UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

ANÁLISE DE ERROS EM PROBLEMAS DE CÁLCULO INTEGRAL: UM ESTUDO COM DISCENTES DO CURSO DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA.

PEDRO HENRIQUE DOS SANTOS

CARUARU, 2017.

PEDRO HENRIQUE DOS SANTOS

ANÁLISE DE ERROS EM PROBLEMAS DE CÁLCULO INTEGRAL: UM ESTUDO COM DISCENTES DO CURSO DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA.

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática, sob a orientação do Professor Me. Cleiton de Lima Ricardo.

CARUARU, 2017.

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier CRB/4 - 1242

S237a Santos, Pedro Henrique dos.
Análise de erros em problemas de cálculo integral: um estudo com discentes do curso de Matemática - Licenciatura. / Pedro Henrique dos Santos. – 2017.
108f. ; il. : 30 cm.

Orientador: Cleiton de Lima Ricardo.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2017.
Inclui Referências.

1. Análise de erros (Matemática). 2. Cálculo integral. 3. Matemática – Estudo e ensino. I. Ricardo, Cleiton de Lima (Orientador). II. Título.

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2017-417)

ANÁLISE DE ERROS EM PROBLEMAS DE CÁLCULO INTEGRAL: UM ESTUDO COM DISCENTES DO CURSO DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA.

PEDRO HENRIQUE DOS SANTOS

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e APROVADO em 11 de dezembro de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Me. Cleiton de Lima Ricardo (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Prof. Me. Elizabeth Lacerda Gomes (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Prof. Dr. Marcos Luiz Henrique (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

AGRADECIMENTOS

Ao término de uma etapa tão importante como é a graduação, faz-se necessário agradecer àqueles que de alguma forma foram importantes durante a caminhada.

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pelas pessoas que foram colocadas nela durante a graduação. Agradeço à minha avó – a mulher da minha vida – pela paciência, pelo amor, e por tudo que fez e faz por mim.

Agradeço ao meu amigo Geraldo por sempre ter sido um irmão para mim, desde o 1º período do curso. Esteve ao meu lado durante todo esse tempo de graduação e compartilhamos diversos momentos juntos. Uma pessoa incrível que quero levar comigo até o fim da vida. Agradeço à minha amiga Gabi, parceira de todas as horas, do ônibus e da espera por ele, das reclamações, dos dramas, dos problemas e das conquistas. Uma das melhores pessoas que a vida me presenteou. Agradeço à minha amiga Duda por todos os momentos compartilhados durante a graduação, sobretudo nas idas e voltas no ônibus. Agradeço à Professora Simone Queiroz por toda a ajuda nesse trabalho durante a disciplina de TCC 2. Agradeço, também, à Professora Elizabeth Lacerda: a melhor! Acreditou em mim quando nem eu acreditei, deu-me oportunidades durante a graduação, conselhos, muita ajuda, se importou comigo em diversos momentos e sempre me incentivou a ver tudo pelo lado positivo. Uma das melhores pessoas que já conheci.

Agradeço ao meu amigo Dimas, uma pessoa incrível que conheci na universidade. Um cara simples e de bom coração que esteve comigo durante toda a graduação. O senhor da paciência e da arte de fazer cara de paisagem quando o mundo está pegando fogo. Agradeço às pedagogas do apito, Gaby e Rizo, pelos momentos de descontração à espera do ônibus e pelas competições sobre quem estava mais atarefado, que eu sempre ganhei. Agradeço, também, aos meus amigos: Rubinho, Diego, Gil, Wedja, entre outros, por todos os momentos que passamos juntos.

Agradeço ao meu orientador Cleiton Ricardo, aos membros da banca examinadora e a todos aqueles com quem compartilhei momentos bons durante a graduação. Agradeço a todos aqueles professores que contribuíram positivamente na minha formação e fizeram com que eu chegasse até aqui, em especial aos professores Gilcenio, Valdir e Desterro por toda a ajuda dada.

Enfim, obrigado a todos que de alguma forma contribuíram para que eu concluísse mais uma etapa da minha vida.

RESUMO

Desde o início do século XX o erro vem sendo objeto de estudo no ensino de Matemática, pois embora continue sendo tratado por muitos como obstáculo, sinal de não-aprendizagem ou como algo negativo, diversas pesquisas sobre esse tema provam o contrário. Com base nos estudos de pesquisadores como Pinto (2000), Cury (2003; 2008; 2010), Correia (2010), Rios e Vieira (2016), Torre (2007) e La Taille (1997), resolvemos investigar as principais dificuldades dos estudantes do curso de Matemática-Licenciatura da UFPE-CAA diante de questões que envolvem integral. Como subsídio para o alcance do objetivo supracitado resolvemos aplicar um questionário composto por 4 questões a um grupo de 20 alunos e, a partir do questionário, analisamos e classificamos os erros cometidos pelos estudantes, suas potencialidades e possíveis contribuições para os processos de ensino e aprendizagem do cálculo integral. Ao final, pudemos notar que os erros mais recorrentes se davam pelo não conhecimento de técnicas de integração, falsas generalizações, equívocos algébricos e erros em procedimentos.

Palavras-chave: Análise de erros. Cálculo Integral. Licenciandos em Matemática.

ABSTRACT

Since the beginning of the twentieth century the error has been the object of study in the math teaching, because although it continues to be treated by many as an obstacle, a sign of non-learning or as something negative, several researches on this theme prove otherwise. Based on the studies of researchers as Pinto (2000), Cury (2003; 2008; 2010), Correia (2010), Rios & Vieira (2016), Torre (2007) and La Taille (1997), we decided to investigate the main difficulties of the Mathematics-graduation UFPE-CAA students in the face of questions with integrals. As a subsidy for the execution achievement of the aforementioned objective, we decided to apply a questionnaire composed of 4 questions to a group of 20 students and, from the questionnaire, we analyze and classify the errors committed by students, their potentialities and possible contributions to the teaching and learning processes of integral calculus. In the end, we could note that the most recurring errors were the lack of knowledge of integration techniques, false generalizations, algebraic misunderstandings and procedural errors.

Key-words: Error analysis, Integral Calculus, Licensing in mathematics.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O primeiro contato dos estudantes de ensino superior com os conceitos do cálculo integral ocorre na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I) – ou A como é chamado em algumas instituições – e tal contato dar-se-á após o contato com as derivadas e estas, por sua vez, são vistas após os limites.

Como qualquer outro assunto da Matemática, seja do ensino superior ou do ensino básico, este também pode ser fonte de muitas dificuldades para a aprendizagem, sobretudo quando há problemas e/ou outras dificuldades advindas da educação básica e até mesmo do ensino superior.

Após o primeiro contato com as integrais de funções de uma variável real, no CDI I, os estudantes terão contato com integrais duplas e triplas, na disciplina de CDI II, e consequentemente terão contato com as integrais de linha e de superfície, na disciplina de CDI III[1].

Ao cursar CDI III, pude notar que os alunos tinham muita dificuldade na parte de integração e isso foi se tornando cada vez mais aparente à medida que a disciplina se desenvolvia. Os alunos tinham dificuldade sobretudo no que diz respeito às técnicas a serem utilizadas. Deixamos claro que o tópico de técnicas de integração deve ser visto na disciplina de CDI I, conforme rege o Projeto Pedagógico do Curso (PPC), e a ementa de tal disciplina pode ser vista na seção de anexos deste trabalho.

Diante de frases como “eu não conheço esta técnica”, “quando eu cursei a disciplina de CDI I, não vi isso”, etc, surgiram alguns questionamentos. Como pode um estudante chegar ao CDI III sem ter visto a técnica de integração por partes, por exemplo, ao menos 1 vez (em CDI I) e revisto, talvez, em CDI II?, como pode que tanta gente nessa turma tenha as mesmas dificuldades se ela é tão heterogênea, isto é, composta por estudantes de diversos semestres?

[1] Ressaltamos, pois, que esses tópicos do Cálculo são vistos em tais disciplinas do curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco – Centro Acadêmico do Agreste (UFPE/CAA) e pode ser que em outra universidade as ementas das disciplinas de CDI I, CDI II e CDI III sejam diferentes havendo uma redistribuição dos tópicos supracitados.

Além dessa experiência na turma em que cursei a disciplina de CDI III, tive a experiência de ser monitor de CDI II e CDI III e pude, novamente, perceber as dificuldades com relação à integração em outras turmas e, com isso, voltei a me questionar sobre tal situação.

Delimitamos, então, a seguinte pergunta como questão de pesquisa: *Quais as principais dificuldades encontradas pelos estudantes do curso de Matemática-Licenciatura da UFPE/CAA diante de questões que envolvem as técnicas de integração?*

Nesse sentido, estabelecemos o seguinte objetivo geral para a pesquisa: compreender as principais dificuldades de um grupo de licenciandos em Matemática da UFPE-CAA diante de questões que envolvem integração. Com o intuito de alcançar tal objetivo, construímos os seguintes objetivos específicos: classificar os erros cometidos pelos estudantes; analisar os erros cometidos pelos estudantes; estudar as respectivas contribuições do erro para os processos de ensino e aprendizagem das técnicas de integração.

Tendo em vista o tema desse trabalho, consideramos importante trazermos um material sobre o cálculo integral o que é feito no primeiro capítulo, onde são apresentadas algumas definições, proposições e teoremas sobre as integrais.

No segundo capítulo consta a fundamentação teórica para esta pesquisa. Tratamos sobre o erro em duas perspectivas e fazemos algumas considerações sobre suas potencialidades nos processos de ensino e aprendizagem.

O terceiro capítulo consiste de uma breve apresentação de alguns trabalhos sobre análise de erros em cálculo integral, tendo em vista a necessidade de uma compreensão de um pouco do cenário de tais pesquisas e um melhor entendimento sobre o campo de estudo.

O capítulo quatro traz todo o percurso metodológico da pesquisa e a categorização desta. Apresentamos as etapas e o que foi realizado em cada uma delas, assim como o instrumento de coleta de dados, seus respectivos objetivos e algumas pretensões nossas.

O capítulo cinco é análise dos dados obtidos com a pesquisa, isto é, a análise dos erros cometidos pelos estudantes em comparação com a fundamentação proposta para a pesquisa. São apresentadas hipóteses para as causas dos erros e recortes que ilustram as considerações feitas diante destes.

Por fim, apresentamos um breve resumo sobre a pesquisa e o que pudemos concluir com ela, não esquecendo, é claro, de fornecer sugestões para novas pesquisas, para propostas de intervenção diante dos resultados obtidos e as respectivas contribuições para a formação do pesquisador.

2 O CÁLCULO INTEGRAL.

A Matemática evolui diante das necessidades. Fez-se necessário expressar medidas não inteiras e "criou-se" as frações, assim como outros conceitos matemáticos surgiram a partir da necessidade, tais como os números negativos, complexos, etc. Com o cálculo não foi diferente. Evidenciado por Bardi (2016), o embate entre Newton e Leibniz, denominado "a guerra do cálculo", sobre quem foi o inventor de tal ferramenta foi bastante acirrado, tendo em vista a importância desse legado.

O cálculo, ou cálculo diferencial e integral, é uma importante ferramenta da Matemática e facilitou a solução de diversos problemas. O cálculo integral, em particular, está intimamente ligado com a noção de área, volume e com a grandeza física trabalho. Apresentaremos nesse capítulo algumas definições, teoremas e proposições sobre esse assunto.

2.1 ANTIDIFERENCIAÇÃO.

Assim como é definida a operação inversa da adição como sendo a subtração, da potenciação como sendo a radiciação, da multiplicação como sendo a divisão, faz sentido definir uma operação inversa para a diferenciação (derivação). Para esse trabalho utilizaremos as funções contínuas definidas em intervalos da reta real.

Definição: Uma função F é chamada de *antiderivada* de uma função f definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Exemplo: Considere a função $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = 5x^{10} - 4x^2 + 6$. Observe que $F'(x) = 10 \cdot 5x^{10-1} - 2 \cdot 4x^{2-1} + 0 = 50x^9 - 8x, \forall x \in \mathbb{R}$. Se definirmos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que $f(x) = 50x^9 - 8x$, temos que $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$, pois

$$F'(x) = f(x), \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

□

De modo geral, se $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$ então qualquer função G definida – no mesmo intervalo de definição de F – como $G(x) = F(x) + C,$ sendo

C uma constante real, também será uma antiderivada de $f(x)$, pois $G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$, para todo x no intervalo.

Demonstraremos, agora, que se $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$ num intervalo I então toda antiderivada de $f(x)$ em I é dada por $F(x) + K$, onde K é uma constante real arbitrária. Faremos uso do lema a seguir para demonstrar tal resultado.

Lema 1: Sejam f, $g: I \to \mathbb{R}$ funções tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo x no intervalo I. Existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + K$ para todo x em I.

Demonstração: Considere a função $h: I \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) - g(x)$. Vale, então, que $h'(x) = f'(x) - g'(x)$ para todo x em I. Por hipótese, temos que $f'(x) = g'(x)$ para todo x em I, daí $f'(x) - g'(x) = 0$ para todo x em I. Portanto, temos que $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, para todo x em I. Como $h(x)$ tem derivada nula em todo ponto do seu domínio, temos que h é uma função constante, isto é, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = K$, para todo x em I. Ou seja, $h(x) = f(x) - g(x) = K$, e seque que

$$f(x) = g(x) + K, \ \forall\, x \text{ em } I.$$

■

Teorema 1: Se F é uma antiderivada de f em um intervalo I, então toda antiderivada de $f(x)$ no intervalo I será dada por $F(x) + K$, onde K é uma constante real arbitrária.

Demonstração: Suponha que H seja uma antiderivada qualquer de f em I. Temos, então, que $H'(x) = f(x)$ para todo x em I. Por hipótese, F também é uma antiderivada de f no intervalo I e, portanto, $F'(x) = f(x)$ para todo x em I. Assim, pelo lema anterior, $H(x) = F(x) + K$ e como H representa qualquer antiderivada de f em I, toda antiderivada de f pode ser obtida somando uma constante arbitrária a $F(x)$.

■

Exemplo: $H(x) = x^2$ é uma antiderivada de $f(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Segue que $J(x) = x^2 + 1, P(x) = x^2 - \sqrt{2}, M(x) = x^2 + \frac{\pi}{13}$, também são antiderivadas de $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

□

Definimos como antidiferenciação/antiderivação o processo de encontrar antiderivadas[2]. Utilizaremos a seguinte definição e notação a partir de agora:

Definição: Uma função $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$ para todo x e escrevemos

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

O símbolo $\int$ indica a operação de antidiferenciação e, a partir de agora, utilizaremos a nomenclatura integral indefinida para o processo de encontrar antiderivadas.

Apresentaremos, agora, algumas integrais indefinidas de algumas funções e as enunciaremos como proposições com o intuito de referenciá-las mais à frente.

Proposição 1: Sendo k uma constante real, temos que

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx.$$

Demonstração: Com efeito, se F é uma antiderivada de f, então

$$\frac{d}{dx}[k \cdot F(x)] = k \cdot \frac{d}{dx}\big(F(x)\big) = k \cdot f(x).$$

■

Proposição 2: $\int dx = x + C$.

Demonstração: De fato,

$$\frac{d}{dx}(x + C) = \frac{d}{dx}(x) + 0 = 1.$$

■

Proposição 3: Se f_1, $f_2, \dots, f_n$ estão definidas no mesmo intervalo, e $c_1, c_2, \dots, c_n$ são constantes, então

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)]dx$$

---

[2] Há livros que utilizam a nomenclatura Primitivas para se referirem às antiderivadas.

$$= c_1 \cdot \int f_1(x)\,dx + c_2 \cdot \int f_2(x)dx + \cdots + c_n \cdot \int f_n(x)dx$$

Demonstração: Sendo $F_1, F_2, \dots, F_n$ as primitivas de f_1, $f_2, \dots, f_n$, respectivamente, temos que:

$$\frac{d}{dx}(c_1F_1(x) + c_2F_2(x) + \cdots + c_nF_n(x)) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x).$$

Logo,

$$\int [c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x)]dx = c_1F_1(x) + c_2F_2(x) + \cdots + c_nF_n(x)$$

$$= c_1 \cdot \int f_1(x)\,dx + c_2 \cdot \int f_2(x)dx + \cdots + c_n \cdot \int f_n(x)dx.$$

■

Proposição 4: Se f_1 e f_2 estão definidas no mesmo intervalo, então

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Demonstração: Estabelecemos esse caso como um caso particular da proposição anterior. Para demonstrar, basta fazer $c_1 = c_2 = 1$ no teorema aplicado a duas funções.

■

Teorema 2: Se n for um número racional, então:

$$\int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, & se\ n \neq -1 \\ \ln|x| + C, & se\ n = -1 \end{cases}$$

Demonstração: Se $n = -1$,

$$\frac{d}{dx}(\ln|x| + C) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Se $n \neq -1$, vale que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{(n+1)x^{n+1-1}}{n+1} = x^n.$$

■

Proposição 5: Vale que

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg(x) + C$$

Demonstração: Com efeito, $y = arctg(x) \iff tg(y) = x$. Derivando implicitamente a segunda equação, obtemos:

$$\sec^2(y) \cdot y' = 1.$$

$$\therefore y' = \frac{1}{\sec^2(\mathrm{y})}$$

Por outro lado, sabemos que $sec^2(y) = 1 + tg^2(y)$. Portanto,

$$y' = \frac{1}{1+tg^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

■

Proposição 6:

a) $\int sen(x)dx = -\cos(x) + C$

b) $\int \cos(x)\,dx = sen(x) + C$

c) $\int sec^2(x)dx = tg(x) + C$

d) $\int cossec^2(x)dx = -cotg(x) + C$

e) $\int \sec(x)\,tg(x)dx = \sec(x) + C$

f) $\int cossec(x)cotg(x)dx = -cossec(x) + C$

Demonstração:

a) $\frac{d}{dx}(-\cos(x) + C) = -\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\big(-sen(x)\big) = sen(x)$

b) $\frac{d}{dx}(sen(x) + C) = \cos(x)$

c) $\frac{d}{dx}(tg(x) + C) = \frac{d}{dx}\left(\frac{sen(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - sen(x)[-sen(x)]}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$

d) $\frac{d}{dx}(-cotg(x) + C) = -\frac{d}{dx}\big(cotg(x)\big) = -\left(-\frac{1}{sen^2(x)}\right) = \frac{1}{sen^2(x)} = cossec^2(x)$

e) $\frac{d}{dx}(\sec(x) + C) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = \frac{sen(x)}{\cos^2(\mathrm{x})} = \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{sen(x)}{\cos(x)} = \sec(x) \cdot tg(x)$

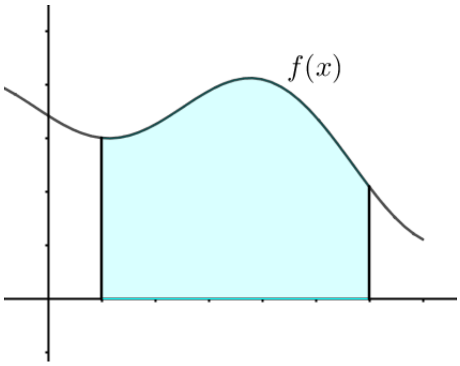
f) $\frac{d}{dx}(-cossec(x)+C)=\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{sen(x)}\right)=\frac{\cos(x)}{sen^2(x)}=\frac{1}{sen(x)}\cdot\frac{\cos(x)}{sen(x)}=cossec(x)\cdot cotg(x)$

■

2.2 INTEGRAL DEFINIDA E O PROBLEMA DA ÁREA.

Imagine o problema de calcular a área abaixo do gráfico da função f na figura a seguir:

Figura 1- Exemplo para cálculo de área.



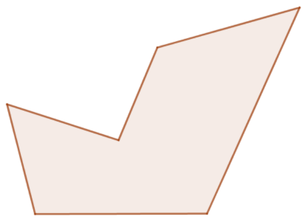
Fonte: O autor, 2017.

Isto é, calcular o valor de S que é a área da figura limitada acima pelo gráfico de $f(x)$, lateralmente pelas retas $y=a$ e $y=b$ e abaixo pelo eixo x.

Na Geometria Plana podemos calcular a área de diversas figuras com bases em fórmulas ou algoritmos desde que a figura obedeça determinadas hipóteses, por exemplo: se a figura for um triângulo de base medindo b e altura medindo h, podemos calcular a sua área pela fórmula $\frac{b\cdot h}{2}$, se a figura por um quadrado de lado medindo l, então sua área pode ser calculada pela fórmula l^2, se a figura for um círculo de raio r, então sua área será dada pela fórmula $\pi\cdot r^2$, etc.

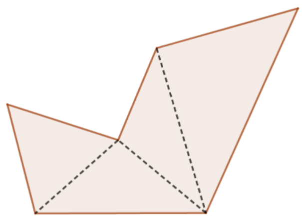
Se a figura não for tão particular, como a figura abaixo, por exemplo, ainda podemos utilizar dos casos particulares (figuras mais simples e que as áreas podem ser calculas por fórmulas fechadas, por exemplo: triângulo, retângulo, trapézio, etc.) para o cálculo de tal área.

Figura 2- Figura que representa um caso não particular de figura plana.



Fonte: O autor (2017)

Figura 3- Possível maneira de transformar uma figura não particular em figuras particulares (triângulos) para o cálculo de área.

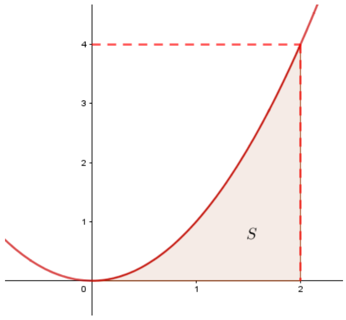


Fonte: O autor (2017)

Todavia, o que pode ser feito para calcular a área de figuras planas que não são limitadas por linhas poligonais, como a da figura 1, por exemplo? Existem vários métodos para aproximarmos o valor de tal área. Para esse trabalho utilizaremos a aproximação por retângulos para tal área e generalizaremos um resultado com motivação nesse método.

Primeiramente iremos fazer um exemplo que consiste em calcular a área abaixo do gráfico da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 2]$, ou seja, queremos descobrir o valor de S na figura a seguir:

Figura 4- Área abaixo do gráfico de $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 2]$.



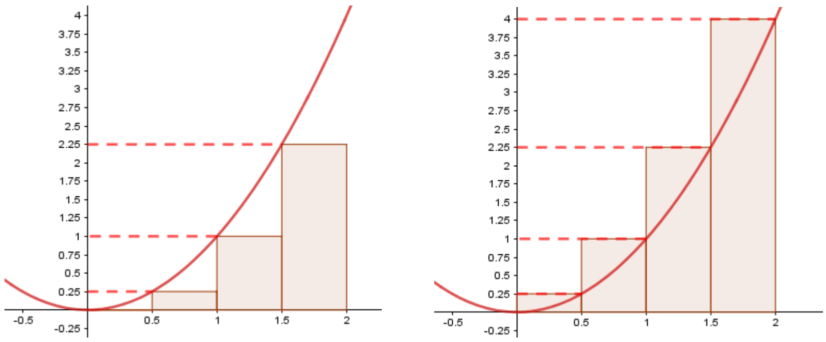
Fonte: O autor (2017)

Utilizaremos a subdivisão de $[0, 2]$ em quatro e seis partes iguais para a ilustração do exemplo e generalizaremos a seguir. Sabemos que para calcularmos a área de um retângulo precisamos das suas dimensões. Ao dividirmos o intervalo $[0, 2]$ em quatro e seis partes iguais utilizaremos tais medidas para representar o comprimento das bases dos retângulos. Para aproximarmos a área utilizaremos as alturas dos retângulos como sendo os valores que a função assume no extremo inferior dos intervalos em que $[0, 2]$ foi subdividido (e construiremos uma sequência s_n) e os valores que a função assume no extremo superior (e construiremos uma sequência S_n).

