UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

ANDRESON DA SILVA ALQUINO

DEMONSTRAÇÕES EM GEOMETRIA PLANA: Investigando os níveis do pensamento geométrico dos alunos, nas construções dos argumentos lógicos, sob a ótica da Teoria de Van Hiele

CARUARU, 2017

ANDRESON DA SILVA ALQUINO

DEMONSTRAÇÕES EM GEOMETRIA PLANA: Investigando os níveis do pensamento geométrico dos alunos, nas construções dos argumentos lógicos, sob a ótica da Teoria de Van Hiele

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática

Área de Concentração: Ensino (Matemática)
Orientador(a): Professor Me. Cleiton de Lima Ricardo.

CARUARU, 2017

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier CRB/4 - 1242

A458d Alquino, Andreson da Silva.
Demonstrações em geometria plana: investigando os níveis do pensamento geométrico dos alunos, nas construções dos argumentos lógicos, sob a ótica da teoria do Van Hiele. / Andreson da Silva Alquino. – 2017.
62f. ; 30 cm.

Orientador: Cleiton de Lima Ricardo
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2017.
Inclui Referências.

1. Geometria. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Hiele, Pierre M. Van. I. Ricardo, Cleiton de Lima. (Orientador).

658 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2017-033)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Formação Docente
Curso de Matemática - Licenciatura

DEMONSTRAÇÕES EM GEOMETRIA PLANA: INVESTIGANDO OS NÍVEIS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DOS ALUNOS, NAS CONSTRUÇÕES DOS ARGUMENTOS LÓGICOS, SOB A ÓTICA DA TEORIA DE VAN HIELE

ANDRESON DA SILVA ALQUINO

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e _______________ em 06 de março de 2017.

Banca Examinadora:

____

Prof. Cleiton de Lima Ricardo

(Orientador)

____

Prof. Simone Moura Queiroz

(Examinador(a) Interno(a))

____

Prof. Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto

(Examinador(a) Interno(a))

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por dar o dom da vida e ter me proporcionado chegar até aqui.

Aos meus Pais (meus velhinhos) Alzira Maria e Lazaro Sebastião (in memoriam), por terem me guiado e ensinado os verdadeiros valores na vida.

Minha mãe Maria José (Mãe Bel), meus irmãos Leonardo Alquino e Izabela Alquino e minha tia/madrinha Alcione Alzira, por todo companheirismo e cumplicidade.

A todos de minha família que torceram pelo meu sucesso e vibram com cada conquista.

A todos meus colegas de graduação, por cada momento inesquecível que passamos juntos.

A todos meus professores da Educação Básica e da licenciatura, pelos ensinamentos transmitido, em particular professora Simone Moura e ao professor Paulo Peixoto, pelas oportunidades dadas com participações em projetos, como também ao professor Gilcênio Neto pelas contribuições na banca examinadora.

De modo especial, agradeço ao meu orientador Cleiton Ricardo, por esses dois anos de parceria.

Agradeço minha amiga “anjo”, Maria Natália, por me suportar nos momentos em que sou mais insuportável.

Por fim, agradeço a todos que participaram de maneira direta ou indireta, que estiveram juntos comigo nessa conquista.

“ Tudo posso Naquele que me
fortalece”. (Filipenses 4,13).

RESUMO

Nos cursos de licenciatura em Matemática as disciplinas que requerem demonstrações geralmente são tratadas pelos alunos como as que trazem mais dificuldades para a aprendizagem. Nesse contexto, os argumentos têm um papel fundamental, pois é a partir dos mesmos que conseguimos chegar a uma demonstração de maneira coerente. Sendo assim, o trabalho aqui apresentado é uma pesquisa que objetiva investigar o pensamento geométrico, segundo a ótica de van Hiele, presentes nos argumentos demonstrativos, tratando de modo particular alguns conteúdos da Geometria Plana. Para isso, foram preparados e aplicados questionários, que foram respondidos por graduandos do curso de Licenciatura em Matemática da UFPE-CAA, nas turmas de Fundamentos da Geometria plana e Fundamentos da Geometria espacial. Estes questionários foram direcionados e analisados, de acordo com os níveis de pensamento geométrico, conforme a Teoria de van Hiele.

Palavras-chave: Geometria; Licenciatura em matemática, Demonstrações; van Hiele, Pensamento geométrico.

ABSTRACT

In undergraduate courses in Mathematics, subjects that require demonstrations are usually regarded by students as the ones that present the most difficulties for learning. In this context, the arguments have a fundamental role, because from them we can understand a demonstration in a coherent way. Therefore the study presented here is a research, which aims to investigate geometric thinking, according to van Hiele's point of view, which are presented in the demonstrative arguments, dealing in a particular way with Flat geometry. For this, questionnaires were prepared and applied, which were answered by undergraduates of the Mathematics degree course from UFPE-CAA, at the classes of Fundamentals of Flat Geometry and Fundamentals of spatial Geometry. These questionnaires were directed and analyzed, according to the levels of geometric thinking; according to the theory of van Hiele.

Keywords: Geometry; Undergraduate courses in Mathematics, Demonstrations; Van Hiele, geometric thinking.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Em nossa vida, o diálogo pode ser tratado como primordial para as relações humanas, e condição necessária para se viver em sociedade, pois o mesmo ainda é um dos principais elementos de comunicação e interligação do homem com o meio. Sempre que dialogamos é necessário que estabeleçamos algumas relações, como por exemplo, definirmos o conteúdo que será abordado, pois é através disso que formamos nossos discursos, elaborando o nosso argumento. Quando argumentamos estamos tentando convencer alguém das nossas verdades.

No campo científico as argumentações passam a ser mais rigorosas, pois se tornam condição necessária para que a ciência seja tomada como verdade. O estudo dessas formas de argumentos é o que chamamos de Lógica Formal. Vale ressaltar que existem alguns tipos de lógica, entretanto, neste trabalho, nos deteremos ao modelo Lógico Dedutivo por ser uma das ferramentas mais utilizadas para a construção de conceitos matemáticos, em especial nas demonstrações em Geometria Euclidiana.

Neste trabalho nos limitaremos a um estudo sobre o pensamento geométrico nas argumentações da matemática superior, mais especificamente, nas disciplinas de Fundamentos da Geometria Plana e Fundamentos da Geometria Espacial.

A escolha pessoal pelo tema se deu após três semestres (2014.2, 2015.1 e 2015.2), quando em contato com a disciplina de Fundamentos da Geometria Plana (um período como aluno e dois como monitor), foi observado, que os alunos tinham dificuldades nas construções de demonstrações nessa disciplina.

A relevância acadêmica da pesquisa vem do fato que no curso Matemática-Licenciatura da UFPE-CAA, a disciplina de Fundamentos da Geometria Plana aparece como a primeira que faz uso de um raciocínio demonstrativo. Com isso, consideramos importante fazer um estudo sobre o pensamento geométrico utilizado para a construção dos argumentos demonstrativos, uma vez que será utilizado esse raciocínio para toda continuidade da disciplina como também em outras no curso. Além disso, trata-se de uma disciplina indispensável para a formação do professor de Matemática da Educação Básica.

Podemos observar que a Matemática ensinada na licenciatura apresenta uma roupagem diferente, pois as verdades que outrora eram inquestionáveis agora são colocadas em cheque, tornando necessário aos licenciandos o desenvolvimento da habilidade demonstrativa.

Quanto ao desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, o casal holandês Van Hiele, elaborou uma teoria a fim de desvendar, qual é o estágio de compreensão dos alunos em relação aos conteúdos de geometria. Para isso, desenvolveram cinco níveis de pensamento geométrico.

Encaminhando-se a partir do exposto acima, esta pesquisa propõe o seguinte problema:

Quais são os níveis do pensamento geométrico, sob a luz de van Hiele, dos alunos de licenciatura em matemática da UFPE-CAA, presentes nas construções dos argumentos lógicos demonstrativos, nas disciplinas que abordam a Geometria Euclidiana?

Este trabalho está dividido em sete capítulos. No segundo capitulo apresentaremos uma breve revisão bibliográfica de pesquisas acerca da temática das demonstrações, a fim de norteamos nossa pesquisa.

No capitulo três traremos uma breve abordagem teórica sobre a construção do argumento lógico, apesentando os elementos necessários para o mesmo, além de uma apresentação do modelo lógico dedutivo e sua inter-relação com a Matemática. Apresenta também um pouco dos elementos da Geometria Euclidiana.

O quarto capitulo será focado na teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico segundo o casal van Hiele, destacando seus níveis e objetos do pensamento e também sua importância para o ensino, de modo especial suas contribuições para o ensino de Geometria.

No capitulo cinco apresentaremos a metodologia adotada para e pesquisa e a apresentação e discursão do instrumento de coleta. No sexto, analisaremos os dados obtidos na coleta. Finalmente no ultimo capitulo exporemos nossas considerações finais sobre os aspectos da pesquisa.

Nosso objetivo é investigar através da teoria de van Hiele, os níveis do pensamento geométrico de discentes, do curso de Matematica-licenciatura da UFPE-CAA, nas disciplinas que abordam os conceitos geométricos. Para tal, analisamos as experiências citadas pelos licenciandos, com relação a geometria e as demonstrações, ao longo de sua escolarização. Categorizamos o nível de pensamento geométrico, presente em demonstrações produzidas pelos discentes. E em seguida, avaliamos por meio de seus relatos, as percepções dos estudantes ao construir uma demonstração.

2. O QUE FALAM AS PESQUISAS SOBRE DEMONSTRAÇÕES EM MATEMÁTICA

Nesta parte, nos deteremos em realizar um panorama sobre algumas pesquisas relacionadas a demonstração em matemática, a fim de buscarmos uma conceptualização da mesma, a historicidade, suas funções para o desenvolvimento matemático, e a importância das demonstrações no ensino de geometria e na formação de futuros professores da disciplina de Matemática na Educação Básica.

Kirnev e Savioli (2011) expõem em sua pesquisa as dificuldades apresentadas pelos estudantes nas demonstrações iniciais do curso de matemática. Em seu referencial teórico os autores apresentam definições de lógica e fazem um paralelo entra as demonstrações em Matemática e em Educação Matemática, utilizando dos estudos de Balacheff (1982), para diferenciar demonstrações de provas matemáticas, pois para Balacheff, "provas" são realizadas em um certo tempo pra um certo grupo, enquanto demonstrações são provas particulares. Como resultado da pesquisa, os autores constataram que, além de dificuldades nas demonstrações, os discentes também têm dificuldades com o conteúdo.

Almouloud (2007) mostra em seu trabalho resultados de um projeto de pesquisa realizado com professores dos anos finais do Ensino Fundamental, que tinha por finalidade realizar uma reflexão sobre as provas e demonstrações e discutir o resultado de atividades de raciocínio dedutivo com os docentes. Como principal resultado, o pesquisador percebeu a dificuldade dos professores em reconhecer as demonstrações em matemática mesmo reconhecendo suas finalidades de uso. Outra constatação é a necessidade de formação para que os professores mudem suas concepções acerca dessa temática, auxiliando na sua pratica pedagógica.

No seu trabalho de dissertação, ao falar das demonstrações, Gouvêa (1998), apresenta uma pesquisa com professores da educação básica a respeito das demonstrações em geometria, a fim de abordar, conceituar e analisar essas práticas nos contextos matemáticos.

A próxima pesquisa trata-se de uma sequência didática utilizada como ferramenta pedagógica para o ensino axiomático da geometria nos cursos de graduação.

Ferreira (2008), apresenta em sua pesquisa uma sequência didática para auxiliar na introdução das demonstrações nas disciplinas de Geometria Euclidiana: plana e espacial. A autora alicerçou seu trabalho nos conceitos de demonstrações de Balacheff

(1987), em que considera a demonstração um processo cognitivo, e também se utilizou da teoria de "Registros de Representação Semiótica" de Duval (1995), para melhor aproveitamento das atividades. A aplicação da sequência foi com alunos de uma faculdade de Minas Gerais, na disciplina de Geometria espacial. Por fim após a apresentação de cada atividade a pesquisadora apresenta as respostas deixadas pelos alunos, e algumas sugestões, de melhorias para as atividades.

O Boletim de Educação Matemática - BOLEMA, em sua edição de 2002, traz uma seção especial tratando sobre a temática por meio de uma reflexão dos autores Domingues (2002), Bicudo (2002), Silva (2002) e Garnica (2002), sobre algumas variáveis relacionadas em diferentes contextos.

Em seu trabalho A Demonstração ao Longo dos Séculos, Domingues (2002), retrata um pouco da história da evolução das buscas para se obter verdades matemáticas no decorrer da história. O autor traz que algumas civilizações antigas, como por exemplo os egípcios e babilônicos, utilizavam meios experimentais na busca por regularidades que fossem condizentes com a realidade. Para ele, a origem do método axiomático-dedutivo, o qual vamos utilizar nesse trabalho, se deu na Grécia antiga a partir de Tales de Mileto, como também vem da Grécia a obra mais antiga nesse modelo, o famoso Elementos, de Euclides. Outro dado relevante trazido por Domingues (2002) é que foi a partir de Hilbert, no final do século XIX, com seu livro Fundamentos da Geometria, que surgiu a nova axiomatização da Geometria Euclidiana, a qual utilizamos hoje.

Já Bicudo (2002), traz no seu artigo uma reflexão epistemológica acerca da pergunta "O que é uma demonstração matemática?", trazendo suas relações e implicações com a lógica formal, apresentando e conceituando termos como axioma e teoremas, mas trazendo critica quanto sua definição na matemática, tendo como ápice o último parágrafo do texto

> "Em suma, quando se trata de discorrer sobre a DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA, o matemático parece estar na mesma posição de Santo Agostinho em relação ao tempo e, talvez, a única coisa sensata a fazer seja responder como o Santo. DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA - se não me perguntam o que é, eu sei; se me perguntam, e eu queira explicar, não sei." (BICUDO, 2002, p. 90)

Ainda nesse contexto, Silva (2002) evidencia os três aspectos das demonstrações em matemática: o lógico-epistemológico, o retórico e o heurístico. O primeiro diz respeito verdade matemática no encadeamento das afirmações, já os dois últimos estão atrelados capacidade do sujeito de convencimento no que está sendo demonstrado no retórico, enquanto no heurístico o indivíduo é levado a questionar e encontrar possíveis lacunas buscando assim novos conhecimentos, para o autor os grandes avanços da matemática estão intimamente ligados a este aspecto.

Garnica (2002) traz uma reflexão sobre a presença das demonstrações, nos contextos da Educação Matemática, enfatizando uma velha discussão acerca da temática: de um lado a matemática científica como técnica para seu avanço de outro a Educação Matemática com a crítica nas salas de aulas. O autor define como “Etnoargumentação”, que

> Constitui-se, portanto, um outro regime de verdade, o da Educação Matemática, no qual as concepções acerca das demonstrações (tidas, nesse regime, como etnoargumentações) são relativizadas e tomadas de modo muito mais amplo que na política geral de verdade da Matemática profissional. (GARNICA, 2002, p. 98)

Isto seria relativamente um novo conceito de demonstração, pois iria além de provas de conceitos, mas também no que se diz respeito ao convencimento da mesma no que o ele chama de “Matemáticas”.

Diante do exposto, percebemos que as pesquisas em demonstrações nos apresentam alguns caminhos para o ensino da mesma, mas mesmo assim encontramos muitas dificuldades apresentadas pelos alunos neste quesito, fato que ocasiona reprovações em disciplinas que utilizam essas ferramentas.

3. LOGICA AXIOMÁTICA EM GEOMETRIA EUCLIDIANA

Neste capitulo, abordaremos brevemente algumas concepções que nos orienta nas definições de argumentos lógicos demonstrativos dedutivos. Em seguida faremos um enfoque no do método axiomático e em seus elementos e, por fim, iremos expor aspectos da Geometria Euclidiana.

3.1 Argumentos lógicos

Os argumentos lógicos são agrupamentos de sentenças, interligadas entre si por alguma relação, onde a partir daí, podemos chegar a uma conclusão. Ressaltamos a importância desses argumentos para os avanços das ciências, no nosso caso particular da Matemática.

Observe os argumentos:

"É lógico que o time do Corinthians será campeão do Campeonato Brasileiro de Futebol de 2015. "

"Mateus passará no vestibular, é lógico. "

"Irá fazer frio a noite, é lógico. "

"É lógico que a multiplicação de dois números naturais resultará em outro número natural."

Ao observarmos as frases acima, percebe-se que elas têm em comum o termo "é lógico". Nota-se também, que após uma frase deste tipo, sempre apresentamos uma "justificativa" para a validação da mesma, como, por exemplo, na afirmação "Irá fazer frio a noite, é lógico, pois estamos no inverno e noites de inverno fazem muito frio. " Neste contexto, para o senso comum a palavra "lógica" geralmente é tratada como sinônimo de evidente certeza de um acontecimento, utilizando como auxilio conhecimentos prévios sobre o mesmo.

Já no campo cientifico, a lógica geralmente é utilizada como ferramenta para a fundamentação de novos conceitos nas diversas áreas do conhecimento, seja por meio da indução ou dedução, adotando uma argumentação. Em matemática tais argumentações logicas são o que chamamos de demonstrações, que são embasadas em conceitos que são tratados como verdades absolutas ou axiomática.

