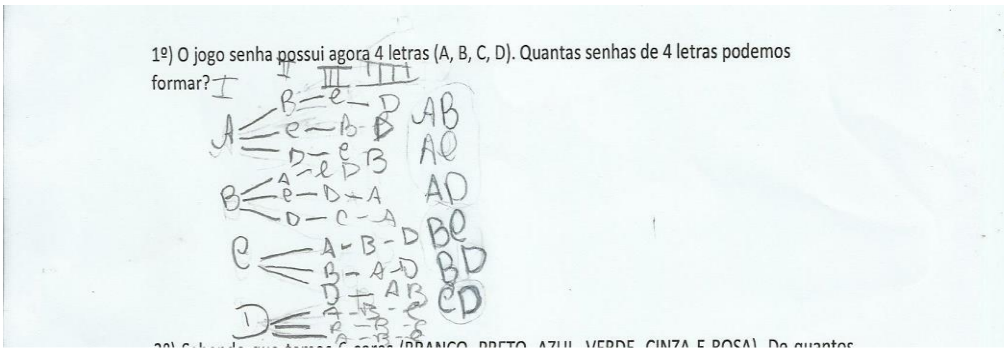


Fonte: A pesquisa, 2017.

O aluno B5 começou uma enumeração não sistemática ou listagem sem fazer uso de estratégias como fixação de algum elemento ou mesmo outro critério para não esquecer as possibilidades, dessa forma só apresenta quatro possibilidades. Esse erro é apontado por Pessoa e Borba(2009) e por Hadar e Hadass (1981). Uma alternativa para auxiliar esse aluno seria a enumeração com as peças do jogo em conjunto com toda turma, com situações com menor número de possibilidades.

Em relação a terceira categoria “Acertos Parciais (2)” gostaríamos de destacar o fato daqueles alunos que acertaram parcialmente, que atingiram a metade ou mais da enumeração das possibilidades.

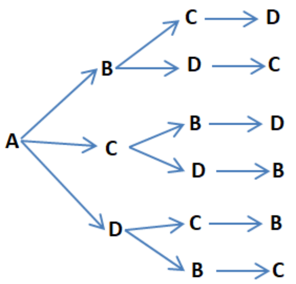
Figura 8 - Exemplo da categoria Acertos Parciais (2) retirado do Aluno B6



Fonte: A pesquisa, 2017.

O Aluno B6 realizou como procedimento a árvore de possibilidades, só faltaram poucas possibilidades. Nesse tipo de enumeração por meio de árvore de possibilidades conseguimos verificar a elaboração de um processo sistemático, no qual fixamos elementos e alternamos os demais. Para auxiliar esse aluno poderíamos tentar complementar as possibilidades ou trabalhar no procedimento de percepção de regularidade, apresentado na Figura 9.

Figura 9 – Resolução do Problema de Permutação por meio da estratégia percepção da regularidade



Iniciamos a árvore de possibilidades com a letra A e contamos 6 possibilidades.

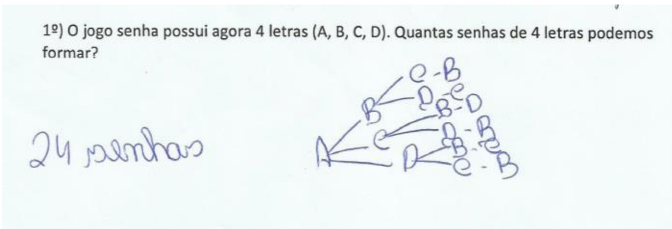
Se começando com A temos 6 possibilidades então se são 4 letras cada uma terá o mesmo número. Logo temos 6 x4 = 24 possibilidades.

Esse procedimento de percepção ou busca de regularidade foi discutido na tese de Pessoa (2009). Nesse trabalho a autora afirma que esse procedimento é utilizado com maior frequência nos problemas de permutação apesar de ser pouco frequente, ainda assim uma estratégia de resolução com bom nível de desempenho. Sobre esse procedimento a autora comenta:

> Em relação à estratégia *percepção ou busca de regularidade*, percebe-se que quanto mais avança nas séries, mais os alunos utilizam esta estratégia, desenvolvida, provavelmente, pelo avanço no trabalho de escolarização, pelo exercício do raciocínio lógico ao longo do tempo, bem como pelas experiências extra-escolares que vão se enriquecendo ao longo dos anos.[...] Nesse tipo de resolução, o aluno inicia, a partir de outra estratégia, o *desenho* ou a *escrita de possibilidades*, por exemplo, e percebe que a tendência se repete na continuação da resolução e, geralmente, realiza uma multiplicação a partir da regularidade percebida. (PESSOA, 2009, p.204)

Em relação a quarta categoria “Correta” gostaríamos de destacar o fato daqueles alunos que acertaram totalmente a questão.

Figura 10 - Exemplo da categoria correta retirado do Aluno A12

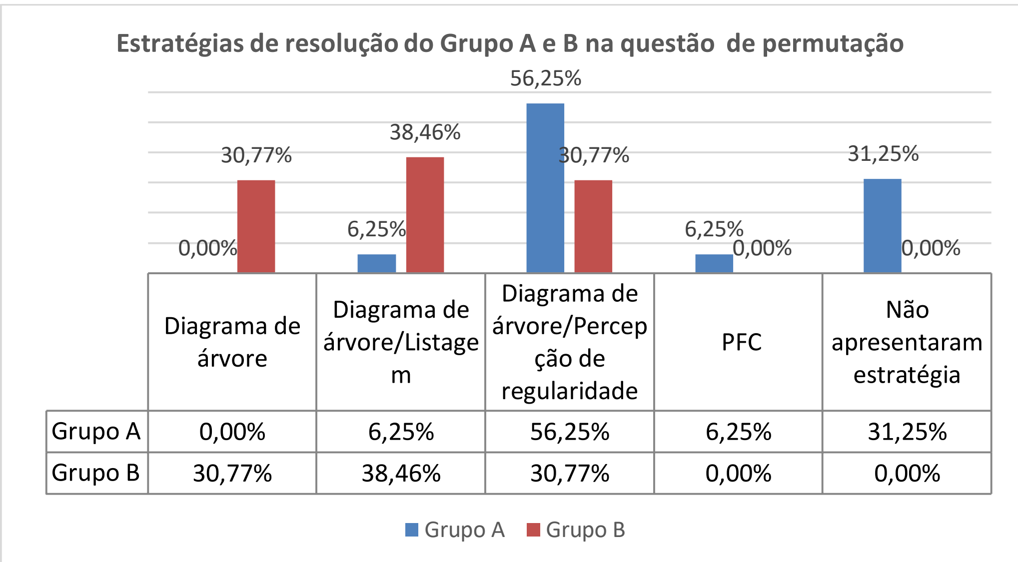


Fonte: A pesquisa, 2017

O aluno A12 utilizou a estratégia de percepção de regularidade, no qual notou que iniciando com a letra A teria 6 possibilidades, ou seja, essa quantidade de possibilidades também aconteceria se iniciasse com a letra B, C ou D, no qual acontece uma regularidade, totalizando assim 24 possibilidades.

Como se pode notar o índice de acertos tanto do Grupo A como do Grupo B foram altos, levando em conta que o Grupo A se saiu um pouco melhor que o grupo B nos problemas do tipo permutação. O Gráfico abaixo mostra a porcentagem de cada uma das estratégias utilizadas pelos diferentes grupos para essa primeira questão. As estratégias e/ou procedimentos de resolução escolhidos pelos estudantes, podem apresentar pistas das compreensões dos alunos sobre os problemas combinatórios.

Gráfico 2 - Estratégias de resolução do Grupo A e B na questão 1



Fonte: A pesquisa, 2017.

No gráfico acima o Grupo B parece preferir a estratégia de árvore de possibilidades ou diagrama de árvore, mas elas aparecem em diferentes níveis de compreensão e em vários momentos com o uso de outros procedimentos como a listagem (em sua maioria) ou a percepção de regularidade. O Grupo A preferiram o diagrama de árvore com a percepção de regularidade e mais de 30 % não apresentaram procedimentos, apenas o número total de possibilidades.

5.2 Análise comparativa da resolução do problema de arranjo (Atividade 2)

A atividade 2 verifica os acertos e erros dos alunos na resolução de problemas de arranjo *Sabendo que temos 6 cores (branco, preto, azul, verde, cinza e rosa). De quantos modos podemos organizar essas cores, sabendo que a senha é composta por 2 cores distintas?”*.

