



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

JOSÉ EDIVALDO FERREIRA JÚNIOR

**ANÁLISE COMPARATIVA DA EFICIÊNCIA DE BUSCAS
ALEATÓRIAS UNIDIMENSIONAIS**

Recife
2020

JOSÉ EDIVALDO FERREIRA JÚNIOR

**ANÁLISE COMPARATIVA DA EFICIÊNCIA DE BUSCAS
ALEATÓRIAS UNIDIMENSIONAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Orientador: Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo

Recife
2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Mariana de Souza Alves CRB4-2105

F383a Ferreira Júnior, José Edivaldo.
Análise comparativa da eficiência de buscas aleatórias unidimensionais/ José Edivaldo Ferreira Júnior. – 2020.
116 f.: il., fig.

Orientador: Ernesto Carneiro Pessoa Raposo.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Física. Recife, 2020.
Inclui referências.

1. Física Teórica e Computacional. 2. Buscas aleatórias. 3. Caminhadas aleatórias. 4. Distribuição de probabilidade. I. Raposo, Ernesto Carneiro Pessoa (orientador). II. Título.

530.1

CDD (22. ed.)

UFPE-CCEN 2020-146

JOSÉ EDIVALDO FERREIRA JÚNIOR

**ANÁLISE COMPARATIVA DA EFICIÊNCIA DE BUSCAS
ALEATÓRIAS UNIDIMENSIONAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 29/07/2020.

BANCA EXAMINADORA

[Participação via Videoconferência](#)

Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

[Participação via Videoconferência](#)

Prof. Renê Rodrigues Montenegro Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

[Participação via Videoconferência](#)

Prof. Madras Viswanathan Gandhi Mohan
Examinador Externo
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

RESUMO

Neste trabalho estudamos o problema de um caminhante aleatório unidimensional em um espaço finito de extensão L limitado por duas extremidades fixas (sítios alvos), isto é, $0 \leq x \leq L$. Consideramos que o caminhante parte de uma posição $x_0 \ll L$ não equidistante das bordas. Analisamos qual é a melhor estratégia de busca para encontrar um destes sítios nas bordas percorrendo a menor distância possível. Em particular, quando o animal não possui informações sobre o espaço de busca e inicia a procura nas proximidades de um sítio alvo a distribuição de Lévy com parâmetro $\alpha \approx 1$ surge como a que otimiza a eficiência da busca. No presente trabalho, comparamos as eficiências de buscas unidimensionais com distribuições de tamanhos de passos do tipo exponencial simples, exponencial dupla e lei de potência (que representa o limite assintótico para grandes passos da distribuição de Lévy). Realizamos um estudo extensivo da eficiência máxima de cada tipo de busca à medida que L aumenta, ou seja, à medida que o ambiente se torna progressivamente mais escasso. Para isso, trabalhamos com resultados analíticos a partir de expressões para a eficiência da busca existentes na literatura e também via o método do operador integral. Obtemos como a eficiência máxima η_{opt} escala com L para as três distribuições quando $x_0 \ll L$. Nossos resultados mostram que $\eta_{opt} \sim 1/L$ para a exponencial simples, $\eta_{opt} \sim 1/(\sqrt{L} \log L)$ para a lei de potência, e $\eta_{opt} \sim 1/\sqrt{L}$ para a exponencial dupla com comprimentos característicos $\tau_1 \gg L$ e $\tau_2 \approx x_0$, o primeiro associado à exponencial com peso estatístico $w_1 \approx 2x_0/L$. Estes resultados indicam que, em uma dimensão, a distribuição do tipo exponencial dupla possui uma eficiência máxima superior à da distribuição lei de potência quando $x_0 \ll L$. Isto se deve, contudo, à escolha específica dos comprimentos característicos e pesos estatísticos associados às escalas relevantes do problema, x_0 e L . Argumentamos que quando o animal não possui conhecimento a priori sobre o espaço de busca, tal escolha é extremamente improvável, de modo que na ausência de informações o resultado que aponta as buscas de Lévy como as mais eficientes permanece válido.

Palavras-chave: Buscas aleatórias. Caminhadas aleatórias. Distribuição de probabilidade. Eficiência. Distribuição de Lévy.

ABSTRACT

In this work we study the problem of a one-dimensional random walker in a finite space of extension L limited by two fixed boundaries (target sites), i.e., $0 \leq x \leq L$. We consider that the walker starts from a position $x_0 \ll L$ not equidistant from the edges. We analyze what is the best search strategy to find one of the boundary sites while covering the shortest possible distance. In particular, when the animal does not have any information about the search space and starts searching in the vicinity of a target site, the Lévy distribution with parameter $\alpha \approx 1$ emerges as the one that optimizes the efficiency of the search. Due to recent studies that question the Lévy distribution as the most efficient and that best models the movement of animals, this research field remains very active. In the present work, we compare the efficiencies of one-dimensional searches with step lengths distributions in the form of a simple exponential, double exponential, and power law (which represents the asymptotic limit of large steps of the Lévy distribution). We perform an extensive study of the maximum efficiency of each type of search as L increases, i.e., as the environment becomes progressively scarcer. To do this, we work with analytical results existing in the literature for the search efficiency and also via the integral operator method. In particular, we obtain how that the maximum efficiency η_{opt} scales with L for the three distributions when $x_0 \ll L$. Our results show that $\eta_{opt} \sim 1/L$ for the simple exponential, $\eta_{opt} \sim 1/(\sqrt{L} \ln L)$ for the power law, and $\eta_{opt} \sim 1/\sqrt{L}$ for the double exponential with characteristic lengths $\tau_1 \gg L$ and $\tau_2 \approx x_0$, the former associated with the exponential with statistical weight $w_1 \approx 2x_0/L$. These results indicate that, in one dimension, the double exponential distribution has a maximum efficiency greater than that of the power law distribution when $x_0 \ll L$. This is, however, due to the specific choice of characteristic lengths and statistical weights closely associated with the relevant scales of the problem, x_0 and L . We argue that when the animal has no prior knowledge of the search space, this choice is extremely unlikely, so that in the absence of any information the result that points to the Lévy search as the most efficient remains valid.

Keywords: Random searches. Random walks. Probability distribution. Efficiency. Lévy distribution.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1—	Densidade de probabilidade de se escolher um número no intervalo $[0, 1]$. Esse é um exemplo de uma densidade de probabilidade uniforme.	22
Figura 2—	Histograma obtido a partir de 10000 amostras da distribuição uniforme dada pela densidade de probabilidade definida na Eq. (1.1).	22
Figura 3—	Histograma gerado pela variável aleatória definida pela Eq. (1.2) com $n = 10000$.	23
Figura 4—	Densidade de probabilidade da distribuição exponencial definida na Eq. (1.3).	24
Figura 5—	Histograma obtido a partir de 10000 amostras da distribuição exponencial definida pela densidade de probabilidade da Eq. (1.3).	25
Figura 6—	Histograma gerado pela densidade de probabilidade definida pela Eq.1.4 com $n = 10000$.	25
Figura 7—	Comparação entre as distribuições normal ($\alpha = 2$) e de Cauchy ($\alpha = 1$). A linha contínua azul ilustra a distribuição normal, com função densidade de probabilidade (ou “probability density function”, PDF) dada por $p(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, enquanto a linha contínua verde denota a distribuição de Cauchy com PDF $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.	34
Figura 8—	Esquema do espaço de busca do animal em uma dimensão, mostrando o intervalo em que o mesmo está confinado [41].	42
Figura 9—	Esquema dos dois tipos diferentes de movimentos em uma busca aleatória em duas dimensões. (a) O sítio alvo (quadrado preto) está dentro do raio de visão r_v do animal, que então se movimenta de forma balística até ele. (b) O sitio alvo não está no raio de visão do animal, que precisa portanto realizar o movimento de busca estocasticamente. Imagem de [62].	42
Figura 10—	Caminhadas aleatórias bidimensionais: à esquerda a distribuição de tamanhos de passos é do tipo lei de potência com $\mu = 3$, que segue o TCL (movimento browniano), e à direita a distribuição possui expoente $\mu = 2$ (tipo Cauchy).	43

Figura 11— Regimes de busca do caminhante unidimensional [4]. (a) Regime não-destrutivo ou assimétrico, em que $x_0 \ll L/2$. (b) Regime destrutivo ou simétrico, com $x_0 = L/2$	45
Figura 12— Eficiência η da busca realizada com a distribuição exponencial simples de tamanhos de passos em função do comprimento característico τ , para o caso não-destrutivo com $\ell_0 = 0.2$, $x_0 = 1$, $L = 10^3$ e $\Delta x = 0.2$. Nos pontos azuis utilizamos o método do operador integral, enquanto a linha sólida representa a expressão analítica obtida em [66] via equação de Fokker-Planck e em [12] através do tempo médio de primeira passagem. Uma boa concordância de resultados é observada.	86
Figura 13— Eficiência η da busca realizada com a distribuição exponencial simples de tamanhos de passos em função do comprimento característico τ , para o caso destrutivo com $\ell_0 = 0.2$, $x_0 = L/2 = 500$, $L = 10^3$ e $\Delta x = 0.2$. Nos pontos azuis utilizamos o método do operador integral, enquanto a linha sólida representa a expressão analítica obtida em [66] via equação de Fokker-Planck e em [12] através do tempo médio de primeira passagem. Uma boa concordância de resultados é observada.	86

Figura 14— Distância média $\langle L \rangle = \langle T \rangle$ percorrida entre dois encontros consecutivos de sítios alvos em função do peso estatístico w_1 da primeira exponencial no caso da distribuição do tipo exponencial dupla de tamanhos de passos. Os parâmetros utilizados foram $\ell_0 = 0.2$, $\Delta x = 0.2$, $L = 10^3$, $\tau_1 = 10^3 L$, $\tau_2 = x_0$ e $v = 1$. A posição inicial x_0 está indicada em cada gráfico e corresponde, para os menores valores de x_0/L , ao regime de buscas não-destrutivas em um ambiente escasso. A linha sólida preta representa o resultado exato do método do tempo médio de primeira passagem, a linha pontilhada são os resultados deste método de acordo com a aproximação da Eq. (4.9), os círculos azuis representam os resultados de simulação numérica de Monte Carlo mediadas sobre 10^6 caminhadas e a linha vermelha ilustra os dados obtidos pelo método do operador integral. Além disso, as linhas horizontais tracejada e traço-pontilhada referem-se, respectivamente, aos resultados com uma distribuição do tipo lei de potência com $\mu \rightarrow 1$ (regime balístico) e $\mu = 2$ (próximo ao máximo da eficiência da busca não-destrutiva). Com exceção da linha vermelha, os demais resultados encontram-se em [12]. Uma boa concordância é observada entre os resultados do método do operador integral, os resultados exatos do método do tempo médio de primeira passagem e aqueles obtidos via simulação numérica. Os resultados com a aproximação da Eq. (4.9) também concordam bastante bem na vizinhança do mínimo de $\langle L \rangle$ 89

Figura 15— Eficiência η da busca não-destrutiva em função do expoente μ da PDF lei de potência (Lévy), com os parâmetros $\Delta x = 0.2$, $r_v = 1$, $\ell_0 = 1$, $L = 10^3$ e $x_0 = 2$. O parâmetro τ representa o máximo tamanho possível do passo considerado em [3]. Nesse trabalho, as linhas foram obtidas pelo método do operador integral e os símbolos por simulação numérica. Nossos resultados com o método do operador integral para a distribuição lei de potência não truncada estão mostrados em símbolos vermelhos e concordam bem com o limite $\tau \rightarrow \infty$ da referência [3]. . . 91

- Figura 16— Eficiência η da busca não-destrutiva em função do expoente μ da PDF lei de potência (Lévy), com os parâmetros $L = 10^3$, $x_0 = 2$, $\ell_0 = 0.2$ e $\Delta x = 0.2$. A linha sólida representa o resultado da Eq. (4.15) [7, 8], enquanto que os círculos vermelhos são obtidos com o método do operador integral. A concordância dos resultados é boa para valores de μ correspondentes ao máximo da eficiência e abaixo dele. 92
- Figura 17— Eficiência η para as buscas não-destrutivas realizadas com as distribuições de tamanhos de passos exponencial simples em função de τ (símbolos pretos), exponencial dupla (azul) com $\tau_1 = 10^6$ e $\tau_2 = 2$ em função de $\log w_1$, e lei de potência ou Lévy (vermelho) em função de μ . Resultados obtidos via método do operador integral com parâmetros $x_0 = 2$, $\ell_0 = 0.2$, $L = 10^3$ e $\Delta x = 0.2$. Observamos nesse caso que a maior eficiência ótima é a da PDF exponencial dupla. 95
- Figura 18— Expoente ótimo μ_{opt} da busca não-destrutiva realizada com a distribuição de tamanhos de passos lei de potência em função de L . Resultados obtidos via método do operador integral com parâmetros $x_0 = 2$, $\ell_0 = 0.2$ e $\Delta x = 0.2$. À medida que $L \rightarrow \infty$ a previsão teórica indica que $\mu_{opt} \rightarrow 2$ [62]. 96
- Figura 19— Eficiência ótima η_{opt} da busca não-destrutiva em função de L realizada com a distribuição de tamanhos de passos exponencial simples (símbolos azuis), exponencial dupla (preto) com $\tau_1 = 10^3 L$ e $\tau_2 = x_0$, e lei de potência ou Lévy (vermelho). Resultados obtidos via método do operador integral com parâmetros $x_0 = 2$, $\ell_0 = 0.2$ e $\Delta x = 0.2$. Para cada valor de L considerado, a eficiência ótima da PDF exponencial dupla foi a maior. 96
- Figura 20— Gráfico em escala log-log da Fig. Figura 19. A eficiência ótima da PDF exponencial dupla cai mais lentamente com L do que a das demais distribuições. 97

Figura 21— Eficiência ótima η_{opt} da busca não-destrutiva realizada com a PDF exponencial dupla em função de L . Os símbolos verdes representam os resultados obtidos a partir do cálculo analítico com τ_2^* e w_1^* [12], os símbolos vermelhos pela varredura da expressão para $\langle L \rangle$ e os símbolos azuis pelo método do operador integral. Utilizamos os parâmetros $\tau_1 = 10^3 L$, $\tau_2 = x_0$, $x_0 = 2$, $\ell_0 = 0.2$ e $\Delta x = 0.2$. Observamos uma boa concordância dos resultados obtidos pelos três métodos. 99

Figura 22— Eficiência ótima η_{opt} da busca não-destrutiva em função de L realizada com a PDF lei de potência. A linha sólida foi obtida a partir da Eq. (4.18) no espaço de busca contínuo [7], enquanto os símbolos vermelhos representam os resultados do método do operador integral no espaço discreto. Utilizamos $x_0 = 2$, $\ell_0 = 0.2$ e $\Delta x = 0.2$. No limite contínuo $\Delta x \rightarrow 0$ espera-se que os pontos tendam à linha sólida. 100

Figura 23— Eficiência ótima η_{opt} da busca não-destrutiva realizada com a PDF exponencial dupla em função de L mostrada em escala log-log. Os círculos representam os resultados analíticos do método do tempo médio de primeira passagem com os parâmetros $\tau_1 = 10^3 L$, $\tau_2 = x_0$, $x_0 = 2$ e $\ell_0 = 0.2$. O valor máximo de L vai diminuindo progressivamente desde (a) $L = 29000$ até (d) $L = 9000$. As linhas vermelhas são o best fit destes resultados usando a forma $Y = Ax^{-B}$. Observamos que o expoente B tem o seu valor de best fit $B \approx 0.51$ em boa concordância com a previsão teórica $\eta_{opt} \sim 1/\sqrt{L}$ 104

Figura 24— Eficiência ótima η_{opt} da busca não-destrutiva realizada com a PDF lei de potência em função de L mostrada em escala log-log. Os círculos representam os resultados analíticos do método do operador fracionário de Riesz com os parâmetros $\ell_0 = 0.2$ e $x_0 = 2$. O valor máximo de L vai diminuindo progressivamente desde (a) $L = 29000$ até (d) $L = 9000$. As linhas verdes são o best fit destes resultados usando a forma $Y = A_1/(x^{B_1} \log x)$, correspondente à previsão teórica, e as linhas vermelhas utilizando $Y = A_2 x^{-B_2}$. No primeiro caso, o expoente de best fit $B_1 \approx 0.50$ concorda bastante bem com a previsão $\eta_{opt} \sim 1/(\sqrt{L} \log L)$. No segundo caso o melhor ajuste foi conseguido com $B_2 \approx 0.61$ 105

Figura 25— Eficiência ótima η_{opt} da busca não-destrutiva em uma dimensão realizada com as ditribuições de tamanhos de passos exponencial simples (símbolos verdes), exponencial dupla (vermelho) e lei de potência ou Lévy (azuis), em função de L na escala log-log. Os círculos representam os resultados obtidos pelo método do operador integral, enquanto que os quadrados dizem respeito às técnicas de tempo médio de primeira passagem (exponenciais) e operador fracionário de Riesz (lei de potência). As linhas denotam os fits no regime escasso, $L \geq 2500$, segundo as previsões teóricas $\eta_{opt} \sim 1/L$ (exponencial simples), $\eta_{opt} \sim 1/(\sqrt{L} \log L)$ (lei de potência), e $\eta_{opt} \sim 1/\sqrt{L}$ (exponencial dupla). Os parâmetros utilizados form $x_0 = 2$, $\ell_0 = 0.2$ e $\Delta x = 0.2$. Para a exponencial dupla usamos ainda $\tau_1 = 10^3 L$ e $\tau_2 = x_0$. Neste regime não-destrutivo unidimensional, a PDF exponencial dupla emerge como a que leva à maior eficiência ótima entre as distribuições analisadas. 107

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Panorama histórico	15
1.2	Teorema central do limite	20
1.2.1	<u>Motivações</u>	21
1.2.2	<u>Conceitos Básicos TCL</u>	26
1.2.3	<u>Demonstração</u>	28
1.3	Teorema central do limite generalizado	30
1.4	Distribuição de Lévy	33
1.5	Distribuição hiperexponencial	37
1.6	Lévy flight foraging hypothesis	39
2	FORMALISMO TEÓRICO E MÉTODO DO OPERADOR INTEGRAL	41
2.1	Modelo de caminhada de busca aleatória	41
2.1.1	<u>Definições iniciais</u>	41
2.1.2	<u>Cálculo de $\langle L \rangle$ via método do operador integral</u>	45
2.1.3	<u>Discretização do espaço de busca</u>	52
2.2	Cálculo da matriz $[A]$ e do vetor coluna $\langle \ell \rangle$ para diferentes PDFs de tamanhos de passos	57
2.2.1	<u>Exponencial simples</u>	57
2.2.2	<u>Exponencial dupla</u>	60
2.2.3	<u>Lei de potência (Lévy)</u>	62
3	CÁLCULOS ANALÍTICOS DA EFICIÊNCIA DA BUSCA ALEATÓRIA UNIDIMENSIONAL	66
3.1	Lei de potência (Lévy)	66
3.1.1	<u>Aproximação contínua</u>	67
3.2	Exponenciais simples e dupla	70

3.2.1	<u>Exponencial simples</u>	75
3.2.2	<u>Exponencial dupla</u>	77
4	RESULTADOS	83
4.1	Checagem dos programas para o método do operador integral	83
4.1.1	<u>Exponencial simples</u>	84
4.1.2	<u>Exponencial dupla</u>	85
4.1.3	<u>Lei de potência (Lévy)</u>	88
4.2	Análise comparativa das eficiências máximas de buscas não-destrutivas . . .	93
4.3	Dependência analítica da eficiência ótima com L	100
4.4	Fit das curvas de eficiência ótima com L	103
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	108
	REFERÊNCIAS	110

1 INTRODUÇÃO

Qual é a distribuição de tamanhos de passos que um caminhante aleatório deve adotar para encontrar de modo mais eficiente sítios alvos aleatoriamente distribuídos? Desde 1999 a distribuição de Lévy é geralmente considerada [64, 62] a mais eficiente quando estamos tratando de um regime assimétrico, em que a distância inicial do caminhante aleatório a um dos sítios é bem menor que as distâncias iniciais aos demais sítios, à medida que o ambiente se torna mais escasso em sítios alvos.

O objetivo dessa dissertação é fazer uma comparação entre as eficiências de diferentes distribuições de tamanhos de passos em buscas aleatórias unidimensionais. Em particular, analisaremos a eficiência máxima da busca realizada utilizando distribuições do tipo exponencial simples, exponencial dupla e lei de potência, que representa o limite assintótico de grandes passos da distribuição de Lévy.

De maneira geral, como estamos lidando com o problema da busca aleatória, existem várias formas de contextualizar essa busca. Nessa dissertação abordaremos esse problema utilizando um contexto biológico, mais especificamente a busca de alimento por animais, mais conhecido como o problema de “animal foraging” [62, 58].

Entretanto, apesar desta contextualização na busca de alimentos por animais, observamos que os resultados desta dissertação são válidos para problemas de buscas aleatórias em geral. Para uma melhor compreensão da nossa abordagem, serão introduzidos neste capítulo conceitos relevantes para o nosso estudo. De fato, neste primeiro capítulo serão apresentados alguns conceitos comumente utilizados no âmbito da física estatística, tais como caminhadas aleatórias, teorema central do limite, teorema central do limite generalizado e os diferentes tipos de distribuições utilizados. No final do capítulo faremos uma breve discussão sobre o artigo seminal [62] que introduziu as distribuições de Lévy no contexto das buscas aleatórias. No capítulo 2 será introduzido o método do operador integral, que utilizaremos para obter a eficiência de forma numérica, também será introduzido o modelo para o nosso problema. No capítulo 3 é demonstrada a metodologia para se obter expressões analíticas para as distribuições exponencial simples, exponencial dupla e de Lévy. No capítulo 4 apresentamos as verificações entre método numérico e analítico, e apresentaremos os resultados. No capítulo 5 ocorre o fechamento da dissertação com a conclusão e as perspectivas futuras

1.1 Panorama histórico

Quando lidamos com o problema da busca aleatória, estamos tratando do problema de um caminhante aleatório que se movimenta utilizando uma dada distribuição de tamanhos ou durações dos passos para tentar encontrar um ou mais alvos. Caminhadas aleatórias são amplamente estudadas na estatística e na física e possuem diversas aplicações [64].

Um marco da pesquisa em caminhadas aleatórias ocorreu em 1827. Nos meses de junho, julho e agosto daquele ano, o biólogo Robert Brown observou grãos de pólen imersos em uma solução aquosa [61]. Seus experimentos identificaram que, mesmo estando a água aparentemente em repouso, os grãos realizavam movimentos curtos em direções aleatórias. Esse padrão de movimento é conhecido como movimento browniano em homenagem a Robert Brown.

As primeiras tentativas de explicar o movimento browniano se deveram ao próprio Roberto Brown que, ao observar que partículas inorgânicas imersas em líquido também realizavam esse tipo de movimento, logo descartou a possibilidade de que este fosse devido a algum tipo de mecanismo associado à presença de vida. Em 1900 Louis Bachelier publicou sua tese de doutorado “The theory of speculation” [2], ao longo da qual desenvolveu um modelo matemático para descrever o movimento browniano, utilizando o mesmo inclusive para analisar problemas de finanças. Durante sua vida Bachelier fez diversas contribuições importantes na área de dinâmica estocástica e é considerado o pai da matemática financeira.

Em 1905 Albert Einstein deu uma explicação para esse tipo de movimento que se tornou clássica. De fato, ele assumiu que não eram os grãos de pólen que estavam ativos, mas que era o choque com as moléculas de água que gerava o movimento do pólen [20].

Nesse período ainda não era largamente reconhecida a existência de moléculas nem de átomos. Assim, além de afirmar a existência de moléculas Einstein conseguiu também calcular qual deveria ser o tamanho destas a partir do estudo do movimento browniano. Em 1908 Jean Baptiste Perrin constatou experimentalmente as previsões de Einstein para o movimento browniano, conseqüentemente atestando também a existência de moléculas e dando fim à discussão sobre se o modelo atomístico molecular seria real ou não. Devido a essa contribuição, Perrin ganhou o Prêmio Nobel de Física de 1926.

No início dos anos 1960s um ramo da ecologia comportamental, ou “behavioral ecology”, iniciou o estudo da dinâmica da busca de alimentos por animais [53]. Nesse contexto, surgiram também as primeiras teorias de otimização das buscas aleatórias, ou “optimal foraging theory” [64, 37, 21], que possuíam como objetivo identificar quais parâmetros definem a estratégia mais eficiente a ser utilizada pelos animais para buscar alimentos.

Na “optimal foraging theory” o animal procura adotar uma dinâmica de busca por alimentos que otimiza o ganho líquido de calorias [67]. É assumido que esses processos de busca vêm sendo otimizados há milhões de anos. Desse modo, os animais que conseguem otimizar esse ganho calórico desenvolvendo as melhores estratégias de busca conseguem perpetuar a espécie via um processo evolutivo de seleção natural [67].

Nos modelos iniciais [38], para se definir qual estratégia cada espécie de animal deveria adotar foi utilizado um número muito grande de variáveis relacionadas com a habilidade de predação, tipos de predadores, aspectos fisiológicos do animal, entre outras características. Utilizando estas propriedades, tentou-se fazer uma modelagem para observar qual ou quais características importariam mais para a estratégia de cada espécie.

Foi desenvolvida uma grande quantidade de trabalhos nos anos seguintes para determinar que variáveis seriam relevantes para a otimização da eficiência da busca por alimentos. Contudo, essa abordagem começou a ser deixada de lado devido, entre outros aspectos, à dificuldade para a sua validação através de estudos de laboratório e em observações de campo [64] ocasionada pelo grande número de variáveis utilizadas na modelagem.

Nos anos 1990 teve início uma abordagem multidisciplinar intensa entre a física e a biologia para compreender melhor a “optimal foraging theory”. Nesse contexto foram utilizados métodos e ideias provenientes da física estatística [64]. De fato, ao invés de estudar as características específicas de cada espécie animal, como na abordagem clássica anterior, começou-se a observar os padrões gerais de movimento dos animais. Com isso foi possível reduzir o número de variáveis, fixando o foco apenas no comportamento estatístico global durante a busca e facilitando assim a aplicação da teoria à análise dos dados experimentais [64].

Uma fração considerável dos estudos de busca aleatória no contexto de “animal foraging” assume como hipótese que o animal não possui conhecimento prévio sobre a localização das suas presas ou sítios de comida. Nesse sentido, o problema de um animal

procurando por alimentos torna-se análogo ao problema da busca aleatória em física estatística. No mundo real, contudo, sabe-se que animais podem de fato ter algum nível de conhecimento sobre o ambiente da busca, o qual pode ser maior ou menos dependendo da espécie. Uma teoria de buscas que incorpore esse nível de conhecimento e os mecanismos que levam à detecção dos sítios alvos deve ser, em princípio, um objetivo a ser perseguido na “optimal foraging theory”. Entretanto, no presente trabalho iremos assumir que nenhuma informação sobre o espaço de busca está disponível ao animal, o qual portanto se comportará como uma partícula executando uma caminhada aleatória. Ao longo dessa dissertação, analisaremos qual deve ser a melhor estratégia de busca que leva ao encontro dos sítios alvos percorrendo a menor distância possível em um espaço de busca unidimensional.

Desde o começo do estudo do movimento dos animais, diversos modelos foram empregados na análise da sua dinâmica [64]. Nos primeiros modelos matemáticos era assumido que os passos não possuíam correlações entre si, ou seja, a direção e o comprimento do passo do caminhante aleatório em um dado deslocamento não dependem da direção e do comprimento que ele assumiu em nenhum dos outros passos anteriores. Como consequência, a posição do caminhante aleatório após cada passo só depende da sua localização anterior. Desse modo, como a posição do caminhante após o passo $i + 1$ só depende da sua posição após o passo i , então o sistema possui a propriedade de ser markoviano [65].

Quando o caminhante aleatório não possui nenhuma tendência direcional, a cada passo uma nova direção é escolhida aleatoriamente segundo uma distribuição de ângulos uniforme no intervalo 2π rad. Por outro lado, se a distribuição que rege o tamanho dos passos é bem comportada, ou seja, se ela possui primeiro e segundo momentos finitos, e os tamanhos de passos são descorrelacionados (ou guardam, no máximo, correlações de curto alcance entre si), então no limite em que o caminhante realiza um número grande de passos a soma dos tamanhos dos passos, que essencialmente está associada à posição do caminhante, é governada pelo teorema central do limite (TCL) [23], o qual abordaremos mais à frente. Nesse caso, o caminhante aleatório segue um processo de difusão usual (ou normal) [65], segundo o qual ele se comporta estatisticamente da mesma forma como se utilizasse uma distribuição gaussiana de passos. No contexto da otimização da eficiência de busca, o problema das distribuições de passos governadas pelo TCL é que nesse caso o

caminhante revisita uma mesma posição diversas vezes, sem conseguir, portanto, explorar eficientemente regiões mais distantes do espaço de busca, diminuindo assim a eficiência do processo de procura.

Em alguns casos, após se observar o movimento de animais em busca por alimentos foi constatado que há em algumas espécies uma tendência a seguir ao longo da mesma direção durante algum tempo [64]. As primeiras abordagens teóricas para explicar esse tipo de comportamento se deram essencialmente a partir de uma adaptação do movimento browniano na forma das chamadas caminhadas aleatórias correlacionadas, ou “correlated random walks” [42]. Nesse caso, para adaptar a tendência dos animais de seguirem em uma dada direção por algum tempo foi introduzida uma nova variável denominada persistência. Esse tipo de caminhada foi muito utilizado na literatura para modelar a dinâmica de diversas espécies de animais [35, 16, 28].

Na presença de persistência é gerada uma tendência, ou “bias”, direcional no movimento do animal. Estatisticamente, a probabilidade de se manter ao longo da mesma direção diminui à medida que mais passos colineares são realizados. É importante notar que se a distribuição dos tamanhos dos passos possui segundo momento finito então as caminhadas aleatórias correlacionadas são governadas pelo TCL, caso as correlações entre passos possuam duração (ou extensão) muito menor que a duração ou tamanho total da caminhada. Desse modo, como veremos a seguir, podemos afirmar que a soma dos tamanhos dos passos nas caminhadas aleatórias correlacionadas também tende para uma distribuição normal.

Como dito antes, a abordagem multidisciplinar entre a física e a biologia no caso do problema de “animal foraging” se intensificou a partir dos anos 1990, quando vários conceitos da física estatística passaram a ser aplicados nesse contexto. Alguns destes conceitos estavam relacionados à superdifusão, geometria fractal, entre outros. Em razão da semelhança entre os padrões dos movimentos dos animais e aqueles gerados por um caminhante aleatório com uma distribuição de tamanhos de passos de Lévy, que descreveremos a seguir, deu-se início a partir do final dos anos 1990s a aplicação mais sistemática dos voos ou caminhadas de Lévy para estudar o problema da busca de alimentos por animais [62], principalmente no caso de ambientes com baixas densidades de recursos.

A distribuição normal consegue explicar bem o movimento de animais em ambientes com abundância de alimentos [64, 62, 32]. Contudo, no regime de escassez de recursos

ela não consegue justificar a existência de longos deslocamentos nos dados empíricos. Ao se utilizar a distribuição de Lévy para os tamanhos de passos foi observado que a dinâmica de uma grande quantidade de animais conseguia ser modelada adequadamente, explicando inclusive a presença dos longos passos [64, 62, 32].

A principal característica da distribuição de Lévy é o fato dela não satisfazer o TCL, uma vez que o seu segundo momento diverge. Por isso, para explicar a distribuição de uma soma de variáveis aleatórias com segundo momento divergente é necessário o uso do teorema central do limite generalizado [64]. Esse tema será explicado com mais detalhes nas próximas seções. Devido ao TCL não ser válido para distribuições de Lévy, a sua dinâmica não pode ser considerada normal, como, por exemplo, ocorre com a dinâmica observada com uma distribuição gaussiana de tamanhos de passos. Ao invés disso, a dinâmica de um caminhante aleatório com distribuição de passos de Lévy possui um caráter superdifusivo, com a distância média quadrática do caminhante crescendo em função do seu número de passos de uma forma mais rápida do que no caso de distribuições de tamanhos de passos governadas pelo TCL.

Em 1999 foi descoberto [62] que a distribuição de tamanhos de passos mais eficiente para as buscas aleatórias é a distribuição de Lévy, resultado este que foi corroborado pela análise de dados empíricos de algumas espécies. Desde então, deu-se início à ideia de que a distribuição de Lévy teria resultado do processo evolutivo dos animais em função das vantagens obtidas na busca por alimentos, hipótese esta que ficou conhecida como “Lévy flight foraging hypothesis”.

Após alguns anos foram introduzidos outros modelos concorrentes para as buscas aleatórias [64], alguns dos quais incorporando ideias surgidas a partir do trabalho original de 1999. Um destes modelos constitui as chamadas caminhadas aleatórias intermitentes, cujo diferencial consiste em dividir o movimento realizado pelo animal em dois estados, um de busca propriamente dita e o outro de deslocamento entre estados de busca. Durante o estado de busca o caminhante executa um movimento browniano, realizando uma busca detalhada nos arredores da sua posição atual. Este é o único estado em que um sítio alvo pode ser detectado. Por outro lado, durante o estado de deslocamento o animal se move de forma balística. Durante esse movimento não é possível realizar a detecção de um sítio alvo. O parâmetro utilizado para otimizar esse modelo é o tempo que se passa em cada um dos estados.

O modelo intermitente sofreu, entretanto, críticas por não ser biologicamente realístico, devido à adaptação responsável por encontrar os alvos ser “desligada” durante uma das fases de busca. Assim como outros modelos, as caminhadas aleatórias intermitentes obedecem ao TCL, isto é, após um número grande de passos temos uma dinâmica de movimento com difusão normal similar à observada com uma distribuição gaussiana de tamanhos de passos.

Atualmente o debate sobre qual é a melhor estratégia dos animais para se buscar alimentos ainda persiste. Entre as principais estratégias que competem por essa posição encontram-se as já citadas caminhadas aleatórias correlacionadas, caminhadas aleatórias intermitentes e os voos ou caminhadas de Lévy, com algumas variações ocorrendo entre elas. Uma parte considerável da comunidade científica concorda que a estratégia mais eficiente e que melhor descreve o movimento dos animais é a de Lévy [62], embora essa afirmação não seja unânime entre os pesquisadores. De fato, alguns trabalhos recentes vêm questionando essa ideia e apontam as caminhadas correlacionadas compostas como uma alternativa às distribuições de Lévy [45, 34, 5].

O trabalho realizado nessa dissertação é focado em comparar algumas distribuições de tamanhos de passos no que diz respeito à eficiência das buscas aleatórias unidimensionais. Em princípio, o problema de encontrar essa distribuição, seja em buscas unidimensionais ou em espaços de dimensões superiores, é importante não somente no contexto de “animal foraging”, mas também para muitos outros sistemas que lidam com a necessidade de otimização de buscas, como na extração de petróleo [18], telefones celulares procurando por antenas [26], computadores procurando por informações aleatórias em um conjunto de dados [44], lasers aleatórios [54], criptografia [44], entre diversos outros problemas práticos e teóricos associados.

1.2 Teorema central do limite

O teorema central do limite (TCL) é um dos teoremas mais importantes da estatística. No contexto das amostragens aleatórias de um dado evento estatístico, o TCL garante que a distribuição dos valores obtidos a partir da média de uma grande quantidade de amostras é dada pela distribuição normal ou gaussiana se a variância e a média da população forem finitas. Equivalentemente, no contexto de variáveis aleatórias obtemos que a distribuição gerada pela soma de uma grande quantidade de variáveis aleatórias com

primeiro e segundo momentos finitos é dada pela distribuição normal, caso tais variáveis sejam estatisticamente independentes ou apresentem correlações de alcance limitado. O TCL é o motivo pelo qual as distribuições normais são tão comuns na natureza [23].

O TCL é uma ferramenta teórica muito útil, que serve como uma das bases para a inferência estatística. Ele é utilizado, por exemplo, para explicar o tipo de difusão gerado por um caminhante aleatório browniano, entre diversas outras aplicações [23].

Nesta seção será feita uma rápida introdução a alguns conceitos básicos da estatística e uma demonstração simples do TCL.