Ao subdividirmos o intervalo $[0, 2]$ em quatro subintervalos de mesmo comprimento, podemos escrever:

$$[0, 2] = [0;\ 0{,}5] \cup [0{,}5; 1] \cup [1; 1{,}5] \cup [1{,}5; 2]$$

Figura 5- Retângulos aproximantes (superiores e inferiores) para a área S com [0, 2] dividido em 4 subintervalos.



Fonte: O autor, 2017.

Aproximando a área S pelos retângulos cuja altura é o valor que a função assume nos extremos inferiores, iremos obter:

$$0{,}5 \cdot f(0) + 0{,}5 \cdot f(0{,}5) + 0{,}5 \cdot f(1) + 0{,}5 \cdot f(1{,}5)$$

$$= 0{,}5 \cdot 0^2 + 0{,}5 \cdot 0{,}5^2 + 0{,}5 \cdot 1^2 + 0{,}5 \cdot 1{,}5^2 = 1{,}75.$$

Aproximando a área S pelos retângulos cuja altura é o valor que a função assume nos extremos superiores, iremos obter:

$$0{,}5 \cdot f(0{,}5) + 0{,}5 \cdot f(1) + 0{,}5 \cdot f(1{,}5) + 0{,}5 \cdot f(2)$$

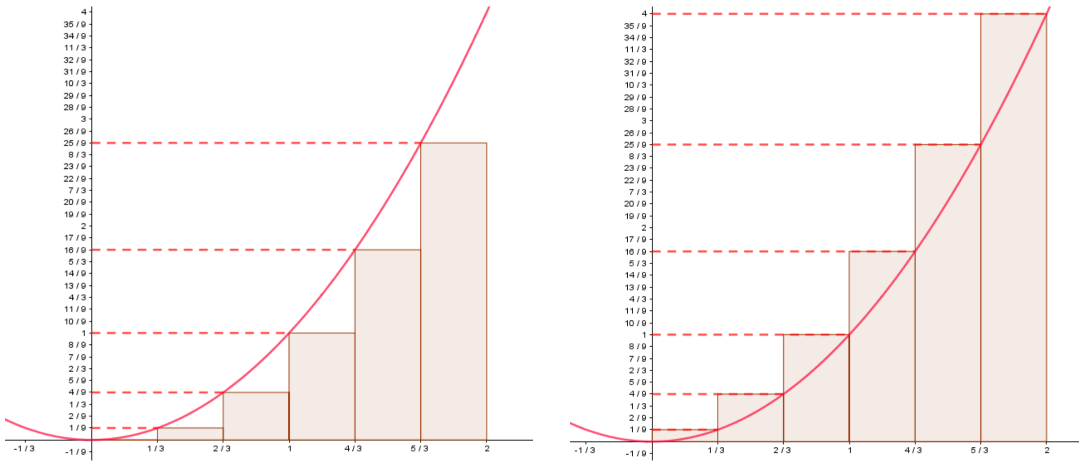
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}5^2 + 0{,}5 \cdot 1^2 + 0{,}5 \cdot 1{,}5^2\ +\ 0{,}5 \cdot 2^2 = 3{,}75.$$

Para o caso em que subdividimos o intervalo $[0, 2]$ em seis subintervalos, obtemos:

$$[0, 2] = \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right] \cup \left[1; \frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; 2\right].$$

Temos, então, que o valor da aproximação da área S pelos retângulos inferiores seria de $2{,}037$ e pelos retângulos superiores seria de $3{,}37$. Observe a figura:

Figura 6- Retângulos aproximantes (superiores e inferiores) para a área S com [0, 2] dividido em 6 subintervalos.



Fonte: O autor (2017)

Construímos uma tabela, com dados obtidos com o Geogebra®, que apresenta o valor das aproximações superiores e inferiores para algumas quantidades maiores do número de retângulos e podemos observar o comportamento de tais aproximações.

Tabela 1: Aproximações superiores e inferiores da área S.

Número de retângulos	Aproximação inferior	Aproximação superior
10	2,28	3,0799
20	2,47	2,8699
50	2,5872	2,7471
300	2,6533	2,68
1000	2,6626	2,6706
4000	2,6656	2,6676
20000	2,6662	2,667

Fonte: O autor (2017).

Observe que, aparentemente, as aproximações superiores e inferiores tendem a $2,\overline{6}$ à medida que o número de retângulos aumenta. Isso, de fato, acontece e provaremos adiante. Agora, traremos algumas definições e resultados que nos darão subsídios para que possamos provar isso.

Definição: Se m e n são inteiros de modo que $m \leq n$, definimos $\sum_{i=m}^{n} F(i)$ como sendo

$$F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \cdots + F(m-(m-n+1)) + F(m-(m-n)).$$

Isto é:

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \cdots + F(n-1) + F(n).$$

Exemplo: $\sum_{i=-1}^{3} i^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 0 + 1 + 4 + 9 = 15.$

□

Proposição 7: Sendo k uma constante, vale que

$$\sum_{i=1}^{n} k = k \cdot n.$$

Demonstração: Com efeito,

$$\sum_{i=1}^{n} k = \underbrace{k + k + \cdots + k}_{n\ termos} = n \cdot k = k \cdot n.$$

■

Proposição 8: Sendo k uma constante,

$$\sum_{i=1}^{n} k \cdot F(i) = k \cdot \sum_{i=1}^{n} F(i)$$

Demonstração:

$$\sum_{i=1}^{n} k \cdot F(i) = k \cdot F(1) + k \cdot F(2) + \cdots + k \cdot F(n)$$

$$= k\big(F(1) + F(2) + \cdots + F(n)\big) = k \cdot \sum_{i=1}^{n} F(i).$$

■

Proposição 9: Vale que

$$\sum_{i=1}^{n} (F(i) + G(i)) = \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i).$$

Demonstração:

$$\sum_{i=1}^{n} (F(i) + G(i)) = \big(F(1) + G(1)\big) + \big(F(2) + G(2)\big) + \cdots + (F(n) + G(n))$$

$$= \big(F(1) + F(2) + \cdots + F(n)\big) + (G(1) + G(2) + \cdots + G(n))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i).$$

■

Proposição 10:

$$\sum_{i=1}^{n} (F(i) - F(i-1)) = F(n) - F(0)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (F(i) - F(i-1)) \quad &= F(1) - F(0) + F(2) - F(1) + \cdots + F(n) - F(n-1) \\ &= \big(F(1) - F(1)\big) + (F(2) - F(2)) + \cdots + F(n) - F(0) \\ &= 0 + 0 + \cdots + F(n) - F(0) \\ &= F(n) - F(0) \end{aligned}$$

■

Teorema 3: Se n é um número inteiro positivo, então:

$$a) \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$b) \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Demonstração: a)

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \quad (*)$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \ (**).$$

Somando as equações $(*)$ e $(**)$, temos:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i = (1+n) + \big(2 + (n-1)\big) + \cdots + \big((n-1) + 2\big) + (n+1)$$

$$= (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1), \qquad \text{com } n \text{ parcelas}$$

$$= n(n+1)$$

Daí,

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

■

b) Provaremos este item pelo princípio de indução finita. O primeiro passo é verificar o caso base, para $n = 1$.

Se $n = 1$, então o somatório se torna

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1.$$

Por outro lado $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para $n = 1$ é igual a

$$\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Isto significa que a fórmula é válida para $n = 1$. Supondo tal fórmula válida para $n = k$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

queremos provar que vale para $n = k + 1$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} \ (\star)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = (1^2 + 2^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 \quad &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

E a última igualdade acima nos dá a equação $(\star)$. Utilizaremos esse resultado mais à frente para provarmos a afirmação feita anteriormente ($S = 2,\bar{6}$).

$\blacksquare$

Considere uma região do plano cartesiano limitada lateralmente pelas retas $y = a$ e $y = b$, abaixo pelo eixo x e acima pelo gráfico de uma função contínua $f(x) \geq 0$. Inicialmente iremos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo tamanho(Δx), para simplificação, a saber: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Utilizaremos a notação $x_0, x_1, \dots, x_n$ para denotar os extremos dos subintervalos, isto é:

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}, x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b.$$

Denotaremos por $[x_{i-1}, x_i]$ o i-ésimo intervalo da subdivisão de $[a, b]$. Como f é contínua em $[a, b]$, temos que f é contínua em cada $[x_{i-1}, x_i]$. Pelo Teorema do Valor Extremo, existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para todo $i \in \mathbb{N}$ de modo que $f(c_i) \leq f(x)$ para todo x em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Utilizaremos este ponto para aproximarmos a área de tal região e, como vimos anteriormente, podemos escrever

$$A(R) \approx S_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x.$$

Utilizando a notação que introduzimos ainda há pouco, temos:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x.$$

Apresentaremos agora uma definição que utiliza o $\lim_{n\to\infty} S_n$ e este, quando existe, é numericamente igual à área da região R.

Definição: Suponha que uma função f seja contínua e não negativa num intervalo $[a, b]$. Seja R a região do plano limitada pelo gráfico de f, pelas retas $y = a$ e $y = b$ e pelo eixo x. Dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Denotaremos por $[x_{i-1}, x_i]$ o i-ésimo intervalo em que $[a, b]$ foi dividido. Sendo $f(c_i)$[3] o valor mínimo assumido por f em $[x_{i-1}, x_i]$, a medida da área da região R será dada por

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x.$$

Isto significa que para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \in \mathbb{N}$ e $n > n_0$, então

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x - S \right| < \varepsilon.$$

[3] Poderíamos ter considerado o valor máximo de f em cada subintervalo e a existência de tal valor também é garantida pelo Teorema do Valor Extremo. Mais à frente perceberemos que pode ser tomado qualquer ponto dos subintervalos, independente de ser de máximo, de mínimo ou nenhum dos dois.

Exemplo: A área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $y = 0$ e $y = 2$ é $2,\overline{6} = \frac{8}{3}$. Note que, nesse caso, $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$. Como f é crescente, temos que esta assume o valor mínimo em cada $[x_{i-1}, x_i]$ no extremo inferior do intervalo. Assim, temos que $x_0 = c_0 = 0, x_1 = c_1 = \frac{2}{n}, x_2 = c_2 = \frac{4}{n}, \ldots, x_n = c_n = 2$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \Delta x = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \Delta x \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^2 = \Delta x \sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^2} = \frac{2}{n} \cdot \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2 .$$

Segue que

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8(2n^3 + 3n^2 + n)}{6n^3}.$$

Logo,

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \frac{8(2n^3 + 3n^2 + n)}{6n^3} = \frac{8}{3}.$$

O limite construído anteriormente é um caso particular dos limites que definiremos agora. Seja f uma função contínua definida num intervalo $[a, b]$. Dividiremos tal intervalo em subintervalos que não necessariamente têm a mesma medida. Para isso, considerando $x_0 = a$ e $x_n = b$ escolheremos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ em $[a, b]$ de modo que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Definimos os comprimentos dos subintervalos como $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. O conjunto $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ é chamado *partição* de $[a, b]$. A partição possui n subintervalos e, com relação ao comprimento destes intervalos, podemos definir o que chamamos de *norma da partição*, que é o maior dos comprimentos dos subintervalos de Δ e será denotado por $||\Delta||$.

Vamos escolher, em cada subintervalo da partição, um ponto ξ_i, ou seja,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b.$$

Assim, construiremos a soma:

$$f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + \cdots + f(\xi_n)\Delta_n x = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

A esta soma, damos o nome de Soma de Riemann[4]. Podemos, então, definir a noção de integrabilidade de uma função.

Definição: Seja f uma função cujo domínio contém o intervalo $[a, b]$. Dizemos que f é integrável em $[a, b]$ se existe um número L satisfazendo: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que toda partição Δ com $\|\Delta\| < \delta$ e $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, tivermos:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x - L\right| < \varepsilon.$$

Equivalentemente, podemos escrever:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = L\,.$$

Observação: para o caso particular em que a função é não negativa no intervalo, a partição do intervalo é composta por subintervalos de mesmo comprimento e em que tomamos os pontos ξ_i como sendo os pontos de máximo ou de mínimo da função no i-ésimo intervalo, temos o limite citado anteriormente para o cálculo de áreas, pois fazer $n \to \infty$ em $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, é equivalente a fazer $\Delta x = ||\Delta|| \to 0$.

Definição: Se f for uma função definida no intervalo $[a, b]$ então a integral definida de f de a até b, será dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_{\mathrm{i}} x$$

Para provarmos o próximo teorema, admitiremos o seguinte lema como verdadeiro:

Lema 2:[5] Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. A função f é integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que

[4] Georg Friedrich Bernhard Riemann, matemático alemão. (1826 – 1866)

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta_i x < \varepsilon.$$

Teorema 4: Toda função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua é integrável.

Demonstração: Como f é contínua no intervalo limitado e fechado $[a, b]$, temos que f é uniformemente contínua nesse intervalo, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in [a, b]$ e $|x - y| < \delta$ implicam

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Seja Δ uma partição de $[a, b]$ de modo que $\|\Delta\| < \delta$. Pelo Teorema do Valor Extremo, em todo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição, existem y_i, y_i^* de modo que $m_i = f(y_i)$ e $M_i = f(y_i^*)$. Dessa forma,

$$\omega_i = M_i - m_i = f(y_i^*) - f(y_i) < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) \quad &< \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (x_n - x_0) \\
&= \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (b - a) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2, f é integrável.

■

Teorema 5: Se f e g são funções integráveis no intervalo $[a, b]$ e k um número real, então:

a) A função $k \cdot f$ é integrável em $[a, b]$ e

---

[5] A demonstração desse lema pode ser encontrada em LIMA, E. L. **Análise Real**, vol.1. Funções de uma variável, 12ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. 198p. (Coleção Matemática Universitária.)
Notação: $\omega_i = M_i - m_i$, em que $m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ e $M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

b) A função $f + g$ também é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Demonstração:

a) Como a função f é integrável em $[a, b]$ então existe o limite abaixo:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x\,.$$

Além disso, sabemos que

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k \cdot f(\xi_i)\Delta_i x = k \cdot \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x\,.$$

Logo, existe o limite do lado esquerdo da equação acima e ele é igual a k vezes o limite existente pela integrabilidade de f em $[a, b]$. Isto é,

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k \cdot f(\xi_i)\Delta_i x = k \cdot \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = k \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

b) Se f e g são funções integráveis então vale que $\int_a^b f(x)dx = L$ e $\int_a^b g(x)dx = M$. Para provarmos que $f(x) + g(x)$ é integrável no intervalo $[a, b]$ com integral dada por $L + M$ temos que mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ de modo que toda partição Δ de $[a, b]$ com $\|\Delta\| < \delta$ e $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para todo i pertencente a $\{1, \dots, n\}$ vale que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\Delta_i x - (L + M) \right| < \varepsilon.$$

Da integrabilidade de f e g temos que

$$L = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \quad e \quad M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta_i x.$$

Daí, segue que para todo $\varepsilon > 0$ dado, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ de modo que para toda partição Δ de $[a,b]$ com $\|\Delta\| < \delta_1, \delta_2$ e $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para todo i pertencente a $\{1, \dots, n\}$ tem-se:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad e \quad \left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta_i x - M\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considere $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então para toda partição Δ de $[a,b]$ com $\|\Delta\| < \delta$ e $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ tem-se:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\Delta_i x - (L+M)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta_i x - (L+M)\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x - L + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta_i x - M\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x - L\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta_i x - M\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Com isso, provamos que $f + g$ é integrável e que

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = L + M = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

■

Observação: O item b) do Teorema 5 pode ser generalizado para um número finito de funções, ou seja, se $f_1, f_2, \dots, f_n$ são todas integráveis em $[a,b]$, então $f_1 \pm f_2 \pm \cdots \pm f_n$ também é integrável em $[a,b]$ e vale que

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_n(x)dx.$$

Teorema 6: Seja f uma função integrável nos intervalos $[a,b], [a,c]$ e $[b,c]$, com $a < c < b$. Vale que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demonstração: Consideremos, inicialmente, uma partição Δ de $[a,b]$. Construiremos uma nova partição Δ^* de $[a,b]$ da seguinte maneira: se c for um ponto da partição Δ, então $\Delta^* = \Delta$. Caso contrário, $\Delta^* = \Delta \cup \{c\}$. Note que, no primeiro caso, $c = x_i$ para algum $i \in \{1,\dots,n\}$. No segundo caso, $c \in (x_{i-1}, x_i)$ para algum $i \in \{1,\dots,n\}$ e os subintervalos de Δ^* serão todos iguais aos de Δ com exceção do que contém o ponto c, que ficará dividido em dois intervalos $[x_{i-1}, c]$ e $[c, x_i]$. Sendo $\|\Delta^*\|$ e $\|\Delta\|$ as normas das partições Δ^* e Δ, respectivamente, vale que $\|\Delta^*\| \leq \|\Delta\|$ pois se c for adicionado ao subintervalo de maior comprimento de Δ, então estaremos diminuindo sua norma e, caso contrário, estaremos diminuindo o comprimento de um intervalo com medida menor que a norma e, portanto, ela não será afetada o que também ocorre se c for um dos pontos de Δ.

Se na partição Δ^* o intervalo $[a,c]$ for dividido em p subintervalos e o intervalo $[c,b]$ for dividido em $(n-p)$ subintervalos, então obteríamos para $[a,c]$ e $[c,b]$, respectivamente, as seguintes somas de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)\Delta_i x \quad e \quad \sum_{i=p+1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x.$$

Sabemos que, como f é integrável,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \left(\sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)\Delta_i x + \sum_{i=p+1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \right).$$

Observe que como $\|\Delta^*\| \leq \|\Delta\|$, se fizermos $\|\Delta\| \to 0$, temos que $\|\Delta^*\| \to 0$. Daí,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta^*\|\to 0} \left(\sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)\Delta_i x + \sum_{i=p+1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \right)$$

Utilizando a definição de integrabilidade, temos que

$$\lim_{\|\Delta^*\|\to 0} \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)\Delta_i x = \int_a^c f(x)dx \quad e \quad \lim_{\|\Delta^*\|\to 0} \sum_{i=p+1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = \int_c^b f(x)dx.$$

Temos, portanto, que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta^*\|\to 0} \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)\Delta_i x + \lim_{\|\Delta^*\|\to 0} \sum_{i=p+1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x.$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

■

Observação: este teorema é válido independente da ordem dos números a, b e c e para demonstrar isso basta admitir a integrabilidade da função no intervalo maior assim como nos dois menores, e isolar $\int_a^b f(x)dx$.

Teorema 7: *(Teorema Fundamental do Cálculo)* Seja f um função contínua no intervalo $[a, b]$. Vale que:

a) Se $x \in [a, b]$ e $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, então $g'(x) = f(x)$.

b) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer antiderivada de f.

Demonstração: Considere x_0 e $x_0 + h$ em $[a, b]$. Então:

$$g(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)dt$$

e

$$g(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt$$

Daí,

$$g(x_0 + h) - g(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\,.$$

Sabemos, pois, que

$$\int_a^{x_0+h} f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt.$$

Logo,

$$g(x_0+h)-g(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)dt+\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt\ -\int_a^{x_0} f(t)dt=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, existe θ no compacto limitado por x_0 e x_0+h, tal que

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt=f(\theta)\cdot h.$$

Podemos, então, concluir que

$$g(x_0+h)-g(x_0)=f(\theta)\cdot h,$$

ou seja,

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=f(\theta).$$

Fazendo $h\to 0$ nessa última expressão, obtemos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=g'(x_0)=\lim_{h\to 0} f(\theta)$$

Queremos, portanto, mostrar que $\lim_{h\to 0} f(\theta)=f(x_0)$. Como θ está no intervalo limitado $[x_0,\, x_0+h]$, $\lim_{h\to 0} x_0=x_0$ e $\lim_{h\to 0}(x_0+h)=x_0$, segue, pelo Teorema do Confronto, que $\lim_{h\to 0}\theta=x_0$, podemos escrever:

$$\lim_{h\to 0} f(\theta)=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Como f é contínua em x_0, vale que

$$\lim_{h\to 0} f(\theta)=\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Se $x=a$ e a função não estiver definida para valores menores que a, faz-se necessário fazer h tender a zero pela direita e substituímos a derivada em questão pela derivada à direita. Do mesmo modo, se a função não está definida para valores maiores que b, é necessário que façamos h tender a zero pela esquerda e substituímos a derivada em questão pela derivada à esquerda.

A integral

$$\int_a^x f(t)dt$$

com limite superior na variável x é uma antiderivada de f e podemos escrever:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x).$$

Para demonstrar b) utilizaremos o fato demonstrado em a). Como f é contínua em $[a, b]$, vale que $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ é uma antiderivada de f. Por hipótese, $F'(x) = f(x)$ para todo x no intervalo $[a, b]$ e, por (a), temos, sendo K uma constante, que:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + K.$$

Fazendo $x = a$ e $x = b$ na última equação, obtemos:

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + K \quad e \quad F(a) = \int_a^a f(t)dt + K$$

Daí,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + K - \left(\int_a^a f(t)dt + K\right)$$

Como $\int_a^a f(t)dt = 0$, temos que:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

■

2.3 UM POUCO SOBRE AS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO.

O ato de calcular integrais nem sempre é algo trivial a ser feito apenas com as regras tidas como básicas. Introduziremos agora algumas técnicas de integração que podem facilitar tal processo desde que a função cumpra determinadas condições. Apresentaremos as técnicas de integração nessa seção e traremos algumas demonstrações e exemplos de cada uma delas.

2.3.1 A REGRA/TÉCNICA DA SUBSTITUIÇÃO.

Suponha que estejamos interessados em resolver a seguinte integral

$$\int (2x+1)^{50}dx$$

É fato que seria extremamente exaustivo expandir $(2x+1)^{50}$ para só depois resolver a integral. Com motivações em situações como essa e com base na Regra da Cadeia, estabeleceremos o seguinte teorema para facilitar o cálculo de integrais de funções compostas.

Teorema 8: Se $u = g(x)$ é uma função derivável cuja imagem é um intervalo I, f é contínua em I e F é uma antiderivada de f em I, então:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du = F\big(g(x)\big) + C$$

Demonstração: Como F é uma antiderivada de f, temos que

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int F'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)dx\ = F(g(x)) = F\big(g(x)\big) + K.$$

Fazendo a substituição $u = g(x)$, temos:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx$$
$$= \int F'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)dx\ = F\big(g(x)\big) + K = F(u) + K = \int F'(u)du.$$

Portanto,

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du.$$

■

Exemplos:

1) Calcule $\int \cos(4x)dx$.

Solução: $u = 4x\ \Rightarrow du = 4dx\ \Rightarrow dx = \frac{du}{4}$. Daí, $\int \cos(4x)\,dx = \int \frac{\cos(u)du}{4} =$ $\frac{1}{4}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{4}sen(u) + C = \frac{1}{4}sen(4x) + C$.

2) Calcule $\int (2x+1)^{50} dx$

Solução: $u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$. Assim,

$$\int (2x+1)^{50} dx = \int u^{50}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{50} du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{51}}{51} + C = \frac{(2x+1)^{51}}{102} + C.$$

□

2.3.2 A INTEGRAÇÃO PELA REGRA DAS FRAÇÕES PARCIAIS.

Essa regra/técnica é muito importante quando estamos interessados em integrar funções racionais, isto é, funções definidas como o quociente de polinômios. Mostraremos como expressar uma função racional como uma soma de frações mais simples que chamaremos de *frações parciais*.

