



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Matheus Nunes Soares

**Existência de Configurações Centrais Simétricas do
Problema de N Corpos**

Recife

2021

Matheus Nunes Soares

**Existência de Configurações Centrais Simétricas do
Problema de N Corpos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos parciais para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concetração: Geometria

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro

Recife
2021

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S676e Soares, Matheus Nunes
Existência de configurações centrais simétricas do problema de N corpos /
Matheus Nunes Soares. – 2021.
85 f.: il., fig.

Orientador: Eduardo Shirlippe Goes Leandro.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Matemática, Recife, 2021.
Inclui referências e apêndices.

1. Geometria. 2. Análise. 3. Problema de N corpos. 4. Configurações
centrais. I. Leandro, Eduardo Shirlippe Goes (orientador). II. Título.

516

CDD (23. ed.)

UFPE- CCEN 2021 - 62

MATHEUS NUNES SOARES

EXISTÊNCIA DE CONFIGURAÇÕES CENTRAIS
SIMÉTRICAS DO PROBLEMA DE N CORPOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 24/02/2021

Banca Examinadora

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a minha esposa Gleyce por toda a paciência, carinho nos momentos que eu mais precisava, compreensão quando estive ausente e por estar ao meu lado sempre. Grande parte das minhas realizações são dedicadas a você.

À minha família por ser o alicerce da minha vida, em especial a minha mãe Marta por todo amor proporcionado.

À meus amigos Shadownildo, Luis, Caio, Petrus, Blame, Lass(Tá no wow? tô), Arthur e Lucas pela amizade que se mantém por anos mesmo cada um morando em uma ponta do Brasil. Agradeço por vocês simplesmente serem vocês.

À meus amigos Arthur Coelho, Igor, Global, Xerecoteco, Rick, Fredy e Seyzon pela parceria, boas risadas e amizade que temos mesmo o mais próximo de mim estando a 2300km.

À meus amigos da sala 214 pela companhia e apoio. As longas horas diárias no departamento de matemática tornaram-se mais agradáveis graças a vocês.

Ao professor Eduardo Leandro pela orientação e pelos puxões de orelha que fizeram com que eu melhorasse como estudante e possibilitaram que esse trabalho fosse finalizado.

Ao professor Thiago Dias e ao professor Marcelo Pedro por terem aceitado participar da banca. Além disso, destaco que ambos tiveram um papel importante na minha graduação que fizeram com que esse mestrado fosse possível.

Aos meus companheiros do DMAT que contribuíram com meu mestrado, sendo tirando alguma dúvida minha, conversando besteira comigo ou simplesmente indo comer um risole nas barracadas do IFPE.

Por fim, agradeço à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho estudaremos a existência de configurações centrais simétricas do problema de N corpos sob a ótica da teoria de grupos através de ações de subgrupos finitos do grupo ortogonal $\mathcal{O}(d)$ em \mathbb{R}^d a partir do **Teorema de James Montaldi** e com o auxílio do **Princípio da Criticalidade Simétrica** de Richard Palais. Com objetivo de evitar ordenações artificiais dos corpos estudados, construiremos ao longo do texto a estrutura topológica e diferenciável do espaço de configurações ordenadas quocientado pelo grupo de permutações para exibir a possibilidade de analisar configurações centrais a partir de pontos críticos da função potencial restrita a algum conjunto de nível da função momento de inercia. Além disso, mostraremos algumas generalizações da forma geométrica das configurações com simetria diedral e cíclica para corpos em \mathbb{R}^2 e com o auxílio do software SageMath, faremos o mesmo para configurações com simetria tetraedral e octaedral para corpos em \mathbb{R}^3 .

Palavras-Chave: Mecânica Celeste. Problema de N corpos. Configurações Centrais. Configurações Simétricas.

ABSTRACT

In this work we study the existence of symmetric central configuration of the N -body problem from the perspective of group theory through the action of finite subgroups of the orthogonal group $\mathcal{O}(d)$ in \mathbb{R}^d using **James Montaldi's Theorem** with assistance of the **Principle of Symmetric Criticality** initially proposed and proved by Richard Palais. With the objective of avoiding artificial orderings, we build in the text the topological and differentiable structures for the quotient space of ordered configurations by the permutation group to show the possibility of analyzing central configurations as critical points of the potential function restricted to some level set of the moment of inertia. Furthermore, we show some generalizations of the geometric form of configurations with dihedral and cyclic symmetry for bodies in \mathbb{R}^2 and with the help of the software SageMath we do the same for configurations with regular tetrahedral and octahedral symmetry for bodies in \mathbb{R}^3 .

Keywords: Celestial Mechanics. N -body Problem. Central Configurations. Symmetric Configurations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração da solução de Lagrange com centro de massa (em cor rosa) distinto do centro do triângulo equilátero	19
Figura 2 – Configuração formada pelos vértices de um antiprisma	19
Figura 3 – Configuração formada pelos vértices de um octaedro truncado	20
Figura 4 – Órbita tipo (\mathbb{Z}_2) descrita pelos pontos $\{\mathbf{x}_0, r \cdot \mathbf{x}_0, r^2 \cdot \mathbf{x}_0\}$ em vermelho	24
Figura 5 – Órbita tipo $(\{e\})$ descrita pelos pontos $\{\mathbf{x}_1, s \cdot \mathbf{x}_1, r \cdot \mathbf{x}_0, rs \cdot \mathbf{x}_1, r^2 \cdot \mathbf{x}_0, r^2 s \cdot \mathbf{x}_1\}$ em verde	25
Figura 6 – Configuração D_4 -simétrica	26
Figura 7 – $\Gamma = 1(D_3 \times \{e\}) + 1(\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_2^\xi) + 1(\mathbb{Z}_2^\alpha \times \{e\}) + 1(\{e\} \times \{e\})$	27
Figura 8 – Vizinhança do ponto $(0, 0)$ da Lemniscata de Bernoulli	30
Figura 9 – Interpretação geométrica de certos pontos do conjunto $X_{\mathbb{Z}_2}$, representados nos vértices de um triângulo na figura	34
Figura 10 – Pontos em \mathbb{R}^2 que são estabilizados exatamente por \mathbb{Z}_2	35
Figura 11 – Representação de $(\mathbb{R} - \{0\})^2 - \Delta(\mathbb{R} - \{0\})^2 / S_2$	37
Figura 12 – Componente conexa de $\{\{x, y\} : x \neq y\}$	41
Figura 13 – Componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - \Delta\mathbb{R}^2$ separadas pela diagonal $\Delta\mathbb{R}^2$	41
Figura 14 – Representação da deformação contínua de um ponto para outro nas componentes conexas de $\{\{(x, m(x)), (y, m(y))\} : x, y \in \mathbb{R}\}$	43
Figura 15 – Solução colinear do problema de três corpos	44
Figura 16 – $\Gamma = 3(D_1) + 2(\{e\})$	52
Figura 17 – $\Gamma = 1(\mathbb{Z}_2 \times \{e\}) + 1(\{e\} \times \mathbb{Z}_2^\xi) + 1(\{e\} \times \{e\})$	54
Figura 18 – Simetrias do tetraedro	55
Figura 19 – $\Gamma = 1(S_3) + 1(S_3)' + 1(\mathbb{Z}_2)$	56
Figura 20 – $\Gamma = 1(\mathbb{T}_d) + 1(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) + 1(\{e\})$	57
Figura 21 – Rotações não-conjugadas do octaedro	57
Figura 22 – $\Gamma = 1(C_4 \times \mathbb{Z}_2^\omega) + 1(\mathbb{Z}_2^\omega \times \mathbb{Z}_2^\alpha) + 1(\{e\})$	58
Figura 23 – Identificação dos pontos do tetraedro	84

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	UM PASSEIO NA TEORIA DE GRUPOS	12
3	UMA BREVE INTRODUÇÃO À MECÂNICA CELESTE	16
4	CONFIGURAÇÕES SIMÉTRICAS	23
4.1	$D_3, D_4 \leq \mathcal{O}(2)$ E $D_{3h} \leq \mathcal{O}(3)$	23
5	SOBRE A ESTRUTURA DIFERENCIÁVEL	29
5.1	VARIETADES	29
5.2	GRUPOS DE LIE	30
6	COMPONENTES CONEXAS	34
6.1	TIPO TOPOLÓGICO DE BURNSIDE	34
6.2	ABERTOS E CONFIGURAÇÕES	38
6.3	INFLUÊNCIA DAS MASSAS NAS COMPONENTES CONEXAS	40
7	O TEOREMA DE SIMETRIA	46
7.1	PRINCÍPIO DA CRITICALIDADE SIMÉTRICA	46
7.2	TEOREMA DE MONTALDI	48
8	CONFIGURAÇÕES C_l E D_k-SIMÉTRICAS	50
8.1	DIMENSÃO 2	50
8.2	DIMENSÃO 3	53
8.3	RELEVÂNCIA DOS SUBGRUPOS NO ESTUDO DE ÓRBITAS COM SIMETRIA DIEDRAL	58
9	CONFIGURAÇÕES BALANCEADAS	60
	REFERÊNCIAS	64
	APÊNDICE A - RESULTADOS E DEFINIÇÕES AUXILIARES	65
	APÊNDICE B - REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE \mathbb{T}_d	66
	APÊNDICE C - REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE \mathbb{O}_h	74

1 INTRODUÇÃO

A Mecânica Celeste é uma área das ciências que tem por objetivo principal o estudo do movimento dos corpos celestes, levando em consideração suas massas e, em geral, apenas a força gravitacional mútua agindo sobre eles.

O problema mais importante deste ramo é conhecido na literatura como **O Problema de N corpos**. Consiste em explicitar as curvas que descrevem o movimento de cada corpo ao longo do tempo. Naturalmente surge o questionamento se soluções tão gerais de fato existem. Pouco se tem de informação sobre as soluções dos casos gerais, entretanto existem casos particulares onde podemos obter tais resultados. Isaac Newton, por exemplo, solucionou totalmente o problema para $N = 2$. Além disso, Euler exibiu soluções de casos particulares (sob certas condições) para $N = 3$. Este último ponto será discutido mais à frente no Capítulo 6.

Nesta mesma perspectiva, podemos ramificar mais ainda nosso ambiente de trabalho para encontrar soluções do problema de N corpos. A subárea da Mecânica Celeste que terá um foco importante neste trabalho é aquela que estuda as Configurações Centrais. Ao longo dos anos, diversos matemáticos demonstraram a existência de configurações centrais com simetrias específicas, como: [CL89] para o caso de configurações simétricas espaciais; [YZ12] para o caso de configurações dadas por dois polígonos regulares, um gerado pela rotação do outro; [LS06] para o caso de configurações degeneradas. O objetivo principal deste trabalho é demonstrar o teorema de existência de configurações centrais de James Montaldi [Mon15]. Entretanto, antes de abordar tal resultado, é necessário definir alguns objetos e enunciar resultados que serão utilizados ao longo do texto. Trabalharemos especialmente com configurações que podem ser descritas como união de órbitas de pontos através da ação de certos subgrupos do grupo ortogonal.

Durante o Capítulo 2, introduziremos algumas definições acerca da teoria de grupos, especialmente no estudo das órbitas. O objetivo disso é, mais à frente, associar órbitas às configurações de corpos com massas com determinada simetria.

Já no Capítulo 3, o objetivo é apresentar ao leitor o objeto base do trabalho, que são as configurações centrais, além de separá-las em classes especiais. Abordaremos as configurações centrais e as configurações G -simétricas. Definiremos também a noção de

tipo de órbita, onde associamos uma órbita ao estabilizador de seus pontos. Além disso, para não tornar o estudo deveras abstrato, as definições serão seguidas de exemplos.

Para o Capítulo 4, construiremos detalhadamente três exemplos de configurações G -simétricas dadas a partir da união de tipos de órbita. Além disso, a partir das figuras será possível visualizar as formas geométricas dadas por cada tipo de órbita distinto.

No Capítulo 5, demonstraremos que o conjunto das configurações quocientado pelo grupo de permutações (formando as configurações não-ordenadas) é uma variedade suave. A principal ferramenta para verificar tal fato é o **Teorema da Variedade Quociente**. Entretanto, devido à natureza dos objetos utilizados no teorema, será necessário sintetizar algumas definições e resultados sobre variedades e da teoria de grupos de Lie. A principal referência utilizada é o livro **Introduction to Topological Manifolds** do autor John Lee [Lee13].

Um ponto importante durante o estudo que está sendo proposto são os abertos no espaço das configurações não-ordenadas. Apesar do capítulo 6 apresentar a estrutura de variedade, nenhuma informação destaca a importância da topologia deste espaço. Nesta perspectiva, o Capítulo 6 visa estudar os abertos das configurações, suas componentes conexas e de como as massas influenciam a topologia do espaço.

No Capítulo 7 demonstraremos o teorema que é o objetivo principal deste trabalho:

Teorema 1 (Teorema de James Montaldi). *Sejam $G \leq \mathcal{O}(d)$ um subgrupo finito e Γ um tipo topológico de Burnside de G . Existe ao menos uma configuração central em cada componente conexa do conjunto $\mathcal{C}(\Gamma)$, onde $\mathcal{C}(\Gamma)$ é o conjunto de todas as configurações com tipo topológico de Burnside Γ .*

Para auxiliar a demonstração, utilizaremos o **Princípio da Criticalidade Simétrica** de [Pal79].

Para finalizar, introduziremos e exibiremos uma versão do Teorema 1 para configurações balanceadas, além de um esboço da demonstração.

A fim de dar complementação teórica ao texto, teremos três apêndices com resultados importantes para construção dos argumentos apresentados no desenvolvimento. O primeiro apêndice consiste em alguns resultados auxiliares que serão enunciados mas cuja demonstração foge do objetivo do trabalho. Já no segundo e terceiro apêndices faremos uma análise dos subgrupos relevante no estudo do tipo de Burnside para os grupos de

simetrias do tetraedro e do octaedro. Para isso, usaremos o programa SageMath para calcular todos os subgrupos a partir da representação matricial.

2 UM PASSEIO NA TEORIA DE GRUPOS

Durante este trabalho, iremos abordar fortemente definições e resultados importantes da Teoria de Grupos. Normalmente, algumas dessas definições são vistas em disciplinas introdutórias de álgebra, entretanto, para dar completude ao trabalho, iremos enunciá-las e demonstrá-las quando necessário. Para um estudo mais detalhado sobre o tema, ver a referência [Ros94], em especial o Capítulo 4.

Definição 2.1. Seja X um conjunto. Considere um ponto $\mathbf{x} \in X$ e um grupo G tal que G age sobre X via ação $\phi : G \times X \rightarrow X$ dada por $\phi(g, \mathbf{x}) = g \cdot \mathbf{x}$. A **órbita** de \mathbf{x} em G , denotada por $G \cdot \mathbf{x}$, é o conjunto de todos os pontos $g \cdot \mathbf{x}$, onde $g \in G$. Isto é,

$$G \cdot \mathbf{x} = \bigcup_{g \in G} \{g \cdot \mathbf{x}\} = \{g \cdot \mathbf{x} \in X : g \in G\}.$$

Para reduzir a notação, em geral, utilizaremos apenas o ponto \cdot para denotar a ação quando não houver necessidade de especificá-la.

Exemplo 2.2. Sejam $X = \{(1, 0), (0, 0), (0, 1)\}$ e $G = \{e, s\}$, onde s representa a permutação da primeira e segunda coordenadas do ponto. Definimos a ação $\phi : G \times X \rightarrow X$ tal que $\phi(e, (x, y)) = (x, y)$ e $\phi(s, (x, y)) = (y, x)$. Logo,

$$G \cdot (1, 0) = \{\phi(e, (1, 0)), \phi(s, (1, 0))\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

Além disso, $X = G \cdot (1, 0) \amalg G \cdot (0, 0)$.

Proposição 2.3. Se G age em um conjunto $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, então

$$X = \bigsqcup_{j=1}^{n_0} G \cdot \mathbf{x}_j, \quad n_0 \leq n.$$

Em outras palavras, X é a união disjunta das órbitas da ação de G em X .

Demonstração. Tome $\mathbf{x} \in G \cdot \mathbf{x}_i \cap G \cdot \mathbf{x}_j$, com $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in X$. Logo, $\mathbf{x} = g_0 \cdot \mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x} = g_1 \cdot \mathbf{x}_j$ para certos $g_0, g_1 \in G$. Portanto,

$$\mathbf{x}_i = (g_0^{-1}g_1) \cdot \mathbf{x}_j.$$

Considere $\mathbf{y} \in G \cdot \mathbf{x}_i$ fixo porém arbitrário. Logo, $\mathbf{y} = g_2 \cdot \mathbf{x}_i$, para certo $g_2 \in G$. Consequentemente, $\mathbf{y} = (g_2 g_0^{-1} g_1) \cdot \mathbf{x}_j$. Como $g_2 g_0^{-1} g_1 \in G$, então $\mathbf{y} \in G \cdot \mathbf{x}_j$. Da arbitrariedade de \mathbf{y} , segue que $G \cdot \mathbf{x}_i \subset G \cdot \mathbf{x}_j$. Fazendo as substituições necessárias, um argumento inteiramente análogo mostra que $G \cdot \mathbf{x}_j \subset G \cdot \mathbf{x}_i$.

A construção acima mostra que órbitas com ao menos um ponto de interseção coincidem, isto é, todas órbitas distintas são disjuntas. Como todo ponto pertence a uma órbita, o resultado segue. ■

Definição 2.4. O grupo de isotropia do ponto $\mathbf{x} \in X$ ou estabilizador é o subgrupo de G dado por

$$G_{\mathbf{x}} = \{g \in G : g \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}\}.$$

Exemplo 2.5. Considere $G = \mathbb{Z}_2$ e $\mathbf{x} = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Assuma que a ação de G em \mathbb{R}^2 seja dada da mesma forma do exemplo 2.2. Logo,

$$\phi(e, (1, 0)) = (1, 0) \text{ e } \phi(s, (1, 0)) = (0, 1).$$

Portanto, $G_{(1,0)} = \{e\}$.

Agora, iremos demonstrar um resultado que relaciona pontos numa mesma órbita e os seus respectivos estabilizadores.

Teorema 2.6. *Sejam X um conjunto e G um grupo tal que G age sobre X . Considere $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in X$. Se $\mathbf{y} = g \cdot \mathbf{x}$, então $G_{\mathbf{y}} = gG_{\mathbf{x}}g^{-1}$. Em outras palavras, pontos na mesma órbita possuem estabilizadores conjugados.*

Demonstração. Suponha que $\mathbf{y} = g \cdot \mathbf{x}$. Tome $h \in gG_{\mathbf{x}}g^{-1}$ fixo porém arbitrário. Logo, existe $h' \in G_{\mathbf{x}}$ tal que $h = gh'g^{-1}$. Consequentemente,

$$g^{-1}hg = h' \implies g^{-1}hg \in G_{\mathbf{x}}.$$

Pela definição do estabilizador, $(g^{-1}hg) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$. Portanto, como $\mathbf{x} = g^{-1}\mathbf{y}$, segue que

$$((g^{-1}hg)g^{-1}) \cdot \mathbf{y} = g^{-1} \cdot \mathbf{y} \implies (g^{-1}h) \cdot \mathbf{y} = g^{-1} \cdot \mathbf{y} \implies h \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}.$$

Segue que $h \in G_{\mathbf{y}}$. Da arbitrariedade de h , segue que $gG_{\mathbf{x}}g^{-1} \subset G_{\mathbf{y}}$. Por outro lado, se

$h \in G_{\mathbf{y}}$, então $h \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}$. Logo,

$$(hg) \cdot \mathbf{x} = g\mathbf{x} \implies (g^{-1}hg) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \implies g^{-1}hg \in G_{\mathbf{x}} \implies h \in gG_{\mathbf{x}}g^{-1}.$$

Concluimos assim que $G_{\mathbf{y}} = gG_{\mathbf{x}}g^{-1}$. ■

Definição 2.7. Dado um subgrupo $H \leq G$, a **classe de conjugação** de H é definida por

$$(H) = \{gHg^{-1} : g \in G\}$$

Note que $H \in (H)$, pois $eHe^{-1} = H$.

Definição 2.8. Considere uma órbita $G \cdot \mathbf{x}$. A classe de conjugação associada à órbita $G \cdot \mathbf{x}$ é o conjunto

$$\{(G_{\mathbf{y}}) : \mathbf{y} \in G \cdot \mathbf{x}\}.$$

Como pontos na mesma órbita possuem estabilizadores conjugados, podemos reescrever o conjunto acima como

$$\{(gG_{\mathbf{x}}g^{-1}) : g \in G\} = (G_{\mathbf{x}})$$

Agora, definiremos o **tipo de uma órbita** que será de extrema importância para compreensão dos teoremas e resultados apresentados ao longo deste trabalho.

Definição 2.9. Seja $H \leq G$. Uma órbita $G \cdot \mathbf{x}$ é do **tipo** (H) se existe $\mathbf{x}_0 \in G \cdot \mathbf{x}$ tal que $H = G_{\mathbf{x}_0}$.

Proposição 2.10. *Seja H um subgrupo finito de G . O número de pontos em uma órbita do tipo (H) é igual a $\frac{|G|}{|H|}$.*

Antes de demonstrarmos propriamente a proposição, é necessário enunciar um importante teorema para a teoria de grupos, e um lema.

Teorema da Órbita-Estabilizador 2.11. *Sejam G um grupo finito agindo sobre X e $\mathbf{x} \in X$. Então, o número de elementos na órbita $G \cdot \mathbf{x}$ é igual a $\frac{|G|}{|G_{\mathbf{x}}|}$.*¹

Lema 2.12. *Seja $G \cdot \mathbf{x}$ uma órbita. Se $\mathbf{x}_0 \in G \cdot \mathbf{x}$, então $G \cdot \mathbf{x} = G \cdot \mathbf{x}_0$.*

¹O enunciado e demonstração deste teorema encontra-se no conteúdo virtual do livro **A Course on Finite Groups** [Ros09].

Demonstração. Suponha que $\mathbf{x}_0 = g \cdot \mathbf{x}$, onde $g \in G$. Logo, se $\mathbf{y} \in G \cdot \mathbf{x}$, então $\mathbf{y} = g_0 \cdot \mathbf{x}$ para certo $g_0 \in G$. Portanto, $\mathbf{y} = (g_0 g^{-1}) \cdot \mathbf{x}_0$. Como $g_0 g^{-1} \in G$, segue que $\mathbf{y} \in G \cdot \mathbf{x}_0$. Da arbitrariedade de \mathbf{y} , podemos concluir que $G \cdot \mathbf{x} \subset G \cdot \mathbf{x}_0$.

