U N I V E R S I D A D E
F E D E R A L
D E P E R N A M B U C O

MODELAGEM MATEMÁTICA COM SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

R O S S A L V E S D O N A S C I M E N T O

C E N T R O D E E D U C A Ç Ã O
D O U T O R A D O E M E D U C A Ç Ã O

ROSS ALVES DO NASCIMENTO

MODELAGEM MATEMÁTICA COM SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

Tese apresentada ao curso de Doutorado em Educação, do programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Educação.

Orientador(a): Prof[a]. Dr[a]. Verônica Gitirana Gomes Ferreira

Recife, setembro de 2007.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
CURSO DE DOUTORADO EM EDUCAÇÃO

MODELAGEM MATEMÁTICA COM SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

ROSS ALVES DO NASCIMENTO

Recife, 2007

Nascimento, Ross Alves do
Modelagem matemática com simulação computacional na aprendizagem de funções/ Ross Alves do Nascimento. – Recife : O Autor, 2007.
344 f. : il; tabelas.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CE. Educação, 2007.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Modelagem matemática. 3. Simulação computacional. 4. Didática. 5. Funções (matemática). I. Título.

37	CDU (2.ed.)	UFPE
372.7	CDD (22.ed.)	CE2007-035

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

MODELAGEM MATEMÁTICA COM SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

COMISSÃO EXAMINADORA

Profª Drª Verônica Gitirana Gomes Ferreira
1º Examinador/Presidente

Profª. Drª . Heloisa Flora Brasil Nóbrega Bastos
2ª Examinadora

Prof. Dr Marcelo Câmara dos Santos
3º Examinador

Prof Dr. Paulo Figueiredo Lima
4º Examinador

Profª Drª Paula Moreira Baltar Bellemain
5ª Examinadora

Recife, 28 de Setembro de 2007.

DEDICATÓRIA

Em especial a minha querida professora e orientadora:

***Profª. Drª. Verônica Gitirana Gomes Ferreira*.**

Aos Professores que influenciaram minha vida e que passei a admirá-los: Dr. Paulo Figueiredo Lima, Dr. Fernando Raul de Assis Neto, Drª. Edvirges Ruiz, Dr. Marcelo Câmara dos Santos, Drª. Heloisa Bastos Flora, Drª. Rute Borba, Drª. Licia Maia, Drª. Cecília Antunes, Drª. Paula Moreira Baltar, Dr. Frank Bellemain, e ainda aqueles que fazem o nome da UFPE pelo tipo de trabalho que desenvolvem ou desenvolveram, como: Jomar Muniz de Brito, Leônidas Câmara, Ariano Suassuna, Elizabeth Marcuschi, entre outros.

Aos colegas de trabalho e aprendizagem matemática: José Carlos Alves, Rogério Ignácio, Paulo Câmara, Abrahão Juvêncio, José Severino de Barros, Jorge Duarte, Walquíria Castelo Branco, Sandra Santos, Dr. Glauco Reinaldo e Drª Rosinalda Teles.

Aos personagens de nossa história cotidiana, como: Miguel Arraes, Nietzsche, Guevara e outros nessa linhagem. Estes representam os sonhos de admiração daqueles em que dificuldades lhes foram impostas ao seu objetivo de vida.

Aos sorrisos de Dahyna e Dahyla (filhas, preta e branca como eu as chamo) que se tornaram objetivo de vida.

Aos leais escudeiros que se foram e que devem figurar ao lado de um Quixote sonhador como eles. Meu querido pai Ernani e meu avô José (in memorian).

A minha Mãe Cila e todos da minha família.

Em especial a uma dama, minha queridíssima avó Gercina (de nome germina), uma verdadeira sina, me estimulando a olhar uma foto guardada de minha bisavó Josefa e do meu bizavô Izidro, filho de escravo e professor de matemática. Quero sempre guardar essa lembrança que me torna vivo e me faz refletir sobre a herança que propusemos como contribuição de nossas ações. Por fim, dedico aos justos, pois feliz é aquele que pode exibir esse valor.

Ross Nascimento

Um poema em homenagem a minha avó Germina, quando do seu Aniversário de 100 anos. (1905– 2005)

Uma proeza divina
Um século de existência
Um pensamento supremo
Uma verdadeira sina.
Uma família numerosa
Uma mulher que fascina
Uma lição de vida
Um nome germina.
Se lhe agrada essa diva
Que fugiu da medicina
Vá em maio a aldeia
Que lhe conto minha vida.

Ross

AGRADECIMENTOS

Aos alunos da Faculdade de Ciências Humanas e Sociais de Igarassu que participaram da coleta de dados e os demais alunos do curso de matemática.

Aos colegas do curso de doutorado ano 2003, 2ª turma.

Aos amigos e amigas que colaboraram e participaram dessa proposta de atividade. Uma verdadeira Tese.

RESUMO

Esta pesquisa investigou a Modelagem Matemática como caminho metodológico para a aprendizagem do conhecimento de função Afim, Quadrática e Exponencial, em situações que utilizam a construção de simulações no computador. Nossa preocupação foi identificar que habilidades matemáticas e computacionais são mobilizadas para usar o conhecimento de função na modelagem de soluções para a construção de simulações. Ao focar esse conhecimento, procuramos incluir como ferramenta auxiliar para a pesquisa o software Modelllus, que permite diferenciadas formas de representação e a construção de simulações computacionais. Tínhamos como hipótese que o uso do software facilitaria a validação dos modelos elaborados para as situações-problema selecionadas, pois essa, de acordo com as pesquisas (BASSANEZI, 2002; BIEMBENGUT & HEIN, 2003; BARBOSA, 2003) é uma fase difícil de implementação na modelagem. Outro ponto importante discutido na literatura é que para, se constituírem propostas de modelagem, utilizam-se problemas que são peculiares, envolvendo situações do cotidiano no campo das várias ciências. Dessa forma, construímos uma seqüência de três problemas, caracterizados como problemas do tipo “completamente aberto”, cuja solução demandava o conhecimento de função. Selecionamos três duplas de estudantes de uma faculdade da região metropolitana do Recife para vivenciar a experiência. Os estudantes já dominavam o Modellus e isso permitiu um avanço em nossas investigações. Durante a realização do estudo verificamos que a utilização de problemas do tipo completamente aberto enriqueceu a proposta de trabalho e resgatou informações sobre os fenômenos didáticos envolvidos nas relações de ensino-aprendizagem. Os resultados indicam: habilidades específicas para modelar, influência de regras de contrato didático, contexto utilizado nos problemas trouxeram elementos do cotidiano como é típico em situações de modelagem e que a dificuldade da fase de validação foi minimizada com a presença do software Modellus.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Simulação computacional, Fenômenos Didáticos, Função.

ABSTRACT

This research investigated mathematics modeling as an approach to learn the concept of affine, quadratic and exponential functions, on activities of building computer simulations. Our concerns were to identify mathematical and computational abilities mobilized while students use function knowledge on modeling simulations. This led us to search tools to the research, the Modellus software, which allow users to construct computer simulations and to work with multiple representations, was chosen. We hypothesized that using the software facilitates the validation of the models. According to researches, this is a hard phase to implement modeling as a teaching approach. Thus, three problems were designed, and characterized as completely opened problems, which solutions demanded function knowledge. Three pairs of undergraduated students of Recife were selected to undertake the activities. The students were already familiar to Modellus, what allowed overtaking students' familiarization with the software. The use of this kind of problems revealed didactical phenomena involved on teaching and learning process that provokes barriers on the use of mathematics modeling as at school. The results points to: specifics abilities to model, influences of rules of the didactic contract on the activities, relation between daily knowledge brought by the students and the context of the problem used and minimization of difficulties to validate promoted by Modellus software.

Key-word: Mathematics Modeling, Computational Simulation, Didactical Phenomena, Function, Modellus, Educational Software.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Professor!

Por que estou estudando esse assunto?

Onde aplico isto?

Estes são questionamentos que comumente temos ouvido de nossos alunos, demonstrando ansiedade, quando estudam algo que não conseguem perceber a importância. Essas perguntas são indícios, muitas vezes, da falta de entendimento do significado do que estão aprendendo, evidenciando um processo de ensino que não vem permitindo ao estudante desenvolver habilidades para aplicar o conhecimento matemático.

Nesse contexto, diversas pesquisas da Educação Matemática dedicam-se a estudar metodologias que busquem do estudante desenvolver habilidades para aplicar o conhecimento matemático. Uma dessas metodologias baseia-se na construção de modelos matemáticos como estratégia de ensino (BIEMBENGUT & HEIN, 2000; BASSANEZI, 2002), a Modelagem Matemática. Modelo, aqui, assume o sentido de uma representação que se faz de uma situação ou objeto.

Biembengut & Hein (2000) ilustram essa metodologia com 7 (sete) situações, comuns do nosso dia-a-dia, em que é possível uma descrição através de conceitos e procedimentos matemáticos. Em todas elas, chega-se a um modelo matemático que representa o problema. Nesse tipo de atividade, a solução do problema requer a construção de modelos pautados em conceitos, procedimentos e linguagem matemática. O importante nesse tipo de proposta é que se procura trabalhar atividades que desenvolvem competências e habilidades nos estudantes, para compreender, analisar e até formular modelos matemáticos. Essa metodologia de ensino busca tornar o estudante autônomo para aplicar o conhecimento que adquire.

Granja & Gitirana (1997) discutem que as atividades presentes nos livros didáticos são apresentadas de tal forma que a escolha do conhecimento matemático a ser utilizado já é feita na abordagem adotada no texto. Cabe, portanto, ao aluno somente utilizar fórmulas prontas, ou mesmo conceitos já pré-selecionados no livro. Por exemplo, no momento de se estudar função afim, todos os problemas, em geral, referem-se ao uso desta função. Geralmente, os problemas apresentados nos livros didáticos propõem a identificação de dados para se chegar à solução de um problema, ou mais comumente, chega-se a sugerir a própria fórmula necessária à solução do problema. Não se oferecem ao aluno situações em que seja deixada a ele a arte de investigar para propor uma forma de representar matematicamente o problema.

Além de aplicar conceitos matemáticos, a construção de modelos tem sido vista como uma forma de construir novos conceitos, como a própria história do conhecimento matemático aponta. Um exemplo desse fato pode ser visto em Bassanezi (2002, p. 21), quando aponta a origem do modelo da tratória, (ver Figura 2). O estudo das curvas especiais que modelavam fenômenos físicos, segundo ele, proporcionou o desenvolvimento tanto da mecânica, quanto do cálculo diferencial e integral. As atividades realizadas nessa época deram origem às curvas como catenária, braquistócrona, velária, tratória e tantas outras. A tratória é uma curva pouco conhecida, (ver Figura 1).

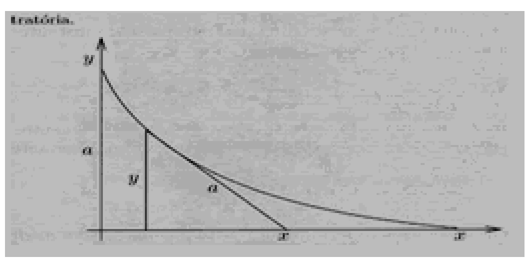


Figura 1 - Gráfico da tratória, a partir de um problema elaborado por C. Perrault

Bassanezi destaca que o problema origem dessa curva foi proposto por C. Perrault por volta de 1670 para ilustrar uma questão. Ele arrastava seu relógio de algibeira sobre uma pequena mesa, movimentando a ponta da corrente através da borda da mesa. Dessa forma o relógio descrevia uma curva, que tendia à borda, o estudo dessa curva deu origem à tratória. Para obtenção da equação da tratória, verifica-se que, durante o movimento de arrasto do relógio, a corrente está sempre tangente à trajetória que descreve o relógio. Além disso, também pode ser observado que o comprimento da corrente entre o ponto de tangência (relógio) e o eixo x (borda da mesa), sobre a reta tangente (corrente do relógio), é constante. O movimento do relógio sobre a mesa permite que se transformem dados dessa linguagem para a linguagem matemática, permitindo a descrição do fenômeno através do modelo:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

Figura 2 - Modelo da tratória

A estratégia de descrever situações do mundo real utilizando o conhecimento matemático, muitas vezes, faz gerar novos conhecimentos. O caso da tratória é um exemplo, pois C. Perrault, a partir da manipulação da situação que vivenciou, chegou à descrição de um conhecimento ainda não presente na literatura matemática.

Outros fenômenos reais semelhantes ao vivenciado por C. Perrault são trabalhados como problemas em diversas áreas do conhecimento, seja na medicina, na indústria ou no comércio, permitindo a aplicação da linguagem matemática para definir os modelos da situação.

Biembengut & Hein (2000) discutem a modelagem como abordagem de ensino para a matemática, destacando-a como um importante meio para superar dificuldades que existem na aplicação do conhecimento matemático. A necessidade de colocar o aluno diante de um problema no sentido de decidir: que dados são necessários para chegar à solução; como coletá-los; que estratégias utilizar na solução do problema; como construir um modelo e validá-lo, deve ser uma prioridade do ensino de matemática.

No entanto, como aponta Bassanezi (2002), a modelagem matemática como estratégia de ensino tem como grande dificuldade a validação, fase em que se ratifica ou não o modelo proposto. A validação de um modelo necessita, muitas vezes, de construções reais as quais são inviáveis em ambiente de sala de aula, tornando a validação dos modelos, em algumas situações, um caminho a ser pesquisado.

Nesta pesquisa, faz-se a hipótese de que o uso de computadores na construção de simulações pode ser uma ferramenta útil para validação dos modelos associados a essas simulações.

A informática evoluiu bastante, assim como o seu aproveitamento para a educação, em particular para o ensino de matemática. Dentre as diversas potencialidades computacionais que vêm contribuindo para o ensino, apontam-se: a possibilidade de atribuir movimento aos objetos matemáticos, mantendo as suas propriedades invariantes; a apresentação de diferentes representações conectadas entre si; a possibilidade de alterar uma representação obtendo como retorno a representação do objeto matemático em outra representação; e a possibilidade de simulações de uma situação real.

Dentre os softwares elaborados para a educação, o Modellus (Teodoro, 1997) permite ao professor e ao aluno a construção de modelos, dentre estes as simulações. Em uma situação simulada permite-se a construção de diversas representações as quais são utilizadas no ensino e aprendizagem de diversas áreas do conhecimento, em especial de Matemática. O software, a partir de um modelo algébrico da situação, permite que se explorem representações como tabelas, fórmulas, gráficos, simulações de objetos em movimento, dentre outras.

Usaremos como exemplo a simulação de um jogador de basquete lançando uma bola. Pode-se, através do software Modellus, elaborar uma representação que simula a situação, como apresentada na Figura 3, possibilitando ao aluno compreender o problema e manipular a simulação, como um fato real, a partir de um modelo algébrico que pode ser testado.

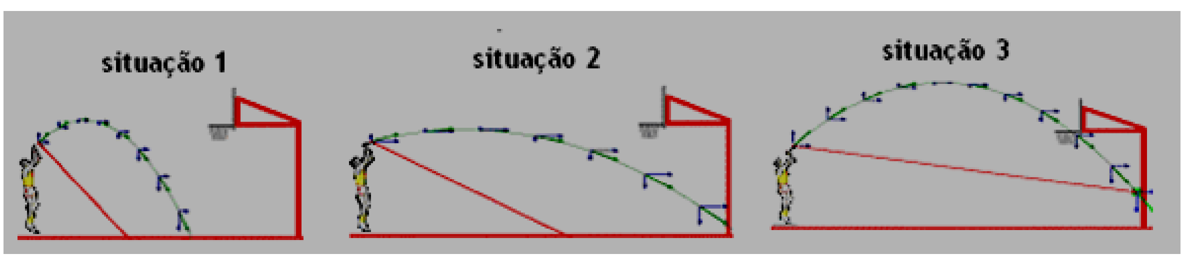


Figura 3 - Figura do Modellus indicando trajetórias de movimento de uma bola de basquete.

O software Modellus permite que algumas variáveis tratadas nesse tipo de situação (distância do jogador ao alvo, a força aplicada no lançamento da bola, o ângulo do arremesso, a trajetória da bola, etc.) sejam experimentadas e validadas.

A atividade de modelagem pode ser utilizada em qualquer área do conhecimento matemático, em especial, o conceito de função tem sido relevante para a construção de modelos matemáticos, muitas vezes, utilizados para exprimir a relação entre diferentes grandezas. Justifica-se, por isso, a escolha de focar nosso estudo em uma investigação sobre modelagem como estratégia de ensino das funções.

O conhecimento de função como objeto matemático tem sido de extrema importância para o conhecimento humano. A relevância desse conceito para a formação do estudante vem da necessidade de compreensão e aplicação desse conhecimento em outros campos da matemática ou de outras ciências, além de ser um dos conceitos centrais na matemática.

A introdução do conceito de função vem sendo questionada por vários pesquisadores (PONTE, 1990; GOMES-FERREIRA, 1997; BARBOSA, 2003; FRANT, 2003), os quais afirmam existirem outras formas de abordar o ensino de função, de modo a minimizar as dificuldades que acompanham os estudantes em sua trajetória escolar até o ensino superior. Tradicionalmente, em livros didáticos do ensino médio, primeiro se introduz o conceito preliminar de função e, posteriormente, exploram-se outros conceitos complementares, relacionados à função, tais como domínio, imagem, função injetiva, sobrejetiva, bijetiva, crescente, decrescente. Logo após, há uma concentração na exploração das diferentes famílias de funções, enfocando-se os seus estudos algébrico e gráfico (GOMES-FERREIRA, 1997).

Nesse modo de abordagem, percebem-se dois problemas. O primeiro refere-se à falta de uma caracterização de função como um modelo de representação para situações do cotidiano. Essa compreensão poderia contribuir para o processo de aplicação desse conhecimento. A segunda diz respeito à falta de um tratamento em que o aluno trabalhe com problemas relativos aos diversos tipos de funções, seja comparando-os ou aplicando-os em situações que, quando modificadas, possam gerar a representação de um modelo (GOMES-FERREIRA, 1997). A didática envolvida define a família de função que o aluno usa para resolver cada problema. Desta forma, as características de cada família de função não são devidamente exploradas.

Se por um lado a natureza desta pesquisa exige que trabalhemos com os estudantes sem definir o campo matemático, por outro, uma pesquisa, em sua realização, necessita fundamentar os campos matemáticos utilizados. Sendo assim, em nosso caso, limitamos o campo matemático a algumas famílias de funções. Porém, sabemos ser esse um limitante para o próprio objeto de estudo, a modelagem como estratégia de ensino.

Nesse sentido, esta pesquisa investiga a modelagem como estratégia de ensino, utilizando o conhecimento de função afim, quadrática e exponencial, na construção de simulações computacionais via software Modellus. Esse foco identifica um ponto central em nossa pesquisa, a identificação de habilidades para modelar ainda não observadas em estudantes de licenciatura em matemática. Nesse sentido, algumas questões foram elencadas:

1) Uma abordagem de modelagem envolvendo a exploração de algumas famílias de funções utilizando simulação computacional pode levar o aluno a desenvolver habilidades para aplicar o conhecimento que domina?
2) Que habilidades são necessárias para modelar situações-problema relativas ao conhecimento de função?
3) A modelagem matemática pode ser tratada como uma metodologia de ensino em matemática?
4) Qual é a relação entre os recursos computacionais e as habilidades mobilizadas em situações de modelagem?

CAPÍTULO I – MODELO e MODELAGEM

I.1 – Modelo

O homem ao longo de sua existência tem se preocupado em explicar os fenômenos que observa. A explicação desses fenômenos, assim como a resolução de problemas inerentes a eles, tem levado a humanidade a desenvolver <u>modelos</u> que os representem. Malthus (1766-1834), por volta de 1798, por exemplo, preocupado com o crescimento populacional em relação ao tempo desenvolveu o modelo que correlacionava a variação da população com o seu próprio tamanho, (ver Figura 4).

$$\frac{d}{dt}p(t) = n.p(t)$$

Figura 4 - Modelo elaborado por Malthus descrevendo o crescimento populacional em relação ao tempo

Einstein (1879-1955), por sua vez, observou a relação entre massa e energia, enunciando que toda massa tem energia e desenvolvendo, em 1907, o modelo $E = mc^2$. Já Newton (1642-1727) modelou a força resultante como produto da massa pela aceleração, hoje conhecida como segunda lei de Newton. $F=m.a$.

Nessas propostas de intervenção humana para explicar os fenômenos, destaca-se a montagem de modelos. Os fenômenos e conhecimentos da realidade passam a ser divulgados por meio de conceitos e representações inerentes à Matemática.

Além do significado utilizado acima, o termo modelo tem sido utilizado com várias compreensões. Tratam-se como modelos desde teorias que buscam explicar situações de cunho mais genérico até mesmo a representação mental ou simbólica de uma situação específica. Encontramos também modelos tanto de natureza científica, como de natureza religiosa. Como exemplo tem-se:

- O modelo do movimento dos planetas no sistema solar estabelecido pelo alemão Johannes Kepler (1571-1630). Esse modelo apresenta em linguagem matemática a órbita elíptica que os planetas descrevem ao redor do sol, em que os raios vetores, traçados a partir do sol até o planeta, varrem áreas iguais em tempos iguais.
- O modelo evolucionista das espécies elaborado pelo naturalista inglês Charles Darwin (1809-1882) como a teoria da seleção natural das espécies. Modelo que mostra a luta pela existência na natureza, modelo que vem servindo para análise e avaliação da realidade concreta, sendo utilizado também no meio científico para explicar a origem do universo.
- O modelo bíblico da criação (criacionismo) para a origem da vida na Terra. Doutrina teológico-metafísica de inspiração judaico-cristão, segundo a qual não somente Deus tirou o universo do nada, como também criou para cada indivíduo uma alma imortal (JAPIASSU & MARCONDES, 1996, p. 58).
- Os modelos cosmológicos – (Aristóteles e Copérnico), conjunto das teorias científicas que tratam das leis ou das propriedades da matéria em geral ou do universo (JAPIASSU & MARCONDES, 1996, p. 57).

Este estudo tem por ponto base a compreensão da elaboração de modelos como estratégia de ensino-aprendizagem. Dessa forma, uma discussão sobre os significados de modelo passa a ser um ponto de partida desta pesquisa. Traremos a discussão dos diversos sentidos de modelo por meio de discursos e posicionamentos dos pesquisadores.

O presidente do Centro Internacional de Estudos da Filosofia Francesa Contemporânea, o filósofo Alain Badiou, discute que a questão epistemológica é evidenciada quando se busca "*descrever a diferença e a relação entre o modelo e* *o real empírico*” (objeto) de onde se originou o modelo. Ao observar “*os modos de pensar e o que no modelo se diz do seu objeto*” que o originou (BADIOU, 1972, p. 23) trata-se da questão epistemológica que se torna efetiva quando se faz da própria invenção (elaboração) de modelos, a atividade da ciência.

Badiou (1972, p. 25) destaca que “*no caso da epistemologia dos modelos, a ciência divide-se por um lado em intervenção produtora (intervenção e montagem de modelos) e por outro em verificação empírica ou investigação*”. Há uma valorização nessa discussão, quanto ao sentido e o valor que é dado à intervenção humana nessa atividade.

Outro ponto importante é a visão de Lévi-Strauss, tratada por Badiou (1972, p. 17), quando se discute a “*ciência como um face-a-face de um objeto real, sobre o qual devemos investigar (etnografia), e de um objeto artificial destinado a reproduzir, a imitar na lei dos seus efeitos, o objeto real (etnologia)*”. O objeto artificial (construído) – modelo, tornando-se controlável. De forma que a “*opacidade atribuível ao real está aí ausente*”. O modelo tratado nesse sentido é teórico, trata-se de uma construção formal, como define Machado (2005, p. 74) “*o modelo é um corpo de enunciados que visa unificar, ordenar e controlar a produção do saber*”.

Partindo desse ponto de vista, Badiou (1972, p. 18) compreende que “*o modelo não é uma transformação prática do real, do seu real: pertence ao registro da invenção pura, está dotado de uma <irrealidade> formal*”. Dessa forma, os modelos vão recobrir uma larga escala de objetos. Badiou os trata como modelos <abstratos> e montagens materiais.

A partir dessa compreensão epistemológica é que são derivados os vários conceitos de modelo tratados na literatura. No entender de Granger (1969), um modelo é uma imagem formada na mente, no momento em que nosso espírito procura compreender e expressar de forma intuitiva a sensação de um fenômeno, a partir daí, efetua deduções e procura relacioná-las a algo que conhece.

Granger (1969) nos leva a entender que para chegar a elaborar modelos de fenômenos ou situações-problema, buscamos recursos em processos mentais utilizados no ato de conhecer. O modelo nesse caso passa a ser fruto de relações mentais que são geradas a partir da experiência. Dessa forma, o conhecimento vai ser representado como o modelo originado de uma realidade.

Sendo assim, a relação desenvolvida nesse processo, traz para a experiência, várias variantes (necessidade de conhecer, relação sujeito-objeto, inferências, entre outras). Fenômenos que geralmente ocorrem no ato de conhecer, quando se procura formalizar na mente a compreensão da realidade. Ao utilizar suas sensações e estruturas mentais, captam-se características do fenômeno, submetendo-o a processo de ajuste, adequando-o como estrutura de conhecimento, elaborando uma conciliação entre o sensível e o inteligível que forma, no entender de Granger, o modelo.

Segundo Biembengut e Hein (2003), um modelo é uma representação simplificada da realidade que preserva, para determinadas situações e enfoques, equivalência adequada. A compreensão de Biembengut e Hein traz à tona o sentido de modelo como um corte da realidade, que vai conservar e divulgar o conhecimento verificado. O modelo tem status de conhecimento observado, passando por um processo de representação, que é gerado pelas faculdades mentais do homem, quando utiliza elementos de uma linguagem científica, em particular da linguagem matemática.

Biembengut (1999, p. 20) ainda destaca que na matemática, por exemplo*, ”um modelo é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduzem, de alguma forma, um fenômeno em questão”, r*eforçando assim o sentido de representação do real que compreende para o conceito de modelo.

A compreensão de modelo para Biembengut é tratada como posterior ao ato de conhecer. Após a apreensão do conhecimento, serão utilizados símbolos e relações matemáticas que irão apresentar o modelo, sendo, portanto, uma representação que utiliza ferramentas matemáticas para ser evidenciada. Neste caso, difere da compreensão de Granger que afirma que o modelo são formas intuitivas geradas na mente a partir da experiência de um fenômeno e não de sua representação.

Para Black (1962), um modelo pode ser considerado como um veículo de representação substitutiva da realidade. Novamente, o conceito de modelo revela-se como um objeto que se constitui em substituição ao real, uma representação do fenômeno. Revela-se nessa concepção a força do aspecto semântico do modelo. No entanto, os modelos são constituídos também para solucionar questões, portanto, seu aspecto sintático não pode ser esquecido.

Essas compreensões de modelo como uma imagem formada na mente (GRANGER, 1969) ou um corte da realidade (BIEMBENGUT, 1999; BLACK, 1962), elaborado pelas faculdades humanas através de desenho, fórmula, gráfico, definição, projeto, entre outros (DUVAL, 1995), que os torna objeto do conhecimento, parece necessitar de discussão.

Badiou (1972) também discute uma compreensão de Lévi-Strauss (1908-) quando ele observa que na compreensão de modelo, não se trata simplesmente da transformação prática do real, mas um registro da invenção pura do homem, um objeto dotado de uma irrealidade formal.

A compreensão do conceito de modelo vem com Lévi-Strauss reforçar o entendimento de que um modelo são concepções geradas a partir de observações, idéias e sensações do mundo, sendo tratadas como estruturas conceituais internas que podem ser divulgados no ato de fazer (reprodução do conhecimento). Nesse caminho de discussão, Badiou (1972, p. 18) destaca que "*os modelos recobrem uma larga classe de objetos,* definindo-os em dois grupos, os modelos abstratos (objetos de escrita – modelos teóricos ou matemáticos) e as montagens materiais (construção em madeira de poliedros regulares convexos, apresentação de um conector lógico sob a forma de circuito elétrico, imitação de comportamentos – autômatos).

As concepções de modelo apresentadas nos levam a perceber que Granger (op.cit) salienta a natureza sintática do modelo e ao mesmo tempo explicita sua existência antes mesmo de ser instanciada por conceitos e representações simbólicas. Biembengut e Hein (op.cit) não deixam claro se consideram a existência do modelo a partir de representações mentais, porém salientam o corte na situação que está sendo representada. Já Black (op.cit) traz à tona a natureza de comunicação própria das representações e dos modelos. Esses pesquisadores, porém, lidam com modelos como representações mentais ou simbólicas de uma situação específica, e não como teoria, que explicam fenômenos mais gerais, discussão observada em Badiou (1972) e Lévi-strauss.

I.2 – Modelo objeto e modelo teórico

Na matemática, o conceito de modelo passa por instâncias de definição até chegar ao conceito de modelo matemático. Assim, necessitamos entender duas concepções acerca do conhecimento de modelo que vêm reforçar nossa compreensão desse conceito. Bassanezi (2002) argumenta que para o estudo da modelagem matemática – arte de construir modelos por meio de linguagem e conceitos matemáticos destacam-se dois tipos de modelos: o modelo objeto e o modelo teórico.

Um modelo objeto é visto por Bassanezi, como sendo a representação de uma realidade.

> A representação de um objeto ou fato concreto; [suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade] das variáveis. Tal representação pode ser *pictórica* (um desenho, um esquema compartimental, um mapa, etc.), *conceitual* (fórmula matemática), *ou simbólica*. [...] um desenho para representar o alvéolo usado pelas abelhas é um modelo deste tipo (BASSANEZI, 2002, p. 20).

O modelo objeto conserva a estabilidade do real, torna-se um conhecimento que leva à percepção de uma realidade que não vai sofrer mudanças. Além disso, é homogêneo, revelando para qualquer observador o conhecimento que ele representa, não ocorrendo variação na compreensão do mesmo, pois o modelo objeto detalha ao observador a realidade como ela é.

Em relação à compreensão de modelo teórico, Bassanezi o define como:

> Aquele vinculado a uma teoria geral existente – será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais) (BASSANEZI, 2002, p. 20).

Nesse entendimento, o modelo teórico passa a ser gerado em relação ao modelo objeto, quando a partir dele se constrói elementos teóricos relacionados ao mesmo, gerando novos conhecimentos, o que torna o modelo teórico uma teoria gerada.

O heliocentrismo de Copérnico é um modelo teórico que revelou novos conhecimentos. Kepler, por exemplo, percebeu o modelo de movimento dos planetas, para explicar a lei orbital - modelo objeto - representado em forma pictórica na Figura 5.

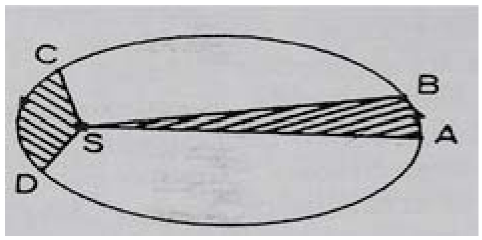


Figura 5 - Modelo apresentando o movimento orbital dos planetas segundo Kepler

No contexto de compreensão traçado para modelo objeto e modelo teórico, nos deteremos a discutir modelo matemático na compreensão de modelo objeto. Este é o tipo de investigação que direcionamos, compreender a elaboração de modelos como estratégia de ensino-aprendizagem, os modelos elaborados serão formas de representar objetos específicos.

I.3 – Modelo Objeto - Matemático

Partindo do conceito de modelo como o entendimento de um fenômeno, gerado na mente, através de "representações semióticas" (DUVAL, 1993), pode-se divulga-lo como representante de um conhecimento. Essa compreensão vai sendo ramificada em suas diversas inserções no meio científico gerando outras compreensões, seja em qualquer área científica. Na matemática, por exemplo, discute-se o conceito de modelo matemático. Assim como os demais modelos, existem: os modelos matemáticos, modelos teóricos e modelos objeto, este último parte do foco desta pesquisa.

Bassanezi (2002) define modelo matemático como um conjunto de símbolos e relações matemáticas, que representam de alguma forma o fenômeno estudado. Essa compreensão do pesquisador leva ao caminho da necessidade de correlacionar conhecimentos utilizando representações semióticas para gerar o modelo.

Niss (1988) compreende um modelo matemático como uma combinação de uma ou mais entidades matemáticas escolhidas para representar aspectos de uma situação real. O sentido dado por Niss ao conceito de modelo matemático nos revela que as leis e axiomas matemáticos serão trabalhados no sentido de dar sustentação ao conhecimento gerado a partir de uma situação ou fenômeno real.

Os modelos matemáticos, elaborados para representar objetos e situações reais, auxiliam a construção do conhecimento e a solucionar muitos problemas que preocupam a sociedade. O problema da superpopulação na Terra, a degradação do meio ambiente, a produção de alimento para a população, entre outros, são problemas que vêm intrigando pesquisadores das diversas ciências, pois vários outros problemas são gerados, quando estes não estão equacionados. A importância de um modelo matemático é evidenciada quando este pode ser tratado como um elemento auxiliar para o estudo e conhecimento desses fenômenos.

Bassanezi (2002, p. 20) destaca que "*A importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa que expresse nossas idéias de maneira clara e sem ambigüidades*". Essa compreensão nos leva a discutir um ponto importante sobre a elaboração de um modelo matemático. Vários conhecimentos que hoje são parte integrante da matemática ou de outra ciência foram construções (modelos) elaboradas a partir de situações-problema.

A importância do modelo matemático está também na compreensão de que um modelo, ao representar um corte da realidade, fará parte do conhecimento que foi construído. Vários modelos matemáticos elaborados passaram a ser parte do conhecimento matemático construído. Por exemplo, função é um conhecimento matemático que trata da relação entre duas variáveis. Esse conhecimento vai ser ampliado a partir da elaboração de modelos para os diversos tipos de fenômenos, cada qual com sua especificidade. Apesar disso, diversos fenômenos têm características comuns. Os modelos objetos que descreve diferentes fenômenos passam a fazer parte de um modelo matemático abstrato que possui propriedades comuns, como é o caso da função exponencial.

Na Biologia, alguns experimentos investigativos sobre cultura de bactérias utilizam o conceito de função exponencial. Por sua vez, a química também trata desse conhecimento quando necessita verificar a análise de um elemento radioativo. Dessa forma, várias situações relativas ao conhecimento de função exponencial são exploradas a partir da Química, Física e Biologia, entre outras. Bassanezi (2002) compreende que os modelos matemáticos, no sentido de modelo objeto, podem ser formulados quanto à natureza dos fenômenos e situações analisadas, os quais são classificados por ele, conforme o tipo de matemática utilizada:

> I. "*Linear ou não linear*, conforme suas equações básicas tenham estas características".
> II. *Estático*, quando representa a forma do objeto – por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo; ou *dinâmico* quando simula variações de estágios do fenômeno – por exemplo, crescimento populacional de uma colméia.
> III. *Educacional*, quando é baseado em um número pequeno ou simples de suposições, tendo, quase sempre, soluções analíticas. O modelo presa-predador de Lokta-Volterra é um exemplo típico de tais modelos.
> IV. *Estocástico ou Determinístico*, de acordo com o uso ou não de fatores aleatórios nas equações" (BASSANEZI, 2002, pp.20-21).

Dentre essas diversas classificações que Bassanezi (Ibid) lança, observamos algumas associadas ao campo de conteúdo utilizado para construir o modelo. Dessa forma, temos modelos algébricos, geométricos, aritméticos, estatísticos, funcionais, dentre outros.

Nessa perspectiva, nosso estudo está em um contexto que trata da construção de modelos matemáticos em natureza de modelo objeto, utilizando as funções matemáticas, portanto, modelos funcionais, para representar e resolver situações-problema, como estratégia de ensino e aprendizagem.

I.4 – Modelagem Matemática

O artifício de criar modelos sempre foi uma prática comum no meio científico. A Educação Matemática vem investigando e defendendo a construção e elaboração de modelos pelos estudantes, processo esse que vem sendo tratado como metodologia de ensino (BASSANEZI, 2002; BEAN, 2001; BIEMBENGUT e HEIN, 2000; BLUM & NISS, 1991). Defende-se que a construção de modelos – modelagem, se explorada como estratégia de ensino, pode contribuir para a aprendizagem de matemática.

A modelagem vem sendo investigada como um campo metodológico de ensino e pesquisa, utilizando situações-problema que nos intrigam nas diversas áreas do conhecimento. O uso dessa prática torna-se importante, por proporcionar o surgimento de hipóteses, características, aproximações, efeitos, parâmetros, etc., que muitas vezes não estão sendo visualizados a partir da análise do fenômeno por outros meios de investigação.

Na maioria das vezes, ao investigar uma situação-problema, que se apresenta de forma complexa, seja pela dificuldade de identificação das variáveis ou pela falta de conhecimento da real causa do problema. Cabe ao modelador dessa situação-problema estudar essas características e buscar uma compreensão mais clara. Essa atitude, muitas vezes, requer a construção de um modelo para a situação, no sentido de melhor entender o problema. Um exemplo desse tipo de atividade foi trabalhado por Carolyn English (1996) que apresenta um problema elaborado por Sealy (1995), com crianças de 11 a 16 anos de idade, trabalhando a seguinte questão: "*Por que os PINGÜINS se amontoam?"* Uma resposta mais representativa da hipótese das crianças foi quanto à busca pelo aquecimento diante do frio promovido pelas camadas de gelo na região em que esses animais vivem. A resposta precisava de dados científicos que comprovassem tal fato. Essa atividade fez com que as crianças desenvolvessem uma série de análises, apresentando um modelo descrito por uma tabela, (ver Figura 6). O fato é que as crianças foram levadas a criar seu próprio modelo, dentro da compreensão que dominam ou pesquisaram para a situação.

2 rows of penguins (data)

	cold heads	cold feets	cold sides	Total	Volume	Ratio
1	2	2	18	22	6	0.27272727
2	4	4	24	32	12	0.37500000
3	6	6	30	42	18	0.42857143
4	8	8	36	52	24	0.46153846
5	10	10	42	62	30	0.48387097

2 rows of penguins (mathematical model)

	cold heads	cold feets	cold sides	Total	Volume	Ratio
1	=A2*2	=B2	18	=B2+C2+D2	=A2*2*3	=F2/E2
=A2+1	=A3*2	=B3	=A3*6+12	=B3+C3+D3	=A3*2*3	=F3/E3
=A3+1	=A4*2	=B4	=A4*6+12	=B4+C4+D4	=A4*2*3	=F4/E4
=A4+1	=A5*2	=B5	=A5*6+12	=B5+C5+D5	=A5*2*3	=F5/E5
=A5+1	=A6*2	=B6	=A6*6+12	=B6+C6+D6	=A6*2*3	=F6/E6

Figura 6 - Modelo elaborado pelas crianças na experiência de Carolyn English para indicar o agrupamento dos pingüins

No campo das diversas ciências, ainda existem fatos reais e conhecimentos que levantam questionamentos, geram problemas e são objeto de investigação. Várias pesquisas buscam soluções e decisões para esses tipos de situações do mundo real, geradoras de problemas e questões. Por situações do mundo real entendemos tudo aquilo que possui relação com a natureza, cultura e o cotidiano das pessoas. A solução desse tipo de situação-problema requer, muitas vezes, a elaboração de um modelo, para que se possa interpretar a situação e chegar a um melhor entendimento da mesma.

Na maioria das vezes, a solução para problemas do tipo como o dos pingüins trabalhado por Carolyn English (1996), em que a modelagem é requisitada, requer auxílio da matemática, pois essa se adequa a esse tipo de situação, servindo de base para formulação de modelos. Bassanezi (2002, p. 24) faz um destaque, quanto ao sentido da modelagem trabalhada como no problema dos pingüins: “A modelagem consiste, essencialmente, na transformação de situações da realidade em problemas matemáticos”. O contexto dado por Bassanezi é de que as situações cotidianas que se visualizam problemas e questões podem ser tratadas como situações matemáticas e que a modelagem é um caminho que pode chegar a explicá-los. Esse artifício em que se faz uso do conhecimento matemático para compor o modelo explicativo de uma situação-problema, entendido como modelagem matemática, vai fundamentar este estudo e será tratado em um tópico específico.

A modelagem vai se estruturar como forma de tratar o conhecimento, em cinco etapas importantes: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação, como apresentadas em Bassanezi (2002). Assim definidas:

"*Experimentação – É uma fase essencialmente laboratorial onde se comprova a obtenção de dado*". É uma fase em que a adoção de técnicas oriundas da pesquisa experimental vai dar maior grau de confiabilidade aos dados obtidos.

"*Abstração – é o procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos*". Estabelecendo a seleção das variáveis, a problematização, formulação de hipóteses e a simplificação.

"*Resolução – O modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente*". As hipóteses são traduzidas por equações.

"*Validação – é o processo de aceitação ou não do modelo proposto*". É o momento do teste do modelo.

"Modificação – é a etapa em que se define a rejeição ou aceitação do modelo".

Tomamos, no entanto, uma alteração dessas definições, tomando a modificação como o processo de revisão do modelo proposto.

I.5 – Modelagem Matemática e Ensino de Matemática

Outro enfoque vem se destacando na Educação Matemática em relação ao uso da modelagem. A ênfase aparece na utilização da modelagem matemática como uma metodologia para o ensino e aplicação do conhecimento matemático. Vários estudos nesse sentido estão investigando tanto a prática da modelagem matemática quanto o seu uso como abordagem de ensino. (BORBA, MENEGHETTI & HERMINI, 1997; BIEMBENGUT & HEIN, 2000; BARBOSA, 2001; BEAN, 2001; BASSANEZI, 2002).

As primeiras investigações sobre as atividades de modelagem colocavam-na como um processo complexo, que exigia tempo e várias etapas para se chegar à construção de um modelo. Hoje, no entanto, há relatos de situações de ensino utilizando modelagem em que se trabalham problemas bem mais simples, que podem ser modelados. Bean (2001, p. 53) apresenta a resolução de uma atividade trabalhada com quatro pares de alunos, em que se buscou calcular área. Problema destacado na Figura 7.

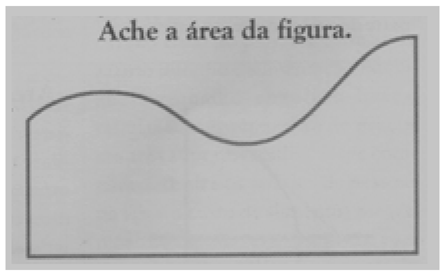


Figura 7 - Figura trabalhada como situação-problema para o cálculo de área

A atividade de pesquisa desenvolvida por Bean, para trabalhar a modelagem como estratégia, nos parece simples e bastante rica. Esse modelo de proposta levou a considerações importantes e a análises do processo, durante a realização da atividade. Segundo Bean, como a figura não tem uma boa definição, os alunos formularam hipóteses e chegaram a realizar aproximações da solução real do problema, visto mesmo não dominando conhecimentos importantes necessários à solução.

Bean traz um elemento que merece destaque. Os alunos apresentaram segundo ele, idéias divergentes em relação à parte ondulada da figura na parte superior direita (1/4 de circunferência, área aproximada em relação à área de um triângulo retângulo ou a função seno em ¼ do período) que segundo Bean (2001) foram tratadas como "*aproximações simplificadoras*", que são consideradas importantes nas atividades de ensino, passando a ser essência na modelagem.

O importante nesse tipo de atividade é que os alunos trabalham um problema diferente, no sentido do que é dado de informação no problema, diferente daqueles que costumam encontrar no ensino de matemática. O problema trabalhado por Bean exigiu dos alunos a formulação de hipóteses e aproximações simplificadoras. Outro ponto importante é que chegam a criar múltiplas respostas para uma situação que exige um conhecimento mais elaborado. Os estudantes, ao apresentarem soluções próximas da solução do problema, fizeram com que o pesquisador pudesse encaminhar nesse tipo de atividade, discussões sobre escolhas para respostas que chegassem a aproximações simplificadoras do problema.

Observam-se vários focos nas pesquisas da Educação Matemática voltadas para o ensino-aprendizagem com modelagem. O primeiro centra-se no uso e aplicações da modelagem no ensino, com investigações em torno de: a técnica; o nível de conhecimento matemático utilizado; a relação que essa prática proporciona entre as ciências; o processo de aprendizagem matemática; um modelo pedagógico de ensino.

Os novos conhecimentos proporcionados pelas investigações relativas à modelagem matemática vêm enriquecendo o debate. Barbosa (2003, p. 1) nos reporta as concepções de alguns pesquisadores sobre como enfatizar a atividade de modelagem. Dessa forma, o segundo foco tem relação quanto aos campos de investigação de cada pesquisador:

1. Bassanezi (2002) analisa a obtenção dos modelos;
2. D'Ambrosio (1993) e Orey (2000), quando discutem a relação entre Etnomatemática e Modelagem, a tratam como ação pedagógica;
3. Borba, Meneghetti e Hermini (1997) destacam a participação do aluno no processo de aprendizagem ao utilizar essa técnica;
4. Barbosa (2001) discute a compreensão crítica que pode ser trabalhada pelo aluno na aplicação do conhecimento matemático em situações-problema da realidade e o desenvolvimento de habilidades intelectuais nos educandos;
5. Bean (2001) destaca que a modelagem matemática vai exigir habilidades de raciocínio as quais diferem das mobilizadas em resolução de problemas típicos, *e "portanto é recomendável que ela seja incorporada no ensino e na aprendizagem de matemática*". Neste mesmo sentido, Franchi (1993) utilizou um problema "dirigido" para

sistematizar conceitos de Cálculo Diferencial e Integral. Ela problematizou um artigo de jornal com os alunos para abordar conteúdos programáticos de Estatística.

6. Biembengut & Hein (2000) preocupam-se em enriquecer o conhecimento da técnica de modelagem, tratando-a como metodologia voltada para o ensino. Suas pesquisas apresentam algumas situações reais, em que se formulam modelos matemáticos, como por exemplo, o tipo de embalagem ideal para um produto, levando-se em consideração algumas questões: que tipo de material se presta à embalagem do produto, que quantidade mínima deverá ser utilizada, qual a relação custo benefício para a elaboração da embalagem, entre outras.

Biembengut e Hein (2000, p. 26) trazem importante esquema para orientar a compreensão das fases de modelagem, como é ilustrado pela Figura 8.

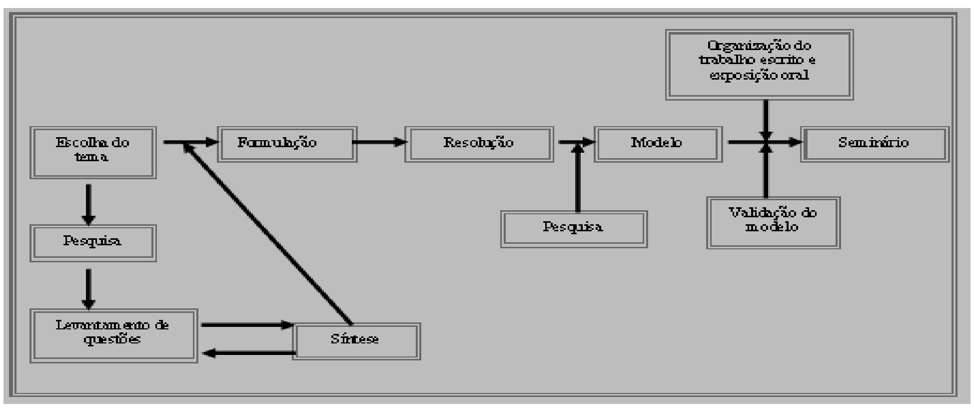


Figura 8 - Dinâmica da modelagem matemática no ensino segundo Biembengut & Hein (2000)

O esquema traçado por Biembengut e Hein (2000) mostra tópicos importantes para uma investigação mais detalhada do alcance dessa técnica. Nesse sentido, os pesquisadores discutem sobre que objetivos podem ser alcançados no ensino através do uso da modelagem matemática:

- Aproximar da matemática, conhecimentos de uma outra área;
- Enfatizar a importância da matemática para a formação do aluno;
- Despertar o interesse pela matemática ante a aplicabilidade;
- Melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;
- Desenvolver habilidades para resolver problemas;
- Estimular a criatividade no sentido de forçar o aluno a buscar outras soluções para um determinado problema

(BIEMBENGUT e HEIN, 2000, p. 18).

Entre os objetivos apresentados, um que merece ser mais esmiuçado é o que investiga as habilidades desenvolvidas para modelar situações-problema reais ou simuladas. E foi nesse sentido que direcionamos nossa investigação. De certa forma, observamos que há um hiato entre a prática, digamos profissional da modelagem matemática e o seu uso na Educação Matemática.

Apesar das pesquisas que vêm sendo trabalhadas na Educação Matemática quanto à compreensão do conceito de modelagem e dos efeitos desse conhecimento como estratégia de ensino, entendemos que essa prática ainda necessita de novas pesquisas. Essa visão está em sintonia com Bean (2001) quando destaca que:

> Em Educação Matemática, nos trabalhos acadêmicos, o conceito de modelagem matemática não está bem definido. Tanto na fala de educadores, como na literatura nacional e internacional, esta falta de clareza, reside em parte, na complexidade de transferir ou adaptar a atividade do modelador (matemático, engenheiro, biólogo, etc.) ao campo do ensino de matemática onde atua o professor de matemática. (BEAN, 2001, p. 56).

Essa discussão é bastante objetiva, pois observamos na literatura, controvérsias quanto ao conceito de modelagem, gerando diversas concepções tanto do termo quanto do método. Bean (2001) sustenta sua afirmação por meio do exame que ele empreendeu em sua própria compreensão de modelagem, ele entende que há diferenças entre sua compreensão e aquelas encontradas nas teses e dissertações defendidas na última década, que ele pesquisou.

O destaque que vem sendo dado a essa prática como estratégia para o ensino de Matemática é um ponto que ainda merece ser investigado, pois vem sendo confundida por muitos educadores como técnica de resolução de problemas, metodologia de problematização e aprendizagem baseada em problemas. Bean (2001) levanta essa preocupação, quando afirma que a essência da modelagem consiste em um processo em que características do objeto são extraídas, por meio de hipóteses e “aproximações simplificadoras”, que posteriormente são representadas e afirmadas por meio da linguagem matemática. Essa concepção é bem diferente daquelas em que se insere o conceito de resolução de problemas, problematização ou aprendizagem utilizando problemas.

Os processos aqui apresentados como: resolução de problemas, metodologia de problematização e aprendizagem baseada em problemas, diferem do processo de modelagem matemática, pois a resolução de problemas consiste em um processo que geralmente começa com situações complexas, não bem definidas, que envolvem objetos e/ou sistemas, como por exemplo, a construção de um edifício. Já a metodologia de problematização é semelhante às etapas de modelagem. Os alunos buscam um problema, conjecturam, analisam informações, elaboram soluções e aplicam as soluções à realidade, sem no entanto conviver com as exigências da modelagem. Por fim, a aprendizagem baseada em problemas consiste em um processo de curta duração elaborado para uma disciplina, em que se busca trabalhar com problemas diretamente ligados aos temas do curso – sendo um modelo de proposta curricular.

A distinção entre as abordagens de aplicação da matemática como resolução de problemas, metodologia de problematização ou aprendizagem baseada em problemas, abordagens essas, confundidas com modelagem matemática pelos educadores, vem mostrar que há no meio educacional uma falsa compreensão de modelagem matemática. Para Bean (2001), o que distingue a Modelagem Matemática de outras estratégias para o ensino de matemática são os processos de exigência das hipóteses e das aproximações simplificadoras, que serão tratadas como requisitos fundamentais para a elaboração do modelo. Bean enfatiza ainda que as outras etapas que compõem o processo de modelagem matemática (problema, resolução e validação) podem ser trabalhadas em qualquer outra abordagem de aplicação da matemática.

A modelagem passa a ser, como destaca D'Ambrosio (1986, p.11), um "processo rico", pois uma situação real vai culminar com soluções efetivas e não como uma simples resolução formal para um problema artificial. Nesse sentido, buscamos investir em uma pesquisa sobre modelagem como estratégia de ensino de forma a conhecer que habilidades são trabalhadas e desenvolvidas pelos estudantes. Essa compreensão é compartilhada por Barbosa (2001) quando reforça que a modelagem, trabalhada como metodologia de ensino, proporciona o desenvolvimento de habilidades intelectuais nos educandos.

Algumas dessas habilidades, apresentadas em destaque, podem ser consideradas como pertinentes no processo de ensino-aprendizagem de matemática.

- Agir matematicamente sobre os problemas da realidade;
- Aplicar os conhecimentos matemáticos de forma satisfatória e autônoma;
- Utilizar-se de receitas próprias para elaborar a solução de problemas;
- Entender as idéias básicas da matemática;
- Adquirir experiências quanto ao uso do conhecimento matemático, a partir de novos problemas;
- Adquirir o hábito de pesquisar os novos conhecimentos;
- Realizar tomada de decisão no sentido de direcionar o rumo da investigação de um problema;
- Valorizar o conhecimento que adquire;
- Saber transformar problemas da realidade em problemas matemáticos;
- Reconhecer as potencialidades da matemática;
- Buscar mecanismos para agir matematicamente sobre um problema.

Desenvolver essas habilidades para aplicar o conhecimento matemático em situações cotidianas é um objetivo importante e que pouco é tratado pelas propostas de ensino de matemática, pois observamos a dificuldade que alguns alunos demonstram quando estão diante de situações-problema que precisam usar conhecimentos matemáticos.

As pesquisas vêm destacando que o uso da modelagem matemática parece elevar a compreensão e o entendimento de problemas reais, além de enriquecer os conhecimentos relacionados a outras áreas. Modelar situações parece ser realmente um problema, que pode ser assumido pelo aluno como um problema a resolver.

I.6 – Modelagem e Função

Função é um conhecimento que, nos últimos anos, vem sendo bastante pesquisado na Educação Matemática. Yerushalmy (2000) destaca que o conhecimento de função tem sido importante para se trabalhar modelagem de situações cotidianas. Nesse sentido, é importante que as experiências com estudantes busquem identificar que habilidades são importantes para interpretar e modelar situações-problema do cotidiano, assim como o de outras ciências.

Um exemplo da aplicação do conceito de função na medicina revela a importância desse conceito. Atualmente, na área médica, é comum encontrarmos diversas relações sendo traçadas, fazendo uso desse conceito, criando-se modelos funcionais de problemas de saúde. O conhecimento de função é um exemplo dessa prática, quando trata da relação entre altura e peso ideal de uma pessoa. Além desse exemplo, vários diagnósticos médicos relativos a doenças tomam como base a relação entre variáveis. Outro exemplo importante é o exame que se faz da capacidade pulmonar de um paciente com problemas respiratórios. Esse diagnóstico pode ser realizado pelo médico, no paciente, o qual terá que soprar em um tubo (mangueira). O procedimento se resume às etapas:

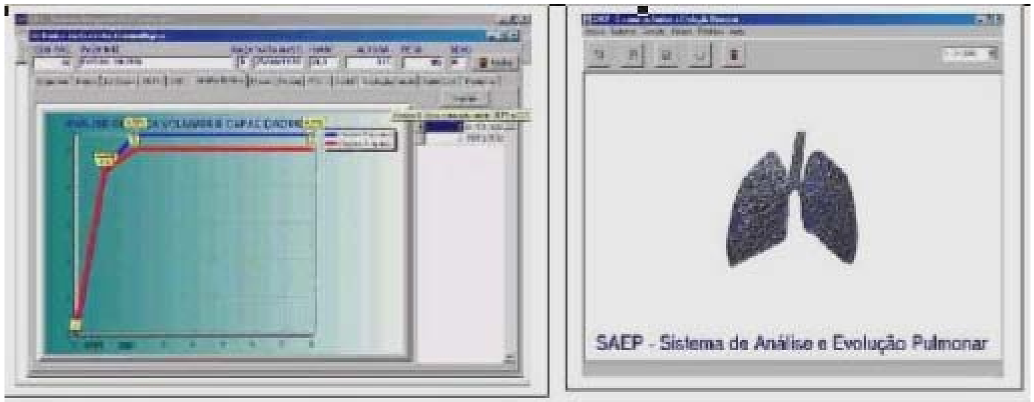
1- O médico solicita ao paciente que encha o pulmão de ar, prenda-o e depois sopre com força em um tubo que está conectado a uma pequena máquina ligada ao computador.

2- O computador ao receber a informação (sopro do paciente no tubo), opera um software que faz a representação gráfica da informação recebida, na tela do computador, que trata de correlacionar funcionalmente o tempo utilizado durante o sopro e a força aplicada na liberação do ar.

3- O médico, por sua vez, a partir do gráfico e tabelas produzidas, faz a avaliação da capacidade pulmonar do paciente. O material produzido é comparado com dados e tabelas padrões já existentes para esse tipo de situação.

4- Na elaboração do resultado são consideradas algumas variáveis obtidas a partir do paciente, como: altura, peso, idade, tempo utilizado durante o sopro, a força aplicada na liberação do ar dos pulmões e o volume do ar que foi armazenado.

A partir desses dados, que são introduzidos no computador, o software, produz uma representação gráfica (ver Figura 9).



(Fonte: http://www.ethizon.hpg.ig.com.br/SAEP_TELAS.htm)

Figura 9 - Ilustração da representação da capacidade pulmonar

Essa atividade permite avaliar o paciente segundo um modelo padrão (tabelas e gráficos) elaborado a partir de pessoas com saúde, que tenham as mesmas características do paciente.

Essas estruturas de diagnóstico, montadas para a área médica, buscam na matemática recursos para elaborar padrões representativos de uma situação geral. Eles necessitam do conhecimento matemático, para que sejam criados os programas que irão representar no computador a situação geral e compará-la à situação representada pelos dados do paciente.

Nesse tipo de atividade parece ter sido essencial o uso do conhecimento de função, por relacionar grandezas e situações. Nota-se que o conhecimento de função, tratado em parceria com os recursos computacionais, vem inovando na capacidade de elaboração de sistemas de diagnósticos médicos por meio de simulação. Segundo Ponte (1992, p. 19), "*o computador se constitui um auxiliar fundamental para gráficos, comparar valores, fazer mudanças em escalas, etc. e em alguns casos pode até simular através de animações realizadas pela computação, o próprio desenvolvimento de fenômenos dinâmicos*". Essa ênfase na realização de simulações, não só é dependente de conhecimento matemático, como também vem valorizar alguns campos matemáticos, os quais se adequam a essa proposta de parceria, função é um deles. Dessa forma, o recurso computacional tornou-se um auxiliar importante para aplicação do conhecimento de função, de forma a ser valorativo nas atividades de representação, simulação e no trabalho com modelagem.

A capacidade de conexão, que tem o conceito de função com conhecimentos de outras áreas ou com conceitos da própria matemática, torna-o, em nossa compreensão, um conceito-chave para o desenvolvimento de atividades que busquem explorar a modelagem matemática.

Nossa preocupação reside no desenvolvimento de uma investigação que indique as habilidades desenvolvidas para aplicação da matemática na construção de modelos matemáticos. Nesse sentido, vemos a importância de identificar quais habilidades os estudantes desenvolvem, as quais comumente não são observadas nas tarefas de ensino trabalhadas na escola.

A identificação dessas habilidades pode levar à compreensão dos elementos das abordagens de Matemática que levam os alunos a dificuldades para aplicar o conhecimento matemático, ou ainda para compreender o conceito de função.

I.7 – Modelagem com funções como metodologia de ensino

Apesar das pesquisas alimentarem com ricas informações esse campo de atividade, parece que esse conhecimento ainda não chegou às escolas. A ênfase das pesquisas, como já divulgamos anteriormente, vem sendo dada no sentido de investigar a modelagem como metodologia de ensino. Várias pesquisas buscam analisar esse recurso (FIORENTINI, SOUZA Jr. & MELO, 1998; POLENTTINI, 1999; BIEMBENGUT & HEIN, 2000; BASSANEZI, 2002), de forma a entender o desenvolvimento de novas intervenções no ensino.

Meira (2003, p. 40) salienta que em visitas realizadas em uma escola do Recife, no sentido de investigar resolução de problemas algébricos, utilizando modelagem, desenvolveu atividades usando um esquema gráfico representando uma balança de dois pratos, aplicando-as em turmas de sétima série. Durante essa investigação, observou que as tarefas apresentadas pelo professor da turma, *“incluíam apenas a redução de polinômios, a resolução de equações lineares e o exercício de procedimentos para resolver problemas*”. A observação de Meira destaca que as situações que anteriormente eram trabalhadas pelos alunos não levavam os mesmos a criarem as equações que modelassem as situações-problema que lhes eram apresentadas pelo professor ou constavam no livro didático. Essa tarefa, quase sempre, estava pronta nos livros didáticos, ou como destaca Meira (2003), ficava a cargo do professor. Esse fato revela que as propostas de ensino não vêm favorecendo ao aluno desenvolver a capacidade de atuar como modelador.

A experiência trabalhada por Meira (2003) evidenciou que a proposta de ensino utilizada pelo professor apresentava uma didática insipiente, pois os alunos não vivenciavam por si próprios a construção de métodos que levassem à montagem das equações como solução para os problemas apresentados. Dessa forma, como observa Meira, não desenvolviam competências para “*pensar algebricamente (ou seja, incapazes de compreender equações em termos de estruturas para generalizar)”.* Nesse sentido, o pesquisador salienta que ”*é necessário diversificar as situações de uso da álgebra como ferramenta de modelagem*” (MEIRA, 2003, p. 43).

Apesar da ausência de atividades utilizando modelagem matemática na escola, várias experiências tratam-na como metodologia de ensino, seja no Brasil ou no exterior. Destacamos os trabalhos em cursos regulares (FRANCHI, 1993; BASSANEZI, 1994; BORBA, 1999), outros voltados ao ensino de cálculo (MONTEIRO, 1991; BASSANEZI, 2002) e aqueles voltados ao ensino fundamental (DE CORTE & VERSCHAFFEL, 1997; BIEMBENGUT e HEIN, 2000). Os resultados desses estudos são animadores, merecendo destaque aquele estudo que possibilita os alunos perceberem as ligações entre o conteúdo aprendido e o ambiente em que vivem. Nesse aspecto, Bassanezi (2002) apresenta várias situações (fabricação de ‘pipas’ de vinho, dinâmica populacional de tilápias e o modelo de propagação de doenças transmissíveis – epidemiologia). Biembengut e Hein (2000) apresentam sete situações desse tipo de abordagem, já citadas na introdução deste trabalho.