Observe:

$$\frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+1} = \frac{3(x+1) + 1(x-2)}{x^2 - x - 2} = \frac{4x+1}{x^2-x-2}.$$

Nesse sentido, se quiséssemos integrar o lado direito de tal expressão, poderíamos usar o processo reverso e teríamos:

$$\int \frac{4x+1}{x^2-x-2} dx = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+1}\right) dx = \int \frac{3}{x-2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= 3\ln|x-2| + \ln|x+1| + C$$

Após essa ilustração, veremos que o método é, em geral, válido. Considere $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios e $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional. É possível expressar $f(x)$ como uma soma de frações mais simples desde que o grau de $P(x)$[6] seja menor que o grau de $Q(x)$ e dizemos que a função racional, nesse caso, é própria. Caso contrário, isto é, $\partial P(x) \geq \partial Q(x)$, dizemos que a função é imprópria. Nesse caso, sabemos que existem polinômios $S(x)$ e $R(x)$, tais que:

$$P(x) = S(x)\cdot Q(x) + R(x),\ \ com\ \ \partial R(x) < \partial Q(x).$$

[6] Seja n um número natural. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, onde $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \mathbb{N}$. Se $a_n \neq 0$, dizemos que o grau de $P(x)$ é n e escrevemos: $\partial P(x) = n$.

Esse passo pode ser muito importante ao integrarmos uma função racional imprópria, como pode ser visto a seguir:

Exemplo: Calcule: $\int \frac{x^3+x}{x-1}\, dx$.

Solução: Nesse exemplo, $P(x) = x^3 + x$ e $Q(x) = x - 1$. Note que $\partial P = 3 > 1 = \partial Q$.

Além disso, sabemos que $x^3 + x = (x-1)\cdot(x^2 + x + 2) + 2$. Temos que $S(x) = x^2 + x + 2$ e $R(x) = 2$. Daí,

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1}\, dx = \int \frac{(x-1)\cdot(x^2 + x + 2) + 2}{x - 1} dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x - 1| + C.$$

□

Uma etapa crucial desse método é a fatoração ao máximo do denominador. Sabemos que é sempre possível escrever um polinômio $Q(x)$ como um produto de fatores lineares na forma $ax + b$ ou quadráticos irredutíveis na forma $px^2 + qx + r$ com $q^2 < 4pr$. Por exemplo: se $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 - x - 6$ pode ser fatorado como:

$$Q(x) = (x-2)(2x+3)(x^2+1).$$

A terceira etapa para tal regra é expressar uma função racional própria $f(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$ como uma soma de frações parciais na forma[7]:

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \quad ou \quad \frac{B}{(\,px^2 + qx + r)^j}$$

A partir de agora, dividiremos os casos possíveis para as quatro situações que podem ocorrer.

1ª situação: o denominador $Q(x)$ é um produto de fatores lineares distintos.

Nesse caso, podemos escrever

[7] Há um teorema da Álgebra que garante que é sempre possível fazer isso.

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdot \dots \cdot (a_nx + b_n),$$

em que nenhum fator se repete ou é múltiplo de outro. Para esse caso, o teorema das frações parciais garante a existência de números reais $A_1, \dots, A_n$ de modo que

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_2x + b_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(a_nx + b_n)}$$

e tais números podem ser encontrados como no exemplo que segue.

Exemplo: Calcule: $\int \frac{1}{x^2-9} dx$.

Solução: $Q(x) = x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ e $R(x) = 1$. Daí,

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{(x + 3)(x - 3)}.$$

Queremos que

$$\frac{1}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 3}.$$

Efetuando os cálculos, obtemos:

$$\frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)}.$$

E, para que tenhamos a igualdade, é necessário que

$$A(x - 3) + B(x + 3) = 1.$$

A partir da igualdade de polinômios chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A + 3B = 1 \end{cases}$$

que tem como solução: $A = \frac{-1}{6}$ e $B = \frac{1}{6}$.

Com isso, temos que

$$\int \frac{1}{x^2 - 9} dx = \int \left(\frac{-1}{6(x + 3)} + \frac{1}{6(x - 3)} \right) dx = \frac{-\ln|x + 3|}{6} + \frac{\ln|x - 3|}{6} + K.$$

□

As próximas situações serão tratadas com menos detalhes.

2ª situação: o denominador $Q(x)$ é um produto de fatores lineares e alguns dos fatores são repetidos.

Considere, sem perda de generalidade, que o primeiro fator linear, ou seja, $(a_1x + b_1)$ se repete r vezes. Então devemos escrever a seguinte expressão:

$$\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}.$$

Exemplo:

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}.$$

□

3ª situação: a fatoração do denominador $Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis, mas nenhum deles se repete.

Se $Q(x)$ tiver um fator $ax^2 + bx + c$ irredutível, então além das frações parciais citadas anteriormente, a expressão $\frac{R(x)}{Q(x)}$ terá um termo na forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c},$$

onde A e B são constantes a serem determinadas.

Exemplo:

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{x^2+4}.$$

□

4ª situação: o denominador $Q(x)$ contém, em sua fatoração, fatores quadráticos irredutíveis repetidos.

Esse caso é análogo àquele em que há fatores lineares repetidos, mas nesse caso (se o fator quadrático repetido for, sem perda de generalidade, o primeiro), considerando que tal fator se repete r vezes, apareceria a expressão da seguinte maneira:

$$\frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^r}.$$

Exemplo: $\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$ terá a seguinte decomposição em frações parciais:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ix + J}{(x^2 + 1)^3}.$$

□

Stewart (2013) afirma que “Seria extremamente entediante o cálculo manual dos valores numéricos dos coeficientes [...]. A maioria dos sistemas de computação algébrica, no entanto, conseguem encontrar os valores numéricos muito rapidamente.” (p. 443) Para o exemplo acima, Stewart (2013) nos fornece “$A = -1, B = \frac{1}{8}, C = D = -1, E = \frac{15}{8}, F = -\frac{1}{8}, G = H = \frac{3}{4}, I = -\frac{1}{2}$ e $J = \frac{1}{2}$.” (p. 443)

2.3.3 A INTEGRAÇÃO POR PARTES.

Em geral, não é tão fácil integrar o produto de funções. Entretanto, se a função tiver um certo formato podemos utilizar a técnica intitulada integração por partes. Sabemos que se f e g são funções deriváveis, então a regra do produto para derivação nos dá:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Utilizando a notação de integral indefinida/antiderivada, temos que

$$\int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)]dx = f(x) \cdot g(x).$$

daí,

$$\int f'(x) \cdot g(x)dx + \int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x),$$

e podemos escrever essa última equação da seguinte maneira:

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx.$$

Com o intuito de facilitar a lembrança de tal fórmula, há quem considere $u = f(x)$ e $v = g(x)$. Daí, $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$ e, pela regra da substituição, podemos escrever essa equação como:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

A partir do Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever a fórmula da integração por partes para integrais definidas como sendo:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = \big(f(x) \cdot g(x)\big)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx.$$

2.3.4 A TÉCNICA DA SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA.

Suponha que estamos interessados em calcular

$$\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx$$

É fácil ver que a função acima não se encaixa nas condições necessárias para a aplicação das técnicas de integração citadas anteriormente. Para casos como esses, utilizaremos uma nova técnica denominada integração por substituição trigonométrica, que é útil quando a função contém expressões do tipo: $\sqrt{a^2 + x^2}, \sqrt{x^2 - a^2}$ ou $\sqrt{a^2 - x^2}$, com $a > 0$.

Abaixo podemos ver uma tabela que fornece a devida substituição para cada tipo de radical supracitado.

Tabela 2: Tabela de substituições trigonométricas.

Expressão	Substituição	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \cdot sen(\theta); -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - sen^2(\theta) = cos^2(\theta)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \cdot tg(\theta); -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + tg^2(\theta) = sec^2(\theta)$

$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \cdot \sec(\theta)\,; 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$sec^2(\theta) - 1 = tg^2(\theta)$

Fonte: (STEWART, 2006, p. 486)

Agora mostraremos, com base em exemplos, como tal técnica é eficaz.

Exemplo: Calcule:

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx.$

Solução: Note que a função que estamos interessados em integrar possui um fator do tipo $\sqrt{x^2 - a^2}$, com $a = 1$. Com base nisso, utilizaremos a substituição da terceira linha da tabela acima para que possamos realizar a operação. Para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, temos que

$$x = 1 \cdot \sec(\theta) \Rightarrow dx = \sec(\theta)\, tg(\theta) d\theta,$$

e escrevemos

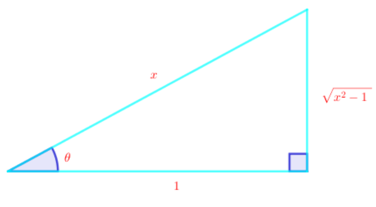
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\sec^2(\theta) - 1}} \cdot \sec(\theta) tg(\theta) d\theta = \int \frac{\sec(\theta) tg(\theta)}{|tg(\theta)|} d\theta$$

Como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, temos que $tg(\theta) > 0$. Então,

$$\int \frac{\sec(\theta) tg(\theta)}{|tg(\theta)|} d\theta = \int \frac{\sec(\theta) tg(\theta)}{tg(\theta)} d\theta = \int \sec(\theta)\, d\theta = \ln|sec(\theta) + tg(\theta)| + C.$$

Utilizaremos o triângulo retângulo associado à substituição para expressar o resultado da integral em termos de x.

Figura 7- Triângulo retângulo associado à substituição $x = sec(\theta)$.



Fonte: O autor (2017).

O triângulo foi construído com base na substituição, ou seja, com base no fato de que

$$\sec(\theta) = x,$$

o que implica que

$$\frac{1}{\cos(\theta)} = x,$$

daí,

$$\cos(\theta) = \frac{1}{x}.$$

O outro lado do triângulo é escrito com base no Teorema de Pitágoras. Assim,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \ln|sec(\theta) + tg(\theta)| + C = \ln\left|\sec(\theta) + \frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}\right| + C$$
$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C.$$

□

b) $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} dx$

Solução: Na função que iremos integrar há um radical do tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$ com $a = 4$. Utilizaremos, portanto, a primeira linha da tabela para que possamos integrar. Para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos que

$$x = 4sen(\theta) \Rightarrow dx = 4\cos(\theta)\, d\theta.$$

Daí,

$$\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^2} dx = \int \frac{\sqrt{16(1 - sen^2(\theta))}}{16sen^2(\theta)} 4\cos(\theta)\, d\theta$$
$$= \int \frac{\sqrt{16(cos^2(\theta))}}{16sen^2(\theta)} 4\cos(\theta) d\theta = \int \frac{16\cos(\theta)|\cos(\theta)|}{16\, sen^2(\theta)} d\theta$$

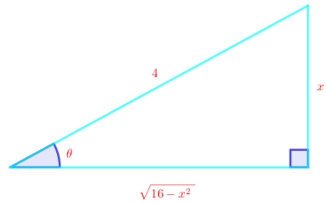
No intervalo considerado, temos que $\cos(\theta) \geq 0$. Segue que

$$\int \frac{16\cos(\theta)|\cos(\theta)|}{16\, sen^2(\theta)} d\theta = \int \frac{cos^2(\theta)}{sen^2(\theta)} d\theta = \int cotg^2(\theta) d\theta = \int (cossec^2(\theta) - 1) d\theta$$

$$= -cotg(\theta) - \theta + C$$

Observe a figura abaixo:

Figura 8- Triângulo retângulo associado à substituição $x = 4sen(\theta)$.



Fonte: O autor (2017)

Com base nela, obtemos que $cotg(\theta) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$ e, como $sen(\theta) = \frac{x}{4}$ temos que $\theta = arcsen\left(\frac{x}{4}\right)$. Finalmente,

$$\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx = -cotg(\theta) - \theta + C = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{x} - arcsen\left(\frac{x}{4}\right) + C.$$

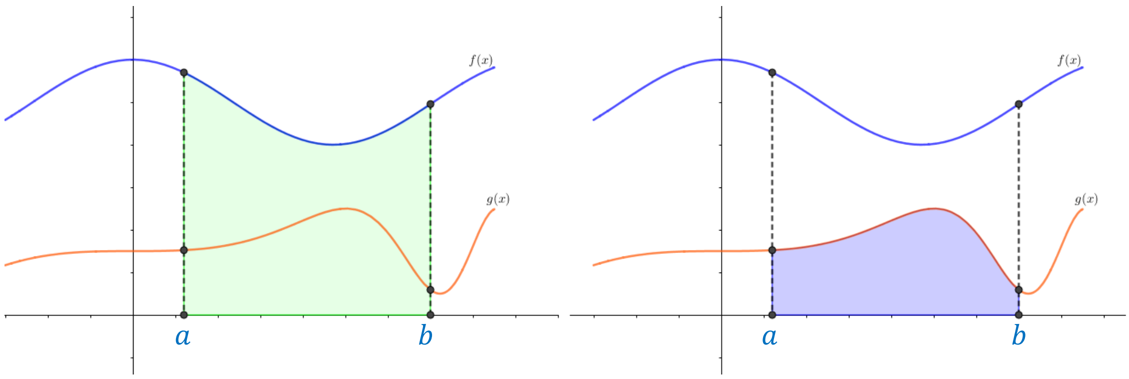
2.4 ÁREA ENTRE CURVAS E UM POUCO SOBRE DIFERENÇA DE ÁREAS.

2.4.1 ÁREA ENTRE CURVAS.

Há, nos mais diversos campos de estudo, inúmeras aplicações para as integrais. Falaremos sobre uma delas: o cálculo de área entre curvas. Para fins de simplificação, falaremos apenas do caso em que as funções são não-negativas e não se interceptam em pontos interiores ao intervalo em que estamos interessados.

Observe a figura abaixo:

Figura 9- Motivação para o cálculo da área entre curvas.



Fonte: O autor (2017)

No esboço à esquerda podemos ver, em verde, a região sob o gráfico da função f, entre as retas $x = a$ e $x = b$ e acima do eixo x e, como já sabemos, o valor da área dessa região é numericamente igual a integral definida de f de a até b, pois $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. No esboço à direita podemos ver, em azul, a região limitada pelo gráfico da função g, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x. Novamente, o valor da área de tal região é numericamente igual à integral da função g de a até b. Na mesma figura, a área entre os gráficos das funções – que denotaremos por $A(f, g)$ – somada à área da região azul é igual a área da região destacada na cor verde. Isto é,

$$\int_a^b g(x)dx + A(f,g) = \int_a^b f(x)dx$$

$$\therefore A(f,g) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

A demonstração, utilizando Somas de Riemann, pode ser feita tomando uma partição do intervalo $[a, b]$ e utilizando $f(x) - g(x)$ como altura do retângulo, se $f(x) \geq g(x)$, e utilizando $g(x) - f(x)$ se $g(x) \geq f(x)$.

2.4.2 DIFERENÇAS DE ÁREAS: GEOMÉTRICAS VS. ALGÉBRICAS.

Até o momento, só falamos sobre a área sob o gráfico de uma função f, entre as retas $x = a$ e $x = b$ e acima do eixo x, que era não-negativa no intervalo $[a, b]$ e interpretamos o resultado como sendo a integral definida da função f de a até b, mas agora mostraremos que essas hipóteses não são necessárias para que possamos ter o resultado proveniente da equação:

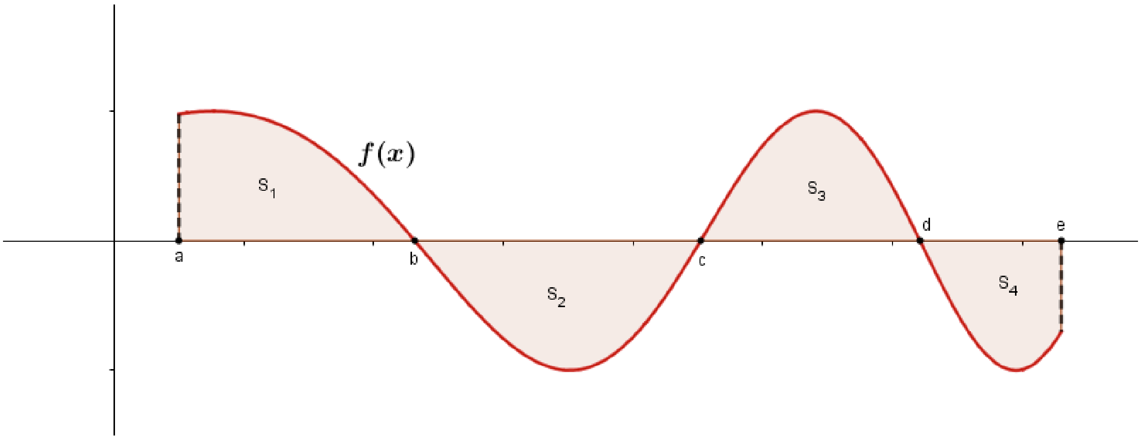
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x.$$

Suponha que o gráfico da função f esteja inteiramente abaixo do eixo x em $[a, b]$, ou seja, $f(x) < 0$ para todo x em $[a, b]$. Cada termo da soma de Riemann para esta função é negativo, pois $f(\xi_i) < 0$ e, dessa forma, $f(\xi_i)\Delta_i x$ é o oposto da área do retângulo que utilizamos para aproximar a área. Podemos afirmar que

$$\text{Área da região} = -\int_a^b f(x)dx.$$

De modo análogo, se a função está parcialmente abaixo e parcialmente acima do eixo x, como pode ser visto na figura a seguir:

Figura 10- Exemplo para servir de motivação para compreensão da Integral como uma diferença de áreas.



Fonte: O autor (2017)

A integral da função f de a até e pode ser escrita como uma soma de termos positivos e negativos que correspondem a cada intervalo em que a função está só acima ou só abaixo do eixo x, respectivamente. Para o caso da figura anterior, escrevemos:

$$\int_a^e f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3 - S_4.$$

De acordo com o que falamos anteriormente, podemos escrever:

$$\int_a^e f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx.$$

SIMMONS (1987) nomeia o resultado obtido com a equação supracitada como sendo a área algébrica da região delimitada pela curva e chama de área geométrica o resultado obtido a partir da equação:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx - \int_d^e f(x)dx.$$

Ressaltamos que para o cálculo da área geométrica é preciso que saibamos o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função se encontra só acima ou só abaixo do eixo de x e calcularmos a integral correspondente a cada um deles.

3 PRINCÍPIOS TEÓRICOS SOBRE O ERRO.

Etimologicamente, o termo *erro* é definido como sendo “s.m. 1. Ato ou efeito de errar. 2. Qualidade do que é incorreto; imprecisão, inexatidão.3. Ideia ou conceito que não condiz com a realidade; engano; desacerto; equívoco. 4. Comportamento censurável; desvio.” (1) Por outro lado, Oliveira et. al. (2012), aponta que “Erro, segundo Brousseau, é um conhecimento, que até certo ponto conduz ao acerto, porém, a partir de determinado momento se torna falho, ou simplesmente inadaptável.” (p. 2)

Historicamente, o erro vem sendo objeto de pesquisas e estas indicam que os erros podem ser utilizados no ensino de Matemática. Embora muitos ainda o tratem como obstáculo, sinal de não-aprendizagem ou apenas como algo ruim, os mais diversos estudos sobre o erro provam que não é bem assim.

O erro fala muito além dele e é mais que um mero “fracasso”. O erro pode retratar situações que não dependem, necessariamente, da situação atual, pode indicar um problema na metodologia do professor, e, é claro, pode, também, indicar a não-aprendizagem.

Entretanto, é preciso entender que por mais simplista que possa ser a versão que o professor tenha sobre o erro, o que não pode acontecer é ele apenas ser diagnosticado e não ser feito nada que possa servir de subsídio para uma superação de tal obstáculo.

No processo avaliativo o erro deve ser evidenciado como um fator que contribui para o desenvolvimento cognitivo e, como consequência, da aprendizagem. Como afirmam Rios e Vieira (2016)

> O surgimento de questionamentos pedagógicos sobre o papel do professor e de suas práticas pedagógicas no processo avaliativo, evidencia o erro como um fator contributivo no desenvolvimento cognitivo, além disso, é uma excelente oportunidade de comparação sobre as diversas abordagens que assim possam contribuir na construção de estratégias didáticas através dos diversos exemplos praticados historicamente em todo o mundo. (p. 1)

É fato que o erro possui diversos papéis, entretanto faz-se necessário um entendimento sobre isso para que seja definido qual o papel dele no processo da aprendizagem. O erro pelo erro é útil apenas no âmbito classificatório da avaliação, mas se queremos usá-lo com algo a mais devemos entender suas limitações e, sobretudo, suas potencialidades. Pois, como afirma Pinto (1998)

> O erro concebido como sinal do fracasso, parece estar inscrito na *"cultura avaliativa"* da escola, quando esta tem como foco de preocupação a "nota" para a aprovação e não a aprendizagem do aluno, reforçando com isto a função classificatória e seletiva da avaliação. (p. 8, grifos da autora)

É importante compreender o papel do erro dentro dos processos de ensino e aprendizagem como sendo o ponto de partida e não a linha de chegada. Como ressaltam Rios e Vieira (2016, p. 2), "O papel do erro no processo de aprendizagem depende de como ele ocorre nas resoluções de tarefas."

Neste trabalho apresentaremos duas perspectivas para os erros: a perspectiva piagetiana e a perspectiva epistemológica.

3.1 PERSPECTIVA PIAGETIANA.

Psicogênese significa algo que tem origem e desenvolvimento em processos mentais ou psicológicos. Nesse sentido, consideraremos que o erro pode ser entendido a partir da compreensão das capacidades cognitivas dos alunos. Pinto (2000) afirma que

> O erro pode ser compreendido a partir do conhecimento das capacidades cognitivas dos alunos. Para essa compreensão, a teoria piagetiana, apesar de não ter realizado estudos em sala de aula, apresenta-se como um suporte teórico valioso para a pedagogia. (p. 37)

Torre (2007), por outro lado, argumenta que "Nos termos de Piaget, o sujeito constrói subjetivamente o objeto de conhecimento com base na coordenação das operações adaptativas exercidas sobre o mesmo." (p. 43)

Embora o erro muitas vezes seja motivo de condenação e seja tratado da maneira "erro pelo erro", concordamos com Pinto (2000) quando esta afirma que "[...] na perspectiva piagetiana, ao mesmo tempo em que é resposta a uma determinada questão, o erro é também colocação de um problema que suscita novas produções." (p. 41) e ressaltamos, mais uma vez, a importância do erro nos processos de ensino e aprendizagem.

Ademais, Pinto (2000) aponta que "[...] o primeiro passo para saber que lugar o erro ocupa no processo de aquisição de conhecimento é reconhecer o conhecimento como uma construção, do mesmo modo como Piaget." (p. 42)

Para este reconhecimento, apresentaremos agora, de modo breve, os conceitos-chave que nutrem a teoria Piagetiana que são: a assimilação, a acomodação, a equilibração e a regulação.

Assimilação: Pinto (2000) argumenta que o conceito da assimilação, para Piaget, "significa dar sentido ao objeto de conhecimento" (p.42). La Taille (1997), por outro lado, complementa essa definição afirmando que "conhecer significa assimilar o objeto à organização de que a inteligência é dotada." (p. 26) e, além disso, comenta que "[...] conhecer é conferir [dar] sentido, e esse sentido não está todo pronto e evidente nos objetos do conhecimento: ele é fruto de um trabalho ativo de assimilação." (p. 26)

Acomodação: Piaget (1975) define acomodação com base em que "Todo esquema de assimilação é obrigado a se acomodar aos elementos que ele assimila, isto é, de modificar-se em função de suas particularidades, mas sem perder sua continuidade nem seus poderes anteriores de assimilação." (p. 13, apud La TAILLE, 1997, p. 33)

Pinto (2000), por sua vez, afirma que

> Mediante o conceito de *acomodação*, o construtivismo piagetiano deixa evidente a flexibilidade das estruturas de assimilação: a construção do conhecimento nunca se dá de forma linear e mecânica. Essa dinâmica entre assimilação e a acomodação é explicada pelo conceito de equilibração." (p. 43, grifo do autor)

Equilibração: Como o próprio nome já diz, este conceito-chave baseia-se na ação de ir em busca do equilíbrio e, segundo La Taille (1975), "[...] é a busca pelo equilíbrio e, portanto, a superação de "conflitos cognitivos"[8] que explica, em parte, a evolução da inteligência e dos conhecimentos." (p. 34, grifo do autor)

Regulação: Pinto (2000) aponta que, para Piaget, as regulações surgem das situações perturbadoras e constituem-se em fonte do desenvolvimento da inteligência. Concordamos que

> Pelo processo regulador, o erro pode ser fonte da tomada de consciência, levando o sujeito a modificar seus esquemas. Para cumprir essa nova função o erro deve ser um "observável" [...]. Este parece ser o grande desafio que a teoria piagetiana coloca à pedagogia em relação à função do erro no processo de aprendizagem do aluno. (PINTO, 2000, p. 44)

Assim como Pinto (2000), partimos da ideia de que a psicogênese ocupa um importante lugar para os estudos sobre os erros dos alunos, mas é um fato que pensar que esta perspectiva, por si só, abrange toda e qualquer variante do erro do aluno e,

[8] La Taille (1995) justifica esse termo como sendo o nome que se dá a um estado de desequilíbrio. (p. 34)

assim, seria suficiente para a compreensão do erro que ele comete seria, no mínimo, ingenuidade.