Por outro lado, se $\mathbf{z} \in G \cdot \mathbf{x}_0$, então existe $g_1 \in G$ tal que $\mathbf{z} = g_1 \cdot \mathbf{x}_0$. Como $\mathbf{x}_0 = g \cdot \mathbf{x}$, temos que $\mathbf{z} = (g_1 g) \cdot \mathbf{x}$. Pelo mesmo argumento do parágrafo anterior, $\mathbf{z} \in G \cdot \mathbf{x}$. Consequentemente, $G \cdot \mathbf{x}_0 \subset G \cdot \mathbf{x}$. ■

Demonstração da proposição 2.10. Suponha que $G \cdot \mathbf{x}$ seja uma órbita do tipo (H) . Logo, existe $\mathbf{x}_0 \in G \cdot \mathbf{x}$ tal que $G_{\mathbf{x}_0} = H$.

Pelo teorema da órbita-estabilizador para o ponto \mathbf{x}_0 , $|G \cdot \mathbf{x}_0| = \frac{|G|}{|H|}$. Além disso, pelo lema 2.12, $|G \cdot \mathbf{x}_0| = |G \cdot \mathbf{x}|$. Portanto,

$$|G \cdot \mathbf{x}| = |G \cdot \mathbf{x}_0| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{|G|}{|H|}.$$

■

Uma interpretação para o **tipo de órbita**, a partir da proposição 2.10 e do teorema 2.6, é que existe uma aplicação

$$f : G \cdot \mathbf{x} \rightarrow (H)$$

tal que para cada elemento $g \cdot \mathbf{x} \in G \cdot \mathbf{x}$ existe $g_0 \in G$ tal que $f(g \cdot \mathbf{x}) = g_0 H g_0^{-1}$. Mais ainda, se o representante \mathbf{x} da órbita $G \cdot \mathbf{x}$ é tal que $G_{\mathbf{x}} = H$, (isto é, a isotropia do representante é igual ao subgrupo do tipo da órbita) então $f(g \cdot \mathbf{x}) = g H g^{-1}$.

3 UMA BREVE INTRODUÇÃO À MECÂNICA CELESTE

Neste Capítulo faremos um breve levantamento sobre as definições clássicas da Mecânica Celeste que estão relacionadas a este trabalho.

O problema principal da Mecânica Celeste consiste em prever e analisar a movimentação de N massas pontuais \mathbf{x}_i em \mathbb{R}^d ao longo do tempo considerando a força gravitacional mútua agindo sobre elas. Matematicamente, o problema reduz-se a resolver o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$m_j \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \quad i = 1, \dots, N,$$

que decorre da **Segunda Lei de Newton**. Este é o célebre **Problema de N corpos**.

Para N arbitrário, é impossível obter uma solução geral para o problema. Mais ainda, o único valor com solução conhecida é o caso para $N = 2$. Para $N = 3$, a impossibilidade já ocorre como demonstrado em [GBGL08].

A Mecânica Celeste, apesar de ser estudada por séculos, é uma área ativa, com publicações recentes e diversos problemas em aberto¹. Na atualidade, os pesquisadores da área focam em encontrar soluções gerais para casos restritos, como por exemplo supondo simetria entre as partículas, que utilizaremos neste trabalho. Para construir nossos argumentos e dar completude teórica ao texto, será necessário introduzir a seguir algumas definições clássicas.

Considere as partículas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^d$ duas a duas distintas. Defina a aplicação

$$m : C \rightarrow \mathbb{R}_+$$

que associa cada partícula à sua massa, onde $C = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$.

Definição 3.1. Uma **configuração** (C, m) é um par formado pelo conjunto de N partículas $C = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ em \mathbb{R}^d juntamente com a função m que determina suas massas.

¹Um compilado de problemas em aberto da mecânica celeste, escrito por Alain Albouy, Hidelberto E. Cabral e Alan A. Santos pode ser encontrado na referência [ACS12]

Se atribuirmos uma ordenação aos pontos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$, então a N -*upla* cujas entradas são cada um dos pontos pode ser interpretada como um ponto em $(\mathbb{R}^d)^N - \Delta(\mathbb{R}^d)^N$, onde $\Delta(\mathbb{R}^d)^N = \bigcup_{i \neq j} \Delta_{ij}(\mathbb{R}^d)^N = \bigcup_{i \neq j} \{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in (\mathbb{R}^d)^N : \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j\}$ (conhecido na literatura por conjunto de colisões) e cada entrada do ponto possui uma massa associada. Entretanto, a escolha de uma ordem dos pontos é totalmente arbitrária. Podemos considerar, por exemplo, uma ordem crescente (ou decrescente) com relação às massas ou ainda ordenar com relação à distância da origem, dentre diversas outras maneiras. Para que os resultados tornem-se mais gerais e evitemos uma ordenação, consideraremos configuração de maneira não-ordenada.

Nesta perspectiva, é natural definir o conjunto de todas as configurações de N partículas no espaço euclidiano real d -dimensional, que denotaremos por $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d, N)$ ou apenas por \mathcal{C} quando as construções independerem da especificação do espaço e da quantidade de pontos.

A partir disto, definimos a função $\phi : \mathcal{O}(d)^2 \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ dada por

$$\phi(g, (C, m)) = (g \cdot C, g \cdot m)$$

onde $g \cdot C = \{g(\mathbf{x}_1), \dots, g(\mathbf{x}_N)\}$ e $g \cdot m : g \cdot C \rightarrow \mathbb{R}_+$ é tal que $(g \cdot m)(g(\mathbf{x})) = m(\mathbf{x})$. Para facilitar a notação, usaremos $\phi(g, (C, m)) = g \cdot (C, m)$.

Afirmção 3.2. ϕ é uma ação de grupo

Demonstração. Seja e o elemento identidade do grupo $\mathcal{O}(d)$. Logo,

$$e \cdot (C, m) = (e \cdot C, e \cdot m) = (C, m)$$

Além disso, dados $g, h \in \mathcal{O}(d)$, temos que

$$g \cdot (h \cdot (C, m)) = g \cdot (h \cdot C, h \cdot m) = (gh \cdot C, gh \cdot m) = gh \cdot (C, m)$$

■

Definição 3.3. Uma configuração (C, m) é dita **configuração central** se existe $\lambda \in \mathbb{R}$

²O grupo $\mathcal{O}(d) = \{A \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R}) : AA^T = I\}$ é conhecido na literatura como **Grupo Ortogonal**.

tal que

$$\sum_{\mathbf{y} \in C} \frac{m(\mathbf{x})m(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \lambda m(\mathbf{x})\mathbf{x} = 0, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in C.$$

Esta definição pode ser traduzida (ver [LMS15]) como (C, m) é uma configuração central se C é ponto crítico de U em algum conjunto de nível de I , onde

$$U(C) = \sum_{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \subset C} \frac{m(\mathbf{x})m(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \quad \text{e} \quad I(C) = \sum_{\mathbf{x} \in C} m(\mathbf{x})\|\mathbf{x}\|^2.$$

As funções U e I são conhecidas na literatura por **função potencial** e **momento inércia** (com respeito à origem), respectivamente³.

De maneira mais intuitiva, as configurações centrais formam uma ramificação das configurações que podem ser interpretada geometricamente da seguinte forma: a aceleração gravitacional de cada partícula com relação às demais aponta para o centro de massa e é proporcional a distância da posição da partícula ao centro de massa.

Em meados do século XVIII, Euler demonstrou a existência de configurações centrais de três pontos em uma reta. Em outras palavras, a configuração (considerando de maneira ordenada) seria um ponto em $(\mathbb{R}^1)^3$ e pode ser interpretada como três pontos no plano que em qualquer instante de tempo estão contido na mesma reta. No Capítulo 5 faremos um levantamento sobre a demonstração desta existência.

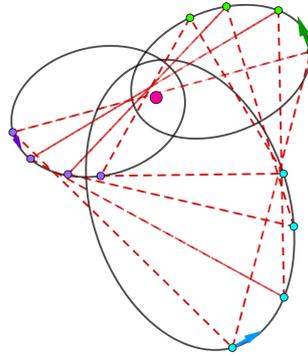
Ainda no século XVII, Lagrange verificou a existência de configurações centrais dadas por três pontos no plano localizados nos vértices de um triângulo equilátero. Um fato interessante na construção é que contra-intuitivamente não há necessidade do centro de massa do sistema coincidir com o centro do triângulo equilátero.

Saindo do clássico, no final do século XIX Cedó e Llibre demonstraram a existência analiticamente e unicidade numericamente de certas configurações centrais espaciais. Na demonstração os autores assumiram que as massas das partículas eram iguais. A construção detalhada e a lista das configurações encontra-se em [CL89].

Além de configurações centrais dadas por poliedros regulares, os autores também verificaram a existência de configurações centrais para certos sólidos arquimedianos e outras

³Na definição de configuração central adotada neste trabalho assumiremos que o **Centro de Massa** $\frac{\sum_{i=1}^N m(x_i)\mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^N m(x_i)}$ está fixado na origem

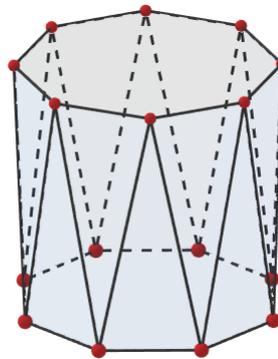
Figura 1: Ilustração da solução de Lagrange com centro de massa (em cor rosa) distinto do centro do triângulo equilátero



Fonte: Autoria própria

figuras espaciais com certa regularidade. Na Figuras 3 e 2 abaixo seguem dois exemplos de configurações centrais verificadas pelos autores. Agora, iremos verificar um resultado

Figura 2: Configuração formada pelos vértices de um antiprisma



Fonte: Autoria própria

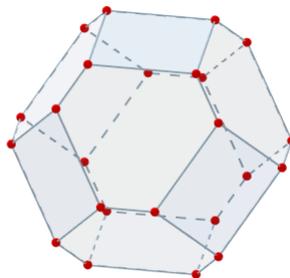
acerca de configurações centrais que será útil para a construção dos argumentos.

Proposição 3.4. *Se (C, m) é uma configuração central, então $(\gamma \cdot C, \gamma \cdot m)$ é uma configuração central, para todo $\gamma \in \mathbb{R}$ não-nulo, onde $\gamma \cdot C = \{\gamma \mathbf{x} : \mathbf{x} \in C\}$ e $\gamma \cdot m : \gamma \cdot C \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $(\gamma \cdot m)(\gamma \mathbf{x}) = m(\mathbf{x})$.*

Demonstração. Suponha que $(C, m) \in \mathcal{C}$ seja uma configuração central. Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{\mathbf{y} \in C} \frac{m(\mathbf{x})m(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \lambda m(\mathbf{x})\mathbf{x} = 0$$

Figura 3: Configuração formada pelos vértices de um octaedro truncado



Fonte: Autoria própria

Considere $\lambda' \in \mathbb{R}$ não-nulo tal que $\lambda = \lambda'|\gamma|^3$. Logo,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mathbf{y} \in C} \frac{(\gamma \cdot m)(\gamma \mathbf{x})(\gamma \cdot m)(\gamma \mathbf{y})}{\|\gamma \mathbf{x} - \gamma \mathbf{y}\|^3} (\gamma \mathbf{x} - \gamma \mathbf{y}) + \lambda' \gamma m(\mathbf{x}) \mathbf{x} \\
 &= \sum_{\mathbf{y} \in C} \frac{\gamma}{|\gamma|^3} \frac{m(\mathbf{x})m(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \lambda' \gamma m(\mathbf{x}) \mathbf{x} \\
 &= \frac{\gamma}{|\gamma|^3} \left(\sum_{\mathbf{y} \in C} \frac{m(\mathbf{x})m(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \lambda' |\gamma|^3 m(\mathbf{x}) \mathbf{x} \right) \\
 &= \frac{\gamma}{|\gamma|^3} \left(\sum_{\mathbf{y} \in C} \frac{m(\mathbf{x})m(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \lambda m(\mathbf{x}) \mathbf{x} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, $(\gamma \cdot C, \gamma \cdot m)$ é uma configuração central. ■

Agora, iremos definir uma classe particular de configurações que será nosso objeto de estudo ao longo deste trabalho.

Definição 3.5. Seja $G \leq \mathcal{O}(d)$ finito. Uma configuração (C, m) é dita **G -simétrica**, ou apenas **simétrica** quando não houver necessidade de explicitar o subgrupo G , se $g \cdot (C, m) = (C, m)$ para todo $g \in G$.

Denotaremos por $\mathcal{C}^G = \text{Fix}(G, \mathcal{C})$ o conjunto das configurações G -simétricas. Além disso, fica implícito da definição que $g \cdot \mathbf{x}$ e \mathbf{x} devem possuir a mesma massa, para todo $\mathbf{x} \in C$ e para todo $g \in G$, ou seja, a função é constante ao longo das massas. Devido a isso, quando falarmos de configurações G -simétricas, podemos omitir a função massa e manter o foco apenas no conjunto das partículas.

Exemplo 3.6. Um exemplo de configuração central é o triângulo equilátero. Considere o conjunto de todas as configurações de pontos em \mathbb{R}^2 D_3 -simétricas dadas por

$$(C, m) = \left(\left\{ \left(0, y \right), \left(\frac{y\sqrt{3}}{2}, -\frac{y}{2} \right), \left(-\frac{y\sqrt{3}}{2}, -\frac{y}{2} \right) \right\}, m \right)$$

com $y \neq 0$, onde todos os pontos de cada configuração possuem as massas iguais. Para diminuir a notação, utilizaremos $m(0, y) = m_1$, $m\left(\frac{y\sqrt{3}}{2}, -\frac{y}{2}\right) = m_2$ e $m\left(-\frac{y\sqrt{3}}{2}, -\frac{y}{2}\right) = m_3$. Considere o conjunto de nível $I \equiv 1$. Isto é,

$$m_1 \|(0, y)\|^2 + m_2 \left\| \left(\frac{y\sqrt{3}}{2}, -\frac{y}{2} \right) \right\|^2 + m_3 \left\| \left(-\frac{y\sqrt{3}}{2}, -\frac{y}{2} \right) \right\|^2 = 1.$$

Conseqüentemente, $y = \pm \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2 + m_3}}$. Tome $m = m_1 + m_2 + m_3$. Logo, para encontrar uma configuração central, basta encontrar um ponto crítico do potencial U restrito ao conjunto

$$S = \left\{ \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{m}} \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{m}}, -\frac{1}{2\sqrt{m}} \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{m}}, -\frac{1}{2\sqrt{m}} \right) \right\} \right\} \\ \cup \left\{ \left\{ \left(0, -\frac{1}{\sqrt{m}} \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{m}}, \frac{1}{2\sqrt{m}} \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{m}}, \frac{1}{2\sqrt{m}} \right) \right\} \right\}.$$

Como a restrição $I \equiv 1$ possui apenas dois pontos, segue que o espaço tangente de S tem dimensão zero em ambas as configurações. Logo, a derivada é identicamente nula. Portanto, ambas configurações são centrais.

Exemplo 3.7. Considere a partícula de massa m , localizada no ponto $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ e o grupo

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

A notação comum na literatura para esse grupo C_{12} . Tal grupo é cíclico de ordem 12 com gerador

$$r = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Portanto, $(\{(1, 0), r \cdot (1, 0), \dots, r^{11} \cdot (1, 0)\}, m)$ é uma configuração simétrica.

4 CONFIGURAÇÕES SIMÉTRICAS

4.1 $D_3, D_4 \leq \mathcal{O}(2)$ E $D_{3h} \leq \mathcal{O}(3)$

Para introduzir o tema, exibiremos alguns exemplos de configurações simétricas através da ação do grupo diedral em \mathbb{R}^2 e de D_{3h} em \mathbb{R}^3 . Exibiremos também algumas figuras nos exemplos para facilitar a intuição geométrica dos problemas.

Exemplo 4.1. Consideremos uma configuração D_3 -simétrica, onde $D_3 \leq \mathcal{O}(2)$ representa o grupo diedral de ordem 6. Note que D_3 pode ser descrito como as simetrias do triângulo equilátero, que denotaremos por $D_3 = \{e, r, r^2, s, rs, r^2s\}$. A configuração em questão consiste na união das seguintes órbitas:

- Uma órbita do tipo (D_3) ;
- Duas órbitas do tipo (\mathbb{Z}_2) , onde $\mathbb{Z}_2 = \{e, s\} \leq D_3$;
- Uma órbita do tipo $(\{e\})$.

Suponha, sem perda de generalidade, que a reflexão representada por s corresponde ao eixo horizontal. Em (\mathbb{Z}_2) , assumiremos que as duas órbitas possuem pontos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$, respectivamente, tal que $x_1x_2 < 0$. Geometricamente, a órbita que contém o ponto $(x_1, 0)$ representa os vértices de um triângulo equilátero \mathfrak{T} e a órbita que contém o ponto $(x_2, 0)$ representa um triângulo homotético a \mathfrak{T} π -rotacionado com relação a origem.

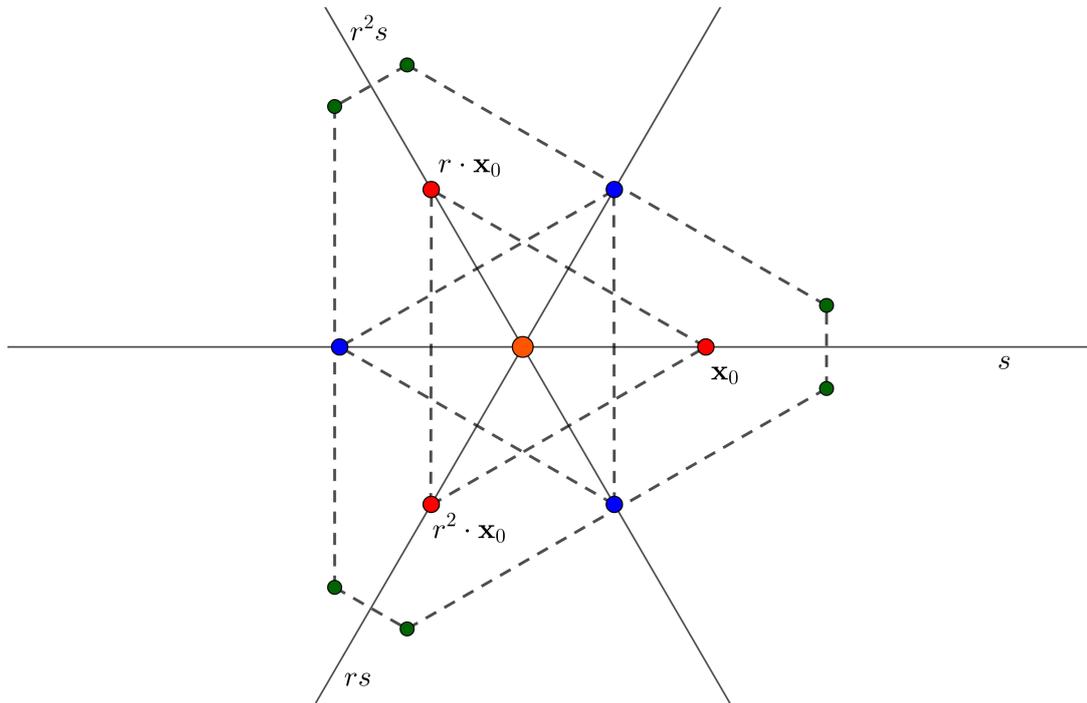
Pela Proposição 2.10, o número de elementos em cada órbita é:

- $\frac{|D_3|}{|D_3|} = 1$, para a órbita do tipo (D_3) ;
- $\frac{|D_3|}{|\mathbb{Z}_2|} = 3$, para a órbita do tipo (\mathbb{Z}_2) ;
- $\frac{|D_3|}{|\{e\}|} = 6$, para a órbita do tipo $(\{e\})$.

Como já vimos anteriormente, a órbita do tipo (\mathbb{Z}_2) possui um ponto \mathbf{x}_0 tal que seu estabilizador $G_{\mathbf{x}_0}$ é igual a \mathbb{Z}_2 . Ou seja, $s \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$. Isto nos diz que o ponto \mathbf{x}_0 deve pertencer ao eixo de reflexão que corresponde a s . Logo, tal órbita é dada pelo conjunto

$$\{\mathbf{x}_0, r \cdot \mathbf{x}_0, r^2 \cdot \mathbf{x}_0, s \cdot \mathbf{x}_0, rs \cdot \mathbf{x}_0, r^2s \cdot \mathbf{x}_0\} = \{\mathbf{x}_0, r \cdot \mathbf{x}_0, r^2 \cdot \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, r \cdot \mathbf{x}_0, r^2 \cdot \mathbf{x}_0\} = \{\mathbf{x}_0, r \cdot \mathbf{x}_0, r^2 \cdot \mathbf{x}_0\}.$$

Figura 4: Órbita tipo (\mathbb{Z}_2) descrita pelos pontos $\{\mathbf{x}_0, r \cdot \mathbf{x}_0, r^2 \cdot \mathbf{x}_0\}$ em vermelho



Fonte: Autoria própria

Um argumento análogo pode ser construído para a outra órbita do tipo (\mathbb{Z}_2) , que está representada pelos pontos vermelhos na Figura 4.