Outras experiências de ensino em que se busca introduzir a aplicação de etapas de modelagem são sugeridas por pesquisadores. Ponte (1992, p. 16) evidencia uma experiência nesse tipo de atividade, apresentando o problema "do *carteiro*" (ver Figura 10). O problema consiste na entrega de cartas por um carteiro, nas sete casas (situação exemplificada, as quais têm um padrão de distância) situadas a uma mesma distância, nos dois lados de uma rua. Nessa atividade, parece ser conveniente escolher o percurso que minimize a distância total a ser percorrida, pois essa situação o carteiro enfrentará em várias ruas, tendo em algumas situações, ruas mais largas e em outras, ruas mais estreitas. Dessa forma, deve buscar uma estratégia de entrega de cartas, para encontrar o menor caminho a ser percorrido para a entrega das cartas, segundo a disponibilidade das casas (regularidade), adequando sua saída para atingir o mesmo objetivo nas demais ruas. Esse tipo de atividade pode ser explorado com os alunos, como uma atividade inicial de modelagem, pois terão que discutir a distância entre as casas, o total de casas por rua, o processo de entrada na rua e o de saída.

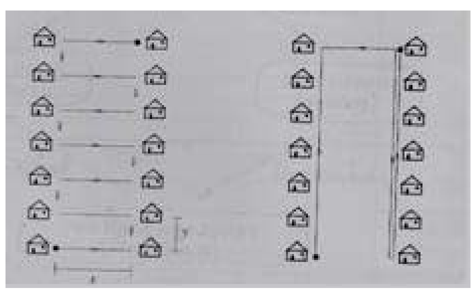


Figura 10 - Representações para o percurso utilizado no problema do carteiro.

Na primeira representação (ver figura 10), nota-se que o carteiro atravessa sucessivamente a rua, atingindo um par de casas por vez. Já na segunda representação, cobre todo um lado, retornando ao início da rua no lado oposto e voltando a percorrer toda a rua para seguir em frente (atingir outra rua). Nos dois casos chega-se às representações algébricas:

$M_1 = 7x + 6y$

$M_2 = x + 18y$

A análise do tipo de rua (larga ou estreita) vai permitir decidir sobre um modelo ou outro, por comparação do percurso nos modelos M_1 e $M_{2.}$

$7x + 6y < x + 18y$.

Pereira, Cegonho & Rocha (1992, p. 21) também trataram a modelagem como metodologia de ensino em uma análise dos efeitos da altitude no rendimento dos atletas. Eles buscaram identificar em que circunstância a altitude pode ser vantajosa ou desvantajosa para se conseguir melhores marcas.

A proposta foi idealizada a partir da pressão atmosférica (1033 milibares ao nível do mar), diminuindo progressivamente à medida que subimos – nos distanciamos do nível do mar. A cada 1.000m, a diminuição é de aproximadamente 11,5%. Dessa forma, elaborou-se o quadro mostrado na Figura 11, que relaciona altitude (m) e pressão (mb), com o auxílio do computador.

Altitude (m)	Pressão (mb)
0	1033
1000	1033X 0.885
2000	1033X 0.885^{2}
3000	1033X 0.885^{3}
4000	1033X 0.88^{4}
5000	1033X 0.885^{5}
6000	1033X 0.885^{6}
7000	1033X 0.885^{7}
8000	1033X 0.885^{8}
9000	1033X 0.885^{9}
10000	1033X 0.885^{10}

Figura 11 - Relação estabelecida entre altitude e pressão

Esse problema levou à construção da expressão $P_1=1033.(0,885)^{h/1000}$, a partir da qual, posteriormente, fez-se o estudo da função, utilizando o quadro de valores, e construindo o seu gráfico (ver Figura 12), através do recurso computacional.

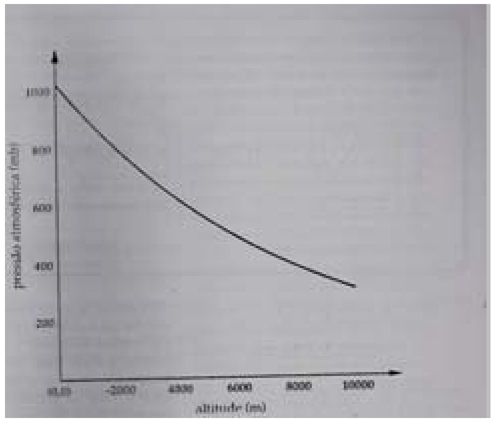


Figura 12 - Gráfico da função elaborada para o problema de cálculo da altitude

Nesse sentido, explorar situações enfatizando o uso da modelagem como estratégia de ensino, parece ser uma atividade que vai exigir atitudes, habilidades e conhecimentos dos alunos com relação ao conhecimento matemático que dominam. A utilização de um software que elabore simulações é também uma proposta que pode se adequar ao tipo de investigação que desejamos enfatizar em situações-problema nas quais os alunos necessitem do conceito de função.

I.8 – Simulação Computacional

A compreensão de simulação em relação aos diversos sentidos que assume o termo simular, corresponde à realização de experiência com objetos ou uso de modelos que possam tornar em efeito (representar) uma realidade.

A simulação relacionada a teste ou experiência, no meio científico, em alguns casos é uma atividade de ação onde se utilizam modelos que representem determinadas situações que possam gerar perigo quando testadas, na presença de seres humanos. Dessa forma, podemos destacar que a simulação de uma situação está ligeiramente ligada à compreensão de tornar semelhante ou representar tal situação.

Há vários equipamentos eletrônicos que podem gerar simulação, como os mecânicos e eletrônicos utilizados para o ensino e formação de pilotos – simuladores de vôos. No entanto, um recurso bastante utilizado no meio científico, para realizar a simulação de um fato real, são os que utilizam o recurso computacional. Os modelos geram representações do fato, tornando possível, interpretações e conhecimentos gerados a partir da simulação.

O computador, através modelos e comandos, consegue elaborar situações de simulação que segundo Valpassos Pedro & Sampaio (2005, p. 3), "*facilita o processo de criação (externalização de idéias sobre um problema), experimentação (testagem de hipóteses através da simulação), reflexão e reconstrução de modelos*". Dessa forma, o computador torna-se ferramenta principal para se verificar, analisar, testar e avaliar o comportamento de uma situação simulada gerada a partir de um problema.

A simulação computacional vem sendo integrada à tomada de decisão em experiências, tornando o computador, um elemento essencial. Através de seus recursos consegue-se elaborar várias possibilidades de simulação de uma mesma situação. Segundo Bellemain, Gitirana & Baltar (2006, p. 2), as simulações com uso do computador, além de contribuir para a diminuição dos custos*, "permite observáveis mais rapidamente...simplificam situações e focalizam as observações sobre certos fenômenos, eliminando outros que podem não ser pertinentes".*

Vários são os softwares que possibilitam a elaboração de simulação de uma situação real, a partir de comandos, programas ou expressões matemáticas – modelos. O LOGO (Papert, 1980), o Cabri-Géometrè (Laborde & Bellemain, 1997), WLinkIt (Sampaio & Ogborn, 1995), Modellus (Duarte Teodoro et al, 2002), são exemplos de softwares que vem recebendo destaque nesse sentido, por favorecerem a simulação de situações reais.

A estratégia do uso de software para elaborar simulação, tornou-se uma experiência freqüentemente utilizada nas pesquisas (KAPUT, 1993; VALPASSOS PEDRO & SAMPAIO, 2005; BELLEMAIN, BELLEMAIN & GITIRANA, 2006). Pontos importantes estão sendo destacados, a partir de experiências que necessitam de simular situações, pois as simulações proporcionam:

- Possibilidade de trazer para o aluno experiências que não poderiam ser vivenciadas no mundo real;
- Possibilidades de explorar habilidades que o uso do papel e lápis não permitem;

- Indispensável na avaliação do comportamento de problemas dinâmicos – aqueles que sofrem alteração ao longo do tempo (VALPASSOS PEDRO & SAMPAIO, 2005);
- Gerar possibilidades de ampliação do entendimento do problema (VALPASSOS PEDRO & SAMPAIO, 2005);
- Possibilidade de rever uma simulação gerada por um problema, repetidas vezes;
- Permitir uma análise das conseqüências e dos reflexos de decisões, criações de instrumentos no meio, dentre outras ações;
- Permitir situações observáveis sem a necessidade do fato real estar acontecendo no momento;
- Permitir o teste de hipóteses em situações nas quais os testes reais seriam inviáveis, antiéticos ou perigosos para o meio ambiente, como o estudo das alterações em ecossistemas;
- Trazer para a sala de aula experiências que por diversas razões não seriam possíveis nas suas versões “concretas”;
- Possibilidade de dar acesso aos alunos a modelizações que seriam complexas demais sem as reduções possíveis das simulações pré-programadas;
- Simplificar situações reais;
- Ampliação da capacidade de criação de um modelo;
- Possibilitar a validação de um modelo,
- Verificar o efeito de uma situação simulada no computador.

A exploração de um software que amplie a capacidade criativa dos usuários pode ser uma possibilidade para nos levar: ao entendimento das habilidades e procedimentos utilizados, à influência do software em atividades utilizando a modelagem e verificar a compreensão de função que os estudantes assumem.

I.9 – O software Modellus

O processo de modelagem como abordagem de ensino ainda aponta a etapa de validação como um entrave. A construção de modelos exige, ao final, uma etapa de validação do modelo. Etapa esta que não é simples de ser realizada no contexto escolar, ou mesmo da vida, para a grande maioria das situações. Se por um lado, a validação é uma etapa de difícil realização, por outro, a simulação computacional construída em diversos softwares a partir de modelos matemáticos. E a própria execução da simulação pode servir como um processo de validação do modelo elaborado.

A engenharia de software, uma das áreas da computação, vem proporcionando ao ensino de matemática e de outras ciências, programas de computador em que se trabalham diversas representações simbólicas articuladas. Em particular para o conceito de função.

O emprego de software no ensino de funções é um campo de pesquisa que recebe vários adeptos na Educação Matemática (KAPUT, 1992; GOLDEMBERG et. al. 1992). Investigam-se dificuldades relativas à influência das representações no ensino de funções e outras variantes. Esse caminho de investigação tem mostrado que algumas dificuldades dos alunos estão sendo melhor entendidas pelos pesquisadores. Segundo Dugdale (1993, p. 102) o potencial de um software gráfico aumenta a compreensão dos estudantes sobre o relacionamento funcional. Nesse estudo, fizemos escolha por esse tipo de investigação, escolhendo o Modellus, software desenvolvido por Vitor Duarte Teodoro com colaboração de João Paulo Duque Vieira e Filipe Costa Clérigo em1996, ambos da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova Lisboa – Portugal (ver Figura 13). O usuário constrói um modelo de uma situação e pode executá-la, gerando uma simulação. O mesmo utiliza os sistemas simbólicos: algébrico, cartesiano, ponteiros, réguas, localização cartesiana de objetos no espaço, tabelas, vetores.

Nesse sentido, hipotetizamos que o software Modellus é uma ferramenta adequada tanto à construção de modelos como facilitador da etapa de validação dos mesmos. Os modelos construídos nesse software, a partir de um conceito matemático, particularmente o de funções, envolve uma simulação visual da situação e a conexão com as diferentes representações.

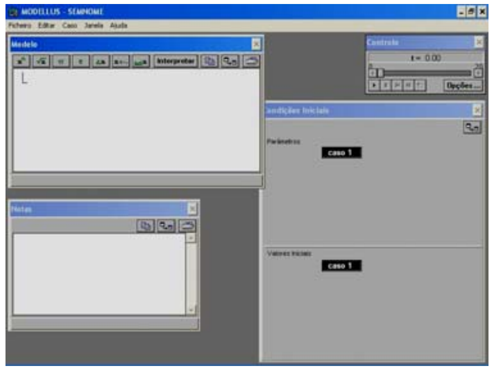


Figura 13 - Tela inicial do Software Modellus

A abrangência de aplicação desse software se estende a diversas áreas de ensino, como: matemática, física, química, biologia e várias outras, dos Ensinos Fundamental, Médio e Superior.

Na matemática, o Modellus pode trabalhar desde representações de conceitos simples como solução de sistema de equações e problemas relativos à proporcionalidade, até atingir conhecimentos mais elaborados da matemática superior, como por exemplo, a resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias.

O Modellus também pode ser caracterizado como uma ferramenta que proporciona representações para serem trabalhadas de forma interdisciplinar (relacionando conhecimentos de várias áreas). Alguns exemplos, desse tipo de situação, são disponibilizados no próprio software em várias áreas de ensino aprendizagem.

Uma importância fundamental do software está no fato de permitir ao estudante interagir com as representações do fenômeno que está sendo trabalhado, que por sua vez, é apresentado de forma dinâmica, fugindo do modelo estático proporcionado pelo uso do lápis e papel. Kaput (1992) afirma que as notações matemáticas, utilizadas antes do uso do computador, eram bastante estáticas e que os meios eletrônicos agora fornecem um conjunto de novas classes de dinâmica, notações interativas e até efeitos virtuais. No caso do Modellus, a partir de equações simples pode-se construir simulações.

A importância dos recursos de representação e simulação proporcionados pela maioria dos programas de computador (software) vem se tornando um elemento significativo para o ensino. O CABRI, elaborado por Yves Baullac, Franck Bellemain e Jean-Marie Laborde em 1994, na Universidade Joseph Fourier de Grenoble (França), foi trabalhado por (KAPUT, 1993) em uma situação de investigação sobre manipulação de representações (ver Figura 14). Observamos que para uma mesma situação matemática, o software proporcionou quatro modelos de representação. Sendo importante esse fato para a compreensão do problema.

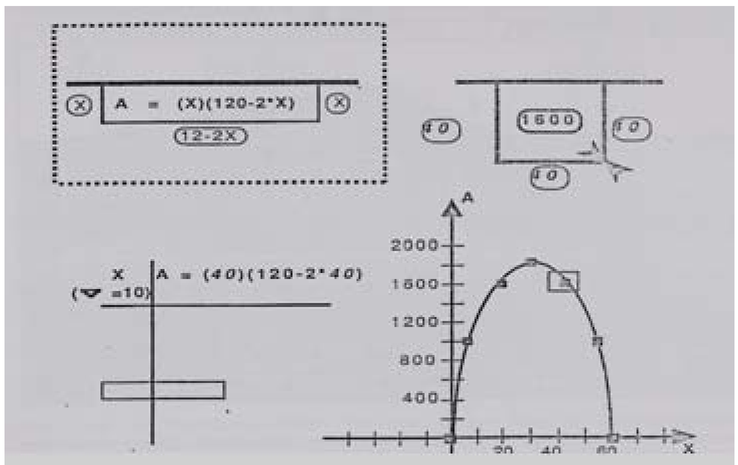


Figura 14 - Representação em diagrama, gráfico, tabela e equação no Cabri-Géomètre

O uso do Modellus para conseguir representações, além de possibilitar a simulação das situações-problema exploradas na pesquisa, será uma ferramenta auxiliar na investigação da compreensão que os alunos apresentam da situação e do conhecimento de função que eles dominam.

Para simular as situações-problema no software Modellus, será necessário dos sujeitos a elaboração de um modelo que represente a situação e que deverá ser implementado no computador. O software, por sua vez, apresenta como retorno o efeito de uma simulação. A situação simulada, possivelmente levará a um processo de validação, para o modelo criado pelo aluno. Dessa forma, poderá ser possível obter do software uma representação para o modelo que ele apresentou para o problema.

A análise das ações dos sujeitos, no envolvimento com o problema, será um rico material para identificar os conhecimentos e habilidades que dominam para esse conhecimento, a partir da construção do modelo, através das discussões sobre o conhecimento necessário para resolver a situação quando elaboram e buscam validar o modelo no software.

CAPÍTULO II – FUNÇÃO e REPRESENTAÇÃO

II.1 – Aspectos históricos da construção do conceito de função

O desenvolvimento de pesquisas sobre o conhecimento de modelagem é bem recente no meio científico, no entanto, a arte de modelar pode ser observada história da matemática. As antigas civilizações, por exemplo, ao buscarem resolver problemas, a partir da observação do mundo em que viviam, desenvolveram modelos representativos para essas situações. Alguns cortes da realidade foram entendidos e representados como modelos de fenômenos, que posteriormente serviram de base para a construção do conhecimento científico.

O conceito de função, por sua vez, tem seus primórdios na história da matemática desde a antiguidade, quando os povos antigos (Maias, Babilônios, Chineses, entre outros) buscaram entender a relação entre o posicionamento dos astros e as estações naturais da Terra ou ainda as fases da Lua (astro principal pela sua proximidade com a Terra) associada à passagem do tempo em relação à noite e ao dia (BOYER, 1974).

A idéia de função levou cerca de 2000 anos, desde suas primeiras noções, até chegar à compreensão moderna, hoje apresentada na literatura. Nesse percurso, esse conceito foi sendo modelado, chegando hoje a ser considerado "*como um especial tipo de relação ou correspondência*" (LEINHARDT, ZASLAVSKY e STEIN, 1990).

Uma das primeiras compreensões de função surge do fato de relacionar um fenômeno a outro. Boyer (1974) destaca que na pré-história buscava-se compreender o comportamento das fases da lua em relação aos dias da semana. Já na antiga mesopotâmia, os babilônios desenvolveram uma técnica de registro em tabletas, usadas como recurso a cálculos e aproximações. Aaboe (2002, p. 2-24) destaca que dispomos hoje de cerca de "*400 tabletas ou fragmentos de tabletas de conteúdo matemático* [...] *geralmente divididos em duas classes, textos de tabelas e textos de problemas*". Para Boyer (1974, p. 20-22), esses documentos históricos datam "*dos primeiros séculos do segundo milênio a.C. (período selêucida)* [...] *Entre as tabletas babilônias encontram-se tabelas contendo sucessivas operações com números, semelhantes às nossas tabelas de* *logaritmos, ou mais propriamente, de antilogaritmos*". A noção de funcionalidade, segundo Youschkevitch (1976), parece estar presente no povo babilônio há cerca de 2000 anos a.C. Essa compreensão é bastante coerente, pois a idéia de função sempre foi inerente ao homem, que dependia das condições naturais para uma melhor subsistência. Essa dependência visualizava o conceito de relação entre homem e natureza desde a antiguidade.

Youschkevitch (1976, p. 9) faz um destaque à noção de função no período antigo, quando se fazia a relação de "*dependência entre duas quantidades*". Nessa época, ainda não se compreendia a noção de variáveis, nem o próprio conhecimento de função, apenas se utilizava essa noção.

Outro fato importante sobre o conhecimento de função, na antiguidade, pode ser observado na Grécia, quando a dependência funcional aparecia no trabalho de alguns matemáticos. O primeiro destaca-se quando Hipias de Elis[1] desenvolveu a quadratiz – assim chamada, pois é utilizada para quadrar o círculo – era representada em forma de gráfico (ver Figura 15). Segundo Boyer (1974, p. 51), a Hipias, "*devemos a introdução na matemática da primeira curva, além do círculo e da reta*", fruto da demonstração realizada para trissecção de um ângulo, quando é apresentada a curva hoje conhecida como quadratriz.

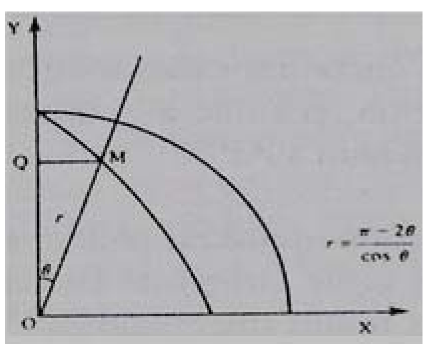


Figura 15 - Quadratriz de Hipias

A quadratriz de Hípias é descrita por um ponto M, tal que OM gira em torno de O em movimento uniforme. A projeção Q de M sobre OY move-se uniformemente. Esse modelo de representação compreende a idéia de

[1] Hipias de Elis – Matemático que se destacou na cidade de Elis – Grécia, século V (a. C.). bom conhecedor de Matemática, História e Literatura. Além disso, era hábil Artesão.

dependência de um ponto em movimento sobre uma curva, sendo associado a pontos no eixo OY.

O segundo se verifica nas cônicas de Apolônio[2] e na espiral de Arquimedes[3], mostrados na Figura 16.

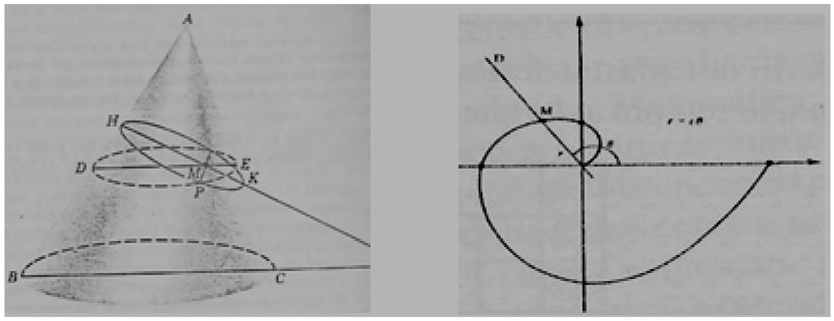


Figura 16 – Cônicas de Apolônio e espiral de Arquimedes

A importância do valor dado à dependência funcional, uma das primeiras noções de função elaborada a partir dos gregos, é verificada na representação que se fazia com relação aos primeiros modelos especiais de função apresentados nos gráficos construídos por Hípias, Apolônio e Arquimedes.

Dieudonné (1990) destaca que as concepções matemáticas dos gregos com relação ao conhecimento relacional de função eram fundamentalmente estáticas e são postas em oposição à idéia de variação que o pensamento científico moderno vai oferecer.

A noção de função apareceu na idade média com uma nova caracterização através de Oresme[4] (1323-1382), que descreveu a dependência entre velocidade e tempo. O mesmo utilizou um esquema com linhas horizontais e verticais para representar essa dependência (ver Figura 17). Boyer (1974, p. 192) descreve que Oresme "*traçou um gráfico velocidade-tempo para um corpo que se move com aceleração constante*". A estratégia utilizada por Oresme, segundo Boyer (1974), foi marcar pontos ao longo de uma reta, que representavam instantes de tempo

[2] Apolônio de Perga – Matemático e Astrônomo, Séc. II - A. C. mereceu dos antigos o nome de "o Grande Geômetra" tendo como obra prima um tratado sobre As *cônicas*.
[3] Arquimedes de Siracusa – Matemático grego, Séc. II A. C. chamado o pai da Física matemática, desenvolve a obra "*sobre espirais*".
[4] Nicole Oresme – Matemático, físico, astrônomo e teólogo, idealizador da geometria coordenada de tabulação de valores e representação gráfica. Propôs uso de gráfico para traçar um valor variável cujo valor dependesse de outro.

(longitudes). Em cada ponto, traçou perpendiculares à reta de longitudes de um segmento de reta (latitude), cujo comprimento representava a velocidade.

A elaboração de Oresme leva a uma compreensão dinâmica para a noção de função. As discussões sobre a noção de função, nessa época, são realizadas em termos da razão entre: velocidade/tempo e velocidade/aceleração.

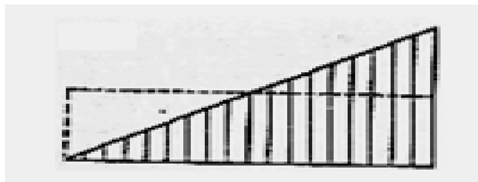


Figura 17 - Representação para o cálculo da velocidade em função do tempo elaborado por Oresme

Dieudonné (1990) evidencia o trabalho de Oresme, quanto à representação gráfica de uma função, que mostra a variação de uma grandeza em função do tempo t (ver Figura 18). Esse modo de representar uma relação entre duas variáveis (latitude X longitude) é semelhante ao que hoje compreendemos como abscissa e ordenada trabalhado na geometria analítica. Boyer (1974 p. 193) destaca que "*A representação gráfica de funções, conhecida então como latitude de formas, continuou a ser um tópico popular desde o tempo de Oresme até o de Galileu".*

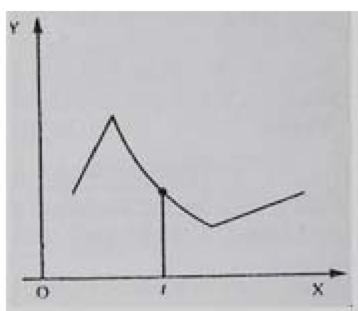


Figura 18 - Representação gráfica de uma função realizada por Oresme (DIEUDONNÉ, 1990, p. 10)

Na antiguidade, observa-se que a compreensão da dependência entre duas grandezas que variavam ainda não definia o isolamento de uma em função de outra. A compreensão matemática ainda não tinha atingindo esse grau de compreensão. Isso só começou a ocorrer a partir do século XIII, com Oresme, mesmo de forma ainda peculiar, apresentando por meio geométrico a razão entre duas grandezas.

Youschkevitch (1976, p. 9) destaca que na idade média, mesmo prevalecendo as descrições gráficas e verbais para a noção de função, esse conhecimento começa a ser expresso sob forma geométrica e mecânica.

As compreensões antigas e da idade média, discutidas anteriormente, indicam que, mesmo com a ausência da formalização[5] do conceito de função, já existia entre os matemáticos uma afinidade na utilização dessa noção.

II.1.1 – O conceito de função na época moderna

De fato, o conceito mais elaborado de função só aparece na época moderna a partir do século XVI, quando Galileu Galilei (1564-1642) apresenta conhecimentos relativos à construção de instrumentos de medidas, estabelecidos por representação gráfica. Já Descartes (1596-1650), introduz no cálculo de equações a dependência para calcular o valor de uma variável em função da outra. No entanto, Boyer (1974, p. 253) destaca que "*a noção de função não teve papel aparente no desenvolvimento da geometria Cartesiana*".

Youschkevitch (1976, p. 9) entende que só a partir dos séculos XVI e XVII é que prevalecem as expressões analíticas de função. No século XVII o conceito de função vai se estruturando entre os matemáticos. Depois de ser cogitada uma preocupação na utilização de uma escrita matemática adequada a esse conhecimento, aparecendo através do cálculo infinitesimal e posteriormente se constitui como um importante campo da matemática. Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) também introduzem algumas contribuições. Esse enfoque é discutido por Ponte (1990) quando faz referência ao trabalho de Newton, destacando que:

> A origem da noção de função confunde-se assim com os primórdios do Calculo Infinitesimal. Ela surgia de forma um tanto confusa

[5] Formalização – Procedimento por meio do qual um sistema de conhecimentos é considerado em suas estruturas formais, por meio de símbolos algébricos, axiomas, normas sintáticas e desenvolvimentos lógicos, e assim purificado de seus conteúdos empíricos ou materiais. (HOUAISS, p..1373, 2001).

> dos “fluentes” e “fluxões” de Newton (1642-1727). Este autor também usou os termos “relata quantias” para designar uma quantidade obtida e “genita” para designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais (PONTE, 1990, p. 3).

Uma das contribuições de Leibniz nessa época é a utilização do termo função, tornando-se o primeiro matemático a utilizar esse termo. Ponte (1990) faz essa referência afirmando que:

> Foi Leibniz (1646-1716) quem primeiro usou o termo “função” (em 1673), mas ainda apenas para designar, em termos muito gerais, a dependência duma curva de quantidades geométricas como as subtangentes e subnormais. Introduziu igualmente a terminologia de “constante”, “variável” e “parâmetro” (PONTE, 1990, p. 3).

Boyer (1974) destaca que Leibniz fez uso do termo apenas para designar a dependência de uma curva, chegando a introduzir a terminologia “constante”, “variável" e "parâmetro". Já Bernoulli (1667-1748), em seus estudos, utilizou notações para funções, em que a notação “fx” é a que mais se aproxima das que hoje são utilizas.

Posteriormente, uma modificação vem a ser dada em 1748, por Euler (1707-1783), ex-aluno de Bernoulli. Desta obra, Boyer (1974, p. 326) destaca a designação *“talvez a mais importante de todas, a notação **f(x**) para uma função de x”,* notação que é bastante utilizada hoje pelos matemáticos e pela escola.

A preocupação com a utilização de termos adequados e compatíveis a esse novo conhecimento vai tomando forma nas mãos de matemáticos como Newton, Leibniz, Euler e Bernoulli. Segundo Boyer (1974), o século XVII é a época em que a noção de função confunde-se com Cálculo Infinitesimal, nos estudos de Análise Matemática, que buscava entender os processos infinitos. A noção de função vai sendo construída na prática e vigora posteriormente nos Séculos XVIII e XIX. Sierpinska (1992, p. 46) destaca uma definição de Dirichlet (1805-1859) que se assemelha às definições atuais de função: “se *uma variável y está relacionada a uma variável x de modo que, ao se atribuir qualquer valor numérico a x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independente x*”.

Outros matemáticos no século XVIII deixaram contribuições importantes para o estudo e conceito de função, destacando-se: Dedekind ao revelar o segredo da continuidade e Peano (1858-1932) ao iniciar uma simbologia ($\subset$, $\supset$, $\in$, $\notin$, $\cap$ e $\cup$) que ainda hoje é aceita no estudo de conjuntos e funções.

A noção de função na primeira metade do século XIX era compreendida como expressão analítica ou como curvas (KLEINER, 1989). Nessa época os matemáticos não tinham ainda um consenso quanto à definição de função (MALIK, 1980), até surgir a definição de Nicolas Bourbaki, no século XX, que estabeleceu de forma mais categórica a definição, hoje conhecida como de Dirichlet-Bourbaki (KLEINER, 1989; YOUSCHKEVICH, 1976).

> Sejam E e F dois conjuntos distintos ou não. Uma relação entre uma variável x, de E, e uma variável y, de F, é dita relação funcional em y ou relação funcional de E em F se, qualquer que seja $x \in E$, existe um elemento y de F, e um só, que esteja na relação considerada com x. Dá-se o nome de função à operação que associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra na relação dada com x; diz-se que y é o valor da função para o elemento x e que a função é determinada pela relação funcional considerada.

André Weil e Jean Dieudonné, participantes do grupo de matemáticos franceses (sociedade BOURBAKI), desenvolveram uma definição mais geral para função em 1939, quando tratam o conceito de função como uma relação entre dois conjuntos que atribui para cada elemento de um conjunto A exatamente um elemento do conjunto B, a qual é usada até hoje pelos matemáticos.

II.2 – A introdução da noção de função no ensino de matemática

No ensino de matemática, a noção de função pode ser explorada de diversas formas. Em situações simples, relacionando uma grandeza a outra (número de litros de gasolina e preço a pagar ou ainda, valor do lado de um quadrado e seu perímetro, entre outros). Uma situação simples também utilizada nos livros didáticos para introduzir essa noção é a utilização de uma máquina de transformação de valores (ver Figura 19).

Figura 19 - Máquina de transformar utilizada para introduzir a noção de função (DANTE, 2004)

Nesse tipo de situação, explora-se a modificação das entradas (que podem ser valores numéricos ou outros tipos de dados) por meio de uma regra de correspondência (ou uma fórmula), que vai determinar a alteração da entrada na máquina. Neste modelo, enfatiza-se a dependência dos resultados de saída com relação aos valores de entrada. Além disso, a compreensão de que os valores de entrada sofrem variação quando passam pela máquina, oferecendo a noção de correspondência entre cada valor de entrada e sua respectiva saída que pela transformação podem ser exploradas.

As compreensões trabalhadas para a introdução da noção de função na escola se baseiam em duas definições, que segundo os pesquisadores são colocadas como a definição moderna (atual) e a antiga. Leinhardt et. al. (1990, p. 27), em um levantamento da literatura sobre ensino de função e gráficos, discutem essas definições, quando tratam da preocupação de como melhor introduzir a noção de função no currículo. Eles demonstram preocupação em torno de qual definição de função "*a moderna ou a antiga*" deva ser usada, destacando essas definições como:

Definição antiga,

> ... historicamente uma função tem sido definida como uma regra estabelecida no relacionamento entre duas variáveis numéricas interconectadas (LEINHARDT, ZASLAVSKY e STEIN, 1990, p. 27).

Definição moderna,

> Função é um tipo especial de relação ou correspondência, uma relação com uma regra que atribui para cada elemento de um conjunto A exatamente um único elemento do conjunto B (isto é também chamado à abordagem de conjuntos) (LEINHARDT, ZASLAVSKY e STEIN, 1990, p. 27).

Malik (1980) levanta a discussão de que essas compreensões são dois tipos diferentes de pensamento, não sendo óbvio perceber que o entendimento de uma definição pode ajudar a outra, principalmente no nível elementar. Outro ponto importante a se destacar é que a compreensão moderna vai alcançar um nível de abstração maior e não familiar dos alunos (LEINHARDT, et. al., 1990).

Além do aspecto das definições, as abordagens do conceito de função vêm sofrendo alterações. Em livros mais antigos as funções são exploradas muitas vezes dentro do aspecto matemático e abstrato. Enfatizando-se suas representações algébricas, gráficas, de tabela, sem correlacionar com problemas. Desta forma, não se valorizam as funções em suas características, funções que vão compor modelos teóricos. Numa abordagem mais atual, alguns livros destacam não apenas o aspecto formal, mas também as situações que mostram as funções como modelos matemáticos, que podem ser utilizados com situações reais do cotidiano.

Além da diferenciação na definição de função, o aspecto representacional também altera as abordagens de função. As estratégias utilizadas também podem ser caracterizadas a partir de diferentes representações:

- A que utiliza máquinas de transformar valores numéricos segundo uma equação;
- A abordagem de compreensão via conjuntos de números segundo uma relação entre os valores desses conjuntos;
- Por meio de representação gráfica de uma situação do cotidiano (ver Figura 20).

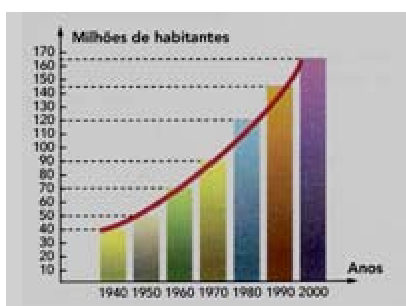


Figura 20 - Gráfico indicando a variação da população brasileira no período compreendido de 1940 a 2000 em função do tempo

- Através de representação no eixo de coordenadas cartesianas, podemos representar várias funções. Esse tipo de estratégia é um dos mais utilizados no ensino de funções, pois a partir dele terão destaque as demais famílias de funções, polinomiais do 1º e 2º grau, as funções logarítmicas e exponenciais.

Mesmo considerando uma única representação, o enfoque dado pode ser bastante diferenciado. Pode-se, por exemplo, passar de uma abordagem global da função, como na última citada, para uma visão pontual, que foca os pontos isoladamente, muito comum nos livros-didáticos. A noção de função, quando introduzida a partir do gráfico cartesiano, explora também o uso de tabelas para organizar os pares ordenados, recurso que serve de auxílio aos estudantes para traçar o gráfico da função. A exploração do eixo de coordenadas para representar gráficos de funções, utilizando o uso de tabelas para encontrar os pontos (x , f(x)), no intuito de observar alguns pontos do gráfico da função, segundo Gravina (1990, p.27) faz com que os alunos não percebam "*a idéia mais geral sobre o comportamento da função. Pois com a tabela o problema se reduz à marcação de alguns pontos do gráfico através de avaliação de valores de x*". Geralmente, esses pontos são próximos de zero [1, -1, 2, -2, 3, -3, etc]. Essa prática é meramente computacional, não proporcionando ao aluno entender as características que cada família de função possui, o que possibilita o entendimento do seu uso. Uma abordagem mais global busca que o aluno passe a perceber os vários campos de aplicação desse conceito, visto que, em situações de modelagem, exige-se compreensão vasta do conhecimento que será aplicado.

A partir da introdução, focam-se as diferentes famílias de função. Inicia-se com as polinomiais do 1º grau (Afim ➔ y = ax + b), explorando as diversas compreensões e aplicações para esse tipo de função, como: valor da função em um ponto, taxa de variação, representação gráfica, propriedades, noção de crescente e decrescente, além de outras aplicações que são possíveis explorar a partir desse tipo de função. Alguns livros, como o de Dante (2004), trazem também a correlação com a Geometria Analítica, com a proporcionalidade direta, com as progressões aritméticas, assim como com problemas reais. Exploram-se também as funções quadráticas, as funções trigonométricas e suas aplicações e, por fim, exploram-se as funções exponencial e logarítmica em seus diversos contextos e aplicações.

No entanto, no ensino de função não se observa uma abordagem que leve os alunos a desenvolver habilidades de modelagem. As atividades trabalhadas com os alunos centram-se muito mais nas famílias de funções, definidas por sua fórmula algébrica, explorando habilidades de cálculos e valores, identificando algumas propriedades como variação, domínio e imagem, representação gráfica, etc. Nas atividades trabalhadas com os alunos, algumas aparecem, de certa forma modelando o problema, mas, em geral, o modelo já vem construído, a família de função já escolhida, as grandezas importantes para a solução do problema já selecionadas e medidas. Dessa forma, toda a sugestão do modelo é dada ao aluno.

Nesse sentido, compreender como o conceito de função está elaborado na vida dos alunos, buscando identificar como eles o aplicam em problemas utilizando a modelagem é um ponto importante de investigação. Dessa forma, esta pesquisa tem a intenção de entender as habilidades mobilizadas pelos alunos em situações de construção de simulações relativas ao conhecimento de função, como eles falam ou escrevem usando esse conhecimento a partir de um ambiente computacional elaborado no Modellus.

II.3 – A noção de representação

A modelagem matemática tem em sua essência o uso de linguagens na construção de um modelo que represente o problema. Nesse aspecto, as linguagens, em particular as matemáticas, são sistemas de representações. Dessa forma, as representações semióticas são um dos pontos essenciais desta pesquisa. O estudo da relação entre a construção do conhecimento e representação tem aparecido como foco de teorias e pesquisas de vários educadores matemáticos. Vergnaud (1991), por exemplo, em sua Teoria dos Campos Conceituais, considera a representação como um dos pontos do tripé para o estudo de um campo conceitual. Goldemberg (1992), por sua vez, analisa as influências das representações no processo de aquisição do conhecimento de função e Kaput (1993) investiga que tipos de representações e estruturas podem ser mais úteis. No entanto, antes de aprofundar a discussão das representações semióticas, discutiremos os significados dados ao termo representação.

Segundo Goldin (1992) apud Gomes Ferreira (1997), o termo tem sido utilizado na Educação Matemática com três significados: representação interna, representações externas que incluem os sistemas simbólicos e as representações contextuais (externas).

Goldin (1992) coloca como representação interna o uso do termo quando se refere às representações cognitivas. Como representações externas, incluem-se os sistemas simbólicos, particularmente os matemáticos (expressões algébricas, tabelas, gráficos cartesianos, diagramas e construções computacionais). As representações contextuais, também externas, são estruturadas a partir de situações físicas, podendo ser descritas por idéias matemáticas. As representações contextuais podem ser situações que vão dar significado a um conceito matemático através de sua modelagem. Ao contrário do ato de modelar, aqui, a situação e sua correspondência com a matemática, através de um modelo, servem para dar significação a um conceito matemático.

Duval (1993) enriquece esse conhecimento quando complementa três significados ao termo representação.

- O primeiro são as representações subjetivas e mentais, como tratado por Piaget (1976; 1978), em que representar na mente uma informação do meio físico para construir um novo conhecimento é um processo dinâmico que envolve abstração, reconstrução, assimilação e acomodação.
- O segundo são as representações internas ou computacionais, compreendidas como “não conscientes do sujeito” (DAMM, 1999:139). Por exemplo, a execução do algoritmo de uma operação em que o sujeito que já tem o seu domínio e o aplica sem pensar em todos os passos que envolvem esse artifício.

- O terceiro, representação semiótica – vista como externa ao sujeito, no entanto consciente, “*são relativas a um sistema particular de signos, linguagem natural, língua formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, figuras, de um objeto matemático*“ (DUVAL, 1995, p. 3).

Neste estudo, trataremos como representação as semióticas. Além do aspecto de representar um conceito, as representações podem ser múltiplas para representar um mesmo objeto. Por exemplo, a representação de um número racional na forma 1/2 ou em seu equivalente decimal, 0,5. Outro exemplo é a escrita algébrica da função $y=x^2$ e o seu gráfico elaborado no eixo cartesiano. Desta forma, além do trabalho de modelar uma situação expressando-a por meio de uma representação, trabalha-se também no tratamento interno a uma representação e na conversão de uma representação para outra equivalente.

Em nossa investigação entender em que sentido os “sistemas simbólicos” (GOLDIN, 1992) podem ser um elemento-chave na construção de modelos torna-se importante para o uso da modelagem como abordagem de ensino. Assim, devemos nos concentrar nas concepções relativas às representações simbólicas, já discutidas na literatura, verificando sua relação com a construção do conhecimento de função.

Nosso interesse, nesse tipo de investigação, deve-se ao fato de que as representações simbólicas têm sua importância, dando significado à construção de modelos. Esse tipo de compreensão se valoriza quando aplicada ao estudo de funções, utilizando um software, por exemplo, podendo proporcionar indicações de como as representações elaboradas a partir de situações-problema em torno do conhecimento de função. Focaremos, portanto, nas representações de função.

II.4 - As representações de função

O conhecimento de função trabalhado na escola vem recebendo diferentes significados, exploram-se aqueles que estabelecem ao conceito de função o significado de dependência, associação, variação e correspondência. Além de outras variações como os tipos de atividades e conceitos envolvidos, como Leinhardt, et. al. (1990) destacam, a partir de pesquisas (BERGAMINI, 1963; BUCK, 1970; FREUDENTHAL, 1982; JANVIER, 1982, 1984; MALIK, 1980; NICHOLAS, 1966; VINNER & DREYFUS, 1989). A evolução do conceito de função e as diferentes tarefas, conceitos associados e significados são discutidos, como:

> "Classificação de tarefas – apresenta-se gráficos ao aluno para que ele defina se correspondente ou não a uma função. [...] Translação – como, por exemplo, construir uma representação por meio de outra já conhecida. [...] Escala – é uma relação estabelecida entre as grandezas numéricas representadas nos eixos x e y (LEINHARDT et. al. 1990, p. 16).

O estudo de funções se complexifica também pelas várias formas de as representar. Leinhardt et. al. (1990), Gomes-Ferreira (1997) e Goldemberg (1991) destacam que essa multiplicidade de representações é utilizada como forma de ajudar na compreensão do conceito.

Selden & Selden (1992, p. 2) apresentam algumas dessas representações utilizadas para o conceito de função: gráfico, tabela de valores, correspondência entre dois conjuntos, representação algébrica, fórmula, sintaxe, etc. Destacamos algumas dessas representações para função:

Representação por meio de fórmula – Diversas funções podem ser representadas por meio de uma fórmula algébrica, do tipo f(x)=2x ou f(t)=2t. Muitas das atividades, propostas no ensino médio, restringem-se à obtenção da imagem de um valor do domínio da função, por meio de uma fórmula. Quando a partir de uma fórmula, determinada variável x é substituída por um valor numérico, produzindo dessa forma, um novo número. Esse processo passa a idéia pontual de função e de correspondência entre um valor e sua imagem, que é utilizada para função. Os valores de f(x) (dependentes) estarão associados um a um com os valores independentes x, a partir de cada entrada na fórmula. Salienta-se aqui a importância do entendimento e uso das variáveis e parâmetros, os quais muitas vezes, por questão de costume, passa-se a considerar que em função a variável dependente deve ser sempre denotada por x.

Representação Cartesiana – Esse tipo de representação vai contribuir como um recurso que se pode utilizar numa visão mais global de uma função. No entanto, perde em precisão, que é alcançada pela representação algébrica. Identificando alguns valores do domínio, obtém-se com exatidão a imagem de uma função a partir do gráfico. Além disto, para muitas funções, a realização de uma representação gráfica é no mínimo esquisita. Por exemplo, função real de variável real dada por f(x)=1 se x é racional e f(x)=-1 se x é irracional, sua representação gráfica fica longe do que se entende por gráfico de funções. Nesse sentido, a partir da Figura 21, pode-se levantar o seguinte questionamento. Qual das duas imagens seria uma melhor representação para a função: f(x)=1 se x é racional e f(x)=-1 se x é irracional?

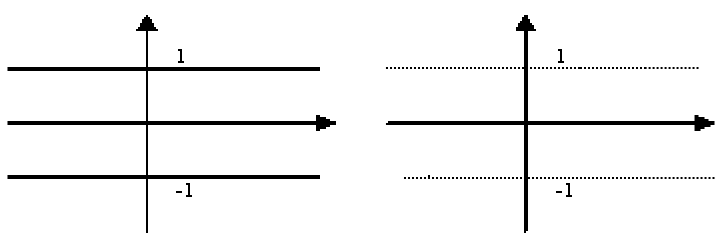


Figura 21 - Representações gráficas da função, f(x) = 1 se x é racional e f(x) = -1 se x é irracional

Diagrama de Flexas – Essa representação dada ao conceito de função associa por meio de flechas uma quantidade y em função de outra quantidade x. Um exemplo desse tipo de representação pode ser dado na associação que se faz em matemática para o conjunto de números quadrados perfeitos adquiridos a partir do conjunto dos naturais. Cada número natural irá determinar um único número quadrado perfeito, Figura 22.

Conjunto dos naturais ➔N* = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

Conjunto dos quadrados perfeitos➔ P = {1, 4, 9, 16, 25, ...}

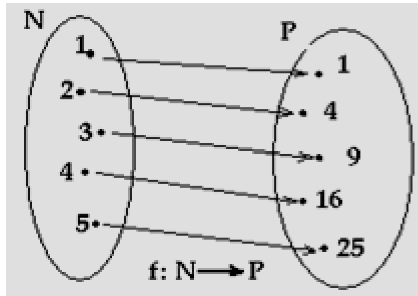


Figura 22 - Representação de função em diagrama

Representação por tabela – Esse tipo de representação utiliza uma tabela de valores, a qual cada valor de entrada de uma quantidade (x) vai listar uma outra quantidade (y). Esse modo de associação de valores em tabelas é muito utilizado na própria matemática. Segundo Goldemberg et al (1992), esse tipo de representação "*pode dar apenas fragmentos de informação*", ele pode dar um conjunto discreto e finito de pontos. Na escola, a tabela é muito utilizada para se obter pontos que pertencem à função. No entanto, as tabelas podem ser muito úteis inclusive para entender importantes características de uma função.

Essas e várias outras representações são utilizadas na compreensão do conceito de função. Os professores, muitas vezes buscando ajudar os estudantes a melhor entender esse conceito, variam de um modo de representação para outro, sem entender que existem processos psicológicos envolvidos nessa ação. Essa preocupação é observada por Janvier (1987), quando afirma que existem alguns processos psicológicos envolvidos na passagem de uma representação para outra, os quais diferem quando o movimento é de um gráfico para uma equação ou de uma equação para um gráfico. Portanto, é importante que haja uma preocupação quanto à estratégia de ensino em que se utilizam mais de um tipo de representação.

A passagem de uma representação para outra é um processo que tem certo grau de dificuldade para o aluno. Essa discussão é tratada por Nascimento (2002, p. 34), quando destaca que o aluno, muitas vezes, faz escolha por uma representação que já domina e utiliza em algumas ações. No entanto, "*compreender diferentes formas de representação tem sua importância para o* *ensino, já que um só tipo de representação pode provocar dificuldades de compreensão de determinado conhecimento*".

A análise da variação, de um modo de representação para outro, tem preocupado outros pesquisadores. Even (1998), enfatizando a importância das representações na compreensão de função encontrou que os estudantes tinham dificuldades na flexibilidade de ligar diferentes representações.

Kaput (1986) destaca que se deve iniciar o ensino de um conceito com representações primitivas e flexíveis para o aluno, elevando-se posteriormente para as mais poderosas e complexas. Essa preocupação de Kaput pode ser verificada no ensino, quando os professores geralmente ficam diante do seguinte problema: a representação algébrica é um modo de representar função, em que os alunos apresentam dificuldade, enquanto que a representação gráfica melhora o nível dessa compreensão.

A importância dada à exploração de uma boa representação é também uma preocupação partilhada por Granja e Gitirana (2000, p. 4), quando indicam que: "*para perceber a simetria de uma função real é mais fácil na representação cartesiana que na algébrica"*. No entanto, eles destacam que o uso limitado de uma única representação pode apresentar algumas dificuldades: "*se o estudo de simetria for feito somente a partir do gráfico cartesiano, o aluno pode ser levado a limitar sua concepção a uma visão da imagem sem entender sua implicação em termos da relação entre as variáveis"*. O aluno pode ter uma imagem visual, sem entender que uma função simétrica em relação a um eixo vertical, é de tal forma que existe um valor fixo p, tal que $f(p-x)=f(p+x)$ para qualquer x pertencente ao domínio da função.

Nas atividades de modelagem que o estudante precise modelar uma situação onde o conhecimento de função é importante, ele vai precisar entender as várias formas de representar esse conhecimento, pois se percebe diante de uma situação em que deve buscar seus conhecimentos relativos a esse conceito, buscando significados, representações e outras relações que se associam ao problema que deve modelar. Essa estratégia é um dos caminhos para entender que melhor estratégia utilizar na solução, de forma que os conhecimentos lhe favoreçam para que a solução encontrada seja válida.

II.5 – Dificuldades na aprendizagem de função

No ensino de matemática, o conhecimento de função ainda incomoda bastante os alunos, seja no que se refere às primeiras noções trabalhadas, no Ensino Fundamental e, posteriormente, a exploração do conceito no Ensino Médio e até no Ensino Superior. Leinhardt et al, (1990, p. 5), ao fazerem uma revisão da literatura no ensino e aprendizagem de gráficos e funções, destacam:

> O tópico de função (em sua forma mais avançada) é extremamente complexo. Isto é devido a vários fatores, incluindo os seguintes: (a) está freqüentemente associado com outros conceitos matemáticos complexos (i.é., variável, crescimento, limite, extremidade, significado pictórico); (b) está integrado por natureza, ligado a vários subconceitos e campos da matemática; e (c) aparece em muitas representações diferentes.

A complexidade do conhecimento de função, apresentada por Leinhardt *et al* (1990), pode ser evidenciada a partir da quantidade de dificuldades que são identificadas nas pesquisas sobre esse conceito. Gomes Ferreira (1997) e Goldenberg (1988), por exemplo, destacam ainda que funções envolvem:

- *Diferentes visões de função;*
- *O fato de variável, um conceito dinâmico, ser explorado em ambiente estático*.

Outras dificuldades são apontadas para aprendizagem de funções por Markovits, Eylon e Bruckheimer (1994, p. 55-64). No entanto, destacaremos aquelas que estão mais relacionadas a habilidades de modelagem:

- *Dificuldade na compreensão e reconhecimento do domínio, contra domínio e imagem, seja na representação algébrica, ou seja, na representação gráfica.*
- *Dificuldade em compreender a definição de função a partir de sua representação gráfica no plano cartesiano;*

- *Dificuldade em compreender os passos necessários para a representação gráfica, como: elaborar tabela, executar os cálculos, desenhar o plano cartesiano, representar os pontos no plano, desenhar o gráfico.*

A dificuldade da representação gráfica leva à falta de compreensão quanto ao tipo de função ou campo de aplicação. O uso dessa habilidade torna o aluno mais seguro para elaborar tabelas, identificar intervalos, verificar a variação da função, etc. Tais recursos são essenciais à atividade de modelagem.

- *Dificuldade em definir função a partir de subconceitos que complementam esse conceito;*
- *Dificuldade em visualizar os diversos tipos de função;*
- *Dificuldade em perceber o modelo linear como um modelo geral de função.*

A abordagem de função pode dificultar o entendimento de outras formas de entender função.

- *Dificuldade em reconhecer os casos particulares de função, como: função constante, função definida por mais de uma sentença*.

Discute-se ainda a dificuldade em passar a representação de uma função da forma gráfica para a forma algébrica. Nesse caso, aparece a ausência de habilidades quanto à compreensão das várias formas de se entender o conceito de função por meio de diferentes representações, mas que efetivam um mesmo conceito.

Alguns estudos buscam entender a origem das dificuldades dos alunos na aquisição e aplicação do conceito de função. Selden e Selden (1992), por exemplo, argumentam que grande parte das pesquisas tem base no terreno experimental, no sentido de que suas idéias são atualmente checadas sobre os estudantes, algumas se baseando em estudos teóricos (SIERPINSKA, 1992), outras em pesquisas por meio de experimentos (ZASLAVSKY & STEIN, 1990), e aquelas que buscam a utilização de software educacional utilizando uma combinação de perspectivas teóricas (GOLDEMBERG, 1990).

Alguns pesquisadores experimentaram o uso de software, Goldemberg, Lewis & O'Keefe (1992) utilizando o RANDOMGRAPHER, Gomes Ferreira (1997) utilizando o DG PARALELO, Borba (1993) utilizando o FUNCTION PROBE e Mariotti, Laborde & Falcade (2003) utilizando o CABRI, para entender o conhecimento e as dificuldades dos alunos quanto ao conhecimento de função. Esse fato mostra a importância que vem recebendo o uso de softwares nos últimos anos como uma ferramenta para se entender a formação de conceitos.

Diante dos resultados alcançados nas pesquisas sobre compreensão do conceito de função por meio de software, seguimos nessa direção, procurando investigar através desse recurso, a aplicação do conceito de função por meio de modelagem. Essa intenção nos levou a selecionar o software Modellus para construir uma seqüência de atividades para investigar as habilidades dos alunos quanto à modelagem.

O Modellus é um software próprio para modelagem, permitindo simulação, elaborando cálculos, apresentando tabelas, demarcação de tempo, definição de variáveis, etc. Isso permite investigar a maioria dos temas estudados nas diversas áreas do conhecimento.

Nesse sentido, estaremos utilizando o Modellus como o ambiente básico para explorar modelagem. Nossa pesquisa, centrada no uso da modelagem como abordagem de ensino, busca construir nesse software uma seqüência de atividades para investigar o conhecimento de função aplicado a situações-problema que podem ser modeladas. Todas as atividades realizadas pelos alunos serão trabalhadas no ambiente computacional do Modellus e necessitam da elaboração de modelos matemáticos para sua solução.

CAPÍTULO III – FENÔMENOS DIDÁTICOS

III.1 – A Teoria das situações didáticas e sua relação com modelagem

A Educação matemática nos últimos anos construiu conhecimentos importantes sobre os fenômenos que ocorrem no processo de ensino aprendizagem. Vários pesquisadores (BROUSSEAU, 1986; HENRY, 1991; CHEVALLARD, 1985; CHARNAY, 1996; CAMARA DOS SANTOS, 1995, 1997) em diferentes status desenvolveram o que hoje podemos considerar como a base de conhecimentos sobre os fenômenos didáticos. A partir dessa base teórica, novas informações vêm complementando o conhecimento dos fenômenos didáticos.

Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 58) discutem sobre a compreensão das relações estabelecidas entre o professor e o aluno para efeito de aprendizagem como um elemento essencial para a tomada de decisões que melhorem o ensino da Matemática. Chevallard e seus seguidores fazem uma boa interpretação, trazendo para a discussão uma valorização das relações estabelecidas na escola entre professor e aluno, buscando entender como elas são geradas e como minimizar os problemas de ensino-aprendizagem.

Câmara dos Santos, Blanchard-Laville & Berdot (1997) discutem questões importantes quanto à identificação de aspectos da subjetividade do professor, quanto à análise do seu discurso e da sua relação ao saber que está incluído nessa gama de conhecimento que formam a teoria das situações didáticas.

Charlot (2000) trata da existência de uma relação social ao saber, implicando numa discussão de dois pontos importantes, a dimensão individual (componente psicológico) e a dimensão social (componente sociológico), pois o indivíduo faz parte de um contexto social.

Beillerot (1989) discute as diversas formas de prazer vivenciadas com os personagens da relação didática, o professor e o aluno, em relação a um saber específico.

A discussão das idéias francesas vem enriquecendo o trabalho escolar. Pais (2001) formula uma discussão, ainda que bastante elementar, bem didática do conhecimento elaborado por esses pesquisadores, mostrando a necessidade de trazer para a sala de aula essa discussão.

Brousseau (1982) inicia sua defesa acerca dos conhecimentos que evidenciou sobre os fenômenos didáticos presentes nas relações de ensino aprendizagem. Para ele:

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicita e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição.
> (Brousseau, 1982, apud Gálvez,1985, p.28).

A análise desse conjunto de relações, como propõe Brousseau, tem levado outros pesquisadores a uma preocupação quanto à compreensão das relações didáticas. Um exemplo é visão de Câmara dos santos (1995) quando percebe na relação entre os três pólos do triângulo das situações didáticas o <u>professor</u>, o <u>aluno</u> e o <u>conhecimento</u>, a subjetividade do professor em relação ao pólo do Saber. Essa e novas discussões sobre os elementos que participam das relações didáticas verificadas entre os elementos que formam o triângulo didático ou o triângulo das situações didáticas enriquecem o conhecimento acerca da teoria que vai se construindo na Educação Matemática.

No triângulo didático, são estabelecidas três relações, a relação entre o Professor e o Conhecimento (SABER), a relação entre o Aluno e o Conhecimento e a relação entre o Professor e o Aluno. A Figura 23 abaixo descreve esse modelo de relação.

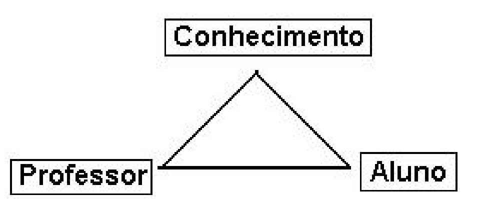


Figura 23 – Triângulo da Didática

Nas relações que envolvem os elementos do triângulo das situações didáticas, vários fenômenos já foram identificados, entre eles está o contrato didático, que, segundo Brousseau (1986, 1988), é um conjunto de comportamentos do professor esperados pelo aluno, e um conjunto de comportamentos do aluno esperado pelo professor. Esse contrato didático vai se referir a um conjunto de regras que irão determinar o que cada elemento que participa dessa relação didática deverá fazer e que será, de uma maneira ou de outra, válido para o outro elemento da relação. Câmara dos Santos (2001, p. 2) discute algumas dessas regras com relação "*a distribuição das responsabilidades, a determinação de prazos temporais a diferentes atividades e a permissão ou proibição do uso de determinados recursos de ação*".

III.2 – A noção de contrato didático

As pesquisas no campo da didática da matemática iniciadas na França (BROUSSEAU, 1986, 1988; CHEVALLARD, 1996) ao discutirem o conceito de contrato didático, apresentaram contribuições importantes quanto à compreensão da estrutura estabelecida para a relação entre os pólos do triângulo didático. Professor, aluno e saber passaram a ser percebidos ocupando posições diferenciadas e não simétricas na relação com o saber.

As interações entre os pólos do triângulo didático (professor, aluno e saber) exprimem a complexidade da relação didática, Tendo, portanto, o contrato didático a função de gerir essas relações. O contrato didático vai permitir aos personagens dessa relação a efetivação de suas ações, Tendo o saber importância por mover o contrato didático.

O contrato didático torna-se, portanto, um conjunto de regras implícitas e explícitas que definem o que cada parceiro (professor e aluno) deverá seguir no jogo do ensino-aprendizagem.

Brito Menezes destaca que Michel Henry (1991, p. 45) discute algumas regras consideradas implícitas aos contratos didáticos por Chevallard (1988). Tais regras, estabelecidas entre professores e alunos de matemática, consideram o sistema francês de ensino. A discussão de Brito Menezes é que se percebe que essas mesmas regras se encaixam no modelo de ensino de matemática no Brasil. Como destacado:

> • *Em matemática, um problema se resolve fazendo operações. A tarefa consiste em encontrar a "boa" [aspas nossas] operação e de realizá-la sem erro. Pelo uso de algumas palavras, o enunciado admite adivinhar a operação a ser feita.*
> • *As questões colocadas não têm, em geral, nada a ver com a realidade cotidiana, mesmo se elas dão essa impressão, por meio de uma arrumação astuciosa. De fato, elas servem somente para verificar se os alunos compreenderam o assunto.*
> • *Para resolver um problema, é necessário encontrar os dados no enunciado. Todos os dados necessários devem estar no enunciado, que não deve conter dados supérfluos.*
> • *Os números são simples e as soluções também devem ser, senão é bem possível que se esteja enganado.*
> • *De qualquer forma, existe sempre uma resposta à uma questão matemática, e o professor a conhece. Deve-se então, sempre, dar uma resposta, que será eventualmente, corrigida.* (HENRY, 1991 apud BRITO MENEZES, 2006, p. 61).

Brousseau (1988), ao apresentar a noção de contrato didático, faz valer um estatuto democrático no jogo das relações entre os parceiros, caracterizado por: divisão de responsabilidades, conscientização do implícito, a relação com o saber e a construção da comunicação didática.

O professor não controla a relação, pois o aluno ao cumprir o seu papel, vai também se envolver com o saber, tirando do professor essa idéia de que terá o controle do aluno. Esses parceiros dialogam através de um conjunto de regras implícitas e explícitas, caracterizando no contrato didático a relação que cada um deles tem com o saber. Dessa forma, através desse jogo de relações, busca-se entender como os fenômenos conhecer e aprender acontecem.

Para embasar nossos conhecimentos acerca dos fenômenos da aprendizagem, especificamente quanto ao conhecimento de função, debruçamo-nos nessa compreensão de contrato didático. Entendemos que essa preocupação merece ser mais esmiuçada.

A primeira busca nos levou às idéias de contrato pedagógico, contrato experimental e contrato diferencial.