1.2.1 Motivações

Qual é a probabilidade de escolher um número que esteja contido no intervalo $[0.4, 0.5]$ sabendo que qualquer número pode ser escolhido em $[0, 1]$? Como existem infinitas possibilidades de se escolher um número no intervalo $[0, 1]$, será necessário o conceito de função densidade de probabilidade para responder essa questão.

A função densidade de probabilidade dá informação sobre a probabilidade relativa de se obter um dado resultado de uma variável aleatória. Se a densidade de probabilidade de uma variável aleatória x é denotada por $f(x)$ então a probabilidade de se obter um valor da variável no intervalo $[x, x + dx]$ é $f(x)dx$. Com isso, a probabilidade de se escolher um valor de x dentro da faixa $[a, b]$ é dada por $p(a, b) = \int_a^b f(x)dx$.

Utilizando esse conceito, temos que a densidade de probabilidade para escolher algum número no intervalo $[0, 1]$ é dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, & 0 < x < 1; \\ f(x) &= 0, & x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Na Fig. Figura 1 mostramos a densidade de probabilidade de escolher um número entre $[0, 1]$, a qual é uma distribuição uniforme. Essa distribuição é dita uniforme devido ao fato da escolha de qualquer resultado ser equiprovável. Quando é feito o histograma de um grande número ($N \rightarrow \infty$) de sorteios dessa variável aleatória, obtemos um gráfico que é igual ao da densidade de probabilidade correspondente. De fato, na Fig. Figura 2 ilustramos o histograma obtido a partir de 10000 amostras da distribuição da Eq. (1.1), onde observamos que a curva gerada é aproximadamente uma constante no intervalo.

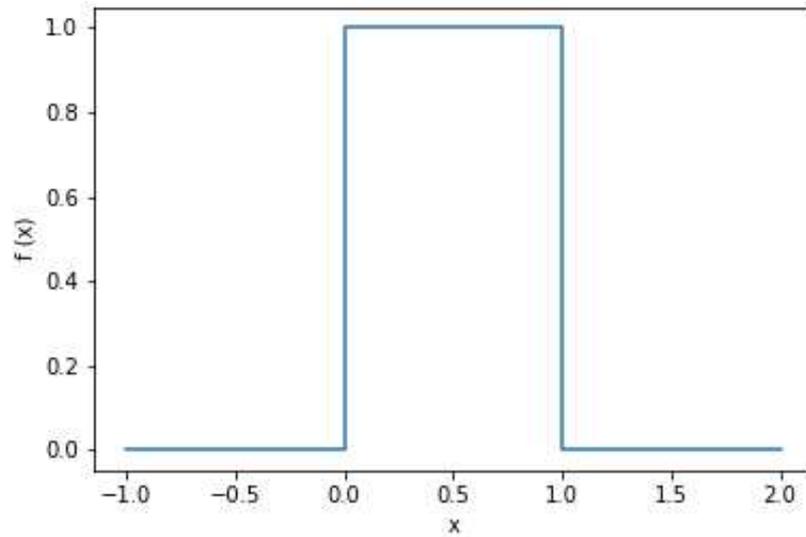


Figura 1: Densidade de probabilidade de se escolher um número no intervalo $[0, 1]$. Esse é um exemplo de uma densidade de probabilidade uniforme.

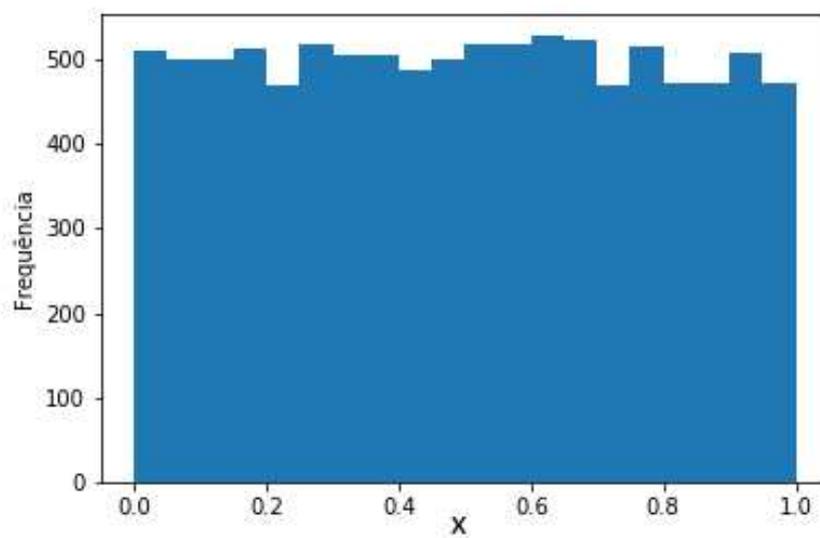


Figura 2: Histograma obtido a partir de 10000 amostras da distribuição uniforme dada pela densidade de probabilidade definida na Eq. (1.1).

Se ao invés de a variável aleatória ser tratada como uma única amostra da distribuição uniforme, considerarmos ela como uma composição formada pela média de uma amostra grande em que cada componente da amostra possui distribuição uniforme, então esta nova variável aleatória pode ser escrita como

$$F(x) = \frac{\sum_{j=1}^n f(x_j)}{n}, \quad (1.2)$$

em que f_i denota uma variável aleatória que possui distribuição uniforme e n é o número de variáveis somadas.

Quando tratamos dessa média ao invés de uma amostragem individual e plotamos o seu histograma, como foi feito no caso anterior, se observa um comportamento totalmente diferente. De fato, ao invés de termos algo próximo da densidade de probabilidade de uma distribuição uniforme, obtemos uma curva que mais se assemelha a um sino. Essa distribuição em formato de sino é chamada de curva de Gauss ou gaussiana, e é a mesma curva gerada pela densidade de probabilidade de uma distribuição normal.

Na Fig. Figura 3 podemos observar o histograma gerado por 10000 amostras que são obtidas a partir da distribuição dada pela Eq. (1.2). Notamos que ela possui o mesmo formato caso tivesse sido gerada por uma distribuição normal.

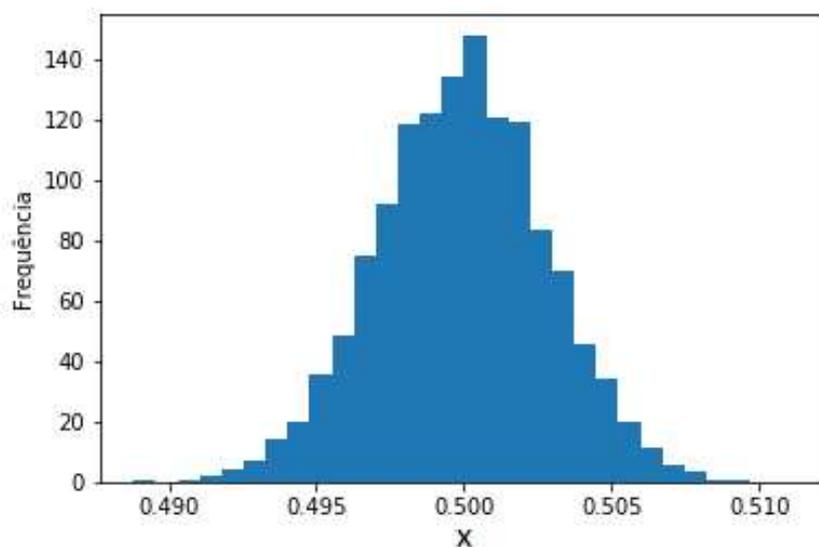


Figura 3: Histograma gerado pela variável aleatória definida pela Eq. (1.2) com $n = 10000$.

O formato dessa curva é obtido pelo TCL, isto é, esse teorema demonstra que a densidade de probabilidades gerada pela soma de um número grande de eventos tende à

forma gaussiana quando as condições mencionadas acima são satisfeitas.

Esta característica não é algo particular da distribuição uniforme. De fato, para mostrar isso vamos considerar uma distribuição exponencial que possui a forma

$$f(x) = e^{-x}. \quad (1.3)$$

Quando são realizados os mesmos passos feitos anteriormente, obtemos os mesmos resultados, como pode ser observado na Fig. Figura 6. Na Fig. Figura 4 mostramos o gráfico da densidade de probabilidade para a distribuição exponencial.

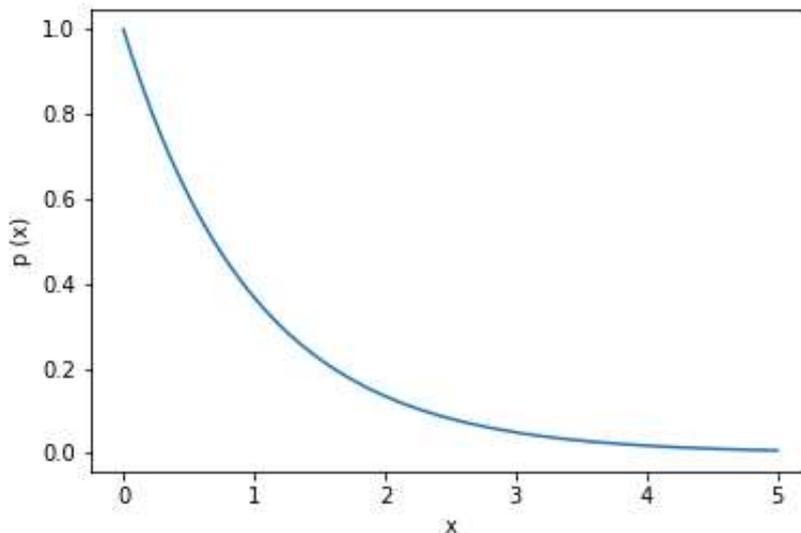


Figura 4: Densidade de probabilidade da distribuição exponencial definida na Eq. (1.3).

Na Fig. Figura 5 temos a frequência gerada por amostras individuais, assim como foi feito na Fig. Figura 2. Agora, redefinindo uma nova variável aleatória com uma distribuição que é composta pela média de n distribuições dadas pela Eq. (1.3), obtemos

$$P(x) = \frac{\sum_{i=1}^n p(x_i)}{n}, \quad (1.4)$$

que é essencialmente a mesma expressão da Eq. (1.2), porém com cada $p(x_i)$ seguindo a distribuição obtida a partir da Eq. (1.3).

Na Fig. Figura 6 mostramos o histograma gerado pela Eq. (1.4) com 10000 amostras. Observamos a mesma forma de sino que obtivemos na Fig. Figura 3. Isso acontece devido ao fato de ambas as distribuições seguirem o TCL. Na próxima seção desenvolveremos

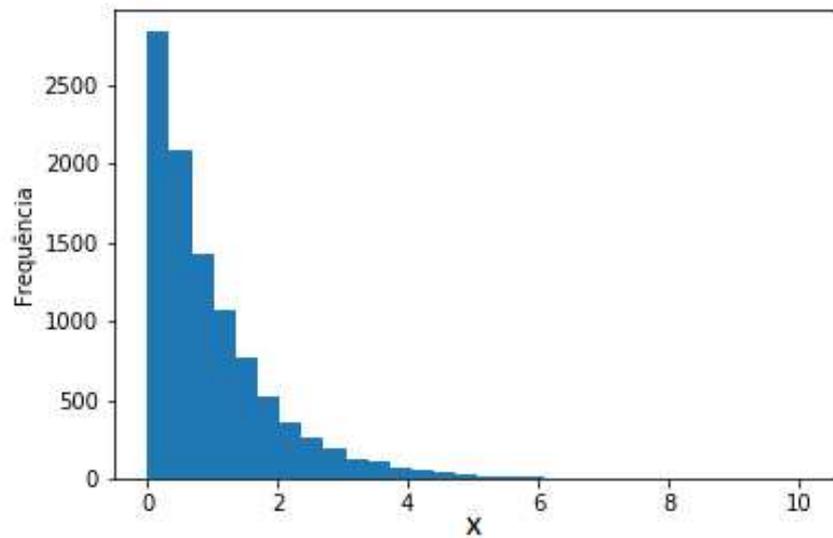


Figura 5: Histograma obtido a partir de 10000 amostras da distribuição exponencial definida pela densidade de probabilidade da Eq. (1.3).

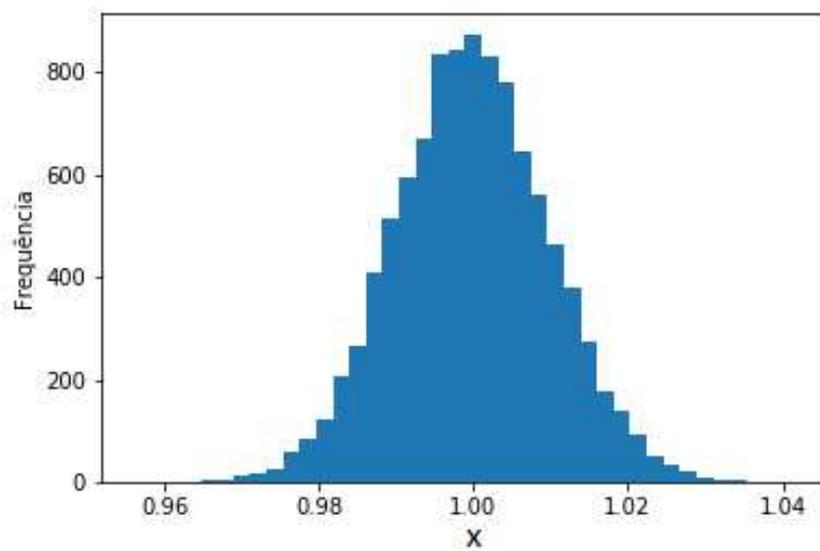


Figura 6: Histograma gerado pela densidade de probabilidade definida pela Eq.1.4 com $n = 10000$.

alguns conceitos matemáticos necessários para a demonstração do TCL.

1.2.2 Conceitos Básicos TCL

Antes de realizar a demonstração do TCL, precisaremos de alguns conceitos básicos de estatística. Como observamos na seção anterior, o TCL surge quando temos uma variável aleatória na forma

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Se o conjunto de variáveis aleatórias X_i satisfaz as condições apresentadas na seção anterior, então o TCL garante que a distribuição de Y_n tende para uma distribuição normal no limite $n \rightarrow \infty$.

Como observamos acima, Y_n é uma variável aleatória formada pela composição de outras variáveis aleatórias X_i . Usualmente se tem conhecimento da densidade de probabilidade $w(x)$ associada a X_i , mas é importante saber como obter a densidade de probabilidade conjunta relacionada com Y_n .

Vamos iniciar a análise com o caso particular em que $n = 3$. Podemos utilizar nesse caso a analogia com a escolha de um ponto dentro de um intervalo em uma reta. Para $n = 3$, no entanto, precisamos considerar a probabilidade de escolher um ponto dentro de um cubo.

Como foi dito anteriormente, consideremos que a probabilidade de escolher um ponto em um intervalo no eixo x seja $w(x)dx$. Supondo que a mesma distribuição também se aplique ao eixo y , a probabilidade correspondente será $w(y)dy$. De forma similar, $w(z)dz$ é a respectiva probabilidade de escolha de um ponto em um intervalo no eixo z . Se as variáveis x , y e z são estatisticamente independentes, a probabilidade conjunta de escolher um ponto dentro do cubo formado pela união destes três intervalos será dada pelo produto das respectivas probabilidades individuais [22], isto é,

$$P(x, y, z) = w(x)w(y)w(z)dx dy dz.$$

Teremos então que a densidade de probabilidade associada à escolha de um ponto no cubo será $w(x, y, z) = w(x)w(y)w(z)$.

Generalizando o resultado anterior para um sistema com n variáveis aleatórias x_i com distribuições associadas $p(x_i)$, temos que a densidade de probabilidade $w(Y)$ associada

ada à variável aleatória Y_n é

$$w(Y) = \prod_{i=1}^n p(x_i). \quad (1.5)$$

Assim como observamos no exemplo anterior, para esse resultado ser válido as variáveis aleatórias individuais precisam ser estatisticamente independentes [22].

De posse da função densidade de probabilidade, podemos introduzir o conceito de função característica, a qual constitui uma forma alternativa de realizar uma descrição estatística de uma variável aleatória de modo a tornar mais simples a demonstração do TCL. De fato, utilizando a função característica é possível descrever a variável aleatória a partir dos momentos da sua distribuição.

A função característica pode ser obtida a partir da transformada de Fourier da função densidade de probabilidade, isto é,

$$G(k) = \int_{-\infty}^{\infty} w(X) e^{ikx} dx, \quad (1.6)$$

em que $G(k)$ é a função característica e $w(x)$ a função densidade de probabilidade original da variável aleatória x . É possível também obter a densidade de probabilidade relacionada a essa variável aleatória a partir da função característica fazendo o processo de transformação inverso,

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx} G(k) dk}{2\pi}. \quad (1.7)$$

Retornando para a Eq. (1.6), podemos realizar uma expansão em série de e^{ikx} obtendo

$$G(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx w(x) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ikx)^j}{j!}. \quad (1.8)$$

Utilizando a definição do n -ésimo momento de uma distribuição [47], dado por

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) x^n dx, \quad (1.9)$$

e substituindo a Eq. (1.9) na Eq. (1.8), obtemos

$$G(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ik)^j}{j!} \langle x^j \rangle. \quad (1.10)$$

De posse desses poucos conceitos, já é possível desenvolver a demonstração matemática

do TCL.

1.2.3 Demonstração

Para iniciar a demonstração do TCL, primeiramente definiremos a variável aleatória que iremos tratar, a qual é dada por

$$Y_N = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)}{N}. \quad (1.11)$$

Como observado acima, Y_N é uma variável aleatória definida a partir da média de um conjunto de N variáveis aleatórias x_i independentes e identicamente distribuídas com média $\langle x \rangle$. Na demonstração a seguir utilizaremos a transformação de variáveis $Z_i = x_i - \langle x \rangle$, que é útil para facilitar os cálculos. De fato, todas as contas podem ser feitas em termos das variáveis Z_i com média nula. É importante notar que a densidade de probabilidade associada à variável aleatória Y_N não sofre alteração devido a essa mudança, uma vez que $w(x_i) = w(Z_i)$.

Utilizando a variável aleatória Z_i e a Eq. (1.8) temos que

$$\begin{aligned} G_Z(K) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx w(x) e^{\frac{ik(x-\langle x \rangle)}{N}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx w(x) \sum_{j=1}^{\infty} \left(ik \frac{x - \langle x \rangle}{N} \right)^j / j! \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx w(x) \left(1 + ik \frac{x - \langle x \rangle}{N} - \frac{k^2}{2} \left(\frac{x - \langle x \rangle}{N} \right)^2 + \dots \right) \\ &= \left(1 + ik \frac{\langle x \rangle - \langle x \rangle}{N} - k^2 \frac{\langle x^2 \rangle + \langle x \rangle^2 - 2\langle x \rangle^2}{2N^2} + \dots \right) \\ &= \left(1 - k^2 \frac{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}{2N^2} + \dots \right), \end{aligned} \quad (1.12)$$

em que foi feita a expansão da exponencial em torno do $k(x - \langle x \rangle)/N = 0$. Com isso temos uma expressão que é válida para valores de k próximos de zero. Utilizando a definição de variância,

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad (1.13)$$

em conjunto com o limite $N \rightarrow \infty$, observamos que os termos acima de segunda ordem

na Eq. (refeq:1.12) não são relevantes, de modo que

$$G_Z(K) = \left(1 - \frac{k^2 \langle (\Delta x)^2 \rangle}{2N^2}\right). \quad (1.14)$$

Como as variáveis aleatórias $Z_i = x_i - \langle x \rangle$ são estatisticamente independentes, obtemos a função característica de Y_N como o produtório das funções características $G_{Z_i}(K)$, de modo que

$$G_Y(k) = \left(1 - \frac{k^2 \langle (\Delta x)^2 \rangle}{2N^2}\right)^N. \quad (1.15)$$

Aplicando o log de ambos os lados da equação acima,

$$\log(G_Y(k)) = N \log \left(1 - \frac{k^2 \langle (\Delta x)^2 \rangle}{2N^2}\right), \quad (1.16)$$

utilizando que $\log(1 - x) \approx -x$ para $|x| \ll 1$ e substituindo na Eq. (1.16) obtemos

$$\begin{aligned} \log(G_Y(k)) &= -\frac{k^2 \langle (\Delta x)^2 \rangle}{2N}, \\ G_Y(k) &= e^{-\frac{k^2 \langle (\Delta x)^2 \rangle}{2N}}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Utilizando agora a Eq. (1.7) para obter a função densidade de probabilidade a partir da função característica da Eq. (1.17), ficamos com

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} e^{-\frac{k^2 \langle (\Delta x)^2 \rangle}{2N}}}{2\pi} dk \\ &= \sqrt{\frac{N}{2\pi \langle (\Delta x)^2 \rangle}} e^{-\frac{Nx^2}{2\langle (\Delta x)^2 \rangle}}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Desse modo, obtemos a expressão da distribuição normal, em que não especificamos qual distribuição original foi utilizada. Observamos que nessa demonstração foi necessário assumir que os primeiros momentos da distribuição original são finitos, fazer $N \rightarrow \infty$ e considerar as variáveis aleatórias estatisticamente independentes. No nosso caso obtivemos uma gaussiana com média nula devido à escolha da variável aleatória feita acima. O seu desvio padrão é dado por

$$\langle (\Delta Y_N)^2 \rangle^{1/2} = \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle^{1/2}}{\sqrt{N}}. \quad (1.19)$$

O desvio padrão possui relação com o deslocamento quadrático médio de um caminhante aleatório em função do número N de passos dados. De fato, se representarmos o deslocamento do caminhante no passo i pela variável Z_i com distribuição que segue o TCL, então $\langle (\Delta Y_N)^2 \rangle^{1/2} \propto N^{1/2}$. Essa relação caracteriza o dito regime de difusão normal ou padrão. Para regimes de difusão anômala, observamos que $\langle (\Delta Y_N)^2 \rangle^{1/2} \propto N^\nu$, com $\nu > 1/2$ para o regime superdifusivo e $\nu < 1/2$ para o subdifusivo.

Como comentamos, na demonstração acima foi utilizada a variável $Y_N = \frac{\sum_i=(x_i-\langle x \rangle)}{N}$ para obtermos uma gaussiana centrada em zero. Se não considerarmos o termo de $\langle x \rangle$ na definição de Y_N , simplesmente obtemos uma gaussiana centrada em $\langle x \rangle$, como dito anteriormente.

Na próxima seção será discutido brevemente o TCL generalizado, que é válido quando os primeiros momentos da distribuição original não são finitos.

1.3 Teorema central do limite generalizado

Na seção anterior discutimos sobre o TCL, responsável pelo fato da distribuição da soma de um número grande de variáveis aleatórias independentes, com primeiro e segundo momentos finitos, convergir para uma distribuição normal. Devido ao fato de diversos sistemas satisfazerem essas condições, é possível encontrar distribuições normais de forma tão frequente na natureza.

Entretanto, o que acontece se não for necessário impor que o primeiro e o segundo momentos sejam finitos? Para qual distribuição essa soma converge, ou mesmo se ocorre a convergência para alguma classe de distribuições [40]? O responsável por responder essas perguntas foi o matemático francês Paul Pierre Lévy. Ele mostrou que a densidade de probabilidade da soma de variáveis aleatórias independentes com distribuição exibindo o segundo momento infinito converge para a chamada família de distribuições α -estáveis de Lévy [40, 36], que estudaremos nessa e nas próximas seções. Mas, primeiramente, o que é uma distribuição estável?

Podemos dizer que uma distribuição de probabilidades é estável quando a soma de diversas variáveis aleatórias que seguem essa distribuição também segue a mesma

distribuição, a menos de um fator de escala, isto é,

$$\sum_{i=1}^N a_i x_i \stackrel{d}{=} b_N x + d_N, \quad (1.20)$$

em que a_i são constantes positivas e x_i e x são variáveis aleatórias que seguem a mesma distribuição. Se essa relação é válida para dados b_N e d_N positivos, então a distribuição que rege x_i e x é dita estável. O símbolo $\stackrel{d}{=}$ acima significa que os dois lados da equação são regidos pela mesma distribuição.

A distribuição mais comum que satisfaz esse requisito é a distribuição normal, já que, como vimos na seção anterior sobre o TCL, uma variável dada pela soma de várias variáveis aleatórias com distribuição gaussiana também é distribuída gaussianamente. O matemático francês Augustin-Louis Cauchy encontrou em 1853 outras distribuições estáveis, além da distribuição normal, que podem ser obtidas a partir da função característica

$$G_N(k) = e^{-N|k|^\alpha}. \quad (1.21)$$

Desta família de funções características, a que ficou mais famosa, com exceção da gaussiana com $\alpha = 2$, foi o caso em que $\alpha = 1$, que possui densidade de probabilidade dada por

$$\begin{aligned} p_N(x) &= \frac{1}{\pi N} \frac{1}{1 + (x/N)^2} \\ &= \frac{1}{N} p_1\left(\frac{x}{N}\right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Essa expressão é conhecida como distribuição de Cauchy, sendo famosa também por ser um dos poucos casos de distribuições estáveis que possuem expressão analítica em termos de funções elementares. Os outros dois casos são a própria distribuição gaussiana e a distribuição de Lévy com $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$ (ver a definição do parâmetro β a seguir). Na expressão acima é possível observar a relação entre a adição de N variáveis aleatórias e a distribuição correspondente gerada [36, 40].

Algo muito interessante sobre as distribuições obtidas por Cauchy é que apesar de serem estáveis elas não possuem o segundo momento definido, o que as faz não serem governadas pelo TCL. Essas distribuições estáveis que possuem o segundo momento divergente obedecem o chamado TCL generalizado, discutido a seguir.

Em 1930 Lévy generalizou o resultado acima mostrando que tanto a distribuição

de Cauchy quando a distribuição normal são casos limites de uma família mais ampla de distribuições estáveis, chamadas de distribuições α -estáveis de Lévy, as quais podem ser obtidas a partir da função característica [40],

$$\begin{aligned}\phi(k) &= e^{-|k|^\alpha(1-i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2})\text{sgn}(k))}, & \alpha \neq 1, \\ &= e^{-|k|(1+i\beta\frac{\pi}{2}\text{sgn}(k)\log(|k|))}, & \alpha = 1,\end{aligned}\tag{1.23}$$

em que $0 < \alpha \leq 2$, $-1 < \beta < 1$ e $\text{sgn}(x)$ é a função sinal, que possui valor $+1$ se x for positivo e -1 se x for negativo. O parâmetro β é utilizado como medida da simetria da distribuição. Por exemplo, distribuições simétricas em que $p(x) = p(-x)$ são obtidas com $\beta = 0$. Com a expressão acima temos uma generalização das distribuições estáveis, sendo $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$ os casos particulares correspondentes, respectivamente, às distribuições de Cauchy e gaussiana.

Apesar de não existirem resultados analíticos fechados em termos de funções elementares para as densidades de probabilidades $p(x)$ de Lévy obtidas a partir da transformada de Fourier da função característica acima, além dos três casos mencionados acima e os obtidos em [14, 15, 52], podemos obter uma expressão para o seu limite assintótico,

$$p(x) \propto \Gamma(\alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) x^{-(\alpha+1)}, \quad x \rightarrow \infty,\tag{1.24}$$

como discutiremos na próxima seção, em que $0 < \alpha < 2$ e Γ denota a função gama. Observamos, portanto, que no regime assintótico as distribuições de Lévy (com exceção do caso limite gaussiano) decaem com x em termos de uma lei de potência com expoente $\alpha + 1$. Esse fato será amplamente utilizado nas análises desta dissertação.

Nessa seção vimos a existência de distribuições estáveis com índice de Lévy $0 < \alpha < 2$ que possuem segundo momento divergente e satisfazem o TCL generalizado. Vimos também que a distribuição gaussiana, governada pelo TCL, corresponde ao caso limite em que $\alpha = 2$. O fato da família de distribuições α -estáveis de Lévy incluir tanto as distribuições estáveis que satisfazem o TCL quanto as que satisfazem o TCL generalizado é de suma importância, pois ao trabalhar com as distribuições de Lévy conseguimos encontrar diferentes regimes de difusão variando apenas o parâmetro α . De fato, enquanto para $\alpha = 2$ temos um regime difusivo normal, para $0 < \alpha < 2$ o regime superdifusivo emerge, o que será essencial para a aplicação da distribuição de Lévy em modelos de distribuições

de tamanhos de passos em buscas aleatórias.

Na próxima seção serão discutidos mais aspectos da distribuição de Lévy, principalmente algumas características relacionadas com a sua forma assintótica do tipo lei de potência.

1.4 Distribuição de Lévy

A distribuição de Lévy tem sido utilizada na modelagem de problemas em diversas áreas, como, por exemplo, na análise da estatística dos intervalos de tempo necessários para recordar palavras de uma dada categoria [51]. Nesse trabalho foi encontrado que tais intervalos seguem uma distribuição de Lévy, e que a eficiência na recuperação da memória das palavras é otimizada quando $\alpha \approx 2$.

Em outro exemplo [43] foi encontrado que a distribuição de Lévy também rege a distribuição de intervalos de tempo entre duas batidas do coração. Nesse caso, dependendo do valor de α foi possível determinar o quão saudável encontra-se o coração.

Além destas, existem também aplicações diversas em outras áreas, tais como em lasers aleatórios [25], cintilações interestelares [6] e a inversão dos polos magnéticos da Terra [13], além de inúmeros outros sistemas.

Estes sistemas são bem descritos pela distribuição de Lévy graças ao fato desta ser mais adequada para lidar com eventos estatísticos raros, devido ao seu decaimento assintótico mais devagar com uma lei de potência quando $0 < \alpha < 2$, ao invés de uma exponencial, como vimos na seção anterior. Essa característica no decaimento do tipo lei de potência da distribuição é comumente chamada na literatura de cauda pesada ou cauda longa, “heavy tail” ou “long tail” [24].

Na Fig. Figura 7 mostramos uma comparação entre a distribuição normal ($\alpha = 2$) e de Cauchy ($\alpha = 1$). Nela observamos que a distribuição normal decai muito mais rapidamente que a de Cauchy, que possui uma cauda longa ou pesada.

Conforme discutido na seção anterior, devido ao comportamento superdifusivo de um caminhante aleatório com distribuição de tamanhos de passos dada pela distribuição de Lévy, esta tem sido largamente utilizada para modelar diversos problemas de buscas aleatórias. Em particular, um contexto em que essa modelagem teve especial sucesso foi o problema da busca de alimentos por animais em ambientes escassos [63].

Nesse contexto, o comportamento superdifusivo é responsável pelo fato do animal

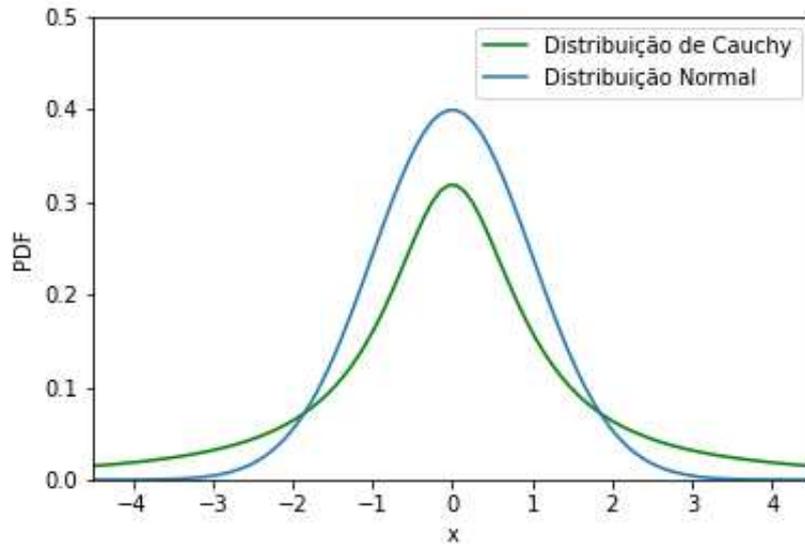


Figura 7: Comparação entre as distribuições normal ($\alpha = 2$) e de Cauchy ($\alpha = 1$). A linha contínua azul ilustra a distribuição normal, com função densidade de probabilidade (ou “probability density function”, PDF) dada por $p(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, enquanto a linha contínua verde denota a distribuição de Cauchy com PDF $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

retornar um número menor de vezes a um lugar que já foi visitado anteriormente, quando comparado com a dinâmica difusiva, aumentando assim a eficiência da busca. De fato, ao longo dos anos tem-se observado que diversas espécies de animais adotam a distribuição de Lévy de tamanhos ou durações de passos em processos de busca [64]. Esse resultado motivou o desenvolvimento da chamada “Lévy flight foraging hypothesis” [64], que será mais discutida mais adiante.

Quando consideramos deslocamentos aleatórios realizados com uma distribuição de tamanhos de passos de Lévy, temos essencialmente duas possibilidades: os voos de Lévy (ou Lévy flights) e as caminhadas de Lévy (ou Lévy walks) [55, 56, 68]. Nos voos de Lévy o caminhante dá saltos instantâneos. Devido a esse fato, o caminhante se locomove por vários pontos do espaço sem ter um intervalo de tempo definido para esses deslocamentos. Como não existe uma relação definida entre tempo e distância percorrida não é possível obter o deslocamento médio quadrático em função do tempo, e por essa razão existem dificuldades de aplicar rigorosamente os voos de Lévy a problemas realísticos.

Por outro lado, nas caminhadas de Lévy o caminhante realiza o seu percurso com uma dada velocidade, que pode ser constante. Devido a isso é possível estabelecer uma relação matemática entre o seu deslocamento médio quadrático e o tempo transcorrido

ao longo da caminhada. Em particular, se assumimos que a velocidade do caminhante é $v = 1$ então o tempo e a distância percorrida em cada passo são equivalentes.

Na seção anterior mostramos como tratar a distribuição de uma variável aleatória Y_N dada por uma composição de N outras variáveis aleatórias x_i . O formalismo é exatamente o mesmo se consideramos a variável Y_N como a soma $\ell = \sum_{i=1}^N x_i$ dos deslocamentos x_i realizados em N passos de um caminhante aleatório. Nesse caso, assumimos que o deslocamento de cada passo possui distribuição segundo a função característica ϕ_i , a qual é idêntica para todos os passos. Temos então que a densidade de probabilidade $p(\ell, N)$ é dada pela inversa da transformada de Fourier da composição das N funções características, como foi feito na Eq. (1.7), isto é,

$$\begin{aligned} p(\ell, N) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik \sum_{i=1}^N x_i} \phi(k)^N dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\ell} \phi(k)^N dk. \end{aligned} \quad (1.25)$$

No caso da distribuição de Lévy, a função característica é dada pela Eq. (1.23),

$$\begin{aligned} \phi(k) &= e^{-|k|^\alpha (1 - i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \text{sign}(k))}, & \alpha \neq 1, \\ &= e^{-|k| (1 + i\beta \frac{\pi}{2} \text{sign}(k) \log(|k|))}, & \alpha = 1. \end{aligned}$$

Assumindo agora que o caminhante não tem uma preferência de direção, o que faz com que $\beta = 0$, escrevemos

$$\phi(k) = e^{-\ell_0^\alpha |k|^\alpha}, \quad (1.26)$$

onde generalizamos a expressão anterior para incluir um fator de escala ℓ_0 que terá um papel importante no estudo realizado adiante das distribuições do tipo lei de potência que constituem o limite assintótico da Lévy, como vimos. Substituindo a Eq. (1.26) na Eq. (1.25) obtemos

$$p(\ell, N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\ell} e^{-N\ell_0^\alpha |k|^\alpha} dk. \quad (1.27)$$

A parte imaginária da integral será nula devido à paridade ímpar do seu integrando. Na parte real temos uma função par no integrando, de modo que

$$p(\ell, N) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(k\ell) e^{-N\ell_0^\alpha |k|^\alpha} dk. \quad (1.28)$$

Expandindo o integrando em série de Taylor com $0 < \alpha < 2$ e definindo

$$\mu = \alpha + 1,$$

de modo que $1 < \mu < 3$, obtemos que o termo principal da distribuição de Lévy no limite assintótico de grandes ℓ é dado por

$$p(\ell, N) = \frac{N\Gamma(\mu) \sin(\pi(\mu - 1)/2)}{\pi\ell_0} \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^\mu + \mathcal{O}(\ell^{-2\mu+1}), \quad (1.29)$$

em que Γ é a função gama. Portanto, podemos observar na Eq. (1.29) a presença do decaimento assintótico da distribuição de Lévy na forma de uma lei de potência.

