UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO – UFPE
CAMPUS ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

KAROLINA LIMA DOS SANTOS ARAÚJO

PROBLEMAS DE ARRANJO E COMBINAÇÃO: uma intervenção a partir dos invariantes prescritivos de ordem e repetição de Combinatória no Ensino Médio.

CARUARU
2017

KAROLINA LIMA DOS SANTOS ARAÚJO

PROBLEMAS DE ARRANJO E COMBINAÇÃO: uma intervenção a partir dos invariantes prescritivos de ordem e repetição de Combinatória no Ensino Médio.

Trabalho de Conclusão Curso apresentado ao Núcleo de Formação Docente da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Área de Concentração: Ensino (Matemática)

Orientadora: Prof.ª. Meª. Cristiane de Arimatéa Rocha

CARUARU
2017

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva CRB/4 - 1223

A663p Araújo, Karolina Lima dos Santos.
Problemas de arranjo e combinação; uma intervenção a partir dos invariantes prescritivos de ordem e repetição de combinatória de ensino médio. / Karolina Lima dos Santos Araújo. – 2017.
69f.;il.: 30 cm.

Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2017.
Inclui Referências.

1. Aprendizagem baseada em problemas - São Bento do Una (PE). 2. Aprendizagem por atividades – São Bento do Una (PE). 3. Matemática (Ensino médio). 4. Análise combinatória - São Bento do Una (PE). 5. Raciocínio. I. Rocha, Cristiane de Arimatéa (Orientadora). II. Título.

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2017-263)

KAROLINA LIMA DOS SANTOS ARAÚJO

PROBLEMAS DE ARRANJO E COMBINAÇÃO: UMA INTERVENÇÃO A PARTIR DOS INVARIANTES PRESCRITIVOS DE ORDEM E REPETIÇÃO DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO.

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da universidade Federal de Pernambuco e Aprovada_____ em 12 de dezembro de 2017

Banca Examinadora:

Prof. Cristiane de Arimatéa Rocha
(Orientadora)

Prof. José Jefferson da Silva
(Examinador (a) Externo (a))

Prof. Valdir Bezerra dos Santos Júnior
(Examinador (a) Externo (a))

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me concedido o dom da vida, por ter iluminado meu caminho e permitido superar as situações difíceis durante o curso.

A minha família, por estarem sempre comigo me apoiandao em todas as decisões, em especial aos meus pais por estarem sempre comigo nos momentos tristes e felizes desta caminhada.

A minha orientadora Cristiane Rocha que me auxiliou na elaboração e construção deste trabalho.

Ao professor Valdir pela ajuda na construção deste trabalho, nas disciplinas de Metodologia da pesquisa Educacional e trabalho de conclusão do curso II.

A todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática da UFPE que contribuíram para a minha formação profissional.

Aos participantes desta pesquisa, sem os quais não seria possível a realização desta investigação.

A Josenildo Almeida pela ajuda e incentivo durante a realização deste trabalho.

A todos os meus colegas que compartilharam tristezas e alegrias desde o início do curso até agora, em especial a Monalisa Melo, Anderson Maike, Anyla Laíse, Marina Juliana e Thiago Gomes, pelo incentivo, ombro amigo e pela ajuda prestada durante todo este percurso.

Aos meus colegas de caminhada por me oportunizarem momentos tão bons e descontraídos durante o curso, em especial a Amélia, Aneilson, Carla, Fenelon, Gabriel, Elisa, Cícera, Aline, Caio, Anverton e Marcio.

"O homem que sabe reconhecer os limites da sua própria inteligência está mais perto da perfeição."

Johann Wolfgang Von Goethe

RESUMO

A presente pesquisa busca analisar os conhecimentos que os estudantes do segundo ano do Ensino Médio têm em relação as situações, invariantes e as possíveis representações utilizadas por eles nos problemas combinatórios envolvendo arranjo e combinação. Esta pesquisa fundamentou-se na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, especialmente nas noções de invariantes prescritivos e relacionais, como também nas representações simbólicas relativas a problemas de arranjo e combinação. Utilizamos como procedimento metodológico a aplicação de um pré-teste, intervenções e um pós-teste. Na análise dos resultados, percebemos que os estudantes no pré-teste apresentaram muitas dúvidas sobre as situações envolvendo arranjo e combinação principalmente com os problemas envolvendo a repetição dos elementos. Durante a intervenção observamos que a maioria dos estudantes prefere utilizar a fórmula e o princípio fundamental da contagem como método para resolução destes problemas. Após o pós-teste notamos um avanço quanto à compreensão e resoluções dos estudantes, pois os mesmos passaram a utilizar o diagrama da árvore e a listagem conseguindo esgotar todas as possibilidades. Constatamos que a ocorrência de erros ao uso da fórmula foi o principal dentre os ocorridos no momento das representações simbólicas utilizadas pelos estudantes, o que revela que os estudantes ao utilizarem a fórmula como meio de representação simbólica possivelmente não compreendem o invariante operatório utilizado por eles.

Palavras-chave: Arranjo e Combinação. Invariantes Prescritivos. Ensino Médio.

ABSTRACT

The present research seeks to analyze the knowledge that the students of the second year of High School have in relation to the situations, invariants and the possible representations used by them in the combinatorial problems involving arrangement and combination. This research was based on Vergnaud's Theory of Conceptual Fields. We used as a methodological procedure the application of a pre-test, interventions and a post-test. In the analysis of the results, we noticed that the students in the pretest presented many doubts about the situations involving arrangement and combination mainly with the problems involving the repetition of the elements. During the intervention we observed that most students prefer to use the formula and the fundamental principle of counting as a method to solve these problems. After the post-test we noticed an advance in the understanding and resolutions of the students, since they started to use the diagram of the tree and the listing managing to exhaust all possibilities. It was noticed that the occurrence of errors to the use of the formula was the main one of those occurred at the moment of the symbolic representations used by the students, which reveals that the students when using the formula as a means of symbolic representation possibly do not understand the operative invariant used by they.

Keywords: Arrangement and Combination. Prescriptive Invariants. High school.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Observamos, no dia-a-dia, diversas situações que exigem da sociedade o desenvolvimento de pensamentos e habilidades para compreender as diversas informações que são expostas. E, é durante a última etapa da Educação Básica, que os jovens devem estar preparados para desenvolver tais pensamentos e resolver certos conflitos existentes no mundo. Corroborando com a afirmação, as orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ Ensino Médio), na última etapa de escolarização, o Ensino Médio "contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional" (BRASIL, 2002, p. 111).

Visando estas necessidades o PCN+ Ensino Médio traz o raciocínio combinatório como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo de uma determinada situação, que pode expor todas as opções da mesma, podendo auxiliar na tomada de decisões, como por exemplo, a sistematização de senhas, a codificação de informações. Johnson (1991, p.128) afirma que para um estudante conseguir raciocinar por meio da Combinatória necessita-se "a exploração criativa de aspectos estruturais de um problema, na esperança de vir a reduzi-lo a um caso mais simples ou a um problema anteriormente resolvido".

Dessa forma, com o uso da Combinatória pode-se utilizar de dispositivos, de procedimentos que possibilitam a contagem dessas opções, dispondo assim de variadas formas, sem necessariamente fazer uso de fórmulas prontas e acabadas. De acordo com o PCN+ Ensino Médio "as fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande" (BRASIL, 2002, p.126).

Os Parâmetros Nacionais de Matemática (PCN) apontam ainda que desde os anos iniciais do Ensino Fundamental que no ensino de combinatória o objetivo é "levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem" (BRASIL, 1997, p. 40). Tendo em vista isto, faz se necessário que o ensino de combinatória seja diversificado indo além do mero uso das fórmulas principalmente no Ensino Médio, etapa que esse trabalho é evidenciado com mais ênfase, já que nesta fase que é formalizada a maioria dos problemas em combinatória (Arranjo, Permutação e Combinação) tanto no currículo, quanto nos livros didáticos, como também de acordo com os estudos de Pessoa e Borba (2010), Pessoa e Silva (2012) e em Pessoa e Santos (2012), entre outros.

Mas será que os estudantes ao saírem do Ensino Médio estão com amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório para resolver os problemas combinatórios? Será que eles utilizam variados procedimentos nas resoluções? Como os tipos de problemas combinatórios estão sendo aprendidos? Como os alunos diferenciam os problemas combinatórios?

Diante desta problemática, surge então a necessidade de analisar se os estudantes que estão no Ensino Médio, após ter visto este conteúdo com ênfase pois, é especificamente nessa fase que tem esse tratamento no currículo abordando assim, os distintos significados de análise combinatória saem preparados para resolver tais problemas, bem como nos métodos que utilizam para tal fim.

Borba, Pessoa, Rocha e Assis (2014, p.116) comentam que “as situações combinatórias possuem diversas relações lógico-matemáticas e, desse modo, o estudo das mesmas é uma rica oportunidade de desenvolvimento dos estudantes”.

Ainda sobre tais problemas, após a análise de alguns estudos envolvendo esses tipos de problema verificamos que os do tipo de combinação são os mais difíceis para os estudantes nos diferentes níveis da Educação Básica, como podemos ver quando Pessoa e Borba (2010) afirmam “os problemas de combinação foram os que se apresentaram como os mais difíceis para os alunos” (p. 8).

Rocha (2011) afirma que professores de diferentes níveis de ensino (anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, e Ensino Médio) têm dificuldades na diferenciação de problemas de arranjo e combinação, afirmando que tais professores, em sua maioria, desconhecem “situações nas quais o invariante do conceito de ordenação implica ou não, em possibilidades distintas” (p.4).

Diante desta afirmação percebemos a dificuldade dos estudantes com os problemas de combinação e arranjo, porém sabemos que estes problemas se caracterizam pela formação de subgrupos. Daí surge então o seguinte questionamento: *Será que os alunos do segundo ano do Ensino Médio identificam os invariantes dos problemas envolvendo arranjo e combinação?* Tais problemas envolvem a possibilidade de formar grupos dado um conjunto qualquer, diferindo ambos pela ordem que poderá gerar ou não novas possibilidades entre os elementos que formam cada agrupamento.

Para delimitar ainda mais essa pesquisa, objetivamos analisar os conhecimentos dos alunos do 2ª ano do Ensino Médio em relação aos invariantes prescritos de problemas de arranjo e combinação.

Ainda, selecionamos os seguintes objetivos específicos: a) Investigar as dificuldades em relação à apreensão do conceito de arranjo e combinação no ensino da Análise Combinatória; b) Verificar quais as representações simbólicas mais utilizadas na resolução desses problemas; c) Identificar os desempenhos dos alunos em invariantes de ordem e repetição em problemas de arranjo e combinação antes e após a intervenção.

Esse trabalho se divide em cinco capítulos. Iniciamos a discussão apresentando a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud que defende as relações sobre os conceitos para que possa proporcionar uma aprendizagem eficaz durante o processo de ensino-aprendizagem, sem limitar-se apenas a definição de tal conceito, mas sim nas relações que existem neste processo, ou seja, nos significados, invariantes e nas representações simbólicas que permeiam a construção destes conceitos.

No segundo capítulo trataremos do raciocínio combinatório e sua relação com a teoria dos campos conceituais, trazendo a definição de arranjo e combinação, ambos simples e com repetição, abordando os diferentes meios de representação destas situações problemas, e quais invariantes estão presentes nestes conceitos. Como também o que trazem as pesquisas sobre o ensino de análise combinatória, percebendo as dificuldades e avanços quanto a este ensino.

O objetivo do terceiro capítulo é apresentar a Metodologia, descrevendo os participantes, o local onde foi realizada a aplicação, quais instrumentos que foram utilizados para construção de dados da pesquisa, os procedimentos de construção e análise dos dados e por último justificando as ferramentas utilizadas para contribuição do ensino de arranjo e combinação.

No quarto capítulo iremos discutir por meio da análise realizada em cada etapa desenvolvida em cada etapa da pesquisa, e percebendo se os objetivos da pesquisa foram alcançados, refletindo sobre as estratégias utilizadas para conseguir alcançar cada objetivo traçado, bem como se houve pontos negativos sobre os métodos utilizados durante o andamento da presente pesquisa.

No último capitulo realizaremos reflexões acerca das análises realizadas, entendendo as possíveis considerações sobre esta pesquisa bem como, sua importância da Combinatória, proporcionando possíveis questionamentos para pesquisas futuras de acordo com os resultados obtidos.

2 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E AS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria cognitivista, que busca analisar o desenvolvimento e a aprendizagem dos estudantes, em que nos ajuda a entender como se constrói essa aprendizagem. Nessa teoria observam-se as relações existentes entre conceitos que estão inseridos em campos conceituais.

Vergnaud (1986) defende a ideia do campo conceitual e a define como "um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão" (p.84). Esse autor ainda afirma que todo conceito é subsidiado por um "tripé" que envolve os seguintes conjuntos:

> S: o conjunto de situações que dão sentido ao conceito;
>
> I: o conjunto de invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito;
>
> R: o conjunto das representações simbólicas que podem ser utilizadas (p.83).

Esses conjuntos são atrelados e importantes para a construção do conceito. De acordo com Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2008) essa teoria :

> "considera que existe uma série de fatores que influenciam e interferem na formação e no desenvolvimento dos conceitos e que o conhecimento deve emergir de dentro de situações-problema"(p.6).

Portanto, para a construção de conceitos, na TCC, é necessária que haja interação desses indivíduos com inúmeras situações, tanto pela parte da definição do conceito, quanto as suas relações que dão significado ao conceito, suas propriedades e os significados que envolvem determinado tipo de situação.

Dentro desta perspectiva faz se necessário que o professor desenvolva técnicas para que o estudante consiga observar as relações entre o conceito e o significado da situação problema que está sendo abordado, pois a construção do conhecimento está relacionada não apenas na resolução de um problema, mas sim, na compreensão do(s) conceito(s) que fazem parte do mesmo. Magina et al (2008) acrescentam que "elaborar situações-problema significa fazer escolhas adequadas tanto de situações didáticas, quanto de debates, explicações, representações e formulações que auxiliem os alunos a construírem novos conceitos”(p.10-11).

Para entender as diversas relações que nos apresentam diferentes conceitos, em especial na Combinatória, faz se necessário refletir sobre os conjuntos que fazem parte dessa teoria.

Vergnaud (1986) apresenta a noção de invariantes para ajudar na compreensão da realidade que estes problemas se encontram até a sua representação, e que se apresenta de diferentes maneiras, a depender de como esse conjunto é observado. Para esse autor os invariantes podem ser compreendidos como “uma propriedade ou uma relação que é conservada sobre certo conjunto de transformação” (p.81). Nesse caso, o invariante se relaciona a ação que está se desenvolvendo (resolução da situação) e que Vergnaud (2009) complementa para a noção de invariante operatório, como apresentado a seguir:

> A noção de *invariante operatório* aplica-se ao próprio problema da função simbólica, isto é, a passagem da realidade a representação. Não basta saber os objetos, as classes de objetos, as relações, etc., se projetam, sob certas formas, nos diversos planos da representação; igualmente, é preciso interrogar-se sobre a forma pela qual essa projeção ocorre e as condições que a permeiam (p.303, grifo nosso).

Nesse caso, o foco dos invariantes operatórios seria as relações e propriedades que os alunos colocam em ação na resolução de situações, podendo ser verdadeiros ou falsos a depender da situação.

Outro invariante, diz respeito aos conceitos, *invariante do conceito ou prescritivo,* que focalizam as relações e propriedades de conceitos e que são necessários para compreensão do mesmo. Nesse caso, esses tipos de invariantes são inerentes aos conceitos matemáticos, tais como os problemas combinatórios.

Silva (2016) afirma que os invariantes do conceito ou prescritivos não se alteram com relação a representação simbólica usada, ou mesmo a variação de um mesmo tipo de situação e ainda defende que

> [..]o professor precisa estar atento às singularidades de cada classe de problemas de um conceito e trabalhá-las com os alunos para que se tenha a compreensão das variedades de situações envolvidas no conceito, que vão influenciar na resolução (p.28).

Além desses, existe ainda o invariante relacional que é considerado por Vergnaud (1986) como “uma relação que permanece invariante para um conjunto de transformações de operações ou de variações” (p.82). Pessoa (2002) afirma que na TCC existe a distinção entre cálculo numérico e cálculo relacional e explica que “os cálculos numéricos são as operações de, por exemplo, adição, subtração, multiplicação ou divisão. Os cálculos relacionais envolvem operações de pensamento necessárias para compreender os relacionamentos envolvidos na operação” (p.1-2).

Partindo do exposto, percebemos que as diferentes noções de invariante é um instrumento muito importante que possivelmente proporciona segurança no momento da construção da representação dos conceitos.

Vergnaud (2009) complementa ainda sua ideia com relação ao conjunto de representações simbólicas, discutindo três diferentes significados para o termo representação: O primeiro discute sobre o “[...] fluxo da consciência em que cada indivíduo testemunha por seu próprio pensamento” (p.24); O segundo se refere a “[...] categorias de pensamento com os quais um indivíduo capta e integra as informações presentes em uma situação” (p.24) (sendo o que mais se adequa a esse trabalho) e o terceiro diz respeito as “[...] relações significantes/significados na linguagem natural e em outros sistemas simbólicos desenvolvidos pelas sociedades humanas ao longo da história” (p.25).