A resposta para esse problema é 30 possibilidades, um possível procedimento para sua resolução seria, pelo PFC, $6 \cdot 5 = 30$, posto que existem 6 possibilidades para escolher a cor da primeira posição, 5 para a segunda posição. A seguir apresentamos a pontuação atribuída os diferentes grupos, disponibilizados no quadro 5.

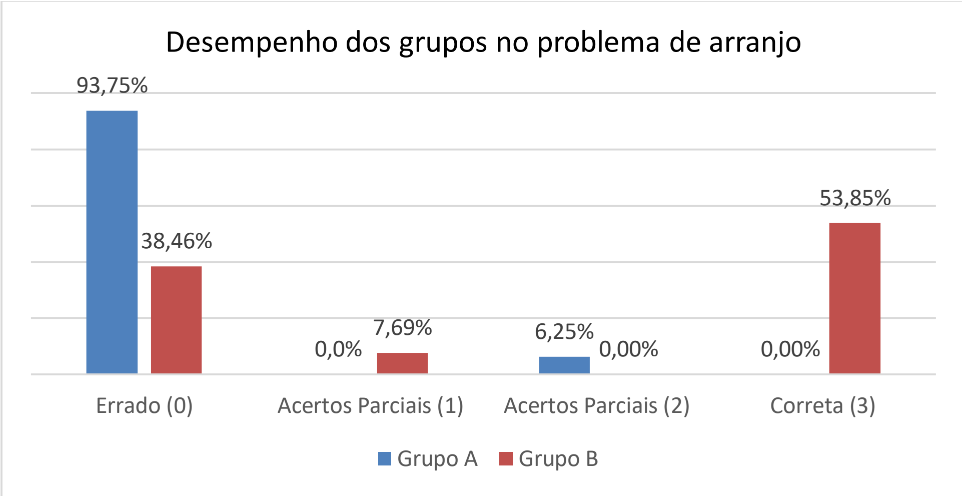
Quadro 5 - Resultado dos estudantes dos diferentes grupos na atividade 2

Categorias	**GRUPO A** FIXAÇÃO	**GRUPO B** INTRODUÇÃO	**Percentual de acertos do grupo A**	**Percentual de acertos do grupo B**
Errado (0)	A1, A2, A3, A4, A5, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16	B2, B4, B6, B7, B8	93,75%	38,46%
Acertos Parciais (1)	-	B3	-	7,69%
Acertos Parciais (2)	A6	-	6,25%	-
Correta (3)	-	B1, B5, B9, B10, B11, B12, B13	-	53,85%

Fonte: A pesquisa, 2017.

Nota-se que o Grupo A apresenta um maior número de erros nessa atividade em comparação com o Grupo B. Apresentamos essa informação no gráfico 2 a seguir:

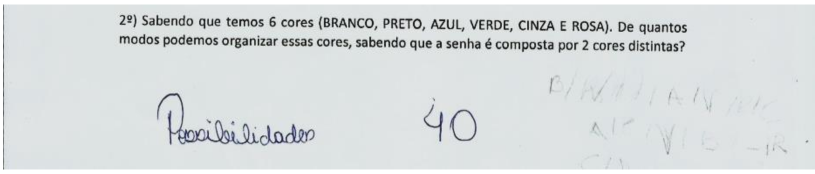
Gráfico 3 - Resultado dos estudantes dos diferentes grupos na atividade 2



Fonte: A pesquisa, 2017

Em relação a primeira categoria "Errado" pode-se notar que o índice nessa categoria em comparação a atividade 1 foi extremamente alto principalmente pelo Grupo A. O que foi notado nessa questão é que a maioria não apresentou uma estratégia de resolução e os que apresentaram a estratégia foram de maneira incorreta.

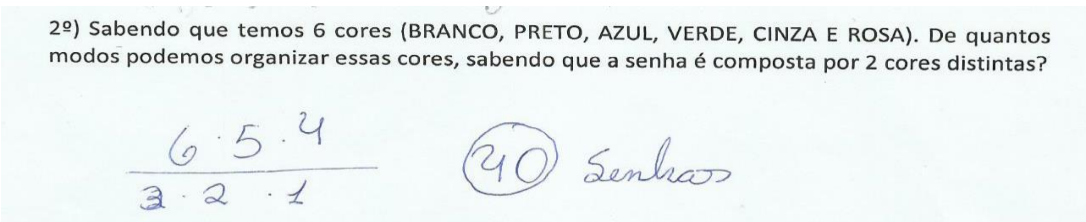
Figura 11 – Protocolo de resolução do Aluno B4, categoria Errada



Fonte: A pesquisa, 2017.

Na figura 11 apresentamos uma resolução, na qual o aluno apenas coloca a resposta incorreta, não apresentando estratégia de resolução. Nota-se que o Aluno B4 tentou fazer de alguma maneira, mas não deixou o registro. Logo abaixo outro exemplo da categoria "errado".

Figura 12 – Protocolo de resolução do Aluno A8, categoria Errada

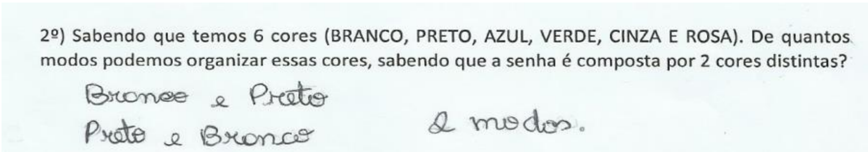


Fonte: A pesquisa, 2017.

Na figura 12 apresentamos uma solução, na qual o aluno utiliza o PFC de forma equivocada, demostrando que não possui o domínio sobre tal procedimento. Para auxiliar esse aluno com utilização desse método, como se trata de um problema de arranjo simples teríamos que mostrar a ele que são 6 cores para primeira posição e 5 cores para segunda opção, que pelo PFC teríamos $6 \cdot 5 = 30$.

Em relação a segunda categoria "Acertos parciais 1". O grupo A não teve nenhum aluno que se enquadrou nessa categoria.

Figura 13 – Protocolo de resolução do Aluno B3, categoria Acertos parciais 1

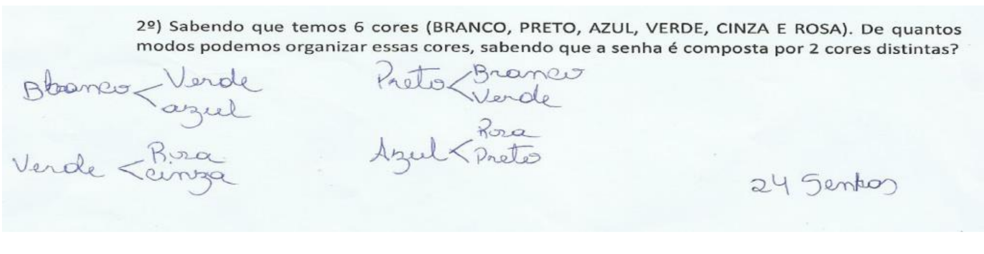


Fonte: A pesquisa, 2017.

O aluno B3 faz apenas a escolha de duas possibilidades, sem fazer menção as outras possíveis opções para essa enumeração. O esgotamento de possibilidades é uma das dificuldades existentes em alunos apontadas por Pessoa e Borba(2009), Rocha(2011), Hadar e Hadass(1981).

Em relação a terceira categoria "Acertos parciais 2". O grupo B não teve nenhum aluno que se enquadrou nessa categoria. A seguir apresentamos um exemplo.

Figura 14 - Protocolo de resolução do Aluno A6, categoria Acertos parciais 2

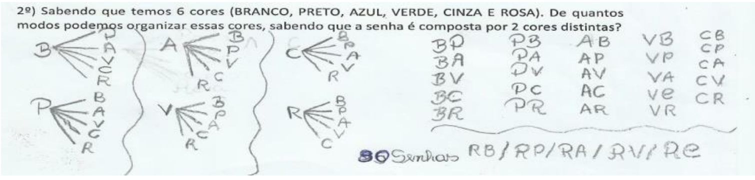


Fonte: A pesquisa, 2017

Nesse caso, o aluno inicia um tipo de enumeração com base em árvore de possibilidade, mas não busca uma sistematização para alcançar o esgotamento das possibilidades, ele começa bem, fixando um elemento, mas precisa fazer a sistematização dos elementos. Nesse caso, esse tipo de resolução pode servir de início para que os alunos a complementem, de modo a não esquecer nenhuma das possibilidades. No contexto do jogo Master Mind podemos fazer essa proposta para o acompanhamento da enumeração.