> Daí já é possível perceber que à Lógica, como ciência, interessa estudar aquelas afirmações (conclusões) que podem ser justificadas por outras (premissas), tomadas como ponto de partida. Esse encadeamento de

> premissas e conclusões recebe o nome de argumento. (MATHEUS E CANDIDO, 2013, p. 2)

Vale ressaltar que a lógica como ciência não enfatiza, a priori, a veracidade das conclusões, mas os encadeamentos das premissas, ou seja, da validade da construção do argumento. Portanto, para uma conclusão ser verdadeira, se faz necessário que suas premissas sejam verdadeiras, logo, “todo argumento válido goza da seguinte propriedade característica: A verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão” (ALENCAR FILHO, 1988, p.88).

Vejamos alguns exemplos abaixo:

Exemplo 1: Todo caruaruense é pernambucano.
Mateus é caruaruense.
Logo, Mateus é pernambucano.

Exemplo 2: Todo número natural é número real.
14 é um número natural.
Logo, 14 é número real.

Exemplo 3: Todo matemático é inteligente.
João é inteligente.
Logo, João é matemático

Notemos que nos exemplos 1 e 2 os argumentos são validos, pois a conclusão decorre da ligação das premissas. Já no caso 3 não acontece o mesmo fato, uma vez que não podemos garantir a veracidade da conclusão, mesmo que as premissas sejam verdadeiras, pois João pode não ser necessariamente matemático. Em Suma,

> quando entre as premissas e a conclusão existe uma ligação tal que é impossível termos, simultaneamente as premissas verdadeiras e a conclusão falsa, o argumento é bem construído e dizemos que ele é VALIDO, ou seja, é COERENTE. Quando no entanto, é possível termos todas as premissas verdadeiras e, simultaneamente, a conclusão falsa, o argumento não é bem construído e dizemos que ele NÃO É VÁLIDO ou NÃO É COERENTE.” (MACHADO e CUNHA, 2008, p.20-21)

Ainda por esse caminho, Mundim (2002) aponta que “a correção ou incorreção Lógica de um argumento só depende da relação entre premissas e conclusão, e independe da verdade das premissas. Nesse sentido, a Lógica formal pressupõe que as premissas são verdadeiras” (p.136). A partir daí, notemos que a interligação entre as premissas e a conclusão é um ponto crucial para chegarmos a uma coerência da justificação da mesma.

Esse estudo do raciocínio lógico formal está desmembrado em três principais pontos de vista: a analogia, a indução e a dedução. Utilizaremos as concepções de Braitt (2011) para fazermos algumas definições.

De acordo com Braitt (2011), o raciocínio indutivo começa na observação e comprovação de casos particulares, a fim de induzir que o mesmo é valido para casos mais gerais. Nesse modelo, a exausta experimentação do caso particular é um dos passos para a validação da afirmação.

Na analogia, é um tipo de pensamento onde acreditamos na generalidade dos fatos. Brait (2011, p.45), ao falar de analogia, nos diz que “Raciocínio por analogia se baseia no princípio de que o universo e tudo dentro dele é uniforme, e que condições iniciais semelhantes produzirão resultados semelhantes”.

Na dedução utilizamos conceitos já conhecidos e, mediante inferências, chegamos em novos conceitos. Já na indução, busca-se, através de casos particulares, a sua generalização. Por outro lado a analogia vale-se de experiências já vivenciadas ou conhecidas, para se induzir o resultado de outras - é importante ressaltar que neste trabalho delinearemos apenas o método dedutivo, visto que os grandes avanços nos estudos em geometria plana, área a qual iremos trabalhar, se deu a com a utilização desse método.

Para Braitt (2011), no raciocínio lógico dedutivo, a conclusão de uma declaração se dá apenas por meio das verdades de declarações anteriores e o encadeamento delas, sobre algumas regras de inferências. Esse modelo lógico dedutivo requer que sejam verdadeiras as primeiras declarações, para que seja possível se chegar a uma conclusão adequada, tornando, assim, impossível chegarmos a conclusões verdadeiras, a partir da utilização argumentos iniciais falsos. Ainda nessa direção, discutiremos agora um pouco sobre a interligação do modelo lógico dedutivo e os conceitos matemáticos. Observemos a utilização desse método, para a “Prova” de uma demonstração da teoria dos conjuntos.

Exemplo 4: Sejam A, B e C conjuntos. Se $A \subset B$ e $B \subset C$, logo $A \subset C$.

Tomemos um elemento arbitrário x de A ($x \in A$).

Logo $x \in B$, pois temos que $A \subset B$. Agora tomando $x \in B$, então $x \in C$, pois $B \subset C$. Por fim, como tomamos um elemento arbitrário em A, concluímos que todo elemento de A está contido em C, portanto $A \subset C$.

Ao analisarmos o exemplo acima, notemos que a conclusão da afirmação $A \subset C$, foi construída baseado na veracidade das premissas $A \subset B$ e $B \subset C$, onde foi utilizado um segmento de implicações das mesmas para se chagar a um resultado final convincente.

3.2 Geometria Euclidiana

Chamaremos de sistema axiomático o conjunto de conceitos primitivos (verdades axiomáticas), aos quais com a intuição lógica é obviamente uma sentença válida. A Geometria Euclidiana é um exemplo de um sistema axiomático, pois é a partir de axiomas que ela é construída. Mais especificamente, os axiomas não são determinados pela geometria, mas é a mesma que se fundamenta por meio deles. O método dedutivo uma poderosa ferramenta na criação desse sistema, pois a partir de uma informação valida que constituída outra informação.

Vejamos alguns elementos que fazem parte de um sistema axiomático: os axiomas e as proposições.

Algumas afirmações em matemática são tratadas como verdades sem que haja uma “prova”, para esse juízo, esses conceitos primitivos são os quais chamamos de axiomas ou postulados, e são fundamentados neles que encontramos e vamos construindo novos conceitos. Na Geometria Euclidiana utilizamos alguns postulados/axiomas, os quais iremos classificar como: de incidência, de ordem e de medição de ângulo, no sistema adotado por Hilbert, que teve como referência os trabalhos de Euclides, no livro Elementos, para alicerçar todas as construções e resultados encontrados até hoje nesse ramo de estudo na matemática. Sendo assim, temos na Geometria Euclidiana um sistema axiomático, ou seja, um sistema é alicerçado a partir de axiomas que são considerados verdades absolutas.

Já as afirmações que serão chamadas proposições apresente apenas valores lógicos verdadeiro ou falso serão chamadas de proposição. Alencar Filho (2002, p.11) define proposição como “todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo”. Por esse sentido completo as proposições gozam de dois princípios básicos: o da NÃO-CONTRADIÇÃO e o do TERCEIRO EXCLUÍDO. O primeiro diz que uma proposição não pode ser verdadeira ou falsa ao mesmo tempo, enquanto o segundo afirma que toda proposição tem que ser verdadeira ou falsa. Por tais princípios garantimos um valor, e somente um, valor lógico para cada proposição.

Ao falarmos em Geometria Euclidiana, estamos falando de Euclides de Alexandria, sobre o qual encontra-se poucas informações tratando de sua vida e obra, tendo como principal trabalho a autoria do livro Os elementos, que está entre os primeiros registros de geometria demonstrativa, a qual utilizamos até os dias hoje.

Boyer (1996) comenta essa relação entre o autor e sua obra, “Euclides e os elementos são frequentemente considerados sinônimos; na realidade o homem escreveu cerca de uma dúzia de tratados, cobrindo tópicos variados” (BOYER, 1996, p. 69). Vale ressaltar que o autor nos apresenta um fator importante nos livros dos “Elementos”, Euclides não traz apenas conceitos de geometria, mas também álgebra e teoria dos números, além de outros assuntos como ótica, astronomia e mecânica.

Eves (2004) lamenta a dificuldade de encontrar a obra original que traga a data e época em que o autor a escreveu. Sendo assim, o que temos são traduções baseados em trabalhos realizados por pesquisadores que posteriormente revisaram os feitos por Euclides.

Os quatro primeiros livros (1 ao 4) trazem os conteúdos elementares da geometria plana. No livro cinco, há uma abordagem geométrica da teoria das proporções de Eudoxo. O sexto livro vem com problemas relacionados semelhanças de figuras e uma seção áurea do teorema de Pitágoras. Já os livros do sete a nove, dão enfoque teoria dos números. O décimo livro, que é considerado o mais difícil, aborda os irracionais quadráticos e suas raízes. Por fim, os livros onze, doze e treze discutem os sólidos geométricos. (BORGES FILHO, 2005)

Diante do abordado neste capitulo, buscamos uma maior compreensão sobre o que é o argumento demonstrativo, sua função e os mecanismos para a construção dos mesmos, além de observar a ligação entre a elementos lógica dedutiva e a Geometria Euclidiana.

4 A TEORIA DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE

Faremos uma breve incursão na teoria de desenvolvimento geométrico desenvolvida pelo casal holandês van Hiele, onde apresentaremos uma breve síntese da pesquisa, como também dos níveis de concepção e o que os caracteriza, segundo os pesquisadores.

Essa teoria foi desenvolvida através de uma pesquisa do pesquisador Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof, publicada inicialmente em 1959, quando, pouco tempo depois com o falecimento da esposa coube, a Pierre Van Hiele reformular até chegar a toda teoria.

O objetivo da pesquisa era o desenvolvimento de *insight* para auxiliar a aprendizagem no ensino de Geometria.

> Eles definem *insight* como se segue. Uma pessoa mostra *insight* se: (a) é capaz de se desempenhar numa possível situação não usual; (b) desenvolve corretamente e adequadamente as ações requeridas pela situação; (c) desenvolve deliberadamente e conscientemente um método que resolva a situação. (KALEFF et al., 1994, p.24)

Ainda nessa perspectiva Santos (2001) nos apresenta:

> Nesse sentido ele propõe um modelo para a aprendizagem da geometria em acordo com as ideias sobre o desenvolvimento da inteligência de Piaget. Van-Hiele parte de duas premissas básicas:
> — o objetivo do ensino da geometria é de levar o aluno à aquisição de uma rede de relações servindo à expressão de raciocínios, rede na qual as relações são ligadas de forma lógica e dedutiva.
> — essa rede de relações deve ser construída pelo próprio aluno, recusando a ideia de receber do professor uma rede relacional completamente pronta. (pp. 4-5)

Para o casal Van Hiele, os conceitos geométricos são apreendidos por um modelo sequencial hierárquico, ordenados através dos cinco níveis de concepção das ideias: a visualização, a análise, a dedução informal, a dedução e o rigor. Ao falar dos níveis, Wale (2009) diz que eles

> descrevem como pensamos e quais os tipos de ideias geométricas sobre as quais pensamos mais do que a quantidade de conhecimento ou de informação que temos a cada nível. Uma diferença significativa de um nível ao seguinte são os objetos de pensamento – sobre os quais somos capazes de pensar [operar] geometricamente. (WALLE, 2009, p. 440)

Logo a partir daí percebemos que ao utilizamos essa teoria devemos explicitar quais são as particularidades existentes em cada nível e o que difere a passagem de um nível do pensamento para outro.

4.1. Nivel 0: Visualização

Neste nível os indivíduos são capazes de fazer juízo através de caraterísticas aparentes das figuras, sem explicitar ou identificar suas propriedades. Para Kaleff et. al.(1994, p.24) "neste estágio inicial, os alunos raciocinam basicamente por meio de considerações visuais. Conceitos geométricos são levados em conta como um todo sem considerações explicitas das propriedades dos seus componentes".

Ainda nessa perspectiva Crowley (1994, p.2) menciona que "os conceitos geométricos são vistos como entidades totais e não como entidades que têm componentes ou atributos". Note que Kaleff e Crowley citam que nesse nível o reconhecimento global das figuras é a principal especialidade para que os indivíduos sejam enquadrados.

Como o objeto do pensamento desse estágio são as aparências, os alunos deixam prevalecer suas percepções visuais, por exemplo, ao se depararem com uma figura de três lados sempre nomearão de triângulo sem analisar suas propriedades como ângulos e lados, "o fato de a aparência ser o fator dominante nesse nível faz com que as aparências possam prevalecer sobre as propriedades de uma forma" (WALLE, 2009, p. 440). Nessa etapa os indivíduos identificam um triângulo em meio as outras figuras, mas não conseguem classificar quanto aos lados e ângulos. Todo triângulo é igual, pois seu formato se assemelham.

4.2 Nível 1: Analise

Neste nível os indivíduos já conseguem explicitar as propriedades das figuras, porém ainda não conseguem relacioná-las. "Os estudantes começam a discernir características das figuras geométricas, estabelecendo propriedades que são então usadas para conceituarem classes e formas. Porém, eles ainda não explicitam inter-relações entre figuras ou propriedades. " (KALEFF et al., 1994, p. 24)

Neste estágio o indivíduo começa a identificar as propriedades das figuras, mesmo que ainda não conseguindo fazer inferências com elas, "nesse nível os objetos de pensamento são as classes de formas, mais do que as formas individuais" (WALLE, 2009, p. 441).

Dando continuidade ao exemplo do nível anterior, já conseguem identificar algumas propriedades nos triângulos, como a Soma dos ângulos internos igual a 180º, sabe-se um Triângulo equilátero possui todos os lados iguais e o isósceles apenas dois lados iguais, todavia ainda não conseguem inferir que todo triângulo equilátero é também isósceles.

Observemos que o acesso do nível 0 para o nível 1 passa pela aquisição de um vocabulário especifico constituído a partir das termologias adquiridas nas propriedades. Ainda nessa linha, Villiers (2010, p.400) afirma que para haver a transição "envolve mais do que simplesmente a aquisição de linguagem, ela envolve o reconhecimento de algumas novas relações entre conceitos e o refinamento e a renovação de conceitos existentes". Ou seja, indivíduo reconstrói e reorganiza informações já adquiridas anteriormente.

4.3 Nível 2: Dedução informal

Neste estágio do pensamento, o aluno é capaz de relacionar as propriedades conseguindo fazer inter-relação entre as mesmas e assim chegar a novos resultados que antes eram desconhecidos. Ao falar da caraterização deste nível, Kaleff (1992, pp. 24-25), "Neste nível, os alunos formam definições abstratas, podendo estabelecer inter-relações das propriedades nas figuras." , também nessa perspectiva, Crowley (1994, p.3) afirma que os estudantes já "são capazes de deduzir propriedades de uma figura e reconhecer as classes das figuras". As autoras citam que é nessa fase que começa a surgir as argumentações logicas sobre as propriedades das figuras. Aqui vale salientar que essas argumentações geralmente não tem um teor dedutivo rigoroso, " As 'provas' podem ser mais intuitivas do que rigorosamente dedutiva." (WALLE, 209, p. 442).

Nesse nível, os indivíduos começam a terem os primeiros contatos com as demonstrações, conseguindo relacionar resultados conhecidos a fim de se obter novos, que antes eram ignorados. Para Walle (2009), "os produtos de pensamento no nível 2 são relações entre as propriedades de objetos geométricos" (p. 442).

Agora os alunos já conseguem fazer relações entre os Triângulo, conseguindo, por exemplo, perceber que todo Triângulo equilátero é isósceles, pois todo equilátero tem três lados iguais, logo também possui dois lados iguais. Ainda percebem que no Triângulo isósceles a reta bissetriz coincide com a altura e com a mediana.

A transição do nível 1 para o 2 está intimamente ligada a uma maturação nos argumentos chegando a uma maturação lógica.

> Enquanto a rede de relações do Nível 2 envolve a *associação de propriedades* a tipos de figuras e relações entre figuras de acordo com tais propriedades, a rede de relações no Nível 3 envolve as *relações lógicas* entre as propriedades das figuras. A rede de relações no Nível 3 não mais se refere a figuras concretas e específicas, e tampouco tais relações formam uma estrutura de referência na qual se pergunta se uma determinada figura possui determinadas propriedades. As perguntas típicas feitas no Nível 3 são relacionadas ao fato de uma determinada propriedade ser sequência de outra ou se ela pode ser deduzida a partir de um subconjunto específico de propriedades (ou seja, se ela poderia ser tomada como uma definição ou se é um teorema) ou se duas definições são equivalentes. (VILLIERS, 2010, p. 402, grifos do autor)

A partir deste nível é que os alunos começam a fazer as demonstrações tão exigidas na Matemática Formal.

4.4 Nível 3: Dedução formal

Nesta etapa do pensamento geométrico os alunos começam a trabalhar com dados abstratos, conseguindo definir objetos geométricos em poucas propriedades, ordenando-as logicamente. “Neste nível, os alunos desenvolvem sequências de afirmações deduzindo uma afirmação a partir de uma outra ou de outras” (KALEFF, 1992, p.25). Logo já reconhecem a necessidade da utilização de postulados, axiomas, proposições e teoremas para construir uma demonstração. Ao diferenciar esse nível ao anterior, Wale (2009) diz, que nesse nível,

> seu pensamento anterior produziu conjecturas envolvendo as relações entre as propriedade. Essas conjecturas estão corretas? Elas são ‘verdadeiras’? Quando essa análise dos argumentos informais começa a ocorrer, a estrutura de um sistema completo – com axiomas, definições, teoremas, corolários e postulados – começa a se desenvolver e pode ser apreciada como um meio necessário de se estabelecer verdades geométricas. (p. 443).