De acordo com Barreto (2012) o papel desse conjunto na construção de um conceito é importante “já que cada representação pode deixar mais evidentes determinadas propriedades invariantes de tal conceito” (p.13). Essa autora ressalta, ainda, a necessidade de que os alunos “além de aprenderem diferentes formas de representação simbólica, também possam aprimorar o uso de representações que já utilizam” (p.13).

Com relação as representações simbólicas percebemos que estas são ferramentas importantes para a resolução dos problemas especialmente na Análise Combinatória, como a fórmula, a Listagem, a Árvore de possiblidades, o PFC, entre outros tipos. Sendo necessário o professor poder vivenciar diferentes representações no ambiente escolar, pois assim os estudantes terão alternativas diferentes para resolver os problemas.

Além das representações simbolicas Vergnaud apresenta as estruturas aditivas e multiplicativas, e segundo Nivaldo (2009), o conceito de “estruturas aditivas é constituído de situações que envolvem a adição e a subtração isoladamente ou a combinação dessas duas operações, bem como outros conceitos matemáticos como, por exemplo, medidas de grandezas" (p.30).

Sobre os conceitos de estruturas multiplicativas, Vergnaud (1991 apud NIVALDO, 2009) diz que:

> O campo conceitual das estruturas multiplicativas consiste em todas as situações que podem ser analisadas como proporções simples e múltiplas para as quais, normalmente, é preciso multiplicar e/ou dividir. Para ele, diferentes conceitos matemáticos estão associados a estas situações, entre elas estão às funções lineares e não lineares, espaços vetoriais, análise dimensional, números racionais, a multiplicação e a divisão (p.33).

Assim é possivel identificar que as estruturas aditivas e multiplicativas são importantes conceitos matematicos, nesse caso focalizamos na pesquisa as estruturas multiplicativas, especialmente a que podemos vincular aos problemas combinatórios.

2.1 CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Gerard Vergnaud (2009) ao falar das estruturas multiplicativas as classifica em duas grandes categorias: a primeira identificada como uma relação quaternária classificada por *isomorfismos de medidas* e a segunda como uma relação terciária, classificada por *produto de medidas.* A seguir apresentamos alguns exemplos dessas estruturas discutidos em Vergnaud (2009).

O exemplo a seguir, representa uma situação de isomorfismo de medidas, na qual existe uma relação entre quatro quantidades abordadas, duas relacionadas ao número de iogurtes e as outras duas ao número de pacotes. Com isto verificamos que se trata de uma relação quaternária.

Figura 1 - Exemplo de Isomorfismo de Medidas

"Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?"

Fonte: VERGNAUD, 2009, p. 239

A resolução da mesma poderá ser realizada por meio de uma proporção, na qual chamaremos de 'x' o valor de iogurtes que queremos descobrir, nisto 'x' iogurtes estão para 4 iogurtes, assim como 3 pacotes estão para 1 pacote.

$$\frac{x\,iogurtes}{4\,iogurtes} = \frac{3\,pacotes}{1\,pacote}$$

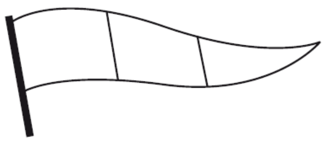
Assim teremos que $3.4 = x.1$ pois a propriedade fundamental da proporção, garante que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos formando assim uma equação. Resolvendo esta equação ficamos com x = 12, logo teremos 12 iogurtes.

Diante da resolução deste isomorfismo de medidas percebemos que as relações presentes são a quantidade de iogurtes relacionada com o número de pacotes, identificando a representação simbólica utilizada nesta questão por meio de uma regra de três simples, sendo desenvolvido nesta situação o invariante operatorio por meio da multiplicação.

A seguir apresentamos um exemplo de produto de medidas. Segundo Vergnaud (2009) o produto de medidas "consiste em uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto das duas outras ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional" (p. 253). Ainda dentro desta classificação de produto de medidas existem várias subclasses que são identificadas de acordo com suas propriedades, uma destas subclasses é classificada como produto discreto-discreto, e a Combinatória se insere nesta subclasse. Alguns problemas combinatórios utilizam-se do princípio multiplicativo e podem ser classificados como os problemas de produtos de medidas das estruturas multiplicativa de Vergnaud, como observamos na figura 2.

Figura 2 - Exemplo de Produto de Medidas

"Quer-se fabricar bandeirolas com tecido de duas cores diferentes (vermelho e azul). Fabricando-se bandeirolas de três faixas como a que está abaixo, quantas bandeirolas diferentes podem ser fabricadas?"



Fonte: VERGNAUD, 2009, p. 253

Ao resolver o problema proposto na figura 2 verificamos as possibilidades de cores possíveis para cada faixa das bandeirolas, sabendo que é possível utilizar apenas duas cores de tecido (azul e vermelha) podemos resolver este problema por meio do princípio fundamental da contagem da seguinte maneira:

Para a primeira faixa teremos 2 possibilidades, para a segunda e terceira faixa também teremos mais duas possibilidades, portanto pelo Princípio Fundamental da Contagem teremos: 2x2x2= 8, então é possível fabricar 8 bandeirolas diferentes utilizando estas duas cores de tecido.

Outro meio de representação simbólica que pode ser utilizada é a listagem (ou enumeração sistemática), como podemos observar a seguir:

Figura 3 – Resolução por meio de enumeração sistemática ou listagem

(vvv), (vva), (vav), (avv), (ava), (aav), (vaa), (aaa)

Fonte: A autora (2017)

Podemos identificar que as representações simbólicas apresentadas na resolução desta questão, utilizaram o Princípio Fundamental da Contagem e a listagem. Entre as variações de cores do tecido e faixas das bandeirolas, se apresentam ainda os invariantes prescritivos de ordem e de repetição já que estes influenciam no número total de possibilidades, pois se trata de uma situação combinatória de arranjo com repetição.

Ao resolver os problemas combinatórios nos deparamos com uma variedade de representações simbólicas, além das fórmulas vinculadas aos diferentes tipos de problemas. Borba (2013) afirma que :

> [...] haverá possibilidade de um mais amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório se ocorrer o trabalho com os variados problemas deste campo conceitual desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, por meio de representações simbólicas apropriadas que possibilitem uma gradual construção de procedimentos mais formais e compreensão das propriedades invariantes do conceito existente, até se chegar ao uso consciente das fórmulas de Análise Combinatória no Ensino Médio (p.6).

Algumas das diferentes representações utilizadas na resolução de problemas combinatórios podem variar, de acordo com Rocha (2011), em tabelas de dupla entrada, árvore de possibilidades, listagem, o Princípio Fundamental da contagem, entre outras.

Nisto percebemos que existem diversas relações sobre as estruturas multiplicativas, especificamente com alguns problemas combinatórios quando consideramos as transformações que as situações problemas proporcionam, assim como essa diversidade de invariantes que estão associados com estas transformações são importantes no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória.

3 RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO E A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

O raciocínio combinatório é uma forma de pensar que permite o levantamento de opções possíveis em uma dada situação, semelhante a um raciocínio quantitativo, tal que possibilita a criação de estratégias e ou pensamentos para determinar o número tal qual quantidades nas diferentes áreas do conhecimento como enfatizam Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) apresentando relações na Mecânica de Partículas (Física), busca de isômeros (Química), difusão de epdemias e Genética (Biologia), estudos de armazenamento e otimização (Economia e Gestão), entre outras.

Corroborando com os PCN dos anos iniciais (BRASIL, 1997) autores (PESSOA E BORBA, 2010; BORBA, PESSOA e ROCHA 2013;, BORBA, PESSOA, ROCHA E ASSIS, 2013) defendem que este tipo de pensamento seja trabalhado nas escolas desde os anos iniciais uma vez que para Fischbein (1995), Batanero, Godino, Navarro-Pelayo (1996) o raciocínio combinatório só se desenvolve por meio de instrução específica.

No Ensino Médio, o trabalho com a Combinatória geralmente ocorre no 2ª ano e existe a necessidade de refletir sobre as ênfases dadas pelos professores no desenvolvimento desse trabalho. De acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, o conceito, é formado pelo conjunto das situações, dos invariantes e das representações envolvidas nesse processo, que estão ligadas entre si. Portanto, faz se necessário apresentar essas três dimensões para o ensino e aprendizagem da Combinatória, fazendo com que os estudantes venham a desenvolver o raciocínio combinatório de uma forma eficaz.

Os problemas combinatórios assumem, de acordo com Pessoa e Borba (2010), os seguintes significados: produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação, sendo o produto cartesiano o único que é abordado nos anos iniciais do Ensino Fundamental, sendo os demais geralmente vistos no 2ª ano do Ensino Médio. Para essas autoras:

> A Combinatória permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, pode-se saber quantos elementos ou

> quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um (p.2).

Podemos perceber que o raciocínio combinatório é um tipo de pensamento que envolve a contagem com a constituição de agrupamentos, assim como na enumeração dos elementos constituindo um ramo facilitador destes problemas, sem necessariamente precisar contar um a um, pois o mesmo poderá ser realizado por meio de diferentes estratégias, como a listagem, e o uso de fórmulas, por exemplo.

As diferentes situações apresentadas por Rocha e Borba (2017) são ampliadas na etapa do Ensino Médio, sendo inseridas a permutação com elementos repetidos, permutação circular, arranjo com repetição e combinação com repetição.

Ao pensarmos nos conjuntos que fundamentam a TCC (Teoria dos Campos Conceituais) podemos discutir os invariantes prescritivos (do conceito) de cada significado observado, apresentando ao professor outro caminho para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem de combinatória, a partir da comparação de problemas combinatórios para a identificação desses invariantes. Tal iniciativa, poderia minimizar as dificuldades na diferenciacão desses problemas apontada por Batanero *et al* (1996), English (2005) e Rocha (2011).

A TCC também pode avaliar com relação as representações simbólicas relativas aos problemas combinatórios na ultima etapa da escolarização, pois por muitos anos a ênfase no ensino de Combinatória era nas fórmulas utilizadas para a resolução desses problemas. Com os diferentes tipos de procedimentos para resolução enfatizados podemos vislumbrar outros aspectos para ser enfatizados tais como a árvore de possibilidades, a tabela de dupla entrada, a listagem, o Príncipio Fundamental da contagem, entre outros.

Na proxima seção, tratamos dos invariantes prescritivos (do conceito) e as representações simbólicas relativas especificamente aos problemas combinatórios de arranjo e combinação.

3.1 Problemas de Combinação e Arranjo

Em nosso cotidiano, lidamos constantemente com a formação de grupos em várias situações. Como por exemplo, ao escolher colegas para um trabalho escolar, ou na escolha do representante e o vice-representante de uma determinada turma, estamos nesses problemas formando agrupamentos de pessoas. A Combinatória identifica dois tipos de problemas que necessitam da escolha de subgrupos em um determinado conjunto que são os problemas de arranjo e combinação, que por muitas vezes oferece um grau de dificuldade maior para os alunos e até mesmo aos professores como aponta Rocha e Ferraz (2011), “que há lacunas no conhecimento dos professores em relação à diferença dos problemas de arranjo e combinação” (p.9).

Os problemas de arranjo e combinação são definidos por Pessoa e Santos (2012) da seguinte forma:

> **Arranjo** (1) tendo ***n*** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... ***p*** elementos, com 0 < ***p*** < ***n***, sendo ***p*** e ***n*** números naturais; (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades. O que caracteriza esses problemas é que de um grupo maior, alguns subgrupos são organizados e a ordem dos elementos gera novas possibilidades, sendo importante na composição das possibilidades. **Combinação** (1) tendo ***n*** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... ***p*** elementos, com 0< ***p*** < ***n***, ***p*** e ***n*** naturais; (2) A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. De forma semelhante aos problemas de Arranjo, tem-se um conjunto maior e dele são selecionados elementos para formar subconjuntos, porém, de forma diferente, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades. (p.3)

Essas autoras apresentam para cada significado das situações (combinação e arranjo) um conjunto de invariantes do conceito. A escolha comum aos dois tipos e a ordenação que em cada situação difere. Compreendemos assim que Arranjo são agrupamentos em que se considera a ordem dos elementos e que qualquer mudança na ordem dos elementos altera o agrupamento.

Para o cálculo do número total de arranjos simples que é possível formar com p elementos, escolhidos entre os *n* elementos dados, é possível realizá-lo por meio da seguinte fórmula: $A_{n,p}=\frac{n!}{(n-p)!}$, sendo *n* é a quantidade de elementos do conjunto e p é um número natural menor ou igual a n, que representa a quantidade dos elementos em cada possibilidade da formação dos agrupamentos.

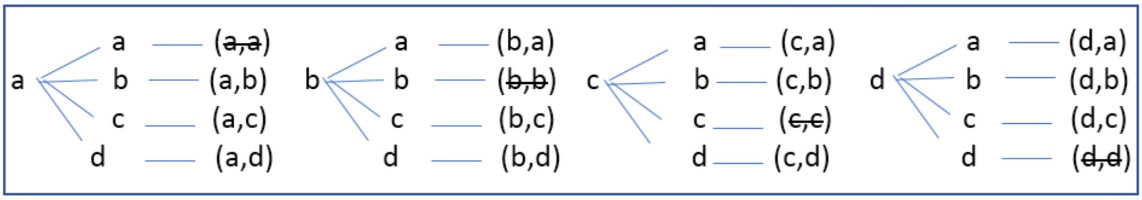
Figura 4 – Exemplo de situação de arranjo simples

Exemplo 1: Ana, Bruno, Carlos e Davi concorrem a disputa do cargo de representante representante de uma turma. Quantas são as possibilidades da escolha do representante representante desta turma?

Fonte: A autora (2017)

Para obter todas as possibilidades do problema de arranjo procuradas, é possível descrevê-las com a utilização de várias representações simbólicas, vejamos a resolução deste exemplo por meio da utilização da Árvore de Possibilidades onde chamaremos de “a”, “b”, “c” e “d” os respectivos nomes Ana, Bruno, Carlos e Davi:

Figura 5 - Representação por meio da Árvore de possibilidades



Fonte: A autora (2017)

Observemos que nessa situação algumas possibilidades forma desconsideradas porque, nesse caso, a repetição de elementos em uma mesma possibilidade, não se adequa ao contexto da situação.

Outra forma de resolução pode ser por intermédio de uma Listagem como podemos observar a seguir:

Figura 6 – Resolução por enumeração sistemática ou listagem

(ab), (ac), (ad), (ba), (bc), (bd), (ca), (cb), (cd), (da), (db), (dc)

Fonte: A autora (2017)

Outra representação simbólica para a solução desta questão pode ser a construção de uma tabela ou quadro com função de operador como a que segue:

Figura 7 – Representação por meio de uma tabela ou quadro com função de operador

	A	B	C	D
A	~~Aa~~	Ab	Ac	Ad
B	Ba	~~Bb~~	Bc	Bd
C	Ca	Cb	~~Cc~~	Cd
D	Da	Db	Dc	~~Dd~~

Fonte: A autora (2017)

Como a exigência da questão é obter todos os arranjos formados por elementos distintos, pois a mesma pessoa não pode exerce os dois cargos ao mesmo tempo, por isso a possibilidade que é formada por elementos iguais precisa ser descartada, ou seja, as possiblidades “aa”, “bb”, “cc” e “dd”, não fazem parte da contagem final, restando apenas 12 das 16 possibilidades descritas na tabela.

Além destas propriedades invariantes que as situações de arranjo e combinação apresentam, outra propriedade pode ser considerada que é a repetição dos elementos podendo aumentar as possibilidades destes problemas.

Um arranjo completo (repetição) de *n* elementos tomados *p* a *p* segundo Santos, Mello e Murari (2007) é dado pelo número de sequências com p elementos que podemos constituir a partir de um conjunto com n elementos, em que as sequências diferem entre si quer pela ordem, quer pela natureza dos elementos que as constituem, podendo estes serem ou não repetidos uma ou mais vezes.

Tendo em conta que os elementos escolhidos podem se repetir, poderemos formar sequências constituídas por *p* elementos, sendo que os p elementos escolhidos podem ser maiores que os *n* elementos existentes no conjunto inicial. Por exemplo, ao pensar em um conjunto com 6 elementos, podemos formar arranjos completos com 7 elementos em cada possibilidade (claro que nestes casos tem de haver forçosamente a repetição de pelo menos um dos 6 elementos).

Para o cálculo do número total de arranjos com repetição que é possível formar com p elementos, escolhidos entre os *n* elementos dados, partindo da ideia de Santos et al (2007) é dado pela seguinte fórmula: $AR_p^n = n^p$, onde *n* é o total de elementos do conjunto dado e *p* é o número de elementos escolhidos a partir deste conjunto.

Figura 8 – Exemplo de situação de Arranjo com repetição

Exemplo 2: Maria quer criar uma senha para seu notebook. Sabendo que a senha será formada por 4 dígitos e que ela deseja utilizar apenas os números 7 e 9. De quantas maneiras distintas Maria poderá criar esta senha?

