UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

INVESTIGANDO AS COMPREENSÕES DO CONCEITO DE DERIVADA DE ESTUDANTES DO CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

LÁZARO RANGEL SILVA DE ASSIS

CARUARU, 2017

LÁZARO RANGEL SILVA DE ASSIS

INVESTIGANDO AS COMPREENSÕES DO CONCEITO DE DERIVADA DE ESTUDANTES DO CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Licenciatura em Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientadora: Kátia Silva Cunha
Coorientador: Marcos Luiz Henrique

CARUARU, 2017

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier CRB/4 - 1242

A848i Assis, Lázaro Rangel Silva de.
Investigando as compreensões do conceito de derivada de estudantes do curso de Matemática - Licenciatura. / Lázaro Rangel Silva de Assis. – 2017.
88f.; il. : 30 cm.

Orientadora: Kátia Silva Cunha.
Coorientador: Marcos Luiz Henrique
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2017.
Inclui Referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Derivadas. 3. Professores – formação. I. Cunha, Kátia Silva (Orientadora). II. Henrique, Marcos Luiz (Coorientador). III. Título.

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2017-454)

INVESTIGANDO AS COMPREENSÕES DO CONCEITO DE DERIVADA DE ESTUDANTES DO CURSO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA

LÁZARO RANGEL SILVA DE ASSIS

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA - Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e APROVADA em 13 de dezembro de 2017.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Marcos Luiz Henrique (Coorientador)

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

____

Prof. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho (Examinador(a) Interno(a))

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

____

Prof. Me. Elizabeth Lacerda Gomes (Examinador(a) Interno(a))

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

AGRADECIMENTOS

Por todos os lados que caminhei parecia que em certos momentos encontraria meu limite. Além disso, inúmeras indeterminações sugiram, mas através das derivações da vida consegui superá-las. Portanto, seguem os agradecimentos.

A Deus por ter me concedido a vida e pela força que sempre me proporcionou, permitindo superar todas as dificuldades antes e durante o curso.

Aos meus pais, Adriana Marques Silva de Assis e José Francisco de Assis, por estarem sempre ao meu lado me apoiando em todas as decisões e por entenderem minha constante ausência.

Aos meus orientadores, Kátia Silva Cunha e Marcos Luiz Henrique, pelos momentos de aprendizagem, por acreditarem em mim, pela dedicação e incentivo na construção deste trabalho.

A todos os professores do curso de Matemática-Licenciatura da UFPE-CAA, pela contribuição e orientação para minha formação acadêmica.

Ao meu amigo Filipe Gervásio, vulgo Mudo, pelas importantes e decisivas contribuições na etapa inicial dessa pesquisa.

A todos os estudantes que colaboram para que esse trabalho fosse efetivado.

A minha namorada Gilvaneide Evelyn, pelos momentos de felicidade que vem me proporcionando, por sempre me dar aquela palavra de força, incentivar nos momentos mais difíceis, por me suportar nos momentos de tensão e entender minha ausência nessa etapa final do curso. Obrigado por fazer parte da minha vida.

A todos os meus familiares, meus irmãos e cunhado, pela força e por acreditarem na minha escolha profissional. A família da minha namorada, pelo apoio e acolhimento.

Aos meus amigos e irmãos, Thiago Assis (Kinitos) e John Mateus, pelos momentos de aprendizagem e também de descontração que proporcionaram ao longo dessa jornada.

Em particular, ao meu amigo Washington Silva com quem tive a honra de dividir toda minha estadia em Caruaru-PE, pela ajuda, conselhos e incentivo durante a realização deste trabalho.

Aos meus colegas de curso, em especial, a Egon Martins, Josivânio Almeida, Jean Martins e Joelmir Moraes pelas parcerias e companheirismo em momentos decisivos do curso.

Por fim, a todas as pessoas que participaram diretamente e indiretamente dessa caminhada, o meu muito obrigado.

RESUMO

O conceito de derivada é fundamental na matemática e suas formas de compreensão tem implicação no entendimento de diversos problemas do cotidiano. Nesse sentido, o presente trabalho teve por objetivo investigar as compreensões sobre o conceito de derivada de função real de uma variável real, de estudantes universitários do curso de Matemática - Licenciatura. A pesquisa justifica-se pela importância do conceito de derivada e do questionamento de que há impasses no processo de ensino e aprendizagem deste conceito. O referencial teórico que tomamos como principal suporte foi a teoria da Imagem Conceitual e Definição Conceitual de Tall e Vinner (1981, 1991). Para obtenção dos dados elaboramos e aplicamos um questionário que explorava as diferentes formas de compreensão do conceito de derivada, a saber: participaram dezoito estudantes do curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco no Centro Acadêmico do Agreste. A análise dos dados revela um descompasso quanto à apreensão do conceito de derivada pelo grupo investigado, uma vez que mais da metade dos alunos estão abaixo da média de compreensões mobilizadas. Por ser um grupo de estudantes de diferentes períodos do Curso de Matemática, concluímos que estes podem ter vivenciado diferentes metodologias de ensino e também referências bibliográficas distintas.

Palavras-chave: Derivada de função; Compreensões do conceito de derivada; Imagem Conceitual; Definição Conceitual; Conhecimento de licenciandos.

ABSTRACT

The concept of derivative is fundamental in mathematics and its forms of understanding have implication in the understanding of several problems of daily life. In this sense, the present work aimed to investigate the understandings about the concept of real function derived from a real variable of university students of the course of Mathematics - Licenciatura. The research is justified by the importance of the concept of derivative and the questioning that there are deadlocks in the teaching and learning process of this concept. For this, the theoretical assumption of Thurston (1994) was assumed, according to which the concept of derivative can be understood in seven ways. The theoretical reference that we have taken as main support was the theory Conceptual Image and Conceptual Definition of Tall and Vinner (1981, 1991) and other works related to the apprehension of the concept of derivative. To obtain the data we developed and applied a questionnaire that explored the different ways of understanding the concept of derivative with eighteen students of the Mathematics - Licenciatura course of the Federal University of Pernambuco - CAA. The analysis of the data shows that all students have at least one way of understanding the concept of derivative and among the understandings mobilized by the students stand out the symbolic, geometric and rate of variation.

Keywords: Derivative function; Understandings of the concept of the derivative; Conceptual Image; Conceptual Definition; Graduating's' knowledge.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A disciplina Cálculo Diferencial e Integral está hoje presente no currículo de vários cursos superiores e o seu principal objetivo é proporcionar uma base para o entendimento de alguns fenômenos que são recorrentes das mais diversas áreas e ciências, tais como a Engenharia, Física, a Química, a Biologia, a Medicina, a Administração, a Astronomia, a Economia e, segundo a pesquisa de Catapani (2001), nota-se que até no curso de Geologia esta disciplina representa um papel fundamental, pois muitas outras necessitam dos conceitos básicos de derivadas e integrais.

Nessa perspectiva, como área específica da matemática, o Cálculo Diferencial e Integral representa um poderoso instrumento para o avanço científico e tecnológico, por desempenhar um papel extremamente importante nas mais diversas áreas do conhecimento, e por se apresentar como uma disciplina ampla e integradora que traz em seu bojo uma gama de conceitos de fundamental relevância para a formação do estudante em diferentes cursos universitários.

Em contrapartida, o ensino de Cálculo Diferencial e Integral tem se tornado alvo de diversas pesquisas nacionais e internacionais (CATAPANI, 2001; DALL'ANESE, 2000; D'AVOGLIO, 2001; ESCARLATE, 2008; GONÇALCES E REIS, 2013; IGLIORI, 2009; LIMA, 2012; MARTINS JÚNIOR, 2015; MEYER, 2003; PINTO, 2014; RAMOS, 2009; REIS, 2009; REZENDE, 2003; SILVA E BORGES NETO, 2011; VINNER, 1991; TALL E VINNER, 1981) no contexto da Educação Superior, tanto sobre questões referentes às dificuldades de aprendizagem dos conceitos que impossibilitam o avanço dos estudantes na disciplina quanto sobre metodologias que podem proporcionar uma aprendizagem efetiva. O grande número de pesquisas, segundo Igliori (2009), se justifica pelo fato do Cálculo ser um dos grandes responsáveis pelo insucesso dos estudantes e também por ser de fundamental importância na formação do pensamento avançado em matemática.

Diante desse cenário de pesquisas relacionadas à sala de aula universitária, é possível destacar inúmeras dificuldades concernentes ao processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, mais especificamente, de conceitos relativos a conteúdos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I. Em particular, essas pesquisas trazem questões relativas às compreensões sobre o conceito de derivada sob diferentes perspectivas e contextos, seja por tratarem dos processos de ensino e aprendizagem ou por tratarem de questões mais específicas, como alternativas de ensino que proporcionem uma melhor aprendizagem desse conceito.

Ao nos debruçarmos sobre as pesquisas realizadas por D'Avoglio (2002), Dall'anese (2000), Lima (2012), Meyer (2003) e Ramos (2009), é possível encontrar que para muitos estudantes a derivada de uma função é um resultado proveniente de um processo de operações algébricas, porém, não conseguem identificar os procedimentos necessários nem fazer uso do conceito para a resolução de um determinado problema de aplicação, ou ainda, não a interpretam como uma medida de variação, destacando uma aprendizagem mecanizada. Além disso, compreendem a derivada de uma função f como sendo a equação da reta tangente ao gráfico da função em um determinado ponto e, em alguns casos, não relacionam o coeficiente angular da reta tangente a uma curva $y = f(x)$ com a derivada da função no ponto de tangência. Esses dados indicam uma visão distorcida da derivada, apontando que os estudantes não estão estabelecendo uma compreensão conceitual adequada, o que pode ter sido acarretado pela ausência de relação entre as noções intuitivas e formais do conceito.

Tais estudos nos possibilitam refletir sobre a compreensão de alunos de um curso de Graduação em Matemática referente a um conhecimento específico da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I) e sobre os motivos que justificariam a não construção da aprendizagem de modo satisfatório. Este trabalho adota como núcleo as compreensões sobre derivada, através de questionamentos sobre os aspectos constituintes deste conhecimento, a saber, as diferentes maneiras que este conceito matemático pode ser compreendido, apontando para o seguinte problema de pesquisa: Quais as compreensões sobre o conceito de derivada de função real de um variável real de estudantes do curso de Matemática – Licenciatura?

Dessa forma, a ênfase deste trabalho recai sobre a investigação acerca do processo de construção do conhecimento no âmbito dos cursos de formação de professores, especificamente, no campo dos saberes docentes com foco na disciplina Cálculo Diferencial Integral I direcionada ao curso de Matemática – Licenciatura desenvolvido no Núcleo de Formação Docente-NFD do Centro Acadêmico do Agreste-CAA da Universidade Federal de Pernambuco.

Levando em consideração a importância do conceito de derivada de função e por acreditar que uma das possibilidades para que o seu processo de ensino e aprendizagem seja fortalecido é a exploração das diversas formas de compreensão deste conceito, o presente trabalho teve como objetivo geral *investigar as compreensões sobre o conceito de derivada de função real de uma variável real de estudantes universitários do curso de Matemática – Licenciatura*. De forma mais específica, os nossos objetivos foram:

- Investigar, em trabalhos já realizados, quais as dificuldades em relação à apreensão do conceito de derivada de função real de uma variável real;
- Elaborar/Aplicar um questionário que envolva as compreensões do conceito de derivada de função de uma variável real;
- Analisar as compreensões reveladas pelos estudantes com respeito ao conceito de derivada.

Para tanto, foi assumido o pressuposto teórico de Thurston (1994), segundo o qual partes específicas da matemática, como é o caso da derivada, pode ser compreendidas de maneiras diferentes: Infinitesimal, Simbólica, Lógica, Geométrica, Taxa, Aproximação e Microscópica. Segundo esse autor, processos de construção de um conceito matemático consistem em uma intricada articulação entre suas diferentes formas de compreensão.

Um estudo desta natureza, voltado para a sala de aula universitária, justifica-se, entre outras questões, pela importância do conceito de derivada e do questionamento de que há impasses no processo de ensino e aprendizagem desse conceito. Acrescenta-se a esses fatores os resultados de pesquisas, desde a década de 1990 (ZEICHNER E GORE, 1990; CAMARGO, 1998, *apud* FIORENTINI, 2005), que apontam que as disciplinas específicas influenciam mais na prática do futuro professor do que as didático-pedagógicas, acima de tudo, porque aquelas influenciam nos procedimentos internalizados desses estudantes durante o processo anterior de escolarização.

2 BREVE CENÁRIO DE PESQUISAS SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Lembrando que o nosso trabalho permeia a compreensão do conceito de derivada, este capítulo conta com uma breve revisão de literatura que se caracteriza como um pequeno aporte das pesquisas relacionadas ao ensino de Cálculo. Inicialmente buscamos trabalhos referentes ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral I, comumente denominado Cálculo I, em particular, no que se referia ao processo de ensino e aprendizagem de derivada. É possível perceber a partir desse primeiro levantamento que há grande preocupação dos pesquisadores da área no que se refere ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

As principais fontes de pesquisa foram o banco de teses e dissertações da CAPES; sites de revistas e periódicos nacionais e internacionais que tratam sobre a educação matemática; artigos e livros referentes à educação matemática no ensino superior. As palavras chaves utilizadas para essa pesquisa foram: Ensino e aprendizagem de Cálculo, Conceito de derivada, Compreensões do conceito de derivada, Imagem conceitual. Destacamos aqui algumas dessas pesquisas, que são de grande interesse para o nosso trabalho.

Ao discutirmos sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo, particularmente nos cursos de Matemática, algumas pesquisas como a de Silva e Borges Neto (1994) apontam inúmeros aspectos que ocasionam o insucesso dos estudantes. Entre eles, destaca-se a tradicional forma de ensino que ainda é muito praticada pelos professores responsáveis pela abordagem dos conteúdos em sala de aula. Segundo esses pesquisadores, essa prática “vem provocando conflitos no processo ensino-aprendizagem, principalmente na exposição de suas teorias, objetivos, conceitos e demais recursos dentro de uma óptica purista, ou seja, na preocupação de visualizá-la de forma ôntica” (SILVA E BORGES NETO, 1994, p. 1).

Compreendemos que a prática pedagógica pautada na reflexão e compreensão dos conceitos contribui efetivamente para um melhor desenvolvimento do pensamento matemático, principalmente nas diversas disciplinas de cursos universitários, cujo principal objetivo é a formação matemática dos estudantes. Dessa forma,

> Somente estabelecendo elementos que esclareçam a real função do Cálculo na formação matemática do estudante é que o professor terá condições de refletir sobre que objetivos traçar, que conteúdos estabelecer, que metodologias desenhar; enfim, que práticas pedagógicas desenvolver no ensino de tal conteúdo (REIS, 2009, p. 81).

Nessa mesma perspectiva, Reis (2009) critica o posicionamento dos professores ao lecionar a disciplina de Cálculo:

> Uma prática muito comum, entre os professores de Cálculo, é a de ministrar essa disciplina sempre da mesma forma (mesmos conteúdos, mesma metodologia, mesmos exemplos, mesmas aplicações, etc.), sem levar em consideração a natureza do curso (REIS, 2009, p. 81).

Ao pesquisar sobre o processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, Bezerra (2013) tinha por objetivo entender quais as principais dificuldades que impossibilitam a apreensão dos conceitos pelos alunos de graduação e que na maioria das vezes os levam ao fracasso nessa disciplina. Encontramos nesse estudo que as dificuldades de aprendizagem surgem, principalmente, quando o ensino se limita apenas aos métodos tradicionais, ou seja, quando se apresentam as definições, as fórmulas, alguns exemplos e por fim, listas de exercícios.

Podemos identificar na pesquisa realizada que as práticas docentes ancoradas na metodologia que valoriza o ensino tradicional[1] e a grande deficiência em relação aos conteúdos básicos, são fatores determinísticos do fracasso dos alunos. Bezerra (2013) dessa forma destaca a importância de inserir mudanças na forma de ensinar, visto que o Cálculo Diferencial e Integral é um dos cursos básicos de extrema importância e necessário para que o estudante tenha um bom desempenho em disciplinas posteriores.

Embora a componente curricular de Cálculo Diferencial e Integral, represente fundamental importância para o desenvolvimento de disciplinas destinadas aos cursos universitários que possuem determinadas finalidades profissionais, as dificuldades referentes ao seu ensino e aprendizagem têm ocasionado diversos problemas para os professores da disciplina e, principalmente, para os estudantes do curso de Matemática e dos demais cursos. “Os indicadores dessa problemática estão comprovados pelas taxas de reprovação, repetência e abandono da disciplina” (CABRAL E CATAPANI, 2003, *apud* ALMEIDA, FATORI E SOUZA, 2007, p. 3).

[1] O ensino tradicional baseia-se na exposição verbal da matéria e/ou demonstração. Tanto a exposição quanto a análise são feitas pelo professor, observados os seguintes passos: a) preparação do aluno; b) apresentação; c) associação; d) generalização; e) aplicação de exercícios. A ênfase nos exercícios, na repetição de conceitos ou fórmulas na memorização visa disciplinar a mente e formar hábitos (LIBÂNEO, 1992).

Almeida, Fatori e Souza (2007) ainda apontam que as dificuldades estão relacionadas com a não adequação dos conteúdos com a realidade dos estudantes e com uma metodologia baseada apenas em operações e no uso de algoritmos. De modo geral, independente do curso, a disciplina de Cálculo exige do aluno muito esforço e dedicação, porém este pode apresentar dificuldade no momento que necessita da exploração sobre determinados conceitos (RAMOS, 2009).

Assim, compreendemos que cada curso específico ao utilizar o Cálculo Diferencial sob uma perspectiva de aplicação e como forma de representação de um objeto matemático, exige do professor uma prática metodológica diferenciada, tal que garanta não apenas uma melhor compreensão dos conceitos, mas também o desenvolvimento das ideias do Cálculo que estejam atreladas ao contexto profissional do curso.

As aplicações e as mais variadas formas de compreensão dos conteúdos do Cálculo podem ser extremamente úteis e agradáveis para os estudantes, podendo até servir como maneiras de motivação e desencadear o interesse pela disciplina. Para Silva e Borges (1994), quando os estudantes relacionam os conteúdos com situações concretas e vivenciadas em sua vida acadêmica, o nível de interesse é maior, proporcionando melhor compreensão dos conceitos trabalhados, fazendo assim com que as habilidades se desenvolvam mais rapidamente.

Catapani (2001, p. 5) ao realizar entrevistas com professores de disciplinas específicas do curso de Geologia, destaca a relação existente entre a disciplina de Cálculo e as disciplinas do curso,

> De acordo com esses professores, embora o aluno de curso de Geologia, na maioria das vezes, não tenha consciência da importância e da necessidade da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, ela se faz muito importante como linguagem e como instrumento na resolução dos problemas da área. Técnicas de derivada e integral, segundo afirmam, são de grande utilidade nas várias disciplinas, e estão presentes no desenvolvimento e no entendimento dos processos, isso tudo, além de considerar o processo de quantificação, cada vez mais necessário na área em questão.

Desse modo, é relevante que o professor, independente do curso que os alunos estão inseridos, mostre a importância da disciplina, propondo atividades em que utilize as diferentes maneiras de compreensão e aplicação dos conceitos. Segundo Gonçalves e Reis (2013, p. 423), “se o aluno possui o domínio das diversas formas de representação de um objeto matemático, ele pode optar pelo mais adequado na resolução de um problema proposto”.

Partindo desse ponto de vista, ao considerar a importância do ensino de Cálculo Diferencial e Integral I, inevitavelmente, somos levados a refletir sobre o ensino e aprendizagem da derivada como um dos tópicos principais desta disciplina para o entendimento de problemas e fenômenos de várias áreas do conhecimento.

2.1 Aspectos sobre o ensino e aprendizagem do conceito de derivada

A derivada de uma função é parte integrante dos cursos de Cálculo I e comumente é abordado após a exploração sobre o conceito de limite e continuidade. Em diversos casos é utilizada, inicialmente, a ideia de reta tangente a um ponto do gráfico de uma função para introduzir a derivada e, consequentemente, é abordado o seu cálculo por meio da definição como um limite e das regras de derivação, sendo que estes dois últimos casos chamam mais a atenção do professor e dos alunos. Em seguida, consiste em estudar algumas aplicações da derivada: velocidade e aceleração, taxas de variação, problemas de otimização (máximos e mínimos), bem como o estudo do comportamento de funções (crescente e decrescente) e esboço de gráficos (LIMA, 2012).

Sabemos que no decorrer da disciplina o estudo de processos algorítmicos e fórmulas ajudam a resolver certos tipos de problemas, porém isso faz com que o aluno recorra a meios mecânicos que, na maioria das vezes, não demandam um entendimento conceitual do conteúdo estudado. Nessa perspectiva, Meyer (2003) aponta que no ensino do Cálculo é comum que os estudantes apresentem bons resultados na realização de tarefas relacionadas aos aspectos operatórios e resultados menos satisfatórios se essas tarefas envolvem aspectos conceituais. Diante disto, a autora objetiva investigar elementos da imagem conceitual e definição conceitual relativos ao conceito de derivada quando interpretado geometricamente.

Entre os principais resultados encontrados, destacam-se: interpretação da equação da reta tangente ao gráfico da função f como sendo a função derivada de f; interpretação da derivada da função f no ponto de abscissa $x = a$ como sendo a ordenada b do ponto (a, b) no qual a reta tangencia o gráfico da função f; existência de sujeitos que verbalizam uma definição conceitual relativa ao conceito de derivada cujos elementos estão coerentemente relacionados com a "definição geométrica", mas ignorada por eles no momento da elaboração das respostas às questões propostas (MEYER, 2003).

É evidente que os aspectos que levam à compreensão de um conceito matemático, estão intrinsecamente associados ao estabelecimento de conexões entre as diversas partes e área de um conhecimento matemático relacionado a este conceito. Acrescentamos ainda, que possíveis concepções construídas sobre derivadas pelos alunos que já cursaram o Cálculo I e II, podem depender dos recursos utilizados pelos professores das disciplinas (MEYER, 2003).