Por outro lado, para a órbita do tipo $(\{e\})$, existe um ponto \mathbf{x}_1 na órbita que é estabilizado apenas pelo elemento neutro e , isto é, \mathbf{x}_1 não pertence a nenhum dos eixos de reflexão. Logo, a órbita pode ser descrita como

$$\{\mathbf{x}_1, s \cdot \mathbf{x}_1, r \cdot \mathbf{x}_1, rs \cdot \mathbf{x}_1, r^2 \cdot \mathbf{x}_1, r^2s \cdot \mathbf{x}_1\}$$

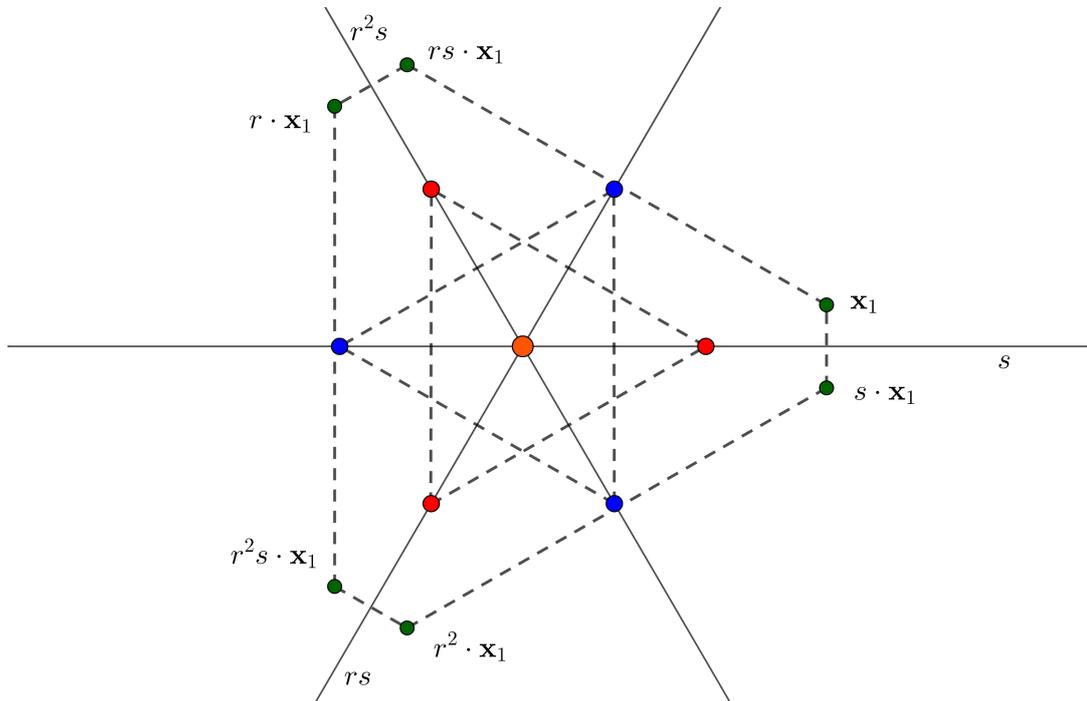
que corresponde aos pontos verdes na Figura 5.

Por fim, a órbita do tipo (D_3) possui um ponto estabilizado por todas as simetrias do triângulo equilátero, em particular s, rs e r^2s . Como a órbita é um conjunto unitário, tal ponto deve pertencer à interseção dos eixos, que é representado pela ponto laranja na figura 5.

Portanto, podemos escrever a configuração descrita acima como a combinação linear inteira de tipos de órbitas. Isto é,

$$\Gamma = 1(D_3) + 2(\mathbb{Z}_2) + 1(\{e\}).$$

Figura 5: Órbita tipo $(\{e\})$ descrita pelos pontos $\{\mathbf{x}_1, s \cdot \mathbf{x}_1, r \cdot \mathbf{x}_1, rs \cdot \mathbf{x}_1, r^2 \cdot \mathbf{x}_1, r^2 s \cdot \mathbf{x}_1\}$ em verde



Fonte: Autoria própria

Introduzida em [Mon15] por James Montaldi, chamaremos a decomposição linear inteira de uma configuração simétrica de **Tipo de Burnside**.

Uma observação importante a ser feita, é sobre o motivo do subgrupo C_3 não aparecer na composição. Isto ocorre pois o subgrupo C_3 é formado apenas pelas rotações do triângulo equilátero e o único ponto estabilizado pelas rotações é a origem.

Exemplo 4.2. Considere uma configuração D_4 -simétrica, onde $D_4 \leq \mathcal{O}(2)$. Assim como no exemplo anterior, podemos considerar tal grupo como as simetrias do quadrado. Neste caso, a configuração consiste na união das seguintes órbitas:

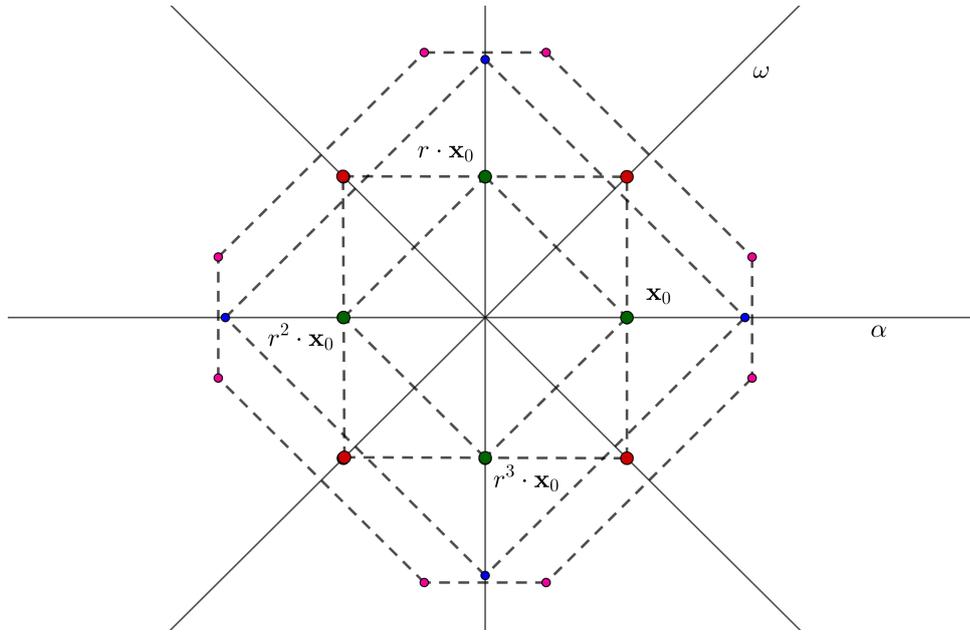
- Duas órbita do tipo (\mathbb{Z}_2^α) , onde $\mathbb{Z}_2^\alpha = \{e, \alpha\} \leq D_4$ e α corresponde ao eixo horizontal de reflexão do quadrado;
- Uma órbita do tipo (\mathbb{Z}_2^ω) , onde $\mathbb{Z}_2^\omega = \{e, \omega\} \leq D_4$ e ω corresponde a reflexão uma das diagonais do quadrado;
- Uma órbita do tipo $(\{e\})$.

Pela Proposição 2.10, o número de elementos em cada órbita é:

- $\frac{|D_4|}{|\mathbb{Z}_2^\alpha|} = 4$, para a órbita do tipo (\mathbb{Z}_2^α) ;

- $\frac{|D_4|}{|\mathbb{Z}_2^\omega|} = 4$, para a órbita do tipo (\mathbb{Z}_2^ω) ;
- $\frac{|D_4|}{|\{e\}|} = 8$, para a órbita do tipo $(\{e\})$.

Figura 6: Configuração D_4 -simétrica



Fonte: Autoria própria

Pela definição de tipo de órbita, a órbita do tipo (\mathbb{Z}_2^α) possui um ponto x_0 tal que $G_{x_0} = \mathbb{Z}_2^\alpha$. Logo, x_0 pertence ao eixo de reflexão horizontal. Conseqüentemente, podemos escrever tal órbita como

$$\{\mathbf{x}_0, r \cdot \mathbf{x}_0, r^2 \cdot \mathbf{x}_0, r^3 \cdot \mathbf{x}_0\},$$

que está descrito pelos pontos verdes na Figura 6.

Para a segunda órbita do tipo (\mathbb{Z}_2^ω) , a construção é inteiramente análoga a anterior, basta perceber que nenhum dos pontos podem coincidir, caso contrário, as órbitas coincidem. Tal órbita é descrita pelos pontos vermelhos na figura.

Por outro lado, para a órbita do tipo (\mathbb{Z}_2^ω) o argumento também é análogo, entretanto, o ponto \mathbf{x}_1 na órbita que é estabilizado por \mathbb{Z}_2^ω , deve pertencer ao eixo de reflexão ω . Tal órbita está descrita pelos pontos vermelhos na Figura 6 e corresponde graficamente a um quadrado, assim como as duas anteriores.

Por fim, a órbita do tipo $\{e\}$, que descreve um octógono semirregular, possui um ponto \mathbf{x}_2 que não está em nenhum dos eixos de reflexão (pois é estabilizado apenas pelo elemento trivial) e a órbita está descrita como os pontos rosas na Figura 6.

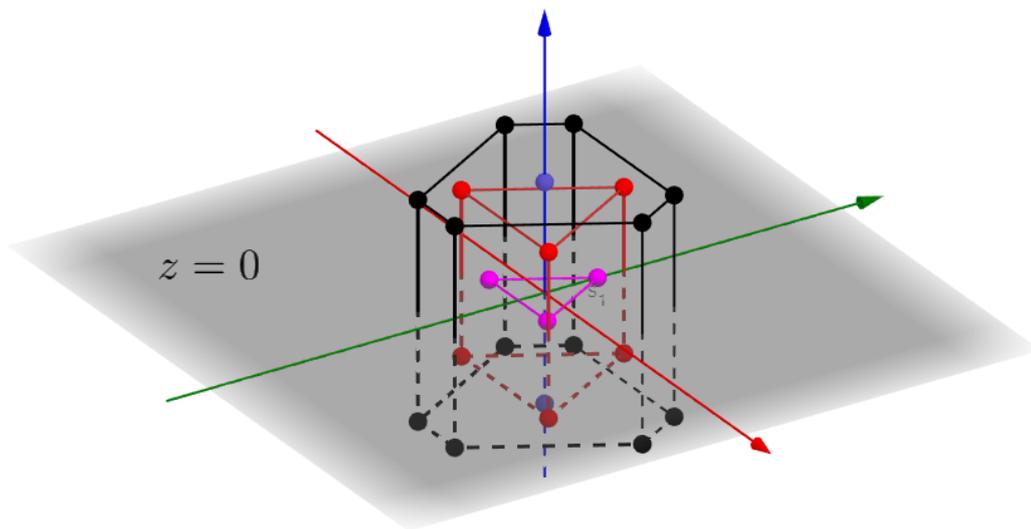
A configuração descrita acima é a seguinte combinação linear:

$$\Gamma = 2(\mathbb{Z}_2^\alpha) + 1(\mathbb{Z}_2^\omega) + 1(\{e\}).$$

Estenderemos agora a ideia acima para o \mathbb{R}^3 .

Exemplo 4.3. Considere D_{3h} agindo sobre \mathbb{R}^3 . Como nos exemplos acima já trabalhamos com D_3 agindo sobre \mathbb{R}^2 e $D_{3h} = D_3 \times \mathbb{Z}_2^\xi$, definiremos a ação da seguinte forma: D_3 agindo sobre nas duas primeiras entradas como já construído anteriormente; \mathbb{Z}_2^ξ agindo na terceira entrada, que denotaremos a ação não-trivial por ξ , via reflexão, isto é, $\xi \cdot z = -z$. A ação de um elemento (g, ξ) será dada por $(g, \xi) \cdot (x, y, z) = (g \cdot (x, y), \xi \cdot z)$, com $g \in D_3$. Assim como anteriormente, podemos visualizar o grupo como as simetrias do prisma triangular. Suponha que a configuração seja decomposta da seguinte forma:

$$\text{Figura 7: } \Gamma = 1(D_3 \times \{e\}) + 1(\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_2^\xi) + 1(\mathbb{Z}_2^\alpha \times \{e\}) + 1(\{e\} \times \{e\})$$



Fonte: Autoria própria

- Uma órbita do tipo $(D_3 \times \{e\})$ representada nos pontos azuis;
- Uma órbita do tipo $(\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_2^\xi)$, onde $\mathbb{Z}_2^\alpha = \{e, \alpha\} \leq D_3 \times \mathbb{Z}_2^\xi$ e α representa o plano de reflexão horizontal e a órbita é descrita pelos pontos em rosa;

- Uma órbita do tipo $(\mathbb{Z}_2^a \times \{e\})$ representada nos pontos vermelhos;
- Uma órbita do tipo $(\{e\} \times \{e\})$ que correspondem aos pontos pretos.

A diferença deste exemplo para os anteriores é que as reflexões do tetraedro correspondem geometricamente a planos e não retas, entretanto as construções são similares e isto implica em pontos não-triviais estabilizados por duas ou mais reflexões. Por exemplo, a órbita do tipo $(D_3 \times \{e\})$ possui $\frac{|D_3 \times \mathbb{Z}_2|}{|D_3 \times \{e\}|} = 2$ elementos. Como existe um ponto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, com $z_0 \neq 0$, na órbita que é estabilizado por todo $D_3 \times \{e\}$, basta analisar a configuração no nível $z = z_0$ e teremos que tal ponto deve pertencer à interseção de $z = z_0$ e os planos de reflexão do tetraedro. O outro ponto \mathbf{x}_1 desta órbita é gerado a partir da reflexão com o plano $z = 0$, isto é, $\mathbf{x}_1 = (g, \xi) \cdot \mathbf{x}_0 = (g \cdot (x, y), \xi \cdot z) = (x, y, \xi \cdot z)$. Além disso, é necessário $z \neq 0$ pois, caso contrário, \mathbf{x}_0 também seria estabilizado por \mathbb{Z}_2^ξ . As demais órbitas seguem utilizando um argumento análogo.

5 SOBRE A ESTRUTURA DIFERENCIÁVEL

5.1 VARIEDADES

Nesse Capítulo iremos introduzir o conceito de variedade e alguns resultados sobre estas estruturas. O estudo de variedades não é o foco principal do presente trabalho, entretanto, como estamos trabalhando com pontos críticos, é necessário definir estas estruturas para verificar alguns argumentos.

Definição 5.1. Um espaço topológico X é **localmente euclidiano de dimensão** N se para todo ponto $\mathbf{x} \in X$ existe uma vizinhança $V_{\mathbf{x}}$ de \mathbf{x} e um homeomorfismo

$$f: V_{\mathbf{x}} \rightarrow U,$$

onde $U \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto do \mathbb{R}^N .

Na literatura, o par $(V_{\mathbf{x}}, f)$ é conhecido como **carta**, $V_{\mathbf{x}}$ é uma **vizinhança coordenada** e f é um **sistema de coordenadas** em $V_{\mathbf{x}}$.

Definição 5.2. Uma **variedade topológica** X é um espaço Hausdorff localmente euclidiano cuja topologia possui uma base enumerável. Diremos que **dim** $X = N$ se X é localmente euclidiano de dimensão N .

Exemplo 5.3. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. O conjunto

$$\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

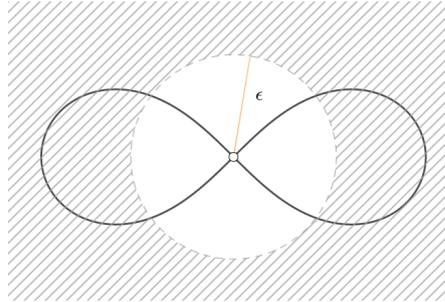
é uma variedade de dimensão 1. Basta considerar o homeomorfismo $g(x, f(x)) = x$ e as demais propriedades decorrem do fato de $\text{Graf}(f)$ estar contido em \mathbb{R}^2 .

Exemplo 5.4. A Lemniscata de Bernoulli, representada na Figura 8, é um subconjunto de \mathbb{R}^2 que não é uma variedade topológica de dimensão 1.

Seja $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2), a \in \mathbb{R}\}$ o conjunto de pontos da Lemniscata. Suponha, por absurdo, que exista um homeomorfismo $\phi: Y \rightarrow U$, onde U um aberto de \mathbb{R} e $Y = X \cap B_{\varepsilon}((0, 0))$ com ε suficientemente pequeno. O conjunto $\phi(Y)$

é um conjunto conexo, pois Y é conexo e ϕ é contínua. Por outro lado, se removermos o ponto $(0, 0)$ de Y , o novo conjunto terá quatro componentes conexas. Por outro lado, como os conexos de \mathbb{R} são os intervalos, então $\phi(Y - \{(0, 0)\})$ será a união de dois intervalos disjuntos e portanto possui duas componentes conexas.

Figura 8: Vizinhança do ponto $(0, 0)$ da Lemniscata de Bernoulli



Fonte: Autoria própria

Definição 5.5. Dizemos que X é uma **variedade k -diferenciável** se para quaisquer duas cartas $(U_{\mathbf{x}}, \phi : U_{\mathbf{x}} \rightarrow \phi(U_{\mathbf{x}}))$ e $(V_{\mathbf{x}}, \psi : V_{\mathbf{x}} \rightarrow \psi(V_{\mathbf{x}}))$, tem-se que $\phi \circ \psi^{-1} \Big|_{\psi(U_{\mathbf{x}} \cap V_{\mathbf{x}})}$ é uma aplicação k vezes diferenciável. Se $\phi \circ \psi^{-1} \Big|_{\psi(U_{\mathbf{x}} \cap V_{\mathbf{x}})}$ é suave, então X é uma variedade suave.

Definição 5.6. Sejam X e Y n, m -variedades suaves, respectivamente. Diremos que uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é uma **mapa suave em \mathbf{x}** se existem duas cartas $(U_{\mathbf{x}}, \phi)$ de $\mathbf{x} \in X$ e $(V_{\mathbf{x}}, \psi)$ de $f(\mathbf{x}) \in Y$ tal que o mapa

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(f^{-1}(V_{\mathbf{x}}) \cap U_{\mathbf{x}}) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é suave em $\phi(\mathbf{x})$. O mapa f será dito **suave** quando a propriedade for verificada para todo ponto $\mathbf{x} \in X$.

5.2 GRUPOS DE LIE

Se o objetivo deste trabalho fosse estudar as configurações com alguma ordem, então as definições dadas anteriormente seriam suficientes para verificar que tal espaço é uma variedade suave. Entretanto, ao removermos a necessidade de ordem, passamos a trabalhar com um espaço quociente, onde cada classe é dada pela permutação dos corpos

numa configuração ordenada, que não possui uma estrutura tão imediata de variedade. Portanto, é necessário introduzir alguns conceitos antes de verificar tal fato.

Definição 5.7. Um **grupo de Lie** G é uma variedade suave munida com uma estrutura de grupo cujo a ação

$$* : G \times G \rightarrow G$$

e o mapa inverso

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

são suaves.

O grupo que trabalhamos ao longo deste texto, $\mathcal{O}(d)$, é uma variedade suave. Além disso, como $\mathcal{O}(d)$ possui estrutura de grupo, então é um Grupo de Lie. A construção e demonstração deste fato encontra-se na referência [Lee13].

Exemplo 5.8. Um conjunto finito munido com a topologia discreta é uma 0-variedade suave. Basta considerar o mapa $f : \{\mathbf{x}\} \rightarrow \mathbb{R}^0$, que é uma aplicação infinitamente diferenciável. Conseqüentemente, grupos topológicos finitos munidos com a topologia discreta são variedades suaves e, portanto, grupos de Lie.

Definição 5.9. Uma ação ϕ é dita **livre** se dado $\mathbf{x} \in X$ tal que $\phi(g, \mathbf{x}) = g \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, então $g = e$.

Definição 5.10. Diremos que uma ação $\phi : G \times X \rightarrow X$, dada por $\phi(g, \mathbf{x}) = g \cdot \mathbf{x}$, é **suave** se ϕ é um difeomorfismo infinitamente diferenciável, onde G é um grupo de Lie e X uma variedade suave.

Definição 5.11. Dizemos que uma ação ϕ é **própria** se a aplicação $\bar{\phi} : G \times X \rightarrow X \times X$, dada por $\bar{\phi}(g, \mathbf{x}) = (g \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x})$, é própria. Isto é, para todo compacto $K \subset X \times X$, a pré-imagem $\bar{\phi}^{-1}(K)$ é um compacto, onde G é um grupo de Lie e X uma variedade suave.

De maneira geral, trabalhar com coberturas abertas para verificar compacidade não é fácil. Para espaços topológicos quaisquer, não existe um bom número de definições equivalentes para trabalharmos. Entretanto, no nosso contexto, podemos caracterizar as ações próprias em variedades via sequências.

Na proposição a seguir, iremos usar \mathbb{N}' para denotar um subconjunto infinito de \mathbb{N} .

Proposição 5.12. *Seja X uma variedade topológica e G um grupo de Lie agindo continuamente em X . Os itens abaixo são equivalentes.*

- *A ação é própria;*
- *Dadas sequências $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X e $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em G tais que $\lim \mathbf{x}_n$ e $\lim g_n \cdot \mathbf{x}_n$ existem, existe uma subsequência $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}'}$ convergente.*

A definição de ação contínua é dada na definição 5.10 trocando difeomorfismo infinitamente diferenciável por contínuo.

Corolário 5.13. *Toda ação contínua de um grupo de Lie compacto em uma variedade topológica é própria.*

Demonstração. Sejam $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $\lim \mathbf{x}_n$ e $\lim g_n \cdot \mathbf{x}_n$ existem. Logo, existe uma subsequência $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}'} \subset \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, pois, como o grupo é compacto, toda sequência admite subsequência convergente. ■

As definições acima foram enunciadas para verificarmos que o espaço das configurações, que estamos denotando por \mathcal{C} , é uma variedade topológica. Explicitamente, podemos escrever \mathcal{C} como

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}_{\text{ord}} / S_N = \{S_N \cdot (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) : (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{dN}\},$$

onde

$$\mathcal{C}_{\text{ord}} = \{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{dN} : \mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j \text{ se } i \neq j \forall i, j \in \{1, \dots, N\}\} \subset \mathbb{R}^{dN}$$

é o espaço das configurações ordenadas e S_N é o grupo de permutações de ordem $N!$. A ação de S_N em \mathbb{R}^{dN} consiste em permutar a posição dos pontos \mathbf{x}_i em $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$.

Induzimos em \mathcal{C}_0 a topologia de subespaço topológico, em S_N a topologia discreta e em \mathcal{C} a topologia de espaço quociente.

Para finalizar, enunciaremos um importante teorema da teoria de variedades, cuja demonstração omitiremos por conta do número excessivo de páginas para realiza-la. Caso haja interesse do leitor, a demonstração detalhada encontra-se em [Lee13].

Teorema 5.14. *(Teorema da Variedade Quociente) Se G é um grupo de Lie agindo suavemente, livremente e propriamente numa variedade suave X , então X/G é uma variedade suave, onde $X/G = \{G \cdot \mathbf{x} : \mathbf{x} \in X\}$.*

Para que seja possível utilizar o teorema, precisamos verificar que S_N age livremente, suavemente e propriamente em \mathcal{C}_{ord} , além de sua estrutura suave. Pelo Exemplo 5.8, S_N é um grupo de Lie munido com a topologia discreta.