Nota-se que na citação acima o autor evidencia que essa correção lógica dos argumentos é o principal destaque do pensamento nessa etapa, e agora surge a necessidade da utilização dos argumentos lógicos dedutivos para “provar” as propriedades existentes nas figuras geométricas.

Aqui os alunos já realizam demonstrações sofisticadas utilizando um raciocínio logico dedutivo, como por exemplo, ao traçar segmentos de retas entre os pontos médios de lados adjacentes de um quadrilátero qualquer formam um paralelogramo, além de uma análise crítica acerca dos seus argumentos. Esse raciocino é o que leva a construção de um sistema axiomático, levando como exemplo a Geometria Euclidiana, geralmente é trabalhado na Geometria plana e espacial.

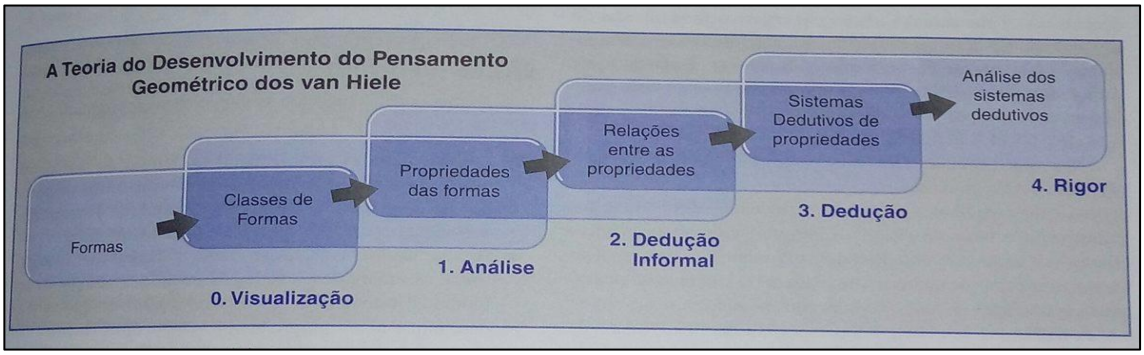
4.5 Nível 4: Rigor

Este é o último nível do pensamento para van Hiele, ao chegar a esses estagio os alunos conseguem relacionar e trabalhar com vários sistemas axiomáticos. “Neste nível, os alunos avaliam vários sistemas dedutivos com um alto grau de rigor. Comparam sistemas baseados em diferentes axiomas e estudam várias geometrias na ausência de modelos concretos” (KALEFF, 1992, p.25). Os alunos conseguem já manipular com as geometria não-euclidianas de modo coerente.

Este nível foi pouco trabalho por van Hiele, como destaca Crowley (1994), pois grande parte do seu trabalho era destinado até o nível 3. Uma vez que o rigor, só é mais trabalhado por profissionais da área de matemática como ciência.

Na figura abaixo estão sintetizados os níveis do pensamento geométrico de van Hiele, com os objetos de pensamento de cada um deles e como os objetos de um nível viram um enfoque do nível posterior.

Figura 1 - Níveis do pensamento geométrico e objetos do pensamento de cada um deles, sob a teoria de van Hiele



Fonte: WALLE. 2009

4.6 Propriedades

Merece destaque quatro características apontadas pelo casal em sua teoria:

I. Os níveis são sequenciais, logo, para se chegar a um nível, obrigatoriamente o indivíduo tem que ter adquiridos objetos de pensamento do(s) anterior(es).

II. A transição não depende só da faixa etária, mas do contato com a geometria que o indivíduo possui. Sendo assim, os desenvolvimentos das habilidades independem da idade e sim das suas experiências geométricas.

III. Os objetos do pensamento de um nível se torna um objeto de estudo para o nível seguinte.

IV. Cada nível possui sua própria linguagem de representações e um sistema de relação diferente, a fim de vinculá-lo com o anterior. Logo, quando se está ensinado no nível superior ao do discente ocorre uma falta de diálogo, dificultando a aprendizagem por parte do estudante.

A partir dessa a teoria do desenvolvimento de pensamento geométrico foi que buscamos subsídios para investigação da construção dos argumentos demonstrativos na nossa pesquisa.

5 METODOLOGIA

Neste capítulo apresentaremos os procedimentos utilizados para realização da pesquisa, o perfil dos sujeitos da pesquisa, como também apresentação e as observações, em torno, do instrumento de coleta de dados, que posteriormente serão analisados.

A pesquisa foi desenvolvida em 4 (quatro) etapas. A primeira etapa constituiu-se em uma revisão bibliográfica, a qual tinha como finalidade buscar trabalhos que abordassem como temática central as demonstrações em matemática, de modo que nos situássemos em pesquisas realizadas na área. Assim buscamos referenciais em livros, revistas, artigos científicos, tese, dissertações e monografias.

Na segunda etapa, elaboramos um questionário, do tipo resposta livre, objetivando analisar as demonstrações, realizadas pelos alunos, em Geometria Euclidiana, de modo particular nos casos de triângulos e quadriláteros.

A etapa três consistiu na aplicação dos questionários, com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) – Centro Acadêmico do Agreste - CAA. E a quarta e última etapa foi onde analisarmos os resultados obtidos nas respostas dos questionários.

Para instrumento de coleta foi utilizado o questionário elaborado. Aplicado no final do período letivo. Com intuito de termos um melhor resultado na coleta, pois, os licenciandos já haviam estudado um semestre com disciplina que usam demonstrações, mesmo que não tivessem tido contato com disciplinas que utilizam estas ferramentas, anteriormente.

5.1 Sujeitos da pesquisa

Os sujeitos da pesquisa são os discentes das turmas que cursam de Fundamentos da Geometria Plana (FGP) e Fundamentos da Geometria Espacial (FGE). A escolha pelos sujeitos se deu, uma vez que os mesmos cursam as disciplinas obrigatórias de Geometria, do curso acima citado, e as ementas[1] trazem conteúdos que utilizam demonstrações. Ressaltamos que, a disciplina de Fundamentos da Geometria plana é a primeira disciplina obrigatória, que os alunos usam mais frequentemente as técnicas demonstrativas em Matemática.

---

[1] As ementas se encontra no PCC do curso citado.

5.2 Instrumento de coleta de dados

A opção pelo questionário se deu uma vez que o instrumento consegue abranger um alto número de sujeitos para pesquisa, além de poder ser aplicado em diferentes horários, fato que facilitou tanto o pesquisador como os sujeitos da pesquisa.

A construção do instrumento, foi realizada a fim de subsidiar os objetivos delimitados para a pesquisa, nessa direção Gil (2008) nos diz que, ao "Construir um questionário consiste basicamente em traduzir objetivos da pesquisa em questões específicas. " (GIL, 2008, p. 121).

Sobre essa temática Gil (2008), expõe algumas limitações deste instrumento de coleta, como por exemplo o pesquisador apresenta uma interpretação da resposta diferente daquela que o pesquisado quis dizer.

A seguir, faremos uma apresentação do nosso instrumento de coleta como também uma discursão acerca do intuito de cada questão.

5.2.2 Apresentação e análise do questionário

O questionário que nós preparamos envolvendo os conceitos geométricos, era composto por dez questões de respostas livres.

As questões 1, 2 e 3, nos situa acerca dos sujeitos da pesquisa,

1. **Nome ____**
2. **Semestre de ingresso no curso. ____________________**
3. **Disciplina que está cursando:**

   ____

Nesta parte inicial do questionário, solicitamos algumas informações que poderiam nos auxiliarem nas investigações. Diante disso, o pedido pelo nome se dá na necessidade, no caso surgisse alguma dúvida ou dualidade das respostas, ficaria mais fácil localizá-lo.

Já os quesitos 2 e 3, nos auxilia quanto ao universo dos sujeitos. Dessa forma, o semestre de ingresso no curso nos ajuda a saber qual era o período que o discente deveria estar cursando, uma vez que mesmo sendo disciplinas do quinto e sexto período, geralmente há aluno de períodos posteriores cursando, na maioria dos casos por reprovações, nessas disciplinas ou em outras. Enquanto na pergunta 3, saberemos qual disciplina ele está cursando, fato que será utilizado quando formos fazer a discursão dos resultados.

Nas questões 4 e 5, temos o intuito de analisar a relação dos estudantes com as demonstrações e a geometria durante sua escolaridade,

4. **Já pagou alguma disciplina que faz uso de Demonstrações? Se sim qual(is)?**
5. **Com relação a geometria, quais são suas experiências na Educação Básica e no Ensino Superior?**

Na questão 4, almejamos saber se o estudante teve algum contato com disciplinas de demonstrações, a fim de saber se o mesmo tem algum conhecimento, com relação as ferramentas demonstrativas ou está sendo o seu primeiro contato.

Na questão 5, propomos que expusessem suas experiências (frustações, êxitos, atividades, etc), com a geometria na sua escolaridade, tanto na Educação Básica quanto na superior, a necessidade na básica, se dá para sabermos, como e/ou se ele estudou, os conteúdos geométricos nessa fase de escolarização, pois grande parte das dificuldades encontradas advém do modo de ensino nesse nível.

A questão 6, está relacionada ao conhecimento e nomeação das figuras geométricas planas, como também no reconhecimento de algumas propriedades geométricas existentes nas mesmas.

6. **De acordo com seus conhecimentos, nomeie e caracterize as figuras abaixo:**

Figura A

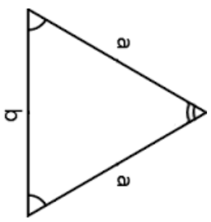


Figura B

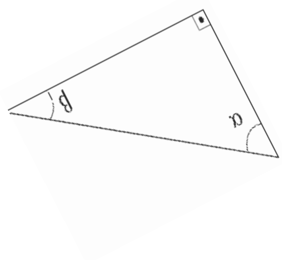


Figura C

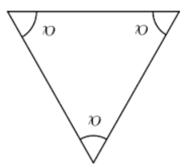


Figura D

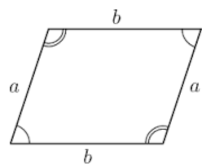
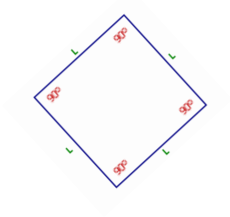
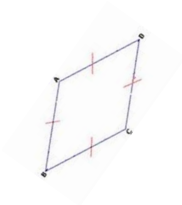
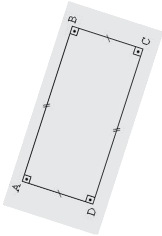


Figura E **Figura F** **Figura G**







Na questão 6, buscamos observar se os discentes reconheceriam algumas figuras geométricas planas, nomeando-as e citando algumas propriedades. A escolha pelos quadriláteros e triângulos, se deu pelo motivo de serem mais conhecidas, de modo geral, facilitando as repostas dos alunos. Vale salientar, que essa questão abrange dois níveis do pensamento geométrico o da visualização, no qual eles irão visualizar é nomear as figuras e o nível de análise, onde vão trazer algumas características presentes nas figuras. Esta etapa é imprescindível, uma vez que é a partir dos encadeamentos dessas propriedades que chegamos a outros resultados.

Já nas questões 7 e 8, era necessário que os estudantes construíssem um argumento que justificasse suas respostas. Para resolução das duas teriam que criar uma demonstração matemática se satisfizesse o enunciado. A finalidade dessas questões era observar a argumentação dos estudantes,

7. **Julgue como verdadeira ou falsa a afirmação abaixo e justifique sua resposta.**
   " TODO TRIÂNGULO EQUILÁTERO É ISÓSCELES".

Com relação a questão 7, solicitamos aos licenciandos que julgasse uma afirmação, como verdadeira ou falso e fizesse um argumento que justificasse sua resposta, para isso eles utilizariam informações (as propriedades) que os mesmos tinham colocado na resposta no quesito 6, para facilitar os caminhos que chegassem para a resposta. Outro fator que auxiliaria, era um quadro em branco, onde poderiam desenhar as figuras promovendo uma melhor visualização. Ressaltamos que em não foi divulgado aos licenciandos que os mesmos deveriam desenhar para auxiliar na sua resposta.

8. **Como você demonstraria que, “em todo quadrado as diagonais são congruentes”:**

Já nesta questão, os discentes eram convidados a realizar uma demonstração envolvendo quadriláteros. Do mesmo modo da questão anterior, eles poderiam colher subsídios de sua resposta na questão 6, como um caminho para seguir, como também utilizar o quadro para esboçar em uma figura o que é pedido na sentença, técnica que em alguns casos (como é o caso desta questão) promove facilidades para interligar as propriedades. Por se tratar de um argumento individualmente criado iremos encontrar variações nas respostas corretas, como também níveis diferentes de pensamentos geométricos presentes nas repostas.

O nosso intuito na questão 9, foi observar a reação dos estudantes ao responder questões que necessitavam de um argumento lógico.

9. **Descrevas as suas principais dificuldades encontradas para responder, as questões anteriores.**

A partir das respostas analisaremos como os licenciandos reagiram a exercícios envolvem demonstrações, uma vez que, mesmo sendo apenas duas questões, eles responderam de acordo com suas experiências em questões desse tipo. Desse modo, poderiam nos apontar qual a relação deles com os argumentos demonstrativos.

Já na última questão o foco foi a construção do argumento demonstrativo. O qual foi perguntado aos discentes qual a parte mais difícil que o mesmo achava ao construir os argumentos demonstrativos.

10. **Qual a parte você acha mais difícil, em uma demonstração**

    a) Definir os termos,

    b) Organizar as ideias,

c) Entender o objetivo da prova,

d) concluir a prova. Justifique sua resposta.

Com essa resposta buscamos observar o sentimento dos discentes ao fazerem suas demonstrações, como também, qual a parte da demonstração eles geralmente apresenta mais dificuldades. Auxiliando-nos a categorizar de acordo com suas dificuldades em cada etapa.

Na tabela abaixo sintetizaremos os objetivos traçados e as atividades propostas para cada questão:

Tabela 1 - Questionário: questão x objetivos traçados.

Questão	Objetivos traçados
1.	Mapear os sujeitos da pesquisa.
2.	
3.	
4.	Observar as experiências dos licenciandos, acerca do ensino de geometria e de demonstração na Educação básica e no Ensino superior.
5.	
6.	Nomear e caracterizar figuras geométricas planas.
7.	Avaliar a construção do argumento demonstrativo, sob a ótica na teoria de van Hiele.
8.	
9.	Analisar as opiniões dos licenciandos com relação, a construção das demonstrações.
10.	

Fonte: O autor (2017)

Agora, após esta explanação sobre o instrumento de coleta dos dados, nos pretenderemos apresentar os principais apontamentos que encontramos com essa pesquisa.

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

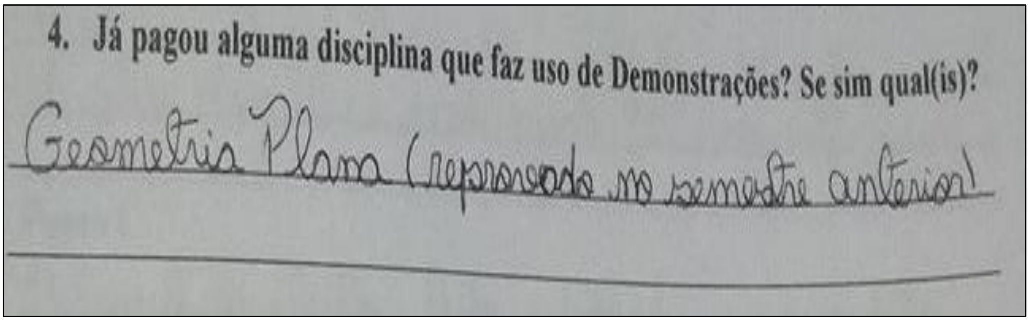
Nessa parte do trabalho, nos ateremos a fazermos uma discursão e análise dos resultados dos dados colhidos na pesquisa, que será dividida em perfil dos sujeitos, as experiências com geometria e demonstrações, a nomeação e caracterização das figuras plana, a construção dos argumentos e no final as opiniões sobre as construções das demonstrações.

6.1 Perfil dos sujeitos da pesquisa

Foram respondidos 23 (vinte e três) questionários (os quais estão enumerados de Q01 a Q23), sendo desses 18 (dezoito) alunos da turma de Fundamentos da Geometria Plana do (Q01 a Q18) e 5(cinco) da turma de Fundamentos da Geometria Espacial, do curso de Matemática-Licenciatura, no agreste pernambucano, da Universidade Federal de Pernambuco.

Se tratando das experiências com demonstração os discentes ao responderem no quesito 2(dois), sendo que dos 18(dezoito) de turma de FGP, 16 (dezesseis) estavam tendo seu primeiro contato com disciplina que faz uso do argumento demonstrativo. E na turma de FGE os 5(cinco) alunos responderam que tinha cursado apenas as obrigatórias no quinto e sexto período. Desse modo, destacaremos o questionário Q18, onde o estudante além de dizer qual a disciplina, também relatou seu resultado nela.

Figura 2 - Resposta do Q18, questão quatro.