Em relação a quarta categoria "Correta 3". O grupo A não teve nenhum aluno que se enquadrou nessa categoria. A seguir apresentamos um exemplo.

Figura 15 - Protocolo de resolução do Aluno B12, categoria Correta 3



Fonte: A pesquisa, 2017.

O aluno B12, utilizou o diagrama de arvore e também a listagem como estratégia de resolução. Na listagem, observamos uma enumeração sistemática, pois segue uma sequência ordenada onde fixa o elemento e distribui os demais. O aluno utilizou cada letra da cor como símbolo para listagem e foram listadas todas as possibilidades.

Vejamos o gráfico dos diferentes tipos de procedimentos utilizados pelos estudantes na resolução do problema de arranjo.

Gráfico 4- Estratégias de resolução do Grupo A e B na questão 2

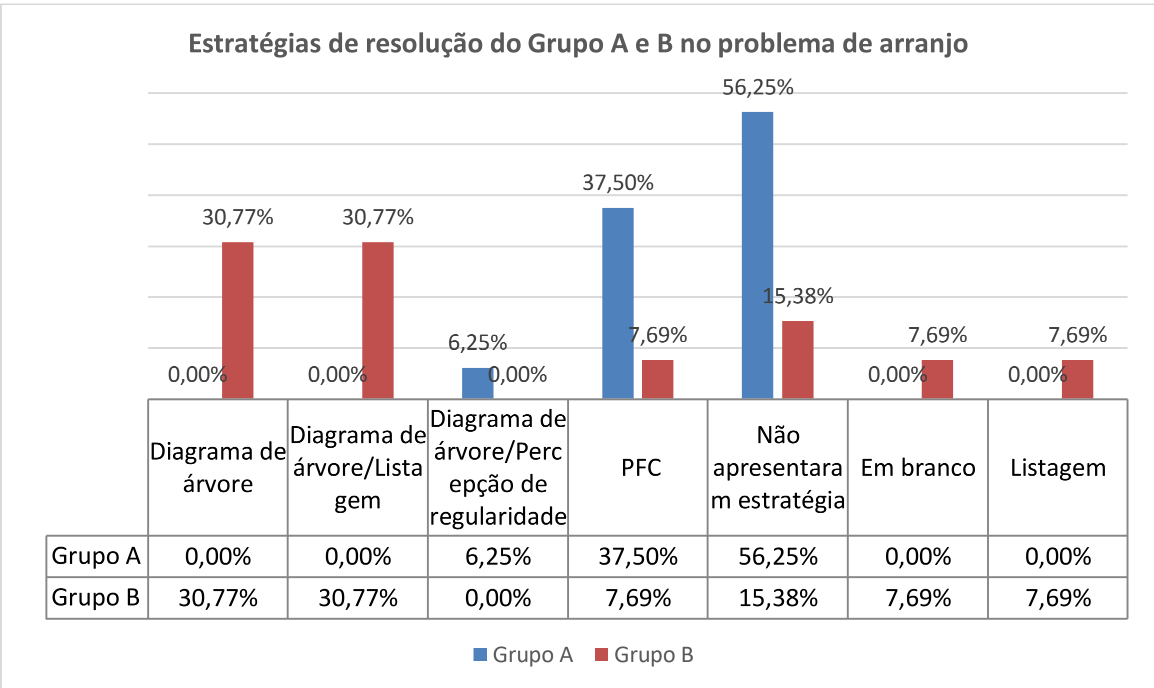


	Diagrama de árvore	Diagrama de árvore/Listagem	Diagrama de árvore/Percepção de regularidade	PFC	Não apresentaram estratégia	Em branco	Listagem
Grupo A	0,00%	0,00%	6,25%	37,50%	56,25%	0,00%	0,00%
Grupo B	30,77%	30,77%	0,00%	7,69%	15,38%	7,69%	7,69%

Fonte: A pesquisa, 2017.

No gráfico acima retirando o "Não apresentaram estratégia" o grupo A utilizou mais o PFC como método de resolução do problema 2. Mas no quadro 5 foi mostrado que a porcentagem de erro desse grupo foi extremamente alto, no qual foi notado um uso equivocado do procedimento de resolução do PFC.

Na figura 12, anteriormente discutida, o aluno utilizou no numerador $6 \cdot 5 \cdot 4$ e no denominador $3 \cdot 2 \cdot 1$, o que foi entendido é que cada número desse corresponde a uma determinada cor e como se trata de escolher 2 cores distintas, o aluno dividiu essas cores em dois grupos e posteriormente o dividiu no qual gerou o seu grande erro. Ressaltando novamente a resolução desse problema, o aluno simplesmente poderia utilizar $6 \cdot 5$, pois teríamos 6 cores disponíveis para primeira escolha e 5 cores disponíveis para segunda escolha.

5.3 Análise comparativa da resolução do problema de combinação (Atividade 3)

A atividade 3 envolve o conhecimento sobre combinação *"O jogo senha tem três posições. Sabendo que temos 6 cores (branco, preto, azul, verde, cinza e rosa). De quantos modos podemos escolher três cores diferentes para iniciar o jogo?"*. A resposta para esse problema é 20 possibilidades, um possível procedimento para sua resolução seria, pelo PFC, $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$. A seguir apresentamos a pontuação atribuída os diferentes grupos, disponibilizados no quadro 6.

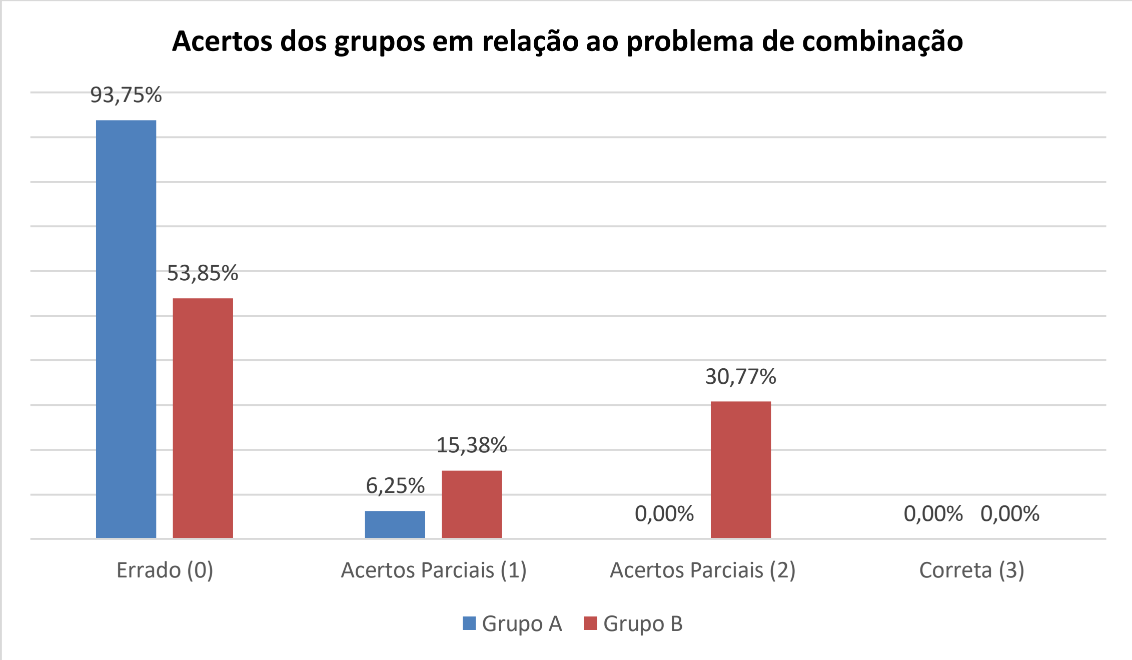
Quadro 6 – Categorias elaboradas para a atividade 3

Categorias	**GRUPO A** FIXAÇÃO	**GRUPO B** INTRODUÇÃO	**Percentual do grupo A**	**Percentual do grupo B**
Errado (0)	A1, A2, A3, A4, A5, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16	B1, B2, B4, B5, B6, B7, B8	93,75%	53,85%
Acertos Parciais (1)	A6	B3, B13	6,25%	15,38%
Acertos Parciais (2)	-	B9, B10, B11, B12	-	30,77%
Correta (3)	-	-	-	-

Fonte: A pesquisa, 2017.