Para efeito de cálculo, é bem mais fácil lidar com distribuições do tipo lei de potência do que com as distribuições de Lévy, uma vez que, como comentado, estas possuem forma fechada escrita em termos de funções elementares apenas nos casos $\alpha = 1$ (Cauchy) e $\alpha = 2$ (gaussiana) quando $\beta = 0$. Por esse motivo, adotaremos ao longo dessa dissertação a distribuição de lei de potência para os tamanhos dos passos do caminhante aleatório, de modo que, quando aqui nos referirmos à distribuição de Lévy, na verdade estaremos utilizando a distribuição

$$\begin{aligned} p(\ell) &= A_\ell \frac{1}{|\ell|^\mu}, & |\ell| > \ell_0, \\ p(\ell) &= 0 & |\ell| < \ell_0, \end{aligned} \quad (1.30)$$

em que A_ℓ é a constante de normalização. O truncamento observado acima para valores de $|\ell|$ menores que ℓ_0 é necessário para normalizar a distribuição. Além disso, como trataremos de buscas unidimensionais, o sinal de ℓ é um indicador do sentido que o caminhante irá seguir: se o sinal for negativo o caminhante segue para a esquerda e se for positivo para a direita. A escolha do sentido esquerda ou direita é feita de modo equiprovável, isto é, $p(\ell) = p(-\ell)$, de modo que justificamos a escolha $\beta = 0$ para o parâmetro de assimetria da distribuição de Lévy.

Após o cálculo da constante de normalização (ver também o próxima capítulo), a PDF para um passo de tamanho ℓ é escrita como

$$p(\ell) = \frac{(\mu - 1) \ell_0^{\mu-1}}{2 |\ell|^\mu}, \quad |\ell| > \ell_0. \quad (1.31)$$

Observamos ainda que a expressão acima corresponde à escolha efetiva $N^{-1} = \frac{2\Gamma(\alpha+1)\sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{\pi\alpha}$

na Eq. (1.29). Alguns casos particulares relevantes são o regime balístico com $\mu \rightarrow 1$, em que a caminhada é praticamente formada por longos passos em linha reta, o regime de Cauchy, com $\mu = 2$, em que alguns poucos longos passos se alternam com muitos pequenos deslocamentos, e o limite $\mu = 3$ formado por pequenos deslocamentos sem longos passos, em que a distribuição de lei de potência possui variância finita, sendo portanto governada pelo TCL.

1.5 Distribuição hiperexponencial

Durante os anos 1980 foi descoberto [29] que as distribuições de Lévy podem ser obtidas por uma composição de infinitas distribuições que obedecem ao TCL, ou seja, que possuem primeiro e segundo momentos finitos. Foi demonstrado também que ao se escolher corretamente os parâmetros da composição é possível gerar caminhadas de Lévy a partir de caminhadas de Weierstrass definidas através da composição de infinitas PDFs para o tamanho dos passos do caminhante governadas pelo TCL [29].

Uma das PDFs de tamanhos de passos que podem gerar uma caminhada de Weierstrass é a distribuição hiperexponencial,

$$p(\ell) = \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\tau_i} e^{-\frac{|\ell|}{\tau_i}} \quad (1.32)$$

em que os comprimentos característicos τ_i estão associados à persistência, discutida anteriormente no contexto das caminhadas aleatórias correlacionadas, e que corresponde à tendência do caminhante de seguir na mesma direção. Os parâmetros w_i são os pesos estatísticos relacionados a cada exponencial, de modo que $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ [12]. Para se obter rigorosamente a distribuição de Lévy é necessário fazer $N \rightarrow \infty$. Observamos, portanto, que esta caminhada de Weierstrass é composta de $N \rightarrow \infty$ escalas definidas pelos respectivos comprimentos característicos τ_i . Esse resultado é consistente com o fato de que as caminhadas de Lévy também possuem infinitas escalas de comprimento.

Em 2011 foi mostrado [32] que os dados dos movimentos de mexilhões concordavam bem com o padrão gerado por uma caminhada de Lévy. Para chegar a esse resultado, os autores compararam a estatística dos tamanhos dos passos empíricos com caminhadas de Lévy e do tipo browniano simples. Entretanto, após a publicação este resultado foi

questionado com o argumento de que, quando outros tipos de caminhadas eram comparadas com os dados empíricos, a que melhor se adequava era uma caminhada aleatória do tipo hiperexponencial com 3 escalas [34]. Em 2014 a mesma conclusão foi obtida em [49], trabalho este também explicou o movimento de mexilhões da espécie *Mytilus Edulis* a partir de distribuições hiperexponenciais com 3 escalas.

Os resultados das referências [34] e [49] estão em consonância com alguns questionamentos existentes na literatura sobre se os animais realmente utilizam caminhadas de Lévy para se locomoverem [48, 50, 45, 19].

Apesar destes questionamentos, uma parte considerável dos pesquisadores que trabalham com a ecologia do movimento (“movement ecology”) acredita que diversas espécies de animais de fato apresentam movimentos que possuem distribuições de tamanhos ou durações de passos com comportamentos próximos ao da distribuição de Lévy [49, 33, 5], em concordância, portanto, com a “Lévy flight foraging hypothesis” mencionada anteriormente. Observamos nesse sentido que muitas vezes o termo “Lévy-like” é empregado, uma vez que, a rigor, distribuições de Lévy para tamanhos de passos com variância infinita não são realisticamente viáveis. O que então ocorre nessa situação é que os tamanhos dos passos dos animais são bem descritos por uma distribuição de Lévy ou por uma lei de potência até uma certa escala máxima de comprimento, que corresponde ao limite biológico natural da espécie.

Nesta dissertação utilizaremos as distribuições hiperexponenciais (1.32) para os tamanhos dos passos com uma ($N = 1$) e duas ($N = 2$) escalas, a que chamaremos, respectivamente, de distribuição exponencial simples e distribuição exponencial dupla. A distribuição exponencial simples é dada por

$$\begin{aligned} p(\ell) &= \frac{1}{\tau} e^{-\frac{|\ell|}{\tau}}, & |\ell| > \ell_0, \\ p(\ell) &= 0, & |\ell| < \ell_0, \end{aligned} \tag{1.33}$$

e a distribuição exponencial dupla por

$$\begin{aligned} p(\ell) &= \frac{w_1}{\tau_1} e^{-\frac{|\ell|}{\tau_1}} + \frac{w_2}{\tau_2} e^{-\frac{|\ell|}{\tau_2}}, & |\ell| > \ell_0, \\ p(\ell) &= 0, & |\ell| < \ell_0, \end{aligned} \tag{1.34}$$

em que o tamanho mínimo do passo ℓ_0 se faz necessário no nosso estudo para poder

comparar diretamente com as distribuições de Lévy (lei de potência) com passo mínimo ℓ_0 .

Na próxima seção discutiremos com mais detalhes as ideias por trás da “Lévy flight foraging hypothesis”.

1.6 Lévy flight foraging hypothesis

Durante os anos 1990, após o sucesso da aplicação das caminhadas de Lévy na modelagem de diversos sistemas, surgiu a ideia de que processos evolucionários adaptativos fizeram com que animais tendam a se movimentar da forma mais eficiente possível para obter alimentos com base em distribuições de Lévy para os tamanhos ou durações dos passos [64]. Essa ideia constitui o cerne da “Lévy flight foraging hypothesis”.

Definimos o regime não-destrutivo da busca aleatória em ambientes escassos quando há a possibilidade de obter alimento a partir da revisita a um sítio alvo previamente já visitado. Essas revisitas conferem uma vantagem em termos da eficiência da busca, definida como o número de sítios encontrados dividido pelo tamanho total da caminhada. Do ponto de vista prático, nas buscas não-destrutivas o caminhante reinicia o processo de procura a partir de uma pequena distância ao último sítio alvo visitado. Isto é, as buscas não-destrutivas constituem uma situação em que as distâncias iniciais do caminhante aos sítios alvos são bastante assimétricas, com uma das distâncias sendo bem menor que as demais. No artigo seminal [62] foi mostrado que nas buscas não-destrutivas em ambientes escassos em uma e duas dimensões a distribuição de tamanhos de passos que otimiza a eficiência da busca quando o caminhante não possui qualquer informação sobre o espaço de busca é a distribuição de Lévy com $\alpha \approx 1$, ou equivalentemente uma lei de potência com $\mu = \alpha + 1 \approx 2$.

Segundo a “Lévy flight foraging hypothesis”, essa estratégia ótima com $\mu \approx 2$ surgiu através de sucessivas adaptações que os animais desenvolveram de modo a se movimentar de acordo com a forma mais eficiente de buscar alimentos [64].

Por outro lado, nas buscas destrutivas em ambientes escassos assumimos que inicialmente o animal está aproximadamente equidistante dos sítios alvos, de modo que após um sítio alvo ser visitado ele é destruído e um outro sítio alvo é criado aleatoriamente em outro local para manter a densidade de sítios constante. Com isso, não há a vantagem de retornar a um sítio previamente visitado e, como resultado, a distribuição de tamanhos de passos que otimiza a busca destrutiva é a de Lévy com $\alpha \rightarrow 0$ ou $\mu \rightarrow 1$, ou seja, a

melhor estratégia de busca no caso destrutivo é se movimentar de forma balística.

Quando, por outro lado, há abundância de alimentos, o animal frequentemente encontra sítios alvos nos seus arredores. Nesse caso, devido à facilidade de encontrar alimentos as distribuições de Lévy não apresentam vantagens significativas em relação ao movimento browniano com $\mu = 3$ [64].

Otimizações da busca aleatória em ambientes escassos em que o caminhante não possui informação sobre o espaço de busca também podem ocorrer com valores do expoente μ no intervalo $1 < \mu < 2$ quando a revisita a um sítio previamente visitado for permitida após um certo intervalo de tempo finito [46].

Recentemente, um estudo [12] de buscas aleatórias em uma dimensão mostrou que a eficiência da busca realizada com uma distribuição hiperexponencial de tamanhos de passos com $N = 2$ (exponencial dupla) e uma dada escolha de parâmetros $\{\tau_i, w_i\}$ pode ser superior à eficiência de Lévy com $\mu = 2$. Em função desse resultado, o objetivo do nosso trabalho nessa dissertação é fazer um estudo comparativo entre as eficiências máximas das buscas aleatórias realizadas com distribuições de tamanhos de passos do tipo exponencial, exponencial dupla e Lévy (lei de potência) no regime progressivamente mais escasso, à medida que aumentamos a distância L entre os sítios alvos. Nos capítulos seguintes apresentaremos o formalismo teórico que permitirá a realização desse estudo.

2 FORMALISMO TEÓRICO E MÉTODO DO OPERADOR INTEGRAL

2.1 Modelo de caminhada de busca aleatória

Neste capítulo, discutiremos a metodologia para calcular a distância média percorrida por um caminhante aleatório saindo de uma posição inicial x_0 em um espaço unidimensional de extensão L , até encontrar um dos sítios alvos localizados nas posições $x = 0$ e $x = L$ nos extremos do intervalo.

O formalismo será introduzido através de um modelo básico para lidar com o problema da busca aleatória [8, 62, 4]. Em seguida, realizaremos alguns cálculos no contexto da abordagem via o método do operador integral. Consideraremos, nesse caso, três distribuições de tamanhos de passos: exponencial simples, exponencial dupla e lei de potência (Lévy).

Comentamos ainda que a metodologia desenvolvida neste trabalho pode ser aplicada de maneira geral a outros problemas de buscas aleatórias em diversos contextos, embora aqui estejamos focados no problema da busca de alimentos por animais (“animal foraging”).

2.1.1 Definições iniciais

Considere que um caminhante aleatório (um animal) está a procura de sítios alvos (alimentos) em um intervalo unidimensional limitado de extensão L , com os sítios alvos localizados nas posições extremas, $x = 0$ e $x = L$. O caminhante inicia a busca a partir da posição $0 < x_0 < L$. Sem perda de generalidade, vamos considerar aqui que $x_0 \leq L/2$, de modo que x_0 também representa efetivamente a distância inicial ao sítio alvo mais próximo. De acordo com a discussão do capítulo anterior, devido à escassez de informações sobre a localização dos alimentos, o animal representado pelo caminhante aleatório não sabe qual direção seguir nem que tamanho de passo tomar [57, 30].

Durante essa dissertação utilizaremos o modelo baseado em [3, 62, 4]. O fato da busca aleatória se dar em apenas uma dimensão faz com que o animal só possa ir para a direita ou para a esquerda. Vale comentar entretanto que a unidimensionalidade do sistema não diminui o caráter geral do modelo, já que muitas características de um caminhante aleatório em um processo de busca independem da dimensão do espaço [3].

Ao iniciar a caminhada, o animal move-se de maneira estocástica até chegar a um dos sítios de alimentos, o qual é detectado pelo animal a uma distância r_v deste, o chamado raio de visão. Quando o alimento é detectado, o animal sai do regime estocástico de movimento e se desloca diretamente (isto é, balisticamente) para o sítio alvo [62, 4].

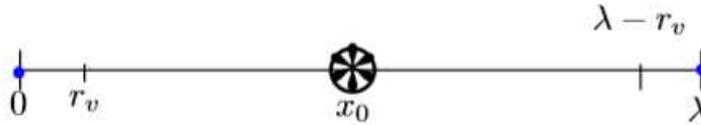


Figura 8: Esquema do espaço de busca do animal em uma dimensão, mostrando o intervalo em que o mesmo está confinado [41].

Na Fig. Figura 8 observamos a região unidimensional em que o animal está confinado, de acordo com o modelo descrito acima. Quando o animal atinge a posição $x = r_v$ ou $x = \lambda - r_v$, ele se movimenta balisticamente até o sítio alvo mais próximo. Na Fig. Figura 9 ilustramos a situação em duas dimensões: em (a) o animal segue diretamente para o sítio alvo de maneira balística, devido ao mesmo estar dentro do seu raio de visão, e em (b) ele se movimenta de forma estocástica durante o processo de busca aleatória propriamente dito.

Após o animal encontrar um sítio alvo, ele é reposicionado novamente à mesma distância inicial x_0 do sítio mais próximo e a busca é reiniciada com as mesmas regras descritas acima.

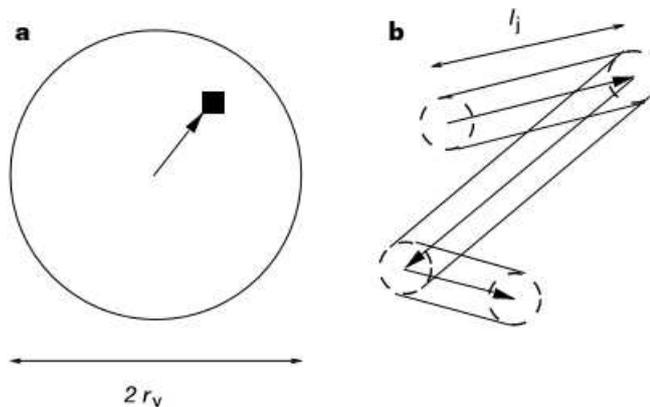


Figura 9: Esquema dos dois tipos diferentes de movimentos em uma busca aleatória em duas dimensões. (a) O sítio alvo (quadrado preto) está dentro do raio de visão r_v do animal, que então se movimenta de forma balística até ele. (b) O sítio alvo não está no raio de visão do animal, que precisa portanto realizar o movimento de busca estocasticamente. Imagem de [62].

No nosso modelo os passos do caminhante não possuem correlações entre si e

nem qualquer tendência direcional, ou seja, a probabilidade de seguir para direita ou para a esquerda em cada passo é de 50%. Por outro lado, os tamanhos dos passos terão distribuição dada por uma PDF $p(\ell)$. Estudos empíricos têm mostrado que a PDF mais adequada à busca depende fortemente da abundância de alimentos na região e da posição inicial do animal [57, 62, 4, 19]. Por exemplo, quando os alimentos são abundantes a escolha de uma PDF regida pelo TCL é suficiente para gerar uma boa estratégia de busca. Por outro lado, no regime escasso, que é de fato o foco dessa dissertação, distribuições de Lévy que permitem a existência de longos passos com probabilidades não desprezíveis surgem como alternativas relevantes.

Salientamos ainda que no presente modelo o animal possui probabilidade zero de se manter parado em um ponto, o que leva à definição de um tamanho mínimo de passo, ℓ_0 . Para realizar uma comparação justa entre as PDFs de tamanhos de passos dos tipos exponencial simples, exponencial dupla e lei de potência, assumimos nessa dissertação que o valor de ℓ_0 é o mesmo nos três casos.

Na Fig. Figura 10 ilustramos as trajetórias de um caminhante aleatório utilizando uma distribuição de tamanhos de passos do tipo lei de potência com $\mu = 3$ (movimento browniano, figura da esquerda) e $\mu = 2$ (tipo Cauchy, direita). No primeiro caso, praticamente apenas pequenos passos são realizados, varrendo uma pequena região do espaço de busca de modo bastante detalhado (observe a escala dos gráficos). No segundo, um grande número de pequenos passos se alterna com poucos, mas relevantes, grandes deslocamentos. Nesse caso, regiões mais distantes pode ser acessadas durante a busca.

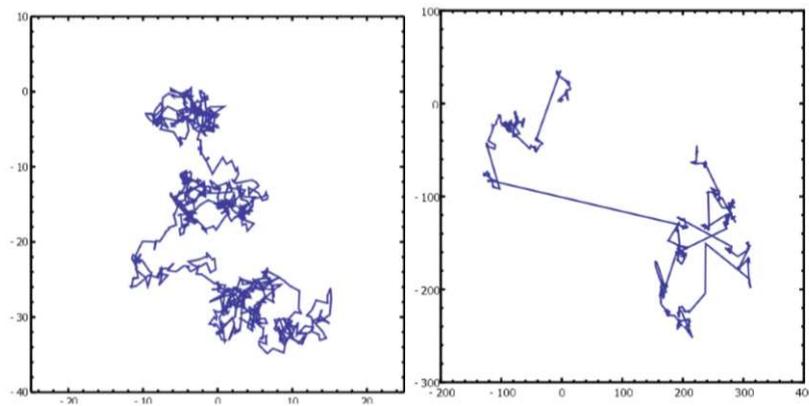


Figura 10: Caminhadas aleatórias bidimensionais: à esquerda a distribuição de tamanhos de passos é do tipo lei de potência com $\mu = 3$, que segue o TCL (movimento browniano), e à direita a distribuição possui expoente $\mu = 2$ (tipo Cauchy).

A realização de múltiplas caminhadas é necessária para calcular as médias rela-

cionadas ao nosso problema. A principal média em que estamos interessados é o distância média $\langle L \rangle$ percorrida entre dois encontros consecutivos de sítios alvos, uma vez que, como mostrado a seguir, a partir dela se pode calcular a eficiência η da busca via $\eta = 1/\langle L \rangle$ [62]. O valor destas médias irá depender de fatores como a geometria do espaço de busca, a PDF de tamanhos de passos e a posição inicial do caminhante.

Como mencionado, nessa dissertação assumimos que o espaço de busca é unidimensional. Comentamos que, apesar dessa escolha parecer limitante, as buscas aleatórias possuem algumas propriedades bem gerais que independem da dimensão espacial, e o ganho dessa escolha é que ela facilita consideravelmente as análises e cálculos.

A distância L entre os sítios alvos em um espaço unidimensional pode ser efetivamente interpretada como uma medida da abundância ou da densidade de alimentos. De fato, quanto maior o valor de L maior a escassez de alimentos. Em geral, em uma busca realizada em uma ou mais dimensões espaciais, a densidade de sítios alvos de alimentos está relacionada com o livre caminho médio λ da distribuição de sítios. Em uma dimensão, contudo, temos que $L = \lambda$, ou seja, o livre caminho médio da distribuição de sítios coincide com o próprio intervalo do espaço de busca disponível para o caminhante. Isso ocorre porque em uma dimensão se o caminhante dá um passo de tamanho maior que λ , ele necessariamente encontra um sítio alvo. Já em duas ou mais dimensões, um passo como este pode levar o caminhante a passar bastante perto de um sítio alvo mas sem encontrá-lo. Assim, em duas ou mais dimensões λ não coincide o comprimento linear do sistema, isto é, $L \neq \lambda$. Como nessa dissertação analisamos buscas unidimensionais, então a seguir consideraremos que $L = \lambda$.

Por outro lado, a PDF dos tamanhos de passos determina a dinâmica da caminhada aleatória de busca. Além disso, a posição inicial do animal define os dois tipos de regimes de busca discutidos acima: o destrutivo ou simétrico, em que $x_0 = L/2$, e o não-destrutivo ou assimétrico, em que $x_0 \ll L/2$. O primeiro se caracteriza pelos dois sítios alvos estarem localizados de forma equidistante do animal, enquanto que no segundo o animal está bem mais próximo de um dos sítios do que do outro. Na Fig. Figura 11 observamos esquematicamente os dois tipos de regimes de busca que o animal pode assumir: em (a) o regime assimétrico e em (b) o regime simétrico.

A eficiência da busca é definida como a razão entre o número total de alvos encon-

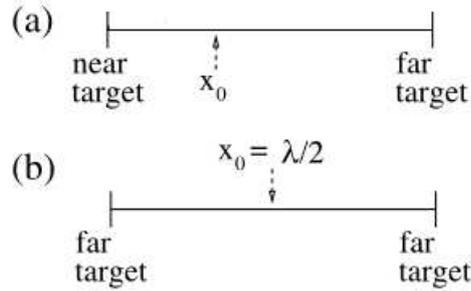


Figura 11: Regimes de busca do caminhante unidimensional [4]. (a) Regime não-destrutivo ou assimétrico, em que $x_0 \ll L/2$. (b) Regime destrutivo ou simétrico, com $x_0 = L/2$.

trados, N_{enc} , e a distância total percorrida pelo caminhante, L_{tot} [62],

$$\eta = \frac{N_{enc}}{L_{tot}}. \quad (2.1)$$

Por outro lado, podemos expressar a distância total percorrida como

$$L_{tot} = N_{enc} \langle L \rangle, \quad (2.2)$$

onde $\langle L \rangle$ denota a distância média percorrida pelo caminhante entre dois encontros consecutivos de sítios alvos, como definimos acima. Substituindo a Eq. (2.2) na Eq. (2.1), encontramos então que a eficiência da busca pode ser determinada diretamente a partir do conhecimento da distância média percorrida entre dois sítios alvos via

$$\eta = \frac{1}{\langle L \rangle}. \quad (2.3)$$

A partir desse resultado, observamos que o problema de encontrar a eficiência da busca é equivalente ao problema de determinar $\langle L \rangle$. A seguir apresentaremos o método do operador integral para calcular $\langle L \rangle$ em buscas unidimensionais.

2.1.2 Cálculo de $\langle L \rangle$ via método do operador integral

Esta subseção reproduz os resultados originalmente publicados em [7]. Mencionamos na subseção anterior que o caminhante sempre parte de uma posição inicial localizada entre os dois sítios alvos e que eventualmente, após n passos, um dos sítios alvos é encontrado. Considerando que o i -ésimo passo possui tamanho ℓ_i , então a distância percorrida pelo

caminhante após n passos é dada por

$$L_n = \sum_{i=1}^n |\ell_i|. \quad (2.4)$$

O uso acima do módulo nos tamanhos dos passos, $|\ell_i|$, deve-se ao fato de que passos com valores negativos de ℓ_i são realizados para a esquerda, enquanto que passos com ℓ_i positivo levam a deslocamentos para a direita, como discutimos. Eventualmente, caso um valor de ℓ_i sorteado a partir da PDF de tamanhos de passos faça o animal ultrapassar o sítio alvo, consideramos que este passo será truncado pelo encontro do sítio, finalizando assim a caminhada de busca.

A posição x_i do caminhante após i passos depende da sua posição anterior, x_{i-1} . Esta, por sua vez, depende de x_{i-2} e assim por diante, gerando uma sequência de dependências até a posição inicial x_0 . Como consequência, todas as quantidades médias da caminhada de busca acabam dependendo da posição inicial, incluindo a distância média percorrida entre dois encontros sucessivos, isto é, $\langle L \rangle = \langle L \rangle(x_0)$.

Ao contabilizar todas as possíveis caminhadas que encontram um sítio alvo após n passos, devemos tomar a média dos valores obtidos, de modo que

$$\langle L_n \rangle (x_0) = \sum_{i=1}^n \langle |\ell_i| \rangle, \quad (2.5)$$

onde $\langle L_n \rangle$ denota a distância média percorrida entre dois encontros consecutivos de sítios alvos considerando apenas as caminhadas aleatórias com exatamente n passos.

Algo importante de se notar é que a probabilidade de encontrar um sítio alvo após exatamente n passos, P_n , não é uniforme e de fato possui uma dependência com n . Ao considerarmos a média sobre todas as possíveis caminhadas iniciadas em x_0 e que encontram um sítio após qualquer número n de passos, escrevemos que

$$\langle L \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \langle L_n \rangle, \quad (2.6)$$

onde a condição de normalização,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1, \quad (2.7)$$

indica que um sítio alvo é sempre encontrado, mesmo que para isso sejam necessários

infinitos passos.

Para calcular P_n , definimos a densidade de probabilidade $\rho_n(x_n)$ do caminhante estar entre x_n e $x_n + dx_n$ após n passos. Utilizando esta função, a probabilidade do caminhante não ter encontrado nenhum dos sítios alvos após n passos, ou seja, a probabilidade dele se encontrar no intervalo $r_v < x_n < \lambda - r_v$ após n passos, é dada por [7, 4]

$$P_n^{not} = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_n(x_n) dx_n. \quad (2.8)$$

Observe que utilizamos acima que $L = \lambda$ em uma dimensão, como discutido. Além disso, como assumimos que um sítio alvo deve necessariamente ser encontrado ao longo da caminhada de busca, então a probabilidade de encontro de um sítio alvo em algum passo posterior, $n' \geq n + 1$, é a probabilidade complementar à Eq. (2.8), ou seja,

$$P_{n' \geq n+1} = 1 - P_n^{not}. \quad (2.9)$$

Portanto, a probabilidade de encontro de um sítio alvo após exatamente n passos é dada por

$$\begin{aligned} P_n &= |P_{n' \geq n+1} - P_{n' \geq n}| \\ &= |(1 - P_n^{not}) - (1 - P_{n-1}^{not})| \\ &= |(P_{n-1}^{not} - P_n^{not})| \\ &= |P_n^{not} - P_{n-1}^{not}|. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Substituindo a Eq. (2.8) na Eq. (2.9), obtemos

$$P_n = \left| \int_{r_v}^{\lambda - r_v} (\rho_n(x) - \rho_{n-1}(x)) dx \right|. \quad (2.11)$$

Observamos que como a probabilidade do caminhante permanecer no intervalo de busca $r_v < x < L - r_v$ diminui com o número de passos n , então $\rho_{n-1}(x) > \rho_n(x)$, ou seja, podemos retirar o módulo da expressão acima e escrever

$$P_n = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} (\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)) dx. \quad (2.12)$$

Substituindo agora a Eq. (2.22) na Eq. (2.6), ficamos com

$$\langle L \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} (\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)) \langle L_n \rangle (x) dx. \quad (2.13)$$

Utilizando a propriedade de aditividade da integral, podemos separá-la em duas,

$$\langle L \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_{n-1}(x) \langle L_n \rangle (x) dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) \langle L_n \rangle (x) dx. \quad (2.14)$$

Com isso, temos uma versão preliminar para a expressão de $\langle L \rangle$. No entanto, ainda é possível encontrar uma forma mais sintética para ela, como veremos a seguir.

Iniciamos fazendo $m = n - 1$ no primeiro termo da equação acima. Ao segundo termo adicionamos $\langle L_0 \rangle$, que por definição é nulo, de modo que ficamos com

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_m(x) \langle L_{m+1} \rangle (x) dx - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) \langle L_n \rangle (x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) (\langle L_{n+1} \rangle (x) - \langle L_n \rangle (x)) dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

A partir da Eq. (2.5) temos que $\langle L_{n+1} \rangle (x) - \langle L_n \rangle (x) = \langle |\ell| \rangle$, que ao ser substituído na Eq. (2.15) nos dá

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) \langle |\ell| \rangle (x) dx. \quad (2.16)$$

Vamos agora trabalhar o termo $\rho_n(x)$ no integrando da Eq. (2.16). A densidade de probabilidade $\rho_i(x_i)$ possui uma dependência com $\rho_{i-1}(x_{i-1})$ que é expressa na forma

$$\rho_i(x_i) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_{i-1}(x_{i-1}) p(x_i - x_{i-1}) dx_{i-1}, \quad (2.17)$$

onde $\rho_{i-1}(x_{i-1})$ é a densidade de probabilidade de estar na posição x_{i-1} após $i - 1$ passos e $p(x_i - x_{i-1})$ é a probabilidade de que o i -ésimo passo tenha tamanho $x_i - x_{i-1}$. Portanto, a integral na Eq. (2.16) leva em conta todas as possibilidades de atingir a posição x_i a partir de x_{i-1} .

Da mesma forma que acima, $\rho_{i-1}(x_{i-1})$ tem uma relação similar com $\rho_{i-2}(x_{i-2})$ e assim por diante, de modo que podemos escrever a Eq. (2.17) como uma relação de recursividade expressando a dependência entre o n -ésimo passo e todos os passos anteriores. O resultado é uma equação com n integrais para n passos, em que o primeiro sai

da posição x_0 com densidade de probabilidade $\rho_0(x_0)$ e o último sai de x_{n-1} até que a posição x_n seja atingida:

$$\rho_n(x_n) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \dots \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left[\prod_{i=0}^{n-1} p(x_{i+1} - x_i) dx_i \right] \rho_0(x_0). \quad (2.18)$$

Considerando que a posição inicial do caminhante possui uma localização espacial bem definida $x_0 = a$, com $r_v < a < \lambda - r_v$, então temos que

$$\rho_0(x_0) = \delta(x_0 - a). \quad (2.19)$$

Para exemplificar essa relação, observamos o caso mais simples com apenas um passo, $n = 1$, em que

$$\begin{aligned} \rho_1(x_1) &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_0(x_0) p(x_1 - x_0) dx_0 \\ &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \delta(x_0 - a) p(x_1 - x_0) dx_0 \\ &= p(x_1 - a). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Neste exemplo, a densidade de probabilidade de atingir a posição x_1 a partir da posição $x_0 = a$ é dada pela densidade de probabilidade de dar um passo de tamanho $x_1 - a$ com início em $x_0 = a$, como esperávamos.

Substituindo a Eq. (2.18) na Eq. (2.16) obtemos

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left\{ \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \dots \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left[\prod_{i=0}^{n-1} p(x_{i+1} - x_i) dx_i \right] \rho_0(x_0) \right\} \langle |\ell| \rangle(x_n) dx_n. \quad (2.21)$$

Definindo agora o operador integral \mathcal{L} [7, 3], tal que

$$[\mathcal{L}\rho_n(x')](x) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(x - x') \rho_n(x') dx', \quad (2.22)$$

observamos que

$$\rho_1(x_1) = [\mathcal{L}\rho_0(x_0)](x_1)$$

e

$$\begin{aligned}
\rho_2(x_2) &= [\mathcal{L}\rho_1(x_1)](x_2) \\
&= [\mathcal{L}[\mathcal{L}\rho_0(x_0)]](x_2) \\
&= [\mathcal{L}^2\rho_0(x_0)](x_2).
\end{aligned}$$

Este resultado nos leva a uma relação de recorrência para o operador integral, de modo que podemos reescrever a Eq. (2.21) como

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} [\mathcal{L}^n \rho_0(x_0)](x_n) \langle |\ell| \rangle(x_n) dx_n. \quad (2.23)$$

Notamos que ao utilizar esse operador conseguimos reduzir as n integrais, o produtório e as funções $p(x_{i+1} - x_i)$ no integrando da Eq. (2.18) a apenas uma integral com o operador atuando n vezes em $\rho_0(x_0)$. Observamos também que é possível escrever formalmente a seguinte expansão [7, 4],

$$\left[(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} \rho_0(x_0) \right](x) = \sum_{n=0}^{\infty} [\mathcal{L}^n \rho_0(x_0)](x), \quad (2.24)$$

onde \mathcal{I} representa o operador unidade e $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$ é o operador inverso de $(\mathcal{I} - \mathcal{L})$, de modo que $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}(\mathcal{I} - \mathcal{L}) = \mathcal{I}$. Substituindo a Eq. (2.24) na Eq. (2.23), temos

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left[(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} \rho_0(x_0) \right](x_n) \langle |\ell| \rangle(x_n) dx_n, \quad (2.25)$$

que com o uso da Eq. 2.19 se torna

$$\begin{aligned}
\langle L \rangle(a) &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left[(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} \delta(x_0 - a) \right](x_n) \langle |\ell| \rangle(x_n) dx_n \\
&= \left[(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} \langle |\ell| \rangle \right](a).
\end{aligned} \quad (2.26)$$

O resultado da Eq. (2.26) é a forma mais compacta com que conseguimos expressar a distância média $\langle L \rangle$ percorrida pelo caminhante entre dois encontros consecutivos de sítios alvos, a qual determina a eficiência da busca através da Eq. (2.3). Note, contudo, que ainda precisamos expressar o operador $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$ de modo a efetivamente permitir o cálculo da eficiência, bem como também obter explicitamente o tamanho médio $\langle |\ell| \rangle(a)$ de um passo que se inicia em $r_v < a < \lambda - r_v$, o que será feito a seguir. Comentamos

ainda que, como o resultado acima para $\langle L \rangle$ é descrito em termos do operador $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$, então denominamos a presente abordagem ao problema das buscas aleatórias de “método do operador integral”.

O primeiro ponto a ser resolvido a seguir é o cálculo de $\langle |\ell| \rangle(a)$. Nessa grandeza estamos lidando com uma média que, como mencionado no Capítulo 1, é dada por

$$\langle y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} yp(y)dy.$$

É necessário, contudo, tomar alguns cuidados em função do espaço de busca ser finito. De fato, se o caminhante der um passo que em princípio ultrapassa a posição de um sítio alvo, tal passo será truncado pelo encontro do sítio e a caminhada é finalizada. Além disso, como já discutimos acima, adotaremos um tamanho mínimo ℓ_0 para o comprimento dos passos, de modo que a densidade de probabilidade de tamanhos de passos é nula, $p(\ell) = 0$, se $|\ell| < \ell_0$.

Ao levar em conta todos esses cuidados, escrevemos então que

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(a) = & \int_{r_v}^{a-\ell_0} |x-a|p(x-a)dx + \int_{a+\ell_0}^{\lambda-r_v} |x-a|p(x-a)dx + \\ & \int_{-\infty}^{r_v} |x-a|p(x-a)dx + \int_{\lambda-r_v}^{\infty} |x-a|p(x-a)dx. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como o passo é truncado ao encontrar os sítios alvos nos dois extremos do espaço de busca, então na terceira integral substituímos $|x-a| = a-r_v$ e na quarta integral $|x-a| = \lambda-r_v-a$, de modo a obter

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(a) = & \int_{r_v}^{a-\ell_0} (a-x)p(x-a)dx + \int_{a+\ell_0}^{\lambda-r_v} (x-a)p(x-a)dx + \\ & (a-r_v) \int_{-\infty}^{r_v} p(x-a)dx + (\lambda-r_v-a) \int_{\lambda-r_v}^{\infty} p(x-a)dx. \end{aligned}$$

Podemos ainda deixar a expressão acima em função dos tamanhos dos passos ℓ , ao invés das posições x de chegada do passo, fazendo a mudança de variável $\ell = x-a$, de modo que

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(a) = & \int_{-(a-r_v)}^{-\ell_0} |\ell|p(\ell)d\ell + \int_a^{\lambda-r_v-a} |\ell|p(\ell)d\ell + \\ & (a-r_v) \int_{-\infty}^{-(a-r_v)} p(\ell)d\ell + (\lambda-r_v-a) \int_{\lambda-r_v-a}^{\infty} p(\ell)d\ell. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Com isso podemos dar uma interpretação mais intuitiva a cada uma das quatro integrais acima. De fato, a primeira e a segunda integrais representam, respectivamente, passos para a esquerda e para a direita que não encontram um sítio alvo. Já a terceira e quarta integrais estão associadas, respectivamente, com passos para a esquerda e para a direita que são truncados pelo encontro dos sítios nos extremos do intervalo.