Fonte: A autora (2017)

Notemos que será necessária a repetição de um mesmo número mais de uma vez, pois a senha será formada por quatro digitos e so sera utilizado dois números (7 e 9). Podemos resolver este problema por meio da Listagem como podemos observar a seguir:

Figura 9 –Resolução por meio de enumeração sistemática ou listagem

7777, 7779, 7797, 7799,7977, 7979, 7997, 7999, 9999, 9997,9979, 9977, 9799, 9797, 9779, 9777

Fonte: A autora (2017)

Com essa Listagem como meio de representação simbólica percemos que com dois números disponíveis para criar uma senha com quatro dígitos teremos 16 possibilidades de senhas diferentes.

Silva e Rocha (2015) comentam que o “invariante da repetição, que pode ser considerado ou não dependendo do problema a ser resolvido” (p.5). Nesse caso, os estudantes e professores devem analisar a situação, contextos, e enunciados para identificar se esse invariante deve ou não ser considerado. Os autores ainda alertam que “[...] ao considerar as repetições, aumentamos consideravelmente as possibilidades, e desta forma pode mudar as estratégias de resolução das mesmas, assim deve ser considerada na análise das questões propostas” (p.5).

Já as *combinações* são agrupamentos em que não se consideram a ordem dos elementos, portanto, mudanças na ordem não alteram o agrupamento. Veremos no exemplo 3 uma situação problema que envolve combinação e também o exemplo 4 um problema de combinação com repetição.

Figura 1 – Exemplo de situação de Combinação Simples

Exemplo 3: Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 6 frutas diferentes?

Fonte: Adaptada de Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (2006, p.32)

Para obter todas as possibilidades do problema de combinação procurados, podemos utilizar como representação simbólica a Listagem onde identificamos as seis frutas disponíveis pelas letras a, b, c, d, f e g, vejamos a seguir este meio de resolução:

Figura 21 – Resolução por meio de enumeração sistemática ou listagem

abcd, abcf, abcg, abdf, abdg, abfg, acdf, acdg, acfg, adfg, bcdf, bcdg, bcfg, bdfg, cdfg

Fonte: A autora (2017)

A partir dessa resolução verificamos que é possível fazer 15 saladas diferentes, ou seja, dispondo de 6 tipos diferentes de frutas podemos fazer 15 combinações diferentes de saladas com 4 frutas distintas.

Santos et al (2007) afirma que um problema de combinação com repetição "CR_n^p é o número total de maneiras de selecionarmos p objetos dentre os *n* objetos distintos onde cada objeto pode ser tomado até p vezes" (p.98). Ressaltando que "quando consideramos as combinações simples de *n* elementos tomados p a p, p deve ser menor do que ou igual a n. No caso de combinações com repetição, está restrição não é necessária "(SANTOS et al, 2007, p.99). Dessa forma em caso de combinações com repetição de *n* elementos tomados *p* a *p*, *p* poderá ser maior que *n*.

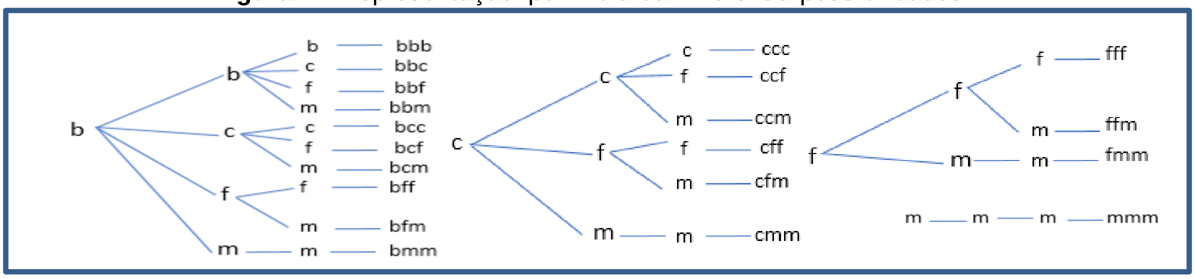
Figura 3 – Exemplo de Situação de combinação

Exemplo 4: Uma sorveteria vende apenas sorvete de três bolas. Os sabores promocionais dessa semana podem ser escolhidos entre Baunilha, Chocolate Morango, e flocos. De quantos modos diferentes podemos comprar um sorvete nesta loja?

Fonte: A autora (2017)

Para obter todas as possibilidades do problema de combinação com procurados, podemos utilizar como representação simbólica a a árvore de possibilidades onde identificamos os quatro sabores promocionais pelas letras b, c, f e m, vejamos a seguir a solução:

Figura 4 - Representação por meio da Árvore de possibilidades



Fonte: A autora (2017)

Averiguamos que este exemplo permite a repetição de um elemento em um único agrupamento, observando também que por meio da repetição aumenta a quantidade de possibilidades com isto, notamos que a combinação com repetição deste problema gerou 20 possibilidades diferentes para a escolha da compra .

De acordo com o que foi exposto, percebemos três tipos de invariantes nos problemas de arranjo e combinação, um definido pela forma de escolha dos elementos, outra por meio do invariante da repetição quando o agrupamento for completo, e o invariante da ordem como a principal propriedade entre essas duas situações que estão presentes na Combinatória. Desta forma notamos que considerando ou não a ordem dos elementos, este será o fator essencial no momento da resolução, sendo assim o invariante fundamental para que se compreendam as lógicas implícitas em cada significado e situação dos tipos de problemas combinatórios.

Sendo assim, qualquer um desses dois tipos de agrupamentos (arranjo ou combinação) pode ser simples ou completo, simples quando não é permitida à repetição de elemento(s) em um mesmo agrupamento, e é completo quando é permitida a repetição.

Os problemas combinatórios podem ser resolvidos por diversos meios de representações, como desenhos, árvores de possibilidades, tabelas, listagens, fórmulas, dentre outras. Essas diferentes simbologias ajudam os estudantes na resolução dos problemas, pois os mesmos não ficam presos a uma única solução estando a critério do estudante o meio que será mais viável para a resolução de cada problema combinatório. Dentro desta perspectiva é importante que o professor ao ensinar combinatória traga diferentes meios para a resolução desses problemas, não ficando apenas ao uso das formulas como traz Coutinho e Barbosa (2015) "[...] as fórmulas existem para facilitar a contagem de elementos sem ter que listá-los; no entanto, conhecer apenas as fórmulas não garante sucesso na solução de problemas combinatórios" (p. 12).

Dentro desta linha Pessoa e Borba (2010) afirmam que:

> Esperava-se um percentual mais elevado de acertos no Ensino Médio, mas observou-se que, ao se utilizarem de fórmulas, alunos ainda o fazem de maneira inadequada, demonstrando que mesmo formalizando esse ensino, possivelmente o trabalho não esteja ocorrendo de maneira adequada, que deveria ajudar o aluno a pensar sobre a lógica implícita em cada significado de problema estudado. (p. 6).

Portanto, para que o estudante desenvolva possivelmente o raciocínio combinatório de uma maneira eficaz faz se necessário ir além do mero uso de fórmulas para a resolução destes problemas, como traz Pessoa e Silva (2012), "é necessário que se ofereçam situações diversas para a resolução de problemas, para que, assim, os alunos possam fazer reflexões, estabelecendo relações e construindo novas aprendizagens" (p. 3).

4 METODOLOGIA

A presente pesquisa quer se aproximar do objeto de estudo, *a identificação dos invariantes prescritivos de ordem e repetição em problemas de arranjo e combinação com alunos de Ensino Médio* buscando entender as relações existentes antes e depois de uma intervenção com foco nesses invariantes, tentando ir além do quantitativo dos dados que foram coletados. A seguir apresentamos as etapas para a coleta e análise da pesquisa.

4.1 INTEGRANTES E INSTRUMENTOS PARA COLETA DE DADOS DA PESQUISA

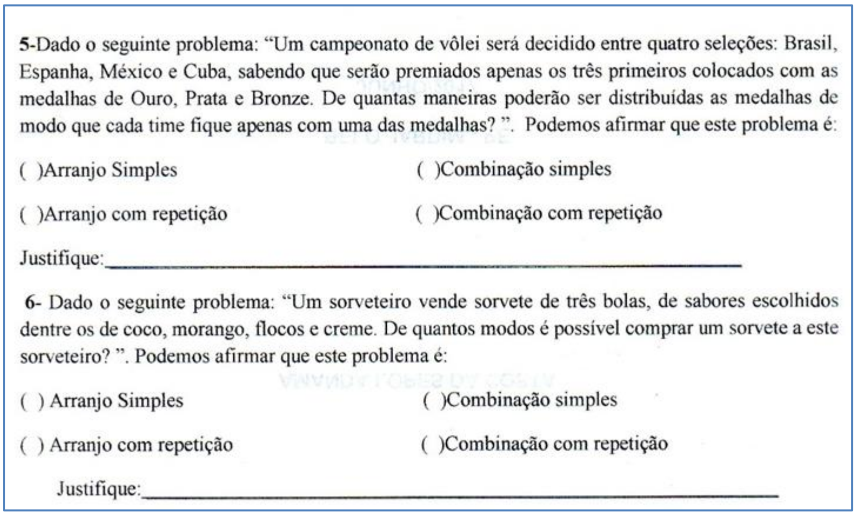
O estudo foi realizado em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual, no Município de São Bento do Una- PE, tendo em vista que os conteúdos de arranjo e combinação são geralmente abordados de uma maneira efetiva no processo de escolarização apenas no 2º ano do Ensino Médio (BRASIL, 2002, 2000). A escola foi selecionada pela disponibilidade de participar de uma pesquisa e a turma foi escolhida pela disponibilidade do professor de matemática dessa escola.

A turma já tinha vivenciado o conteúdo de Combinatória no final do semestre anterior, por isso, o professor indicou a turma para realização do trabalho. Na conversa anterior com o professor explicamos os objetivos, e o mesmo se prontificou a auxiliar em todo o processo, permanecendo na turma durante toda a pesquisa. A turma possuía um total de 36 alunos inscritos.

O procedimento de coleta de dados foi dividido em três etapas. A primeira etapa se constituiu da aplicação de um pré-teste, na segunda foi realizada a intervenção com o foco nos invariantes prescritos dos problemas de arranjo e combinação e a terceira e última culminou na aplicação de um pós-teste, que permitiram avaliar os avanços obtidos por meio da intervenção realizada.

O motivo da realização do pré-teste foi para verificar o nível de desempenho dos estudantes em problemas de arranjo e combinação. Ele possuía seis problemas combinatórios, sendo quatro destes abertos envolvendo problemas de arranjo simples, combinação simples e arranjo e combinação com repetição e dois de múltipla escolha com justificativa (ver Apêndice B). Sua aplicação foi realizada em setembro, teve duração de duas horas- aulas e participaram 29 estudantes. Vejamos exemplos de questão de múltipla escolha:

Figura 54 - Questões que solicitam do aluno a justificativa em sua resposta



5-Dado o seguinte problema: "Um campeonato de vôlei será decidido entre quatro seleções: Brasil, Espanha, México e Cuba, sabendo que serão premiados apenas os três primeiros colocados com as medalhas de Ouro, Prata e Bronze. De quantas maneiras poderão ser distribuídas as medalhas de modo que cada time fique apenas com uma das medalhas? ". Podemos afirmar que este problema é:

( )Arranjo Simples ( )Combinação simples

( )Arranjo com repetição ( )Combinação com repetição

Justifique:____________________

6- Dado o seguinte problema: "Um sorveteiro vende sorvete de três bolas, de sabores escolhidos dentre os de coco, morango, flocos e creme. De quantos modos é possível comprar um sorvete a este sorveteiro? ". Podemos afirmar que este problema é:

( ) Arranjo Simples ( )Combinação simples

( ) Arranjo com repetição ( )Combinação com repetição

Justifique:____________________

Fonte: A autora (2017)

Nesse caso, estávamos focalizando o invariante relacional, ou seja, a compreenão do aluno com relação ao tipo de problema combinatório a partir do enunciado, como também, o tipo de justificativa que ele apresentaria para a classificação efetuada no problema. Após a aplicação e correção do pré-teste, que indicou o nível de conhecimento que os estudantes tinham sobre combinatória, foi elaborada a intervenção.

A etapa da intervenção teve como foco nos invariantes sobre o conteúdo de arranjo e combinação. Ela teve duração de duas horas-aulas, realizada no início de outubro e utilizou dez problemas combinatórios (Ver Apêndice E). A turma estava organizada em duplas como era frequente na escola e participaram 34 alunos.

Sobre a intervenção subdividimos em dois momentos: Iniciamos com a comparação entre os invariantes do conceito dos problemas combinatórios de arranjo e combinação, simples e com repetição. Logo tivemos três atividades em que problemas eram resolvidos e comparávamos as relações entre eles. A primeira atividade comparou problemas de arranjo e combinação simples, a segunda, problemas de arranjo e arranjo com repetição, e a terceira, problemas de combinação e combinação com repetição. Esses seis problemas foram entregues em fichas para que os alunos tentassem respondê-los e registrassem a discussão. Depois ao final de cada atividade, discutíamos as resoluções, e apresentávamos as diferenças entre eles, com relação ao invariante do conceito. Algumas dúvidas surgiram ao longo dessa parte da intervenção e muitos deles discutiram. Tais fichas foram recolhidas ao final da explicação.

No segundo momento, foi entregue uma ficha com quatro questões de múltipla escolha com justificativa para que os estudantes justificassem os tipos de problemas combinatórios a partir dos seus invariantes, sendo uma questão de arranjo simples, outra de arranjo com repetição, combinação simples e outra de combinação com repetição.

Durante a resolução das questões com a turma foi utilizado o diagrama de árvores como método de representação das situações, assim como o Princípio Fundamental da Contagem. No decorrer da intervenção alguns estudantes optaram por responder as questões propostas somente pelo uso das fórmulas, devido a isto foi também abordado este método de resolução no momento das discussões e resolução das questões. Teve ainda estudantes que utilizaram em momentos da intervenção a listagem como método para representação do resultado de algumas questões.

Ressaltamos ainda que alguns estudantes não participaram de uma maneira significativa durante a intervenção, observou-se que teve momentos que estes ficaram dispersos no momento das resoluções e discussões sobre os problemas combinatórios abordados nesta etapa. Essas fichas, entregues durante a intervenção não foram analisadas nesse trabalho, apenas serviu para verificar os registros realizados pelos alunos durante a intervenção.

Após a intervenção, foi realizado um pós-teste cerca de 10 dias depois da mesma, com o intuito de verificar se houve avanço na aprendizagem sobre as situações de arranjo e combinação abordados na intervenção. Ele seguia a estrutura discutida no pré-teste com seis questões, sendo quatro destas abertas e duas de múltipla escolha (Ver Apêndice D). A duração deste foi de 50 minutos e participaram desta etapa 33 estudantes, no entanto foram consideradas as respostas dos 28 estudantes que participaram das três etapas.

Os resultados de desempenho dos estudantes no pós-teste serão comparados com o do pré-teste para saber se houve diferença no desempenho, nas justificativas e /ou nas representações uitilizadas pelos estudantes.

4.2 PROCEDIMENTOS DE CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA

A análise do questionário proposto no pré-teste e no pós-teste será qualitativamente e também quantitativa, pois segundo Oliveira (2011):

> Adotar a prática de combinar técnicas de análise quantitativa com técnicas de análise qualitativa proporciona maior nível de credibilidade e validade aos resultados da pesquisa evitando-se assim, o reducionismo por uma só opção de análise (p. 29).

Dentro desta perspectiva, a pesquisa busca entender como os alunos compreendem os problemas de arranjo e combinação, bem como eles desenvolvem o raciocínio combinatório, ou seja, qual método que os estudantes utilizam para resolver problemas deste tipo (por meio do Princípio Fundamental da Contagem, por agrupamento, por listagem ou pelo diagrama da árvore, ou até mesmo outro método de resolução). Além de revelar possíveis dificuldades que os estudantes têm em relação ao ensino da combinatória. Buscando na intervenção abordar também os diferentes meios de resolução desses problemas, não limitando se apenas ao uso das fórmulas.

De acordo com os invariantes prescritivos e o invariante relacional (VERGNAUD, 2009) será realizada a análise dos questionários aplicados na turma verificando qual invariante o estudante identificou ao responder as questões. Averiguando se os estudantes entendem as relações que estão presentes nas situações problemas ou se os mesmos realizam o cálculo sem entender o porquê da situação proposta, ou seja, fazer o uso dos dados apresentado no enunciado das questões sem perceber as propriedades que estão presentes em cada tipo de problema.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A pesquisa desenvolveu-se por meio de um pré-teste e um pós-teste realizados após a intervenção, os dois testes contendo seis questões das quais quatro eram abertas e duas de múltipla escolha com justificativa. As questões envolviam as propriedades de arranjo e combinação com número de possibilidades menor que 25, pois o foco era a resolução destas sem o uso da fórmula. As seções de análise estão divididas em analise do pré-teste, do pós-teste e uma seção de análise comparativa, Magina et al (2008) diz que:

> Vergnaud acrescenta ainda, que é a análise das tarefas matemáticas e o estudo da conduta do aluno, quando confrontado com essas tarefas, que nos permitem analisar a sua competência. Esta, por sua vez, pode ser avaliada por três aspectos: (a) Análise do acerto e erro, sendo considerado competente aquele que acerta; (b) Análise do tipo de estratégia utilizada, podendo alguém ser mais competente que outro, porque sua resolução foi mais econômica ou mais rápida, ou ainda, mais elegante; e (c) analise da capacidade de escolher o melhor metodo para resolver um problema dentro de uma situação particular. (p. 12).