Observamos que nesse tipo de problema não houve nenhum acerto total, principalmente no Grupo A. Apenas pelo grande número de erros não podemos apresentar uma justificativa,

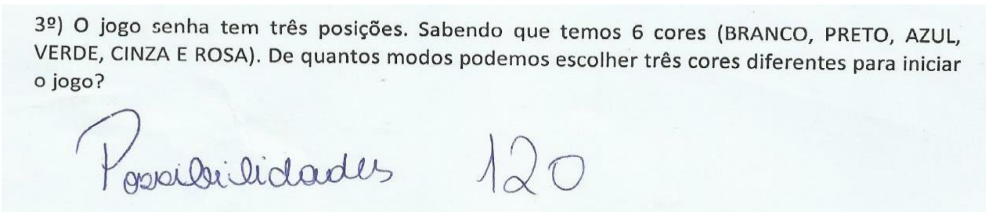
Gráfico 3 - Resultado dos estudantes dos diferentes grupos na atividade 3



Fonte: A pesquisa, 2017.

Muitos alunos nessa atividade colocaram apenas respostas sem a devida apresentação da estratégia de resolução, o que pode ser devido ao uso do Princípio Fundamental da Contagem de forma mental. Um exemplo que parece se adequar a justificativa disponibilizamos na figura a seguir.

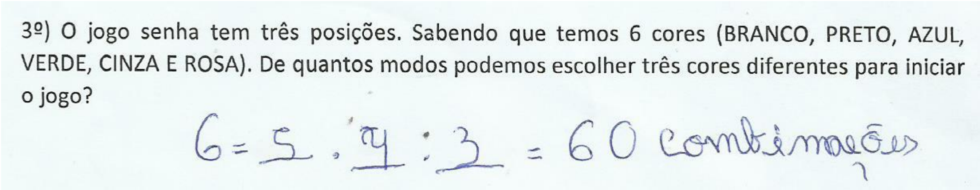
Figura 16 - Protocolo de resolução do Aluno B4, categoria Errado 0



Fonte: A pesquisa, 2017.

Em relação a segunda categoria "Acertos parciais 1", observamos diferentes tipos de estratégias de resolução, tal como árvore de Possibilidades, ou listagem, ou como a apresentada na Figura 16 que usa como estratégia o Princípio Fundamental da Contagem, tal como indica Lima (2015) e o documentos curriculares oficiais como Brasil (1998) e Pernambuco (2012).

Figura 17 - Protocolo de resolução do Aluno A1, categoria Acertos parciais 1


3º) O jogo senha tem três posições. Sabendo que temos 6 cores (BRANCO, PRETO, AZUL, VERDE, CINZA E ROSA). De quantos modos podemos escolher três cores diferentes para iniciar o jogo?

6 = 5 . 4 : 3 = 60 combinações

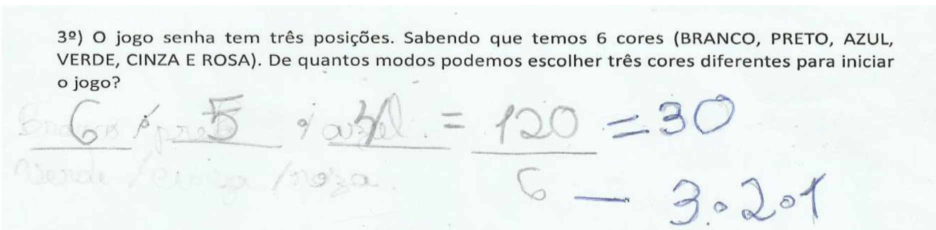
Fonte: A pesquisa, 2017.

Nesse caso, apesar do aluno utilizar o PFC, ele não o usa corretamente, pois aplica em um problema de combinação, a resolução de arranjo, ou seja, ele não desconsidera a ordem dos elementos em questão, já que para problemas de combinação, a possibilidade (Branco, Preto e Azul) é a mesma que (Preto, Azul e Branco). Esse equívoco é bastante comum na resolução de problemas combinatórios, Rocha (2011) afirma que professores de diferentes níveis de ensino também apresenta essa mesma dificuldade. Na pesquisa de Lima (2015) sobre conhecimento de professores com relação aos erros cometidos por alunos no uso do PFC, segundo a autora:

> Os professores comentam como alguns alunos fazem incorretamente a multiplicação direta dos valores enunciados na situação e ressaltam que falta a alguns estudantes a compreensão de qual multiplicação, por meio do PFC, podem corretamente solucionar cada situação." (LIMA, 2015, p.124-125)

Em relação a segunda categoria "Acertos parciais 2". O grupo A não teve nenhum aluno que se enquadrou nessa categoria. A seguir apresentamos um exemplo.

Figura 18 - Protocolo de resolução do Aluno B10, categoria Acertos parciais 2


3º) O jogo senha tem três posições. Sabendo que temos 6 cores (BRANCO, PRETO, AZUL, VERDE, CINZA E ROSA). De quantos modos podemos escolher três cores diferentes para iniciar o jogo?

Branco 6 / preto 5 / azul 4 = 120 = 30

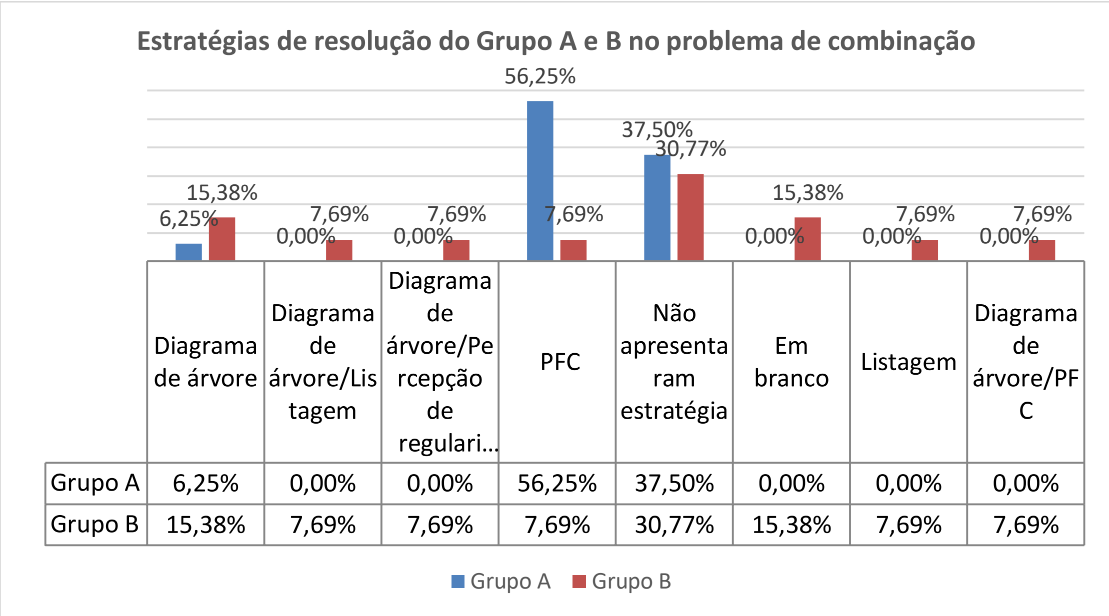
verde / cinza / rosa 6 — 3.2.1

Fonte: A pesquisa, 2017

O aluno B10 utilizou o PFC como método de resolução para o problema da questão 3, como se pode observar o aluno inicialmente executou o PFC de forma correta, seu erro foi na execução da divisão de $\frac{120}{6} = 20$ e não 30. O erro cometido pelo aluno foi um erro de execução, que "[...] acontecem quando o aluno comete um equívoco na utilização de uma estratégia adequada ao resolver um problema" (DE LA TORRE (2007) apud RAMOS e CURI, 2014, p.31).

Observamos a partir do gráfico 5 que nesse caso os problemas de combinação são os que os alunos apresentam maior dificuldade, pois nenhum deles conseguiram acertar completamente a atividade. E torna-se ainda mais difícil para o Grupo A já que por sua vez, não aparece nenhum acerto parcial 2. Com relação as estratégias de resolução, organizamos o gráfico por dos grupos na questão 3.

Gráfico 5 – Estratégias de Resolução do Grupo A e B na Questão 3



Fonte: A pesquisa, 2017.

Vemos que grande parte do Grupo A prefere utilizar o PFC como estratégia e que isso, não auxiliou no desenvolvimento correto do problema de combinação, acreditamos que o jogo Master Mind pode permitir o trabalho com combinação, mas o grupo b que não apresentou estratégia definida na maioria dos casos teve melhor desempenho nesse tipo de problema. Como o jogo utiliza a ordenação como critério fundamental na maioria dos casos, pode ter gerado um empecilho na compreensão de problemas de combinação.