III.3 – Contrato Pedagógico

No sentido estrito do termo, o contrato é uma espécie de convenção que se estabelece entre parceiros, na qual obediência às leis e regras que regem o contrato é um fator fundamental para sua configuração. A idéia de contrato surge com Rousseau (1712-1778) quando procura por em evidência a norma social, apresentando aspectos da consciência moral, cívica e política. A proposta de Rousseau, de como deveria funcionar as regras sociais, faz surgir a idéia de contrato pedagógico.

As discussões sobre contrato pedagógico iniciam quando Helen Parkhurst por volta de 1923 trabalha uma experiência em uma escola rural da Geórgia (E.U.A), procurando desenvolver um programa de ensino. Segundo Jonnaert e Borght (2002, p. 157), as produções dos alunos eram rigorosamente avaliadas e a jornada de atividades se desenvolvia segundo um plano determinado, culminando com uma avaliação do trabalho e um encontro coletivo com os professores. Os resultados indicaram: motivação e êxito dos alunos motivados e, prejuízo aos alunos considerados menos perseverantes.

Outra concepção do termo contrato pedagógico é observada em Filloux (1974) identificando uma espécie de consentimento mútuo entre os personagens, professor e aluno, em relação às regras estabelecidas na relação didática.

Brito Menezes (2007, p. 51) discute essa compreensão de contrato pedagógico, a partir da concepção de Filloux (1974), quando entende que a relação entre professor e aluno na sala de aula não acontece, exclusivamente, em função de um saber que esteja em jogo. Para ela, é possível se falar na existência de um nível de relação entre professor e aluno, que não envolve, necessariamente, o saber, evidenciando que outros elementos são também considerados.

Uma discussão importante é levantada por Chevalier & Briand (1995) quando afirmam que o contrato pedagógico valoriza mais a função dos professores do que dos alunos, pois os alunos devem se adaptar, adequando-se a metodologias que muitas vezes são diferenciadas de um professor a outro, independente das disciplinas ministradas.

Uma aproximação entre as concepções de contrato pedagógico e contrato didático acontece quando Chevallard (2001, p.205) discute o contrato pedagógico relacionado ao didático, quando percebe na relação entre professor e aluno a entrada de mais um elemento, o saber, consistindo a partir de então uma relação tríplice o professor, o aluno e o saber. Nessa nova relação, o professor tem a função de mediador.

III.4 – Contrato Experimental

Entre as formas de contrato verificadas nas relações humanas, encontramos o contrato experimental (Schubauer-Leoni e Grossen, 1993) que é considerado como um conjunto de leis e regras que são estabelecidas para se concretizar uma situação experimental. Nesse tipo de contrato, sujeito e pesquisador se relacionam sem que haja a intenção da realização de um trabalho com conteúdo curricular, pois a relação se define como puramente de pesquisa. O diálogo estabelecido entre os parceiros dessa relação ocorre pela realização do experimento.

III.5 – Contrato Diferencial

A idéia de contrato diferencial aparece quando Schubauer-Leoni (1988) discute sobre a relação professor/aluno, e verifica que essa relação não é estabelecida da mesma forma com cada aluno. Existindo a representação que o professor elabora do aluno ou grupos de alunos. As pesquisas indicam que é comum o professor eleger os alunos que terão sucesso e outros que fracassarão. Estando o professor mais dedicado ao aluno eleito ao sucesso, pois este apresenta ao professor uma boa intelectualidade e vai acompanhar de forma satisfatória as atividades.

A relação professor/aluno nesse caso torna-se parceira, sendo bastante positiva para a aprendizagem. De outra forma, aos alunos em que essa forma de tratamento não é aplicada, o contrato se torna diferenciado. As expectativas do professor agora são outras, pois ele observa no aluno com dificuldade de aprendizagem, um fracassado. Ele estabelece, a partir de então, uma relação negativa em relação aos potenciais do aluno, a parceria anteriormente estabelecida não é generalizada para esse aluno fadado ao fracasso.

Brito Menezes (2007, p. 56) levanta essa discussão e aponta outras compreensões que envolvem o contrato diferencial. Segunda ela, "*Não há como discutir a questão do contrato diferencial sem refletir acerca dos aspectos da subjetividade de ambos os parceiros da relação*". Indicando que esse aspecto vem sendo discutido na psicologia da educação matemática (ARAÚJO, 2005; HAZIM e Da ROCHA FALCÃO, 2001).

III.6 – Contrato didático e os fenômenos das situações didáticas

A Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida por Guy Brousseau, tornou-se um essencial conhecimento para que possamos valorizar as relações que existem no processo de aprendizagem. Percebemos no estudo que estamos desenvolvendo sobre o uso de modelagem para compreensão e aplicação do conceito de função, que fatos reveladores acerca dos fenômenos didáticos apareceram com certa freqüência em nossas análises. O trabalho com modelagem, além de valorizar as aplicações e o uso do conhecimento matemático adquiridos na escola, evidenciou pontos importantes dos fenômenos didáticos.

Esses pontos de diagnóstico nos levaram a perceber ligações entre a teoria das situações didáticas (BROUSSEAU, 1982), a partir da distinção dos tipos de situações, já discutidas anteriormente, as quais parecem ter algo em comum com as etapas de modelagem, descritas como: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação (BASSANEZI 2002), apresentadas na fundamentação deste estudo.

Em Brousseau (1982), os elementos presentes nos processos didáticos, como a situação de *ação,* que se caracteriza como o momento da manipulação dos objetos do conhecimento, sendo uma fase em que se procura melhor selecionar as variáveis envolvidas, problematizar e formular hipóteses. A *formulação*, que diz respeito a essas hipóteses, as idéias e teses levantadas. A *validação*, tida como o momento de convencimento entre os pares da validade de suas hipóteses e a *institucionalização*, que busca estabelecer convenções matemáticas, são elementos que de certa forma têm relação com o conhecimento envolvido em situações de modelagem, pois se trata de situações em que estão envolvidos fenômenos de ensino e aprendizagem.

Não queremos aqui, partir para uma nova linha de discussão, pois o desenvolvimento de ambas as teorias surpreendem, pela quantidade de informações que estão sendo construídas nas pesquisas. Nossa preocupação é apontar essa relação como um ponto de estudo para novas pesquisas, pois a comprovação desse fato precisa estar embasada em mais estudos, de forma a descrever e analisar essa evidência. No entanto, alguns pontos observados nas análises de nossa pesquisa vêm trazendo fatos sobre essa natureza comparativa que estamos apontando e que não nos aprofundaremos, pois nosso estudo busca apenas identificar habilidades para modelar situações sobre o conhecimento de função. No entanto, discutiremos nos documentos de análise, elementos de contrato didático evidenciados na pesquisa, relacionados com outros fenômenos didáticos, como: *Situação Adidática e Quebra de Contrato.*

CAPÍTULO IV – OBJETIVOS

IV.1 – Objetivo geral

O objetivo do estudo é identificar as habilidades mobilizadas por estudantes da licenciatura em matemática na aplicação do conceito de função, explorando uma estratégia de modelagem matemática que faz uso da construção de simulações computacionais por via do software Modellus.

IV.2 – Objetivos específicos

- Investigar, dentre as abordagens de funções, as habilidades contempladas nos problemas de livros-didáticos
- Identificar que contextos são explorados nas questões relativas ao ensino de função, presentes nos livros didáticos do Ensino Médio.
- Levantar o conhecimento e dificuldades dos alunos, quanto às habilidades desenvolvidas para modelar situações-problema relativas ao conhecimento de função.
- Investigar a modelagem como estratégia de ensino, utilizando o Modellus, na aprendizagem de funções.
- Analisar o comportamento dos alunos diante de atividades de modelagem sobre o conhecimento de função, utilizando o computador.

CAPÍTULO V – METODOLOGIA

Nosso estudo constou de duas etapas. Na primeira, realizamos uma análise das habilidades relativas ao processo de modelagem, já exploradas em abordagens presentes em Livro-Didático, de forma a compor um mapeamento dessas habilidades. Na segunda etapa, realizamos uma investigação das habilidades desenvolvidas pelos alunos ao explorarem funções em atividades de modelagem de situações, com o uso do software Modellus.

V.1 - Análise das Habilidades nos Livros-Didáticos

Nesse primeiro estudo, fazemos um levantamento das habilidades requeridas nas atividades propostas nos livros didáticos do ensino médio para explorar: Introdução de funções, função afim (polinomial do 1º grau), função quadrática (polinomial do 2º grau) e função exponencial.

Selecionamos três livros didáticos dentre os aprovados no PNLEM - catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio de matemática, documento esse coordenado por Lima (2005). A partir de uma análise das resenhas dos livros, foram selecionados os que melhor apresentam contextos e situações que incluem esses 3 (três) tipos de funções, a saber, foram: a coleção de Dante (2004), Iezzi et al. (2004) e a de Smole e Diniz (2003). Como critérios de análise, buscamos identificar, nas atividades propostas sobre funções, as habilidades envolvidas para modelagem da situação. Tomamos como lista inicial de habilidades as seguintes: identificar o problema, levantar hipóteses, identificar variáveis envolvidas, identificar o modelo apropriado, levantar os valores de variáveis e parâmetros, criação do modelo, resolução do problema e validação do modelo elaborado.

Este levantamento nos ofereceu uma primeira visão do espectro das habilidades já discutidas nas pesquisas quanto ao uso de modelagem como estratégia de ensino. Além disso, esse primeiro estudo nos serviu como fonte para a construção das atividades (situações-problema) utilizadas na segunda etapa da pesquisa, ressaltando as habilidades envolvidas no processo de modelagem e enfatizando aquelas que melhor levavam a contextos para uso de modelagem.

V.2 - Investigação do desenvolvimento das habilidades pelos alunos

Este segundo estudo buscou discutir a modelagem como estratégia de ensino, no caso das funções. Gomes Ferreira (1997) aponta para a necessidade de uma abordagem que integre os diversos campos e/ou assuntos da matemática, em particular, as diversas famílias de funções, como ponto essencial para desenvolver no aluno a habilidade de saber escolher que conteúdo matemático utilizar para modelar uma situação. Nesta pesquisa, trabalharemos integrando três famílias de funções: as afins, as quadráticas e as exponenciais. Por um lado, serão usadas mais de uma família de função pelo fato de que uma das habilidades necessárias à modelagem é a decisão de que campo da matemática utilizar. Estamos integrando algumas famílias de funções por concordar que a modelagem, quando limitada a um campo matemático, não auxilia o aluno a saber buscar o campo matemático que o auxiliará na construção do modelo matemático necessário à resolução do problema. Por outro lado, estamos limitando o campo de investigação sobre o conhecimento de função em apenas três famílias, pois como este estudo centra-se em modelagem como abordagem de ensino, necessitará, como parte da pesquisa, de um levantamento na literatura sobre as dificuldades inerentes a cada um dos campos envolvidos. Portanto, se fôssemos estender essa lista de famílias de funções encontraríamos dificuldade na realização da pesquisa. De certa forma, o contrato com os alunos já limitará este espectro às funções. Analisaremos, porém, como eles concebem os três modelos, na hora da escolha do modelo a utilizar para a resolução dos problemas.

Dessa forma, o estudo é composto de uma investigação utilizando a prática de modelagem matemática, visando identificar que habilidades são mobilizadas pelos estudantes na aplicação do conceito de função em simulação computacional.

V.2.1 – Sujeitos

Participaram deste estudo 3 (três) duplas de alunos do 2º ao 4º período do curso de licenciatura em matemática de uma Instituição de Ensino Superior da região metropolitana do Recife. A seleção dos sujeitos ocorreu a partir de uma análise diagnóstica (pré-requisito), em que se levou em conta o conhecimento do uso do software Modellus, visto que, para nossa investigação, os sujeitos necessitavam dominar esse software, que seria utilizado na pesquisa, como ferramenta auxiliar para modelar as situações-problema que foram trabalhadas.

Os sujeitos selecionados para a pesquisa foram orientados a formarem duplas, de forma que ao longo da pesquisa, as mesmas duplas trabalhariam com uma seqüência de três atividades de modelagem para a construção de simulações com o software Modellus. O uso do software buscou impulsionar o aluno à elaboração de um modelo algébrico, sem o qual ele não consegue montar a simulação.

Os sujeitos selecionados dominavam o conhecimento básico do Modellus, pois foram aprovados na disciplina relativa ao uso de software educacional para o ensino da matemática, oferecida pela faculdade, que faz a introdução do uso do Modellus, dentre outros.

Foi considerado como importante na seleção dos sujeitos, o tempo que eles dispõem para participar da pesquisa, visto que as etapas de aplicação das atividades e coleta de dados foram realizadas em período extra-escolar, podendo ser realizada em pré-horário de aula ou em dias de sábado, em horário previamente marcado. Além disso, todos os sujeitos foram convidados para atuarem como voluntários, no sentido de contribuir para realização do estudo.

V.2.2 - As atividades

As atividades, nosso principal campo de estudo, apresentam situações-problema que buscavam através da utilização do software Modellus, a composição de modelos para três famílias de funções: afim, quadrática e exponencial.

Após ler e interpretar o problema, os sujeitos eram levados a utilizar o software, tratando-o como uma ferramenta auxiliar para solucionar as questões. Utilizavam os recursos oferecidos no software, tratando os problemas como fatos reais. O Modellus apresenta alguns potenciais importantes nesse sentido, relacionados a questões como:

1) A construção da simulação no Modellus parte da modelagem algébrica, o que impulsiona o aluno a buscar o modelo algébrico;
2) A construção da simulação é trabalhada por meio de diversas formas de representação disponibilizadas pelo software Modellus;
3) Ao construir a simulação, o trato dado ao significado das variáveis com a situação passa a ser explícita por meio do uso do software.

Foram elaboradas três atividades de modelagem, uma para cada família de função que iríamos trabalhar. As situações-problema elaboradas para a atividade foram assim definidas:

Situação 1 – Utilize o software Modellus e apresente solução para a seguinte situação-problema. ***Você é dono de um excelente restaurante e deseja construir um modelo que represente a forma de cálculo do salário a ser pago a cada garçom do seu restaurante***. Faça anotações de quais conhecimentos matemáticos estão presentes e são importantes nessa situação. Construa o modelo da situação no software Modellus e teste-o.

Situação 2 - Utilize o software Modellus e apresente solução para a seguinte situação-problema. **Você é um bom jogador de voleibol e está treinando saques tipo “Jornada nas Estrelas”, como estratégia para utilizar em uma partida de um campeonato. Construa um modelo para indicar as situações de movimento da bola, desde o início do saque até o momento em que ela toca o solo na quadra do adversário.** Anote os conhecimentos matemáticos que estão presentes e são importantes nessa situação. Elabore um modelo para a situação no software Modellus e teste-o.

Situação 3 – Utilize o software Modellus e apresente solução para a seguinte situação-problema. **Recentemente, fui demitido de uma empresa e, com parte do valor da indenização que recebi, fiz um investimento financeiro de longo prazo, com taxa pré-fixada, para o meu filho pequeno. Nesse investimento financeiro, ele só poderá movimentar essa conta quando atingir a maioridade. Apresente um modelo para que eu possa verificar, em qualquer momento, o valor monetário desse investimento.** Anote os conhecimentos matemáticos que estão presentes e são importantes nessa situação. Construa um modelo para a situação no software Modellus e teste-o.

A elaboração desses problemas, que compõem a etapa de investigação, partiram de uma análise nos livros didáticos já citados, Dante (2004), Iezzi et al. (2004) e Smole e Diniz (2003), buscando verificar, nos problemas apresentados e sugeridos nesse material, aqueles que permitiam aos alunos a aplicação de todas as etapas de modelagem.

Essa busca nos fez observar a impossibilidade de encontrar esse tipo de problema, pois os problemas disponibilizados no material analisado, em sua maioria, utilizam os procedimentos padrão de resolução e alguns deixam os alunos livres para decidir o modo de resolução. Caracterizamos esses problemas como semi-abertos, por indicarem pistas importantes e apresentarem dados para auxiliar a resolução dos mesmos. Dessa forma, não foi possível encontrar problemas que permitissem a verificação do emprego de todas as etapas de modelagem.

Essa dificuldade nos levou à construção dos problemas, que foram selecionados para a aplicação das atividades. Entendemos que o tipo de problema de que necessitávamos não poderia fornecer pistas quanto ao conteúdo matemático a utilizar, sobre as estratégias de solução e também deveria ter o propósito de esconder elementos essenciais à sua resolução.

Como nossa preocupação era explorar o conhecimento de função Afim, Quadrática e Exponencial, buscamos construir os problemas a partir das situações cotidianas vivenciadas e observadas pelos alunos, que envolvessem esse tipo de conhecimento. Isso nos levou aos problemas elaborados, os quais estão sendo definidos como completamente abertos (aqueles que se caracterizam por não fornecerem pistas, não apresentarem dados numéricos e proporem uma quebra de contrato).

Consideramos um problema completamente aberto como aquele que congrega os mesmos objetivos do problema aberto (ARSAC et. al., 1991), acrescentando a esses objetivos, a necessidade de decidir pelos elementos construtores (grandezas envolvidas, Intervalos e valores que podem ser definidos para as grandezas, a composição das variáveis e o tratamento que se faz das mesmas, a seleção do campo de conhecimento e a delimitação do alcance quanto à aplicação do conhecimento envolvido), de forma a dar um sentido de resolução matemática (torná-lo equacionável) ao mesmo. Geralmente esse tipo de problema não é comum no ensino, pois são trabalhados em situações de modelagem matemática, por exigirem as etapas características dessa metodologia de ensino. Ainda podemos destacar que eles propõem uma pré-quebra de contrato, ao deixarem livre o aluno quanto a decisões que serão tomadas para sua solução.

Na literatura, os problemas matemáticos são discutidos como fechados e abertos. Os problemas fechados segundo Medeiros (2001, p.32) são aqueles que são ”*resolvidos por meio de procedimentos padronizados*,... *conhecidos também como problema-padrão ou problema clássico de matemática”.* Medeiros também discute, com base em outros pesquisadores, que esse tipo de problema limita a criatividade do aluno pelo motivo de se apresentar fechado, isto é, tem certas características que podem gerar verdadeiras regras de contrato didático. (ALMOULOUD, 1997; SMOLE, 1996; LOPES et al., 1994; FRANCHI, 1994; BULLY et al., 1995) Apud Medeiros (2001, p. 33).

Os problemas abertos têm uma característica importante que é a de evitar as regras de contrato didático estabelecidas (MEDEIROS, 2001, p. 34), deixando o aluno livre para decidir as estratégias de resolução e os conhecimentos matemáticos a utilizar.

Para o desenvolvimento de nossa pesquisa utilizamos problemas do tipo aberto, com modificações. Procuramos não fornecer os elementos construtores, deixando o aluno livre para tomar decisões quanto a esses elementos que poderiam ser incorporados aos mesmos. Dessa forma, entendemos que quando um problema congrega esse conjunto de relações (evitar regras de contrato didático, decidir sobre estratégias de soluções, escolher que conhecimento matemático utilizar ou decidir sobre os elementos construtores) torna-se completamente aberto.

V.2.3 Procedimentos de realização das atividades

Os sujeitos foram investigados trabalhando em duplas, sendo essas fixas, isto é, cada uma das duplas realizaria as três atividades já apresentadas anteriormente.

Os sujeitos não foram induzidos a nenhuma informação relativa ao conteúdo da pesquisa, apenas detinham o conhecimento relativo ao software Modellus e aqueles que dispõem a partir de sua história de vida, como estudante de ensino médio, relativos ao conhecimento de função.

A seqüência de atividades foi oferecida no espaço do laboratório de informática de um curso de licenciatura em Matemática em uma faculdade da região metropolitana do Recife.

As atividades realizadas com cada dupla de sujeitos foram acompanhadas pelo pesquisador, através de gravação e filmagem em todo o seu desenvolvimento.

O desenvolvimento dos sujeitos foi analisado após cada encontro, como forma de verificar o grau de compreensão que eles passavam a adquirir após cada sessão de investigação.

Para preservar as identidades dos sujeitos, utilizamos pseudônimos para cada um deles.

V.2.4 - O software Modellus

O software Modellus (ver figura 24)apresenta-se adequado à produção de modelos de situações que fazem referência à aplicação de conceitos matemáticos, de forma que esse recurso, no caso de nossa pesquisa, é um elemento necessário para realização do nosso estudo.

O Modellus é um software desenvolvido por Vitor Duarte Teodoro, João Paulo Duque Vieira & Filipe Costa Clérigo (1996). Esse software permite a construção de simulação a partir de um modelo algébrico que representa uma determinada situação-problema. As propostas de uso desse software proporcionaram o enriquecimento de diversas investigações, que buscavam verificar o nível de compreensão que estudantes apresentavam relativos a alguns conceitos de física e matemática.

Em nossa pesquisa, ao simular a representação de uma situação-problema no Modellus, pretende-se que o software dê como retorno ao aluno uma simulação que permita a validação de sua construção. Assim, podemos identificar o conhecimento apresentado pelo aluno na situação, a partir da construção do modelo algébrico que ele elaborou e procurou validar no software.

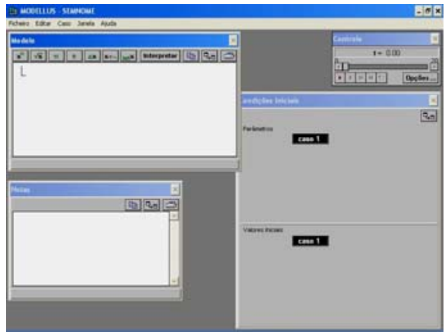


Figura 24 -Tela inicial do Software Modellus

V.2.5 - A ação do pesquisador

O trabalho do pesquisador durante a fase experimental de realização da pesquisa, constituiu-se na seleção e formação das duplas, agendamento do local e horário para aplicação das situações-problema que compunham a seqüência de atividades, orientação quanto ao início do procedimento de investigação devido à instalação do equipamento de gravação e declarar encerrada a atividade, quando julgava que os sujeitos realizaram a tarefa. Outro ponto importante foi orientar a pessoa responsável pelo uso dos equipamentos de gravação, observando, nesse sentido, se funcionavam corretamente e a posição em que deveriam ser colocados na sala do laboratório.

Durante a aplicação das atividades, a ação do pesquisador também ocorreu no sentido de acompanhar as atividades dos sujeitos, responder a questionamentos ou dúvidas em relação a algo que não compreendiam e em último caso, estimular os sujeitos a fornecerem informações quando isto não estivesse ocorrendo, sem, no entanto, interferir com relação ao "fazer" dos trabalhos realizados pelos sujeitos. Outro ponto importante foi observar que não houvesse interferência externa, de forma a não prejudicar o trabalho de coleta.

A ação do pesquisador também ocorreu quando da elaboração da seqüência de atividades que foi gerada para aplicação e obtenção dos dados da pesquisa. Sua ação está no fato de buscar o enriquecimento do campo de investigação, através da observação dos passos realizados pelos sujeitos durante a aplicação da seqüência de atividades ou no processo de análises dos protocolos que foram gerados. Portanto, as ações do pesquisador ocorreram no sentido de garantir elementos que pudessem enriquecer a qualidade dos dados da pesquisa.

V.2.6 – Cronograma de atividades

Foi estabelecido um cronograma de atividades buscando trabalhar de forma seqüencial, utilizando uma dupla por vez. A primeira dupla, a partir de negociação com o horário de coleta, aceitou ser trabalhada em pré-horário de aula, iniciando às 17h e encerrando possivelmente às 18:30h. Dessa forma, foram aplicadas as três atividades em dias seqüenciados de uma mesma semana.

Com relação à segunda dupla de sujeitos, pelo motivo de um dos componentes trabalhar até às 17:30h, não foi possível estabelecer a sistemática de pré-horário. Portanto, ficou decidido que, aos sábados ocorreria a coleta de dados relativa as três atividades, estipulando-se o horário entre 9:00 e 12h. Dessa forma, a coleta com a dupla dois iniciou-se no primeiro sábado, no horário de 9:35h e encerrando às 11:20 h. No sábado seguinte, iniciamos a atividade dois às 9:10h e observamos que foi possível realizar a coleta dos dois últimos problemas, visto que, após a primeira atividade, a dupla já estava familiarizada com o tipo de questão e levou menos tempo para resolver o problema 2, encerrando às 10:25h. Por sugestão do pesquisador, foi concordada a aplicação do problema 3 nesse mesmo sábado, iniciando às 10:35h e encerrando às 11:40h.

A coleta de dados realizada com a dupla 3, ocorreu primeiramente em um dia de sábado, em que se trabalhou o problema 1. As atividades foram iniciadas às 10h, visto que a dupla, por motivos particulares, não conseguia chegar em horário mais cedo. Os trabalhos nesse primeiro encontro encerraram-se às 11:30h. Para a coleta do segundo problema, a dupla sugeriu participar das atividades em pré-horário, visto que aos sábados estavam sofrendo prejuízo em suas atividades do dia a dia. Concordamos em utilizar o horário entre 17:30h e 18:40h. Desse fato, ocorreu que utilizamos dois dias da semana seguinte para a coleta dos problemas 2 e 3.

Cronograma de atividades		
Atividades com a dupla 1	Problema 1	Atividades em pré-horário. (17 h as 18 e 30 h).
	Problema 2	Atividades em pré-horário. (17 h as 18 e 30 h).
	Problema 3	Atividades em pré-horário. (17 h as 18 e 30 h).
Atividades com a dupla 2	Problema 1	Atividades aos sábados. horário (9 h. as 12 h).
	Problema 2	Atividades aos sábados. horário (9 h. as 12 h).
	Problema 3	Atividades aos sábados. horário (9 h. as 12 h).
Atividades com a dupla 3	Problema 1	Atividades aos sábados. horário (10 h. as 12 h).
	Problema 2	Atividades em pré-horário. (17:30 h as 18 e 30 h).
	Problema 3	Atividades em pré-horário. (17:30 h as 18 e 30 h).

V.3 – Análise dos dados

Os dados coletados foram submetidos a uma análise qualitativa, buscando-se verificar habilidades e procedimentos dos sujeitos na realização das tarefas. Destacando-se o fato de como eles iniciam a solução de cada problema, o que discutem em relação à tomada de decisão para resolver a situação, quais procedimentos que utilizam através do software para apresentar o modelo solução da situação-problema ou ainda, observar em que ponto dessas análises ocorre o surgimento de habilidades para modelar a situação-problema.

Foi analisada a potencialidade do software como ferramenta de auxílio para elaboração de modelos gráficos, algébricos, simulados ou apresentados por tabulação.

A seleção dos dados foi realizada a partir dos elementos contidos na gravação e filmagem, além de observações efetuadas pelo pesquisador durante a gravação das atividades.

Para realização da análise qualitativa, utilizamos o software **NUD*IST**, versão 4.0, ilustrado na Figura 25.

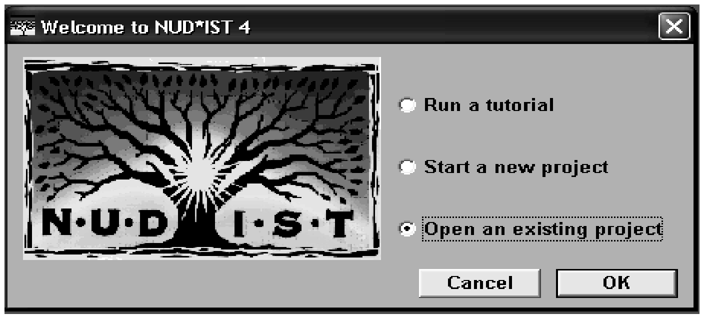


Figura 25 - Janela inicial de apresentação do software Nud*ist.

Este software permitiu a organização dos elementos de análise e nos auxiliou na estrutura e organização dos dados, facilitando o agrupamento dos elementos presentes na pesquisa (duplas, atividades, habilidades, elementos de contrato didático, dificuldades e destaques das atividades).

As duplas tinham sido informadas que deveriam resolver três problemas matemáticos no computador utilizando o software Modellus. Informamos também sobre a necessidade de gravação e filmagem de suas falas e ações durante a realização de cada uma das atividades, sem, no entanto, informar se tratar de uma atividade de modelagem. Portanto, o acordo tipo contrato experimental foi tratado nesses termos com as três duplas de estudantes que concordaram em participar. O início de cada uma das atividades aconteceu na sala do laboratório de informática com os equipamentos gravação, filmagem e computador ligados.

Após a aplicação das atividades, compomos um capítulo referente à análise dos dados com os seguintes tópicos:

- As análises das atividades realizadas com as três duplas de sujeitos;
- Uma síntese por atividade, cruzando as três duplas;
- Análise das habilidades mobilizadas pelos sujeitos, quanto: ao conhecimento matemático envolvido, quanto às etapas de modelagem,

quanto ao uso do software e por fim quanto ao conhecimento de representação;

- Discussão dos elementos de contrato didático que foram identificados nas ações dos sujeitos.

CAPÍTULO VI – ANÁLISE DOS RESULTADOS POR ATIVIDADE

VI.1 – Análises da Atividade 1

O desenvolvimento dos estudantes durante a investigação indicou que eles trabalhavam conhecimentos específicos em certos momentos da realização das atividades. Dessa forma, compusemos as análises no que chamamos de "episódios". Cada um desses episódios correlacionava-se com o tipo de habilidade mobilizada.

VI.1.1 – Análise da realização da atividade 1 pela dupla 1

Episódio 1: Contextualização do problema e identificação dos elementos construtores.

Utilize o software Modellus e apresente solução para a seguinte situação-problema. ***Você é dono de um excelente restaurante e deseja construir um modelo que represente a forma de cálculo do salário a ser pago a cada garçom do seu restaurante***. Faça anotações de quais conhecimentos matemáticos estão presentes e são importantes nessa situação. Construa o modelo da situação no software Modellus e teste-o.

Tedymar e Ado, após fazerem a leitura do problema, iniciaram uma primeira discussão no sentido de buscar as decisões que deviam tomar para resolver o problema.

Ado: Aqui nesse problema,....
Tedymar: A gente vai ter quer construir utilizando conhecimentos de matemática do dia-a-dia. O garçom recebe além do salário, uma porcentagem de 10%.

Na compreensão de Tedymar, o tipo de problema traz uma situação do cotidiano, não comum àquelas que geralmente vivencia na escola. Tedymar, ao afirmar que deve fazer uso de conhecimentos matemáticos do dia-a-dia, evidencia que essa compreensão foi gerada pelo tipo de problema. A situação que eles enfrentam parece não ser do tipo das que vivenciaram na escola. Nota-se a sua preocupação quanto à necessidade de algumas decisões que devem ser tomadas. Estão diante de um problema do tipo completamente aberto – em que o aluno necessita definir o campo de conhecimento matemático a utilizar, relacionar ao conhecimento de outras áreas quando há necessidade, delimitar grandezas envolvidas, definir valores associados às grandezas, delimitar o alcance da solução, incluir elementos construtores para uma melhor compreensão, além de selecionar corretamente as variáveis para equacioná-lo. De certa forma, apesar dessa novidade, Tedymar trata o problema com simplicidade**,** pois seu comentário indica apenas a necessidade de fazer uso de conhecimentos matemáticos do dia-a-dia.

As primeiras decisões começam a ser tomadas no sentido de reconhecer o campo matemático do problema, decidir os valores, definir as variáveis e os intervalos numéricos a serem considerados. Eles definem que o empregado deverá ter além do salário fixo, um acréscimo de 10%, taxa normalmente cobrada pelo serviço de garçom aqui no Brasil.

> **Ado**: Aqui no problema não fala nada de porcentagem Tedymar. [Ado verifica que na leitura do problema nada se falou de porcentagem].
> **Tedymar:** Sim, mas ai, evidentemente não tem. Mas quando vai pagar a conta, sempre tem os 10% do garçom. Tem que se construir. [Tedymar reconhece a necessidade de apresentar dados complementares ao problema]

Ado procura intervir sobre a ação que possivelmente será executada por Tedymar ao afirmar: "*Aqui no problema não fala nada de porcentagem*". Ado age segundo regras comumente vivenciadas na matemática escolar, em que só se trabalha com informações indicadas no problema. Ele não percebeu que o problema necessita de decisões sobre as grandezas envolvidas, variáveis a serem tomadas e a definição de valores numéricos a partir das grandezas para modelar o problema, de modo que a tomada de decisão de Tedymar busca incluir os elementos construtores que não participam do problema, percebidos a partir de sua leitura.

Tedymar, ao reforçar a idéia de que para esse tipo de problema, "*tem que se construir*", leva-nos a entender que ele percebe que deverá complementar os dados do problema, para melhor equacioná-lo. Dessa forma, mostra a necessidade de incluir os *elementos construtores* do problema. Portanto, Tedymar começa a fazer uso desses elementos construtores, quando define o percentual que é comumente cobrado ao cliente nesse tipo de situação. Ele entende que esse percentual vai modificar o valor monetário que deverá ser pago ao garçom, conhecimento esse trazido do cotidiano vivido por Tedymar.

Este primeiro episódio revela algumas habilidades dos alunos ao explorar uma situação de modelagem:

- Criar elementos construtores para descrição do problema.
- Definição de uma linha de construção para solucionar o problema.
- Abordar o problema como um fenômeno real.

As ações que Tedymar vem evidenciando indicam uma tomada de decisão quanto a identificar grandezas e definir valores e variáveis que não estão sendo informados. Ele percebe a necessidade de acrescentar os elementos construtores, de forma a complementar o problema, para chegar ao modelo algébrico. Observamos que Tedymar buscou primeiro uma linha de re-construção do problema antes de partir para sua resolução, contrariamente ao que Ado propôs.

Nesse sentido, notamos que a dupla é levada a construir o significado do problema, pois além de tratá-lo como um fato real, verificam a necessidade de "*utilizar conhecimentos do dia-a-dia*" (referência ao cotidiano) para complementá-lo e dessa forma poder chegar a uma solução.

Episódio 2: A elaboração do modelo algébrico realizada pelos alunos.

Antes de chegar a uma equação, Tedymar traz um modelo verbal que correlaciona as variáveis. Tedymar defende um esquema (modelo) e, como ele vem expondo em suas idéias, deverá ter as seguintes bases:

Salário = salário fixo + percentual de contas pagas,

Sua compreensão indica que "*O garçom recebe além do salário, uma porcentagem de 10%*" ou ainda quando reforça essa compreensão ao afirmar: *"quando vai pagar a conta, sempre tem os 10% do garçom"*.

Mesmo Tedymar já apresentando as bases de um modelo algébrico para o problema, Ado afirma que não é só isso que se deve tratar no salário de um garçom. Para ele, ainda existem elementos a considerar.

Após essas discussões, eles decidem por fazer uma anotação no papel da atividade. Essa anotação parece representar a compreensão que Tedymar vem defendendo para uma expressão modelo. A expressão que eles anotam é uma representação do valor de salário a ser pago ao garçom, apresentada em sua forma original, revelando a conexão com a realidade do padrão comercial atual (ver Figura 26).

Tedymar: Quanto deve ser o salário de um garçom? Um salário mínimo?
Ado: 400.
Tedymar: 400 reais.
Ado: bota 350 reais.
Tedymar: Tá bom, 350, mais 0,1 vezes a quantidade de contas pagas.

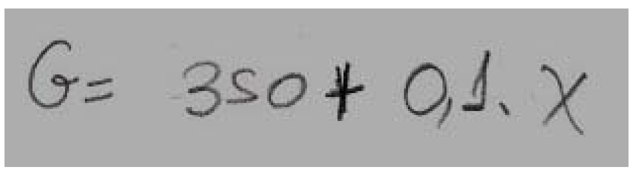


Figura 26 – Anotação realizada por Tedymar para representação de um modelo algébrico

A expressão definida por eles **Salário = 350 + 0,1** x **X,** indica que **X** corresponde a "*quantidade de contas pagas"*, conforme diálogo anterior. Na compreensão de Tedymar o salário do garçom passa a ser representado por uma parte fixa (**R$ 350**), mais um acréscimo de 10% do total de contas pagas. Ado, no entanto, ainda questiona o valor do percentual que será calculado em cima das contas pagas, como no diálogo a seguir.

Ado: Esse percentual de 0,1 que você colocou aqui é em relação a quê?
Tedymar: Esse é o 10% do garçom. Se tu pagar uma conta, tu vai ter 0,1 por cento [referente a 10%].
Ado: Mas ele tá falando só o salário do garçom, o salário dele ai é só 350. Se você colocou esse 0,1 ele é em relação a quê?
Tedymar: Os 10% é do garçom?
Ado: Você tinha colocado em relação ao garçom.

Nota-se que ainda há uma falta de clareza quanto ao que se refere a variável X, ora é a quantidade de contas pagas, ora é o valor pago. Ado entende que o problema enfatiza o salário do garçom e não evidencia nada em cima de "*contas pagas*". Ele, ao afirmar: "*Esse percentual de 0,1 que você colocou aqui é em relação a que?*", entende que o valor referente aos 10% de acréscimo no valor da conta, que está sendo proposto por Tedymar, não está constando nos dados do problema e que deve ser melhor explicado. O questionamento de Ado é para saber como e porque foi incluído no problema esse dado numérico, o qual não constava e como será realizado o cálculo a partir desse novo elemento. Em cima de qual valor referencial e que intervalo deve ser estabelecido.

Tedymar parece não entender ainda a preocupação de Ado, pois sua convicção é de que precisa primeiro inserir no problema os elementos construtores. Além disso, notamos que o problema também leva a diferentes alternativas no modo de abordagem, como já verificado nos questionamentos levantados por Ado. Tedymar, diferente de Ado, buscou desde cedo associar o problema a uma situação do cotidiano, enquanto Ado está preocupado em uma solução com bases no contrato didático recebido na escola, levando em consideração apenas os dados informados no problema e com a consistência interna do modelo matemático.

Na compreensão de Tedymar o problema deve ter uma solução do tipo **salário = salário fixo + percentual de acréscimo**. No entanto, Ado parece evidenciar a solução apenas como um **Salário fixo**. O diálogo a seguir reflete parte dessa compreensão.

> **Ado**: O problema não está pedindo isso?
> **Tedymar:** Sim, mas ele está pedindo da gente para usar conhecimentos matemáticos do nosso dia-a-dia.

A intervenção de Tedymar mostra que ele procura trabalhar o problema, criando alternativas e incluindo os elementos construtores, decidindo a partir daí as variáveis a serem postas para compor o modelo de solução do problema. Nesse sentido, ele faz um questionamento importante a Ado, indicando que está relacionando a situação-problema a um caso real, como mostra a fala abaixo:

> **Tedymar:** Quando você vai a um restaurante, você paga a conta e mais 10% do valor da conta é somado como salário adicional para o garçom. Só que no caso, 10% de comissão por cada garçom. Só que no caso eu não vou atribuir esses 10%...

Nesse momento, Tedymar fica por um instante pensativo, demonstrando que a sua compreensão do modelo, já anotado no papel, não parece satisfazer por completo todas as situações possíveis para esse tipo de caso. Então resolve mudar, como mostra o trecho abaixo:

> **Tedymar:** Fica 350 mais a comissão. Eu quero dar 10% de comissão por cada...
> **Ado**: Então 10%, a gente pode dizer que **X** é a quantidade de garçons.
> **Tedymar:** Não, porque a quantidade de garçons é **G**... é um garçom só... **G** é a quantidade de garçons. Quanto é que eu vou pagar a um garçom ele quer saber do salário que deve ser pago a cada garçom. Então isso aqui é um garçom. [apontando para o G da expressão anotada no papel]. A um garçom eu vou pagar 350 reais, o salário fixo dele. Se no caso nosso restaurante... mais 0,1 que é 10% de cada venda.

Neste momento, vemos a clara necessidade dos estudantes de explicitar e chegar a um consenso do significado de cada variável utilizada. O diálogo entre eles parece ter gerado uma confusão quanto à decisão pela variável sobre a qual se deve calcular os 10%. Tedymar começa a reconhecer que o modo pensado por ele deve ter outra compreensão. Dessa forma, procura verificar o que se deve levar em conta no acréscimo do salário do garçom. Ele parece ter percebido que a comissão estipulada por ele deve ser trabalhada com outro sentido.

Um fato importante que estamos observando é que a dupla ainda tenta identificar a presença de novos elementos construtores que possam fazer parte do problema. Eles estabelecem um cenário real para discutir a situação-problema, vivenciam ações de análise a partir desse cenário, tratando-o como um fato que ocorreu em um restaurante, pagando a conta e percebendo que deverá ocorrer um acréscimo de 10% no valor da conta. Diferentemente do problema aqui vivenciado, os da escola, geralmente, não necessitam da inclusão de elementos construtores. Pois informam o campo de aplicação, detalha as grandezas envolvidas e dá pistas das variáveis que deverão ser trabalhadas. Desta forma, cria-se uma regra implícita de contrato no sentido de que esses elementos vêm explicitados no material didático utilizado por alunos e professores, não sendo papel do aluno essa explicitação.

Observa-se uma inversão. No ensino, comumente se tem o problema e tenta-se associá-lo a uma representação real, para que se dê sentido ao mesmo. No caso de modelagem aqui estudada, observa-se que os estudantes buscam a partir do que a situação apresenta de realidade, a composição do problema por meio da inclusão dos elementos construtores, de forma a complementar e identificar os dados referentes ao mesmo.

O segundo episódio nos permite sintetizar as seguintes habilidades:

- Construção de uma fórmula a partir de modelo previamente concebido.
- Busca de significado das variáveis utilizadas.
- Reconhecimento de que a atividade é uma representação de um fato real.
- Vivência da situação-problema como realidade.

Episódio 3: Problematização, hipóteses e prévias de validação do modelo algébrico.

No papel onde anotaram a expressão, resolvem apagar e reconstruí-la, só que nos mesmos termos da discussão. Dessa forma, os mesmos elementos voltam a ser reafirmados. Outro ponto observado é que, mesmo decidindo por esse modelo **G = 350 + 0,1** x **X**, Tedymar e Ado ainda não chegaram a um consenso (ver Figura 27). Ado não está convencido de como será feito esse cálculo, referente aos 10%, "*é em cima de quê*?".

Tedymar: De cada venda, de cada cliente que sai do restaurante. Que é...
Ado: Que é 0,1 vezes **X**.
Tedymar: Que é. Esse é o meu caso, que eu vou pagar a ele, que é esse **X**, que vai ser a quantidade de pessoas, de contas que foram pagas a ele. Um garçom só [Dificuldade para caracterizar a variável quantidade X valor].
Ado: É. Vamos dizer que existe uma quantidade de pessoas e de cada pessoa ele vai ter 10% do valor da conta que ele atendeu.
Tedymar: É. Ele vai ter 10% de cada pessoa que ele atendeu.

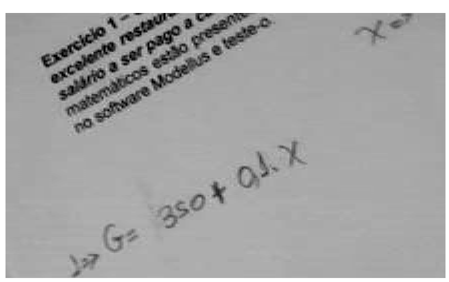


Figura 27 – Visualização do modelo algébrico escrito por Tedymar no papel.

Ado demonstra construir uma representação mental para a situação, trazendo um fato real para análise. Ele se dá conta de que deve constar nesses 10% um cálculo do somatório de todas as contas, e que esse valor calculado deverá ser somado ao valor fixo, gerando assim o salário final estabelecido pelo modelo que criaram.

Tedymar parece ainda ter dúvidas quanto ao cálculo do acréscimo, como deverá ser realizado, se apenas em cima de uma conta ou do total de contas. Parece que ele não entende como separar tal situação.

O pensamento de Tedymar é como decidir sobre o cálculo dos 10%. Este fator entra em toda a arrecadação das mesas atendidas ou como seria dividido esse rateio, em um restaurante com mais de um funcionário.

> **Tedymar:** Só que eu quero pagar isso, então no restaurante, num excelente restaurante, não tem menos que cinco garçons. Há mais. Então esse é um preço de um garçom.
> **Ado**: Mas o que é que a gente pode fazer. A gente pode comparar, a gente pega por exemplo um garçom, primeiro garçom, ele atendeu 5 pessoas durante a noite, garçom Nº dois atendeu 3. A gente faz um gráfico para mostrar quanto cada garçom atendeu. Tudo certinho.
> **Tedymar:** Então no caso a gente cita nomes. Pronto, então vou citar aqui......
> **Ado**: Vamos determinar quantos garçons deve ter no nosso restaurante.
> **Tedymar:** Vamos supor seis, porque num restaurante de excelente qualidade não deve ter um número de garçons muito baixo, no mínimo seis garçons.

Apesar de a dupla já ter decidido sobre um modelo algébrico para a situação, $\boxed{\mathbf{G = 350 + 0{,}1} \times \mathbf{X}}$, ainda são levados a buscar uma compreensão desse modelo em outros termos. Procuram por respostas que ainda poderiam ser interpretadas no problema. Buscam construir novas situações e casos específicos para o problema. Chegam a atribuir valores diferenciados para a variável atendimento que está relacionado às situações que eles criaram para cada um dos seis garçons, empregados do restaurante (ver **Figura 28**), cada garçom atendendo um número diferente de pessoas. Nesse momento, observamos que Ado passa a associar a variável **X** também relacionada a pessoas atendidas.

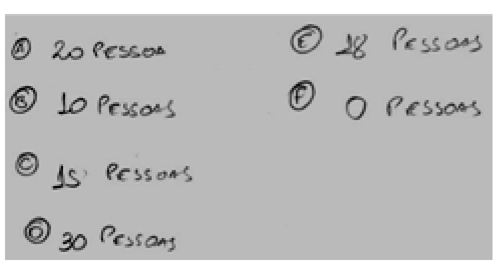


Figura 28 – Anotação feita por Tedymar para casos específicos de atendimentos dos garçons

Como o problema leva a uma série de variações quanto à interpretação e abordagem, a dupla começa a criar casos específicos de cálculo para o salário de cada garçom. Essa é também uma forma de validação do modelo, pois ao tratar casos específicos estão buscando resultados de verificação do modelo.

> **Tedymar:** Só que tem um porém. Esse aqui é o salário que eu vou pagar a ele por mês e isso aqui é o que ele conseguiu receber, conseguiu fazer em um dia. Então tenho que saber quantas pessoas tem recebido por mês.
> **Ado**: Então vamos determinar isso ai, determina para cada garçom a gente faz um cálculo mensal. O garçom **A** durante o mês ele atendeu 20 pessoas... então a gente determina já mensal, a quantidade de pessoas.

O modelo elaborado $\boxed{\mathbf{G = 350 + 0,1} \times \mathbf{X}}$, agora será trabalhado no sentido de realizar a validação de situações específicas de salário. A dupla procura trabalhar casos individuais como uma saída para entender se o modelo responde a esses casos individuais de salário. Apesar de trocar o significado antes discutido da variável, Ado parece necessitar de uma validação desse fato. Essa compreensão de Ado de estipular situações diferenciadas para cada garçom, leva a entender que o cálculo será realizado a partir de um tempo relativo a mês "para cada garçom a gente faz um cálculo mensal" e não a poucos atendimentos realizados em um dia. É importante salientar que, nesse momento, eles passam a tratar a situação como um caso de função, variando a variável para validar o modelo.

> **Tedymar:** Vamos supor que o garçom **A** atendeu no mês 20 pessoas, o garçom **B** atendeu no mês 10 pessoas, o garçom C...... [Nota-se a decisão de informações fora da realidade, menos de 1 freguês por dias].
> **Ado**: O garçom **C**, 15 pessoas,
> **Tedymar** 15 pessoas.
> **Ado:** O garçom **D**, 30 pessoas,
> **Tedymar** O garçom **E vou colocar** 18 pessoas e pro garçom F que teve o azar de não atender ninguém, zero pessoas, não atendeu ninguém. Bora lá.
> **Ado:** Tá bom.
> **Tedymar** Então, o garçom **A** ele em um mês ele vai tirar:
> **Ado:** Garçom **A** vai tirar **350 + 0,1** vezes **20** ➔ **Ga = 350 + 2** ➔ **Ga = 352** [Equívoco no significado de x].

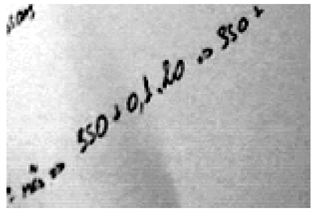


Figura 29 – Cálculo realizado no papel por Tedymar para um dos casos específicos de salário

A necessidade de cálculos leva os estudantes a trabalharem no computador, como mostra o trecho a seguir.

> **Ado**: Acho melhor fazer no computador, pois a gente joga tudo, fica melhor.
> **Tedymar** Certo. A gente vai fazer a lei de formação. Fica **X = 350 + 0,1** x **t.** interpreta. O atendimento será no máximo 20.

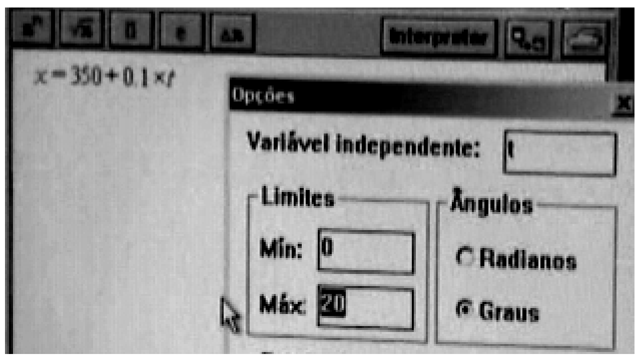


Figura 30 – Apresentação do modelo e a definição do intervalo na janela de opções do Modellus.

Nesse terceiro episódio sintetizamos o trabalho dos alunos identificando as seguintes habilidades:

- Buscar enriquecimento da solução de um problema, por meio da análise de casos particulares.
- Validar situações e casos no modelo.
- Necessidade de redefinir os elementos construtores do problema.
- Valorizar a importância de um software na automação das contas.

Episódio 4: Uso do software como ferramenta auxiliar de validação e representação.

Neste tipo de atividade, a dupla reconhece o software como um recurso essencial. A dupla agora procura validar as ações que tomaram quanto aos novos valores que estão trabalhando, utilizando o software como um recurso em que é mais rápido testar os valores a partir do modelo construído. Esta possibilidade impulsiona a dupla na validação.

Observamos que a dupla, ao mudar o foco da construção do valor percentual que estava sendo referenciado para "*contas paga*s", mostra que se perderam em pontos essenciais na análise que estavam realizando, pois agora estão calculando o percentual associado ao número de <u>clientes atendidos</u> e não em cima do <u>valor</u> pago por eles.

Tedymar no computador procura executar o programa para testar a expressão **X = 350 + 0,1** x **t**. Ele volta a abrir a janela de opções, define o intervalo para [**0, 20**], a variável independente é deixada como **t,** pede um novo gráfico, seleciona a variável **x** na janela do gráfico e executa novamente o programa, tendo como *feedback* a seguinte representação.

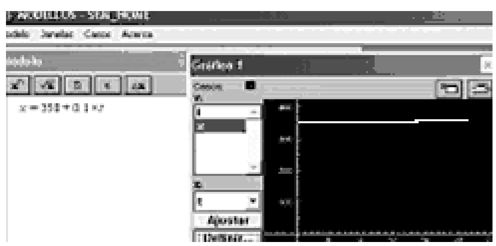


Figura 31 – Apresentação do Gráfico do salário do garçom A na janela de gráfico

Nota-se que o 20 era a quantidade de contas pagas e é registrado como limite superior do domínio de função, trazendo uma confusão entre valores de variáveis.

Tedymar: Aparece apenas uma pequena mudança no salário. O gráfico aqui está subindo, mostrando que não diferenciou muito.
Ado: Não diferenciou muito. Mas, eu estou interessado ai no que ele gastou com cada garçom. A gente deve mostrar na tela cada um.
Tedymar: Deixa eu fechar esse daqui [fecha a janela *gráfico*]. Vou abrir outro gráfico para ver o garçom B. Ele teve 10 pessoas.

Ao observarem o gráfico oferecido pelo software para a situação **A**, percebem que a variação é muito pequena. A representação do gráfico não oferece uma inclinação como eles desejavam. Esse valor foi pequeno porque decidiram tratar o valor independente bem reduzido, como pessoas atendidas. Mostram que estão fazendo confusão quando adicionam grandezas distintas: valor monetário e pessoas. Claramente, não há uma análise das grandezas nem das unidades que estão sendo operadas na expressão criada.

Além disso, apesar de tratar corretamente a situação no modelo algébrico atribuindo para cada garçom um valor de **X**, o gráfico é tratado como se para cada garçom correspondesse um gráfico diferente, e não um ponto no domínio. Eles alteram o domínio. Por exemplo, Tedymar intrigado com essa questão, volta a redefinir o intervalo, agora pensando no garçom da situação **B**, pois em **B** ele atende 10 pessoas. Executa o programa. O diálogo a seguir indica que esperava outro resultado.

Figura 32 – Apresentação do Gráfico do salário para o garçom B.

Tedymar: Se o outro já não teve diferença, esse ficou quase no mesmo valor do salário fixo.
Ado: é
Tedymar: Agora o garçom **C** que só teve 15 pessoas atendidas.

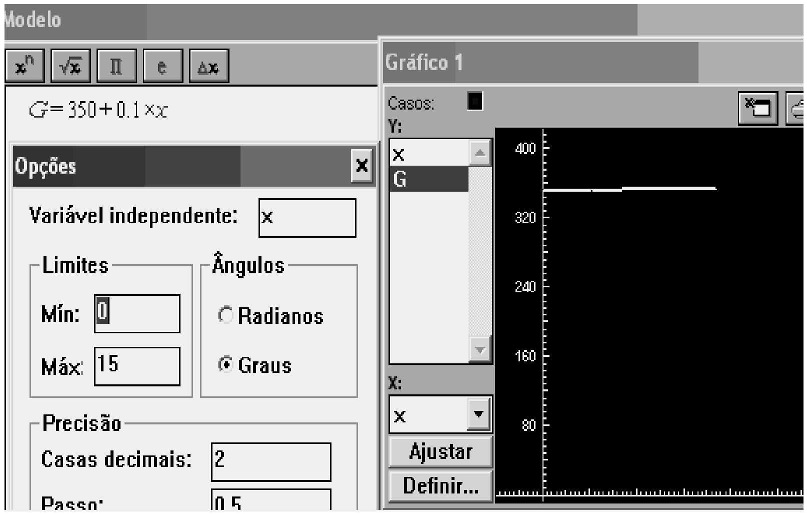


Figura 33 – Gráfico do salário para o garçom C

Tedymar: Está havendo pouca alteração no preço deles.....
Ado: Esse aqui já teve uma boa melhora. [refere-se também ao garçom D].
Tedymar: É. Só o garçom **D** é que até aqui teve um maior salário.

Ocorrem várias tentativas até se darem conta de que a modelagem estava equivocada.

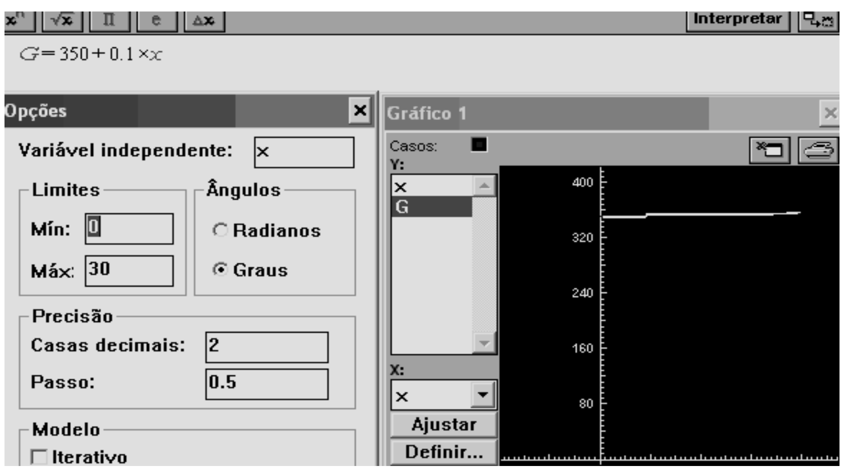


Figura 34 – Gráfico do salário para o garçom D

Tedymar: Vamos agora para o **E** que não conseguiu nada. Veja que quanto maior o número de pessoas mais acentuado é o gráfico. A função é do primeiro grau, que representa o salário dos garçons.
Ado: Como ele não teve clientes, ele vai ter um salário fixo.
Tedymar: Felizmente não dá para ver nada no gráfico do funcionário **F**.

Decidem representar no computador os gráficos referentes a cada caso (salários individuais de seis garçons) buscando observar a variação do gráfico que indica o salário final dos garçons. Observamos a preocupação com inclinação que ocorreu na representação de cada gráfico.

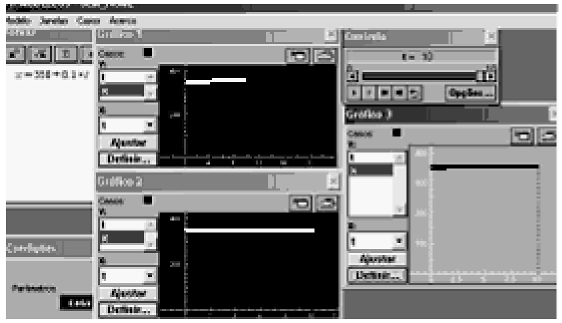


Figura 35 – Gráficos individuais dos salários dos garçons a partir de intervalos diferentes.

Tedymar afirma que o modelo que estão apresentando vai explicar a situação-problema, cada garçom terá um adicional além do salário fixo, uma percentagem a mais, ganhando mais do que o salário fixo. Já Ado, ao sugerir fazer gráficos separados para indicar situações individuais de cada um dos garçons, para ilustrar todos os casos, ao mesmo tempo, na tela do computador, encontra dificuldades quanto a essa proposta, por isso buscou uma verificação em que fosse possível visualizar todos os casos para validar o modelo.

As funcionalidades do software ampliam a possibilidade de testagem das opções de modelagem.

> **Ado**: Vamos tentar fazer aqui uma situação para ilustrar todos os gráficos. Repete essa lei de formação aqui [referindo-se ao modelo], já colocando no lugar de **X** o valor, tem condições? Vamos supor que aqui seja o garçom 1, depois o 2, o 3, pede para interpretar todos os gráficos, num só.
> **Tedymar:** Vou ver.

A partir do caminho sugerido por Ado, Tedymar anota na tela principal do Modellus os valores referentes aos atendimentos de cada garçom, criando as variáveis, $\mathbf{t_1 = 20, t_2= 10, t_3= 15, t_4= 30, t_5= 18, t_6= 0}$, pede para interpretar, abre a janela de gráfico e seleciona no software todas as variáveis. Ajusta a imagem e observa o resultado. Aparece na tela do computador uma única janela de gráfico apresentando a representação dos sete gráficos obtidos a partir do modelo e das definições dada para os casos de **t**. Sendo seis gráficos constantes referentes às definições dos valores atribuídos a $\mathbf{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5}$ **e** $\mathbf{t_6}$ e um gráfico da função linear $\boxed{\mathbf{X = 350 + 0{,}1} \times \mathbf{t}}$ como mostrado na Figura 36.

Se os estudantes pensassem num valor de pessoas atendidas mais substancial (20 por dia ou mais ou menos 500 por mês) talvez não percebessem o equívoco na modelagem.

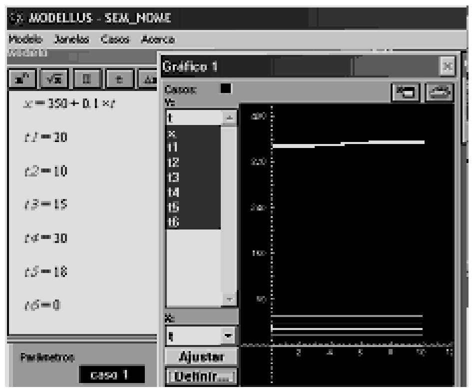


Figura 36 – Gráficos do modelo e referentes aos valores fixados para t1, t2, t3, t4, t5 e t6

A partir dessa ação, Tedymar não está convencido dessa tentativa de verificação sugerida por Ado, pois o que visualizam são representações gráficas de funções constantes e o gráfico representado para o modelo que tinham desenvolvido anteriormente. Tedymar resolve apagar os valores e as variáveis ($\mathbf{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5}$ **e** $\mathbf{t_6}$). Explica que o software não conseguiu ler a variável estipulada. Eles demonstram dificuldade em utilizar o software para determinar na função a representação de valores diferenciados. Confundem a obtenção de um gráfico com a obtenção de um ponto no mesmo gráfico.

> **Tedymar:** O que eu não estou conseguindo usando essa técnica. [Volta a discutir os dados anteriores]. Pelo menos conseguimos ver a variável, a variação de preço de cada garçom... está mostrando que não é muito, não chega a tanto a diferença entre cada garçom.
> **Ado**: No caso ai, o conhecimento matemático que a gente usou...
> **Tedymar:** A lei de formação.
> **Ado**: Na lei de formação, a gente chegou a usar porcentagem, que são os 10% de cada garçom, acho que a gente colocou o ideal. Através desse conhecimento chegamos a apresentar a função.
> **Tedymar:** Que é do primeiro grau. Afim.
> **Ado**: Mais alguma coisa, professor.

Nota-se da parte de Ado uma desconfiança de que o modelo matemático não satisfaz a situação, gerada quando Tedymar comenta "*não chega a tanto a diferença entre cada garçom*" e ele reponde "*No caso aí, o conhecimento matemático que a gente usou*". A partir da verificação de que as sugestões não foram bem sucedidas, Ado parece concordar com o modelo anterior definido por Tedymar que é $\boxed{\mathbf{X = 350 + 0{,}1.t}}$, desistindo da tentativa de apresentar uma comparação dos salários de cada garçom sendo representados através de vários gráficos no computador. Dessa forma, concordam com o modelo algébrico elaborado Ado informa que a tarefa foi concluída e pede a intervenção do professor.