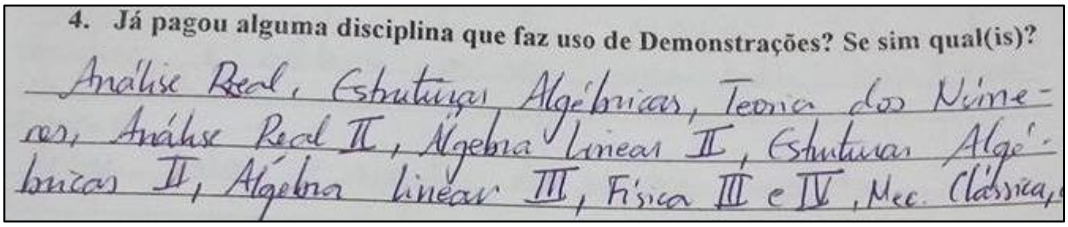
4. Já pagou alguma disciplina que faz uso de Demonstrações? Se sim qual(is)?

Geometria Plana (reprovado no semestre anterior)

Fonte: O autor (2017)

Dos alunos que afirmaram já terem tido contato com as demonstrações na turma de FGP, destacamos o Q16, uma vez que o mesmo já cursou as disciplinas obrigatórias e algumas eletivas que faz uso dessa ferramenta, com exceção da Geometria Espacial.

Figura 3 - Resposta do Q16, questão quatro.


4. Já pagou alguma disciplina que faz uso de Demonstrações? Se sim qual(is)?

Análise Real, Estruturas Algébricas, Teoria dos Números, Análise Real II, Álgebra Linear II, Estruturas Algébricas II, Álgebra Linear III, Física III e IV, Mec. Clássica,

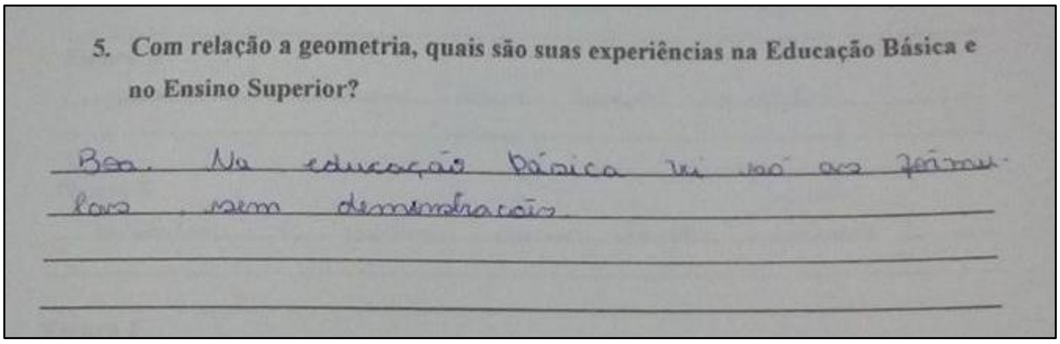
Fonte: O autor (2017)

Logo, esses dados iniciais, podemos perceber que a demonstração é pouco trabalhada no curso de licenciatura em Matemática (UFPE-CAA), que o primeiro contato com ela, só se dá no quinto período do curso. Encontrando apenas alguns casos excepcionais como o Q16.

Já no que diz respeito ao ensino de Geometria na escolarização os licenciando responderam que o contato foi pequeno e que muitas vezes os seus professores preferiam não colocar em suas aulas estes conteúdos.

Nas figuras abaixo os alunos relatam que na Educação Básica a metodologia de ensino era mecânica, feito apenas pelo ensino e aplicação de formulas, vale salientar que esta pratica que ainda é muito utilizada nas aulas.

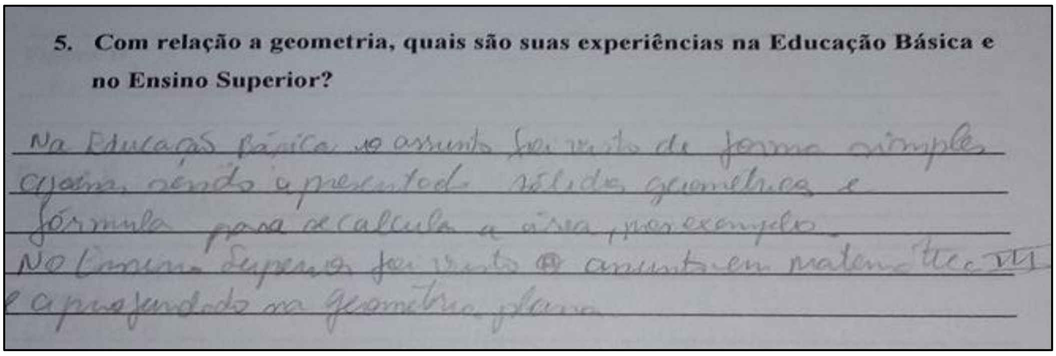
Figura 4 - Resposta do Q20, questão cinco


5. Com relação a geometria, quais são suas experiências na Educação Básica e no Ensino Superior?

Boa. Na educação básica vi só as fórmulas, sem demonstrações.

Fonte: O autor (2017)

Figura 5 - Resposta do Q05, questão cinco

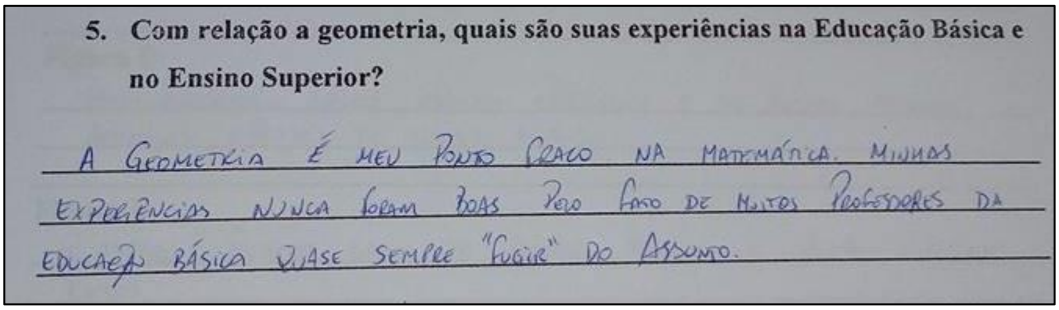

5. Com relação a geometria, quais são suas experiências na Educação Básica e no Ensino Superior?

Na Educação Básica o assunto foi visto de forma simples apenas sendo apresentado sólidos geométricos e fórmula para se calcular a área, por exemplo. No Ensino Superior foi visto o assunto em matemática III e aprofundado na geometria plana.

Fonte: O autor (2017)

Outra resposta que se destaca é a que os professores "pularam" ou não ensinaram os conhecimentos geométrico, onde os alunos afirmam que não foram vivenciadas aulas que atendessem as expectativas de aprendizagem deste eixo temático.

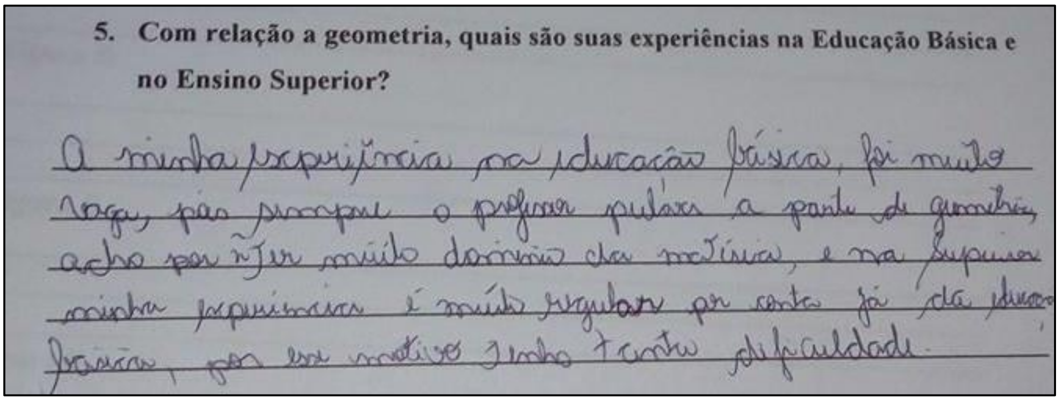
Figura 6 - Resposta do Q02, questão cinco.


5. Com relação a geometria, quais são suas experiências na Educação Básica e no Ensino Superior?

A GEOMETRIA É MEU PONTO FRACO NA MATEMÁTICA. MINHAS EXPERIÊNCIAS NUNCA FORAM BOAS PELO FATO DE MUITOS PROFESSORES DA EDUCAÇÃO BÁSICA QUASE SEMPRE "FUGIR" DO ASSUNTO.

Fonte: O autor (2017)

Figura 7 - Resposta do Q01, questão cinco.

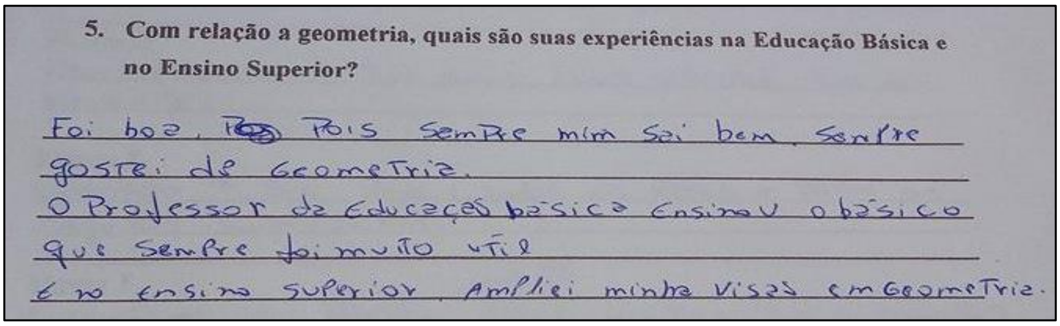

5. Com relação a geometria, quais são suas experiências na Educação Básica e no Ensino Superior?

A minha experiência na educação básica, foi muito vaga, pois sempre o professor pulava a parte de geometria, acho por não ter muito domínio da matéria, e na Superior minha experiência é muito regular por conta já da educação básica, por esse motivo tenho tanta dificuldade.

Fonte: O autor (2017)

Por fim, apresentaremos aqueles alunos que evidenciaram satisfação em suas experiências na escolarização com a geometria. No relato abaixo, na figura 8, o aluno Q21, destaca seu desempenho, como também a utilização desses conteúdos em sua vida estudantil.

Figura 8 - Resposta do Q22, questão cinco.

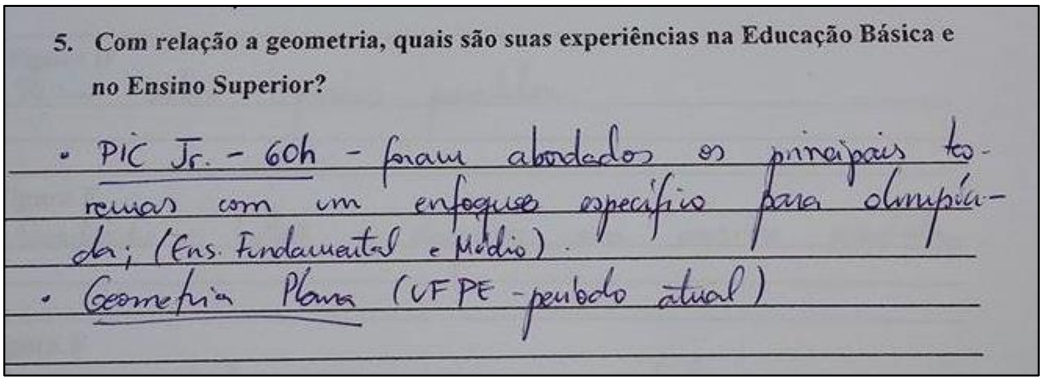

5. Com relação a geometria, quais são suas experiências na Educação Básica e no Ensino Superior?

Foi boa, ~~Pos~~ Pois sempre mim sai bem, sempre gostei de Geometria.
O Professor da Educação básica ensinou o básico que sempre foi muito útil
e no ensino superior Amplie minha visão em Geometria.

Fonte: O autor (2017)

Novamente o Q16, apresenta-se com destaque em suas experiências, pois o mesmo relata ter participado de curso ofertado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), para alunos aprovados nas Olimpíadas brasileiras de Matemática.

Figura 9 - Resposta do Q16, questão cinco


5. Com relação a geometria, quais são suas experiências na Educação Básica e no Ensino Superior?

• PIC Jr. - 60h - foram abordados os principais teoremas com um enfoque específico para olimpíada; (Ens. Fundamental e Médio).
• Geometria Plana (UFPE - período atual)

Fonte: O autor (2017)

Portanto, diante dessas repostas podemos perceber que o ensino de Geometria é ainda pouco trabalhado na Educação Básica, e quando é trabalhado geralmente é de forma tradicional, com memorização e aplicação de formulas, utilizando aulas expositivas e resoluções de exercícios, não instigando o senso geométrico dos alunos. Ressaltamos que segundo os PCN, o ensino desse eixo deve ser iniciado nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Esse problema pode acarretar em grandes dificuldades para os alunos que tem que trabalhar com demonstrações no ensino superior.

6.2 Nomeação e caracterização das figuras geométricas

Na questão 6(seis), era solicitado que os estudantes nomeassem e citassem algumas propriedades de figuras plana, essas capacidades estão relacionadas, respectivamente, ao o nível 0 (visualização) e o nível 1 (análise), da teoria do pensamento geométrico do casal van Hiele, como afirma Kaleff (1992), Crowley (1994) e Walle(2009) e Villiers(2010).

Para analise dessa questão, definiremos a tipologia do erro, nela classificaremos as respostas em quatro tipos, vejamos a discrição da tipologia na tabela abaixo:

Tabela 2 – Tipologia do erro para a questão seis.

Tipologia do erro	Descrição
Resposta em branco	Quando o discente não respondeu à questão

Resposta incorreta	Quando o discente respondeu à questão de maneira errada.
Respostas correta insatisfatória (apenas nomeou)	Quando o discente a respondeu à questão, apenas nomeou e não citou propriedades das figuras ou não respondeu completamente.
Resposta correta satisfatória	Quando o discente respondeu corretamente à questão nomeando e citando propriedades das figuras geométricas.

Fonte: O autor (2017)

A tabela abaixo, apresenta a quantidade dos alunos de acordo com suas respostas em cada tipologia do erro,

Tabela 3 - Tipologia do erro x quantidade de respostas, questão seis.

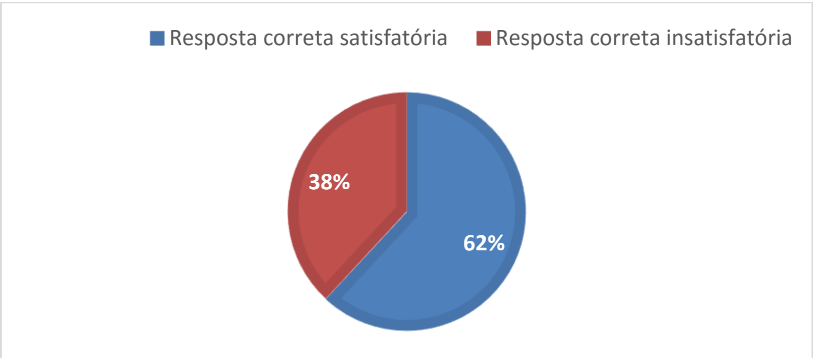
Tipologia do erro	**Quantidade de respostas**
Resposta em branco	**2**
Resposta incorreta	**0**
Respostas correta insatisfatória (apenas nomeou)	**8**
Resposta correta satisfatória	**13**

Fonte: O autor (2017)

A partir das informações da tabela podemos apontar como positivo, nenhum aluno ter errado a questão e apenas 2 deixaram a resposta em branco, como primeiro resultado é que, pelo menos, os 21 alunos já passaram do primeiro nível do pensamento geométrico, a visualização.

O gráfico abaixo, nos mostra a distribuição percentual na tipologia de repostas corretas, onde apresenta uma percentual maior de respostas satisfatória como vimos na tabela acima.

Gráfico 1: Respostas corretas, questão seis



Fonte: O autor (2017)

Percebermos que esse número de 62%, já teriam passo do nível 1, que é análise, onde eles conseguem nomear e perceber propriedades existentes nas figuras, essa organização das propriedades é um dos passos para conseguimos chegar para a demonstrações.

Já com nos referindo aos outros 38% que não conseguiram atingir a expectativa total com a atividade, entendemos que os mesmos ainda estão no estágio de transição, onde ainda não conseguem enxerguem algumas propriedades que dentro das figuras ou tem dificuldades na linguagem especifica da área como afirma Villiers (2010), no nosso referencial.

Vejamos algumas repostas abaixo trazidas pelos estudantes ao responde a questão seis.