2.1.3 Discretização do espaço de busca

O operador integral $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$ na Eq. (2.26) não possui expressão matemática explícita [7, 4]. Entretanto, essa dificuldade pode ser contornada ao realizarmos uma discretização do espaço de busca, como descrito a seguir. Nesse caso, o operador integral poderá ser escrito na forma matricial, que permite cálculos precisos utilizando softwares simbólicos como o *Matlab*, o *Octave* ou o *Mathematica*, entre outros.

A discretização do intervalo $0 \leq x \leq \lambda$ é feita através do seu particionamento em pedaços de tamanho Δx menor que qualquer comprimento relevante do problema, $\lambda, x_0, \ell_0, r_v$, etc. Com essa discretização, parâmetros como r_v (raio de visão), ℓ_0 (tamanho mínimo do passo), λ (distância entre os sítios alvos) e x_n (posição do caminhante após n passos) serão múltiplos inteiros de Δx . De fato, estes parâmetros passarão a ser respectivamente representados pelos números inteiros m_r, m_0, M e i_m , os quais se relacionam com as respectivas grandezas originais via $r_v = m_r \Delta x$, $\ell_0 = m_0 \Delta x$, $\lambda = M \Delta x$ e $x_m = i_m \Delta x$. Observamos que como $M = \lambda / \Delta x$ então M é o número total de intervalos que dividem o intervalo $0 \leq x \leq \lambda$. Os extremos $x = 0$ e $x = \lambda$ passarão a ser associados aos índices $i = 0$ e $i = M$, respectivamente. Analogamente, as posições $x = r_v$ e $x = \lambda - r_v$ nas quais o caminhante detecta os sítios alvos passam a ser respectivamente expressas por $i = m_r$ e $i = M - m_r$, enquanto que no espaço intermediário é permitido ao caminhante ocupar as posições associadas aos índices inteiros $m_r < i < M - m_r$. Ao todo, portanto, no intervalo $r_v < x < \lambda - r_v$ são permitidas $(M - m_r - 1) - (m_r + 1) + 1 = M - 2m_r - 1$ posições discretas. Esta será também a ordem das matrizes e dos vetores no desenvolvimento a seguir. Finalmente, podemos recuperar o limite contínuo fazendo $M \rightarrow \infty$ e $\Delta x \rightarrow 0$, com $\lambda = M \Delta x$ fixo.

Como saímos do regime contínuo para o discreto, é necessário adaptar as equações obtidas anteriormente. Iniciamos então com a discretização da Eq. (2.18). Para isso, substituímos as variáveis contínuas x_0, x_1, \dots, x_n , que representam a posição que o camin-

hante assume após $0, 1, \dots, n$ passos, pelos respectivos índices discretos i_0, i_1, \dots, i_n , sendo a relação entre eles dada por $x_m = i_m \Delta x$, como mencionado anteriormente. No regime discreto as integrais são substituídas por somatórios que vão de $m_r + 1$ a $M - m_r - 1$, correspondentes às posições discretas que o caminhante pode ocupar enquanto busca pelos sítios alvos. De fato, quando o caminhante chega a m_r ou $M - m_r$ o sítio alvo mais próximo é detectado e a caminhada é finalizada.

A última etapa para poder escrever a Eq. (2.18) no regime discreto é lidar com o termo $p(x_{m+1} - x_m) dx_m$, que representa a probabilidade de dar um passo de tamanho $x_{m+1} - x_m$. Utilizando a relação com o análogo discreto, escrevemos $x_{m+1} - x_m = (i_{m+1} - i_m) \Delta x$. Com isso, definimos a nova grandeza

$$a_{i_{m+1}, i_m} = p((i_{m+1} - i_m) \Delta x) \Delta x, \quad (2.29)$$

de modo que no espaço discreto a Eq. (2.18) se torna

$$\begin{aligned} [\rho_n]_{i_n} &= \sum_{i_0=m_r+1}^{M-m_r-1} \cdots \sum_{i_{n-1}=m_r+1}^{M-m_r-1} \left[a_{i_n, i_{n-1}} a_{i_{n-1}, i_{n-2}} \cdots a_{i_2, i_1} a_{i_1, i_0} \right] [\rho_0]_{i_0} \\ &= \sum_{i_0=m_r+1}^{M-m_r-1} \cdots \sum_{i_{n-1}=m_r+1}^{M-m_r-1} \left[\prod_{i=0}^{n-1} a_{i_{n+1}, i_n} \right] [\rho_0]_{i_0}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sobre a grandeza a definida acima, é importante notar que $a_{i_n, i_n} = 0$ graças à existência do tamanho mínimo dos passos, ℓ_0 . Na verdade, qualquer passo de tamanho $|\ell| < \ell_0$ tem probabilidade nula de ocorrer, de modo que $a_{i_n, i_m} = 0$ se $|n - m| < m_0$. Além disso, devido ao fato da probabilidade depender unicamente do comprimento do passo dado, temos que $a_{i_m, i_n} = a_{i_n, i_m}$, uma vez que $p(|x_m - x_n| \Delta x) = p(|x_n - x_m| \Delta x)$.

Após observar a grandeza a_{i_m, i_n} da Eq. (2.30) e suas propriedades, podemos descrevê-la como as componentes de uma matriz $[A]_{mn}$. Como vimos acima que $a_{i_n, i_m} = a_{i_m, i_n}$ e $a_{i_n, i_n} = 0$, então essa matriz é simétrica com diagonal nula. Além disso, dependendo do tamanho do passo mínimo, outras diagonais vizinhas à diagonal principal também podem ser nulas.

Os elementos da matriz $[A]$ representam as probabilidades de transição entre dois sítios no espaço discreto. Esta matriz é quadrada com dimensão $(M - 2m_r - 1) \times (M - 2m_r - 1)$, como discutido acima. Por outro lado, $[\rho_m]_{i_m}$ é a i_m -ésima componente do vetor

coluna ρ_m de tamanho $M - 2m_r - 1$. Podemos então reescrever a Eq. (2.30) como

$$[\rho_n]_{i_n} = \sum_{i_0=m_r+1}^{M-m_r-1} [A^n]_{i_n, i_0} [\rho_0]_{i_0}. \quad (2.31)$$

Como mencionado anteriormente, o caminhante possui uma posição inicial bem definida, fazendo com que no espaço contínuo $\rho_0(x_0)$ seja uma delta de Dirac. O seu análogo discreto é a delta de Kronecker. De fato, como $\int_{r_v}^{\lambda-r_v} \delta(x-a)dx = 1$, então no regime discreto escrevemos analogamente que $\sum_{j=m_r+1}^{M-m_r-1} \delta_{j,i_a} = 1$, onde $i_a = a/\Delta x$. Assim, a relação entre a deltas de Dirac e Kronecker na passagem para o espaço discreto é dada por

$$\delta(x-a) \rightarrow \frac{\delta_{j,i_a}}{\Delta x}. \quad (2.32)$$

Substituindo a Eq. (2.31) na Eq. (2.16) e realizando todas as discretizações como descrito acima, obtemos

$$[\langle L \rangle]_{i_a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_n=m_r+1}^{M-m_r-1} [\rho_n]_{i_n} [\langle |\ell| \rangle]_{i_n} \Delta x. \quad (2.33)$$

Observamos que $[\langle L \rangle]_{i_a}$ é um elemento do vetor coluna $\langle L \rangle$, que também possui tamanho $M - 2m_r - 1$. Ele representa a distância média percorrida pelo caminhante até encontrar um dos sítios alvos, tendo partido da posição associada ao índice discreto i_a . Substituindo agora a Eq. (2.31) na Eq. (2.32), ficamos com

$$[\langle L \rangle]_{i_a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_n=m_r+1}^{M-m_r-1} \sum_{i_0=m_r+1}^{M-m_r-1} [A^n]_{i_n, i_0} [\rho_0]_{i_0} [\langle |\ell| \rangle]_{i_n} \Delta x. \quad (2.34)$$

Utilizando a definição de $[\rho]_{i_n}$ em conjunto com a Eq. (2.32), fazendo a soma sobre todos os i_0 e aplicando a simetria da matriz, $[A]_{ij} = [A]_{ji}$, chegamos à expressão

$$[\langle L \rangle]_{i_a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_n=m_r+1}^{M-m_r-1} [A^n]_{i_a, i_n} [\langle |\ell| \rangle]_{i_n}. \quad (2.35)$$

Fazendo agora a soma sobre n , chegamos à versão discreta da Eq. (2.26),

$$[\langle L \rangle]_{i_a} = \sum_{i_n=m_r+1}^{M-m_r-1} [(\mathcal{I} - A)^{-1}]_{i_a, i_n} [\langle |\ell| \rangle]_{i_n}, \quad (2.36)$$

em que o vetor coluna $\langle L \rangle$ é escrito como

$$\langle L \rangle = \begin{bmatrix} \langle L_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle L_i \rangle \\ \vdots \\ \langle L_j \rangle \\ \vdots \\ \langle L_N \rangle \end{bmatrix}$$

a matriz $[A]$ como,

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,i} & \cdots & 0 & \cdots & a_{j,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & \cdots & a_{N,i} & \cdots & a_{N,j} & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix}$$

e o vetor coluna $\langle |\ell| \rangle$,

$$\langle |\vec{\ell}| \rangle = \begin{bmatrix} \langle |\ell_1| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_i| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_j| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_N| \rangle \end{bmatrix}$$

Obtemos, assim, a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \langle L_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle L_i \rangle \\ \vdots \\ \langle L_j \rangle \\ \vdots \\ \langle L_N \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & -a_{1,i} & \cdots & -a_{1,j} & \cdots & -a_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i,1} & \cdots & 1 & \cdots & -a_{i,j} & \cdots & -a_{i,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{j,1} & \cdots & -a_{j,i} & \cdots & 1 & \cdots & -a_{j,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N,1} & \cdots & -a_{N,i} & \cdots & a_{N,j} & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \langle |\ell_1| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_i| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_j| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_N| \rangle \end{bmatrix}$$

Resta agora calcular na equação acima os componentes da matriz $[A]_{ij}$. Para isso devemos lembrar que a matriz $[A]$ nada mais é do que uma representação matricial da probabilidade $p(x' - x)dx$ de dar um salto de tamanho entre $|x - x'|$ e $|x - x'| + \Delta x$, o qual no formato discretizado se dá entre $|i - j|\Delta x$ e $(|i - j| + 1)\Delta x$. Podemos escrever então que

$$P(|x - x'| \leq |\ell| \leq |x - x'| + \Delta x) = \int_{|x-x'|}^{|x-x'|+\Delta x} p(\ell)d\ell, \quad (2.37)$$

que no formato discreto fica

$$[A]_{ij} = \int_{|i-j|\Delta x}^{(|i-j|+1)\Delta x} p(\ell)d\ell. \quad (2.38)$$

Como discutido anteriormente, temos que $[A]_{ij} = [A]_{ji}$, já que a probabilidade do salto $i \rightarrow j$ é igual à probabilidade do salto $j \rightarrow i$, e $[A]_{ii} = 0$, uma vez que o caminhante não pode permanecer parado no mesmo sítio. Além disso, temos também que $[A]_{ij} = 0$ se $|i - j| < m_0$ em consequência do tamanho mínimo do passo.

Após calcular $[A]_{j,k}$ é feita a subtração pela matriz identidade. Em seguida, calcula-se a inversa da matriz resultante, como na Eq. (2.36). Finalmente, de posse dessa matriz inversa nós a multiplicamos pelo vetor coluna $\langle |\ell| \rangle$ para obter $\langle L \rangle$. A eficiência da busca com início em $x_0 = a = i_a \Delta x$ será então dada pelo inverso do elemento i_a do vetor coluna $\langle L \rangle$.

Na próxima seção nós aplicaremos o formalismo do método do operador integral descrito acima para o cálculo da matriz $[A]$ e do vetor coluna $\langle |\ell| \rangle$ com diferentes densidades de probabilidade $p(\ell)$ de tamanhos de passos.

2.2 Cálculo da matriz $[A]$ e do vetor coluna $\langle |\ell| \rangle$ para diferentes PDFs de tamanhos de passos

Na seção anterior analisamos como obter as expressões gerais para $[A]_{j,k}$ e $\langle |\ell| \rangle$ no contexto do método do operador integral. Agora mostraremos explicitamente como calcular tais quantidades para as três distribuições de tamanhos de passos utilizadas nessa dissertação: exponencial simples, exponencial dupla e lei de potência.

2.2.1 Exponencial simples

A primeira distribuição de tamanhos de passos para a qual faremos os cálculos explícitos é a exponencial simples, escrita na forma

$$p(\ell) = \mathcal{A}\Theta(|\ell| - \ell_0)e^{-\frac{|\ell|}{\tau}}, \quad (2.39)$$

onde Θ denota a função degrau de Heavside, responsável por impedir que existam passos menores do que ℓ_0 . O parâmetro τ é o comprimento característico da exponencial, equivalente ao inverso da sua taxa de decaimento, e \mathcal{A} é a constante de normalização.

Inicialmente obtemos a constante de normalização:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(\ell) d\ell &= 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}\Theta(|\ell| - \ell_0)e^{-\frac{|\ell|}{\tau}} d\ell &= 1, \\ \int_{\ell_0}^{\infty} \mathcal{A}e^{-\frac{\ell}{\tau}} d\ell + \int_{-\infty}^{-\ell_0} \mathcal{A}e^{\frac{\ell}{\tau}} d\ell &= 1. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $\ell \rightarrow -\ell$ na segunda integral acima, chegamos a

$$\begin{aligned} \int_{\ell_0}^{\infty} \mathcal{A}e^{-\frac{\ell}{\tau}} d\ell + \int_{\infty}^{\ell_0} \mathcal{A}e^{-\frac{\ell}{\tau}} d(-\ell) &= 1, \\ 2 \int_{\ell_0}^{\infty} \mathcal{A}e^{-\frac{\ell}{\tau}} d\ell &= 1, \\ \mathcal{A}e^{-\frac{\ell_0}{\tau}} \tau &= \frac{1}{2}, \\ \mathcal{A} &= \frac{e^{\frac{\ell_0}{\tau}}}{2\tau}. \end{aligned}$$

Temos então que a PDF exponencial simples é dada por

$$p(\ell) = \frac{\Theta(|\ell| - \ell_0) e^{-\frac{(|\ell| - \ell_0)}{\tau}}}{2\tau}. \quad (2.40)$$

Substituímos agora a expressão acima na Eq. (2.27) e com isso calculamos o $\langle |\ell| \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle = \mathcal{A} \left[\int_{-(a-r_v)}^{-\ell_0} -\ell e^{\frac{\ell}{\tau}} d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda-a-r_v} \ell e^{-\frac{\ell}{\tau}} d\ell + \right. \\ \left. (a-r_v) \int_{-\infty}^{-(a-r_v)} e^{\frac{\ell}{\tau}} d\ell + (\lambda-r_v-a) \int_{\lambda-r_v-a}^{\infty} e^{-\frac{\ell}{\tau}} d\ell \right]. \quad (2.41) \end{aligned}$$

Temos então de resolver essas quatro integrais. A primeira integral será chamada I1, a segunda I2 e assim por diante.

Segue a solução de todas as quatro integrais. Não substituímos abaixo a constante de normalização para não deixar a notação muito pesada. Para I1:

$$\begin{aligned} \text{I1} &= \mathcal{A} \int_{-(a-r_v)}^{-\ell_0} -\ell e^{\frac{\ell}{\tau}} d\ell \\ &= -\mathcal{A} \tau e^{\frac{\ell}{\tau}} (-\tau + \ell) \Big|_{-(a-r_v)}^{-\ell_0} \\ &= \mathcal{A} \left[\left(e^{\frac{-\ell_0}{\tau}} \tau (\ell_0 + \tau) - e^{-\frac{(a-r_v)}{\tau}} (a - r_v + \tau) \tau \right) \right] \\ &= \frac{\left[(\ell_0 + \tau) - e^{-\frac{(a-r_v-\ell_0)}{\tau}} (a - r_v + \tau) \right]}{2}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Para I2:

$$\begin{aligned} \text{I2} &= \mathcal{A} \int_{\ell_0}^{\lambda-a-r_v} \ell e^{-\frac{\ell}{\tau}} d\ell \\ &= -\mathcal{A} \tau e^{-\frac{\ell}{\tau}} (\tau + \ell) \Big|_{\ell_0}^{\lambda-a-r_v} \\ &= -\mathcal{A} \tau \left[e^{-\frac{(\lambda-a-r_v)}{\tau}} (\tau + \lambda - a - r_v) - e^{-\frac{\ell_0}{\tau}} (\tau + \ell_0) \right] \\ &= \frac{\left[(\tau + \ell_0) - e^{-\frac{(\lambda-a-r_v-\ell_0)}{\tau}} (\tau + \lambda - a - r_v) \right]}{2}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Para I3:

$$\begin{aligned}
I3 &= \mathcal{A}(a - r_v) \int_{-\infty}^{-(a-r_v)} e^{\frac{\ell}{\tau}} d\ell \\
&= \mathcal{A}\tau(a - r_v) e^{\frac{\ell}{\tau}} \Big|_{-\infty}^{-(a-r_v)} \\
&= \mathcal{A}\tau(a - r_v) e^{\frac{-(a-r_v)}{\tau}} \\
&= \frac{(a - r_v) e^{\frac{-(a-r_v-\ell_0)}{\tau}}}{2}.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

E, por último, para I4:

$$\begin{aligned}
I4 &= \mathcal{A}(\lambda - r_v - a) \int_{\lambda-r_v-a}^{\infty} e^{\frac{-\ell}{\tau}} d\ell \\
&= \mathcal{A}(-\tau)(\lambda - r_v - a) e^{\frac{-\ell}{\tau}} \Big|_{\lambda-r_v-a}^{\infty} \\
&= \mathcal{A}(\lambda - r_v - a)(-\tau) \left[0 - e^{\frac{-(\lambda-r_v-a)}{\tau}} \right] \\
&= \frac{(\lambda - r_v - a) e^{\frac{-(\lambda-r_v-a-\ell_0)}{\tau}}}{2}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Somando as quatro contribuições acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle |\ell| \rangle &= I1 + I2 + I3 + I4 \\
&= e^{\frac{-(\lambda-a-r_v-\ell_0)}{\tau}} \frac{[(\lambda - r_v - a) - (\tau + \lambda - a - r_v)]}{2} + e^{\frac{-(a-r_v-\ell_0)}{\tau}} \frac{[(a - r_v) - (\tau + a - r_v)]}{2} + (\ell_0 + \tau) \\
&= \ell_0 + \tau \left(1 - \frac{\left[e^{\frac{-(\lambda-a-r_v-\ell_0)}{\tau}} + e^{\frac{-(a-r_v-\ell_0)}{\tau}} \right]}{2} \right).
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Consideramos agora o cálculo da matriz $[A]_{ij}$ de probabilidades de transição para o caso exponencial simples. Utilizando a Eq. (2.38), escrevemos

$$\begin{aligned}
[A]_{ij} &= [A]_{ji} = \int_{|x-x'|}^{x-x'+1} \mathcal{A} e^{\frac{-\ell}{\tau}} \\
&= -\mathcal{A}\tau \left[e^{\frac{|x-x'|+\Delta x}{\tau}} - e^{\frac{|x-x'|}{\tau}} \right] \\
&= \frac{\ell_0}{\tau} \left[e^{\frac{|x-x'|}{\tau}} - e^{\frac{|x-x'|+\Delta x}{\tau}} \right].
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Aplicando a discretização dos parâmetros, $\ell_0 = m_{\ell_0} \Delta x$, $\tau = m_{\tau} \Delta x$, $x = i \Delta x$ e $x' = j \Delta x$,

ficamos com

$$[A]_{i,j} = [A]_{j,i} = e^{\frac{m\ell_0}{m\tau}} \frac{[e^{\frac{|i-j|}{m\tau}} - e^{\frac{|i-j|+1}{m\tau}}]}{2}. \quad (2.48)$$

2.2.2 Exponencial dupla

Passamos agora aos cálculos com a PDF de tamanhos de passos do tipo exponencial dupla. Eles são, na verdade, muito semelhantes aos cálculos acima com a exponencial simples, embora sejam mais extensos. A expressão que utilizamos para exponencial dupla é

$$p(\ell) = \mathcal{A}\Theta(|\ell| - \ell_0)(w_1 e^{-\frac{|\ell|}{\tau_1}} + w_2 e^{-\frac{|\ell|}{\tau_2}}), \quad (2.49)$$

onde agora observamos dois comprimentos característicos, τ_1 e τ_2 , um para cada exponencial. Os novos parâmetros w_1 e w_2 dão os pesos estatísticos de cada uma das exponenciais da distribuição, com a condição de normalização $w_1 + w_2 = 1$.

Assim como foi feito para a exponencial simples, primeiro calculamos a constante de normalização via

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(\ell) d\ell &= 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}\Theta(|\ell| - \ell_0)(w_1 e^{-\frac{|\ell|}{\tau_1}} + w_2 e^{-\frac{|\ell|}{\tau_2}}) d\ell &= 1, \\ \int_{\ell_0}^{\infty} \mathcal{A}(w_1 e^{-\frac{\ell}{\tau_1}} + w_2 e^{-\frac{\ell}{\tau_2}}) d\ell + \int_{-\infty}^{-\ell_0} \mathcal{A}(w_1 e^{\frac{\ell}{\tau_1}} + w_2 e^{\frac{\ell}{\tau_2}}) d\ell &= 1, \\ \mathcal{A} \left[\left(\frac{w_1}{\tau_1} e^{\frac{\ell}{\tau_1}} + \frac{w_2}{\tau_2} e^{\frac{\ell}{\tau_2}} \right) \Big|_{-\infty}^{-\ell_0} + \left(\frac{w_1}{-\tau_1} e^{\frac{-\ell}{\tau_1}} + \frac{w_2}{\tau_2} e^{\frac{-\ell}{\tau_2}} \right) \Big|_{\ell_0}^{\infty} \right] &= 1, \\ 2\mathcal{A} \left(\frac{w_1}{\tau_1} e^{-\frac{\ell_0}{\tau_1}} + \frac{w_2}{\tau_2} e^{-\frac{\ell_0}{\tau_2}} \right) &= 1. \end{aligned}$$

Obtemos então

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2 \left(\frac{w_1}{\tau_1} e^{-\frac{\ell_0}{\tau_1}} + \frac{w_2}{\tau_2} e^{-\frac{\ell_0}{\tau_2}} \right)}. \quad (2.50)$$

Passando para o cálculo de $\langle |\ell| \rangle$, com a constante de normalização não explicitada

para as equações ficarem mais limpas visualmente, escrevemos

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle &= \mathcal{A} \left[\int_{-(a-r_v)}^{-\ell_0} -\ell(w_1 e^{\frac{\ell}{\tau_1}} + w_2 e^{\frac{\ell}{\tau_2}}) d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda-a-r_v} \ell(w_1 e^{-\frac{\ell}{\tau_1}} + w_2 e^{-\frac{\ell}{\tau_2}}) d\ell + \right. \\ &\left. (a-r_v) \int_{-\infty}^{-(a-r_v)} (w_1 e^{\frac{\ell}{\tau_1}} + w_2 e^{\frac{\ell}{\tau_2}}) d\ell + (\lambda-r_v-a) \int_{\lambda-r_v-a}^{\infty} (w_1 e^{-\frac{\ell}{\tau_1}} + w_2 e^{-\frac{\ell}{\tau_2}}) d\ell \right]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Neste momento, devemos calcular cada uma das quatro integrais, como foi feito anteriormente. Para I1:

$$\begin{aligned} I1 &= \int_{-(a-r_v)}^{-\ell_0} -\ell(w_1 e^{\frac{\ell}{\tau_1}} + w_2 e^{\frac{\ell}{\tau_2}}) d\ell \\ &= -w_1 \tau_1 e^{\frac{\ell}{\tau_1}} (-\tau_1 + \ell) \Big|_{-(a-r_v)}^{-\ell_0} - w_2 \tau_2 e^{\frac{\ell}{\tau_2}} (-\tau_2 + \ell) \Big|_{-(a-r_v)}^{-\ell_0} \\ &= \mathcal{A} \left[(w_1 \tau_1 (e^{-\frac{\ell_0}{\tau_1}} (\ell_0 + \tau_1) - e^{-\frac{-(a-r_v)}{\tau_1}} (a - r_v + \tau_1))) + w_2 \tau_2 (e^{-\frac{\ell_0}{\tau_2}} (\ell_0 + \tau_2) - e^{-\frac{-(a-r_v)}{\tau_2}} (a - r_v + \tau_2)) \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Para I2:

$$\begin{aligned} I2 &= \mathcal{A} \int_{\ell_0}^{\lambda-a-r_v} \ell(w_1 e^{-\frac{\ell}{\tau_1}} + w_2 e^{-\frac{\ell}{\tau_2}}) d\ell \\ &= \mathcal{A} (w_1 \tau_1 e^{-\frac{\ell}{\tau_1}} (\tau_1 + \ell) + w_2 \tau_2 e^{-\frac{\ell}{\tau_2}} (\tau_2 + \ell)) \Big|_{\ell_0}^{\lambda-a-r_v} \\ &= \mathcal{A} (w_1 \tau_1 [e^{-\frac{\ell_0}{\tau_1}} (\tau_1 + \ell_0)] - e^{-\frac{-(\lambda-a-r_v)}{\tau_1}} (\tau_1 + \lambda - a - r_v) + \\ &w_2 \tau_2 [e^{-\frac{\ell_0}{\tau_2}} (\tau_2 + \ell_0) - e^{-\frac{-(\lambda-a-r_v)}{\tau_2}} (\tau_2 + \lambda - a - r_v)]). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Para I3:

$$\begin{aligned} I3 &= \mathcal{A} (a - r_v) \int_{-\infty}^{-(a-r_v)} w_1 (e^{\frac{\ell}{\tau_1}} + w_2 e^{\frac{\ell}{\tau_2}}) d\ell \\ &= \mathcal{A} (w_1 \tau_1 (a - r_v) e^{\frac{\ell}{\tau_1}} + w_2 \tau_2 (a - r_v) e^{\frac{\ell}{\tau_2}}) \Big|_{-\infty}^{-(a-r_v)} \\ &= \mathcal{A} (w_1 \tau_1 (a - r_v) e^{-\frac{(a-r_v)}{\tau_1}} + w_2 \tau_2 (a - r_v) e^{-\frac{(a-r_v)}{\tau_2}}). \end{aligned} \quad (2.54)$$

E, por último, para I4:

$$\begin{aligned} I4 &= \mathcal{A} (\lambda - r_v - a) \int_{\lambda-r_v-a}^{\infty} (w_1 e^{-\frac{\ell}{\tau_1}} + w_2 e^{-\frac{\ell}{\tau_2}}) d\ell \\ &= \mathcal{A} ((-w_1 \tau_1) (\lambda - r_v - a) e^{-\frac{\ell}{\tau_1}} + (-w_2 \tau_2) (\lambda - r_v - a) e^{-\frac{\ell}{\tau_2}}) \Big|_{\lambda-r_v-a}^{\infty} \\ &= \mathcal{A} ((\lambda - r_v - a) (w_1 \tau_1) [e^{-\frac{-(\lambda-r_v-a)}{\tau_1}}] + (\lambda - r_v - a) (w_2 \tau_2) [e^{-\frac{-(\lambda-r_v-a)}{\tau_2}}]). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Fazendo a soma das quatro integrais, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle |\ell| \rangle &= I1 + I2 + I3 + I4 \\
&= \mathcal{A}((w_1\tau_1(e^{\frac{-\ell_0}{\tau_1}}(\ell_0 + \tau_1) - e^{\frac{-(a-r_v)}{\tau_1}}(a - r_v + \tau_1)) + w_2\tau_2(e^{\frac{-\ell_0}{\tau_2}}(\ell_0 + \tau_2) - e^{\frac{-(a-r_v)}{\tau_2}}(a - r_v + \tau_2))) \\
&\quad + (w_1\tau_1[e^{\frac{-\ell_0}{\tau_1}}(\tau_1 + \ell_0)] - e^{\frac{-(\lambda-a-r_v)}{\tau_1}}(\tau_1 + \lambda - a - r_v)) + \\
&\quad w_2\tau_2[e^{\frac{-\ell_0}{\tau_2}}(\tau_2 + \ell_0) - e^{\frac{-(\lambda-a-r_v)}{\tau_2}}(\tau_2 + \lambda - a - r_v)]) + (w_1\tau_1(a - r_v)e^{\frac{-(a-r_v)}{\tau_1}} + w_2\tau_2(a - r_v)e^{\frac{-(a-r_v)}{\tau_2}}) \\
&\quad ((\lambda - r_v - a)(w_1\tau_1)[e^{\frac{-(\lambda-r_v-a)}{\tau_1}}] + (\lambda - r_v - a)(w_2\tau_2)[e^{\frac{-(\lambda-r_v-a)}{\tau_2}}])) \\
&= \mathcal{A}(w_1\tau_1(2e^{\frac{-\ell_0}{\tau_1}}(\ell_0 + \tau_1) - \tau_1(e^{\frac{-(a-r_v)}{\tau_1}} + e^{\frac{-(\lambda-a-r_v)}{\tau_1}})) + \\
&\quad w_2\tau_2(2e^{\frac{-\ell_0}{\tau_2}}(\ell_0 + \tau_2) - \tau_2(e^{\frac{-(a-r_v)}{\tau_2}} + e^{\frac{-(\lambda-a-r_v)}{\tau_2}}))).
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Vamos calcular agora a matriz $[A]_{ij}$ para a exponencial dupla. Utilizando a Eq. (2.38), escrevemos da mesma forma que para a exponencial simples:

$$\begin{aligned}
[A]_{i,j} &= [A]_{j,i} = \int_{|x-x'|}^{x-x'+1} \mathcal{A}(w_1e^{\frac{-\ell}{\tau_1}} + w_2e^{\frac{-\ell}{\tau_2}}) \\
&= -\mathcal{A}(w_1\tau_1[e^{-\frac{|x-x'|+\Delta x}{\tau_1}} - e^{-\frac{|x-x'|}{\tau_1}}] + w_2\tau_2[e^{-\frac{|x-x'|+\Delta x}{\tau_2}} - e^{-\frac{|x-x'|}{\tau_2}}]) \\
&= \mathcal{A}(w_1\tau_1[e^{-\frac{|x-x'|}{\tau_1}} - e^{-\frac{|x-x'|+\Delta x}{\tau_1}}] + w_2\tau_2[e^{-\frac{|x-x'|}{\tau_2}} - e^{-\frac{|x-x'|+\Delta x}{\tau_2}}]).
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Discretizando os parâmetros, $\ell_0 = m_0\Delta x$, $\tau = m_\tau\Delta x$, $x = i\Delta x$ e $x' = j\Delta x$, chegamos à expressão final:

$$[A]_{i,j} = \mathcal{A}(w_1\tau_1[e^{-\frac{|i-j|}{m\tau_1}} - e^{-\frac{|i-j|+1}{m\tau_1}}] + w_2\tau_2[e^{-\frac{|i-j|}{m\tau_2}} - e^{-\frac{|i-j|+1}{m\tau_2}}]). \tag{2.58}$$

2.2.3 Lei de potência (Lévy)

A última PDF de tamanhos de passos que consideraremos nesse trabalho é a lei de potência com expoente μ , que, como discutido, corresponde à forma assintótica da distribuição α -estável de Lévy, com $\mu = \alpha + 1$ para $1 < \mu \leq 3$ e $0 < \alpha \leq 2$.

A distribuição do tipo lei de potência também é conhecida na literatura como distribuição de Pareto. Ela é expressa por

$$p(\ell) = \frac{\mathcal{A}\Theta(|\ell| - \ell_0)}{|\ell|^\mu}. \tag{2.59}$$

Iniciamos novamente com o cálculo da constante de normalização:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} p(\ell) d\ell &= 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{A}\Theta(|\ell| - \ell_0)}{|\ell|^\mu} d\ell &= 1, \\ \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}}{\ell^\mu} d\ell + \int_{-\infty}^{-\ell_0} \frac{\mathcal{A}}{-\ell^\mu} d\ell &= 1.\end{aligned}$$

Fazendo $\ell \rightarrow -\ell$ na segunda integral, obtemos

$$\begin{aligned}2 \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}}{\ell^\mu} d\ell &= 1, \\ \frac{2\mathcal{A}\ell^{1-\mu}}{1-\mu} \Big|_{\ell_0}^{\infty} &= 1, \\ \frac{2\mathcal{A}(\ell_0)^{1-\mu}}{\mu-1} &= 1, \\ \mathcal{A} &= \frac{(\mu-1)(\ell_0)^{\mu-1}}{2},\end{aligned}$$

que nos leva à expressão para a PDF lei de potência,

$$p(\ell) = \frac{(\mu-1)(\ell_0)^{\mu-1}\Theta(|\ell| - \ell_0)}{2|\ell|^\mu}. \quad (2.60)$$

A partir desse resultado, calculamos $\langle |\ell| \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle |\ell| \rangle &= \int_{-(a-r_v)}^{-\ell_0} \frac{-\ell(\mu-1)(\ell_0)^{\mu-1}}{2(-\ell)^\mu} d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda-a-r_v} \frac{\ell(\mu-1)(\ell_0)^{\mu-1}}{2(\ell)^\mu} d\ell + \\ &\quad (a-r_v) \int_{-\infty}^{-(a-r_v)} \frac{(\mu-1)(\ell_0)^{\mu-1}}{2(-\ell)^\mu} d\ell + (\lambda-r_v-a) \int_{\lambda-r_v-a}^{\infty} \frac{(\mu-1)(\ell_0)^{\mu-1}}{2(\ell)^\mu} d\ell \Big] \\ &= \frac{(\mu-1)(\ell_0)^{\mu-1}}{2} \left[\int_{-(a-r_v)}^{-\ell_0} \frac{-\ell}{(-\ell)^\mu} d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda-a-r_v} \frac{\ell}{(\ell)^\mu} d\ell + (a-r_v) \int_{-\infty}^{-(a-r_v)} \frac{1}{(-\ell)^\mu} d\ell \right. \\ &\quad \left. + (\lambda-r_v-a) \int_{\lambda-r_v-a}^{\infty} \frac{1}{(\ell)^\mu} d\ell \right]. \quad (2.61)\end{aligned}$$

Fazendo $\ell \rightarrow -\ell$ na primeira e na terceira integral obtemos

$$\begin{aligned}\langle |\ell| \rangle &= \frac{(\mu-1)(\ell_0)^{\mu-1}}{2} \left[\int_{\ell_0}^{(a-r_v)} \frac{1}{(\ell)^{\mu-1}} d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda-a-r_v} \frac{1}{(\ell)^{\mu-1}} d\ell + (a-r_v) \int_{(a-r_v)}^{\infty} \frac{1}{(\ell)^\mu} d\ell \right. \\ &\quad \left. + (\lambda-r_v-a) \int_{\lambda-r_v-a}^{\infty} \frac{1}{(\ell)^\mu} d\ell \right]. \quad (2.62)\end{aligned}$$

É necessário tomar um cuidado especial na primeira e na segunda integrais acima, pois como o parâmetro μ pode variar no intervalo $1 < \mu \leq 3$ então estas integrais possuem soluções diferentes dependendo se $\mu \neq 2$ ou se $\mu = 2$.