Durante essa fase do quarto episódio, as seguintes habilidades merecem destaque:

- Reconhecimento da especificidade de um conhecimento matemático (função constante e afim).
- Capacidade de formular exemplos de situações matemáticas.
- Escolha por um tipo de representação oferecido pelo software.
- Busca no software uma forma de representação em que seja possível apresentar variação de valores.

Episódio 5: Conhecimento matemático validado no modelo

A dupla após discutir sobre o valor constante do salário quando não houver acréscimo a partir do modelo elaborado, reconhece na situação um modelo de função afim. Isto os leva a uma análise das possíveis situações que estão envolvidas. Dessa forma, chegam a exemplificar por meio de situações matemáticas, fatos referentes ao problema.

> **Professor**: No trabalho de vocês, observo que fizeram um gráfico para cada garçom, mas o que está escrito no problema é que fosse apresentado um modelo geral, eu queria saber porque vocês separaram para tantos funcionários?
> **Tedymar** Ok. Vamos lá.
> **Professor**: Vocês acharam o que no primeiro gráfico?
> **Tedymar** Vamos supor que no restaurante por mês serão atendidas 200 pessoas. Vou colocar aqui 200 pessoas. Não 100 pessoas. [Volta a alterar os limites Mínimo e Máximo].

Figura 37 – Representação do modelo e a modificação do intervalo.

Tedymar vai à janela de opções e como se fosse testar alguma informação no modelo que elaboraram, altera o intervalo para **Mín = 0 e Máx = 100**. Observa que o gráfico agora tem uma melhor inclinação. Ado interfere apontando para **t** na janela do modelo, onde está anotada a expressão $\boxed{\textbf{X = 350 + 0,1} \times \textbf{t}}$, indicando que vão colocar a quantidade de pessoas.

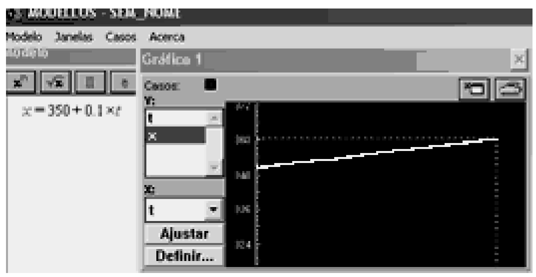


Figura 38 – Representação gráfica do modelo para o intervalo de 0 a 100.

> **Ado**: Se a gente pegar a fórmula e fizer uma comparação com os seis gráficos, com uma equação para cada um, a gente pede para interpretar as seis equações, então vai dar todo o gráfico dele.
> **Tedymar:** Mas é isso que ele quer.
> **Ado**: Eu fazendo as seis equações aqui e interpretando, vou mostrar as seis da mesma forma lá.
> **Professor:** Será que é necessário mostrar os seis gráficos?

Ado volta a pensar na sua possibilidade de solução apresentando simultaneamente seis representações do modelo alterando apenas valores do seu domínio. Essa sugestão tinha sido oferecida por ele anteriormente, e que tinha desistido da mesma.

> **Tedymar:** Ele quer isso daqui veja só.
> **Professor**: Eu acho que o caminho está certo, o que está faltando é uma situação gráfica que vocês entendam que essa representação mostre as seis situações.
> **Tedymar:** Vamos supor que o restaurante atenda por mês 100 pessoas, quanto é que fica o salário de cada garçom?
> **Ado:** É por que ele ai pede o gráfico.
> **Professor**: A gente pode mexer na inclinação desse gráfico [observando o gráfico na tela].

Tedymar: Pode, aumentando a quantidade de pessoas, quanto maior o número de pessoas, mais descontínuo o gráfico deixa de ser. Ficando mais acentuado. Então a função do primeiro grau representa o salário dos garçons.

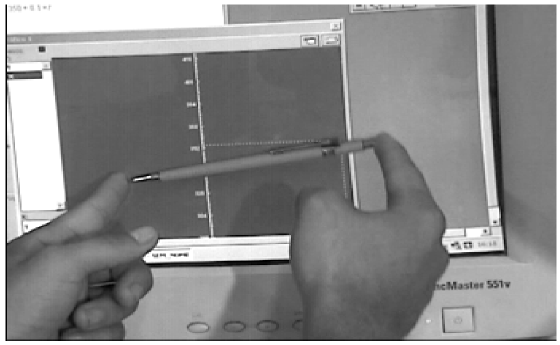


Figura 39 – Tedymar realizando uma comparação da inclinação do gráfico oferecido a partir do modelo.

Há ainda uma clara confusão na mudança de inclinação percebida na janela gráfica. Eles não correlacionam a inclinação aparente com a escala do gráfico.

Nessa fase do episódio 5, as seguintes habilidades são diagnosticadas:

- Reconhecer no software possibilidades de conexão para chegar a uma representação.
- Reconhecer que a linguagem matemática pode ser utilizada para elaboração do modelo de uma situação-problema.

Episódio 6: Validação e modificação.

Ado ainda procura no software a possibilidade de obter uma representação que mostre os salários dos seis garçons. Ao reconhecer a representação do salário do garçom através de um gráfico apresentado no software, a dupla relaciona um conhecimento matemático a uma situação do cotidiano.

Tedymar parece querer encerrar a atividade, dando a entender que tem compreensão de que o modelo para a situação é a equação que elaboraram, pois descreve o salário do garçom.

Ado ainda reforça a intenção de Tedymar para encerrar o problema. Ele afirma que o gráfico mostra a diferença, pois "*aqui ele pediu o salário de cada garçom*". Como é de cada garçom, "*se um vendeu 100* (atendeu 100 clientes), *outro atendeu 50, outro 100. Se for individual vai dar essa aqui*" um gráfico indicativo para cada garçom, "*o seu salário terá mais os 10%*". Ado demonstra compreender que o modelo elaborado pode oferecer, de forma separada, o salário individual de cada garçom, respondendo ao que tinha pensado antes. No entanto, eles ainda não percebem que associaram a variável como quantidade e não como valor monetário.

Ado: Mas não mostrou tanta diferença não. Porque aqui ele pediu o salário de cada garçom. Se um garçom atendeu 50, outro 100. Se for individual vai dar essa aqui porque será o seu salário terá mais os 10%.
Tedymar: Porque aumentou.
Ado: Porque aumentou a quantidade de clientes que esse garçom atendeu. [Ado só agora começa a entender que aumentando a quantidade de clientes, o valor do salário do garçom será mais alto]
Tedymar: Aqui, a quantidade de clientes que esse garçom atendeu, foi pouca.

Tedymar tenta explicar que o intervalo que eles definiram anteriormente foi pequeno, para indicar o número de atendimentos. Conseqüentemente, o valor arrecadado para se tirar um percentual que será somado ao salário fixo não demonstra uma boa representação.

A dupla parece querer dar por encerrada a tarefa. Olham para o professor querendo respostas, pois estão convictos do modelo que elaboraram para a situação. Diante dessa ação o professor procura prolongar a atividade, exigindo ainda conhecimentos da dupla, como observado no diálogo:

Tedymar: Está certo, professor?
Professor: Uma simulação como é que ficaria? [buscando levá-los a outras observações, utilizando outro modo de representação].
Tedymar: Uma animação? Vou ver. [tedymar trata a simulação como animação]

Tedymar abre a janela de animação coloca um objeto gráfico, define as variáveis, horizontal **t** e vertical **X**, seleciona uma imagem **bola.bmp**, define as escalas **0,05 e 0,5**.

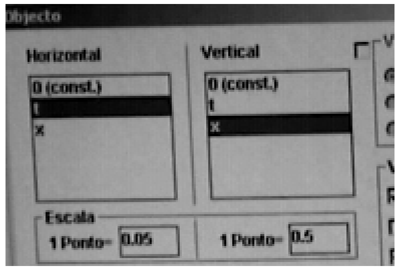


Figura 40 – Tela de objeto apresentando a definição das variáveis nos eixos horizontal e vertical.

Na janela do Modellus, como o gráfico não apresenta a visualização do objeto, a dupla volta a modificar as escalas e mesmo assim o objeto não aparece. Executam modificações, colocando as escalas em **horizontal = 1** e **vertical = 1**, depois de algumas tentativas conseguem visualizar a presença do objeto na tela do computador. Procuram definir a variável independente e executam o programa. Ficam observando o movimento do objeto, que apresenta pouca movimentação a partir da execução do software. Percebem a necessidade de aumentar o intervalo buscando uma melhor inclinação do gráfico, então, modificam as escalas para melhorar essa inclinação, abrem uma tabela e ficam observando os valores sendo transformados. Como uma dificuldade persiste o professor procura intervir:

Professor: X não é o salário? [Induz a solução].
Tedymar Pela, por essa animação, sim.
Professor: No final do mês ele vai tirar 390 reais, será que ele está atendendo bem?
Ado: No caso aí, ele está atendendo bem, pois o salário fixo dele é 350, no final do mês atendeu 400 clientes. [Aqui o intervalo já foi modificado para [**0, 400**]].
Tedymar: Quantos garçons aí?
Professor: Não importa, esqueça o número de garçons. Quanto é que ele recebeu no mês? [Intervenção na modelagem].
Tedymar: 390 reais.
Professor: Quanto é que entra de dinheiro?
Tedymar: Cada garçom por mês de uma forma geral, se todos eles atendessem o mesmo número de clientes ele teria esse salário que está aí.
Professor: 390, é o que?
Tedymar: É o preço pago a cada garçom por mês com as comissões de uma forma geral.
Professor: Certo, ele está tirando quanto de salário ai.
Tedymar: 390.
Professor: Fixo quanto é?
Tedymar: 350 mais 10% de comissão.
Professor: 10% de quanto? [Intervenção na interpretação].
Tedymar: 400, se o restaurante atendesse por mês 400 pessoas e se cada garçom fosse responsável por essas 400 pessoas.

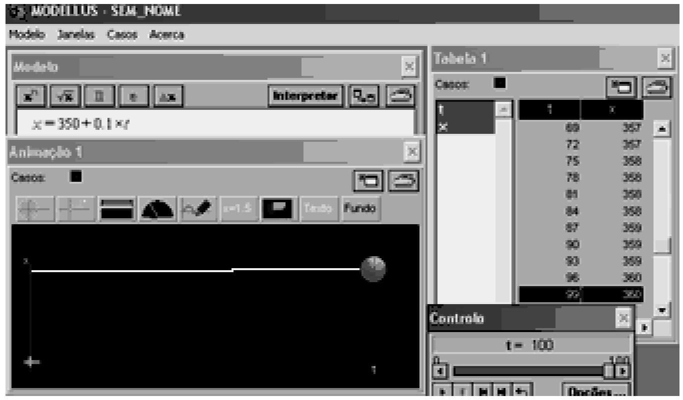


Figura 41 – Tela do Modellus apresentando Tabela de valores e janela de simulação obtida a partir do modelo X = 350 + 0,1 x t .

Tedymar ainda trabalha o percentual em cima do atendimento de pessoas e não relativo ao valor monetário arrecadado.

Professor: 10% é em cima dessas 400 pessoas?
Tedymar: É em cima da quantidade de pessoas. Se fossem 10 pessoas....
Ado: Porque na verdade o que vai variar é em cima de quanto esse cliente pagou no restaurante. [Avanço na interpretação].

Ado aqui já começa a fazer referência a valor monetário pago pelas pessoas, observando que o percentual envolvido deve ser trabalhado nessa variável.

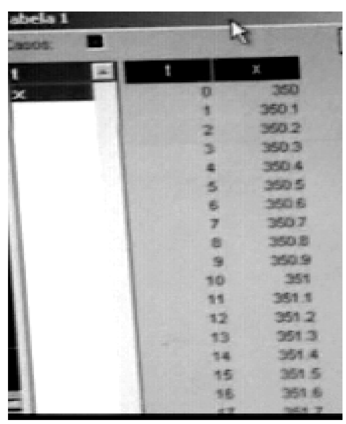


Figura 42 – Tela do Modellus apresentando uma tabela indicativa dos valores produzidos a partir do intervalo [0, 20].

A discussão que ocorre mostra o professor tentando verificar se eles tinham compreensão dos dados que estavam sendo oferecidos a partir do modelo que elaboraram. Ado percebe a intenção do professor em buscar um cálculo de porcentagem em cima de um valor monetário e não em cima de um valor referente à quantidade. Dessa forma, Ado compreende que não estão trabalhando em cima de uma variável adequada para o cálculo dos 10% e justifica ao seu modo o porquê de estarem utilizando a variável pessoa e não a variável valor pago.

> **Professor**: Não é a pessoa [Intervenção na interpretação].
> **Ado**: É quanto ele pagou.
> **Professor**: Você está contando pessoas, não o que ele pagou, por isso está baixo o salário dele. Se durante o mês ele só vendeu 400 reais, então aqui será o salário dele, não é isso?
> **Ado:** Então, a questão ainda é mais ampla do que a gente está pensando.
> **Professor**: Não, não é que seja mais ampla, eu acho é que vocês estão interpretando só um pequeno dado de forma equivocada. A pessoa cliente, como dinheiro que está entrando.
> **Tedymar:** Então a gente tem que tirar por mês.
> **Ado**: É
> **Professor**: O raciocínio não está correto, o que vocês estão pensando como a pessoa, aqui foi 400 reais que entrou e tem que tirar o percentual dele. O dono do restaurante tem que tirar a partir daquele garçom 10% dos 400 reais que vendeu.
> **Ado**: A gente tá trabalhando pessoas e na realidade poderíamos dizer que esse garçom aqui ele vendeu 600 reais

Agora Ado já fala em dinheiro e não em pessoas. Ele evidentemente entendeu a observação do professor, ficando claro para ele que o cálculo que estão realizando se refere ao número de pessoas atendidas, e não, a um valor monetário.

> **Tedymar:** Ele adquiriu 600 reais por mês
> **Ado**: Ele conseguiu vender 600 reais, então o que a gente estava determinando como pessoas é para determinar o preço que ele ganhou. Por exemplo: ele fez 1000 reais, aí sim, mil reais vezes 0,1 vão dar uma quantidade mais o salário.

A partir dessa compreensão, Ado já demonstra a necessidade de aumentar o valor monetário em que se deve calcular os 10%, pois agora a variável compreendida por ele é referente a dinheiro, o dinheiro de contas pagas pelos clientes.

> **Tedymar** Certo só que eles por mês, é impossível tirar a mesma quantidade. [Continua individualizando].
> **Ado:** Só que agora vai determinar quanto é que ele fez em dinheiro. Se um garçom vendeu 680 outro 700 e assim por diante, a gente vai ter um gráfico mais acentuado. Vai estar certo agora, o erro foi esse ai trabalhar com pessoas e não com o que ele vendeu. [Consciência do equívoco na modelagem].
> **Professor**: A interpretação está correta, lá na definição de valores é que vocês pecaram, pensaram em pessoas [Ordem de grandeza X significado].
> **Tedymar** Vou colocar aqui 1000 reais. [volta a usar o software definindo em opções um intervalo maior, agora de 0 a 1000].

Figura 43 – Tela do Modellus apresentando a modificação de Tedymar na janela de opções para o intervalo [0, 1000].

Professor: No caso agora 1000 é dinheiro?
Tedymar É como eu vejo para cada um o salário. [Dificuldade de generalizar].
Professor: Não, não será um modelo para cada um. Você observa, se o garçom vendeu 500 reais, nesse modelo você saberá o salário dele. Se vendeu 500 reais será o fixo mais 0,1 vezes 500 [Discute a modelagem validando pelo raciocínio].
Tedymar Então o mais que vendeu foi 1000? [Tedymar ainda busca associar o extremo do intervalo com o que foi vendido apenas por um garçom].
Professor: Veja na tabela.

Figura 44 – Tela apresentando tabela e gráfico produzido pelo modelo para o intervalo [0 ; 100].

Tedymar Pela tabela dá para ver, para cada quantidade de real que esse garçom fez, será calculado o salário do garçom.

Só com o auxílio do professor é que a dupla fica convicta de ter chegado a uma adequação para a compreensão do cálculo do salário de um garçom, através do modelo que elaboraram. Comparam simultaneamente na tela do computador os valores oferecidos pela tabela e a representação gráfica sendo formada a partir do modelo elaborado como sendo $\boxed{X = 350 + 0{,}1 \times t}$, dando demonstrações de entendimento da possibilidade do modelo de explicar salários individuais para cada garçom.

As habilidades apresentadas nesse sexto episódio são as seguintes:

- Verificar no software a possibilidade de obter representações para salários diferenciados (validação do modelo).
- Reconhecer a representação dos salários do garçom através de um gráfico apresentado no software, com o auxílio da tabela.

- Reconhecer que o software promove possibilidades de observação da simulação de um fato.

VI.1.2 – Análise da realização da atividade 1 pela dupla 2

Episódio 1: Contextualização do problema e decisão dos elementos construtores.

A dupla 2 busca, através da leitura, entender a situação. Uma discussão inicial acontece quanto à decisão de quanto deve ser o valor do salário do garçom. A decisão é tomada sobre um salário pago apenas por quantidade de horas trabalhadas que é multiplicado pelo valor da hora, como mostra o diálogo a seguir.

> **Maxwell**: Aí no caso o salário, ele varia pela quantidade de... estipular horas, um valor para hora.
> **Marta:** Exatamente. Quatro reais.
> **Maxwell:** De quatro reais para hora.
> **Marta:** É de quatro reais, por hora.
> **Maxwell**: Aí trabalha oito horas de serviço por semana, ou trabalha 2 horas por semana. O trabalho dele será por semana?
> **Marta:** Por semana.
> **Maxwell:** Oito horas, ai no caso mensal.
> **Marta:** É mensal, né, daria?
> **Maxwell:** Aí no caso mensal seria quantidade de... em uma semana ele trabalharia 40 horas, mensal, 40 vezes.....seria... 80 horas por mês?
> **Marta:** Por mês.
> **Maxwell:** Igual à quantidade de horas vezes o valor da hora. Não é?
> **Marta:** É

Diferentemente da primeira dupla, os elementos construtores trazidos pelos alunos da segunda dupla inicialmente dizem respeito à quantidade de horas trabalhadas e valor da hora. Geralmente, o salário de um garçom aqui no Brasil é calculado de dois modos diferentes. O primeiro seria quando o garçom é contratado apenas por horas de trabalho, como a dupla vem desenvolvendo, sendo o salário (produto de horas trabalhadas pelo valor da hora). O segundo, quando se estabelece um valor fixo e a partir de determinado índice de venda, se apresenta um adicional de salário em forma de percentual de vendas, que deve ser acrescido ao fixo.

Durante a discussão, Maxwell, atendendo ao pedido de Marta, efetua algumas anotações no papel referente ao que discutem. Especificamente, o valor fixo de 4 (quatro) reais por hora de trabalho, tenta também decidir sobre a quantidade de horas que serão trabalhadas por mês.

A dupla faz anotações no papel, instituindo o valor do salário do garçom, nos termos da discussão que tiveram. A expressão é definida por:

Salário = (quantidade de horas x **valor da hora).**

Ainda anotam uma outra expressão algébrica **X = (80** x **Y) + 1,** que parece não terminada, sem, no entanto fazerem referência à mesma. O que observamos é que ela é decorrente dos valores das grandezas que definiram para o problema.

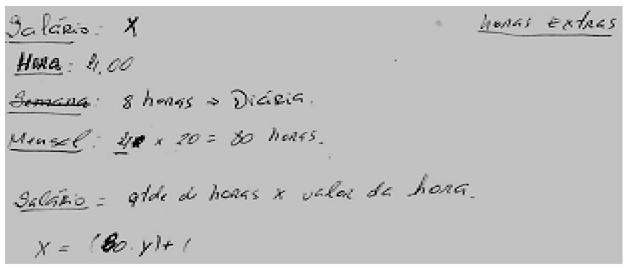


Figura 45 – Anotação inicial de Maxwell para atividade 1

Nessa fase, identificamos as seguintes habilidades:

- Decidir sobre os elementos construtores a serem considerados no problema.
- Definir as grandezas que devem ser tratadas no problema.
- Relacionar a situação-problema com uma situação real.
- Discutir sobre os valores que devem ser atribuídos às grandezas selecionadas no problema.
- Selecionar variáveis para as grandezas selecionadas e construir um modelo matemático do problema.
- Apresentar valores para as variáveis.

Além da escolha das grandezas, os estudantes foram levados a atribuir valores para essas grandezas envolvidas. A partir dessa construção, os sujeitos começam a definir as variáveis e valores. É interessante que, em um primeiro momento, todos os valores são fixados, deixando o valor do salário constante. Ao transformar em equação, o valor da hora é colocado como variável, e não a quantidade de horas trabalhadas, como faz pensar a discussão inicial.

Episódio 2: Elaboração do modelo algébrico

O diálogo prossegue no sentido de decidir como será o modelo algébrico para o cálculo do salário do garçom.

> **Maxwell:** Quantidade de horas vezes o valor da hora. Tu achas que tem que colocar adicional?
> **Marta:** É um adicional ao salário fixo. Faz assim, ele ganharia, ele ganha por hora, se ele fizesse extra, iria aumentar.
> **Maxwell:** certo.
> **Marta:** Pois ele, trabalhando apenas as oito horas, ele receberia **X**, salário fixo..... Aí, mais uma comissão das horas extras.

Marta parece preocupada em quanto seria o valor real do salário. Quando Maxwell fala em um novo modo de cálculo, ela já pensa em um valor de comissão para ser somado ao salário fixo que vem sendo tratado como horas de trabalho vezes o valor da hora. A comissão a que se refere Marta seria um complemento ao salário do garçom, por meio de horas extras. Dessa forma, Marta pensa em apresentar um modelo de salário em que um valor fixo (valor da hora vezes quantidade de horas) é acrescido de uma comissão. O modelo algébrico parece caminhar para a seguinte representação. **Salário = salário fixo** + **comissão.** No entanto, a dupla não chega a definir essa expressão. O diálogo assim prossegue:

> **Maxwell:** Salário **X**, e a quantidade de horas.
> **Marta:** É, vezes aqui. Representa por **Y,** aí no caso mais o fixo **X**, não a...
> **Maxwell:** ta bom assim.
> **Marta:** **Y** seria o salário dele total que ele receberia.
> **Maxwell:** Igual
> **Marta:** Igual

Marta parece querer modificar as variáveis tratadas no problema. Trocando Y por X, nesse caso ela tenta compreender a variável X como variável independente a ser tratada no problema. Só que esse fato ocorre apenas na discussão.

> **Maxwell:** Quarenta vezes **y** mais.
> **Marta**: Mais o fixo. Salário total = 40 x Y + comissão.

Um fato importante observado no diálogo apresentado anteriormente é a preocupação de Marta com relação à decisão de utilizar a variável **Y** como variável dependente. Na escola, o ensino de matemática usa a variável **X** como variável independente e a variável **Y** como dependente. No Brasil essa referência é muito forte, os estudantes são levados pelos professores a utilizar essas variáveis na ordem em que foram apresentadas, sempre que trabalham um problema matemático. Marta demonstra as nuances desse contrato didático estabelecido na escola, que parece incomodá-la, pois propõe ao companheiro Maxwell para trocar as variáveis.

A discussão continua sobre os dados da anotação que os sujeitos fizeram no papel. Nota-se que existe o cálculo do salário como sendo o produto da quantidade de horas pelo valor da hora, mas, também existe a preocupação de se estipular um salário, ao qual seria adicionado parte de um valor, que a dupla vem tentando decidir. Nota-se que Marta calcula **X = 40** x **Y**, e que na discussão inicial o número de horas mensais era **80** e não **40** como eles colocaram, esse fato é claro nas palavras de Maxwell: "*Quarenta vezes Y mais*".

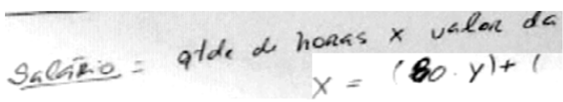


Figura 46 – Apresentação do modelo em forma de linguagem materna

Nessa fase, do segundo episódio, uma nova habilidade é apresentada:

- Enriquecer a solução de um problema com diversas variantes.

Essa habilidade é demonstrada quando os sujeitos reconhecem no problema que a definição do salário do garçom poderia ser tratada de duas maneiras diferentes, já discutidas.

Maxwell busca iniciar uma digitação no computador, anotando o que Marta está insistindo em descrever. A digitação é realizada sem a sua conclusão, ficando apenas parte da expressão que Marta já havia insistido: **X = 40** x **Y.**

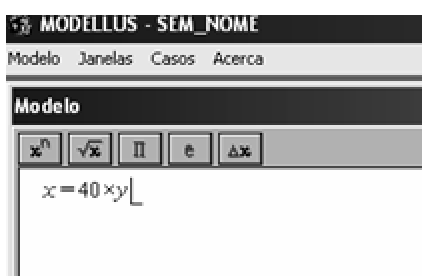


Figura 47 – Modelo apresentado em linguagem algébrica no computador

Observamos que a expressão digitada por Maxwell, no computador, tem outra forma, diferente daquela apresentada no papel, como sendo $\boxed{\mathbf{X = (80} \times \mathbf{Y) + 1}}$. No entanto, compreendemos, através do diálogo, a intenção de levar o modelo a uma expressão do tipo:

Salário total = número de horas trabalhadas x **valor da hora + comissão**

Só que ainda não decidiram pelo complemento (comissão) e, isso levou Maxwell a digitar a expressão **X = 40** x **Y** sem ter concluído.

A compreensão da comissão a ser adicionada ao salário não foi concluída pela dupla, quanto ao seu valor. Notamos que a expressão **X = 40 x Y** é referente a uma das compreensões do pagamento de salário que tiveram e que demonstraram em suas discussões. Parece que os sujeitos não chegaram a um consenso quanto ao modelo final a ser elaborado para o problema. Maxwell ainda discute no sentido de entender o valor a ser adicionado ao modelo que Marta tenta definir para ele.

> **Maxwell:** Mais o fixo**,** não, aí tu falasse do valor de hora extra, aí você tem o total de hora extra que ele trabalharia por mês.
> **Marta**: Hora extra.
> **Maxwell:** Aí você teria o total de hora extra e o total de salário por mês. Total das horas extras. Seria quanto mais quatro?
> **Marta:** Mais quatro.
> **Maxwell:** Aí a gente representa por **y1**. Quarenta **y,** mais a quantidade de horas. Aí tem que saber a quantidade de horas que ele trabalhou por mês.
> **Marta:** É, como nós não sabemos como dar outra variável, não é a mesma variável.

Nessa fase, do segundo episódio, os sujeitos apresentaram as seguintes habilidades:

- Reconhecer limitações no conhecimento matemático que dominam ao empregá-lo em uma situação-problema.
- Delimitar a representação algébrica para o modelo no campo de conhecimento matemático em que dominam.

Episódio 3: Problematização, hipóteses e etapas de validação do modelo algébrico.

Marta tem dificuldade em construir no mesmo modelo algébrico um relacionamento entre as variáveis para efetivar o cálculo de hora extra que seria tratado como comissão para adicionar ao salário.

> **Maxwell:** Acho que está bom, pra estipular só o salário, **X = 40 . 2** basta Interpretar. A gente vai estipular um valor para **y,** não é? Que é quatro, só é ver na tabela, aí o salário dele deve ser...
> **Marta**: Não é bom estipular um salário fixo, por mês?

Marta não parece conformada, pois o modelo algébrico que elaboraram não complementa as situações possíveis de trabalho de um garçom, como por exemplo, salário fixo, salário fixo mais comissão, salário igual a número de horas vezes o valor da hora.

> **Maxwell:** Mas por mês ele trabalha oitenta horas, não é quarenta não? Trabalha 20 por semana. Dá oitenta horas por mês. Aqui olha deu oitenta.

Parece que o fato de tratar o salário do garçom como horas trabalhadas vezes o valor da hora mais comissão, comissão esta que será calculada em termos de horas extras, faz a dupla ficar confusa sobre como estabelecer o modelo para essa situação, Marta inclusive afirma: *"como nós não sabemos como dar outra variável, não é a mesma variável".*

Maxwell, sentindo dificuldade, agora tenta esquecer as comissões e apresenta o modelo só como produto de horas trabalhadas vezes o valor da hora. **X = 40 . Y**. Esse fato não deixa Marta satisfeita, ela comenta sobre outra interpretação para o salário final do garçom, quando afirma: *"não é bom estipular um salário fixo, por mês?".*

Marta volta a fazer anotações na folha de papel onde consta o problema. Já Maxwell ainda está com dúvidas sobre o modelo que Marta define como solução para o problema. Maxwell inicia novamente um diálogo nesse sentido:

> **Maxwell:** Repete aí,.....O salário dele é esse mesmo, o salário, a quantidade de horas que a gente viu, estipulou, o valor da hora, calculou o mensal quanto ele trabalha por mês, que ele trabalhou vezes **Y** que é o valor da hora.
> **Marta:** Da hora [Marta muito pensativa nem dá a devida atenção ao que Maxwell está colocando].

Maxwell: Pronto só isso, tem mais alguma coisa?
Professor: Tranqüilo! [professor percebe a intenção de Maxwell em dar por concluída a tarefa].
Maxwell: Já, a gente estipulou um valor para hora, são 4 reais, vamos supor para calcular o salário a quantidade que ele trabalhava aqui é mensal, quarenta vezes vinte. [Maxwell tenta apresentar a Marta os dados que estão anotados no papel].

Maxwell afirma que estipulou 4 reais para o valor da hora e que serão trabalhadas oito horas por dia, totalizando oitenta horas, resultado da multiplicação **4 x 20**. Esses valores parecem se referir ao número de semanas que são 4 por mês, o valor 20 é referente ao número de horas por semana, como apresentado na **Figura 45**.

O modelo que Maxwell nos apresentou como sendo escrito na forma (**Salário = Quantidade de horas** x **valor da hora**) não apresenta a comissão que foi pensada por eles. Parece que a dupla não chegou a um consenso quanto a esse valor. Isso foi um fato preocupante na resolução quando Marta não entende como estipular uma comissão em cima de horas extras trabalhadas, que seria adicionada ao salário. O professor tenta buscar mais informações, iniciando um diálogo:

Professor: Quarenta por semana?
Maxwell: Quarenta por semana, vezes
Marta: Mensal né trinta?
Professor: Quarenta vezes dois não? [observando o que está escrito]
Maxwell: É quarenta vezes dois. É quatro vezes vinte, São quatro semanas.
Professor: Ah, é para dar oitenta horas. Trabalha por mês oitenta horas?
Maxwell: É trabalha por mês. Ai o salário representamos por **X,** a quantidade de horas mensal vezes o valor da hora.

Maxwell trata o salário como representado por **X** (variável dependente) resultado da quantidade de horas trabalhadas vezes o valor da hora. Repetindo a expressão que ele utilizou como modelo para o problema e que está anotada no computador como sendo: **X = 40 x Y**.

Professor: Como é que sabe o salário dele, aí?
Maxwell: Aí o salário dele a gente estipulou o valor de **Y** [Maxwell trata agora a variável **Y** como o salário do garçom, mostrando-se confuso]. Aqui no caso que é a hora, quatro, e oitenta vezes **Y**.

O professor procura intervir ao observar que eles não apresentam uma boa compreensão do que decidiram como modelo, orienta que apresentem no computador, através de uma tabela, o referencial de um determinado salário.

Professor: Lá na tabela como é o salário, quanto seria se ele trabalhar dez horas?

Maxwell: Deixa a gente estipular aqui.

Parece que no computador, as digitações ainda precisam de ajustes e Maxwell percebendo isso, solicita que o professor aguarde, para que ele possa organizar suas decisões e apresentar os dados solicitados.

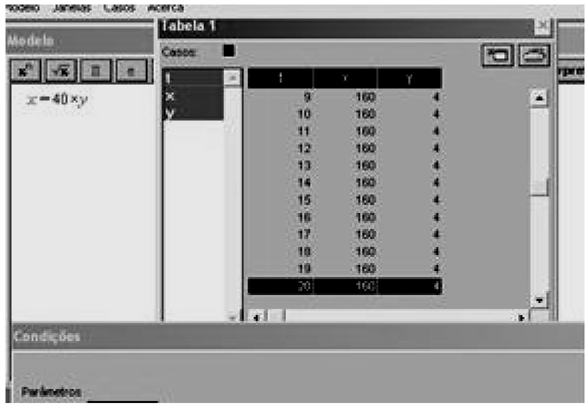


Figura 48 – Valores apresentados na tabela a partir das configurações definidas pelos sujeitos.

Maxwell abre uma tabela para verificar o valor do salário para **10h** trabalhadas, e descobre que se utilizar **Y** como salário, não encontrará espaço para digitar o valor referente a **10h**, como solicitado pelo professor, pois se modificar o parâmetro de **Y** em condições iniciais não terá uma resposta suficientemente adequada. Então, Maxwell, percebendo isso, afirma ter algo errado, pois não é apresentada uma resposta para o que foi solicitado. O modelo por ele elaborado não construiu respostas para situações como a que o professor propôs. Esse fato também ocorreu por não terem definido quem seria a variável independente no software, ela não foi tratada no problema, pois ainda está marcada no software a variável **t**, como pode ser visto na Figura 49.

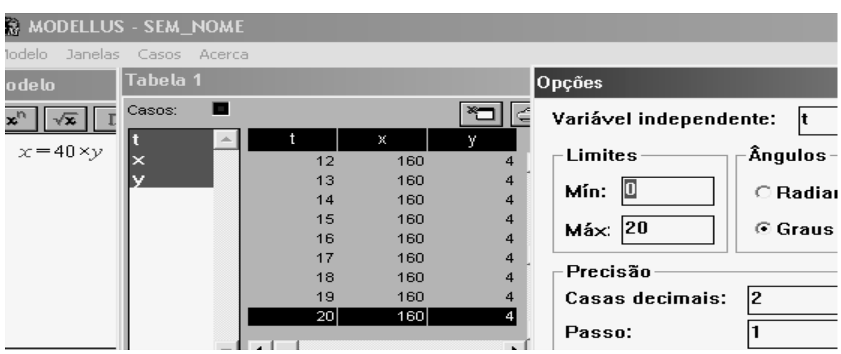


Figura 49 – Visualização do modelo, tabela, intervalo e variável independente

Marta de imediato procura intervir, parecendo que tinha compreensão de que o modelo não estava adequado ao problema.

Marta: Tem que um ter um valor para...
Maxwell: É pra variável,... Tem algo errado aí, trabalha uma hora e está errado... [Maxwell interrompe o pensamento de Marta].
Marta: É
Maxwell: Variável independente
Marta: Trabalhando quatro horas e...
Professor: **Y** é o salário dele é?

O professor tenta entender qual a variável que está sendo designada para salário, pois Maxwell citou *"aí o salário dele a gente estipulou o valor de y aqui no caso que é a hora".* Ele tratou **Y** como valor do salário.

Maxwell: Não, **X** é o salário.
Marta: **X** é o salario
Professor: Então é o salário final. **Y** é a quantidade de horas? [professor agora tenta entender o que é o Y].
Maxwell: **Y** é o valor da hora, dá um então dá um e oitenta, quando ele trabalhar... [Maxwell parece realizar cálculos mentais].
Marta: hum...
Professor: Você colocou oitenta aí, é.
Maxwell: É, é a variável independente que está?

Alguma coisa não confere com as expectativas da dupla e Maxwell parece observar que a decisão pela não escolha da variável independente, que no computador ainda é t, levou a prejuízo para a sua expectativa. No entanto, ele dá mostras de que prefere fazer uma análise sobre o que realmente ocorreu.

Maxwell: Oitenta quando o **Y** for 1. [Maxwell faz análise mental do que poderia ter recebido como resposta, a partir da expressão **80** x **Y]**.
Marta: Acho que a fórmula poderia ser outra.
Professor: Como é Marta?

Nessa fase, do terceiro episódio, os estudantes apresentam as seguintes habilidades:

- Reconhecer a dificuldade de validar o modelo algébrico elaborado.
- Reconhecer no software formas de representação para o problema

Episódio 4: Uso do software como ferramenta de validação e representação.

O professor observa que Marta vem desde algum momento tentando oferecer outros elementos ao problema. Ela parece querer afirmar a Maxwell que existe outra possibilidade de cálculo para o salário do garçom. Algumas vezes tentou afirmar, mas foi interrompida por Maxwell. Agora, ela é mais enfática e propõe mudar o modelo que foi apresentado anteriormente. Portanto, o professor cobra de Marta a sua definição.

> **Professor**: Como é Marta?
> **Marta:** Colocaria, é, em vez de botar o trabalho dele assim por hora, colocaria só à hora no momento das extras e estipularia um salário fixo de **320** reais, salário fixo mais quatro vezes **Y,** seria aí quatro horas, quatro reais a cada hora, cada uma hora.
> **Professor**: Um acréscimo a mais [professor procura entender].
> **Maxwell:** Ficaria 320 reais então.
> **Marta**: Isso, mais quatro que é quanto vale uma hora, vezes **X**. Não é isso?

Marta novamente apresenta dificuldade em tratar as variáveis **X** e **Y**. Sua compreensão é muito forte no entendimento de que a variável **X** é que deve ser utilizada como variável independente e **Y** como dependente. Essa dificuldade que Marta apresenta, já foi verificada anteriormente, pois se trata de uma característica oriunda do contrato didático normalmente vivenciado na matemática escolar. Geralmente, institui-se nos exercícios sobre funções, o uso de **Y** como variável dependente e **X** como variável independente, levando alguns alunos a não perceberem que podem fazer variações quanto à decisão de que variáveis devem utilizar.

> **Professor**: Vezes vinte no caso. [O professor tenta participar observando os valores que já tinham proposto no modelo anterior].
> **Maxwell**: No caso **X** seria esse, o salário dele.
> **Marta**: Seria esse, agora acho que vai dar certo.

A dupla, ao reconhecer a impossibilidade do modelo algébrico ser validado para as possíveis situações cobradas no problema, apresenta uma habilidade bastante comum à maioria dos alunos, reconhecer quando o campo matemático utilizado é inadequado à solução do problema. Dessa forma, procuram descartar o que não é mais validado e buscam novos conhecimentos que levem a uma melhor composição da solução.

Nesse momento, do quarto episódio, identificamos as seguintes habilidades apresentadas pela dupla:

- Reconhecer a impossibilidade de validação de um modelo.
- Incorporar na situação-problema elementos que levem à elaboração de um modelo geral.

Episódio 5: Uso do software para validar o modelo algébrico.

Marta anota no papel a nova expressão que deverá ser tratada como modelo. A expressão toma forma de linguagem materna, depois é modificada para a linguagem algébrica, ficando: **X = 320** + **4** x **Y**. Nota-se que o novo modelo apresenta um valor fixo sendo somado ao cálculo de uma espécie de comissão (**4** x **Y**), onde 4 é um valor fixado para o valor da hora e **Y** é a quantidade de horas extras. Isso é observado no modelo apresentado na Figura 50.

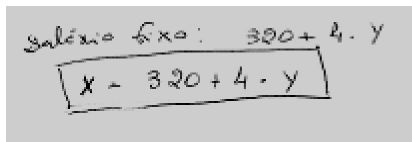


Figura 50 – Modelo anotado no papel em linguagem algébrica.

Maxwell de imediato procura o computador para digitar a expressão anotada por Marta no papel. Após digitá-la, faz a interpretação e decide pelas variáveis independente **Y** e dependente **X**, escolhem o intervalo variando de [**0, 10**], abrindo posteriormente uma tabela para observar os valores obtidos dessas decisões (ver Figura 51).

A tabela solicitada pela dupla expõe uma variação de valores para o salário do garçom, o intervalo que foi decidido pela dupla, leva o software a apresentar o salário variando de 320 até 360 reais.

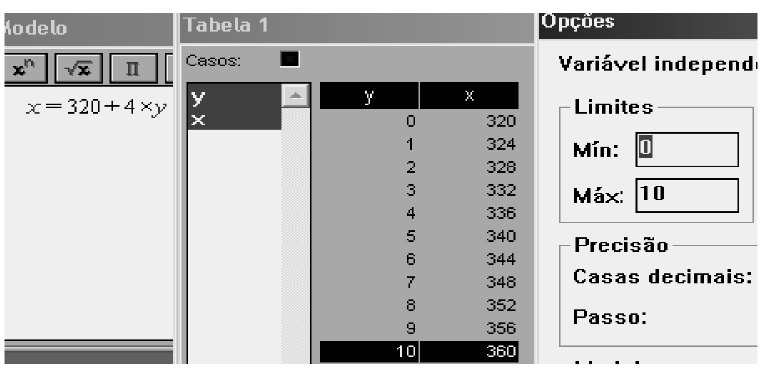


Figura 51 – Valores de salário variando de 320 a 360

Maxwell: Se ele não trabalhar hora extra, ganha só o fixo.
Marta: Se ele não fizer nenhuma hora extra.
Professor: Se ele trabalhar uma hora ganharia quanto reais a mais?

Maxwell: Devemos fazer um gráfico ou alguma coisa
Professor: Se você quiser fazer, para melhorar sua compreensão e visualizar melhor o problema.

Nesse momento, do quinto episódio, observamos que novas habilidades são apresentadas:

- Observação dos valores obtidos da função a partir dos coeficientes (angular e linear).
- Identificar que o valor de f(0) vai indicar um salário sem adicional.
- Capacidade de formular exemplos de situações matemáticas no problema.

Essas habilidades apresentadas pelos estudantes são características do conhecimento da função linear trabalhado na escola. Observa-se que os coeficientes angular ou linear em algumas situações de estudo, são modificados, como no caso em que a dupla vem discutindo. Maxwell percebe que se não houver hora extra, existirá só o coeficiente linear, tornando o salário do garçom um valor fixo.

Entusiasmado com o que está conseguindo, Maxwell se propõe a enriquecer os efeitos do modelo através do software, busca outra forma de apresentar os resultados. Abre a janela de gráfico e executa o programa, com a visualização do modelo em forma de gráfico, recurso oferecido pelo software.

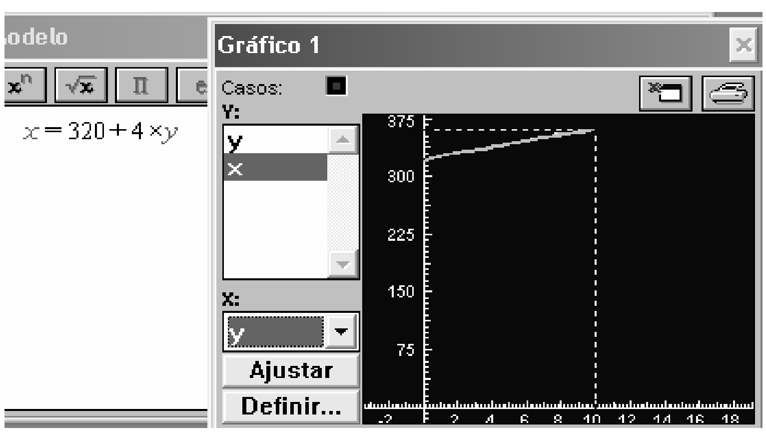


Figura 52 – Representação gráfica do modelo para o intervalo [0, 10]

Maxwell: É isso mesmo. Quais os conhecimentos matemáticos?
Marta: Aí ele pergunta isso, quais os conhecimentos matemáticos [referindo-se a uma frase colocada no final do problema].
Professor: É, mas não acho necessário que escrevam dizendo do que se trata [Percebe a não necessidade dessas anotações, pois elas apenas indicariam o que eles já realizaram].

Maxwell agora tem plena convicção de que apresentou um modelo adequado à solução do problema, pois conseguiu validar sua elaboração. Ao perceber que a tarefa foi realizada, o professor resolve encerrar essa atividade com a dupla, já que foi superada a dificuldade e os alunos apresentaram uma solução convincente para o problema.

VI.1.3 – Análise da realização da atividade 1 pela dupla 3

Episódio 1: Contextualização e apresentação dos elementos construtores.

Weldon faz a leitura do problema e Lisa observa atentamente. Ao término da leitura, Weldon procura entender o esquema que Lisa propõe como solução. De início, o diálogo ocorre sem o uso do computador, depois observam que há necessidade do uso dessa ferramenta.

> **Lisa:** A gente coloca o salário... O salário mais .... 350 mais.
> **Weldon**: Como se fosse o salário mais uma... eh... um bônus, como se fosse recebido por ele, um bônus. Pronto, o salário... o salário fixo, não é?... R$ 350.
> **Lisa:** Mais, é 10%.
> **Weldon**: 10% não é, como se.....
> **Lisa:** 350. Vezes o percentual,... vezes o **X**.
> **Weldon:** Cada um que ele vendeu foi 10%, não é, cada variável.
> **Lisa:** Aqui a gente bota o acréscimo do salário, salário mais para ...
> **Weldon**: O salário não é. Igual a 350.
> **Lisa:** mais 10% [novamente Lisa indica ser os 10% do próprio salário fixo].
> **Weldon**: Mais 350
> **Lisa:** 350 vezes 0,01. Vezes o salário.

Lisa é bastante clara para indicar o valor do salário para a variável X, quando repete a expressão 350 x 0,01. Nessa fase da atividade eles passam a utilizar o computador, Weldon abre o software Modellus e começa a digitar os dados referentes ao modelo que estão construindo, por sugestão de Lisa.

> **Weldon**: Não é 0,01..... Não, 0,1 [Weldon corrige Lisa mostrando que 10% serão 0,1 e não 0,01 como ela afirmou].
> **Lisa:** Vezes o fixo, não vezes **X.** aí.
> **Weldon**: Vezes o valor de **X** não é.

A discussão entre Lisa e Weldon ocorre no sentido de estabelecer um modelo que seja solução para o problema. Lisa orienta Weldon quanto à compreensão do que está sendo tratado no problema, demonstrando já ter uma representação, que sugere a Weldon como solução. Além disso, ela procura fazer uso do papel onde consta o problema, para anotar essa primeira proposta de modelo, tal proposta apresenta as seguintes bases:

Salário fixo mais acréscimo de dez por cento das vendas,

como observado na figura 1. Esse valor vendas, primeiramente é chamado de bônus por Weldon. No entanto, Lisa mostra a intenção de calcular esses dez por cento em cima do próprio salário fixo e somar ao valor fixo. A anotação realizada por Lisa é mostrada na Figura 53.

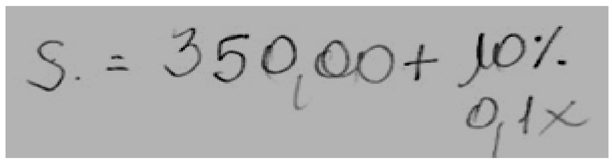


Figura 53 – Fórmula anotada por Lisa no papel

Nesse momento do episódio 1, a dupla apresenta algumas habilidades importantes para a atividade:

- Definição das grandezas que farão parte do problema.
- Definir valores para as grandezas.
- Identificar um modelo algébrico para a situação-problema.

Episódio 2: Fase de elaboração do modelo algébrico.

Weldon, no computador, digita a proposta de modelo algébrico, já referenciada por Lisa e anotada no papel. A expressão digitada no computador por Weldon é a mesma que Lisa descreveu **S = 350,00** + **0,1** x **X**. No software, eles definem a variável independente como **X**, deixam o passo com valor **0,1** e o intervalo fica como vem oferecido no software **[0, 20]**. Abrem a janela de animação do software e colocam um objeto nessa janela. Procuram decidir em conjunto as atribuições para as variáveis que serão utilizadas pelo software para as direções horizontal e vertical e definem a escala em **0.1**.

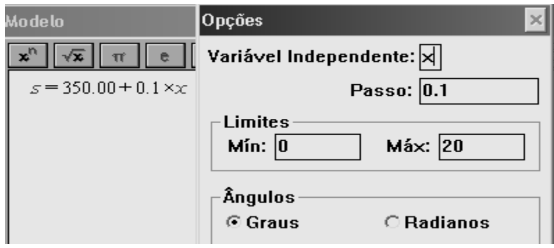


Figura 54 – Fórmula que descreve o modelo elaborado pela dupla e a definição da variável independente

Lisa: A variável independente agora vai ser o **X**. aí o limite será....
Weldon: Vai fazer uma animação logo, não!
Lisa: É
Weldon: É só constar que é o **S** mesmo? É só constar o **S**...... [Lisa tinha decidido que a variável independente era o **X**. Weldon, no entanto na janela de animação seleciona essa variável para horizontal. Mas antes de fechar a janela de definição volta a trás e marca o **S**].
Lisa: É. Você botou o **X**.

Weldon decide utilizar a simulação de um objeto em movimento para representar a situação. Resolve definir as escalas, como apresentado na Figura 55.

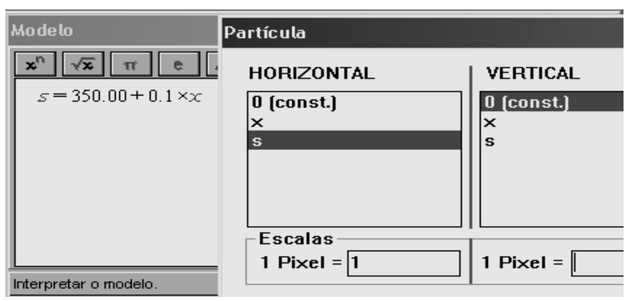


Figura 55 – Tela com a definição de Weldon para S como variável do eixo horizontal e com modificação das escalas

Além de direcionar o primeiro modelo a ser utilizado, o recurso computacional facilita a composição dessa construção, pois os sujeitos procuram testar a construção, como uma fase de validar o que estão construindo.

Nesse momento da atividade a dupla apresenta as seguintes habilidades:

- Selecionar no software um tipo de representação para validar a expressão modelo.
- Reconhecer as possibilidades do software para simular uma situação-problema real.

Episódio 3: Dificuldades na operacionalização do software.

Ao dominar a ferramenta computacional, o estudante passa a adquirir novas habilidades. Uma delas é reconhecer no tipo de programa utilizado, as possibilidades de representar uma situação-problema. A janela principal do Modellus apresenta a seguinte expressão algébrica: **S = 350,00 + 0,1** x **X**, estão também abertas, uma janela de animação e uma janela de definição da variável independente. Na janela objeto, definem só a variável horizontal como **S**, deixando a do eixo vertical sem ser definida. Ao dar OK e executar, verificamos que o programa oferece a janela de animação aparecendo apenas a representação dos eixos, sem a presença do objeto.

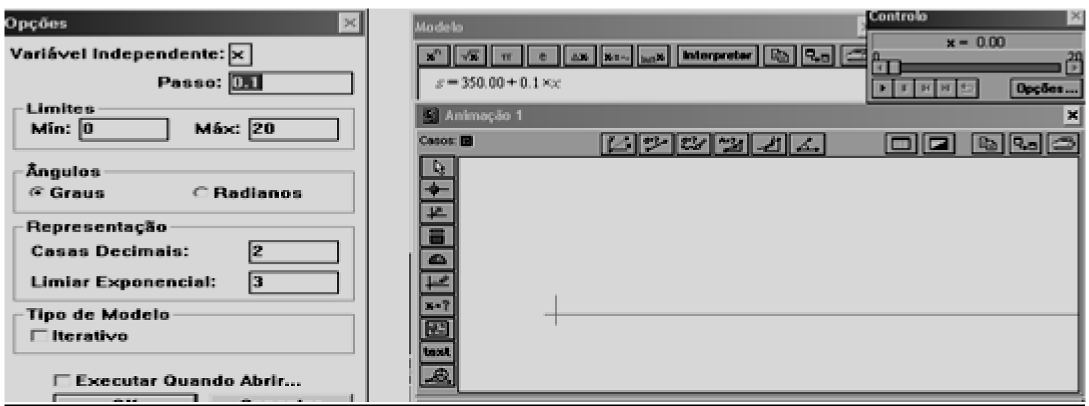


Figura 56 – Tela apresentando a janela de simulação para os valores do intervalo definidos por Weldon

Lisa: Virgem Maria, o que houve?
Weldon: São as variáveis ali, deve ter sido o **X** lá, tem que mudar, não é a equação dele.

Weldon percebe que a simulação não corresponde às suas expectativas. Ele tem compreensão do erro, quando diz para Liz o que possivelmente está ocorrendo. Lisa percebe que algo não está correto, pois só definindo as variáveis para o modelo não foi suficiente, de forma a verificar o sucesso da simulação. Weldon, no entanto, parece ter certeza, e assim tenta convencê-la, de que foram as variáveis anotadas para o modelo que estão trocadas.

Weldon volta à janela objeto e define **X = vertical**, mas retira da imagem o eixo e o valor do objeto. Ao dar Ok, a janela de animação aparece sem o objeto e sem os eixos, apenas mostrando a variável **X**.

A ausência do objeto parece ser por conta da escala e a do eixo, que não foram selecionadas por Weldon, quando buscou eliminar esse recurso oferecido pelo software (ver Figura 57).

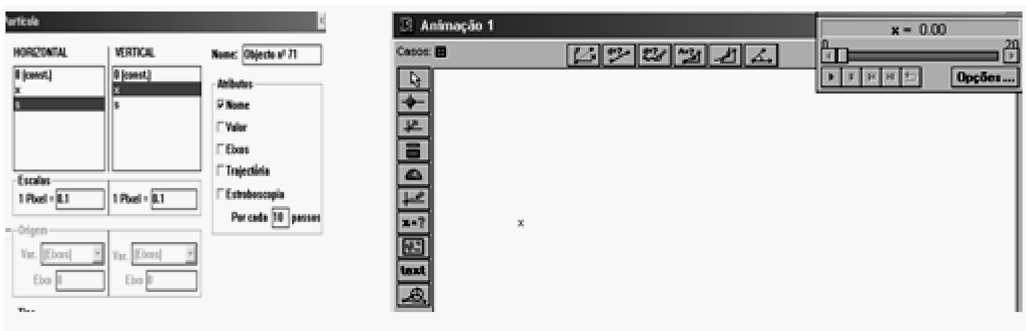


Figura 57 – Tela com definição de Weldon para X como variável vertical e com exclusão dos eixos

Weldon: Horizontal e vertical, horizontal é quem?
Lisa: Uma é **X** é a outra é **S.**
Weldon: Vou afastar aqui um pouco, não é. [Weldon procura ampliar a janela animação para buscar a presença do objeto].

Weldon demonstra não dominar que será tratado como variável dependente e variável independente nessa representação, recorrendo a Lis, que tem maior convicção de como serão tratadas essas variáveis. Outro ponto importante é que eles não percebem que o problema que está gerando essa dificuldade é a definição das escalas para os eixos horizontal e vertical.

Como não aparece o objeto nem os eixos, Weldon compreende que melhor será colocar outro objeto na janela de animação. De forma que executa essa ação e volta as suas definições anteriores, horizontal **S** e vertical **X**. Só que agora não mais muda as escalas, deixando o valor oferecido pelo software, como sendo 1 para ambas horizontal e vertical. Ao executar, o software oferece a seguinte imagem.

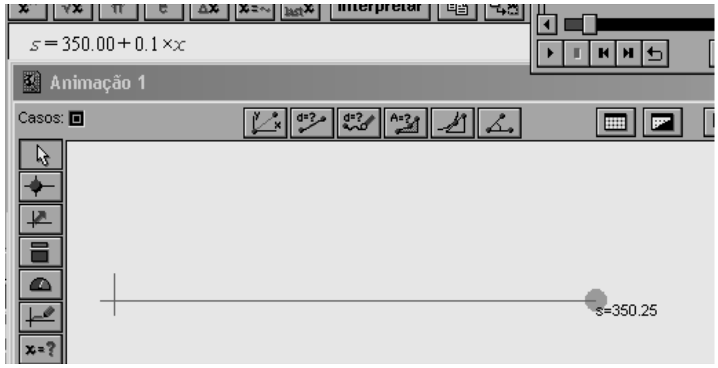


Figura 58 – Tela apresentando a Janela de simulação com o objeto.

Ao executar o programa, percebem que a movimentação do objeto está ocorrendo no sentido vertical.

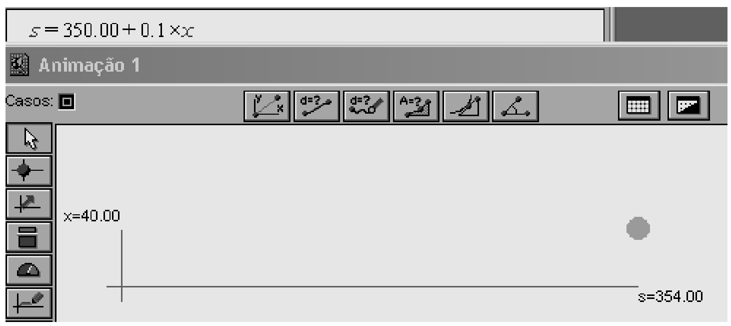


Figura 59 - Janela de animação o movimento do objeto no sentido vertical.

A partir dessa observação, Weldon decide inverter as variáveis. Volta a janela de objeto e coloca horizontal **X** e vertical **S**. Decide executar o programa recebendo uma imagem em que não é apontada a presença objeto selecionado. Só que agora ambos os eixos estão expandidos, sendo horizontal **X** e vertical **S.**

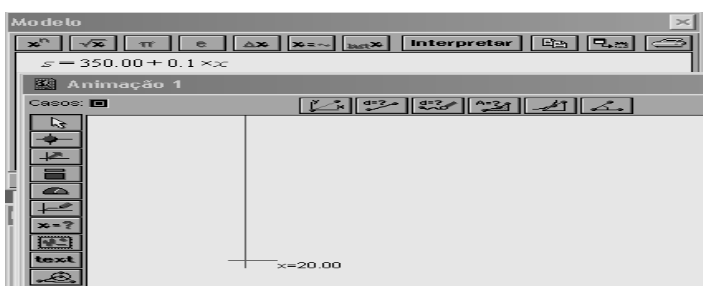


Figura 60 - Tela com a inversão dos eixos para as variáveis X e S.

Lisa: A escala vai definir?
Weldon: Vou colocar as escalas com 0.1

Nesse momento verificamos uma forte influência do conhecimento escolar. As escalas atribuídas aos eixos horizontal e vertical geralmente são oferecidas pelos professores como sendo as mesmas para cada um dos eixos. Geralmente, na escola, os professores, ao traçar gráfico de funções, utilizam na maioria das vezes uma mesma escala para ambos os eixos. Na tentativa de definirem corretamente variáveis e escala, observamos várias atitudes de Weldon. Manipular com o uso do mouse o deslocamento do objeto para um melhor posicionamento. Modificação das escalas para o valor **0.1** dessa forma, aparece em momentos diferentes às imagens (**a** e **b)** da Figura 61.

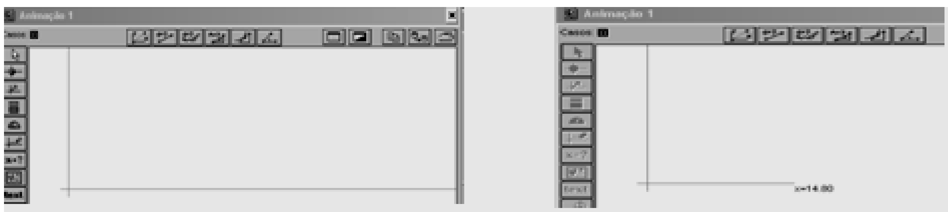


Figura 61 - Janelas de simulação do Modellus em que o objeto bola não está sendo visualizado.

Lisa, ao afirmar "*as escalas vai definir*", demonstra conhecer o motivo que levou à ausência do objeto observado anteriormente. Esse fato estimula Weldon a alterar as escalas horizontal e vertical. No entanto, nota-se que a compreensão da dupla é do uso de eixos com mesma escala.

Além desse fato, outro que merece ser analisado é o modo de troca dos eixos efetuado por Weldon, ora ele usa horizontal **S** e vertical **X,** outras vezes invertendo esses valores, A preocupação parece ser por conta da não presença do objeto na janela de animação. Ele demonstra não entender quem será a variável dependente e a variável independente.

Weldon define ambas as escalas com valor **0.1** depois afasta o eixo para outro local da imagem. Ao manipular a janela de animação, fica novamente só aparecendo os eixos das coordenadas, sem a presença do objeto. Weldon executa o programa como se quizesse visualizar um movimento para o objeto na tela do computador. Como isso não ocorre, Weldon resolve arrastar novamente os eixos para a posição inicial fazendo aparecer novamente o objeto com imagem bola, na tela do computador. A busca de Weldon em fazer representar um objeto na tela o leva a abrir uma nova janela de imagem e selecionar um novo objeto.

Observamos nesse momento do episódio três que é apresentada a seguinte habilidade:

- Manipulação dos recursos do software para conseguir recuperar a presença do objeto que não está figurando na janela de animação.

Weldon: Tem que trocar as variáveis. Acho que é assim.
Lisa: Acho que o horizontal é X e o vertical é S.
Weldon: É.

Lisa volta a apresentar conhecimento sobre como devem ser tratadas as variáveis dependente e independente. Essa compreensão discutida por ela Weldon vem demonstrando dificuldade. Weldon faz uso do mouse para localizar melhor os eixos, puxando para o canto inferior da tela. Executa novamente o programa e observa. O eixo vertical agora está saindo da tela de animação, como estava ocorrendo anteriormente com o eixo horizontal. Esse fato é observado pela dupla, então Weldon decide modificar as escalas, com o intuito de fazer aparecer o objeto na tela, sem expandir a janela de animação. Volta à janela de objeto e define as escalas novamente para 0.1, pois estavam marcando 1. No entanto, o objeto não aparece na tela só que agora o eixo vertical indicado para a variável **S** sendo mais expandido indica onde está o objeto. Esse fato faz Weldon modificar novamente as variáveis, horizontal **S** e vertical **X** como se percebesse que a janela tem uma visualização maior no sentido horizontal, depois volta atrás, por não ter sido feliz nessa decisão.