Figura 10 - Resposta Q18 da questão seis

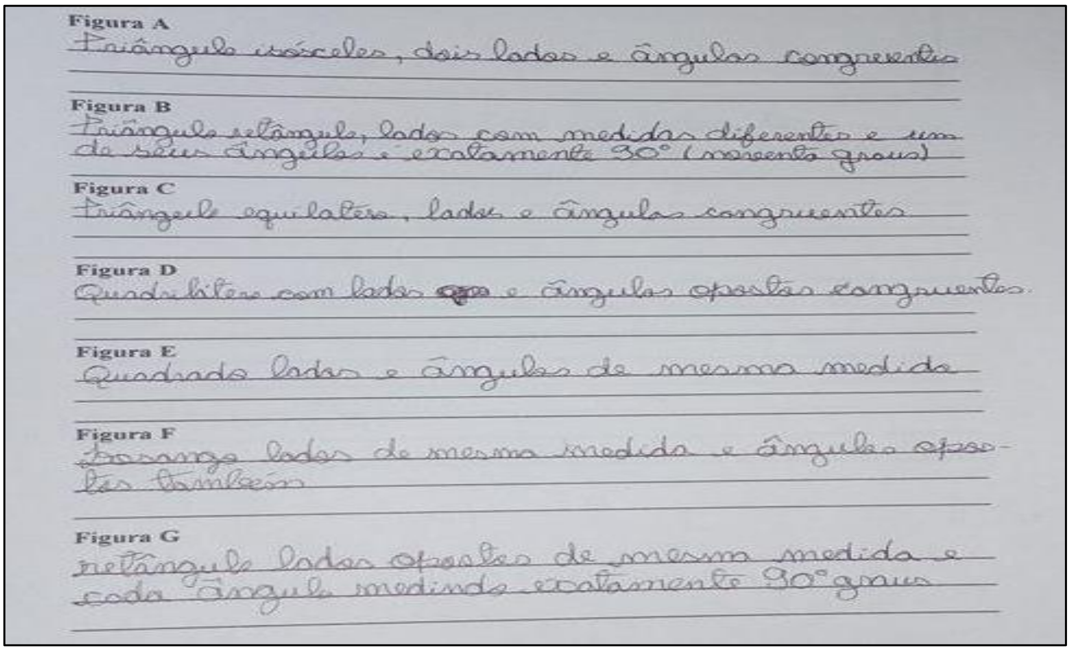


Figura A
Triângulo isósceles, dois lados e ângulos congruentes

Figura B
Triângulo retângulo, lados com medidas diferentes e um de seus ângulos é exatamente 90° (noventa graus)

Figura C
triângulo equilátero, lados e ângulos congruentes

Figura D
Quadrilátero com lados ~~opo~~ e ângulos opostos congruentes.

Figura E
Quadrado lados e ângulos de mesma medida

Figura F
losango lados de mesma medida e ângulos opos-tos também

Figura G
retângulo lados opostos de mesma medida e cada ângulo medindo exatamente 90° graus

Fonte: O autor

O licenciando Q18, traz em sua resposta pelo menos duas propriedades de cada figura, essas informações o auxiliará a responder questões posteriormente, no questionário. Salientamos também a listagem das propriedades com uma fase inicial de um argumento demonstrativo. Este licenciando pode ser categorizado como consolidado no nível 1, da teoria do casal van Hiele.

Nas suas respostas os discentes Q10 e Q11, conseguiram atingir uma parte dos objetivos traçados, sendo consideradas respostas corretas insatisfatória, pois não podemos negar o que foi construído pelo estudante.

Figura 11 - Resposta Q11 da questão seis.

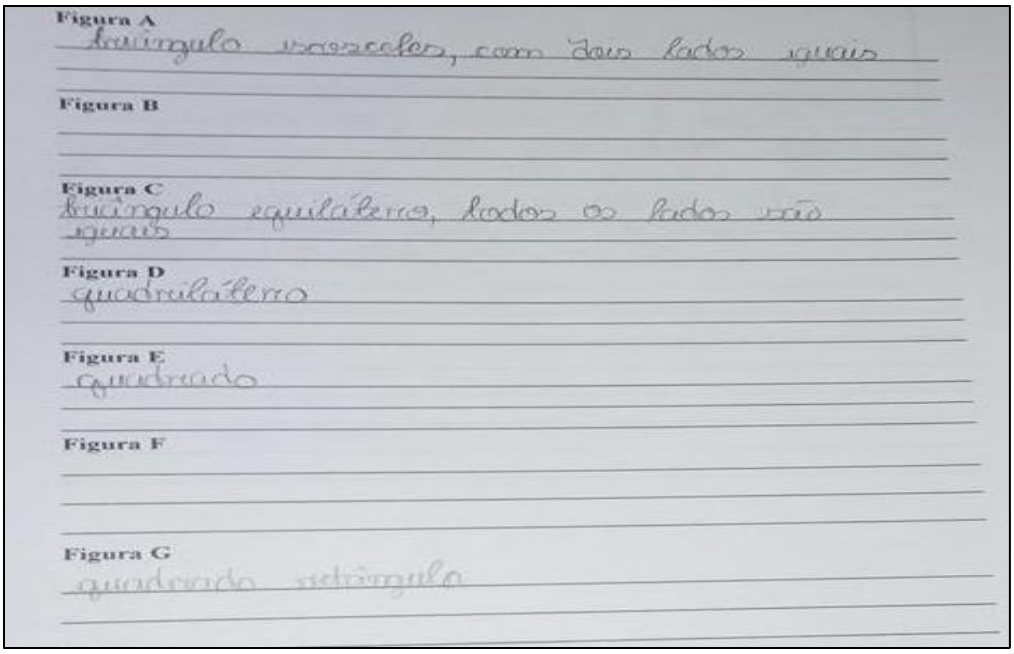


Figura A
triângulo isosceles, com dois lados iguais

Figura B

Figura C
triângulo equilátero, todos os lados são iguais

Figura D
quadrilátero

Figura E
quadrado

Figura F

Figura G
quadrado retângulo

Fonte: O autor (2017)

O discente Q11, não nomeou do todas a figuras como também só conseguiu citar propriedades, de apenas 2, as figuras A e C, sendo assim ele estaria caracterizado no nível 1, pois como nos apresenta Walle (2009) e Kaleff (1992), que neste estágio o sujeito ainda não apresenta domínio em fazer inferências nas propriedades implícitas nas figuras.

Figura 12 - Resposta Q10 da questão seis.

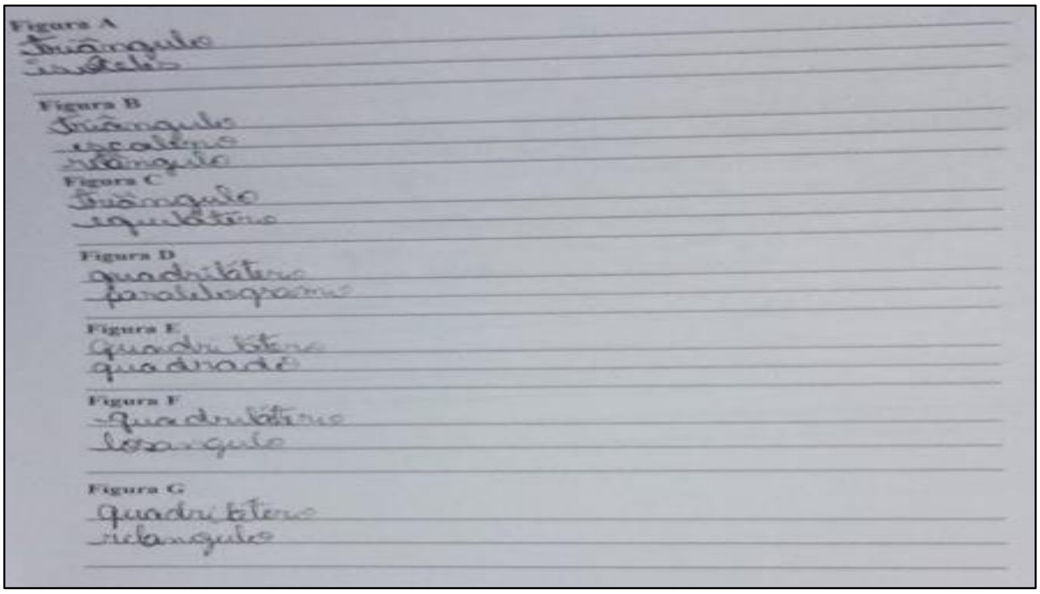


Figura A
triângulo
isosceles

Figura B
triângulo
escaleno
retângulo

Figura C
triângulo
equilátero

Figura D
quadrilátero
paralelogramo

Figura E
quadrilátero
quadrado

Figura F
quadrilátero
losangulo

Figura G
quadrilátero
retângulo

Fonte: O Autor (2017)

Diferentemente de Q11, o discente Q10 apenas conseguiu nomear as todas figuras estando focado apenas na visualização, estando ainda na transição do nível 0 para o nível

1 da teoria do pensamento geométrico de van Hiele, sendo necessário que o mesmo tendo mais enfoque nas atividades de reconhecimento das propriedades explicitas e implícitas.

Deste modo, nomear e caracterizar as figuras é a fase inicial para demonstramos em geometria, como traz a teoria do casal van Hiele. Por meio dos dados obtidos podemos perceber que esse estágio já foi alcançado pela a maioria dos estudantes da turma, fato que não nos deixa surpreso, pois mesmo sendo pouco trabalhado na Educação Básica, como vimos anteriormente, também são vistos de maneira sutil em algumas disciplinas no Ensino Superior.

6.3 Construção do argumento demonstrativo

Nas questões sete e oito, os alunos tiveram que realizarem demonstrações para responderem. Utilizaremos a mesma tipologia do erro adotada para questão seis.

Na questão sete, encontramos os resultados apresentados na tabela 5, a seguir:

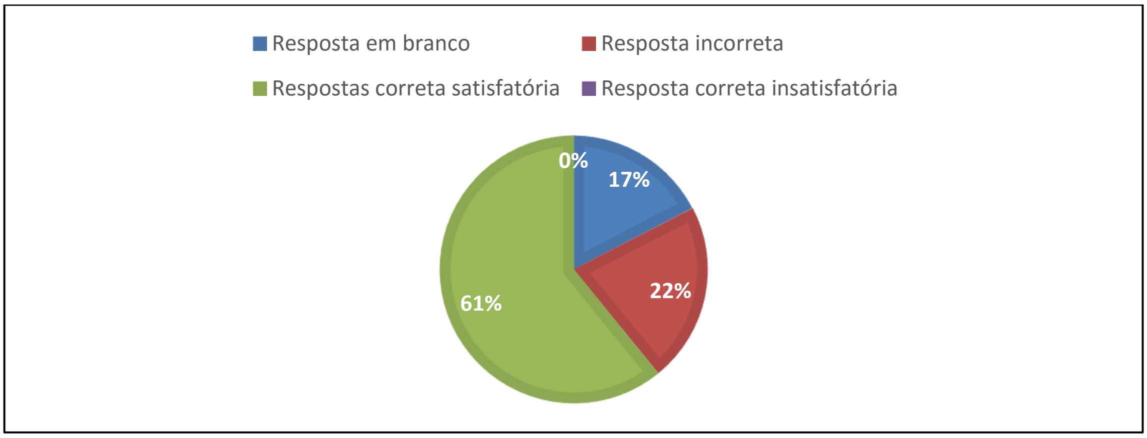
Tabela 4 - Tipologia do erro x quantidade de respostas, questão sete.

Tipologia do erro	Quantidade de respostas
Resposta em branco	**4**
Resposta incorreta	**5**
Respostas correta insatisfatória	**0**
Resposta correta satisfatória	**14**

Fonte: O autor (2017)

Agora apresentaremos no gráfico abaixo, o percentual de cada tipologia na questão sete:

Gráfico 2: Percentual de respostas tipologia do erro, questão sete.

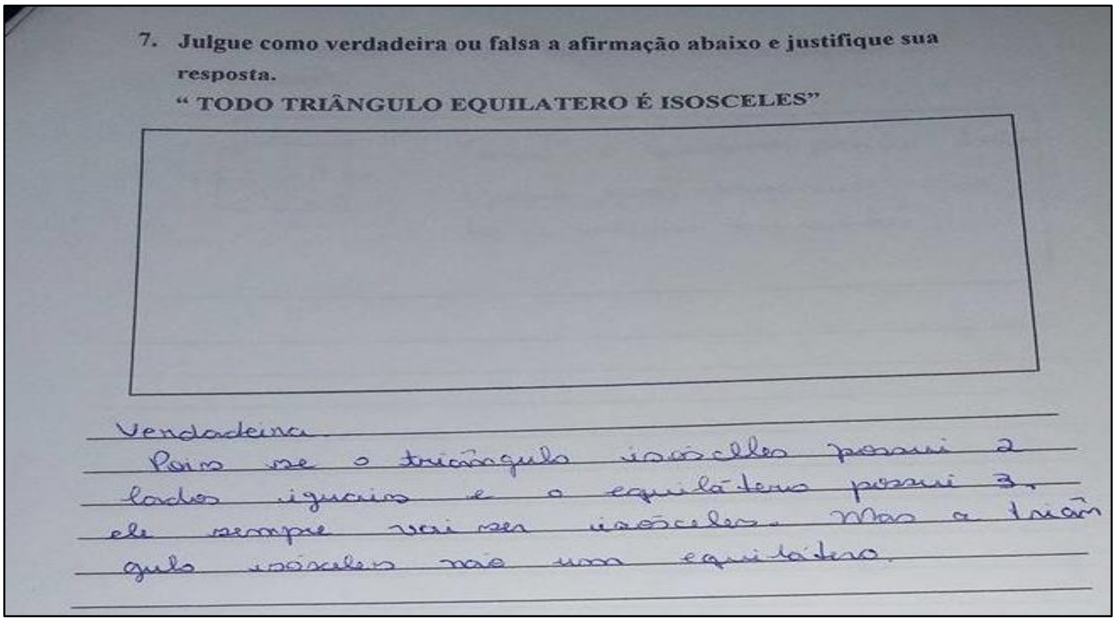


Fonte: O autor (2017)

A partir desses dados, notemos que mais de 60%, da turma, consegui acerta a questão, o que consideramos um dado satisfatório, uma vez que se fazia necessário construir um argumento para se validada a reposta. Com relação, as respostas incorretas notaram-se que os licenciandos utilizaram um argumento bem parecido com o correto, mas se confundiram entre a sentença com a sua reciproca, na hora de demonstrar. Novamente podemos tratar como positivo, termos apenas 17% das respostas em branco.

Nas figuras 13, 14 e 15, observaremos três repostas corretas, mas argumentadas de formas diferentes, fato comum nesse tipo de exercício, visto que a construção do argumento de demonstração é algo variado, ou seja, pode ser feito de maneiras diversas.

Figura 13 - Resposta do Q20, questão sete.


7. Julgue como verdadeira ou falsa a afirmação abaixo e justifique sua resposta.
"TODO TRIÂNGULO EQUILATERO É ISOSCELES"

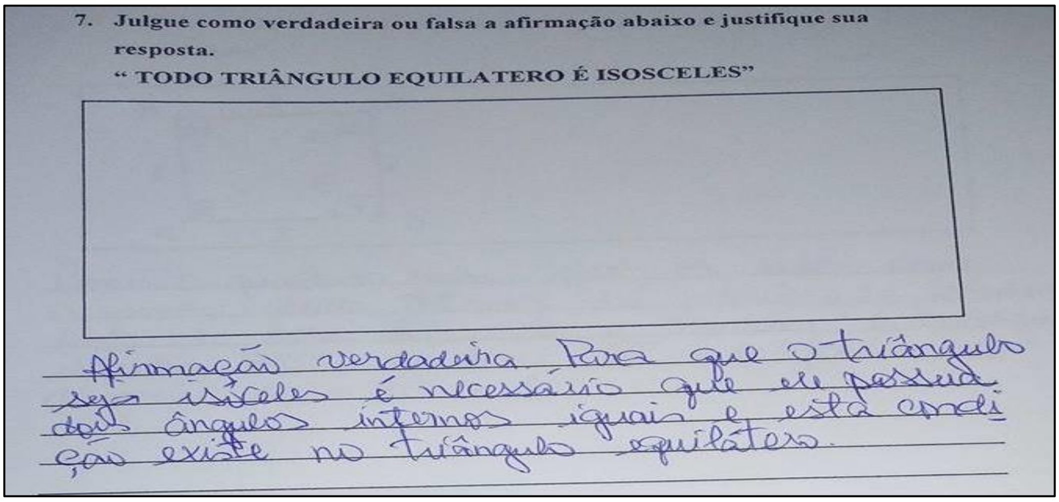
Verdadeira.
Pois se o triângulo isósceles possui 2 lados iguais e o equilátero possui 3, ele sempre vai ser isósceles. Mas o triân gulo isósceles não um equilátero.

Fonte: O autor (2017)

Nesta resposta o discente Q20, utilizou a propriedades dos lados das figuras para se chegar a conclusão. Note também que o mesmo não utilizou o espaço destinado para a figura. Esse pensamento geométrico estaria no nível de dedução informal, pois já consegue inter-relacionar propriedades nas figuras conseguindo chegar a novas conclusões utilizando essas ideias.

Já o Q17, utilizou outra propriedade para justificar sua resposta como veremos abaixo na figura 14,

Figura 14 - Resposta do Q17, questão sete.