S_N age livremente em \mathcal{C}_{ord} , isto é, $g \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ implica que $g = e$, pois como as entradas dos pontos são distintas, ao realizar qualquer permutação não-trivial, a localização de uma entrada irá mudar, alterando o ponto. Um fato interessante é que esse resultado não pode ser estendido para um espaço maior que \mathcal{C}_0 , afinal caso existisse um ponto com ao menos duas entradas iguais, então existiria uma permutação que estabilizaria tal ponto.

Como S_N é finito, pelo Corolário 5.13, a ação de S_N em \mathcal{C}_{ord} é própria, pois todo conjunto finito munido com a topologia discreta é compacto. Além disso, como a ação de cada elemento de S_N consiste em apenas permutar as entradas dos elementos de \mathcal{C}_{ord} , então a ação é suave.

Portanto, pelo Teorema da Variedade Quociente, $\mathcal{C}_{\text{ord}}/S_N = \mathcal{C}$ é uma variedade suave, finalizando assim o objetivo desse Capítulo.

6 COMPONENTES CONEXAS

6.1 TIPO TOPOLÓGICO DE BURNSIDE

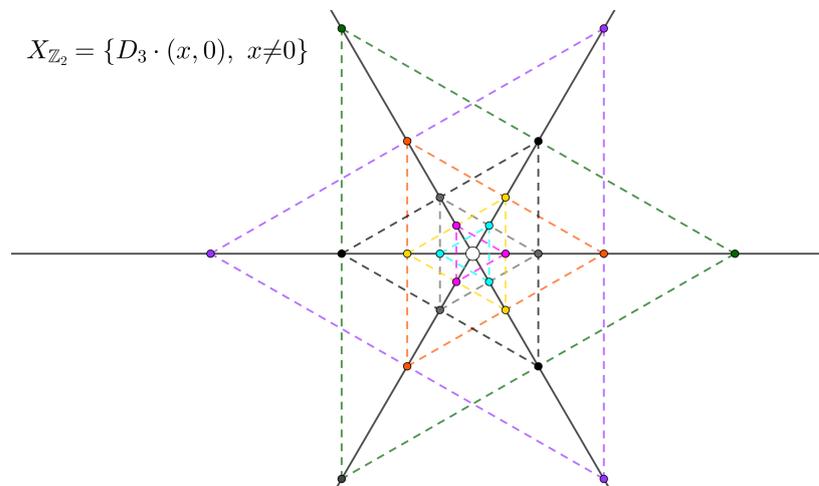
No exemplo 4.1, as órbitas do tipo (\mathbb{Z}_2) representam a mesma figura geométrica mas não é possível deformar uma delas continuamente para gerar a outra. Para explicar e criar uma distinção desse acontecimento será necessário definir as componentes conexas da ação de D_3 sobre \mathbb{R}^2 . De maneira mais geral, falaremos sobre a conexidade no espaço de configurações com certo tipo de Burnside Γ .

Motivado pela patologia das órbitas de mesma forma geométrica em diferentes componentes conexas, chamaremos de **tipo topológico de Burnside** a decomposição linear inteira distinguindo as órbitas que estiverem em componentes conexas distintas. A notação para tal separação será (H) , $(H)'$, $(H)''$, ..., $(H)^\alpha$, onde α é um índice conveniente.

Seja $G \leq \mathcal{O}(d)$ um subgrupo finito. Considere

$$X_H = \{G \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid G \cdot \mathbf{x} \text{ é uma órbita do tipo } H\}.$$

Figura 9: Interpretação geométrica de certos pontos do conjunto $X_{\mathbb{Z}_2}$, representados nos vértices de um triângulo na figura



Fonte: Autoria própria

Defina também $Y_H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : G_{\mathbf{x}} = H\}$. A topologia de Y_H é a topologia induzida

de subespaço de \mathbb{R}^d e a topologia induzida de X_H da topologia quociente de \mathbb{R}^d / G .

Figura 10: Pontos em \mathbb{R}^2 que são estabilizados exatamente por \mathbb{Z}_2

$$Y_{\mathbb{Z}_2} = \{(x, 0), x \neq 0\}$$



Fonte: Autoria própria

Afirmção 6.1. Para qualquer que seja $H \leq G$ finito, tem-se que X_H é homeomorfo à $Y_H / \mathcal{N}_G(H)$, onde $\mathcal{N}_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$ é o normalizador de H em G .

Afirmção 6.2. Seja $G \leq \mathcal{O}(d)$ finito e $\Gamma = \sum_{H \leq G} a_H(H)$ um tipo de Burnside. Então, existe um difeomorfismo

$$\mathcal{C}(\Gamma) \simeq \prod_{H \leq G} \mathcal{C}(X_H, a_H).$$

onde $\mathcal{C}(X_H, a_H)$ é o conjunto das configurações formadas por a_H órbitas de tipo (H) .

Mais geralmente, se $\Gamma = \sum_{\substack{H \leq G \\ \alpha \in \Lambda}} a_H^\alpha(H)^\alpha$ é um tipo topológico de Burnside, então

$$\mathcal{C}(\Gamma) \simeq \prod_{\substack{H \leq G \\ \alpha \in \Lambda}} \mathcal{C}(X_H^\alpha, a_H^\alpha).$$

onde $\mathcal{C}(X_H^\alpha, a_H^\alpha)$ é o conjunto das configurações formadas por a_H^α órbitas de tipo (H^α) .

Uma discussão sobre essas afirmações encontra-se na seção **Topology** do artigo [Mon15]) de James Montaldi.

Com essas afirmações é possível exibir o porquê das órbitas (\mathbb{Z}_2) e $(\mathbb{Z}_2)'$ serem representadas distintamente na fatoração segundo o tipo topológico de Burnside.

Exemplo 6.3. Considere D_3 agindo em \mathbb{R}^2 de maneira usual. Seja um tipo de Burnside

$$\bar{\Gamma} = 1(D_3) + 2(\mathbb{Z}_2) + 1(\{e\}),$$

onde uma das órbitas do tipo \mathbb{Z}_2 possui um ponto $(x_0, 0)$, com $x_0 > 0$ e a outra órbita possui um ponto $(x_1, 0)$, com $x_1 < 0$.

Pela definição de Y_H , temos que $Y_{\mathbb{Z}_2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : G_{\mathbf{x}} = \mathbb{Z}_2\} = \{(x, 0) : x \neq 0\}$, onde $\mathbb{Z}_2 = \{e, s\}$ contém o elemento que representa a reflexão no eixo das abcissas.

Pela Afirmação 6.1,

$$X_{\mathbb{Z}_2} \simeq Y_{\mathbb{Z}_2} / \mathcal{N}_{D_3}(\mathbb{Z}_2) = \{(x, 0) : x \neq 0\} / \mathbb{Z}_2 \simeq \{(x, 0) : x \neq 0\}.$$

Como $\{(x, 0) : x \neq 0\}$ possui duas componentes conexas distintas, $\{(x, 0)\}_{x>0}$ e $\{(x, 0)\}_{x<0}$, segue que $\mathcal{C}(X_{\mathbb{Z}_2}, 1)$ possui duas componentes conexas. Isso nos diz que as órbitas de tipo (\mathbb{Z}_2) que estamos considerando estão em diferentes componentes conexas de $\mathcal{C}(X_{\mathbb{Z}_2}, 1)$. Esse ponto já justifica o motivo de separar as órbitas do tipo (\mathbb{Z}_2) no tipo topológico de Burnside. Por outro lado, como estamos trabalhando com duas órbitas simultaneamente, o espaço em questão é

$$\mathcal{C}(X_{\mathbb{Z}_2}, 2) \simeq (\mathbb{R} - \{0\})^2 - \Delta(\mathbb{R} - \{0\})^2 / S_2,$$

que possui três componentes conexas. Para visualizar este fato, basta notar que tal espaço é homeomorfo ao aberto

$$\{(x, y) : y > x\} \setminus (\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) : y \geq 0\} \cup \{(x, 0) : x \leq 0\}) \subset \mathbb{R}^2.$$

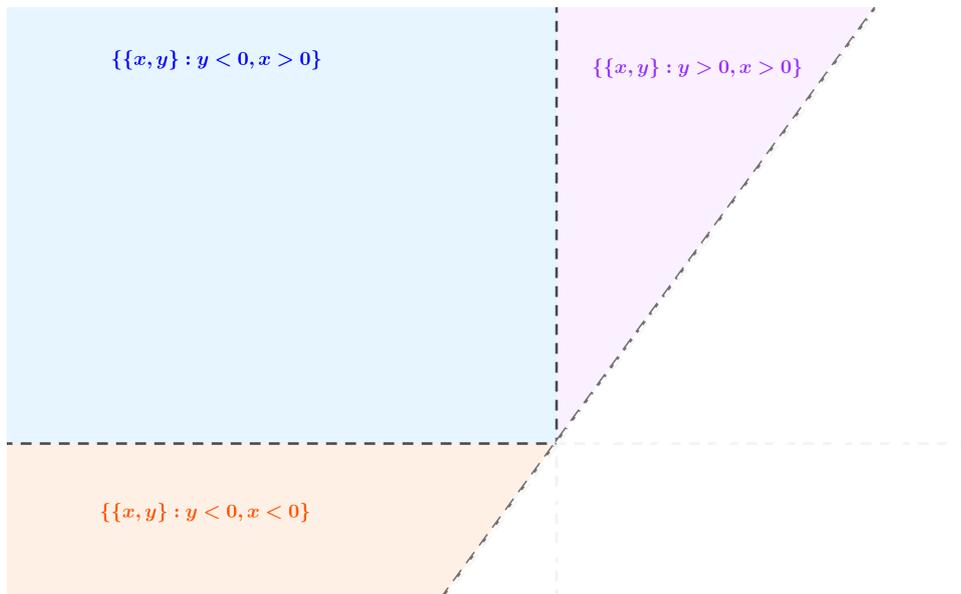
Para $Y_{\{e\}}$, os pontos não pertencem a nenhum dos eixos de reflexão. Logo,

$$Y_{\{e\}} = \mathbb{R}^2 - \left(\{(x, 0)\}_{x \in \mathbb{R} - \{0\}} \cup \{(x, x\sqrt{3})\}_{x \in \mathbb{R} - \{0\}} \cup \{(x, -x\sqrt{3})\}_{x \in \mathbb{R} - \{0\}} \cup \{(0, 0)\} \right)$$

que possui seis componentes conexas K_1, \dots, K_6 disjuntas. Como o mapa quociente canônico $\varphi : Y_{\{e\}} \rightarrow Y_{\{e\}} / \mathcal{N}_{D_3}(\{e\})$ é uma aplicação contínua e $X_{\{e\}} \simeq Y_{\{e\}} / \mathcal{N}_{D_3}(\{e\})$, temos que $\varphi(K_i)$ são conexos em $\mathcal{C}(X_{\{e\}}, 1)$, para cada $i \in \{1, \dots, 6\}$. Em contrapartida,

$$K_i / D_3 = K_i / \mathcal{N}_{D_3}(\{e\}) = K_j / \mathcal{N}_{D_3}(\{e\}) = K_j / D_3 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, 6\},$$

Figura 11: Representação de $(\mathbb{R} - \{0\})^2 - \Delta(\mathbb{R} - \{0\})^2 / S_2$.



pois dado $\mathbf{x}_0 \in K_i$, as órbitas $G \cdot \mathbf{x}_0$ e $G \cdot (g\mathbf{x}_0)$ coincidem, para todo $g \in D_3$. Portanto, como cada K_i / D_3 é uma componente conexa de $X_{\{e\}}$, segue que $\mathcal{C}(X_{\{e\}}, 1)$ é conexo. No caso das órbitas do tipo $(\{e\})$ não há necessidade de utilizar um argumento análogo ao de (\mathbb{Z}_2) pois os quocientes K_i / D_3 são precisamente as órbitas.

Para Y_{D_3} o argumento é relativamente mais simples, pois o único ponto estabilizado por D_3 é a origem. Conseqüentemente, sua órbita é formada por apenas um ponto e claramente é um conexo. Portanto, $\mathcal{C}(X_{D_3}, 1)$ é conexo.

Como $\mathcal{C}(X_{D_3}, 1)$ e $\mathcal{C}(X_{\{e\}}, 1)$ são conexos e $X_{\mathbb{Z}_2}$ é particionado em três componentes conexas, segue que $\mathcal{C}(X_{D_3}, 1) \times \mathcal{C}(X_{\mathbb{Z}_2}, 2) \times \mathcal{C}(X_{\{e\}}, 1)$ munido com a topologia do produto possui três componentes conexas. Pela Afirmação 6.2, $C(\bar{\Gamma}) \simeq \mathcal{C}(X_{D_3}, 1) \times \mathcal{C}(X_{\mathbb{Z}_2}, 2) \times \mathcal{C}(X_{\{e\}}, 1)$. Por outro lado, ao refinarmos ao tipo topológico de Burnside, teremos apenas uma componente conexa pois já explicitamos que as órbitas de tipo (\mathbb{Z}_2) estão em componentes conexas distintas de $\mathcal{C}(X_{\mathbb{Z}_2}, 1)$. Portanto, o tipo topológico de Burnside associado à configuração será

$$\Gamma = 1(D_3) + 1(\mathbb{Z}_2) + 1(\mathbb{Z}_2)' + 1(\{e\}),$$

e o espaço de configurações com tipo topológico de Burnside Γ associado será

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}(X_{D_3}, 1) \times \mathcal{C}(X_{\mathbb{Z}_2}, 1) \times \mathcal{C}(X'_{\mathbb{Z}_2}, 1) \times \mathcal{C}(X_{\{e\}}, 1).$$

De maneira mais ampla, esse resultado pode ser generalizado para todos os grupos D_n

agindo em \mathbb{R}^2 , com $n \geq 3$. Para isso, dividimos os D_n por sua paridade.

Se $n = 2q$ é par, então existem duas reflexões distintas, s e rs , e as demais são conjugadas (ver demonstração na Seção 8.1). Logo, existe a necessidade de distinguir somente as órbitas de tipo $(\{e, s\})$ e $(\{e, rs\})$. Além disso, se considerarmos as rotações

$$r^k = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi k}{2q}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi k}{2q}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi k}{2q}\right) & \cos\left(\frac{2\pi k}{2q}\right) \end{pmatrix},$$

então,

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = r^q \cdot (-x, 0) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi q}{2q}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi q}{2q}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi q}{2q}\right) & \cos\left(\frac{2\pi q}{2q}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, as órbitas $D_{2q} \cdot (x, 0)$ e $D_{2q} \cdot (-x, 0)$ coincidem, conseqüentemente, não há necessidade de refinar o tipo de Burnside para um tipo topológico de Burnside para as órbitas de tipo (\mathbb{Z}_2) .

Por outro lado, se $n = 2q + 1$ é ímpar, então todas as reflexões são conjugadas não havendo necessidade de mais de um representante para as órbitas com 3 pontos. Entretanto, as órbitas $D_{2q+1} \cdot (x, 0)$ e $D_{2q+1} \cdot (-x, 0)$ são disjuntas. Conseqüentemente, por um argumento totalmente análogo ao feito no caso de $\mathbb{Z}_2 \leq D_3$ agindo em \mathbb{R}^2 no Exemplo 6.3, temos que $\mathcal{C}(X_{\mathbb{Z}_2}, 1)$ possui duas componentes conexas, com $\mathbb{Z}_2 \leq D_{2q+1}$ agindo em \mathbb{R}^2 . Portanto, todo grupo diedral de índice ímpar requer refinamento para o tipo topológico de Burnside nas órbitas do tipo (\mathbb{Z}_2) .

6.2 ABERTOS E CONFIGURAÇÕES

Nesta seção iremos verificar que o espaço das configurações com certo tipo topológico de Burnside é um aberto no espaço de configurações G -simétricas. A estrutura de variedade suave do espaço de \mathcal{C}^G é garantida pelo Teorema A.6, cujo a demonstração foge de nossos objetivos.

Para criar familiaridade com a estrutura, começaremos com um exemplo em \mathbb{R}^2 .

Exemplo 6.4. Seja $\Gamma = 1(D_3) + 2(\mathbb{Z}_2)$ com $\mathbb{Z}_2 \leq D_3$ agindo em \mathbb{R}^2 de maneira usual.

Suponha, sem perda da generalidade, que

$$\mathbb{Z}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Os pontos estabilizados por \mathbb{Z}_2 são da forma $(x, 0)$ com $x \in \mathbb{R}^*$ mas assim como feito anteriormente, consideraremos que as órbitas estão na componente conexa tais que $x > 0$. Além disso, o único ponto estabilizado por D_3 é a origem $(0, 0)$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\Gamma) = & \left\{ (0, 0), (x, 0), \left(-\frac{x}{2}, \frac{x\sqrt{3}}{2} \right), \left(-\frac{x}{2}, -\frac{x\sqrt{3}}{2} \right), (y, 0), \left(-\frac{y}{2}, \frac{y\sqrt{3}}{2} \right), \right. \\ & \left. \left(-\frac{y}{2}, -\frac{y\sqrt{3}}{2} \right) \right\}_{x, y > 0, y \neq x} = \{D_3 \cdot (0, 0), D_3 \cdot (x, 0), D_3 \cdot (y, 0)\}. \end{aligned}$$

Verificaremos que tal conjunto é um aberto em \mathcal{C}^{D_3} . Isto é, todo ponto em $\mathcal{C}(\Gamma)$ é ponto interior.

Para cada entrada em \mathbb{R}^2 do vetor $\left((0, 0), (x, 0), \left(-\frac{x}{2}, \frac{x\sqrt{3}}{2} \right), \dots, \left(-\frac{u}{2}, -\frac{u\sqrt{3}}{2} \right) \right) \in (\mathbb{R}^2)^7$, considere a bola aberta centrada na respectiva entrada de modo que quando todas as bolas são plotadas simultaneamente em \mathbb{R}^2 , as interseções duas a duas é vazia. Seja B o conjunto formado pelo produto cartesiano dessas bolas. O conjunto B é um aberto em $(\mathbb{R}^2)^7$ na topologia do produto. Pelo Teorema A.5, a aplicação quociente canônica $\varphi : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0 / S_7$ é um mapa aberto, onde

$$\mathcal{C}_0 = \{((x_1, x_2), \dots, (x_{13}, x_{14})) \in (\mathbb{R}^2)^7 : (x_i, x_{i+1}) \neq (x_j, x_{j+1}), \forall i \neq j\}.$$

Portanto, $A := \varphi(B \cap \mathcal{C}_0)$ é um aberto em \mathcal{C} .

Ao intersectamos com \mathcal{C}^{D_3} , as configurações por terem 7 pontos devem conter o ponto $(0, 0)$. Para os demais pontos existem duas possibilidades: ou teremos duas órbitas de tipo (\mathbb{Z}_2) ou teremos uma órbita de tipo $(\{e\})$. O segundo caso não ocorre pois cada bola em \mathbb{R}^2 contém o simétrico do ponto com relação ao eixo de reflexão e a interseção duas a duas das bolas é vazia. Portanto, $A \cap \mathcal{C}^{D_3} \subset \mathcal{C}(\Gamma)$.

Para uma configuração mais geral G -simétrica Γ de N pontos em \mathbb{R}^d , o argumento é semelhante.

Considere $\Gamma = \sum_{\substack{H \leq G \\ \alpha \in \Lambda}} a_H(H)^\alpha$ um tipo topológico de Burnside, com Λ um conjunto de índices. Seja $C \in \mathcal{C}$ uma configuração do tipo Γ .

Em cada órbita do tipo (H) , tome o ponto $\mathbf{x}_H^\alpha \in \mathbb{R}^d$ cujo estabilizador é H . Defina $\Omega_{\mathbf{x}_H^\alpha} \subset \mathbb{R}^d$ o conjunto formado pelos pontos obtidos movendo-se \mathbf{x}_H^α numa bola aberta (com interseções duas a duas vazia como feito no exemplo anterior) que não contenha pontos estabilizados por $(H)^\beta, \beta \neq \alpha$. Para cada ponto $g \cdot \mathbf{x}_H^\alpha$ que estiver na mesma órbita que \mathbf{x}_H^α , consideramos o conjunto $g \cdot \Omega_{\mathbf{x}_H^\alpha}$ dado pela ação de g em cada ponto de $\Omega_{\mathbf{x}_H^\alpha}$. A partir disso, definimos o aberto

$$B := \prod_{H \leq G} \left(\prod_{g \in \mathcal{N}_G(H)} g \cdot \Omega_{\mathbf{x}_H^\alpha} \right).$$

Assumindo a topologia produto, segue que B é um aberto em \mathbb{R}^{dN} . Removemos deste aberto os pontos com entradas duas-a-duas iguais, formando o aberto $B \cap \mathcal{C}_0$ em \mathcal{C}_0 . Pelo Teorema A.5, φ é uma aplicação aberta. Conseqüentemente, $\varphi(B \cap \mathcal{C}_0)$ é um aberto em \mathcal{C} . Logo, $\varphi(B \cap \mathcal{C}_0) \cap \mathcal{C}^G$ é um aberto em \mathcal{C}^G via topologia induzida de subespaço. Como $\varphi(B \cap \mathcal{C}_0)$ mantém o tipo de órbita, $\varphi(B \cap \mathcal{C}_0) \subset \mathcal{C}(\Gamma)$ e, portanto, C é um ponto interior de $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Da arbitrariedade de C , segue que $\mathcal{C}(\Gamma)$ é um aberto em \mathcal{C}^G .

6.3 INFLUÊNCIA DAS MASSAS NAS COMPONENTES CONEXAS

Outro ponto importante a ser destacado na topologia das configurações, é a influência das massas no número de componentes conexas. Exemplificaremos tal fato abaixo.