Em um estudo realizado por Leme e Igliori (2016), buscou-se mostrar elementos históricos, a definição e algumas referências de natureza conceitual acerca dos aspectos processuais e estruturais da derivada em suas diferentes representações: numérica, gráfica e simbólica. Através da história, os autores evidenciam os entraves enfrentados pela sociedade matemática para conceber as definições da derivada; com a definição, buscaram compreender seu caráter conceitual e, por fim, apresentam uma categorização das diferentes representações desse conceito sobre a ótica do processo da aprendizagem. Dentre os resultados encontrados, destacou-se que o estudo da derivada quando aborda diferentes representações leva em conta o objeto matemático e, dessa forma, apresenta algumas limitações. Segundo os autores, isto pode ser devido ao fato de que, em seu aspecto simbólico, ela pode ser pensada derivada, no aspecto simbólico, ser pensada como um resultado obtido através de um processo de manipulações algébricas e, além disso, por ser tratada numa estrutura composta por provas e demonstrações.

Concebemos que a derivada é um dos conceitos fundamentais do Cálculo. Entretanto, ensiná-lo através de um conjunto de regras, operações e algoritmos, impossibilita ao aluno um melhor entendimento sobre seus significados e aplicações. Referenciado nessa forma de ensino,

> Quando um estudante associa a aplicação de regras e procedimentos ao conceito de derivada, o que é bastante frequente em nossos cursos de Cálculo, tal processo de significação não o impede de ter sucesso na realização de tarefas ditas operatórias, mas pode contribuir para o insucesso na realização de tarefas que envolvam aspectos conceituais (MEYER, 2003, p.4).

Além disso, podemos observar que

> Calcular exaustivamente derivadas de funções através das regras usuais de derivação não leva o aluno a construir efetivamente o significado desta operação. Interpretá-la tão somente como "coeficiente angular da reta tangente" significa ignorar o problema histórico essencial da "medida" instantânea da variabilidade de uma grandeza – esse foi inclusive, o grande problema perseguido inicialmente pelos filósofos escolásticos.
>
> Com efeito, derivada, é, sobretudo, taxa de variação instantânea. A interpretação geométrica não esgota completamente a ideia essencial de derivada; existe todo um

> campo de significações importante para a tecedura da noção de derivada: pensar velocidade instantânea como coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $S = S(t)$ é consequência, e não causa, da ação de interpretá-la como limite de velocidades médias, quando fazemos cada vez mais próximo de zero. Na verdade ambas as interpretações se complementam e contribuem para a significação do conceito de derivada. Eximir a interpretação dinâmica do conceito de derivada é, além de um contrassenso histórico, um atentado ao seu próprio significado (REZENDE, 2003, p. 350 - 351).

Algumas pesquisas, tais como Dall'Anese (2000), Meyer (2003), Ramos (2009), Lima (2012), apontam que os significados do conceito de derivada não são compreendidos pela maioria dos alunos do curso de Matemática, visto que eles, predominantemente, não conseguem resolver problemas nos quais as soluções necessitam não apenas de manipulações algébricas, mas também de uma compreensão mais ampla do conceito e das suas diversas formas de representação.

Nesse sentido, nota-se que a abordagem tradicional e mecânica do conceito de derivada, além de contribuir para o desenvolvimento de um ensino que se preocupa apenas com a transmissão de conteúdo, não promove uma aprendizagem efetiva, pois tira do aluno a oportunidade de perceber, diante de situações problemas, significados que dificilmente seriam possíveis sem um domínio conceitual das formas de compreensão da derivada.

O fato de a derivada ser definida como um limite pode ser considerado como outro obstáculo para a aprendizagem desse conceito, devido às dificuldades na aprendizagem de limites, acarretando dessa forma, dificuldades no entendimento da própria derivada (GONÇALVES E REIS, 2013).

A abordagem do conceito de derivada feita apenas através da sua definição formal, a partir de limite, não permite ao aluno entender o seu significado de forma eficaz. O recomendável é que haja antes uma familiarização, ou seja, para que aconteça a compreensão absoluta do conceito e sua definição fique efetivamente entendida é preciso muito mais do que somente a sua definição formal.

D'Avoglio (2002) com o objetivo de verificar qual era o conhecimento sobre o conceito de derivada de alunos que já haviam estudado esse conteúdo, identificou, através de um teste de sondagem, que alguns alunos confundem:

a) **derivada** com **reta tangente**;
b) **derivada num ponto** com a **função derivada**;
c) **derivada** com **regra para se achar derivada**;

> d) **reta tangente** com **coeficiente angular da reta tangente** e também, que muitos apresentam **dificuldade de expressão** (D'AVOGLIO, 2002, p. 27, grifos do autor).

Desse modo, podemos perceber que os problemas de aprendizagem relacionados ao conceito de derivada representam um sério impasse para o avanço do estudante, tanto no Cálculo Diferencial e Integral, quanto em outras disciplinas que utilizam esse conceito como ferramenta de estudo.

Segundo Almeida, Fatore e Souza (2007, p.4), "nas aulas de Cálculo os conteúdos são apresentados aos alunos como um saber já construído, sem lugar para a intuição, experimentação ou descoberta e perante o qual não é possível a argumentação". Sendo assim, o aspecto que pode influenciar a dificuldade de aprendizagem é a limitação de seu ensino, que muitas vezes fica restrito à apenas algumas formas de representação, tais como sua definição formal e aplicação de regras de derivação, impossibilitando o aluno a realizar ações e reflexão e notar que a sua formalização é algo natural e necessário para a obtenção de resultados.

Idealizamos, dessa forma, uma prática de ensino que destaque a importância sobre o entendimento das diversas formas de representação e aplicação da derivada, assim, como defende Amit e Vinner (1990) citado por Meyer (2003, p. 3) ao afirmarem que:

> O conceito de derivada é especialmente importante. Se este conceito não é bem entendido, então suas relações com velocidade, taxa de variação, etc. não podem ser entendidas nas Ciências Naturais, e suas relações com o conceito de Valor Marginal não podem ser entendidas na Economia e na Administração de Negócios.

Desse modo, consideramos que umas das maneiras de amenizar os problemas de entendimento da derivada é o desenvolvimento de metodologias que valorizem as suas diversas formas de compreensão e aplicação, pois acreditamos que desse modo o estudante poderá assimilar os significado, atribuir sentido ao conceito e usá-lo em situações quando for necessário.

Diante desse cenário de pesquisas relacionadas ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral, podemos constatar a necessidade de se buscar "sistemas de instruções"- desenvolver metodologias capazes de propiciar uma melhor construção do conhecimento, em particular, do conceito de derivada, de modo que possa minimizar alguns conflitos no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo. Além disso, ressaltamos que essas metodologias sejam inovadoras de ensino, capazes de reduzir a ausência de conexões entre o conhecimento prévio do aluno e os conceitos do Cálculo Diferencial e integral.

Tratando-se da construção do conhecimento matemático, Thurston (1994) em seu artigo intitulado *Sobre a prova e o progresso matemático* tem como objeto de pesquisa o progresso do conhecimento matemático através da prova. Neste, o autor busca estabelecer uma comparação de como a matemática é estabelecida pelos matemáticos e a natureza da prova e do progresso em matemática. Em sua análise, são apresentados inicialmente alguns questionamentos sobre o que realizam os matemáticos, destacando-se que a compreensão conceitual formal não se trata de uma forma única de acesso ao conhecimento matemático, mas sim de um processo que depende exclusivamente do indivíduo e de fatores internos a ele, do qual nos damos conta o quanto é difícil entender e transmiti-lo e, muitas vezes, nos leva a tratarmos tal conhecimento superficialmente.

Para Thurston (1994, p.5), "existem diferentes maneiras de compreender partes específicas da Matemática". Nesse sentido, o autor traz como exemplo um conceito, o qual os matemáticos compreendem de inúmeras formas, porém, se apresenta como um elemento de difícil compreensão por parte dos estudantes: "a derivada de função real de uma variável real". Segundo o autor, essa pode ser vista como: *Infinitesimal, Simbólica, Lógica, Geométrica, Taxa de variação, Aproximação, Microscópica.*

Num estudo realizado sobre como estão sendo ensinados e compreendidos por estudantes no ensino médio e na universidade os conceitos de *limite* e *continuidade*, Tall e Vinner (1981) definem *Imagem conceitual* como sendo a estrutura cognitiva que inclui todas as imagens mentais, processos e propriedades associados a um conceito. Nesse sentido, podemos identificar que as diferentes formas de se pensar e/ou de conhecer o conceito de derivada expostas por Thurston (1994) podem ser entendidas como parte da imagem conceitual de estudantes. Como ressalta Meyer (2003):

> [...] podemos supor a existência de uma ampla diversidade de representações visuais, imagens mentais e coleções de impressões e experiências relativas ao conceito de derivada, constituindo a imagem conceitual a ser investigada em alunos que já cursaram as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e II. (p. 9).

Referenciando-se nos trabalhos mencionados, destacamos que o conceito de derivada traz em seu bojo uma considerável gama de significados e propriedades que podem compor a imagem conceitual de um estudante. Além disso, podemos conjecturar que a compreensão desse conceito vai além do que já trazemos de conhecimento relacionado a ele e segue uma lógica a qual o sujeito constrói através de um grande esforço mental para que depois as imagens formadas se transformem ou não em definições formais, claras e precisas.

Em suma, entender os processos que levam o estudante a ter acesso à noção de derivada é entender se ele tem ou não familiaridade com as diferentes compreensões do conceito e se consegue utilizá-las quando são necessárias.

3 COMPREENSÕES SOBRE O CONCEITO DE DERIVADA

Para um melhor entendimento sobre o conceito de derivada abordaremos nesse capítulo as formas de compreensão consideradas por Thurston (1994) e algumas relações entre elas, destacando a importância de uma visão mais ampla e significativa desse conceito para o ensino.

Quando é apresentado o conceito de derivada de uma função real de uma variável real nos cursos de Cálculo I, entende-se que o conceito de limite já foi explorado, que os estudantes conseguem resolver alguns problemas elementares, em especial, aqueles que envolvem uma indeterminação $\frac{0}{0}$, e que possuem, principalmente, uma razoável compreensão conceitual. Diante do exposto, temos as seguintes definições.

Definição 1. Seja f uma função definida em algum intervalo aberto contendo um ponto a, exceto possivelmente, no próprio número a. Dizemos que um número real L é *limite* de $f(x)$ quando x tende a a e, escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = L$, quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$ (LEITHOLD, 1994).

Apresentando de forma mais simples, Lima (2014) destaca que a expressão $\lim_{x\to a} f(x) = L$ quer dizer que podemos tornar os valores $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, desde que seja x suficientemente próximo, porém diferente, de a.

Definição 2. Seja f uma função definida em algum intervalo aberto e a um ponto em que f seja definida. A derivada da função f no ponto a, denotada por $f'(a)$, é dada por $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, desde que esse limite exista.

Além disso, quando existe a derivada $f'(x)$ em todos os pontos x do intervalo dizemos que a função f é derivável nele.

Da definição de derivada, se tomarmos $\Delta x = x - a$, teremos que Δx tende a 0 quando x tende a a. Assim, a **Definição 2** é equivalente a:

Definição 3. A derivada da função f no ponto a é dada por $f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$, desde que esse limite exista.

A partir dessa definição, se trocarmos o ponto a pela variável x e supormos que fé derivável em todo o domínio, obtemos uma definição geral para derivada de uma função em um valor arbitrário x de seu domínio:

Definição 4. A derivada de uma função f é a função denotada por f', tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, desde que esse limite exista (LEITHOLD, 1994).

A partir das definições de derivada, destacaremos a seguir as compreensões desse conceito segundo Thurston (1994).

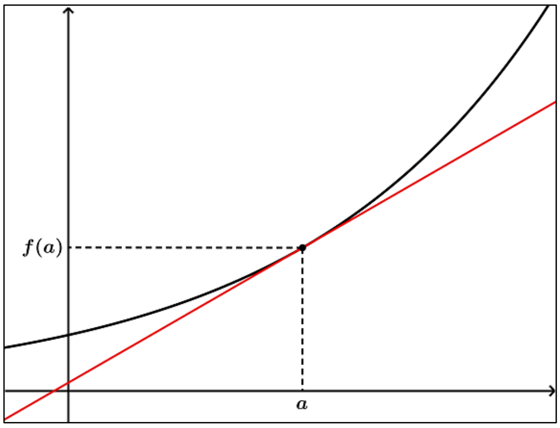
3.1 Lógica

Podemos justificar a ideia defendida por Thurston (1994) de que a derivada tem sentido lógico ao argumentar que "$f'(x) = d$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que quando $0 < |\Delta x| < \delta$, $|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - d| < \varepsilon$, visto que esta sentença decorre da definição de limite de uma função apresentada anteriormente.

3.2 Geométrica

A ideia principal da derivada no Cálculo Diferencial surge no contexto de como encontrar o coeficiente angular m para uma reta tangente ao gráfico de um função f sabendo apenas as coordenadas do ponto de tangência $(a, f(a))$, como segue na Figura 1.

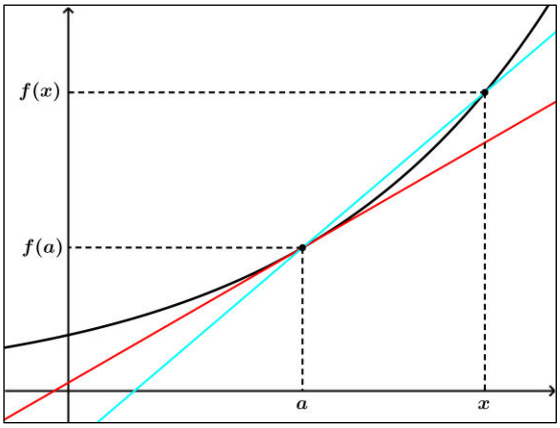
FIGURA 1: RETA TANGENTE AO GRÁFICO DE f EM $(a, f(a))$



FONTE: O autor (2017).

Para resolver o problema da reta tangente, tomaremos uma segunda reta, uma reta secante, que passe por $P(a, f(a))$ e por outro ponto qualquer do gráfico de f, porém, distinto do ponto de tangência, conforme a Figura 2. Chamaremos esse ponto de $Q(x, f(x))$.

FIGURA 2: RETA SECANTE AO GRÁFICO DE f



FONTE: O autor (2017).

Sabemos que a inclinação (coeficiente angular) da reta secante m_s é dada por:

$$m_s = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \qquad x \neq a.$$

Note que à medida que fizermos o ponto x se aproximar do ponto a a reta secante tenderá para a posição da reta tangente (Figura 2). É importante destacar que x pode assumir valores maiores e menores que a.

Assim, para valores de x muito próximo de a, é evidente esperar que o coeficiente angular da reta secante fique cada vez mais próximo do coeficiente angular da reta tangente. Então, dizemos que a inclinação m da reta tangente ao gráfico de f no ponto P será obtida pela inclinação limite quando x tende a a ($x \to a$), ou seja, é dada por:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Dessa forma, quando interpretada geometricamente, a noção de derivada de uma função f num ponto a pode ser compreendida como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$, ou seja, $f'(a) = m$.

3.3 Infinitesimal

Do ponto de vista numérico, o método apresentado na Figura 2 para obter o coeficiente angular da reta tangente, mostra que a derivada, caso exista, se baseia no quociente de quantidades cada vez mais próximas de zero.

Para esclarecer melhor essa situação, voltamos às considerações realizadas anteriormente a respeito de $\Delta x = x - a$. Esse número, segundo Ávila (2014), é o incremento/acréscimo dado a a para obter $x = a + \Delta x$. Assim, se variarmos a de uma quantidade Δx, temos que a variável $y = f(x)$ pode sofrer uma variação $\Delta y = \Delta f(x) = f(a + \Delta x) - f(a)$ de modo que obtemos o quociente

$$\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Portanto, supondo que a derivada existe, quando fazemos $\Delta x \to 0$, temos que $\Delta y = \Delta f(x)$ também tende a zero, fazendo com que o quociente se aproxime da derivada. Ávila (2014) destaca que no entender de Leibniz, ao tomar o quociente entre as diferenças Δy e Δx para valores muito próximos de zero, porém com $\Delta x \neq 0$, pois neste caso, teríamos uma indeterminação $\frac{0}{0}$, estamos nos aproximando de forma infinitesimal de zero em ambos. Por essa razão, também é comum considerar a derivada como o quociente de quantidades infinitesimais como ressalta Thurston (1994, p.5), ao afirmar que a compreensão infinitesimal da derivada é "A razão da variação infinitesimal do valor da função para uma variação infinitesimal da variável".

3.4 Taxa de variação

Conforme Lima (2012), o Cálculo Diferencial e Integral surgiu como uma excelente ferramenta matemática para resolver uma ampla categoria de problemas relacionados à variação de grandezas. Um dos primeiros problemas de taxa de variação consistia em determinar a velocidade de um corpo em movimento quando apenas se conhecia a posição do corpo em cada instante.

Se considerarmos a variável x como o tempo e f como a função que mede o deslocamento de um objeto móvel no instante x, então o quociente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ é a *velocidade média* desse objeto no intervalo de tempo percorrido entre os instantes a e x.

Suponhamos que queremos calcular a velocidade v do objeto no instante a e não em um intervalo de tempo. Para resolver tal problema, fixamos inicialmente o tempo a e tomamos valores para x próximos de a, fazendo com que os intervalos de tempo se tornem cada vez menores, ou seja, de modo que o comprimento do intervalo seja tão pequeno quanto se queira, como segue na tabela a seguir.

TABELA 1: APROXIMAÇÃO DO INSTANTE a

Valores x menores que a		Valores x maiores que a	
a	x	a	x
a	$a-1$	a	$a+1$
a	$a-0{,}5$	a	$a+0{,}5$
a	$a-0{,}2$	a	$a+0{,}2$
a	$a-0{,}1$	a	$a+0{,}1$
a	$a-0{,}01$	a	$a+0{,}01$
a	$a-0{,}001$	a	$a+0{,}001$
a	$a-0{,}0001$	a	$a+0{,}0001$
a	$a-0{,}00001$	a	$a+0{,}00001$
a	$\vdots$	a	$\vdots$

FONTE: O autor (2017).

A velocidade que procuramos no instante a será obtida por: $v(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, desde que o limite exista.

Segundo Lima (2014), a interpretação desse limite, no contexto acima, é considerada como a velocidade instantânea do móvel no instante $x = a$. Em geral, consideremos este limite como a *taxa de variação instantânea* da função f em $x = a$. Por este motivo, é usual utilizar o termo “taxa de variação instantânea” para fazer menção à derivada da função f no ponto a e nos leva a definição a seguir.

Definição 4. Seja f uma função e a um ponto de seu domínio. Dizemos que a taxa de variação instantânea de $y = f(x)$ por unidade de x em a é $f'(a)$ ou, equivalente, a derivada de y em relação a x em a.

Vale ressaltar que essa interpretação da derivada apresenta uma fundamental importância em diversos campos das ciências, tais como física, biologia, química, economia, entre outros. Com efeito, para Leithold (1994):

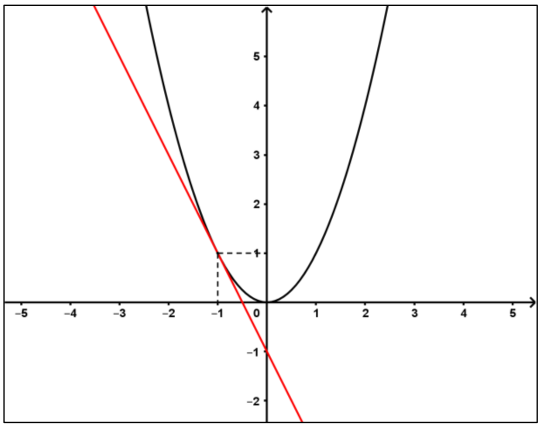
> [...] em Física, a velocidade no movimento retilíneo é definida em termos de uma derivada, pois é a medida da taxa de variação da distância com relação ao tempo. A taxa decrescimento de bactérias é uma aplicação da derivada em Biologia. A taxa de variação de uma reação química é um tópico de interesse para um químico. Os economistas estão preocupados com conceitos marginais tais como a receita marginal. O custo marginal e o lucro marginal, que são taxas de variação. (p. 138-139).

Portanto, é indispensável o trabalho com problemas que explore essa compreensão, pois ela pode ajuda a interpretar inúmeros problemas que podem surgir no dia a dia.

3.5 Aproximação

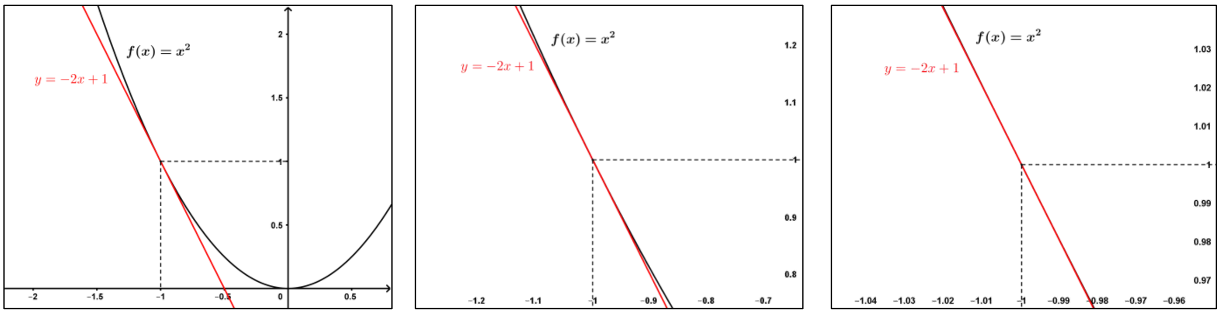
Podemos observar na Figura 3 que a reta tangente à curva $y = x^2$ parece se "confundir" com o gráfico da função nas proximidades do pondo de tangência $(-1,1)$. Com efeito, é evidente que para um vizinhança do ponto $x = -1$, os valores de y ao longo da tangente nos fornecem uma boa aproximação para os valores de y na curva. Na Figura 4 podemos notar esse fenômeno ampliando os dois gráficos no ponto de tangência

FIGURA 3: RETA TANGENTE AO GRÁFICO DE $f(x) = x^2$ EM $(-1,1)$



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 4: AMPLIAÇÃO DOS GRÁFICOS NO PONTO $(-1,1)$



(a) (b) (c)

FONTE: O autor (2017).

Esse fato notável ocorre devido à reta tangente ser a melhor aproximação ao gráfico de uma função f nas proximidades de um ponto a de seu domínio. Em outras palavras: se a função for derivável em um ponto a, então é possível aproximá-la pela equação da reta tangente para valores de x próximos de a (BORTOLOSSI, 2002). Essa aproximação é o que chamamos de *Aproximação Linear* e escrevemos que $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$. Além disso, a função linear dada por

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é o que chamamos de *linearização* da função f em a.