7. Julgue como verdadeira ou falsa a afirmação abaixo e justifique sua resposta.

“ TODO TRIÂNGULO EQUILATERO É ISOSCELES”

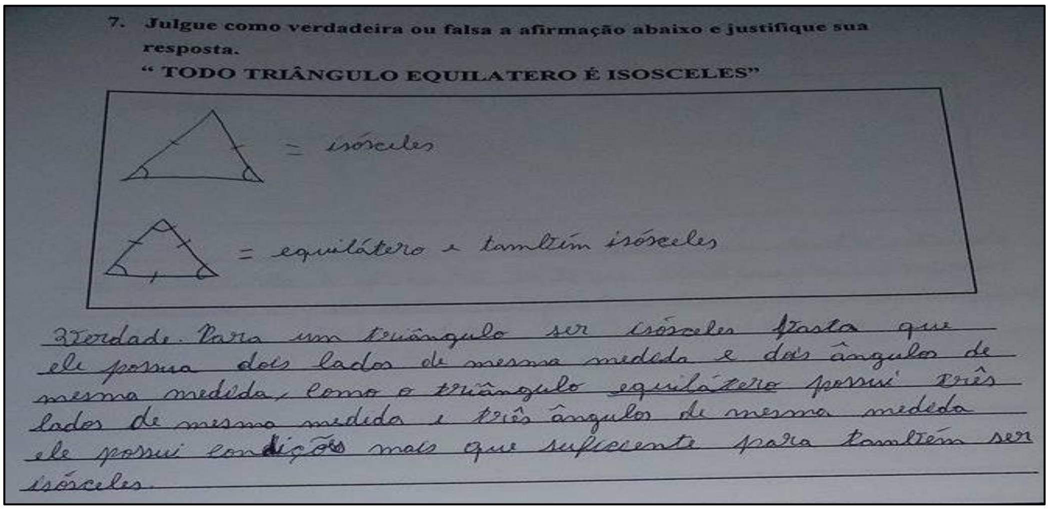
Afirmação verdadeira. Para que o triângulo seja isósceles é necessário que ele possua dois ângulos internos iguais e esta condição existe no triângulo equilátero.

Fonte: O autor (2017)

O Q17 utilizou a propriedade dos ângulos da base para argumentar sua resposta, mesmo que de forma indireta, uma vez que respondeu “dois ângulos internos iguais”, que consequentemente são os da base, note que ele também não utilizou o desenho de figuras como recurso facilitador. Esse pensamento apresentado por Q17, pode ser categorizado no nível de dedução informal, pois já consegue realizar inferências com as propriedades das figuras.

Diferentemente dos dois casos apresentados acima, o licenciando Q19, fez uso do recurso do desenho da figura na sua resolução, como podemos ver na próxima figura. Esse artificio é muito utilizado para fazer demonstrações em Geometria, no entanto apenas sete alunos que responderam corretamente à questão utilizaram.

Figura 15 - Resposta do Q19, questão sete.


7. Julgue como verdadeira ou falsa a afirmação abaixo e justifique sua resposta.

“ TODO TRIÂNGULO EQUILATERO É ISOSCELES”

= isósceles

= equilátero e também isósceles

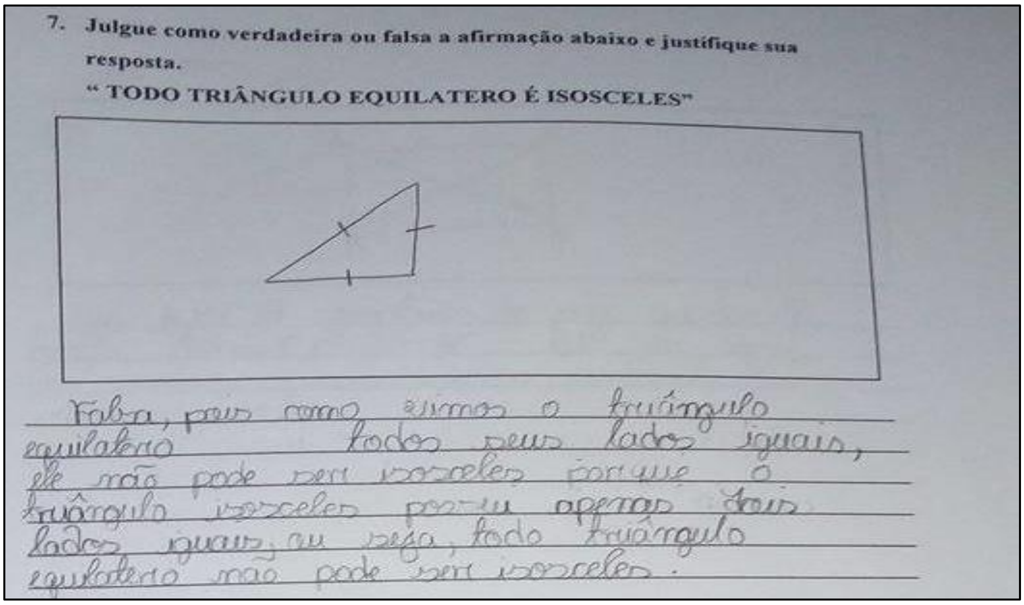
Verdade. Para um triângulo ser isósceles basta que ele possua dois lados de mesma medida e dois ângulos de mesma medida, como o triângulo equilátero possui três lados de mesma medida e três ângulos de mesma medida ele possui condições mais que suficiente para também ser isósceles.

Fonte: O autor (2017)

Foi utilizado como argumentação a junção das propriedades usadas nos dois exemplos anteriores (lados e ângulos), como também a visualização das figuras e das propriedades, fato que o coloca com um pensamento geométrico no nível superior aos anteriores, apresentando assim um estágio de dedução formal, de modo que expõe afinidade com sistema dedutivo utilizando termos relacionais comuns nesses sistemas.

Dentre as respostas incorretas, dois estudantes Q13 e Q11, nos chamam atenção como veremos a seguir. O estudante Q11, utilizou as propriedades dos lados para fundamentar sua demonstração, mas não conseguiu correlacionar as propriedades da figuras devidamente. Como observaremos agora.

Figura 16 - Resposta do Q11, questão sete.


7. Julgue como verdadeira ou falsa a afirmação abaixo e justifique sua resposta.
"TODO TRIÂNGULO EQUILATERO É ISOSCELES"

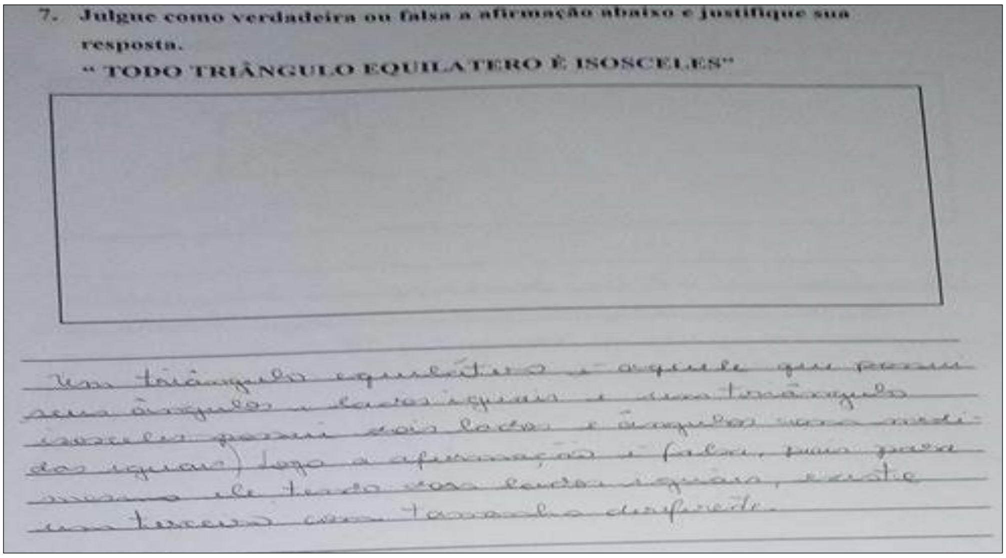
Falsa, pois como vimos o triângulo equilatero todos seus lados iguais, ele não pode ser isosceles porque o triângulo isosceles possui apenas dois lados iguais, ou seja, todo triângulo equilatero não pode ser isosceles.

Fonte: O autor (2017)

O licenciando errou a questão ao dizer equivocadamente que por ter três e não só dois lados iguais, o Triângulo equilátero não seria isósceles, vale destacar também que a figura desenhada por ele, pode ter prejudicado na resposta, pois fez analogia apenas a um dos triângulos citados no exercício. No entanto ressaltamos que as propriedades citadas por ele das figuras estão corretas, sendo assim podemos categorizá-lo na transição do nível da análise, para o nível da dedução informal, tomando como atividade para relacionar as propriedades das figuras.

Enquanto o Q13 conseguiu inferir que o triângulo equilátero possui também dois lados iguais, mas não alcançou uma conclusão que fosse correta.

Figura 17 - Resposta do Q13, questão sete.



7. Julgue como verdadeira ou falsa a afirmação abaixo e justifique sua resposta.
" TODO TRIÂNGULO EQUILÁTERO É ISOSCELES"

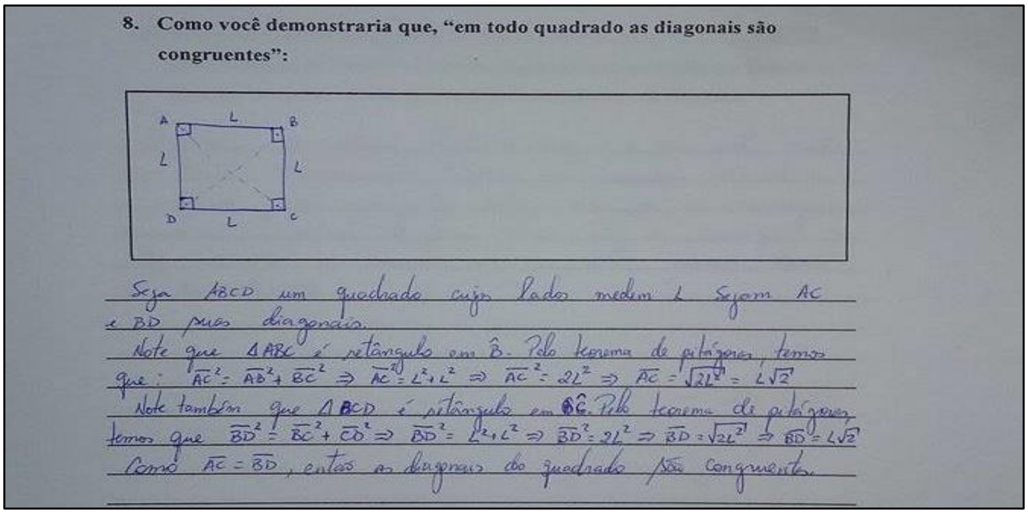
Um triângulo equilátero é aquele que possui seus ângulos e lados iguais e um triângulo isosceles possui dois lados e ângulos (com medidas iguais) logo a afirmação é falsa, pois para mesmo ele tendo dois lados iguais, existe um terceiro com tamanho diferente.

Fonte: O autor (2017)

O discente conseguiu construir um argumento, contudo errou quando foi concluir sua demonstração, um erro que podemos considerar mais conceitual, já que conseguiu realizar as inferências nas propriedades das figuras, estando assim no nível 2, na teoria do pensamento geométrico.

Na oitava questão, foi a que mais encontramos heterogeneidade nas respostas, por esse motivo iremos detalhar mais repostas dos licenciando, já que o quesito merece atenção especial.

Figura 18 - Resposta Q02 da questão oito.



8. Como você demonstraria que, "em todo quadrado as diagonais são congruentes":

A L B
L L
D L C

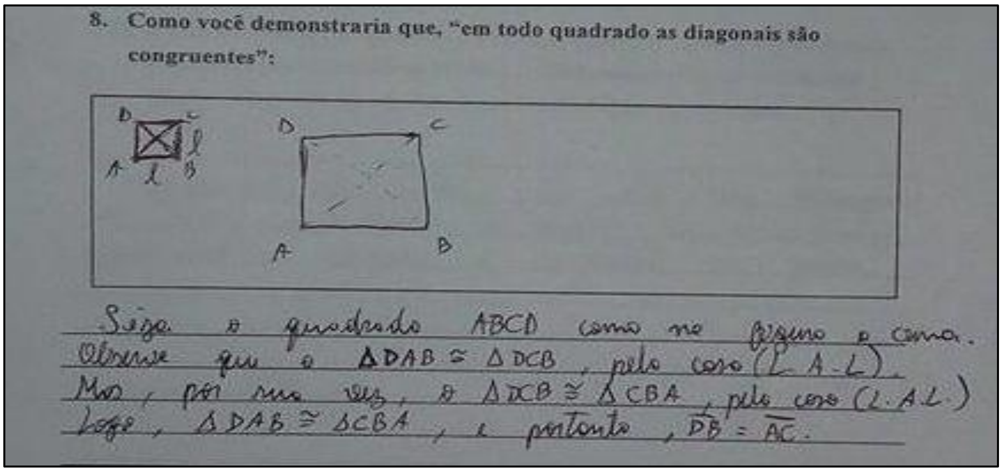
Seja ABCD um quadrado cujos lados medem L. Sejam AC e BD suas diagonais.
Note que ΔABC é retângulo em $\hat{B}$. Pelo teorema de pitágoras, temos que: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{AC}^2 = L^2 + L^2 \Rightarrow \overline{AC}^2 = 2L^2 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2}$
Note também que ΔBCD é retângulo em $\hat{C}$. Pelo teorema de pitágoras, temos que $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 \Rightarrow \overline{BD}^2 = L^2 + L^2 \Rightarrow \overline{BD}^2 = 2L^2 \Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{2L^2} \Rightarrow \overline{BD} = L\sqrt{2}$
Como $\overline{AC} = \overline{BD}$, então as diagonais do quadrado são congruentes.

Fonte: O autor (2017)

O Q02 usou algumas propriedades implícitas e explicitas dos quadrados na sua demonstração, além de ser o único a empregar o Teorema de Pitágoras nessa questão, ele demonstrou ter domínio de termos de inferências “note que”, “Temos”, “como”, “então”, utilizando de modo correto as hipóteses, acarretando numa conclusão plausível, sendo assim com característica dos objetos do pensamento no nível 3, estando seu argumento categorizado como dedução formal.

O Discente Q23, também chegou a uma conclusão aceitável, mesmo tendo tomado o caminho bem diferente do caso acima.

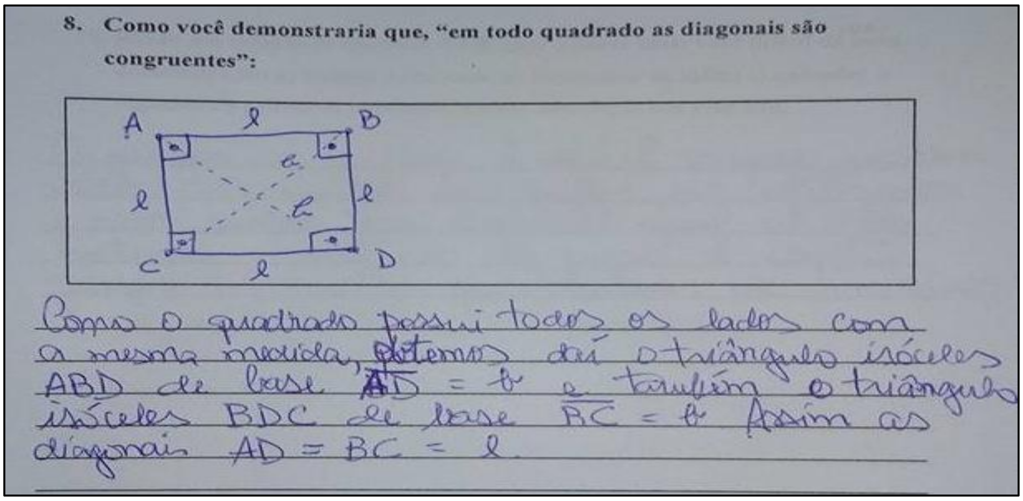
Figura 19 – Resposta do Q23, questão oito.



Fonte: O autor (2017)

O discente aplicou as ideias de congruência de Triângulo para chegar à conclusão de sua demonstração, note que ele usou simbologias da linguagem especifica da Matemática, como também termos de inferências. Estando no nível de pensamento de dedução formal. Essa reposta foi bem perecida com a dada pelo estudante Q16. Utilizando a mesma ideia e estando categorizado no mesmo nível.