É a partir das análises dos resultados que podemos comprovar aspectos sobre os tipos de representações simbólicas utilizados na resolução, como também a utilização e reconhecimento dos diferentes invariantes em jogo em cada situação, para assim poder testar e avaliar a o conhecimento dos estudantes.

5.1 ANÁLISE DO PRÉ-TESTE

Durante esta etapa a maioria dos estudantes afirmavam não lembrar a diferença entre arranjo e combinação, principalmente nas questões 5 e 6 (Figura 14) que necessitavam da justificativa e identificação do tipo de problema combinatório. No entanto, os mesmos se esforçaram para a realização do pré-teste.

Após a aplicação do pré-teste foi possível organizar os dados no Quadro 1 mostrando o desempenho dos estudantes, relacionado aos acertos e erros nos problemas de arranjo e combinação:

Quadro 1 - Quantidade de acertos x quantidade de erros

Problemas	Erros	Acertos	Acertos com justificativa incoerente	Percentual de acertos (%)
C (1º situação)	20	8	0	28,5%
A (2º situação)	13	15	0	53,5%
CR (3º situação)	27	1	0	3,5%
AR (4º situação)	27	1	0	3,5%
A (5º situação)	15	9	4	46,4%
CR (6º situação)	20	2	6	28,5%
LEGENDA: A=Arranjo Simples; C=Combinação Simples; AR-= Arranjo com Repetição; CR= Combinação com Repetição.				

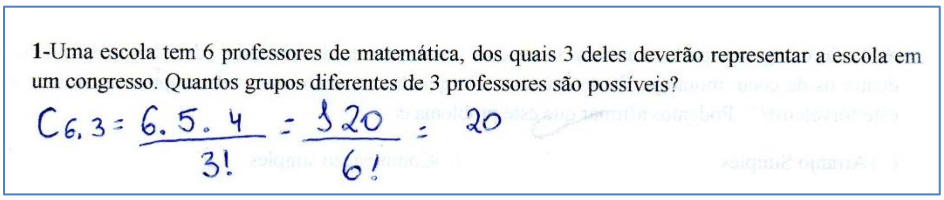
Fonte: A autora (2017)

Considerando os resultados obtidos no Quadro 1, é possível perceber que os estudantes no Pré-teste apresentaram um maior número de acertos nos problemas de Arranjo, seguido dos de Combinação. Entretanto no que diz respeito aos tipos de problemas com repetição, percebe-se um quantitativo muito baixo de acertos, pois entre os 28 alunos que participaram deste teste apenas um conseguiu acertar as questões 3 e 4, bem como entre os estudantes que acertaram as questões 5 e 6, 10 deles não conseguiram justificar corretamente tais questões, o que nos leva a pensar que os mesmos não conseguem diferenciar os problemas de arranjo e combinação revelando dificuldades quanto as suas propriedades.

A seguir, ressaltamos os principais erros e acertos, assim como algumas das estratégias utilizadas pelos estudantes, ao resolverem os problemas propostos.

A primeira questão objetivava verificar se o estudante conseguia resolver problemas de combinação simples, verificamos que a representação utilizada por todos os estudantes que responderam corretamente à questão 1, fizeram uso da fórmula como podemos observar na figura 15.

Figura 65 - Protocolo de Resolução do aluno 27



1-Uma escola tem 6 professores de matemática, dos quais 3 deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 3 professores são possíveis?

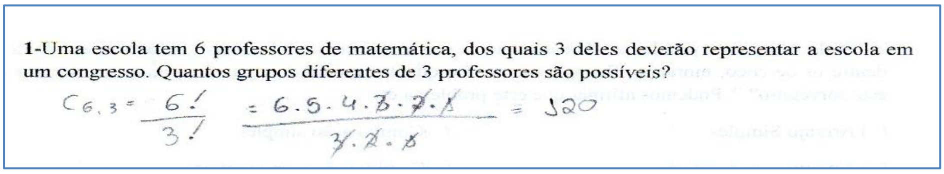
$C_{6,3} = \frac{6.5.4}{3!} = \frac{120}{6!} = 20$

Fonte: A autora (2017)

Podemos perceber que estes estudantes conseguiram identificar o invariante relacional presente neste problema, percebendo suas relações e utilizando o invariante operatório de maneira correta.

Dentre os erros cometidos na questão 1, destacam-se 9 estudantes que não compreenderam o invariante relacional, pois os mesmos responderam o problema como se fosse um arranjo simples, como podemos observar na figura 16. Os demais erros cometidos nesta questão trazem incompreensão do problema, onde o estudante realizou cálculos sem relação com a questão proposta, sem relação com os problemas de arranjo e combinação.

Figura 7 - Protocolo de Resolução do aluno 23



1-Uma escola tem 6 professores de matemática, dos quais 3 deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 3 professores são possíveis?

$C_{6,3} = \frac{6!}{3!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = 120$

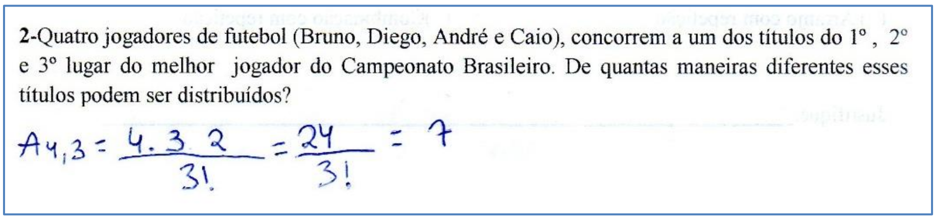
Fonte: A autora (2017)

A segunda questão tinha por objetivo averiguar se o estudante tinha compreensão de problemas sobre arranjo simples. Dentre os 15 estudantes que responderam corretamente a segunda questão, 14 destes responderam pelo princípio fundamental da contagem, e apenas 1 respondeu por meio da fórmula de arranjo simples.

Dentre os erros que mais se repetiram verificamos o uso inadequado da fórmula de arranjo, como podemos ver na figura 17. Apesar do estudante ter identificado o tipo de problema e suas relações, ou seja, perceba o invariante relacional nesta situação, o mesmo não realizou o cálculo corretamente, pois há indícios que ele não tinha conhecimento sobre a fórmula completa, assim como não efetuou a divisão e a relação do fatorial de uma maneira certa. Dessa forma percebemos que o estudante tem dificuldades ao se deparar com a relação do fatorial, que é necessário ao fazer uso da fórmula de arranjo simples no momento da resolução do problema.

Nessa perspectiva, acreditamos e defendemos que devemos proporcionar ao estudante várias representações ao ensinar os problemas combinatórios, não se limitando apenas ao uso da fórmula, pois muitas vezes o estudante não consegue lembrar completamente da mesma, e ao ter conhecimento de outras representações o estudante poderá dispor de outras alternativas para a resolução.

Figura 87 - Protocolo de Resolução do aluno 27



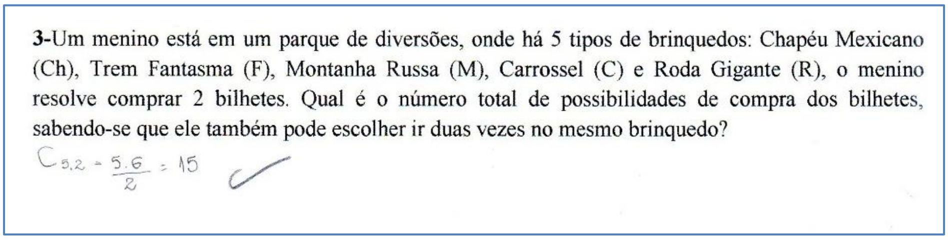
2-Quatro jogadores de futebol (Bruno, Diego, André e Caio), concorrem a um dos títulos do 1º , 2º e 3º lugar do melhor jogador do Campeonato Brasileiro. De quantas maneiras diferentes esses títulos podem ser distribuídos?

$A_{4,3} = \frac{4.3\ 2}{3!} = \frac{24}{3!} = 7$

Fonte: A autora (2017)

A terceira questão tem por objetivo verificar se o estudante consegue resolver problemas de combinação com repetição. Nesta situaçãoproblema apenas um estudante chegou ao resultado esperado, no entanto, o mesmo não entendeu que o problema era de combinação com repetição, pois este realizou o cálculo operatório que chegou no resultado correto entretanto identificou o problema como uma combinação simples como podemos ver na figura 18. Então percebemos que o estudante realizou o invariante operatório correto, porém não entendeu as relações presentes neste problema, deixando assim uma compreensão incompleta sobre o invariante relacional.

Figura 9 – Protocolo de Resolução do aluno 14



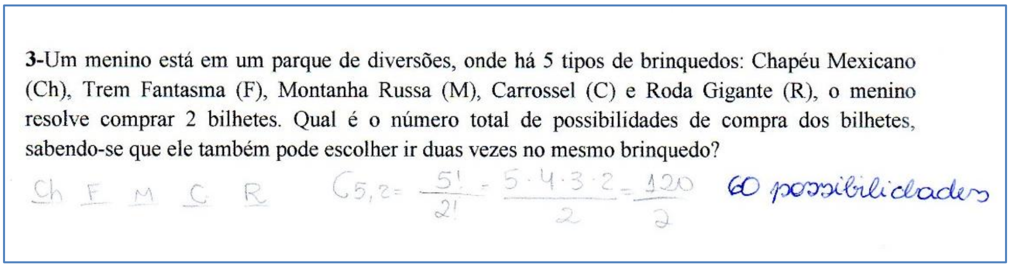
3-Um menino está em um parque de diversões, onde há 5 tipos de brinquedos: Chapéu Mexicano (Ch), Trem Fantasma (F), Montanha Russa (M), Carrossel (C) e Roda Gigante (R), o menino resolve comprar 2 bilhetes. Qual é o número total de possibilidades de compra dos bilhetes, sabendo-se que ele também pode escolher ir duas vezes no mesmo brinquedo?

$C_{5,2} = \frac{5.6}{2} = 15$

Fonte: A autora (2017)

Os erros cometidos pelos estudantes foram diversos, 4 destes responderam o problema como uma combinação simples, conseguiram realizar o cálculo corretamente, porém por se tratar de combinação com repetição a resposta está incorreta, neste caso verificamos que o estudante não entendeu o invariante relacional nesta situação e ainda faltam elementos para compreensão da representação simbólica utilizada(fórmula). Dentre os erros mais comuns nesta questão podemos verificar o uso da fórmula de maneira inadequada como podemos ver na figura 19. Nesta resolução o estudante não sabia reconhecer corretamente a fórmula da combinação, fazendo assim uma relação equivocada deste tipo de representação.

Figura 19 - Protocolo de Resolução do aluno 13


3-Um menino está em um parque de diversões, onde há 5 tipos de brinquedos: Chapéu Mexicano (Ch), Trem Fantasma (F), Montanha Russa (M), Carrossel (C) e Roda Gigante (R), o menino resolve comprar 2 bilhetes. Qual é o número total de possibilidades de compra dos bilhetes, sabendo-se que ele também pode escolher ir duas vezes no mesmo brinquedo?

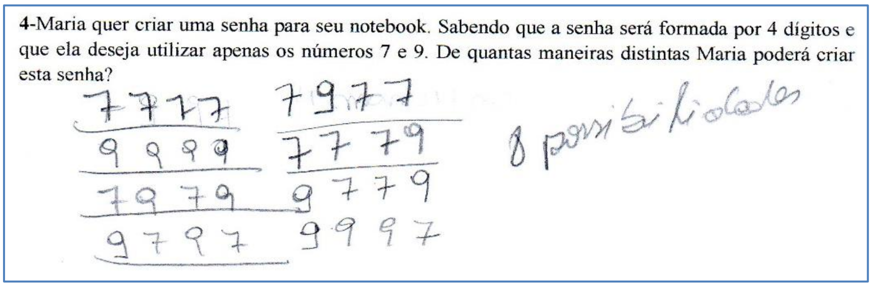
Ch F M C R $C_{5,2} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = \frac{120}{2}$ 60 possibilidades

Fonte: A autora (2017)

A questão quatro objetivou verificar se o estudante compreendia problemas envolvendo arranjo com repetição, nesta questão apenas um estudante conseguiu responder corretamente fazendo uso do princípio fundamental da contagem. Dentre os erros podemos destacar 16 estudantes que não conseguiram entender que a situação era arranjo, os mesmos fizeram cálculos sem relação com o problema proposto, 9 estudantes conseguiram verificar que a situação considerava a ordem dos elementos, porém classificaram como arranjo simples, e ao realizar o cálculo utilizaram a Fórmula e o Princípio Fundamental da Contagem, no entanto trocaram a quantidade de elementos do conjunto inicial do enunciado da questão com a quantidade de elementos do agrupamento que era proposto. Alguns estudantes utilizaram a listagem para expressar a realidade até a sua representação, no entanto não conseguiram esgotar todas as possibilidades como podemos observar na figura 20.

Diante desta perspectiva percebemos que a maioria dos estudantes não tinha domínio completo sobre o invariante relacional, pois alguns destes entendiam apenas uma das relações presentes nesta situação.

Figura 10 - Protocolo de Resolução do aluno 2


4-Maria quer criar uma senha para seu notebook. Sabendo que a senha será formada por 4 dígitos e que ela deseja utilizar apenas os números 7 e 9. De quantas maneiras distintas Maria poderá criar esta senha?

7777 7977
9999 7779
7979 9779
9797 9997

8 possibilidades

Fonte: A autora (2017)

A seguir, podemos observar com mais detalhe as estratégias realizadas pelos estudantes ao resolverem a questão 4.

Quadro 2 - Análise das respostas à questão 4

Respostas e estratégias utilizadas pelos estudantes	Número de Estudantes
Resposta correta pelo PFC	1
Resposta incorreta pelo PFC	3
Resposta incorreta pela fórmula de arranjo simples	6
Resposta incorreta pela listagem	4
Resposta incorreta sem relação com a situação problema	14

Fonte: A autora (2017)

Diante do Quadro 2, percebemos que a maioria dos estudantes não conseguiram compreender as relações presentes nessa questão, as outras respostas incorretas utilizaram a fórmula e o princípio fundamental da contagem como se o problema fosse arranjo simples, nisto percebemos que o estudante conseguiu verificar que a ordem importava, porém não consideraram a repetição dos elementos. Já os estudantes que utilizaram como estratégia a listagem compreenderam o invariante relacional listando algumas das possibilidades. Diante desses resultados notou-se que alguns estudantes apresentaram dificuldades relacionadas tanto ao invariante relacional quanto ao invariante operatório.

A quinta e sexta questão tinha por objetivo verificar se o estudante conseguia identificar os problemas combinatórios em Arranjo simples e com repetição e combinação simples e com repetição, sendo necessário justificar o tipo de problema identificado.

Na questão 5 podemos verificar semelhanças entre as respostas dos estudantes, tendo em vista isto podemos classificar as respostas de acordo com as categorias descritas no quadro 3.

Quadro 3- Análise das respostas à questão 5

Respostas e estratégias utilizadas pelos estudantes	Número de Estudantes
Resposta correta com justificativa correta	9
Resposta correta com justificativa incorreta	4
Resposta incorreta, identificou o problema como arranjo com repetição	4
Resposta incorreta identificou o problema como combinação simples	5
Resposta incorreta com justificativa sem relação com a questão proposta	5
Resposta incorreta identificou o problema como combinação com repetição	1

Fonte: A autora (2017)

A maioria dos estudantes identificou que a ordem importava neste problema, no entanto tinham dificuldades em diferenciar a situação em arranjo simples e arranjo com repetição. Dentro desta perspectiva, percebeu-se que a maior parte dos estudantes não tinha domínio sobre o invariante relacional, pois apresentaram dificuldades em identificar a situação proposta entre as alternativas dadas, pois apenas 9 estudantes identificaram e justificaram corretamente a questão.

Ao analisar as respostas da sexta questão, foi possível perceber semelhanças quanto a sua resolução. Diante deste acontecimento, classificamos em 5 categorias as respostas como podemos observar no Quadro 4.

Quadro 4 - Análise das respostas à questão 6

Respostas e estratégias utilizadas pelos estudantes	**Número de Estudantes**
Resposta correta com justificativa correta	2
Resposta correta com justificativa incorreta	6
Resposta incorreta identificando o problema como combinação simples	10
Resposta incorreta identificando o problema como arranjo	2
Resposta incorreta com justificativa sem relação com a questão proposta	8

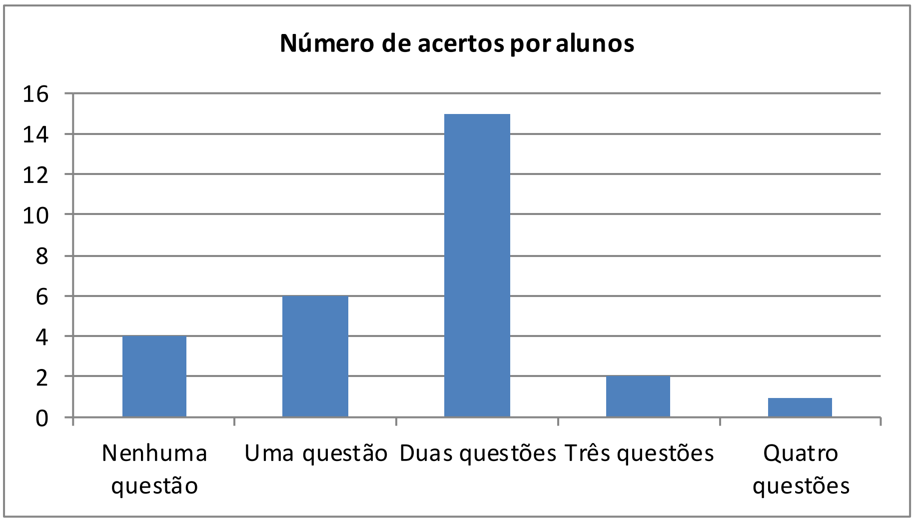
Fonte: A autora (2017)

Verificamos que a maioria dos estudantes identificou que a ordem não importava nesta situação proposta, entretanto 10 destes classificaram a questão como combinação simples, nisto notamos que estes têm dúvidas sobre as relações presentes nesta situação problema, demonstrando assim incompreensão sobre o invariante relacional.