Inicialmente calculamos a solução para $\mu \neq 2$:

$$\begin{aligned}
\langle |\ell| \rangle &= \frac{(\mu - 1)(\ell_0)^{\mu-1}}{2} \left[\frac{\ell^{2-\mu}}{2-\mu} \Big|_{\ell_0}^{a-r_v} + \frac{\ell^{2-\mu}}{2-\mu} \Big|_{\ell_0}^{\lambda-a-r_v} + (a-r_v) \frac{\ell^{1-\mu}}{1-\mu} \Big|_{a-r_v}^{\infty} \right. \\
&\quad \left. + (\lambda - r_v - a) \frac{\ell^{1-\mu}}{1-\mu} \Big|_{\lambda-a-r_v}^{\infty} \right] \\
&= \frac{(\mu - 1)(\ell_0)^{\mu-1}}{2} \left[\frac{(a-r_v)^{2-\mu} - \ell_0^{2-\mu}}{2-\mu} + \frac{(\lambda-a-r_v)^{2-\mu} - \ell_0^{2-\mu}}{2-\mu} + (a-r_v) \frac{0 - (a-r_v)^{1-\mu}}{1-\mu} \right. \\
&\quad \left. + (\lambda - r_v - a) \frac{0 - (\lambda-a-r_v)^{1-\mu}}{1-\mu} \right] \\
&= \frac{(\mu - 1)(\ell_0)^{\mu-1}}{2} \left[\frac{(1-\mu)((\lambda-a-r_v)^{2-\mu} + (a-r_v)^{2-\mu} - 2\ell_0^{2-\mu})}{(2-\mu)(1-\mu)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(2-\mu)((a-r_v)^{2-\mu} + (\lambda-a-r_v)^{2-\mu})}{(1-\mu)(2-\mu)} \right] \\
&= \frac{(1-\mu)(\ell_0)^{\mu-1}}{2(2-\mu)} \left[\frac{(\lambda-a-r_v)^{2-\mu} + (a-r_v)^{2-\mu} + 2\ell_0^{2-\mu}}{(1-\mu)} \right] \\
&= \frac{(\ell_0)}{2(2-\mu)} \left[\left(\frac{\lambda-a-r_v}{\ell_0} \right)^{2-\mu} + \left(\frac{a-r_v}{\ell_0} \right)^{2-\mu} + 2 \right], \quad \mu \neq 2. \quad (2.63)
\end{aligned}$$

Fazendo agora para $\mu = 2$, encontramos

$$\begin{aligned}
\langle |\ell| \rangle &= \frac{\ell_0}{2} \left[\int_{\ell_0}^{(a-r_v)} \frac{1}{\ell} d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda-a-r_v} \frac{1}{\ell} d\ell + (a-r_v) \int_{(a-r_v)}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} d\ell + (\lambda - r_v - a) \int_{\lambda-r_v-a}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} d\ell \right] \\
&= \frac{\ell_0}{2} \left[\ln \frac{a-r_v}{\ell_0} + \ln \frac{\lambda-a-r_v}{\ell_0} - \frac{a-r_v}{\ell} \Big|_{a-r_v}^{\infty} - \frac{\lambda-a-r_v}{\ell} \Big|_{\lambda-a-r_v}^{\infty} \right] \\
&= \frac{\ell_0}{2} \left[\ln \left(\frac{(\lambda-a-r_v)(a-r_v)}{\ell_0^2} \right) + 2 \right], \quad \mu = 2. \quad (2.64)
\end{aligned}$$

Calculamos agora a matriz $[A]_{ij}$ para a PDF lei de potência. Utilizando a Eq. (2.38) da mesma forma que para as exponenciais simples e dupla, escrevemos

$$\begin{aligned}
[A]_{i,j} &= [A]_{j,i} = \int_{|x-x'|}^{|x-x'|+\Delta x} \frac{(\mu - 1)(\ell_0)^{\mu-1}}{2\ell^\mu} \\
&= (\mu - 1)(\ell_0)^{\mu-1} \frac{\ell^{1-\mu}}{2(1-\mu)} \Big|_{|x-x'|}^{|x-x'|+\Delta x} \\
&= \frac{\left(\frac{|x-x'|}{\ell_0} \right)^{1-\mu} - \left(\frac{|x-x'|+\Delta x}{\ell_0} \right)^{1-\mu}}{2}. \quad (2.65)
\end{aligned}$$

Utilizando as discretizações, $\ell_0 = m_0\Delta x$, $\tau = m_\tau\Delta x$, $x = i\Delta x$ e $x' = j\Delta x$, finalmente obtemos

$$[A]_{i,j} = \frac{\left(\frac{|i-j|}{m\ell_0}\right)^{1-\mu} - \left(\frac{|i-j|+1}{m\ell_0}\right)^{1-\mu}}{2}. \quad (2.66)$$

Neste capítulo apresentamos as definições e os elementos básicos do modelo de busca aleatória unidimensional estudado nessa dissertação. Em particular, calculamos no contexto do método do operador integral a distância média $\langle L \rangle$ percorrida pelo caminhante entre dois encontros consecutivos de sítios alvos, a qual está diretamente relacionada com a eficiência da busca, como vimos.

Vale mencionar que os resultados do método do operador integral são exatos, embora, como discutido, para viabilizar a sua implementação seja necessário realizar uma discretização do espaço de busca. Nesse sentido, eles se aproximam dos resultados no limite contínuo quando $\Delta x \rightarrow 0$.

No próximo capítulo, continuaremos a abordagem analítica do problema, desta vez, porém, com base em resultados para $\langle L \rangle$ existentes na literatura. Nosso objetivo será calcular analiticamente expressões para a eficiência máxima da busca no regime escasso realizada com os três tipos de PDFs de tamanhos de passos considerados nesse capítulo.

3 CÁLCULOS ANALÍTICOS DA EFICIÊNCIA DA BUSCA ALEATÓRIA UNIDIMENSIONAL

Neste capítulo apresentaremos dois métodos para calcular expressões analíticas para a eficiência da busca aleatória unidimensional. Essas metodologias são gerais no sentido de que podem ser aplicadas para diversas distribuições de tamanhos de passos, embora a complexidade dos cálculos seja um fator limitante.

Para todos os casos utilizaremos o modelo de buscas apresentado no Capítulo 2, ou seja, com um caminhante aleatório limitado a um intervalo unidimensional $[0, L]$, partindo de uma posição inicial x_0 . Estaremos interessados principalmente no regime escasso de buscas não-destrutivas assimétricas, em que $x_0 \ll L$.

Os principais desenvolvimentos analíticos para a distribuição de tamanhos de passos do tipo lei de potência ou Lévy foram baseados em [7, 8], enquanto que para as exponenciais simples e dupla seguiremos a abordagem da referência [12]. No primeiro caso, os resultados para $\langle L \rangle$ são aproximados e tendem ao resultado exato no limite $L \rightarrow \infty$. No segundo caso, os resultados são exatos, embora para a exponencial dupla sejam de difícil trato analítico, de modo que aproximações similares serão necessárias. No capítulo seguinte faremos a comparação entre os resultados destes métodos e aqueles obtidos através do método do operador integral do Capítulo 2.

3.1 Lei de potência (Lévy)

A primeira distribuição de tamanhos de passos que abordaremos neste capítulo é a do tipo lei de potência com expoente $1 < \mu \leq 3$, que constitui o regime assintótico da distribuição α -estável de Lévy, com $\mu = \alpha + 1$. Nosso ponto de partida é a sua expressão dada pela Eq. (2.60). A partir dela utilizamos a metodologia desenvolvida em [7] para obter expressões aproximadas para a distância média $\langle L \rangle$ percorrida entre dois encontros consecutivos de sítios alvos e a eficiência da busca, $\eta = 1/\langle L \rangle$. Como descrito a seguir, esse método é baseado na solução de uma equação diferencial não-homogênea associada a um operador fracionário de Riesz.

A distribuição de passos do tipo lei de potência é expressa pela Eq. (2.60), que

com a substituição $\mu = \alpha + 1$ se torna

$$p(\ell) = \frac{\alpha \ell_0^\alpha \Theta(|\ell| - \ell_0)}{2|\ell|^{\alpha+1}}. \quad (3.1)$$

No Capítulo 2 encontramos através do método do operador integral que

$$\langle L \rangle(x_0) = -[(\mathcal{L} - \mathcal{I})^{-1} \langle |\ell| \rangle](x_0), \quad (3.2)$$

onde o tamanho médio $\langle |\ell| \rangle$ de um passo simples partindo da posição inicial $x_0 = a$ é dado por

$$\langle |\ell| \rangle = \frac{\ell_0}{2(1-\alpha)} \left[\left(\frac{\lambda - a - r_v}{\ell_0} \right)^{1-\alpha} + \left(\frac{a - r_v}{\ell_0} \right)^{1-\alpha} + 2 \right], \quad \alpha \neq 1, \quad (3.3)$$

e

$$\langle |\ell| \rangle = \frac{\ell_0}{2} \left[\ln \left(\frac{(\lambda - a - r_v)(a - r_v)}{\ell_0^2} \right) + 2 \right], \quad \alpha = 1. \quad (3.4)$$

No capítulo anterior, realizamos a discretização do espaço de busca para tratar as quantidades acima. No presente capítulo trabalharemos aproximações para $\langle L \rangle$ no limite contínuo em que o caminhante aleatório pode ocupar qualquer posição no intervalo de busca em uma dimensão.

3.1.1 Aproximação contínua

Para tratar a aproximação contínua que permite obter $\langle L \rangle$, iniciamos definindo o operador [7, 8]

$$\mathcal{D}_\alpha \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-\alpha} [\mathcal{L}(\delta) - \mathcal{I}]. \quad (3.5)$$

A forma acima é baseada no operador que aparece na Eq. (3.2), o qual é fundamental para o cálculo de $\langle L \rangle(x_0)$. O parâmetro δ representa uma pequena escala de comprimento do problema, que fazemos tender a zero no limite contínuo. No caso específico da distribuição de tamanhos de passos do tipo lei de potência, podemos identificar $\delta = \ell_0$, onde o tamanho mínimo do passo tende a zero embora permaneça finito, de modo que no limite contínuo o passo mínimo pode levar o caminhante a ocupar uma posição arbitrariamente próxima da posição de partida.

Para poder compreender a aplicação do operador \mathcal{D}_α a uma dada função $f(x)$,

recordamos que a Eq. (2.22) nos dá

$$[\mathcal{L}\rho_n](x) = \int_{r_v}^{L-r_v} p(x-x')\rho_n(x')dx'.$$

Fazendo acima $\rho_n = f(x)$, $r_v = 0$ e $p(x-x') = \frac{\alpha\ell_0^\alpha\Theta(|(y-x)|-\ell_0)}{2|y-x|^{\alpha+1}}$, obtemos

$$[\mathcal{L}f](y) = \frac{\alpha\ell_0^\alpha}{2} \int_0^L \frac{f(x)\theta(|y-x|-\ell_0)dx}{|y-x|^{\alpha+1}}.$$

Integrando agora a expressão acima por partes e aplicando o resultado na Eq. (3.5), chegamos a [7, 8]

$$[\mathcal{D}_\alpha f](y) = V.P. \int_0^L \frac{\text{sgn}(x-y)f'(x)}{2|y-x|^\alpha} dx - \frac{f(0)}{2y^\alpha} - \frac{f(L)}{2(L-y)^\alpha}, \quad (3.6)$$

em que a notação *V.P.* se refere ao valor principal de Cauchy. Note que nas expressões acima utilizamos a extensão do intervalo L , ao invés do livre caminho médio λ , para corresponder de forma mais aproximada à notação utilizada em [7]. De fato, como comentamos no Capítulo 2, em uma dimensão temos que $L = \lambda$. Além disso, sem perda de generalidade consideraremos a seguir que $r_v = 0$, uma vez que na busca unidimensional é indiferente se a detecção do sítio alvo ocorre na posição $x = r_v$ ou $x = 0$. Comentamos também que existem algumas limitações para as funções $f(x)$ possíveis em que o operador \mathcal{D}_α pode atuar. De fato, é necessário que a sua segunda derivada $f''(x)$ seja finita dentro do intervalo $[0, L]$ e que $f(0)$ e $f(L)$ também sejam finitos [7].

De posse desse operador, temos uma nova expressão para $\langle L \rangle$ obtida pela substituição da Eq. (3.5) na Eq. (3.2),

$$\langle L \rangle = [\mathcal{D}_\alpha^{-1}h(x_0)], \quad (3.7)$$

em que

$$h(x_0) = -\ell_0^\alpha \langle |\ell| \rangle (x_0). \quad (3.8)$$

Utilizando as Eqs. (3.6) e (3.8) chegamos a

$$V.P. \int_0^L \frac{\text{sgn}(x-y)\langle L \rangle'(x)}{2|y-x|^\alpha} dy = -\ell_0^{-\alpha} \langle |\ell| \rangle, \quad (3.9)$$

onde $\langle L \rangle(0) = \langle L \rangle(L) = 0$, já que a distância percorrida para encontrar um sítio alvo quando partimos de um deles é nula.

Fazendo $\langle L \rangle'(x) = \phi(x)$ e $\ell_0^{-\alpha} = h$ na Eq. (3.9) obtemos

$$V.P. \int_0^L \frac{\text{sgn}(y-x)\phi(x)}{2|y-x|^\alpha} dy = h(x). \quad (3.10)$$

A Eq. (3.10) é conhecida como equação integral generalizada de Abel com núcleo fracionário de Riesz [17]. Ela corresponde a uma equação diferencial não-homogênea [59] com condições de contorno correspondentes a $\langle L \rangle(0) = \langle L \rangle(L) = 0$ e solução geral

$$\phi(y) = A\phi_0(y) + \phi_1(y), \quad (3.11)$$

em que A é uma constante dependente da condição inicial, ϕ_0 a solução do caso homogêneo e ϕ_1 a solução do caso particular. A solução do caso homogêneo é dada por [60]

$$\phi_0 = (Lx - x^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}, \quad (3.12)$$

e a solução do caso particular por

$$\phi_1 = \frac{4 \sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{\pi\alpha B(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})} z^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{d}{dz} \int_z^L dt (t^{1-\alpha})(t-z)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{d}{dt} \int_0^t y^{\frac{\alpha}{2}} (t-y)^{\frac{\alpha}{2}-1} h(y) dy, \quad (3.13)$$

onde $B(a, b)$ é a função Beta,

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad (3.14)$$

e $\Gamma(t)$ é a função gamma,

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Voltando ao nosso caso de interesse, utilizamos $h(y) = -\ell_0^\alpha \langle |\ell| \rangle(y)$ e após resolver todas as integrais, inclusive $\int_0^x \phi(z) dz = \langle L \rangle(x)$, obtemos

$$\langle L \rangle(x_0) = L \frac{(2-\alpha)}{2(1-\alpha)} \left[1 - 4 \frac{\psi_\alpha(z) + \psi_\alpha(1-z)}{\alpha(\alpha+2)B(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})} \right] + \frac{2LM^{\alpha-1} \sin(\frac{\pi\alpha}{2})(z-z^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{\pi(\alpha-1)}, \quad (3.15)$$

em que $z = x_0/L$, $M = L/\ell_0$,

$$\psi_\alpha(z) = F(2 - \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} + 2, z) z^{\frac{\alpha}{2}+1}, \quad (3.16)$$

e $F(a, b, c, d)$ é a função hipergeométrica definida por

$$F(a, b, c, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)x^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+c)}. \quad (3.17)$$

Com isso, temos uma expressão aproximada no limite contínuo para a distância média $\langle L \rangle$ percorrida entre dois encontros consecutivos de sítios alvos partindo da posição x_0 no caso da distribuição de tamanhos de passos do tipo lei de potência. Utilizaremos essa expressão no próximo capítulo para encontrar o mínimo de $\langle L \rangle$ no caso da busca não-destrutiva em ambientes escassos, o qual corresponde ao máximo da eficiência da busca, $\eta = 1/\langle L \rangle$.

Um caso particular importante nessa análise ocorre para $\mu = 2$ ou $\alpha = 1$ (distribuição tipo Cauchy). A sua relevância se dá porque no limite $L \rightarrow \infty$ em que o ambiente se torna progressivamente mais escasso em sítios alvos e o caminhante não possui nenhuma informação sobre o espaço de busca, a eficiência da busca é maximizada justamente para $\alpha \rightarrow 1$. Nesse caso, a expressão acima para $\langle L \rangle$ se reduz a

$$\langle L \rangle = \frac{2L\sqrt{z - z^2} \log(M)}{\pi}. \quad (3.18)$$

Na próxima seção obteremos expressões para $\langle L \rangle$ com as distribuições exponenciais simples e dupla de tamanhos de passos utilizando um método distinto baseado no cálculo estatístico do tempo médio de primeira passagem.

3.2 Exponenciais simples e dupla

Nesta seção será introduzida a metodologia geral para se obter a distância média $\langle L \rangle$ percorrida entre dois encontros consecutivos de sítios alvos com uma distribuição hiperexponencial de tamanhos de passos. Em seguida, aplicaremos o método para as distribuições exponenciais simples e dupla.

O método é baseado no cálculo estatístico do tempo médio de primeira passagem $\langle T \rangle$ (ou “mean first passage time”) por qualquer um dos dois sítios alvos no espaço unidimensional. Seguiremos aqui o formalismo apresentado em [12, 10]. Em particular, nestas referências é considerado o tempo de duração t de cada passo, ao invés do seu comprimento $|\ell|$. Contudo, admitindo uma velocidade v constante do caminhante ao longo do passo, tem-se que $|\ell| = vt$. Podemos ainda identificar que $\ell = t$ e $\langle L \rangle = \langle T \rangle$ se

convencionamos que a velocidade do caminhante é unitária, $v = 1$.

A vantagem desse método é que ele permite a obtenção de expressões analíticas exatas para as quantidades médias de interesse, embora ao aumentar o número de exponenciais na distribuição de tempos de duração dos passos o cálculo se torna bastante extenso, como veremos a seguir.

Inicialmente definimos a forma geral da distribuição hiperexponencial de tempos de duração t dos passos, dada em analogia com a distribuição de tamanhos dos passos analisada no capítulo anterior por

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^n w_i \frac{e^{-\frac{t}{\tau_i}}}{\tau_i}, \quad (3.19)$$

em que w_i é o peso estatístico da i -ésima exponencial, com $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, e τ_i a sua respectiva duração característica, associada à persistência da caminhada. Seguindo o desenvolvimento exposto em [12, 10], quando o caminhante utiliza a distribuição $\phi_i(t)$ para se movimentar em um passo de duração t , onde

$$\phi_i(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau_i}}}{\tau_i}, \quad (3.20)$$

então é dito que o caminhante está no estado i . A utilidade de associar as diversas exponenciais da Eq. (3.19) a estados distintos é que desse modo é possível [39] aplicar para o problema do movimento descrito por uma distribuição hiperexponencial o mesmo formalismo utilizado em um sistema com n estados markovianos, cada um deles descrito por uma exponencial simples, que satisfazem à seguinte equação de balanço [12],

$$\rho_i(x, t, \rho_0) = w_i \sum_{k=1}^n \int_0^t \left(\frac{\rho_{k+} + \rho_{k-}}{2} \right) \phi_k(t') dt' + \rho_{i0} \delta(x - x_0) \delta(t), \quad (3.21)$$

onde $\rho_i(x, t, \rho_0)$ é a densidade de probabilidade de que o caminhante inicie no instante t a partir da posição x um passo com duração caracterizada pela distribuição $\phi_i(t)$. A densidade de probabilidade $\rho_0 = \delta(x - x_0)(\rho_{10}, \rho_{20}, \dots, \rho_{n0})$ descreve a condição inicial a partir da posição $x = x_0$, sendo o primeiro passo sorteado em $t = 0$ no estado i com probabilidade ρ_{i0} , onde $\sum_{i=1}^n \rho_{i0} = 1$. Por outro lado, $\rho_{i\pm} = \rho_i(x \pm vt', t - t'; \rho_0)$ corresponde à densidade de probabilidade de dar um passo no estado i de duração t' , iniciado no instante $t - t'$ e na posição $x' = x \pm vt'$, que leva o caminhante a passar pela posição x no

instante t . O sinal nesta expressão descreve um deslocamento para a direita ($-$) ou para a esquerda ($+$). Portanto a integral na Eq (3.21) indica que o caminhante pode assumir a posição x no instante t tendo saído da posição $x \pm vt'$ no instante $t - t'$ e realizado um salto de duração t' através de qualquer um dos estados k possíveis, em que se soma sobre todos os estados e se integra sobre todas as durações possíveis do passo até a duração máxima t correspondente ao próprio instante t . Já o termo com as deltas de Dirac dá conta da condição inicial da caminhada, a partir da posição $x = x_0$, no instante $t = 0$ e no estado i .

Para poder compreender o movimento desse caminhante aleatório, necessitamos também da equação que rege a densidade de probabilidade de que ele esteja na posição x , no instante t e no estado i ,

$$P_i(x, t; \rho_0) = \int_0^t \left(\frac{\rho_{i+} + \rho_{i-}}{2} \right) \tau_i \phi_i(t') dt'. \quad (3.22)$$

A integral acima leva em conta todas as possibilidades de dar um passo para a direita ou para a esquerda que satisfaça esse requisito. Observamos que o termo $\tau_i \phi_i(t')$ representa a probabilidade de que o passo dure no mínimo um tempo t' , tal que o caminhante pode passar na posição x , no instante t e no estado i durante um passo que eventualmente ainda não chegou ao seu final [10].

Algo importante a se notar é que as Eqs. (3.21) e (3.22) são válidas para um caminhante aleatório no espaço livre. Se desejamos estudar o tempo médio de primeira passagem por um dos sítios alvos nas posições $x = 0$ e $x = L$, precisamos então adequar a Eq. (3.22) para o intervalo unidimensional de interesse $[0, L]$. Primeiramente, aplicamos a transformada de Laplace à Eq. (3.22). Utilizando a propriedade de convolução obtemos

$$P_i(x, s; \rho_0) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(s) e^{-\beta_j(s) \frac{|x-x_0|}{v}}, \quad (3.23)$$

em que os coeficientes α_{ij} e β_j são obtidos a partir da solução das Eqs. (3.21) e (3.22). No intervalo de interesse, $0 \leq x \leq L$, escrevemos a densidade de probabilidade correspondente como [9]

$$Q_i(x, s, \rho_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_i(x + mL, s; \rho_0). \quad (3.24)$$

A forma da expressão acima é essencialmente similar à obtida pela aplicação do método das imagens na eletrostática com condições de contorno específicas [31]. Seja na eletrostática ou no problema do caminhante aleatório, a solução no espaço $0 < x < L$ entre as fronteiras pode ser obtida através da colocação de “cargas imagens” nas regiões $x < 0$ e $x > L$. No caso de condições periódicas de contorno um número infinito de cargas é necessário, as quais contribuem com os termos do somatório de modo a satisfazer adequadamente as condições de contorno. De fato, é possível aplicar o método das imagens para diversos problemas envolvendo caminhadas aleatórias, como, por exemplo, no espaço bidimensional em que o alvo é um disco localizado a uma determinada distância do caminhante [9].

Podemos agora substituir a Eq. (3.23) na Eq. (3.24), de modo que

$$Q_i(x, s, \rho_0) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(s) \left(\frac{e^{-\beta_j(s) \frac{L-|x-x_0|}{v}} + e^{-\beta_j(s) \frac{|x-x_0|}{v}}}{1 - e^{-\frac{\beta_j(s)L}{v}}} \right). \quad (3.25)$$

De posse da Eq. (3.25), podemos escrever a taxa de probabilidade q_i de encontro de qualquer um dos sítios alvos (não necessariamente apenas pela primeira vez), com o caminhante no estado i , a partir da densidade de probabilidade Q_i de encontrá-lo nesse estado nas posições dos sítios alvos em qualquer instante t na presença de condições periódicas de contorno [10], isto é,

$$\begin{aligned} q_i(t, \rho_0) &= vQ_i(0, t, \rho_0), & 0 < x_0 < L, \\ q_i(t, \rho_0) &= vQ_i(0, t, \rho_0) - \frac{\delta(t)}{2}, & x_0 = 0, x_0 = L, \\ q_i(t, \rho_k) &= vQ_i(0, t, \rho_k) - \frac{\delta(t)}{2}, & x_0 = 0, x_0 = L. \end{aligned} \quad (3.26)$$

A diferença entre as taxas $q_i(t, \rho_0)$ e $q_i(t, \rho_k)$ é que nesta última a caminhada tem início no estado específico k , isto é, com a duração do passo inicial determinada a partir da k -ésima exponencial na Eq. (3.19). As deltas de Dirac nas duas últimas expressões acima dizem respeito às situações em que o caminhante parte da posição de um dos sítios alvos e portanto encontra um sítio alvo já no instante inicial $t = 0$ [10, 12]. Nessa dissertação estamos interessados na situação descrita pela primeira linha da Eq. (3.26), em que a posição inicial do caminhante é tal que $0 < x_0 < L$, com o regime de busca não-destrutiva assimétrica correspondendo a $x_0 \ll L$. Veremos a seguir como estas taxas de probabilidade

de encontros serão úteis para o cálculo do tempo médio de primeira passagem, $\langle T \rangle$.

Como mencionado acima, a taxa de probabilidade q_i de encontro de um dos sítios alvos no estado i considera não apenas o primeiro encontro, mas também qualquer passagem pelos sítios alvos em um instante t posterior ao do primeiro encontro. Como o nosso interesse específico está no primeiro encontro, observamos que q_i também pode ser convenientemente expresso em termos de uma nova função associada f_i que dá a taxa de probabilidade do primeiro encontro de um dos sítios alvos com o caminhante no estado i [11],

$$q_i(t, \rho_0) = f_i(t, \rho_0) + \sum_{k=1}^n \int_0^t f_k(t-t', \rho_0) q_i(t', \rho_k) dt', \quad (3.27)$$

em que o primeiro termo acima se refere ao primeiro encontro, enquanto o segundo termo leva em conta as contribuições para q_i a partir do segundo encontro em diante.

Na verdade, a Eq. (3.27) representa um sistema de n equações acopladas, associadas aos estados $i = 1, 2, \dots, n$. Vale lembrar que n é o número de exponenciais que compõem a distribuição hiperexponencial (3.19). Assim, é possível expressar cada f_i em termos de todas as taxas q_k , sendo que estas, por sua vez, são determinadas via a Eq. (3.26) a partir das densidades de probabilidade Q_k calculadas em (3.25). É necessário, portanto, resolver o sistema de equações para as taxas f_i , o que pode ser feito com o auxílio da transformada de Laplace e da propriedade de convolução. Nas próximas subseções, este cálculo será feito explicitamente para as distribuições de tempos de duração de passos do tipo exponencial simples ($n = 1$) e dupla ($n = 2$).

Após obter para cada estado i a respectiva taxa de probabilidade f_i de primeira passagem por qualquer um dos sítios alvos, somamos sobre todos os estados e obtemos a taxa total $f(t, \rho_0) = \sum_{i=1}^n f_i(t, \rho_0)$ [12]. Como o tempo médio de primeira passagem é obtido através de [39]

$$\langle T \rangle = \int_0^\infty t f(t, \rho_0) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-st} t f(t, \rho_0) dt = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{df(s, \rho_0)}{ds},$$

então chegamos ao resultado chave dessa seção,

$$\langle T \rangle = - \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{df_i(s, \rho_0)}{ds}. \quad (3.28)$$

Com isso, temos um método para calcular a expressão do tempo médio $\langle T \rangle$ transcorrido

até o primeiro encontro de qualquer um dos sítios alvos, que, como observamos, também corresponde quando $v = 1$ à distância média $\langle L \rangle$ percorrida pelo caminhante entre dois encontros consecutivos de sítios alvos. Finalmente, a eficiência da busca é determinada via $\eta = 1/\langle L \rangle$.

A seguir aplicaremos o método apresentado acima para as distribuições exponencial simples e exponencial dupla de tempos de duração (ou tamanho) dos passos.

3.2.1 Exponencial simples

Nessa subseção será realizado o cálculo da expressão analítica para $\langle T \rangle$ no caso de uma distribuição exponencial simples de tempos de duração dos passos. Como veremos, este cálculo será consideravelmente mais simples que o da exponencial dupla, a ser realizado na próxima subseção. Assim, o estudo da exponencial simples servirá como uma introdução à aplicação explícita do método, além de permitir a checagem da expressão obtida para $\langle T \rangle$ com o resultado já conhecido na literatura obtido por outros métodos.

A distribuição exponencial simples para a duração t dos passos é dada pela Eq. (3.19) com $n = 1$,

$$\phi(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}, \quad (3.29)$$

em que τ é a duração característica e $w_1 = 1$ devido ao fato de que com $n = 1$ só há um estado possível ($i = 1$) para o caminhante aleatório.

Nesse caso, a Eq. (3.21) é escrita como

$$\rho(x, t; \rho_0) = \int_0^t \left(\frac{\rho(x + vt', t - t'; \rho_0) + \rho(x - vt', t - t'; \rho_0)}{2} \right) e^{-\frac{t'}{\tau}} dt' + \rho_0 \delta(x - x_0) \delta(t). \quad (3.30)$$

Tomando a transformada de Fourier da Eq. (3.30) e utilizando a propriedade de translação,

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-ikt_0} f(k), \quad (3.31)$$

obtemos

$$\rho(k, t, \rho_0) = \int_0^t \frac{\rho(k, t - t'; \rho_0) (e^{t'(ikv - \frac{1}{\tau})} + e^{-t'(ikv + \frac{1}{\tau})})}{2} + \rho_{10} e^{-ikx_0} \delta(t). \quad (3.32)$$

Aplicando agora a transformada de Laplace à Eq. (3.32) em conjunto com a propriedade

de convolução,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] = F(s)G(s), \quad (3.33)$$

em que $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, ficamos com

$$\rho(k, s, \rho_0) = \frac{\rho(k, s, \rho_0)}{\tau} \left(\frac{s + \frac{1}{\tau}}{(s + \frac{1}{\tau})^2 + (kv)^2} \right) + \rho_{10}e^{-ikx_0}, \quad (3.34)$$

de onde obtemos

$$\rho(k, s, \rho_0) = e^{-ikx_0} \rho_{10} \frac{(1 + 2s\tau + s^2\tau^2 + k^2\tau^2v^2)}{s\tau + s^2\tau^2 + \tau^2k^2v^2}. \quad (3.35)$$

De posse de $\rho(k, s; \rho_0)$, aplicamos a Eq. (3.35) na Eq. (3.22), de modo que

$$P(x, t; \rho_0) = \int_0^t \left(\frac{\rho(x + vt, t - t'; \rho_0) + \rho(x - vt, t - t'; \rho_0)}{2} \right) e^{\frac{-t'}{\tau}} dt'. \quad (3.36)$$

Novamente, aplicamos acima as transformadas de Fourier e Laplace com as propriedades de translação e convolução, implicando em

$$P(k, s; \rho_0) = \rho(k, s; \rho_0) \left(\frac{s + \frac{1}{\tau}}{(s + \frac{1}{\tau})^2 + (kv)^2} \right). \quad (3.37)$$

Substituindo a Eq. (3.35) na Eq. (3.37) encontramos

$$P(k, s; \rho_0) = e^{-ikx_0} \rho_{10} \frac{(s + \frac{1}{\tau})(1 + 2s\tau + s^2\tau^2 + k^2v^2\tau^2)}{((s + \frac{1}{\tau})^2 + k^2v^2)(s\tau + s^2\tau^2 + k^2v^2\tau^2)}, \quad (3.38)$$

que após a transformada inversa de Fourier é expressa como

$$P(x, s; \rho_0) = \frac{\rho_{10}(s\tau + 1) \sqrt{\frac{\tau v^2}{2s^2\tau + 2s}} e^{-\frac{|x-x_0|}{\sqrt{\frac{\tau v^2}{s^2\tau + s}}}}}{\tau v^2}. \quad (3.39)$$

Como temos apenas um estado então $\rho_{10} = 1$ acima. Em seguida, substituindo a Eq. (3.39) na Eq. (3.25) obtemos

$$Q(x, s; \rho_0) = \frac{(s\tau + 1) \sqrt{\frac{\tau v^2}{s^2\tau + s}} \left(e^{-\frac{\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}(L-|x-x_0|)}{v}} + e^{-\frac{\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}|x-x_0|}{v}} \right)}{2\tau v^2 \left(1 - e^{-\frac{L\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}}{v}} \right)}, \quad (3.40)$$

e utilizando a Eq. (3.26) encontramos a taxa de probabilidade de encontro de qualquer um dos sítios alvos,

$$q(s, \rho_0) = \frac{(s\tau + 1) \sqrt{\frac{\tau v^2}{s^2\tau + s}} \left(e^{\frac{(L-x_0)\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}}{v}} + e^{\frac{x_0\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}}{v}} \right)}{2\tau v^2 \left(e^{\frac{L\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}}{v}} - 1 \right)}. \quad (3.41)$$

Fazemos ainda $x_0 = 0$ ou $x_0 = L$ para calcular $q_i(t, \rho_1)$,

$$q(s, \rho_1) = \frac{(s\tau + 1) \sqrt{\frac{\tau v^2}{s^2\tau + s}} \left(e^{\frac{L\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}}{v}} + 1 \right)}{2\tau v^2 \left(e^{\frac{L\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}}{v}} - 1 \right)} - \frac{1}{2}. \quad (3.42)$$

Agora que possuímos a taxa q de encontros (não apenas o primeiro) de um dos sítios alvos para a distribuição exponencial simples, podemos encontrar a taxa f de probabilidade do primeiro encontro. Tomando a transformada de Laplace da Eq. (3.27) com $n = 1$, obtemos

$$q(s; \rho_0) = f(s; \rho_0) + f(s; \rho_0)q(s; \rho_1), \quad (3.43)$$

que implica em

$$f(s; \rho_0) = \frac{q(s; \rho_0)}{1 + q(s; \rho_1)}. \quad (3.44)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (3.44) na Eq. (3.28), encontramos o tempo médio de primeira passagem por um dos sítios alvos quando a distribuição de tempos de duração de passos é dada por uma exponencial simples,

$$\langle T \rangle = \frac{L}{2} + \frac{x_0(L - x_0)}{2v^2\tau}. \quad (3.45)$$

É importante comentar que essa expressão coincide com o resultado clássico obtido por Weiss em 1983 através da equação de Fokker-Planck que descreve o problema [66].

3.2.2 Exponencial dupla

Nessa subseção será realizado o cálculo da expressão analítica para $\langle T \rangle$ com a distribuição de tempos de duração dos passos do tipo exponencial dupla. Os passos básicos

são os mesmos da seção anterior para o caso da exponencial simples. Entretanto, como veremos, o fato de termos duas exponenciais ($n = 2$) na distribuição, ao invés de apenas uma ($n = 1$), torna os cálculos bem mais extensos e as expressões obtidas bem mais longas.

A distribuição dos tempos de duração dos passos do tipo exponencial dupla é dada Eq. (3.19) com $n = 2$,

$$\phi(t) = w_1 \frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\tau_1} + w_2 \frac{e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_2}, \quad (3.46)$$

em que τ_1 e τ_2 são as durações características respectivamente associadas aos estados $i = 1$ e $i = 2$, e w_1 e w_2 os seus respectivos pesos estatísticos, com $w_1 + w_2 = 1$.