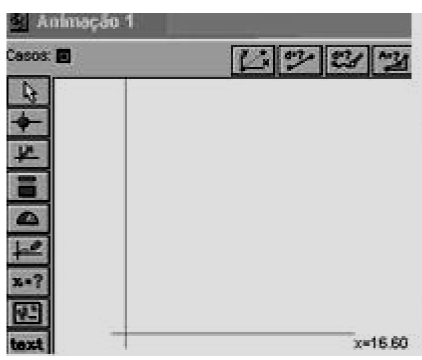


Figura 62 - Janela de animação apresentado apenas os eixos de coordenadas sem a presença do objeto

A seguinte habilidade é demonstrada pela dupla nesse momento do episódio três:

- Utilizar os recursos oferecidos pelo software para representar corretamente uma situação de simulação.

Ao manipular um software que oferece recursos para representar matematicamente uma situação-problema, os estudantes começam a ser inseridos em atitudes de observar o *feedback* oferecido pelo software para repensar elementos importantes da representação, como escalas e variáveis representadas em cada eixo. Dessa forma, desenvolvem habilidades importantes, aquelas em que precisam analisar os recursos oferecidos pelo software para minimizar problemas que possam surgir durante sua utilização.

Weldon: Vou verificar as escalas. [Observa 0.1 em ambas].
Lisa: Tá.

No entanto, o conhecimento escolar de se usar escalas monométricas impede os alunos de avançar. A partir daí, Weldon decide excluir novamente os atributos **eixo** e **valor**, depois decide por sugestão de Lis, escolher também uma nova imagem para o objeto. Ao executar o problema persiste. Por conta da dificuldade que enfrentam, resolvem fechar a janela de animação e abrir uma outra janela de animação, colocam novo objeto e define **S** como horizontal e **X** como vertical. Retiram o valor e escolhem uma imagem **car.bmp** voltam à nova tela com a expansão do eixo horizontal por conta do S, no sentido horizontal, sem o objeto imagem aparecer, Figura 63.

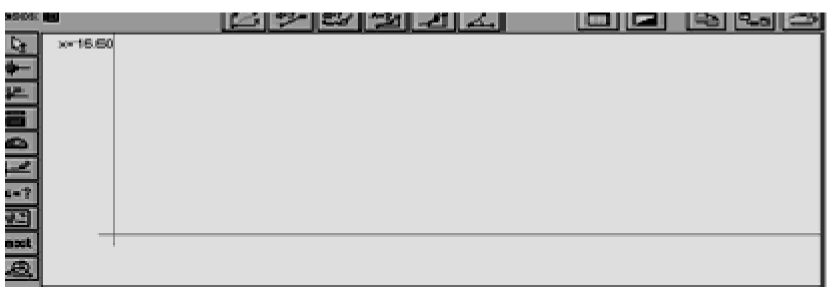


Figura 63 - Janela de animação expandida na horizontal para localizar o objeto imagem

Lisa: Não é o **X** e sim o **S** vertical.
Weldon: É o S vertical?
Lisa: Hum, Hum...

Param por um momento e Lisa parece querer interferir, ao solicitar a Weldon que execute o programa e veja que o movimento do objeto está ocorrendo mesmo sem ele aparecer na janela de animação.

Professor: Não está aparecendo a trajetória não?
Lisa: Na janela de opções diminui o intervalo.
Weldon: Onde.
Lisa: Em opções.
Weldon: Ok
Lisa: O intervalo, bota 10, no máximo.

Figura 64 - Janela de opções com alteração do intervalo

Lisa, ao sugerir que Weldon diminua o intervalo, parece querer buscar uma saída coerente, pois se o eixo está alongado é por conta do intervalo de ação em que o objeto está sendo trabalhado. Apesar dessa modificação sugerida por Lisa, a janela de animação permanece da mesma forma, o efeito tentado por Lisa não correspondeu às expectativas. Dessa forma, Lisa resolve utilizar como apoio a janela gráfica que traz definições como as escalas de forma automática.

Lisa: Abre um gráfico Weldon.
Weldon: Está bem.

Nesse terceiro episódio, novas habilidades são demonstradas:

- Buscar a redução do intervalo (campo de enquadramento do objeto), no sentido de minimizar a redução do movimento na tela imagem.
- Buscar no software uma saída para eliminar a dificuldade que estão enfrentando com um tipo de representação fornecida pelo software.
- Reconhecer outras possibilidades de representação do modelo fornecida pelo software.

Episódio 4: Manipulação das formas de representação.

Agora, na tela do computador, aparecem duas janelas a do gráfico solicitado por Lisa e a de animação, Figura 65. Executam e observam.

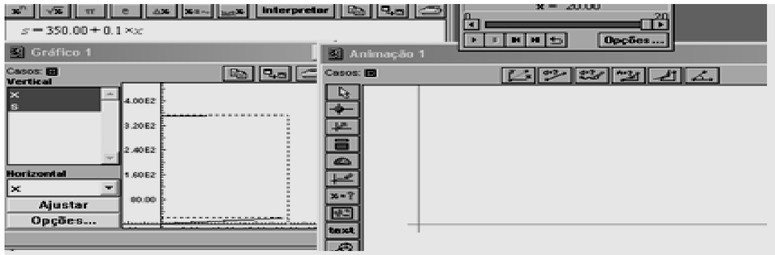


Figura 65 - Janelas gráfico e animação abertas para comprovar resultados

Executam novamente, clicam no botão ajustar, buscando uma melhor visualização. Durante essa ação, observamos uma seqüência de três representações gráficas, as quais são mostradas durante a tentativa da dupla buscando compreender o problema, Figura 66.

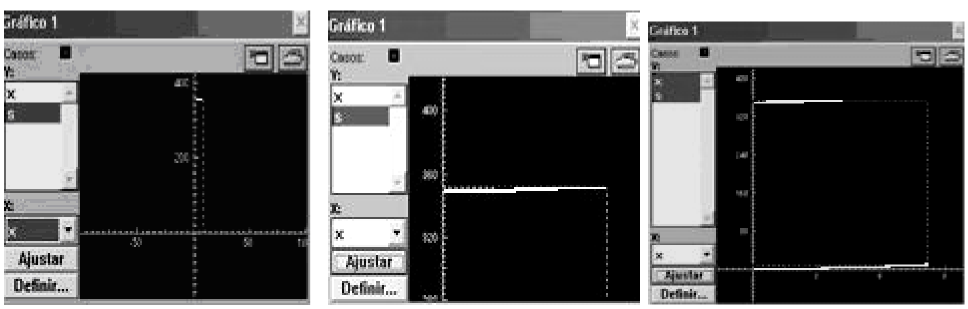


Figura 66 - Seqüência de gráficos observados pela dupla

A <u>primeira</u> onde apenas a variável **S** está selecionada, mostrando o gráfico de **S** no intervalo [**0; 10**]. A <u>segunda</u> obtida por um ajuste automático, recurso oferecido pelo software, que ajusta as escalas para uma melhor aparência do gráfico. A <u>terceira</u> que apresenta também o gráfico de **X** em função de **X**.

A partir da múltipla representação, a dupla volta a intervir na janela de animação. Weldon manuseia duas janelas (a de animação e a gráfica), como se buscasse entender por que a animação não oferece o mesmo efeito visual que a representação gráfica. O fato é que a escala na animação não foi definida de forma compatível, eles não percebem essa relação com aquela oferecida na representação gráfica.

Weldon: Ele está fazendo o gráfico aqui em baixo.
Lisa: Onde?
Professor: Mudem a escala, não deu não? [efeito].
Weldon: Está horizontal S e vertical X e o passo 0.1.

Weldon parece perceber que o gráfico está sendo corretamente representado. Novamente, quando o professor questiona, Weldon afirma as suas decisões quanto as variáveis, escolhendo **S** variável para o eixo horizontal e **X** para o eixo vertical. O automatismo do software permite-os perceberem que a animação está correta, mas eles não conseguem chegar à necessidade de mudança da escala.

Observam a tela principal. Parece que o efeito de animação tinha um maior interesse para a dupla, parecendo um desafio, pois foi por esse processo que iniciaram tentando resolver o problema. Só que a definição de escalas comuns (monométricas) para as variáveis tornou-se um problema. Ao executarem novamente a animação, começam a ter problemas, pois aparece a janela de animação sem o objeto. O professor então tenta intervir, no sentido de alertar sobre o erro que Weldon insiste em cometer e que Lisa já havia mostrado anteriormente.

Professor: Vocês estão trabalhando quem em função de quem.
Weldon: A gente tentou.....o problema dele é ....a gente colocou um salário fixo para o garçom.
Professor: Certo Weldon, mas o modelo está certo, está vendo no computador (referindo-se ao gráfico). O que você não está sabendo definir, são as variáveis.
Weldon: Acho que é isso ai professor
Professor: Não está trocado não?
Weldon: Vou colocar horizontal = **X** e vertical = **S**

Figura 67 - Janela de animação do Modellus indicando a presença do eixo vertical

Apesar de ter demonstrado anteriormente conhecimento quanto às definições das variáveis, inclusive por sugestão de Lisa, Weldon insistiu bastante em **X** como variável para o eixo vertical. O problema que ele enfrenta não reside nesse fato, modificação das variáveis, e sim na definição das escalas, pois permanecem as mesmas. Como estão usando escalas monométricas de valor 0.1, sempre ficará fora da tela a imagem do objeto.

Weldon havia modificado várias vezes os eixos de definição das variáveis, que estavam constando antes da última modificação Horizontal = **X** e Vertical = **S**. Agora, a representação da animação volta a apresentar uma das formas já vistas anteriormente. Em que o eixo vertical está alongado e não mostra o objeto na janela de animação.

Weldon tenta ajustar manualmente, ora baixando os eixos, ora ampliando lateralmente um dos lados da janela de animação. Ele tenta dessa forma fazer aparecer o objeto na janela de animação.

Professor: Expande mais essa janela Weldon.
Weldon: Está certo,.... Não melhorou não.

Weldon está um pouco angustiado por não conseguir o efeito que tanto deseja. Nem com a orientação do professor parece ter solução esse problema que ele enfrenta. O problema, no entanto, resume-se à modificação da escala vertical que deveria ser realizada por Weldon, no sentido de ajustar para visualizar o objeto.

Lisa: Coloca 1 Weldon [Lisa solicita que Weldon altere a escala para 1.]
Weldon: Vai ficar maior, vai sumir da tela.
Lisa: Mas vamos tentar.

Lisa parece ter compreensão de que o problema que estão enfrentando é na definição da escala. No entanto, Weldon como está utilizando o computador, parece não querer em algumas decisões contemplar as decisões de Lisa, argumentando que se modificar a escala para o valor 1 como sugere Lisa, o objeto "*vai sumir da tela*".

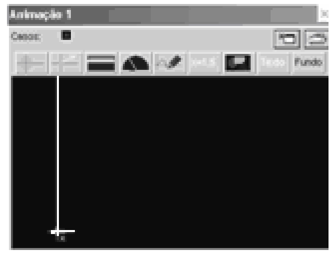


Figura 68 - Janela de animação em que se verifica uma ampliação da escala vertical confrontada com a escala horizontal.

Professor: A escala vertical não está muito ampla não Weldon?
Weldon: Está.

Weldon coloca na escala vertical o valor 0.5 e deixa o valor da horizontal em 0.1 e ao executar o programa, fica surpreso pois o problema persiste, nada foi conseguido. Weldon ao redefinir as escalas, de acordo com as sugestões de Lisa, verifica novamente que a janela de animação parece não querer satisfazer o seu desejo, verificar os eixos e o objeto sendo apresentado nessa janela. O fato é que a modificação não foi significativa e o problema persistiu.

Weldon: Olha aí..... Nada.

Nessa fase do quarto episódio, a dupla apresenta as seguintes habilidades:

- Manipular, no software, mais de uma forma de representação para o fenômeno.
- Entender que as formas de representações utilizadas são situações aproximadas do real, a partir do efeito produzido pelo modelo.

Episódio 5: Problematização, hipóteses e prévias de validação do modelo algébrico.

Buscando ajudar Weldon com relação a sua dificuldade com a janela de animação, o professor sugere outra forma de representação, que ele começou a utilizar anteriormente e tinha deixado de lado, pois o objetivo dele era fazer uma animação.

Weldon: Onde está?
Professor: Está aberto já. (informando que a janela de gráfico está minimizada)
Lisa: Lá embaixo. Seleciona aqui só o S.
Weldon: O quê?
Lisa: O **S**.

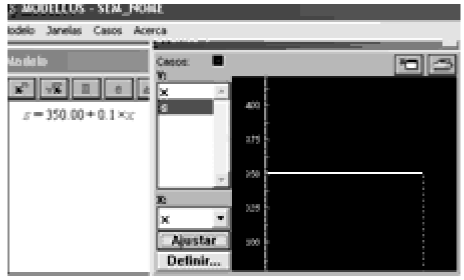


Figura 69 - Janela gráfico representando S em função de X

A janela no computador apresenta o gráfico elaborado a partir do modelo que foi decidido pela dupla. Weldon incomodado com a apresentação desse gráfico, que visualmente está parecendo um gráfico constante, volta a selecionar **X** e **S** simultaneamente e executa o programa. Agora, em uma mesma janela são apresentados dois gráficos um em relação a **S** e o outro em **X**, pois estão selecionados na janela de gráfico as variáveis **X** e **S**.

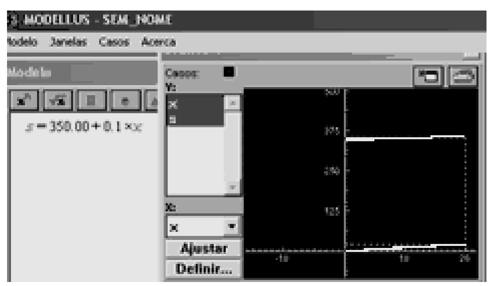


Figura 70 - Tela gráfico representando gráficos de S e X em função de X

Professor: Weldon aumenta o intervalo, maior do que 20.
Weldon: Onde.
Lisa: Em opções.
Weldon: Ah, 20
Professor: Um pouco mais.
Weldon: Maior.
Professor: 50
Lisa: Dá Ok e executa.

É interessante observar que com a necessidade de obtenção do gráfico, os significados assumidos pelas variáveis e os valores reais assumidos pelas mesmas não têm mais importância. Weldon coloca o intervalo variando de [0, 50] e ao executar o programa, aparece o gráfico sem uma boa visualização. O professor pede para ajustar no sentido de melhor observar essa representação.

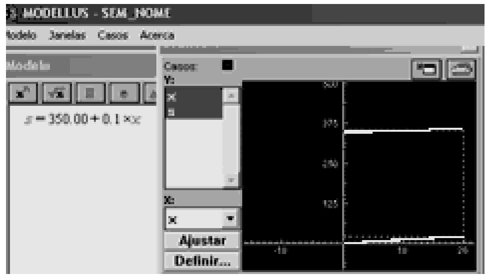


Figura 71 - Gráfico de S e X em função de X para o intervalo [0; 50].

Professor: Ajusta, é só o gráfico de **S** que vocês querem?
Weldon: Das duas, não é, pode ser.
Professor: Mais só tem uma função. Por que vocês estão querendo as duas?
Lisa: Ah, ah.
Professor: É esse ai que você queria, ajuste fica melhor [indicando para o gráfico de **S**].
Weldon: É
Professor: Veja que está em notação científica, os valores ficam reduzidos, não é.
Weldon: É
Lisa: Só o **S.**

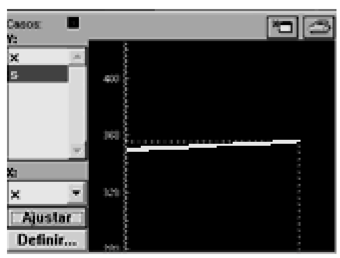


Figura 72 - O gráfico de S em função de X.

Professor: Você já respondeu?......Esse gráfico é o que? Aumenta o limite para 100 e o passo para 0.5 fica mais rápido, não é.
Weldon: É [afirma de forma positiva enquanto efetua as modificações sugeridas].
Professor: Pronto ai está o modelo que vocês escreveram. Vocês estavam querendo uma animação e não conseguiram, mas ai ele apresenta não é isso.Como é que vocês verificam um garçom...
Weldon: Porque a gente colocou um valor fixo. Não é?
Lisa: É o que a gente tinha pensado.
Professor: 350 é só um.....
Weldon: E vai aumentando 10% em cima do salário dele, ai o salário vai aumentando.

A dupla percebe que, ao elaborar uma proposta de modelo para a situação, pode buscar a validação de casos isolados, como forma de teste do modelo para responder questões específicas.

Professor: 100 reais**.**
Lisa: Abre uma tabela:
Weldon: Está bem, vou selecionar.
Professor: Por que o **X** ai está sendo apresentado sozinho? ..... Seleciona os dois
Weldon: Os dois, pelo menos dá para ver.
Lisa: O 100 não aparece. [preocupação pela não visualização do valor 100 sugerido pelo professor].

Lisa percebe que no gráfico não é tão simples verificar qualquer situação que envolve o problema. Por isso, sugere um outro modo de representação que lhe seja mais claro na identificação de valores.

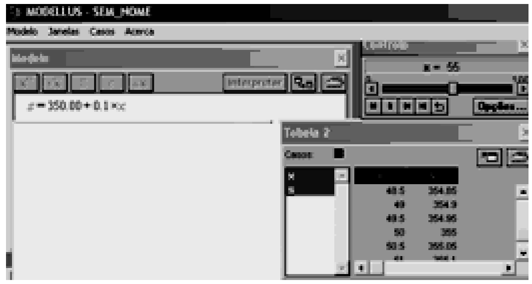


Figura 73 - Tabela aberta por Weldon para comprovação de resultados

Professor: Para 50 reais, o salário dele mensal seria quanto?
Weldon: É, 355 reais.
Professor: Isso mesmo.

No quinto episódio, algumas habilidades merecem ser destacadas:

- Compreender que a representação gráfica do modelo algébrico $\boxed{\mathbf{S = 350{,}00 + 0{,}1 \cdot X}}$ não facilita a identificação de casos da situação-problema.
- Perceber a partir de orientação que outros recursos no software podem apresentar dados indicativos do problema.
- Identificar na representação por tabela o valor do salário do garçom. Não identificar no gráfico os pontos correspondentes.

Episódio 5: Valorizar uma forma de representação para apresentar o modelo.

Lisa entende que o software oferece, além da simulação, outras formas de representação. Portanto, ao reconhecer a dificuldade de elaborar uma simulação para o modelo que foi construído, ela aconselha Weldon a retomar a tarefa por meio de outro caminho, buscando uma nova forma de representar os resultados a partir do modelo. Sugere verificar esses resultados por meio de representação em uma tabela.

A dificuldade com a elaboração da animação no software deixou a dupla muito tensa, em não conseguir realizar esse feito. O interessante, durante a modificação do tipo de representação de efeito de animação para o efeito gráfico, é que a dupla não percebeu que o conhecimento, observado na representação gráfica sobre o valor da escala oferecida pelo software, não foi generalizado para o efeito de animação que eles pretendiam utilizar. De forma que a escala utilizada pelo software na representação gráfica não foi observada por eles, parecendo não ter significado.

Nessa fase do episódio 5, a dupla apresenta as seguintes habilidades:

- Valorizar uma forma de representação em detrimento de outra.
- Reconhecer que a representação por meio de tabela fornece uma melhor descrição de resultados.

VI.1.4 – Síntese da Atividade 1

Os sujeitos ao receberem a primeira situação-problema, que sugeria a elaboração de um modelo matemático para representá-la, apresentaram-se surpresos com o tipo de problema “completamente aberto”. Mesmo assim, mostraram-se competentes para enfrentar a situação. Os passos que seguiram para solucionar esse primeiro problema relativo ao conhecimento de função afim, foram comuns às três duplas, pois se assemelharam nas seguintes etapas:

1) Apresentar os elementos construtores;
2) Atribuir valores às grandezas;
3) Definir o modelo algébrico;
4) Buscar uma forma de representação para o problema;
5) Elaborar testes do modelo algébrico;
6) Modificar e ajustar o modelo;
7) Validar o modelo.

É importante destacar que nesta primeira atividade foram observadas algumas dificuldades dos alunos quanto ao desenvolvimento das seguintes habilidades e conhecimentos:

- Uso e definição de escalas em gráficos e adequação destas à função traçada;
- Identificação de pontos em gráficos ou identificação de gráfico como formado de pontos (aspecto global e pontual);
- Correlação entre pontos do gráfico e salários de cada garçom;
- Análise das grandezas e unidades de medidas que estão em jogo em cada fórmula, também chamada de análise dimensional.
- O automatismo das escalas oferecido pela janela de gráfico não auxiliou os alunos a entender a definição de escala.

VI.2 – Análises da Atividade 2

VI.2.1 – Análise da realização da atividade 2 pela dupla 1

Utilize o software Modellus e apresente solução para a seguinte situação-problema. **Você é um bom jogador de voleibol e está treinando saques tipo "Jornada nas Estrelas", como estratégia para utilizar em uma partida de um campeonato. Construa um modelo para indicar as situações de movimento da bola, desde o início do saque até o momento em que ela toca o solo na quadra do adversário.** Anote os conhecimentos matemáticos que estão presentes e são importantes nessa situação. Elabore um modelo para a situação no software Modellus e teste-o.

Episódio 1: Contextualização do problema e resgate do conhecimento algébrico escolar

Após a leitura do problema, a discussão inicial ocorre no sentido de compreender o movimento da bola e a que conhecimento matemático está relacionado esse movimento. Tedymar gesticula indicando como seria o movimento da bola a partir da efetuação de um saque.

> **Ado**: A bola após o saque, ela vai lá em cima e depois começa a cair. Quem dava esse tipo de saque era Bernard. [Faz referência ao jogador que costumava dar esse tipo de saque].
> **Tedymar:** A gente poderia fazer um desenho. No caso, vai ser uma parábola [articulação com física].

Ado resolve desenhar o movimento da bola na folha de papel, na forma de uma parábola, como mostra a Figura 74.

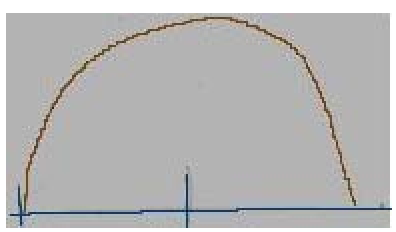


Figura 74 - Desenho realizado por Ado para indicar o movimento da bola.

> **Ado:** É uma equação do segundo grau.
> **Tedymar:** Vai ser uma parábola, com concavidade, quer dizer o valor de **a** será negativo então a concavidade vai estar voltada para baixo. Devemos determinar **X** que é igual a menos **T** ao quadrado divido por 5. Agora devemos testar para ver se fica do jeito que queremos.
> **Ado:** Vamos testar.

Neste problema, o caminho para a modelagem é feito a partir do movimento da bola, que coincide com o desenho elaborado. A dupla reconhece a família de função correspondente a essa forma de representação por desenho, trazendo implicitamente o conhecimento escolar da representação algébrica dessa família de função.

Tedymar começa a utilizar o computador para digitar uma equação, compreendendo desde já como apresentar a solução para expressar o gráfico do movimento da bola. A expressão digitada por ele é apresentada através de uma variável dependente **X** em função de **t**, definida por **$X = t^2/5$**. Ado após observar essa digitação de Tedymar no computador, afirma: "*vamos testar*". No entanto, Tedymar resolve executar alguns outros comandos preliminares à realização desse teste. Abre a janela opções e define o intervalo [**10; 20**], depois abre a janela de gráfico e antes de executar percebe que o valor de **t** estava positivo e deixa-o negativo colocando o sinal de menos em **t,** ficando **$x= -t^2/5$**. Escolhe **t** como variável independente, como observado na Figura 75.

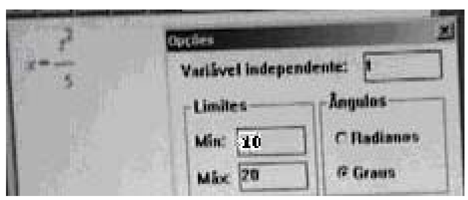


Figura 75 - Tela apresentando o modelo, a definição do intervalo e a variável Independente.

Ao executar o programa, a dupla recebe como retorno a imagem apresentada na Figura 76. Por alguns instantes, ficam atentos aos efeitos visuais que o software oferece do modelo de equação que foi definido por eles.

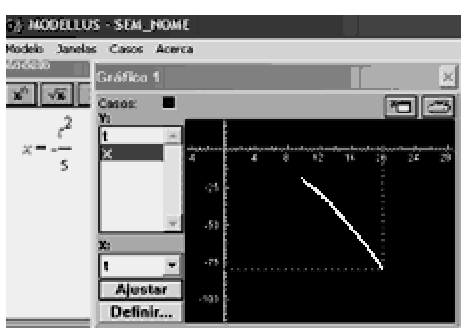


Figura 76 - Tela apresentando o gráfico do movimento da bola a partir do intervalo [10; 20].

Nessa fase da atividade, verificamos que a dupla apresenta algumas habilidades:

- Entender que uma forma representação ajuda na compreensão de um fenômeno.
- Elaborar uma representação em forma de desenho para melhor entender uma situação contida no problema.
- Reconhecer que simular no computador é realizar um teste de validação
- Relacionar o movimento de um objeto a uma equação matemática.
- Compreender a forma de representação da equação quadrática quando **a<0.**
- Entender que o software pode proporcionar visualização.
- Compreender que a representação algébrica da equação quadrática descreve o movimento de uma bola, simulando um saque de voleibol.
- Manipular o domínio de uma função.

Episódio 2: Delimitação de domínio e escala do gráfico

Na busca de um entendimento do problema, com relação ao movimento descrito pela bola, a dupla faz a associação do movimento da bola de voleibol em efeito de saque ao formato do gráfico da equação quadrática com concavidade voltada para baixo. A dupla elabora um desenho como forma de reforçar os conhecimentos que estão discutindo. Recorrem ao software para obter uma visualização que comprove seus conhecimentos.

A visualização oferecida pelo software a partir da execução do programa é apenas uma parte da parábola, com concavidade para baixo. Nota-se que essa escolha não ofereceu uma boa representação do que desejavam buscar. Os estudantes não discutem que variáveis estão envolvidas, verificam apenas o efeito da curvatura oferecida pela parábola, validando o movimento da bola em situação de queda. Sendo assim, a dupla resolve modificar o intervalo que foi decidido anteriormente.

Voltam à janela de opções para definir um novo intervalo que agora varia de [**0; 20**], procuram também estabelecer o valor do passo para o **0,5** no sentido de dar mais velocidade ao software quando estiver mostrando o gráfico. A partir dessas novas escolhas, o gráfico apresenta o lado direito de uma parábola, partindo do ponto zero para a direita com concavidade para baixo, como mostrado na Figura 77.

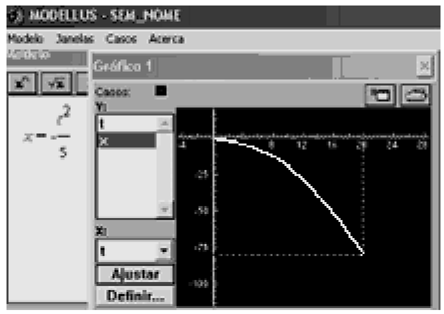


Figura 77 - Apresentação do gráfico da parábola no intervalo [0; 20]

Como a visualização gráfica apresentada pelo software parece ser um pouco estática, apenas indicando o sentido do movimento da bola, a dupla resolve desenvolver no software uma simulação. Essa ação da dupla já demonstra a valorização da escolha por uma forma de representação em detrimento de outra, mesmo partindo de um mesmo software.

Ao buscar criar a simulação, os estudantes abrem a janela de animação, nessa janela, definem **t** como horizontal e **x** como vertical. Alteram as escalas para [**0,05 e 0,5**] e executam o programa buscando verificar o movimento do objeto nessa janela de animação, o que eles observam é mostrado na Figura 78.

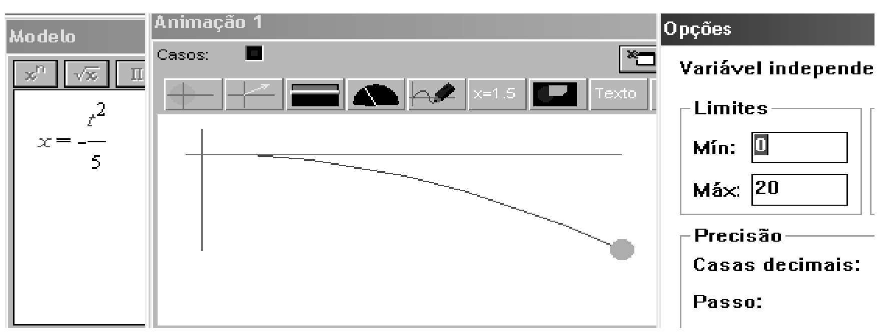


Figura 78 - Tela do Modellus apresentando a janela de simulação de objeto em movimento.

Nessa fase do segundo episódio, a dupla demonstra as seguintes habilidades:

- Manipular os limites de um intervalo buscando determinar a representação gráfica de uma função quadrática.
- Valorizar uma forma de representação em detrimento de outra, no sentido de ganhar conhecimento sobre um problema.
- Reconhecer no software várias formas de representação para uma mesma situação-problema.

Ao estipular o modelo através da equação $\mathbf{x = -t^2/5}$, a dupla necessitou verificar um intervalo que melhor oferecia uma visualização. Primeiro decidindo por um intervalo qualquer, sem a preocupação de receberem o gráfico de uma parábola com sua simetria em relação a um eixo vertical. Os estudantes recorrem a uma visualização gráfica para verificar esse efeito, no entanto, essa forma de visualização apenas oferece uma indicação de pontos (**x, y**) da trajetória do gráfico oferecida no software. Nota-se que os estudantes buscam efetuar modificações nos limites do intervalo, para apresentar o gráfico dentro da representação que necessitam. Essa ação, no entanto, vai ocorrendo por etapas.

Percebe-se que os estudantes procuram por uma melhor forma de representar o movimento da bola sugerido na situação-problema. Portanto, decidem por simular a situação, buscando um efeito visual de movimento para o objeto. Compreendemos que o software possibilita um outro olhar para as formas de representação.

Episódio 3: Simulação do movimento da bola

Após verificarem que a representação que obtiveram ainda não está de acordo com o que esperavam, abrem novamente a janela opções e alteram várias vezes o intervalo, para [**-10; 20**] e executam o programa. Depois para [**-20; 20**], depois para [**-5; 20**], executam e observam o movimento do objeto. Tedymar pareceu querer testar diversos intervalos, sem demonstrar essa intenção.

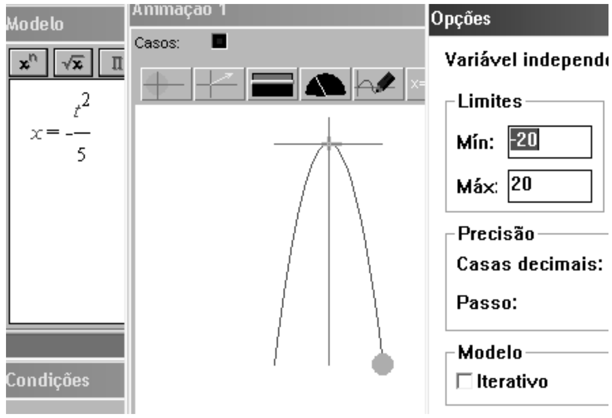


Figura 79 - Tela com animação a partir do intervalo [-20; 20] para verificar simetria da parábola.

Observa-se que nesse momento o contexto oferecido para a situação-problema é totalmente esquecido. Os alunos passam a definir os limites do t, sem pensar no significado da variável t, nem tampouco, o sentido que a mesma faria com valor negativo.

Em outra ação, Tedymar modifica as escalas no sentido de alterar a representação que está sendo oferecida para o movimento do objeto, escolhe horizontal = 0.5 e vertical = 0,5. Verifica que a partir dessa decisão a abertura da parábola ficou pouco acentuada. Portanto, volta a realizar modificações, primeiro no intervalo, ficando com extremos [**-5; 20**]. Executa o programa, com *feedback* dado na Figura 80.

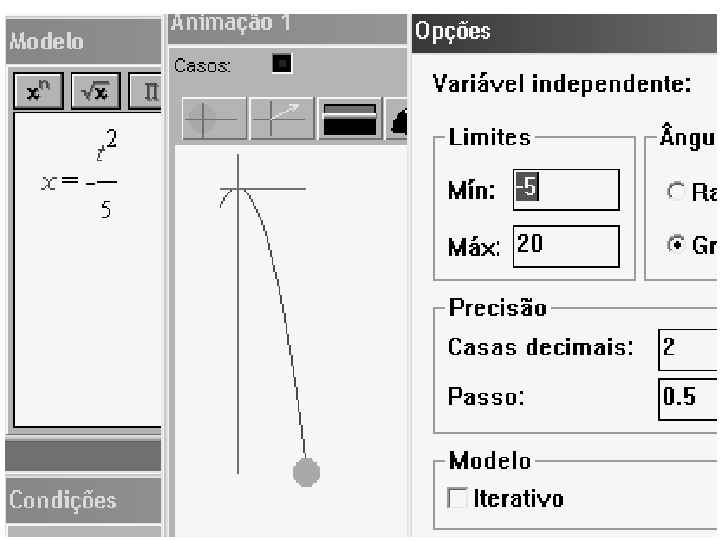


Figura 80 – Simulação do movimento do objeto no intervalo [-5; 20].

Ado: Acho que deve ser -10 e 10. Ele tanto pega de um lado...
Tedymar: Tá.
Ado: Porque assim onde ele começa de um lado vai terminar do outro lado [Uso implícito de uma idéia de simetria].

Os alunos, ao representarem graficamente uma função quadrática na escola, observam que o gráfico dessa função tem uma característica peculiar, apresenta simetria em relação à reta perpendicular ao eixo das abscissas que passa pelo seu vértice, quando apresentada no plano cartesiano. A dupla utiliza esse conhecimento, para definir um intervalo ideal que represente a trajetória da bola do início ao fim do seu movimento.

Ado, ao sugerir a modificação do intervalo, afirmando *"acho que deve ser **-10 e 10**"*, tenta obter uma representação da parábola em um intervalo que promova a sua simetria em relação ao eixo vertical. Isso identifica a relação que ele faz dessa simetria com o efeito produzido pela bola desde o início do saque até a bola tocar o solo.

Voltam a executar o programa e a simulação agora representa uma parábola com intervalo simétrico, como na Figura 81.

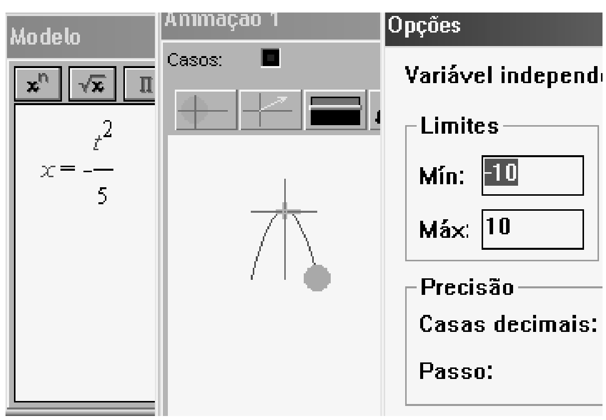


Figura 81 - Tela apresentando a simulação do movimento do objeto no intervalo [-10; 10]

Tedymar volta a trabalhar na janela do Modellus, modifica a equação modelo definida anteriormente por $\mathbf{x = -t^2/5}$ para $\mathbf{X= -6t^2/10}$.

Parece que a estratégia de Tedymar é ampliar o ângulo de abertura do gráfico da parábola. Ao executar, o resultado parece não ter sido satisfatório, ele volta a modificar novamente a equação modelo, agora para $\mathbf{X= - 7t^2/2}$. Ao executar o programa observa que o efeito não é o que ele esperava. O gráfico volta a ter as mesmas características das equações anteriores. A modificação do coeficiente que multiplica o t ao quadrado é feita sem antecipar seu efeito.

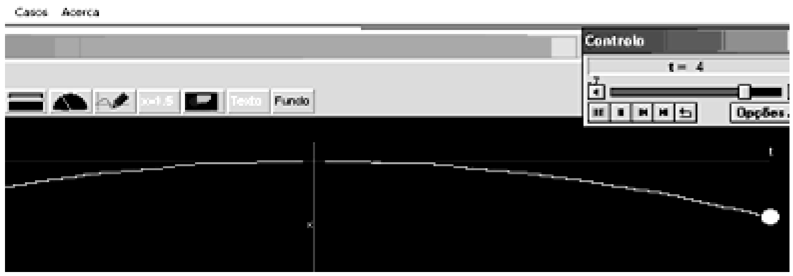


Figura 82 - Tela apresentando a simulação a partir da modificação das escalas realizada por Ted

Sem sucesso, recorre ao outro modo de ação para conseguir o efeito, procura modificar agora o valor da escala horizontal para **0,01**. Observando que apesar de ter conseguido um efeito que desejava, esse ocorreu em demasia, como verificado na figura 82. O objeto saiu da tela pelo fato da abertura da parábola que foi ampliada.

No terceiro episódio, a dupla apresenta várias habilidades que estão sendo apresentadas a seguir:

- Buscar a simetria da parábola que estão representando.
- Definir um intervalo ideal para representar o gráfico da parábola, observando a simetria oferecida por esse objeto matemático.
- Manipular o software para produzir efeitos significativos na simulação a partir da modificação da equação modelo.
- Modificar a escala horizontal para expandir a abertura da parábola.

Episódio 4: Composição do cenário da simulação

A dupla tenta conectar conhecimentos vivenciados na escola com os recursos oferecidos pelo software, ao modificar a expressão modelo para conseguir uma melhor representação do movimento da bola em efeito de saque em uma quadra de basquete. Por não obter sucesso, os estudantes procuram seguir por outro caminho, utilizam conhecimentos adquiridos a partir do manuseio do software para modificar a abertura da parábola, para conseguir um efeito que represente o movimento da bola. Modificam as escalas, como forma de equacionar a abertura da parábola. Após algumas tentativas, observam que a abertura da parábola ficou como desejado, essa visualização aparece na Figura 83.

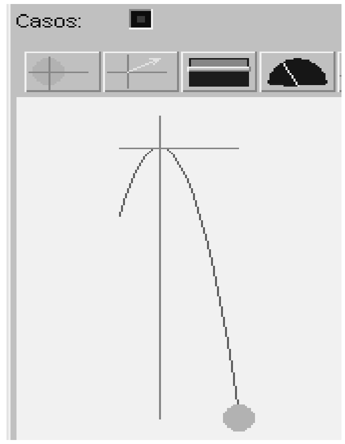


Figura 83 – Tela do Modellus apresentando a simulação do objeto no intervalo [-10; 20]

Tedymar: Agora temos uma jogada tipo jornada nas estrelas.
Ado: Volta, por que deveria ficar igual desse lado, a mesma coisa.
Tedymar: Agora vou pegar a foto do jogador. Infelizmente a gente não pode utilizar mais imagens. Vou pegar a foto de um jogador de basquete [Confunde basquete com voleibol].

Tedymar abre a janela de objetos e procura selecionar um objeto para inserir na simulação que está elaborando. Ado parece não entender a intenção de Tedymar em deixar o intervalo variando, sem oferecer a simetria da parábola em relação à medida do intervalo. Para Tedymar há a intenção de colocar a imagem de outro objeto, um jogador arremessando a bola. Dessa forma, a bola deverá partir das mãos do jogador. Sendo assim, deve ser computada a altura do jogador em relação ao solo, de modo que a simetria ao ponto de chegada exista a partir dos pés do jogador.

Tedymar abre a janela de imagens e coloca o novo objeto na tela, enriquecendo a simulação, agora constando dois objetos. Essa simulação que ele está criando, utilizando **jogador** e **bola**, é bem peculiar a uma situação real. De certa forma, ele associa o fenômeno real à forma como está sendo sugerida no problema.

Tedymar executa o programa e vê que a bola não parte da mão do jogador. Neste caso, modifica o intervalo para [**-4,8 ; 7**], testa novamente e volta a fazer nova modificação, agora para [**-4,6 ; 7**]. Com a última modificação que realizou no intervalo, observa que a simulação ficou mais adequada ao efeito que desejava. Como mostrado na Figura 84.

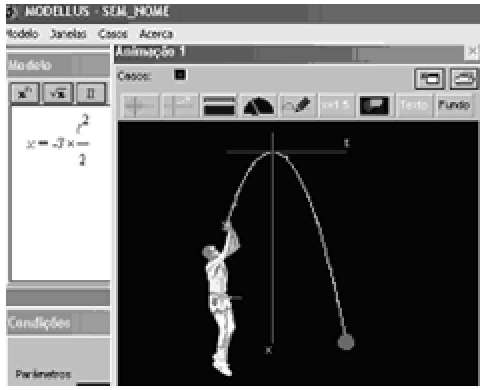


Figura 84 - Tela do Modellus com uma simulação elaborada por Tedymar com imagem do jogador

> **Ado**: Esse intervalo não. O outro intervalo, pra ele abrir mais.
> **Tedymar** Espere aí... ok, só que agora temos que criar uma equação agora para fazer com que o jogador se movimente também.
> **Ado**: Vai ficar bom. Acho que só precisa mexer na descida.

Tedymar na janela principal do Modellus volta criar uma segunda expressão **$y=t^2/5$**, conforme Figura 85.

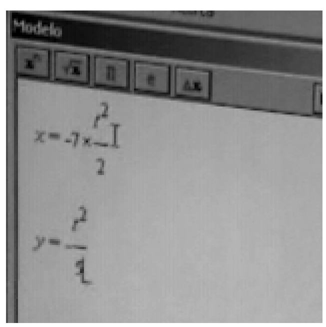


Figura 85 - Equações digitadas por Tedymar para desenvolver os movimentos da bola e do jogador

Essa segunda expressão, segundo Tedymar deverá atribuir movimento ao jogador. Portanto, tenta construir efeitos importantes na simulação, buscando conhecimentos adquiridos por meio de observação do cotidiano, para incluir na simulação que estão elaborando. Ao executar o programa os estudantes observam que não houve o movimento para o jogador. Tedymar procura a janela opções e modifica o passo para **1**, ficando agora o movimento dos objetos bem mais rápidos. Tedymar demonstra ter convicção do que está realizando, pois ao executar um comando e não verificar sua ação, nota que esse fato ocorreu por conta do movimento não ter apresentado um efeito significativo.

Voltam a modificar novamente o passo para **0.1** e alteram a escala horizontal do objeto jogador para **0.5**, modificam o passo para 1 e depois para 0.1. Tedymar fica ajustando essa imagem, até perceber que ficou adequada e oferecendo movimento aos objetos **bola** e **jogador**. Após definir como ideal a imagem, resolve incluir outro objeto (a figura de uma palmeira) na simulação para ilustrar a situação, criando um ambiente mais apropriado a situação.

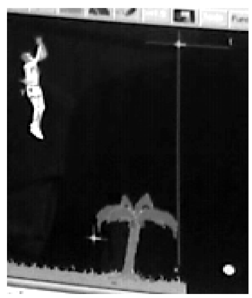


Figura 86 - Tela com composição da simulação com os objetos jogador, palmeira e bola.

Ao colocar a imagem palmeira, modifica o local da imagem do jogador. Executa o programa e observa. Volta a modificar o intervalo para [**-7; 7**], ajusta a posição do jogador, modifica novamente o intervalo para [**-5,1; 7**]. Retira os eixos **x** e **y** e procura inserir outras imagens de palmeiras, ficando a imagem da simulação como mostrada na Figura 87.

Figura 87 - Tela apresentando a ação de Tedymar para posicionar os objetos que farão parte da simulação.

Nessa fase do quarto episódio algumas habilidades são demonstradas pelos estudantes:

- Simular no computador a representação de uma situação-problema.
- Associar a um fato real o fenômeno tratado no problema.
- Promover ajuste na localização do objeto através de recursos oferecidos pelo software para decidir sobre um melhor intervalo.
- Enriquecer a simulação com elementos visuais a partir de recursos oferecidos pelo software.
- Reconhecer no software potencialidades para valorizar a simulação de um fato real.
- Repensar a construção do modelo. Incluindo detalhes (movimento do jogador ao sacar a bola).
- Capacidade para obter efeitos de simulação através dos recursos oferecidos pelo software.

Essas habilidades com o software são demonstradas por Tedymar quando entende que pode utilizar objetos simultâneos para compor a simulação. Cada um desses objetos terá vida própria e estará em conexão com a equação modelo que definiu para expressar a solução do problema. Nota-se, que a família definida é a mesma, para o jogador e para a bola.

> **Tedymar:** Bem, aí representamos um saque jornada nas estrelas em que a bola faz uma parábola, com a concavidade voltada para baixo.
> **Professor:** Para o tamanho da quadra, com esse saque, a bola não chegará ao outro lado da quadra, não acha [Reconhecimento dos conhecimentos matemáticos em jogo].
> **Tedymar:** Não, depende da posição do jogador. É nesse caso não.
> **Professor:** O jogador nesse caso, ficaria muito em cima da rede, o jogador deveria estar bem na ponta da quadra, acho que é uma questão de arrumação dessa simulação.
> **Tedymar:** Espera aí.
> **Ado**: Esse intervalo aí, Tira a bola daqui.
> **Tedymar:** Vou trocar a escala horizontal para 0.05. Aqui tem mais acentuação [volta a modificar a escala para 0.001 e observa que ficou bem mais extenso o movimento da bola].
> **Professor**: Veja 0,02 [observa-se que os estudantes recorrem a modificação das escalas com o objetivo de ampliar a abertura da parábola. Em nenhum momento discutem o ângulo de lançamento].
> **Ado**: Melhorou, traz o eixo mais para cá.
> **Tedymar:** Um saque desse ele aumenta a parábola. Realmente não está numa quadra né....

Figura 88 - Tela apresentando a definição de Tedymar para um de teste do movimento da bola.

Episódio 5: Validação e aceitação do modelo

Tedymar busca chegar a uma representação ideal para o movimento da bola, fazendo-a sair das mãos do jogador no início da quadra e atingindo o final da quadra.

O conhecimento que os estudantes demonstram quanto às potencialidades do software é enriquecedor para o desenvolvimento da simulação, visto que demonstram habilidades importantes, buscando no software todos os recursos possíveis que possam ser incluídos para gerar a simulação.

A simulação que elaboraram ficou adequada aos efeitos que desejaram construir para o problema, pois identifica a situação-problema apresentada. No entanto, as variáveis neste caso não partem de uma identificação dos elementos construtores e, portanto, o significado dos seus valores não pareceram ter importância para os alunos.

Professor: Anotem no papel as equações que vocês criaram.
Tedymar Repare que o jogador, ele não sai muito, ele se movimenta lentamente.

Após anotar, Tedymar tenta explicar ambas as equações. O que elas estão proporcionando na simulação.

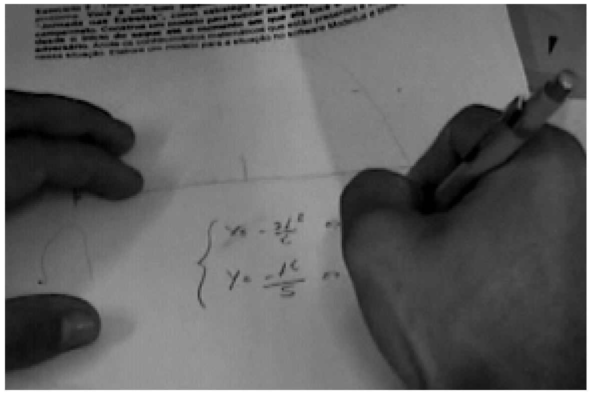


Figura 89 – Anotação de Tedymar no papel das equações que compõem o modelo.

> **Tedymar:** Se a gente quiser ter uma realidade maior disso a gente diminui o número do passo [altera o passo para 1, buscando um movimento mais acelerado da simulação], a gente vai ter uma realidade mais próxima certo, deixa eu diminuir o número aqui, para voltar. Então essa é a solução do problema. Realidade mais próxima do jogador atirando uma bola fazendo um saque jornada nas estrelas, não é.
> **Ado**: Ficou bom.
> **Professor**: É, acho que podemos finalizar atividade [Tomada de decisão].

Observamos que a dupla apresentou conhecimentos relativos a efeitos de movimento para cada um dos objetos utilizados na simulação. A bola com equação específica tem um movimento alongado a partir da parábola **$X= - 7t^2/2$,** pelo fato das escalas que foram definidas. Já o jogador aparece com pequena movimentação por estar associado a equação **$y = - t^2/5$,** cujas escalas não foram modificadas. Portanto, a simulação oferece um modelo composto de duas equações, para representar a situação-problema.

Nessa fase do quinto episódio, as habilidades demonstradas são as seguintes:

- Capacidade para promover tipos de efeitos numa simulação.
- Reconhecimento das possibilidades para realizar efeitos que o software pode oferecer.
- Compreensão matemática em relação ao movimento dos objetos representados por equações diferentes em intervalos iguais.

VI.2.2 – Análise da realização da atividade 2 pela dupla 2

Episódio 1: Contextualização do problema.

Maxwell e Marta, após a leitura do problema, procuram elaborar uma representação para o movimento da bola. Maxwell associa o movimento da bola a uma expressão matemática – equação do 2º grau. Essa observação, referendada pelo professor, é reforçada por Marta para indicar a necessidade de uma representação para o movimento descrito pelo objeto, como mostra o diálogo.

Maxwell: Acho que tem que fazer uma representação para o problema.
Marta: É
Maxwell: Aqui vai ser uma equação do segundo grau.
Professor: Como é, faça o desenho da sua compreensão.
Marta: Faz um desenho Maxwell.
Maxwell: Vamos colocar um jogador de voleibol, tem a cesta, ai ele vai lançar a bola, ela cai, ela vai e cai na cesta. [Maxwell gesticula com as mãos a representação visual do saque e movimento da bola, confunde vôlei com basquete e desenha no papel essa representação].

Maxwell, além de afirmar a necessidade de representar o movimento do objeto, apresenta o conhecimento matemático envolvido na situação. Pega a folha de papel e faz um desenho do movimento da bola, (ver Figura 90). Além disso, representa o modelo algébrico da equação quadrática, $\mathbf{Y = ax^2 + bx + c}$. No caso dessa dupla, a equação é a geral.

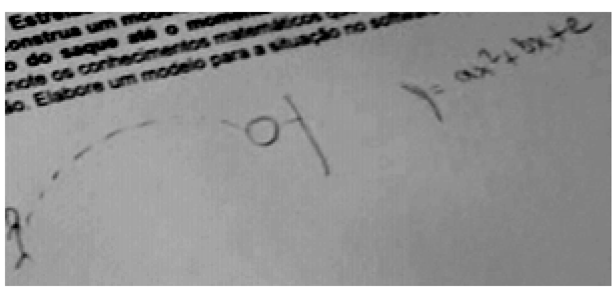


Figura 90 - Desenho realizado por Maxwell para indicar o movimento da bola

Novo diálogo é iniciado por Marta, no qual ela conecta o desenho com a idéia de ponto de máximo da parábola. Depois discute a necessidade de atribuir valores aos coeficientes, como mostra o diálogo.

Marta: No caso ela vai ter limite máximo.
Maxwell: É um limite máximo, no caso tem que representar em forma de equação.

Marta: Aí no caso dá isso,... vai ter que dar valores...
Maxwell: Ai, não seria qualquer função do segundo grau não, não é!

Nessa fase do primeiro episódio, as seguintes habilidades são apresentadas pelos sujeitos.

- Reconhecer a necessidade de representação para o problema.
- Identificar uma situação matemática e relacioná-la ao conhecimento específico de equação do 2º grau.
- Identificar elementos da equação do 2º grau associando os fatos apresentados no problema. Altura máxima a ser atingida pela bola (ponto de máximo).
- Decidir sobre dados para a situação-problema no sentido de complementar as informações e torná-la um fato matemático.

Episódio 2: Definição do modelo algébrico

Após a definição de um modelo algébrico preliminar, utilizam o software Modellus como um recurso auxiliar para testagem. Digitam a equação referente ao modelo e conversam no sentido de discutir como tratar essa equação modelo no software. O diálogo ocorre como apresentado a seguir.

Maxwell: A gente monta a equação, estipula valores e faz um gráfico pra ver como é que fica a parábola dela.
Marta: É
Maxwell: Dá **X** elevado ao quadrado, né.
Marta: É.
Maxwell: Vezes **X** mais **C**, agora vai ter o valor, falta colocar.
Marta: Os valores... bota ...

No computador, digitam a equação $Y = ax^2 + bx + c$ e interpretam. Observam que nada acontece, pois digitaram a expressão modelo sem gerar os valores para os coeficientes a, b e c. Marta, percebendo esse fato, inicia um diálogo buscando incentivar Maxwell a fazer uso da janela condições iniciais, na qual figura a anotação dos valores para os coeficientes a, b e c.

Marta: Tem que digitar lá...
Maxwell: Está interpretando..... Digitou na fórmula ele já interpreta já.

Maxwell parece não entender a preocupação de Marta, pois compreende que o software vai lhe oferecer os resultados desejados mesmo a equação estando na forma que foi apresentada no computador, Figura 91. Marta sugere digitar valores para os coeficientes **a**, **b** e **c**. A janela condições iniciais apresenta apenas as variáveis **a** e **x,** pois está comprimida.

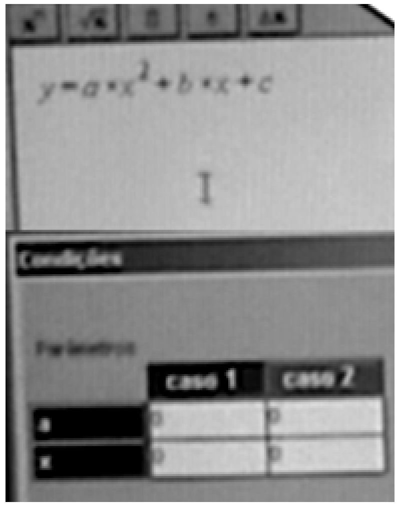


Figura 91 - Tela do Modellus apresentando a ação de Maxwell ao procurar definir valores na janela condições iniciais.

Maxwell percebe o fato de a janela condições iniciais estar comprimida, então amplia a janela no sentido vertical fazendo aparecer as demais variáveis tratadas na expressão modelo (ver Figura 92). Ainda digita na janela do Modellus as variáveis **b** e **c**.

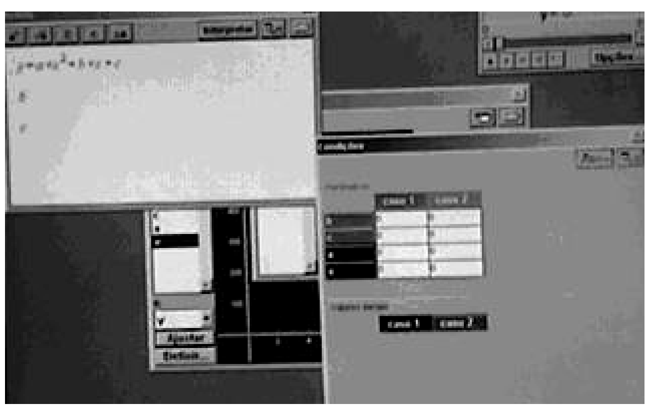


Figura 92 - Tela apresentando as variáveis digitadas por Maxwell na janela condições iniciais.

Maxwell volta atrás quanto à digitação dos valores **b** e **c** na janela principal do Modellus. Resolve apagar, ficando a tela com a seguinte imagem.

Marta: Vai interpretar para ver.
Maxwell: Vamos lá.
Marta: Você está selecionando nessa janela apenas o **X.**
Maxwell: Vou executar. Oxente! [Surpreso com a não definição do gráfico].

Maxwell abre a janela de opções, define um intervalo com valores [**-10; 10**], troca a variável independente **T** por **Y**, na janela de gráfico seleciona a variável **X** e executa o programa (ver Figura 93). Nota que nenhuma representação gráfica foi mostrada pelo software.

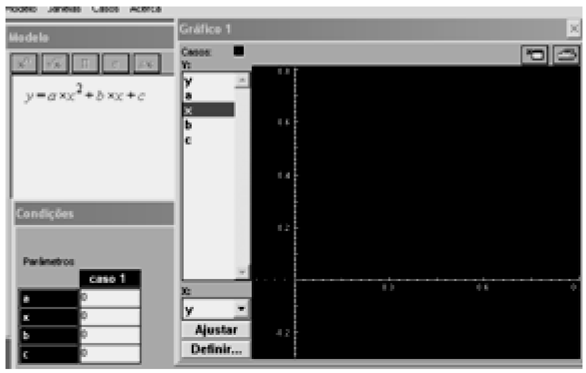


Figura 93 - Modificações de Maxwell para o intervalo [-10; 10**] e a seleção da variável** X **para indicar a representação gráfica.**

Percebe-se uma clara desorientação da dupla quanto às variáveis consideradas e as que definiram como contador. Maxwell, ao buscar encontrar uma compreensão das decisões que efetuou, agora, abre a janela opções, coloca **t** como variável independente e executa. Novamente o gráfico não é apresentado. Maxwell fica mudando as variáveis na janela de gráfico, como artifício de fazer aparecer a visualização gráfica. Duas das escolhas de Maxwell são apresentadas na Figura 94 a seguir, tentando utilizar o software para visualizar o gráfico da parábola.

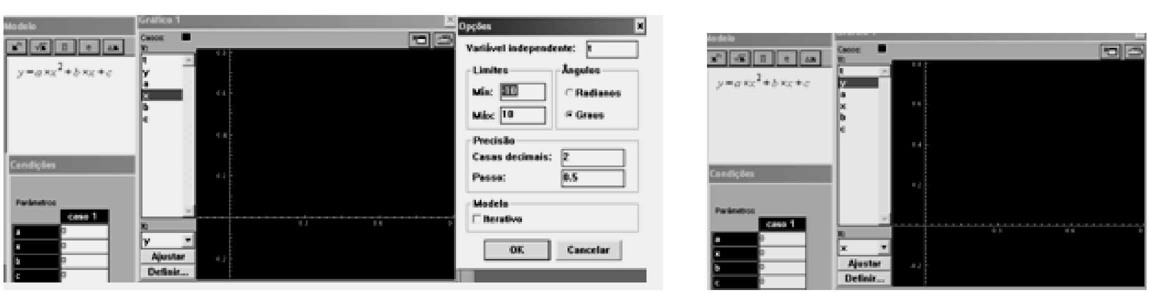


Figura 94 - Busca de Maxwell por definir a variável independente como t e selecionar o x na janela de gráfico

Aqui Maxwell tenta outro tipo de estratégia, atribuir valores as variáveis na janela de parâmetros. **a =1, x =0, b = 2 e c = 1** (ver Figura 95).

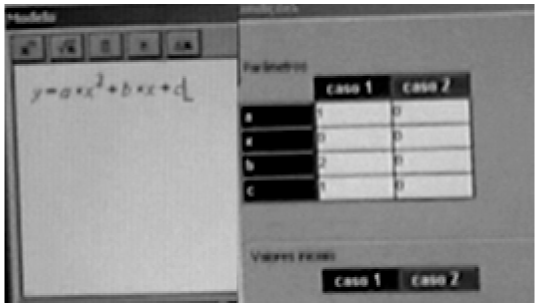


Figura 95 - Decisões da dupla quanto aos valores atribuídos aos coeficientes na janela de parâmetros

Maxwell ao utilizar na janela de gráfico, o recurso de atribuição de parâmetros as variáveis, coloca **x = 0**. Esse fato torna a função, com valor constante y=c. Maxwell logo percebe esse fato ao observar que sobre o eixo das abscissas é apresentado como gráfico uma reta paralela ao eixo **x**, pelo fato da função ter sido indicada por **f(x) = 1.** Um diálogo dá prosseguimento a essa compreensão da dupla.

Maxwell: **X** sendo zero dá zero.
Marta: **X** sendo zero, só vamos ter a constante **C**.
Professor: É **X** sendo zero, vai só existir só o **C**.
Marta: Então a gente tem que colocar uma atribuição para **X**. tem que botar que **X** é maior que. Tem que determinar é o intervalo de **X**
Maxwell: Quem vai ser a variável independente é **X**.

É este erro, juntamente com o retorno gráfico oferecido pelo software que faz a dupla descobrir a dissociação entre a variável independente utilizada na equação e a variável independente que faz o Modellus executar. Maxwell anota a equação modelo no papel na forma algébrica, depois atribui valores as variáveis, ficando como mostrado na Figura 96.

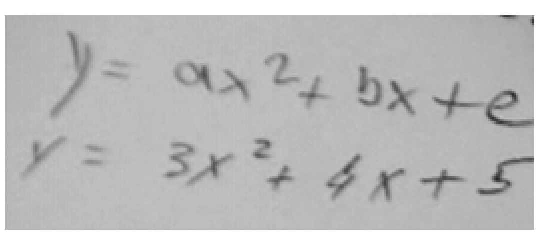


Figura 96 - Representação de duas equações anotadas no papel pela dupla e utilizadas no software.

Maxwell no software tenta a todo custo representar o gráfico da parábola. Observamos que ele define a variável independente como x, observa o intervalo variando entre [**-10 ; 10**], valores para **a = 3, b = 4, c= 5 e Y = 5**. Abre uma tabela no sentido de verificar resultados para esses valores, Figura 97.

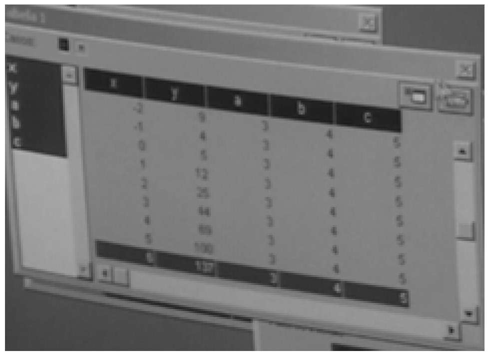


Figura 97 - Janela de tabela do Modellus solicitada pela dupla para efetuar verificação de resultados.