Verificamos que as representações simbólicas mais utilizadas na resolução desses problemas foram ás fórmulas, seguidas do Princípio Fundamental da Contagem e a listagem, no entanto os estudantes que utilizaram a listagem não conseguiram esgotar todas as possibilidades, assim como aplicaram a fórmula de maneira inadequada em algumas questões. Com isso, notou-se que a maioria dos estudantes não compreendem os invariantes operatório e relacional presentes nos problemas envolvendo arranjo e combinação.

Podemos observar melhor no gráfico 1 o quantitativo de questões que os estudantes tiveram êxito ao resolver os problemas.

Gráfico 1 - Quantidade de questões corretas por estudante no pré-teste



Fonte: A autora (2017)

Podemos perceber pelos dados obtidos no gráfico que nenhum dos 28 estudantes que fizeram o pré-teste conseguiram acertar 5 ou 6 questões, assim como 4 destes estudantes não tiveram êxito em nenhuma das questões, refletindo que sua aprendizagem quanto aos problemas de arranjo e combinação não obteve nenhum resultado positivo. A maioria acertou apenas 2 questões, revelando que essa turma ao estudar estes tipos de problemas não conseguiu compreender tais conceitos de uma maneira eficaz, resultando assim numa aprendizagem com algumas lacunas.

5.2 ANÁLISE DO PÓS-TESTE FAZENDO REFERÊNCIA A INTERVENÇÃO

Podemos observar no Quadro 5 o desempenho dos estudantes nesta segunda etapa desta pesquisa, por meio deste percebemos por questão os acertos e erros cometidos pelos participantes.

Quadro 5 - Quantidade de acertos x quantidade de erros

Problemas	Acertos	Erros	Acertos com justificativa incoerente	Percentual de acertos (%)
C (1º situação)	7	21		25%
AR (2º situação)	11	17		39,3%
A (3º situação)	18	10		64,3%
CR (4º situação)	23	5		82,1%
C (5º situação)	14	11	3	60,7%
AR (6º situação)	2	24	2	14,3%
LEGENDA: A=Arranjo Simples; C=Combinação Simples; AR-= Arranjo com Repetição; CR= Combinação com Repetição				

Fonte: A autora (2017)

Diante dos resultados percebemos que os estudantes tiveram melhor desempenho na questão que envolvia a Combinação com repetição, seguido da de arranjo simples, combinação simples e arranjo com repetição. No entanto percebemos que os estudantes tiveram um desempenho baixo na questão 1 em relação com a questão 5 que exigia a identificação e justificativa sobre combinação simples, pois a questão 1 tambem envolvia a combinação simples, porém exigia o cálculo operatório. Tendo em vista isto notamos uma dificuldade dos participantes com relação ao cálculo, pois os mesmos identificam o tipo de problema mais tem dificuldade em encontrar o número total de possibilidades.

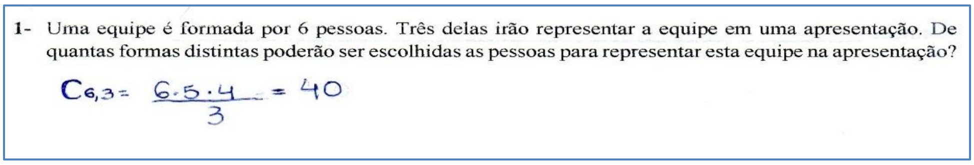
Dentre as situações combinatórias presente nesse pós-teste observou-se que o problema que envolveu arranjo com repetição foi o mais difícil para os estudantes, o que revela que o professor deve trabalhar este tipo de situação mais detalhada com esta turma.

A seguir, ressaltamos os principais erros e acertos, assim como algumas das estratégias utilizadas pelos estudantes, ao resolverem os problemas propostos.

A primeira questão objetivava verificar se o estudante conseguia resolver problemas de combinação simples, nesta questão a maioria dos estudantes que responderam corretamente utilizaram a fórmula de combinação simples e, apenas um dos três estudantes que responderam pela listagem conseguiu listar todas as possibilidades.

Dentre a maioria dos erros percebemos que os estudantes realizaram o cálculo como se o problema fosse arranjo simples com o uso da fórmula e do princípio fundamental da contagem realizando os mesmos corretamente, ou seja, acertaram o cálculo operatório, porém não realizaram o cálculo relacional corretamente, pois os mesmos não perceberam as propriedades que envolvia esta questão. Nos demais erros os estudantes tentaram resolver o problema por combinação simples, no entanto realizaram o cálculo operatório (por meio da fórmula) de uma maneira inadequada o que indica que identificaram o problema corretamente, porém não utilizaram uma representação correta como podemos observar na figura 21.

Figura 111 - Protocolo de Resolução do aluno 13


1- Uma equipe é formada por 6 pessoas. Três delas irão representar a equipe em uma apresentação. De quantas formas distintas poderão ser escolhidas as pessoas para representar esta equipe na apresentação?

$C_{6,3} = \frac{6.5.4}{3} = 40$

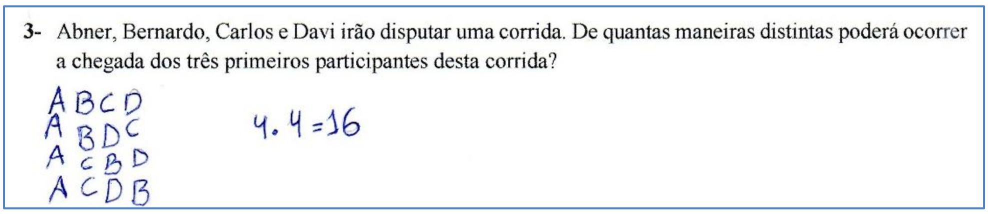
Fonte: A autora (2017)

A segunda questão teve por objetivo averiguar se o estudante tinha compreensão sobre a situação-problema de arranjo com repetição, a maioria dos estudantes que responderam corretamente à questão fizeram uso do princípio fundamental da contagem, e apenas dois responderam pela fórmula de arranjo com repetição.

Entre os erros mais comuns destacou-se 12 estudantes que identificaram a questão como arranjo simples, alguns destes realizaram o cálculo de arranjo simples corretamente e 5 destes responderam pela fórmula de uma maneira inadequada. Diante disto percebemos que alguns destes além de não identificarem as relações existentes nesta situação-problema também realizam o cálculo operatório de uma forma incoerente. Ainda teve estudante que identificou o problema como combinação simples e combinação com repetição, dois estudantes utilizaram a listagem, porém não esgotaram todas as possibilidades, um destes listou 12 das 16 possibilidades, o que revela que este conseguiu identificar corretamente o invariante relacional, entretanto se perdeu no invariante operatório.

A terceira questão tem por objetivo verificar se o estudante consegue resolver problemas que envolve Arranjo simples, nesta questão a maioria dos estudantes que conseguiram responde-la corretamente fizeram uso do princípio fundamental da contagem, apenas um dos dois estudantes que realizou o cálculo por meio do diagrama da árvore chegou ao resultado correto. Na figura 22 observamos que o estudante 8, identificou que o invariante prescrito da repetição não faz parte da situação, pois nesse caso o estudante considera como um arranjo simples.

Figura 12 – Protocolo de Resolução do aluno 8


3- Abner, Bernardo, Carlos e Davi irão disputar uma corrida. De quantas maneiras distintas poderá ocorrer a chegada dos três primeiros participantes desta corrida?

ABCD
ABDC
ACBD
ACDB

$4.4=16$

Fonte: A autora (2017)

A seguir, podemos observar com mais detalhes as estratégias realizadas pelos estuidantes ao resolverem a questão 3.

Quadro 6- Análise das respostas à questão 3

Respostas e estratégias utilizadas pelos estudantes	Número de estudantes
Resposta correta pelo PFC	15
Resposta correta pela Árvore de possibilidades	1
Resposta correta pela fórmula	1
Resposta incorreta pelo PFC	2
Resposta incorreta pela Árvore de possibilidades	1
Resposta incorreta pela listagem e a generalização	4
Resposta incorreta pela fórmula de combinação Simples	1
Resposta incorreta pela fórmula de arranjo simples	3

Fonte: A autora (2017)

Percebemos que nesta questão a maioria dos estudantes conseguiu perceber o invariante relacional identificando o problema como arranjo, mas não realizaram os procedimentos de resolução corretos, ou seja, o calculo operatório.

A questão quatro objetivava verificar se o estudante compreendia problemas envolvendo combinação com repetição, dos estudantes que conseguiram resolver a questão corretamente utilizaram a fórmula de combinação com repetição, e apenas um destes resolveu pela listagem. Dentre os erros ocorridos averiguamos que 3 estudantes identificaram o problema como arranjo simples, um por combinação simples e outro por combinação com repetição, porém este último fez o uso inadequado da fórmula. Um estudante deixou a questão em branco, pois não conseguiu entender nem realizar nenhum cálculo.

A quinta e sexta questão tinha por objetivo verificar se o estudante conseguia identificar os problemas combinatórios em Arranjo simples, Arranjo com repetição, combinação simples e combinação com repetição, sendo necessário justificar o tipo de problema identificado.

Na quinta questão a maioria dos estudantes conseguiram identificar a questão como combinação simples, entre as justificativas das respostas corretas 3 destas não justificaram corretamente. Dentre os erros ocorridos entre os estudantes 6 deles justificaram o problema como arranjo, sendo que dois destes justificaram dizendo que poderia haver repetição, ou seja, alguns justificaram a situação como arranjo simples e outros como arranjo com repetição.

Verificamos que alguns dos participantes justificaram corretamente a alternativa marcada, entretanto não identificou o problema como combinação simples como podemos observar na figura 23. Determinados estudantes ao marcar a situação problema entre arranjo simples, arranjo com repetição, combinação simples e combinação com repetição, principalmente os que escolheram arranjo simples e combinação com repetição revelaram que os mesmos não conseguiram perceber as relações entre estas situações, pois marcaram uma situação problema e justificaram como outra, havendo assim dúvidas nas propriedades combinatórias envolvendo arranjo e combinação.

Teve dois estudantes que conseguiram justificar corretamente a questão dizendo que era combinação com repetição, indicando que compreendia o que seria combinação com repetição, porém tiveram dificuldades em diferenciar a situação-problema em combinação simples e combinação com repetição. Observamos entre as justificativas que dois estudantes apresentaram sem coerência a justificativa a esta questão, ou seja, não tinha nenhuma das propriedades combinatórias abordadas nesta pesquisa.

Figura 13 - Protocolo de Resolução do aluno 14

5- Dado o seguinte problema: "Um pizzaiolo tem a sua disposição ingredientes para fazer pizzas de sabores: Queijo (Q), Milho (M), Calabresa (C), Charque (Ch) e Frango (F). Quantas são as possibilidades de pizzas que podem ser feitas com dois sabores distintos? ". Podemos afirmar que este problema é:

(X)Arranjo Simples ( )Combinação simples

( )Arranjo com repetição ( )Combinação com repetição

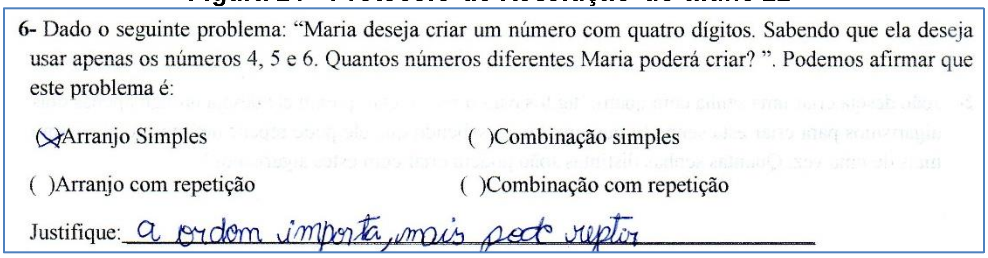
Justifique: Pois os elementos tem que serem destinto e a ordem importa.

Fonte: A autora (2017)

De acordo com a figura 23 notamos que o estudante tem conhecimento sobre as propriedades de arranjo simples, pois ele justificou com coerência de acordo com o tipo de problema identificado por ele, no entanto houve uma interpretação errada da situação proposta.

Na sexta questão os acertos foram baixo em relação as outras questões, pois apenas quatro estudantes identificaram o problema como arranjo com repetição onde apenas dois destes justificaram corretamente. Na maioria dos erros os estudantes identificou o problema como arranjo simples, dentre estes cinco justificaram o problema como combinação o que revela dúvidas sobre as propriedades de arranjo e combinação. Teve ainda um estudante que justificou corretamente como arranjo com repetição, porém marcou a alternativa de arranjo simples como podemos observar na figura 24, oito estudantes marcaram a alternativa de combinação com repetição alguns justificaram dizendo que poderia haver repetições, outros apenas que a ordem não importava. Um estudante deixou a questão em branco, o mesmo alegou que não sabia responder tal questão.

Figura 14 - Protocolo de Resolução do aluno 21


6- Dado o seguinte problema: "Maria deseja criar um número com quatro dígitos. Sabendo que ela deseja usar apenas os números 4, 5 e 6. Quantos números diferentes Maria poderá criar? ". Podemos afirmar que este problema é:

(X)Arranjo Simples ( )Combinação simples

( )Arranjo com repetição ( )Combinação com repetição

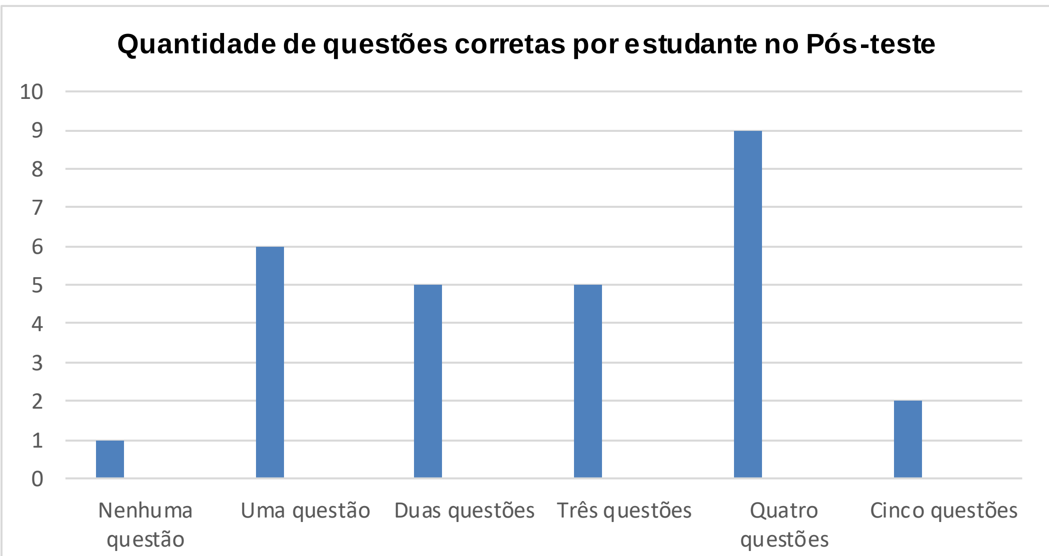
Justifique: a ordem importa, mais pode repetir

Fonte: A autora (2017)

Verificamos que as estratégias mais utilizadas pelos estudantes durante o pós-teste foi o uso das fórmulas, seguidas do princípio fundamental da contagem, da listagem e do diagrama de árvores. Alguns ainda fazem uso destas representações de uma maneira inadequada, revelando dúvidas quanto as propriedades das situações envolvendo arranjo e combinação. O que indica que não compreendem o invariante relacional e nem o invariante operatório presente nessas situações-problemas.

Podemos observar melhor no gráfico 2 o quantitativo de questões que os estudantes tiveram êxito ao resolver os problemas de arranjo e combinação.

Gráfico 2 - Quantidade de questões corretas por estudante no pós-teste



Fonte: A autora (2017)

Tendo em vista os dados obtidos no gráfico 2 percebemos que dos 28 participantes do pós-teste nenhum conseguiu acertar todas as questões, dois destes conseguiu acertar 5 questões e quantidade de questões corretas que obteve o maior número de estudantes foi 4 questões. Diante desses dados percebemos que há ainda dificuldades desta turma com os problemas envolvendo Análise combinatória. Observarmos durante a intervenção que alguns estudantes não participaram efetivamente das discursões durante esta etapa, o que pode ocasionar o baixo rendimento de alguns desses estudantes.