Para realizar outro tipo de comparação entre os grupos, resolvemos atribuir uma nota de zero a dez nessas três questões, fazendo relação aos acertos totais e parciais apresentados. O grupo A obteve média geral de aproximadamente 3,5, enquanto que o grupo B obteve média geral de 5,2. Para compararmos as médias entre cada tipo de problema combinatório organizamos a tabela a seguir:

Tabela 1 – Média por tipo de problema combinatório

Tipo de problema combinatório	Média do Grupo A	Média do Grupo B

Permutação	3,26	2,48
Arranjo	0,14	1,88
Combinação	0,07	0,85

Com base no exposto, podemos perceber que alunos do grupo A tiveram maior desempenho no problema de permutação, pois apenas um aluno teve um acerto parcial 2, os demais acertaram totalmente o problema. O aluno A6 foi o único de seu grupo que conseguiu responder parcialmente o problema de arranjo e de combinação, pois nenhum dos demais apresentou acertos nem totais nem parciais nos problemas de arranjo e combinação. O aluno A6 utilizou o diagrama de árvore como método de resolução para os diferentes tipos de problemas combinatórios, resultando no melhor desempenho de seu grupo. Isso só é possível devido ao baixo numero de possibilidades dos problemas.

Já os alunos do Grupo B obtiveram melhor desempenho nos problemas de arranjo e combinação que o grupo A, porém não tiveram acertos totais nos problemas de combinação. O que foi notado que a maioria dos alunos tanto do grupo A e B resolveram os problemas de combinação como se fosse um arranjo, no qual acarretou um grande índice de erros. O jogo pode auxiliar na listagem, para assim ter uma visualização dessas diferenças, o que pode ser feito em conjunto com as diferentes duplas, para que não se torne cansativo.

Os alunos B9, B10, B11 e B12 obtiveram a maior média, chegando a ficar com aproximadamente 8,9, no entanto, os alunos B2 e B8 tiveram média de 1,1, pois apenas acertaram parcialmente o problema de permutação. O B9 utilizou os métodos de resolução: diagrama de árvore/percepção de regularidade, diagrama de árvore, diagrama de árvore/listagem; o B10 os seguintes métodos: diagrama de árvore/percepção de regularidade, PFC; B11 os seguintes métodos: diagrama de árvore/percepção de regularidade, diagrama de árvore/listagem; B12 os seguintes métodos: diagrama de árvore/percepção de regularidade, diagrama de árvore/listagem, diagrama de arvore/PFC. Como se pode observar o diagrama de árvore foi o mais utilizado, mostrando assim uma maior eficácia na resolução dos problemas propostos, mas houve a necessidade de outros procedimentos.

5.4 Análises das impressões dos estudantes sobre a aula com o uso do jogo Master Mind

Nessa seção discutimos as impressões dos alunos sobre a aula com o jogo matemático, a avaliação da aula pelos estudantes, alterações na dinâmica do jogo e a relação que faz disso com a combinatória. Algumas categorias qualitativas foram criadas pela junção das respostas dos alunos, as quais foram dispostas em quadros e comparadas em gráficos conforme apresentamos nas subseções.

5.4.1 Avaliação sobre a aula pelos estudantes

A atividade 4 é sobre impressões a respeito da aula por meio do jogo *"Como você avalia a aula do jogo senha. Justifique. Gostaria de outras aulas como essa?"*. A discussão das expectativas geradas nas aulas com os alunos auxilia também no preparo de aulas com uso de recurso de jogos matemáticos e deve ser levado em consideração pelo professor. A seguir apresentamos uma tabela de opiniões dos diferentes grupos, disponibilizados no quadro 7.

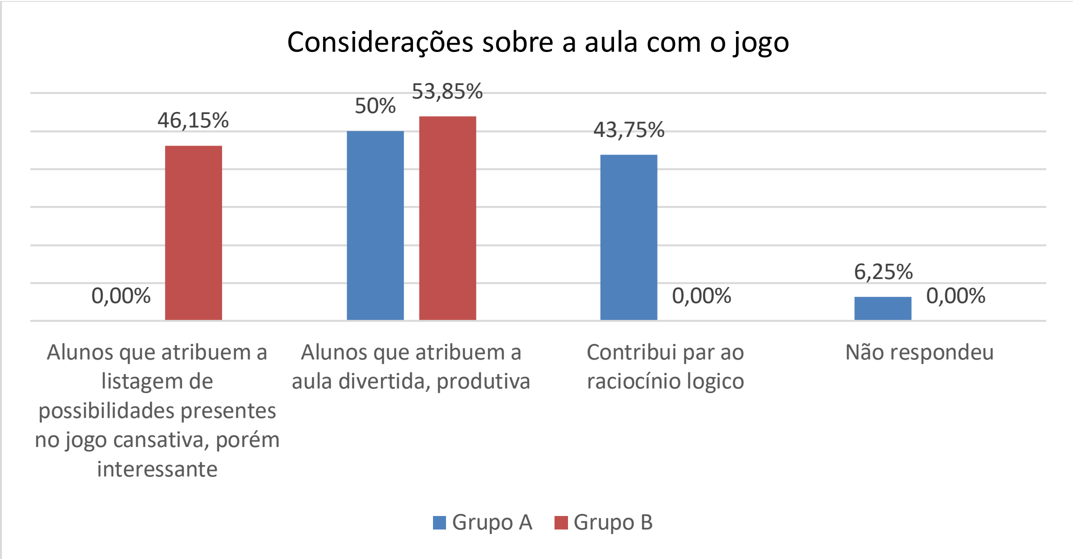
Quadro 7 – Categorias elaboradas para a atividade 4

Categorias	**GRUPO A** FIXAÇÃO	**GRUPO B** INTRODUÇÃO	**Percentual de acertos do grupo A**	**Percentual de acertos do grupo B**
Alunos que atribuem a listagem de possibilidades presentes no jogo cansativa, porém interessante	-	B1, B2, B7, B8, B9, B13	-	46,15%
Alunos que atribuem a aula divertida, produtiva	A3, A6, A7, A9, A10, A12, A13, A14	B3, B4, B5, B6, B10, B11, B12	50%	53,85%
Contribui para o raciocínio lógico	A1, A2, A4, A5, A8, A11, A15	-	43,75%	-
Não respondeu	A16	-	6,25%	-

Fonte: A pesquisa, 2017.

Observamos perspectivas semelhantes nos dois grupos investigados, pois ambos consideraram a aula divertida e produtiva em sua maioria. No entanto, atribuem ainda características individuais por grupo. O Grupo A considera que o jogo desenvolve o raciocínio lógico, enquanto o Grupo B, considera a listagem das possibilidades utilizadas como registros das atividades cansativas. Nesse caso, devemos tomar maior cuidado para que esse tipo de registro não se transforme na perda da ludicidade, como afirma Grando (2000.)

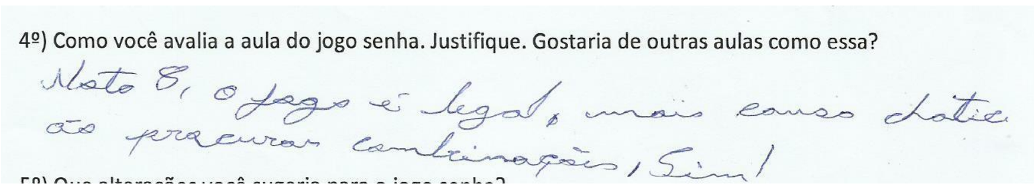
Gráfico 6 - Resultado dos estudantes dos diferentes grupos na atividade 4



Fonte: A pesquisa, 2017.

Em relação a primeira categoria “Alunos que atribuem a listagem de possibilidades presentes no jogo cansativa, porém interessante”. O grupo A não teve nenhum aluno que se enquadrou nessa categoria.

Figura 19 - Protocolo de resolução do Aluno B3,


4º) Como você avalia a aula do jogo senha. Justifique. Gostaria de outras aulas como essa?

Nota 8, o jogo é legal, mais causo chatice ao procurar combinações, Sim!

Fonte: A pesquisa, 2017.