Thomas (2009) destaca que em alguns problemas, principalmente aqueles que não são lineares, é necessário aproximar funções complicadas usando funções mais simples que possibilitem a precisão desejada para situações específicas. Essas funções, além de serem mais fáceis de trabalhar, simplificam a resolução de um dado problema não linear, o que destaca a derivada como uma excelente ferramenta.

Diante dessa abordagem podemos evidenciar a importância da derivada para resolução de diversos problemas, visto que, “uma das técnicas mais importantes em Matemática consiste em linearizar, ou seja, substituir umas funções por outras que “aproximem” a dada função e que sejam lineares” (D’AMBROSIO, 1975, p. 27 apud LIMA, 2012, p. 46).

3.6 Microscópica

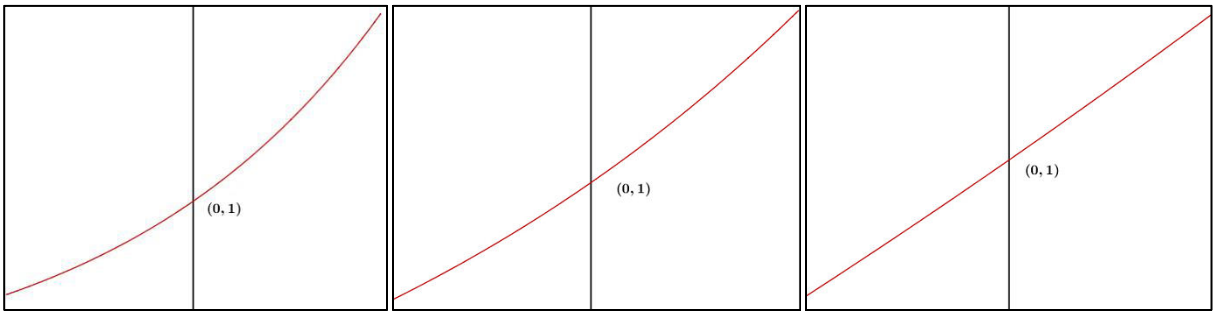
É possível notar através da Figura 4 que quanto mais ampliamos o gráfico de uma função próximo ao ponto de tangência, mais ele se assemelha à reta. Veremos adiante que esta intepretação também nos possibilita estimar o valor da derivada em um determinado ponto conhecendo apenas o seu gráfico ou, em alguns casos, quando não dispomos de ferramentas suficientes para calcular o limite do quociente presente na definição de derivada. Apresentaremos uma situação encontrada na obra de Stewart (2006) que nos permite um melhor entendimento sobre esses aspectos.

Considere a função $f(x) = 2^x$. Na Figura 5 segue o gráfico da curva. Ao dar um "zoom" em direção ao ponto $(0,1)$ podemos notar que quanto mais próximo estivermos de $(0,1)$, mais a curva se parecerá com uma reta. Com efeito, observe que na Figura 5(c) a curva é praticamente indistinguível de sua reta tangente em $(0,1)$. Como a escala utilizada para x e y é 0,01, estimaremos que a inclinação para essa reta é

$$\frac{2^{0,1} - 2^{-0,1}}{0,1 - (-0,1)} = \frac{0,14}{0,20} = 0,7.$$

Assim, uma estimativa para a derivada da função $f(x) = 2^x$ em $x = 0$ é $f'(0) \approx 0,7$.

FIGURA 5: "ZOOM" NO GRÁFICO DA FUNÇÃO f NAS PROXIMIDADES DO PONTO (0,1)



(a) $[-1, 1]$ (b)$[-0,5, 0,5]$ (c) $[-0,1, 0,1]$

FONTE: O autor (2017).

Nesse sentido, Stewart (2006, p.172) afirma: "Se f for derivável em a, então, se dermos um "zoom" em direção ao ponto $(a, f(a))$, o gráfico vai se endireitando e se parecerá cada vez mais com uma reta". Assim, se dispusermos de microscópios ou ferramentas computacionais que no permitam ampliar o gráfico de uma curva $y = f(x)$ nas proximidades de um ponto o tanto que se queira, podemos obter uma melhor estimativa para derivada. Esse método é o que nos permite afirmar que "A derivada de uma função é o limite que se obtém olhando-a com microscópios cada vez mais poderosos" (THURSTON, 1994, p.5).

3.7 Simbólica

Quando falamos do conceito de derivada somos levados a falar sobre uma considerável gama de propriedades e processos relativos a ele. Alguns autores, como Leithold (1994, p. 133), afirmam que “a derivada é calculada pela operação de derivação, principalmente com o auxílio de teoremas que ajudam no cálculo de funções algébricas”. Não pretendemos aqui explorar todas as regras de derivações que são comumente encontradas em diversos livros e cursos de Cálculo, mas sim destacar um dos processos que pode ser desenvolvido através da definição da derivada e que trata de elementos simbólicos.

Em termos simbólicos temos as seguintes notações para derivada de uma função f em um ponto a: $f'(a)$, $\frac{df}{dx}(a)$, $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$, $Df(a)$. Os símbolos D e $\frac{d}{dx}$ indicam a operação de *diferenciação* e são chamados de *operadores diferenciais.* Vale ressaltar que a fórmula do limite presente na definição do conceito de derivada também está relacionada à compreensão simbólica.

Em alguns livros de Cálculo Diferencial e Integral I (STEWART, 2006; LEITHOLD, 1994) podemos encontrar inúmeras regras que fazem parte do processo de cálculo de uma derivada. A seguir, destacaremos algumas destas regras.

TABELA 2: REGRAS DE DIFERENCIAÇÃO

$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$	Regra da Soma
$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	Regra do Produto
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$	Regra do Quociente
$f'\left(g(x)\right) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$	Regra da Cadeia

FONTE: Stewart (2005).

Destacamos também a derivada de algumas funções elementares:

TABELA 3: DERIVADA DE ALGUMAS FUNÇÕES ELEMENTARES

$\frac{d}{dx}(c) = 0,\ c \in \mathbb{R}$	$\frac{d}{dx}(tg\ x) = sec^2\ x$
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$	$\frac{d}{dx}(ln\, x) = \frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx}(sen\ x) = cos\ x$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$	$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

FONTE: Stewart (2005).

A derivada em sua representação simbólica como, por exemplo, as regras de derivação, também tem importância na matemática e em áreas aplicadas, pois possibilita reduzir os cálculos infindáveis que teríamos usando diretamente a definição. Portanto, essas regras de diferenciação nos permitem calcular com facilidade as derivadas de funções presentes em problemas que envolvem desde as taxas de variação até aproximação de funções.

4 ALGUMAS NOÇÕES DA TEORIA IMAGEM CONCEITUAL E DEFINIÇÃO CONCEITUAL

Para fundamentar a nossa pesquisa, tomaremos por base as contribuições de David Tall e Shlomo Vinner (1981, 1991) sobre "Imagem Conceitual e Definição Conceitual", destacando que as dificuldades de aprendizagem relacionadas ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral I dizem respeito aos limites das possibilidades de sua apreensão conceitual.

Esses autores defendem que a introdução de um determinado conceito matemático não deve ter apenas como referência sua definição formal e suas propriedades. Segundo os autores, é preciso que antes haja uma familiarização com o conceito em questão de forma que a definição formal seja suficientemente compreendida, tendo em vista as experiências, impressões e conhecimentos prévios do aluno.

Em vista disso, Vinner (1991) toma como exemplo um conceito matemático, o qual ele afirma que sua introdução por meio da definição formal não é pedagogicamente recomendável: a noção de valor absoluto. O autor ressalta que uma caracterização aconselhável para a abordagem desse conceito é "o número sem o sinal". Para ele, essa ideia é bastante compreensível para os alunos e, possivelmente, seria o que eles responderiam caso fossem perguntados sobre o mesmo. Outra forma de caracterizar a noção de valor absoluto, segundo o autor, é "a distância entre o número e zero na reta numérica". Contudo, a maior parte dos professores e dos livros tanto do Ensino Médio quanto do Ensino Superior utiliza a definição formal como ponto de partida para a abordagem desse conceito, deixando menos compreensível para o aluno:

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}.$$

Mesmo o autor defendendo a ideia de não apresentar inicialmente a definição formal, ele afirma que, posteriormente, é necessário que o estudante conheça a fórmula acima, visto que ela é de bastante utilidade para a resolução de equações algébricas e inequações que envolvem o valor absoluto. Vinner (1991) ao discutir sobre o exemplo acima evidencia os seguintes aspectos:

> [...] quando vier a decidir sobre a pedagogia de ensino de matemática tem-se que levar em conta não apenas como *se espera* que os alunos vão adquirir o conceito

> matemático, mas também, e talvez mais significativamente, como os alunos *realmente* adquirem esses conceitos (VINNER, 1991, p.67, tradução nossa).

Conforme Vinner (1991), ao ouvirmos uma palavra associada a algum conceito matemático como, por exemplo, o nome ou propriedades, ele já se torna presente na memória. Daí, quando pensarmos sobre essa informação, o nosso cérebro evocará diferentes imagens, ou seja, acionará uma rede de conhecimentos prévios e definições que foram anteriormente estabelecidas ao conceito. Esses aspectos irão compor o que é chamado de Imagem Conceitual.

Segundo Tall e Vinner (1981), o termo Imagem Conceitual é usado para descrever tudo aquilo que está relacionado a algum conceito presente na estrutura cognitiva do indivíduo, o qual inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos correspondentes a ele. De acordo com esses autores temos que:

> A imagem conceitual é algo não verbal associado em nossa mente ao nome do conceito. Pode ser uma representação visual do conceito, caso o conceito tenha representações visuais; pode ser também uma coleção de impressões ou experiências. As representações visuais, as figuras mentais, as impressões e as experiências associadas ao nome do conceito podem ser traduzidas em formas verbais. Mas é importante lembrar que essas formas verbais não são a primeira coisa evocada em nossa memória. Elas acontecem em estágio posterior. [...] Quando você ouve a palavra "função", por outro lado, você pode lembrar-se da expressão “$y = f(x)$”, você pode visualizar o gráfico de uma função, você pode pensar sobre funções específicas como $y = x^2$ ou $y = sen(x)$, $y = \ln x$, etc.. Do que nós dissemos, está claro que só é possível falar de imagem conceitual em relação a um indivíduo específico. Além disso, o mesmo indivíduo poderia reagir de modo diferente a um certo termo (nome do conceito) em situações diferentes. Em Tall e Vinner (1981) o termo “imagem conceitual evocada” é introduzido para descrever a parte da memória evocada num dado contexto. Isso não é, necessariamente, tudo que um certo indivíduo sabe sobre uma certa noção. (VINNER,1991, p. 68 apud PINTO, 2014, p.39).

Diante da citação acima, podemos notar que a imagem conceitual é formada com base em diversas experiências vivenciadas pelo aluno e pode ser modificada ao passar dos anos a partir do contato com novos estímulos, ou seja, é o processo pelo qual o sujeito passa para poder atribuir significados ao conceito. São inúmeros fatores que podem influenciar na aprendizagem do indivíduo, pois a forma como cada um desenvolve o seu pensamento é muito particular e está relacionada a condições e características pessoais. Segundo Tall e Vinner (1981), por se tratar de uma formação pessoal, a imagem conceitual não é precisamente coerente todo tempo e pode conter propriedades e/ou interpretações divergentes do conceito.

Assim, é importante destacar que

> "não só as experiências de natureza matemática exercem influência na formação da imagem de conceito. As experiências externas à matemática ou ao processo de aprendizagem do conceito, como experiências do dia-a-dia, também podem moldar a imagem de conceito" (ESCARLATE, 2008, p.10).

De acordo com Vinner (1991),

> [...] adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para ele. Saber de cor a definição do conceito não garante o entendimento. Entender, assim supomos, significa ter uma imagem conceitual. Determinado significado deve ser associado com as palavras (p. 69, tradução nossa).

Nesse sentido, podemos compreender que a imagem conceitual é algo subjetivo. O não desenvolvimento das ideias que permeiam a compreensão de determinado conceito indica que o sujeito não estabeleceu os significados e/ou propriedades necessárias, isto é, não construiu uma imagem conceitual suficientemente rica para o seu entendimento. Por exemplo, isso pode ocorrer quando as experiências vivenciadas pelo estudante não tem significado de aprendizagem. Sendo assim, quando um estudante não consegue explicar verbalmente ou por escrito o que entendeu sobre algum conceito, comumente, utilizará a definição decorada de algum livro, indicando que não foi possível construir imagens e impressões sobre o mesmo.

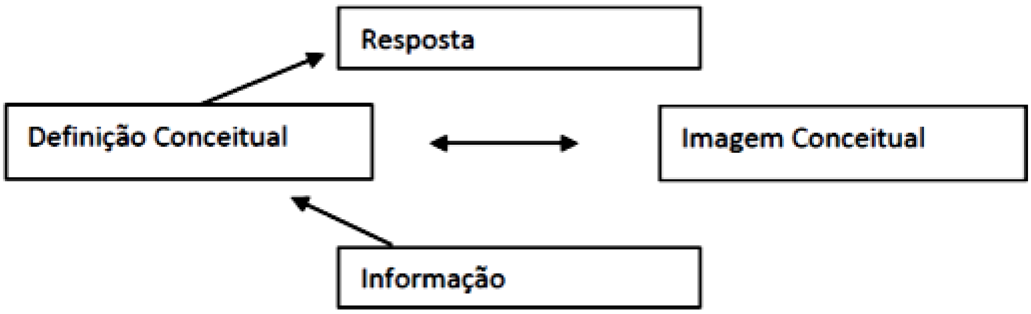
De modo geral, a imagem de um determinado conceito é formada por todas as ideias que perpassam a mente do sujeito sobre dado conceito. Essas ideias podem estar relacionadas a um conjunto de palavras que determinará o que o indivíduo entende sobre ele, o que para Tall e Vinner (1981) é chamada de Definição Conceitual (ESCARLATE, 2008).

No que se refere à *Definição Conceitual*, Lima (2014, p.30) tomando como referência o trabalho de Tall e Vinner (1981), define como:

> [...] um arranjo de palavras que um determinado indivíduo usa para especificar um conceito. Uma definição de conceito pode ser aprendida pelo indivíduo de uma maneira significativa, ou simplesmente memorizada. A definição de conceito (quando existe) faz parte da imagem de conceito e pode ser resultado de uma reconstrução pessoal do estudante realizada a partir da definição formal. Por outro lado, sendo um atributo pessoal, a definição de conceito pode divergir completamente da definição formal.

A Definição Conceitual determina um conjunto de palavras que são usadas para especificar algo sobre um conceito. Ela pode também ser uma construção ou uma reformulação pessoal, isto é, uma forma de palavras que o próprio aluno usa para explicar o conceito a partir do seu ponto de vista, utilizando para isso sua imagem conceitual como é apresentado na Figura 6. Também pode ou não ser compatível com a definição formal, visto que o indivíduo pode ter uma definição conceitual pautada na sua própria imagem conceitual que não inclui muitas propriedades, experiências e impressões sobre determinado conceito (ESCARLATE, 2008).

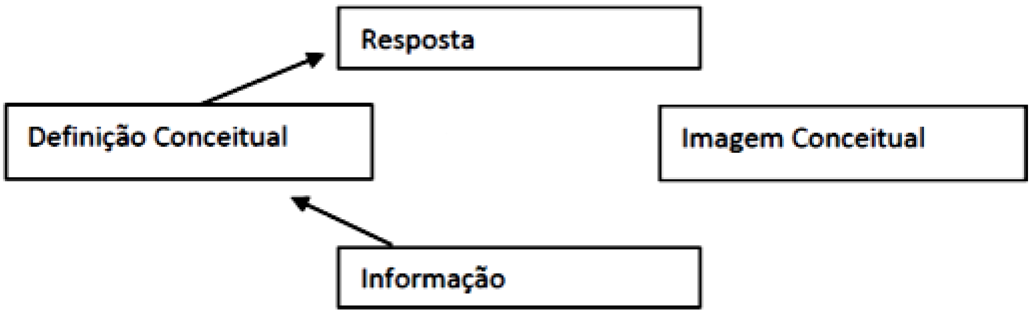
FIGURA 6: RELAÇÃO ENTRE DEFINIÇÃO CONCEITUAL E IMAGEM CONCEITUAL



FONTE: Vinner (1991, p. 71).

É possível observar que a definição conceitual pessoal desempenha um papel importante quanto ao entendimento verbal da definição formal do conceito, bem como indica aspectos correspondentes aos impasses da aprendizagem sobre ele. Por ser algo intrínseco ao indivíduo e relacionado à imagem conceitual, a definição formal de um conceito só será satisfatoriamente compreendida se o estudante possuir uma imagem conceitual adequadamente coerente com o conceito em questão, caso contrário, o estudante apenas utilizará através da memorização a sua definição formal, tendo assim uma definição conceitual puramente formal, conforme podemos observar na Figura 7.

FIGURA 7: DEFINIÇÃO CONCEITUAL PURAMENTE FORMAL



FONTE: Vinner (1991, p. 72).

Salientamos que para Vinner (1991), o indivíduo pode possuir uma imagem conceitual adequada, porém, em alguns casos, não consegue estabelecer uma definição conceitual consistente. Muitas vezes, isso também é gerado a partir de consequências negativas de uma imagem conceitual inapropriada, impossibilitando o desenvolvimento de uma definição conceitual que se aproxime da definição formal do conceito. Assim, para que a compreensão absoluta de um conceito aconteça e que uma definição conceitual apropriada seja estabelecida é necessário a formação de imagens conceituais que possibilite uma reconstrução pessoal da definição de um conceito.

No próximo capítulo apresentamos as opções metodológicas da pesquisa, o instrumento de coleta de dados, a escolha dos sujeitos e o campo.

5 METODOLOGIA

Neste capítulo apresentaremos as opções metodológicas da nossa pesquisa e o instrumento de coleta de dados utilizado a fim de tentar alcançar nosso objetivo. Também apresentaremos os participantes da pesquisa e o local onde ocorreu a investigação.

Como na referente pesquisa foi realizada uma investigação acerca dos processos que levam determinado grupo a ter compreensões sobre um conceito, temos que ela se adéqua à natureza qualitativa, conforme define Oliveira (2014) ao descrever que uma pesquisa qualitativa é caracterizada como sendo "um estudo detalhado de um determinado fato, objeto, grupo de pessoas ou ator social e fenômenos" (p. 60). Ainda segundo Oliveira (2014), esse procedimento visa buscar informações para elucidar em profundidade o significado e as características de cada contexto em que se encontra o objeto de pesquisa.

Nesse sentido, a nossa pesquisa se enquadra na definição de Oliveira (2014), visto que ao analisar como os participantes da pesquisa compreendem o conceito de derivada estamos interessados em fazer uma descrição detalhada dos dados obtidos, evidenciando as particularidades e a busca de informações que nos possibilitem identificar os principais motivos que os levam a determinada forma de compreensão tomando como referência conceitos da teoria sobre *Imagem Conceitual* e *Definição Conceitual* de David Tall e Sholmo Vinner. Portanto, a abordagem qualitativa é de suma importância para nossa pesquisa, pois a partir dela teremos uma visão ampliada do processo de ensino e aprendizagem sobre derivada pelo qual os participantes da pesquisa se situam após cursarem a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Para o desenvolvimento da pesquisa, adotamos inicialmente uma revisão bibliográfica para elucidar os trabalhos antecedentes acerca do nosso objeto de estudo. Oliveira (2014) aponta como a principal vantagem desse tipo de pesquisa, o direcionamento de um estudo em fontes científicas sem precisar recorrer diretamente aos fatos ou fenômenos da realidade empírica. No decorrer da nossa revisão bibliográfica procuramos nos aproximar dos processos de ensino e aprendizagem relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral, em particular, ao conceito de derivada e também de termos referentes à teoria sobre *Imagem Conceitual e Definição Conceitual*.

Em seguida, partimos para uma pesquisa de campo[2] com estudantes de Licenciatura em Matemática. Nessa fase, o nosso intuito foi identificar as formas de compreensões reveladas por eles ao responderem um questionário composto de atividades que exploram as diferentes maneiras de compreensão do conceito de derivada exposto por Thurston (1994) e, posteriormente, foi realizada uma análise qualitativa desses dados coletados com o propósito de atingir os objetivos de pesquisa. Em termos gerais, Oliveira (2014, p. 83) alega que "os questionários têm como principal objetivo descrever as características de uma pessoa ou de determinados grupos sociais", mostrando que o instrumento é adequado a nosso estudo.

Tivemos como campo de pesquisa o curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco no Centro Acadêmico do Agreste – CAA em Caruaru-PE, pois é um curso que oferta a formação inicial na área abrangida pela pesquisa. Os participantes foram estudantes de uma turma do 8º período, na disciplina de Análise Real. A escolha ocorreu devido ao fato desta ser uma componente curricular que necessita da compreensão dos conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral. A turma tinha 27 estudantes matriculados, porém havia apenas 18 presentes no momento de aplicação do questionário. Participaram estudantes de diferentes períodos do curso de Matemática, a saber: 7º, 8º e 9º períodos.

Para o tratamento dos dados foi utilizada a Análise de Conteúdo, através da técnica da análise temática que se efetiva em três etapas: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados (BARDIN, 1979). A primeira é o momento de seleção e organização do material de investigação e do ajustamento dos objetivos em busca de adequação metodológica. A segunda etapa consiste da exploração do material (questionário com os participantes da pesquisa). Esse procedimento diz respeito à codificação dos dados, transformando-os em núcleos de sentido, para a eles atribuirmos significados. Na terceira etapa é feito o tratamento dos resultados, inferência e interpretação. Nessa é realizada uma síntese interpretativa dos dados codificados na etapa anterior de modo que possa comunicar os significados com a temática em questão.

Salientamos que a confidencialidade e privacidade dos seus participantes foram mantidas conforme preconizado pela Resolução nº 510/2016 - estabelecida pelo Conselho Nacional de Saúde, que aborda trabalhos envolvendo seres humanos. Os participantes da

[2] "é aquela modalidade de investigação na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece" (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p.106).

pesquisa não serão identificados em nenhum momento, mesmo quando os resultados desta pesquisa forem divulgados em qualquer forma.