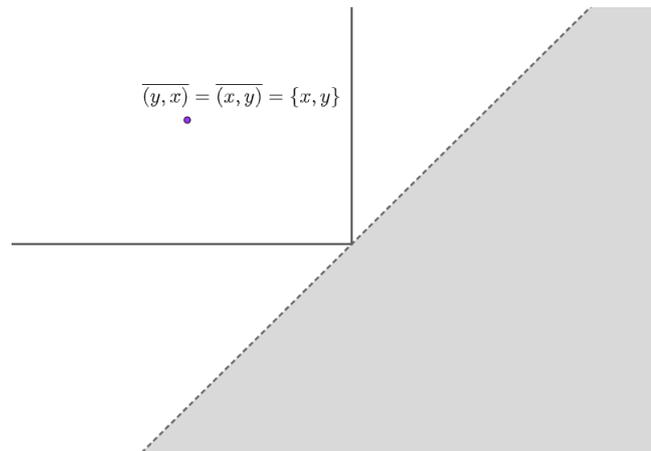
Exemplo 6.5. Considere a configuração $(\{x, y\}, m)$ onde $x, y \in \mathbb{R}$ com $x \neq y$. Se desconsiderarmos a ordenação, então $\{x, y\}$ pertence à mesma componente conexa que $\{y, x\}$.¹

Por outro lado, se consideramos $\{(x, y) : x \neq y\} \subset \mathbb{R}^2$, então teremos que $\{(x, y) : x > y\}$ e $\{(x, y) : x < y\}$ são duas componentes conexas distintas.

Se desconsideramos a ordem e incluirmos as massas das partículas x e y , então nossa

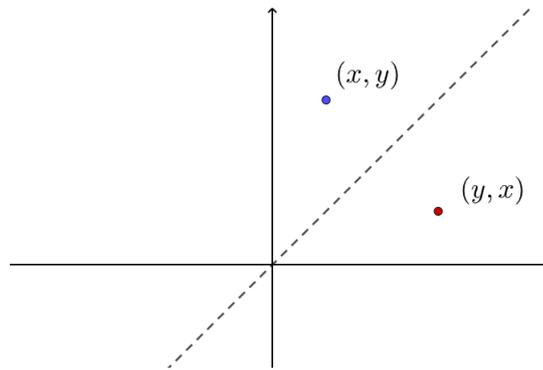
¹A Figura 12 representa a classe de equivalência dos pontos (x, y) e (y, x) , que representamos por $\{x, y\}$, gerada pela ação de S_2 em $\mathbb{R}^2 - \Delta\mathbb{R}^2$

Figura 12: Componente conexa de $\{\{x, y\} : x \neq y\}$.



Fonte: Autoria própria

Figura 13: Componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - \Delta\mathbb{R}^2$ separadas pela diagonal $\Delta\mathbb{R}^2$.



Fonte: Autoria própria

configuração torna-se:

$$\{(x, m(x)), (y, m(y))\}$$

Neste caso, teremos duas possibilidades para as componentes conexas da configuração.

Este resultado não possui uma visualização geométrica pois a variedade que contém tais configurações tem dimensão 4. Entretanto, é possível apresentar uma intuição geométrica por trás dos argumentos.

Note que

$$\{((x, m(x)), (y, m(y))) : x \neq y\} = \text{Graf}(m)$$

Se supormos que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ as massas são iguais, então para certo k_0 ,

$$\begin{aligned} \{((x, m(x)), (y, m(y))) : x \neq y\} &= \{((x, m(x)), (y, m(x))) : x \neq y\} \\ &= \{((x, k_0), (y, k_0)) : x \neq y\} \simeq \mathbb{R}^2 - \Delta\mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Seja C_1 e C_2 as duas componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - \Delta\mathbb{R}^2$. Pelo Teorema A.4, a aplicação quociente

$$\varphi : (\mathbb{R}^2 - \Delta\mathbb{R}^2) \rightarrow (\mathbb{R}^2 - \Delta\mathbb{R}^2) / S_2$$

é contínua e portanto $\varphi(C_1)$ e $\varphi(C_2)$ são componentes conexas em $(\mathbb{R}^2 - \Delta\mathbb{R}^2) / S_2$. Em contrapartida, $\varphi(C_1) = \varphi(C_2)$. Portanto, $(\mathbb{R}^2 - \Delta\mathbb{R}^2) / S_2$ possui apenas uma componente conexa, *i.e.*, é um conexo.

Por outro lado, se $m(x) \neq m(y)$, logo, $\{((x, m(x)), (y, m(y))) : x \neq y, m(x) \neq m(y)\}$ possui quatro componentes conexas dadas por

$$\begin{aligned} K_1 &= \{((x, m(x)), (y, m(y))) : x > y, m(x) > m(y)\} \\ K_2 &= \{((x, m(x)), (y, m(y))) : x > y, m(x) < m(y)\} \\ K_3 &= \{((x, m(x)), (y, m(y))) : x < y, m(x) > m(y)\} \\ K_4 &= \{((x, m(x)), (y, m(y))) : x < y, m(x) < m(y)\} \end{aligned}$$

Como a aplicação quociente φ é contínua, então $\varphi(K_i)$ é uma componente conexa. Por outro lado, $\varphi(K_1) = \varphi(K_4)$ e $\varphi(K_2) = \varphi(K_3)$ pois

$$\{(x, m(x)), (y, m(y))\} = \{(y, m(y)), (x, m(x))\}.$$

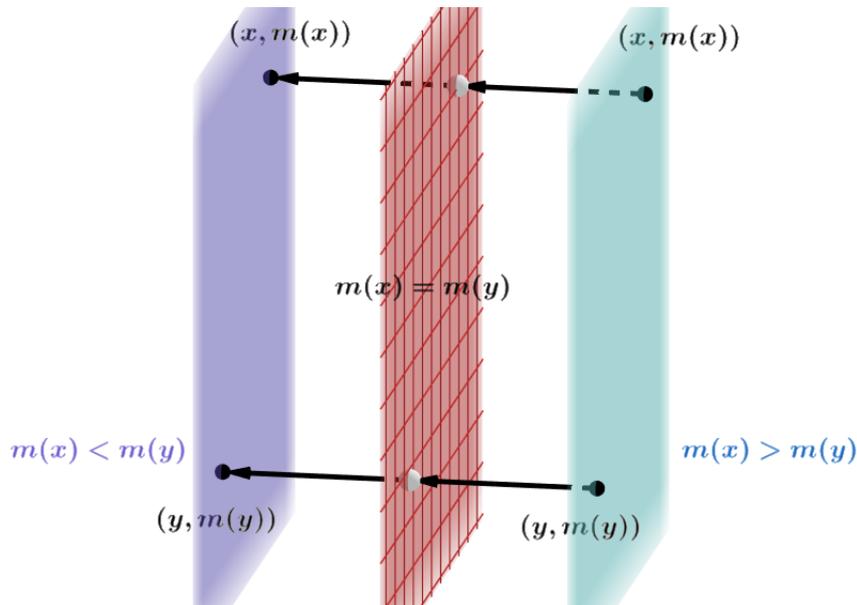
Portanto, o espaço quociente possui duas componentes conexas.

As observações acima indicam que a topologia da configuração depende diretamente das massas da partículas.

Exemplo 6.6. As massas influenciam em um dos problemas clássicos da Mecânica Celeste: os equilíbrios relativos colineares de Euler para um problema de três corpos.

Considere três partículas $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} \subset \mathbb{R}^2$, com massas m_1, m_2, m_3 , respectivamente. Suponha que os corpos se movem em torno do centro de massa, têm o mesmo período orbital e são colineares. Além disso, suponha, sem perda de generalidade, que o ponto

Figura 14: Representação da deformação contínua de um ponto para outro nas componentes conexas de $\{(x, m(x)), (y, m(y))\} : x, y \in \mathbb{R}$



Fonte: Autoria própria

\mathbf{x}_2 está entre \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_3 . Sejam $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ as **posições relativas** definidas por $\mathbf{s}_1 = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2$, $\mathbf{s}_2 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3$ e $\mathbf{s}_3 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$.

Imediatamente da definição, $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 = 0$.

Como as partículas estão na mesma reta, então existem escalares positivos λ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $\mathbf{s}_1 = \lambda \mathbf{s}_3$ e $\mathbf{s}_2 = \alpha \mathbf{s}_3$, mas pela igualdade acima,

$$0 = \lambda \mathbf{s}_3 + \alpha \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_3 = (\lambda + \alpha + 1) \mathbf{s}_3$$

Consequentemente, $\alpha = -(\lambda + 1)$.

Para encontrar o valor de λ , basta calcular as raízes do polinômio abaixo:

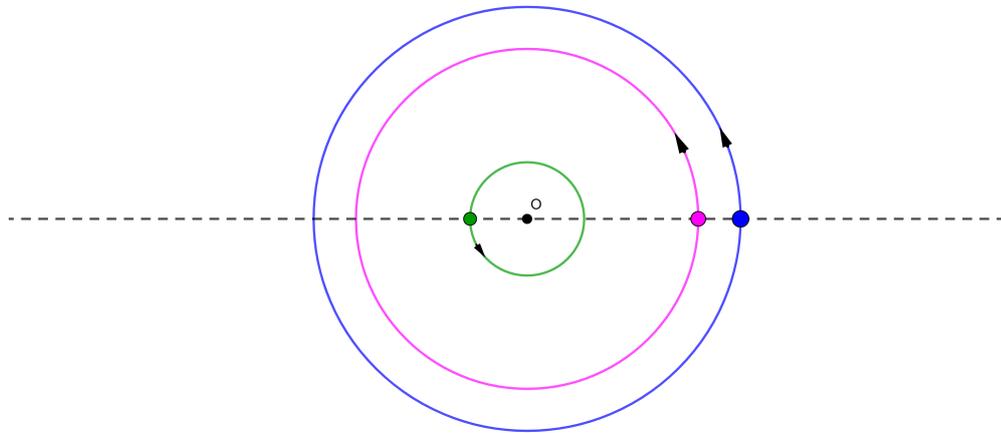
$$p(\lambda) = (m_1 + m_2) \lambda^5 + (3m_1 + 2m_2) \lambda^4 + (3m_1 + m_2) \lambda^3 - (m_2 + 3m_3) \lambda^2 - (2m_2 + 3m_3) \lambda - (m_2 + m_3)$$

Toda a construção para chegar desse polinômio encontrasse no livro de Harry Pollard [Pol66]).

Como há apenas uma variação de sinal no polinômio, pela **Regra dos Sinais de Descartes**, p admite uma única solução positiva.

- Se $m_1 = m_2 = m_3$, então o problema admite uma única solução $s_3, \lambda s_3, -(\lambda + 1) s_3$.

Figura 15: Solução colinear do problema de três corpos



Fonte: Autoria própria

Logo, a configuração solução deste problema é da forma

$$\{(\mathbf{x}_0, m_1), (\lambda \mathbf{x}_0, m_1), -((\lambda + 1)\mathbf{x}_0, m_1)\} \simeq \{\mathbf{x}_0, \lambda \mathbf{x}_0, -(\lambda + 1)\mathbf{x}_0\}.$$

Considere o espaço de configurações

$$\bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}} \{\mathbf{x}, \lambda \mathbf{x}, -(\lambda + 1)\mathbf{x}\}.$$

Tal espaço é homeomorfo a $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ que é conexo.

- Se $m_1 \neq m_2 \neq m_3$, então teremos três soluções baseadas em qual ponto está entre os outros dois. A configuração solução é da forma

$$\{(\mathbf{x}_0, m_1), (\lambda \mathbf{x}_0, m_2), -(\lambda + 1)\mathbf{x}_0, m_3\}.$$

Considere o espaço de configurações

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}} \{(\mathbf{x}, m_1), (\lambda \mathbf{x}, m_2), -(\lambda + 1)\mathbf{x}, m_3\}.$$

Utilizando um argumento análogo ao do exemplo anterior, mostra-se que \mathcal{C} possui seis componentes conexas baseadas na ordem das massas. Consequentemente, o

problema terá seis soluções, três delas em reflexão das outras três, cada uma em uma componente conexa distinta.

7 O TEOREMA DE SIMETRIA

7.1 PRINCÍPIO DA CRITICALIDADE SIMÉTRICA

Antes de chegarmos no teorema principal deste trabalho, será necessário enunciar um teorema auxiliar, proposto e demonstrado inicialmente por [Pal79], que é conhecido na literatura por **Princípio da Criticalidade Simétrica**. Para isso, é necessário definir um objeto que está presente no teorema.

Definição 7.1. Sejam G um grupo finito agindo sobre uma variedade X e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é G -invariante se $f \circ g = f$ para todo $g \in G$.

Teorema 7.2 (Princípio da Criticalidade Simétrica). *Suponha que G age suavemente na variedade X e seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função G -invariante suave. Considere $x \in X^G = \text{Fix}(G, X) = \{x \in X : G \cdot x = x\}$. Logo, x é ponto crítico de f se, e somente se, x é ponto crítico da restrição $f|_{X^G}$.*

Para nos familiarizarmos com o teorema, seguem os exemplos abaixo:

Exemplo 7.3. Seja m um inteiro positivo ímpar. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{i \neq c \\ i=1}}^m x_i x_c$, onde $c = \frac{m+1}{2}$. Considere o grupo

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{array} \right) \right\}.$$

Note que f é uma aplicação H -invariante, pois a ação de qualquer elemento de H em um ponto de \mathbb{R}^m não altera a entrada c . Além disso, $(\mathbb{R}^m)^H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : g \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}, \forall g \in H\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : x_i = x_{m-i+1}\}$.

Calculando a jacobiana da aplicação, temos que

$$J_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_c} f(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_{c+1}} f(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_m} f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ x_c \\ \vdots \\ \sum_{i=1, i \neq c}^m x_i \\ x_c \\ \vdots \\ x_c \end{pmatrix}$$

Portanto, se \mathbf{a} é ponto crítico de f , então $a_c = 0$ e $\sum_{i=1, i \neq c}^m a_i = 0$. Logo, se $\mathbf{b} \in (\mathbb{R}^m)^H$ é um ponto crítico de f , então $b_c = 0$ e $\sum_{i=1}^{c-1} b_i = 0$. Pelo Princípio da Criticalidade Simétrica, \mathbf{b} é ponto crítico de $f|_{(\mathbb{R}^m)^H}$. De fato, basta observar que

$$J_{f|_{(\mathbb{R}^m)^H}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_c \\ x_c \\ \vdots \\ \sum_{i=1, i \neq c}^m x_i \end{pmatrix}$$

Exemplo 7.4. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Seja

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Note que f é uma aplicação G -invariante, pois a ação via um elemento não-trivial de G em um ponto de \mathbb{R}^3 apenas permuta as entradas ou muda o sinal e a aplicação f é uma forma quadrática.

Fazendo operações matriciais elementares, é possível encontrar que

$$(\mathbb{R}^3)^G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g \cdot (x, y, z) = (x, y, z)\} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Note que

$$f' \Big|_{(\mathbb{R}^3)^G} ((0, 0, z)) = 2z.$$

Portanto, $(0, 0, 0)$ é um ponto crítico de $f' \Big|_{(\mathbb{R}^3)^G}$. Pelo princípio da criticalidade simétrica, $(0, 0, 0)$ é ponto crítico de f . De fato, basta ver que $\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z)$.

Em decorrência do teorema 7.2, podemos enunciar o próximo corolário que identifica configurações centrais G -simétricas analisando sua interação com a função potencial.

Corolário 7.5. *Uma configuração (C, m) é central e G -simétrica com momento de inércia $I \equiv 1$ se, e somente se, (C, m) é ponto crítico do potencial U restrito a*

$$\text{Fix}(G, \mathcal{C} \cap \{I \equiv 1\}) = (C \cap \{I \equiv 1\})^G.$$

Demonstração. Suponha que (C, m) seja uma configuração central, G -simétrica e com momento de inércia $I \equiv 1$. Logo, (C, m) é ponto crítico de U restrito ao nível $I \equiv 1$. Como U depende apenas das distâncias entre os pontos, U é invariante pela ação do grupo ortogonal. Além disso, U é uma aplicação suave. Pelo Teorema 7.2, (C, m) é ponto crítico da restrição de U a $\text{Fix}(G, \mathcal{C} \cap \{I \equiv 1\})$.

A volta segue imediatamente do Teorema 7.2. ■

Durante a demonstração do Teorema 7.6, ficará explícito o porquê da escolha da restrição $\mathcal{C} \cap \{I \equiv 1\}$ no corolário acima.

7.2 TEOREMA DE MONTALDI

A partir das definições dadas até o momento, podemos enfim enunciar o Teorema que é o objetivo deste trabalho.

Teorema 7.6 (Teorema de Montaldi). *Sejam $G \leq \mathcal{O}(d)$ um subgrupo finito e Γ um tipo topológico de Burnside de G . Existe ao menos uma configuração central em cada componente conexa do conjunto $\mathcal{C}(\Gamma)$, onde $\mathcal{C}(\Gamma)$ é o conjunto de todas as configurações com tipo topológico de Burnside Γ .*

Demonstração. Sem perda de generalidade, assumamos que o centro de massa da configuração é a origem. Logo, $\sum_{x \in C} m(x)x = 0$. Pela Proposição 3.4, os múltiplos reais de uma configuração central também são configurações centrais. Consequentemente, podemos

restringir o conjunto das configurações ao nível $I \equiv 1$. Seja $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cap \{I \equiv 1\}$. Como U e I dependem apenas das distâncias entre pontos e as distâncias são invariantes por rotações e reflexões, então U e I são invariantes sob a ação do grupo ortogonal $\mathcal{O}(d)$. Note que o conjunto de todas as configurações com tipo topológico de Burnside Γ , $\mathcal{C}(\Gamma)$, é um aberto em \mathcal{C}^G (Ver construção feita na seção 5.2), então um ponto crítico $C \in \mathcal{C}(\Gamma)$ de uma função G -invariante $f : \mathcal{C}^G \rightarrow \mathbb{R}$ também é ponto crítico da função restrita ao aberto $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Como o momento total de inércia $I : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação suave, invariante sob o grupo ortogonal e sem pontos críticos, segue que o número 1, que corresponde ao nível que estamos trabalhando, é um valor regular e, pelo teorema A.3, $I^{-1}(1) = \mathcal{C}_1$ é uma subvariedade G -invariante suave. Pelo teorema A.6, \mathcal{C}_1^G é uma subvariedade suave de \mathcal{C}_1 e, conseqüentemente, $\mathcal{C}_1(\Gamma)$ é um aberto em \mathcal{C}_1^G .

Considere uma seqüência de pontos $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \varphi^{-1}(\mathcal{C}(\Gamma)) \cap \{I \equiv 1\} \subset \mathcal{C}_0 \cap \{I \equiv 1\}$ tal que $\xi_n \rightarrow \zeta \in \Delta(\mathbb{R}^{dN})$, onde φ corresponde a aplicação quociente em \mathcal{C}_0 em \mathcal{C}_0/S_N . Seja $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de configurações em $\mathcal{C}_1(\Gamma)$ tal que $C_n = \varphi(\xi_n)$. Como ζ é um ponto na diagonal de $\mathbb{R}^{dN} \cap \{I \equiv 1\}$, temos que

$$\inf_n \{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C_n\} = 0.$$

Conseqüentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C_n} \frac{m(\mathbf{x})m(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) = +\infty.$$

Como $U > 0$ e $U \rightarrow +\infty$, segue que U admite um ponto de mínimo em $\mathcal{C}_1(\Gamma)$. Como U é diferenciável, segue que tal mínimo é um ponto crítico. Pelas construções feitas anteriormente, tal ponto é crítico em \mathcal{C} , concluindo assim o teorema. ■

8 CONFIGURAÇÕES C_l E D_k -SIMÉTRICAS

8.1 DIMENSÃO 2

Antes de iniciarmos propriamente esta seção de exemplos, é necessário primeiro demonstrar um resultado de teoria de grupos.

Proposição 8.1. *Os únicos subgrupos finitos de $\mathcal{O}(2)$ são os subgrupos cíclicos C_k e os subgrupos diedrais D_k .*

Demonstração. Dividiremos a demonstração em dois casos. Primeiramente, suponha que G seja um subgrupo finito de $\mathcal{O}(2)$ contido em $\mathcal{SO}(2)$. Logo, todo elemento pode ser representado por uma θ -rotação em torno da origem no plano, com

$$\theta \in \Omega = \left\{ \frac{2\pi n}{|G|} : n \in \{0, \dots, |G| - 1\} \right\}.$$

Denote por r_θ tais elementos.

Tome $r_\phi \in G$ de modo que ϕ seja o menor elemento não-nulo possível em Ω . Portanto, dado $r_\theta \in G$, tem-se que $\theta = m\phi + \psi$ para certo $m \in \mathbb{N}$ com $|\psi| = 0$ ou $|\psi| \leq |\phi|$. Além disso, para qualquer que seja o $r_\theta \in G$, tem-se que

$$(r_\theta)^m = r_{m\theta}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} r_\theta &= r_{m\phi + \psi} = r_{m\phi} r_\psi = (r_\phi)^m r_\psi; \\ r_\psi &= (r_\phi)^{-m} r_\theta. \end{aligned}$$

Pela minimalidade de ϕ , segue que $\psi = 0$ e $\theta = m\phi$. Logo, pela arbitrariedade do θ , segue que $G = \langle r_\phi \rangle$. Por simplicidade, utilizaremos $r_\phi = r$.

Por outro lado, suponha que $G \not\subset \mathcal{SO}(2)$. Logo, existe uma reflexão s em G .

Considere $H \subset G$ tal que $H = G \cap \mathcal{SO}(2)$. Como a interseção de subgrupos é um subgrupo, então H é um subgrupo de G . Pela primeira parte da demonstração, H um subgrupo cíclico. Isto é, existe $r \in H$ tal que $H = \langle r \rangle$.

Suponha que $H = \{e, r, \dots, r^{n_0}\}$, para certo $n_0 \in \mathbb{N}$. Considere um elemento $g \in G$ fixo, porém arbitrário. Se $gs = s$, então $g = e$. Por outro lado, se $gs = r^i$ para certo $i \neq n_0$, então, $g = (gs)s = r^i s$.

Note que toda reflexão é da forma gs com $g \in G$, pois dado a reflexão s_0 , então

- se $g_0 s_0 = gs$, então $s_0 = ((g_0)^{-1}g)s$;
- se $g_0 s_0 = r^i$, então $s_0 = (g_0)^{-1}r^i$;
- se $g_0 = r^j s$, então $s_0 = r^j s r^i = (r^j (r^i)^{-1})s$;
- se $g_0 = s_0$, então $r^i = e$.