Após observar valores em uma tabela, Maxwell volta a redefinir o intervalo como sendo [**0; 10**] e executa o programa. Os valores vão sendo representados em uma tabela na tela do computador. Depois fala sobre os resultados recebidos.

Marta: Bota para funcionar [executar] no gráfico
Maxwell: Janela de gráfico. Deixa eu colocar aqui, seria não... Assim o gráfico... Vai dar zero...Vai dar que **X** é maior que... Ao quadrado mais .
Marta: Determinar o intervalo
Maxwell: Quem vai ser a variável independente é **X**. Deixe eu ver uma tabela. Vou colocar de 0 a 10. Quando **X** for zero **y** é .5. Quando **X** for um, **y** é 12, quando **X** for 3 ...
Marta: Que **X** é maior .

Nessa fase do segundo episódio, algumas habilidades são demonstradas pelos sujeitos.

- Manusear corretamente o software no sentido de buscar a visualização de um objeto que não aparece na janela do computador (ampliação da janela condições iniciais).
- Apresentar um modelo algébrico para representar a situação-problema.
- Reconhecer a necessidade de decidir sobre os coeficientes da equação que compõe o modelo algébrico.
- Utilizar conhecimentos de uma representação para identificar a variável independente.

Episódio 3: Validação do modelo algébrico.

Após realizar a observação dos dados recebidos na tabela, Maxwell abre uma janela de gráfico, seleciona as variáveis **y** (dependente) e **x** (independente), executa o programa e obtém a seguinte representação:

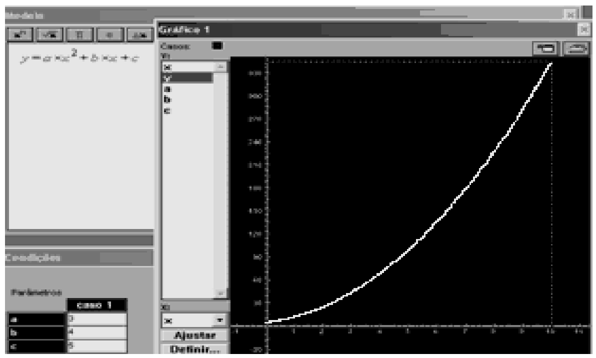


Figura 98 - Janela de gráfico com a representação gráfica da equação definida pela dupla

Maxwell tinha convicções do que tentava realizar, pois chegou a representar graficamente uma curva (parábola), a partir da equação modelo no intervalo [**0, 10**], Figura 98. O diálogo a seguir, descreve seu argumento sobre o que conseguiu representar, com sua companheira de dupla.

> **Maxwell:** Olha aí deu uma parábola, agora tem que ser negativa. [Após validar o modelo]
> **Professor:** Como é Maxwell?
> **Marta:** Tem que ser negativa.
> **Maxwell:** O valor de **a** tem que ser negativo. A concavidade da parábola deve ser para baixo....
> **Marta**: Vai variar.

Maxwell está preocupado em definir a concavidade da parábola, vai à janela principal do Modellus e coloca o sinal de menos na equação modelo e volta a executar o programa, recebendo como representação a visualização imagem:

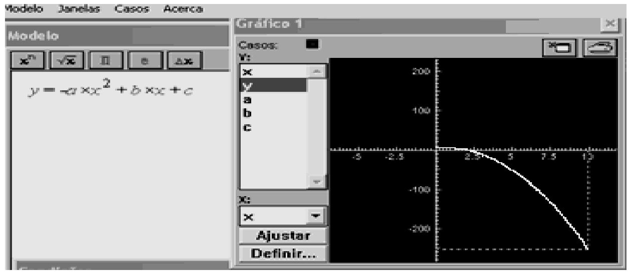


Figura 99 - Janela de gráfico aberta por Maxwell, para visualizar o gráfico de uma parábola com concavidade para baixo, no intervalo [0, 10].

Maxwell demonstra compreender os efeitos que estão sendo produzidos a partir das modificações que promove no modelo que está gerando. O fato de mudar o sinal da equação, a compreensão de que o gráfico não inicia no zero e também de só estar sendo representado uma parte do gráfico. Um diálogo vem logo a seguir no qual são tratadas essas questões.

> **Maxwell:** Agora aqui as opções... ela não está partindo do zero, ela está menos dez, ela vai partir daqui. Aí a gente vai fazer.
> **Professor**: Uma simulação? [professor tenta levá-los a representar a situação por meio de uma simulação]
> **Maxwell**: É a gente pode fazer uma animação para ver como é que fica. Deixa-me ver uma coisa aqui no gráfico [Maxwell entende que simular é realizar no software uma animação que represente o fenômeno].

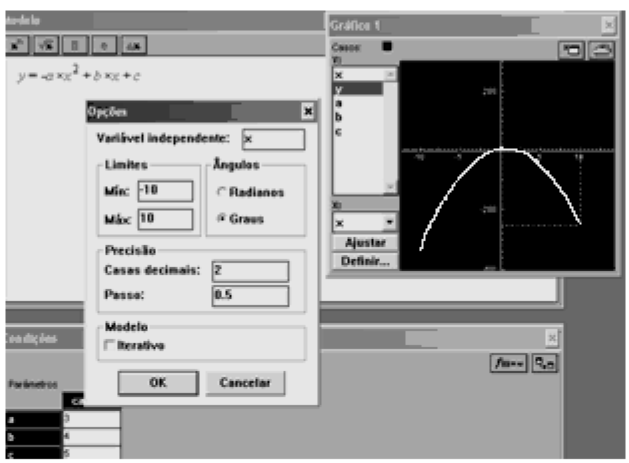


Figura 100 - Telas de opções e de gráfico da parábola no intervalo [-10; 10] definido por Maxwell

A dupla passa ajustar a imagem que está sendo oferecida a partir de conhecimentos matemáticos e do retorno dado pelo computador. Procuram por sugestão do professor outra forma de validar o modelo, através da construção de uma simulação. O diálogo a seguir mostra a tentativa de enriquecer a representação e validação do modelo.

Marta: Não está subindo muito não?
Maxwell: Foi, Agora eu...
Marta: Hum**...**
Maxwell: Aí dependendo do valor da escala a parábola abre mais
Professor: Da escala? [Coloca uma interrogação].
Marta: Exatamente. bota um [Sugerindo alterar o valor da escala].
Maxwell: Um, é aí ele abre muito.
Professor: Bota 0,5
Maxwell: É 0,5 tá bom.

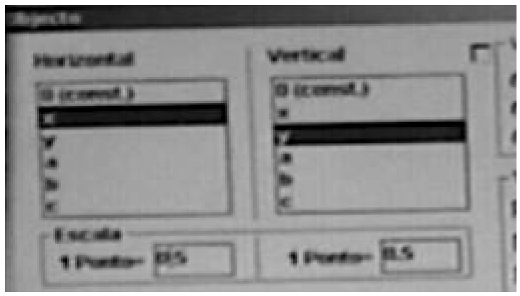


Figura 101 - Tela de opções do objeto de animação com modificação das escalas efetuadas por Maxwell.

Nessa fase do terceiro episódio as seguintes habilidades são apresentadas pelos sujeitos.

- Validar o modelo.
- Reconhecer o efeito que o modelo deve apresentar.
- Alterar os coeficientes da equação quadrática a partir de expectativas de visualização da representação gráfica.
- Valorizar uma representação em detrimento de outra.

Episódio 4: Modificação e apresentação do modelo

Maxwell já entende que o valor atribuído às escalas poderá alargar ou não a abertura da parábola. Dessa forma, define primeiro para as escalas valores de 0.1, observa que não foi uma boa opção, volta e redefine esses valores para 0.5, e nota que ainda não está bom. Por fim, volta a redefinir o valor da escala horizontal para 0.05 e a escala vertical fica com 0.5. Dessa forma, ele obtém um efeito próximo ao de uma bola em trajetória de saque jornada nas estrelas, conforme a mostrado na Figura 102.

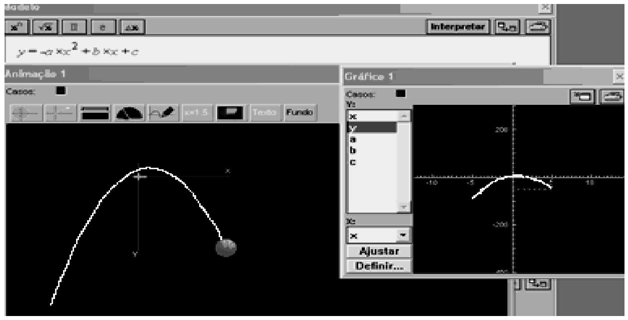


Figura 102 - Telas de animação e de gráfico com a simulação indicando um efeito próximo ao que está indicando o problema

> **Maxwell**: A gente está vendo a concavidade, vou melhorar o intervalo. [Figura 103].
> **Marta**: Para quanto?
> **Maxwell**: Para igualar. [Maxwell buscando deixar simétrica a parábola].

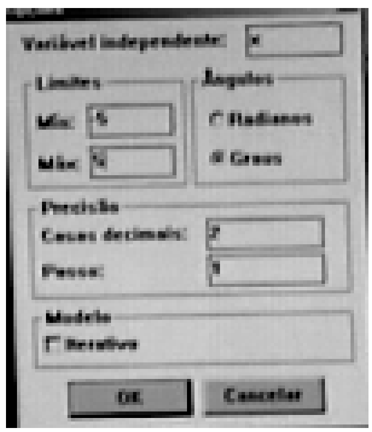


Figura 103 – Tela apresentando a modificação de Maxwell para os limites do intervalo.

A dupla utiliza o papel para realizar anotações de um pequeno texto, referindo-se a concavidade da parábola, (ver Figura 104).

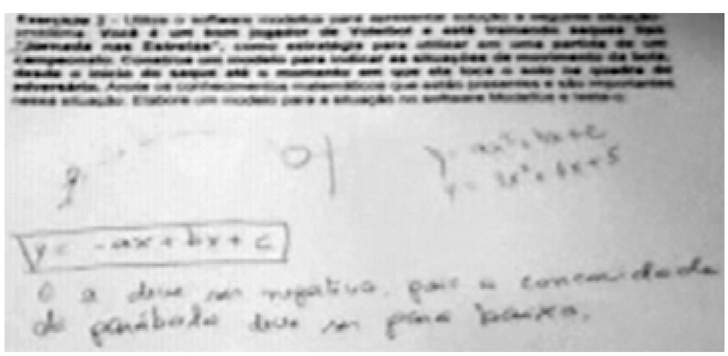


Figura 104 - Anotação realizada por Marta sobre a concavidade da parábola

Após a anotação realizada no papel, Maxwell volta ao computador e abre todas as janelas ativas do Modellus, como se buscasse ainda verificar algo.

Maxwell fica analisando as janelas abertas do Modellus e compreende que nada mais precisa realizar. Então propõe encerrar. O professor ao verificar que eles não buscam continuar a atividade, procura encerrar a tarefa.

No quarto episódio, os sujeitos apresentam as seguintes habilidades.

- Identificar conhecimentos da equação quadrática (sinal da equação e simetria).
- Compreensão de que o gráfico não deve iniciar no ponto (0, 0).
- Validar o modelo a partir da representação de parte do gráfico.
- Valorizar uma representação em detrimento de outra.
- Manipulação do software para modificar a representação gráfica do modelo.

VI.2.3 – Análise da realização da atividade 2 pela dupla 3

Episódio 1: Contextualização do problema e apresentação dos elementos construtores.

A dupla faz a leitura do problema e discutem como deve ser abordado o problema. Um primeiro diálogo ocorre no sentido de buscar um entendimento sobre o que o problema oferece.

> **Weldon**: O jogador de voleibol vai treinar saque jornada nas estrelas.
> **Lisa:** Deixa eu fazer... vai ser assim. [Lisa tenta representar por gestos a descrição da trajetória da bola nesse tipo de saque].
> **Weldon**: É desde o início até atingir o solo.
> **Lisa:** Vai ficar: $\boxed{\mathbf{X^2 + 4X + 2}}$.
> **Weldon**: É negativo.

Lisa gesticula o movimento da bola e apresenta um modelo de equação quadrática $\boxed{\mathbf{X^2 + 4X + 2}}$ para indicar uma representação para a trajetória da bola. Weldon começa a demonstrar uma compreensão da relação entre a concavidade da parábola e o coeficiente da expressão, quando faz a correção da expressão que Lisa está sugerindo como modelo para a situação.

Lisa procura fazer nova leitura do problema, agora buscando anotar no papel algo que tem em mente e que está sendo sugerido a Weldon. Durante o diálogo, há o reforço de Weldon em afirmar que a equação deve estar com sinal negativo. Lisa coloca o sinal de menos e atribui a expressão a uma variável **t**, ficando a expressão modelo anotada no papel da seguinte forma:

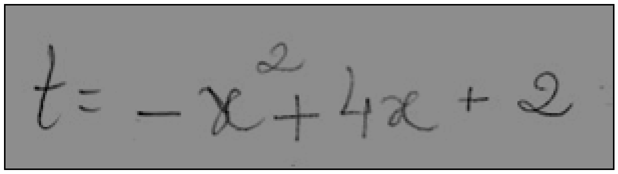


Figura 105 - Anotação no papel realizada por Lisa para representar o modelo algébrico

Lisa: É mais ou menos assim.
Weldon: Vou digitar no computador.
Lisa: vai ficar: **- X^2+ 4X + 2**
Weldon: Vamos fazer esse melhor [Esse comentário de Weldon é referente à dificuldade que tiveram na atividade 1].
Lisa: Escreve em função de **t.** [Ficando a expressão indicada por **Y=- X^2+ 4X + 2].**

Voltam a ler novamente o problema, parecendo buscar outras informações. Lisa, então, sugere a Weldon a anotar no computador todas as informações de que já dispõem. Weldon faz a digitação da expressão oferecida como modelo, pede para o software interpretar, abrem uma janela de animação, seleciona o ícone de objeto e incluem na janela de animação, define as variáveis para os eixos horizontal=**T** e vertical=**X.** Como passo anota 0.1, procura inserir a imagem de um objeto e seleciona a figura de um jogador de basquete, **basket.bmp**. Weldon ainda marca o item trajetória no quadro de atributos.

Ao clicarem em OK, a janela de animação oferece a figura de um jogador de baskete.

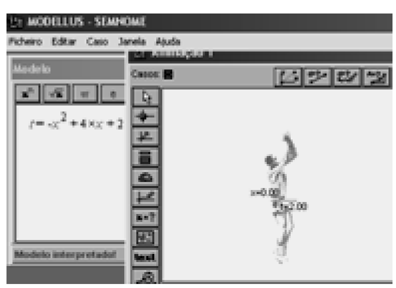


Figura 106 - Tela do Modellus apresentando uma simulação do jogador realizada por Weldon

Reconhecem a partir do movimento do objeto, uma associação ao conhecimento matemático escolar do gráfico de uma parábola com valor de **a<0,** expressando a concavidade voltada para baixo, esse fato foi prontamente observado pela dupla como a solução que se apresenta ideal ao problema em questão.

Lisa: Define o limite Weldon
Weldon: O limite dever ser -10 e 10
Lisa: Coloca -20 e 20
Weldon: Está bem

No primeiro episódio, a dupla demonstra as seguintes habilidades:

- Tratar a situação-problema por meio de uma expressão matemática - modelo.
- Identificar o tipo de movimento a ser executado pelo objeto (bola) como uma parábola com concavidade para baixo.
- Relacionar as características do gráfico com os coeficientes da equação.
- Relacionar um fato real a um conhecimento matemático.
- Representar por gestos o movimento da bola.
- Reconhecer o computador como um recurso para representar a situação

<u>Episódio 2:</u> Tratamento do modelo algébrico no software.

Ao executarem o programa, aparece na tela de animação apenas o movimento do eixo. Como não há movimentação do objeto inserido por eles na janela de animação, Weldon pára a execução, recorrendo a um recurso oferecido na computação, que é movimentar o objeto utilizando o mouse, pegando-o e movimentando-o. Na janela de animação, aparece uma mão, que oferece o efeito de pegar (agarrar) o objeto simulado na tela. Dessa forma, ao usar esse comando no objeto, Weldon percebe que o objeto jogador, está descrevendo a orientação que seria estabelecida para o movimento da bola, a partir da equação que está digitada no computador. A trajetória é indicada riscando na janela de animação uma linha referente a um gráfico da equação modelo. **$t = - X^2 + 4X + 2$**

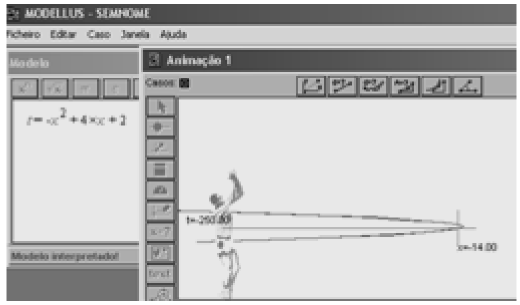


Figura 107 - Tela com trajetória horizontal do movimento do objeto jogador realizada por Weldon.

Os estudantes ainda não compreenderam que o jogador deveria ser um objeto fixo e uma bola é que deveria estar em movimento. Lisa percebe parte desse erro e solicita a Weldon uma troca dos eixos.

Lisa: Troca os eixos está errado.
Weldon: Está bem. [Ele troca os valores do eixo para horizontal **X** e vertical **T**]
Lisa: Pronto agora tem que melhorar.
Weldon: Deixa eu abrir e executar.

No segundo episódio, a dupla apresenta as seguintes habilidades:

- Manipular o software para elaborar uma simulação do problema;
- Decidir por um intervalo numérico que possibilite uma melhor representação da situação;
- Manipular os recursos do computador no sentido de compreender efeitos e conhecimentos oriundos das técnicas computacionais.

Episódio 3: Problematização, hipóteses e dificuldades.

Após a modificação, a janela de animação, já definida com os eixos horizontal **x** e vertical **t**, oferece uma representação (ver Figura 108). Nota-se que o objeto é mostrado pela metade, não estando bem centralizado na janela. Mesmo assim Weldon clica por duas ou três vezes no botão executar e verifica que o objeto pouco se movimenta. Esse fato leva Weldon a manuseá-lo no sentido de deslocá-lo para o centro. Lisa sugere mudar o passo para se ter uma melhor visualização.

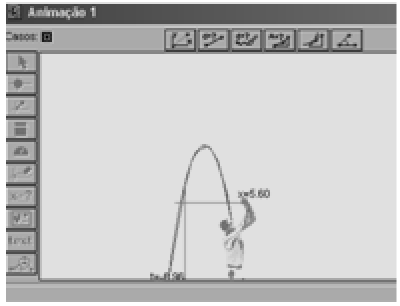


Figura 108 - Tela apresentando o movimento no sentido vertical do objeto jogador.

Lisa: Muda o passo Weldon.
Weldon: Para quanto? 0,5 está bom. V.i. = T, passo = 0,5
Lisa: Aumenta o intervalo.
Weldon: Aqui em 20?
Lisa: Sim
Weldon: Está bem: -40 e 40
Lisa: Troca à imagem.
Weldon: Para qual?

Após verificar o tipo de movimento do objeto, a dupla percebe a necessidade de troca da imagem, trocando o objeto jogador pela imagem da bola de basquete. Após dar Ok, recebem a janela de animação da seguinte forma:

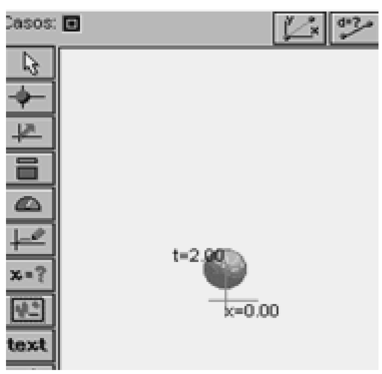


Figura 109 - Tela do Modellus apresentando uma janela de animação com o objeto bola.

Ao executarem o programa, verificam um pequeno movimento do objeto (com extrema rapidez). A imagem que fica na tela tem o seu eixo vertical expandido, ficando a janela de animação da seguinte forma:

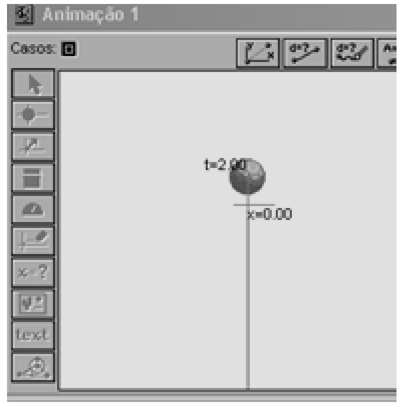


Figura 110 - Tela do Modellus apresentando uma simulação.

Professor: Aumenta esse passo Weldon.
Weldon: Já está em 0.5
Lisa: É a variável.

Weldon busca modificar os eixos na janela de objetos, ficando com uma mesma definição de **t** para os eixos das abscissas e ordenadas. No entanto, não executa o programa. Lisa então sugere ir à janela principal do Modellus no sentido de verificar algo, observa e nada parece discordar daquilo que ela estava buscando. solicita a Weldon que abra a janela objeto, verifica as variáveis definidas para os eixos e sugere a Weldon colocar de acordo com suas convicções: Horizontal **X** e vertical **t.** Weldon faz algum comentário com Lis. "*Olha aqui*" como se quisesse informar algo sobre a posição correta dos eixos visualizados na janela de animação.

Figura 111 - Tela do Modellus recebida por Weldon para as definições que realizou.

Weldon procura posicionar melhor os eixos no centro da janela. Resolve trocar o sinal de menos do termo de grau dois da equação, ficando **$t = X^2+4X+2$,** depois interpreta e visualiza esse efeito na janela de animação. Observam que ocorre a mudança de posicionamento dos eixos, a parábola agora será elaborada com concavidade voltada para cima.

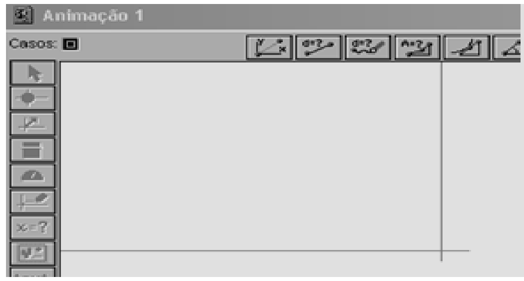


Figura 112 - Tela do Modellus apresentando os eixos cartesianos sem a presença do objeto.

No diálogo a seguir, Lisa sugere mudar de estratégia.

Lisa: Acho que é na outra janela
Weldon: Aqui em opções?
Lisa: Não...
Weldon: Na outra.
Lisa: É, troca **t** por **x** está errado pega a tabela
Weldon: Ah.ah.ah, certo, vamos fazer a tabela.
Lisa: Pensou na outra não foi. É aqui, em janela.

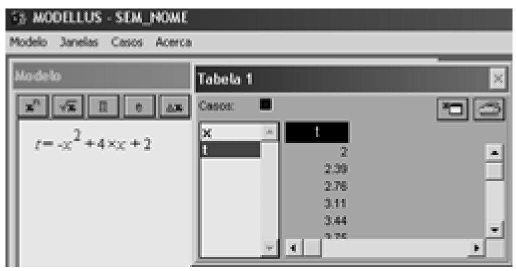


Figura 113 - Tela do Modellus apresentando os valores oferecidos em uma tabela.

Na janela da tabela, só aparece selecionada a variável **t**. Weldon, após minimizar a janela de animação, faz um comentário: “*tem um recurso que a gente oferece valor para **a** e para **b** e para **c**, não é?*” Weldon reconhece outra potencialidade do software, no sentido de manipular o conhecimento envolvido no problema de outra forma, através de manipulação direta atribuindo valores aos coeficientes.

Lisa: Teria que ser lá na digitação, colocar o **a** e os outros e tem que dar os valores.
Weldon: É, tem que colocar nela para ver as variáveis.

Ao buscar realizar essa nova estratégia, Weldon vai à janela de edição do Modellus e digita os coeficientes **a**, **b** e **c**, procura interpretar esses dados e vai à janela condições iniciais que apresenta os coeficientes (**a**, **b** e **c)** da equação solicitados por ele.

Figura 114 - Tela das condições iniciais, obtida a partir da digitação de Weldon dos valores a, b e c.

Após Weldon digitar os coeficientes, Lisa pega a folha de papel e começa a resolver uma equação, obtendo as raízes -2 e 1, sem encontrar relações.

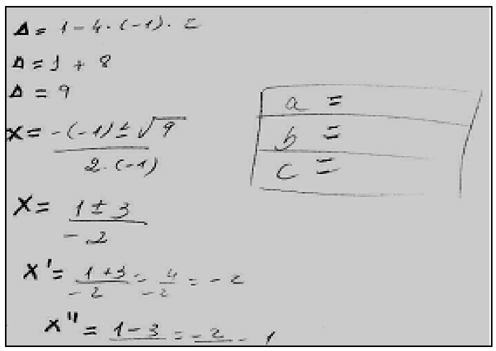


Figura 115 - Anotações de cálculo realizadas por Lisa para identificar as raízes da equação

Lisa, ao buscar a resolução da equação no papel, procura investigar relações entre o que está sendo oferecido pelo software e os conhecimentos advindos da escola. Portanto, busca conhecer os coeficientes e as raízes, como também se há relação entre eles, visto que agora deverá atribuir valores aos coeficientes.

Lisa: Agora a gente...
Weldon: É 1 e -1, fica positivo o delta. Se aqui é **a** tem que ser **-**1. Aqui não é o valor de **a**?. Vou apagar tudo.
Lisa: Digita a fórmula da equação.
Weldon: Colocar a equação mesmo, é?
Lisa: Vai ser.
Weldon: É $\mathbf{x = ax^2 + bx + c}$
Lisa: O que é que tem que fazer?
Weldon: Tem que mudar essa variável **x** senão vai fica tudo igual. [Modifica então a expressão para $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$**,** no computador].

Figura 116 - Tela com as modificações de Weldon retirando do modelo os coeficientes numéricos (-1, 4 e 2) e inserindo coeficientes algébricos (a, b e c)

A dupla entende que o software Modellus oferece outra forma de se chegar a solução do problema. No entanto, parece que os estudantes não dominam esse recurso com segurança. Mesmo assim, vão tateando e encontrando os passos para definir essa ação. Chegam a definir os coeficientes, como mostra a janela do Modellus, com a animação que agora apresenta o objeto na tela do computador.

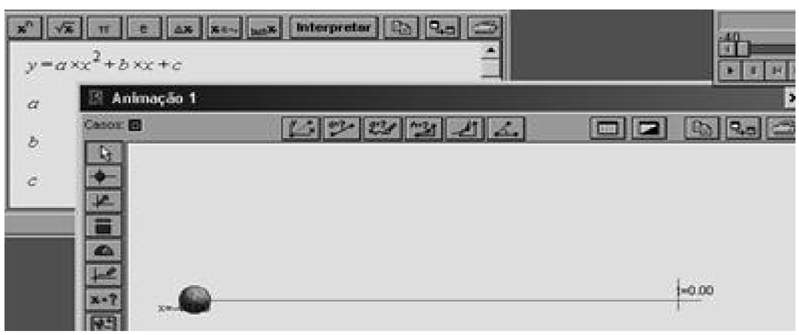


Figura 117 - Tela de animação com o objeto bola

No terceiro episódio, os estudantes apresentam as seguintes habilidades:

- Reconhecer no software dois caminhos para chegar a solução (equação algébrica com e sem definição dos coeficientes).
- Reconhecer no software possibilidades para decidir os valores dos coeficientes **a**, **b** e **c** da equação **ax^2 + bx + c.**
- Identificar o sentido do gráfico da parábola a partir da posição dos eixos apresentados pelo software.

Episódio 4: situações de validação do modelo algébrico construído

Weldon procura definir as variáveis para os eixos, escolhendo horizontal **x** e vertical **y**. Define para os coeficientes, os mesmos valores que tinham atribuídos anteriormente com a outra estratégia. **a**=1 **b**= 4 e **c**= 2. Essa ação faz com que ele receba a janela de animação sem o objeto. Mesmo assim, Weldon faz o seguinte comentário: "*pelo menos está negativo*"

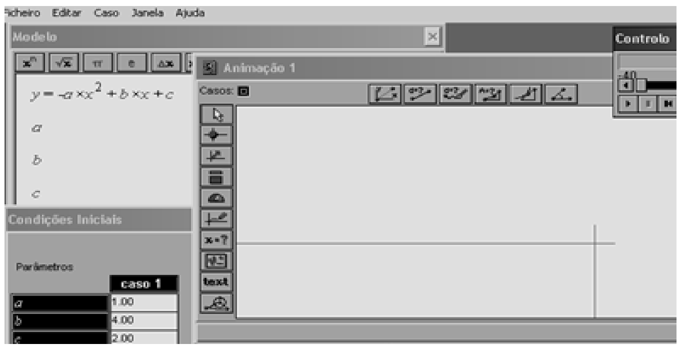


Figura 118 - Tela de animação com a modificação elaborada por Weldon quando procura definir valores para os coeficientes da equação.

A nova estratégia da dupla parece levar ao sucesso do que desejam obter. Weldon ajusta o posicionamento, centralizando os eixos na janela de animação. Ao executar novamente o programa, observa que o eixo horizontal oferece movimento da esquerda para a direita até que é apresentado o objeto passando no lado direito da janela.

Figura 119 - Janela de animação com o efeito conseguido pela dupla para simular a atividade.

Professor: Pelo menos chegou não foi.
Weldon: Foi.

Weldon amplia a tela no sentido de buscar uma melhor visualização e coloca o eixo no centro da janela. O intervalo é agora definido em **[-10 ; 10**], o passo utilizam **0.1** e a variável independente permanece **x**, recebendo agora a seguinte imagem na tela de animação.

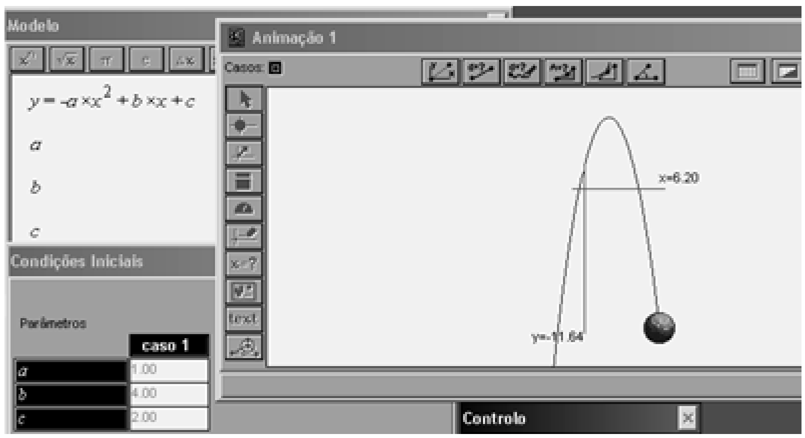


Figura 120 - Tela de animação com a simulação, já com o efeito de simetria do gráfico da parábola

Weldon ao ser interpelado para modificar as escalas no sentido de abrir mais a parábola que representa o movimento da bola, parece não entender essa orientação. Eles apresentaram essa dificuldade desde a primeira atividade, quando não conseguiram dominar o uso das escalas. Por sugestão de Lisa, Weldon é induzido a abrir uma janela de gráfico, desviando o rumo da ação. Ocorre o seguinte diálogo:

Lisa: Weldon abre um gráfico também. [Lisa busca outra forma de representação]
Weldon: Aqui?
Lisa: Sim.
Weldon. Está bem.
Lisa: Olha passou aqui, viu.
Weldon: Na animação.
Professor: Nessa animação você pode modificar a escala horizontal, não é?
Lisa: Aqui olha [Lisa apontando para a tela].
Weldon: Estou perdendo ver o avião passar.
Lisa: Ah, ah, ah.

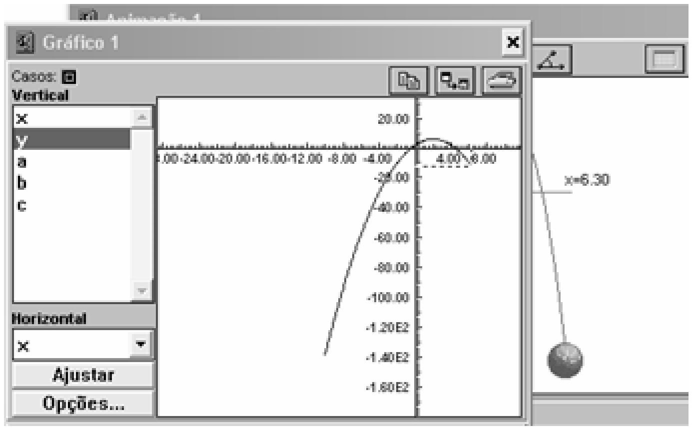


Figura 121 - Representação gráfica do modelo, solicitada por Lisa.

Nessa fase da atividade, verificamos que a dupla apresenta as seguintes habilidades:

- Buscar mais de uma forma de representação para o fenômeno.
- Compreender que ao visualizar mais de uma forma de representação poderá conseguir um melhor entendimento do problema e elaborar melhor sua solução.

Uma característica que vem sendo observada em nosso trabalho é que os sujeitos buscam explorar outras representações oferecidas pelo software, como forma de validar as ações que estão realizando.

Episódio 5: Modificação e ajuste do modelo

Weldon volta a visualizar a janela de animação, fica observando o movimento da bola várias vezes. O professor novamente insiste no comando de modificar as escalas.

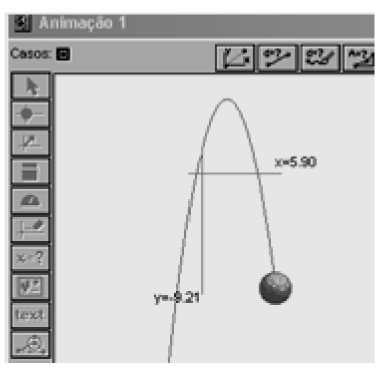


Figura 122 - Tela de animação apresentado a simulação conseguida pela dupla.

Professor: Acho que você pode modificar as escalas.
Lisa: É
Weldon: Está bem.

Weldon resolve abrir a janela de objetos e modifica as escalas horizontal **0.5** e vertical **0.1,** executa o programa e verifica o efeito. É oferecida uma imagem apresentando o movimento do objeto, sendo mais fechado no alongamento.

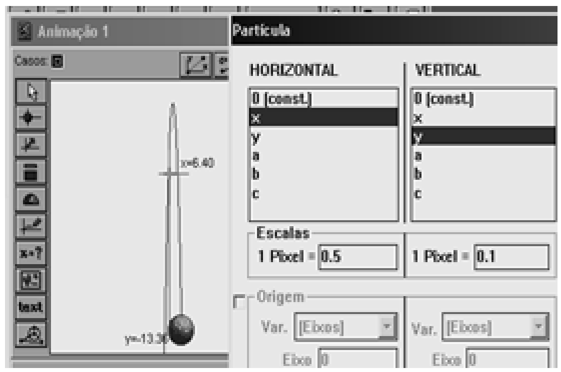


Figura 123 - Tela de animação com as modificações realizadas pela dupla buscando atingir um melhor efeito do movimento da bola.

Professor: Hum.hum.
Lisa: Ih.

Weldon, percebendo que o efeito não foi o desejado, volta a modificar as escalas. Agora, as duas recebem o valor **0,5**. Ele resolve também mudar o passo para **0,5**. Recebendo a seguinte imagem, como apresentada na Figura 124.

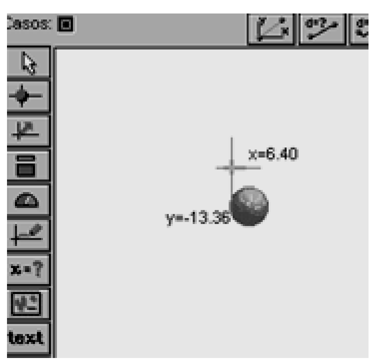


Figura 124 - Tela de animação mostrando uma validação da dupla através da modificação das escalas

Ao executar novamente o programa, a dupla observa a nova definição no movimento do objeto. Lisa sugere localizar uma melhor posição para os eixos, como proposta para visualizar melhor o fenômeno.

Figura 125 - Tela de animação com simulação elaborada pela dupla, quando tentam melhorar a representação

Com o intuito de fornecer uma melhor apresentação do problema e percebendo a dificuldade da dupla na definição da escala, o professor sugere modificar a escala relacionada ao eixo horizontal para o valor **1**, buscando expandir o alcance da bola. Dessa forma, Weldon volta a fazer modificações. Abre a janela de opções, observa o passo para **0.5** e o intervalo continua **[-10, 10]**. Fecha e abre a janela de objetos, colocando a escala horizontal igual a **1**. Coloca a imagem dos eixos no centro da janela para ampliar a visualização e executa.

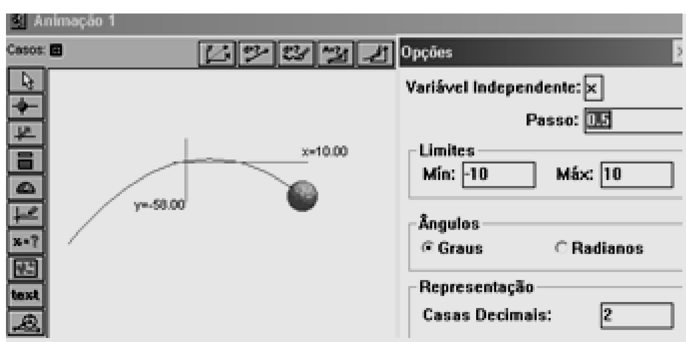


Figura 126 - Efeito de simulação conseguido pela dupla, indicando que estão validando o modelo segundo a definição do intervalo e escalas

Lisa: Olha ficou bonitinho. [Lisa validando a representação]
Weldon: Está bom professor?
Professor: Não está muito bom não, não é
Weldon: É, estamos melhorando em cada atividade dessa do senhor.

Ao observar que a dupla está preocupada quanto ao encerramento da tarefa o professor compreende que o que eles construíram oferece uma boa base de informações para o estudo.

Nesse quinto episódio, a dupla chega a apresentar algumas habilidades:

- Validar um modelo algébrico a partir de sua representação gráfica.
- Reconhecer a possibilidade de simular no software o problema.

VI.2.4 – Síntese da Atividade 2

Observamos que na segunda situação-problema as construções dos alunos foram diferenciadas em relação à primeira atividade. Apesar de algumas ações dos estudantes serem semelhantes àquelas utilizadas na primeira situação, o problema da segunda atividade já não tinha o mesmo contexto que o da primeira atividade, pois logo reconheceram a situação como associada ao conhecimento de função quadrática, essa associação à função quadrática é um fenômeno de contrato. Nota-se que uma experiência do tipo movimento vertical rompe este contrato. O fato é que nessa segunda atividade estava clara a relação ao conhecimento de função quadrática, pois a trajetória a ser representada pelo objeto considerado coincidia com o gráfico dessa função. A atividade dois passou a ser observada com um novo olhar, pois o modo de trabalho ficou diferenciado, enriquecendo a pesquisa. De início, as três duplas representaram por gestos e desenho a forma gráfica da parábola com concavidade para baixo, o que se caracterizam em representações primitivas denominadas por Kaput (1986). Esse foi um ponto importante, pois mesmo identificando o conhecimento de função quadrática envolvido, em certos momentos, eles tiveram que discutir sobre esse conhecimento, necessário a resolução da atividade. Discutiam sobre o alongamento da abertura da curva, sobre o intervalo a ser utilizado, sobre a altura a ser atingida, entre outros. Trazendo para a atividade ricas informações do conhecimento matemático.

Para essa segunda atividade, a apresentação da solução envolveu as seguintes etapas:

- Identificação do conhecimento envolvido;
- Apresentação de uma representação primitiva;
- Definição do modelo algébrico;
- Representação do modelo algébrico no computador;
- Testagem do modelo algébrico;
- Modificação e ajustes;
- Validação do modelo.

Nessa atividade, uma discussão importante quanto ao uso do software pode ser levantada. Observamos que apesar de o software proporcionar maior envolvimento com a matemática escolar, ele afastou-se do sentido que a primeira atividade trazia de reflexão sobre grandeza e valores envolvidos. Tanto é que o tempo fica definido num intervalo que inicia do zero. Não é nem claro que o **t** (tempo) seja considerado pelos estudantes como grandeza.

Notamos também que o modelo é trazido à tona a partir de um conhecimento escolar do gráfico atribuído à função quadrática. A partir daí a negociação é feita entre o efeito gráfico da simulação e os valores ali atribuídos, e um pouco do conhecimento escolar que eles carregam sobre o assunto envolvido.

VI.3 – Análises da Atividade 3

VI.3.1 – Análise da realização da atividade 3 pela dupla 1

Utilize o software Modellus e apresente solução para a seguinte situação-problema. **Recentemente, fui demitido de uma empresa e, com parte do valor da indenização que recebi, fiz um investimento financeiro de longo prazo, com taxa pré-fixada, para o meu filho pequeno. Nesse investimento financeiro, ele só poderá movimentar essa conta quando atingir a maioridade. Apresente um modelo para que eu possa verificar, em qualquer momento, o valor monetário desse investimento.** Anote os conhecimentos matemáticos que estão presentes e são importantes nessa situação. Construa um modelo para a situação no software Modellus e teste-o.

Episódio 1: Contextualização e definição dos elementos construtores.

A dupla, após a leitura do problema, inicia uma discussão procurando decidir os elementos construtores. Primeiro procuram definir a taxa que identificaram no problema. Tedymar volta a ler o problema, para identificar outros elementos que podem ser selecionados, como mostra o diálogo:

Tedymar: Vê ai Ado.
Ado: É vai ter uma taxa pré-fixada, o que ele falou aqui, a gente vai ter que o cara foi demitido, vou determinar um valor. Ele quer saber o que?... Apresente um modelo para saber em qualquer momento o valor monetário desse investimento.

Ado se preocupa na definição do valor monetário referente a demissão do funcionário, valor esse não apresentado no problema. Ele compreende que deverá definir valores para a grandeza taxa e o valor recebido na demissão. Como tem dificuldade na decisão desses valores, volta a ler parte do problema, no sentido de encontrar informações. As decisões quanto às grandezas ainda não são seguras, ficam tentando formalizar essa decisão. No entanto, observamos que o valor da taxa será aplicado ao valor monetário da demissão já identificado, eles tentam nessa fase, conectar esses valores.

Tedymar: Realmente, já tá complicado... A gente consegue não é não? Vamos lá.
Ado: X é igual, vou determinar um valor qualquer.
Tedymar: Um valor da indenização?
Ado: É um valor da indenização dele.
Tedymar: Trinta mil reais.

Ado decide fazer uma anotação no papel indicando um valor para a indenização do trabalhador. Anota como **in = 30.000**, como mostra a Figura 127.

Figura 127 - Anotação de Ado do valor referente à indenização.

A dupla ainda discute sobre a definição do valor monetário que será utilizado para a aplicação financeira. Ado afirma que não será aplicado todo o valor da indenização, mas só uma parte desse valor.

> **Ado**: Trinta mil. Só que ele não pegou a indenização toda, a indenização completa, só pegou parte da indenização. Vamos supor que ele pegou 15 mil.
> **Tedymar:** 15 mil.
> **Ado**: É, 15 mil. Só que ele pegou parte para dar ao filho dele. Vamos ver isso aqui é o que ele deu.
> **Tedymar:** Vinte mil.
> **Ado**: É desses vinte mil, o que é que ele quer. Ele foi demitido tal, a parte que ele pegou foi só vinte mil. Nesse investimento financeiro, ele só poderá movimentar essa conta quando atingir a maioridade. Então ele só tem a maioridade, um homem...
> **Tedymar:** Com dezoito anos.
> **Ado**: Quando tiver 18 anos.
> **Tedymar:** Mas o problema é ...

Figura 128 - Anotação realizada por Ado para o valor do investimento

Após verificarem a necessidade de apresentar elementos construtores, estão ainda procurando identificar outras grandezas que estão sendo tratadas, decidem sobre o valor dessas grandezas e utilizam valores dentro de costumes sociais e financeiros que vivenciamos no Brasil. Definem um valor para a indenização dentro desses moldes e discutem em que idade se atinge a maioridade que procuram fixar em 18 anos.

Embora observem que a grandeza tempo esteja associada à maioridade da pessoa citada no problema como investidor, há ainda o fato dessa mesma grandeza ter ligação com investimento e rendimento. Ado, então, resolve fazer uma nova leitura do problema no trecho em que fala sobre a grandeza tempo, procurando identificar esse relacionamento. Para ele, o tempo leva também outro sentido, o de verificação do investimento. Sua leitura é destacada no diálogo apresentado a seguir.

Ado: Apresente um modelo para que eu possa verificar em qualquer momento o valor monetário... O valor que estou depositando foi vinte mil.
Tedymar: Ele tá querendo saber o valor monetário quando ele atingir a maioridade, não é?
Ado: É, então a gente vai ter que determinar uma taxa, uma taxa por mês.
Tedymar: Zero ponto um? Um por cento, não é o que os bancos cobram.
Ado: Temos que combinar uma taxa, que produza zero vírgula um...
Tedymar: Vezes.
Ado: Vezes t.
Tedymar: não, t não...
Ado: Também vai ter que determinar o **t**. Tem que determinar também o tempo? Pois se eu quero ver isso em um ano? Se eu estou com taxa vai ter que ser dinheiro.

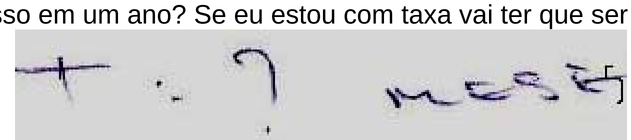


Figura 129 - Anotação de Ado para indicar a grandeza tempo estipulada em meses.

Tedymar interfere no pensamento de Ado quando ele está tentando definir os referenciais da grandeza tempo. Agora a discussão volta-se para o cálculo do rendimento financeiro no valor aplicado, calculado a partir de uma taxa de 0.1. Esses dados são calculados por Tedymar no papel, só que ele usa 1/100, calculando 0.01 e não 10%, como apresentado na Figura 130.

Tedymar Vinte mil vezes 0,1 vai ficar 2 mil, vezes t. Dois mil não? Um por cento de vinte mil é dois mil? ... vê ai se é 2000. É dois mil?

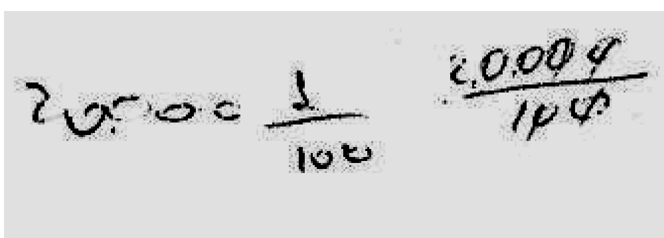


Figura 130 - Cálculo realizado por Tedymar sobre o resultado do produto do valor investido pela taxa

Embora o cálculo efetuado por Tedymar não apresente o valor correto da taxa, que eles definiram, o resultado obtido está sendo falado pela dupla como 10%, e não, de 1% como Tedymar realizou. Essa dúvida quanto à definição do valor da taxa permanece e volta a ser discutida com mais atenção.

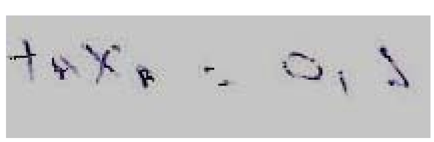


Figura 131 - Anotação de Tedymar do valor referente à taxa

Ado: Uma taxa de 0,1 por cento
Tedymar Ah! Taxa de 0.1 por cento.
Ado: Ficou 0.1
Tedymar Se ficou 0.1, então, não é por cento.
Ado: Zero ponto um

A dupla tem dificuldade na definição do valor da taxa, falam em 0,1 e calcularam utilizando o valor da taxa como sendo 0,01. No entanto, como entenderam que o resultado seria 2.000, não se preocuparam em verificar o erro na anotação efetuada no papel. O diálogo prossegue agora no sentido de definir o tempo do investimento e como essa grandeza será trabalhada.

Ado: Agora ele quer verificar isso em qualquer momento. Em qualquer hora.
Tedymar E agora? [Tedymar parece surpreso, pois a grandeza tempo já foi relacionada à outra grandeza].

A preocupação está em como definir a unidade da grandeza tempo, que está associada ao valor da taxa e como essa unidade será trabalhada, em meses ou em dias.

Ado: Isso aqui vai ser os meses.
Tedymar Tá em dias.
Ado: É tá em dias. Então se eu tenho um capital de 20.000 investido a uma taxa de **0,1** vezes um tempo, ou seja, se eu quero saber quanto rendeu em dois meses, pego o investimento todo e tenho que achar um valor. Para cada mês.

No primeiro episódio, os estudantes demonstram as seguintes habilidades:

- Decidir sobre elementos construtores para o problema;
- Identificar as grandezas envolvidas no problema;
- Tomar decisões quanto a valores para as grandezas envolvidas;
- Utilizar valores compatíveis com aqueles trabalhados no sistema financeiro do País.
- Decidir sobre que unidades devem estabelecer para as variáveis.

Episódio 2: Definição do modelo algébrico

Tedymar resolve fazer uma anotação no papel, buscando definir uma fórmula para o entendimento que já demonstra do problema. Ele anota uma expressão que é produto do valor investido pela taxa e pelo tempo, como apresentado na Figura 132.

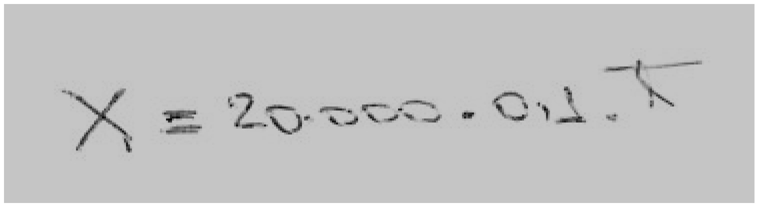


Figura 132 - Anotação de fórmula realizada por Tedymar para indicar o produto entre investimento, taxa e tempo

Até o momento eles não tiveram necessidade de utilizar o software, pois buscaram entender o problema, estando ainda, no processo de montagem dos elementos construtores. O fato de se ter grandezas de mesma espécie com envolvimentos diferentes na fórmula parece dificultar os alunos na execução da tarefa. No entanto, chegam a definir uma fórmula, mesmo diante da dificuldade que enfrentam com a grandeza tempo associada às outras grandezas envolvidas no problema, percebendo que melhor será utilizar o software Modellus. Dessa forma, digitam: **X = 20000** x **0.1** x **t**, na janela principal do Modellus.

> **Tedymar** Quanto você quer?
> **Ado**: Bota vinte mil vezes 0.1, pra vê quanto é que dá.
> **Tedymar** Vezes o valor, Deu eh,...
> **Ado**: Outra coisa também que a gente tem que ver, é renda fixa ... de uma taxa pré-fixada.
> **Tedymar** Dois mil
> **Ado**: Uma taxa prefixada de 0.1... Então vai...
> **Tedymar** Dois mil... O que é uma taxa pré-fixada?
> **Ado**: Essa taxa é justamente o valor de 0.1 que a gente tá usando aqui, zero vírgula um.
> **Tedymar** Então se eu quiser em um ano, eu só terei fixo o 12 que é em meses, vai dar?... Vinte e quatro mil, ou seja, se eu tiver aplicado vinte mil vai dar quatro mil. [Aqui, Tedymar faz confusão com o cálculo].

Ainda discutem quanto aos valores que devem ser atribuídos as variáveis, e sobre os termos utilizados no problema. Tedymar parece compreender que pré-fixada é algo que não pode variar.

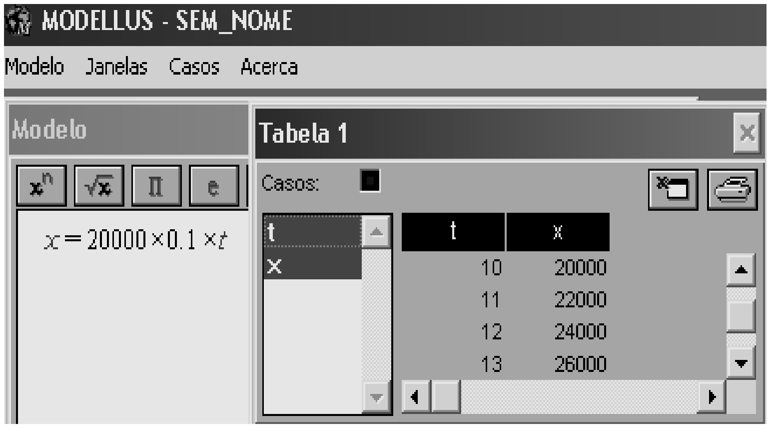


Figura 133 - Tabela com o resultado de 24.000 verificado por Tedymar para o tempo de 12 meses

Tedymar Agora multiplica aí 18 vezes 2, espera aí. [Usam a máquina de calcular oferecida na janela acessórios do Office]
Ado: Dezoito vezes dois são 36 meses.
Tedymar Vezes 12, não é? Em 18 anos ele terá um investimento de quatrocentos e trinta e dois mil reais, contando de zero a dezoito.

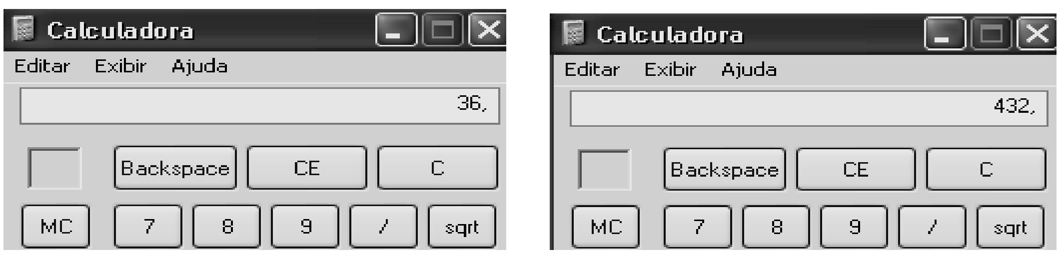


Figura 134 - Calculadora com resultados das operações realizadas 18 vezes 2 seguida de vezes 12

Resolvem utilizar a máquina de calcular para validar um exemplo da situação, a partir do modelo que já começa a ser definido.

Tedymar: Só que o filho dele não tinha essa idade...
Ado: O tempo está pequeno.
Tedymar Então vamos supor que o filho dele tenha...
Ado: Mas aí não teria... O objetivo é esse aqui, poder fazer, verificar esse valor do investimento a qualquer momento, é por ai. Vamos jogar no Modellus e ver.
Tedymar: Está bem.

Por sugestão de Ado, Tedymar resolve verificar alguns dados que estão discutindo. Ele vai observando o que já foi digitado e faz referência aos valores que foram selecionados no software.

Tedymar Vamos lá, **X** é igual a 20 ... 2 mil né... vezes **t**, interprete.
Ado: Vai ter que colocar a taxa prefixada aqui no valor que ele depositou.
Tedymar Vinte mil, vezes 0.1 vezes t, peço um gráfico, ajustar, vou colocar um intervalo de 0 a 18. Não, 0 a 20. executar.

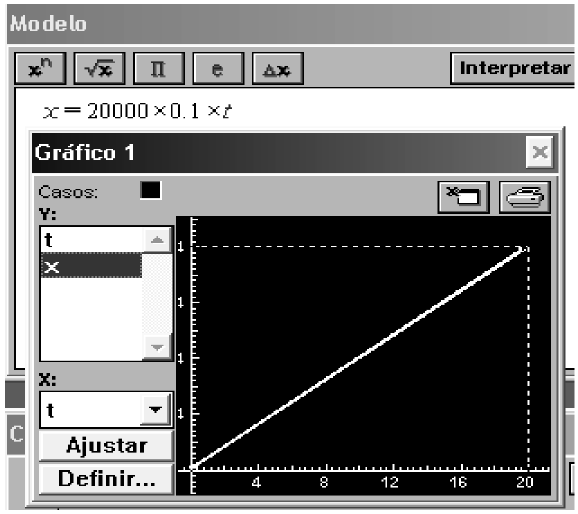


Figura 135 - Tela com gráfico definido a partir da equação definida por Ted

No segundo episódio, a dupla chega a apresentar as seguintes habilidades:

- Buscar validação do modelo por meio de cálculo aritmético em outro recurso do computador.
- Construir um modelo sem associar o problema às fórmulas de juros simples ou compostos estudados na escola.
- Verificar através das representações oferecidas pelo computador a que melhor define respostas para o modelo elaborado.

Episódio 3: Problematização, hipóteses, dificuldades e prévias de validação.

A dupla começa a trabalhar a construção do modelo em termos de cálculo de juro simples. Trabalham um modelo que define um montante igual ao produto do capital vezes a taxa vezes o tempo.

Tedymar Infelizmente no Modellus não temos um valor fixo, um valor real de quanto vai ser o investimento que ele irá fazer... Vai fazer. Na tabela estamos vendo aqui.

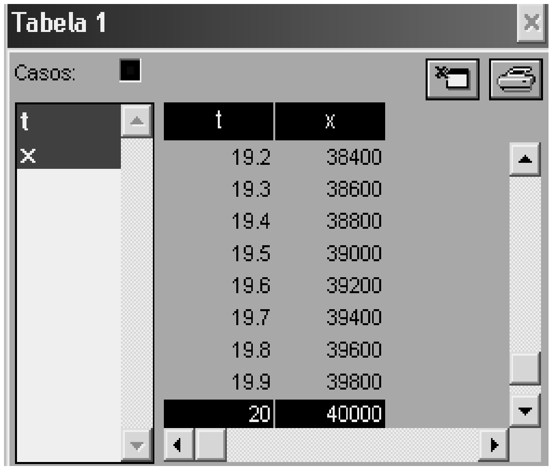


Figura 136 - Tela de tabela aberta por Tedymar para verificar os resultados do investimento

Tedymar procura testar o modelo construído, recorre a uma tabela para verificar resultados do modelo. Percebe que a variável tempo está apresentando valores decimais, então recorre à mudança do passo para que esses valores sejam inteiros.

Tedymar Agora deixa eu fazer só uma coisinha... Tirei as casas decimais. Porque aqui tá contando em meses. Em um ano, eu vou ter vinte e quatro mil e quando eu tiver em 20 meses eu vou ter quarenta mil.

Figura 137 - Tela do Modellus apresentado a modificação realizada por Tedymar para o valor do passo e exposição dos valores inteiros para t na janela de tabela

Tedymar Só como eu quero mais disso, em mais tempo... Vou querer em 18 anos. [Utiliza a calculadora para verificar o produto 18x12, encontrando 216].
Ado: São duzentos e dezesseis meses.
Tedymar É, fica duzentos e dezesseis meses.

Tedymar abre a janela de opções e modifica o valor máximo do intervalo que era de 20, para 216. Executa o programa e observa a definição dos valores sendo apresentados em uma tabela, Figura 138.

Ado: Tá bom em anos.
Tedymar Vai dar uma taxa... Uma renda de 432 mil reais, isso nós estamos contando em meses. Esse é a quantidade de meses e esse é a quantidade do valor investido.

Figura 138 - Tela do Modellus em que Tedymar efetuou as modificações do intervalo máximo para 216 meses, no intuito de verificar o rendimento

Tedymar começa a refletir sobre alguns resultados, falando que para um ano serão 24 mil, para dois anos será o dobro, 48 mil. Nota-se que ele perdeu a referência dos valores oferecidos no software.

Tedymar Em um ano? Ele vai ter 24 mil, em dois anos que é vinte e quatro meses, ele vai ter o dobro 48 mil. Em 216 meses, são 18 anos, 432 mil reais e se ele ainda quiser.... Ainda podemos mudar as variações para que ele tenha um conhecimento mais preciso de quanto ele vai ter um infinito tempo. Determinado por ele.
Ado: Multiplica aí 0,1 vezes 20 mil....
Professor: 0,1 são dez por cento não é? [Buscando verificar se estão entendendo o valor da taxa].
Tedymar É**!**
Professor: Ele vai ganhar 10%, não é?
Ado: O que ele está mostrando aqui é isso ai.... 0.1 para... Colocou um valor determinado, vinte mil, como parte da indenização do pai dele.
Tedymar Isso é um valor que nós determinamos e não dele. [referindo aos dados do problema].
Ado: Foi como ficou combinado [tentando explicar ao professor a decisão do valor para a grandeza investimento]. O pai recebeu uma indenização de 30 mil. Como só aplicou parte, a gente colocou 20 mil. E prefixou uma taxa de 0.1 se eu quero acompanhar isso aqui mês a mês, então pegou o tempo em mês. A gente jogou no Modellus 20.000 vezes 0.1 vezes **t**. O **t** em meses...
Tedymar t em meses
Ado: É em meses.
Professor: Em um mês dá quanto.

Tedymar Em um mês dá dois mil.
Ado: Dá rendimento de dois mil.

A discussão refere-se aos resultados apresentados a partir do modelo que elaboraram. Procuram validar a construção, sem perceber que o cálculo a ser trabalhado é referente a juros compostos. Esse conhecimento eles ainda não perceberam, estão construindo o modelo com bases em cálculo de juros simples como foi verificado anteriormente e testado por eles na máquina de calcular. O professor procura intervir, pois eles já estão convictos que estão numa fase de encerramento do problema.