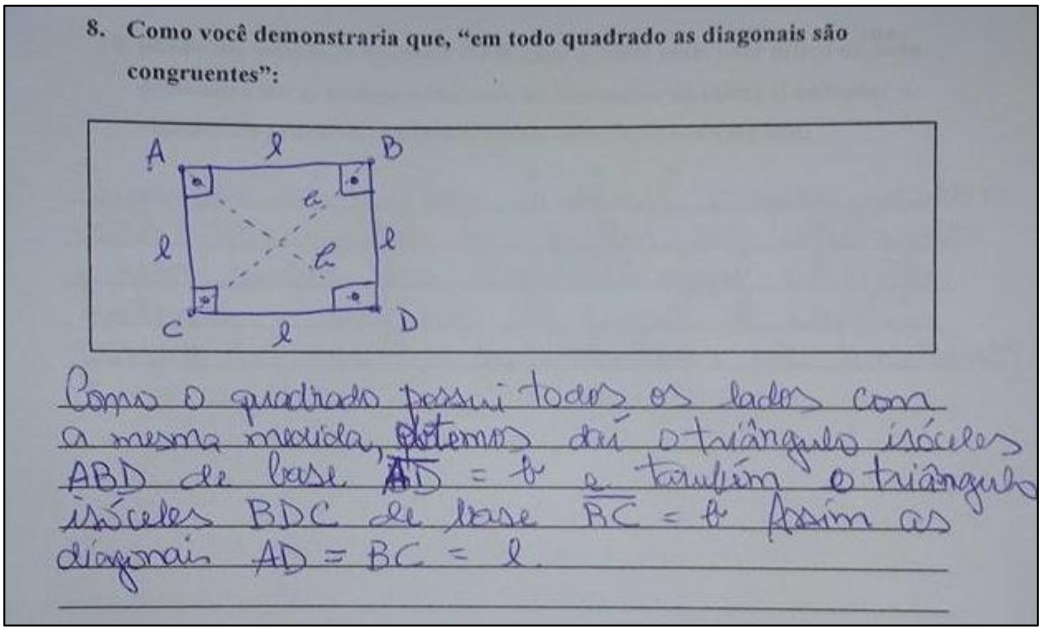
Figura 20 – Resposto do Q16, questão oito.



Fonte: O autor (2017)

A figura 20 abaixo, mostra a resposta do Q16 da questão oito, onde o mesmo observou os lados do quadrado para usar a propriedade do teorema de triângulo isósceles.

Figura 21 – Resposto do Q23, questão oito.

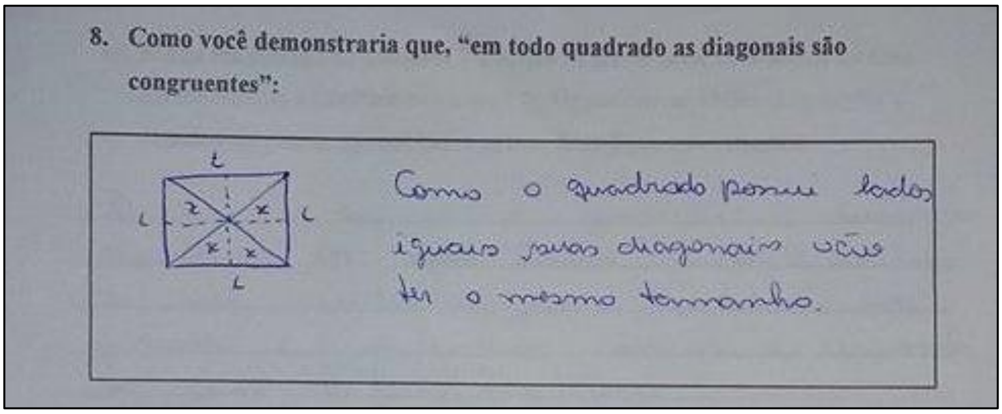


Fonte: O autor (2017).

Notemos que o licenciando traçou as diagonais do quadrado a fim de ter dois triângulos isósceles e congruentes, conseguindo assim chegar a uma conclusão. Logo, sob a ótica da van Hiele, estão no nível 3 do pensamento geométrico.

Nas próximas figuras, observamos que as respostas são parecidas, pois os licenciandos em todos os casos relataram as propriedades, mas não chegaram a conclusão cabível, já que não conseguiram relacionar de forma correta.

Figura 22 - Resposta Q20 da questão oito.

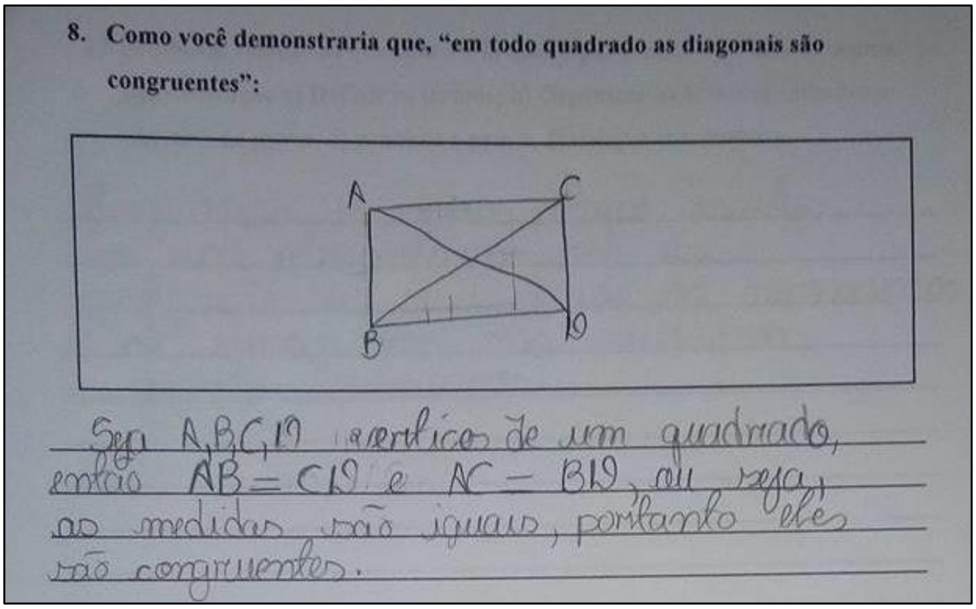


Fonte: O autor (2017)

Veja que o licenciando Q20, apenas trouxe a propriedade dos lados dos quadrados e depois logo deduziu só com aquele resultado a conclusão.

Já as repostas do Q15 e Q11, estão parecidas com a anterior onde utilizam do fato da congruência dos lados para concluir a congruência das diagonais.

Figura 23 - Resposta Q15 da questão oito.

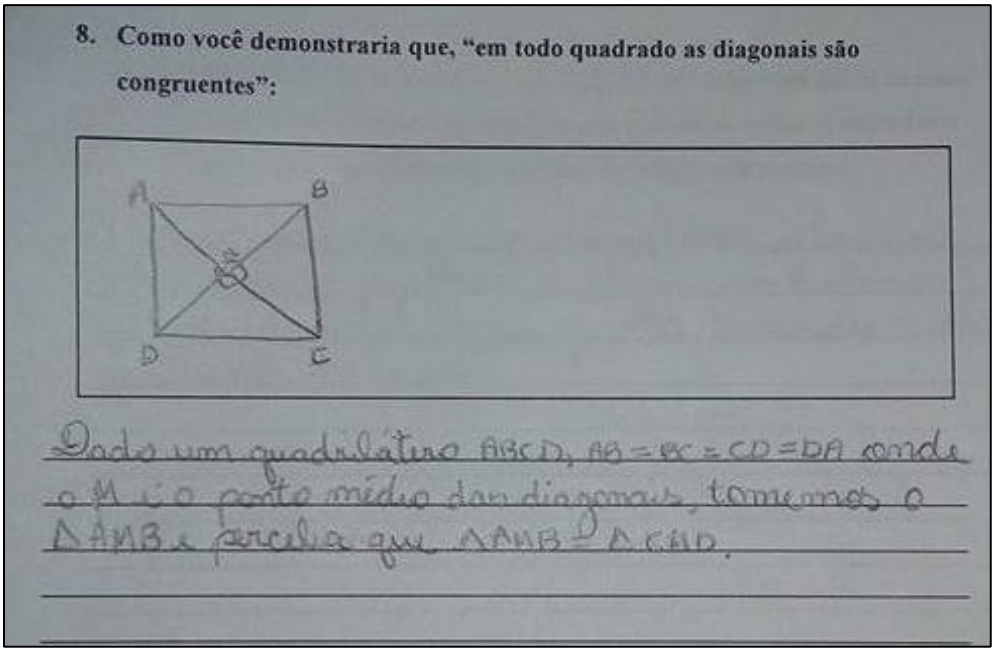


8. Como você demonstraria que, "em todo quadrado as diagonais são congruentes":

Seja A,B,C,D vértices de um quadrado, então AB = CD e AC = BD, ou seja, as medidas são iguais, portanto eles são congruentes.

Fonte: O autor (2017)

Figura 24 - Resposta do Q11, questão oito.



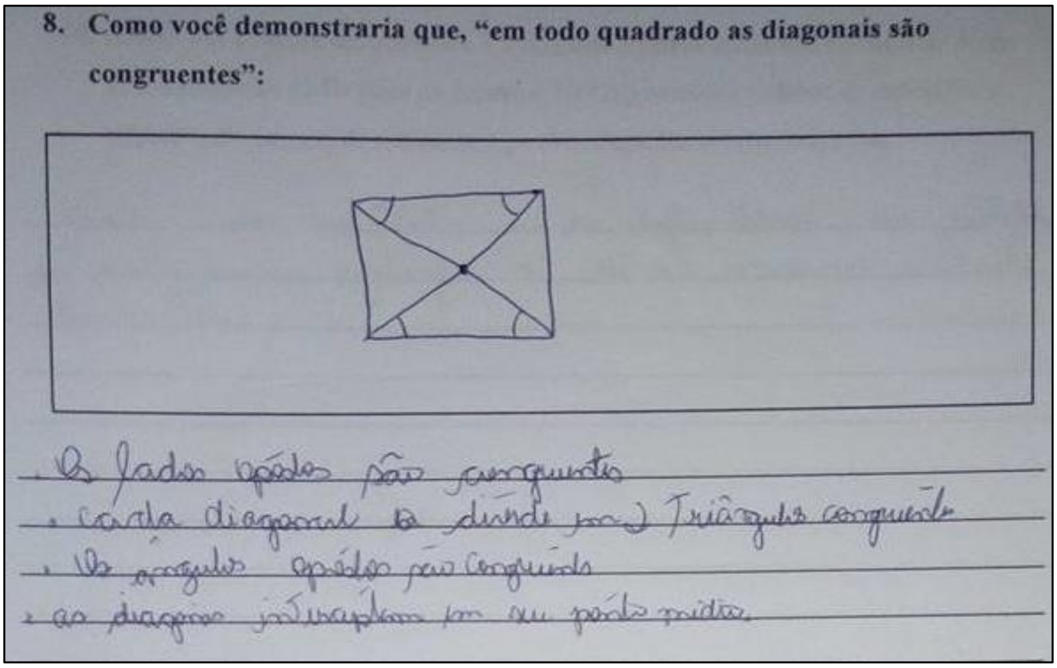
8. Como você demonstraria que, "em todo quadrado as diagonais são congruentes":

Dado um quadrilátero ABCD, AB = BC = CD = DA onde o M é o ponto médio das diagonais, tomemos o ΔAMB e percebe que ΔAMB ≅ ΔCMD.

Fonte: O autor (2017)

Já o licenciando Q01, listou algumas propriedades e sem relaciona-la chegou a uma conclusão como podemos ver na figura 25.

Figura 25: Resposta Q01 da questão oito



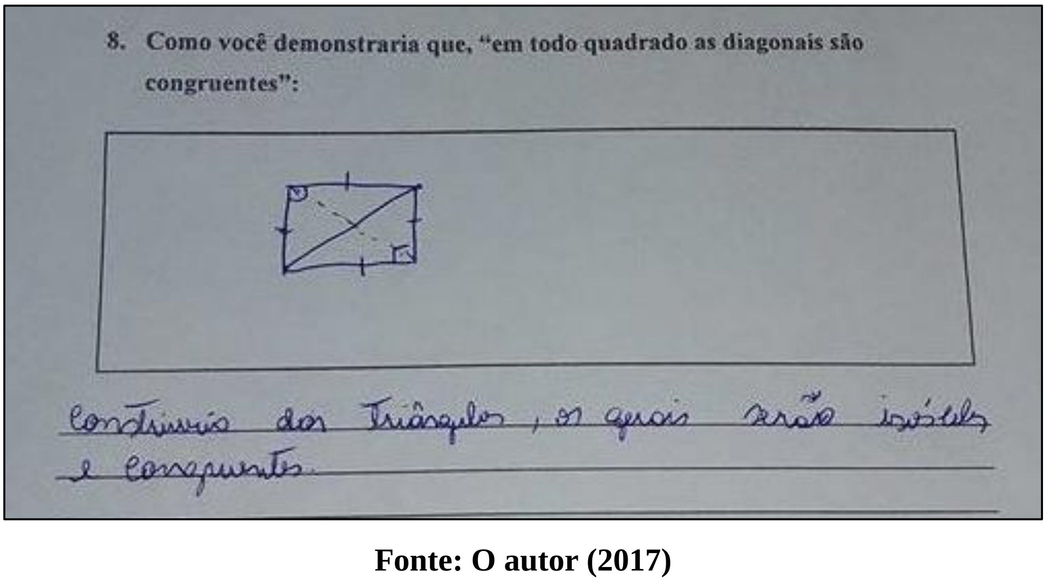
8. Como você demonstraria que, "em todo quadrado as diagonais são congruentes":

. Os lados opostos são congruentes
. cada diagonal o divide em 2 Triângulos congruentes
. Os ângulos opostos são congruentes
. as diagonais interceptam em um ponto médio.

Fonte: O autor (2017)

Podemos categorizar esses quatro casos como no nível de transição da análise para dedução formal. Nos casos abaixo os estudantes também estão classificados nesse mesmo nível de transição. Os licenciandos Q22 e Q14 só iniciaram o argumento demonstrativo.

Figura 26: Resposta do Q22, questão oito.

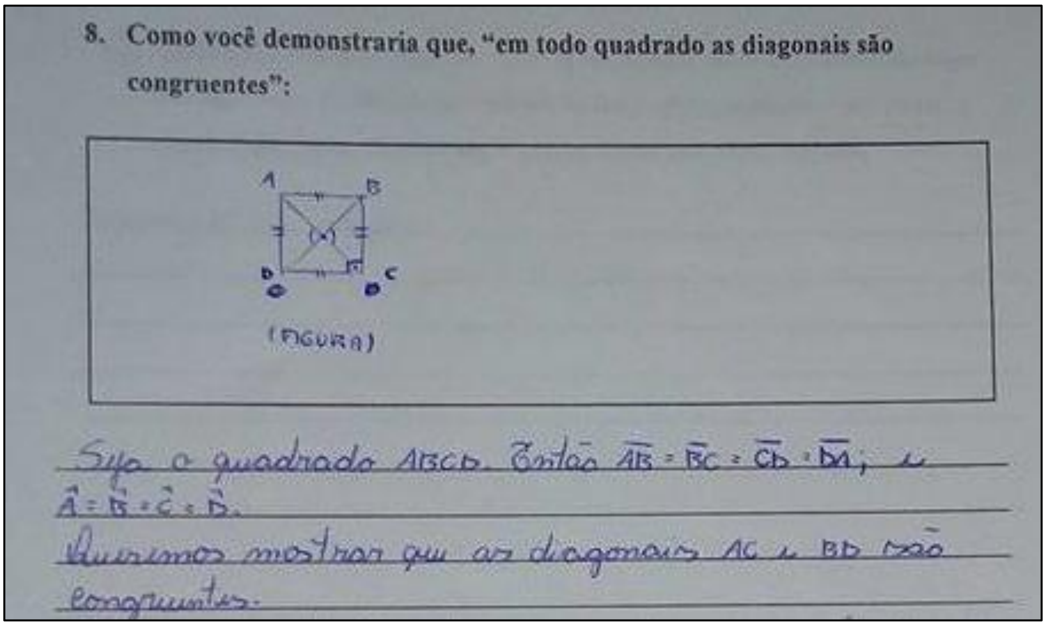


8. Como você demonstraria que, "em todo quadrado as diagonais são congruentes":

Construímos dos Triângulos, os quais serão isósceles e congruentes.

Fonte: O autor (2017)

Figura 27 - Resposta do Q14, questão oito.



Fonte: O autor (2017)

A construção do argumento demonstrativo é um processo muito delicado que exige do indivíduo, além de conhecimento conceitual do conteúdo, também que utilize regras de inferências para se obter êxito. Esta complexidade na construção está explicita na Teoria do casal van Hiele, onde abordam a temática em três níveis do pensamento. Ainda nessa direção, Nascimento (2008), enfatiza que ao estudar a geometria ensinada no Ensino Superior requer tempo e amadurecimento, porque os conteúdos são trabalhados de forma mais abstrata utilizando o modelo lógico dedutivo, que é algo novo.