Inicialmente substituímos a Eq. (3.46) na Eq. (3.21), de modo que

$$\begin{aligned} \rho_1(x, t; \rho_0) = w_1 \left[\int_0^t \left(\frac{\rho_1(x + vt', t - t'; \rho_0) + \rho_1(x - vt', t - t'; \rho_0)}{2} \right) e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}} dt' + \right. \\ \left. \int_0^t \left(\frac{\rho_2(x + vt', t - t'; \rho_0) + \rho_2(x - vt', t - t'; \rho_0)}{2} \right) e^{-\frac{t-t'}{\tau_2}} dt' \right] + \rho_{10} \delta(x - x_0) \delta(t) \end{aligned} \quad (3.47)$$

e

$$\begin{aligned} \rho_2(x, t; \rho_0) = w_2 \left[\int_0^t \left(\frac{\rho_1(x + vt', t - t'; \rho_0) + \rho_1(x - vt', t - t'; \rho_0)}{2} \right) e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}} dt' + \right. \\ \left. \int_0^t \left(\frac{\rho_2(x + vt', t - t'; \rho_0) + \rho_2(x - vt', t - t'; \rho_0)}{2} \right) e^{-\frac{t-t'}{\tau_2}} dt' \right] + \rho_{20} \delta(x - x_0) \delta(t). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Aplicando acima as transformadas de Fourier e Laplace com a utilização das propriedades das Eqs. (3.31) e (3.33), encontramos

$$\rho_1(s, k; \rho_0) = w_1 \left[\frac{\rho_1(s + \tau_1^{-1})}{\tau_1((s + \tau_1^{-1})^2 + (kv)^2)} + \frac{\rho_2(s + \tau_2^{-1})}{\tau_2((s + \tau_2^{-1})^2 + (kv)^2)} \right] + e^{-ikx_0} \rho_{10} \quad (3.49)$$

e

$$\rho_2(s, k; \rho_0) = w_2 \left[\frac{\rho_1(s + \tau_1^{-1})}{\tau_1((s + \tau_1^{-1})^2 + (kv)^2)} + \frac{\rho_2(s + \tau_2^{-1})}{\tau_2((s + \tau_2^{-1})^2 + (kv)^2)} \right] + e^{-ikx_0} \rho_{20}. \quad (3.50)$$

Resolvendo esse sistema de $n = 2$ equações, obtemos as seguintes expressões para $\rho_1(k, s; \rho_0)$ e $\rho_2(k, s; \rho_0)$:

$$\rho_1 = \frac{\exp^{-ikx_0} ((k\tau_1 v)^2 + (s\tau_1 + 1)^2) (\rho_{10} \tau_2 (k^2 \tau_2 v^2 + s^2 \tau_2 + s) + s \tau_2 w_1 + w_1)}{\tau_2 ((k\tau_1 v)^2 + (s\tau_1 + 1)^2) (k^2 \tau_2 v^2 + s^2 \tau_2 + s) + w_1 (\tau_2 - \tau_1) (-k^2 v^2 (s\tau_1 \tau_2 + \tau_1 + \tau_2) - s (s\tau_1 + 1) (s\tau_2 + 1))} \quad (3.51)$$

e

$$\rho_2 = -\frac{e^{-ikx_0}((k\tau_2 v)^2 + (s\tau_2 + 1)^2)(\tau_1(k^2(\rho_{10} - 1)\tau_1 v^2 + (\rho_{10} - 1)s^2\tau_1 + s(\rho_{10} + w_1 - 2)) + w_1 - 1)}{\tau_2((k\tau_1 v)^2 + (s\tau_1 + 1)^2)(k^2\tau_2 v^2 + s^2\tau_2 + s) + w_1(\tau_2 - \tau_1)(-k^2 v^2(s\tau_1\tau_2 + \tau_1 + \tau_2) - s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1))}. \quad (3.52)$$

Após aplicar as transformadas de Fourier e Laplace nas expressões acima, encontramos as densidades de probabilidade

$$P_1(k, s; \rho_0) = \rho_1(k, s; \rho_0) \left(\frac{s + \frac{1}{\tau_1}}{(s + \frac{1}{\tau_1})^2 + (kv)^2} \right) \quad (3.53)$$

e

$$P_2(k, s; \rho_0) = \rho_2(k, s; \rho_0) \left(\frac{s + \frac{1}{\tau_2}}{(s + \frac{1}{\tau_2})^2 + (kv)^2} \right). \quad (3.54)$$

Substituindo agora a Eq. (3.51) na Eq. (3.53), temos que

$$P_1(k, s; \rho_0) = \frac{a_1(s) + a_2(vk)^2}{b_1 + b_2(vk)^2 + (vk)^4}, \quad (3.55)$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= (s + \tau_1^{-1})(s + \tau_2^{-1})(s\rho_{10} + w_1\tau_2^{-1}), \\ a_2 &= \rho_{10}(s + \tau_1^{-1}), \\ b_1 &= s(s + \tau_1^{-1})(s + \tau_2^{-1})(s + w_2\tau_1^{-1} + w_1\tau_2^{-1}), \\ b_2 &= (s + \tau_1^{-1})(s + w_2\tau_1^{-1}) + (s + \tau_2^{-1})(s + w_1\tau_2^{-1}). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Para $P_2(k, s; \rho_0)$ encontramos a mesma estrutura acima, porém com as substituições $\tau_1 \leftrightarrow \tau_2$, $w_1 \leftrightarrow w_2$ e $\rho_{10} \leftrightarrow \rho_{20}$.

Fazendo a transformada inversa de Fourier de $P_1(k, s; \rho_0)$, ficamos com

$$P_1(x, s; \rho_0) = \frac{a_1 - a_2\beta_-^2}{2\beta_-(b_2 - 2\beta_-^2)} e^{-\beta_- \frac{|x-x_0|}{v}} + \frac{a_1 - a_2\beta_+^2}{2\beta_+(b_2 - 2\beta_+^2)} e^{-\beta_+ \frac{|x-x_0|}{v}}, \quad (3.57)$$

onde $\beta_{\pm} = b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4b_1}$. Um cálculo análogo leva à expressão para $P_2(k, s; \rho_0)$.

Substituindo a Eq. (3.57) na Eq. (3.24), temos que

$$Q_1(x, s; \rho_0) = \frac{a_1 - a_2\beta_-^2}{2\beta_-(b_2 - 2\beta_-^2)} \frac{e^{-\frac{\beta_-(L-|x-x_0|)}{v}} + e^{-\frac{\beta_-|x-x_0|}{v}}}{1 - e^{-\frac{\beta_-L}{v}}} + \frac{a_1 - a_2\beta_+^2}{2\beta_+(b_2 - 2\beta_+^2)} \frac{e^{-\frac{\beta_+(L-|x-x_0|)}{v}} + e^{-\frac{\beta_+|x-x_0|}{v}}}{1 - e^{-\frac{\beta_+L}{v}}}, \quad (3.58)$$

e expressão análoga para $Q_2(x, s; \rho_0)$.

Utilizando a Eq. (3.25) obtemos as taxas de probabilidade de encontro fazendo $x = 0$ na Eq. (3.58),

$$q_1(s, \rho_0) = \frac{a_1 - a_2\beta_-^2}{2\beta_-(b_2 - 2\beta_-^2)} \frac{e^{-\frac{\beta_-(L-x_0)}{v}} + e^{-\frac{\beta_-x_0}{v}}}{1 - e^{-\frac{\beta_-L}{v}}} + \frac{a_1 - a_2\beta_+^2}{2\beta_+(b_2 - 2\beta_+^2)} \frac{e^{-\frac{\beta_+(L-x_0)}{v}} + e^{-\frac{\beta_+x_0}{v}}}{1 - e^{-\frac{\beta_+L}{v}}}. \quad (3.59)$$

Por outro lado, fazendo $x_0 = 0$ e $\rho_{10} = 1$ calculamos

$$q_1(s, \rho_1) = \frac{a_1 - a_2\beta_-^2}{2\beta_-(b_2 - 2\beta_-^2)} \frac{\left(e^{-\frac{\beta_-L}{v}} + 1\right)}{\left(1 - e^{-\frac{\beta_-L}{v}}\right)} + \frac{a_1 - a_2\beta_+^2}{2\beta_+(b_2 - 2\beta_+^2)} \frac{\left(e^{-\frac{\beta_+L}{v}} + 1\right)}{\left(1 - e^{-\frac{\beta_+L}{v}}\right)} - \frac{1}{2}, \quad (3.60)$$

em que, colocando $\rho_{10} = 1$ na Eq. (3.56),

$$\begin{aligned} a_1 &= (s + \tau_1^{-1})(s + \tau_2^{-1})(s + w_1\tau_2^{-1}), \\ a_2 &= (s + \tau_1^{-1}), \end{aligned} \quad (3.61)$$

com as constantes β_{\pm} permanecendo as mesmas. Para $q_1(s, \rho_2)$ obtemos essencialmente a mesma expressão de $q_1(s, \rho_1)$, mas com $a_2 = 0$ e $a_1 = (s + \tau_1^{-1})(s + \tau_2^{-1})(w_1\tau_2^{-1})$. Por outro lado, para obter as expressões para $q_2(s, \rho_0)$, $q_2(s, \rho_1)$ e $q_2(s, \rho_2)$ é necessário fazer as substituições mencionadas acima.

Com as taxas q_i de encontros (não apenas o primeiro) dos sítios alvos para a distribuição exponencial dupla, podemos encontrar as taxas $f_i(t, \rho_0)$ de probabilidade do

primeiro encontro. Fazendo a transformada de Laplace da Eq. (3.26) com $n = 2$,

$$q_1(s; \rho_0) = f_1(s; \rho_0) + f_1(s; \rho_0)q_1(s; \rho_1) + f_2(s; \rho_0)q_1(s; \rho_2) \quad (3.62)$$

e

$$q_2(s; \rho_0) = f_2(s; \rho_0) + f_1(s; \rho_0)q_2(s; \rho_1) + f_2(s; \rho_0)q_2(s; \rho_2). \quad (3.63)$$

Resolvendo o sistema de equações acima obtemos

$$f_1(s; \rho_0) = \frac{q_1(s; \rho_0)(1 + q_2(s; \rho_2)) - q_1(s; \rho_2)q_2(s; \rho_0)}{1 + q_1(s; \rho_1) + q_2(s; \rho_2) + q_2(s; \rho_2)q_1(s; \rho_1) - q_1(s; \rho_2)q_2(s; \rho_1)} \quad (3.64)$$

e

$$f_2(s; \rho_0) = \frac{q_2(s; \rho_0)(1 + q_1(s; \rho_1)) - q_2(s; \rho_1)q_1(s; \rho_0)}{1 + q_1(s; \rho_1) + q_2(s; \rho_2) + q_2(s; \rho_2)q_1(s; \rho_1) - q_1(s; \rho_2)q_2(s; \rho_1)}. \quad (3.65)$$

Em seguida, substituindo as Eqs. (3.64) e (3.65) na Eq. (3.27), encontramos

$$\langle T \rangle = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \frac{q_2(s; \rho_0)(1 + q_1(s; \rho_1) - q_1(s; \rho_2)) + q_1(s; \rho_0)(1 - q_2(s; \rho_1) + q_2(s; \rho_2))}{1 + q_1(s; \rho_1) + q_2(s; \rho_2) + q_2(s; \rho_2)q_1(s; \rho_1) - q_1(s; \rho_2)q_2(s; \rho_1)}. \quad (3.66)$$

Observe que ao substituirmos acima os resultados para as três taxas q_1 e as três taxas q_2 obtidos acima, a expressão final geral para o tempo médio $\langle T \rangle$ de primeira passagem por um dos sítios alvos ficará bastante longa. No entanto, nessa dissertação não estamos interessados no caso geral das caminhadas descritas pela distribuição exponencial dupla de tempos de duração dos passos, mas sim em um subespaço do espaço total de parâmetros da distribuição $\{\tau_1, w_1, \tau_2, w_2\}$, com $w_1 + w_2 = 1$, associado a uma eficiência da busca não-destrutiva em ambientes escassos comparável à eficiência máxima obtida com a distribuição do tipo lei de potência (Lévy) com $\mu \rightarrow 2$. Como discutido, nesse caso há um equilíbrio entre um grande número de pequenos passos que tendem a encontrar o sítio alvo mais próximo (a uma distância inicial $x_0 \ll L$ do caminhante) e um pequeno, mas relevante, número de longos passos, que tendem a encontrar o sítio alvo mais distante. Para que esse mesmo tipo de balanço também se dê com a exponencial dupla, é necessário fazer com que uma das exponenciais favoreça os pequenos passos enquanto que a outra favoreça longos passos que, assim como no caso da lei de potência, permitam o acesso ao sítio alvo distante. Isso de fato pode ser conseguido com as escolhas $\tau_1 \gg L/v$ e $\tau_2 \ll L/v$. Nesse

caso, a expressão para o tempo médio de primeira passagem se reduz consideravelmente, sendo dada aproximadamente por [12]

$$\langle T \rangle = \frac{L}{2v} + \frac{\tau_2(1-w_1)}{w_1} \left(1 - \frac{1 + \frac{Lw_1}{2v\tau_2}}{1 + \sqrt{w_1}} e^{-\frac{\sqrt{w_1}x}{v\tau_2}} \right). \quad (3.67)$$

O resultado acima será fundamental para as análises do próximo capítulo. De fato, a partir dele vamos estudar como o máximo da eficiência da busca aleatória realizada com uma distribuição do tipo exponencial dupla escala com L em ambientes escassos. Se considerarmos também os resultados obtidos no presente capítulo para a eficiência da busca com distribuições do tipo lei de potência e exponencial simples, poderemos então fazer uma análise comparativa das três estratégias de busca, como veremos no próximo capítulo.

4 RESULTADOS

Nos capítulos anteriores mostramos como calcular a eficiência da busca aleatória de diferentes formas, utilizando os métodos do operador integral, do operador fracionário de Riesz e do tempo médio de primeira passagem.

Neste capítulo, estes métodos serão aplicados para a análise comparativa da eficiência máxima da busca quando a PDF de tamanhos dos passos é do tipo exponencial simples, exponencial dupla e lei de potência (Lévy). Nosso foco será o caso de buscas não-destrutivas assimétricas em que $x_0 \ll L$, no regime de escassez de recursos em que a extensão L do intervalo de busca se torna progressivamente maior.

Inicialmente, aplicaremos o método do operador integral do Capítulo 2 às três distribuições com o auxílio do software *Octave*. Para checar que o método e os programas de fato funcionam bem, comparamos os nossos resultados com aqueles presentes na literatura. Em seguida, faremos uma análise comparativa das expressões analíticas obtidas no Capítulo 3 para a eficiência da busca realizada com as três distribuições.

4.1 Checagem dos programas para o método do operador integral

Vamos começar checando se os resultados obtidos com os programas para o método do operador integral concordam com aqueles já existentes na literatura. A verificação consiste no cálculo da eficiência da busca via $\eta = \frac{1}{\langle L \rangle}$ com o auxílio do software *Octave*. Após a construção do gráfico da eficiência em função de um determinado parâmetro de cada uma das três PDFs de tamanhos dos passos, é feita a comparação entre os resultados que, como veremos a seguir, concordam bastante bem. Após essa checagem, temos a segurança de que os nossos programas estão funcionando bem e os aplicamos para a análise comparativa da eficiência máxima das buscas não-destrutivas no regime escasso.

Cada uma das três PDFs de interesse possui particularidades quanto à escolha dos parâmetros. Além dos parâmetros relacionados à PDF propriamente dita, temos também aqueles relacionados à caminhada aleatória, tais como Δx , L , x_0 , ℓ_0 e r_v . A seguir, os parâmetros foram escolhidos de modo a coincidir com aqueles utilizados em trabalhos já publicados, a fim de permitir uma comparação adequada.

Como descrevemos no Capítulo 2, a ausência de expressões analíticas para o operador integral \mathcal{L} faz com que seja necessária a discretização das posições do espaço de

busca na forma $x = i\Delta x$, onde o índice discreto i é dado por números inteiros. Nesse caso, o operador \mathcal{L} assume uma forma matricial adequada à obtenção de resultados. Além disso, como discutido anteriormente na busca unidimensional o raio de visão r_v não possui papel relevante, de modo que sem prejuízo à generalidade dos resultados iremos considerar $r_v = 0$ na maior parte dos resultados a seguir. No espaço discreto, a posição inicial do caminhante aleatório é escrita como

$$x_0 = i_0\Delta x. \quad (4.1)$$

Logo, a distância média percorrida entre dois encontros consecutivos de sítios alvos no espaço contínuo, $\langle L \rangle(x_0)$, se torna um vetor coluna com linhas i_0 , isto é, $\langle L \rangle(i_0)$. Em particular, se o caminhante sai de uma posição específica $x_0 = a$, escrevemos que $a = i_a\Delta x$, de modo que $i_0 = i_a$.

Utilizando os resultados desenvolvidos no Capítulo 2, temos que $\langle L \rangle(i_a)$ é dada pela i_a -ésima linha do vetor coluna obtido pelo produto da matriz $(I - A)^{-1}$ pelo vetor $\langle |\ell| \rangle$, isto é,

$$[\langle L \rangle]_{i_a} = \sum_{i_n=m_r+1}^{M-m_r-1} \left[(I - A)^{-1} \right]_{i_a, i_n} [\langle |\ell| \rangle]_{i_n}. \quad (4.2)$$

Empregaremos a seguir a matriz A e o vetor coluna $\langle |\vec{\ell}| \rangle$ calculados no capítulo anterior para cada PDF de tamanhos de passos a fim de verificar se o programa está funcionando de forma acurada ou não.

4.1.1 Exponencial simples

A primeira PDF de tamanhos de passos a ser checada é a exponencial simples, dada por

$$p(\ell) = \frac{\Theta(|\ell| - \ell_0) e^{-\frac{(|\ell| - \ell_0)}{\tau}}}{2\tau}, \quad (\text{Exp Simples}). \quad (4.3)$$

Essa escolha se deve à existência de vários resultados bem estabelecidos na literatura para essa distribuição, em particular uma expressão analítica exata para $\langle L \rangle(x_0)$ obtida via equação de Fokker-Planck [66, 27], a qual é dada pela Eq. (3.45) com $v = 1$ de modo que $\langle L \rangle = \langle T \rangle$:

$$\langle L \rangle(x_0) = \frac{L}{2} + \frac{x_0(L - x_0)}{\tau}, \quad (\text{Exp Simples}). \quad (4.4)$$

No capítulo anterior nós confirmamos esse resultado utilizando o método do tempo médio de primeira passagem. Para não haver confusão, procuraremos sempre explicitar a seguir se os dados apresentados se referem ao método do operador integral ou à expressão analítica acima.

No contexto do método do operador integral, obtivemos na Subseção 2.2.1 os seguintes resultados:

$$\langle |\ell| \rangle = (\ell_0 + \tau(1 - \frac{[e^{-\frac{-(L-a-rv-\ell_0)}{\tau}} + e^{-\frac{-(a-rv-\ell_0)}{\tau}}]}{2}))), \quad (4.5)$$

e

$$[A]_{i,j} = [A]_{j,i} = e^{\frac{m\ell_0}{m\tau}} [e^{-\frac{|i-j|}{m\tau}} - e^{-\frac{|i-j|+1}{m\tau}}]. \quad (4.6)$$

Para observar se o programa está implementado corretamente, comparamos os resultados obtidos utilizando as Eqs. (4.5) e (4.6) na Eq. (4.2) com aqueles referentes à curva teórica da Eq. (4.4).

Nas Figs. Figura 12 e Figura 13 mostramos a eficiência da busca, $\eta = 1/\langle L \rangle$, em função do comprimento característico τ , com $L = 1000$, $\ell_0 = 0.2$ e $\Delta x = 0.2$, nos respectivos casos de buscas não-destrutivas ($x_0 = 1$) e destrutivas ($x_0 = L/2 = 500$). Como é possível observar nos dois gráficos, os resultados obtidos com o programa do método do operador integral (pontos azuis) concordam bastante bem com a curva analítica exata (linhas sólidas) em ambos os regimes.

Passamos agora para a checagem com as outras distribuições de tamanhos de passos.

4.1.2 Exponencial dupla

Na distribuição do tipo exponencial dupla surgem novos parâmetros. De fato, as exponenciais nessa PDF possuem a elas associados os comprimentos característicos τ_1 e τ_2 e os pesos estatísticos w_1 e w_2 , com $w_1 + w_2 = 1$. Temos então a seguinte expressão para a PDF exponencial dupla:

$$p(\ell) = \mathcal{A}\Theta(|\ell| - \ell_0)(w_1 e^{-\frac{|\ell|}{\tau_1}} + w_2 e^{-\frac{|\ell|}{\tau_2}}), \quad (Exp\ Dupla), \quad (4.7)$$

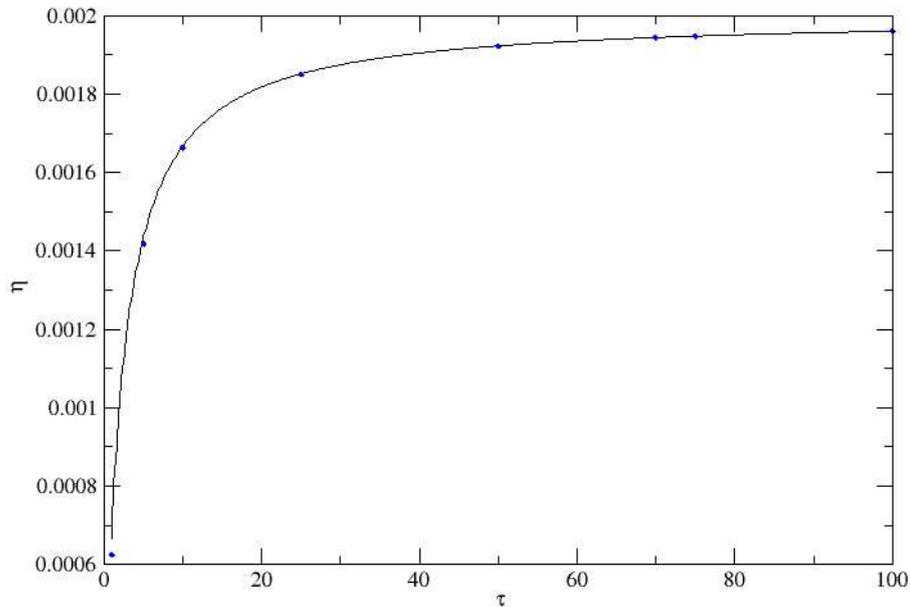


Figura 12: Eficiência η da busca realizada com a distribuição exponencial simples de tamanhos de passos em função do comprimento característico τ , para o caso não-destrutivo com $\ell_0 = 0.2$, $x_0 = 1$, $L = 10^3$ e $\Delta x = 0.2$. Nos pontos azuis utilizamos o método do operador integral, enquanto a linha sólida representa a expressão analítica obtida em [66] via equação de Fokker-Planck e em [12] através do tempo médio de primeira passagem. Uma boa concordância de resultados é observada.

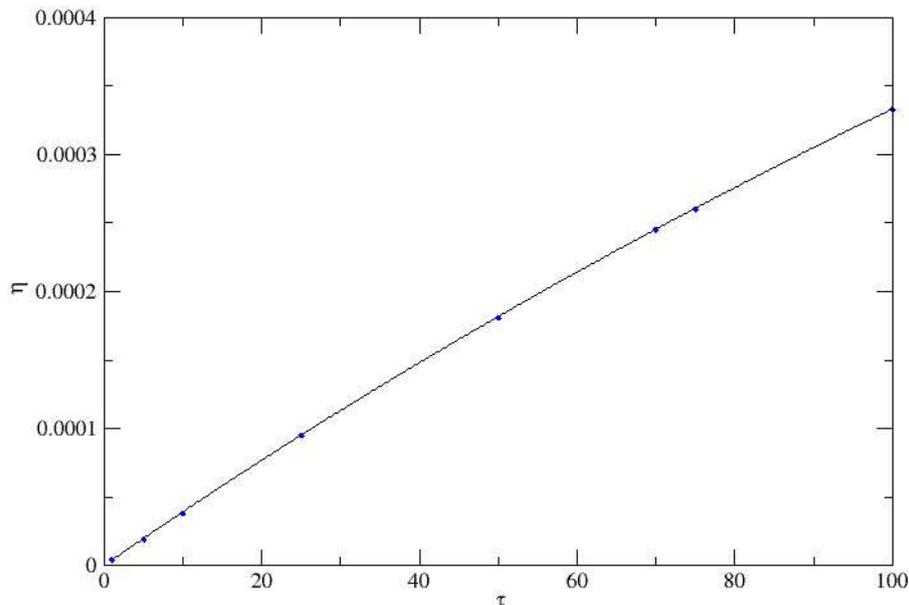


Figura 13: Eficiência η da busca realizada com a distribuição exponencial simples de tamanhos de passos em função do comprimento característico τ , para o caso destrutivo com $\ell_0 = 0.2$, $x_0 = L/2 = 500$, $L = 10^3$ e $\Delta x = 0.2$. Nos pontos azuis utilizamos o método do operador integral, enquanto a linha sólida representa a expressão analítica obtida em [66] via equação de Fokker-Planck e em [12] através do tempo médio de primeira passagem. Uma boa concordância de resultados é observada.

com a constante de normalização,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2\left(\frac{w_1}{\tau_1} e^{-\frac{\ell_0}{\tau_1}} + \frac{w_2}{\tau_2} e^{-\frac{\ell_0}{\tau_2}}\right)}. \quad (4.8)$$

Como discutido no Capítulo 3, a expressão geral exata para $\langle L \rangle$ com a exponencial dupla, obtida pelo método do tempo médio de primeira passagem, é bastante longa e, de fato, nessa dissertação não estamos interessados no caso geral mas sim no subespaço do espaço de parâmetros em que, no caso da busca não-destrutiva no regime escasso, uma das exponenciais favorece os pequenos passos ($\tau_2 \ll L/v$) que tendem ao encontro do sítio alvo mais próximo, enquanto que a outra favorece longos passos ($\tau_1 \gg L/v$) que facilitam o acesso ao sítio alvo distante. Nesse caso, temos aproximadamente que [12]

$$\langle L \rangle(x_0) = \frac{L}{2} + \tau_2 \frac{(1 - w_1)}{w_1} \left(1 - \frac{1 + \frac{Lw_1}{2\tau_2} e^{-\frac{\sqrt{w_1}x_0}}{\tau_2}}}{1 + \sqrt{w_1}}\right), \quad (Exp\ Dupla). \quad (4.9)$$

Novamente, a fim de calcular $\langle L \rangle(x_0)$ pelo método do operador integral utilizamos os resultados calculados na Subseção 2.2.2:

$$\begin{aligned} \langle |l| \rangle = & \mathcal{A}(w_1\tau_1(2e^{-\frac{\ell_0}{\tau_1}}(\ell_0 + \tau_1) - \tau_1(e^{-\frac{(a-rv)}{\tau_1}} + e^{-\frac{(L-a-rv)}{\tau_1}})) + \\ & w_2\tau_2(2e^{-\frac{\ell_0}{\tau_2}}(\ell_0 + \tau_2) - \tau_2(e^{-\frac{(a-rv)}{\tau_2}} + e^{-\frac{(L-a-rv)}{\tau_2}}))) \end{aligned} \quad (4.10)$$

e

$$[A]_{i,j} = \mathcal{A}(w_1\tau_1[e^{-\frac{|i-j|}{m\tau_1}} - e^{-\frac{|i-j|+1}{m\tau_1}}] + w_2\tau_2[e^{-\frac{|i-j|}{m\tau_2}} - e^{-\frac{|i-j|+1}{m\tau_2}}]). \quad (4.11)$$

Diferentemente de quando analisamos a PDF exponencial simples na subseção anterior, utilizaremos desta vez o próprio $\langle L \rangle$, ao invés de $\eta = 1/\langle L \rangle$, para fazer a comparação direta entre os resultados dos dois métodos. Para tanto, escolhemos o mesmo conjunto de parâmetros utilizados em [12] na abordagem via tempo médio de primeira passagem:

$$w_1 = 1 - w_2,$$

$$\tau_1 = 10^3 L,$$

$$\tau_2 = x_0.$$

A Fig. Figura 14 ilustra quatro conjuntos de dados em cada gráfico: a linha sólida preta representa o resultado exato do método do tempo médio de primeira passagem; a linha pontilhada são os resultados deste método de acordo com a aproximação da Eq. (4.9) usando $\tau_1 \gg L/v$ e $\tau_2 \ll L/v$; os círculos azuis representam os resultados de simulação numérica de Monte Carlo mediadas sobre 10^6 caminhadas; e a linha vermelha ilustra os dados obtidos pelo método do operador integral. De acordo com os valores da razão x_0/L , observamos que os gráficos se referem ao regime de busca não-destrutiva, $x_0/L \ll 1$, porém já se aproximando do caso destrutivo quando $x_0/L = 0.1$. Com exceção da linha vermelha, os demais resultados encontram-se em [12].

Observamos inicialmente que os resultados do método do operador integral concordam muito bem para todos os valores de x_0/L com os resultados exatos do método do tempo médio de primeira passagem e também com aqueles obtidos via simulação numérica. É importante observar ainda que os resultados com a aproximação da Eq. (4.9) são bastante bons próximos do mínimo de $\langle L \rangle$ (máximo da eficiência η) no regime de buscas não-destrutivas. Isso faz com que possamos utilizar com segurança a Eq. (4.9) para calcular os valores mínimo de $\langle L \rangle$ e máximo de η , o que será feito nas seções seguintes.

Finalmente, notamos ainda a presença na Fig. Figura 14 de duas linhas horizontais. As linhas tracejada e traço-pontilhada referem-se, respectivamente, aos valores de $\langle L \rangle$ obtidos com uma distribuição de tamanhos dos passos do tipo lei de potência com $\mu \rightarrow 1$ (regime balístico) e $\mu = 2$ (próximo ao máximo da eficiência da busca não-destrutiva na ausência de informação sobre o espaço de busca e no regime escasso). Observamos que o mínimo $\langle L \rangle$ da exponencial dupla nas buscas não-destrutivas é inferior ao da lei de potência com $\mu = 2$. Esse resultado sugere que, em uma dimensão, é possível que as buscas não-destrutivas do tipo exponencial dupla tenham eficiência máxima superior às do tipo lei de potência. Nas seções seguintes analisaremos com mais detalhes este resultado.

4.1.3 Lei de potência (Lévy)

A última checagem do programa utilizado para os cálculos do método do operador integral é realizada para a distribuição do tipo lei de potência. Como discutido nos capítulos anteriores, a PDF lei de potência com expoente μ corresponde ao regime assintótico de distribuição α -estável de Lévy, com $\mu = \alpha + 1$. Assim, a seguir muitas vezes utilizaremos o termo distribuição de Lévy para nos referir à PDF lei do potência.

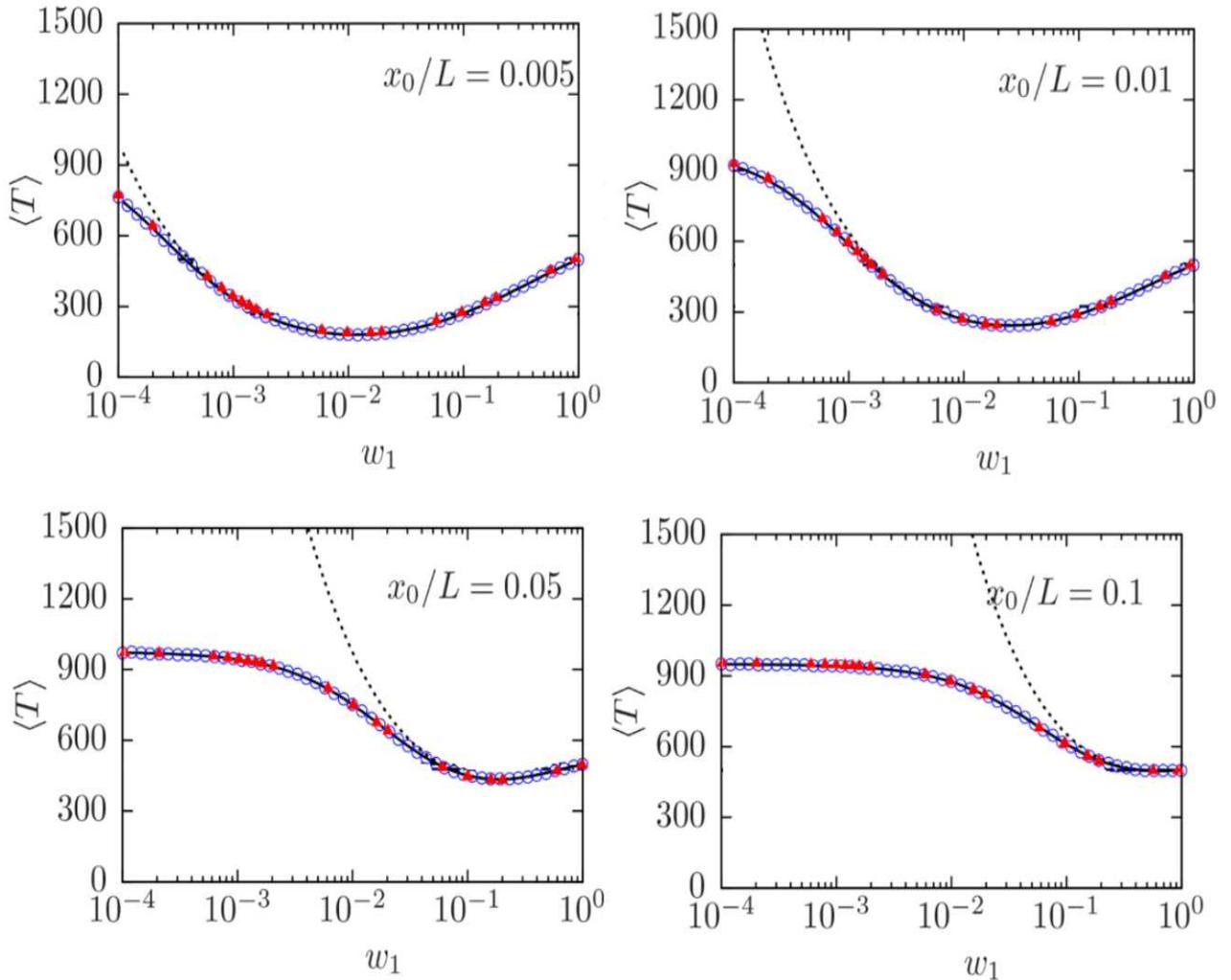


Figura 14: Distância média $\langle L \rangle = \langle T \rangle$ percorrida entre dois encontros consecutivos de sítios alvos em função do peso estatístico w_1 da primeira exponencial no caso da distribuição do tipo exponencial dupla de tamanhos de passos. Os parâmetros utilizados foram $\ell_0 = 0.2$, $\Delta x = 0.2$, $L = 10^3$, $\tau_1 = 10^3 L$, $\tau_2 = x_0$ e $v = 1$. A posição inicial x_0 está indicada em cada gráfico e corresponde, para os menores valores de x_0/L , ao regime de buscas não-destrutivas em um ambiente escasso. A linha sólida preta representa o resultado exato do método do tempo médio de primeira passagem, a linha pontilhada são os resultados deste método de acordo com a aproximação da Eq. (4.9), os círculos azuis representam os resultados de simulação numérica de Monte Carlo mediadas sobre 10^6 caminhadas e a linha vermelha ilustra os dados obtidos pelo método do operador integral. Além disso, as linhas horizontais tracejada e traço-pontilhada referem-se, respectivamente, aos resultados com uma distribuição do tipo lei de potência com $\mu \rightarrow 1$ (regime balístico) e $\mu = 2$ (próximo ao máximo da eficiência da busca não-destrutiva). Com exceção da linha vermelha, os demais resultados encontram-se em [12]. Uma boa concordância é observada entre os resultados do método do operador integral, os resultados exatos do método do tempo médio de primeira passagem e aqueles obtidos via simulação numérica. Os resultados com a aproximação da Eq. (4.9) também concordam bastante bem na vizinhança do mínimo de $\langle L \rangle$.

Para a comparação com os resultados do método do operador integral serão utilizados inicialmente os dados apresentados em [3]. Vale ressaltar, contudo, que a PDF considerada em [3] é do tipo lei de potência com um tamanho máximo de passos τ (não confundir com o parâmetro da exponencial simples), isto é,

$$p(\ell) = \frac{\mathcal{A}\Theta(|\ell| - \ell_0)[1 - \Theta(|\ell| - \tau)]}{|\ell|^\mu} \quad (4.12)$$

$$\mathcal{A} = \frac{(\mu - 1)(\ell_0)^{\mu-1}}{2} \left[1 - \left(\frac{\ell_0}{\tau}\right)^{\mu-1}\right]^{-1},$$

enquanto que no nosso caso utilizamos

$$p(\ell) = \frac{\mathcal{A}\Theta(|\ell| - \ell_0)}{(|\ell|)^\mu} \quad (4.13)$$

$$\mathcal{A} = \frac{(\mu - 1)(\ell_0)^{\mu-1}}{2}.$$

Naturalmente, a Eq. (4.13) se reduz à Eq. (4.12) quando $\tau \rightarrow \infty$.