5.3 PRÉ-TESTE X PÓS-TESTE

Durante as três etapas desta pesquisa participaram 34 estudantes, sendo que nem todos participaram de todas as etapas, tendo então 29 na primeira etapa, 34 na segunda e 33 na terceira e última etapa. Após a análise separada do pré-teste e do pós-teste, faz se necessário ainda uma apreciação comparativa entre ambos, ao fazer essa análise comparativa só foi possível entre 28 estudantes, pois estes participaram de todas as etapas desta pesquisa, já que teve um estudante que participou do pré-teste mais não participou do pós-teste.

Adiante no quadro 7 é realizada a comparação entre o percentual dos 28 estudantes entre o pré-teste e o pós-teste de modo que seja possível comparar o desempenho deles antes e após a intervenção.

Quadro 7 - Comparação do Percentual de acertos entre o pré-teste e o pós-teste

	Combinação simples	Arranjo simples	Combinação com repetição	Arranjo com repetição
Pré-teste	28,5%	53,5%	3,5%	3,5%
Pós-teste	25%	64,2%	82,1%	39,2%

Fonte: A autora (2017)

De acordo com o resultado obtido no quadro 7 notamos que a única situação que teve um rendimento menor após a intervenção foi o problema de combinação simples, o que surpreendeu pois foi trabalhado este tipo de situação na intervenção do mesmo modo que as outras situações abordadas nesta pesquisa. Acreditamos que essa queda tenha ocorrido devido a necessidade que os estudantes tinham ao usar as fórmulas, pois durante a intervenção alguns destes preferiram utilizar apenas a fórmula ao resolver os problemas propostos. Bem como foi verificado que a maioria dos erros destes estudantes durante essas etapas ocorreram devido ao uso inadequado das fórmulas.

Os problemas que envolveram a repetição dos elementos tiveram um aumento significativo de acertos, pois passou de 3,5% para 39,2% e 82,1%, o que indica que a aprendizagem dos estudantes ocorreu efetivamente, revelando assim uma compreensão destes sobre o invariante relacional e o invariante prescritivo presente nestas situações combinatórias, indicando a necessidade de trabalhar com mais detalhes os problemas envolvendo combinação simples, e especificamente o invariante de ordenação e suas relações nesse tipo de problema.

Faz se necessário analisar as questões 5 e 6 do pré-teste e pós-teste sem compará-las, pois, no pré-teste essas questões almejam saber se os estudantes sabiam identificar e justificar corretamente os problemas de Arranjo simples e Combinação com repetição, para fazer uma análise dos outros tipos que esta pesquisa investigou, isto é, de Combinação simples e Arranjo com repetição foram abordadas essas duas situações no pós-teste. Ressaltamos que saber nomear o problema não é tão importante, mais sim entender os invariantes da situação.

Quadro 8 - Percentual de acertos das questões com justificativa no pré teste (Arranjo simples e Combinação com repetição) e pós teste (Arranjo com repetição e Combinação simples)

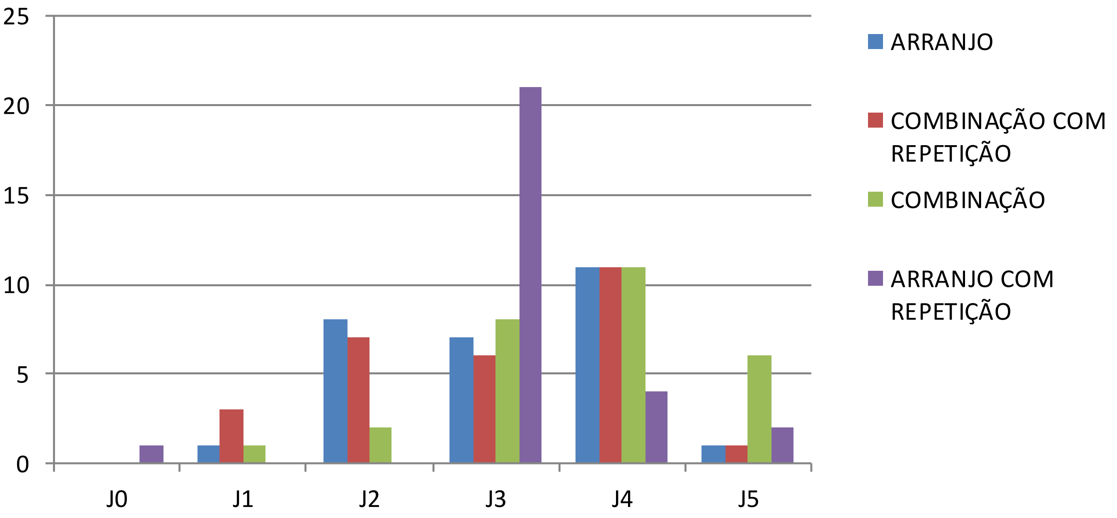
Arranjo simples	Arranjo com repetição	Combinação simples	Combinação com repetição
46,4%	14,2%	60,7%	28,5%

Fonte: A autora (2017)

Ao observar os dados do quadro 8 percebemos que a situação que os estudantes tiveram maior facilidade foi a combinação simples, seguida de arranjo simples, combinação com repetição e arranjo com repetição. Tendo em vista isto, notamos que os problemas que a repetição é considerada são os mais difíceis para os estudantes.

Analisando ainda as questões com justificativa do pré-teste e do pós-teste foi possível categorizar seis tipos diferentes de justificativa a partir das respostas dos estudantes, por meio do Gráfico 3 é possível observar a relação dos participantes com estas justificativas.

Gráfico 3 - Questões com Justificativa



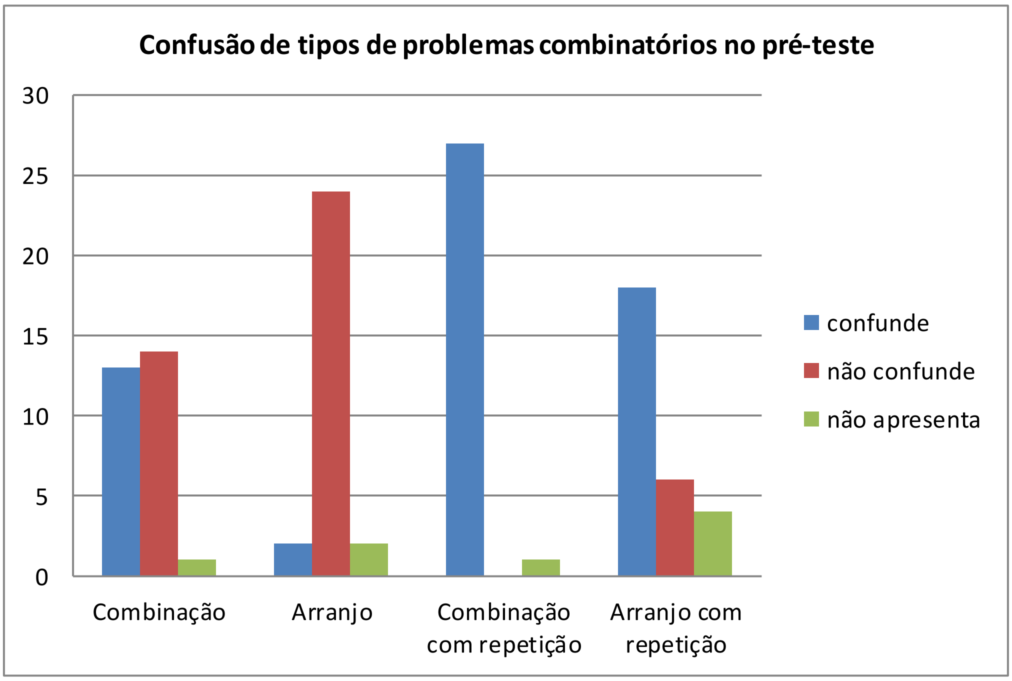
Legenda: J0: Não apresenta justificativa; **J1:** Não apresenta nenhuma relação com a combinatória nem o enunciado; **J2:** Apenas repete o enunciado da questão; **J3:** Justifica utilizando propriedades incorretas; **J4**: Justifica com alguma propriedade combinatória; **J5:** Apresenta todas as propriedades dos tipos de problema combinatório.

Fonte: A autora (2017)

Verificamos que a maioria dos estudantes revelam dificuldades ao ter que justificar os problemas combinatórios e, a situação que envolveu arranjo com repetição foi a que teve maior número de estudantes que justificaram por meio da J3, revelando que estes utilizaram propriedades sobre outras situações combinatórias. Percebemos que apenas uma pequena parte dos estudantes conseguiu justificar apresentando todas as propriedades dos tipos de problemas combinatórios, e que combinação simples foi o que obteve um maior número de justificativa completa em relação aos demais tipos desenvolvidos nessa pesquisa.

Os estudantes demonstraram muitas dificuldades ao diferenciar os problemas que envolviam arranjo simples, arranjo com repetição, combinação simples e combinação com repetição, podemos observar no gráfico 4 e do gráfico 5 o avanço dos estudantes antes e após a intervenção sobre esta dificuldade.

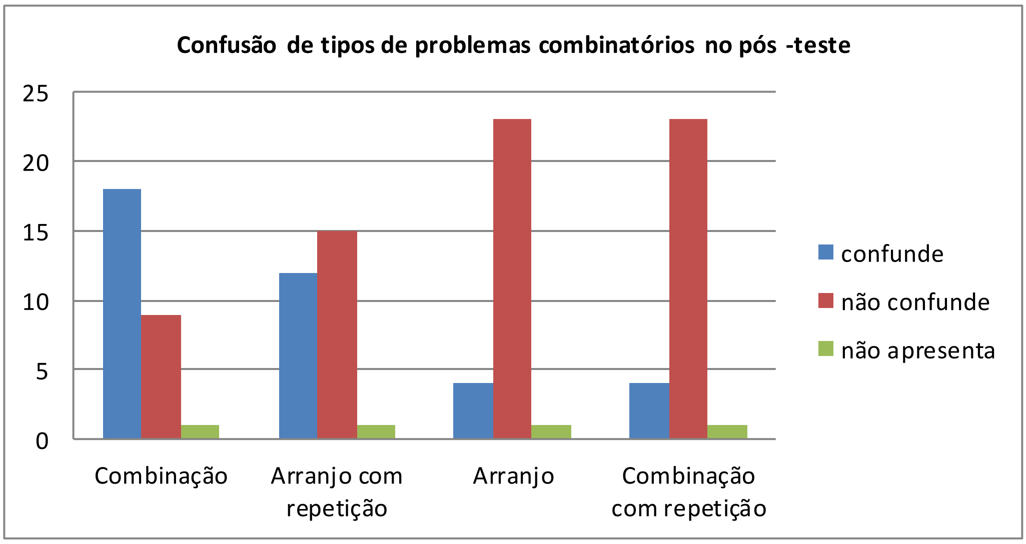
Gráfico 4 - Confusões de tipo de problemas combinatório produzidas pelos estudantes no pré-teste



Fonte: Autora (2017)

Diante dos dados apresentados percebemos que a maioria dos estudantes confunde mais os tipos de problemas que envolvem a repetição dos elementos, e que eles têm menor dificuldade é a situação que envolveu arranjo simples. Assim o invariante da repetição mostrou ser o mais difícil para esta turma.

Gráfico 5 - Confusões do tipo de problemas combinatório produzidas pelos estudantes no pós-teste

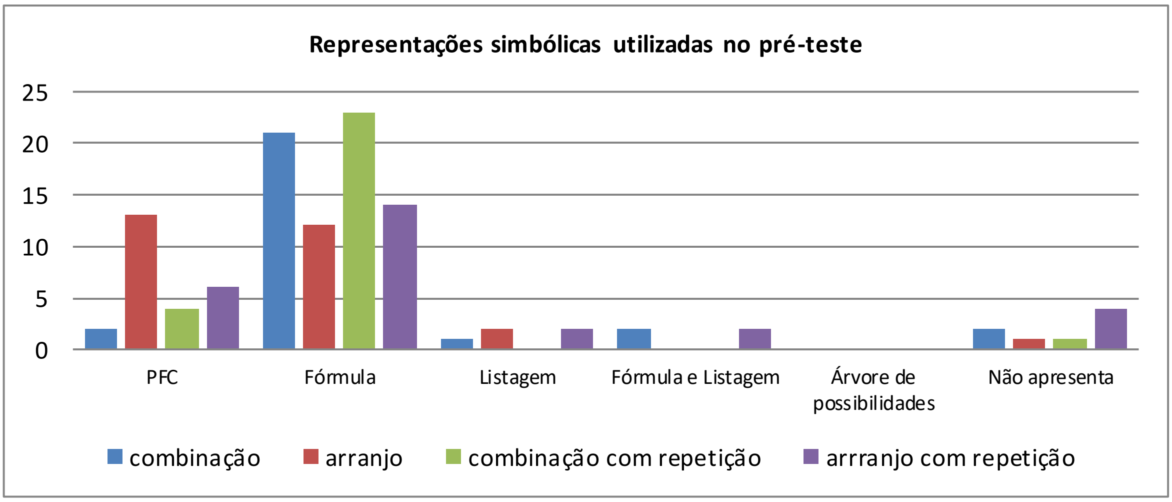


Fonte: A autora (2017)

No gráfico 5 notamos que houve um avanço por parte dos estudantes pois o número destes diminuíram relacionado as confusões nos problemas combinatórios, pois apenas no problema de combinação simples os participantes que não conseguiram identificá-la foi superior aos que conseguiram identificar, os demais problemas obtiveram um número maior de estudantes que identificaram corretamente estas situações propostas. Um fato que surpreendeu foi que antes da intervenção o número de estudantes que não confudiram a situação de combinação simples era superior e após a intervenção ocorreu o contrário.

As representações simbólicas utilizadas pelos estudantes entre o pré-teste e o pós-teste mudaram, por meio do gráfico 6 e 7 é possível observar esta diferença.

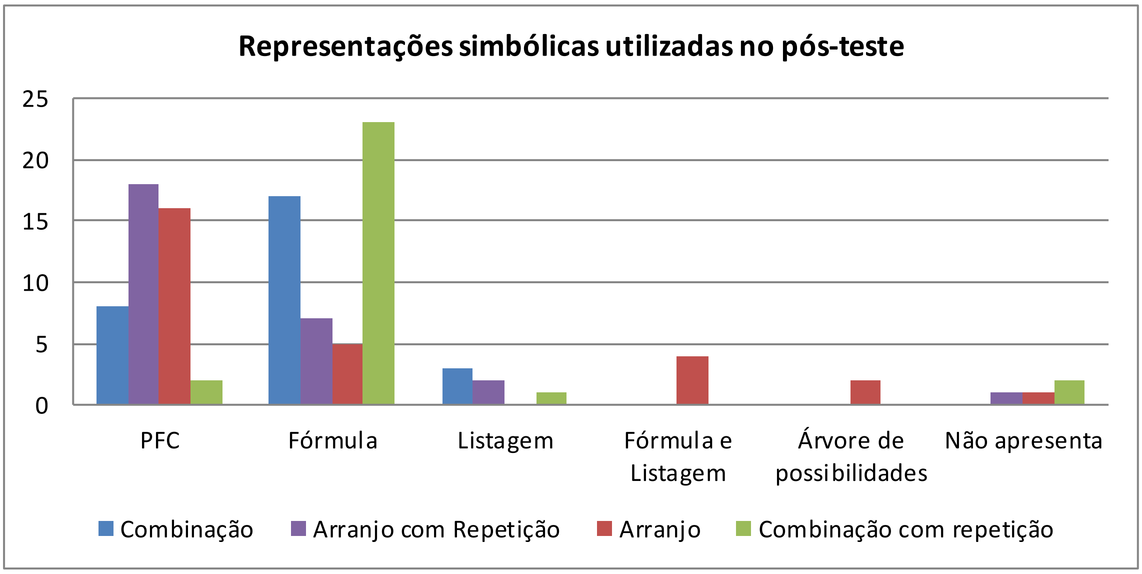
Gráfico 6 - Representações simbólicas utilizadas no pré-teste



Fonte: A autora (2017)

Dentre as representações utilizadas verificamos que a fórmula esta presente em todos os tipos de problemas combinatórios sendo a mais usada pelos estudantes, seguida do PFC, da listagem e da generalização. Onde a representação por meio da generalização não foi realizada de uma maneira efetiva, assim como os estudantes que utilizaram o PFC ao resolver os problemas de combinação fizeram uso inadequado desta representação.

Gráfico 7 - Representações simbólicas utilizadas no pós-teste



Fonte: A autora (2017)

Observamos um aumento do uso do PFC nos problemas de arranjo após a intervenção, assim como o uso da fórmula nos problemas de combinação com repetição. O metodo da listagem no pós-teste teve um resultado positivo, pois no pré-teste os estudantes que utilizaram esta representação não conseguiram esgotar todas as possibilidades, o que ocorreu diferente no pós-teste, pois nele houve estudantes que conseguiram listar todas as possibilidades. Outro meio de representação simbólica que fez parte das respostas dos estudantes após a intervenção foi a árvore de possibilidades. Diante disto, inferimos que é importante o professor utilizar diferentes representações ao ensinar a combinatória, já que após a intervenção alguns estudantes conseguiram esgotar todas as possibilidades ao usar a listagem, assim como ao utilizar a árvore de possibilidades.