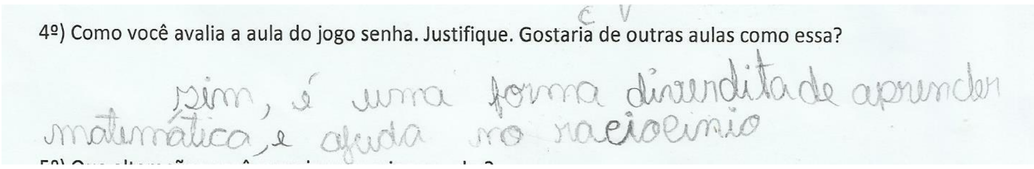
Grando (2000, p.46) afirma que “Ao explorarmos o jogo pedagogicamente[...] “destruímos” o jogo em sua essência, na medida em que deixou de ser uma atividade a ser realizada voluntariamente, pelo simples prazer que ela proporciona”. Segundo essa autora durante a atividade com jogos matemáticos devemos:

> [...]estabelecer um momento em que o processo de análise do jogo e intervenção realizados, possam fazer sentido, no contexto do próprio jogo. Analisa-se para jogar melhor, para identificar estratégias vencedoras e testá-las. Além disso, durante as intervenções verbais e escritas, procura-se interferir o menos possível, deixando o jogo seguir o seu movimento. (GRANDO, 2000, p.46).

Como a maioria dos alunos considerou a aula divertida, realmente esse fator não pode ser considerado a "morte do jogo", mas o professor que trabalhar com esse jogo deve alertar para não inserir a enumeração das possibilidades além do necessário.

A segunda categoria "Alunos que atribuem a aula divertida, produtiva" foi aquela comum nos dois grupos e foi a mais frequente entre ambos. Na figura 19 apresentamos um exemplo.

Figura 20 - Protocolo de resolução do Aluno B3,

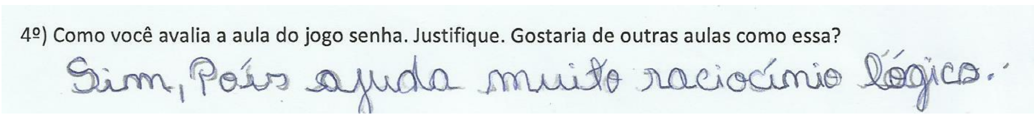

4º) Como você avalia a aula do jogo senha. Justifique. Gostaria de outras aulas como essa?

Sim, é uma forma diverdita de aprender matemática, e ajuda no raciocinio

Fonte: A pesquisa, 2017.

A terceira categoria "Contribui para o raciocínio logico" foi apresentada pelo Grupo A. O grupo B não teve nenhum aluno que se enquadrou nessa categoria.

Figura 21 - Protocolo de resolução do Aluno A1


4º) Como você avalia a aula do jogo senha. Justifique. Gostaria de outras aulas como essa?

Sim, Pois ajuda muito raciocínio lógico.

Fonte: A pesquisa, 2017.

Observamos que a avaliação do jogo segundo os alunos foi bastante positiva, no entanto, a listagem de possibilidades para seu esgotamento, foi um ponto que os alunos do grupo B frisaram que era um pouco cansativa. Acreditamos que podemos melhorar essa situação com questões que os alunos apenas complementem a listagem, ao invés de ter que fazer todas. \

A atividade 5 é sobre impressões a respeito do jogo *"Que alterações você sugeria para o jogo senha?"*. A seguir apresentamos uma tabela de opiniões dos diferentes grupos, disponibilizados no quadro 8.

Quadro 8 – Categorias elaboradas para a atividade 5

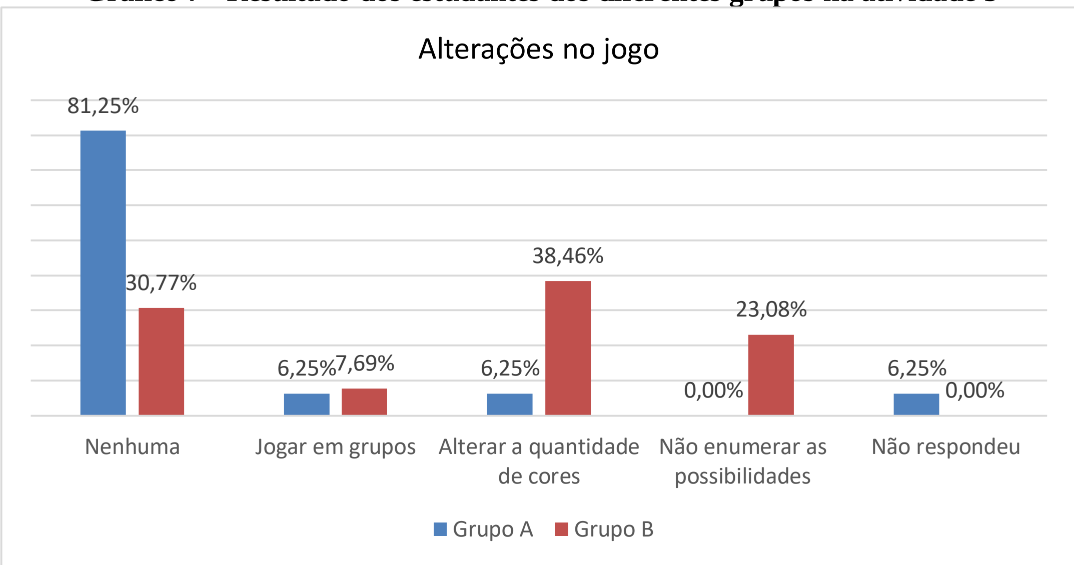
Categorias	**GRUPO A** FIXAÇÃO	**GRUPO B** INTRODUÇÃO	**Percentual do grupo A**	**Percentual do grupo B**
Nenhuma	A2, A3, A4, A5, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15	B4, B7, B8, B11	81,25%	30,77%
Jogar em grupos	A6	B3	6,25%	7,69%

Alterar a quantidade de cores	A1	B1, B5, B10, B12, B13	6,25%	38,46%
Não enumerar as possibilidades	-	B2, B6, B9	-	23,08%
Não respondeu	A16	-	6,25%	-

Fonte: A pesquisa, 2017.

Notamos que muitos alunos consideram a atividade com o jogo positiva de modo a não sugerirem nenhuma alteração. Mas algumas situações foram propostas por eles como atividades de jogar em grupos, como disputa parece ser comum em ambos grupos porém em baixa frequência. Outras sugestões ficaram a cargo das alterações para mais, ou para menos do número de cores.

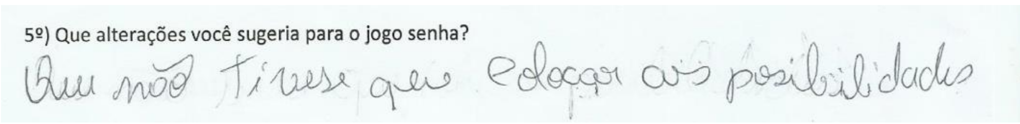
Gráfico 7 - Resultado dos estudantes dos diferentes grupos na atividade 5



Fonte: A pesquisa, 2017.

Corroborando o exposto na seção anterior, surgiu a quarta categoria "Não enumerar as possibilidades". O grupo A não teve nenhum aluno que se enquadrou nessa categoria, observamos alguns exemplos, no Grupo B tal como apresentado na figura a seguir:

Figura 22 - Protocolo de resolução do Aluno B6



Fonte: A pesquisa, 2017.

Desse modo, podemos evidenciar a boa aceitação do jogo pelos estudantes dos diferentes grupos. Apenas três estudantes consideraram a enumeração das possibilidades como uma possível alteração para o jogo.

5.4.3 Aprendizagem sobre combinatória pelos estudantes

A atividade 6 é sobre impressões a respeito do jogo *"O que você aprendeu de combinatória no jogo senha?"*. A seguir apresentamos uma tabela de opiniões dos diferentes grupos, disponibilizados no quadro 9.

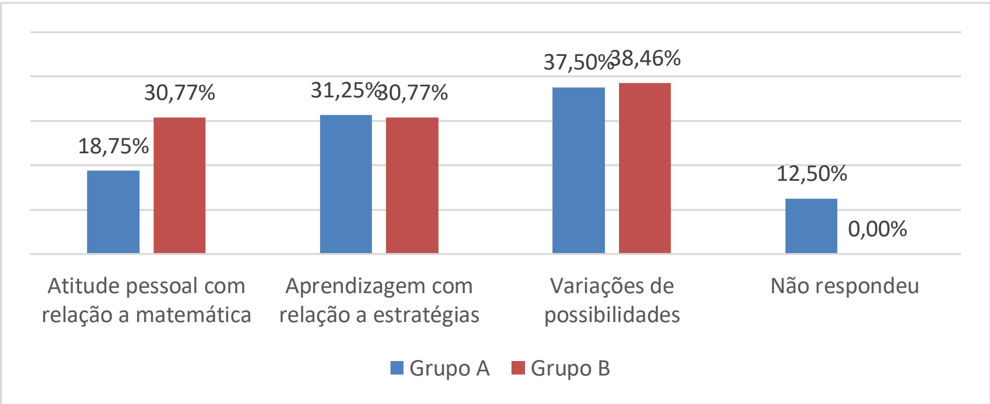
Quadro 9 - Categorias elaboradas para a atividade 6

Categorias	GRUPO A	GRUPO B	Percentual do grupo A	Percentual do grupo B
Atitude pessoal com relação a matemática	A10, A14, A15	B1, B4, B7, B9	18,75%	30,77%
Aprendizagem com relação a estratégias	A3, A5, A6, A8, A13	B2, B8, B10, B11	31,25%	30,77%
Variações de possibilidades	A1, A2, A4, A7, A9, A11	B3, B5, B6, B12, B13	37,50%	38,46%
Não respondeu	A12, A16	-	12,50%	-

Fonte: A pesquisa, 2017.