Da arbitrariedade de s , segue que

$$G = \{e, r, r^2, \dots, r^{n_0}, s, rs, \dots, r^{n_0} s\}$$

Portanto, G é um grupo diedral. ■

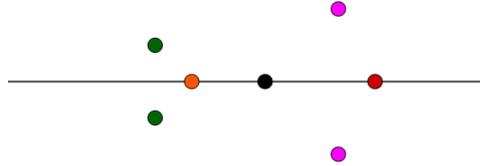
Exemplo 8.2. Seja $G = C_k$ ($k > 1$). Ao escrever uma configuração C_k -invariante de tipo de Burnside, os únicos subgrupos na decomposição com coeficiente diferente de 1 são (C_k) e $(\{e\})$. Isso ocorre pois todos os subgrupos próprios estabilizam apenas a origem, afinal, C_k é formado por rotações. O tipo de Burnside associado a configurações $G = C_k$ simétricas é da forma

$$\Gamma = \varepsilon(C_k) + a(\{e\}).$$

Geometricamente, tal configurações podem ser vistas como a k -gonos centrados na origem e um ponto (ou não, dependendo do valor de ε) na origem.

Exemplo 8.3. Outro caso interessante a ser destacado é quando $G = D_1$. Assuma, sem perda de generalidade, que $D_1 = \{e, s\}$ com s sendo a reflexão sobre o eixo horizontal ($y = 0$) no plano. O único subgrupo próprio é o trivial. Logo, as duas possibilidades de tipos de órbitas para esta simetria são (D_1) , com apenas um ponto no eixo horizontal, e $(\{e\})$ quando algum dos pontos da órbita não está no eixo horizontal (consequentemente o outro não estará). Portanto, uma configuração D_1 -simétrica genérica é da forma

$$\Gamma = a(D_1) + b(\{e\}).$$

Figura 16: $\Gamma = 3(D_1) + 2(\{e\})$ 

Fonte: Autoria própria

Para generalizar as configurações D_k -simétricas em \mathbb{R}^2 , precisamos verificar um importante resultado acerca das reflexões dos grupos diedrais. Denote

$$D_k = \{e, r, \dots, r^{k-1}, s, rs, \dots, r^{k-1}s\}.$$

Veremos que dependendo da paridade de k , as reflexões podem ou não ser conjugadas.

Considere as reflexões $s, rs \in D_k$. Dado uma rotação $r^i \in D_k$, temos que:

$$\begin{aligned} r^i s r^{-i} &= r^i s r^{k-i} = r^i r^i s = r^{2i} s \\ r^i r s r^{-i} &= r^i r s r^{k-i} = r^i r r^i s = r^{2i+1} s \end{aligned}$$

As igualdades acima mostram que independente do valor de k , reflexões $r^j s$ tal que j é par são conjugadas a $r^0 s = s$ e as reflexões com j ímpar são conjugadas a $r^1 s = rs$.

Se k é ímpar, então $2 \left(\frac{k+1}{2} \right) - 1 = k$, conseqüentemente $r^{\frac{k+1}{2}} s r^{-\frac{k+1}{2}} = rs$. Portanto, s é conjugado a rs . Logo pelos itens acima, segue que todas as reflexões são conjugadas. Por outro lado, se k é par, então $1 \not\equiv (2i) \pmod{k}$. Conseqüentemente, as reflexões de expoente ímpares não são conjugadas às reflexões de expoente par.

Pelas construções feitas no Capítulo 6, sabemos que o espaço das configurações D_k -simétricas, com k ímpar, de um tipo de Burnside com coeficiente diferente de zero no termo (\mathbb{Z}_2) , possui duas componentes conexas distintas. Como todas as reflexões são conjugadas, só há necessidade de um representante (que denotaremos por \mathbb{Z}_2) para estas órbitas.

Logo, uma configuração genérica D_k -simétrica, com k ímpar, tem tipo topológico de Burnside

$$\Gamma = \varepsilon(D_k) + a(\mathbb{Z}_2) + b(\mathbb{Z}_2)' + c(\{e\}).$$

O segundo caso, quando k é par, requer um pouco mais de cuidado. Neste caso, denotaremos $\mathbb{Z}_2^\alpha = \{e, \alpha\}$ e $\mathbb{Z}_2^\omega = \{e, \omega\}$, onde \mathbb{Z}_2^α consiste nas órbitas com um ponto estabilizado por qualquer uma das reflexões de expoente par e \mathbb{Z}_2^ω as órbitas com um ponto estabilizado por uma reflexão com expoente ímpar.

Portanto, uma configuração D_k -simétrica genérica, com k par, é da forma:

$$\Gamma = \varepsilon(D_k) + a(\mathbb{Z}_2^\alpha) + b(\mathbb{Z}_2^\omega) + c(\{e\}).$$

Geometricamente, as configurações de D_k -simétricas, com k ímpar, podem ser vistas como ε pontos na origem que correspondem a órbita do tipo (D_k) , além de a k -gonos regulares centrados na origem, b k -gonos regulares centrados na origem $\frac{\pi}{k}$ -rotacionados associados às órbitas do tipo (\mathbb{Z}_2) e $(\mathbb{Z}_2)'$ respectivamente. Por fim, c $2k$ -gonos semirregulares centrados na origem correspondentes à órbitas de tipo trivial.

Nesta mesma perspectiva, a geometria das configurações de índice diedral par segue um argumento análogo para as órbitas de tipo trivial e (D_3) . Entretanto, as órbitas do tipo (\mathbb{Z}_2^α) possuem geometria de um k -gono e (\mathbb{Z}_2^ω) também um k -gono mas $\frac{\pi}{k}$ -rotacionados, ambos centrados na origem.

8.2 DIMENSÃO 3

No caso de \mathbb{R}^3 , devemos tomar um pouco de cuidado pois, diferentemente do que acontece em dimensão dois, existem pontos não-nulos que são estabilizados pelas rotações. Além disso, existem apenas cinco sólidos regulares em \mathbb{R}^3 para analisar seus grupos de simetria. Faremos a seguir alguns exemplos de configurações $\mathcal{O}(3)$ -simétricas em \mathbb{R}^3 .

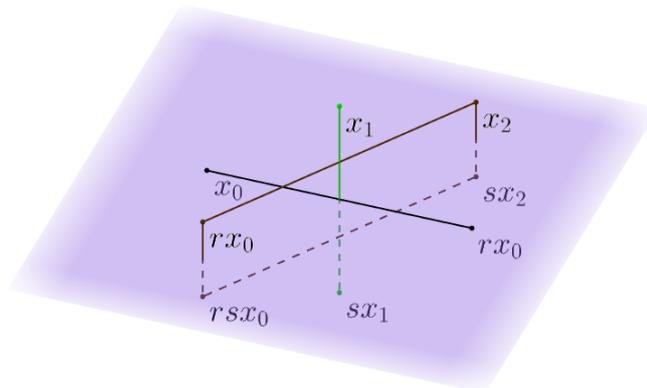
Exemplo 8.4. Considere $\{(e, e), (e, \xi), (s, e), (s, \xi)\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^\xi \leq \mathcal{O}(3)^1$ agindo em \mathbb{R}^3 da seguinte maneira: Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a ação de $s \in \mathbb{Z}_2$ será nas duas primeiras entradas via π -rotação em torno da origem no nível z , isto é, $(s, e) \cdot (x, y, z) = (s \cdot (x, y), z) = (-x, -y, z)$. Já a ação de ξ é feita na terceira entrada via reflexão com relação ao plano

¹A notação de Schoenflies para tal grupo é C_{2h} , mas para facilitar a compreensão da natureza dos elementos, utilizaremos $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^\xi$.

$z = 0$, isto é, $(e, \xi) \cdot (x, y, z) = (x, y, \xi \cdot z) = (x, y, -z)$.

Logo, as únicas possibilidades para os subgrupos de D_2 são $\{e\} \times \{e\}$, $\mathbb{Z}_2 \times \{e\}$, $\{e\} \times \mathbb{Z}_2^\xi$ e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^\xi$.

Figura 17: $\Gamma = 1(\mathbb{Z}_2 \times \{e\}) + 1(\{e\} \times \mathbb{Z}_2^\xi) + 1(\{e\} \times \{e\})$



Fonte: Autoria própria

Apesar do conjunto $Y_{\mathbb{Z}_2 \times \{e\}} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^\xi \right)_{(x,y,z)} = \mathbb{Z}_2 \times \{e\} \right\}$ possuir duas componentes conexas disjuntas $\{(0, 0, z)\}_{z>0}$ e $\{(0, 0, z)\}_{z<0}$, quando quocientamos por $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^\xi}(\mathbb{Z}_2 \times \{e\}) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^\xi$, tais subespaços coincidem e formam apenas uma componente conexa pois $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^\xi) \cdot (0, 0, z) = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^\xi) \cdot (0, 0, -z)$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Logo, não precisamos refinar o tipo de Burnside para um tipo topológico de Burnside nesta órbita. Para $\{e\} \times \mathbb{Z}_2^\xi$ o argumento é similar ao feito neste parágrafo.

Para a órbita do tipo $(\{e\} \times \{e\})$, basta observar que teremos uma componente conexa acima do plano $z = 0$ dada por $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z)\}_{z>0}$ e uma abaixo dada por $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z)\}_{z<0}$. Entretanto, $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^\xi) \cdot (x, y, z) = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^\xi) \cdot (x, y, -z)$. Logo, existe apenas uma componente conexa e, portanto, não há necessidade de refinamento.

Consequentemente, uma configuração D_2 -simétrica genérica tem tipo topológico de Burnside.

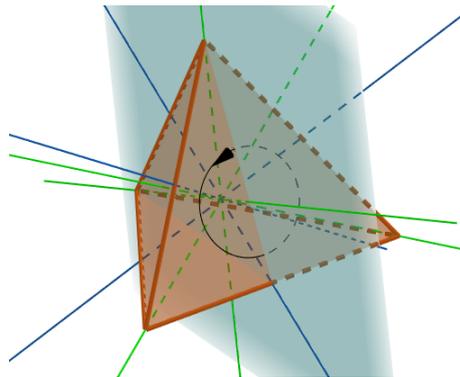
$$\Gamma = \varepsilon \left(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^\xi \right) + a \left(\mathbb{Z}_2 \times \{e\} \right) + b \left(\{e\} \times \mathbb{Z}_2^\xi \right) + c \left(\{e\} \times \{e\} \right)$$

Exemplo 8.5. Considere \mathbb{T}_d , o grupo de simetrias do tetraedro regular, agindo em \mathbb{R}^3 . 8 das rotações podem ser geradas pela $\frac{2\pi}{3}$ -rotação do tetraedro através da reta que passa em cada vértice e no centro da face oposta, respectivamente, ilustradas em verde na figura 18.

As demais quatro rotações são obtidas pela π -rotação do tetraedro através da reta que passa nos pontos médios das arestas opostas (uma delas é a própria identidade). Tais retas estão representadas na Figura 18 na cor azul.

Por fim, fixado um plano de reflexão, as demais reflexões e rotações-reflexões podem ser obtidas compondo s com uma ou mais rotações.

Figura 18: Simetrias do tetraedro



Fonte: Autoria própria

\mathbb{T}_d é um grupo de ordem $24 = 3 \cdot 2^3$. Logo, pelo teorema de Lagrange, os subgrupos de \mathbb{T}_d possuem ordem 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24. O subgrupo² H de ordem 12 em \mathbb{T}_d contém todas as rotações. Portanto, existirá um ponto na órbita que pertence a interseção dos eixos de rotação. Tal ponto é a origem. Segue que a órbita é trivial. Consequentemente, H não é relevante no estudo do tipo de Burnside.

Nesta mesma perspectiva, os subgrupos de ordem 12, 8 e 3 (D_6 , D_4 e \mathbb{Z}_3 , respectivamente.) não trazem relevância no estudo desta configuração simétrica. Isso ocorre pois \mathbb{Z}_3 é formado pela identidade e as duas rotações de $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ em torno do eixo z . Portanto, se um ponto \mathbf{x}_0 é estabilizado por \mathbb{Z}_3 , então também deverá ser estabilizado pelo plano de reflexão que contém z (ver proposição B.1). Logo, \mathbf{x}_0 é estabilizado por $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Consequentemente, tal tipo de Burnside não é relevante no estudo de simetrias. Os casos com D_4 e D_6 decorrem do fato de que \mathbb{Z}_3 está contido em ambos subgrupos.

Além disso, o tipo topológico de Burnside refina o subgrupo S_3 . Isso ocorre pois o conjunto dos pontos cujo estabilizador é exatamente S_3 são da forma

$$A_{abc} = \{((-1)^a x, (-1)^b x, (-1)^c x)\}_{x \neq 0},$$

²Utilizando os teoremas de Sylow é possível verificar que H de fato é o único subgrupo de ordem 12.

onde $a, b, c \in \{0, 1\}$. Semelhante ao que acontece com o subgrupo \mathbb{Z}_2 na ação de D_3 no plano, os pontos $((-1)^a x, (-1)^b x, (-1)^c x)$ e $-((-1)^a x, (-1)^b x, (-1)^c x)$ possuem órbitas em componentes conexas diferentes.

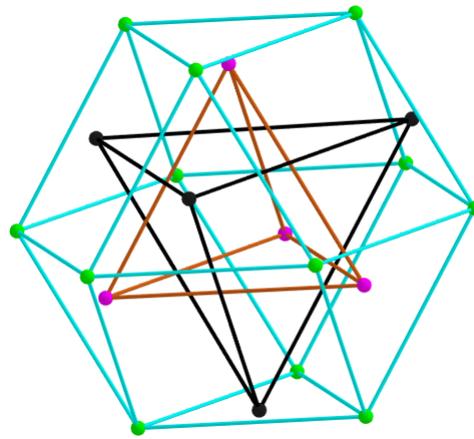
Além disso, o único ponto estabilizado por todo \mathbb{T}_d é a origem, não havendo necessidade de verificar os refinamentos.

Portanto, excluindo os subgrupos que não trazem relevância para o estudo, uma configuração \mathbb{T}_d -simétrica genérica é da forma:

$$\Gamma = \varepsilon(\mathbb{T}_d) + a(S_3) + b(S_3)' + c(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^\xi) + d(\{e\} \times \mathbb{Z}_2^\xi) + k(\{e\} \times \{e\}).$$

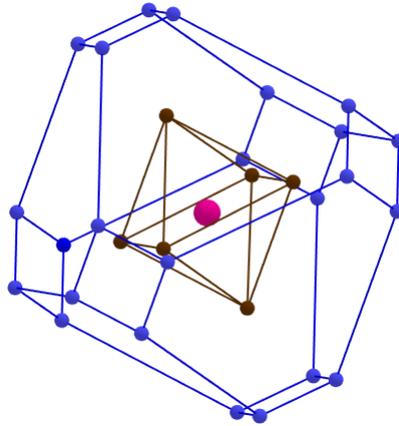
As Figuras 19 e 20 representam exemplos de configurações \mathbb{T}_d -simétricas em \mathbb{R}^3 . Reduzimos a quantidade de fatores na decomposição devido à densidade de informações que estariam na figura.

Figura 19: $\Gamma = 1(S_3) + 1(S_3)' + 1(\mathbb{Z}_2)$



Fonte: Autoria própria

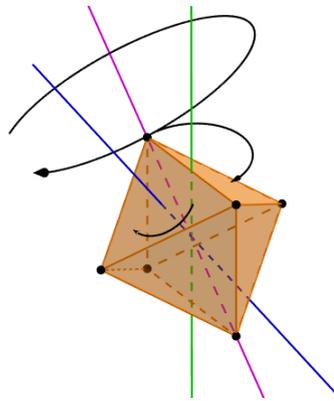
Figura 20: $\Gamma = 1(\mathbb{T}_d) + 1(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) + 1(\{e\})$



Fonte: Autoria própria

Exemplo 8.6. Seja \mathbb{O}_h o grupo de simetrias do octaedro. Tal grupo é formado pela identidade e por nove $\frac{\pi}{2}$ -rotações, seis π -rotações, seis $\frac{2\pi}{3}$ -rotações, além de vinte e quatro reflexões e rotações-reflexões.

Figura 21: Rotações não-conjugadas do octaedro



Fonte: Autoria própria

Diferente do que ocorre no tetraedro, nas configurações com simetria octaedral, o tipo topológico de Burnside não traz nenhum refinamento na fatoração dos tipos de órbitas. Entretanto, assim como ocorre com o subgrupo \mathbb{Z}_2 na ação de D_4 no plano, as órbitas com 24 pontos, que possuem tipo de órbita \mathbb{Z}_2 , possuem uma distinção na decomposição de Burnside pois existem subgrupos de ordem 2 não-conjugados. Um exemplo disso são

os subgrupos:

$$\mathbb{Z}_2^\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbb{Z}_2^\omega = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

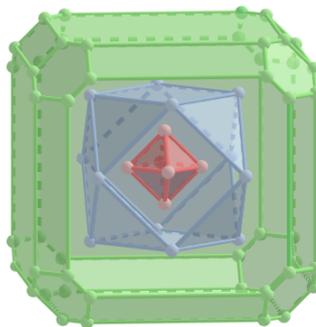
Portanto, uma configuração com simetria \mathbb{O}_h genérica é da forma

$$\Gamma = \varepsilon(\mathbb{O}_h) + a(C_4 \times \mathbb{Z}_2^\omega) + b(S_3) + c(\mathbb{Z}_2^\omega \times \mathbb{Z}_2^\alpha) + d(\mathbb{Z}_2^\omega) + k(\mathbb{Z}_2^\alpha) + j(\{e\}),$$

com $\varepsilon \in \{0, 1\}$ e $a, b, c, d, k, j \in \mathbb{Z}_+$.

Abaixo, a Figura 22 traz um exemplo de uma configuração com 3 órbitas com simetrias distintas. Assim como nos demais exemplos aqui apresentados, as cores que formam sólidos e polígonos tem o único intuito de facilitar a visualização geométrica da órbita. Entretanto, o que representa de fato a configuração são os vértices destas figuras geométricas.

Figura 22: $\Gamma = 1(C_4 \times \mathbb{Z}_2^\omega) + 1(\mathbb{Z}_2^\omega \times \mathbb{Z}_2^\alpha) + 1(\{e\})$



Fonte: Autoria própria

8.3 RELEVÂNCIA DOS SUBGRUPOS NO ESTUDO DE ÓRBITAS COM SIMETRIA DIEDRAL

Durante a construção do Exemplo 4.1 e das generalizações feitas na seção anterior, não utilizamos todos os possíveis subgrupos de D_3 na representação do tipo de Burnside,

afinal, $|D_3| = 6 = 2 \cdot 3$ e então existe um subgrupo $C_3 = \{r^i\}_{i=0,1,2}$ de ordem 3. Entretanto, o único ponto estabilizado por rotações é a origem e portanto, não é relevante analisar tais órbitas, pois estas coincidem com a órbita de tipo (D_3) .

Nesta perspectiva, existem outros subgrupos que não são relevantes ao estudo de órbitas. No caso diedral em $\mathcal{O}(2)$, como os subgrupos são conhecidos, tal análise torna-se mais simples.

Da Proposição 8.1, sabemos que os únicos subgrupos em $\mathcal{O}(2)$ são os cíclicos e diedrais. No teorema a seguir, enunciado e demonstrado por Conrad [Con09], iremos explicitá-los.

Teorema 8.7. *Seja D_n o subgrupo diedral em $\mathcal{O}(2)$. Os subgrupos de D_n são da seguinte forma:*

- $\langle r^j \rangle$, onde j divide n ;
- $\langle r^j, r^i s \rangle$, onde j divide n e $0 \leq i \leq j - 1$,

onde $\langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ consiste no subgrupo gerado pelos elementos g_1, \dots, g_n .

Como o único ponto estabilizado por rotações em $\mathcal{O}(2)$ é a origem, então os subgrupos $\langle r^j, r^i s \rangle_{j \neq 0, n}$ e $\langle r^j \rangle_{j \neq 0}$ não trazem relevância no tipo de Burnside. Portanto, restam apenas os subgrupos $\langle r^n, r^i s \rangle = \langle e, r^i s \rangle = \langle r^i s \rangle$.

9 CONFIGURAÇÕES BALANCEADAS

Neste Capítulo estaremos interessados em apresentar uma versão do Teorema de Montaldi para uma classe específica de configurações.

Seja $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ uma configuração ordenada com centro de massa na origem. Defina as seguintes matrizes

$$\mathbf{X}_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x_1^\top & \dots & x_N^\top \end{pmatrix}_{d \times N} \quad \text{e} \quad \mu_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_N \end{pmatrix}_{N \times N}.$$

A partir das duas matrizes apresentadas podemos então definir a matriz $S_{\mathbf{v}} = X_{\mathbf{v}} \mu_{\mathbf{v}} X_{\mathbf{v}}^\top$.

Desde o começo evitamos utilizar configurações ordenadas e o leitor pode se questionar sobre retomá-las no fim do trabalho. De fato, precisamos de uma ordenação para definir as matrizes $\mathbf{X}_{\mathbf{v}}$ e $\mu_{\mathbf{v}}$, entretanto, a matriz $(S_{\mathbf{v}})$ que utilizaremos nas próximas definições independe da ordem. Isso ocorre pois o produto

$$S_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{d1} & x_{d2} & \dots & x_{dN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{d1} & x_{d2} & \dots & x_{dN} \end{pmatrix}^\top =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N m_k x_{1k}^2 & \sum_{k=1}^N m_k x_{1k} x_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^N m_k x_{1k} x_{dk} \\ \sum_{k=1}^N m_k x_{2k} x_{1k} & \sum_{k=1}^N m_k x_{2k}^2 & \dots & \sum_{k=1}^N m_k x_{2k} x_{dk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^N m_k x_{dk} x_{1k} & \sum_{k=1}^N m_k x_{dk} x_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^N m_k x_{dk}^2 \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} m_k x_{1k}^2 & m_k x_{1k} x_{2k} & \dots & m_k x_{1k} x_{dk} \\ m_k x_{2k} x_{1k} & m_k x_{2k}^2 & \dots & m_k x_{2k} x_{dk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_k x_{dk} x_{1k} & m_k x_{dk} x_{2k} & \dots & m_k x_{dk}^2 \end{pmatrix}$$

possui entradas dadas pela soma do produto das massas com as coordenadas dos vetores associados.

Outro fato interessante, é que todos os autovalores da matriz $S_{\mathbf{v}}$ são não-negativos, pois ao escrever $S_{\mathbf{v}}$ como

$$S_{\mathbf{v}} = (\mathbf{X}_{\mathbf{v}} \sqrt{\mu_{\mathbf{v}}}) (\mathbf{X}_{\mathbf{v}} \sqrt{\mu_{\mathbf{v}}})^{\top}$$

é possível observar que $S_{\mathbf{v}}$ é uma matriz de Gram (Ver Definição A.1) e portanto é positiva semi-definida (ver Teorema A.2).