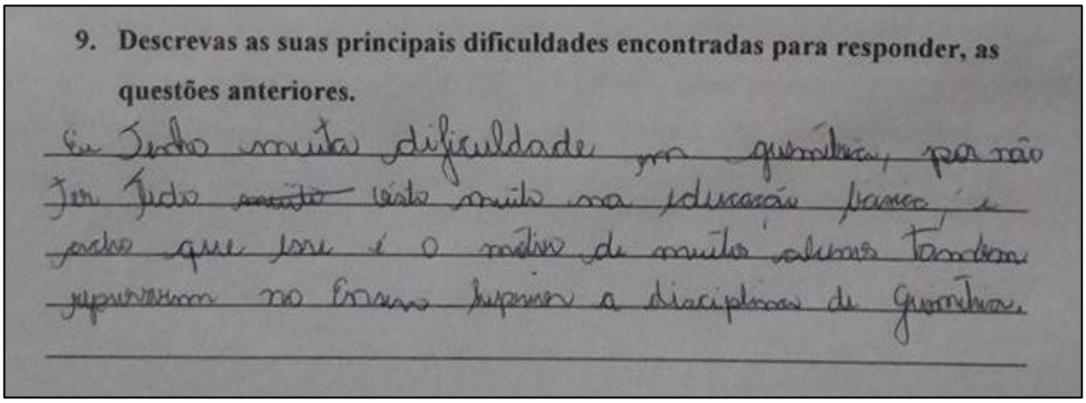
Com relação aos dados obtidos, foi constatado que a maioria dos licenciandos estão na fase de transição do nível um para o nível dois, uma vez que conseguem fazer demonstrações, entretanto falta maturidade na escrita, de modo especial na utilização de termo relacionais, tal fato pode ser explicado, no entanto por serem os primeiros contatos com esse tipo de atividade.

6.4 Opiniões acerca da construção de demonstrações

Nas questões nove e dez os licenciando eram indagados sobre suas habilidades para construir demonstrações.

Com relação a questão nove, apenas um licenciando deixou em branco e quatro relataram que não tiveram nenhuma dificuldade. Enquanto três associaram suas dificuldades com os problemas adivinho do ensino da geometria durante seu período de escolarização.

Figura 28 - Resposta do Q01 da questão nove.



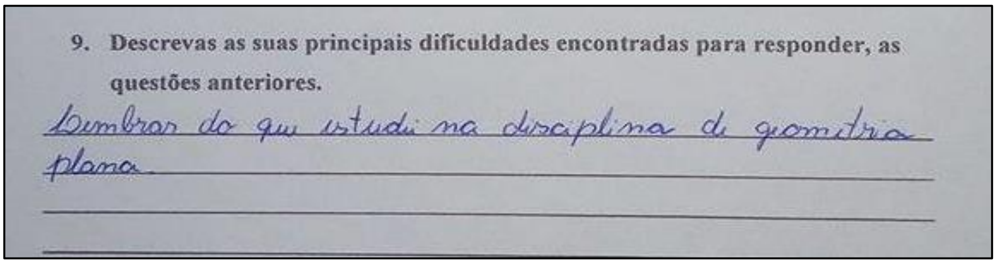
9. Descrevas as suas principais dificuldades encontradas para responder, as questões anteriores.

Eu tenho muita dificuldade em geometria, por não ter tido ~~muito~~ visto muito na educação básica, e acho que isso é o motivo de muitos alunos também reprovarem no Ensino Superior a disciplina de Geometria.

Fonte: O autor (2017)

Já sete licenciandos reclamaram das dificuldades de lembrarem dos conceitos aprendidos na disciplina de Fundamentos de geometria plana.

Figura 29 - Resposta do Q14 da questão nove.



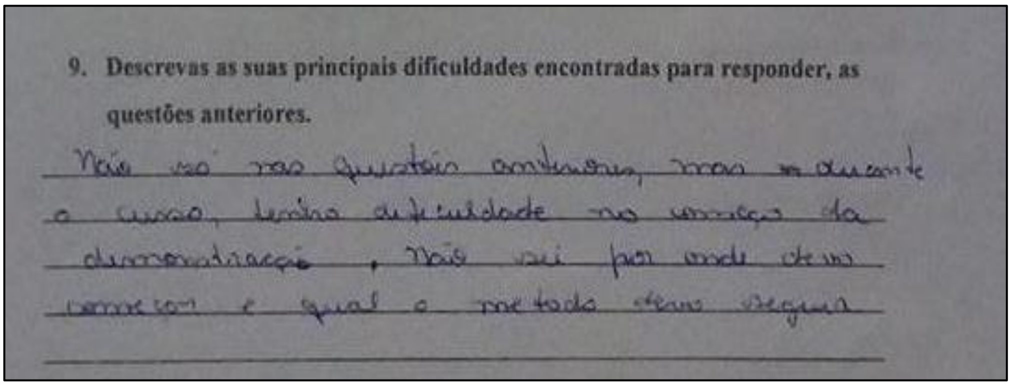
9. Descrevas as suas principais dificuldades encontradas para responder, as questões anteriores.

Lembrar do que estudei na disciplina de geometria plana

Fonte: O autor (2017)

O fato que mais chamou atenção foi a resposta de oito alunos que disseram que apresentavam problemas na organização das ideias para construir o argumento demonstrativo. Vejamos nas figuras 29 e 30, as respostas do Q20 e do Q02, onde descrevem essa dificuldade.

Figura 30 - Resposta do 20 da questão nove.

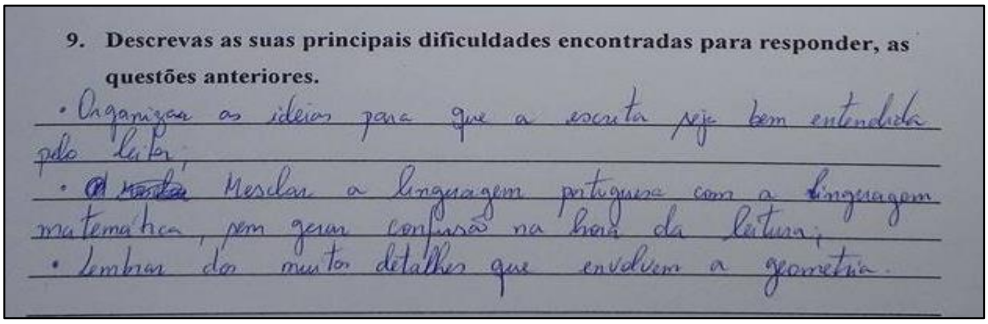


9. Descrevas as suas principais dificuldades encontradas para responder, as questões anteriores.

Não só nas questões anteriores, mas durante o curso, tenho dificuldade no começo da demonstração, não sei por onde devo começar e qual o método devo seguir

Fonte: O autor (2017)

Figura 31: Resposta do 02 da questão nove.



9. Descrevas as suas principais dificuldades encontradas para responder, as questões anteriores.

• Organizar as ideias para que a escrita seja bem entendida pelo leitor;
• ~~a mostra~~ Mesclar a linguagem portuguesa com a linguagem matemática, sem gerar confusão na hora da leitura;
• Lembrar dos muitos detalhes que envolvem a geometria.

Fonte: O autor (2017)

Se referindo a questão dez, apresentaremos os dados na tabela abaixo:

Tabela 5 - Resposta questão dez

Dificuldade	Quantidade de resposta
a) Definir os termos	07
b) Organizar as ideias	13
c) Entender o objetivo da prova	01
d) concluir a prova	00
Todas	02

Fonte: O autor (2017)

Novamente, os licenciandos expressaram suas dificuldades em organizar as ideias como a parte mais complicada para eles. Outro ponto que merece destaque é que os itens a) e b) foram os mais citados pelos estudantes, observe que estes itens se referiam a parte inicial da demonstração. Com esses dados podemos apontar que a parte inicial é o que mais dificulta a construção.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As demonstrações são ferramentas indispensável para o avanço da Matemática, entretanto, são motivos de grandes dificuldades para alunos na graduação, de modo especial, nos cursos de licenciatura.

Notamos que no curso de Matemática - Licenciatura da UFPE-CAA, na disciplina de Fundamentos da Geometria Plana -a primeira disciplina obrigatória a fazer uso das demonstrações - os discentes apresentavam dificuldades, na construção dos argumentos, acarretando, na maioria dos casos, a reprovação na disciplina, segundo relatos dos mesmos. Sendo assim, nossa pesquisa teve o intuito de fazer uma investigação da construção do argumento demonstrativo, nas turmas que estudavam Geometria Euclidiana, empregando a teoria do pensamento geométrico do casal holandês van Hiele.

Como resultado da pesquisa, constatamos que os conteúdos geométricos ainda são poucos trabalhados na Educação Básica, trazendo dificuldades nessa área para os alunos quando ingressam no Ensino Superior, pois nesse nível o ensino é feito de maneira diferente, sendo necessário que o estudante tenha consolidados conceitos anteriores.

Percebemos que os licenciandos ainda apresentam problemas em relacionar as propriedades implícitas e explicitas nas figuras, mesmo já as reconhecendo e nomeando-as. Percebemos que esse fato atrapalha os discentes ao iniciarem a construção da demonstração. Além disso, constatamos que a maioria dos estudantes ainda não apresentam domínio dos termos de inferências, fazendo com que sua argumentação perca o sentido para conclusão.

No que se refere ao nível de pensamento geométrico de van Hiele, averiguamos que a maioria dos estudantes figuram no estágio de dedução informal, já que conseguem fazer demonstrações, apresentando, contudo, algumas dificuldades evidenciadas no parágrafo acima. Podemos considerar esse resultado como esperado, de modo que a partir de experiências futuras de prática com as demonstrações, espera-se que os alunos adquiram uma maturidade para demonstrar.

Por fim, verificamos que os estudantes sentem mais dificuldade na parte inicial de organização das ideias e na definição dos termos para construção das demonstrações. Diante disso concluímos que as dificuldades nas demonstrações, estão além das dificuldades conceituais da geometria.

Portanto, a partir da pesquisa, salientamos a importância de uma disciplina específica de iniciação a lógica matemática, nos períodos iniciais do curso Matemática-licenciatura da UFPE-CAA, bem como a criação de projetos de pesquisas e extensão voltados para revisão de conteúdos da Educação Básica. Além disso, ainda sugerimos aos poucos ir trabalhando com demonstrações em disciplinas no início do curso.

Como sugestão de pesquisa futuras, uma investigação sobre os avanços do pensamento geométrico durante o desenvolvimento da disciplina de Fundamentos da Geometria Plana. Outra sugestão interessante seria analisar o que entendem os licenciando sobre de demonstrações antes do quinto período, no curso de graduação acima citado.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. de – **Iniciação á Lógica Matemática**. São Paulo: Nobel, 2002.

ALMOULOUD, S. A. **Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem.** 30º Reunião anual da Anped. 2007**.** Disponível em: < http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova.pdf > Acesso em 22 de abr. de 2016.

BICUDO, I. **Demonstração em Matemática.** BOLEMA (Rio Claro), Rio Claro-SP, v. 15, p. 79-90, 2002.

BORGES FILHO, F. **O desenho e o canteiro no Renascimento Medieval (séculos XII e XIII): indicativos da formação dos arquitetos mestres construtores**. 2005. Tese (Doutorado em Estruturas Ambientais Urbanas) - Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005. doi:10.11606/T.16.2005.tde-13102005-115856. Acesso em: 12/01/2017.

BOYER, C. B. **Euclides de Alexandria.** In:____________. **História da Matemática** – Tradução Elza F. Gomide – 2 ed. – São Paulo : Edgard Blucher, p. 69–82. 1996.

BRAITT, M. S., WHITLEY, W. G. **Geometria III**. 2º ed. — Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2011.

CROWLEY, Mary L. *O* **modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.** In: LINDQUIST, Mary & SHULTE, Albert P. (organizadores), *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

DOMINGUES, H. H. **A Demonstração ao Longo dos Séculos.** BOLEMA (Rio Claro), Rio Claro-SP, v. 15, p. 55-67, 2002.

EVES, H. **Euclides e seus elementos.** In:____________. **Introdução à história da matemática** – Tradução Hygino H. Domingues – campinas – SP: Editora UNICAMP, p. 166-190. 2004.

GARNICA, A. V. M. **As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio.** BOLEMA (Rio Claro), Rio Claro-SP, v. 15, p. 91-99, 2002.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6ª ed. São Paulo: Editora Atlas S.A, 2008.

GOUVÊA, F. A. T. **Aprendendo e ensinando Geometria com a demonstrações: Uma contribuição para a pratica pedagógica do professor de Matemática do Ensino Fundamental.** 1998. 264 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo.

KALEFF, A. M. M. R.; REI, D. M.; HENRIQUES, A. S.; FIGUEIREDO, L. G. **Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de van Hiele**. Bolema (Rio Claro), Rio Claro-SP, v. 10, p. 21-30, 1994.

KIRNEV, D. C. B.; SAVIOLI, A. M. P. D. **Um estudo sobre lógica e demonstrações em Matemática.** In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2011, Recife –PE. Anais... Recife, CIAEM, 2011. Disponivel em: < ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1230/1105> Acesso em: 16 de maio de 2016.

MACHADO, N. J; CUNHA, M. O. da, - **Lógica e linguagem cotidiana: verdade, coerência, comunicação, argumentação** – 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008

MUNDIM, R. P. - **A Lógica Formal – princípios elementares**. *Econom. & gestão*, Belo Horizonte, v. 2, n. 3, p. 135-145, jan./jun. 2002. Disponivel em: <http://periodicos.pucminas.br/index.php/economiaegestao/article/viewFile/113/104>. Acesso em: 07 de Dez. 2015.

NASCIMETNTO, A. A. S. B. - **Relação entre os conhecimentos, as atitudes e a confiança dos alunos no curso de Licenciatura em Matemática em resolução de problemas geométricos.** 2008. 202 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Faculdade de ciências, Universidade Estadual paulista, Bauru.

SANTOS, M. C. Investigando os níveis pensamento geométrico de van Hiele: o caso dos quadriláteros. In: **Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática**, Rio Grande do Sul, 1998. Disponivel em < http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem >. Acesso 12 de junho 2016.

SILVA, J. J. **A Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática.** BOLEMA (Rio Claro), Rio Claro-SP, v. 15, p. 68-78, 2002.

VILLIERS, M. **Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. EMP -** Revista Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.12, n.3, 2010. Disponível < revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/5167/3696 >. Acesso em 24 de Abril de 2016.

WALLE, J. A. V**. Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e Aplicação em Sala de Aula.** 6 a edição. Tradução de Paulo Henrique Colonese. Editora Artmed, 2009.

WATANABE, O. K. - **Iniciação á Lógica Matemática**. São Paulo: Alexa Cultural, 2010.

ANEXOS

Questionário

Prezados discentes, este questionário faz parte de minha pesquisa de Trabalho de conclusão de curso, que visa investigar o nível de pensamento geométrico presente nas demonstrações, no curso de Licenciatura em Matemática, UFPE-CAA. Diante disso, peço responsabilidade nas suas respostas. Desde de já, garanto o SIGILO das informações nele contidas, sendo utilizadas posteriormente para a análise dos dados. Atenciosamente, Andréson da Silva Alquino.

Questionário

1. **Nome** ____
2. **Semestre de ingresso no curso.** _______________
3. **Disciplina que está cursando:**

   ____
4. **Já pagou alguma disciplina que faz uso de Demonstrações? Se sim qual(is)?**

   ____

   ____

   ____
5. **Com relação a geometria, quais são suas experiências na Educação Básica e no Ensino Superior?**

   ____

   ____

   ____

   ____
6. **De acordo com seus conhecimentos, nomeie e caracterize as figuras abaixo:**

Figura A

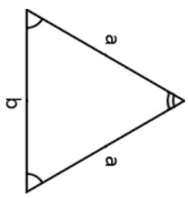


Figura B

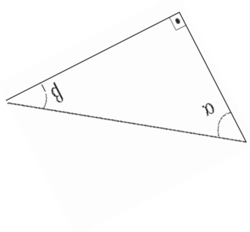


Figura C

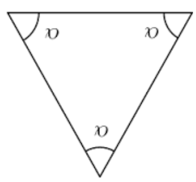


Figura D

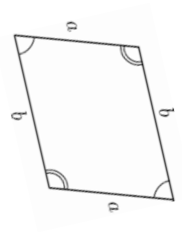
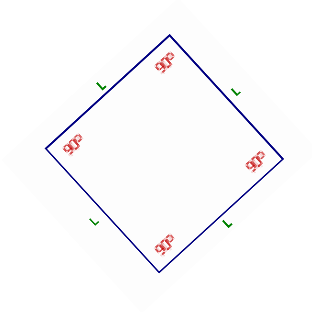
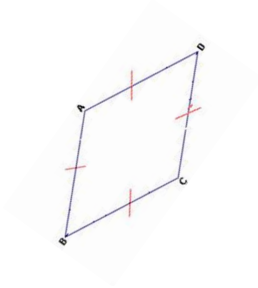


Figura E **Figura F** **Figura G**





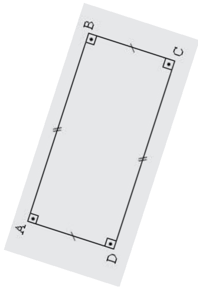


Figura A

Figura B

Figura C

Figura D

Figura E

Figura F

Figura G

7. Julgue como verdadeira ou falsa a afirmação abaixo e justifique sua resposta.

“ TODO TRIÂNGULO EQUILÁTERO É ISÓSCELES”

-

8. **Como você demonstraria que, “em todo quadrado as diagonais são congruentes”:**

9. **Descrevas as suas principais dificuldades encontradas para responder, as questões anteriores.**

10. Qual a parte você acha mais difícil, em uma demonstração

a) Definir os termos,

b) Organizar as ideias,

c) Entender o objetivo da prova,

d) concluir a prova. Justifique seu pensamento.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____