Para Gomes (2009, p. 91), "através da análise de conteúdo, podemos caminhar na descoberta do que está por trás dos conteúdos manifestos, indo além das aparências do que está sendo comunicado". Assim, com esse tipo de análise procuramos levantar elementos que compõem a *imagem conceitual* e *definição conceitual* dos participantes, evidenciando as formas de compreensão do conceito de derivada que foram mobilizados na formulação das respostas que foram analisadas.

5.1 Apresentando nosso instrumento de coleta de dados

Lembrando que nosso objetivo era investigar as compreensões sobre o conceito de derivada de função real de uma variável real de estudantes universitários do curso de Matemática – Licenciatura, elaboramos um questionário que foi aplicado a estudantes que já haviam estudado a disciplina de Cálculo I e que cursavam a turma de Análise Real.

O questionário foi composto por sete questões relacionadas ao conceito de derivada apontando para as diferentes compreensões destacadas por Thurston (1994). Foram tomadas como referências para preparação do questionário, pesquisas que investigam formas de apreensão de conceitos matemáticos (VINNER, 1991; AMIT e VINNER, 1990; TALL e VINNER, 1981; MEYER, 2003; LEME, 2003; GODOY, 2004) e questões presentes no livro "Cálculo: volume I" de Stewart (2006). É importante ressaltar que as atividades foram aplicadas individualmente e cada uma das atividades apresenta compreensões diferentes sobre o conceito de derivada. Elas serão apresentadas a seguir juntamente com seus respectivos objetivos.

Questão 1 (Q-1) – definição de derivada

Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de uma variável real definida no intervalo aberto I. Descreva de acordo com a sua concepção o que é a derivada da função f em um ponto a qualquer do seu domínio I.

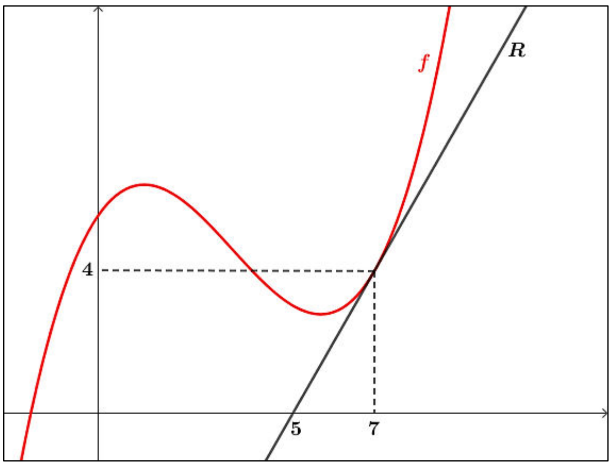
Essa questão teve o objetivo de identificar, por meio dos aspectos de definição conceitual e imagem conceitual apontados na escrita livre do estudante, com qual compreensão sobre o conceito de derivada de uma função f em um ponto a ele está mais familiarizado. Não apresentamos a palavra conceito ou definição para não induzir o estudante a usar definições prontas de livros didáticos.

A presença da expressão "descreva de acordo com a sua concepção", baseia-se no item (a) da Questão 4 apresentada por Meyer (2003, p. 23) em sua pesquisa, a qual visa favorecer a expressão de uma reconstrução pessoal sobre o conceito de derivada, mesmo que o sujeito lembre ou não da definição formal, possibilitando-nos a obtenção de informações que possam caracterizar como os estudantes pesquisados compreendem o conceito de derivada ao dissertar sobre ele.

Foram utilizadas as informações "$f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de uma variável real definida no intervalo aberto I" para evitar respostas do tipo: não é possível afirmar nada sobre a derivada de f no ponto a pelo fato de não saber se o ponto a é de acumulação. E também para evidenciar que a derivada em questão é de uma função de variável real.

Questão (Q-2) – Geométrica

Na figura abaixo a reta R é tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(7, 4)$ e intercepta o eixo x no valor 5, o que significa que esta reta tem inclinação $m = \frac{4-0}{7-5} = 2$. Diante do exposto, é possível dizer qual o valor da derivada da função f em $x = 7$? Explique.



Essa atividade explora os aspectos da derivada de uma função real de uma variável real por meio da representação gráfica e da aprendizagem geométrica associada a esse conceito. Diante dessa exploração, seu objetivo era investigar se os estudantes compreendem a derivada de uma função f num ponto a do seu domínio como sendo a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$, ou seja, se eles possuem uma compreensão geométrica da derivada.

Essa questão é baseada em umas das atividades apresentadas na pesquisa de Meyer (2003, p.19) na qual investigava elementos da imagem conceitual e definição conceitual relativas ao conceito de derivada quando interpretado geometricamente. Acreditamos que a presença dos gráficos pode estimular elementos da imagem conceitual do estudante.

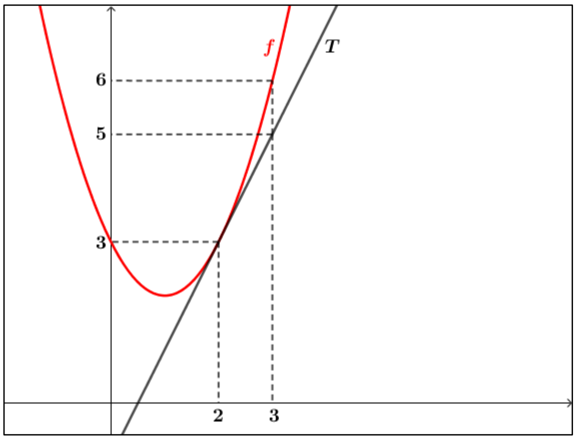
Vale ressaltar que a questão foi elaborada com a expectativa de que os participantes não precisassem realizar nenhum cálculo e relacionassem a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f em $(7, 4)$ com a derivada de f em $x = 7$. Por isso, foi inserido o cálculo da inclinação, assim, necessitando apenas de uma compreensão conceitual de derivada para respondê-la.

Todavia, admitimos aqui a possibilidade dos investigados optarem por procedimentos que utilizem a determinação da equação da reta tangente R e, a partir desta, a identificação do seu coeficiente angular como sendo a derivada da função no ponto $x = 4$ (MEYER, 2003).

Questão 3 (Q-3) – Aproximação e Taxa de Variação

Conforme a figura a seguir a reta T de equação $y = 2x - 1$ é tangente ao gráfico da função f no ponto $(2,3)$, o que implica que a derivada da função f neste ponto é igual a 2.

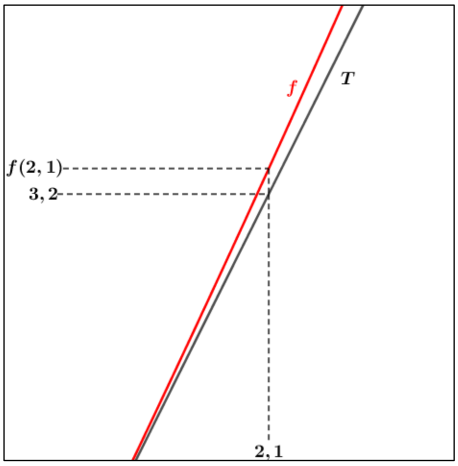
De acordo com as informações da figura, é possível determinar a taxa de variação média entre os pontos $x = 2$ e $x = 3$ da função f e da reta tangente T, que são respectivamente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-3}{3-2} = 3$ e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-3}{3-2} = 2$.



Diante do exposto, qual:

a) A taxa de variação instantânea da função f no ponto de abscissa $x = 2$? Explique.

b) O valor aproximado de $f(2{,}1)$? Explique.



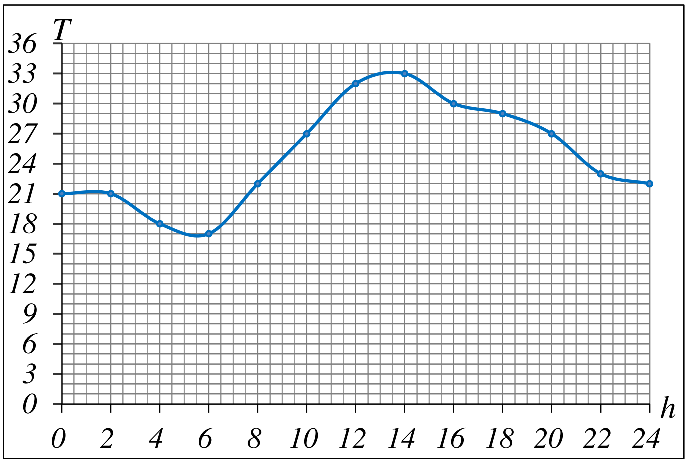
Esta questão explora duas compreensões acerca do conceito de derivada, a saber: taxa de variação instantânea da função em um ponto do seu domínio e aproximação linear da função. Ela é uma adaptação da questão apresentada na investigação de Meyer (2003, p. 24), acrescida de informações que visam instigar o uso de termos agregados à imagem conceitual dos alunos. Em atividades dessa natureza, segundo a autora, a expressão “derivada da função f” e “reta tangente” são fatores de estímulo verbais para a mobilização de elementos da imagem conceitual. Além disso, acrescentamos que os gráficos são os fatores visuais.

Com o item (a) pretendíamos identificar se os estudantes compreendem a derivada da função f em um ponto do seu domínio como a taxa de variação instantânea dessa função no referido ponto. Acrescentamos o cálculo da taxa de variação média tanto da função quanto da reta tangente no intervalo $[2{,}3]$ com o intuito de evidenciar a existência de duas taxas distintas, a média e a instantânea, sendo esta última a que se relaciona com a derivada da função f no ponto.

O item (b) explora o conceito a partir da compreensão sobre aproximação linear. Assim, com ele tínhamos por objetivo investigar se os estudantes estabelecem relações entre a equação da reta tangente ao gráfico de f e a própria função f. Para resolvê-lo o estudante pode utilizar a compreensão sobre aproximação linear, estabelecendo a relação entre a função e sua reta tangente. Isso pode ser feito por meio da relação $f(x) \cong 2x - 1$, uma vez que a equação da reta tangente é a melhor função linear que se aproxima da função f para valores muito do ponto de tangência.

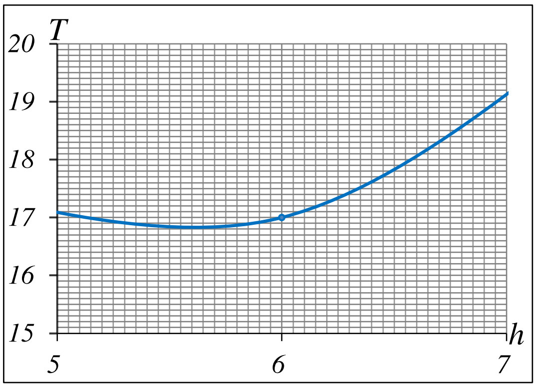
Questão 4 (Q-4) – Microscópica

A temperatura na cidade de Caruaru registrada após a meia-noite em 2 de junho é dada pela função $T(h)$, onde T é a temperatura dada em graus Celsius (°C) que depende do instante h, dado em horas, após o inicio do registro. O gráfico mostra como o valor da temperatura T muda em função do tempo h.



Diante deste fenômeno,

a) É possível estimar o valor da derivada da função temperatura T em $h = 6$, observando as temperaturas da cidade e os instantes correspondentes obtidos através de um "zoom" em torno ponto de coordenadas $(6{,}17)$, conforme são apresentados no gráfico e na tabela? Se sim, determine-a. Se não, explique por quê.



h	T
5,6	16,7
5,8	16,8
5,9	16,9
6	17
6,1	17,1
6,3	17,4
6,5	17,8

b) Discuta sobre o significado de $T'(6)$.

Almeida e Viseu (2002) ao realizarem um levantamento dos resultados encontrados em algumas pesquisas relacionadas ao conceito de derivada notaram um descompasso referente a uma das formas de exploração desse conceito. Conforme os autores, “em geral, os alunos evitam as abordagens gráficas e apresentam dificuldades quando têm que usá-las, talvez porque no ensino do conceito de derivada predominam as abordagens analíticas” (Ibidem, p. 200). Levando em consideração essas afirmações, a questão foi elaborada de modo que explorasse a compreensão microscópica do conceito de derivada.

O objetivo do item (a) era analisar se estudante identifica o conceito de derivada a partir da compreensão microscópica. Pretendíamos, por meio da análise dos procedimentos de resolução, verificar se os participantes associam a inclinação local da curva $y = T(h)$ em $h = 6$ (inclinação de uma reta secante que passa por dois pontos próximos a $(6, 17)$ no gráfico de T, podendo ser um dos pontos o próprio $(6, 17)$) a um valor aproximado da derivada da função T no instante $h = 6$ e de que forma essa associação é constituída.

Essa questão é referenciada em um dos exemplos apresentados no livro “Cálculo: volume I” de Stewart (2006, p. 154). Como já foi visto anteriormente, a ideia relacionada a esse tipo de questão é que se dermos um “zoom” em direção ao ponto de abscissa $h = 6$ a curva aparentará ser uma reta. Por isso, “algumas vezes nos referimos à inclinação da reta tangente como a *inclinação da curva*” (STEWART, 2005, p. 150). Dessa forma, as expressões “derivada da função T em $h = 6$”, “zoom”, os gráficos e a tabela de valores são os fatores de mobilização de elementos da imagem conceitual.

No item (b) o objetivo era identificar se os estudantes conseguem argumentar sobre o conceito de derivada ao aplicarmos em uma situação a partir de sua notação. Assim, por meio das respostas dadas pelos participantes apontamos os aspectos referentes à imagem conceitual que os levam a determinados argumentos. Pelo fato da questão estar situada em um contexto físico, a expectativa é que os estudantes percebam que a derivada $T'(6)$ significa “a taxa com que a temperatura está variando às 6 horas”, isto é, que $T'(6)$ representa a taxa de variação instantânea da função temperatura T no instante $h = 6$.

Questão 5 (Q-5) – infinitesimal

Foi solicitado a um estudante de matemática para que ele encontrasse o valor da derivada da função $f(x) = 2^x$ no ponto de abscissa $x = 0$, ou seja, determinasse $f'(0)$. Diante desse problema, o estudante pensou na seguinte maneira:

Sabendo que a derivada de uma função em ponto x de seu domínio é dada por $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, o estudante usou uma calculadora para encontrar valores para expressão $\frac{2^h-1}{h}$, tomando-se os valores de h próximos, porém diferentes, de zero, apresentando-os em uma tabela.

h	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$
$\frac{2^h-1}{h}$	0,670	0,691	0,693	0,693	0,718	0,696	0,693	0,693

Da evidência numérica, o estudante percebeu que os valores parecem tender a um número próximo de 0,69 para h cada vez mais próximo de zero, levando a uma estimativa $f'(0) \cong 0{,}69$.

A maneira que o aluno procedeu está correta? Realmente podemos considerar que a derivada de f em $x = 0$ é de fato aproximadamente $f'(0) \cong 0{,}69$? Explique.

A questão Q-5 foi elaborada tomando-se por referência uma das atividades presentes na pesquisa de Amit e Vinner (1990, p. 6), na qual investigavam algumas “concepções inadequadas” comparadas às concepções aceitas pela comunidade matemática, além disso, foi utilizado os dados de um dos exemplos apresentados no livro de Stewart (2006, p. 160), onde o autor mostra o procedimento abordado nessa questão como umas das formas de estimar um valor para derivada de um função em um ponto.

Nesse sentido, trabalha-se indiretamente com a definição formal de derivada, cujo objetivo foi analisar se os estudantes compreendem o valor da derivada da função f em um ponto do seu domínio a partir de sua definição como o quociente de quantidades infinitesimais, ou seja, se os estudantes tem familiaridade com esse tipo de procedimento, muitas vezes, adotado para obter um valor aproximado da derivada.

A compreensão infinitesimal é de fundamental importância para o avanço do aluno na disciplina de Cálculo I, pois uma vez estabelecida, ele pode utilizá-la para estimar o valor da derivada de uma função em dado ponto do seu domínio quando não conseguir encontrá-la via o cálculo do limite ou por não ter ferramentas suficientes como propriedades e regras de derivação.

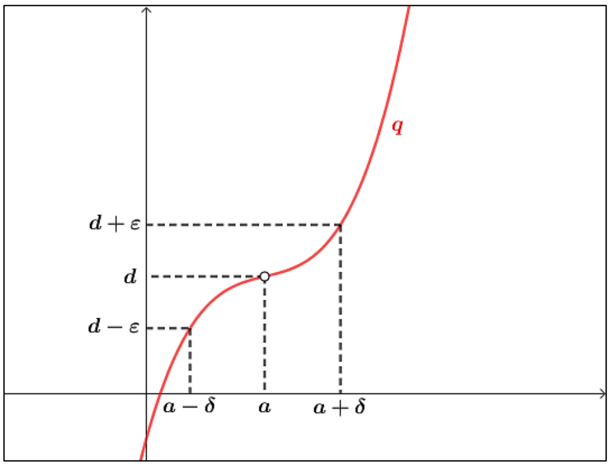
É possível que a definição formal estimule os estudantes a utilizarem o cálculo do limite para justificar o valor aproximado da derivada apresentado na questão. Procedimento semelhante a esse foi encontrado nos resultados da pesquisa realizada por Amit e Vinner (1990, p. 7).

Questão 6 (Q-6) – Lógica

Seja f uma função definida sobre um intervalo aberto e a um ponto de seu domínio. Definimos a função $q(x)$ para $x \neq a$, ilustrada na figura abaixo, por

$$q(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Então, dizemos que o número d é a derivada de f em a, quando: a distância entre $q(x)$ e d fica arbitrariamente pequena tomando a distância de x a a suficientemente pequena, mas diferente de zero, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |q(x) - d| < \varepsilon$.



Utilizando essas informações, mostre porque a derivada da função $f(x) = x^2$ em $x = 1$ é 2, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ talque $0 < |x - 1| < \delta$ implica $\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$.

A referente questão foi elaborada pelo autor e explora a compreensão lógica do conceito de derivada segundo Thurston (1994), a qual é baseada na definição formal de limite de função. Além disso, ela conta com a presença de uma representação geométrica que evidencia a importância dos intervalos na definição. Essas informações foram apresentadas para que estimulassem elementos da imagem conceitual dos participantes da pesquisa.

Dessa forma, buscamos analisar se os estudantes possuem uma compreensão lógica do conceito, ou seja, se conseguem argumentar sobre a derivada de uma função em um dado ponto a partir da definição formal de limite. A questão foi elaborada com a expectativa de que os estudantes encontrassem para um $\epsilon > 0$ dado, um $\delta > 0$ de modo que $0 < |x-1| < \delta$ implicasse $\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$. Sendo assim, buscamos controlar as variáveis citadas de acordo com essas expectativas a partir da escolha da função e do ponto.

Uma forma de achar o $\delta > 0$ para o $\epsilon > 0$ dado é através de alguns procedimentos algébricos e usando a notação de módulo. Temos que

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x+1-2| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-1| < \varepsilon.$$

Daí, basta tomar $\delta = \epsilon$ (ou qualquer $\delta < \epsilon$) que resulta

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon.$$

Logo, mostramos que a derivada de $f(x) = x^2$ em $x = 1$ é 2.

Questão 7 (Q-7) – Simbólica

Responda os seguintes quesitos. a) Explique sobre o significado dos símbolos: $i)\ f'(a)$ $ii)\ \frac{dy}{dx}$ $iii)\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ b) Encontre a derivada das funções: $i)\ v(t) = (t^2-5t)(t^3-3t^2+4)$ $ii)\ g(x) = e^{3x^2+x}$ em $x = 0$ $iii)\ s(y) = \operatorname{sen} y^2$

Essa questão tem como referência as discussões realizadas na pesquisa de Leme (2003) e nas atividades realizadas por Godoy (2004) sobre o conceito de derivada. Os aspectos explorados em Q-7 estão relacionados à compreensão simbólica do conceito de derivada através de competências que o Cálculo propõe, a saber: entendimento das diferentes notações de derivada e aplicação de regras de derivação.

Através do item (a) tínhamos por objetivo investigar se os estudantes compreendem o conceito de derivada a partir da abordagem simbólica. As respostas para esse item poderiam ser dadas através de uma frase que expressasse o significado por trás de cada símbolo: i) derivada da função f no ponto a, valor numérico da derivada de f no ponto a, derivada de f (f como função de a); ii) derivada da função y, derivada da função y em relação a x, função derivada de y; iii) derivada da função f, função derivada de f; derivada de f no ponto x (GODOY, 2004). Após a exposição de questões que exploram o conceito de derivada, é possível que as respostas dos estudantes sejam expressas de acordo com as outras formas de compreensão do conceito.

Quanto ao item (b) pretendíamos analisar o desempenho dos estudantes numa atividade que necessita do entendimento de algumas propriedades necessárias para o cálculo de derivadas. Nele está sendo enfatizado o cálculo por meio das seguintes regras de derivação: i) derivada do produto e derivada de função polinomial; ii) Regra da Cadeia, derivada de função exponencial e de função polinomial; iii) Regra da Cadeia, derivada da função trigonométrica $f(x) = sen(x)$ e derivada de função polinomial. Vale ressaltar que como em ii) está sendo solicitada a derivada da função em um ponto específico, pode ser que os estudantes resolvam pelo cálculo do limite.

Problemas dessa natureza só poderão ser compreendidos e solucionados, quando o aluno adquirir familiaridade com os processos de derivação, tornando-os possíveis de serem "carregados por meio de representações mentais" (LEME, 2003, p. 22).

No próximo capítulo apresentaremos a análise e discussão dos resultados dos questionários aplicados com alunos do curso de Matemática-Licenciatura.

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentaremos os dados obtidos das questões respondidas pelos estudantes participantes da pesquisa e suas referentes análises. Realizaremos uma análise qualitativa das respostas através do nosso referencial teórico e retornando sempre ao nosso problema de pesquisa a fim de tentar respondê-lo, a saber: Quais as compreensões sobre o conceito de derivada de função real de um variável real de estudantes do curso de Matemática - Licenciatura.

6.1 Análise da questão 1 (Q-1)

Nessa questão procuramos mapear elementos que compõem a *imagem conceitual* e *definição conceitual* dos estudantes pesquisados, evidenciando as formas de compreensão dadas ao conceito de derivada na formulação das respostas. É importante destacar que nesta pesquisa entendemos a definição conceitual como parte da imagem conceitual, conforme é apresentado por Tall e Vinner (1981).