Assim como feito anteriormente, para os cálculos da eficiência da busca com a PDF lei de potência utilizamos as equações desenvolvidas na Subseção 2.2.3:

$$\langle |\ell| \rangle = \frac{(1 - \mu)(\ell_0)}{2(2 - \mu)} \left[\frac{(\frac{L-a-r_v}{\ell_0})^{2-\mu} + (\frac{a-r_v}{\ell_0})^{2-\mu} + 2}{(1 - \mu)} \right], \quad \mu \neq 2, \quad (4.14)$$

$$\langle |\ell| \rangle = \frac{\ell_0}{2} \left[\ln \left(\frac{(L - a - r_v)(a - r_v)}{\ell_0^2} \right) + 2 \right], \quad \mu = 2.$$

Na Fig. Figura 15 comparamos os nossos resultados obtidos pelo método do operador integral com os da referência [3]. Nesse trabalho as linhas sólidas representam os dados via método do operador integral, enquanto que os símbolos são os resultados da simulação numérica de Monte Carlo. Observamos que os nossos resultados (símbolos vermelhos) concordam bastante bem com os de [3] no limite $\tau \rightarrow \infty$, e inclusive também para o maior valor possível de τ ($\tau = 10000$). Com isso, podemos afirmar que o nosso programa que calcula a eficiência pelo método do operador integral está funcionando corretamente também para o caso da PDF lei de potência.

Não existe uma expressão exata para $\langle L \rangle$ no caso da PDF lei de potência para poder comparar com os nossos resultados do método do operador integral. Contudo, apresentamos no Capítulo 3 uma expressão aproximada para $\langle L \rangle$ obtida no espaço contínuo

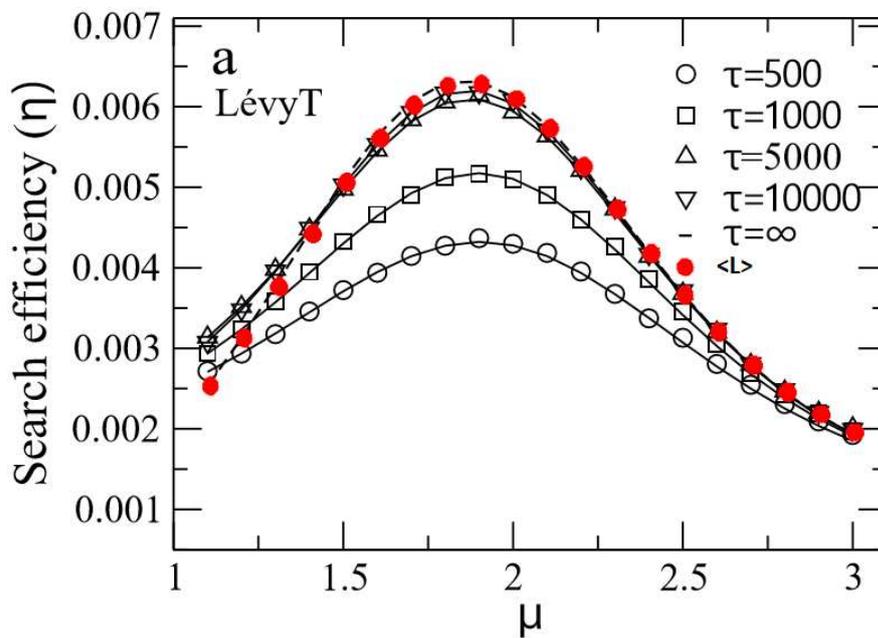


Figura 15: Eficiência η da busca não-destrutiva em função do expoente μ da PDF lei de potência (Lévy), com os parâmetros $\Delta x = 0.2$, $r_v = 1$, $\ell_0 = 1$, $L = 10^3$ e $x_0 = 2$. O parâmetro τ representa o máximo tamanho possível do passo considerado em [3]. Nesse trabalho, as linhas foram obtidas pelo método do operador integral e os símbolos por simulação numérica. Nossos resultados com o método do operador integral para a distribuição lei de potência não truncada estão mostrados em símbolos vermelhos e concordam bem com o limite $\tau \rightarrow \infty$ da referência [3].

com base no método do operador fracionário de Riesz [7, 8], veja a Eq. (3.15),

$$\langle L \rangle = L \frac{(2 - \alpha)}{2(1 - \alpha)} \left[1 - 4 \frac{\psi_\alpha(z) + \psi_\alpha(1 - z)}{\alpha(\alpha + 2)B(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})} \right] + \frac{2LM^{\alpha-1} \sin(\frac{\pi\alpha}{2})(z - z^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{\pi(\alpha - 1)}, \quad (4.15)$$

em que

$$\alpha = \mu - 1,$$

$$M = \frac{L}{\ell_0},$$

$$z = \frac{x_0}{L}.$$

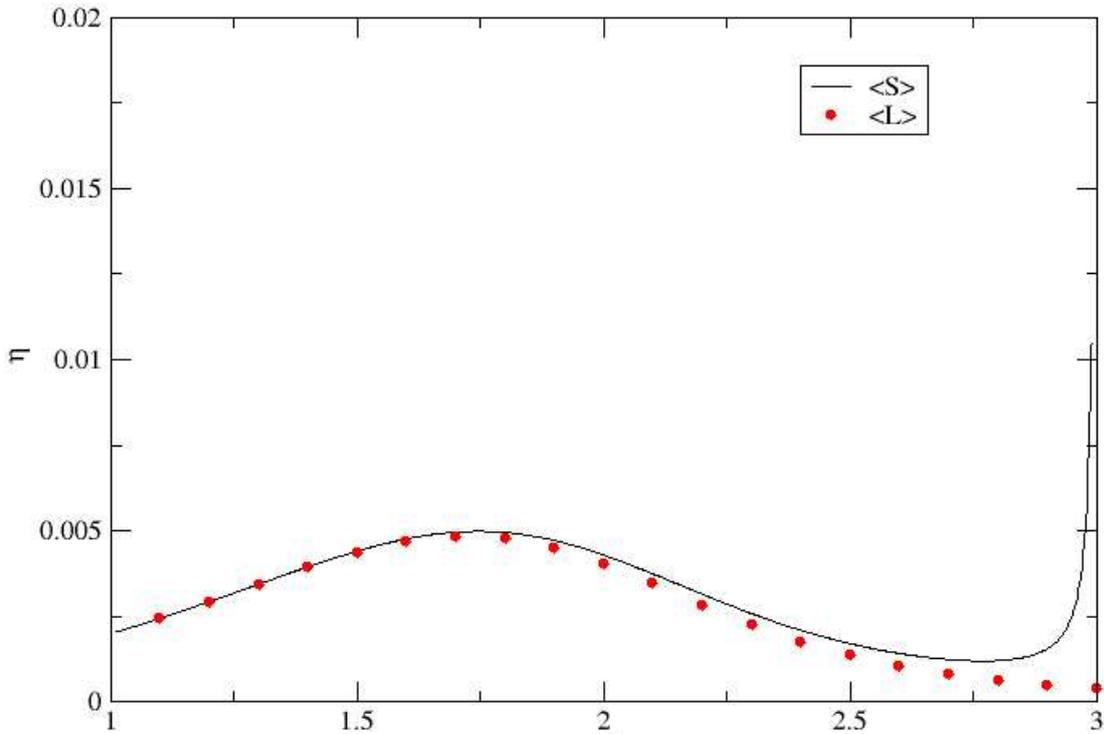


Figura 16: Eficiência η da busca não-destrutiva em função do expoente μ da PDF lei de potência (Lévy), com os parâmetros $L = 10^3$, $x_0 = 2$, $\ell_0 = 0.2$ e $\Delta x = 0.2$. A linha sólida representa o resultado da Eq. (4.15) [7, 8], enquanto que os círculos vermelhos são obtidos com o método do operador integral. A concordância dos resultados é boa para valores de μ correspondentes ao máximo da eficiência e abaixo dele.

Na Fig. Figura 16 é feita uma comparação entre a curva gerada pela Eq. (4.15) (linha sólida) e os nossos resultados do método do operador integral (círculos vermelhos). Podemos observar que para $\mu < 2$ a expressão analítica concorda bem com os nossos dados. Como discutido em [7, 8], a aproximação analítica se torna progressivamente pior à medida que a dinâmica da busca tende ao regime browniano ($\mu = 3$). É importante notar,

entretanto, que a concordância dos dois métodos é boa quando a eficiência é máxima, e que esse será o regime de interesse a ser estudado em detalhe nas próximas seções.

4.2 Análise comparativa das eficiências máximas de buscas não-destrutivas

Nesta seção iniciaremos a análise comparativa das eficiências máximas das buscas realizadas com as distribuições de tamanhos de passos do tipo exponencial simples, exponencial dupla e lei de potência (Lévy). Nosso foco é nas buscas não-destrutivas assimétricas, com $x_0 \ll L$, no regime escasso em que L aumenta progressivamente, embora mantendo-se finito. Definimos a eficiência máxima ou ótima de uma distribuição como aquela associada ao maior valor de η possível no espaço de parâmetros da PDF, para dados x_0 e L fixos.

No trabalho seminal da referência [62], a eficiência das buscas do tipo lei de potência foi estudada nos regimes destrutivo e não-destrutivo em uma e duas dimensões. No caso específico das buscas não-destrutivas, observou-se que a eficiência máxima ocorria para $\mu \approx 2$ no regime escasso e na ausência de informações sobre o espaço de busca. Como a PDF com $\mu = 3$ possui segundo momento finito, então a dinâmica da busca associada é do tipo normal ou difusiva, governada pelo TCL. Desse modo, concluiu-se que as buscas não-destrutivas com $\mu \approx 2$ devem ter eficiência superior àquelas realizadas com distribuições de tamanhos de passos governadas pelo TCL. Vale comentar que as caminhadas com $\mu \approx 2$ representam um regime intermediário entre o balístico com longos passos para $\mu \rightarrow 1$ e o browniano com pequenos passos para $\mu = 3$. De fato, quando $\mu \approx 2$ muitos pequenos passos, favorecendo o encontro do sítio alvo mais próximo, se alternam com poucos, mas relevantes, longos passos, que facilitam o acesso a sítios alvos distantes. Nesse caso, a dinâmica da busca é do tipo superdifusiva. De fato, ela permanecerá superdifusiva ao menos até escalas de tempo ou distância total percorrida da ordem do livre caminho médio λ da distribuição dos sítios alvos, uma vez que devido à truncagem dos longos passos pelo encontro dos sítios alvos em algum momento se observará uma passagem, ou “crossover”, para o regime difusivo.

Uma questão interessante que, dentro do nosso conhecimento, ainda não foi explorada é a seguinte: o que acontece se a PDF de tamanhos de passos tiver mais de uma escala de comprimento característica, de modo que algumas escalas podem favorecer o encontro do sítio alvo próximo e outras o encontro dos sítios distantes? É isso que ocorre,

por exemplo, no caso da PDF exponencial dupla com a escolha $\tau_1 \gg L/v$ e $\tau_2 \ll L/v$. Será que a sua eficiência máxima para a busca não-destrutiva é comparável à da lei de potência com $\mu \approx 2$? E se for, qual é o papel da ausência de informações sobre o espaço de busca nessa questão? São essencialmente esses os pontos que pretendemos investigar a seguir.

Nesse contexto, a Fig. Figura 17 apresenta um resultado esperado e outro inesperado no caso da busca não-destrutiva unidimensional com $x_0 = 2$ e $L = 10^3$. De fato, espera-se que a exponencial simples possua a menor eficiência ótima das três distribuições consideradas nesse trabalho. Contudo, nota-se também que a eficiência máxima com a PDF exponencial dupla para $\tau_1 = 10^6$, $\tau_2 = 2$ e $w_1 \approx 10^{-2,3} \approx 0,005$ é superior à obtida com a lei de potência para $\mu \approx 1.9$. Esse resultado confirma as primeiras evidências observadas em [12], como também mostra a Fig. Figura 14.

Neste ponto, uma pergunta pertinente é a seguinte: será que o resultado da Fig. Figura 17 para $L = 10^3$ ainda se mantém quando consideramos regimes de busca progressivamente mais escassos com valores maiores porém finitos de L ? Para responder essa pergunta, é necessário analisar em detalhe como a eficiência ótima destas distribuições evolui quando $L \rightarrow \infty$.

Para determinar a eficiência ótima da busca não-destrutiva para um dado valor de L , precisamos varrer o espaço de parâmetros de cada PDF. Por exemplo, a Fig. Figura 18 ilustra a dependência com L do valor ótimo μ_{opt} em que a eficiência da PDF lei de potência é máxima. Observamos que $\mu_{opt} \rightarrow 2$ quando $L \rightarrow \infty$, em concordância com o resultado de [62] para buscas não-destrutivas unidimensionais. Por outro lado, para encontrar o valor ótimo w_1^* da PDF exponencial dupla escolhemos $\tau_1 = 10^3 L$ e $\tau_2 = x_0$ e variamos o valor de w_1 através de $\Delta w_1 = 2x_0/(10^2 L)$. Foi utilizada essa escolha de Δw_1 devido à previsão teórica [12] $w_1^* \rightarrow 2x_0/L$ para $L \rightarrow \infty$, a ser obtida a seguir. Após encontrar os parâmetros que otimizam cada uma das distribuições para um dado L , o valor de L é aumentado e uma nova varredura do espaço de parâmetros da PDF é realizada.

Na Fig. Figura 19 comparamos as curvas de eficiência ótima da busca não-destrutiva realizada com cada PDF em função de L . Para os valores de L considerados, a maior eficiência ótima foi aquela obtida com a distribuição exponencial dupla. Para verificar se essa tendência se mantém para espaços de busca mais escassos é necessário analisar o que ocorre para valores ainda maiores de L .

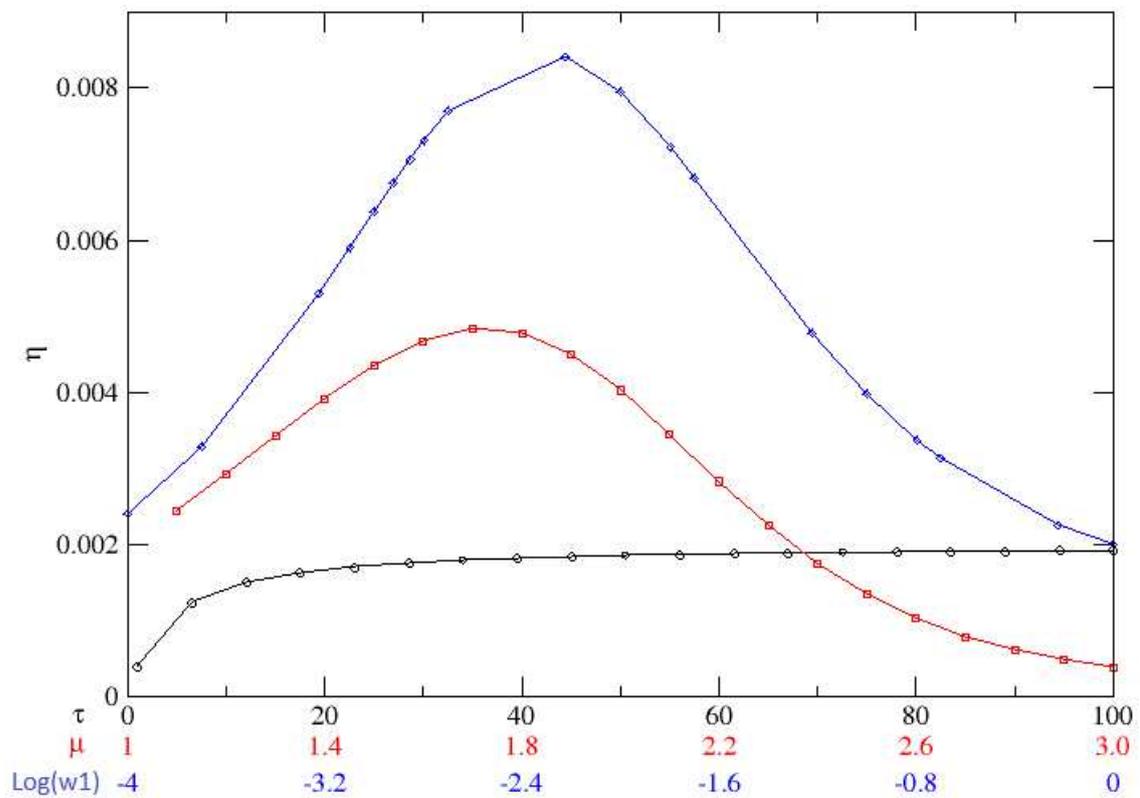


Figura 17: Eficiência η para as buscas não-destrutivas realizadas com as distribuições de tamanhos de passos exponencial simples em função de τ (símbolos pretos), exponencial dupla (azul) com $\tau_1 = 10^6$ e $\tau_2 = 2$ em função de $\log w_1$, e lei de potência ou Lévy (vermelho) em função de μ . Resultados obtidos via método do operador integral com parâmetros $x_0 = 2$, $\ell_0 = 0.2$, $L = 10^3$ e $\Delta x = 0.2$. Observamos nesse caso que a maior eficiência ótima é a da PDF exponencial dupla.

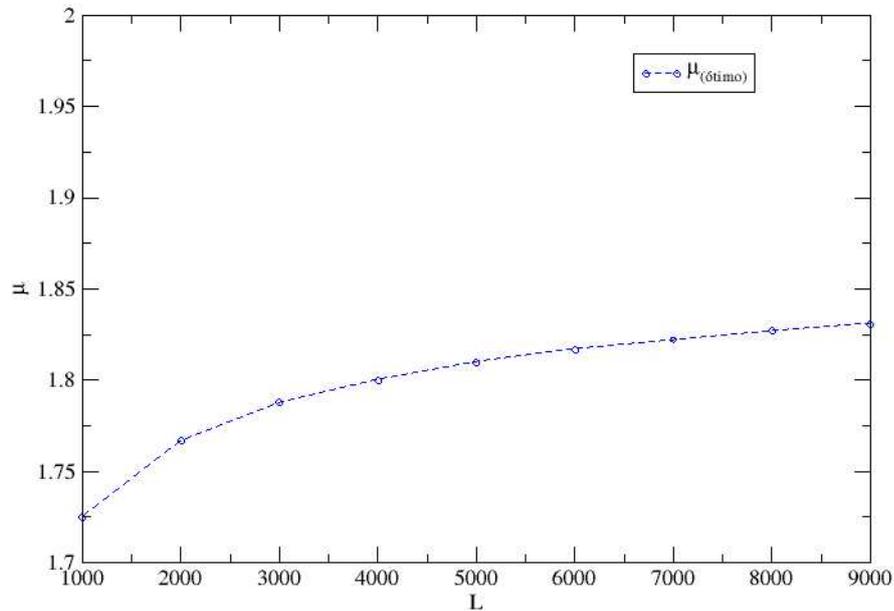


Figura 18: Expoente ótimo μ_{opt} da busca não-destrutiva realizada com a distribuição de tamanhos de passos lei de potência em função de L . Resultados obtidos via método do operador integral com parâmetros $x_0 = 2$, $\ell_0 = 0.2$ e $\Delta x = 0.2$. À medida que $L \rightarrow \infty$ a previsão teórica indica que $\mu_{opt} \rightarrow 2$ [62].

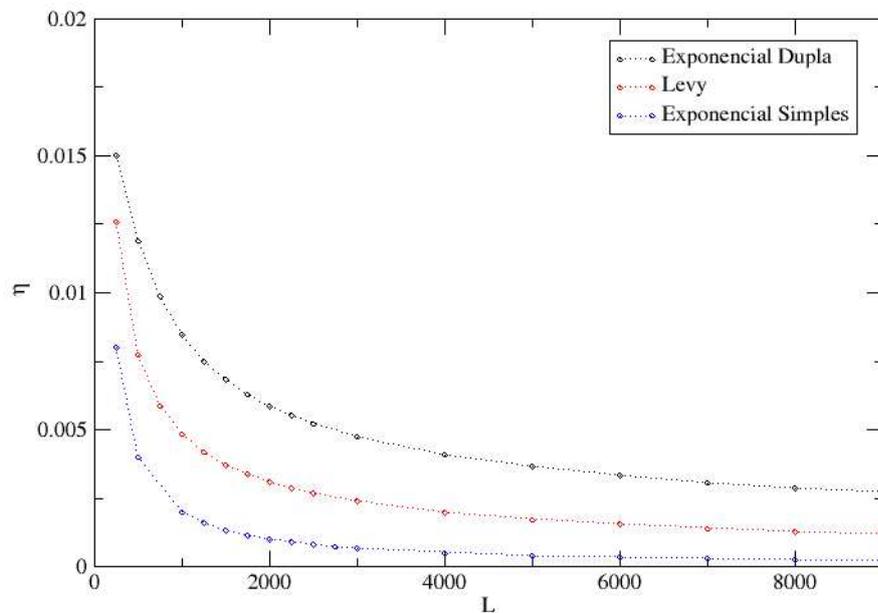


Figura 19: Eficiência ótima η_{opt} da busca não-destrutiva em função de L realizada com a distribuição de tamanhos de passos exponencial simples (símbolos azuis), exponencial dupla (preto) com $\tau_1 = 10^3 L$ e $\tau_2 = x_0$, e lei de potência ou Lévy (vermelho). Resultados obtidos via método do operador integral com parâmetros $x_0 = 2$, $\ell_0 = 0.2$ e $\Delta x = 0.2$. Para cada valor de L considerado, a eficiência ótima da PDF exponencial dupla foi a maior.

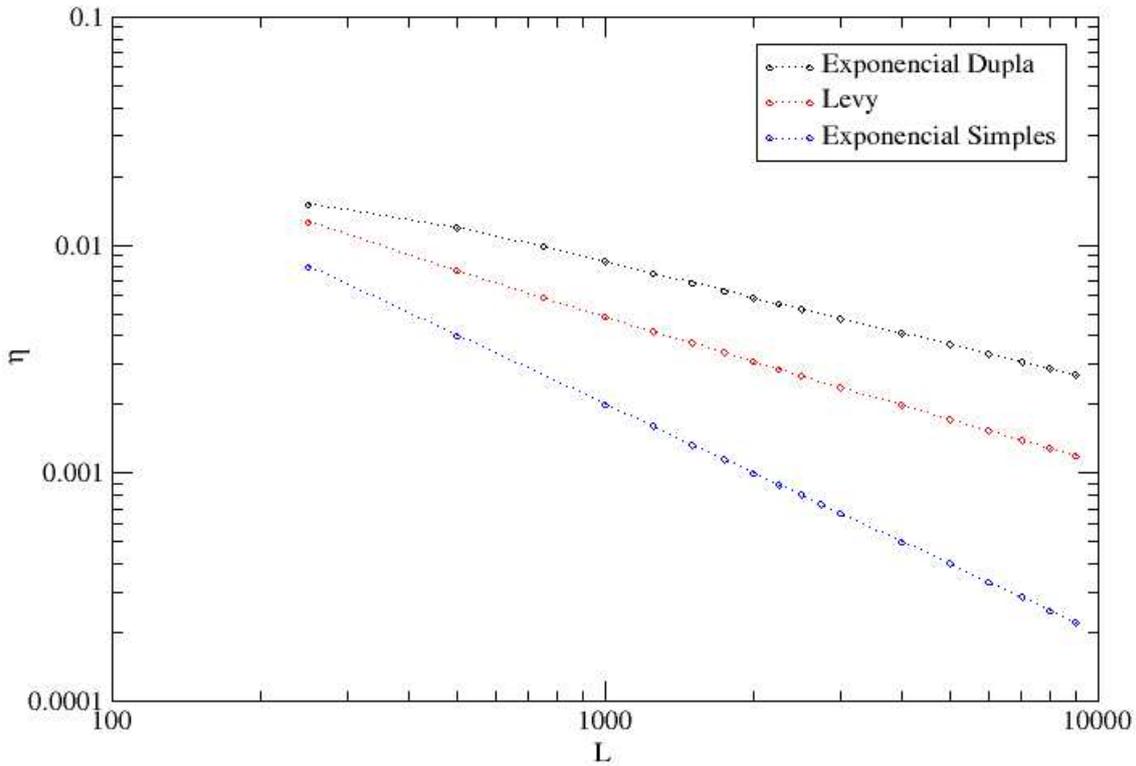


Figura 20: Gráfico em escala log-log da Fig. Figura 19. A eficiência ótima da PDF exponencial dupla cai mais lentamente com L do que a das demais distribuições.

Inicialmente, na Fig. Figura 20 mudamos os eixos da Fig. Figura 19 para a escala log-log. Nesse caso, é possível observar no regime de maiores valores de L que a eficiência ótima cai com L mais rapidamente para a PDF exponencial simples, em seguida para a lei de potência e finalmente, embora próxima desta última, para a exponencial dupla. Com isso, a Fig. Figura 20 sugere que a PDF exponencial dupla continua a levar a uma eficiência ótima superior à medida que L cresce.

Quando tentamos aumentar ainda mais o valor de L utilizando o método do operador integral para checar explicitamente se a tendência das Figs. Figura 19 e Figura 20 se mantém para espaços de busca progressivamente mais escassos, acabamos esbarrando em algumas limitações, como por exemplo a falta de memória RAM.

De fato, para obter $\langle L \rangle$ pelo método do operador integral é necessário gerar matrizes de tamanho $L/\Delta x \times L/\Delta x$. Assumindo que os elementos são do tipo float, cada um deles consome 16 bytes de memória. Assim, quando trabalhamos com $L = 1000$ e $\Delta x = 0.2$ é formada uma matriz 5000×5000 que ocupa 400 Mb de memória RAM. Ao aumentarmos L em 10 vezes, ou seja $L = 10000$, 40 Gb de memória RAM são ocupados, com um incremento de 100 vezes na quantidade de memória utilizada, isto é, a quantidade

de memória RAM alocada no programa cresce com L^2 .

Além do problema da memória é necessário também lidar com a questão do tempo de execução do programa, que cresce mais que quadraticamente com o valor de L [1]. Devido a esses motivos, para valores além de $L = 10000$ se torna inviável realizar o cálculo da eficiência da busca através do método do operador integral.

Para contornar essas dificuldades, vamos considerar a seguir as expressões analíticas para $\langle L \rangle$ no espaço contínuo obtidas no Capítulo 3 via a técnica do operador fracionário de Riesz para a PDF lei de potência e pelo método do tempo médio de primeira passagem para as exponenciais simples e dupla. Com exceção da exponencial simples, cuja expressão para $\langle L \rangle$ é exata, obtivemos expressões aproximadas para os casos lei de potência e exponencial dupla com $\tau_1 \gg L/v$ e $\tau_2 \ll L/v$. Vale comentar que tais aproximações tornam-se progressivamente melhores para maiores valores de L .

Iniciamos a nossa análise pela PDF do tipo exponencial dupla. Na Eq. (3.67) obtivemos para $\tau_1 \gg L/v$ e $\tau_2 \ll L/v$ que [12]

$$\langle L \rangle(x_0) = \frac{L}{2} + \tau_2 \frac{(1 - w_1)}{w_1} \left(1 - \frac{1 + \frac{Lw_1}{2\tau_2}}{1 + \sqrt{w_1}} e^{-\frac{\sqrt{w_1}x_0}{\tau_2}} \right).$$

De posse dessa expressão, podemos encontrar o mínimo de $\langle L \rangle$ (máximo de η) pelo método tradicional dos máximos e mínimos [59], o qual é obtido para os seguintes parâmetros:

$$\tau_2^* = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{x_0^2(L + \sqrt{8Lx_0})}{L - 8x_0}} \quad (4.16)$$

e

$$w_1^* = \frac{2x_0(L + \sqrt{8Lx_0})}{L(L - 8x_0)}. \quad (4.17)$$

Note que no regime escasso em que $L \rightarrow \infty$ temos que $\tau_2^* \rightarrow x_0$, de modo que a condição $\tau_2^* \ll L/v$ é satisfeita pelas buscas não-destrutivas com $x_0 \ll L$. Além disso, nesse regime o peso estatístico da primeira exponencial deve ser bem pequeno, $w_1^* \rightarrow 2x_0/L$. Podemos também utilizar um script para encontrar o mínimo de $\langle L \rangle$ através da varredura dos parâmetros na sua expressão analítica. Na Fig. Figura 21 comparamos a eficiência ótima da PDF exponencial dupla em função de L a partir do cálculo analítico de τ_2^* e w_1^* (símbolos verdes), pela varredura da expressão acima para $\langle L \rangle$ (vermelho) e também pelo método do operador integral (azul). Como é possível observar, as três curvas concordam muito

bem entre si.

Nesse ponto é importante comentar que os parâmetros que maximizam a busca no caso da exponencial dupla, $\tau_2^* \rightarrow x_0$ e $w_1^* \rightarrow 2x_0/L$, estão diretamente associados às escalas relevantes do problema, x_0 e L . Imaginando uma situação em que o caminhante não possua qualquer informação sobre o espaço de busca, essa escolha específica seria extremamente improvável. Assim, quando compararmos em seguida as eficiências ótimas das buscas não-destrutivas realizadas com a exponencial dupla e com a Lévy, precisaremos sempre ter em mente que a última não supõe qualquer conhecimento a priori sobre o espaço de busca.

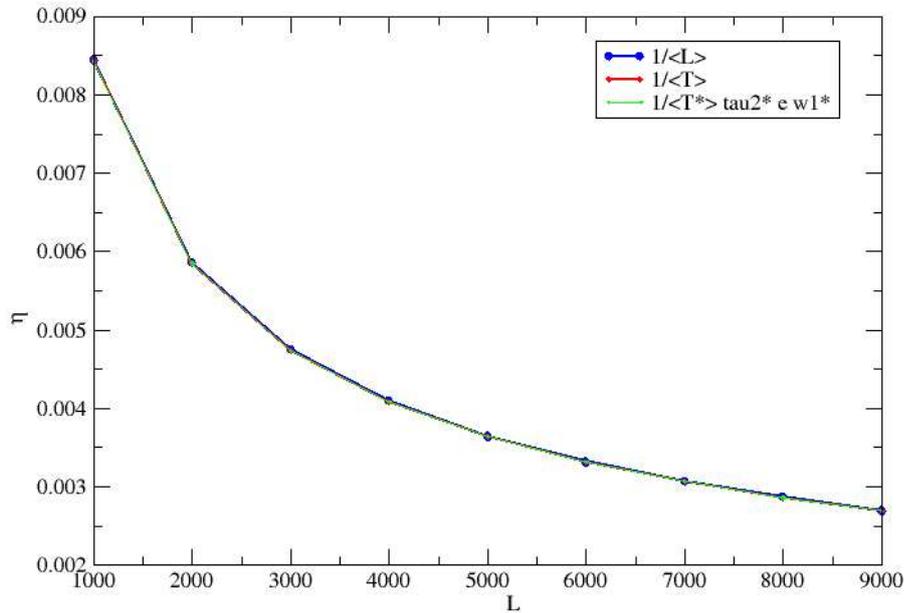


Figura 21: Eficiência ótima η_{opt} da busca não-destrutiva realizada com a PDF exponencial dupla em função de L . Os símbolos verdes representam os resultados obtidos a partir do cálculo analítico com τ_2^* e w_1^* [12], os símbolos vermelhos pela varredura da expressão para $\langle L \rangle$ e os símbolos azuis pelo método do operador integral. Utilizamos os parâmetros $\tau_1 = 10^3 L$, $\tau_2 = x_0$, $x_0 = 2$, $\ell_0 = 0.2$ e $\Delta x = 0.2$. Observamos uma boa concordância dos resultados obtidos pelos três métodos.

Passamos agora para a PDF do tipo de lei de potência. Na Eq. (3.15) obtivemos [7]

$$\langle L \rangle(x_0) = L \frac{(2 - \alpha)}{2(1 - \alpha)} \left[1 - 4 \frac{\psi_\alpha(z) + \psi_\alpha(1 - z)}{\alpha(\alpha + 2)B(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})} \right] + \frac{2LM^{\alpha-1} \sin(\frac{\pi\alpha}{2})(z - z^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{\pi(\alpha - 1)}, \quad (4.18)$$

onde $\alpha = \mu - 1$, $M = L/\ell_0$ e $z = x_0/L$. Mostramos na Fig. Figura 22 a eficiência ótima da PDF lei de potência em função de L obtida pela Eq. (4.18) (linha sólida) e pelo método do operador integral (símbolos vermelhos). Observamos que a eficiência ótima dada pela Eq. (4.18) é ligeiramente maior que a obtida pelo método do operador integral (diferença

relativa de cerca de 4%). Essa pequena diferença deve-se principalmente ao fato de que no método do operador integral o espaço de busca é discreto, isto é, espera-se que os resultados se aproximem ainda mais no limite contínuo em que $\Delta x \rightarrow 0$.

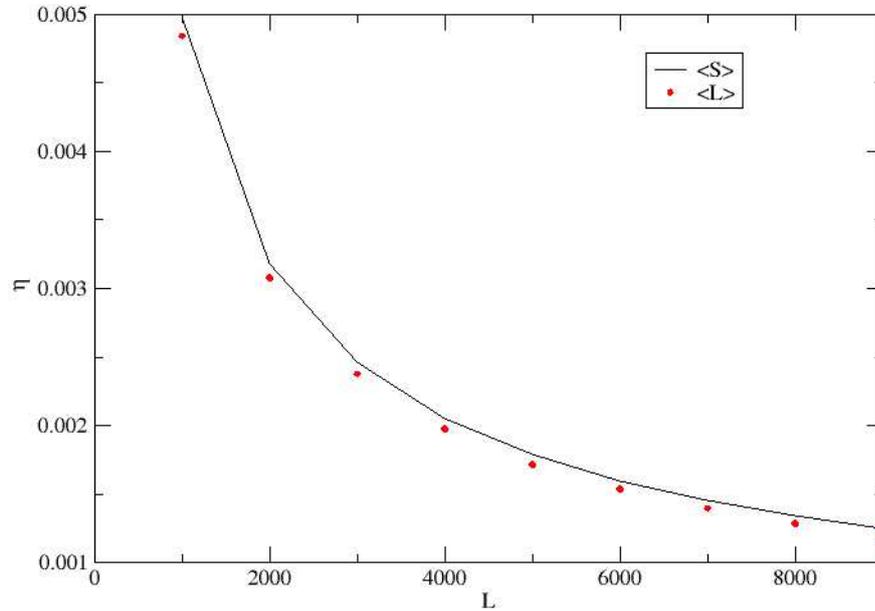


Figura 22: Eficiência ótima η_{opt} da busca não-destrutiva em função de L realizada com a PDF lei de potência. A linha sólida foi obtida a partir da Eq. (4.18) no espaço de busca contínuo [7], enquanto os símbolos vermelhos representam os resultados do método do operador integral no espaço discreto. Utilizamos $x_0 = 2$, $\ell_0 = 0.2$ e $\Delta x = 0.2$. No limite contínuo $\Delta x \rightarrow 0$ espera-se que os pontos tendam à linha sólida.

4.3 Dependência analítica da eficiência ótima com L

As expressões analíticas para $\langle L \rangle$ permitem analisar como a eficiência $\eta = 1/\langle L \rangle$ das buscas não-destrutivas escalam com L à medida que o espaço de busca vai se tornando progressivamente mais escasso, ou seja, para $L \rightarrow \infty$.