Concordamos, pois, com Joshua e Dupin (1993) quando estes afirmam que

> Mesmo que o referencial piagetiano forneça um bom paradigma de interpretação, sua falta de sensibilidade para as diferenças de conteúdo, torna-o um instrumentos inadequado, ao menos se o tormarmos ao pé da letra, para pensar uma didática das ciências. (p. 98, apud PINTO, 2000, p. 46, tradução deste último.)

Nesse sentido, apresentaremos uma nova perspectiva para o estudo dos erros dos estudantes e, assim como Pinto (2000), "acreditamos que isso permitirá uma melhor reflexão sobre ele [o erro] no âmbito das complexas interações que ocorrem em situação de ensino, além de proporcionar uma melhor apreciação de sua ocorrência no contexto escolar." (p. 51)

3.2 PERSPECTIVA EPISTEMOLÓGICA.

Os estudos de Piaget, como afirma Pinto (2000), não foram realizados em sala de aula, mas mesmo assim se apresentam como suportes teóricos valiosos para a pedagogia. Entretanto, faz-se necessário uma apresentação de uma perspectiva diferente para o erro e esta, por sua vez, está intimamente ligada com o ensino de Matemática.

Bachelard (1996) afirma que

> Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que *é em termos de obstáculos que o problema científico deve ser colocado*. E não se trata de considerar obstáculos externos como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas da inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos. (p. 17, grifo do autor)

Brousseau (1976, apud ARTIGUE, 1990) afirma que há 3 fontes fundamentais para os obstáculos encontrados no ensino de matemática:

> - Uma origem ontogenética, que corresponde aos obstáculos relacionados às limitações cognitivas dos alunos envolvidos no processo de ensino.
> - Uma origem didática, para os obstáculos relacionados à escolha do sistema educacional.

> - E, por fim, uma origem epistemológica para os obstáculos ligados à resistência de um conhecimento mal adaptado, isto é, os obstáculos no sentido indicado por Bachelard. (p. 249, tradução nossa)

Com base nas ideias de Pinto (2000), o termo obstáculo epistemológico pode ser compreendido "como o efeito limitativo de um sistema de conceitos sobre o desenvolvimento do pensamento.". (p. 51)

Ao pensarmos em obstáculos, segundo as ideias de Bachelard e Brousseau, podemos compreender o porquê de diversos erros acontecerem. O que podemos inferir sobre o erro presente no exemplo abaixo?

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$$

A princípio podemos pensar em uma falsa generalização de ideias que permeiam algumas operações como: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, para a e b maiores que zero. O aluno pode pensar – a partir do que estudou na escola básica – que se a raiz de um quociente é o quociente entre as raízes, então a raiz de uma soma é a soma das raízes.

Nesse viés, Pinto (2000) aponta que

> Os saberes que a escola oficializa não têm apenas uma gênese histórica, inerente à própria constituição do conhecimento como ciência. Eles têm, ainda, uma gênese institucional: a constituição da disciplina escolar. Essas constituições interferem no processo de reconstrução do conhecimento pelo aluno. (p. 55)

Entretanto faz-se necessário enfatizar – tendo em vista que a pesquisa foi realizada com estudantes do ensino superior – que o recurso à aprendizagem do ensino básico não significa, necessariamente, que isso acarretará em um erro, mas sim que o estudante precisa de cautela ao fazer uso de tal recurso.

3.3 ANÁLISE DE ERROS EM MATEMÁTICA E AS CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO.

Estudos recentes como o de Rios e Vieira (2016) levam a uma visão um tanto quanto construída e importante a se ter sobre o erro. O erro reflete em diversos aspectos dos processos de ensino e aprendizagem. A visão de erro apenas como fracasso ou indicativo de não aprendizagem pode nos levar a diversos outros problemas diante de tais processos. Nesse sentido,

> A percepção do erro como algo ruim, a ser punido, coibido, castigado, reprimido, vincula-se à concepção de avaliação da aprendizagem em sua dimensão classificatória, porque preocupada apenas em constatar, registrar e sancionar. Por outro lado, a percepção do erro como um indicador diagnóstico, na promoção de outras e novas situações de aprendizagem, vincula-se à concepção de avaliação da aprendizagem em sua dimensão formativa, porque se preocupa em garantir avanços e superações pela inserção de variabilidade didática, pertinente à regulação do ensino e à autorregulação da aprendizagem. (RIOS e VIEIRA, 2016, p. 2)

Tal visão é importante para este trabalho, tendo em vista um dos respectivos objetivos dele. Estabelecer o erro como ponto de partida para uma aprendizagem mais efetiva pode ser uma boa estratégia do ponto de vista pedagógico. Como afirmam Correia (2010), “Os erros de alunos em Matemática podem ser importantes nas metodologias de ensino e de pesquisa, além de permitir ao professor perceber como se dá a apropriação do saber pelos estudantes.” (p. 171) e Cury e Cassol (2004) “... muitas vezes a análise de erros está posta somente como uma maneira de criticar os estudantes ou o ensino no que lhes foi ministrado, sem qualquer preocupação em buscar as causas dos erros ou as possibilidades de aproveitá-los para propor mudanças.” (p. 28)

Levando em conta o que pontua Correia (2010): “Esta análise permite ao professor explorar a dificuldade dos alunos e utilizar os erros como ferramentas para o aprendizado, levando os estudantes a [elaborarem] questionamentos sobre suas respostas.” (p. 171), podemos já observar o quão interligados estão os erros cometidos pelos alunos e as ações do professor diante de tais erros.

“*O erro é filho da mudança.*” (TORRE, 2007, p. 49, grifo do autor) Com essa frase, Torre (2007) começa a pontuar algumas considerações acerca do erro e afirma que embora não seja uma meta a ser atingida, não é, todavia, algo digno de condenação sem que sejam observados os seus processos/precedentes.

Cury (2013), por outro lado, aponta que

> Na análise das respostas dos alunos, o importante não é o acerto ou erro em sim – que são pontuados em uma prova de avaliação da aprendizagem –, mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que emergem na produção escrita e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem. (p. 65)

O erro tomado como ponto de partida para uma aprendizagem mais efetiva quebra o paradigma que que é algo negativo e digno de condenação por parte do professor, até mesmo quando pode se dar por culpa dele, e passa a enxergá-lo como algo construtivo. Todo erro possui uma fonte e essa, por sua vez, pode ser o próprio desejo de aprender. Concordamos com Luckesi (2011) quando este aponta que

> O erro, especialmente no caso da aprendizagem, não deve ser fonte de castigo, pois é um suporte para a autocompreensão, seja pela busca individual (*na medida em que me pergunto como e por que errei*), seja pela busca participativa (na medida em que um outro – no caso da escola, o professor – discute com o aluno, apontando-lhe os desvios cometidos em relação ao padrão estabelecido). **Assim sendo, o erro não é fonte para castigo, mas suporte para o crescimento. Nessa reflexão, o erro é visto e compreendido de forma dinâmica, na medida em que contradiz o padrão, para, subsequentemente, possibilitar uma conduta nova em conformidade com o padrão ou mais perfeita que este. O erro, aqui, é visto como algo dinâmico, como caminho para o avanço.** (p. 198, grifos nossos)

Agora faremos uma apresentação de alguns trabalhos que falam sobre análise de erros em CDI, pontuando os objetivos, percurso metodológico, análise dos dados e principais resultados. Ressaltamos, sobretudo, a importância desta parte do trabalho para a compreensão, ao menos de uma pequena parte, do cenário das pesquisas nesta área e suas contribuições.

4 ALGUNS TRABALHOS SOBRE A ANÁLISE DE ERROS EM PROBLEMAS DE CÁLCULO INTEGRAL.

Essa seção tem como objetivo a apresentação de uma parte do cenário das pesquisas nacionais sobre Análise de Erros em problemas de Cálculo Integral. Como subsídio para isso, buscamos por artigos, dissertações, teses e livros que tratassem sobre os assuntos e observamos os seus respectivos objetivos, metodologia e resultados obtidos.

Ao fazer um levantamento sobre tais trabalhos, foi possível perceber uma grande onda levando ao seguinte ponto: o erro se dá por problemas advindos do ensino básico.

Cury e Cassol (2004) apresentam um relato de experiência sobre a análise de erros em Cálculo Diferencial e Integral e afirmam que

> A análise dos erros cometidos pelos estudantes, em provas ou em trabalhos de sala de aula, mostra que os estudantes não dominam conteúdos de Álgebra e Geometria do ensino fundamental, bem como os relativos a Trigonometria e Geometria Espacial, do ensino médio. (p. 29)

A pesquisa tinha como problema "quais são as possíveis causas dos erros cometidos pelos alunos de Cálculo Diferencial e Integral A e como podemos auxiliá-los a superar tais dificuldades?" (CURY e CASSOL, 2004, p. 29) e tinha como objetivos – Analisar os erros em questões de Cálculo A, cometidos por alunos de um curso de Engenharia Química, ao resolverem problemas e exercícios em trabalhos individuais ou grupais; - Detectar possíveis causas para os erros; - A partir dos dados obtidos, propor estratégias para envolver os alunos na busca de soluções para suas próprias dificuldades, atendendo-os em grupo ou individualmente. Para este trabalho, Cury e Cassol (2004) destacaram apenas os erros encontrados nas questões das três provas que foram feitas durante a disciplina. Como nosso foco são os erros em questões de Cálculo Integral, omitiremos (em todo trabalho que não for específico sobre o tema) as considerações sobre os erros em outros tópicos do cálculo (limites, derivadas, etc) e apresentaremos apenas as considerações acerca do tópico de integrais.

Com relação aos erros encontrados em questões sobre integral, Cury e Cassol (2004) afirmam que "novamente surgiram erros em procedimentos algébricos, nas questões relativas a métodos de integração, acrescidos de dificuldades em empregar procedimentos." (p. 33). A prova 3, que contemplava o conteúdo de Integral, foi realizada – no primeiro semestre – por 37 alunos e foram escolhidas 2 questões de tal prova para a análise dos erros. A saber: 1- $\int xe^{3x}dx$ e 2- $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Vinte e sete alunos erraram a primeira questão e os erros encontrados foram classificados em três categorias. A primeira categoria consistia em erros no método usado, isto é, o estudante tenta resolver a integral por métodos que não lhe permitem encontrar a resposta. A segunda categoria é relativa ao erro na técnica de integração por partes, ou seja, o aluno compreende que deve usar tal técnica para calcular a integral, mas confunde-se na escolha de u e dv. A terceira categoria era composta pelos erros que ocorriam por falsa generalização, isto é, o aluno não reconhece a composição de funções em e^{3x} e generaliza um resultado já conhecido, a saber: $\int e^x dx = e^x + C$.

Na segunda questão, vinte pessoas erraram e os erros foram classificados em seis categorias. Na primeira estavam os erros relativos ao método de integração. Nessa categoria o aluno não reconhece o tipo de integral e escolhe um método que não se revela adequado. Na segunda categoria estavam os erros que se davam pela não identificação da variável de integração. Os estudantes que tiveram seus erros classificados nessa categoria fazem a substituição corretamente, mas misturam os diferenciais nas expressões.

A terceira categoria contemplava os erros no processo de diferenciação. Os estudantes, ao calcularem a diferencial de x, erram o procedimento, o que leva a problemas mais adiante. A quarta categoria contempla os erros em procedimentos algébricos que em geral se davam por cancelamentos provenientes da substituição utilizada e até mesmo a utilização da seguinte consideração do aluno: $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$. A quinta e a sexta categoria se davam, respectivamente, por: falta de argumento no cosseno e lapsos de escrita, ou seja, o aluno escreve a expressão correta, mas esquece de algum elemento na expressão seguinte.

No segundo semestre a terceira prova foi realizada por vinte e sete alunos e foi escolhida uma questão para análise, que era a seguinte: Calcule $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$ com a substituição $x = 2\sec t$. Com relação à quantidade de erros, Cury e Cassol (2004) afirmam que catorze estudantes erraram a questão analisada e, assim como a questão 2 da 3ª prova no 1º semestre, os erros foram classificados em seis categorias.

As quatro primeiras categorias são as mesmas da questão 2 da 3ª prova no 1º semestre e a estas foram adicionadas duas categorias e os erros destas consistiam, na quinta categoria, na falsa generalização da regra da integral da soma, isto é, o estudante compreende que a integral da soma de duas funções é a soma das integrais de cada função e generaliza, erroneamente, esse fato para o produto de funções. A sexta categoria abrangia os erros que se deram pelo fato da não aplicação da tabela de integração.

Após a análise dos erros, Cury e Cassol apresentam algumas conclusões e sugestões para possíveis atitudes diante dos erros. As autoras, com relação aos erros que foram encontrados na terceira prova, reiteram o surgimento de erros em procedimentos algébricos – assim como na primeira e na segunda provas – nas questões que tratavam dos métodos de integração e, além disso, acrescentam as dificuldades no emprego de procedimentos.

Com relação às possíveis atitudes a serem tomadas, Cury e Cassol (2004) orientam que

> Para cada erro detectado e classificado em nossa pesquisa, poderíamos planejar uma tarefa para ser investigada pelos alunos, modificando, aos poucos, a metodologia tradicional, em que o professor apresenta conteúdos e o aluno copia, para uma outra, em que o aluno é sujeito de sua aprendizagem, responsabilizando-se pelos acertos e erros dela decorrentes. (p. 35)

Baldino e Cabral (1999) apresentam um estudo de caso em que fazem uso da pedagogia da assimilação solidária, que consiste na análise da resolução de uma questão de integral indefinida. Os autores afirmam que, de modo geral, os erros presentes em tais resoluções se revelavam dificuldades com manipulações algébricas em nível de 7ª série.

O estudo de caso realizado por Baldino e Cabral (1999) ocorreu em uma disciplina de CDI I do curso de Física da UNESP (Rio Claro) no ano de 1997. A organização de tal disciplina era baseada na assimilação solidária[9] e o episódio de estudo foi uma aula de recuperação paralela que teve duração de uma hora e quarenta e cinco minutos. Os quatro alunos que participaram de tal episódio foram estudantes que estavam com média individual abaixo da média da turma.

A atividade proposta pelo professor é o cálculo de uma primitiva, isto é, de uma integral indefinida, a saber:

---

[9] MELO, 1997; SILVA, 1997; citados por BALDINO e CABRAL (1999).

$$\int \frac{\sqrt{81x^{\frac{2}{3}} + 16}}{9x^{\frac{1}{3}}} dx.$$

O primeiro erro cometido pelo primeiro estudante que foi chamado a resolver a questão no quadro foi a confusão entre as técnicas de integração e derivação. O estudante afirma que $\int \frac{u}{v} = \int \frac{u'v - v'u}{v^2}$, ou seja, confunde a regra de derivação do quociente com uma técnica para integração de um quociente. Outro erro cometido decorre da aplicação de uma propriedade inexistente para as raízes que consiste, de modo geral, em escrever $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ e o professor comentou sobre a grande recorrência desse equívoco em cursos de cálculo.

Sem mais detalhes, os erros encontrados se deram pelo fato de escolhas ineficazes para a função a ser substituída – após, com a ajuda do professor, os estudantes perceberem que necessitariam usar a regra da substituição – e por, novamente, aplicações de propriedades inexistentes, tais como: $\frac{b+a}{b} = 1 + a$.

De modo geral, o que o professor fez foi pedir para que os alunos verifiquem a falsidade de suas afirmações com base em exemplos. Para o erro citado acima o professor pede aos alunos que calculem $\frac{2+6}{2}$ utilizando a afirmação feita e sem utilizá-la e, dessa forma, os alunos conseguem perceber o erro cometido, pois observam que a afirmação feita por eles fornece 7 como resultado, quando o verdadeiro é 4.

Os erros cometidos pelos alunos eram, de maneira geral, advindos da escola básica. Ressaltamos, pois, os resultados da pesquisa de Cury e Cassol (2004), que apontam para o mesmo lugar: os principais erros cometidos em questões que tratam sobre integral nem sempre é por não saber integrar, mas sim por dificuldades provenientes de assuntos do ensino básico.

Bin Ali e Tall (1996) estudam os procedimentos empregados por três grupos de doze estudantes, classificados com os conceitos A, B e C em avaliações da disciplina de Cálculo. Os autores apresentam em quadros e tabelas os dados obtidos com a resolução de cada questão. A primeira questão sobre integração, que consistia em calcular $\int \sqrt{3x^3} dx$ não foi fonte de erros no grupo dos estudantes avaliados com conceito A. Já no grupo dos estudantes com conceito B, ocorreram 7 erros e pudemos ver o motivo de tais erros a partir de uma tabela construída pelos autores. Dois estudantes apresentaram uma solução baseada numa supergeneralização (generalização em excesso) da integral, três estudantes apresentaram solução baseada na mistura entre a integração por substituição e a integração direta, e dois estudantes cometeram erro algébrico.

Figura 11- Recorte dos erros cometidos pelos estudantes do grupo B.

Errors (7)

2 students	3 students	2 students
$\int\sqrt{3x^3}dx$ $=\int(3x^3)^{1/2}dx$ $=\frac{(3x^3)^{3/2}}{3/2}$ $=\frac{2(3x^3)^{3/2}}{3}$	$\int\sqrt{3x^3}dx$ $=\int(3x^3)^{\frac{1}{2}}dx$ Let $u=3x^3$ $\frac{du}{dx}=9x^2$ $dx=\frac{du}{9x^2}$ $\therefore\int(u)^{\frac{1}{2}}dx=\int u^{1/2}\frac{du}{9x^2}$ $=\frac{1}{9x^2}\int u^{1/2}du$ $=\frac{1}{9x^2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]+c$ $=\frac{2u^{3/2}}{27x^2}+c=\frac{2(3x^3)}{27x^2}$ $=\frac{6x^3}{27x^2}=\frac{2}{9}x$	$\int\sqrt{3x^3}dx$ $=\int 3x^{3/2}dx$ $=3\int x^{3/2}dx$ $=3x^{5/2}.2/5$ $=6/5\,x^{5/2}+c$
Overgeneralisation of integration	Mixture of substitution and direct integration	Algebraic Misconception

Fonte: (BIN ALI; TALL, 1996, p. 4)

Quatro estudantes do grupo C acertaram a questão e oito cometeram os mesmos erros daqueles do grupo B, mas com diferentes passos, como pode ser visto na figura abaixo:

Figura 12- Recorte dos erros cometidos pelos estudantes do grupo C.

Errors (8)

3 students	2 students	3 students
$\int\sqrt{3x^3}dx$ $=\int(3x)^{1/2}dx$ $=2/3\,(3x^3)^{3/2}+c$	$\int\sqrt{3x^3}dx$ $=(3x^3)^{\frac{1}{2}}$ $u=3x^3$ $=\int(u)^{\frac{1}{2}}$ $=\frac{u^{3/2}}{3/2}+c$ $=\frac{2}{3}u^{3/2}+c$ $=\frac{2}{3}\left(3x^3\right)^{3/2}+c$ $=2x^{9/2}+c$	$\int\sqrt{3x^3}dx$ $=\int(3x^3)^{1/2}dx$ $=9\int(x^3)^{1/2}dx$ $=9\left[\frac{(x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]+c$ $=9\left[\frac{(x^3)^{3/2}}{\frac{9}{2}}\right]+c$ $=2[(x^3)^{3/2}]+c$
Over-generalisation of direct integration	Mixture of substitution and direct integration	Algebraic Misconception

Fonte: (BIN ALI; TALL, 1996, p. 5)

Concordamos com Bin Ali e Tall (1996) quando estes afirmam que “Quando a manipulação envolvida na utilização de um algoritmo torna-se mais complexa, pode ser possível fazer uso de métodos alternativos para simplificar a solução.” (p. 6, tradução nossa)

Cury (2003) realizou uma pesquisa com cerca de 450 alunos de 13 turmas de CDI A e tinha como objetivo a análise e classificação dos erros cometidos pelos estudantes em suas provas individuais com o intuito de descobrir quais as principais dificuldades e as respectivas causas.

A autora realizou um levantamento com o objetivo de descobrir as questões que mais foram fonte de erros em cada uma das três provas semestrais para só depois analisar, classificar os erros e inferir causas para eles. Após a análise, Cury (2003) afirma que

> Na primeira prova, em que geralmente eram abordadas questões sobre funções e gráficos, verificamos que a maior dificuldade estava relacionada com reconhecimento de gráficos das diversas funções básicas. Na segunda prova, os maiores problemas estavam ligados à aplicações de regras de derivação e na terceira, às questões que solicitavam antidiferenciais. (p. 3)

Os erros evidenciados por Cury (2003) também se davam pela aplicação de falsas generalizações, erros de manipulação algébrica, erros nas aplicações de técnicas, lapsos de escrita, erros com relação ao conceito de função trigonométrica (não compreensão do argumento da função), entre outros.

O estudo de Cury (2003) corrobora com os outros apresentados quando esta conclui que “A análise dos erros cometidos pelos alunos nos vários tipos de questões aqui apresentadas mostra que as dificuldades mais sérias estão relacionadas com conteúdos de ensino básico.” (p. 8)

Concordamos, portanto, que há um certo consenso entre os autores dos trabalhos sobre análise de erros aqui expostos e isso é bastante interessante, tendo em vista as diversas contribuições, propostas metodológicas e descobertas que ocorrem diante desse tipo de análise em produções dos estudantes.

5 METODOLOGIA.

Apresentaremos neste capítulo a caracterização da pesquisa e todo o caminho percorrido na tentativa de responder à questão de pesquisa e a delimitação dos sujeitos para ela.

5.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA.

Podemos caracterizar a nossa pesquisa, quanto à abordagem, como qualitativa, pois segundo Minayo (2002), esse tipo

> [...] trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis. (p. 21-22)

Além disso, Silveira e Córdova (2009) afirmam que “Os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito [...]” (p. 32). Ademais, eles apresentam algumas características desse tipo de abordagem e destacamos as que seguem: “objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de *descrever*, *compreender*, *explicar*; precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; [...]” (p. 32, grifo do autor).

Para nossa pesquisa estabelecemos a objetivação do fenômeno já na Introdução e, com base no método de coleta de dados que será comentado mais à frente, estabelecemos a hierarquia entre as ações de descrever, compreender e explicar e podemos parafraseá-las como sendo a descrição/análise dos dados, compreensão e verificação das hipóteses a partir de tal construção e inferência de possíveis causas e possíveis medidas interventivas diante dos resultados obtidos.

Quanto aos objetivos, podemos classificar a nossa pesquisa, com base nas ideias de Gil(2002), como sendo descritiva, tendo em vista que esse tipo

> [...] têm como objetivo principal a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então, o estabelecimento de relações entre variáveis. [...] uma de suas características mais significativas está na utilização de técnicas padronizadas de coletas de dados, tais como o questionário e a observação sistemática.(p. 42)

Com base nisso, nossa pesquisa está de acordo com tais ideias tendo em vista que estávamos interessados em descrever as características de um certo grupo – de licenciandos em Matemática da UFPE/CAA – e fazer relações entre variáveis como problemas em CDI III, mas que advém do CDI I e, ademais, falaremos, logo após definirmos os sujeitos da pesquisa, sobre o questionário: o nosso instrumento de coleta de dados.