Podemos observar no quadro 9 o percentual dos estudantes em relação ao avanço de questões a mais ou a menos corretas do pré-teste para o pós-teste.

Quadro 9 - Percentual do avanço de questões do pré-teste para o pós-teste

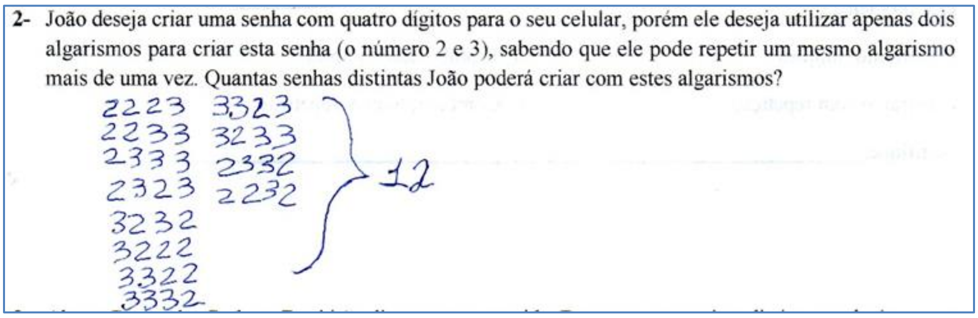
Número de questões	**-1**	**0**	**+1**	**+2**	**+3**	**+4**
Percentual dos estudantes (%)	10,7 %	21,4%	32,1%	21,4%	10,7%	3,5%

Fonte: A autora (2017)

Individualmente, nem todos os estudantes tiveram um melhor desempenho após a intervenção, pois a partir dos dados obtidos no quadro 9 percebemos que 10,7% dos estudantes acertaram uma questão a menos no pós -teste do que no pré-teste, incluindo também 21,4 % dos estudantes que apresentaram o mesmo desempenho no pré-teste e no pós-teste. A maioria dos estudantes apresentou melhor desempenho após a intervenção totalizando 67,7%, revelando assim que a intervenção teve um rendimento positivo.

O estudante 28 foi o que apresentou melhor desempenho após a intervenção, pois este foi o único que se aproximou de acertar todas as questões do pós-teste, já que o erro dele foi na questão que envolvia arranjo com repetição onde o mesmo identificou o problema corretamente e respondeu com uso da listagem como podemos observar na figura 25, porém o mesmo não conseguiu esgotar todas as possibilidades. Esse estudante se destacou entre os demais pois além disto ele foi o único que acertou 4 questões a mais após a intervenção, ou seja, o que teve o melhor desempenho do pré-teste para o pós-teste, esse teve destaque também porque respondeu todo o pós-teste sem fazer uso das fórmulas, e suas estratégias utilizadas foram a listagem e o diagrama de árvores.

Figura 15 - Protocolo de Resolução do aluno 28


2- João deseja criar uma senha com quatro dígitos para o seu celular, porém ele deseja utilizar apenas dois algarismos para criar esta senha (o número 2 e 3), sabendo que ele pode repetir um mesmo algarismo mais de uma vez. Quantas senhas distintas João poderá criar com estes algarismos?

2223 3323
2233 3233
2333 2332
2323 2232
3232
3222
3322
3332

12

Fonte: A autora (2017)

Dessa forma verificou-se que este estudante conseguiu perceber o invariante relacional presente em todas as questões propostas no pós-teste, evidenciando que é possível trabalhar métodos diferentes ao ensinar estes problemas combinatórios, permitindo que o professor não fique limitado apenas ao uso das fórmulas como único método de representações para a solução das situações envolvendo a Análise combinatória.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo buscou analisar os conhecimentos dos alunos do 2ª ano do Ensino Médio em relação ao raciocínio combinatório com invariantes em problemas de arranjo e combinação.

Ao investigar as dificuldades em relação à apreensão do conceito de arranjo e combinação no ensino da Análise Combinatória, observou-se que os estudantes apresentam essas dificuldades. Acreditamos que uma das justificativas seja que para ensinar o professor utiliza fórmulas, pois a maioria dos estudantes apresentaram no pré- teste a fórmula como método de representação simbólica, poucos deles fizeram uso de outra representação.Na maioria das inquietações dos estudantes notou-se que eles se preocupam mais em saber qual fórmula usar na questão proposta, e não porque utiliza esta fórmula e não aquela. Alguns deles querem a fórmula pronta e acabada, o que acaba ocasionando desinteresse sobre as relações que permeiam aquele método representativo. Buscando na maioria das vezes a mecanização dos cálculos presentes para obter a nota almejada, sem realmente se importar com os conhecimentos alcançados neste processo de ensino-aprendizagem que permeiam o ambiente escolar.

Percebeu-se que a representação simbólica mais utilizada na resolução desses problemas foi às fórmulas, seguida do Princípio Fundamental da Contagem, da listagem e do diagrama de árvores. Apesar de ser utilizado o diagrama da árvore durante a intervenção, observou-se que a maioria dos estudantes preferem a fórmula ou o Princípio Fundamental da Contagem para a resolução dos problemas combinatórios focos dessa pesquisa. No entanto fazer uso da fórmula não garante a aprendizagem efetiva, pois o estudante que teve melhor desempenho nesta pesquisa foi o que utilizou as representações simbólicas com utilização da listagem e do diagrama da árvore. Notou-se que a ocorrência de erros ao uso da fórmula foi o principal dentre os ocorridos no momento das representações simbólicas utilizadas pelos estudantes, o que revela que os estudantes ao utilizarem a fórmula como meio de representação simbólica possivelmente não compreendem o invariante operatório utilizado por eles.

Na análise sobre o desempenho dos alunos em invariantes de ordem e repetição em problemas de arranjo e combinação antes e após a intervenção, foi observado que a maioria dos estudantes durante o pré-teste apresentaram dificuldades principalmente em relação as situações de arranjo e combinação que envolve a repetição dos elementos, assim como não tinham compreensão sobre o invariante da ordem que diferencia essas duas situações na Análise combinatória.

Após a intervenção os estudantes obtiveram um resultado superior aos problemas que envolvem o invariante de repetição com relação ao cálculo operatório, pois se verificou nas questões que necessitavam da identificação e justificativa dos problemas combinatórios um desempenho baixo relacionado com os que necessitavam apenas do cálculo. Diante disso, faz-se necessário um olhar mais atento ao trabalhar essas propriedades, pois revela que alguns estudantes não compreendem as propriedades dessas situações-problemas de uma maneira efetiva, pois os mesmos preocupam-se mais em realizar o cálculo e chegar ao resultado final sem preocupar-se com os invariantes relacionais presente nesses problemas.

Após a intervenção verificou-se que alguns estudantes obtiveram êxito ao fazer uso da listagem, assim como passaram a utilizar o diagrama da árvore ao resolver tais problemas. Proporcionando assim após a intervenção métodos diferentes para resolver as situações envolvendo a Análise combinatória sem limitar-se apenas as fórmulas, indicando que a fórmula é recomendável ao trabalhar com um número de possibilidades muito grande agindo assim como um método facilitador nestas situações.

Observamos que o estudante 28 foi o que teve melhor desempenho após a intervenção, assim como respondeu todo o pós-teste sem fazer uso das fórmulas. Merecendo portanto uma entrevista com este para compreender as variáveis que possibilitaram melhor desempenho.

Ressaltamos ainda que o estudo foi apenas em uma turma do Ensino Médio, sendo assim faz se necessário estudos posteriores com outras turmas sobre este conteúdo abordado, principalmente para que busque um meio que proporcione e desperte o interesse de todos os estudantes no momento das discursões em sala de aula entre o professor e o estudante, pois verificou-se que alguns estudantes não participaram de todos os momentos durante a intervenção. Bem como, pesquisas que busquem analisar como o professor leciona este conteúdo e quais conhecimentos eles têm sobre análise combinatória. Espera-se também que esta pesquisa sirva de subsídio para futuras pesquisas neste âmbito educacional.

REFERÊNCIAS

BARRETO, Fernanda Lopes Sá. **O papel das representações simbólicas no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação de jovens e adultos**. 2012. 104f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal do Pernambuco, Recife, 2012.

BATANERO, C.; GODINO, J. D; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatorio**. Madri: Ed. Sintesis, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental. Matemática. Brasília, DF: MEC, SEF, 1997.

______. **PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

BORBA, R. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013, Curitiba. **Anais**... Curitiba: ENEM, 2013

BORBA, R.; PESSOA, C. O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X, 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: ENEM, 2010

BORBA, R.; PESSOA, C.; ROCHA, C.; ASSIS, A. A formação de professores de anos iniciais do Ensino Fundamental para o ensino da Combinatória**. Revista Paranaense de Educação Matemática**. Campo Mourão, PR, v. 3, n. 4, pp. 115-137. jan.-jun. 2014.

BORBA, R.; PESSOA, C.; ROCHA, C. Como estudantes e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatórios. **Educação Matemática Pesquisa** (Online). São Paulo, v. 15, n. 4. pp. 895-908. Número Especial, 2013.

COUTINHO, J.; BARBOSA, J. Uma matemática para o ensino do conceito de Combinação simples a partir de uma revisão Sistemática de literatura. **EM TEIA** – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – vol. 6 -- número – 2015.

ENGLISH, L. Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In: JONES, G. A. (Ed) **Exploring probability in school:** Challenges for teaching and Learning. USA: Springer, 2005. pp. 121-141.

FILHO, Nivaldo Gregório de Oliveira. **Problemas de Estruturas Aditivas e Multiplicativas Propostos em livros Didáticos de Matemática**: o impacto do programa nacional do livro didático. 154f Disertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco.: Recife, 2009.

FISCHBEIN, E. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht: Reidel, 1975.

JOHNSON, J. Using Dominoes to Introduce Combinatorial Reasoning. In: KENNEY, M. J.; HIRSCH ,C. R. (Eds.), **Discrete Mathematics across the curriculum**, k-12 p. 128-136. Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics, 1991.

MAGINA, S.; CAMPOS, T.M.M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Representando Adição e Subtração**: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais São Paulo: PROEM, 2008. 3ºed.

MORGADO, A.C; CARVALHO, J.C.P.; CARVALHO,P.C.P; FERNANDEZ,P. **Análise Combinatória e Probabilidade.** IMPA/SBM: Rio de Janeiro,2006.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações e teses**. 5 ed.Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

PESSOA, C.A.S. Interação social: uma análise do seu papel na superação de dificuldades de resolução de problemas aditivos. In: **25ª Reunão Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação**, 2002, Caxambu / MG. Educação: manifestos, lutas e utopias, 2002.

PESSOA, C.; SANTOS, L.. Listagem, Invariantes, Sistematização e Generalização: Um caminho para o Ensino de Combinatória em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental**. Anais III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Fortaleza-CE: SBEM, 2012.

PESSOA, C.; SILVA, M. Intervenções de Combinatória no 9º ano do ensino fundamental com enfoque na listagem, invariantes, estratégias bem sucedidas e generalização. **Anais do IV EPEPE.** Caruaru: FUNDAJ, 2012.

ROCHA, C.A. **Formação docente e o ensino de combinatória:** diversos olhares, diferentes conhecimentos. 2011. 191f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE: Recife, 2011.

ROCHA, C. A.; BORBA, R. Combinatória no Ensino Médio: influências do guia do Programa Nacional do Livro Didático brasileiro. In: Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, 2017, Granada. **Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico**. Granada: UGR, 2017. p. 1-10

ROCHA, C.A.; FERRAZ, M.C. Conhecimentos de Professores que ensinam Matemática sobre Problemas de Arranjo e Combinação. **Anais XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Recife, Brasil; 26 a 30 de Junho de 2011.

SANTOS, J.P.O.; MELLO, M.P.; MURARI, I.T.C. **Introdução a Análise Combinatória**. Rio de Janeiro: Editora Moderna Ltda., 2007.

SILVA, J.J. **Análise dos problemas combinatórios em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental**. 2015. 42f Monografia (Curso de Matemática Licenciatura) UFPE: Caruaru, 2015.

SILVA, J.J. ;ROCHA, C. A.. O Invariante da Repetição nos Problemas Combinatórios em Livros Didáticos do Ensino Fundamental. In: **V Encontro de Iniciação à Docência da UEPB /** III Encontro de Formação de Professores da Educação Básica, 2015, Campina Grande. Encontro de Iniciação a Docência. Campina Grande: UEPB, 2015. p. 1-12.

SILVA, M.C. **A combinatória**: abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e livros didáticos do ensino fundamental. 2016. 201f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE: Recife, 2016.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Ed. UFPR, 2009.

______. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas**. Análise Psicológica**. Portugal, 1986. P. 75-90. Disponivel em: http://repositorio.ispa.pt/bitstream/10400.12/2150/1/1986_1_75.pdf

APÊNDICES

APÊNDICE A -CARTA DE APRESENTAÇÃO À ESCOLA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO MATEMÁTICA-LICENCIATURA

CARTA DE APRESENTAÇÃO

Venho, por meio dessa apresentar Karolina Lima dos Santos Araújo, aluna do Curso de Licenciatura em Matemática desta instituição, e com quem atualmente desenvolvo pesquisas relativas a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso na função de orientadora. Para o desenvolvimento da pesquisa intitulada “A identificação das propriedades dos problemas de arranjo e combinação por alunos do Ensino Médio” Karolina necessita participar de algumas aulas da disciplina de Matemática. Dessa forma, solicito a Escola Técnica Estadual Governador Eduardo Campos, especificamente ao Professor de Matemática Edson Junior, já contatado previamente.

Garantimos sigilo das informações coletadas e agradecemos de antemão a acolhida de Karolina nessa escola.

Caruaru, 28 de agosto de 2017.

____

Cristiane de Arimatéa Rocha
Professora Assistente da Universidade Federal de Pernambuco
SIAPE nº: 2894033

APÊNDICE B - PROBLEMAS PROPOSTOS AOS ALUNOS NO PRÉ-TESTE

Universidade Federal de Pernambuco – Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Formação Docente
Licenciatura em Matemática

Este trabalho faz parte de uma pesquisa da disciplina “Trabalho de Conclusão de Curso” da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco – Centro Acadêmico do Agreste. Não serão divulgados dados dos alunos, assim como não será divulgado a instituição de ensino a qual o aluno participante está vinculado. Os resultados serão utilizados apenas em sala de aula e eventos científicos.

Obrigado pela participação!

Aluno: ____

1- Uma escola tem 6 professores de matemática, dos quais 3 deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 3 professores são possíveis?

2-Quatro jogadores de futebol (Bruno, Diego, André e Caio), concorrem a um dos títulos do 1º, 2º e 3º lugar do melhor jogador do Campeonato Brasileiro. De quantas maneiras diferentes esses títulos podem ser distribuídos?

3-Um menino está em um parque de diversões, onde há 5 tipos de brinquedos: Chapéu Mexicano (Ch), Trem Fantasma (F), Montanha Russa (M), Carrossel (C) e Roda Gigante (R), o menino resolve comprar 2 bilhetes. Qual é o número total de possibilidades de compra dos bilhetes, sabendo-se que ele também pode escolher ir duas vezes no mesmo brinquedo?

4-Maria quer criar uma senha para seu notebook. Sabendo que a senha será formada por 4 dígitos e que ela deseja utilizar apenas os números 7 e 9. De quantas maneiras distintas Maria poderá criar esta senha?

5-Dado o seguinte problema: “Um campeonato de vôlei será decidido entre quatro seleções: Brasil, Espanha, México e Cuba, sabendo que serão premiados apenas os três primeiros colocados com as medalhas de Ouro, Prata e Bronze. De quantas maneiras poderão ser distribuídas as medalhas de modo que cada time fique apenas com uma das medalhas?”. Podemos afirmar que este problema é:

( )Arranjo Simples ( )Combinação simples

( )Arranjo com repetição ( )Combinação com repetição

Justifique:____

6- Dado o seguinte problema: “Um sorveteiro vende sorvete de três bolas, de sabores escolhidos dentre os de coco, morango, flocos e creme. De quantos modos é possível comprar um sorvete a este sorveteiro?”. Podemos afirmar que este problema é:

( ) Arranjo Simples ( )Combinação simples

( ) Arranjo com repetição ( )Combinação com repetição

Justifique:____

APÊNDICE C – DESCRIÇÃO DA INTERVENÇÃO

Após a análise do pré-teste desenvolvemos o planejamento da aula de intervenção. Durante tal análise inferimos que a maioria dos estudantes não diferenciou os problemas de arranjo e combinação, bem como os casos em que haveria a repetição dos elementos. Tendo em vista isto, durante a intervenção propomos inicialmente que os estudantes respondessem duas questões uma de arranjo simples e outra de combinação simples, para que os mesmos pudessem refletir e se questionar sobre a diferença entre estas situações propostas, para então poder, após essa reflexão, explicar o que seria cada tipo de situação problema, e como o invariante prescrito da ordenação, se comportava em cada situação. Depois atribuímos cerca de cinco minutos para que os alunos tentassem resolver as duas questões propostas para então discutirmos com a turma.