Com isso, podemos iniciar as definições das configurações alvo deste Capítulo.

Definição 9.1. Chamaremos de **espectro inercial** ou **espectro de inércia** o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $S_{\mathbf{v}} - \lambda I$ é não-inversível. A notação utilizada será $\sigma(S_{\mathbf{v}})$ ou simplesmente σ quando não houver necessidade de tal especificação.

Exemplo 9.2. Considere os pontos $x_1 = (2, 3)$, $x_2 = (5, 7)$ e $x_3 = (11, 13)$ com massas $m_1 = 3$, $m_2 = 5$ e $m_3 = 7$, respectivamente. Seja $(\{x_1, x_2, x_3\}, m)$ a configuração formada por estes pontos. Um cálculo rápido nos mostra que

$$S_{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 984 & 1194 \\ 1194 & 1455 \end{pmatrix}$$

Consequentemente, $\sigma(S_{\mathbf{C}}) = \left\{ \frac{2439}{2} + \frac{3\sqrt{658265}}{2}, \frac{2439}{2} - \frac{3\sqrt{658265}}{2} \right\}$.

Pelo comentário feito anteriormente sobre a não-necessidade de ordenação, podemos considerar então o espaço de todas as configurações com espectro inercial σ , que denotaremos por $\mathcal{C}[\sigma]$, como um subconjunto de \mathcal{C} .

Definição 9.3. Dizemos que uma configuração $C \in \mathcal{C}$ é **balanceada** se C é ponto crítico da função potencial U restrito a $\mathcal{C}[\sigma] \subset \mathcal{C}$.

Como consequência imediata da definição, temos que toda configuração central tam-

bém é uma configuração balanceada. Com efeito,

$$\operatorname{tr}(S_{\mathbf{v}}) = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^d m_k x_{ik}^2 \right) = \sum_{k=1}^N m_k \left(\sum_{i=1}^d x_{ik}^2 \right) = \sum_{k=1}^N m_k \|x_k\|^2 = I(\{x_1, \dots, x_k\}).$$

Portanto, o momento de inércia é constante ao longo de $\mathcal{C}[\sigma]$.

Teorema 9.4 (Teorema de Montaldi - Versão II.). *Seja $G \leq \mathcal{O}(d)$ um subgrupo finito e σ o espectro inercial de uma configuração G -simétrica (C, m) . Logo, $\mathcal{C}[\sigma]^G$ é um subconjunto fechado e não-vazio de $\mathcal{C}[\sigma]$ e existe uma configuração G -simétrica balanceada em cada componente conexa de $\mathcal{C}[\sigma]^G$. Mais ainda, dado um tipo topológico de Burnside Γ , existe uma configuração balanceada em cada componente conexa de $\mathcal{C}[\sigma](\Gamma)$, desde que $\mathcal{C}[\sigma](\Gamma)$ seja não-vazio.*

Demonstração. Como C é uma configuração G -simétrica e seu espectro inercial é σ , então $\mathcal{C}[\sigma]^G$ é não-vazio.

Considere uma sequência de configurações $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{C}[\sigma]^G$ tal que $C_n \rightarrow C_0$. Como a ação de G em \mathcal{C} é contínua, então

$$g \cdot C_0 = g \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g \cdot C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C_0.$$

Portanto, a configuração C_0 é G -simétrica. Seja $\lambda \in \sigma(S_C)$. Como $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}[\sigma]$, então λ é autovalor de S_{C_n} para todo $n \in \mathbb{N}$. Para concluir que $\mathcal{C}[\sigma]^G$ é um fechado, basta mostrar que λ é autovalor de S_{C_0} . Para tal, basta considerar uma ordenação qualquer $(C_n)_O = ((x_1)_n, \dots, (x_N)_n) \rightarrow ((x_1)_0, \dots, (x_N)_0)$ para obter que $S_{C_n} \rightarrow S_{C_0}$ e, portanto, se \mathbf{u}_n é o autovetor associado a λ a partir do operador S_{C_n} e $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}_0$, então

$$S_{C_0}(\mathbf{u}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{C_n}(\mathbf{u}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \mathbf{u}_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{u}_n = \lambda \mathbf{u}_0.$$

Segue que $\mathcal{C}[\sigma]^G$ é fechado.

Para mostrar que a existência da configuração G -simétrica balanceada em cada componente conexa de $\mathcal{C}[\sigma]^G$, repetimos um processo análogo ao feito no Teorema de Montaldi, considerando a sequência de configurações $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no conjunto $\mathcal{C}[\sigma] \cap \{I \equiv 1\}$. Após isso, dada a existência do ponto crítico de U em $\mathcal{C}[\sigma]$, aplicamos o princípio da criticalidade simétrica para afirmar que tal ponto também é crítico em U restrito a $\mathcal{C}[\sigma]^G$. ■

REFERÊNCIAS

- [ACS12] Alain Albouy, Hildeberto E Cabral, and Alan A Santos. Some problems on the classical n -body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 113(4):369–375, 2012.
- [CL89] Ferran Cedó and Jaume Llibre. Symmetric central configurations of the spatial n -body problem. *Journal of Geometry and Physics*, 6(3):367–394, 1989.
- [Con09] K Conrad. Dihedral groups ii. *Internet Online Book*, pages 3–6, 2009.
- [GBGL08] Timothy Gowers, June Barrow-Green, and Imre Leader. *The Princeton companion to mathematics*. Princeton University Press, 2008.
- [Kan07] Marja Kankaanrinta. Equivariant collaring, tubular neighbourhood and gluing theorems for proper lie group actions. *Algebraic & Geometric Topology*, 7(1):1–27, 2007.
- [Lee13] John M Lee. *Smooth manifolds*. Springer, 2013.
- [LMS15] Jaume Llibre, Richard Moeckel, and Carles Simó. *Central configurations, periodic orbits, and Hamiltonian systems*. Springer, 2015.
- [Lor08] W Tu Loring. *An introduction to manifolds*. Springer-Verlag New York, 2008.
- [LS06] Jinzhi Lei and Manuele Santoprete. Rosette central configurations, degenerate central configurations and bifurcations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94(3):271–287, 2006.
- [Mon15] James Montaldi. Existence of symmetric central configurations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 122(4):405–418, 2015.
- [Pal79] Richard S Palais. The principle of symmetric criticality. *Communications in Mathematical Physics*, 69(1):19–30, 1979.
- [Paw02] KRZYSZTOF Pawalowski. Manifolds as fixed point sets of smooth compact lie group actions. *Current Trends in Transformation Groups*, 7:79, 2002.

- [Pol66] H. Pollard. *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics*. Prentice-Hall mathematics series. Prentice-Hall, 1966.
- [Ros94] John S Rose. *A course on group theory*. Courier Corporation, 1994.
- [Ros09] Harvey E Rose. *A course on finite groups*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [YZ12] Xiang Yu and Shiqing Zhang. Twisted angles for central configurations formed by two twisted regular polygons. *Journal of Differential Equations*, 253(7):2106–2122, 2012.

APÊNDICE A - RESULTADOS E DEFINIÇÕES AUXILIARES

Definição A.1. Considere o conjunto ordenado de vetores $X = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$. A **Matriz de Gram** G associada a X é a matriz onde as entradas são dadas por $g_{ij} = v_i^t v_j$.

Teorema A.2. *Toda matriz de Gram G é positivo semi-definida.*

Demonstração. Considere $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ fixo porém arbitrário. Logo,

$$\mathbf{x}G\mathbf{x}^t = \left(\sum_j v_1^t v_j x_1, \dots, \sum_j v_m^t v_j x_m \right) \mathbf{x}^t = \sum_{i,j} v_i^t v_j x_i x_j = \left\| \sum_i v_i x_i \right\|^2 \geq 0$$

■

Teorema A.3. Teorema da pré-imagem. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave entre variedades, com $\dim X = N$ e $\dim Y = M$. Se c é um valor regular e o nível $f^{-1}(c)$ é não-vazio, então $f^{-1}(c)$ é uma subvariedade regular de X com dimensão igual a $N - M$.*

Demonstração. Ver [Lor08] Teorema 9.3. ■

Teorema A.4. *Seja G um grupo agindo em um espaço topológico X . A aplicação quociente $\varphi : X \rightarrow X/G$ é contínua, onde X/G está munido com a topologia de espaço quociente.*

Demonstração. Decorre imediatamente da definição de topologia quociente. ■

Teorema A.5. *Seja G um grupo topológico agindo continuamente em um espaço topológico X . A aplicação quociente $\varphi : X \rightarrow X/G$ é uma aplicação aberta.*

Demonstração. Ver [Lee13], Lema 21.1. ■

Teorema A.6. *Seja G um grupo de Lie compacto agindo propriamente e suavemente em uma variedade suave X . Logo, X^G é uma subvariedade suave.*

Demonstração. Ver [Kan07] definição 4.5 e [Paw02]. ■

APÊNDICE B - REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE

$$\mathbb{T}_d$$

Para representar os elementos de \mathbb{T}_d utilizaremos a representação matricial a partir de um dado tetraedro. Para calcular as matrizes utilizaremos o tetraedro centrado na origem com vértices $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$ e $(-1, -1, -1)$.

Considere a $\frac{2\pi}{3}$ -rotação no sentido anti-horário cujo eixo passa pelo vértice $(1, 1, -1)$ do tetraedro e pelo centro da face de vértices $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ e $(-1, -1, -1)$. Logo,

$$r_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, resolvendo o sistema acima, temos que a matriz que representa r_1 é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Repetindo o processo para todas as $\frac{2\pi}{3}$ -rotações, teremos as seguintes representações matriciais

$$r_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, r_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, r_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, r_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

e o quadrado de cada uma destas matrizes nos dará as $\frac{4\pi}{3}$ -rotações.

$$r_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Repetindo o mesmo argumento para as π -rotações, teremos as seguintes matrizes:

$$t_0 = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, t_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, t_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que t_1 corresponde a uma rotação com relação com eixo x , t_2 com relação ao eixo y e t_3 com relação ao eixo z .

Além disso, tomando a reflexão

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

as demais 11 reflexões e rotações-reflexões são geradas multiplicando os elementos não-triviais dados anteriormente por s .

Para calcular os possíveis subgrupos, iremos utilizar o software SageMath. Primeiro faremos um isomorfismo com o grupo de permutações S_4 . Enumere os vértices da seguinte forma:

- **1** = (1, 1, -1)
- **2** = (-1, 1, 1)
- **3** = (1, -1, 1)
- **4** = (-1, -1, -1)

Portanto, existe um isomorfismo $\xi : \mathbb{T}_d \rightarrow S_4$ dado por $\xi(r_1) = (\mathbf{2\ 3\ 4})$, $\xi(s) = (\mathbf{1\ 2})$ e $\xi(t_1) = (\mathbf{1\ 3})(\mathbf{2\ 4})$.

Para entender a intuição dos demais pontos, o isomorfismo pode ser construído da seguinte maneira:

- $\xi(e) = () = \text{Id}_{S_4}$;

- Para cada $\frac{2\pi}{3}$ -rotação (que estabiliza um vértice), associamos um elemento de S_4 que estabilizada apenas um elemento, cobrindo 8 elementos do grupo. Isto é, um elemento da forma $(\mathbf{X} \mathbf{Y} \mathbf{Z})$;
- Para cada π -rotação, associamos um elemento de S_4 que permuta elementos dois-a-dois. Isto é, um elemento da forma $(\mathbf{X} \mathbf{Y})(\mathbf{Z} \mathbf{W})$;
- O último passo é o mais delicado. O elemento s estabiliza todo ponto que possui primeira e última entradas iguais. Portanto, s estabiliza **3** e **4**. Já t_2s estabiliza pontos tal que a primeira entrada e a última diferem por sinal. Portanto estabiliza **1** e **2**. Aos elementos de \mathbb{T}_d com essa propriedade associamos um elemento da forma $(\mathbf{X} \mathbf{Y})$.

Em contrapartida, t_1s e t_3s não estabilizam nenhum ponto. Aos elementos com essa propriedade, associamos $(\mathbf{X} \mathbf{Y} \mathbf{Z} \mathbf{W})$.

Abaixo segue os comandos do software SageMath para analisar os subgrupos relevantes a partir de um isomorfismo com o grupo de permutações.

```

1 R1 = matrix([[0,0,-1],[1,0,0],[0,-1,0]])
2 S = matrix([[0,0,1],[0,1,0],[1,0,0]])
3 T1 = matrix([[1,0,0],[0,-1,0],[0,0,-1]])
4
5 G = MatrixGroup(R1,S,T1)
6 H = G.as_permutation_group()
7 H.subgroups()
8
9 [Subgroup generated by [()] of (Permutation Group with generators
10 [(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]),
11 Subgroup generated by [(1,2)(3,4)] of (Permutation Group with
12 generators [(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]),
13 Subgroup generated by [(1,3)(2,4)] of (Permutation Group with
14 generators [(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]),
15 Subgroup generated by [(1,4)(2,3)] of (Permutation Group with
16 generators [(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]),
17 Subgroup generated by [(3,4)] of (Permutation Group with generators
18 [(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]),
19 Subgroup generated by [(2,3)] of (Permutation Group with generators
20 [(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]),

```

- 15 Subgroup generated by $[(2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 16 Subgroup generated by $[(1,2)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 17 Subgroup generated by $[(1,3)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 18 Subgroup generated by $[(1,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 19 Subgroup generated by $[(2,3,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 20 Subgroup generated by $[(1,2,3)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 21 Subgroup generated by $[(1,2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 22 Subgroup generated by $[(1,3,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 23 Subgroup generated by $[(1,2)(3,4), (1,4)(2,3)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 24 Subgroup generated by $[(3,4), (1,2)(3,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 25 Subgroup generated by $[(2,3), (1,4)(2,3)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 26 Subgroup generated by $[(2,4), (1,3)(2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 27 Subgroup generated by $[(1,2)(3,4), (1,4,2,3)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 28 Subgroup generated by $[(1,2,3,4), (1,3)(2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 29 Subgroup generated by $[(1,3,4,2), (1,4)(2,3)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 30 Subgroup generated by $[(3,4), (2,3,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 31 Subgroup generated by $[(3,4), (1,3,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 32 Subgroup generated by $[(1,2), (1,2,3)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 33 Subgroup generated by $[(1,2), (1,2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]$),
- 34 Subgroup generated by $[(3,4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3)]$ of (Permutation

```

Group with generators [(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)],
35 Subgroup generated by [(2,3), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)] of (Permutation
Group with generators [(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]),
36 Subgroup generated by [(2,4), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4)] of (Permutation
Group with generators [(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]),
37 Subgroup generated by [(2,3,4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3)] of (Permutation
Group with generators [(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)]),
38 Subgroup generated by [(3,4), (2,3,4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3)] of (
Permutation Group with generators [(2,3,4), (1,2), (1,3)(2,4)])]

```

Listagem 1: Código para listar os subgrupos de S_4 .

Para nosso trabalho, não existe a necessidade de regressir no isomorfismo e explicitar a forma dos subgrupos acima em \mathbb{T}_d . Para o estudo de configurações, as informações vistas até agora e a próxima proposição são suficientes.

Proposição B.1. *A menos dos caso onde um ponto \mathbf{x} é estabilizado por r_i e r_i^2 , o único ponto invariante por duas rotações não-triviais distintas em \mathbb{T}_d é a origem.*

Nesta proposição, excluimos o caso onde os pontos são invariantes por rotações distintas do tipo r_i e r_i^2 pois, se $r_i \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ então $r_i^2 \cdot \mathbf{x} = r_i \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Demonstração. Considere as funções $\phi, \psi : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{0, 1\}$ dadas por $\phi(1) = \phi(2) = 0$, $\phi(3) = \phi(4) = 1$, $\psi(1) = \psi(4) = 0$ e $\psi(2) = \psi(3) = 1$. Note que podemos escrever os elementos r_i como

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (-1)^i \\ (-1)^{\psi(i)} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\phi(i)+1} & 0 \end{pmatrix}$$

onde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

A demonstração será dividida em 6 casos. O primeiro caso consiste em um ponto (x, y, z) estabilizado por duas rotações distintas r_i, r_j . Logo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (-1)^i \\ (-1)^{\psi(i)} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\phi(i)+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (-1)^j \\ (-1)^{\psi(j)} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\phi(j)+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

para certos $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Portanto,

$$((-1)^i z, (-1)^{\psi(i)} x, (-1)^{\phi(i)+1} y) = (x, y, z) = ((-1)^j z, (-1)^{\psi(j)} x, (-1)^{\phi(j)+1} y)$$

$$((-1)^i z, (-1)^{\psi(i)+i} z, z) = (x, y, z) = ((-1)^j z, (-1)^{\psi(j)+j} z, z)$$

Caso as paridades de i e j sejam diferentes, então $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Suponha que i e j possuam a mesma paridade. Portanto, $\psi(i) \neq \psi(j)$. Suponha, sem perda de generalidade que $\psi(j) = 0$. Logo,

$$(-1)^{j+\psi(j)} z = (-1)^{i+\psi(i)} z \implies (-1)^{j+1} y = (-1)^{i+2} z \implies z = 0.$$

Segue que $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

O segundo caso consiste em uma rotação r_i e uma rotação r_j^2 com $i \neq j$. Se o ponto \mathbf{x} é estabilizado por r_j^2 , então $r_j^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$. Logo,

$$\mathbf{x} = r_j^3 \mathbf{x} = r_j r_j^2 \cdot \mathbf{x} = r_j \mathbf{x}.$$

Portanto, r_j estabiliza \mathbf{x} e o segundo caso se reduz ao primeiro.

O terceiro caso consiste em duas rotações t_i, t_j com $i \neq j$. As π -rotações podem ser escritas como

$$t_i = \begin{pmatrix} (-1)^{\phi(i+1)} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^i & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\psi(i+1)} \end{pmatrix}$$

Logo, se (x, y, z) é estabilizado por duas π -rotações (não-triviais), então

$$\begin{pmatrix} (-1)^{\phi(i+1)} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^i & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\psi(i+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\begin{pmatrix} (-1)^{\phi(j+1)} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^j & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\psi(j+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Se as paridades de i e j são iguais (necessariamente ímpar, pois todo ponto é invariante por t_0), então, supondo sem perda de generalidade que $j = 1$, temos que

$$(x, y, z) = ((-1)^{\phi(j+1)}x, (-1)^j y, (-1)^{\psi(j+1)}z) = (-x, -y, z) \text{ e}$$

$$(x, y, z) = ((-1)^{\phi(i+1)}x, (-1)^i y, (-1)^{\psi(i+1)}z) = (x, -y, -z)$$

Portanto, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

O quarto caso consiste em um ponto (x, y, z) que é invariante por uma $\frac{2\pi}{3}$ -rotação e uma π -rotação, então

$$(x, y, z) = ((-1)^{\phi(j+1)}x, (-1)^j y, (-1)^{\psi(j+1)}z) \text{ e}$$

$$(x, y, z) = ((-1)^i z, (-1)^{\psi(i)}x, (-1)^{\phi(i)+1}y)$$

Se j é ímpar, todos os termos se anulam. Suponha então que j seja par (por exaustão, já que estamos excluindo a identidade, $j = 2$). Portanto, $\phi(j+1) = \psi(j+1) = 1$. Logo,

$$(x, y, z) = ((-1)^{\phi(3)}x, (-1)^2 y, (-1)^{\psi(3)}z) = (-x, y, -z)$$

Portanto, $x = 0$ e $z = 0$. Como $y = (-1)^{\psi(i)}x$, segue que $y = 0$.

O quinto caso, que consiste em uma rotação r_i^2 e uma rotação t_j , reduz-se ao caso anterior, utilizando um argumento análogo ao segundo caso.

O sexto caso consiste em um ponto invariante pelas rotações r_i^2 , r_j^2 . Portanto, tal ponto é invariante pelas rotações r_i e r_j , reduzindo-se ao primeiro caso.

Como esgotam-se os casos, segue que o único ponto invariante por duas rotações distintas não-triviais é a origem. ■

Com isso, basta identificar os subgrupos que possuem duas rotações distintas para analisar a sua relevância no estudo de configurações. Entretanto, além dos subgrupos gerados por duas rotações, os subgrupos gerados por uma rotação-reflexão que estabiliza

dois pontos e por uma rotação também não trazem relevância. A demonstração deste fato segue o mesmo argumento da proposição anterior.

Portanto, os subgrupos relevantes no estudo dos tipos de Burnside são:

- $\langle \text{Id}_{S_4} \rangle = \langle () \rangle \simeq \{e\}$;
- $\langle (3\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (1\ 2), (1\ 3), (1\ 4) \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$;
- $\langle (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (2\ 3), (1\ 4)(2\ 3), (2\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$;
- $\langle (3\ 4), (2\ 3\ 4), (3\ 4), (1\ 3\ 4), (1\ 2), (1\ 2\ 3), (1\ 2), (1\ 2\ 4) \rangle \simeq S_3 \simeq D_3$;
- $\langle (3\ 4), (2\ 3\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 4)(2\ 3) \rangle = \langle (2\ 3\ 4), (1\ 2), (1\ 3)(2\ 4) \rangle \simeq \mathbb{T}_d$

APÊNDICE C - REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE

$$\mathbb{O}_h$$

Faremos um análogo ao do apêndice anterior para o grupo de simetrias do octaedro, que denotaremos por \mathbb{O}_h . Primeiramente, iremos explicitar as rotações de \mathbb{O}_h .