Observamos que do total de dezoito estudantes pesquisados apenas um não respondeu a questão Q-1. Dos que responderam, quinze apresentaram alguma compreensão sobre o conceito de derivada e dois não apresentaram nenhuma. Percebemos ainda que dez apresentaram uma e cinco apresentaram duas formas de compreensão.

Das respostas dadas foi possível realizar uma categorização de acordo com as imagens conceituais mobilizadas pelos estudantes ao descreverem sobre o que é a derivada de uma função em um ponto do seu domínio. Estas respostas estão categorizadas na tabela a seguir.

TABELA 4: IMAGENS CONCEITUAIS MOBILIZADAS PELOS ESTUDANTES NA QUESTÃO 1

	Imagem conceitual evocada “derivada de uma função f em um ponto a qualquer do seu domínio”	**Compreensão**	**Quantidade**
1	Taxa de variação da função f no ponto a.	Taxa de variação	7
2	Inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto a.	Geométrica	5
3	Coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto a.	Geométrica	3
4	Reta tangente ao gráfico de f no ponto a.	Geométrica	1
5	É derivar e substituir o ponto a.	Simbólica	1

6	$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.	Simbólica	3

FONTE: O autor (2017).

Referenciando na categorização das respostas, podemos notar que apenas três compreensões relativas ao conceito de derivada foram mobilizadas pelos estudantes, além disso, as categorias 1, 2, 3 e 4 mostram que a geométrica e taxa de variação foram as que mais se destacaram. Sendo esses estudantes de uma turma de no mínimo quatro anos de curso, é possível que durante todo o processo de formação a definição formal do conceito de derivada tenha sido mais explorado de acordo com essas categorias. Tomemos como exemplos as respostas dos estudantes A01 da categoria 3 e 6 que usa a compreensão simbólica e geométrica (Figura 8), enquanto o estudante A08 da categoria 2 usa apenas a geométrica (Figura 9).

FIGURA 8: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A01 - QUESTÃO 1

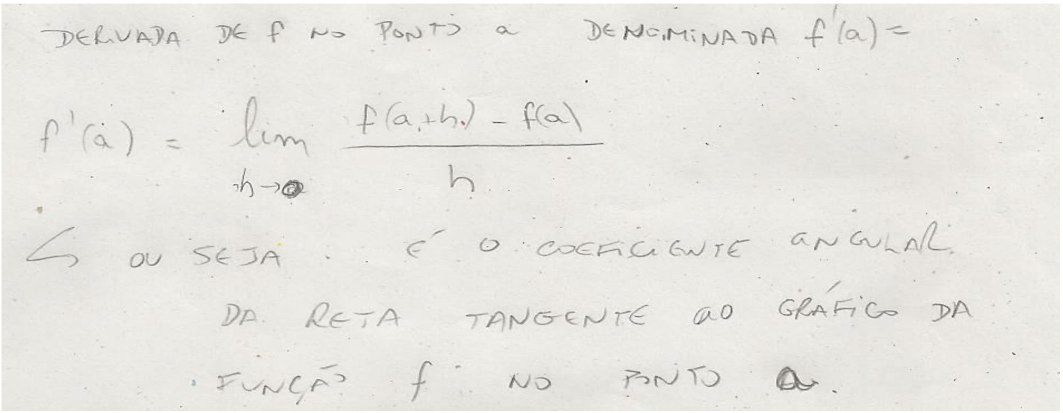
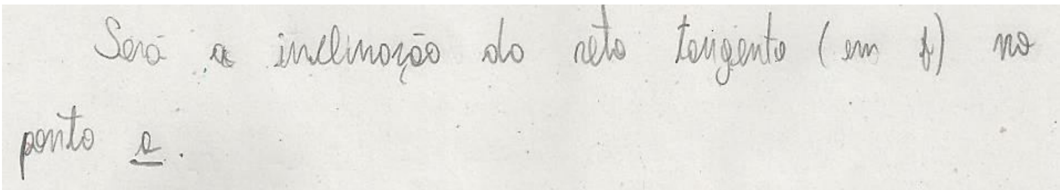
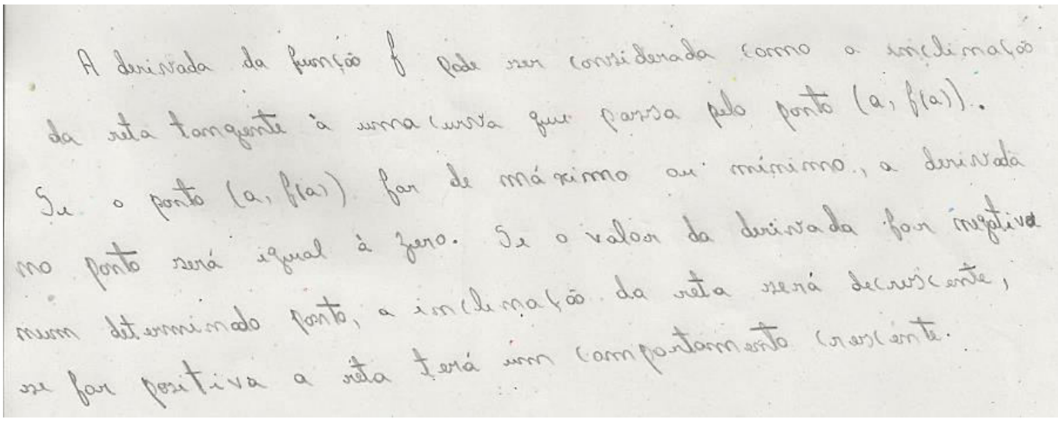


FIGURA 9: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A08 - QUESTÃO 1



Vale ressaltar que dos que apresentam uma compreensão geométrica, o estudante A11 além de conceber esta compreensão ainda mobiliza em sua resposta imagens conceituais, relativas ao conceito de derivada da função f no ponto a, que sugerem umas de suas aplicações, conforme podemos ver na sua resposta a seguir.

FIGURA 10: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A11 - QUESTÃO 1


A derivada da função f pode ser considerada como a inclinação
da reta tangente à uma curva que passa pelo ponto (a, f(a)).
Se o ponto (a, f(a)) for de máximo ou mínimo, a derivada
no ponto será igual à zero. Se o valor da derivada for negativa
num determinado ponto, a inclinação da reta será decrescente,
se for positiva a reta terá um comportamento crescente.

Os elementos presentes na definição conceitual nas respostas dos estudantes A04 e A07 sugerem uma compreensão geométrica, porém estão associados respectivamente a uma imagem conceitual que estabelece a derivada da função f como sendo “o ponto de inclinação da reta tangente ao gráfico de f” e “a reta tangente ao gráfico de f no ponto a”, indicando que esses estudantes possuem uma compreensão geométrica distorcida do conceito de derivada. Segue as respostas dadas por estes estudantes.

FIGURA 11: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A04 - QUESTÃO 1

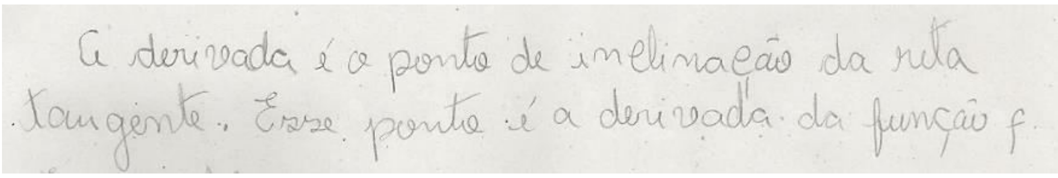
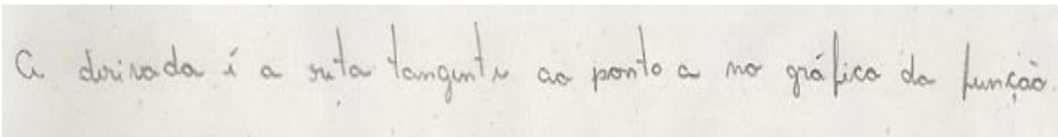

A derivada é o ponto de inclinação da reta
tangente. Esse ponto é a derivada da função f.

FIGURA 12: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A07 - QUESTÃO 1

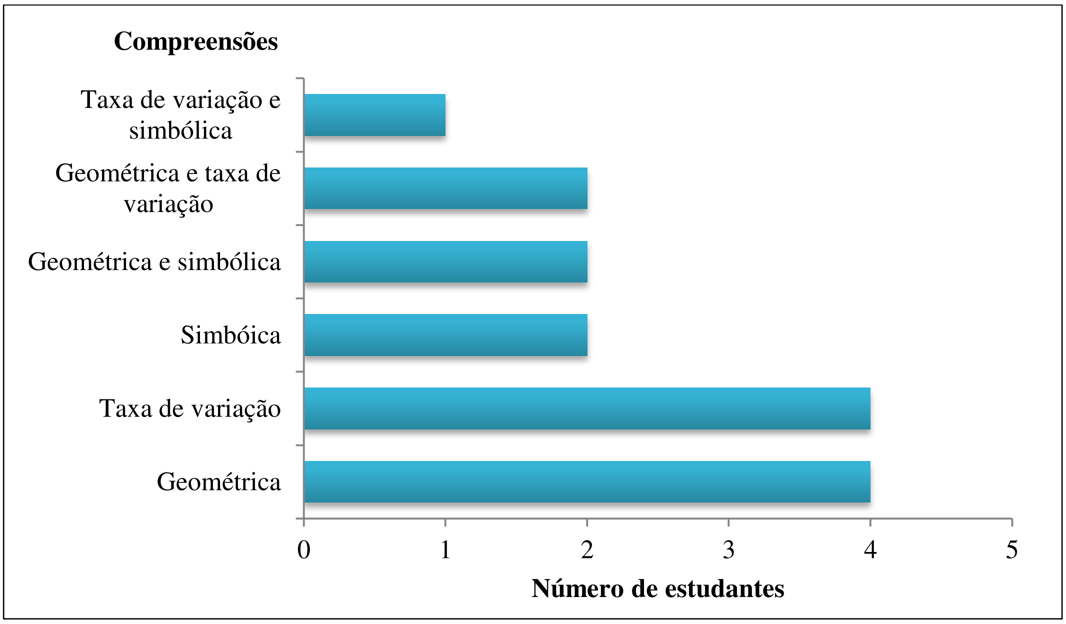

A derivada é a reta tangente ao ponto a no gráfico da função

Resultado semelhante a este último também foi encontrado na pesquisa de D’Avoglio (2002, p. 27), apontando que “alguns alunos confundem derivada com reta tangente”.

É importante destacar que identificamos na resposta de um dos estudantes uma interpretação do conceito de derivada através dos processos de cálculo das derivadas de funções, ou seja, associando a derivada de uma função com os métodos de obtê-la, o que segundo Vinner (1992) evidencia uma concepção instrumental. Por isso, consideramos que a *imagem conceitual* do estudante está associada à compreensão simbólica.

Em geral, verificou-se que das formas de compreensão do conceito derivada estabelecidas por Thurston (1994), os resultados indicam que a maioria dos estudantes possui certa familiaridade com a geométrica, a taxa de variação e a simbólica, mesmo alguns apresentando uma definição conceitual que se distancia da definição formal. Além disso, alguns estudantes mobilizaram duas dessas compreensões. O gráfico a seguir demonstra um resumo dos resultados obtidos.

GRÁFICO 1: COMPREENSÕES MOBILIZADAS NA QUESTÃO 1



FONTE: O autor (2017).

É alarmante o resultado obtido nessa questão, pois apenas 3 de 7 compreensões foram mobilizadas pelos estudantes pesquisados, esperávamos que outras interpretações fossem realizadas a respeito do conceito de derivada. No entanto isso não significa que os estudantes pesquisados tenham apenas tais compreensões. Talvez nas disciplinas de Cálculo os professores possam ter abordado métodos que incluam apenas algumas delas. Também não descartamos o fato de terem apresentado o conceito explorando todas as suas fases e o aluno não ter assimilado.

6.2 Análise da questão 2 (Q-2)

Nessa questão foi solicitado aos estudantes que a partir das informações dadas no gráfico explicassem se era possível dizer qual o valor da derivada da função em um dado ponto do seu domínio. Seu objetivo era investigar se os alunos compreendem a derivada de uma função f num ponto a do seu domínio como sendo a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $x = a$, ou seja, se eles possuem uma compreensão geométrica da derivada.

Diante da análise relativa à questão Q-2 categorizamos os resultados obtidos, conforme são apresentados na Tabela 5. Levamos em consideração para essa categorização tanto o valor da derivada dado como respostas quanto às justificativas associadas a elas. Vale destacar que todos os estudantes responderam essa questão.

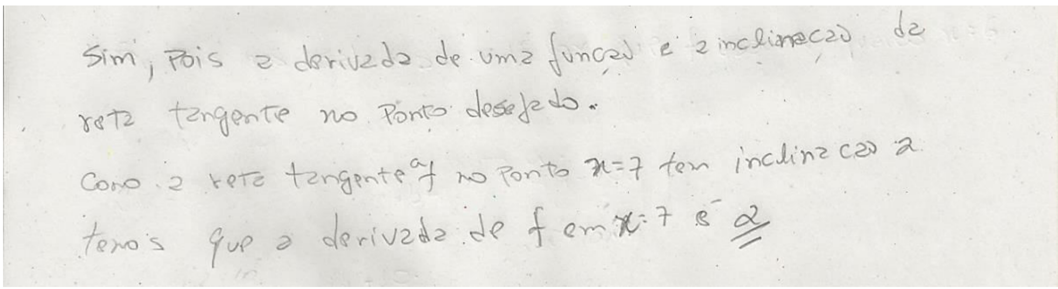
TABELA 5: RESULTADOS OBTIDOS NA QUESTÃO 2

	Geométrica	**Quantidade**
1	Associa a derivada à reta tangente ao gráfico da função.	10
2	Associa parcialmente a derivada à reta tangente ao gráfico da função.	1
3	Não associa a derivada à reta tangente ao gráfico da função.	7

FONTE: O autor (2017).

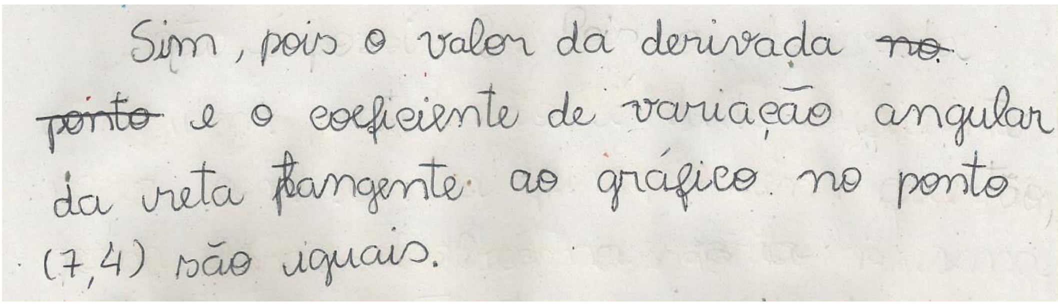
Dos dez estudantes que associam a derivada à inclinação da reta tangente, sete apresentam respostas justificando corretamente que o valor da derivada da função no ponto $x = 7$ é 2, pois é a inclinação da reta tangente, ou seja, a imagem conceitual evocada por estes estudante é compatível com a compreensão geométrica formal estabelecida pela comunidade matemática. Segundo Meyer (2003), esse resultado sugere que tais sujeitos mobilizam uma imagem conceitual que não apresenta elementos conflitantes com a "definição geométrica" do conceito de derivada. Uma resposta considerada válida pode ser exemplificada pelo protocolo de resposta do estudante A13 (Figura 13).

FIGURA 13: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A13 - QUESTÃO 2


Sim, pois a derivada de uma função é a inclinação da reta tangente no ponto desejado.
Como a reta tangente a f no ponto $x=7$ tem inclinação 2 temos que a derivada de f em $x=7$ é 2

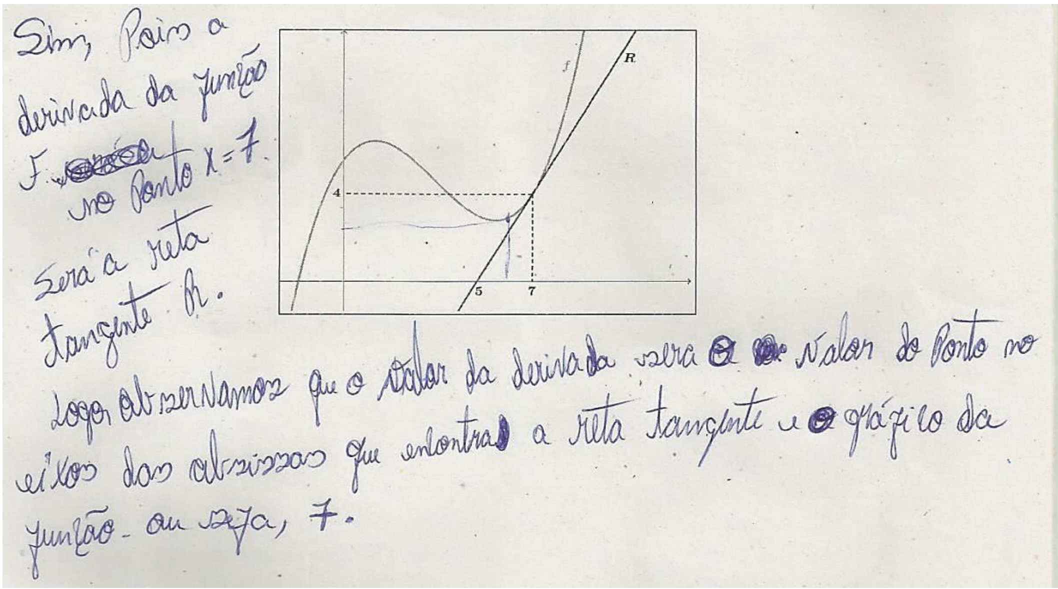
Em contrapartida, dos outros três que mostraram compreender a derivada geometricamente e concebe a inclinação da reta tangente como sendo o valor da derivada apresentam erros conceituais ao verbalizarem sobre a questão. Um deles mobiliza uma imagem conceitual evocada que mostra que o valor da derivada é "o coeficiente de variação angular da reta tangente ao gráfico da função". O equívoco está associado à palavra "variação", conforme podemos observar através da resposta dada pelo estudante presente na Figura 14.

FIGURA 14: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A10 - QUESTÃO 2


Sim, pois o valor da derivada ~~no ponto~~ e o coeficiente de variação angular da reta tangente ao gráfico no ponto (7,4) são iguais.

Já em relação à categoria 2, com apenas um estudante, levamos em consideração o que mobiliza elementos conflitantes de uma imagem conceitual relativa à compreensão geométrica, que foi o caso do estudante A03 (Figura 15). Ele afirma que é possível dizer qual é o valor da derivada, apresenta argumentos que se aproximam da compreensão geométrica, porém ao final de sua resposta se distancia do que antes foi verbalizado, pois usa o valor da abscissa do ponto de tangência como sendo o valor da derivada nesse ponto.

FIGURA 15: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A03 - QUESTÃO 2



Em vista do exposto, consideramos que esse estudante possui uma imagem geométrica em construção. Talvez ele tenha visto o conceito de derivada de uma forma não significativa e sem espaço para a exploração da compreensão geométrica.

Concernente às respostas dos setes estudantes que não associam a derivada à inclinação da reta tangente ao gráfico da função, consideramos aquelas que foram formuladas de forma vaga e imprecisa e sem sentido.

A análise possibilitou uma visão geral de que mais da metade dos estudantes pesquisados mobilizam a compreensão geométrica do conceito de derivada, mesmo alguns apresentando erros conceituais ao expressarem suas respostas. Esse resultado é satisfatório em relação ao obtido em Q-1, pois nessa questão tivemos apenas nove estudantes que evocaram tal compreensão.

6.3 Análise da questão 3 (Q-3)

Essa questão explora duas compreensões acerca do conceito de derivada, a saber: taxa de variação instantânea da função em um ponto do seu domínio e aproximação linear da função. Com o item (a) pretendíamos identificar se os estudantes compreendem a derivada da função f em um ponto do seu domínio como a taxa de variação instantânea dessa função no referido ponto. Através do item (b) tínhamos por objetivo investigar se os estudantes estabelecem relações entre a equação da reta tangente ao gráfico de f em um ponto de abscissa $x = 2$ e a própria função f.

Constatamos que cinco estudantes não responderam essa questão completamente, ou seja, deixaram em branco um dos itens. Para melhor analisarmos esta questão, optamos por categorizar cada item separadamente evidenciando as compreensões exploradas.

Em relação ao item (a), constatamos que foi baixo o número de estudantes que mobilizaram uma imagem conceitual que estabelece a taxa de variação instantânea de uma função f em $x = a$ como sendo a derivada de f em $x = a$. Vejamos a tabela a seguir que mostra a categorização dos resultados obtidos.

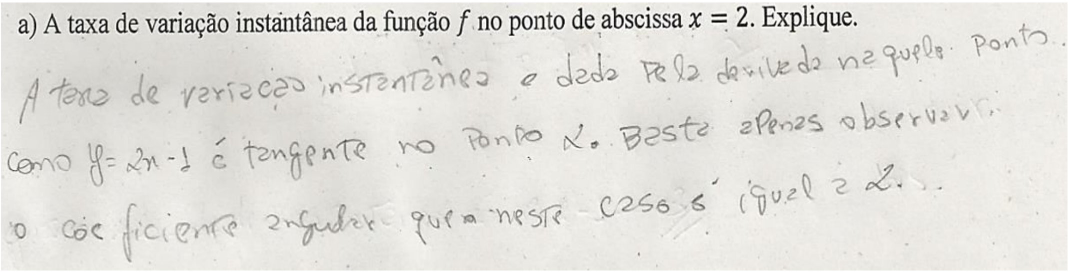
TABELA 6: RESULTADOS OBTIDOS NO ITEM (A) DA QUESTÃO 3

	Taxa de Variação	**Quantidade**
1	Associa a derivada à taxa de variação instantânea.	5
2	Associa parcialmente a derivada à taxa de variação instantânea.	3
3	Não associa a derivada à taxa de variação instantânea.	10

FONTE: O autor (2017).

Podemos notar na categoria 1 que cinco dos estudantes pesquisados mostraram entender à relação entre a derivada e a taxa de variação instantânea da função f em $x = 2$, isto é, mobilizaram a compreensão do conceito de derivada como uma taxa de variação instantânea. Tomemos como exemplo a resposta do estudante A13.