Este trabalho ocorreu em cinco etapas. A **primeira** constituiu a delimitação do problema de pesquisa e os respectivos objetivos, embora estes tenham sofrido alterações ao longo da pesquisa. **A segunda** foi a busca de pesquisas que tratassem sobre a análise de erros em CDI e, mais especificamente, sobre análise de erros em problemas de cálculo integral.

A **terceira** foi a elaboração do instrumento de coleta de dados e a **quarta** foi a coleta de dados. A **quinta,** e última, foi a análise dos dados obtidos para que pudéssemos voltar ao problema de pesquisa e tentar respondê-lo.

5.2 SUJEITOS DA PESQUISA.

Como estávamos interessados em analisar os erros para compreendermos as principais dificuldades de um grupo de licenciandos em Matemática da UFPE/CAA em questões que envolvem as técnicas de integração, fez-se necessário que tais estudantes já tivessem tido o primeiro contato com tal assunto e isso implicou que os estudantes já tivessem cursado a disciplina CDI I. Sendo assim, definimos o seguinte perfil para os sujeitos da pesquisa:

- Ser estudante do curso de graduação em Matemática-Licenciatura da UFPE/CAA
- Ter cursado ao menos a disciplina de CDI I.

5.3 COLETA DE DADOS: O QUESTIONÁRIO E SEUS OBJETIVOS.

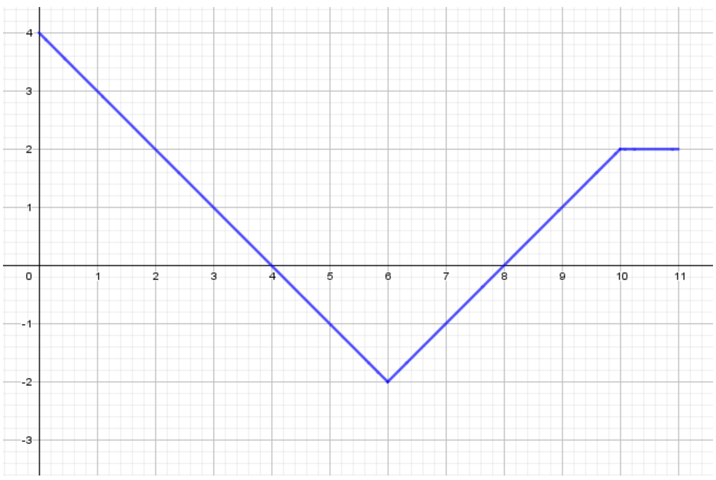
Como foi visto em alguns trabalhos encontrados na segunda etapa de realização dessa pesquisa, poderíamos ter optado por ter utilizado as provas das disciplinas de CDI como instrumento de coleta de dados, mas preferimos, diante das ideias de outros trabalhos, elaborar o nosso próprio questionário. Este foi aplicado no dia 30 de outubro de 2017 com um grupo de vinte estudantes que dispuseram de duas horas para responderem. Agora apresentaremos o questionário, os seus objetivos, as possíveis soluções e algumas pretensões para as respostas.

Questão 1: No Cálculo Integral existem diferentes regras e técnicas de integração e cada uma delas se aplica melhor em determinadas situações. Explique em que situação a aplicação de cada técnica torna mais fácil o processo de integração. Se julgar necessário, forneça exemplos, porém ao fornecer o exemplo não é necessário que realize a integração.

a) Integração por partes.
b) Integração por frações parciais.
c) Integração pela regra da substituição simples
d) Integração por substituição trigonométrica.

O principal objetivo dessa questão era investigar se os estudantes conseguiam explicar em quais situações era mais proveitoso, e facilitaria a realização da operação, a aplicação de cada técnica. Todavia, se o aluno não conseguisse explicar, ele poderia fornecer exemplos que ilustrassem as situações em que usaria a técnica em questão. Não queríamos, pois, que eles explicassem toda a técnica ou como ela é eficaz, apenas que falassem "pontos-chave" para a utilização. Exemplo: "Uso integração por frações parciais quando estamos interessados em integrar funções racionais." "Utilizamos a integração por partes quando estamos interessados em integrar um produto de funções onde a regra da substituição simples não nos ajuda tanto.", etc.

Questão 2: O gráfico da função $f(x)$ está esboçado na figura abaixo:



Com base nele, resolva os itens a seguir explicando a estratégia utilizada.

a) $\int_0^4 f(x)dx$
b) $\int_6^8 f(x)dx$
c) $\int_0^{11} f(x)dx$

Nessa questão, queríamos – nos itens (a) e (b) – observar como os estudantes lidariam com a resolução de questões onde a lei de formação da função não estava explícita, mas era dado seu gráfico. Além disso, investigaríamos o cálculo de integrais definidas a partir do recurso da área. Para o item (c) tínhamos o mesmo objetivo dos anteriores, mas queríamos investigar a compreensão que os estudantes tinham do Teorema 6.

Solução: a) A área abaixo do gráfico de $f(x)$ no intervalo $[0,4]$ é a de um triângulo de base medindo 4 e altura também medindo 4. Logo,

$$\int_0^4 f(x)dx = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

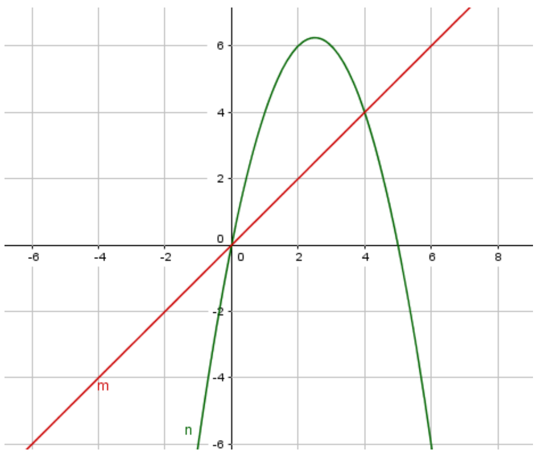
b) Observe que o gráfico da função f no intervalo $[6,8]$, o eixo x, e as retas $x = 6$ e $x = 8$ delimitam um triângulo com base medindo 2 e altura 2 então podemos interpretar a integral como sendo a área desse triângulo com o sinal negativo, tendo em vista que a função é menor ou igual a zero no intervalo $[6,8]$. Assim,

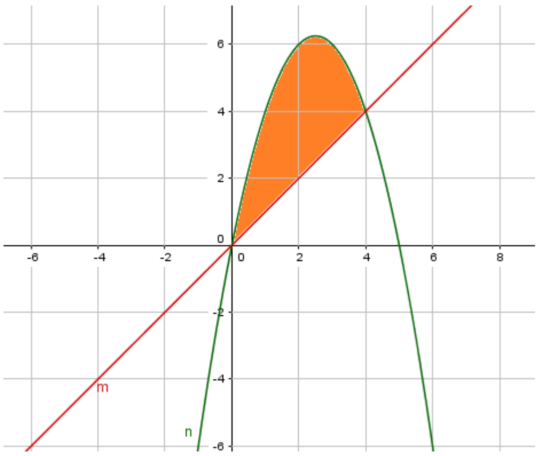
$$\int_6^8 f(x)dx = -\frac{2 \cdot 2}{2} = -2.$$

c) Utilizando o que foi provado no Teorema 6, podemos escrever:

$$\int_0^{11} f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx + \int_8^{11} f(x)dx = 8 + (-4) + 4 = 8.$$

Questão 3: Como pode ser visto na figura abaixo, à esquerda, as funções $n(x) = -x^2 + 5x$ e $m(x) = x$ são ambas não negativas, ou seja, maiores ou iguais a zero no intervalo $[0,4]$. Calcule a área entre os gráficos das funções $n(x)$ e $m(x)$ no intervalo $[0,4]$. Em outras palavras, calcule a área hachurada na figura abaixo, à direita.





Na experiência que tivemos na disciplina de CDI III, pudemos notar que, às vezes, a dificuldade em resolver a questão não era, necessariamente, apenas pela dificuldade na integração, mas também pelo fato de não compreender o enunciado e, a partir daí, não conseguir ao menos montar a integral. Essa questão tinha, juntamente com o item (a) da próxima, o objetivo de investigar isto.

É dado um problema que consiste em calcular a área entre o gráfico de duas funções e queríamos investigar a atitude do estudante diante de tal questão e seus argumentos de resolução.

Solução: Como as funções são ambas não-negativas no intervalo $[0,4]$ podemos interpretar a integral com uma área e temos que a integral de 0 a 4 das funções n e m representam as áreas das figuras planas limitadas pelo seus gráficos, o eixo x e as retas $x = 0$ e $x = 4$. Como estamos interessados em calcular a área entre os gráficos de m e n, e $n(x) \geq m(x), \forall x \in [0,4]$, temos que:

$$Área(m,n) = \int_0^4 n(x)dx - \int_0^4 m(x)dx = \int_0^4 [n(x) - m(x)]dx,$$

sendo $Área(m,n)$ a área compreendida entre os gráficos das funções m e n e a última igualdade se dá pelo fato de que as duas funções são integráveis em $[0,4]$. Portanto,

$$\acute{A}rea(m,n) = \int_0^4 [n(x) - m(x)]dx$$

$$= \int_0^4 (-x^2 + 5x - x)dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^4$$

$$= -\frac{4^3}{3} + 2 \cdot 4^2 - \left(-\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0^2\right) = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{-64 + 96}{3} = \frac{32}{3}.$$

Questão 4: Calcule as seguintes integrais justificando cada passo da resolução.

a) $\int_0^4 (-x^2 + 4x)dx$
b) $\int sen(4x)dx$
c) $\int \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right) dx$
d) $\int edx$
e) $\int_1^e x \cdot \ln(x)\, dx$
f) $\int \left(\frac{t^3+2t}{t^4+4t^2+3}\right) dt$
g) $\int \frac{dx}{x^2-4}$
h) $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+4}}$

O objetivo dessa questão era, em suma, investigar o cálculo das integrais, já “montadas”, a partir das técnicas de integração. O item (a) visava investigar a integração de funções polinomiais e complementar a questão anterior, tendo em vista que a integral que era encontrada a partir da resolução do problema anterior é, justamente, a integral proposta no item (a). Isto é, queríamos investigar se a dificuldade dos estudantes em resolver problemas que envolviam as técnicas de integração era apenas por não saberem a técnica a ser utilizada ou era por não compreensão do enunciado. Os itens (b) e (f) estavam relacionados com a técnica da substituição simples. O item (c) estava relacionado com a percepção de que $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, a investigação sobre o conhecimento de integrais tidas como “tabeladas” e com a técnica da substituição simples. O item (d) surgiu como ideia após a leitura do trabalho de Cury e Cassol (2004). Em que os estudantes realizaram uma falsa generalização para $\int e^{3x}dx$ a partir da conhecida $\int e^x dx = e^x + C$, queríamos, portanto, investigar se o mesmo acontece quando não há o x no expoente e a função é constante. O item (e) visava investigar sobre a técnica de integração por partes, o item (g) sobre a técnica das frações parciais e o item (h) sobre a técnica da substituição trigonométrica.

Solução: a) Pode ser encontrada na solução da questão anterior.

b) Seja $u = 4x$, então $du = 4dx \Rightarrow dx = \frac{du}{4}$, daí:

$$\int sen(4x)dx = \int sen(u)\frac{du}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int sen(u)du = -\frac{\cos(u)}{4} + C = -\frac{\cos(4x)}{4} + C\,.$$

c) Utilizando o fato provado na proposição 4, temos:

$$\int \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)dx = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \int \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx + \int \left(\frac{x}{1+x^2}\right)dx.$$

Pela regra da substituição, se pusermos $u = 1 + x^2$, então $du = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{du}{2}$. Daí,

$$\int \left(\frac{x}{1+x^2}\right)dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{\ln|u|}{2} + C = \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C$$

Voltando à integral inicial, temos:

$$\int \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)dx = arctg(x) + \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C.$$

d) Como $f(x) = e$ é uma função constante, temos que

$$\int edx = e\int dx = e \cdot x + C.$$

e) Utilizando a técnica da integração por partes, com $u = \ln(x)$ e $dv = xdx$, obtemos que

$$du = \frac{1}{x}dx \text{ e } v = \frac{x^2}{2}.$$

Daí,

$$\int_1^e x \cdot \ln(x)\,dx = \left(\ln(x) \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx.$$

$$= \left(\ln(x)\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \left(\ln(x)\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^e - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

f)Fazendo $u = t^4 + 4t^2 + 3$, obtemos:

$$du = (4t^3 + 8t)dt \iff du = 4(t^3 + 2t)dt \iff (t^3 + 2t)dt = \frac{du}{4},$$

assim,

$$\int \left(\frac{t^3 + 2t}{t^4 + 4t^2 + 3}\right)dt = \int \frac{1}{u}\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln|u| + C = \frac{1}{4}\ln|t^4 + 4t^2 + 3| + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln(t^4 + 4t^2 + 3) + C$$

g) Utilizando a mesma notação apresentada no texto sobre a técnica das frações parciais, $Q(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ e $R(x) = 1$. Então,

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)}.$$

Queremos que

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-2},$$

efetuando os cálculos, obtemos:

$$\frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-2} = \frac{A_1(x-2) + A_2(x+2)}{(x+2)(x-2)}.$$

Segue que

$$A_1(x-2) + A_2(x+2) = 1$$

Assim, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ -2A_1 + 2A_2 = 1 \end{cases},$$

que tem como solução $A_1 = \frac{-1}{4}$ e $A_2 = \frac{1}{4}$. Com isso, temos que

$$\int \frac{1}{x^2-4} dx = \int \left(\frac{-1}{4(x+2)} + \frac{1}{4(x-2)}\right) dx = \frac{-\ln|x+2|}{4} + \frac{\ln|x-2|}{4} + C.$$

h) Observe que a função que queremos integrar possui um fator do tipo $\sqrt{x^2+a^2}$, com $a = 4$. Com base nisso, utilizaremos a segunda linha da tabela para substituições trigonométricas para que possamos realizar a operação. Assim, para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, vale:

$$x = 2tg(\theta), \text{ então, } dx = 2sec^2(\theta)d\theta.$$

Consequentemente,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}} dx = \int \frac{1}{4tg^2(\theta)\sqrt{4tg^2(\theta)+4}} \cdot 2sec^2(\theta)d\theta = \int \frac{2sec^2(\theta)}{tg^2(\theta)2|\sec(\theta)|} d\theta.$$

Como $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos que $\sec(\theta) \geq 0$, assim,

$$\int \frac{2sec^2(\theta)}{4tg^2(\theta)2|\sec(\theta)|} d\theta = \int \frac{2sec^2(\theta)}{4tg^2(\theta)2\sec(\theta)} d\theta = \int \frac{\sec(\theta)}{4tg^2(\theta)} d\theta$$

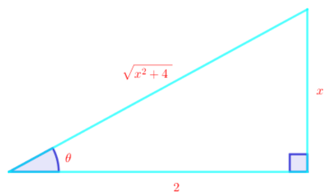
$$= \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{\cos(\theta)} \cdot \frac{cos^2(\theta)}{sen^2(\theta)} d\theta = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{cos(\theta)}{sen^2(\theta)} d\theta$$

Fazendo $u = sen(\theta)$, temos que $du = \cos(\theta)d\theta$. Substituindo na integral, obtemos:

$$\frac{1}{4} \cdot \int \frac{cos(\theta)}{sen^2(\theta)} d\theta = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{4u} + C = -\frac{1}{4sen(\theta)} + C = -\frac{cossec(\theta)}{4} + C.$$

Note que a substituição utilizada nos dá que $tg(\theta) = \frac{x}{2}$, e construindo o seguinte triângulo retângulo

Figura 13- Triângulo retângulo associado à substituição $x = 2tg(\theta)$



Fonte: O autor (2017)

podemos expressar a integral em termos de x, pois,

$$cossec(\theta) = \frac{1}{sen(\theta)} = \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}.$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx = -\frac{cossec(\theta)}{4} + C = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C.$$

Para a análise dos dados, utilizaremos as etapas propostas por Bardin (1979) e evidenciadas por Cury (2013). Um ponto interessante que é apresentado por Cury (2013) é o fato de que

> Um texto matemático produzido por um aluno – uma demonstração de um teorema, uma solução de um problema ou uma dissertação sobre determinado tópico – pode ser analisado, com base em procedimentos sistemáticos, para inferir conhecimentos sobre as formas com que aquele estudante construiu um determinado saber matemático. [As técnicas de integração, no nosso caso.] (p. 64-65)

Bardin (1979, apud Cury 2013) apresenta três etapas para a análise de conteúdo e que são divididas segundo as necessidades: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

A primeira fase consistiu na organização e na delimitação do "*corpus*" (Cury, 2013, p. 65) do trabalho, e este último pode ser entendido como sendo as produções sobre as quais nos debruçamos. Nessa etapa, inicialmente fizemos uma correção superficial dos questionários, isto é, estávamos interessados em classificar as respostas apenas como certas ou erradas, mas sem nos preocuparmos com as fontes dos erros ou sequer fazer qualquer consideração sobre eles. A partir da correção, delimitamos as questões sobre as quais nos debruçamos.

A segunda etapa – a exploração do material – envolveu, assim como evidencia Bardin (1979, apud Cury, 2013), "um estudo aprofundado do *corpus*" (p. 66), nela aconteceram os procedimentos de unitarização e categorização que consistem, respectivamente, na releitura do material para definição das unidades para análise e em "[...] fornecer, por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos" (Bardin, 1979, p. 119 apud Cury, 2013, p. 66).

A última etapa – tratamento dos resultados – consistiu na

> Descrição das categorias, que pode ser feita por meio da apresentação de tabelas ou quadros [...]. Além disso, é conveniente produzir um “texto-síntese”, que permita ao leitor a compreensão do significado da classe, em geral com o apoio de exemplos retirados do próprio corpus. (Cury, 2013, p. 67, grifos do autor)

Estabelecemos, então, todas as etapas metodológicas desse trabalho e podemos passar para a análise dos dados, tema que será tratado no capítulo a seguir.

6 ANÁLISE DOS DADOS.

Este capítulo será dedicado à análise dos dados coletados e está organizado em quatro seções que comportam cada uma das quatro questões propostas. A identificação dos sujeitos da pesquisa será feita com a letra E – de estudante – seguida de um número de 1 a 20, tendo em vista que o questionário foi aplicado a 20 sujeitos. O estudante que receber o número 8 será identificado por E8, assim como o que receber o número 17 será identificado por E17.

6.1 ANÁLISE DOS DADOS OBTIDOS COM A QUESTÃO 1.

A questão 1, como pode ser visto abaixo, possuía quatro itens.

Figura 14- Questão 1.

No Cálculo Integral existem diferentes regras e técnicas de integração e cada uma delas se aplica melhor em determinadas situações. Explique em que situação a aplicação de cada técnica torna mais fácil o processo de integração. Se julgar necessário, forneça exemplos, porém ao fornecer o exemplo não é necessário que realize a integração.

a) Integração por partes.

b) Integração por frações parciais.

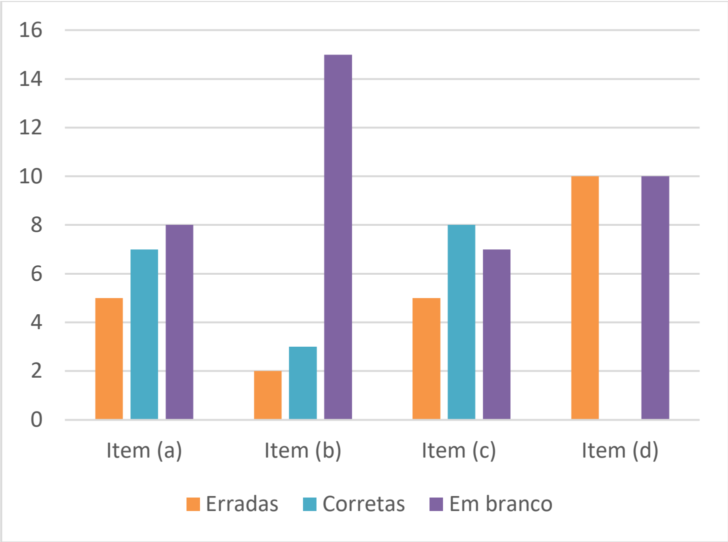
c) Integração pela regra da substituição simples.

d) Integração por substituição trigonométrica.

Fonte: O autor (2017).

No gráfico a seguir pode ser vista a quantidade de respostas erradas, corretas e em branco encontradas.

Gráfico 1- Quantidade de respostas em branco, de erros e de acertos na questão 1.

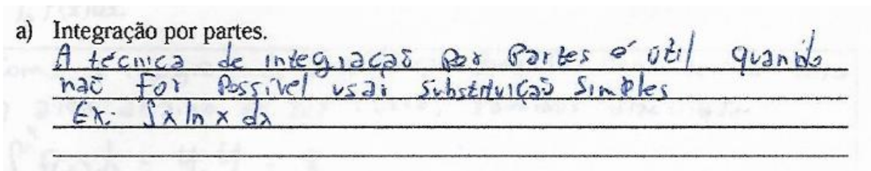


Fonte: O Autor, 2017.

Ao observamos as respostas do item (a) apresentadas pelos estudantes pudemos perceber que a maioria deles não fazia relação da técnica de integração por partes com a fórmula da derivada do produto de duas funções e a que vem a ser utilizada em tal técnica.

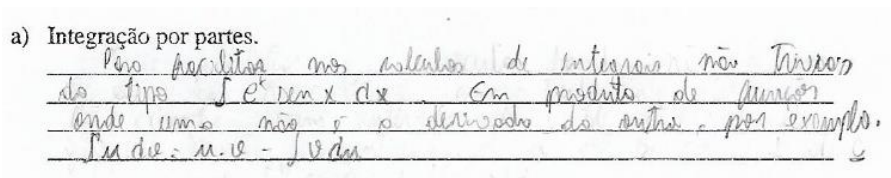
Muitos estudantes consideravam essa técnica útil quando não é possível usar a integração pelo método da substituição simples e pudemos perceber em muitos questionários a frase presente nos recortes abaixo.

Figura 15- Resposta do E1 à questão 1(a)



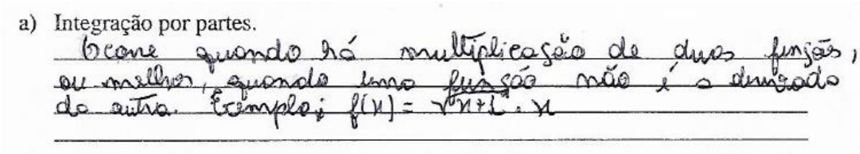
Fonte: O autor, 2017.

Figura 16-Resposta do E16 à questão 1(a)



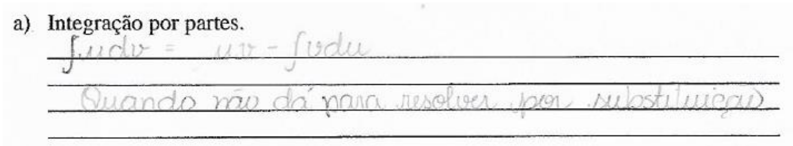
Fonte: O autor, 2017.

Figura 17-Resposta do E14 à questão 1(a)


a) Integração por partes.
Ocorre quando há multiplicação de duas funções, ou melhor, quando uma função não é a derivada da outra. Exemplo: $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot x$

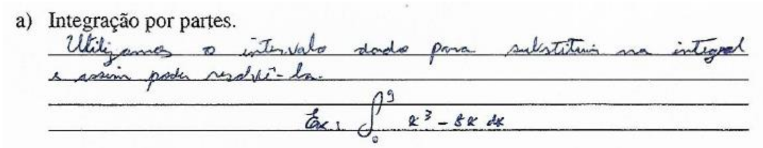
Fonte: O autor, 2017.