Observamos que houveram variadas proposições entre os grupos e foram quase uniformemente distribuídas entre às categorias. A pouca diferença entre elas representa características diferentes presentes em situações combinatórias principalmente cm relação a aprendizagem de procedimentos de estratégias, como também com relação a variadas possibilidades (a categoria mais frequente nos dois grupos). Outra categoria que também surpreendeu diz respeito a atitudes e sentimentos com relação a resolução de problemas combinatórios.

Gráfico 8 - Resultado dos estudantes dos diferentes grupos na atividade 6

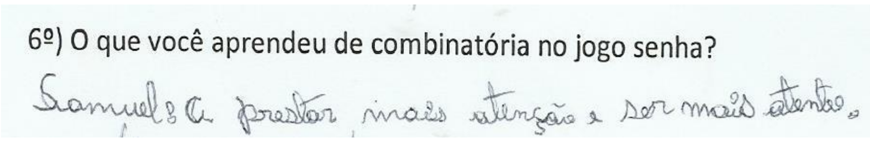


Fonte: A pesquisa, 2017.

Podemos observar no gráfico que não houve diferenças entre os grupos o que não podemos justificar. Talvez se considerarmos que ambas as turmas tiveram a primeira experiência com combinatória, por meio do jogo o fato de já conhecer o conteúdo, e está vendo pela primeira vez não foi determinante para um diferença considerável de respostas.

Em relação a primeira categoria "Atitude pessoal com relação a matemática". Foram aquelas afirmações que apresentavam ganho pessoal ou com relação ao raciocínio ou a atenção, vejamos um exemplo a seguir:

Figura 23 - Protocolo de resolução do Aluno B1

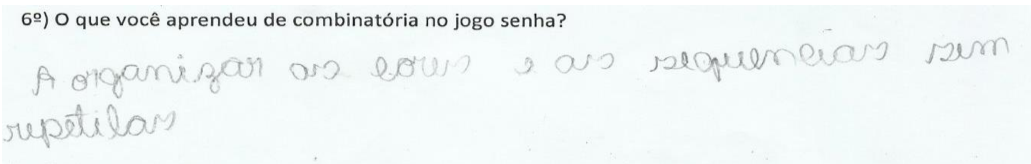

6º) O que você aprendeu de combinatória no jogo senha?

Samuel: A prestar mais atenção e ser mais atento.

Fonte: A pesquisa, 2017.

Outras aprendizagens que eles elencaram dizem respeito a conhecer estratégias de resolução diferentes, a qual denominamos de "Aprendizagem com relação a estratégias". Vejamos alguns exemplos.

Figura 24 - Protocolo de resolução do Aluno B11


6º) O que você aprendeu de combinatória no jogo senha?

A organizar as cores e as sequencias sem repetilas

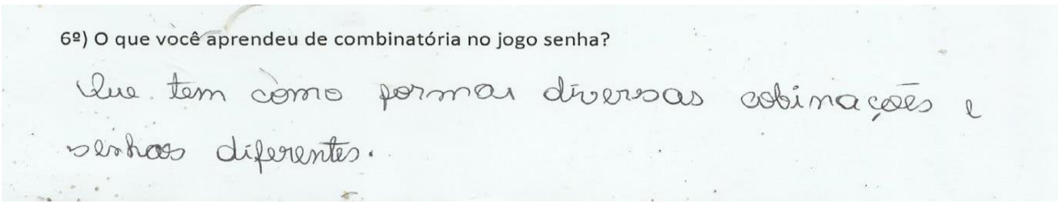
Fonte: A pesquisa, 2017.

Nesse caso, esse aspecto que os alunos evidenciaram corrobora com o apresentado pro Grando (2000), como também pelo PCN (BRASIL, 1998) quando afirma sobre o uso de jogos matemáticos para a valorização de estratégias de solução próprias:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações (BRASIL, 1998, p.47)

Na terceira categoria denominada "Variações de possibilidades", os alunos apresentam a noção de como as possibilidades e que dependem da quantidade de cores e elementos a combinar.

Figura 25 - Protocolo de resolução do Aluno B3

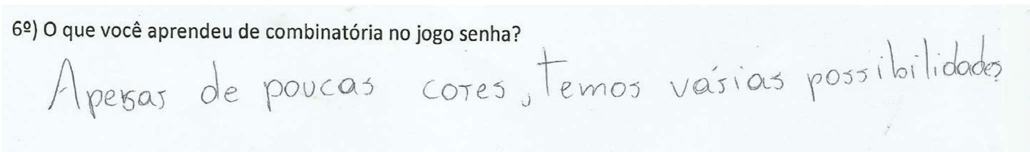

6º) O que você aprendeu de combinatória no jogo senha?

Que tem como formar diversas cobinações e senhas diferentes.

Fonte: A pesquisa, 2017.

Nesses dois extratos observamos diferenças de linguagens para se referir as opções ou variedade de possibilidades, como apresentado nas figuras 25 e 26.

Figura 26 - Protocolo de resolução do Aluno B2


6º) O que você aprendeu de combinatória no jogo senha?

Apesar de poucas cores, temos várias possibilidades

Fonte: A pesquisa, 2017.

Observamos ainda elementos de linguagem adquiridos com o jogo, o que corrobora com a pesquisa de Ferreira et al(2015), Grando(2000), entre outros. Nessas figuras observamos palavras como 'organizar', 'várias possibilidades', 'sequências', 'diversas combinações' que auxiliam na discussão de propriedades e características de problemas combinatórios.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho buscamos aplicar duas intervenções com dois grupos distintos com metodologias diferentes, ou seja, a utilização do jogo para fixação ou o para introdução de conteúdo. Os materiais e explicação do conteúdo foram os mesmos o que só foi alterado foi a ordem de seguimento da aula de intervenção. Vale salientar que enquanto professor, utilizar o jogo como introdução de conteúdo consegui fazer com que a maioria dos alunos estava buscando a todo o momento aprender, sempre tirando dúvidas e fazendo questionamentos sobre o jogo e o assunto.

Por ser a primeira vez de contato com a combinatória, o uso do jogo na sala e o pouco tempo utilizado, pois foram utilizados apenas 2 horas-aula. Acreditamos que para melhor aprofundamento nas dificuldades encontradas pelos alunos seria mais adequado 3 ou 4 horas aulas, mas apesar do exposto, consideramos os resultados satisfatórios apesar do pouco tempo utilizado. O que foi notado que o grupo A se saiu melhor apenas no primeiro problema (permutação), nos problemas de arranjo e combinação o grupo B se saiu melhor, o que significa que o jogo como introdutor de conhecimento possui uma maior eficácia para o ensino e a aprendizagem da combinatória. As estratégias de resolução utilizadas pelos diferentes grupos para resolver os diferentes problemas foram: diagrama de árvore, diagrama de árvore/percepção de regularidade, diagrama de árvore/PFC, diagrama de árvore/listagem, PFC, listagem. Teve também aqueles alunos que deixaram em branco e alguns que não apresentaram nenhuma estratégia de resolução, ou seja, só resultado final.

Destacamos também que durante a intervenção foi focado na explicação para resolução dos problemas a utilização do diagrama de árvore e o PFC, levando em considerações que o diagrama de árvore além de nos possibilitar a quantidade de possibilidades de uma determinada questão, também nos possibilita a listagem de todas as possibilidades, lembrando que as questões que foram abordadas poderiam ser todas utilizadas árvore, pois não ia dificultar tanto a enumeração dos casos, pois o problema utilizava poucas cores, que geravam poucas possibilidades.