FIGURA 16: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A13 - QUESTÃO 3A

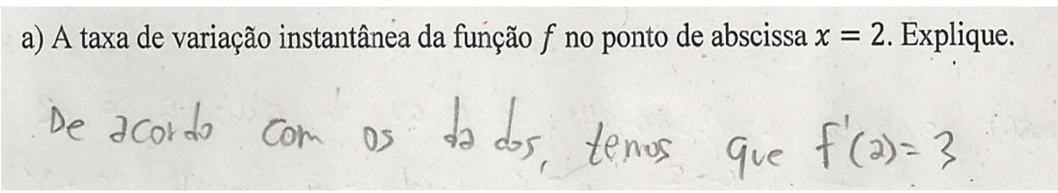

a) A taxa de variação instantânea da função f no ponto de abscissa $x = 2$. Explique.

A taxa de variação instantânea é dada pela derivada naquele ponto. Como $y = 2x - 1$ é tangente no ponto 2. Basta apenas observar o coeficiente angular que neste caso é igual a 2.

Concernente à categoria 2, com três estudantes, dois utiliza a equação da reta tangente para encontrar o valor y correspondente à $x = 2$, porém, justificaram suas respostas através de termos que sugerem uma relação entre o cálculo realizado e a derivada da função em $x = 2$. Através desses resultados, consideramos que esses estudantes confundem a equação da reta tangente ao gráfico da função f com a função derivada de f, o que mais uma vez evidencia uma concepção instrumental de derivada já encontrada em pesquisas como a de Meyer (2003).

Ainda em relação à categoria 2, apresentamos, por exemplo, a resposta do estudante A09 (Figura 17) que associa a derivada à taxa de variação instantânea da função f no ponto $x = 2$, contudo, parece cometer um equívoco quanto ao valor da derivada que é dado por $f'(2) = 3$. Provavelmente esse estudante concebe a ordenada $y = 3$ do ponto de tangência como sendo o valor da derivada de f ou não estabelece uma diferença entre a taxa de variação média $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$ da função f no intervalo [2,3] e a taxa de variação instantânea em $x = 3$.

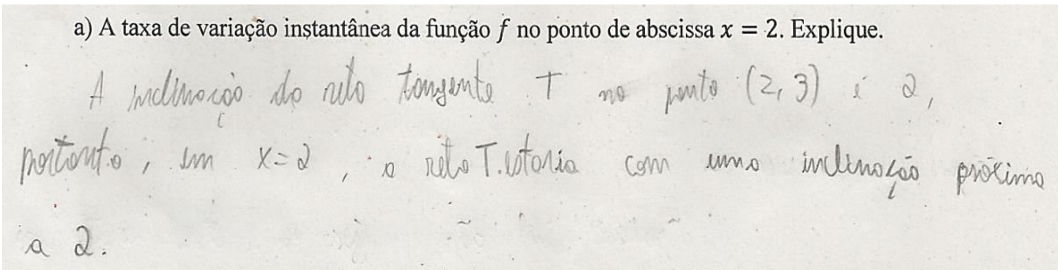
FIGURA 17: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A09 – QUESTÃO 3A


a) A taxa de variação instantânea da função f no ponto de abscissa $x = 2$. Explique.

De acordo com os dados, temos que $f'(2) = 3$

Quanto aos estudantes que não associam a taxa de variação instantânea da função f no ponto $x = 2$ à derivada de f neste ponto (categoria 3), quatro dos dez estudantes expressam respostas imprecisas das quais as informações obtidas não são suficientes para que possamos inferir elementos que estejam relacionados com o que é solicitado, como no caso do estudante A08 (Figura 18) que se limita em reescrever alguns dados da questão, porém não associa nenhuma das informações à taxa de variação instantânea da função. É importante assinalar que três estudantes dessa categoria utilizaram como respostas apenas o cálculo $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, ou seja, usaram a equação da reta tangente para encontrar o valor y correspondente à $x = 2$.

FIGURA 18: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A08 – QUESTÃO 3A


a) A taxa de variação instantânea da função f no ponto de abscissa $x = 2$. Explique.

A inclinação da reta tangente T no ponto (2, 3) é 2, portanto, em x=2, a reta T estaria com uma inclinação próxima a 2.

Referente ao item (b), o critério que consideramos relevante para categorização dos resultados obtidos foram se as respostas apresentadas faziam referência à reta tangente ao gráfico da função seja a partir do cálculo através de sua equação ou do valor $y = 3{,}2$ correspondente à reta tangente no ponto $x = 2{,}1$ presente no gráfico apresentado na questão. Vejamos a categorização dos dados obtidos na tabela a seguir.

TABELA 7: RESULTADOS OBTIDOS NO ITEM (B) DA QUESTÃO 3

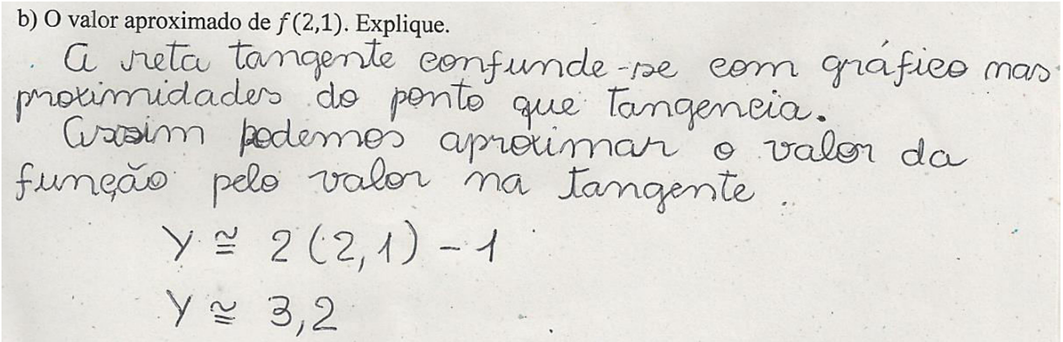
	Aproximação Linear	**Quantidade**
1	Identifica a reta tangente ao gráfico da função f como uma aproximação para a função em pontos próximos do ponto de tangência.	6
2	Não identifica a reta tangente ao gráfico da função f como uma aproximação para a função em pontos próximos do ponto de tangência.	12

FONTE: O autor (2017).

Notamos que a maioria dos estudantes não identifica a reta tangente ao gráfico de uma função f em um ponto de abscissa $x = a$ como sendo uma boa aproximação para a função f em pontos próximos de a.

Apresentamos a seguir algumas das respostas dadas pelos estudantes da categoria 1.

FIGURA 19: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A10 - QUESTÃO 3B

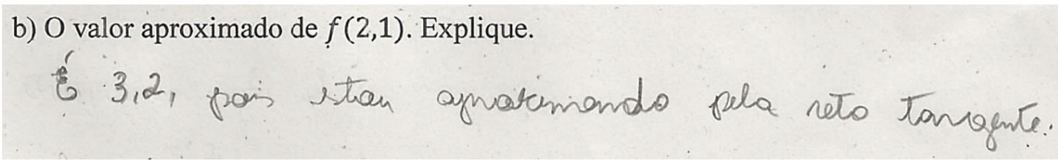

b) O valor aproximado de $f(2,1)$. Explique.

A reta tangente confunde-se com gráfico nas proximidades do ponto que tangencia.
Assim podemos aproximar o valor da função pelo valor na tangente.

$y \cong 2(2,1) - 1$

$y \cong 3,2$

FIGURA 20: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A05 - QUESTÃO 3B


b) O valor aproximado de $f(2,1)$. Explique.

É 3,2, pois estou aproximando pela reta tangente.

A Figura 19 acima mostra que a análise feita pelo estudante não é somente numérica. Além de utilizar a equação da reta tangente para encontrar o valor numérico, ele dá um significado à situação através de argumentos que se fundamentam em uma das propriedades exploradas no estudo de derivada. Já na resposta presente na Figura 20 é utilizada a informação do gráfico e justificada através de argumentos que se assemelham aos do estudante A10.

Encontramos ainda nas respostas de dois estudantes referentes à categoria 1 que o processo de determinação do valor aproximado para $f(2,1)$ está apenas associado ao uso da equação da reta tangente e não apresenta nenhum argumento que justifique a validez de sua resposta, mesmo assim, consideramos que esses interpretam a reta tangente como uma aproximação para função.

No geral, notamos que menos da metade dos estudantes investigados identificam a reta tangente ao gráfico de uma função f em um ponto de abscissa $x = a$ como sendo uma boa aproximação da função f para pontos próximos de a. Em contrapartida, tivemos doze estudantes que não fazem essa associação, o que é algo alarmante, pois é uma das compreensões que são exploradas nos cursos básicos de Cálculo e é de suma importância para resolução de diversos problemas.

6.4 Análise da questão 4 (Q-4)

Essa questão é baseada em um dos exemplos apresentados no livro "Cálculo: volume I" de Stewart (2006, p. 154). O objetivo do item (a) era analisar se estudante identifica o conceito de derivada a partir da compreensão microscópica. Com o item (b) o objetivo era identificar se os estudantes conseguem argumentar sobre o conceito de derivada ao aplicarmos em uma situação, a partir de sua notação.

Referente ao item (a), apenas quatro estudantes deixaram em branco. Dos que responderam, cinco apresentaram respostas que se baseiam em procedimentos característicos da compreensão microscópica, ou seja, identificam a inclinação de uma reta secante ao gráfico da função T que passa por dois pontos próximos de $(6, 17)$ como sendo um valor aproximado da derivada. A tabela a seguir mostra os resultados obtidos nesse item.

TABELA 8: RESULTADOS OBTIDOS NO ITEM (A) DA QUESTÃO 4

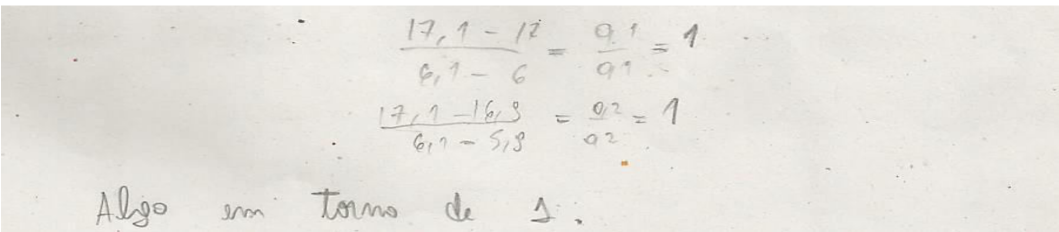
	Microscópica	**Quantidade**
1	Identifica o conceito de derivada a partir da compreensão microscópica.	5
2	Não identifica o conceito de derivada a partir da compreensão microscópica.	9

FONTE: O autor (2017).

Apresentaremos algumas respostas para explicitar os procedimentos adotados pelos estudantes.

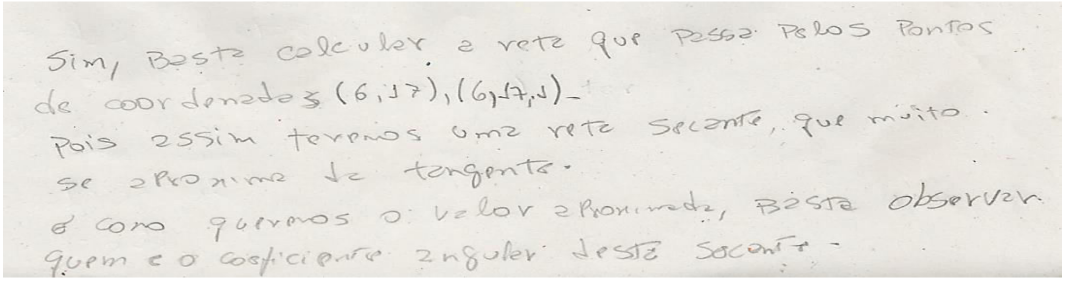
A Figura 21 mostra que o estudante interpreta corretamente os dados da questão para calcular o valor aproximado da derivada através dos instantes próximos a $h = 6$.

FIGURA 21: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A08 - QUESTÃO 4A



Já na Figura 22, podemos notar que o estudante além de adotar esse procedimento, recorre a argumentos que se fundamentam na aproximação da reta tangente através de retas secantes ao gráfico da função para pontos próximos de $(6{,}17)$.

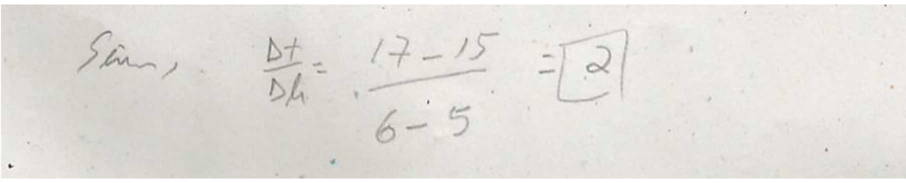
FIGURA 22: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A13 - QUESTÃO 4A


Sim, Basta calcular a reta que passa pelos pontos
de coordenadas (6,17),(6,17,1)_
Pois assim teremos uma reta secante, que muito
se aproxima da tangente.
e como queremos o valor aproximado, basta observar
quem é o coeficiente angular deste secante -

Dessa forma, é possível verificar que os procedimentos adotados por A08 e A13 para encontrar a derivada estão associados ao reconhecimento da inclinação local da curva em $h = 6$ como sendo uma boa estimativa do valor da derivada de T em $h = 6$, uma vez que foram utilizados os valores da função para os valores mais próximos de $h = 6$.

É interessante destacar que dois estudantes da categoria 2 associam a taxa de variação média da temperatura no intervalo $[5,6]$ com uma aproximação para derivada da função T em $h = 6$, conforme mostra o protocolo de um deles:

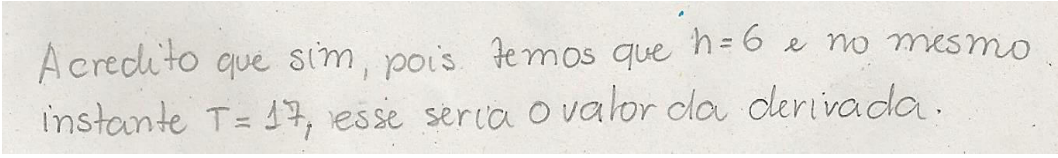
FIGURA 23: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A18 - QUESTÃO 4A


Sim, $\frac{\Delta t}{\Delta h} = \frac{17-15}{6-5} = \boxed{2}$

Diante do exposto, acreditamos que esses estudantes não identificam que uma melhor aproximação para o valor da derivada é taxa de variação média da função para pontos muito próximos do instante $h = 6$. É possível que eles não tenham se familiarizado com os métodos que caracterizam a compreensão microscópica do conceito de derivada.

Ainda na categoria 2 encontramos respostas confusas que afirmam ser possível estimar o valor da derivada, porém não expressam nenhum resultado numérico ou revelam uma interpretação incorreta dos dados. Além disso, encontramos respostas de estudantes que tentam explicar que era possível encontrar o valor da derivada via limite – definição formal de derivada e pela reta tangente. Outro dado preocupante encontrado quando analisamos as respostas de dois estudantes é que estes associam a derivada da função T em $h = 6$ à temperatura $T(6) = 17$ °C. O caso da Figura 24 abaixo exemplifica este último dado.

FIGURA 24: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A12 - QUESTÃO 4A


Acredito que sim, pois temos que $h = 6$ e no mesmo instante $T = 17$, esse seria o valor da derivada.

Diante desse resultado, constatamos que a interpretação em relação à derivada de uma função f em um ponto $x = a$ está relacionada ao valor da função nesse ponto. Esse fato mostra inequivocamente que esses estudantes ainda não haviam desenvolvido de forma satisfatória o raciocínio sobre o conceito de derivada. Resultado semelhante foi encontrado no item (a) da questão Q-3.

Quanto ao item (b), que envolvia a noção de derivada a partir de sua notação $T'(6)$, apenas quatro estudantes não apresentaram respostas. Os demais resolveram expressando algumas das compreensões do conceito. Apontamos essas compreensões a partir da mobilização das imagens conceituais evocadas em suas respostas, conforme foram categorizadas na tabela a seguir.

TABELA 9: RESULTADOS OBTIDOS NO ITEM (B) DA QUESTÃO 4

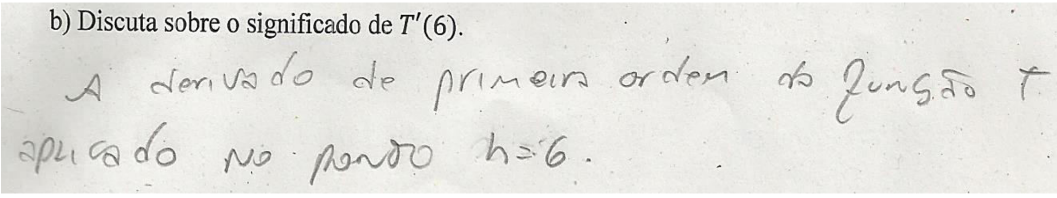
Imagem conceitual evocada "O significado de $T'(6)$"	**Compreensão**	**Quantidade**
A derivada da função T em $h = 6$.	Simbólica	6
A primeira derivada da função T em $h = 6$.	Simbólica	2
A derivada da constante 6.	Simbólica	1
A inclinação da reta tangente.	Geométrica	1
A variação da temperatura em $h = 6$.	Taxa de variação	4

FONTE: O autor (2017).

Apontamos na análise do item anterior que poucos dos estudantes conseguem ter sucesso nas suas respostas, todavia, no item (b) em que é solicitada uma explicação relativa ao significado da notação de derivada, verificamos o êxito nas respostas dadas pelos estudantes.

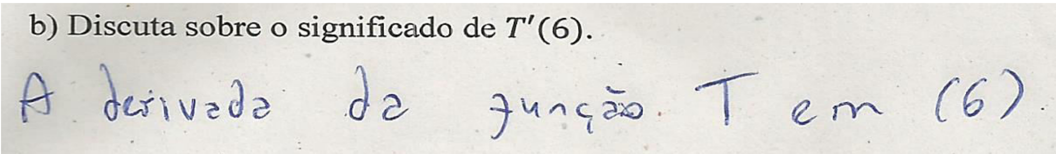
Percebemos que o sucesso dos estudantes neste item esta atrelado à compreensão simbólica do conceito de derivada. Pelo fato da questão tratar de grandezas físicas, acreditávamos que seria contemplada, de forma mais expressiva, entre as respostas dos estudantes, a mobilização de expressões que estabelecessem a notação $T'(6)$ como sendo a taxa de variação da temperatura no instante $h = 6$, porém, contamos que apenas quatro estudantes concebem essa compreensão. Além disso, notamos que existe uma variedade de imagens conceituais relacionadas à compreensão simbólica, conforme podemos perceber em alguns exemplos a seguir.

FIGURA 25: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A06 - QUESTÃO 4B


b) Discuta sobre o significado de $T'(6)$.

A derivado de primeira ordem do função T aplicado no ponto h=6.

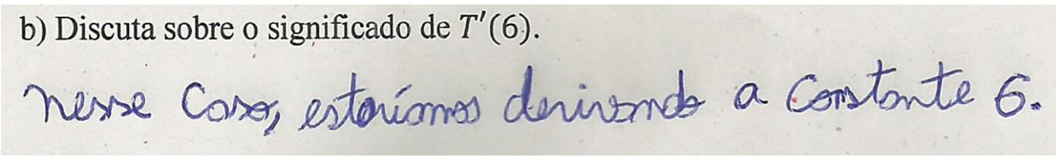
FIGURA 26: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A14 - QUESTÃO 4B


b) Discuta sobre o significado de $T'(6)$.

A derivada da função T em (6).

Vale destacar que outra resposta que consideramos como uma compreensão simbólica foi a do estudante A14, que mesmo se expressando de forma errônea, apresenta termos relacionados ao processo do cálculo da derivada, conforme mostra seu protocolo de resposta:

FIGURA 27: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A16 - QUESTÃO 4B


b) Discuta sobre o significado de $T'(6)$.

nesse caso, estaríamos derivando a constante 6.

A supracitada resposta evidencia uma interpretação da derivada de uma função f em um ponto $x = a$ como sendo a derivada do ponto $x = a$, provavelmente o estudante confunde a derivada de uma função em ponto específico com o processo de derivação relativo a uma variável, levando a afirmar que esta derivando o próprio ponto, ou seja, a constante 6.

Em geral, destacamos que quase todos os estudantes apresentaram um domínio razoável da compreensão simbólica, porém, poucos interpretam o conceito de derivada mediante aos aspectos da compreensão microscópica.

6.5 Análise da questão 5 (Q-5)

O objetivo dessa questão foi analisar se os estudantes compreendem o valor da derivada da função f em um ponto do seu domínio a partir de sua definição como o quociente de quantidades infinitesimais. A exploração do conceito de derivada se deu através de um procedimento relacionado ao cálculo aproximado da derivada da função $f(x) = 2^x$ em $x = 0$ que se baseava na expressão $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ para valores de h relativamente próximos de zero.

Constatamos que apenas um estudante não respondeu esta questão. Dos que responderam oito consideram o procedimento como uma forma correta de calcular o valor aproximado da derivada e justificaram através de argumentos que se aproxima da compreensão infinitesimal. Vejamos os resultados obtidos nessa questão na tabela a seguir.

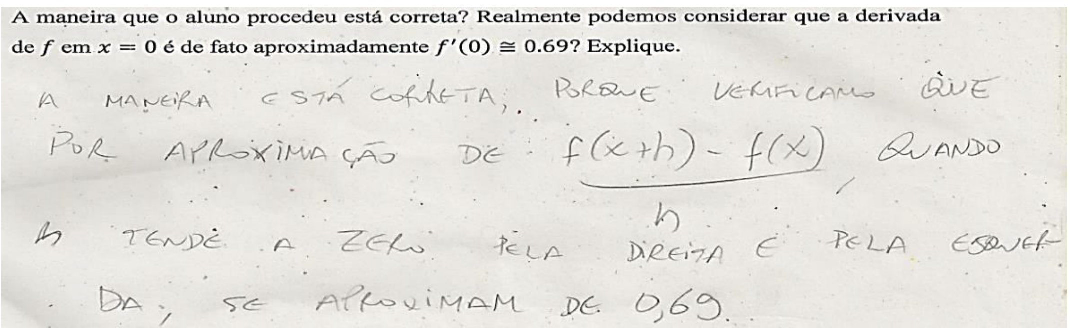
TABELA 10: RESULTADOS OBTIDOS NA QUESTÃO 5

	Infinitesimal	**Quantidade**
1	Interpreta a derivada como o quociente de quantidades infinitesimais.	8
2	Não interpreta a derivada como o quociente de quantidades infinitesimais.	10

FONTE: O autor (2017).