Figura 18-Resposta do E15 à questão 1(a)


a) Integração por partes.
$\int u\,dv = uv - \int v\,du$
Quando não dá para resolver por substituição

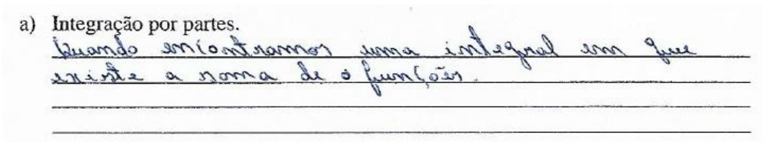
Fonte: O autor, 2017.

Figura 19-Resposta do E6 à questão 1(a)


a) Integração por partes.
Utilizamos o intervalo dado para substituir na integral e assim poder resolvê-la.
Ex.: $\int_0^3 x^3 - 8x\,dx$

Fonte: O autor, 2017.

Figura 20-Resposta do E11 à questão 1(a)


a) Integração por partes.
Quando encontramos uma integral em que existe a soma de 2 funções.

Fonte: O autor, 2017.

O E6 confunde a técnica de integração por partes com o Teorema Fundamental do Cálculo e o E11 entende a integração por partes como sendo uma técnica utilizada para integrar soma de funções. Nossa hipótese, nesse último caso, é que o estudante está acostumado a realizar o procedimento $\int[f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ e entende como "integrar por partes" o fato de dividir em duas ou mais partes (integrais) a integral da soma de funções.

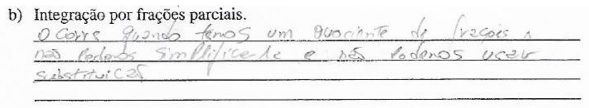
Com relação aos alunos que utilizaram a frase *"quando não posso usar a substituição simples"* acreditamos que isso se deve a ela ser usada no discurso do professor, seja este discurso voluntário ou não.

O que pudemos perceber é que estas marcas podem prejudicar das mais diversas maneiras o estudante. Em termos piagetianos notamos que a maioria assimilou a integração por partes como sendo a saída para a "falha" na substituição simples e memorizou a fórmula. Embora não tenhamos um contato mais profundo eles e tendo como base apenas as respostas fornecidas ao questionário, podemos questionarmo-nos sobre a assimilação da técnica de integração por partes. Em nenhum momento algum deles mencionou algo sobre a origem da fórmula que apresentaram, a saber, $\int udv = uv - \int vdu$, ou seja, nenhum deu sentido, no questionário, apenas apresentou a fórmula como um ponto-chave para a técnica, mas não mencionou de onde ela surgiu e porquê é útil em tais situações. A técnica foi apresentada tão somente como um recurso a ser utilizado quando o anterior (a técnica da substituição simples) falhar.

O item (b) foi o que teve mais respostas em branco e 15% (3 estudantes) acertaram a resposta, pois consideramos o fornecimento de um exemplo correto como sendo uma resposta correta.

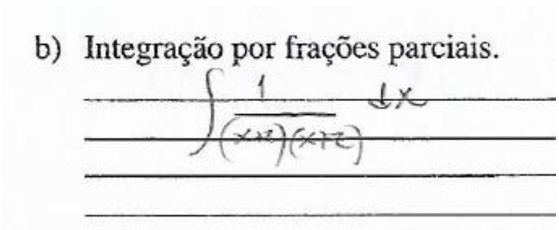
O fato de a questão ter tido 75% de respostas em branco pode ter sido pelo fato de não conhecerem a técnica ou apenas pelo fato de não quererem explicar. Tendo em vista que nos livros de cálculo as últimas técnicas de integração vistas são: a técnica das frações parciais e a técnica da substituição trigonométrica.

Figura 21-Resposta do E17 à questão 1(b)


b) Integração por frações parciais.
Ocorre quando temos um quociente de frações e não podemos simplificá-la e não podemos usar substituição

Fonte: O autor, 2017.

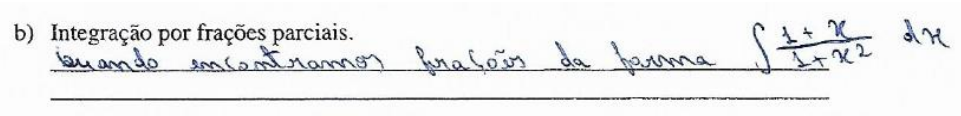
Figura 22-Resposta do E4 à questão 1(b)


b) Integração por frações parciais.
$\int \frac{1}{(x+2)(x+2)} dx$

Fonte: O autor, 2017.

De modo geral, os estudantes que responderam a esse item compreendem que essa técnica é útil quando temos o quociente de funções, porém mais uma vez vem à tona o ponto *“quando não podemos usar substituição”*. Além disso, os exemplos fornecidos pelos estudantes, mesmo que estes compreendam o que foi falado anteriormente, não são exemplos eficazes para a aplicação da técnica. Um deles, o apresentado pelo E4, seria resolvido com bem mais facilidade com a utilização da técnica de integração por substituição simples. O exemplo apresentado pelo E11, além de ser um dos itens da questão 4, também não é muito útil para a aplicação da técnica, como pode ser visto na figura abaixo.

Figura 23-Resposta do E11 à questão 1(b)

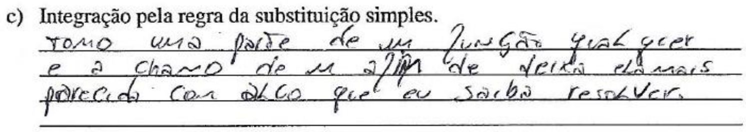


Fonte: O autor, 2017.

O significado disso é que, embora os estudantes compreendam a principal utilização da técnica, eles não se importam com as características da função, ou seja, se há um quociente de funções polinomiais, então a integração deve ser feita pela técnica das frações parciais, fechando os olhos, todavia, para outras saídas que facilitam ainda mais a integração, como pode ser visto no exemplo fornecido pelo E4 (Figura 23), instigando-nos a perceber que embora a técnica tenha sido assimilada pelo estudante, estes não a acomodaram, pois não são, com base nos exemplos, capazes de modificar sua visão da função com o objetivo de atender suas particularidades sem perder “seus poderes anteriores de assimilação” isto é, compreendem a utilização da técnica, mas não conseguem perceber a facilidade presente em outro caminho que subentende-se que estes já conhecem.

O item (c) foi o que teve mais respostas corretas e menos respostas em branco. O que pudemos notar nas respostas dos alunos é que poucos deles faziam relação com a composição de funções. Entretanto, assim como no item (a), conseguiam fazer uma apresentação escrita do algoritmo presente em tal regra, mas sem fazer relação, por exemplo, com a regra da cadeia para derivadas. O que pudemos notar, também, é que nenhum deles apresentou a fórmula que é costumeiramente apresentada pelos autores de livros de CDI.

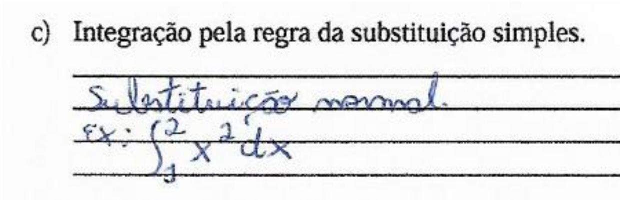
Figura 24-Resposta do E3 à questão 1(c)


c) Integração pela regra da substituição simples.

Tomo uma parte de uma função qualquer e a chamo de u a fim de deixá-la mais parecida com algo que eu saiba resolver.

Fonte: O autor, 2017.

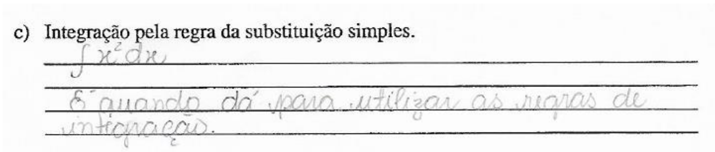
Figura 25-Resposta do E5 à questão 1(c)


c) Integração pela regra da substituição simples.

Substituição normal.
Ex: $\int_1^2 x^2 dx$

Fonte: O autor, 2017.

Figura 26-Resposta do E15 à questão 1(c)


c) Integração pela regra da substituição simples.

$\int x^2 dx$

É quando dá para utilizar as regras de integração.

Fonte: O autor, 2017.

Como pode ser visto na figura acima, o E5 confunde a técnica com o Teorema Fundamental do Cálculo e apresenta, erroneamente, o exemplo como sendo um que contempla a técnica. Mais uma vez, pudemos inferir algo sobre o discurso presente na integração definida que trata sobre a substituição dos limites de integração na primitiva encontrada. O E15, por sua vez, responde que *"é quando dá para utilizar as regras de integração"* e apresenta o exemplo que pode ser visto acima. A partir do exemplo, entendemos "regra de integração" como sendo o Teorema 2. Os estudantes que apresentaram um algoritmo correto, mesmo que informalmente não fazem nenhuma relação com as funções compostas e isto dá a entender que apenas memorizaram o algoritmo, mas não conferiram sentido a ele.

O item (d), que tratava sobre a técnica da substituição trigonométrica, foi o único que não teve nenhum acerto. Algumas das respostas dadas podem ser vistas no quadro abaixo:

Quadro 1- Algumas respostas dos estudantes ao item (d) da questão 1.

ESTUDANTE	RESPOSTA
E1	d) Integração por substituição trigonométrica. Usada para o cálculo de funções racionais da forma $f(x) = \frac{a}{bx^2+c^2}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$
E6	d) Integração por substituição trigonométrica. Chamamos uma parte da função de sen(x) ou cos(x), por exemplo, e a substituímos na integral de modo que seja possível resolvê-la.
E7	d) Integração por substituição trigonométrica. Quando temos funções trigonométricas.
E11	d) Integração por substituição trigonométrica. Quando encontramos funções sen, cos etc. Daí podemos utilizar também algumas propriedades das funções trigonométricas
E12	d) Integração por substituição trigonométrica. Quando eu sei que uma determinada expressão algébrica, quando integrada, corresponde a uma função trigonométrica, é mais fácil do que ter que calcular a integral, que certamente será bem difícil.

Fonte: O autor (2017).

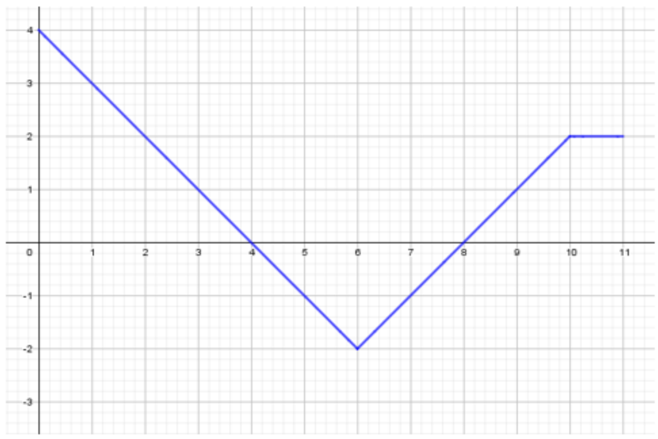
O E1 apresenta uma resposta errada que mais se assemelha à técnica de integração pelo método das frações parciais, dando a entender que ele não conhece nenhuma das duas técnicas, pois respondeu *"nunca vi essa técnica"* no item (b). Os demais estudantes falaram sobre substituições de funções do tipo $sen(x), cos(x)$ ou apenas "quando temos funções trigonométricas", como afirma o E7 o que nos dá indícios de que este pode não ter tido contato com tais regras ou não houve assimilação delas.

6.2 ANÁLISE DOS DADOS OBTIDOS COM A QUESTÃO 2.

A questão 2 possuía três itens a serem respondidos pelos estudantes, como podemos ver abaixo:

Figura 27- Questão 2.

2) O gráfico da função $f(x)$ está esboçado na figura abaixo:



Com base nele, resolva os itens a seguir explicando a estratégia utilizada.

a) $\int_0^4 f(x)dx$.

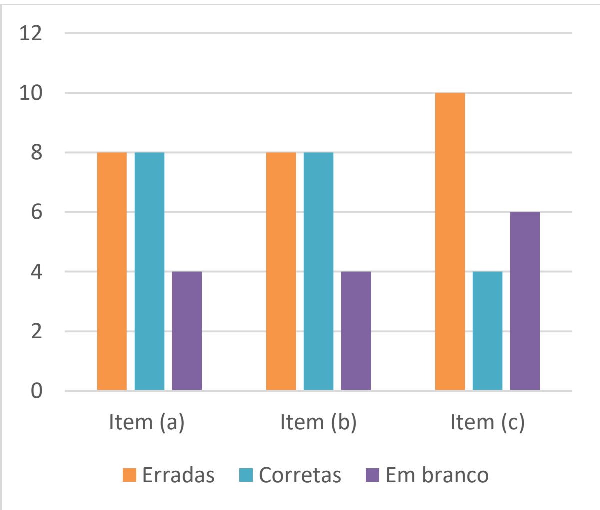
b) $\int_6^8 f(x)dx$.

c) $\int_0^{11} f(x)dx$.

Fonte: O autor (2017).

Conforme a tabela abaixo indica, oito estudantes erraram o item (a) e oito o acertaram. Ocorreram diversos tipos de erros: de integração, por considerações que não tinham relação com o enunciado, e aqueles que consistiam em operações sem nenhum sentido aparente.

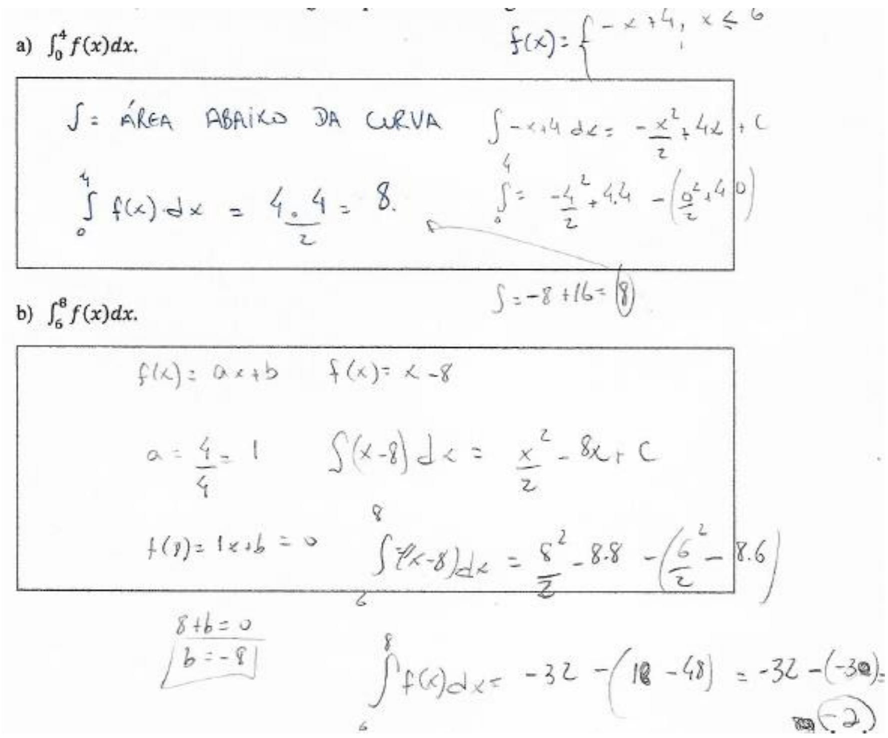
Gráfico 2-Quantidade de respostas em branco, de erros e de acertos na questão 2.



Fonte: O autor, 2017.

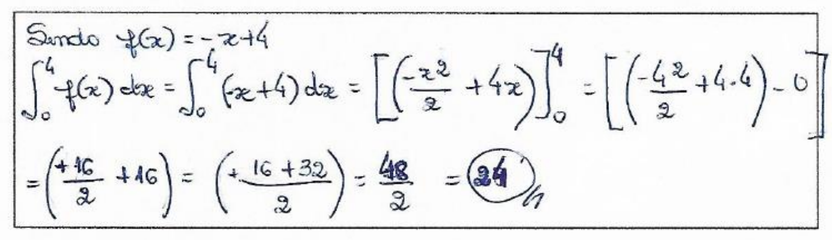
O que nos surpreendeu foi que alguns alunos resolveram a questão pelo método mais “difícil”, que consistia em encontrar a lei de formação da função no intervalo em que estava interessado em integrar e, a partir daí, integrar esta função e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). O E4, por exemplo, compreendia que a integral de uma função não-negativa era numericamente igual a área da região delimitada, fez um dos itens por este caminho, mas preferiu, após isso, encontrar a lei de formação da função e integrá-la, confirmando, pois, o resultado já apresentado por ele, como pode ser visto nos recortes abaixo, assim como as respostas de outros estudantes que seguiram o mesmo caminho.

Figura 28-Recorte da resposta do E4 às questões 2(a, b).



Fonte: O autor, 2017.

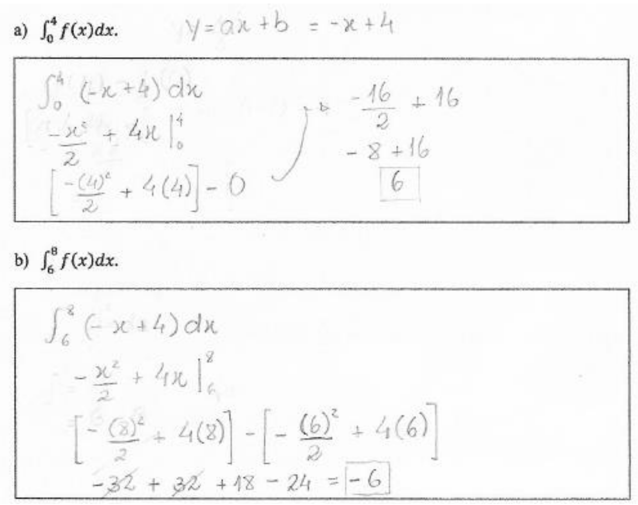
Figura 29-Recorte da resposta do E9 à questão 2(a).



Fonte: O autor, 2017.

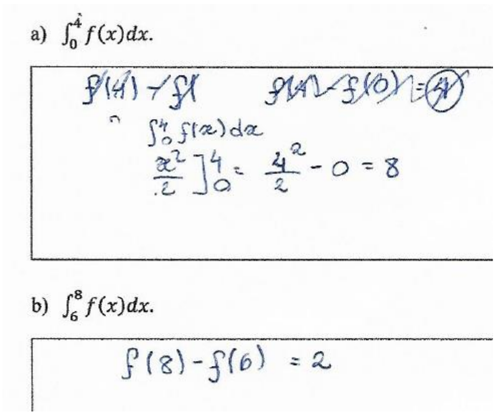
Alguns estudantes também procuraram encontrar a função e integrá-la, mas consideraram que a lei de formação era a mesma em todos os intervalos e, além disso, cometeram erros nas operações aritméticas básicas, como está explícito nos recortes abaixo.

Figura 30-Recorte da resposta do E15 às questões 2(a, b).



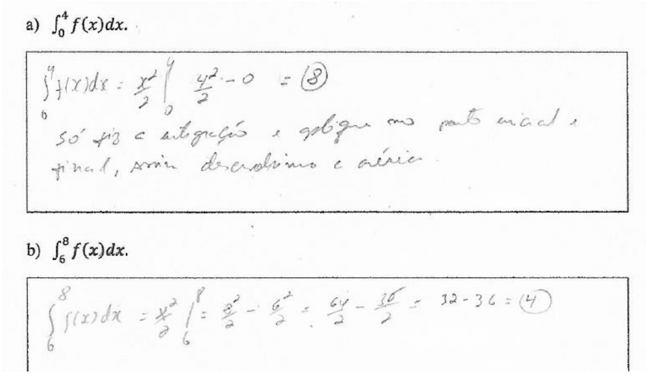
Fonte: O autor, 2017.

Figura 31-Recorte da resposta do E7 às questões 2(a, b).



Fonte: O autor, 2017.

Figura 32-Recorte da resposta do E13 às questões 2(a, b).



Fonte: O autor, 2017.

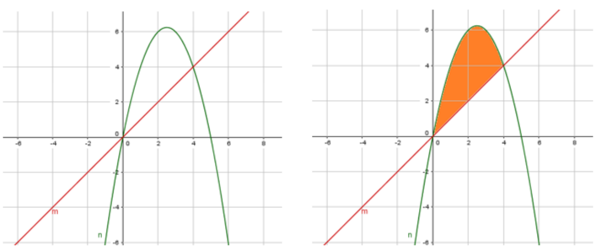
Pudemos notar que grande parte dos estudantes fizeram a relação da integral com a área sob (ou acima) o gráfico da função e muitos preferiram descobrir a lei de formação e integrá-la sem fazer a menor relação com a área, seja algébrica ou geométrica. Os erros presentes nessa questão ocorreram, sobretudo, por equívoco nas operações aritméticas básicas e por desconsiderarem os dados fornecidos pelo gráfico da função.

6.3 ANÁLISE DAS RESPOSTAS DA QUESTÃO 3.

A questão 3, exposta na figura abaixo, contou com erros em 60% das respostas apresentadas.

Figura 33- Questão 3.

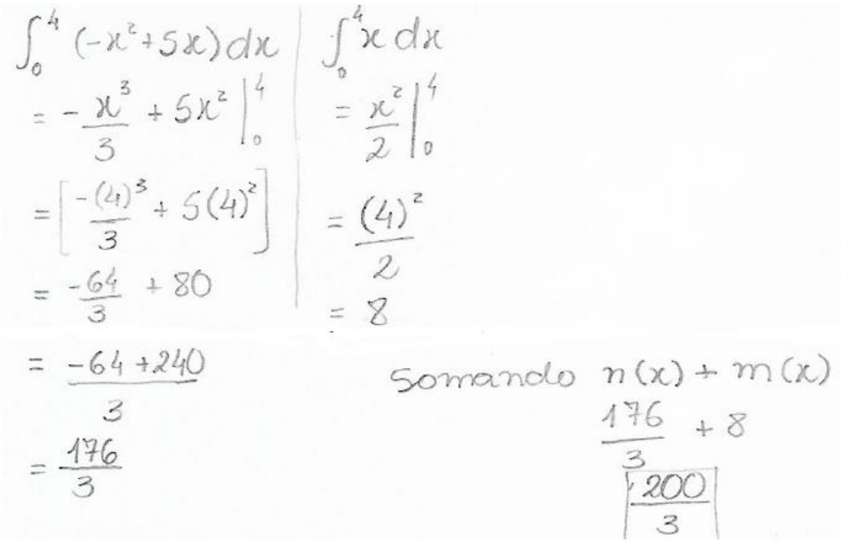
3) Como pode ser visto na figura abaixo, à esquerda, as funções $n(x) = -x^2 + 5x$ e $m(x) = x$ são ambas não negativas, ou seja, maiores ou iguais a zero no intervalo $[0, 4]$. Calcule a área entre os gráficos das funções $n(x)$ e $m(x)$ no intervalo $[0, 4]$. Em outras palavras, calcule a área hachurada na figura abaixo, à direita.



Fonte: O autor (2017).

Para iniciarmos as considerações, apresentaremos a solução do E15 no seguinte recorte:

Figura 34-Recorte da resposta do E15 à questão 3.