Após esta etapa propusemos duas questões de arranjo (uma que a repetição de elementos era permitida e outra em que não era possível) e duas de combinação (uma que a repetição de elementos era permitida e outra em que não era possível), ou seja, arranjo simples e outro com repetição e, combinação simples e outra com repetição. Assim tínhamos a intenção de que ao deparar se com as duas situações com repetição e sem repetição os estudantes pudessem perceber a diferença entre ambos os casos. Nessa etapa também atribuímos um tempo para que os estudantes tentassem resolvê-las, para então socializarmos a discussão com toda turma.

A seguir ressaltamos alguns exemplos das resoluções das questões feitas no quadro com os estudantes durante a intervenção. Podemos observar a resolução da primeira e segunda questão proposta que envolveu a situação de arranjo simples e combinação simples, e posteriormente comparamos essas duas questões para que os estudantes percebessem o invariante prescritivo e as relações entre estas situações.

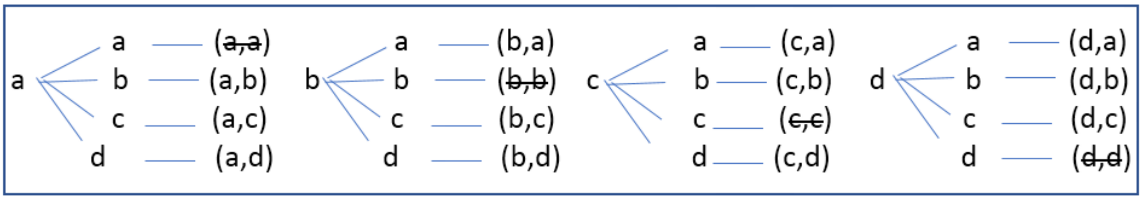
Figura 26: Questão 1 de Arranjo Simples da intervenção

1- Ana, Bruna, Carlos e Elen concorrem a disputa do cargo de representante e vice representante de uma turma. Quantas são as possibilidades da escolha do representante e vice representante desta turma?

Fonte: A autora (2017)

Podemos observar na figura 27 a resolução da primeira questão, na qual foi utilizada a Árvore de possibilidades como representação simbólica. Para essa resolução, utilizamos como notação as letras (‘a”, “b”, “c” e “d”) que representam os respectivos nomes Ana, Bruna, Carlos e Elen.

Figura 27 - Representação por meio da Árvore de possibilidades



Fonte: A autora (2017)

Verificamos que os casos em que há elementos iguais em uma mesma possibilidade foram descartados, pois a situação é de arranjo simples, ou seja, não é permitida a repetição nesta situação. Com isto inferimos que apenas 12 das 16 possibilidades fazem parte da contagem final.

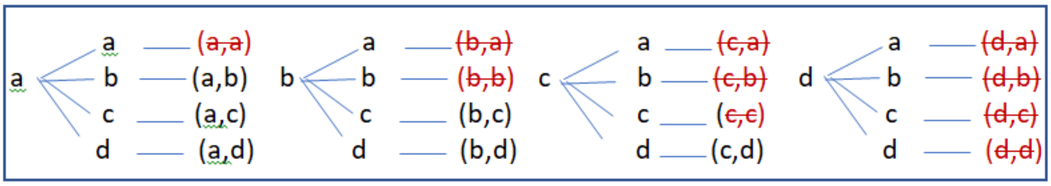
Figura 28: Questão 2 de Combinação Simples da intervenção

2- Ana, Bruna, Carlos e Elen formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quantas são as possibilidades de escolha para representar esta equipe nesta apresentação?

Fonte: A autora (2017)

Notamos que a segunda questão proposta na intervenção envolveu uma situação de combinação simples, na qual utilizamos o mesmo contexto da anterior, modificando a situação de arranjo anterior, para que a ordenação, não gerassem novas possibilidades. Na figura 29 utilizamos como método para resolver essa questão a Árvore de possibilidades, sendo que as letras “a”, “b”, “c” e “d” estão representando os nomes de Ana, Bruna, Carlos e Elen respectivamente.

Figura 29 - Representação por meio da Árvore de possibilidades



Fonte: A autora (2017)

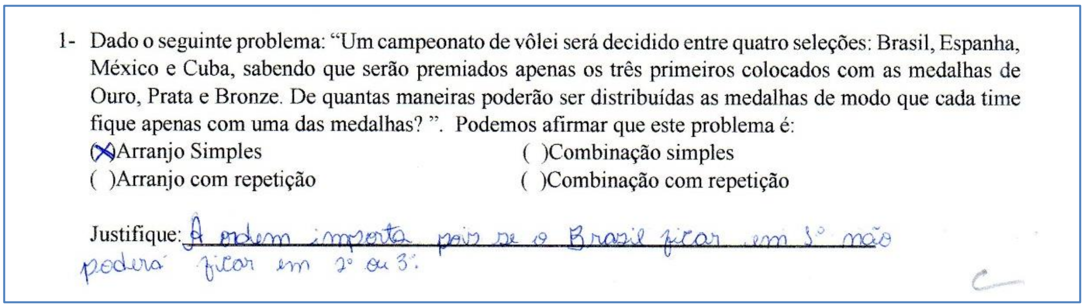
Diante desta representação simbólica apresentada na figura 29 percebemos que apenas seis das 16 possibilidades listadas por meio da Árvore de possibilidades fazem parte dos casos possíveis nessa situação.

Ao realizarmos a comparação entre essas duas questões, verificamos com os estudantes que a quantidade de pessoas no grupo inicial e do subgrupo que será formado é a mesma, pois são quatro pessoas que compõem o conjunto inicial que formará os subgrupos com apenas duas pessoas, e mesmo assim averiguamos que os números de possibilidades diminuiram quando envolveu a combinação simples (segunda questão). Com isto discutimos com os estudantes sobre o invariante da ordem como a principal diferença entre essas duas situações, sendo que no arranjo a ordem importa (gera novas possibilidades) e na combinação a ordem não importa (não gera novas possibilidades).

Diante disto observamos que o número de possibilidades, nesses casos, ao envolver situações com arranjo é maior que o de combinação, se supormos com o conjunto de mesmo número de elementos para escolher subgrupos de mesma quantidade de elementos.

Em seguida entregamos quatro questões de múltipla escolha para que os estudantes justificassem os tipos de problemas combinatórios a partir dos seus invariantes, sendo uma questão de arranjo simples, outra de arranjo com repetição, combinação simples e outra de combinação com repetição. Após a entrega dessas questões conferimos algum tempo para que os estudantes resolvessem e então foram discutidas com a turma. Podemos observar nas figuras 30, 31 e 32 algumas das respostas destes estudantes durante a intervenção.

Figura 30 - Protocolo de Resolução do problema de Arranjo do aluno 25


1- Dado o seguinte problema: “Um campeonato de vôlei será decidido entre quatro seleções: Brasil, Espanha, México e Cuba, sabendo que serão premiados apenas os três primeiros colocados com as medalhas de Ouro, Prata e Bronze. De quantas maneiras poderão ser distribuídas as medalhas de modo que cada time fique apenas com uma das medalhas? ”. Podemos afirmar que este problema é:

(X)Arranjo Simples ( )Combinação simples

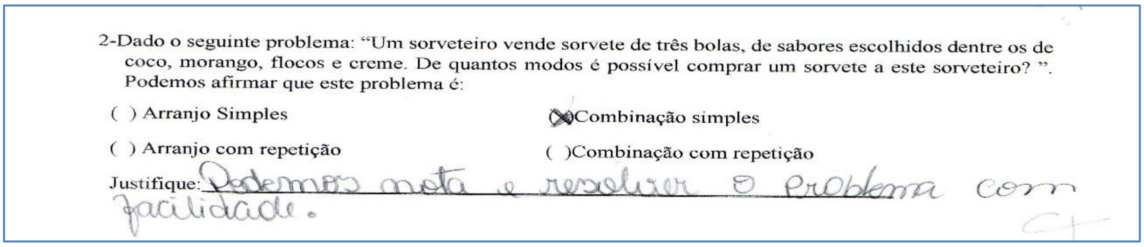
( )Arranjo com repetição ( )Combinação com repetição

Justifique: A ordem importa pois se o Brasil ficar em 1° não poderá ficar em 2° ou 3°.

Fonte: A autora (2017)

Na primeira questão tivemos por objetivo averiguar se os estudantes conseguiam identificar e justificar situações envolvendo Arranjo simples. Podemos observar por meio da resolução do estudante 25 que ele compreende o invariante prescritivo de ordem, porém quando explica faz uso da não possibilidade repetição. Mas acreditamos que este aluno consegue perceber as relações envolvidas nesta situação-problema, pois, ele identifica que a ordem importa e que não pode haver repetição, pois afirma que se o Brasil ficar em 1º não poderá ficar nas demais colocações.

Figura 31 - Protocolo de Resolução de problema de Combinação do aluno 2



2-Dado o seguinte problema: "Um sorveteiro vende sorvete de três bolas, de sabores escolhidos dentre os de coco, morango, flocos e creme. De quantos modos é possível comprar um sorvete a este sorveteiro? ". Podemos afirmar que este problema é:

( ) Arranjo Simples (X)Combinação simples

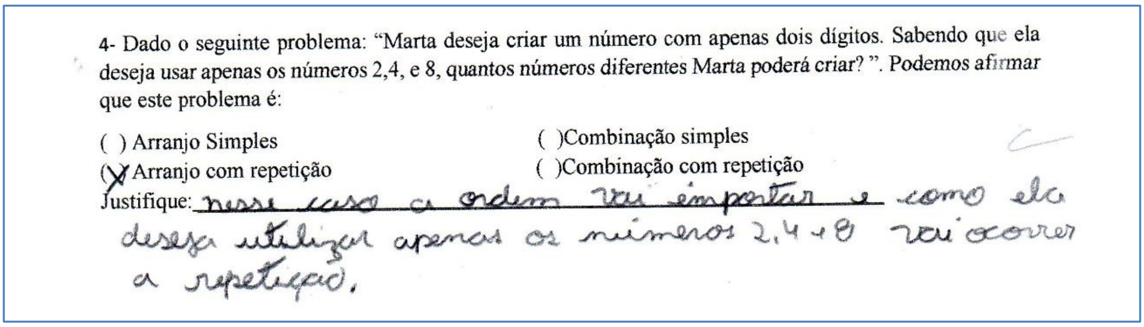
( ) Arranjo com repetição ( )Combinação com repetição

Justifique: Podemos nota e resolver o problema com facilidade.

Fonte: A autora (2017)

A segunda questão objetivamos verificar se os estudantes conseguiam identificar e justificar situações envolvendo combinação simples, podemos observar por meio da figura 31 a resolução do estudante 2, este consegue identificar o problema corretamente, porém ao justificar ele não apresenta nenhuma coerência nem com as propriedades combinatórias nem com o enunciado da questão proposta. Esse fato nos que revela que estudantes ainda apresentaram dificuldades, ou seja, não conseguiram compreender com eficácia as propriedades envolvendo arranjo e combinação abordados na intervenção.

Figura 32: Protocolo de Resolução do aluno 16



4- Dado o seguinte problema: "Marta deseja criar um número com apenas dois dígitos. Sabendo que ela deseja usar apenas os números 2,4, e 8, quantos números diferentes Marta poderá criar? ". Podemos afirmar que este problema é:

( ) Arranjo Simples ( )Combinação simples

(X) Arranjo com repetição ( )Combinação com repetição

Justifique: nesse caso a ordem vai importar e como ela deseja utilizar apenas os números 2,4 e 8 vai ocorrer a repetição.

Fonte: A autora (2017)

A quarta questão verificamos se os estudantes compreendiam as situações envolvendo arranjo com repetição, por meio da figura 32 que traz a resolução do estudante 16 nesta questão, observamos que o mesmo apresenta todas as propriedades combinatórias nesta situação, pois ele justifica dizendo que a ordem vai importar e que vai ocorrer a repetição.

A partir desses exemplos inferimos que durante a intervenção a maioria dos estudantes conseguiu compreender as propriedades envolvendo arranjo e combinação, sendo que alguns destes ainda revelam dificuldades após essa etapa.

APÊNDICE D - PROBLEMAS PROPOSTOS AOS ALUNOS NO PÓS-TESTE

Universidade Federal de Pernambuco – Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Formação Docente
Licenciatura em Matemática

Este trabalho faz parte de uma pesquisa da disciplina “Trabalho de Conclusão de Curso” da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco – Centro Acadêmico do Agreste. Não serão divulgados dados dos alunos, assim como não será divulgado a instituição de ensino a qual o aluno participante está vinculado. Os resultados serão utilizados apenas em sala de aula e eventos científicos.

Obrigado pela participação!

Aluno: ____

1-Uma equipe é formada por 6 pessoas. Três delas irão representar a equipe em uma apresentação. De quantas formas distintas poderão ser escolhidas as pessoas para representar esta equipe na apresentação?

2-João deseja criar uma senha com quatro dígitos para o seu celular, porém ele deseja utilizar apenas dois algarismos para criar esta senha (o número 2 e 3), sabendo que ele pode repetir um mesmo algarismo mais de uma vez. Quantas senhas distintas João poderá criar com estes algarismos?

3- Abner, Bernardo, Carlos e Davi irão disputar uma corrida. De quantas maneiras distintas poderá ocorrer a chegada dos três primeiros participantes desta corrida?

4- André dirige-se a uma padaria para comprar dois bolos. Sabendo que ele poderá comprar os bolos do mesmo sabor e que nesta padaria existem bolos de 5 sabores distintos. De quantas maneiras André poderá comprar os bolos?

5- Dado o seguinte problema: “Um pizzaiolo tem a sua disposição ingredientes para fazer pizzas de sabores: Queijo (Q), Milho (M), Calabresa (C), Charque (Ch) e Frango (F). Quantas são as possibilidades de pizzas que podem ser feitas com dois sabores distintos?”. Podemos afirmar que este problema é:

( )Arranjo Simples ( )Combinação simples

( )Arranjo com repetição ( )Combinação com repetição

Justifique:____

6- Dado o seguinte problema: “Maria deseja criar um número com quatro dígitos. Sabendo que ela deseja usar apenas os números 4, 5 e 6. Quantos números diferentes Maria poderá criar?”. Podemos afirmar que este problema é:

( )Arranjo Simples ( )Combinação simples

( )Arranjo com repetição ( )Combinação com repetição

Justifique:____

APÊNDICE E – PROBLEMAS RESOLVIDOS NA INTERVENÇÃO

1- Ana, Bruna, Carlos e Elen concorrem a disputa do cargo de representante e vice representante de uma turma. Quantas são as possibilidades da escolha do representante e vice representante desta turma?

2- Ana, Bruna, Carlos e Elen formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quantas são as possibilidades de escolha para representar esta equipe nesta apresentação?

3- Quatro jogadores de futebol (Bruno, Diego, André e Caio), concorrem a um dos títulos do 1º, 2º e 3º lugar do melhor jogador do Campeonato Brasileiro. De quantas maneiras diferentes esses títulos podem ser distribuídos?

4- Maria quer criar uma senha para seu notebook. Sabendo que a senha será formada por 4 dígitos e que ela deseja utilizar apenas os números 7 e 9. De quantas maneiras distintas Maria poderá criar esta senha?

5- Um menino está em um parque de diversões, onde há 5 tipos de brinquedos: Chapéu Mexicano (Ch), Trem Fantasma (F), Montanha Russa (M), Carrossel (C) e Roda Gigante (R), o menino resolve comprar 2 bilhetes. Qual é o número total de possibilidades de compra dos bilhetes, sabendo-se que ele também pode escolher ir duas vezes no mesmo brinquedo?

6- Uma escola tem 6 professores de matemática, dos quais 3 deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 3 professores são possíveis

7- Dado o seguinte problema: "Um campeonato de vôlei será decidido entre quatro seleções: Brasil, Espanha, México e Cuba, sabendo que serão premiados apenas os três primeiros colocados com as medalhas de Ouro, Prata e Bronze. De quantas maneiras poderão ser distribuídas as medalhas de modo que cada time fique apenas com uma das medalhas?". Podemos afirmar que este problema é:

( )Arranjo Simples ( )Combinação simples

( )Arranjo com repetição ( )Combinação com repetição

Justifique:____

8-Dado o seguinte problema: "Um sorveteiro vende sorvete de três bolas, de sabores escolhidos dentre os de coco, morango, flocos e creme. De quantos modos é possível comprar um sorvete a este sorveteiro?". Podemos afirmar que este problema é:

( ) Arranjo Simples ( )Combinação simples

( ) Arranjo com repetição ( )Combinação com repetição

Justifique:____

9-Dado o seguinte problema: “Um pesquisador científico precisa escolher duas cobaias, num grupo de sete cobaias. De quantas maneiras ele pode realizar esta escolha?”. Podemos afirmar que este problema é:

( ) Arranjo Simples ( )Combinação simples

( ) Arranjo com repetição ( )Combinação com repetição

Justifique:____

10- Dado o seguinte problema: “Marta deseja criar um número com apenas dois dígitos. Sabendo que ela deseja usar apenas os números 2,4, e 8, quantos números diferentes Marta poderá criar?”. Podemos afirmar que este problema é:

( ) Arranjo Simples ( )Combinação simples

( ) Arranjo com repetição ( )Combinação com repetição

Justifique:____