Como primeiro exemplo, analisamos a PDF do tipo exponencial simples, cuja expressão exata para $\langle L \rangle$ é dada por [66, 12]

$$\langle L \rangle(x_0) = \frac{L}{2} + \frac{x_0(L - x_0)}{2\tau}. \quad (4.19)$$

Nesse caso, o valor mínimo de $\langle L \rangle$ (máximo de η) é obtido para $\tau \rightarrow \infty$, ou seja, $\langle L \rangle_{opt} = L/2$, de modo que no regime escasso a eficiência ótima da PDF exponencial simples escala com L na forma

$$\eta_{opt} \sim \frac{1}{L}, \quad (\text{Exp Simples}). \quad (4.20)$$

Já no caso da PDF exponencial dupla, partimos da Eq. (4.9) com $\tau_1 \gg L/v$ e $\tau_2 \ll L/v$,

$$\langle L \rangle(x_0) = \frac{L}{2} + \tau_2 \frac{(1-w_1)}{w_1} \left(1 - \frac{1 + \frac{Lw_1}{2\tau_2} e^{-\frac{\sqrt{w_1}x_0}{\tau_2}}}{1 + \sqrt{w_1}}\right),$$

onde substituímos os parâmetros ótimos,

$$\tau_2^* = \sqrt{\frac{x_0^2(L + \sqrt{8Lx_0})}{L - 8x_0}} \quad (4.21)$$

e

$$w_1^* = \frac{2x_0(L + \sqrt{8Lx_0})}{L(L - 8x_0)}, \quad (4.22)$$

de modo a obter

$$\langle L \rangle_{opt}(x_0) = \frac{L}{2} + \frac{L \sqrt{\frac{x_0^2(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L-8x_0}} (L-8x_0) \left(1 - \frac{2x_0(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L(L-8x_0)}\right)}{2x_0(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)} \left(1 - \frac{\left(\frac{x_0(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{(L-8x_0)\sqrt{\frac{x_0^2(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L-8x_0}}} + 1\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{2}x_0\sqrt{\frac{x_0(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L(L-8x_0)}}}{\sqrt{\frac{x_0^2(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L-8x_0}}}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{x_0(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L(L-8x_0)}} + 1}\right). \quad (4.23)$$

Como $\eta = 1/\langle L \rangle$, então

$$\eta_{opt} = \frac{2}{L \left(\frac{x_0 \left(1 - \frac{2x_0(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L(L-8x_0)}\right)}{\sqrt{\frac{x_0^2(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L-8x_0}}} + 1 \right)}. \quad (4.24)$$

Utilizando o *Mathematica* para expandir essa expressão em série em torno de $L = \infty$, obtemos

$$\eta_{opt} = \frac{1}{2\sqrt{2Lx_0}} + O\left(\frac{1}{L}\right), \quad (4.25)$$

tal que no regime escasso das buscas não-destrutivas a eficiência ótima da PDF exponencial dupla escala com L na forma

$$\eta_{opt} \sim \frac{1}{\sqrt{L}}, \quad (\text{Exp Dupla}). \quad (4.26)$$

Finalmente, partindo da Eq. (4.15) para a PDF lei de potência,

$$\langle L \rangle(x_0) = L \frac{(2 - \alpha)}{2(1 - \alpha)} \left[1 - 4 \frac{\psi_\alpha(z) + \psi_\alpha(1 - z)}{\alpha(\alpha + 2)B(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})} \right] + \frac{2LM^{\alpha-1} \sin(\frac{\pi\alpha}{2})(z - z^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{\pi(\alpha - 1)},$$

e introduzindo acima que no limite $L \rightarrow \infty$ temos $\alpha_{opt} = \mu_{opt} - 1 \rightarrow 1$ [62], encontramos que a expressão para o mínimo $\langle L \rangle$ é dada por

$$\langle L \rangle_{opt}(x_0) = \frac{2L\sqrt{z - z^2} \log(M)}{\pi}. \quad (4.27)$$

Substituindo agora que $z = x_0/L$ e $M = L/\ell_0$, obtemos

$$\langle L \rangle_{opt}(x_0) = \frac{2L\sqrt{\frac{x_0}{L} - \frac{x_0^2}{L^2}} \log\left(\frac{L}{\ell_0}\right)}{\pi}, \quad (4.28)$$

o qual para as buscas não-destrutivas com $x_0 \ll L$ no limite $L \rightarrow \infty$ se torna

$$\langle L \rangle_{opt}(x_0) = \frac{2\sqrt{Lx_0} \log\left(\frac{L}{\ell_0}\right)}{\pi}. \quad (4.29)$$

Utilizando agora que $\eta = 1/\langle L \rangle$, então

$$\eta_{opt} = \frac{\pi}{2\sqrt{Lx_0} \log\left(\frac{L}{\ell_0}\right)}, \quad (4.30)$$

de modo que a eficiência ótima no regime escasso das buscas não-destrutivas realizadas com a PDF lei de potência ou Lévy escala com L na forma

$$\eta_{opt} \sim \frac{1}{\sqrt{L} \log L}, \quad (\text{Lévy}). \quad (4.31)$$

Em conjunto, as dependências com L das eficiências ótimas das três distribuições acima no regime escasso de buscas não-destrutivas confirmam o resultado das Figs. Figura

19 e Figura 20. Ou seja, a eficiência ótima η_{opt} cai com L mais rapidamente para a exponencial simples, seguida pela lei de potência e pela exponencial dupla. Portanto, nesse regime observamos que a eficiência ótima da exponencial dupla se mantém superior à das demais distribuições. Precisamos, contudo, colocar aqui a ressalva de que a otimização da busca com a exponencial dupla pressupõe o ajuste dos seus parâmetros com as escalas relevantes do problema, enquanto que o resultado $\mu_{opt} \rightarrow 2$ da distribuição de Lévy independe dos valores específicos de x_0 e L , desde que $x_0 \ll L$ (busca não-destrutiva) e $L \rightarrow \infty$ (regime escasso).

4.4 Fit das curvas de eficiência ótima com L

Por fim, com o intuito de confirmar as escalas com L obtidas na seção anterior para a eficiência ótima das distribuições no regime escasso das buscas não-destrutivas, realizamos a seguir o fit dos resultados segundo as respectivas previsões analíticas.

Iniciamos com a análise da PDF exponencial dupla. Na Fig. Figura 23 fitamos de acordo com a forma $Y = Ax^{-B}$ os resultados da eficiência ótima η_{opt} em função de L obtida pelo método do tempo médio de primeira passagem. Nos gráficos (a) a (d) o valor mínimo de L é sempre o mesmo, $L = 2500$, mas o valor máximo vai diminuindo progressivamente desde (a) $L = 29000$ até (d) $L = 9000$. Notamos em todos os casos que o expoente B tem o seu valor de best fit $B \approx 0.51$ em boa concordância com a previsão teórica $\eta_{opt} \sim 1/\sqrt{L}$ da seção anterior. Observamos ainda que o expoente B vai se aproximando lentamente do resultado previsto à medida que valores maiores de L são considerados. De fato, entre os gráficos (a) e (d) obtemos que o coeficiente A possui uma variação de 3.3% enquanto o expoente B varia em 0.7%.

Passando agora para a PDF lei de potência, realizamos na Fig. Figura 24 fits da eficiência ótima obtida pelo método do operador fracionário de Riesz segundo as formas $Y = A_1/(x^{B_1} \log x)$ (linhas verdes), que corresponde à previsão teórica, e $Y = A_2x^{-B_2}$ (linhas vermelhas). No primeiro caso, o expoente de best fit $B_1 \approx 0.50$ concorda bastante bem com a previsão $\eta_{opt} \sim 1/(\sqrt{L} \log L)$. No segundo caso também foi conseguido um bom ajuste dos resultados com o expoente $B_2 \approx 0.61$. É importante observar que este valor é certamente maior que o expoente $B \approx 0.51$ obtido para a PDF exponencial dupla, indicando portanto que, mesmo nesse caso que foge à previsão teórica, a eficiência ótima da PDF lei de potência ainda cairia mais rapidamente com L que a da PDF exponencial

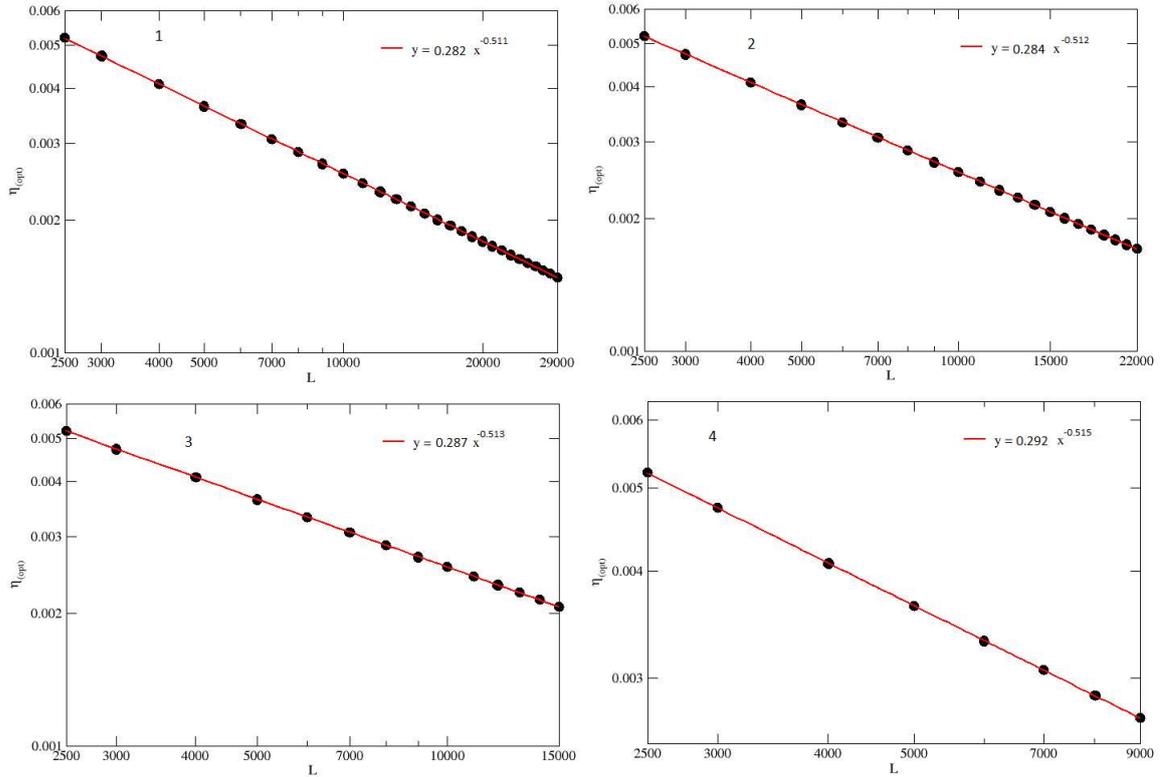


Figura 23: Eficiência ótima η_{opt} da busca não-destrutiva realizada com a PDF exponencial dupla em função de L mostrada em escala log-log. Os círculos representam os resultados analíticos do método do tempo médio de primeira passagem com os parâmetros $\tau_1 = 10^3 L$, $\tau_2 = x_0$, $x_0 = 2$ e $\ell_0 = 0.2$. O valor máximo de L vai diminuindo progressivamente desde (a) $L = 29000$ até (d) $L = 9000$. As linhas vermelhas são o best fit destes resultados usando a forma $Y = Ax^{-B}$. Observamos que o expoente B tem o seu valor de best fit $B \approx 0.51$ em boa concordância com a previsão teórica $\eta_{opt} \sim 1/\sqrt{L}$.

dupla.

Embora seja difícil descartar a forma $Y = A_2x^{-B_2}$ a partir do ajuste dos dados na Fig. Figura 24, podemos estimar a estabilidade do fit com base nas variações dos parâmetros à medida que maiores valores de L são considerados. Por exemplo, nesse caso observamos que A_2 e B_2 variam, respectivamente, em 9.0% e 1.6%, quando L vai de 9000 a 29000. Por outro lado, as variações dos parâmetros A_1 e B_1 no fit via $Y = A_1/(x^{B_1} \log x)$ são de apenas 0.8% e 0.2% no mesmo intervalo de L .

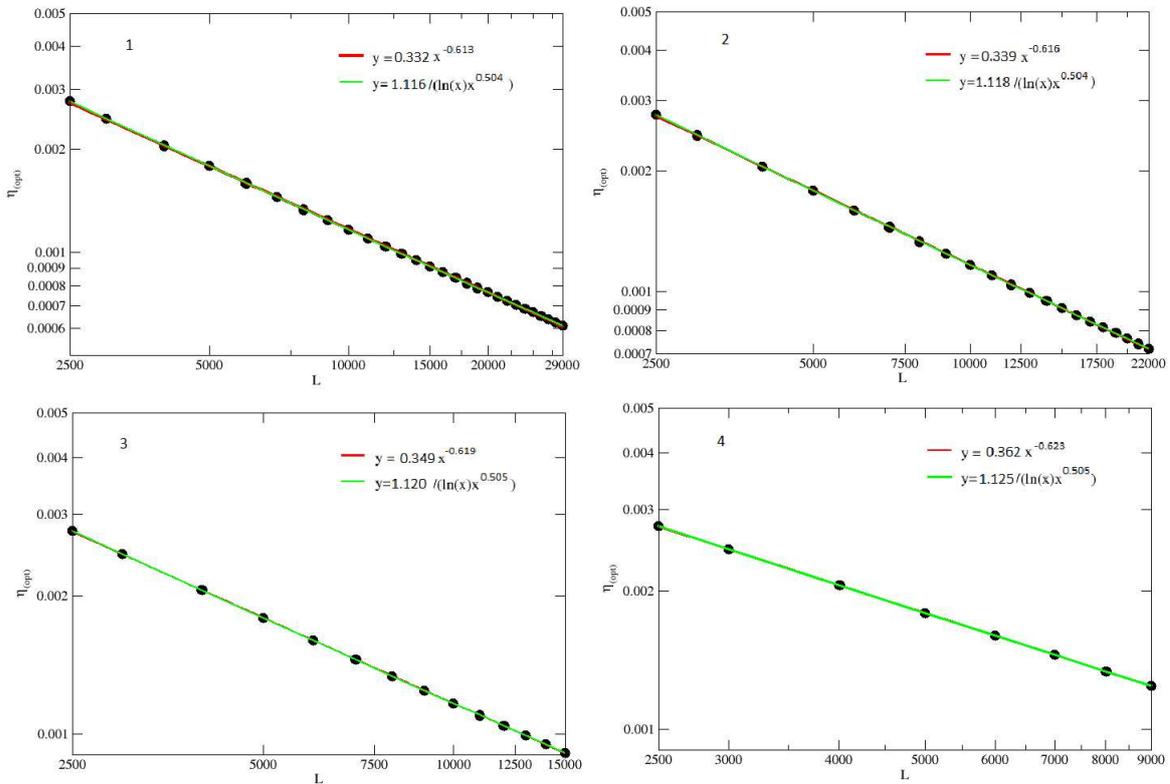


Figura 24: Eficiência ótima η_{opt} da busca não-destrutiva realizada com a PDF lei de potência em função de L mostrada em escala log-log. Os círculos representam os resultados analíticos do método do operador fracionário de Riesz com os parâmetros $\ell_0 = 0.2$ e $x_0 = 2$. O valor máximo de L vai diminuindo progressivamente desde (a) $L = 29000$ até (d) $L = 9000$. As linhas verdes são o best fit destes resultados usando a forma $Y = A_1/(x^{B_1} \log x)$, correspondente à previsão teórica, e as linhas vermelhas utilizando $Y = A_2x^{-B_2}$. No primeiro caso, o expoente de best fit $B_1 \approx 0.50$ concorda bastante bem com a previsão $\eta_{opt} \sim 1/(\sqrt{L} \log L)$. No segundo caso o melhor ajuste foi conseguido com $B_2 \approx 0.61$.

Finalmente, a Fig. Figura 25 resume em um único gráfico os resultados desta seção. Quando os dados das três distribuições de tamanhos de passos são mostrados em conjunto, fica mais fácil visualizar que a PDF do tipo exponencial dupla com comprimentos característicos e pesos estatísticos ajustados de modo a refletir as escalas relevantes do problema apresenta uma eficiência ótima maior que a das demais distribuições no regime escasso de

buscas aleatórias unidimensionais não-destrutivas.

Argumentamos, portanto, que no contexto de “animal foraging”, quando o animal não possui qualquer conhecimento a priori sobre o espaço de busca, a escolha dos parâmetros da PDF de tamanhos de passos associados às escalas x_0 e L é extremamente improvável. Desse modo, concluímos que na ausência completa de informações sobre o espaço de busca o resultado que aponta as buscas de Lévy como as mais eficientes permanece válido.

Em princípio, este raciocínio também se aplica a buscas mais realistas realizadas em espaços de dimensões maiores que um. De fato, estes espaços podem ser eventualmente caracterizados por várias (mais de duas) escalas relevantes. Nesse sentido, uma distribuição hipere exponencial que refletisse tais escalas em princípio levaria a eficiências de busca superiores à de Lévy. Novamente, contudo, na situação de ausência completa de informações, em que tal escolha específica se torna bastante improvável, a distribuição de Lévy deve ser a que gera a maior eficiência ótima.

No próximo capítulo apresentaremos a conclusão e as perspectivas futuras deste trabalho.

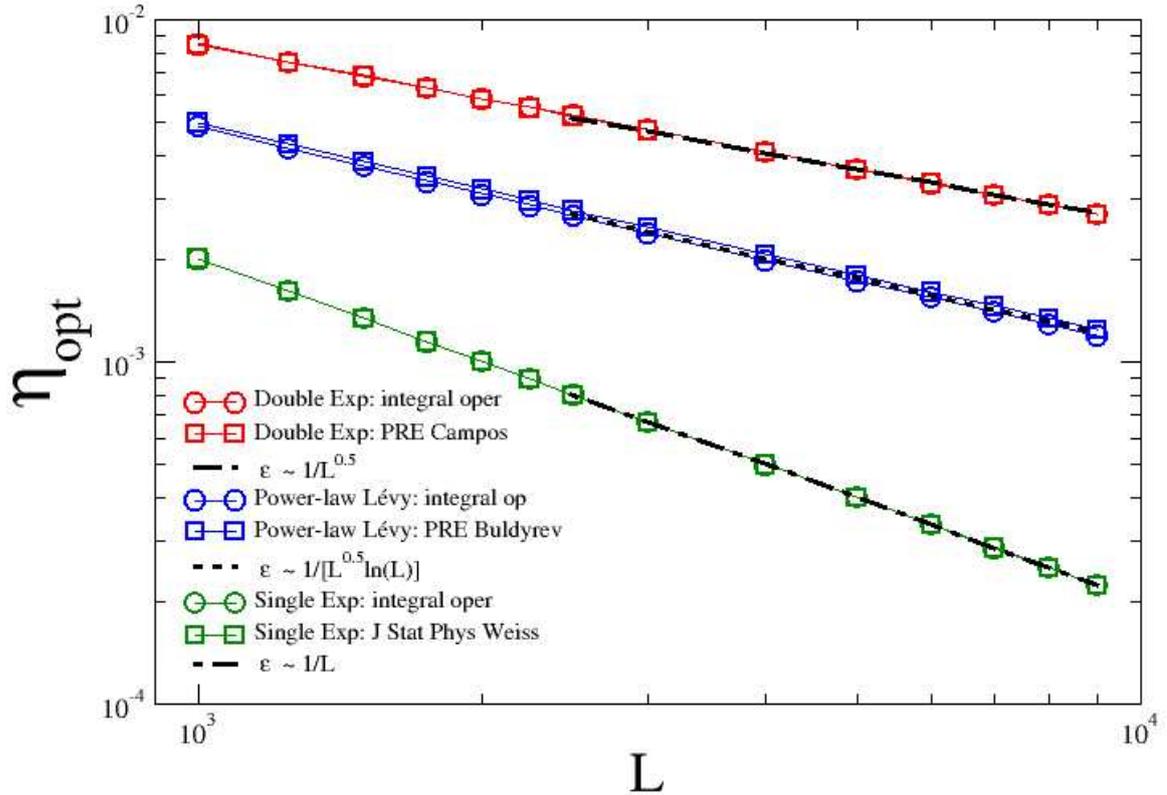


Figura 25: Eficiência ótica η_{opt} da busca não-destrutiva em uma dimensão realizada com as ditribuições de tamanhos de passos exponencial simples (símbolos verdes), exponencial dupla (vermelho) e lei de potência ou Lévy (azuis), em função de L na escala log-log. Os círculos representam os resultados obtidos pelo método do operador integral, equanto que os quadrados dizem respeito às técnicas de tempo médio de primeira passagem (exponenciais) e operador fracionário de Riesz (lei de potência). As linhas denotam os fits no regime escasso, $L \geq 2500$, segundo as previsões teóricas $\eta_{opt} \sim 1/L$ (exponencial simples), $\eta_{opt} \sim 1/(\sqrt{L} \log L)$ (lei de potência), e $\eta_{opt} \sim 1/\sqrt{L}$ (exponencial dupla). Os parâmetros utilizados form $x_0 = 2$, $\ell_0 = 0.2$ e $\Delta x = 0.2$. Para a exponencial dupla usamos ainda $\tau_1 = 10^3 L$ e $\tau_2 = x_0$. Neste regime não-destrutivo unidimensional, a PDF exponencial dupla emerge como a que leva à maior eficiência ótica entre as ditribuições analisadas.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nessa dissertação estudamos como a eficiência das buscas aleatórias unidimensionais no regime não-destrutivo escala com a distância L entre os sítios alvos. O principal objetivo foi comparar as eficiências ótimas das distribuições de tamanhos de passos do tipo lei de potência ou Lévy, exponencial simples e exponencial dupla no regime escasso em que $L \rightarrow \infty$.

Para fazer essa análise utilizamos alguns métodos já conhecidos na literatura [12, 8, 3]. No método do operador integral [3] tivemos uma limitação devido à grande quantidade de memória RAM necessária para explorar espaços de extensão $L > 10^4$. Para contornar esse problema, utilizamos também o método do cálculo do tempo médio de primeira passagem [12] para obter uma expressão analítica exata para a eficiência da exponencial simples e aproximada para a exponencial dupla com escalas características de comprimento $\tau_1 \gg L/v$ e $\tau_2 \ll L/v$. Também determinamos a eficiência aproximada com a distribuição lei de potência pelo método do operador fracionário de Riesz [8].

Em particular, obtivemos como a eficiência máxima η_{opt} escala com L para estas três distribuições quando $x_0 \ll L$. De fato, de posse das expressões analíticas para cada distribuição encontramos nesse regime que $\eta_{opt} \sim 1/L$ para a exponencial simples, $\eta_{opt} \sim 1/(\sqrt{L} \log L)$ para a lei de potência, e $\eta_{opt} \sim 1/\sqrt{L}$ para a exponencial dupla com $\tau_1 \gg L/v$ e $\tau_2 \ll L/v$. Desse modo, a maior eficiência ótima foi a da distribuição exponencial dupla com parâmetros associados às escalas relevantes do problema.

Argumentamos, contudo, que no contexto de “animal foraging”, quando o animal não possui qualquer conhecimento a priori sobre o espaço de busca, a escolha dos parâmetros da PDF de tamanhos de passos associados às escalas x_0 e L é extremamente improvável. Desse modo, concluimos que na ausência completa de informações sobre o espaço de busca o resultado que aponta as buscas de Lévy como as mais eficientes permanece válido. Em princípio, este raciocínio também se aplica a buscas mais realistas realizadas em espaços de dimensões maiores que um. Esse resultado está de acordo com a “Lévy flight foraging hypothesis”.

Como perspectiva para trabalhos futuros, é nossa intenção aplicar as distribuições hiperexponenciais a outros sistemas reais que tenham sido previamente analisados através da distribuição de Lévy, a fim de tentar comparar as suas eficiências ótimas. Gostaríamos

também de abordar o difícil problema do cálculo analítico da eficiência da busca não-destrutiva em duas dimensões para checar as previsões acima a respeito da otimização da eficiência pela distribuição de lei de potência (Lévy) com $\mu \approx 2$.

REFERÊNCIAS

-
- [1] Andris Ambainis, Yuval Filmus, and Francois Le Gall. “Fast Matrix Multiplication”. In: June 2015, pp. 585–593. DOI: 10.1145/2746539.2746554.
- [2] Louis Bachelier. “Théorie de la spéculation”. In: *Annales scientifiques de l’École normale supérieure*. Vol. 17. 1900, pp. 21–86.
- [3] Frederic Bartumeus et al. “Stochastic Optimal Foraging Theory”. In: vol. 2071. Jan. 2013, pp. 3–32. DOI: 10.1007/978-3-642-35497-7_1.
- [4] Frederic Bartumeus et al. “Stochastic Optimal Foraging: Tuning Intensive and Extensive Dynamics in Random Searches”. In: *PloS one* 9 (Sept. 2014), e106373. DOI: 10.1371/journal.pone.0106373.
- [5] Simon Benhamou. “HOW MANY ANIMALS REALLY DO THE LÉVY WALK?” In: *Ecology* 88.8 (2007), pp. 1962–1969. DOI: 10.1890/06-1769.1. eprint: <https://esajournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1890/06-1769.1>. URL: <https://esajournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1890/06-1769.1>.
- [6] Stanislav Boldyrev and Carl R Gwinn. “Lévy model for interstellar scintillations”. In: *Physical review letters* 91.13 (2003), p. 131101.
- [7] S.V. BULDYREV. “Average time spent by Lévy flights and walks on an interval with absorbing boundaries”. In: *Physical Review E* (2001).
- [8] SV Buldyrev et al. “Properties of Lévy flights on an interval with absorbing boundaries”. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 302.1-4 (2001), pp. 148–161.
- [9] Ivan Calvo et al. “Continuous Time Random Walks in periodic systems: fluid limit and fractional differential”. In: *Journal of Physics A Mathematical and Theoretical* 40 (Aug. 2007), p. 13511. DOI: 10.1088/1751-8113/40/45/002.
- [10] D. Campos et al. “Optimal search strategies of space-time coupled random walkers with finite lifetimes”. In: *Phys. Rev. E* 91 (5 May 2015), p. 052115. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.052115. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.052115>.

-
- [11] Daniel Campos, Frederic Bartumeus, and Vicen ç Méndez. “Search times with arbitrary detection constraints”. In: *Phys. Rev. E* 88 (2 Aug. 2013), p. 022101. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.022101. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.88.022101>.
- [12] Daniel Campos et al. “First-passage times in multiscale random walks: The impact of movement scales on search efficiency”. In: *Physical Review E* 92 (Aug. 2015). DOI: 10.1103/PhysRevE.92.052702.
- [13] V Carbone et al. “Clustering of polarity reversals of the geomagnetic field”. In: *Physical review letters* 96.12 (2006), p. 128501.
- [14] JC Crisanto-Neto et al. “A formal power series expansion–regularization approach for Lévy stable distributions: the symmetric case with (M positive integer)”. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 49.37 (2016), p. 375001.
- [15] JC Crisanto-Neto et al. “An efficient series approximation for the Lévy α -stable symmetric distribution”. In: *Physics Letters A* 382.35 (2018), pp. 2408–2413.
- [16] T. O. Crist et al. “Animal Movement in Heterogeneous Landscapes: An Experiment with Eleodes Beetles in Shortgrass Prairie”. In: *Functional Ecology* 6.5 (1992), pp. 536–544. ISSN: 02698463, 13652435. URL: <http://www.jstor.org/stable/2390050>.
- [17] Mehdi Delkhosh. “Introduction of Derivatives and Integrals of Fractional Order and Its Applications”. In: *Applied Mathematics and Physics* 1 (Nov. 2013), pp. 103–119. DOI: 10.12691/amp-1-4-3.
- [18] Francis AL Dullien. *Porous media: fluid transport and pore structure*. Academic press, 2012.
- [19] Andrew Edwards et al. “Revisiting Lévy Flight Search Patterns of Wandering Albatrosses, Bumblebees and Deer”. In: *Nature* 449 (Nov. 2007), pp. 1044–8. DOI: 10.1038/nature06199.
- [20] Albert Einstein. “Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen”. In: *Annalen der physik* 322.8 (1905), pp. 549–560.

-
- [21] J Merritt Emlen. “The role of time and energy in food preference”. In: *The American Naturalist* 100.916 (1966), pp. 611–617.
- [22] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. 2. John Wiley & Sons, 2008.
- [23] Hans Fischer. *A history of the central limit theorem. From classical to modern probability theory*. Jan. 2011. DOI: 10.1007/978-0-387-87857-7.
- [24] Sergey Foss, Dmitry Korshunov, Stan Zachary, et al. *An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions*. Vol. 6. Springer, 2011.
- [25] Anderson SL Gomes et al. “Observation of Lévy distribution and replica symmetry breaking in random lasers from a single set of measurements”. In: *Scientific reports* 6 (2016), p. 27987.
- [26] Marta C Gonzalez, Cesar A Hidalgo, and Albert-Laszlo Barabasi. “Understanding individual human mobility patterns”. In: *nature* 453.7196 (2008), pp. 779–782.
- [27] George H. Weiss. “First passage times for correlated random walks and some generalizations”. In: *Journal of Statistical Physics* 37 (Nov. 1984), pp. 325–330. DOI: 10.1007/BF01011837.
- [28] NA Hill and D-P Häder. “A biased random walk model for the trajectories of swimming micro-organisms”. In: *Journal of Theoretical Biology* 186.4 (1997), pp. 503–526.
- [29] Barry D Hughes, Michael F Shlesinger, and Elliott W Montroll. “Random walks with self-similar clusters”. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 78.6 (1981), pp. 3287–3291.
- [30] Nicolas Humphries et al. “Environmental Context Explains Lévy and Brownian Movement Patterns of Marine Predators”. In: *Nature* 465 (June 2010), pp. 1066–9. DOI: 10.1038/nature09116.
- [31] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. 3rd ed. New York, NY: Wiley, 1999. ISBN: 9780471309321. URL: <http://cdsweb.cern.ch/record/490457>.
- [32] Monique de Jager et al. “Lévy walks evolve through interaction between movement and environmental complexity”. In: *Science* 332.6037 (2011), pp. 1551–1553.

- [33] Monique de Jager et al. “Response to Comment on “Lévy Walks Evolve Through Interaction Between Movement and Environmental Complexity””. In: *Science* 335.6071 (2012), pp. 918–918. ISSN: 0036-8075. DOI: 10.1126/science.1215903. eprint: <https://science.sciencemag.org/content/335/6071/918.4.full.pdf>. URL: <https://science.sciencemag.org/content/335/6071/918.4>.
- [34] Vincent AA Jansen, Alla Mashanova, and Sergei Petrovskii. “Comment on “Lévy walks evolve through interaction between movement and environmental complexity””. In: *science* 335.6071 (2012), pp. 918–918.
- [35] Peter Kareiva and Nanako Shigesada. “Analyzing Insect Movement as a Correlated Random-Walk”. In: *Oecologia* 56 (Feb. 1983), pp. 234–238. DOI: 10.1007/BF00379695.
- [36] Joseph Klafter, Michael F Shlesinger, and Gert Zumofen. “Beyond brownian motion”. In: (1996).
- [37] Robert H MacArthur and Eric R Pianka. “On optimal use of a patchy environment”. In: *The American Naturalist* 100.916 (1966), pp. 603–609.
- [38] G.V.T. Matthews. “Behavioural Ecology: an evolutionary approach, edited by J.R. Krebs and N.B. Davies. Blackwell Scientific Publications, £18.95. hardback, £8.50 paperback.” In: *Oryx* 16.3 (1982), pp. 284–285. DOI: 10.1017/S0030605300017567.
- [39] Vicenç Méndez, Daniel Campos, and Frederic Bartumeus. *Stochastic foundations in movement ecology. Anomalous diffusion, front propagation and random searches*. Jan. 2014. DOI: 10.1007/978-3-642-39010-4.
- [40] John Nolan. “Stable Distribution: Models for Heavy-Tailed data”. In: (Jan. 2014).
- [41] P.J.Ribeiro-Neto. “Análise da Dinâmica Energética de Buscas Aleatórias”. PhD thesis. Universidade Federal de Pernambuco, 2012.
- [42] C.S. Patlak. “Random walk with persistence and external bias”. In: *J Theor Biol* 30 (Jan. 1971), pp. 235–248.
- [43] C-K Peng et al. “Long-range anticorrelations and non-Gaussian behavior of the heartbeat”. In: *Physical review letters* 70.9 (1993), p. 1343.
- [44] Peter Pirolli and Stuart Card. “Information foraging.” In: *Psychological review* 106.4 (1999), p. 643.

-
- [45] Graham H Pyke. “Understanding movements of organisms: it’s time to abandon the Lévy foraging hypothesis”. In: *Methods in Ecology and Evolution* 6.1 (2015), pp. 1–16.
- [46] EP Raposo et al. “Dynamical robustness of Lévy search strategies”. In: *Physical review letters* 91.24 (2003), p. 240601.
- [47] LE Reichl. “A Modern Course in Statistical Physics”. In: *A Modern Course in Statistical Physics, 2nd Edition, by LE Reichl, pp. 842. ISBN 0-471-59520-9. Wiley-VCH, February 1998.* (1998), p. 842.
- [48] AM Reynolds. “Selection pressures give composite correlated random walks Lévy walk characteristics”. In: *Journal of theoretical biology* 332 (2013), pp. 117–122.
- [49] Andy M Reynolds. “Mussels realize Weierstrassian Lévy walks as composite correlated random walks”. In: *Scientific reports* 4 (2014), p. 4409.
- [50] Andy M Reynolds, Patrick Schultheiss, and Ken Cheng. “Does the Australian desert ant *Melophorus bagoti* approximate a Lévy search by an intrinsic bi-modal walk?” In: *Journal of theoretical biology* 340 (2014), pp. 17–22.
- [51] Theo Rhodes and Michael T Turvey. “Human memory retrieval as Lévy foraging”. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 385.1 (2007), pp. 255–260.
- [52] ÉC Rocha et al. “Why Lévy α -stable distributions lack general closed-form expressions for arbitrary α ”. In: *Physical Review E* 100.1 (2019), p. 010103.
- [53] Oswald Schmitz, Andrew Beckerman, and Kate O’Brien. “Behaviorally Mediated Trophic Cascades: Effects of Predation Risk on Food Web Interactions”. In: *Ecology* 78 (July 1997). DOI: 10.2307/2266134.
- [54] Divya Sharma, Hema Ramachandran, and N Kumar. “Lévy statistical fluctuations from a random amplifying medium”. In: *Fluctuation and Noise Letters* 6.01 (2006), pp. L95–L101.
- [55] Michael F Shlesinger and Joseph Klafter. “Lévy walks versus Lévy flights”. In: *On growth and form*. Springer, 1986, pp. 279–283.
- [56] Michael F Shlesinger, George M Zaslavsky, and Joseph Klafter. “Strange kinetics”. In: *Nature* 363.6424 (1993), pp. 31–37.

-
- [57] David Sims et al. “Scaling Laws of Marine Predator Search Behaviour”. In: *Nature* 451 (Mar. 2008), pp. 1098–102. DOI: 10.1038/nature06518.
- [58] D.W. Stephens and J.R. Krebs. *Foraging Theory*. Monographs in Behavior and Ecology. Princeton University Press, 1986. ISBN: 9780691084428. URL: <https://books.google.com.br/books?id=DVxvu-qDsaIC>.
- [59] James Stewart. *Calculus : early transcendentals*. Belmont, Cal.: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2012. ISBN: 0538497904 9780538497909 0840058853 9780840058850 0538498714 9780538498715 0538498870 9780538498876 0840048254 9780840048257.
- [60] J. D. Tamarkin. “On Integrable Solutions of Abel’s Integral Equation”. In: *Annals of Mathematics* 31.2 (1930), pp. 219–229. ISSN: 0003486X. URL: <http://www.jstor.org/stable/1968092>.
- [61] Robert Brown F.R.S. Hon. M.R.S.E. R.I. Acad. V.P.L.S. “XXVII. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies”. In: *The Philosophical Magazine* 4.21 (1828), pp. 161–173. DOI: 10.1080/14786442808674769.
- [62] G.M. Viswanathan et al. “Optimizing the Success of Random Searches”. In: *Nature* 401 (Nov. 1999), pp. 911–4. DOI: 10.1038/44831.
- [63] Gandhimohan M Viswanathan et al. “Lévy flight search patterns of wandering albatrosses”. In: *Nature* 381.6581 (1996), pp. 413–415.
- [64] Gandhimohan Viswanathan et al. “The Physics of Foraging: An Introduction to Random Searches and Biological Encounters”. In: *The Physics of Foraging: an Introduction to Random Searches and Biological Encounters* (Jan. 2011). DOI: 10.1017/CB09780511902680.
- [65] G.H. Weiss. *Aspects and applications of the random walk*. 1994.
- [66] George H. Weiss. “Random Walks and Their Applications: Widely used as mathematical models, random walks play an important role in several areas of physics, chemistry, and biology”. In: *American Scientist* 71.1 (1983), pp. 65–71. ISSN: 00030996. URL: <http://www.jstor.org/stable/27851819>.

-
- [67] Earl E. Werner and Donald J. Hall. “Optimal Foraging and the Size Selection of Prey by the Bluegill Sunfish (*Lepomis Macrochirus*)”. In: *Ecology* 55.5 (1974), pp. 1042–1052. ISSN: 00129658, 19399170. URL: <http://www.jstor.org/stable/1940354>.
- [68] G Zumofen, J Klafter, and MF Shlesinger. “Lévy flights and Lévy walks revisited”. In: *Anomalous Diffusion From Basics to Applications*. Springer, 1999, pp. 15–34.