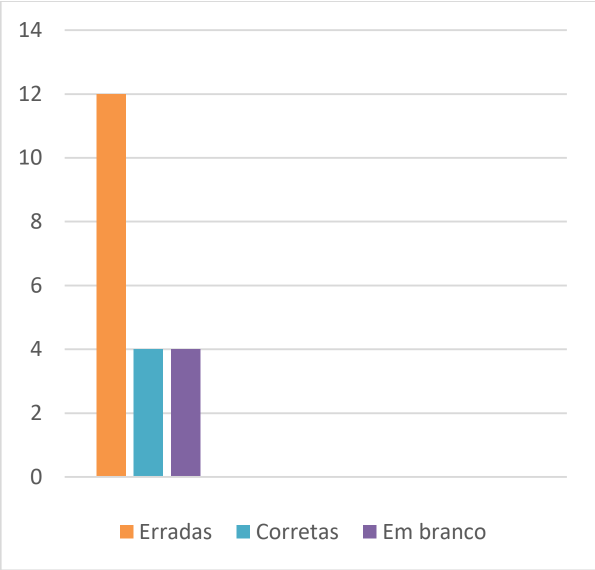


Fonte: O autor (2017).

Observe que o estudante compreende a necessidade de usar integral, sabe resolvê-la, mas comete um erro (que provavelmente foi esquecimento ou desatenção, pois resolve corretamente ao lado) ao integrar a função $5x$ e, no final, soma, em vez de subtrair, os resultados encontrados e apresenta como resposta. Isto dá a entender que o E15 compreende erroneamente seus resultados e o uso das integrais no problema. Afirmamos isto, pois se ele compreendesse o primeiro resultado encontrado, o segundo, e o que é pedido na questão, a operação realizada não seria a soma, mesmo apresentando o erro por desatenção na integração, pois embora tenha assimilado que em situações como esta deve fazer uso de integrais, o estudante não atribui significado para os respectivos resultados.

No gráfico abaixo apresentamos os percentuais de erros, acertos e respostas em branco para a questão:

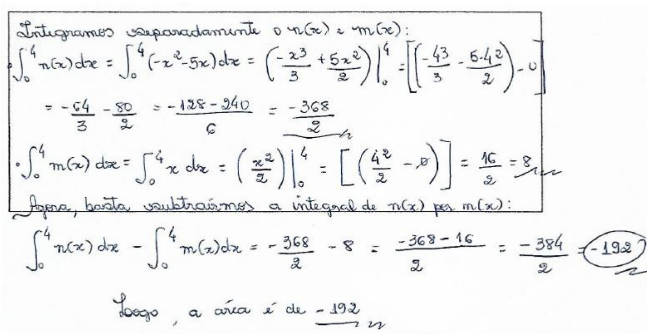
Gráfico 3-Quantidade de respostas em branco, de erros e de acertos na questão 3.



Fonte: O autor, 2017.

Os erros cometidos ocorreram, em sua maioria, nas operações básicas subsequentes à aplicação do TFC e, em segundo lugar, por não compreenderem os resultados expressos pelas integrais que calculam, isto é, calculam a integral, mas não atribuem significado. Abaixo, podemos ver um recorte que ilustra tal situação.

Figura 35- Resolução apresentada pelo E9 para a questão 3.



Integramos separadamente o n(x) e m(x):

$\int_0^4 n(x)dx = \int_0^4 (-x^2-5x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right)\Big|_0^4 = \left[\left(-\frac{4^3}{3} - \frac{5\cdot 4^2}{2}\right) - 0\right]$

$= -\frac{64}{3} - \frac{80}{2} = -\frac{128-240}{6} = -\frac{368}{2}$

$\cdot \int_0^4 m(x)dx = \int_0^4 x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4 = \left[\left(\frac{4^2}{2} - \cancel{0}\right)\right] = \frac{16}{2} = 8$

Agora, basta subtrairmos a integral de n(x) por m(x):

$\int_0^4 n(x)dx - \int_0^4 m(x)dx = -\frac{368}{2} - 8 = \frac{-368-16}{2} = \frac{-384}{2} = -192$

Logo, a área é de -192

Fonte: O autor, 2017.

O estudante E9 calcula a integral indefinida corretamente, mas erra ao aplicar o TFC. Embora o estudante compreenda o cálculo a ser feito, este fornece um valor negativo para a área solicitada. Classificamos este erro como sendo epistemológico, pois fornece um valor sem sentido para o problema porque a área de uma região plana é sempre um número não-negativo.

6.4 ANÁLISE DAS RESPOSTAS DA QUESTÃO 4.

A questão 4 era composta por oito itens que contemplavam integrais envolvendo as mais diversas técnicas de integração e duas aplicações do TFC, como pode ser visto na imagem que segue:

Figura 36- Questão 4.

4) Calcule as seguintes integrais justificando cada passo da resolução.

a) $\int_0^4 (-x^2 + 4x)dx$

b) $\int sen(4x)dx$

c) $\int \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right) dx$

d) $\int edx$

e) $\int_1^e x \cdot \ln(x)\, dx$

f) $\int \left(\frac{t^3+2t}{t^4+4t^2+3}\right) dt$

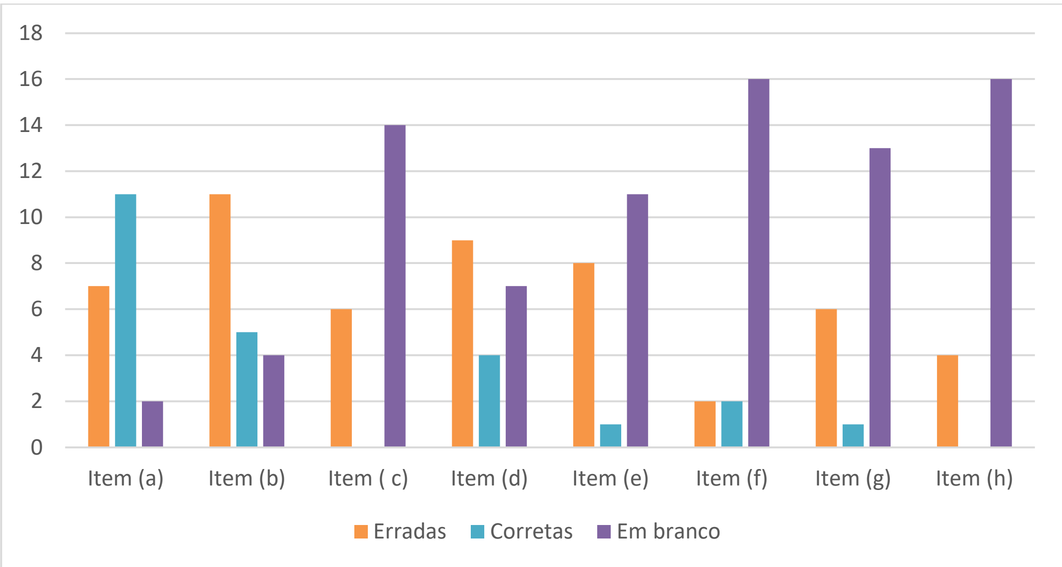
g) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

h) $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+4}}$

Fonte: O autor (2017)

O gráfico a seguir apresenta os resultados provenientes do questionário separados por item.

Gráfico 4-Quantidade de respostas em branco, de erros e de acertos na questão 4.

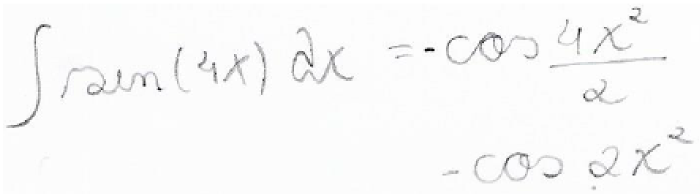


O primeiro item, como especificado na Metodologia deste trabalho, tinha como objetivo comparar o desempenho dos estudantes diante de uma questão onde é necessário “montar a integral” para poder resolver e diante de uma onde ela já é apresentada e basta o estudante integrar.

Pudemos notar que embora 35% tenham acertado a resposta, nenhum desses estudantes fez relação do resultado com a questão anterior. Embora esse não fosse o objetivo, ou fosse de extrema importância que fizessem tal relação, o ato de fazê-la seria interessante, e evitaria novos cálculos. Além disso, o fato de o estudante estabelecer essa relação seria bem interessante do ponto de vista das fases piagetianas. Isso indicaria que o estudante não só assimilou o conteúdo em questão, mas também o acomodou. Tendo em vista que consegue percebê-lo em outras situações que não necessariamente estão explicitas, como na questão 3.

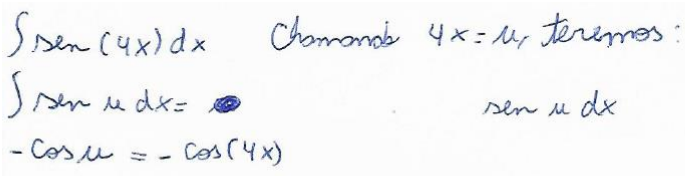
Os erros nessa questão ocorreram na aplicação do TFC e em situações subsequentes, ou seja, em operações fundamentais. O segundo item – que tratava da técnica de substituição simples – foi o que mais contemplou respostas erradas. Os erros mais recorrentes podem ser vistos nos recortes abaixo:

Figura 37-Recorte da resposta do E2 à questão 4(b).



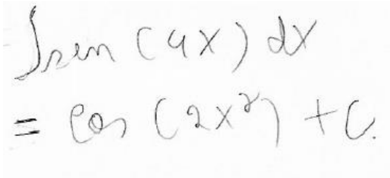
Fonte: O autor, 2017.

Figura 38-Recorte da resposta do E5 à questão 4(b).



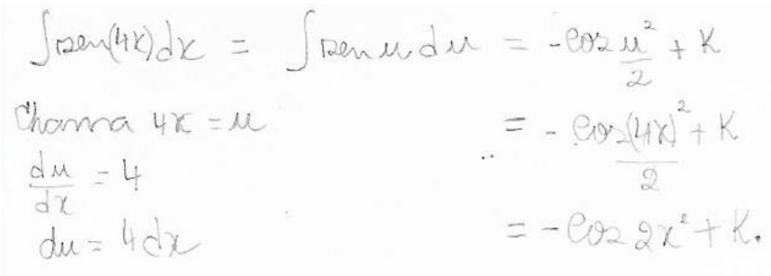
Fonte: O autor, 2017.

Figura 39-Recorte da resposta do E8 à questão 4(b).



Fonte: O autor, 2017.

Figura 40-Recorte da resposta do E10 à questão 4(b).



Fonte: O autor, 2017.

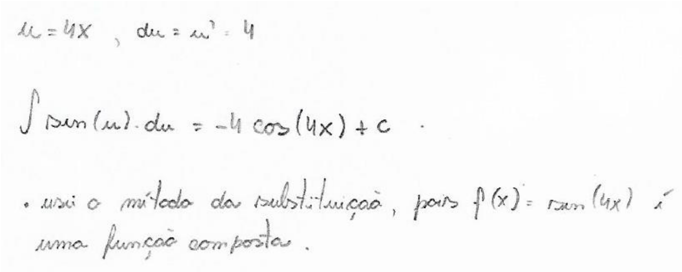
Mas o que isso nos diz? Embora os estudantes reconheçam que "$\int sen = -\cos$", eles utilizam um fato que infere no não conhecimento da função $sen(4x)$ como uma função, mas sim como duas: sen e $4x$. O estudante não compreende o $4x$ como argumento da função seno e escreve como resposta:

$$\int sen(4x)dx = -\cos\left(\int 4xdx\right) + C.$$

Isso é um enorme problema e advém do ensino básico, pois o estudante compreende a integral do seno como sendo –cosseno e sabe realizar a integral da função $4x$, mas não compreende a função $sen(4x)$ como uma função composta e o $4x$ como argumento dessa função.

Os outros erros se deram por complicações após a substituição da função u e problemas – também evidenciados por Cury e Cassol (2004) – com os diferenciais du e dx, como podemos observar nos recortes abaixo:

Figura 41-Recorte da resposta do E12 à questão 4(b).

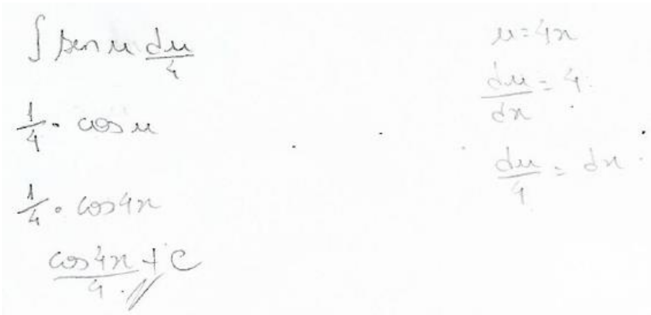


Fonte: O autor, 2017.

Figura 42-Recorte da resposta do E13 à questão 4(b).

Fonte: O autor, 2017.

Figura 43-Recorte da resposta do E17 à questão 4(b).

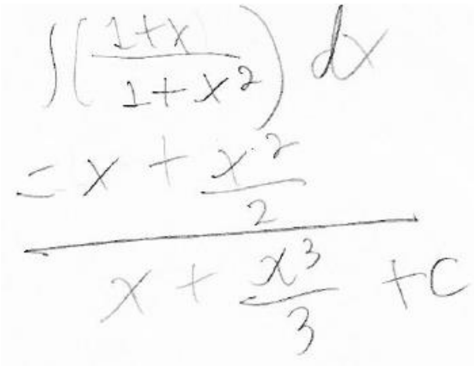


Fonte: O autor, 2017.

No item (c) da questão 4 podíamos contemplar as quatro fases propostas por Piaget e, além delas, pudemos perceber erros epistemológicos. Categorizada como um dos itens em que não obtivemos soluções corretas, 70% dos estudantes deixaram a questão em branco e, dessa forma, 30% apresentaram soluções incorretas.

Iniciaremos a discussão com base no erro cometido pelo E8. Observe o recorte a seguir:

Figura 44-Recorte da resposta do E8 à questão 4(c).



Fonte: O autor, 2017.

Consideramos que não há dúvidas sobre o procedimento realizado pelo estudante: $\int \frac{f}{g} = \frac{\int f}{\int g}$. Mas qual o motivo que o levou a fazer isto?

Na educação básica, comumente ouvimos as seguintes falas: “tira a raiz do de cima e divide pela raiz do de baixo”, quando queremos calcular $\sqrt{\frac{a}{b}}$; “Eleva ao quadrado/cubo/n em cima e em baixo”, quando queremos calcular $\left(\frac{a}{b}\right)^2$; $\left(\frac{a}{b}\right)^3$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n$. E isso dá a entender que realizar uma operação a um quociente o resultado é o “quociente das operações”. No ensino superior, todavia, ainda temos que $\lim\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{limf}{limg}$, desde que os limites existam. Todavia, ao chegarmos ao estudo da derivada, há a quebra desse paradigma, pois temos que $\left(\frac{f}{g}\right)' \neq \frac{f'}{g'}$.

Consideramos, portanto, que o erro presente em tal resolução é um erro epistemológico que advém de procedimentos comumente utilizados no ensino básico. Para a resolução correta de tal questão, o estudante precisaria passar pelas quatro fases propostas por Piaget, tendo em vista que mesmo que conheça todas as técnicas de integração e tente aplicá-las, nenhuma delas será – em um primeiro momento – eficaz. Sendo assim, o estudante estará de frente com uma situação perturbadora onde é necessário que modifique seus esquemas de resolução, isto é, pense além das técnicas de integração, passando, com isso, pela fase da regulação. O estudante precisa lembrar que $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, e isso deve ser assimilado no ensino fundamental. Passando, assim, pela fase da acomodação, onde precisa modificar os passos para a resolução em função de suas particularidades, entretanto, este não deve perder suas capacidades de assimilação, tendo em vista que ele chega ao passo

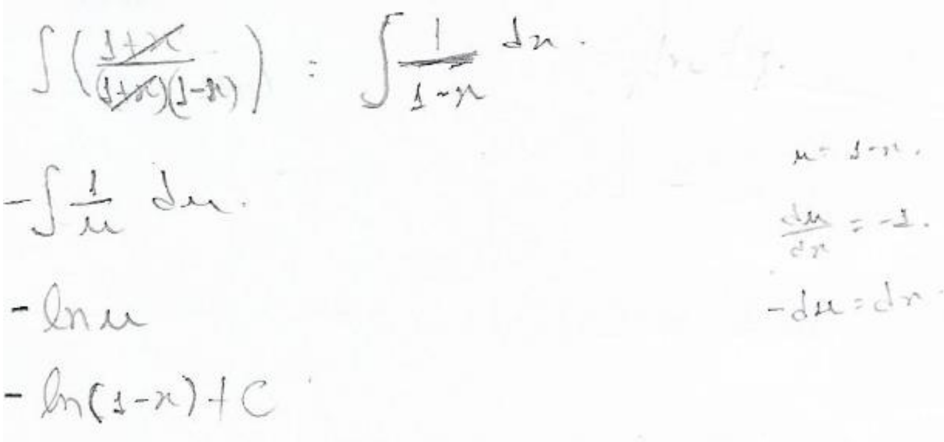
$$\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\right) dx,$$

e precisa usar as propriedades já assimiladas para continuar a resolução. Isso tudo constitui uma situação de desequilíbrio, tendo em vista que o estudante tende a querer voltar a situação de equilíbrio (considerando equilíbrio as situações onde ele sabe aplicar as técnicas ou integrais assimiladas).

A seguir, podemos ver um quadro contendo os erros encontrados nessa questão. Estes se deram por não conhecimento de um resultado "tabelado" de integração, falsa fatoração, aplicação frustrada da técnica de integração por partes e/ou substituição simples.

Quadro 2- Alguns sobre os erros presentes no item (c) da questão 4.

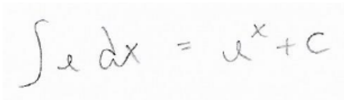
Estudante	Solução
E3	$= \frac{1}{1+x^2} \cdot x + \frac{x^2}{2}$ $dv = 1+x$ $u = \frac{1}{(1+x^2)}$ $v = x + \frac{x^2}{2}$ $du = 2x \ln(1+x^2)$ É muito longa...
E14	$\int \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right) dx$ $u = 1+x$ $du = dx$ $dv = \frac{1}{1+x^2}$ $= arctag\,x - \int arctag\,x\,dx$ $v = arctag\,x$
E16	c) $\int\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)dx = \int\left((1+x)\frac{1}{(1+x^2)}\right)dx = \int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}\right) = \int\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx + \int\left(\frac{x}{1+x^2}\right)dx$ $\int\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx + \int\left(\frac{x}{1+x^2}\right)dx$, para o 2º membro temos $u = 1+x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$ $\frac{du}{2} = x\,dx$ Não lembro Hiperbólica? $+ \int \frac{\frac{du}{2}}{u}$ $+\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$ $+\frac{1}{2}\ln\lvert u\rvert + C$ $+\frac{1}{2}\ln\lvert 1+x^2\rvert + C$

E17	

Fonte: O autor (2017).

Com o item (d) pudemos verificar as hipóteses que foram criadas a partir do trabalho de Cury e Cassol (2004). Notamos que os estudantes generalizaram erroneamente a integral em questão como sendo $e^x + C$, isto é, ao ver o e, mesmo sem estar elevado a x, o estudante está condicionado a utilizar o resultado: $\int e^x dx = e^x + C$. E podemos destacar os erros dos estudantes E2, E4 e E8.

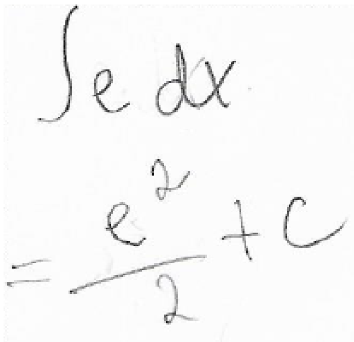
Figura 45- Recorte da resposta do E2 à questão 4(d).



Fonte: O autor, 2017.

O E2 considera o que já falamos anteriormente e o E4 não interpreta o e como constante. Por outro lado, o E8 apresenta um erro que caracteriza-se pela interpretação do e como sendo a função $f(x) = x$ (como se estivesse calculando $\int ede$) e escreve:

Figura 46- Recorte da resposta do E8 à questão 4(d).



Fonte: O autor, 2017.

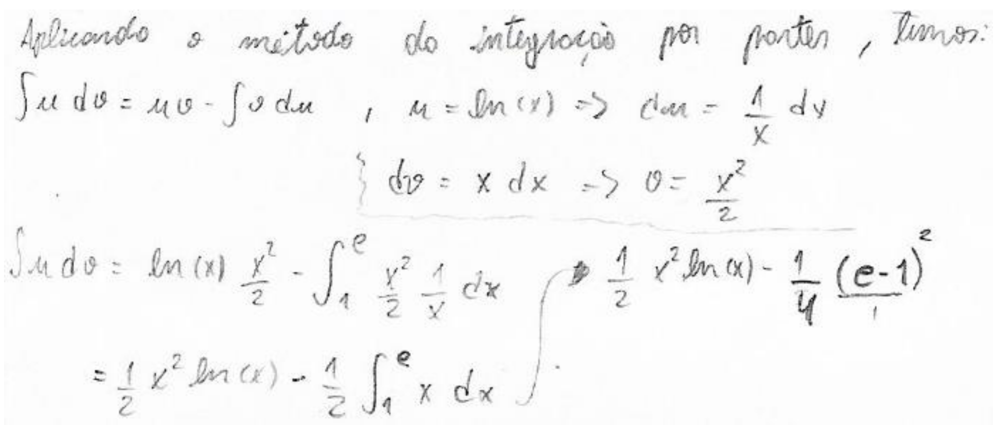
Consideramos, pois, esses erros como sendo epistemológicos tendo em vista que o estudante, apenas em observar o e, interpreta como a função $f(x) = e^x$. Outro erro recorrente foi apenas a resposta “e” e consideramos também como uma falsa generalização, pelo fato de que se $\int e^x dx = e^x + C$, então se não tiver o x no expoente a resposta será o e sem o x no expoente, como pode ser visto no recorte abaixo.

Figura 47- Recorte da resposta do E14 à questão 4(d).

Fonte: O autor, 2017.

Com o item (e) identificamos problemas na aplicação do TFC, nas escolhas de u e dv e apenas um estudante acertou tal item. Os erros na aplicação do TFC ocorreram pela não compreensão da fórmula de integração por partes para integrais definidas, pois o estudante dá como resposta uma função – como pode ser visto no recorte abaixo – sendo que a resposta deveria ser um número.

Figura 48-Recorte da resposta do E16 à questão 4(e).

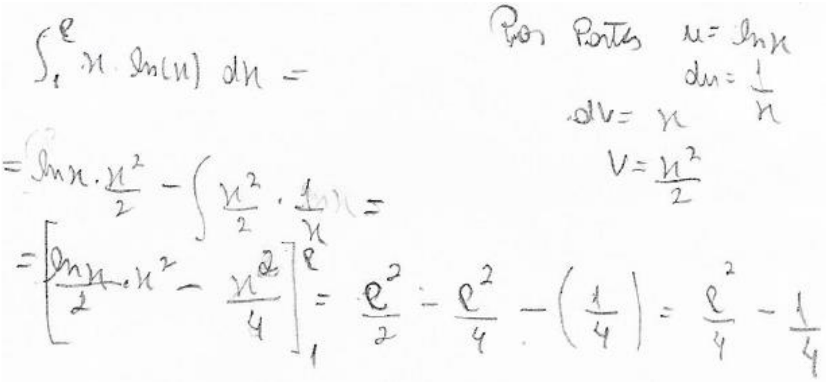


Fonte: O autor, 2017.

Embora o estudante acerte na escolha de u e dv, não se atenta que ao calcular uma integral definida por partes, o produto uv também está sujeito ao teorema, tendo em vista que a fórmula é proveniente da integração de $(uv)'$.