Professor: Vocês estão calculando o rendimento.
Tedymar: É
Professor: Mas é o rendimento que a gente está procurando ai? [professor faz referência ao que está sendo solicitado no problema].
Ado: O que ele pediu foi para verificar em qualquer momento, pode ser em um mês, dois meses, a qualquer momento.
Professor: O que eu gostaria de saber, é quanto é que eu tenho lá a cada ano?
Tedymar: Ele quer saber o valor com os juros, ele que é o montante, que é o capital mais os juros...
Ado: Então vamos determinar aqui. ... Se ele quer saber a cada ano. Vamos ver o primeiro Ano ele vai ter quanto? Ele vai ter vinte mil mais quanto de rendimento.
Tedymar: Acho que a taxa de 10% está muito alta, a gente vai ter que diminuir mais, de 0,1. [Tedymar tenta dar uma realidade em relação ao momento financeiro para o valor da taxa].
Ado: Mas, não vai dar a mesma coisa?.
Tedymar Não, mas se a gente diminuir mais a taxa vai ficar...
Ado: Você quer dizer que não vai alterar em nada?
Tedymar: Eu sei, mas devemos pensar agora um valor mais real. Agora uma taxa de um por cento, não é 10%, temos com mais realidade quanto ele vai receber. Ou seja, em um mês ele vai receber um montante de vinte mil e duzentos.
Professor: Cadê o montante aqui que não está aparecendo? [Tentando levar os estudantes a percebem a necessidade de apresentação do cálculo do montante].
Tedymar: Ah. Professor aparecer no Modellus?
Ado: Agente faz, é só colocar, **X** mais .... Coloca **X** é igual a vinte mil... [Defendendo que pode gerar outra fórmula para esse cálculo].
Professor: X de novo. [observando que Tedymar inicia a digitação de outra fórmula com a mesma variável já utilizada].

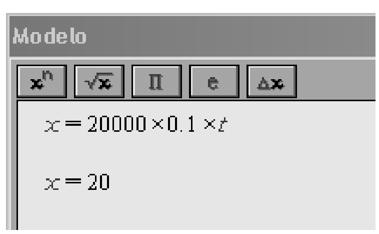


Figura 139 - Tela do Modellus mostrando a digitação iniciada por Tedymar para a expressão do montante com a mesma variável x

Ado: Está certo. Vamos escrever aqui o montante, que é a soma ...

Professor: A pergunta é no final do ano, ele teria quanto lá?
Ado: Olha aqui, em meses...

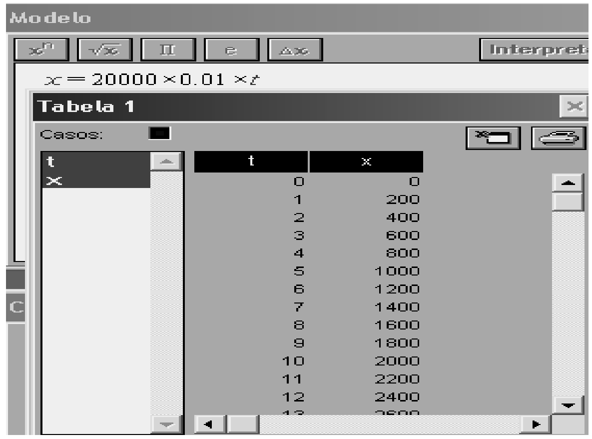


Figura 140 - Tela com os valores resultantes do rendimento para uma taxa de 0.01 definida pela dupla

Professor: Mas, não está mostrando o montante em um ano, está a cada mês. [Professor procura levá-los a perceber a necessidade do cálculo do montante em juros compostos].
Tedymar: Doze meses, é um ano.....[Tentando afirmar que pode ser verificado na tela a partir da presença dos valores dos dozes meses]
Professor: Teria que aparecer os vinte mil mais os dois mil e quatrocentos. Dessa forma, é você que está fazendo essa conta, não é? [fazendo referência ao modo de Tedymar apresentar o resultado sem aparecer no computador].
Tedymar Como é Ado?
Ado: Sei, deixe eu terminar aqui.

No terceiro episódio, a dupla apresenta as seguintes habilidades:

- Entender a interferência do valor decimal com referência à variável tempo.
- Trabalhar valores monetários no momento financeiro do País.
- Reconhecer que o modelo não valida situações do problema.

Episódio 4: Modificação do modelo e representação.

Ado percebeu que o modelo que construíram não contempla o cálculo do montante. Então resolve modificar o modelo, começando a anotar no papel uma nova expressão a partir da que tinham construído anteriormente, como observado na Figura 141. Essa nova expressão é referente à fórmula do montante, ainda em juros simples. A dupla não percebeu situações de cálculo em que situações de juro sobre juro sejam apresentadas

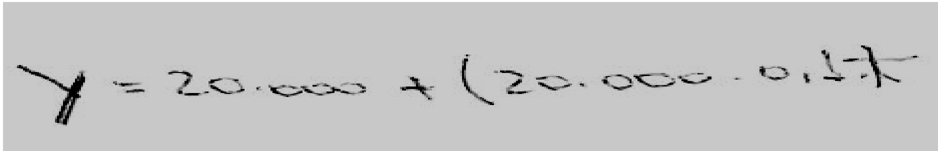


Figura 141 - Anotação de Ado no papel, procurando definir o valor do montante.

Discutem sobre valores referentes a essa nova expressão. Tedymar vai ao computador para incluir essa nova expressão, deixando a anterior ainda na janela do Modellus. .

Ado: Será 20mil mais o resultado dessa conta.
Tedymar Em um ano ele terá...
Tedymar 20 mil mais, vinte vezes 0,01... Olha aqui professor, pela tabela tá mostrando quanto ele vai receber.
Ado: Agora.

Os estudantes buscam verificar os resultados dessas fórmulas em uma representação por tabela, como apresentado na Figura 142. O novo modelo, elaborado a partir dessas duas fórmulas, oferece uma validação de cálculo de juros simples.

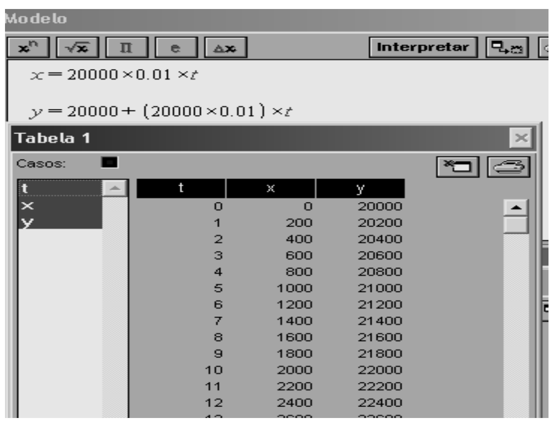


Figura 142 - Tela do Modellus com a nova equação definida por Ado para indicar o valor do montante no intervalo de 12 meses

O professor resolve então ser mais enfático para que percebam a situação de juros compostos envolvida no problema, começa a questionar os estudantes sobre o tipo de construção que elaboraram. Observamos que os estudantes não memorizaram a fórmula e demonstram pouquíssima compreensão do modelo matemático e do fenômeno modelado.

Tedymar A tabela tá mostrando quanto ele vai receber.... Em dez meses ele terá um montante de 22 mil reais. Em um ano ele terá vinte e dois mil e quatrocentos reais.
Professor: Esse tipo de investimento é juros simples, juros compostos?

Ado: Juros compostos, aí a gente joga num gráfico e vê.
Tedymar Tem a fórmula de juros. [Tedymar percebe a necessidade da fórmula].
Ado: Tu lembras da fórmula.
Tedymar De juros compostos?
Ado: A gente aprendeu lá naquela turma...
Tedymar Montante é igual ao capital vezes um mais i elevado a **t**, de juros compostos onde **t** é o tempo e **C** é o capital.

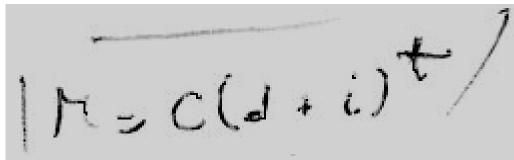


Figura 143 - Anotação de Tedymar no papel para apresentar a fórmula de juros compostos a Ado

Ado: Pronto o montante é o valor que eu tenho. O total, cadê?
Professor: Não precisa apagar isso não, coloque aqui mesmo [Indicando que pode ser digitada na mesma janela do Modellus a nova fórmula do montante].

Tedymar resolve iniciar no computador a digitação da fórmula do cálculo do montante em juros compostos, como apresentado na Figura 144. Deixando na janela do Modellus, as demais fórmulas que trabalharam.

Tedymar M é igual a vinte mil vezes mais a taxa que é **i**, ... No caso a taxa vai ser **0.01** e o capital de **20.000**, ele elevado a **t.**

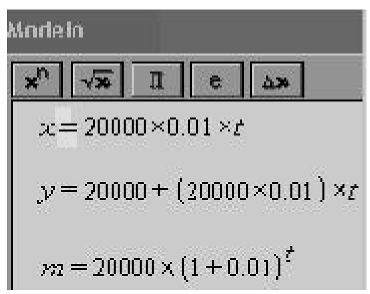


Figura 144 - Tela do Modellus com, as digitações de Ted. A Equação modelo m=20000x $(1+0.01)^t$ define o cálculo do montante para juro composto

Tedymar resolve abrir várias janelas de gráfico para representar as três equações que estão digitadas na janela principal do Modellus. Seleciona para cada gráfico uma variável (no gráfico 1 a variável **x**, no gráfico 2 a variável **y** e no gráfico 3 variável **m**). Como apresentado na Figura 145.

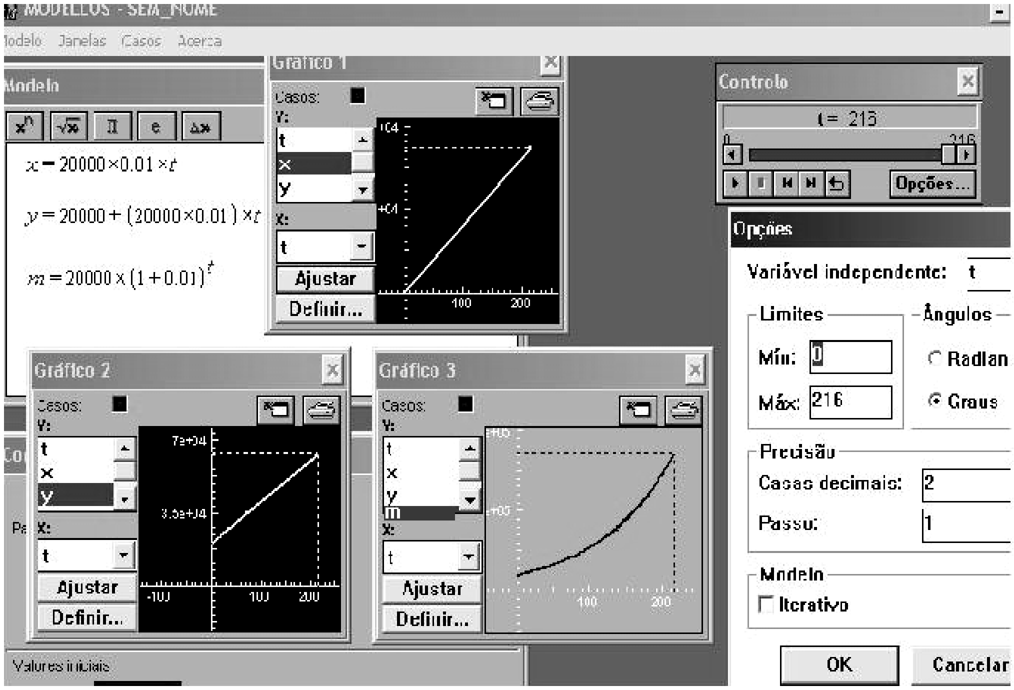


Figura 145 - Tela do Modellus apresentando as três equações digitadas pela dupla e os gráficos para cada uma dessas equações abertos por Tedymar para apresentar a solução do problema.

Ado: Taxa de **0.01**, elevado ao tempo. Executa.
Tedymar Pronto, esse é o gráfico de juros compostos. Em juros compostos, ele tá fazendo como se fosse uma parábola. [fazendo referência ao gráfico Nº. 3 sendo elaborado no software]
Ado: Não, é exponencial. [Ado contesta a compreensão de Tedymar quando a representação de uma parábola].
Tedymar Em relação a juros simples que era uma reta.
Ado: Juro simples é uma reta?
Professor: Hum. Hum...
Tedymar E aqui temos os valores de quanto ele vai ganhar usando juros simples e Juros compostos.
Ado: Mais alguma coisa?
Professor: Não
Ado: Perfeito
Tedymar Pronto
Professor: Obrigado a vocês, valeu o trabalho que fizeram.

Mesmo não verificando os valores em uma tabela para a apresentação do montante em juros compostos, a dupla começa a perceber que o problema está sendo validado por meio da representação gráfica oferecida pelo software. Estão preocupados em dar por encerrada a tarefa. Portanto, o professor percebendo que eles chegaram a desenvolver elementos importantes para a pesquisa, resolve aceitar a indicação de encerramento dada pela dupla.

No quarto episódio, os estudantes chegaram a apresentar as habilidades:

- Usar os recursos do software para testagem do modelo
- Representar simultaneamente representações de vários modelos.
- Identificar o conhecimento matemático de juros compostos aparece na situação-problema.

VI.3.2 – Análise da realização da atividade 3 pela dupla 2

Episódio 1: Contextualização e definição dos elementos construtores.

Maxwell e Marta fazem a leitura do problema, de início percebem o problema como relacionado a um investimento financeiro. O diálogo segue nesses termos, buscam entender as grandezas envolvidas e começam a definir valores para essas grandezas que identificaram.

> **Maxwell:** Lembra de .....
> **Marta:** Humm........
> **Maxwell:** A gente tem que ver de quanto foi a indenização
> **Marta:** Tá.
> **Maxwell:** Devemos calcular o investimento dele.
> **Marta:** É fez um investimento para o filho.
> **Maxwell:** Dois mil reais, está bom, ele não trabalhou muito tempo não. [Aqui Maxwell começa a apresentar valores para complementar o problema, no sentido de melhor entende-lo.].
> **Marta:** 10.000 é melhor. [como o problema trata de investir uma quantia referente a uma indenização, Marta percebe que esse valor deve ser mais elevado do que o proposto por Maxwell, ela faz correlação do valor da indenização com o do investimento].
> **Maxwell:** Dez mil?
> **Marta**: Ai ele pegou uma parte ou investiu tudo?
> **Maxwell**: Foi uma parte.... ai tem que saber o valor.
> **Marta**: Quanto foi que ele investiu?

Como o problema não esclarece quais elementos construtores estão fazendo parte do problema, a dupla resolve fazer nova leitura para identificar mais elementos a fim de enriquecer a solução. Após essa segunda leitura, decidem fazer algumas anotações no papel onde consta o enunciado do problema. As anotações são referentes a valores para as grandezas Indenização e investimento que eles identificaram (ver Figura 146).

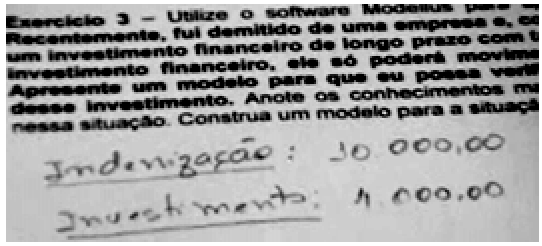


Figura 146 – Anotação dos valores das grandezas identificadas por Maxwell e Marta no Exercício 3

Nota-se que o problema sendo do tipo completamente aberto, os estudantes começam a identificar as grandezas envolvidas e atribuir valores às mesmas, procuram também discutir a importância dessas grandezas. Essa é uma etapa trabalhada pelos estudantes para realizar a composição o problema.

> **Marta**: E o valor que ele investiu, é só uma parte?
> **Maxwell:** É 4 mil reais, tá bom?
> **Marta:** Tem que saber onde ele investiu? **[**Marta parece querer discutir qual o tipo de investimento que será trabalhado. Poupança, Renda Fixa, entre outros].
> **Maxwell:** Ai tem que estipular o valor para os juros né, percentual de juros.
> **Marta:** Você põe 0,02. [Marta atribui uma taxa de dois por cento para o rendimento do investimento. Novamente, há a saída de uma generalização para um valor fixo é observado].

Os alunos, apesar de reconhecerem a necessidade de trabalhar com elementos da matemática financeira (necessários à resolução do problema), não apresentam de imediato, fórmulas, pois ainda estão preocupados em decidir sobre as grandezas e como elas deverão ser tratadas no problema.

Discutem também sobre que valor será estabelecido para o percentual da taxa de rendimento. Nota-se que fazem associação dessa taxa ao momento econômico do País, pois estimaram uma taxa pequena, 0.02, para expressar o momento de baixa inflação que vivemos indicando a baixa margem de rendimento financeiro no investimento.

Para compor o problema, os alunos identificam as grandezas, atribuem valores, limitam esses valores, partindo para definir uma equação modelo que represente a situação. Nota-se que o conhecimento escolar de atribuição de uma fórmula não foi utilizado pela dupla.

Outro fato importante que verificamos é que até o presente momento, os alunos ainda não resolveram utilizar o computador. No entanto, quando decidem pelo valor da taxa, necessitam dessa ferramenta para apresentar a primeira proposta de modelo algébrico.

Maxwell: Mensal, e vai multiplicar pelo valor da taxa?
Marta: É pelo valor da taxa, bota aqui o valor da taxa.
Maxwell: É 0,02, tá bom?
Marta: Taxa pequena né, mas vai dar.
Maxwell: Dois por cento.
Marta: Coloca R$ 4000 mais 0,02.

Após a discussão sobre o valor da taxa, a dupla utiliza o software digitando uma equação, estabelecida a partir da correlação entre capital, investimento e a taxa referente ao problema em questão. Nota-se que o software parece desviar a atenção do essencial: a escolha do modelo. Esta ação ocorre sob a direção de Marta, que vai orientando Maxwell quanto às variáveis a serem utilizadas no problema. De início os estudantes apresentam o modelo de equação **C= 4000 + 0,02,** repensam e voltam a discutir sobre os valores que serão atribuídos. Percebe-se que a equação que estão montando Figura 147, apresenta apenas uma estrutura aditiva. O diálogo a seguir reflete essa discussão.

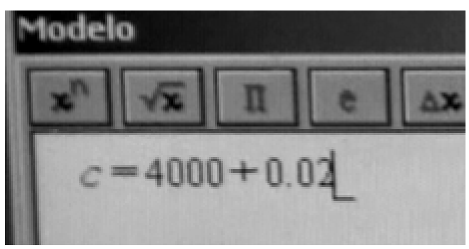


Figura 147 - Equação digitada por Maxwell na janela Modelo do Modellus.

Maxwell: Vou colocar **C,** ta bom?
Marta: É. Que é igual a 4000.
Maxwell: 4000.
Marta: Mais 0,02.
Maxwell: Por que mais? Tem que multiplicar. [Maxwell está preocupado com o tipo de estrutura a ser utilizada]
Marta: Sim, você vai multiplicar a taxa. [Marta afirma que esse tipo de estrutura também será utilizado].
Maxwell: Mas ele vai multiplicar a taxa? E vai...
Marta: Elevado ao tempo de.

Ao escrever a proposta de uma fórmula, Maxwell identifica a necessidade de utilizar um processo multiplicativo entre taxa e capital. Apesar de ainda não terem chegado a uma compreensão coerente dessa representação. Marta também compreende que será utilizado esse modelo, com bases em estruturas aditiva e multiplicativa. A necessidade de representar o problema por uma fórmula parece eminente.

Nessa fase do primeiro episódio a dupla demonstra algumas habilidades, relacionadas como:

- Identificar grandezas na situação-problema.
- Atribuir valores para as grandezas selecionadas.
- Discutir sobre a importância dos valores que deverão ser trabalhados na situação-problema.
- Reconhecimento do problema como uma situação relacionada a um cálculo financeiro.
- Articular o problema com uma situação real conhecida.
- Estimar valores para as variáveis em valores associados ao momento financeiro vivenciado no País.
- Discutir sobre as operações que devem ser realizadas a partir da análise do tipo de problema.
- Reconhecimento dos elementos da fórmula.

Episódio 2: Definição do modelo algébrico

Nesta fase, Maxwell começa a utilizar o conhecimento escolar, buscando compor uma fórmula. Marta, no entanto, parece preocupada com a noção de matemática financeira que o problema apresenta. A experiência que estão vivenciando, trabalhando um problema em uma atividade de modelagem, mostra que foram envolvidos em uma situação de composição do problema a partir de seus elementos construtores e decidindo pelo modelo algébrico que os auxiliará a resolver a situação-problema. Portanto, não percebem que esse envolvimento de atribuição de valores a variáveis de uma fórmula é também característica do ensino escolar.

Marta começa a delinear o problema em termos de um modelo relacionado ao cálculo de juro composto, mas não dá prosseguimento. Maxwell no entanto, leva a discussão para a montagem de um modelo distante dessa preocupação de Marta, que também resolve caminhar no sentido que Maxwell vem propondo.

Maxwell, em determinado momento da atividade, resolve utilizar a calculadora do Office, para verificar alguns dados (ver Figura 148), depois, volta a discutir sobre valores numéricos, apesar de Marta ter antes oferecido orientações sobre uma fórmula geral. O diálogo a seguir apresenta essa informação.

Maxwell: Por mês, ele investiu quatro mil, vezes 0,02. Aí oitenta reais por mês.
Marta: É o que tá rendendo.
Maxwell: Aí ele está multiplicando, então tem que fazer assim. Deixe eu ver.

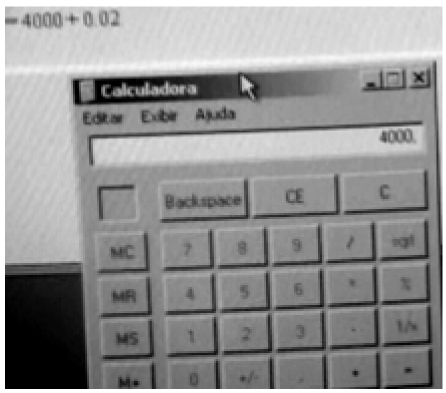


Figura 148: Imagem do uso da calculadora utilizada por Maxwell para apoio a construção do modelo

Maxwell, ao abrir a calculadora no computador, efetua o cálculo de **4000. 0,02**, encontrando o valor **80**, afirma ser oitenta reais por mês, referindo-se ao valor relativo ao ganho de juros em cima dos 4 mil reais, a partir de uma taxa de 2%. Volta à janela principal do Modelllus e complementa a expressão, que tinham iniciado a digitação (ver Figura 149). O diálogo a seguir se refere a esse fato, discutindo sobre o cálculo do percentual, e como será aplicado.

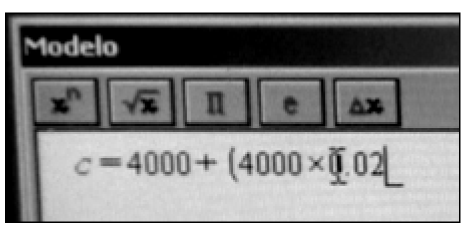


Figura 149: Fórmula escrita pela Dupla na Janela Modelo do software Modellus

Maxwell: Ali ele está multiplicando, ali tem que ser assim: **C = 4000 + (4000 . 0,02).** Por quê? Por que ele vai calcular. Esse cálculo aqui é justamente oitenta. Ele vai somar [Maxwell aqui faz relação com o valor oitenta que encontrou quando utilizou à calculadora].
Marta: Isso.

Maxwell abre a janela de opções para modificar o intervalo estipulando agora [**0; 10**], procura também definir a variável independente e afirma que ela estará associada a mês. Coloca a variável independente como sendo **C**, volta a redefinir o intervalo para [**0; 18**] e define que o intervalo será **18 meses**. Este é o momento em que a dupla começa a articular a variável utilizada com o significado dela no problema.

Maxwell abre uma tabela e verifica que só aparece a variável **C**. Resolve fazer nova leitura do problema, verificando um entrave pois na fórmula criada o tempo (em meses) não foi expresso. Observa que a única variável presente é a variável **C**, que foi utilizada para o montante. Ao tentar definir no software a variável independente, Maxwell traz a única existente, apesar de argumentar coerentemente que seriam os meses. No entanto, ele não observa que o **C** da fórmula criada por eles tem outro significado. Essas informações constam no diálogo a seguir.

Maxwell: Acho que a gente tem que definir as variáveis. A variável independente vai ser o mês. Por que ele quer qualquer valor a longo prazo? [Maxwell busca reler parte do problema no sentido de melhor selecionar as variáveis para a expressão, que está digitando no computador].
Maxwell: Nesse investimento financeiro você só vai poder movimentar essa conta quando atingir a maioridade. Aí no caso.....?
Marta: Tem que acompanhar.
Maxwell: Em qualquer momento o valor monetário do seu investimento...... Vou colocar aqui **18** o limite máximo.

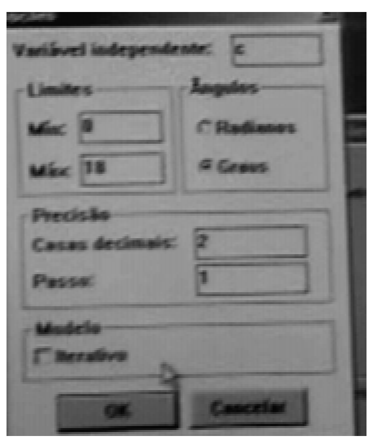


Figura 150 - Tela de opções da janela controle, com anotações da dupla

Maxwell: Vou ver a tabela novamente [após executar o programa observa na tabela que os valores oferecidos para **C** são **0** e **4080**].

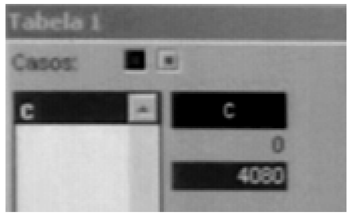


Figura 151 - Tela de tabela aberta por Maxwell

A partir do retorno dado pelo software, apresentando uma única variável na tabela, Maxwell percebe a falta de outras variáveis. Resolve, então, alterar a expressão modelo, promovendo a substituição do valor percentual por uma variável **Y**, ficando a expressão modelo como observada na Figura 152. Apesar de reconhecer ser o tempo a variável do problema, Maxwell parece não correlacionar variável com o significado da mesma.

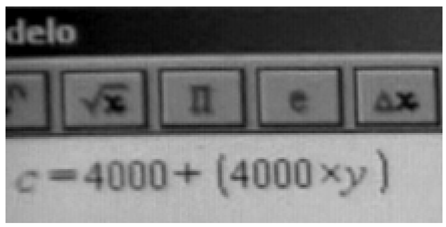


Figura 152 - Alteração da fórmula, com colocação como variável a taxa de juros

Maxwell: Vou trocar a variável.
Marta: E aqui vai receber o valor 0,02 [referindo-se a janela condições iniciais].

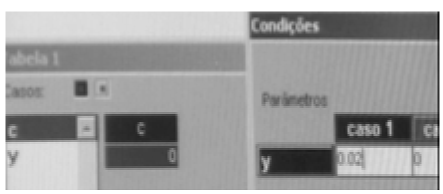


Figura 153 - Definição do valor da taxa por Maxwell na janela condições iniciais.

Marta: Tu não vai ficar mudando não, né.
Maxwell: Vou executar.

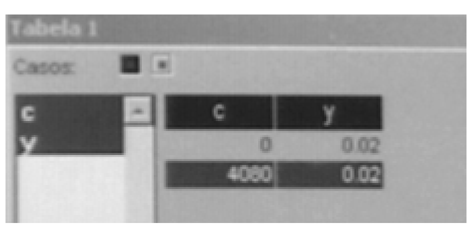


Figura 154 - Tela de tabela apresentando valores para montante e taxa.

Maxwell verifica que os valores oferecidos na tabela não foram modificados, apenas apareceu como novidade a variável **Y** indicando o valor percentual de **0,02**. Na janela condições iniciais, observam-se uma configuração em que o **caso 1** mostra o valor **0.02** e o **caso 2** mostra o valor **zero**. Já a janela de tabela apresenta duas variáveis **C** e **Y**, como apresentadas anteriormente.

Maxwell resolve voltar à janela de opções e modificar a variável independente para **T.** Como mais uma forma de chegar a uma saída do impasse que enfrenta. A janela referente à tabela agora apresenta valores para as três variáveis que estão fazendo parte da ação de Maxwell na construção do modelo. São elas, **X**, **Y** e **T.** Nota-se que as variáveis **C** e **Y** apresentam sempre os mesmos valores respectivamente, sendo **C = 4080** e **Y = 0.02**. Como observado na Figura 155.

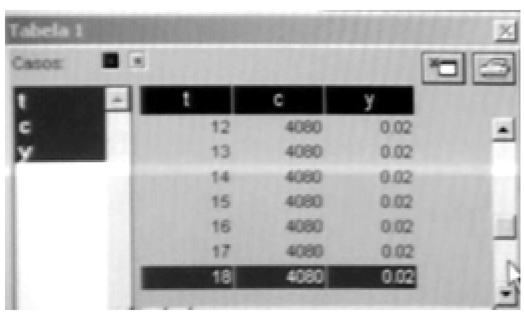


Figura 155 - Tela de tabela apresentando valores de tempo, montante e taxa.

Nessa fase do segundo episódio a dupla apresenta as seguintes habilidades;

- Utilizar regras de contrato didático para definir uma fórmula.
- Identificar a necessidade do cálculo de juro composto na situação.
- Apresentar um modelo algébrico para representar a situação.
- Manipular corretamente o software para definir variáveis e intervalo.

Episódio 3: Problematização, hipóteses, dificuldades e prévias de validação.

O diálogo continua com Maxwell tentando definir ainda as variáveis dependente e independente no software. Observamos que ao definir **T** como variável independente Maxwell agora receberá valores fixos para a variável dependente **C**, visto que não há uma correlação entre essas variáveis no modelo que elaborou, como sendo $\boxed{\mathbf{C= 4000 + (4000.\ Y)}}$. Não há ainda uma evidência na discussão da dupla de que precisam associar o montante ao tempo, apesar de Marta ter demonstrado essa necessidade, pois já trataram de uma discussão nesse sentido sobre o uso dessas variáveis e inclusão da grandeza tempo. O diálogo continua da seguinte forma.

> **Maxwell:** Olhe os valores que estão aparecendo. O valor aí está fixado [referindo-se ao valor do Montante **C** que vem sendo apresentado na tabela por um único valor, 4080].
> **Marta:** Por que aí ele tem que pegar os R$ 4080 e somar com os 10%, calculado de 4080. Não está vendo. [Marta está preocupada com o cálculo de juro sobre juro].

Nesse momento da atividade Marta volta a demonstrar que sua compreensão do problema é voltada ao cálculo de juro composto, porém permanece acompanhando Maxwell na sua investida de elaboração de um modelo sem essas bases.

> **Maxwell:** Vou mudar a variável independente como **Y**. [Maxwell resolve novamente modificar a variável independente, agora a colocando como **Y,** como se esse fato fosse resolver a situação de dificuldade que enfrenta]. Vamos supor que ele investiu. A indenização dele tinha sido aquela......

Como não obtiveram sucesso com as escolhas que realizaram, Maxwell resolve modificar a variável independente para **Y**, pois para ele essa variável deverá definir valores para serem somados ao investimento principal. A tabela agora volta a apresentar a seguinte representação, mostrando valores modificados para o montante **C**. Maxwell comenta esses valores com Marta.

Figura 156 - Tela de tabela com variação da taxa para obtenção do montante

Ao perceber que o modelo não está trazendo sucesso, Marta volta a insistir no cálculo de juro composto que anteriormente tentou iniciar e que Maxwell não acompanhou. Resolve, então, fazer uma anotação no papel onde consta o problema, essas anotações são referentes à fórmula de cálculo utilizada em juros compostos, como apresentada na Figura 157. Essa preocupação de Marta, ela desde algum tempo tentou implantar no processo de modelagem que vinham elaborando e que não obtiveram sucesso. Marta reforça em suas palavras, que o tratamento que deve ser dado ao problema é sobre juro composto. Portanto inicia um diálogo nesse sentido.

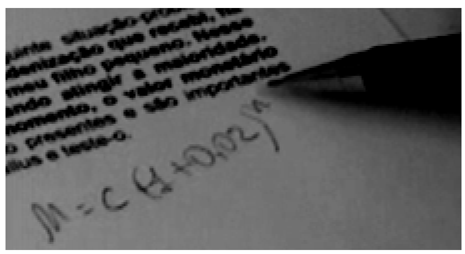


Figura 157 - Anotação por Marta para a fórmula do cálculo do montante.

Marta: Acho que deveria ficar assim. O montante seria igual a.
Professor: Por favor. Marta, fale mais alto, para poder gravar.
Marta: Tá bom. Assim, elevado ao período.
Professor: Não Marta do início.
Marta: Seria assim, o montante, quanto ele vai apurar. O capital dele investido, multiplicado por cem que aqui no caso seria a porcentagem, mais a taxa que está sempre sendo elevado ao valor do tempo. O tempo que vai ser aplicado. Só que ai no caso, vai ser quando o menino já tiver com dezoito anos. Esse tempo aqui [apontando para a variável tempo].
Professor: Hum, hum.
Marta: Mas ele vai verificar, investigar isso aqui no período.
Maxwell: Em qualquer período que a gente quiser saber.
Marta: Sim, em qualquer período. Então o valor da variável aqui, esse valor é que vai....
Maxwell: É que vai ser o valor da variável independente, a gente pode estipular então de 1 até 18, não é?
Marta: Aí você coloca o valor da variável em cima e não aqui, nos parênteses você coloca só a taxa de juros..... [pausa].
Professor: vocês tem que falar alto, Marta gosta de falar baixinho não é Maxwell?
Maxwell: Ela é assim mesmo professor, mas na sala só o senhor vendo.

Marta resgata a fórmula memorizada para o cálculo de juro composto envolvido no problema e que será selecionada como forma de solução para a situação-problema. Ela indica corretamente as variáveis, define a variável independente, como o tempo, fazendo anotação dessa expressão no papel (ver

Figura 158). Também indica através da fala cada um dos elementos (**montante, capital, taxa e tempo**) presentes na fórmula.

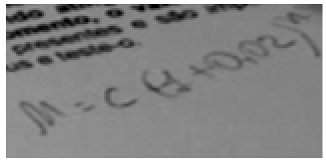


Figura 158 - Fórmula para cálculo do montante utilizada na matemática financeira.

Nesta fase do terceiro episódio a dupla apresenta as seguintes habilidades:

- Reconhecer a dificuldade de não validar o modelo que foi construído.
- Reconhecer o conhecimento matemático de juro composto presente na atividade.

Episódio 4: Modificação do modelo e representação.

A partir da intervenção de Marta para apresentar a fórmula para o cálculo de juro composto, Maxwell recorre ao uso do software para fazer as modificações no modelo algébrico, (ver Figura 159). Aceitando as sugestões de Marta, despreza por completo o modelo anterior que estavam trabalhando e segue agora digitando o novo modelo. Enquanto digita o novo modelo, ele inicia um diálogo.

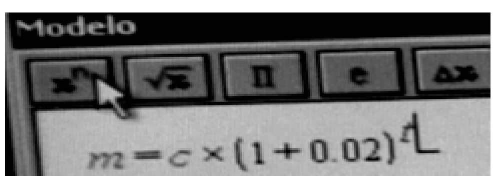


Figura 159 - Fórmula digitada por Maxwell na janela modelo do Modellus

Maxwell: Mas eu queria colocar... aí, aqui é vezes?
Marta: Mais 0,02, elevado..
Maxwell: Qual é a variável.
Marta: Aí bota **t**.
Maxwell: **t** é que vai ser a variável então. Mas a gente tem que colocar o capital aqui em condições. [Maxwell sugere a definição do capital na janela condições iniciais, (ver Figura 160)].
Marta: Que é 4.000.

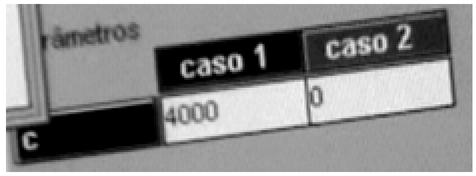
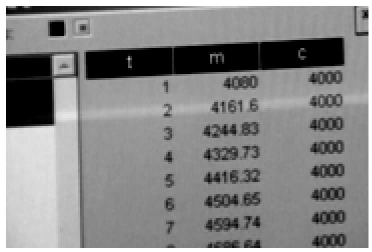


Figura 160 - Tela da janela condições iniciais apresentando a definição do capital

Após executarem o programa, observam a tabela sendo apresentada, (ver Figura 161). Maxwell começa a detalhar os valores que estão sendo oferecidos. O diálogo e a seguir reflete essa compreensão.



t	m	c
1	4080	4000
2	4161.6	4000
3	4244.83	4000
4	4329.73	4000
5	4416.32	4000
6	4504.65	4000
7	4594.74	4000

Figura 161 - Tela de tabela apresentando os resultados obtidos a partir do modelo

Maxwell: No primeiro mês 4.080,,,,,,segundo mês 4.000 e.... ,no terceiro mês.....
Professor: E no gráfico, como seria a representação?
Maxwell: No gráfico, seria... deixa eu ver aqui como vai ficar....isso aqui é 4.000 não é....vai ser assim mesmo?
Marta: Qual vai ser o intervalo?....
Maxwell: Executando...

Maxwell abre uma janela de gráfico para verificar os resultados desse novo modelo, verifica que os eixos estão sendo indicados com valores numéricos em forma de notação científica, isso parece não incomodá-lo. Verifica que a janela de gráfico Figura 162, já apresenta a curva indicativa dos valores referentes ao montante do investimento.

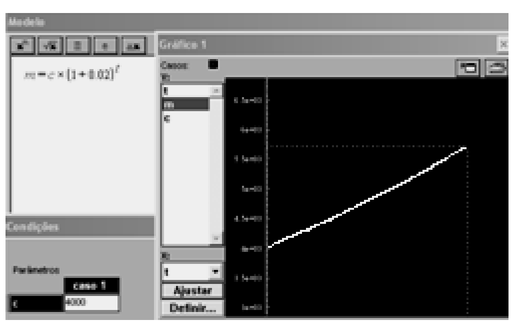


Figura 162 - Representação gráfica da equação modelo elaborada pela dupla

Professor: Aumenta esse intervalo Maxwell.

Maxwell: Está bem, de quanto?
Professor: Bota 50.

Maxwell resolve melhorar a representação do modelo através do gráfico, definindo um melhor intervalo de representação do fenômeno, Figura 163. Nesse momento Marta indica que a curva é uma parábola.

Maxwell: Ok. Executar.
Marta: Vai ser uma parábola.
Professor: Parábola?

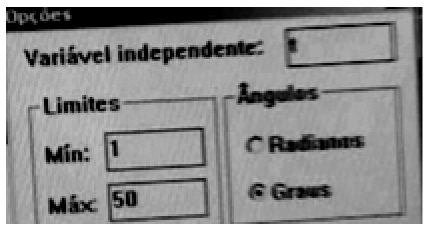


Figura 163 - Tela de definição do intervalo na janela de opções do Modellus

Ao executar o programa a dupla recebe novamente a representação gráfica do modelo, estabelecida no intervalo [**0; 50**] definido por Maxwell, Figura 164. Essa representação da à impressão do gráfico de uma parábola, como observado por Marta.

Maxwell: Uma parábola? E pode? [Maxwell pela sua surpresa, com a fala de Marta dá a entender que a expressão modelo não poder gerar uma parábola].

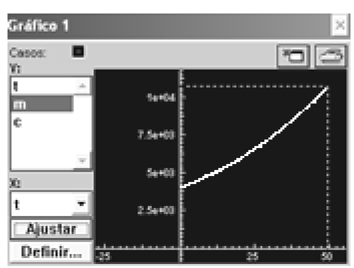


Figura 164 - Representação gráfica obtida a partir do modelo no intervalo [0; 50]

Maxwell retruca a informação de Marta sobre o tipo de gráfico que ela verificou. Procura investigar para tirar a dúvida de que o gráfico não é de uma parábola, como afirmou Marta. Vai ao botão de opções e altera o intervalo incluindo valores negativos ao intervalo, agora registrando [**-50; 50**], Figura 165. Obtendo um gráfico de uma função exponencial sendo apresentada também no segundo quadrante.

Maxwell: Vou colocar o intervalo negativo. [digita um novo intervalo[-50; 50]]
Professor: Será?
Maxwell: É exponencial, exponencial, no caso aqui deixa eu colocar..... ficaria o zero mesmo ficando com o intervalo de [**0 ; 50**]. [aqui, Maxwell ao voltar ao intervalo [0; 50] demonstra que o investimento deve iniciar no zero, não existindo valores monetários negativos].

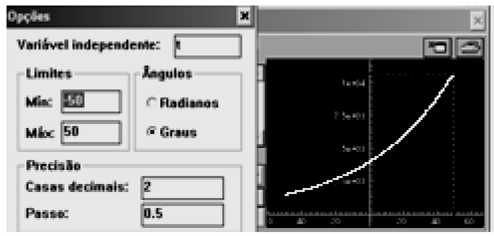


Figura 165 - Representação gráfica da equação modelo (exponencial) a partir do intervalo [-50; 50]

Maxwell percebeu que o gráfico não se refere ao de uma parábola e sim de uma função exponencial, no entanto, resolveu comprovar esse fato para tirar dúvidas, como se estivesse validando uma informação.

O professor busca intervir para fazer a dupla demonstrar que tem uma compreensão do modelo estabelecido e que no software pode-se trabalhar com outros recursos, para chegar a outras representações para o problema, a partir do modelo de equação que definiram.

Maxwell abre um gráfico e os valores continuam sendo apresentados em forma de notação científica

Professor: É exponencial.
Maxwell: Montante não é... Que é igual ao capital,.... Ao capital, mais 0,02.... Lembrava não dessa fórmula não.
Marta: O que?
Maxwell: Lembrava não.
Marta: É de juros compostos.
Maxwell: Por isso eu perguntei logo, tu lembras?
Marta: Pronto, eu só não estava lembrando qual era o tipo da......

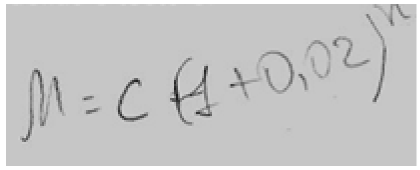


Figura 166 - Anotação da fórmula para cálculo do montante em juros compostos

Maxwell: Essa fórmula aqui é de que?
Marta; É de juros compostos.
Professor: Está bem, acho que terminamos. Obrigado.

Marta resolve verificar a expressão modelo anotada no papel, para justificar a ausência de conhecimento que Maxwell afirmava ter dessa equação utilizada no cálculo de juro composto.

Nessa fase do quarto episódio a dupla apresenta as seguintes habilidades:

- Identificar o gráfico da função exponencial.
- Reconhecimento do problema como uma atividade relacionada a juros compostos.
- Validar a situação através de representação gráfica.

VI.3.3 – Análise da realização da atividade 3 pela dupla 3

Episódio 1: Contextualização e definição dos elementos construtores.

A dupla faz a leitura do problema e por um momento ficam pensativos. Resolvem fazer nova leitura, desta vez lendo bem devagar, parece que na primeira leitura não houve um bom entendimento do problema. Após a segunda leitura iniciam um diálogo sobre o que devem levar em conta para resolver o problema.

Weldon: Bota **x,** mais **x + 18...**.**x** a gente......
Lisa: Por que você está usando esse valor para idade.
Weldon: A maioridade, não é **x** anos, não vai aumentando, quando a gente quiser ver.

Weldon parece querer iniciar um processo de resolução que logo não é aceito por Lisa, ele começa a sugerir a construção de uma equação em que serão tratadas duas variáveis uma em relação ao tempo (idade da criança) e outra em relação ao valor que vai sendo adicionado em relação ao tempo. Lisa, procurando intervir, afirma que é um cálculo financeiro de juro. O diálogo prossegue da seguinte forma:

Lisa: Aí no caso o juro é igual ao capital, vezes o valor da taxa vezes o tempo.
Weldon: É
Lisa: O capital que ele investiu.
Weldon: Aí bota o que...
Lisa: O capital que ele investiu, mesmo.
Weldon: Cinco mil reais, cinco mil está bom.
Lisa: é, uma taxa de 2 %, não é 2%?
Weldon: É, 5.000 reais mais uma taxa de 2%
Lisa: Que é igual.
Weldon: Ao mês.... [observa a unidade que será utilizada].
Lisa: vamos ver aqui que ele fez um investimento feito por um tempo de 10 anos....
Weldon: 10 anos
Lisa: Aí no caso são 18 anos, 18 anos representa 96 meses. [Lisa faz a transformação da unidade para meses, esse cálculo é realizado mentalmente, depois ela resolve confirmar essa aritmética no papel].
Weldon: São 96 meses.
Lisa: É um tempo de 96 meses,
Weldon: É
Lisa: Aí quanto vai ser os juros?
Weldon: Como se fosse aquele do atendimento não é?. [Weldon faz menção ao outro problema em que precisou calcular o salário do garçom].
Lisa: não esse é outro.
Weldon: Vai fazer aqui mesmo? [referindo-se ao software Modellus que se encontra já aberto no computador, desde quando iniciaram a atividade].
Lisa: É

Nessa fase do primeiro episódio algumas habilidades são demonstradas pelos sujeitos da pesquisa:

- Identificar as grandezas envolvidas na situação-problema;
- Definir valores para as grandezas identificadas no problema;
- Discutir sobre a natureza do problema quanto aos conhecimentos matemáticos que serão empregados.
- Discutir sobre a importância dos valores que deverão ser trabalhados na situação-problema.
- Reconhecimento do problema como uma situação relacionada a um cálculo financeiro de juro.

Episódio 2: Definição do modelo algébrico

A compreensão de Lisa sobre o problema é que se trata de um cálculo de juro simples. Dessa forma, ela vai discutindo com Weldon nesses termos, faz anotações na folha de papel onde consta o problema, escrevendo a expressão **J = C** x **i** x **t**, depois identifica as grandezas envolvidas e estipula valores para as mesmas. O valor para o capital é sugerido por Weldon como sendo **R$ 5000**. Para a taxa estipulam **2%** ao mês (anotam **0,02**) e o tempo é calculado em separado. Primeiro sugerem **10 anos**, mas observam a questão da unidade que deve ser a mesma que foi empregada na taxa, então calculam o tempo e encontram um valor de **96 meses**. Após discutirem e realizarem as primeiras anotações, o papel onde consta o problema apresenta as seguintes anotações, para o raciocínio que eles desenvolveram (ver Figura 167).

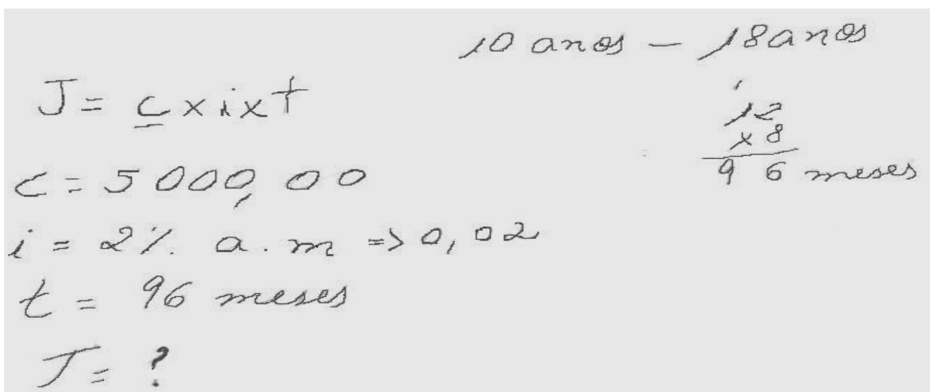


Figura 167 - Anotações realizadas por Lisa indicando a fórmula de juros simples e os valores estabelecidos para as variáveis

Weldon fica com receio em usar o programa que já estava aberto no computador. Pois na atividade anterior tiveram que mudar de máquina (computador), pois o mesmo não abria o software Modellus. Esse fato foi lembrado por Weldon. Ele inicia um novo diálogo observando esse fato.

> **Weldon**: Será que pega? No Modellus, vamos ver. **Juro**.... Vou ver se aparece...
> **Lisa:** É igual,
> **Weldon:** Acho que é o teclado que está ruim. [dificuldade com o teclado].
> **Lisa:** Juros, aí vezes, interpreta.

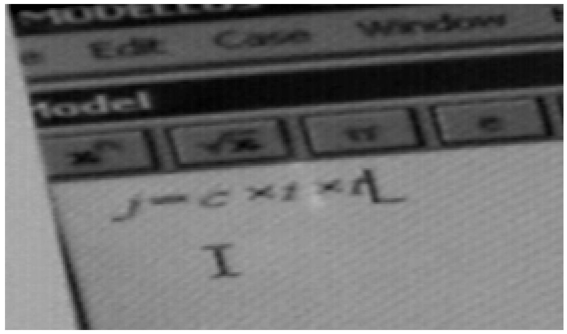


Figura 168 - Tela do Modellus apresentando a fórmula para cálculo de juros simples digitada por Weldon

> **Weldon:** Interpreta, ai bota... Pronto. [Encerrando a digitação da equação modelo, Figura 168]
> **Lisa:** Bota o capital
> **Weldon**: Quanto, ai bota o dinheiro pronto .... cinco contos de reis.
> **Lisa:** vezes 2%, 2% no caso vai fazer o que?... 0.02

As anotações realizadas pela dupla mostram que eles entenderam o problema como relacionado a um cálculo de juro simples. Esse fato é reforçado quando utilizam o computador e fazem a digitação da equação modelo que foi anotada por eles na folha de papel, como sendo **J = C** x **i** x **t**. No computador a tela do Modellus apresenta esses dados, como observado na Figura 169. Foi decidido por eles alterar no software, o passo para **0.5** e o intervalo para [**0; 96**], a variável independente não foi modificada.

Figura 169 - Tela do Modellus com a janela de opções aberta por Weldon para definir passo e intervalo

Nesta fase do segundo episódio verificamos as seguintes habilidades:

- Manusear o software buscando selecionar o intervalo para a grandeza tempo;
- Reconhecimento da variável independente, como sendo **t**.
- Utilizar corretamente o software para definir valores e variáveis.

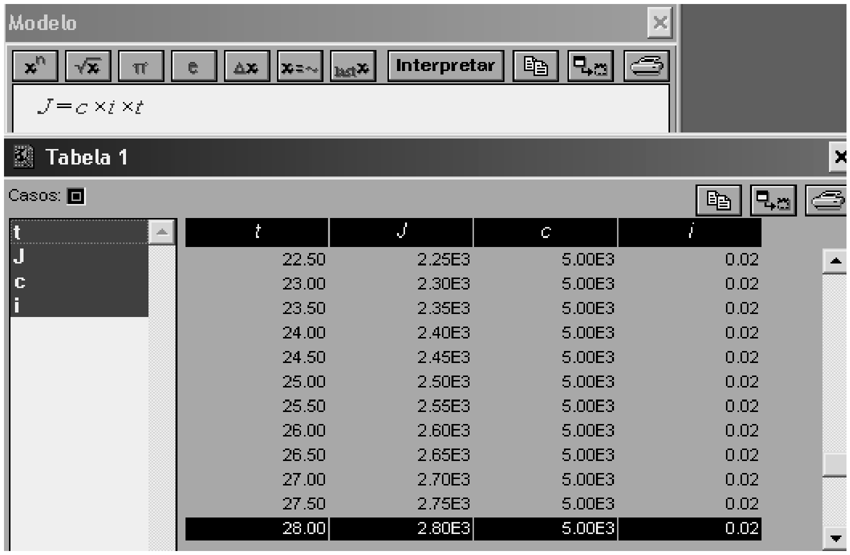
Episódio 3: Problematização, hipóteses e prévias de validação.

A dupla observa a necessidade de utilizar o software para validar o modelo que construíram. Dessa forma, após digitarem a equação modelo, decidem sobre o intervalo que deverão atuar as grandezas e qual será a variável independente.

Após interpretarem a expressão no software e decidirem os valores do passo e intervalo, deixando a variável independente como **t**, anotam o valor da taxa como **0,02,** observado na Figura 170.

Figura 170 - Tela do Modellus apresentando a janela de opções aberta por Weldon para definir o valor de 0,02 para a taxa

Tentam buscar em uma tabela uma representação para o que ficou decidido por eles (ver Figura 171). Esse tratamento é uma primeira tentativa de validação do modelo elaborado para o problema.



t	J	c	i
22.50	2.25E3	5.00E3	0.02
23.00	2.30E3	5.00E3	0.02
23.50	2.35E3	5.00E3	0.02
24.00	2.40E3	5.00E3	0.02
24.50	2.45E3	5.00E3	0.02
25.00	2.50E3	5.00E3	0.02
25.50	2.55E3	5.00E3	0.02
26.00	2.60E3	5.00E3	0.02
26.50	2.65E3	5.00E3	0.02
27.00	2.70E3	5.00E3	0.02
27.50	2.75E3	5.00E3	0.02
28.00	2.80E3	5.00E3	0.02

Figura 171 - Tela de tabela apresentando os resultados do valor do juro a partir da equação modelo

Observamos que os valores apresentados na tabela para juro e capital, estão sendo apresentados em notação científica. Esse fato intriga um pouco a dupla, mas não chega a prejudicar o conhecimento que eles desenvolvem. Weldon inicia novamente um diálogo:

Weldon: Certo, não é isso.
Lisa: Aí no caso coloca.......
Weldon: Vai ter quer acrescentar, a gente joga lá não é, para criar outra interpretação..... Não é aqui, lembra do **a**, **b** e **c**. [Weldon tenta recorrer a uma das situações dos exercícios anteriores, quando na janela condições iniciais atribuíram valores as variáveis **a, b e c** de uma equação quadrática]
Lisa: Não, o que ele vai querer é aqui, não é, vai depender do tempo para a gente calcular o juro, não é aqui.
Weldon: Não, esse é para criar, o **J** tem que ser no gráfico, não é isso mesmo?
Lisa: É aqui, Pronto só isso.
Weldon: É como se fosse criar o zero, tal....
Lisa: Aqui... Noventa e seis
Weldon: Acho que está errado............ Está errado aí.
Lisa: Está bom.
Professor: Aplicando um capital de 1000 reais quanto é que ele teria em seis meses, tem aí nessa tabela? [professor procurando intervir quando buscando informação quanto aos resultados obtidos].
Lisa: Vamos ver, não é Weldon, tem não? Seis meses, aqui. [Lisa tenta sugerir a Weldon que coloque na janela condições iniciais o valor de 1.000 reais para a variável capital].
Professor: Mil reais. Aplicado em seis meses?
Lisa: Ah mil tem que ser mais para lá.. Não.. [sugerindo que Weldon avance os valores apresentados na tabela, pois ele tentava ainda verificar esses valores].
Weldon: Não está dando.
Professor: Então tem que ser um modelo geral que nos dê esse valor [Intervenção].
Weldon: Está vendo que está dando maior aqui?
Lisa: Mas no caso era.... [Lisa está surpresa, pois no caso a expressão modelo não confirmou sua expectativa].

A dupla parece ter dificuldade, Weldon começa a associar o problema a uma real, referindo-se ao tipo de cálculo que é trabalhado comumente nas relações de comércio.

Verificamos nessa fase do terceiro episódio que a dupla apresenta as seguintes habilidades:

- Buscar validação do modelo de equação que elaboraram;
- Usar uma das formas de representação oferecida pelo software para entender, por meio de resultados, a validação do modelo.
- Associar um problema matemático a uma situação real.
- Reconhecimento da não-validação do modelo, por este não oferecer solução para um caso especifico.

Episódio 4: Dificuldades na composição do modelo algébrico.

A dupla após verificar a não-validação do modelo que construíram, pois o modelo não estava apropriado à solução do problema, resolve relacionar a situação a um caso real verificado no dia-a-dia. Conversam nesses termos, associando o problema a um fato real. Observamos que a discussão é um processo de associação do problema a um fato real e vice-versa, ocorre que nessa associação com o fato real eles tiram informações para compor a compreensão do problema.

> **Weldon**: Como é o cálculo na loja, dos juros, o capital é fixo não é, e o juro é quanto? 0.01. Acho que tem que ter o montante, não é por que não vai acumulando a cada mês, não é, não vai acumulando, acumulando. Não é isso.
> **Lisa:** É isso, é juro composto, aí o montante vai ser igual, tem que ter o montante, M vai ser igual.... A fórmula eu não lembro?
> **Weldon:** Também não.

Após perceberem que o cálculo de juro simples não estava apropriado a solução que buscaram apresentar ao problema, a dupla procura através de um processo de análise voltada a um caso real, seguir por outro modo de diagnóstico, portanto, recorrem ao cálculo de juro composto. Parece que eles não estão acostumados com esse tipo de cálculo, pois sentem dificuldade em lembrar da expressão que é utilizada **M = C x (1+i)^{t}**. Primeiro realizam esforços para lembrar da expressão, e chegam a uma compreensão confusa, incluindo o valor do juro na expressão (ver Figura 172). A expressão anotada no texto é **M = C x J^{t}**

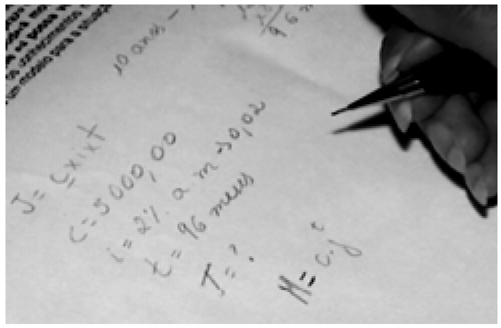


Figura 172 - Fórmula para cálculo do montante como sendo M= C. J^{t}, anotada por Lisa no papel

Lisa: Não sei.... É a fórmula do montante
Weldon: É
Lisa: M é igual a.....
Weldon: Montante......
Lisa: Não sei não.
Professor: Acho que agora vai. Pela primeira vez ai que vejo alguma coisa boa. [Professor tentando valorizar e incentivar o pensamento da dupla].
Lisa: O problema é o resto. Por que a gente não lembra não.
Weldon: O problema é o resto da fórmula.
Professor: Montante é o quê?
Weldon: Vezes o juros......

Os estudantes vão tentando lembrar a fórmula do montante, procuram na memória pela expressão que é comumente utilizada na escola, nota-se pouco esforço de construção do modelo com base na situação inicial. Ao perceber o esforço dos estudantes, o professor entra com um incentivo para que eles busquem a todo custo a expressão para o cálculo do juro composto.

Lisa: É o capital, vezes o juro elevado... Não é..... Sei não.
Professor: Capital, vezes alguma coisa, elevado a alguma coisa.
Lisa: É o capital, vez o juro elevado ao tempo. É isso?
Weldon: Capital, vez o juro elevado ao tempo.....
Lisa: É o capital, vezes o juro não é professor? Professooooor? É o capital, vezes a taxa elevada ao tempo? [Lisa buscando ajuda do professor que se encontra um pouco distante do local da atividade]

Primeiro confundem o uso do juro no lugar da taxa. No entanto, ao solicitar uma ajuda do professor Lisa sem querer expressa o modo correto da fórmula do cálculo do montante, que por diversas vezes estava falando em juro elevado ao tempo. Mesmo assim, parece que não associam o complemento que deve ser adicionada a taxa para introduzir na formula (**1 + i**). Dessa forma, não apresentam uma compreensão bem definida da expressão. Ficando o modelo digitado no computador como sendo: **M = C x i^{t}** (ver Figura 173).

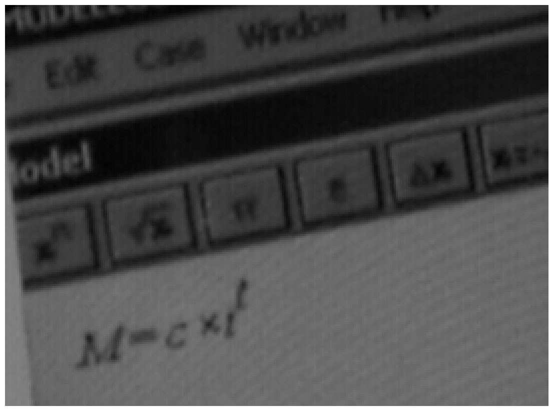


Figura 173 - Fórmula para o cálculo do montante digitada por Weldon no computador

Neste quarto episódio a dupla apresenta as seguintes habilidades:

- Associar a situação-problema a um caso real.
- Identificar que o conhecimento de juro simples não é adequado ao problema.

Episódio 5: Modificação do modelo

O diálogo a seguir faz menção a esse fato. Primeiro, a discussão ocorre no sentido de como será a expressão que representará o modelo, o que deve ser anotado no texto ou no computador.

> **Weldon**: Acho que é o capital, vezes juro elevado ao tempo. Escreve aí..
> **Lisa:** Vezes a taxa, elevado ao tempo, não é isso. [Aqui Lisa já chega a uma aproximação mais precisa do modelo].
> **Weldon**: Só isso mesmo.
> **Lisa:** É.
> **Weldon**: Capital de quanto?
> **Lisa:** 1.000 reais.

Weldon: Ok. 96 meses?
Lisa: Não, aí é a taxa. [Lisa percebe que Weldon tentava digitar o tempo de 96 meses no valor da taxa na janela condições iniciais, então ela o alerta para o erro, Figura 174].

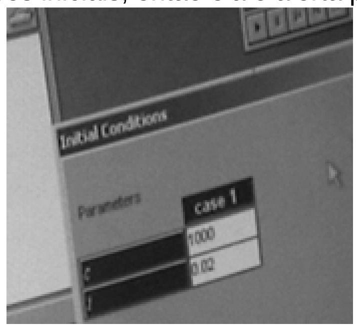


Figura 174 - Tela apresentando a definição de Weldon em 1000 para o capital e 0.02 para o valor da taxa

Weldon: Aí é a taxa? Elevado é.
Lisa: Bota só aquele 2%.
Weldon: Acho que a tabela vê isso.

Weldon parece apressado em validar o novo modelo. Sugere observar através de uma tabela as anotações referentes aos valores que decidiram na janela condições iniciais. No entanto, percebe que abriu um gráfico e que este não traz nenhuma representação (ver Figura 175). Fica por um instante observando, fecha o gráfico e abre uma tabela.