Ao analisar o desenvolvimento dos oito estudantes que consideram como correto o cálculo aproximado da derivada, foi possível observar que a maioria justificou suas respostas se baseando na diminuição do valor h para o quociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, ou seja, na ideia intuitiva do conceito de limite quando h tende zero, apontando que quanto mais próximo de zero for o valor de h, teremos uma aproximação melhor do valor da derivada. Assim, entendemos que estes estudantes tem familiaridade com a exploração infinitesimal do conceito de derivada. Tomemos como exemplo dessas interpretações a resposta do estudante A01.

FIGURA 30: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A01 - QUESTÃO 5


A maneira que o aluno procedeu está correta? Realmente podemos considerar que a derivada de f em $x = 0$ é de fato aproximadamente $f'(0) \cong 0.69$? Explique.

A MANEIRA ESTÁ CORRETA, PORQUE VERIFICAMOS QUE POR APROXIMAÇÃO DE $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ QUANDO h TENDE A ZERO PELA DIREITA E PELA ESQUERDA, SE APROXIMAM DE 0,69.

É fundamental ressaltar que dois estudantes da categoria 2 tentaram responder através de procedimentos simbólicos, um através do cálculo do limite e outro por técnica de derivação, porém se desnortearam nos cálculos. Novamente identificamos a ideia instrumental do cálculo, principalmente quando analisamos a resposta do estudante A14, pois realiza uma interpretação semelhante a que foi concebida em sua resposta ao item (b) da questão Q-4, comprovando que realmente entende a derivada de uma função real f em $x = a$ como sendo a derivada em relação ao valor obtido por $f(a)$, conforme mostra o seu protocolo de resposta a seguir.

FIGURA 28: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A16 - QUESTÃO 5

A maneira que o aluno procedeu está correta? Realmente podemos considerar que a derivada de f em $x = 0$ é de fato aproximadamente $f'(0) \cong 0.69$? Explique.

Ao meu ver, levando em conta que estamos querendo saber o valor de $f'(0)$ em $f(0) = 2^0 = 1$, a derivada seria zero.

Nesses casos fica claro que os estudantes não relacionam o quociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ para valores de h próximos de zero ao valor de $f'(a)$. Provavelmente, eles possuem um entendimento da derivada como valor resultante do processo de cálculo do limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ou dos métodos de obtê-la, o que para Tall e Vinner (1981) significa que esses participantes possuem uma noção estática do conceito de limite, isto é, consideram apenas o seu valor.

Observamos ainda que três participantes categoria 2 afirmaram que o procedimento adotado para estimar o valor da derivada estava correto, porém as informações não são suficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada relativa à aproximação do valor da derivada a partir do quociente de quantidades infinitesimais, como no caso do estudante A12.

FIGURA 29: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A12 - QUESTÃO 5

A maneira que o aluno procedeu está correta? Realmente podemos considerar que a derivada de f em $x = 0$ é de fato aproximadamente $f'(0) \cong 0.69$? Explique.

Sim. Pois ele foi calculando, encontrando valores e chegou a conclusão que $f'(0) \cong 0,69$.

Esse fato mostra que a compreensão infinitesimal do conceito de derivada do estudante ainda está em construção, pois a insuficiência de informações sugere que, por algum motivo, esta forma de abordagem do conceito derivada não lhe é muito familiar.

Em geral, os resultados desta questão revelam que mais da metade dos estudantes não tem familiaridade com a compreensão do conceito de derivada quando é abordado através do quociente de quantidades infinitesimais. Talvez apenas essa questão não seja suficiente para que fossem mobilizados elementos associados à compreensão desejada, pois possíveis concepções sobre derivadas de alunos que já cursaram Cálculo I podem depender dos livros e das metodologias utilizadas pelos professores da disciplina.

6.6 Análise da questão 6 (Q-6)

O objetivo desta questão era analisar se os estudantes conseguem interpretar a derivada de uma função em um dado ponto através da compreensão lógica, isto é, a partir da definição formal de limite. Para tanto, apresentamos informações relacionadas a este tipo de exploração para que estimulassem elementos da imagem conceitual dos estudantes.

Da análise constatamos que grande parte dos estudantes não mobilizou uma imagem conceitual relacionada à derivada da função $f(x) = x^2$ em $x = 1$ por meio da compreensão lógica. A Tabela 11mostra a categorização dos resultados obtidos.

TABELA 11: RESULTADOS OBTIDOS NA QUESTÃO 6

	Lógica	**Quantidade**
1	Interpreta a derivada através da compreensão lógica.	1
2	Não interpreta a derivada a derivada através da compreensão lógica.	17

FONTE: O autor (2017).

Pudemos observar somente na resposta do estudante A01 (Figura 32) uma noção sobre a definição de limite, pois foi o único que conseguiu encontrar a relação entre ϵ e δ. Notamos que houve uma preocupação muito significativa em associar $\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$ com $0 < |x - 1| < \delta$.

FIGURA 32: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A01 - QUESTÃO 6

FAZENDO $\delta = \varepsilon$ TEMOS QUE

$|x-1| = |x-1+2-2| = |x+1-2| = \left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \delta$

LOGO, COM $\delta = \varepsilon$, ENTÃO

$$\boxed{\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon}$$

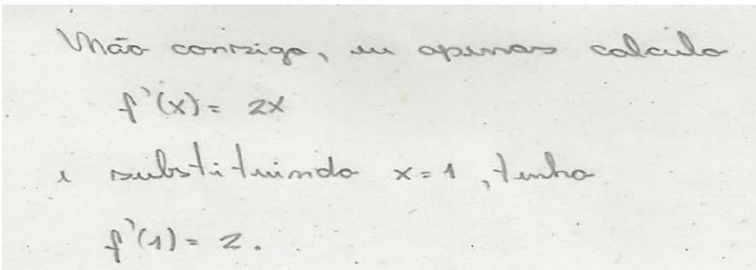
Observamos que dois estudantes da categoria 2 limitaram-se a tentar descrever ou reescrever algumas informações da questão, como no caso do estudante A08. Vejamos seu protocolo de resposta a seguir.

FIGURA 31: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A08 - QUESTÃO 6

Sabemos que $q(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Na questão temos que $f(x) = x^2$. Sabemos também que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |q(x) - d| < \varepsilon$. Como temos, na questão, $0 < |x-1| < \delta$ concluímos que $a = 1$. Assim, teremos que $q(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^2-1}{x-1}$. Pois $f(a) = a^2 = 1^2 = 1$. Como é dito que a derivada é 2, temos que $d = 2$. Como sabemos, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |q(x) - d| < \varepsilon$ só substituímos os valores obtidos. Teremos assim que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$.

É importante frisar que o insucesso dos estudantes nessa questão está associado à compreensão simbólica $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$. Entre os que responderam nove se apropriaram desse algoritmo para encontrar a função derivada $f'(x) = 2x$ e em seguida realizaram a substituição do ponto $x = 1$, obtendo o valor correspondente $f'(1) = 2$. Dos que optaram por essa forma de responder, destacamos a resposta do estudante A07 que afirma não conseguir mostrar através da definição formal e que apenas calculava a derivada, conforme mostra o seu protocolo de resposta (Figura 33).

FIGURA 33: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A07 - QUESTÃO 6


Não consigo, eu apenas calculo
$f'(x) = 2x$
e substituindo $x = 1$, tenho
$f'(1) = 2$.

Em suma, destacamos que mesmo apresentando informações que expressem a derivada de uma função f num ponto $x = a$ a partir da definição formal de limite, a maioria dos estudantes não mobilizou tal intepretação, o que nos leva a entender que a compreensão lógica do conceito de derivada é, por algum motivo, para esse grupo de estudantes pouco familiar, pois dos dozes que apresentaram alguma resposta apenas um conseguiu se expressar da forma que foi solicitada. Talvez esse descompasso, como é apontado pelos estudos de Gonçalves e Reis (2013), esteja atrelado às dificuldades no processo de ensino e aprendizagem sobre o conceito de limite, a qual faz com que os estudantes tenham algum tipo de "aversão" ao uso da definição formal.

6.7 Análise da questão 7 (Q-7)

Esta questão explora a compreensão simbólica do conceito de derivada, através das suas diferentes notações e regras de derivação. Através do item (a) tínhamos por objetivo investigar se os estudantes compreendem o conceito de derivada a partir da abordagem simbólica. Quanto ao item (b) pretendíamos analisar o desempenho dos estudantes numa atividade que necessita do entendimento de algumas propriedades necessárias para o cálculo de derivadas.

Em relação ao item (a), a análise foi realizada mediante as imagens conceituais mobilizadas pelos estudantes que possibilitam a verbalização do conceito de derivada quando é apresentado simbolicamente. Verificamos que todos os estudantes responderam esse item e que apenas três apresentaram respostas incorretas quanto à interpretação de algumas notações. Apresentaremos na Tabela 12 uma categorização dos resultados obtidos para cada notação segundo as imagens conceituais evocadas pelos participantes da pesquisa.

TABELA 12: RESULTADOS OBTIDOS NO ITEM (A) DA QUESTÃO 7

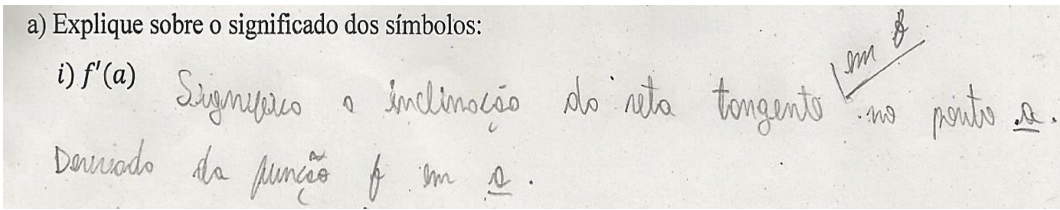
	Imagens conceituais evocadas	**Quantidade**
$i)$	A derivada da função f no ponto a.	10
	A primeira derivada de uma função f no ponto a.	6
	Derivada primeira da função $f(a)$.	1
	A inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto a.	1
	Função derivada de a.	1
$ii)$	Derivada de y em relação à x.	16
	Valor da derivada de uma função $y = f(x)$.	1
	Mostra como a função varia.	1
	A derivada como uma função.	1
$iii)$	A definição de derivada de uma função f em x.	7
	O limite quando Δx tende a zero.	5
	Derivada de uma função em um ponto x.	6

FONTE: O autor (2017).

É importante ressaltar que os estudantes A08 e A10 mobilizaram respectivamente duas intepretações nas notações $i)$ e $ii)$, por isso obtemos um total de dezenove interpretações em cada uma delas. Esse resultado sugere que a exploração do conceito de derivada pode possibilitar aos estudantes a construção de diferentes imagens conceituais.

Podemos notar na Tabela 12 que não houve uma quantidade significativa de estudantes que expressaram suas respostas em função das outras formas de compreensão do conceito de derivada, apenas os estudantes A08 e A10 que além expressar suas respostas através da compreensão simbólica, mobilizam uma interpretação das notações como uma variação e inclinação da reta tangente, conforme podemos observar em seus protocolos de respostas:

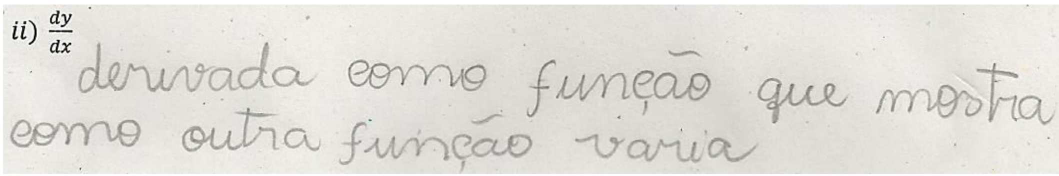
FIGURA 34- PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A08 - QUESTÃO 7A


a) Explique sobre o significado dos símbolos:

i) $f'(a)$ Significa a inclinação da reta tangente em f no ponto a.

Derivada da função f em a.

FIGURA 35: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A10 - QUESTÃO 7B


$ii)$ $\frac{dy}{dx}$ derivada como função que mostra como outra função varia

A resposta do estudante A08 em $i)$ sugere uma compreensão geométrica do conceito de derivada. Já na resposta relativa à notação $ii)$ do estudante A10 a parte "*mostra como a outra função varia*" evidencia uma compreensão como uma taxa de variação.

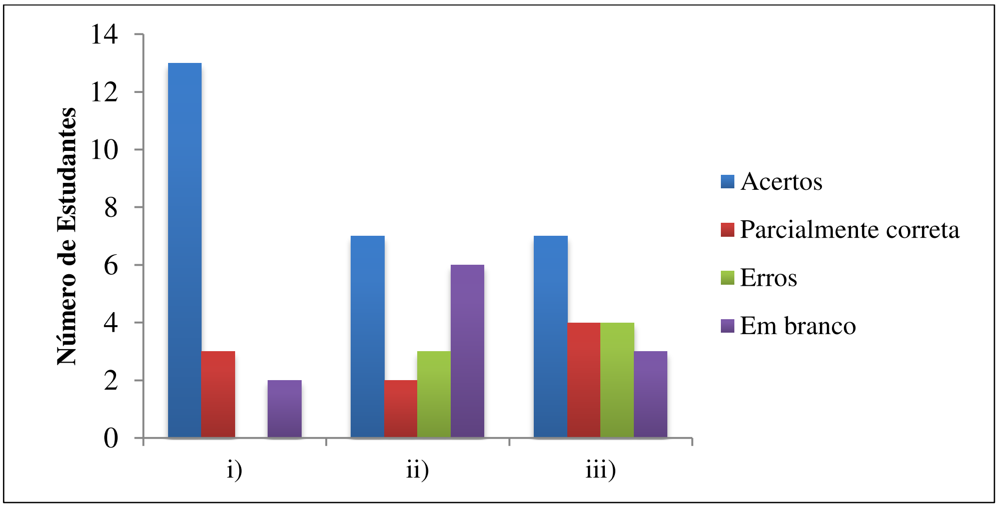
Referentes às respostas da notação $i)$, chamara-nos a atenção as que mobilizam as intepretações "derivada primeira de f no ponto a" e "derivada primeira da função $f(a)$". Acreditamos que essas intepretações foram fornecidas pelo fato do conceito de derivada possuir uma gama de propriedades que possibilita a formação de diversas imagens.

Apesar de alguns erros conceituais apresentados, o percentual de respostas ao item (a) que se aproxima do que é estabelecido formalmente pelos matemáticos, sugere que a compreensão simbólica foi bem mobilizada pelos participantes dessa pesquisa em relação ao que foi explorado.

O item (b) teve uma considerável quantidade de respostas corretas, a média geral de acertos por estudante foi de 1,56. Essa quantidade só não foi maior, porque sete estudantes cometeram erros no cálculo da derivada de algumas funções ao realizarem operações algébricas e ao aplicar as regras de derivação, porém mostram certo entendimento sobre os procedimentos necessários.

O Gráfico 3 mostra o desempenho dos estudantes nesse item onde foi realizada a distribuição geral de acertos, erros e respostas parcialmente corretas. Com base nele podemos perceber que o maior número de respostas em branco foi no subitem $ii)$ que trata da derivada da função exponencial $g(x) = e^{3x^2+x}$ no ponto específico $x = 0$, e que o maior número de acertos foi no subitem $i)$. Já a maior frequência em erros aparece no subitem $iii)$, que trata a derivada da função trigonométrica $S(y) = \operatorname{sen} y^2$ por meio da Regra da Cadeia.

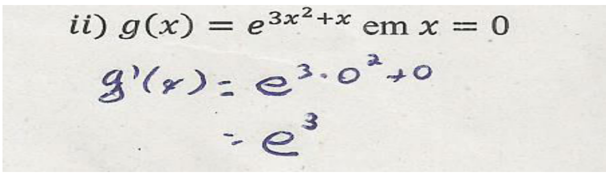
GRÁFICO 2: DESEMPENHO DOS ESTUNDANTES NO ITEM (B) DA QUESTÃO 7



FONTE: O autor (2017).

Entre os investigados que cometeram alguns erros, destacamos a resolução do estudante A02 (Figura 36), que demonstrou saber derivar a função exponencial $f(x) = e^x$, porém não percebeu que se tratava de uma função composta e que necessitava aplicar a Regra da Cadeia para obter a função derivada. Além disso, cometem um erro quanto à substituição do ponto $x = 0$.

FIGURA 36: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A02 - QUESTÃO 7B

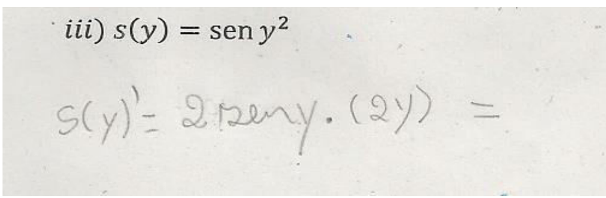

$ii)\ g(x) = e^{3x^2+x}$ em $x = 0$

$g'(x) = e^{3\cdot 0^2+0}$

$= e^3$

É interessante destacar que um dos estudantes afirmou que não lembrava mais como calcular a derivada das funções. Também percebemos que a maioria sentiu mais dificuldade no cálculo das derivadas das funções que necessitavam da Regra da Cadeia, temos como exemplo a respeito desse dado a resposta do estudante A04.

FIGURA 37: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A04 - QUESTÃO 7B


$iii)\ s(y) = \operatorname{sen} y^2$

$s(y)' = 2\,\operatorname{sen} y \cdot (2y) =$

Diante da análise desse item identificamos que, mesmo cometendo alguns erros, a maioria dos estudantes apresenta um domínio razoável dos procedimentos e regras necessárias para o cálculo de derivadas, pelo menos das funções abordadas nesta pesquisa.

Lembrando que as compreensões exploradas sobre o conceito derivada foram *Infinitesimal* (C1), *Simbólica* (C2), *Lógica* (C3), *Geométrica* (C4), *Taxa de variação* (C5), *Aproximação* (C6), *Microscópica* (C7). Elaboramos uma categorização geral das compreensões mobilizadas pelos estudantes ao responder as questões do nosso instrumento de coleta de dados, enfatizando quantas cada estudante possui e também a quantidade deles que expressa cada compreensão, conforme mostra a tabela abaixo.

TABELA 13: COMPREENSÕES MOBILIZADAS PELOS ESTUDANTES

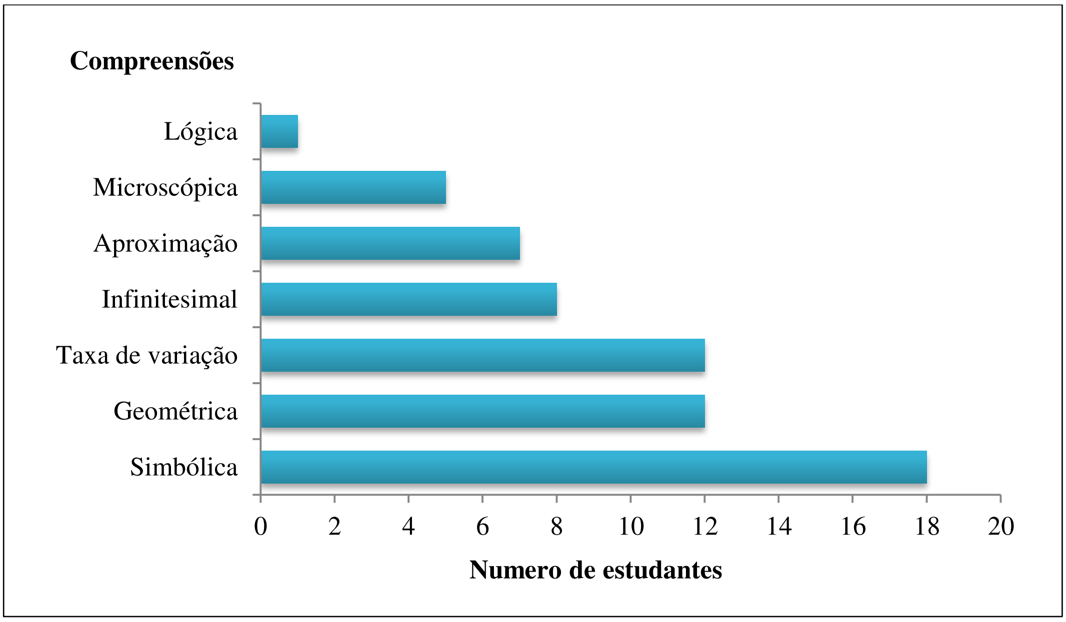
Estudantes	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	**Total**
A01	x	x	x	x	x		x	**6**
A02	x	x			x			**3**
A03	x	x		x				**3**
A04		x		x		x		**3**
A05	x	x		x	x	x		**5**
A06		x		x	x			**3**
A07	x	x		x	x	x		**5**
A08	x	x		x	x	x	x	**6**
A09	x	x		x	x	x	x	**6**
A10		x		x	x	x	x	**5**
A11		x		x	x			**3**
A12		x		x				**2**
A13		x		x	x		x	**5**
A14		x			x			**2**
A15		x						**1**
A16		x			x			**2**
A17		x						**1**
A18	x	x						**2**
Total	**8**	**18**	**1**	**12**	**12**	**6**	**5**	

FONTE: O autor (2017).

Os dados obtidos na Tabela 13 revelam que todos os estudantes pesquisados compreendem simbolicamente o conceito de derivada e também que a maioria deles mobilizou a compreensão geométrica (12) e taxa de variação (12). Quando confrontados com os procedimentos da compreensão infinitesimal menos da metade (8) apresentou certo entendimento. Além disso, somente um estudante interpreta o conceito de derivada através da compreensão lógica e poucos evidenciaram a microscópica (5) e aproximação (6).

Finalizamos a nossa análise dos resultados obtidos por meio das respostas dos estudantes ao o questionário que explorava as diferentes formas de compreender o conceito e derivada. Em linhas gerais, pudemos observar que as compreensões contempladas de forma mais expressiva entre as respostas foram: simbólica, geométrica e taxa de variação. O Gráfico 3 ilustra esses resultados.