Considere o octaedro formado pelos vértices

$$(0, 0, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, 0, 0), (0, 0, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 0, 0), (0, \sqrt{2}, 0) \text{ e } (0, -\sqrt{2}, 0).$$

Se a matriz r_1 é uma $\frac{\pi}{2}$ -rotação ao longo do eixo z , então

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, resolvendo esses três sistemas lineares, temos que

$$r_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, se t_1 é uma $\frac{2\pi}{3}$ -rotação, então, usando um argumento análogo ao anterior, tem-se que

$$t_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por fim, se u_1 é uma π -rotação, então tem-se que

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

E por fim, podemos fixar a reflexão

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um ponto importante a ser destacado é que o grupo de simetrias do octaedro possui 3 elementos geradores, logo, é suficiente explicitar apenas seus geradores. Não havia necessidade, por exemplo, de exibir a rotação r_1 , afinal $r_1 = t_1^2 \cdot u_1$. Claramente, s não pode ser gerado por operações entre os demais elementos, pois $\det s = -1$ e $\det t_1 = \det r_1 = \det u_1 = 1$. Além disso, não podemos obter uma $\frac{2\pi}{3}$ -rotação a partir de uma π -rotação ou $\frac{\pi}{2}$ -rotação, pois utilizando graus ao invés de radianos, temos que $\text{mmc}(90^\circ, 120^\circ, 180^\circ) = 360^\circ \simeq 2\pi$, que corresponde à identidade. Conseqüentemente, podemos escrever tal grupo como

$$\mathbb{O}_h = \langle t_1, r_1, s \rangle.$$

Utilizaremos o mesmo método do apêndice anterior para verificar a relevância dos subgrupos no estudo de configurações. Note que o grupo \mathbb{O}_h é isomorfo ao subgrupo $H_{S_6} = \langle (\mathbf{2\ 3\ 4\ 5}), (\mathbf{1\ 2})(\mathbf{4\ 6}), (\mathbf{1\ 2\ 3})(\mathbf{4\ 5\ 6}) \rangle$ do grupo de permutações S_6 . O isomorfismo é dado pela aplicação $\phi : \mathbb{O}_h \rightarrow H_{S_6}$ tal que $\phi(r_1) = (\mathbf{2\ 3\ 4\ 5})$, $\phi(t_1) = (\mathbf{1\ 2\ 3})(\mathbf{4\ 5\ 6})$ e $\phi(s) = (\mathbf{1\ 2})(\mathbf{4\ 6})$.

```

1      R1 = matrix([[0, -1, 0], [1, 0, 0], [0, 0, 1]])
2      S  = matrix([[0, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 0, 0]])
3      T1 = matrix([[0, -1, 0], [0, 0, -1], [1, 0, 0]])
4
5      G = MatrixGroup(R1, S, T1)
6      H = G.as_permutation_group()
7      H.subgroups()
8

```

9 [Subgroup generated by $[(\)]$ of (Permutation Group with generators
 $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

10 Subgroup generated by $[(2,4)(3,5)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

11 Subgroup generated by $[(1,6)(3,5)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

12 Subgroup generated by $[(1,6)(2,4)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

13 Subgroup generated by $[(2,3)(4,5)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

14 Subgroup generated by $[(2,5)(3,4)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

15 Subgroup generated by $[(1,2)(4,6)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

16 Subgroup generated by $[(1,3)(5,6)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

17 Subgroup generated by $[(1,4)(2,6)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

18 Subgroup generated by $[(1,5)(3,6)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

19 Subgroup generated by $[(1,2)(3,5)(4,6)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

20 Subgroup generated by $[(1,3)(2,4)(5,6)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

21 Subgroup generated by $[(1,4)(2,6)(3,5)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

22 Subgroup generated by $[(1,5)(2,4)(3,6)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

23 Subgroup generated by $[(1,6)(2,3)(4,5)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

24 Subgroup generated by $[(1,6)(2,5)(3,4)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

25 Subgroup generated by $[(1,6)(2,4)(3,5)]$ of (Permutation Group with
generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

26 Subgroup generated by $[(3,5)]$ of (Permutation Group with generators
 $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

27 Subgroup generated by $[(2,4)]$ of (Permutation Group with generators
 $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

28 Subgroup generated by $[(1,6)]$ of (Permutation Group with generators

$[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$,

29 Subgroup generated by $[(1,2,3)(4,5,6)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

30 Subgroup generated by $[(1,5,2)(3,4,6)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

31 Subgroup generated by $[(1,3,4)(2,6,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

32 Subgroup generated by $[(1,5,4)(2,6,3)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

33 Subgroup generated by $[(3,5), (2,4)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

34 Subgroup generated by $[(3,5), (1,6)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

35 Subgroup generated by $[(2,4), (1,6)(2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

36 Subgroup generated by $[(3,5), (1,6)(2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

37 Subgroup generated by $[(2,4), (1,6)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

38 Subgroup generated by $[(2,4)(3,5), (1,6)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

39 Subgroup generated by $[(2,3,4,5), (2,4)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

40 Subgroup generated by $[(1,4,6,2), (1,6)(2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

41 Subgroup generated by $[(1,3,6,5), (1,6)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

42 Subgroup generated by $[(2,4)(3,5), (1,6)(2,5)(3,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

43 Subgroup generated by $[(1,2)(3,5)(4,6), (1,6)(2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

44 Subgroup generated by $[(1,5)(2,4)(3,6), (1,6)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

45 Subgroup generated by $[(2,4)(3,5), (1,6)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

46 Subgroup generated by $[(2,3)(4,5), (2,4)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

47 Subgroup generated by $[(1,4)(2,6), (1,6)(2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

48 Subgroup generated by $[(1,3)(5,6), (1,6)(3,5)]$ of (Permutation Group
with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

49 Subgroup generated by $[(2,4)(3,5), (1,6)(2,5,4,3)]$ of (Permutation
Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

50 Subgroup generated by $[(1,2,6,4)(3,5), (1,6)(2,4)]$ of (Permutation
Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

51 Subgroup generated by $[(1,5,6,3)(2,4), (1,6)(3,5)]$ of (Permutation
Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

52 Subgroup generated by $[(1,6)(2,4)(3,5), (1,6)(2,5)(3,4)]$ of (
Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)$
 $(4,5,6)]$),

53 Subgroup generated by $[(1,6)(2,3)(4,5), (1,6)(2,4)(3,5)]$ of (
Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)$
 $(4,5,6)]$),

54 Subgroup generated by $[(1,4)(2,6)(3,5), (1,6)(2,4)(3,5)]$ of (
Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)$
 $(4,5,6)]$),

55 Subgroup generated by $[(1,2)(3,5)(4,6), (1,6)(2,4)(3,5)]$ of (
Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)$
 $(4,5,6)]$),

56 Subgroup generated by $[(1,5)(2,4)(3,6), (1,6)(2,4)(3,5)]$ of (
Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)$
 $(4,5,6)]$),

57 Subgroup generated by $[(1,3)(2,4)(5,6), (1,6)(2,4)(3,5)]$ of (
Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)$
 $(4,5,6)]$),

58 Subgroup generated by $[(3,5), (1,2)(3,5)(4,6)]$ of (Permutation Group
with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

59 Subgroup generated by $[(3,5), (1,4)(2,6)(3,5)]$ of (Permutation Group
with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

60 Subgroup generated by $[(1,6), (1,6)(2,3)(4,5)]$ of (Permutation Group
with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

61 Subgroup generated by $[(2,4), (1,3)(2,4)(5,6)]$ of (Permutation Group
with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

62 Subgroup generated by $[(2,4), (1,5)(2,4)(3,6)]$ of (Permutation Group
with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

63 Subgroup generated by $[(1,6), (1,6)(2,5)(3,4)]$ of (Permutation Group
with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

64 Subgroup generated by $[(1,2,3)(4,5,6), (1,6)(2,4)(3,5)]$ of (
Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)$
 $(4,5,6)]$),

Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$,

65 Subgroup generated by $[(1,3,4)(2,6,5), (1,6)(2,4)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

66 Subgroup generated by $[(1,5,4)(2,6,3), (1,6)(2,4)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

67 Subgroup generated by $[(1,5,2)(3,4,6), (1,6)(2,4)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

68 Subgroup generated by $[(1,2)(3,5)(4,6), (1,5,4)(2,6,3)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

69 Subgroup generated by $[(1,3,4)(2,6,5), (1,5)(2,4)(3,6)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

70 Subgroup generated by $[(1,2,3)(4,5,6), (1,4)(2,6)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

71 Subgroup generated by $[(1,3)(2,4)(5,6), (1,5,2)(3,4,6)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

72 Subgroup generated by $[(1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

73 Subgroup generated by $[(1,4)(2,6), (1,5,4)(2,6,3)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

74 Subgroup generated by $[(1,5,2)(3,4,6), (1,5)(3,6)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

75 Subgroup generated by $[(1,3)(5,6), (1,3,4)(2,6,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

76 Subgroup generated by $[(3,5), (2,4)(3,5), (1,6)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

77 Subgroup generated by $[(3,5), (1,4,6,2), (1,6)(2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

78 Subgroup generated by $[(2,3,4,5), (2,4)(3,5), (1,6)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

79 Subgroup generated by $[(2,4), (1,3,6,5), (1,6)(3,5)]$ of (Permutation

Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$,

80 Subgroup generated by $[(3,5), (2,4)(3,5), (1,6)(2,5)(3,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

81 Subgroup generated by $[(3,5), (1,5)(2,4)(3,6), (1,6)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

82 Subgroup generated by $[(2,4), (1,2)(3,5)(4,6), (1,6)(2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

83 Subgroup generated by $[(2,3,4,5), (2,4)(3,5), (1,6)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

84 Subgroup generated by $[(2,4)(3,5), (1,4,6,2), (1,6)(2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

85 Subgroup generated by $[(2,4)(3,5), (1,3,6,5), (1,6)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

86 Subgroup generated by $[(3,5), (2,3,4,5), (2,4)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

87 Subgroup generated by $[(3,5), (1,3,6,5), (1,6)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

88 Subgroup generated by $[(2,4), (1,4,6,2), (1,6)(2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

89 Subgroup generated by $[(3,5), (1,2)(3,5)(4,6), (1,6)(2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

90 Subgroup generated by $[(2,4)(3,5), (1,6), (1,6)(2,5)(3,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

91 Subgroup generated by $[(2,4), (1,5)(2,4)(3,6), (1,6)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

92 Subgroup generated by $[(2,3)(4,5), (2,4)(3,5), (1,6)(3,5)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

93 Subgroup generated by $[(2,4)(3,5), (1,4)(2,6), (1,6)(2,4)]$ of (Permutation Group with generators $[(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]$),

(4,5,6)]),

94 Subgroup generated by [(2,4)(3,5), (1,3)(5,6), (1,6)(3,5)] of (Permutation Group with generators [(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]),

95 Subgroup generated by [(1,2,3)(4,5,6), (1,4)(2,6)(3,5), (1,6)(2,4)(3,5)] of (Permutation Group with generators [(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]),

96 Subgroup generated by [(1,2)(3,5)(4,6), (1,5,4)(2,6,3), (1,6)(2,4)(3,5)] of (Permutation Group with generators [(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]),

97 Subgroup generated by [(1,3)(2,4)(5,6), (1,5,2)(3,4,6), (1,6)(2,4)(3,5)] of (Permutation Group with generators [(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]),

98 Subgroup generated by [(1,3,4)(2,6,5), (1,5)(2,4)(3,6), (1,6)(2,4)(3,5)] of (Permutation Group with generators [(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]),

99 Subgroup generated by [(2,4)(3,5), (1,5,2)(3,4,6), (1,6)(3,5)] of (Permutation Group with generators [(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]),

100 Subgroup generated by [(3,5), (2,3,4,5), (2,4)(3,5), (1,6)(3,5)] of (Permutation Group with generators [(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]),

101 Subgroup generated by [(2,4), (2,4)(3,5), (1,4,6,2), (1,6)(2,4)] of (Permutation Group with generators [(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]),

102 Subgroup generated by [(3,5), (2,4)(3,5), (1,3,6,5), (1,6)(3,5)] of (Permutation Group with generators [(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]),

103 Subgroup generated by [(2,4)(3,5), (1,3,6,5), (1,5,2)(3,4,6), (1,6)(3,5)] of (Permutation Group with generators [(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]),

104 Subgroup generated by [(3,5), (2,4)(3,5), (1,5,2)(3,4,6), (1,6)(3,5)] of (Permutation Group with generators [(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]),

105 Subgroup generated by [(2,4)(3,5), (1,3)(5,6), (1,5,2)(3,4,6), (1,6)(3,5)] of (Permutation Group with generators [(2,3,4,5), (1,2)(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]),

106 Subgroup generated by [(3,5), (2,4)(3,5), (1,3,6,5), (1,5,2)(3,4,6), (1,6)(3,5)] of (Permutation Group with generators [(2,3,4,5), (1,2)

```
(4,6), (1,2,3)(4,5,6)]]]
```

107

Listagem 2: Código para listar os subgrupos de um subgrupo de S_6 isomorfo a \mathcal{O}_h .

O caso de \mathcal{O}_h é bem mais delicado devido à quantidade de subgrupos e seus diferentes geradores. A proposição B.1 também é válida em \mathcal{O}_h , mas será necessário verificar mais casos.

Trocando a linha

```
1 H.subgroups()
```

2

pela linha

```
1 [ {s,s.order()} for s in H ]
```

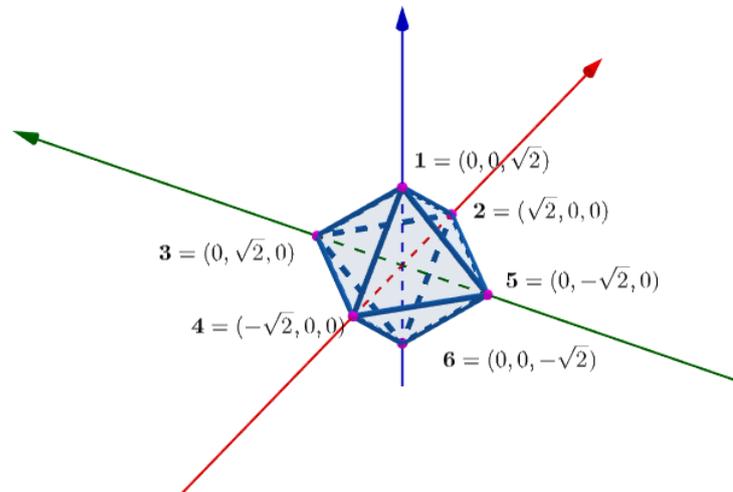
2

o SageMath nos retorna uma lista formada por pares onde a primeira entrada corresponde a um elemento de H_{S_6} e a segunda entrada sua respectiva ordem, que está listado abaixo.

```
1 [{(), 1},
2 {(2,4)(3,5), 2},
3 {(1,2,5)(3,6,4), 3},
4 {(1,2,3)(4,5,6), 3},
5 {(1,5,2)(3,4,6), 3},
6 {(1,5,4)(2,6,3), 3},
7 {(1,6)(3,5), 2},
8 {(1,6)(2,4), 2},
9 {(1,4,3)(2,5,6), 3},
10 {(1,4,5)(2,3,6), 3},
11 {(1,3,2)(4,6,5), 3},
12 {(1,3,4)(2,6,5), 3},
13 {(1,5,6,3), 4},
14 {(1,3)(2,4)(5,6), 2},
15 {(2,5,4,3), 4},
16 {(1,6)(2,3)(4,5), 2},
17 {(1,2)(3,5)(4,6), 2},
18 {(1,4)(2,6)(3,5), 2},
19 {(1,3,6,5), 4},
20 {(1,5)(2,4)(3,6), 2},
21 {(1,6)(2,5)(3,4), 2},
```

22 $\{(2,3,4,5), 4\},$
23 $\{(1,4,6,2), 4\},$
24 $\{(1,2,6,4), 4\},$
25 $\{(3,5), 2\},$
26 $\{(2,4), 2\},$
27 $\{(1,2,5,6,4,3), 6\},$
28 $\{(1,2,3,6,4,5), 6\},$
29 $\{(1,5,4,6,3,2), 6\},$
30 $\{(1,5,2,6,3,4), 6\},$
31 $\{(1,6), 2\},$
32 $\{(1,6)(2,4)(3,5), 2\},$
33 $\{(1,4,3,6,2,5), 6\},$
34 $\{(1,4,5,6,2,3), 6\},$
35 $\{(1,3,4,6,5,2), 6\},$
36 $\{(1,3,2,6,5,4), 6\},$
37 $\{(1,5)(3,6), 2\},$
38 $\{(1,3,6,5)(2,4), 4\},$
39 $\{(2,5)(3,4), 2\},$
40 $\{(1,6)(2,3,4,5), 4\},$
41 $\{(1,2)(4,6), 2\},$
42 $\{(1,4)(2,6), 2\},$
43 $\{(1,3)(5,6), 2\},$
44 $\{(1,5,6,3)(2,4), 4\},$
45 $\{(1,6)(2,5,4,3), 4\},$
46 $\{(2,3)(4,5), 2\},$
47 $\{(1,4,6,2)(3,5), 4\},$
48 $\{(1,2,6,4)(3,5), 4\}]$
49

Figura 23: Identificação dos pontos do tetraedro



Fonte: Autoria própria

Identificando os pontos do tetraedro como representado na figura 23, temos que as seis $\frac{\pi}{2}$ -rotações, que estabilizam dois pontos, são da forma $(\mathbf{X} \ \mathbf{Y} \ \mathbf{Z} \ \mathbf{W})$, onde $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}$. Assim como as oito $\frac{2\pi}{3}$ -rotações, que não estabilizam nenhum dos pontos mas permutam-nos três a três, são da forma $(\mathbf{X} \ \mathbf{Y} \ \mathbf{Z})(\mathbf{W} \ \mathbf{R} \ \mathbf{S})$.

Por outro lado, as π -rotações precisam ser divididas em duas classes. Há seis π -rotações, que não estabilizam nenhum ponto mas permuta-os dois a dois, que possuem forma $(\mathbf{X} \ \mathbf{Y})(\mathbf{Z} \ \mathbf{W})(\mathbf{R} \ \mathbf{S})$. Uma delas é representada na figura 21 pelo eixo verde. Em contrapartida, existem as π -rotações geradas pelo produto de duas $\frac{\pi}{2}$ -rotações iguais. Tais rotações são da forma $(\mathbf{X} \ \mathbf{Y} \ \mathbf{Z} \ \mathbf{W})(\mathbf{X} \ \mathbf{Y} \ \mathbf{Z} \ \mathbf{W}) = (\mathbf{X} \ \mathbf{Z})(\mathbf{Y} \ \mathbf{W})$.

Como existem reflexões $(\mathbf{X} \ \mathbf{Z})(\mathbf{Y} \ \mathbf{W})$, então iremos explicitar as π -rotações desta forma para não haver ambiguidade. Tais elementos são $(\mathbf{1} \ \mathbf{3} \ \mathbf{6} \ \mathbf{5})(\mathbf{1} \ \mathbf{3} \ \mathbf{6} \ \mathbf{5}) = (\mathbf{1} \ \mathbf{6})(\mathbf{3} \ \mathbf{5}) = (\mathbf{1} \ \mathbf{5} \ \mathbf{6} \ \mathbf{3})(\mathbf{1} \ \mathbf{5} \ \mathbf{6} \ \mathbf{3})$, $(\mathbf{2} \ \mathbf{3} \ \mathbf{4} \ \mathbf{5})(\mathbf{2} \ \mathbf{3} \ \mathbf{4} \ \mathbf{5}) = (\mathbf{2} \ \mathbf{4})(\mathbf{3} \ \mathbf{5}) = (\mathbf{2} \ \mathbf{5} \ \mathbf{4} \ \mathbf{3})(\mathbf{2} \ \mathbf{5} \ \mathbf{4} \ \mathbf{3})$ e $(\mathbf{1} \ \mathbf{4} \ \mathbf{6} \ \mathbf{2})(\mathbf{1} \ \mathbf{4} \ \mathbf{6} \ \mathbf{2}) = (\mathbf{1} \ \mathbf{6})(\mathbf{2} \ \mathbf{4}) = (\mathbf{1} \ \mathbf{2} \ \mathbf{6} \ \mathbf{4})(\mathbf{1} \ \mathbf{2} \ \mathbf{6} \ \mathbf{4})$. Adicionando a identidade, esgotamos todas as 24 rotações. Todas as reflexões são obtidas pela operação de uma reflexão s com uma rotação.

Portanto, verificando na lista os subgrupos com duas pelo menos duas rotações, os subgrupos normais e os subgrupos com planos de reflexão e rotações com interseção trivial, temos que os únicos subgrupos relevantes ao estudo do tipo de Burnside são

- $\langle (\) \rangle \simeq \{e\}$;
- $\langle (\mathbf{2} \ \mathbf{3})(\mathbf{4} \ \mathbf{5}) \rangle, \langle (\mathbf{2} \ \mathbf{5})(\mathbf{3} \ \mathbf{4}) \rangle, \langle (\mathbf{1} \ \mathbf{2})(\mathbf{4} \ \mathbf{6}) \rangle, \langle (\mathbf{1} \ \mathbf{3})(\mathbf{5} \ \mathbf{6}) \rangle, \langle (\mathbf{1} \ \mathbf{4})(\mathbf{2} \ \mathbf{6}) \rangle, \langle (\mathbf{1} \ \mathbf{5})(\mathbf{3} \ \mathbf{6}) \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$;

-
- $\langle (3\ 5), (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6) \rangle, \langle (3\ 5), (1\ 4)(2\ 6)(3\ 5) \rangle, \langle (1\ 6), (1\ 6)(2\ 3)(4\ 5) \rangle,$
 $\langle (2\ 4), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6) \rangle, \langle (2\ 4), (1\ 5)(2\ 4)(3\ 6) \rangle, \langle (1\ 6), (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4) \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2;$
 - $\langle (1\ 2)(4\ 6), (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6) \rangle, \langle (1\ 4)(2\ 6), (1\ 5\ 4)(2\ 6, 3) \rangle,$
 $\langle (1\ 5\ 2)(3\ 4\ 6), (1\ 5)(3\ 6) \rangle, \langle (1\ 3)(5\ 6), (1\ 3\ 4)(2\ 6, 5) \rangle \simeq S_3;$
 - $\langle (3\ 5), (1\ 4\ 6, 2), (1\ 6)(2\ 4) \rangle, \langle (1\ 6), (2\ 3\ 4\ 5), (2\ 4)(3\ 5) \rangle,$
 $\langle (2\ 4), (1\ 3\ 6, 5), (1\ 6)(3\ 5) \rangle, \langle (3\ 5), (2\ 3\ 4\ 5), (2\ 4)(3\ 5) \rangle,$
 $\langle (3\ 5), (1\ 3\ 6, 5), (1\ 6)(3\ 5) \rangle, \langle (2\ 4), (1\ 4\ 6, 2), (1\ 6)(2\ 4) \rangle \simeq C_4 \times \mathbb{Z}_2;$
 - $\langle (3\ 5), (2\ 4)(3\ 5), (1\ 3\ 6, 5), (1\ 5\ 2)(3\ 4\ 6), (1\ 6)(3\ 5) \rangle \simeq \mathbb{O}_h.$