O Master Mind, assim como qualquer outro jogo possui suas limitações, dentre essas limitações nós temos o tempo, pois a utilização do jogo requer um tempo maior do que uma aula tradicional de combinatória, ou seja, sem ferramentas extras para o auxílio da aprendizagem, em quanto uma aula tradicional levaria 2h/aulas em média, uma aula com esse jogo levaria de 3h a 4h/aulas. Portanto, sugerimos outros trabalhos que investiguem a diferença de desempenho de estudantes em aulas com e sem o uso de jogos para o ensino de combinatória.

Além disso, outros conceitos podem ser trabalhados com o jogo Master Mind, como por exemplo, trabalhar no ensino da probabilidade. No presente trabalho não houve tempo hábil para a realização de um pré-teste, dessa forma sugerimos esse acréscimo para uma nova pesquisa, para ter uma aproximação das alterações entre os resultados adquiridos ao longo do trabalho, pois assim ficariam mais evidentes as modificações que poderiam ser realizadas com o jogo, a fim de obter um melhor resultado possível. Outra sugestão diz respeito a utilização desse jogo em diferentes anos do Ensino Fundamental para verificar as diferenças entre esses anos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA: A. L. de; FERREIRA, A. C. Aprendendo análise combinatória através da resolução de problemas: um estudo com classes de 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio. In: IV Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, 4., 2009, Ouro Preto. **Anais..,** Ouro Preto: UFOP, 2009. p.1-20. Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/261-1-A-gt11_almeida_e_ferreira_ta.pdf. Acesso em

BASTOS, Antonio Carlos; VICTER, Eliane das Flores. **O Ensino e a Aprendizagem da Análise Combinatória no Ensino Médio.** I Encontro de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática: questões atuais, 2013.

BASTOS, Antonio Carlos. **O Ensino da Análise Combinatória em Sala de Aula, a Partir de Situações-Problema e Sob uma Abordagem Histórica.** Programa de Pós Graduação em Ensino das Ciências na Educação Básica – Unigranrio, 2013.

BORBA, R. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013, Curitiba. **Anais**... Curitiba: ENEM, 2013

BORBA, R. Combinando na vida e na escola: limites e possibilidades. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, 2016, São Paulo...**Anais...**São Paulo: ENEM, 2016

BORBA, R.; PESSOA, C. O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X, 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: ENEM, 2010

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Matemática. Brasília, DF: MEC, SEF, 1998.

______. **PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

______. **Planejando a Próxima Década**: conhecendo as 20 Metas do Plano Nacional de Educação. Brasília: MEC, SEMTEC, 2014. Disponível emhttp://pne.mec.gov.br/images/pdf/pne_conhecendo_20_metas.pdf Acesso em 20 dez 2017.

CARDOSO, Evelyn Rosana**. Jogos Matemáticos no Contexto Escolar.** Trabalho apresentado como parte dos requisitos para conclusão do PDE – Programa de Desenvolvimento Educacional, 2008.

CHAER, Galdino. DINIZ, Rafael Rosa Pereira; RIBEIRO, Elisa Antônia. A técnica do questionário na pesquisa educacional**. Evidência**, Araxá, v. 7, n. 7, p. 251-266, 2011 Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/maio2013/sociologia_artigos/pesqusia_social.pdf. Acesso: 20 dez 2017.

GATTI, B. A. Estudos quantitativos em educação. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n.1, p. 11-30, jan./abr. 2004.

GRANDO, R.C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. 239.f. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Faculdade de Educação , Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

HAAS, D.B. **Uma experiência de contagem no Ensino Médio**. 2012.72 .f. Trabalho de conclusão do curso de Matemática Licenciatura. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

HADAR, N.Y HADASS, R. The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. **Educational Studies in Mathematics,** 12, 1981. p.435-443.

FERREIRA, J.I.; SALES, P.E.; MENDES, R.M. A utilização do jogo "a senha" para trabalhar a permutação simples em turmas de Ensino Médio. In: Encontro Mineiro de Educação Matemática, 7. **Anais....** São João del Rei, MG: SBEM_MG, 2015. Disponível em: http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/A-UTILIZA%C3%87%C3%83O-DO-JOGO-%E2%80%9CA-SENHA%E2%80%9D-PARA-TRABALHAR-A-PERMUTA%C3%87%C3%83O-SIMPLES-EM-TURMAS-DE-ENSINO-M%C3%89DIO.pdf. Acesso em : 17 dez 2017.

LARA, Isabel Cristina M. **Jogando com a matemática de 5ª a 8ª série**. São Paulo: Rêspel, 2003

MACHADO, A. Entenda a diferença ente arranjo, combinação e permutação. Disponível em http://www.andremachado.blog.br/artigos/440/entenda-a-diferenca-entre-permutacao-arranjo-e-combinacao.html Acesso em: 05 de Maio de 2016.

MORGADO, A.C; CARVALHO, J.C.P.; CARVALHO, P.C.P; FERNANDEZ,P. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 2006.

RAMOS, Maria Luiza; CURI, Edda. Modelo de Análise Didática dos Erros: um guia para analisar e tratar erros referentes à função polinomial do 2º grau**.** REVEMAT. Florianópolis (SC), v.9, n. 1, p. 27-42, 2014.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I.; MILANI, E**. Cadernos do Mathema.** Jogos de matemática do 6° ao 9° ano. Porto Alegre: Artmed, 2007.

STRAPASON, Lísie Pippi Reis. O **uso de jogos como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática no 1º ano do Ensino Médio.** (Dissertação). Mestrado profissionalizante de Ensino de Física e Matemática. Santa Maria: Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, 2011.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. Vygotsky: Aprendizado e desenvolvimento – um processo sócio – histórico. São Paulo; CENP, 1998.

SILVA, M.C. **A combinatória**: abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e livros didáticos do ensino fundamental. 2016. 201f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE: Recife, 2016.

VARANI, R. Senha. Projeto Autobahn. 1997-2009. Disponível em: http://www.autobahn.com.br/brinquedos/senha.html. Acessado em: 17 dez.2017.

APENDICE A – Folha para Registro das atividades

1º) Para iniciar o jogo senha nós temos seis cores (Verde, Azul, Amarelo, Vermelho, Preto e Rosa), e precisamos escolher quatro para iniciarmos a brincadeira. Quantas composições diferentes de 4 cores podemos formar?

2º) Com 4 cores disponíveis (Verde, Azul, Branco e Preto)., adivinhe a senha sabendo que ela é composta por 4 cores. A senha é composta por cores distintas. Quantas possibilidades diferentes têm-se para essa senha?

3º) Com 4 cores disponíveis (Verde, Azul, Branco e Preto), adivinhe a senha sabendo que ela é composta organização de 2 cores. A senha é composta por cores distintas. Quantas possibilidades diferentes têm-se para essa senha?

4º) Com 5 cores disponíveis (Verde, Azul, Branco, Preto e Rosa), adivinhe a senha sabendo que serão escolhidas 3 cores. A senha é composta por cores distintas. Quantas possibilidades diferentes têm-se para essa senha?

5º) Com 5 cores disponíveis (Verde, Azul, Branco, Preto e Rosa), adivinhe a senha sabendo que ela é composta por 5 cores. A senha é composta por cores distintas. Quantas possibilidades diferentes têm-se para essa senha?

6º) Com 5 cores disponíveis, adivinhe a senha sabendo que ela é composta organização de 3 cores. A senha é composta por cores distintas. Quantas possibilidades diferentes têm-se para essa senha?

7º) Com 6 cores disponíveis, adivinhe a senha sabendo que serão escolhidas 3 cores. A senha é composta por cores distintas. Quantas possibilidades diferentes têm-se para essa senha?

8º) Com 4 cores disponíveis, adivinhe a senha sabendo que ela é composta organização de 3 cores. A senha pode conter cores que se repetem.

APÊNDICE B – Questionário aplicado com os estudantes

1º) O jogo senha possui agora 4 letras (A, B, C, D). Quantas senhas de 4 letras podemos formar?

2º) Sabendo que temos 6 cores (BRANCO, PRETO, AZUL, VERDE, CINZA E ROSA). De quantos modos podemos organizar essas cores, sabendo que a senha é composta por 2 cores distintas?

3º) O jogo senha tem três posições. Sabendo que temos 6 cores (BRANCO, PRETO, AZUL, VERDE, CINZA E ROSA). De quantos modos podemos escolher três cores diferentes para iniciar o jogo?

4º) Como você avalia a aula do jogo senha. Justifique. Gostaria de outras aulas como essa?

5º) Que alterações você sugeria para o jogo senha?

6º) O que você aprendeu de combinatória no jogo senha?