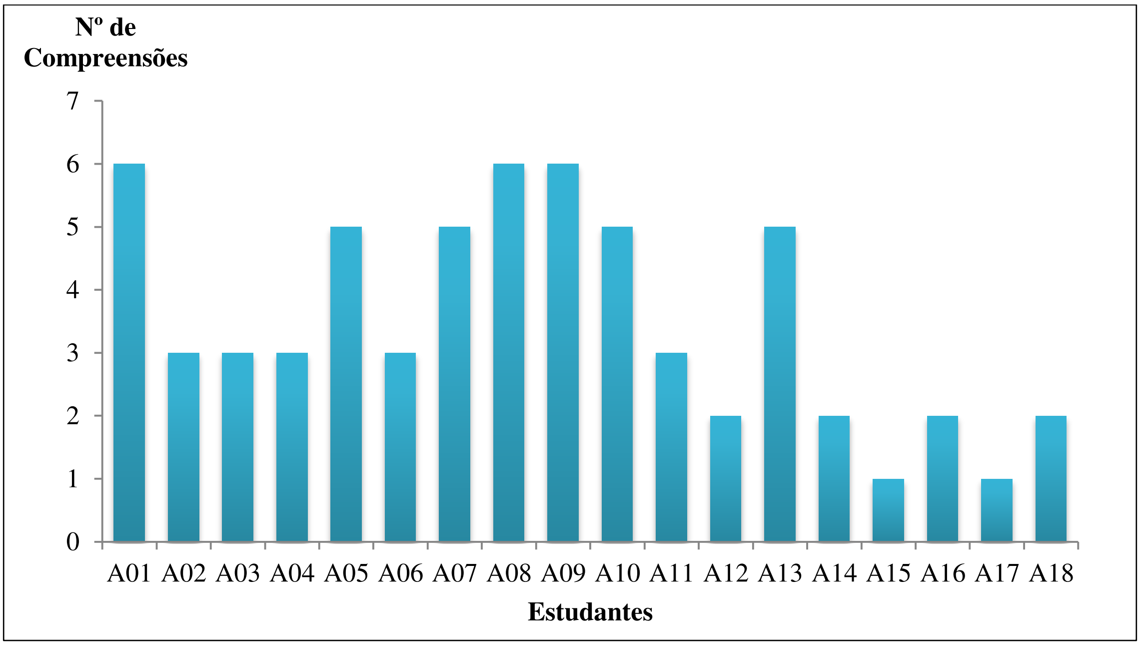
GRÁFICO 3: NÚMERO DE ESTUDANTES POR COMPREENSÃO



FONTE: O autor (2017).

Por meio dos dados presentes na Tabela 13 foram ainda identificados pontos relevantes para nossa questão de pesquisa quanto ao grupo de estudantes investigado. No geral, constatamos que nenhum estudante mobiliza todas as compreensões relativas ao conceito de derivada e que todos possuem pelo menos uma, percebe-se também que sete estudantes mobilizam pelo menos cinco compreensões. Para nossa preocupação averiguamos que onze dos estudantes pesquisados interpretam o conceito de derivada através de três ou menos compreensões, conforme podemos observar no gráfico a seguir.

GRÁFICO 4: NÚMERO DE COMPREENSÕES MOBILIZADAS POR ESTUDANTE



FONTE: O autor (2017).

Diante do exposto, percebe-se que a média de compreensões por estudante é de 3,5 e onze estudantes estão abaixo da média. O ideal era que a média fosse mais próxima de 7. Possivelmente, os que tiveram mais destaque, viram de forma mais significativa o conceito de derivada em suas múltiplas formas de compreensão.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo do nosso trabalho foi investigar as compreensões sobre o conceito de derivada de função real de uma variável real de estudantes universitários do curso de Matemática-Licenciatura. Para tanto, pensamos em três objetivos específicos, a saber: investigar, em trabalhos já realizados, quais as dificuldades em relação à apreensão do conceito de derivada de função real de uma variável real; elaborar/aplicar um questionário que envolva as compreensões do conceito de derivada de função de uma variável real; analisar as compreensões reveladas pelos estudantes com respeito ao conceito de derivada.

Pudemos perceber em nosso levantamento bibliográfico que o Cálculo Diferencial e Integral é de fundamental importância na formação do pensamento avançado em matemática e que possui inúmeras aplicações, além disso, tem se tornado alvo de diversas pesquisas no contexto da Educação Matemática no Ensino Superior, principalmente no que se refere à compreensão do conceito de derivada de função real de um variável real. Os principais resultados dessas pesquisas indicam que os estudantes apresentam dificuldades em atividades que envolvem os aspectos conceituais da derivada.

Em relação ao objetivo desta investigação, pudemos identificar que os resultados, principalmente, das questões Q-1, Q-2, Q-3 e Q-7 sugerem que a compreensão do conceito de derivada como sendo a inclinação da reta tangente e como uma taxa de variação foi bem mobilizada pelos estudantes investigados e que eles apresentam um bom desempenho e uma variedade de imagens conceituais nas questões que exploram a compreensão simbólica. No entanto, poucos identificam a reta tangente como sendo uma aproximação da função para valores próximos do ponto em que a reta tangencia o gráfico da função. Além disso, a maioria dos estudantes revela não entender os procedimentos associados à compreensão microscópica, infinitesimal e, principalmente, quando são confrontados com a lógica, a exemplo na questão Q-6.

Sobre o desenvolvimento dos estudantes no que se refere à interpretação das formas de compreensões exploradas, o estudo revelou que alguns apresentam impasses quanto ao conhecimento sobre algumas delas, são eles:

- A derivada de uma função é interpretada como sendo a reta tangente;
- A derivada é concebida como sendo o ponto de inclinação da reta tangente ao gráfico da função;

- A derivada de uma função é concebida como sendo a ordenada do ponto no qual a reta tangencia o gráfico da função;
- Interpreta o conceito de derivada de uma função como um dos métodos de obtê-la;
- Confundem a equação da reta tangente ao gráfico da função com a função derivada;
- Interpretam a derivada de uma função em um ponto como sendo o valor da função nesse ponto.

Desse modo, as interpretações descritas acima são semelhantes as que foram encontradas nas pesquisas desenvolvidas por Vinner (1992), Amit e Vinner (1990), D'Avoglio (2002) e Meyer (2003), o que sugere que alguns estudantes criaram imagens conceituais de forma errônea sobre algumas compreensões do conceito de derivada.

Esta pesquisa não teve como intenção verificar se os estudantes entendem corretamente todas as formas de compreensão sobre o conceito de derivada, como é apontado por Thurston (1994). Estávamos apenas interessados em averiguar se diante de atividades que explorem tais compreensões os estudantes pesquisados conseguem mobilizá-las e com quais eles têm certa familiaridade. Nesse sentido, constatamos que todos possuem alguma compreensão relativa ao conceito de derivada que, possivelmente, foi consolidada através das experiências vivenciadas ao longo da formação inicial, sendo as compreensões contempladas de forma mais expressivas entre as respostas dos estudantes a simbólica, geométrica e taxa de variação.

Além disso, foi possível notar que alguns estudantes mobilizaram um número maior de compreensões em relação a outros, que a média de compreensões mobilizadas é de 3,5 compreensões por estudante e que mais da metade está abaixo da média, o que sugere um descompasso quanto à apreensão do conceito de derivada pelo grupo investigado. Por ser um grupo heterogêneo, composto de estudantes de diferentes períodos do Curso de Matemática, concluímos que estes podem ter vivenciado, principalmente, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I onde nosso objeto de investigação é mais abordado, diferentes metodologias de ensino e também referências bibliográficas distintas, um ponto a ser aprofundado em estudos futuros. Também, vale destacar que o processo de internalização de um conceito matemático depende de cada indivíduo e isso pode refletir na sua compreensão. Esses podem ser uns dos fatores que fazem alguns estudantes possuírem mais compreensões que outros.

Em virtude dos resultados dessa pesquisa torna-se interessante pensar na importância do desenvolvimento de novas metodologias de ensino que valorizem e integrem em sala de aula o trabalho com as múltiplas compreensões do conceito de derivada, assim como de outros conceitos matemáticos, tendo em vista a existência de problemas no cotidiano que exigem o uso das diferentes formas de compreensão e que estas são de extrema importância para tecedura do conceito.

Esperamos que as considerações realizadas neste trabalho possam subsidiar novas investigações no sentido de mudanças positivas no processo de ensino e aprendizagem do conceito de derivada. Sugerimos em pesquisas futuras, uma investigação sobre as compreensões dos estudantes de uma turma específica de Cálculo Diferencial e Integral I, onde tiveram a mesma metodologia e referências. Outra sugestão interessante seria investigar as relações entre as compreensões do conceito de derivada presentes nos livros da referencia básica da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I e as compreensões dos estudantes egressos dessa disciplina.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; FATORI, L. H.; SOUZA, L. G. S. Ensino de Cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática. **Revista de Ciência e Tecnologia**, São Paulo-SP, v. 10, n. 16, 2007.

ALMEIDA, C.; VISEU, F. Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. **Revista Portuguesa de Educação**, Braga, v. 15, n. 1, p. 193-219, 2002.

AMIT, M.; VINNER, S. **Some Misconceptions in Calculus-Anecdotes or the Tip of Iceberg?**. In: Proceedings Fourteenth PME Conference. México, v.1 n.14, p. 3-10, 1990.

ÁVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável, v. 1**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução de Luíz Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 7, 1979.

BEZERRA, A. S. V. **Que razões levam os alunos de graduação a um fracasso generalizado nas disciplinas de cálculo diferencial e integral.** Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia. Campina Grande, 2013. 108 f.

BORTOLOSSI, H. J. **Cálculo Diferencial a Várias Variáveis**. 2. ed. São Paulo: Loyola, 2002.

CATAPANI, E. C. Cálculo em serviço: um estudo exploratório. **Bolema**, Rio Claro-SP, v.14, n. 16, p. 48-62, 2001.

DALL'ANESE, C. **Conceito de derivada:** Uma proposta para seu ensino e aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2000. 140 f.

D'AVLOGLIO, A. R. **Derivada de uma função num ponto: Uma forma significativa de introduzir o conceito**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2002. 92 f.

ESCARLATE, A. C. **Uma investigação sobre a aprendizagem de integral**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal de Rio de Janeiro, Instituto de Matemática. Rio de Janeiro, 2008. 154 f.

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, Campinas, SP, n.18, p.107-115, jun. 2005.

GODOY, L. F. S. **Registros de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade católica de São Paulo. São Paulo, 2004. 106 f.

GOMES, R. Análise e interpretação de dados de pesquisa qualitativa. In: MINAYO, M. C. S. (Org.). **Pesquisa social:** teoria, método e criatividade. 28. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2009.

GONÇALVES, D. C.; REIS, F. S. Atividade Investigativas de Aplicações das Derivadas Utilizando o GeoGebra. **Bolema**, Rio Claro - SP, v. 27, n. 46, p. 417-432, 2013.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino de Cálculo e um estudo sobre números reais. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. Cap. 1, p.11-26.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Harba, v. 1, 1994.

LEME, J. C. M. **Aspectos processuais e estruturais da noção de derivada**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2003. 89 f.

LIBÂNEO, J. C. Tendências pedagógicas na prática escolar. In: ______. **Democratização da Escola Pública - A Pedagogia Crítico-Social dos Conteúdos**. 19. ed. São Paulo: Loyola, 1992. Cap. 1, p. 3-35.

LIMA, A. A. N. **Introduzindo o conceito de derivada a partir da ideia de variação**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia. Campina Grande, 2012. 113 f.

LIMA, E. L. **Análise Real, v.1**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MARTINS JUNIOR, J. C. **Ensino de derivadas em cálculo I:** aprendizagem a partir da visualização com o uso do Geogebra. Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto: Ouro Preto, 2015. 123 f.

MEYER, C. **Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2003. 159 f.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 6 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014. 232p.

PINTO, R. L. **Definições matemáticas sobre funções e suas derivadas como um eixo de discussão para o ensino e a aprendizagem do Cálculo**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Ouro Preto, 2014. 144 f.

RAMOS, V. V. **Dificuldades e concepções de alunos de um curso de licenciatura em matemática, sobre derivada e suas aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009. 86 f.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. Cap. 5, p. 81-97.

REZENDE, W.M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003. 468 f.

SILVA, J. F.; BORGES NETO, H. **Questões Básicas do Ensino do Cálculo**. Artigo Científico. Laboratório de Pesquisa Multimeios da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, 1994. Disponível em: <http://www.multimeios.ufc.br/arquivos/pc/artigos/artigo-questoes-basicas-do-ensino-de-calculo.pdf>. Acesso em: 07 setembro de 2016.

STEWART, J. **Cálculo, v. 1.** 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

TALL, D.; VINNER, S. **Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity**. Educational Studies in Mathematics. Amsterdam: North-Holland, v.12, n.2, 1981. p. 151-169.

THOMAS, G. B. **Cálculo, v. 1**. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009.

THURSTON, W. P. **Sobre prova e Progresso em Matemática**. Trad. de Mário José Dias Carneiro, Michel Spira e Pedro Mendes, Matemática Universitária, nº 17. Dezembro de 1994.

VINNER, S. The role of definitions in theteaching and learning of Mathematics. In: Tall, D. O (Ed), **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. Cap. 5, p. 65-81.

VINNER, S. The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In Harel, Guershon & Dubinsky, Ed (eds.), **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy**. Washington: Mathematical Association of America, 1992. p. 195-213.

ANEXO A - QUESTIONÁRIO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE - NFD
MATEMÁTICA - LICENCIATURA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Este questionário faz parte da pesquisa do meu Trabalho de Conclusão de Curso, um dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática. Suas respostas são de suma importância para efetivação deste trabalho. Esperamos contar com sua contribuição. Obrigado pela Participação.

Nome:____.

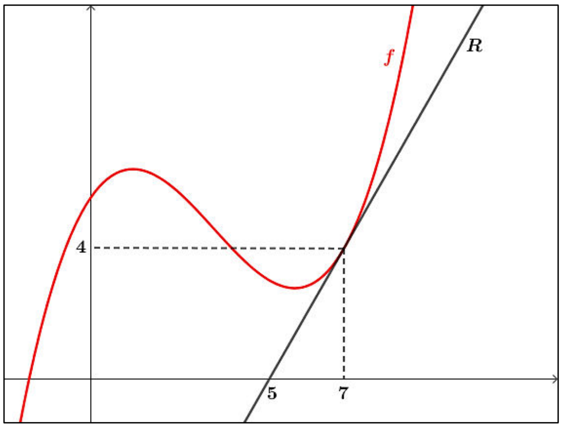
Curso:________________________. **Período:**___________________.

Questão 1

Seja $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de uma variável real definida no intervalo aberto I. Descreva de acordo com a sua concepção o que é a derivada da função f em um ponto a qualquer do seu domínio I.

Questão 2

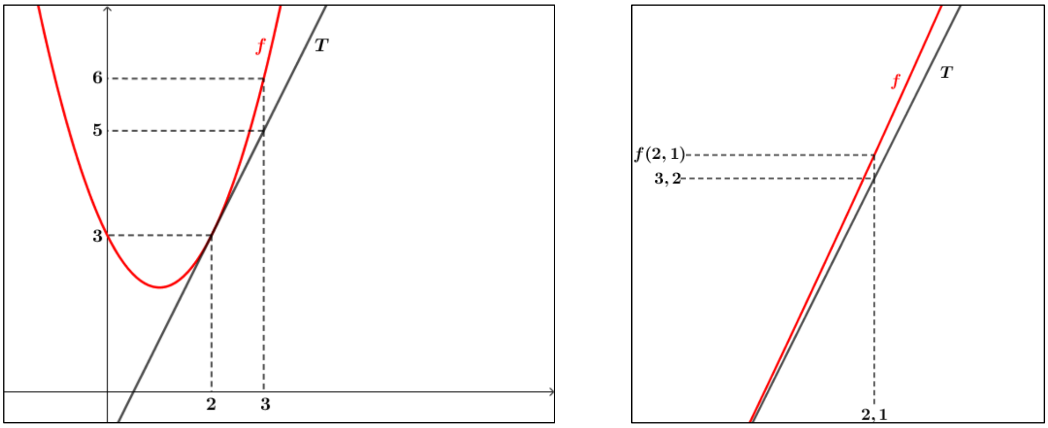
Na figura abaixo a reta R é tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(7, 4)$ e intercepta o eixo x no valor 5, o que significa que esta reta tem inclinação $m = \frac{4-0}{7-5} = 2$. Diante do exposto, é possível dizer qual o valor da derivada da função f em $x = 7$? Explique.



Questão 3

Conforme a figura a seguir a reta T de equação $y = 2x - 1$ é tangente ao gráfico da função f no ponto $(2,3)$, o que implica que a derivada da função f neste ponto é igual a 2.

De acordo com as informações da figura, é possível determinar a taxa de variação média entre os pontos $x = 2$ e $x = 3$ da função f e da reta tangente T, que são respectivamente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-3}{3-2} = 3$ e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-3}{3-2} = 2$.



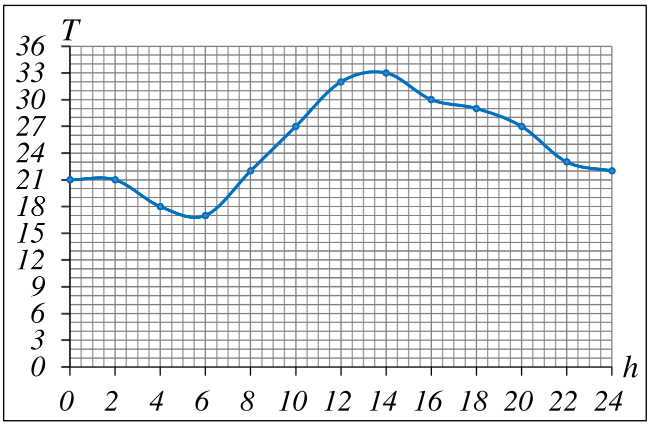
Diante do exposto, qual:

a) A taxa de variação instantânea da função f no ponto de abscissa $x = 2$. Explique.

b) O valor aproximado de $f(2{,}1)$. Explique.

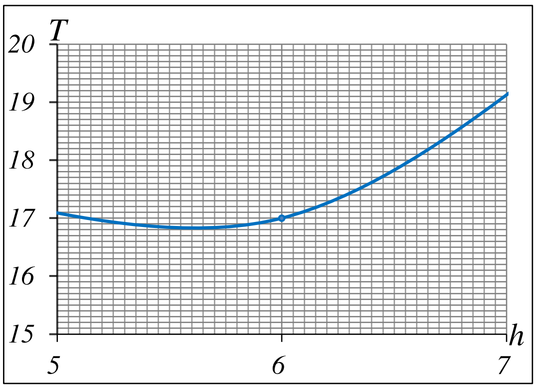
Questão 4

A temperatura na cidade de Caruaru registrada após a meia-noite em 2 de junho é dada pela função $T(h)$, onde T é a temperatura dada em graus Celsius (°C) que depende do instante h, dado em horas, após o inicio do registro. O gráfico mostra como o valor da temperatura T muda em função do tempo h.



Diante deste fenômeno,

a) É possível estimar o valor da derivada da função temperatura T em $h = 6$, observando as temperaturas da cidade e os instantes correspondentes obtidos através de um "zoom" em torno ponto de coordenadas $(6{,}17)$, conforme são apresentados no gráfico e na tabela? Se sim, determine-a. Se não, explique por quê.



h	T
5,6	16,7
5,8	16,8
5,9	16,9
6	17
6,1	17,1
6,3	17,4
6,5	17,8

b) Discuta sobre o significado de $T'(6)$.

Questão 5

Foi solicitado a um estudante de matemática para que ele encontrasse o valor da derivada da função $f(x) = 2^x$ no ponto de abscissa $x = 0$, ou seja, determinasse $f'(0)$. Diante desse problema, o estudante pensou na seguinte maneira:

Sabendo que a derivada de uma função em ponto x de seu domínio é dada por $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, o estudante usou uma calculadora para encontrar valores para expressão $\frac{2^h-1}{h}$, tomando-se os valores de h próximos, porém diferentes, de zero, apresentando-os em uma tabela.

h	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$
$\frac{2^h-1}{h}$	$0{,}670$	$0{,}691$	$0{,}693$	$0{,}693$	$0{,}718$	$0{,}696$	$0{,}693$	$0{,}693$

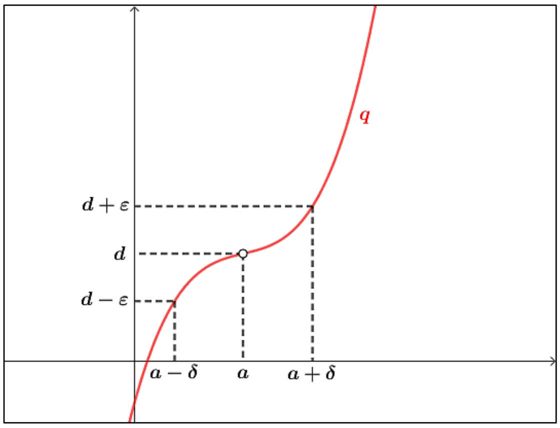
Da evidência numérica, o estudante percebeu que os valores parecem tender a um número próximo de $0{,}69$ para h cada vez mais próximo de zero, levando a uma estimativa $f'(0) \cong 0{,}69$.

A maneira que o aluno procedeu está correta? Realmente podemos considerar que a derivada de f em $x = 0$ é de fato aproximadamente $f'(0) \cong 0{,}69$? Explique.

Questão 6

Seja f uma função definida sobre um intervalo aberto e a um ponto de seu domínio. Definimos a função $q(x)$ para $x \neq a$, ilustrada na figura abaixo, por $q(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Então, dizemos que o número d é a derivada de f em a, quando: a distância entre $q(x)$ e d fica arbitrariamente pequena tomando a distância de x a a suficientemente pequena, mas diferente de zero, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |q(x) - d| < \varepsilon$.



Utilizando essas informações, mostre porque a derivada da função $f(x) = x^2$ em $x = 1$ é 2, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ talque $0 < |x-1| < \delta$ implica $\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$.

Questão 7

Responda os seguintes quesitos.

a) Explique sobre o significado dos símbolos:

$i)\ f'(a)$

$ii)\ \frac{dy}{dx}$

$iii)\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

b) Encontre a derivada das funções:

$i)\ v(t) = (t^2 - 5t)(t^3 - 3t^2 + 4)$

$ii)\ g(x) = e^{3x^2+x}$ em $x = 0$

$iii)\ s(y) = \operatorname{sen} y^2$