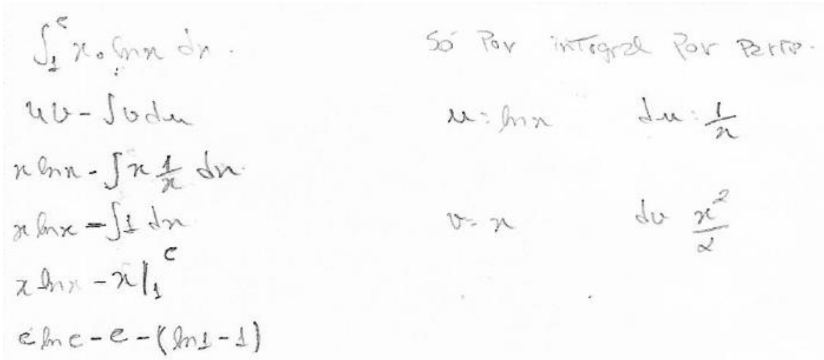
Os outros erros parecem ter ocorrido por desatenção: o estudante escolhe corretamente as funções u e dv, aplica o TFC corretamente, mas erra ao efetuar as contas subsequentes; por escolhas erradas para u e dv; e por não aplicar o TFC: o estudante realiza a integração corretamente, mas não aplica o TFC. A seguir podemos ver as respostas de três estudantes que cometeram tais erros: E14, E17 e E1, respectivamente.

Figura 49-Recorte da resposta do E14 à questão 4(e).



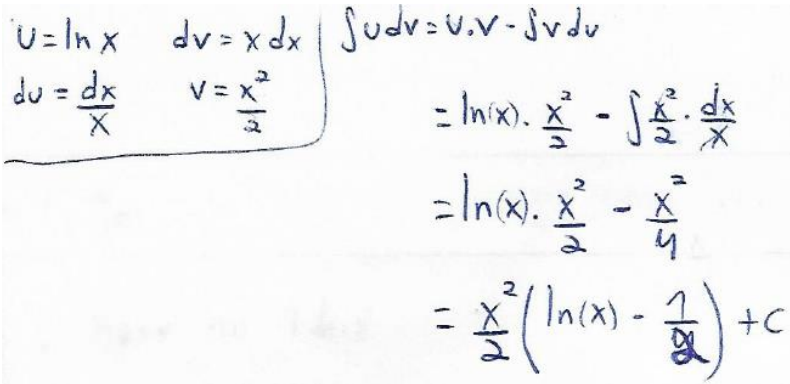
Fonte: O autor, 2017.

Figura 50-Recorte da resposta do E17 à questão 4(e).



Fonte: O autor, 2017.

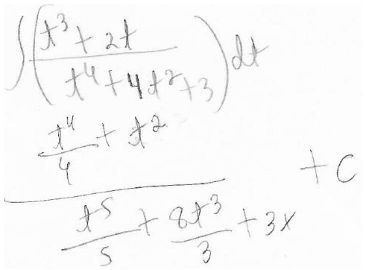
Figura 51-Recorte da resposta do E1 à questão 4(e).



Fonte: O autor, 2017.

O item (f), por sua vez, teve apenas 10% de acertos. Somente dois estudantes erraram este item. O estudante E8 cometeu o mesmo erro já cometido no item (c), como pode ser visto abaixo, e não nos deteremos a sua explicação, tendo em vista que esta já foi feita no item (c).

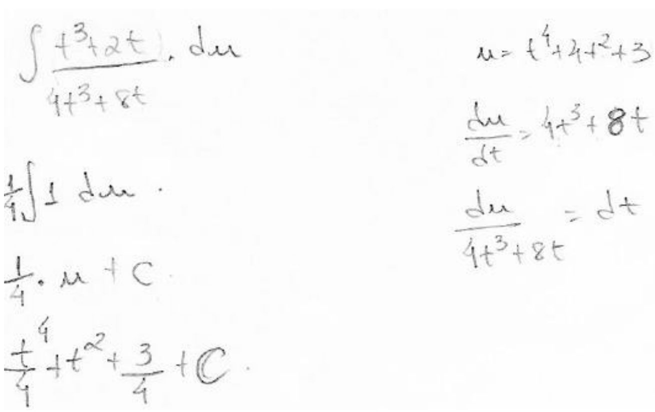
Figura 52-Recorte da resposta do E8 à questão 4(f).



Fonte: O autor, 2017.

O estudante E17, por outro lado, compreendeu a necessidade do uso da técnica da substituição simples, mas não a aplicou da maneira correta, pois substituiu apenas o diferencial du e esqueceu a função u, acarretando no erro que pode ser visto abaixo. Ressaltamos o fato de que o estudante poderia ter verificado seu resultado derivando a função encontrada, ou pelo menos compreendendo que a derivada da função polinomial encontrada não resultaria na função racional que estava integrando.

Figura 53- Recorte da resposta do E17 à questão 4(f).

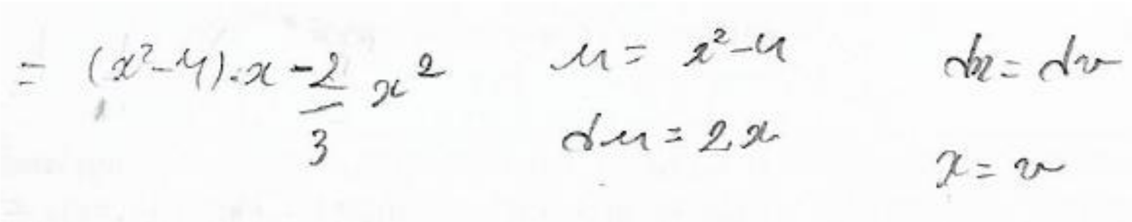


Fonte: O autor, 2017.

O item (g) teve um total de seis respostas erradas. O estudante E8, mais uma vez, realizou o procedimento já citado $\left(\int \frac{f}{g} = \frac{\int f}{\int g}\right)$, mas dessa vez ignorou o fato de a função $f(x) = x^2 - 4$ estar no denominador e apresentou como resposta a função

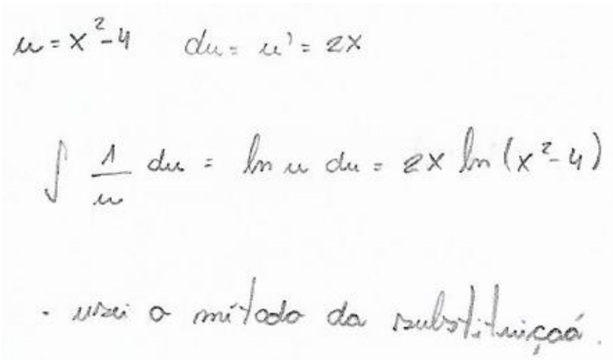
$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + C$. Os outros erros ocorreram devido a aplicação de uma técnica de integração ineficaz para a situação e por não conclusão do procedimento correto, como pode ser visto a seguir.

Figura 54- Recorte da resposta do E13 à questão 4(g).



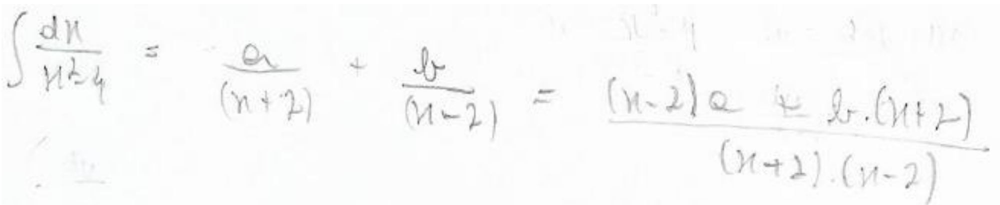
Fonte: O autor, 2017.

Figura 55- Recorte da resposta do E12 ao item 4(g).



Fonte: O autor, 2017.

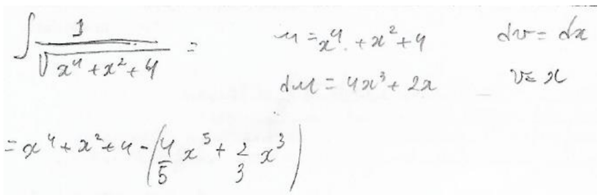
Figura 56-Recorte da resposta do E14 ao item 4(g).



Fonte: O autor, 2017.

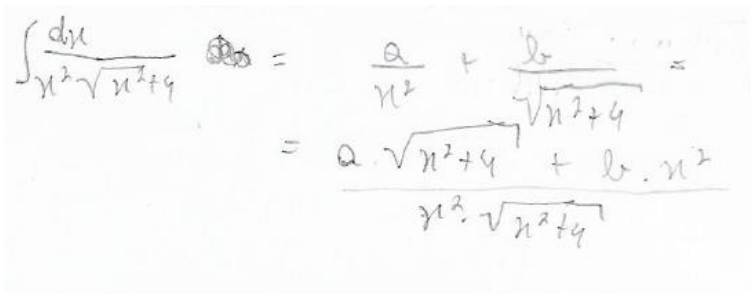
O item (h), último item da questão, não obteve nenhuma resposta correta e os erros ocorreram pela aplicação de uma técnica de integração inadequada. Ressaltamos, entretanto, os dados que obtivemos com o item (d) da Questão 1. Isto é, os estudantes não conheciam a técnica de integração por substituição trigonométrica e alguns a definiam como uma substituição simples em que a função (u) era trigonométrica, mas em nenhum momento falaram sobre a integração de funções onde aparecem radicais como os que foram apresentados na Tabela 1. Como pode ser visto abaixo, o E3 tentou aplicar a técnica da substituição e se perdeu em meio às substituições das funções e os diferenciais. A resposta do E14, por outro lado, dá indícios de que ele aplicou a técnica das frações parciais embora a função não seja uma função racional, todavia não realizou o cálculo, apenas armou a conta.

Figura 57-Recorte da resposta do E3 ao item 4(h).



Fonte: O autor, 2017.

Figura 58-Recorte da resposta do E14 ao item 4(h).



Fonte: O autor, 2017.

Agora tentaremos apresentar algumas considerações sobre os resultados do trabalho, assim como tentaremos responder à questão de pesquisa e forneceremos sugestões para novas. Faremos isso no capítulo a seguir.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Acreditamos que o objetivo geral da pesquisa pôde ser alcançado e damos início a este capítulo relembrando-o: compreender as principais dificuldades de um grupo de licenciandos em Matemática da UFPE-CAA diante de questões que envolvem integração.

O desenvolvimento do presente trabalho nos ajudou a compreender um pouco do cenário pesquisado e inferir algumas causas para os erros encontrados na resolução do questionário. Pudemos compreender que o cenário que justificou a realização de tal pesquisa foi observado também em outra turma, o que nos preocupou ainda mais.

A aplicação do questionário foi de extrema importância para que pudéssemos alcançar os dois primeiros objetivos específicos da pesquisa: classificar e analisar os erros cometidos pelos estudantes. Esses dois objetivos foram indispensáveis para que atingíssemos o objetivo geral, tendo em vista que estão intimamente ligados.

Com o primeiro objetivo específico pudemos categorizar os erros cometidos e perceber que estes ocorriam, em sua maioria, pelo não conhecimento de técnicas de integração, falsas generalizações, equívocos algébricos e erros em procedimentos (aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo, por exemplo).

O segundo objetivo nos possibilitou entender como tais erros ocorriam nas soluções. Com o resultado proveniente da Questão 1 pudemos notar que os estudantes tinham pouco conhecimento das técnicas de integração, sobretudo a técnica das frações parciais e de substituição trigonométrica, acarretando num grande número de erros ou respostas em branco nos itens da Questão 4 que tratavam sobre tais técnicas.

Com relação à Questão 2, tivemos uma surpresa simultaneamente positiva e negativa. Positiva porque alguns estudantes tentaram achar a lei de formação da função para depois realizar a integração em vez de interpretar a integral como uma área, algébrica ou geométrica – indicando uma nova estratégia para a resolução da questão – mas negativa porque alguns dos estudantes utilizaram a mesma lei de formação em todos os intervalos de integração com se a função não fosse definida por diferentes retas.

A Questão 3 e o item (a) da 4 estavam intimamente relacionados tendo em vista que o procedimento utilizado para a resolução da Questão 3 daria como resultado a integral presente no item (a) da questão seguinte. Notamos que apenas um estudante conseguiu relacionar tais questões e perceber que ambas davam o mesmo resultado e tinham o mesmo significado. Os demais não fizeram nenhuma relação entre as questões e grande parte dos que erraram a questão 3 acertaram o item (a) ou cometeram erros na aplicação do TFC nesse último. Como já foi dito, o fato de o estudante conseguir estabelecer essa relação seria interessante do ponto de vista das fases piagetianas, porque seria o indicativo de que não só assimilou o conteúdo, mas também o acomodou, pois consegue percebê-lo em outras situações, como na Questão 3.

O item (b) da Questão 4 foi fonte de erros epistemológicos e de procedimento (aplicação da técnica de integração por substituição simples). Os estudantes até compreendiam a integral da função seno, mas não viam o argumento desta como tal, mas sim como uma função que também deveria ser integrada, ou seja, compreende a necessidade de aplicação da técnica de substituição, porém não compreende a função $sen(4x)$ como uma função composta, mas sim como duas funções que deveriam ser integradas independentemente.

O item (c) dessa questão foi um em que poderíamos observar a "passagem" do estudante pelas quatro fases propostas por Piaget: assimilação, acomodação, equilibração e regulação. Os erros nele se deram por não conhecimento de um resultado "tabelado" de integração, falsa fatoração, aplicação frustrada da técnica de integração por partes e/ou substituição simples.

A aplicação de falsas generalizações e a não compreensão da integração por partes para integrais definidas acarretaram em erros nos itens (d) e (e). Os que foram encontrados no item (f) também eram erros de procedimento e indicavam que os estudantes não tinham acomodado a técnica da substituição simples, pois compreendiam a necessidade do seu uso, mas faziam confusão ao substituir a função e o diferencial (u e du).

O que pudemos notar, também, é que as respostas apresentam uma espécie de ciclo no que diz respeito às técnicas de integração. Os estudantes afirmam que usam a regra da substituição quando não dá para integrar "normalmente" e que usam a integração por partes quando não dá para usar a integração por substituição, mais especificamente "quando temos um produto de funções em que uma não é derivada da outra". Isso é um problema, pois trata-se de um obstáculo epistemológico, tendo em vista que o estudante não acomoda/assimila a técnica como completa por si só, isto é, como sendo um procedimento que tem uma origem dentro do conteúdo como um todo e não apenas como um artifício a ser usado quando não é possível fazer uso de outra técnica.

Pelo discurso presente nas respostas, notamos que muitos estudantes não fazem relação da integral por substituição simples com as funções compostas e a integral por partes como uma consequência da derivada do produto de funções. Também não identificam a possibilidade de utilização da técnica de integração por partes até mesmo quando há um produto de funções onde uma é derivada da outra.

Os erros nos itens (g) e (h) ocorreram por não conhecimento da técnica de integração adequada. Tendo em vista as respostas da Questão 1, relembramos que nenhum estudante conseguiu explicar sobre a técnica de frações parciais e o único estudante que acertou a solução da questão (g) também conseguiu responder ao item da Questão 1 que tratava sobre a integração por frações parciais.

Ao final da pesquisa, embora tenhamos atingido os objetivos propostos inicialmente, podemos dar sugestões para outras pesquisas nesse tema. Com a aplicação de questionário, embora muitas vezes consigamos inferir os procedimentos realizados pelos estudantes, nada se compara a ter o próprio estudante explicando sua estratégia. Sendo assim, traremos como primeira sugestão a realização de uma pesquisa que faça uso da pedagogia da assimilação solidária, evidenciada no trabalho de Baldino e Cabral (1999). Focar em apenas uma técnica ou tópico dentre os propostos no questionário também pode fornecer resultados mais específicos, ou um trabalho dividido em tópicos (das técnicas, por exemplo).

É com base no terceiro objetivo específico: estudar as respectivas contribuições do erro para os processos de ensino e aprendizagem da integral, que iremos fornecer sugestões de atividades de intervenção. Cada erro encontrado nas respostas dos alunos merece atenção e uma intervenção diante de uma visão construtiva do erro e com o intuito de que este não seja mais cometido.

De modo geral, os nossos resultados corroboram com as pesquisas apresentadas na revisão de literatura, e as dificuldades apresentadas pelos estudantes diante de questões que envolvem integral aconteciam por realizações de falsas generalizações, erros na aplicação de procedimentos, erros algébricos e em operações aritméticas básicas, erros por não conhecimento de técnicas de integração, entre outros.

REFERÊNCIAS.

(1) **DICIONÁRIO ESCOLAR DA LÍNGUA PORTUGUESA** / Academia Brasileira de Letras, 2ª ed., São Paulo: Companhia Editora Nacional, 2008.

ARTIGUE, M. **Épistémologie et didactique.** Recherches em didactique des mathématiques. Paris: Université de Paris VII, Equipe Didirem, vol. 19, n. 23, pp. 241-286, 1990.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico.** Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BALDINO, R. R. CABRAL, T. C. B. **Erro do significado ou significado do erro?** Boletim Gepem, n. 35, p. 9-41, 1999.

BARDI, J. S. **A guerra do cálculo.** 3ª ed, Rio de Janeiro: Record, 2016.

BIN ALI, M, TALL, D. Procedural and conceptual aspects of standard algorithms in calculus. In: PSYCOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 20, 1996, Valencia. **Proceedings...** Valencia: PME, 1996, v.2, p. 19-26.

BROUSSEAU, G. **La problématique et l'enseignement dés mathématiques.** XVIIIème Rencontre de la CIEAEM, Louvain la Neuve, 1976.

CORREIA, C. E. F. **Os erros no processo ensino/aprendizagem em Matemática.** Educação: Teoria e Prática – v. 20, n. 34, jan-jun – 2010, p.169-186.

CURY, H. N. **Análise de erros em cálculo diferencial e integral:** resultados de investigações em cursos de engenharia. In: 31º COBENGE – CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, *Anais*... Rio de Janeiro: IME, 2003.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

___________. **Análise de erros.** X ENEM - ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. SALVADOR-BA, 7 a 9 de Julho de 2010.

CURY, H. N. CASSOL, M. **Análise de erros em cálculo:** uma pesquisa para embasar mudanças. ACTASCIENTIAE – v. 6, n. 1, p. 27-36 – Canoas, jan/jun – 2004.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

________. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

JOSHUA, S. DUPIN, J. J. **Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques.** Paris, PUF, 1993.

LA TAILLE, Y. “O erro na perspectiva piagetiana”. In: AQUINO, J. G. **Erro e fracasso na escola:** Alternativas teóricas e práticas. São Paulo: Summus, p. 25-44, 1997.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**: vol.1, Ed. HARBRA ltda, 3ª edição, São Paulo, 1994.

LIMA, E. L. **Análise Real**, vol.1. Funções de uma variável, 12ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. 198p. (Coleção Matemática Universitária)

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar:** estudos e proposições, 22ª ed, São Paulo: Cortez, 2011.

MINAYO, M.C. de S. (Org.) **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. 22 ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2003.

OLIVEIRA, J. L. ARRUDA, A. M. SILVA, F. C. CAMARGO, J. A. **Os conceitos de erro, obstáculo e contrato didático segundo Guy Brousseau.** III EIEMAT – Escola de Inverno de Educação Matemática e 1º Encontro Nacional PIBID – Matemática, UFSM – Santa Maria, 1 a 3 de Agosto de 2012.

PESSOA, C. BORBA, R. **Quem dança com quem:** o desenvolvimento do Raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v. 17, n. 31 – jan/jun – 2009.

PIAGET, J. **L’équilibration des structures cognitives: problème central du développement.** Paris: PUF, 1975.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar.** Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1998.

___________. **O erro como estratégia didática:** o estudo do erro no ensino da matemática elementar. São Paulo: Papirus, 2000.

Projeto Pedagógico do Curso de Matemática – Licenciatura-PPC: Caruaru 2016. – Portaria MEC Nº 121, de 05 de Julho de 2012. 284p.

RIOS, P. P. S. VIEIRA, A. R. L. **Reflexões a partir do erro nas avaliações de cálculo diferencial e integral.** XII ENEM, SBEM, São Paulo, 2016.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica.** Vol. 1, São Paulo: McGraw-Hill, 1987, 360p.

STEWART, J., **Cálculo**: volume 1, Cengage Learning, 7º edição, São Paulo, 2013.

STEWART, J., **Cálculo**: volume 1, Thomson Learning, 5º edição, São Paulo, 2006.

TORRE, S. de la. **Aprender com os erros:** O erro como estratégia de mudança. Porto Alegre: ARTMED, 2007.

ANEXO A – EMENTA DA DISCIPLINA DE CDI I

Cálculo Diferencial e Integral I

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA PARA ASSUNTOS ACADÊMICOS
DIRETORIA DE DESENVOLVIMENTO DO ENSINO

PROGRAMA DE COMPONENTE CURRICULAR

TIPO DE COMPONENTE (Marque um X na opção)

X Disciplina
__ Atividade complementar
__ Monografia
__ Prática de Ensino
__ Módulo
__ Trabalho de Graduação

STATUS DO COMPONENTE (Marque um X na opção)

X Obrigatório
__ Eletivo
__ Optativo

DADOS DO COMPONENTE

Código	Nome	Carga Horária		Nº créditos	CH Global	Período
		Teórica	Prática			
MATM0028	Cálculo Diferen-cial e Integral I	60	0	4	60	3º

Pré-requisitos	MATM0020	Co-requisitos	-	Requisitos C.H.	-

EMENTA

Limite, continuidade e derivada. de funções reais. Teorema do valor médio e aplicações. Primitiva. Integral de Riemann. Técnicas de integração.

Fonte: (Ementas-PPC-MAT, 2016, p. 44)

ANEXO B – EMENTA DA DISCIPLINA DE CDI II

Cálculo Diferencial e Integral II

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA PARA ASSUNTOS ACADÊMICOS
DIRETORIA DE DESENVOLVIMENTO DO ENSINO

PROGRAMA DE COMPONENTE CURRICULAR

TIPO DE COMPONENTE (Marque um X na opção)

X Disciplina
__ Atividade complementar
__ Monografia
__ Prática de Ensino
__ Módulo
__ Trabalho de Graduação

STATUS DO COMPONENTE (Marque um X na opção)

X Obrigatório
__ Eletivo
__ Optativo

DADOS DO COMPONENTE

Código	Nome	Carga Horária		Nº créditos	CH Global	Período
		Teórica	Prática			
MATM0032	Cálculo Diferencial e Integral II	60	0	4	60	4º

Pré-requisitos	MATM0028	Co-requisitos	-	Requisitos C.H.	-

EMENTA

Funções de várias variáveis reais. Limite e continuidade. Derivada parcial e direcional. Diferenciabilidade. Regra da cadeia. Plano tangente e reta normal. Gradiente e curvas de nível. Diferencial. Máximos e mínimos. Multiplicadores de Lagrange. Derivadas de funções definidas implicitamente. Integrais duplas. Mudança de coordenadas. Aplicações ao cálculo de áreas, volumes.

Fonte: (Ementas-PPC-MAT, 2016, p. 62)

ANEXO C – EMENTA DA DISCIPLINA DE CDI III

Cálculo Diferencial e Integral III

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA PARA ASSUNTOS ACADÊMICOS
DIRETORIA DE DESENVOLVIMENTO DO ENSINO

PROGRAMA DE COMPONENTE CURRICULAR

TIPO DE COMPONENTE (Marque um X na opção)

X Disciplina
___ Atividade complementar
___ Monografia
___ Prática de Ensino
___ Módulo
___ Trabalho de Graduação

STATUS DO COMPONENTE (Marque um X na opção)

X Obrigatório
___ Eletivo
___ Optativo

DADOS DO COMPONENTE

Código	Nome	Carga Horária		Nº créditos	CH Global	Período
		Teórica	Prática			
MATM0042	Cálculo Diferencial e Integral III	60		4	60	5º

Pré-requisitos	MATM0032	Co-requisitos	-	Requisitos C.H.	-

EMENTA

Estudo de tópicos do cálculo diferencial e integral para funções e campos vetoriais, abordando os teoremas de Green, Gauss e Stokes, com ênfase na compreensão conceitual e nas aplicações. Estudo das séries numéricas e nas séries de funções, salientando a conceituação, as aplicações e suas relações com a matemática do ensino básico.

Fonte: (Ementas-PPC-MAT, 2016, p. 81)