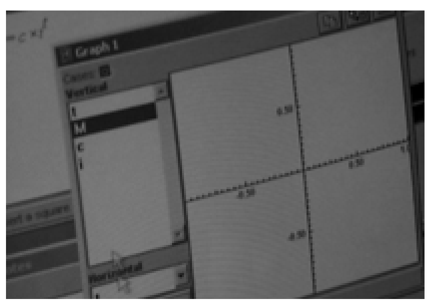


Figura 175 - Tela de gráfico do Modellus aberta por Weldon, sem a presença de uma representação da equação

Professor: Acho que o intervalo está muito pequeno? Vamos ver....
Weldon: Até pensei......
Professor: Não sai nada?
Lisa: Sai, espere....
Weldon: Só com ele.... Só ele...
Lisa: Vamos Ver. Lá.....
Professor: Vamos abrir uma tabela para ver.
Lisa: Aqui
Professor: Um capital de 1000 reais aplicado em 12 meses quanto é que daria, em doze meses vamos ver.
Weldon: Aí não tem opção por que é o capital não é.....

Lisa: Aqui.
Weldon: Aí não tem o montante. [Observam que a tabela apresentada pelo software não mostra o valor do montante para 1000 reais como foi sugerido pelo professor, isso intriga a dupla, Figura 176].
Lisa: É

Figura 176 - Tela de tabela indicando os valores para as variáveis oferecidas no modelo de equação que a dupla desenvolveu.

Weldon: Por que o 1000? É o capital não é.
Professor: Então você fixou um capital não foi.
Weldon: Foi, vou tirar o capital, mas a gente está botando o juro.
Lisa: O capital vezes a taxa.... Mais.... Para o valor não vai variar....
Weldon: Vai né.
Professor: Isso é o que? É um **i** ou um **t.**
Lisa: É um **i.**
Professor: Ah é a taxa, não é?
Lisa: Ahã.
Weldon: Se a gente colocar aqui para acrescentar o **t** não vai aparecer o saldo, ou não...
Lisa: Colocar o **t**.
Weldon: É
Lisa: E o capital vai ficar aonde, calcular o que por aqui.
Weldon: Como a gente colocou na equação do segundo grau... A gente não colocou **a, b** e **c** e a variável. [Weldon tenta novamente recorrer a outro recurso oferecido pelo software].

Weldon ainda está envolvido com os recursos que o software pode oferecer. Portanto, nesse momento da pesquisa fica sem saber decidir que caminho deve tomar e que escolhas deve fazer. Lisa no entanto, compreende que só a expressão modelo digitada na janela principal do software e as decisões quanto as variáveis já trarão resultados importantes.

Professor: Aqui é a formulazinha do montante que é o capital vezes a taxa mais um mais **i** elevado a **t**. .....aí é só vocês modificarem. Abre uns parênteses um mais **i.**... [professor resolve intervir, pelo tempo que está se esgotando, pois a dupla terá aula, em poucos minutos , o professor resolve intervir informando a dificuldade que eles não identificam].

Nesse momento da atividade o professor procura oferecer ajuda ao indicar o modo correto de escrever a fórmula do cálculo de juros compostos que eles apresentaram com a ausência do valor 1 (um) adicionado a taxa.

> **Weldon:** Fica um mais **i**, fecha.... Vai dar né. Bota o capital então, abre uns parênteses... **i**.
> **Lisa:** Um mais **i** Weldon
> **Weldon:** É **i**.
> **Lisa:** Espere
> **Weldon**: Elevado a **t**. Não é exato. [comentando sobre o modo correto de apresentar a fórmula, Figura 177].

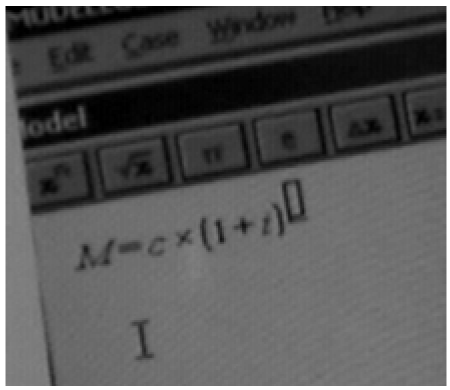


Figura 177 - Correção da fórmula do montante realizada por Weldon na janela do Modellus

> **Professor**: O que vocês teriam que escrever é isso aí, elevado a **t**, não é. O capital é fixo não é. Vocês fixaram alguma coisa ai não foi?
> **Weldon**: Está mostrando um aumento cada mês a mês
> **Professor:** O gráfico está bom, mais aqui ta faltando alguma coisa.
> **Lisa:** o quê?

O professor reforça sobre um problema que eles estavam enfrentando pela não inclusão do valor 1 (um) na fórmula do montante para juros compostos, que agora está indicada corretamente na janela principal do Modellus, Figura 178.

Figura 178 - Tela do Modellus apresentando um gráfico para a equação modelo digitada por Weldon

Professor: Veja que a visualização gráfica está mostrando.
Weldon: É está mostrando um aumento, não é.
Professor: O montante ai para um capital de 1000 reais,..... Acho por que está em notação científica.
Weldon: É, na tabela.
Lisa: Está na hora. [Lisa faz um alerta sobre o início da aula na faculdade].
Professor: Acho que está certo. No papel vocês fizeram? Está anotado não é.
Weldon: Já anotou [fazendo referência a fórmula que ficou anotada no papel, Figura 179].
Professor: Desculpem o abuso. Acho que terminou
Lisa: Hã, hã, hã....
Professor: Que maldade não. Muito obrigado aos dois pela participação.

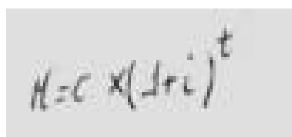


Figura 179 - Anotação realizada por Lisa no papel para indicar o a fórmula correta para o cálculo do montante

Ao verificar que a dupla chegou a apresentar conhecimentos importantes para a atividade e por considerar que o tempo não permite aos sujeitos que se alonguem mais na resolução do problema, pois já estão em horário de aula, o professor resolve encerrar a tarefa.

Nessa fase do episódio 5 a dupla apresentou as seguintes habilidades:

- Reconhecer que o software oferece várias formas de representação da situação.
- Verificar na representação por tabela valores de representação da situação-problema.
- Reconhecer a fórmula de juros compostos como modelo do problema.

VI.3.4 – Síntese das Atividade 3

A terceira situação-problema já não se apresentava como novidade, pois, os estudantes partiram em busca da definição dos elementos construtores, seguindo no mesmo caminho utilizado na atividade 1.

Nota-se que foi nesse terceiro problema que os alunos tiveram mais dificuldade. Um fato observado é o esquecimento da fórmula do montante para o cálculo de juros compostos, talvez não seja hábito dos estudantes trabalharem o conhecimento de função exponencial com mais freqüência, ou ainda, por ser a modelagem do juro composto uma tarefa das mais complexas. Mesmo assim, chegaram a um desenvolvimento satisfatório da atividade.

As dificuldades observadas nos fizeram entender, que na escola, poucos são os professores que trabalham situações em que a composição do modelo para juro composto seja mais explorada. Portanto, essa pode ter sido uma das causas que levaram os estudantes a algumas dificuldades quanto ao conhecimento matemático envolvido, que foram verificadas na atividade.

APÍTULO VII – ANÁLISE DAS

HABILIDADES MOBILIZADAS

Após a aplicação das atividades, o nosso propósito foi realizar uma análise longitudinal do desenvolvimento de cada dupla de alunos por atividade. Após esta análise, realizamos o cruzamento dos dados de forma a perceber o aparecimento de padrões ou não nas habilidades mobilizadas de dupla a dupla e de atividade a atividade. Portanto, neste capítulo apresentamos as análises das atividades, as habilidades verificadas, as características dessas habilidades, os conhecimentos presentes nas ações dos sujeitos e os resultados que consideramos relevantes para a pesquisa.

Antes de adentrarmos na discussão, achamos prudente informar que as atividades realizadas foram importantes na realização da pesquisa, em primeiro lugar por trabalharmos um tipo de problema que inicialmente não era conhecido dos alunos e em segundo lugar por associarmos a esse tipo de problema uma ferramenta que possibilitou o manejo das ações dos estudantes para simular as situações.

Neste tópico do capítulo de análise destacamos os grupos das habilidades que foram selecionadas para se discutirem os conhecimentos envolvidos na pesquisa.

1 - Habilidades do conhecimento matemático;

2 - Habilidades para modelagem;

3 - Habilidades para uso de um software e

4 - Habilidades para compor a representação de um fenômeno.

VII.1 – Habilidades voltadas ao conhecimento matemático

As habilidades apresentadas para compor este primeiro grupo serão discutidas por características, peculiares à ação dos sujeitos a mobilizarem. Essas características estão sendo apresentadas em tabelas e discutidas no discorrer do texto, de forma a simplificar a apresentação deste capítulo de análises.

Mapeamento das grandezas envolvidas no problema

A Tabela 1 sintetiza algumas habilidades que foram verificadas quanto ao conhecimento de mapeamento das grandezas, realizados pelos estudantes.

Tabela 1 - Mapeamento de grandezas envolvidas na situação-problema

Habilidades	Ativ. 1			Ativ. 2			Ativ. 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Apresentar grandezas para representar a situação-problema por meio de uma expressão matemática.				X	X	X			
Definir as grandezas que farão parte do problema.	X	X	X				X	X	X
Discutir e apresentar os valores que devem ser atribuídos às grandezas selecionadas.	X	X	X				X	X	X

As características observadas a partir das habilidades de mapeamento das grandezas, como apresentadas na tabela anterior, indicam que na atividade 2 o envolvimento maior dos sujeitos foi na definição de um modelo algébrico que relacionasse o fenômeno. Diferente das demais atividades, nas quais o destaque maior ocorre na definição das grandezas e apresentação de valores para essas grandezas, que vão compor o modelo algébrico.

Esse fato nos revela que a segunda atividade fica caracterizada pela associação imediata a uma representação algébrica do conhecimento envolvido, diferente das demais atividades, quando caminharam de outra forma.

No caso das duas outras atividades, algumas características foram identificadas nas ações dos sujeitos ao mobilizar a habilidade relativa ao processo de mapeamento das grandezas envolvidas no problema. Os sujeitos buscavam definir as grandezas envolvidas, discutiam e estimavam os valores que deveriam ser apresentados as mesmas.

Uma situação bem peculiar em que verificamos essa informação é um trecho de diálogo entre os componentes da dupla 2 na terceira atividade, quando eles discutem sobre as grandezas e o valor que deve ser atribuído às mesmas.

> **Maxwell:** Lembra de .....
> **Marta:** Humm........
> **Maxwell:** A gente tem que ver de quanto foi a indenização
> **Marta:** Tá.
> **Maxwell:** Devemos calcular o investimento dele.
> **Marta:** É fez um investimento para o filho.
> **Maxwell:** Dois mil reais, está bom, ele não trabalhou muito tempo não. [Aqui Maxwell começa a apresentar valores para complementar o problema, para melhor entendê-lo.].
> **Marta:** 10.000 é melhor. [como o problema trata de investir uma quantia referente a uma indenização, Marta percebe que esse valor deve ser mais elevado do que o proposto por Maxwell, ela faz correlação do valor da indenização com o do investimento].
> **Maxwell:** Dez mil?
> **Marta**: Aí ele pegou uma parte ou investiu tudo?
> **Maxwell**: Foi uma parte.... ai tem que saber o valor.
> **Marta**: Quanto foi que ele investiu?

Um fato importante é que, após à decisão das grandezas, os estudantes começavam a tratar o problema por meio de uma expressão matemática, mostrando a necessidade de representá-lo algebricamente. Em nossa avaliação, como deveriam utilizar o software Modellus, havia a necessidade de incluir no software um modelo algébrico que relacionasse os fatos evidenciados no problema.

Definindo o significado das variáveis

A análise das variáveis que deveriam compor o modelo foi uma tônica entre as ações das duplas. Observamos os estudantes explicitarem o significado dessas variáveis, discutirem sobre que valor deveria ser atribuído a elas e quais seriam aquelas que deveriam compor o modelo algébrico, entre outras. A Tabela 2 a seguir destaca as características identificadas a partir dessa habilidade.

Tabela 2 - Definição das variáveis para compor o modelo algébrico

Habilidades	Ativ. 1			Ativ. 2			Ativ. 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Explicitar o significado das variáveis utilizadas	X	X	X						X
Discutir sobre os valores que devem ser atribuídos as variáveis selecionadas.	X	X	X					X	X
Selecionar variáveis para construir o modelo matemático da situação.	X	X	X						
Decidir sobre as unidades a serem utilizadas para as variáveis.							X		
Tratar a situação-problema por meio de uma expressão matemática - modelo algébrico.				X	X	X			

A partir da Tabela 2 observamos que, nas atividades 1 e 3, o processo de resolução iniciava-se pela visualização das grandezas envolvidas, pela atribuição de valores às mesmas, apresentação das variáveis e construção do modelo. Já a segunda situação, como já discutido anteriormente, primeiro buscaram uma apresentação da equação e posteriormente algumas fases de modelagem eram trabalhadas.

Essa habilidade de explicitar o significado das variáveis, observada nas atividades, ocorre quando os sujeitos procuram decidir sobre que variáveis deveriam compor o modelo algébrico. A seguir, apresentamos um trecho do diálogo com a dupla 1 na primeira atividade, em que ocorre essa evidência.

Tedymar: Quanto deve ser o salário de um garçom? Um salário mínimo? [procuram estipular um valor para salário fixo dentro do padrão comercial atual].
Ado: 400.
Tedymar: 400 reais.
Ado: bota 350 reais.
Tedymar: Ta bom, 350, mais 0,1 vezes a quantidade de contas pagas.

Nota-se que a dupla, ao apresentar as bases do modelo algébrico, chegam a estabelecer uma variável, definida como contas pagas, que passa a ter característica de variável independente.

Em outro ponto dessa mesma atividade, a dupla 1 novamente revela essa característica. Pois Tedymar e Ado discutem sobre o significado de duas variáveis (X e G) que foram postas para compor o modelo algébrico.

> **Tedymar:** Fica 350 mais a comissão. Eu quero dar 10% de comissão por cada.......
> **Ado**: Então 10%, a gente pode dizer que **X** é a quantidade de garçons.
> **Tedymar:** Não, por que a quantidade de garçons é **G**.....é um garçom só.....**G** é a quantidade de garçons. Quanto é que eu vou pagar a um garçom ele quer saber [Tedymar entende que o **G** será a variável de atribuição do salário. Explicar a Ado sua compreensão fazendo referência ao texto do problema] do salário que deve ser pago a cada garçom. Então isso aqui é um garçom. [apontando para o **G** da expressão anotada no papel]. A um garçom eu vou pagar 350 reais, o salário fixo dele. Se no caso nosso restaurante.... mais 0,1 que é 10% de cada venda.

Nessa mesma perspectiva de decisão quanto ao significado das variáveis que devem compor o modelo algébrico, a dupla 3 inicia a atividade 3 já apresentando características dessa habilidade, quando discute nas seguintes bases:

> **Weldon**: Bota **x,** mais **x + 18..**..**x** a gente......
> **Lisa:** Por que você está usando esse valor para idade.
> **Weldon**: A maioridade, não é **x** anos, não vai aumentando, quando a gente quiser ver.

Apesar de a dupla não seguir na proposta de modelo que Weldon tentou apresentar, estipulando uma variável **x** estabelecida para idade, essa característica vai ser uma tônica no trabalho com as duplas. Eles buscam discutir cada passo dado para definição das variáveis que estarão sendo apresentadas para o modelo matemático que deve ser apresentado ao problema.

Composição do modelo algébrico

As habilidades mobilizadas pelos sujeitos quanto à composição do modelo algébrico também apresentou algumas características com relação a ação dos sujeitos. Em todas as situações-problema, os estudantes, ao buscar construir um modelo algébrico para representar a situação-problema, caminhavam no sentido de decidir sobre como deveria ser esse modelo. Desse modo, as características observadas nas atividades 1 e 3 dizem respeito a um modelo elaborado sem associação ao conhecimento das fórmulas trabalhadas na escola ou um modelo elaborado a partir de regras de contrato didático. A Tabela 3 reúne as habilidades, evidenciando fatos dessa natureza quanto à composição do modelo algébrico.

Tabela 3 - Composição do modelo algébrico

Habilidades	Ativ. 1			Ativ. 2			Ativ. 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Elaborar o modelo sem associá-lo às fórmulas trabalhadas na escola	X	X	X						
A partir de procedimentos construídos em contratos didáticos anteriores, compor o modelo (selecionando dados e variáveis)	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Discutir sobre as operações que devem compor o modelo a partir da análise do tipo de problema.								X	
Organizar as bases do modelo a partir de uma equação quadrática.				X	X	X			

Outro ponto verificado é que a dupla 2 na terceira atividade parte da discussão sobre que operações deveriam conter no modelo, como verificado no diálogo a seguir.

> **Maxwell:** Por que mais? Tem que multiplicar. [Maxwell está preocupado com o tipo de estrutura a ser utilizada]
> **Marta:** Sim, você vai multiplicar a taxa. [Marta afirma que esse tipo de estrutura também será utilizado].
> **Maxwell:** Mas ele vai multiplicar a taxa? E vai...
> **Marta:** Elevado ao tempo de.
> **Maxwell:** Por mês, ele investiu quatro mil, vezes 0,02. Ai oitenta reais por mês.
> **Marta:** É o que tá rendendo.
> **Maxwell:** Aí ele está multiplicando, então tem que fazer assim. Deixe eu ver.

Ao escrever o modelo, a dupla passa a discutir sobre a composição aritmética do modelo, pois estão preocupados com as operações que deverão ser trabalhadas a partir do modelo. Essa interrogação que verificamos entre eles é quanto a apresentação do modelo. Será com base em um processo multiplicativo entre taxa e capital ou com base em uma estrutura mista, aditiva e multiplicativa.

Uma forma de melhor ilustrar as características verificadas na mobilização da habilidade para compor o modelo algébrico, está sendo apresentada a seguir, quando selecionamos informações sobre as ações das duplas 1 e 2 para compor o modelo algébrico da atividade dois. Os estudantes procuram seguir por um caminho diferente das demais atividades, o modelo algébrico é definido a partir de uma equação quadrática que vai sendo organizada para dar forma ao modelo algébrico.

<u>Dupla 1</u>

Estipulou o modelo da equação **$x = -t^2/5$** e buscaram validar essa expressão. Decidiram por um intervalo que melhor oferecia uma simulação próxima ao efeito da bola em situação de voleibol no momento de saque.

Como forma de uma primeira validação, a dupla decide por um intervalo qualquer, sem a preocupação de será oferecido no software o gráfico de uma parábola com sua simetria em relação a um eixo vertical e utiliza a representação gráfica oferecida pelo software. Embora o gráfico não sendo uma representação ideal, nota-se a validação do que desejavam.

A construção da representação do fenômeno (movimento da bola) vai ocorrendo por etapas. Nessa fase, uma habilidade importante é apresentada: manipular os limites de um intervalo buscando determinar a representação gráfica de uma função quadrática.

<u>Dupla 2</u>

Além da representação primária, por meio de desenho, escrevem a forma geral de uma equação quadrática **$Y = ax^2 + bx + c$,** para indicar a equação modelo. De início, a concavidade para baixo ainda não é uma preocupação da dupla. Essa discussão vai ocorrendo em momentos posteriores.

> **Marta:** Aí no caso dá isso,.... Vai ter que dar valores.... [Marta coloca a necessidade de decidir sobre valores numéricos que poderão ser atribuídos no problema, visando adquirir um melhor conhecimento do mesmo].
> **Maxwell:** Aí, não seria qualquer função do segundo grau não, não é!
> **Professor:** Você tem que ver, você está vendo que será uma equação não é.
> **Maxwell:** É

A dupla chega a apresentar os valores dos coeficientes já na utilização do computador, como mostrado na Figura 180. Maxwell utiliza a estratégia de atribuir valores às variáveis na janela de parâmetros. Primeiro decidem pelos valores **$a = 1$, $x = 0$, $b = 2$ e $c = 1$**. Nota-se que o valor de **x** primeiro aparece como sendo zero, depois a dupla modifica esse valor para 1 e atribui outros valores aos coeficientes.

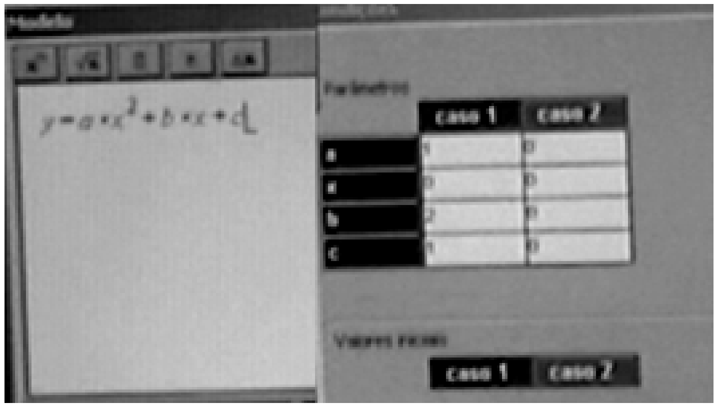


Figura 180 - Janela do Modellus indicando as decisões da dupla 2 para definir valores para os coeficientes na janela condições iniciais.

Articular características da situação com propriedades da fórmula

A habilidade dos sujeitos para relacionar características da situação-problema, com propriedades matemáticas do modelo que desenvolveram, são agora discutidas a partir de trechos de diálogos observados tanto com a primeira dupla e com a segunda dupla, que apresentam, de forma mais contundente esse tipo de habilidade. A Tabela 4, apresenta as habilidades mobilizadas para esse tipo de conhecimento.

Tabela 4 - Relação entre características das habilidades e propriedades de uma fórmula.

Habilidades	Ativ. 1			Ativ. 2			Ativ. 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Correlacionar propriedades de uma equação com características da situação. (Altura máxima a ser atingida pela bola)				X	X				
Associar o movimento de um objeto a uma equação matemática, identificando os conhecimentos envolvidos.				X	X	X			
Relacionar conhecimento matemático desenvolvido na situação com um fato real.				X	X	X			

Como já discutimos anteriormente, a atividade 2 teve algumas peculiaridades em relação às demais. Ela se destacou pela forma de abordagem que os sujeitos trabalharam, eles partiram para uma representação primária, associaram-na a uma equação matemática e foram, a partir dessa equação, efetuando modificações para que o modelo algébrico a ser apresentado representasse a situação-problema.

Um trecho de diálogo referente à dupla 2 traz informações importantes nesse sentido, quando comentam sobre a altura máxima que a bola deve atingir. Em nossa análise, o problema levou os estudantes a relacionar características da situação com propriedades de conhecimentos matemáticos, os quais dominam. Esse é um fato preocupante no ensino, quando observamos a dificuldade dos estudantes em relacionar ou associar o conhecimento adquirido na escola a situações reais. O trecho de diálogo apresentado pela dupla é rico nesse sentido.

> **Marta:** No caso, ela vai ter limite máximo. [Marta apresenta domínio de conhecimento quanto ao ponto de máximo da parábola, descrita pelo movimento da bola].
> **Maxwell:** É um limite máximo, no caso tem que representar em forma de equação.
> **Marta:** Aí no caso dá isso,.... vai ter que dar valores.... [Marta coloca a necessidade de decidir sobre valores numéricos que poderão ser atribuídos no problema, visando adquirir um melhor conhecimento do mesmo].
> **Maxwell:** A, não seria qualquer função do segundo grau não, não é!

Essa característica também aparece na realização dessa mesma atividade com a dupla 1, quando eles relacionam o conhecimento matemático envolvido no problema com uma situação real. Situação essa presente nos jogos do campeonato de voleibol, quando o jogador Bernard, utilizava um tipo de saque em que a bola descrevia uma parábola. Essa característica apresentada pela dupla, mostra que os estudantes durante a realização da atividade correlacionaram conhecimentos advindos de fatos reais com características da situação-problema. Eles discutem a compreensão do conhecimento envolvido, destacando a altura máxima atingida pela bola e a necessidade de realizar uma representação da situação. O trecho apresentado a seguir é rico nesse sentido.

> **Ado**: A bola após o saque, ela vai lá em cima e depois começa a cair. Quem dava esse tipo de saque era Bernard. [Faz referencia ao jogador que costumava dar esse tipo de saque].
> **Tedymar:** A gente poderia fazer um desenho. No caso, vai ser uma parábola.

Percepção dos conhecimentos matemáticos envolvidos

Outro grupo de habilidades voltadas ao conhecimento matemático, em que os estudantes percebem os conhecimentos matemáticos envolvidos na situação, será agora discutido. Na Tabela 5, apresentamos algumas dessas habilidades mobilizadas pelos sujeitos.

Tabela 5 - Identificação de conhecimentos matemáticos envolvidos na situação

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Identificar o conhecimento matemático de função afim envolvido no problema.		X							
Reconhecer um valor constante para a função ao anular o coeficiente angular.	X	X							
Compreensão do movimento de cada objeto ao ser representado por equações diferentes em intervalos iguais				X					
Reconhecer a variação da função afim através da modificação dos valores assumidos pelos coeficientes.		X							
Utilizar o gráfico de uma função como elemento para identificar casos da situação dada.	X						X		
Reconhecer a simetria de uma parábola em relação a um eixo perpendicular passando pelo seu vértice.				X	X				
Identificar conhecimentos da equação quadrática (sinal)					X				
Compreender que equações diferentes podem definir formas diferenciadas do movimentação de um objeto.				X					
Correlacionar propriedades de uma equação com características da situação (Altura máxima a ser atingida pela bola - ponto de máximo)					X				
Identificar o conhecimento de função exponencial no problema							X	X	
Indicar a fórmula de juro composto para representar o modelo da situação								X	X
Reconhecer o problema como uma situação de cálculo financeiro							X	X	X

A tabela indica que as características identificadas para o grupo de habilidades relacionadas à identificação do conhecimento envolvido na situação-problema, foram apresentadas nas três atividades trabalhadas, não sendo específicas de uma única atividade.

A tônica de algumas duplas era argumentar sobre o conhecimento matemático que estava sendo trabalhado. Essa característica é importante por indicar que o tipo de atividade que os estudantes estavam desenvolvendo, estimulava esse tipo de habilidade.

No trecho de discussão observado com a dupla 1 na primeira atividade, verificamos que eles reconhecem a função afim envolvida na situação. No diálogo entre os componentes da dupla, Tedymar afirma que o conhecimento que discutem, trata-se de função do primeiro grau.

> **Tedymar:** Vamos agora para o **E** que não conseguiu nada. Veja que quanto maior o número de pessoas mais acentuado é o gráfico. A função é do primeiro grau, que representa o salário dos garçons.
> **Ado:** Como ele não teve clientes, ele vai ter um salário fixo.
> **Tedymar:** Felizmente não dá para ver nada no gráfico do funcionário **F**.

Em outro ponto dessa mesma atividade a dupla tem outra compreensão que nos levou a verificar que eles fazem referência ao conhecimento matemático envolvido. Aqui há um reforço na compreensão do conceito de função envolvido na atividade e o tipo de função é identificado.

> **Ado**: Na lei de formação a gente chegou a usar porcentagem, que são os 10% de cada garçom, acho que a gente colocou o ideal. Através desse conhecimento chegamos a apresentar a função.
> **Tedymar:** Que é do primeiro grau. Afim.
> **Ado**: Mais alguma coisa professor.

Nessa mesma atividade, a dupla 2 também faz referência ao conhecimento matemático que envolve a situação. Um dos componentes da dupla é categórico ao afirmar que o gráfico que representa o modelo matemático é referente a uma parábola. O coeficiente x^2 é negativo e a concavidade para baixo, para validar a forma do movimento da bola. Outro ponto é que ocorre a afirmação de que a concavidade para baixo será conseguida quando for dada ao coeficiente **a** da equação o sinal de menos.

> **Maxwell:** Olha aí deu uma parábola, agora tem que ser negativa. [Validação do modelo]
> **Professor:** Como é Maxwell?
> **Marta:** Tem que ser negativa. [Reconhecer o efeito que o modelo deve apresentar]
> **Maxwell:** O valor de **a** tem que ser negativo. A concavidade da parábola deve ser para baixo

Associar conhecimentos matemáticos com a representação do fenômeno

Na atividade 2, os sujeitos investigados após a leitura do problema, discutiam sobre como era realizado o movimento da bola e a que conhecimento matemático esse movimento estava relacionado. Esse fato ocorreu com as três duplas trabalhadas na pesquisa. Portanto, essa observação passou a ser importante em nossa análise, visto que a atividade 2 envolveu com mais ênfase o conhecimento de representação.

A Tabela 6 apresenta algumas habilidades mobilizadas pelos sujeitos identificadas na articulação do conhecimento envolvido com a representação oferecida.

Tabela 6 - Articular o conhecimento matemático com a representação do movimento do objeto

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Compreender a forma de representação da equação quadrática quando a<0, associando ao movimento do objeto. (concavidade para baixo).				X	X	X			
Compreensão de que o gráfico não deve iniciar no zero					X				
Identificar o sentido do gráfico de um objeto a partir da posição dos eixos apresentados no software						X			
Definir uma equação quadrática como elemento que irá descrever o movimento da bola simulando um saque de voleibol				X	X	X			
Associar o movimento de um objeto a uma equação matemática, identificando o conhecimento de ponto de máximo.					X				
Formular exemplos de situações matemáticas a partir da composição dada ao problema.				X					
No domínio da função, decidir sobre as extremidades de um intervalo para representar de forma simétrica a função quadrática.				X	X	X			
No domínio da função escolher um intervalo ideal para representar a situação.				X		X			

Quanto à habilidade mobilizada pelos estudantes para buscar uma representação para o problema, observamos que ao associar a atividade 2 a um fato real, o caminho de construção do modelo vai seguir nessas bases e algumas características são observadas. Para apresentar essas características selecionamos trechos da atividade 2 e discutimos como os estudantes trabalharam.

<u>Dupla 1</u>

Ado: A bola após o saque, ela vai lá em cima e depois começa a cair. Quem dava esse tipo de saque era Bernard. [faz referência ao jogador que costumava utilizar nas partidas de voleibol esse tipo de saque].
Tedymar: A gente poderia fazer um desenho. No caso, vai ser uma parábola.

O trecho do diálogo apresentado mostra que Ado está envolvido com uma representação mental do fenômeno tratado no problema, enquanto Tedymar a partir dessa preocupação, resolve fazer uma representação por desenho, para descrever o fenômeno. A imagem do desenho indica a forma do gráfico de uma parábola, (ver Figura 181).

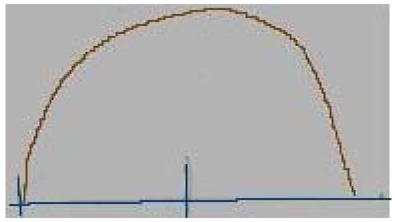


Figura 181 - Representação por desenho realizado pela dupla 1 para indicar o movimento da bola.

Observamos que, após a representação, um processo de validação das expectativas dos estudantes ocorria. Ao confirmar o conhecimento matemático envolvido (função quadrática), partiam para a realização de uma simulação no computador. A habilidade que destacamos como importante nesse momento da atividade era articular o conhecimento de função quadrática com o elemento que irá descrever o movimento da bola (representação do movimento do objeto).

> **Ado**: É uma equação do segundo grau
> **Tedymar:** Vai ser uma parábola, com concavidade, quer dizer o valor de **a** será negativo então a concavidade vai estar voltada para baixo. Devemos determinar **X** que é igual a menos **T** ao quadrado divido por 5. Agora devemos testar para ver se fica do jeito que queremos.

Dupla 2

Ao reconhecer a necessidade de representação do problema por meio de um desenho, como observado na Figura 182.

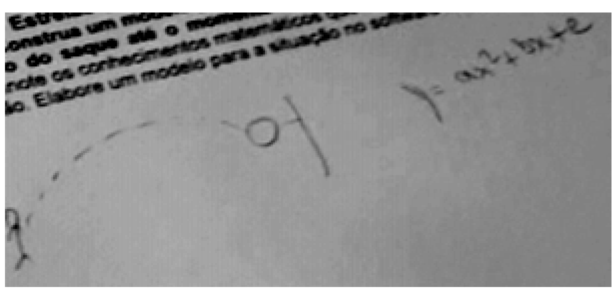


Figura 182 - Desenho realizado pela dupla 2 para indicar o movimento da bola.

A dupla 2 apresenta o mesmo tipo de característica observado com a dupla 1. Após a leitura do problema decidem pela representação do movimento da bola, articulando o conhecimento do gráfico de função quadrática a representação do movimento do objeto.

> **Maxwell:** Acho que tem que fazer uma representação para o problema.
> **Marta**: É
> **Maxwell**: Aqui vai ser uma equação do segundo grau. [Maxwell associa o movimento da bola a uma expressão matemática – equação do 2º grau].
> **Professor:** Como é, faça o desenho da sua compreensão.
> **Marta:** Faz um desenho Maxwell. [reforçando a necessidade da representação pro meio de um desenho]
> **Maxwell:** Vamos colocar um jogador de voleibol, tem a cesta, aí ele vai lançar a bola, ela cai, ela vai e cai na cesta. [Maxwell gesticula com as mãos a representação visual do saque e movimento da bola, depois desenha no papel essa representação]

<u>Dupla 3</u>

A dupla 3 não realiza o mesmo caminho que as duplas anteriores. Discutem como abordar problema, e a partir de movimentos com as mãos (representação do evento por meio de gestos com as mãos - gesticulação) definem uma representação algébrica da equação modelo.

> **Weldon**: O jogador de voleibol vai treinar saque jornada nas estrelas.
> **Lisa:** Deixa eu fazer....vai ser assim. [Lisa tenta apresentar em forma de gestos um modelo que descreva a trajetória da bola nesse tipo de saque].
> **Weldon**: É desde o início até atingir o solo.
> **Lisa:** Vai ficar: $\boxed{\mathbf{X^2 + 4X + 2}}$.
> **Weldon**: É negativo.

Lisa, após gesticular com as mãos sobre o movimento da bola, faz uma anotação no papel de uma equação quadrática (Figura 183), indicando uma forma de representação algébrica para o problema.

$$t = -x^2 + 4x + 2$$

Figura 183 - Anotação no papel realizada por Lisa para representar o modelo algébrico.

Nessa segunda atividade, os sujeitos trabalharam a situação-problema partindo de uma representação do fenômeno, que eles primeiro realizaram por meio de um desenho ou gesto. Dessa forma, notamos que os passos que seguiram, após associar o movimento do objeto a uma equação quadrática com concavidade para baixo, representando no software a abertura da parábola para indicar corretamente o fenômeno.

As formas de representação utilizadas posteriormente utilizando o software, geraram o surgimento de novas características dessas habilidades relacionadas à representação, que foram sintetizadas na Tabela 6. Observamos que os sujeitos para buscar uma melhor representação, manipulavam o domínio da função procurando definir um melhor intervalo.

Outra característica importante que diz respeito a esse tópico de associar o conhecimento matemático a uma forma de representação é quando os sujeitos articulavam mais de uma forma de representação para melhor compreensão do fenômeno.

Escolhas dos valores a partir da realidade econômica do País.

Uma característica das habilidades mobilizadas pelos sujeitos era a escolha dos valores que seriam associados às grandezas, tanto na atividade 1, quanto na atividade 3. Nota-se que há uma preocupação com esses valores, as duplas apresentaram esses valores dentro do padrão de realidade econômica que vivenciamos no País. A Tabela 7 apresenta as habilidades mobilizadas pelos sujeitos ao tratarem os valores dentro da realidade econômica.

Tabela 7 - Trabalhar com valores dentro da realidade econômica.

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Estimar valores para as variáveis segundo o momento econômico vivenciado no País.							X	X	X
Discutir sobre valores que deverão ser trabalhados na situação-problema.	X	X	X						X
Utilizar valores compatíveis com a realidade social e econômica atual.								X	
Reconhecer o problema como uma situação relacionada a um cálculo financeiro.							X	X	
Discutir sobre operações que devem ser realizadas para solucionar o problema e reconhecimento de elementos da fórmula.								X	
Discutir sobre a natureza do problema quantos aos conhecimentos matemáticos que serão empregados.								X	
Capacidade de formular exemplos de situações matemática no problema	X								
Apresentar os coeficientes da equação que compõe o modelo algébrico						X	X		
Reconhecer no software caminhos diferentes para chegar à solução do problema						X			

Selecionamos dois trechos de diálogos para destacar as características das habilidades mobilizadas quanto à escolha dos valores para grandezas e variáveis. O primeiro com a dupla 2, que trabalha nesse sentido, procurando definir o valor de indenização do trabalhador.

Maxwell: Devemos calcular o investimento dele.
Marta: É fez um investimento para o filho.
Maxwell: Dois mil reais, está bom, ele não trabalhou muito tempo não. [Aqui Maxwell começa a apresentar valores para complementar o problema, no sentido de melhor entendê-lo.].
Marta: 10.000 é melhor. [como o problema trata de investir uma quantia referente a uma indenização, Marta percebe que esse valor deve ser mais elevado do que o proposto por Maxwell, ela faz correlação do valor da indenização com o do investimento].
Maxwell: Dez mil?
Marta: Aí ele pegou uma parte ou investiu tudo?
Maxwell: Foi uma parte.... aí tem que saber o valor.
Marta: Quanto foi que ele investiu?

O segundo com a dupla 3, também na terceira atividade, quando discutem sobre um valor próximo a uma quantia referente ao capital do investimento de um trabalhador comum.

Lisa: O capital que ele investiu.
Weldon: Aí bota o que...
Lisa: O capital que ele investiu, mesmo.
Weldon: Cinco mil reais, cinco mil está bom.
Lisa: É, uma taxa de 2 %, não é 2%?
Weldon: É, 5.000 reais mais uma taxa de 2%

VII.2 – Habilidades mobilizadas para modelagem.

A modelagem matemática tem uma característica importante, resgatar a aplicação do conhecimento matemático que se tem domínio. Nesse sentido, as atividades realizadas para investigação deste estudo, utilizando problemas do tipo completamente aberto, que congregam os objetivos do “*problema aberto*” (ARSAC et. al. 1991), acrescentando-se a necessidade de decisão pelos elementos construtores, para dar um sentido de resolução matemática ao mesmo, e torná-lo equacionável, nos auxiliaram na verificação de algumas características evidenciadas nas habilidades mobilizadas para modelagem.

Entre as habilidades mobilizadas pelos sujeitos nas atividades, discutiremos neste tópico aquelas relacionadas a etapas de modelagem. Selecionamos as habilidades mais gerais com destaque para suas características. Algumas dessas características são os procedimentos utilizados, as formas de abordagem das atividades, a relação do problema com o cotidiano, a decisão sobre os elementos construtores, os processos de validação, entre outros, que serão organizados e apresentados em algumas tabelas.

Composição do problema

Neste grupo de habilidades mobilizadas para modelagem, selecionamos aquelas que estão relacionadas a ações dos sujeitos quanto a compor o problema. As características mais comuns estavam relacionadas à apresentação dos elementos construtores, à incorporação de elementos matemáticos para elaboração do modelo geral, e ao enriquecimento da solução com apresentação de casos da situação.

Uma tônica na primeira e na terceira atividades era a identificação pelos sujeitos da ausência dos elementos construtores no problema. O problema do tipo completamente aberto deixava ao estudante a identificação das grandezas envolvidas e a decisão dos valores e variáveis que deviam ser incorporados. Portanto, essa habilidade é verificada com as três duplas de estudantes investigados.

A partir das análises dessas duas atividades, selecionamos trechos de discussão que informam sobre esses pontos de análises observados. Começamos com as duplas 1 e 2 que, no início da primeira atividade, já trazem essa característica, quando definem que o empregado deverá ter além do salário, um acréscimo de 10%. Esses dados são incorporados ao problema pelos estudantes, quando identificam que não constar esse tipo de informação, mas que são necessários à composição do modelo. Dessa forma, procuram defini-los para tornar o problema equacionável.

Observamos que, nessa fase da atividade, ocorre um fenômeno importante, pois, os estudantes ao apresentarem os elementos construtores do problema, modificam sua estrutura, o problema passa de completamente aberto para problema aberto, pois está recebendo os elementos construtores que darão forma ao modelo matemático que o deverá representar. Essa análise está sendo apresentada a seguir:

Diálogo com a dupla 1:

Ado: Aqui nesse problema....é....
Tedymar: A gente vai ter quer construir utilizando conhecimentos de matemática do dia-a-dia. O garçom recebe além do salário, uma porcentagem de 10%.

Diálogo com a dupla 3:

Lisa: A gente coloca o salário.... O salário mais .... 350 mais. [define o valor de R$ 350 para o salário]
Weldon: Como se fosse o salário mais uma.....ehh...um bônus, como se fosse recebido por ele, um bônus. Pronto, o salário..... o salário fixo, não é?... R$ 350.
Lisa: Mais, é 10%. [resolve complementar o salário com um percentual de 10%]

A dupla 2 nessa mesma atividade, trabalha de forma diferente que as demais, pois procuram estipular de início um valor de salário, como produto de horas trabalhadas pelo valor da hora. Esta decisão por um salário pago por quantidade de horas trabalhadas é fruto do processo de construção que eles iniciaram, apresentando os elementos construtores sem a presença de um salário fixo.

Maxwell: Aí no caso o salário, ele varia pela quantidade de estipular horas, um valor para hora.
Marta: Exatamente. Quatro reais.
Maxwell: De quatro reais para hora.
Marta: É de quatro reais, por hora.

Maxwell: Aí trabalha oito horas de serviço por semana, ou trabalha 2 horas por semana. O trabalho dele será por semana?
Marta: Por semana.
Maxwell: Oito horas, ai no caso mensal.
Marta: É mensal, né, daria?
Maxwell: Aí no caso mensal seria quantidade de em uma semana ele trabalharia 40 horas, mensal, 40 vezes.....seria 80 horas por mês?
Marta: Por mês.
Maxwell: Igual à quantidade de horas vezes o valor da hora. Não é?
Marta: É

Nota-se que o tipo de problema completamente aberto, mesmo recebendo os elementos construtores, ainda permite, por meio de modelagem, situações diferenciadas de apresentação da solução.

A Tabela 8 apresenta algumas habilidades mobilizadas pelas duplas investigadas quanto à composição do problema.

Tabela 8 - Habilidades para composição do problema.

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Decidir por elementos construtores para descrição do problema.	X	X	X				X	X	X
Incorporar na situação-problema elementos matemáticos que levem a elaboração do modelo geral.		X							
Buscar enriquecimento da solução de um problema, através de análise de casos particulares que possam advir do problema.	X			X					
Reconhecer a ausência de elementos construtores do problema.	X	X							
Complementar as informações da situação-problema para torná-la um fato matemático.					X		X	X	X
Agir matematicamente sobre uma situação em que dados não foram fornecidos.	X	X	X				X	X	X

Observamos que a atividade 2 indicou pouca evidência de relacionamentos com os itens identificados na Tabela 8 quanto às características de composição do problema. Como já discutimos anteriormente, esse fato pode ter ocorrido pelo motivo de a atividade 2 apresentar, de imediato, uma associação a um conhecimento matemático, em que após sua identificação, só precisava de ajustes para representar o fenômeno envolvido no problema. Outro fato importante é que a atividade 2 reforça os conhecimentos dos alunos quanto a compreensão do movimento de queda livre, pouco desestabilizando os alunos nesse sentido.

Além das habilidades relacionadas à composição do problema, apresentadas pelos sujeitos nas atividades, há uma riqueza de informações de como eles trabalharam para decidir sobre os valores que deveriam ser apresentados para grandezas envolvidas ou variáveis selecionadas para compor a equação modelo, que serão discutidas em outros pontos de nossa análise.

Processos de abordagem da situação e problematização

Os processos de abordagem e a problematização da situação elaborados pelos estudantes, foram tratados de forma semelhante com todas as duplas. A identificação do conhecimento matemático envolvido não indicava no início das atividades 1 e 3, ser o fator essencial, pois os estudantes trabalharam os conhecimentos da situação sem a necessidade de identificá-los ou associá-los aos conteúdos escolares.

Observamos que as habilidades relativas aos procedimentos de abordagem da situação e problematização, mobilizadas pelos sujeitos, estavam envolvidas com contextualizações do cotidiano que os estudantes associavam. Por exemplo, a dupla 1 quando envolvida em apresentar um salário fixo para o garçom (atividade 1), discute esse valor em consonância com valores próximos aos da situação econômica do País.

> **Tedymar:** Quanto deve ser o salário de um garçom? Um salário mínimo? [procura estipular um valor para salário fixo dentro do padrão comercial atual].
> **Ado**: 400
> **Tedymar:** 400 reais
> **Ado**: bota 350 reais
> **Tedymar:** Ta bom, 350, mais 0,1 vezes a quantidade de contas pagas.

Em outro momento dessa mesma atividade, após definirem o salário do garçom, discutem sobre um acréscimo que deve ser incorporado ao salário.

> **Tedymar:** Fica 350 mais a comissão. Eu quero dar 10% de comissão por cada.......
> **Ado**: Então 10%, a gente pode dizer que **X** é a quantidade de garçons.
> **Tedymar:** Não, por que a quantidade de garçons é **G**..... É um garçom só..... **G** é a quantidade de garçons. Quanto é que eu vou pagar a um garçom ele quer saber [Tedymar entende que o **G** será a variável de atribuição do salário. Explicando a Ado sua compreensão fazendo referência ao texto do problema]....... A um garçom eu vou pagar

> 350 reais, o salário fixo dele. Se no caso nosso restaurante.... Mais 0,1 que é 10% de cada venda.

Quanto ao valor do percentual de acréscimo, nota-se que Ado vivencia uma realidade do fato, pois, envolve-se citando que pessoas serão atendidas no restaurante e que deverão pagar 10% além do valor do consumo anotado na conta. Esse valor não está sendo fornecido e Ado apresenta-o como elemento do problema, através da contextualização que vem fazendo, tirando da realidade fatos evidenciados de situações reais. Nota-se que na situação real de atendimento de um restaurante esse fenômeno de cobrança de 10% em cima do valor da conta acontece.

> **Ado**: É. Vamos dizer que existe uma quantidade de pessoas e de cada pessoa ele vai ter 10% do valor da conta que ele atendeu.
> **Tedymar:** É. Ele vai ter 10% de cada pessoa que ele atendeu.

Essas características foram observadas na ação dos sujeitos quando buscaram o desenvolvimento de uma estrutura matemática para construção do modelo que deveria ser apresentado como solução. Dessa forma, mobilizaram habilidades relativas a essa construção. A Tabela 9 apresenta essas habilidades mobilizadas relativas à abordagem e à problematização.

Tabela 9 - Processo de abordagem e problematização das situações-problema.

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Tomar decisões quanto à abordagem da situação-problema.	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Definir uma linha de construção para solucionar o problema.	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Construir um significado para o problema.	X	X	X	X	X	X	X	X	X

A tabela com as habilidades mobilizadas pelos estudantes quanto ao processo de abordagem e problematização são um indicativo de que a modelagem permite a tomada de decisões e envolvimento com o problema.

Processos de testagem do modelo.

A validação foi um processo que ocorreu em vários momentos da realização das atividades, sendo observada como um ato de testagem que foi constantemente utilizado pelas duplas. A nossa compreensão é que o uso do software levou a esse tipo de atitude tomada pelas duplas. Essa verificação pode ser observada no trecho de diálogo a seguir, em que um dos sujeitos da dupla 1 procura fazer a testagem de um caso no modelo que estão construindo.

> **Ado**: Não diferenciou muito. Mas eu estou interessado ai no que ele gastou com cada garçom. A gente deve mostrar na tela cada um. [Ado observando o resultado em um gráfico, mostra que tem o interesse de verificar o salário individual de cada garçom].

Outras formas validação do modelo foram observadas no estudo. Como o tipo de problema completamente aberto provocava constantemente uma série de variações quanto à interpretação, abordagem e modificação de interpretação, o modelo que estava sendo construído precisava de modificações, portanto, os estudantes buscavam sempre testar essas construções no software.

Na atividade 1 isso ficou evidente quando a dupla 1 criou casos específicos de cálculo para o salário dos garçons e buscaram uma forma de verificação da validade desse modelo que estavam elaborando.

> **Tedymar:** Só que tem um, porém. Esse aqui é o salário que eu vou pagar a ele por mês e isso aqui é o que ele conseguiu receber, conseguiu fazer em um dia. Então tenho que saber quantas pessoas tem recebido por mês. [Tedymar prevê dois tipos de compreensões para uma mesma situação].
> **Ado**: Então vamos determinar isso ai, determina para cada garçom a gente faz um cálculo mensal. O garçom **A** durante o mês ele atendeu 20 pessoas....então a gente determina já mensal, a quantidade de pessoas.

Outro ponto importante nesse campo de compreensão é que ao buscar identificar novos elementos construtores para o problema, como forma de ampliar a abrangência do modelo, realizavam também processos de validação, pois era necessário realizar novas interpretações.

O processo de testagem e validação do modelo realizado pelas duplas nas atividades geram a mobilização de outras habilidades. Esse processo teve por característica a validação de situações e casos ou o reconhecimento de que a construção de uma simulação no computador validava o modelo. Essas características serão discutidas a partir da atividade 2, com a dupla 1.

Após a definição do modelo, os estudantes procuram validar a construção. Primeiro ajustam, modificando as escalas horizontal e vertical, para conseguir a abertura da parábola e caminham por um processo de validação através da visualização gráfica oferecida pelo software.

A partir dessas escolhas, representam o movimento do objeto por meio de um meio arco de parábola, que vai do ponto zero do eixo das coordenadas seguindo a direita, com concavidade para baixo, como mostrado na Figura 184.

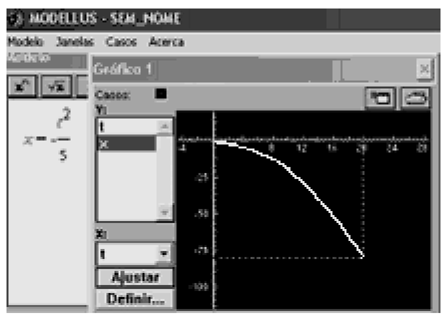


Figura 184 - Apresentação do gráfico da parábola no intervalo [0; 20].

Ao validar essa construção recorrem a uma simulação, como apresentada na Figura 185.

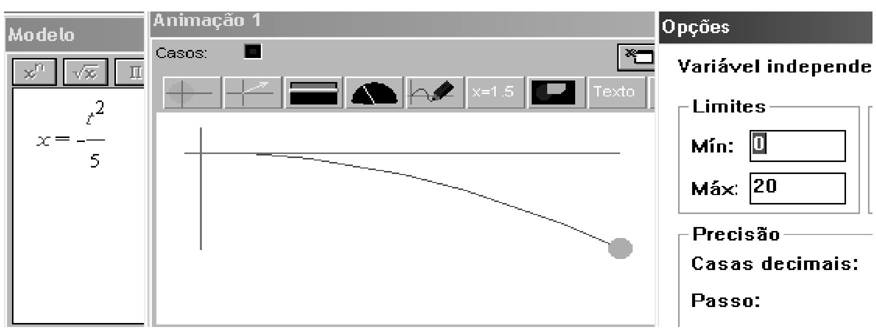


Figura 185 - Tela do Modellus apresentando a janela de simulação de objeto em movimento.

Como a simulação ainda não está de acordo com o fenômeno tratado no problema, efetuam novas decisões deixando a representação da parábola com intervalo simétrico (ver Figura 186 -.

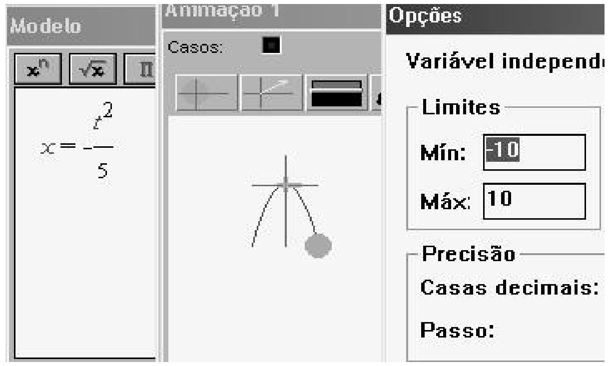


Figura 186 - Tela apresentando a simulação do movimento do objeto no intervalo [-10; 10]

A dupla chega a compor uma imagem mais próxima do real, quando coloca na simulação a presença de um jogador (ver Figura 187).

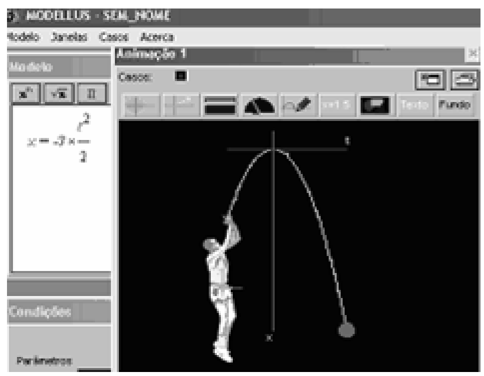


Figura 187 - Tela do Modellus com simulação elaborada por Tedymar apresentando imagem do jogador.

Posteriormente, ao conceber a construção como próxima de um caso real à dupla finaliza a simulação incluindo elementos visuais que valorizaram a realização da atividade (ver Figura 188). Validando o modelo que construíram para a situação-problema.

Figura 188 - Tela apresentando a simulação elaborada por Tedymar a partir da construção do modelo.

As equações utilizadas para o movimento da bola e do jogador foram respectivamente **$X= - 7t^2/2$** e **$y = - t^2/5$** apresentado na Figura 189. Entendemos que essas equações foram decididas aleatoriamente pelos estudantes, pois não entendemos o processo de escolha por essas equações selecionadas que eles realizaram e ficaram como decididas por eles para compor o modelo.

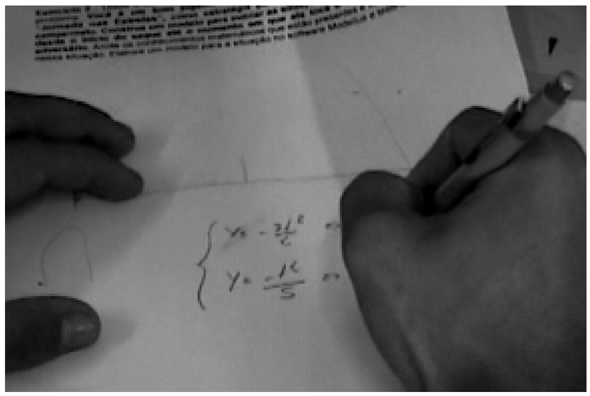


Figura 189 - Anotação de Tedymar no papel das equações que compõem o modelo.

A Tabela 10 reúne as características das habilidades mobilizadas pelos sujeitos referentes à testagem e validação do modelo.

Tabela 10 - Processos de testagem e validação do modelo

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Validar situações e casos a partir do modelo que estão construindo.	X						X		
Reconhecer que simular no computador é realizar um teste de validação.				X					
Validar o modelo a partir da representação de parte do gráfico da função.					X		X		
Buscar validar o modelo por meio de cálculo aritmético utilizando uma calculadora.							X		
Verificar por meio de uma tabela valores da situação-problema.			X						X
Validar o modelo por meio de representação gráfica.	X		X		X			X	X
Reconhecimento da impossibilidade de validação no modelo para uma situação estabelecida.		X					X		X

Modificação do modelo.

Uma das etapas da modelagem ocorre quando o modelo não é satisfatório para representar a situação em que se busca referenciá-lo. Quando isso acontece, há necessidade de modificações, que pode ocorrer por uma modificação completa ou apenas por mudanças nas bases de definição do modelo, ou seja, por meio de ajustes. Esse processo de modificação do modelo é importante nas atividades de modelagem. Em nossa pesquisa, ele foi verificado em algumas das atividades realizadas, pois os estudantes, quando não conseguiram validar a construção de um modelo para as atividades ou quando verificavam a necessidade de ajustes, recorriam a esse processo.

As situações-problema que trabalhamos com os sujeitos evidenciaram essa etapa da modelagem. Os estudantes, após construir uma proposta de modelo para as situações-problema, sempre buscavam validar essas construções utilizando os recursos oferecidos pelo software. Ocorria que, quando não validavam o modelo, partiam para a etapa de modificação, realizavam ajustes no modelo ou efetuavam uma nova construção.

Esse fato pode ser verificado com a dupla 2 quando na primeira atividade não conseguem validar uma primeira construção que elaboraram. Então, decidem ir por outro caminho, procurando construir um novo modelo para o problema. Isso mostra que o processo de aprendizagem que estão vivenciando, característico da modelagem é rico para a aprendizagem. Os estudantes, a partir de suas análises, conseguem perceber que a não validação de um modelo matemático, implica em buscar uma nova estratégia de trabalho para chegar à solução do problema. O trecho de diálogo entre os sujeitos da dupla 2 evidencia essa característica da modificação de um modelo na primeira atividade.

> **Marta**: Acho que a fórmula poderia ser outra.
> **Professor**: Como é Marta?
> **Marta:** Colocaria, é, em vez de botar o trabalho dele assim por hora, colocaria só à hora no momento das extras e estipularia um salário fixo de **320** reais, salário fixo mais quatro vezes **Y,** seria aí quatro horas, quatro reais a cada hora, cada uma hora. [Marta apresenta como cálculo do salário do garçom, um fixo de 320, mais um adicional computado pelo produto de horas extra, vezes o valor da hora].
> **Professor**: Um acréscimo a mais [professor procurando entender que a dupla deverá utilizar um valor fixo mais um acréscimo para o salário].

Maxwell: Ficaria 320 reais então.
Marta: Isso, mais quatro que é quanto vale uma hora, vezes **X**. Não é isso?

Essa etapa de modificação do modelo também foi verificada com a dupla 1 na terceira atividade. Os estudantes vinham trabalhando um modelo com base no conhecimento de juros simples, calculavam apenas o valor do juro, quando ocorre a interferência do professor, para alertá-los sobre essa situação.

Ado: O que ele pediu foi para verificar em qualquer momento, posso ser em um mês, dois meses, a qualquer momento.
Professor: O que eu gostaria de saber, é quanto é que eu tenho lá a cada ano?
Tedymar: Ele quer saber o valor com os juros, ele que é o montante, que é o capital mais os juros.....[Apresenta compreensão do conhecimento matemático envolvido]

Nesse ponto da atividade, a dupla percebe a necessidade de modificar o modelo para que no mesmo seja possível verificar o montante. Essa modificação do modelo é realizada, mas, ainda não responderá a outras questões. Observa-se que os estudantes partiram para compor um outro modelo que respondesse por completo à situação-problema. O trecho de diálogo a seguir apresenta as bases dessa discussão, quando reconhecem na intervenção do professor a necessidade de apresentar um modelo que exponha o valor do montante em termos de juro composto.

Ado: Será 20mil mais o resultado dessa conta.
Tedymar: Em um ano ele terá....
Tedymar: 20 mil mais, vinte vezes 0,01... Olha aqui professor, pela tabela ta mostrando quanto ele vai receber.
Ado: Agora.
Tedymar: A tabela ta mostrando quanto ele vai receber.... Em dez meses ele terá um montante de 22 mil reais. Em um ano ele terá vinte e dois mil e quatrocentos reais.
Professor: Esse tipo de investimento é juro simples, juro composto?
Ado: Juro composto, ai a gente joga num gráfico e vê.
Tedymar: Tem a fórmula de juros. [Tedymar percebe a necessidade da fórmula].
Ado: Tu lembras da fórmula,
Tedymar: De juro composto?
Ado: A gente aprendeu lá naquela turma.....
Tedymar: Montante é igual ao capital vezes um mais i elevado a **t**, de juros compostos onde **t** é o tempo e **C** é o capital.

No software, os estudantes deixaram digitadas na janela de edição do Modellus as equações que foram sendo trabalhadas, claramente são observadas as modificações que realizaram na construção do modelo, chegando ao modelo final que validava o problema (ver Figura 190).

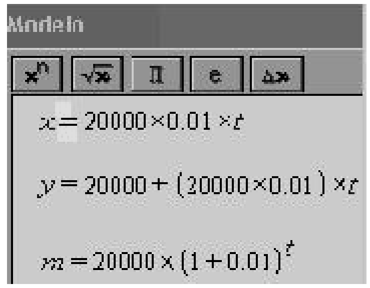


Figura 190 - Tela do Modellus apresentando as propostas de modelo que foram sendo elaboradas.

As habilidades mobilizadas pelos estudantes para ajustes e modificações no modelo, quando não foi possível validar situações e casos, apresentaram algumas características, que foram reunidas na Tabela 11 apresentada a seguir.

Tabela 11 - Etapas de modificação do modelo

Habilidades.	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Repensar a construção do modelo. Incluindo detalhes (movimento do jogador ao sacar a bola).				X					
Promover ajustes no modelo elaborado para representar corretamente a situação.	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Reconhecer que o modelo elaborado precisa ser modificado por não validar a situação.	X	X					X	X	X

As características quanto à fase de modificação e ajustes do modelo, demonstram ser essa fase de extrema importância, pois como etapa posterior à fase de testagem, quando se valida ou não o modelo, cabe modificações e ajustes. Em nossa pesquisa, entendemos que o software permitiu de forma significativa, a necessidade de ajustes, como observado na Tabela 11, pois em todas as situações os sujeitos buscaram ajustar o modelo.

Relacionando os conhecimentos envolvidos no problema com o cotidiano.

Um fato importante nas atividades da pesquisa era que os estudantes em alguns momentos chegaram a discutir as bases do conhecimento envolvido no problema, quando o contextualizam com fatos reais, como se o problema estivesse sendo vivenciado por eles.

A dupla 1 na primeira atividade traz uma discussão importante nesse sentido, eles discutem como se estivessem vivenciando a atividade como um fato real.

Tedymar: Quando você vai a um restaurante, você paga a conta e mais 10% do valor da conta é somado como salário adicional para o garçom. Só que no caso, 10% de comissão por cada garçom. Só que no caso eu não vou atribuir esses 10%.....[A compreensão de Tedymar para o problema, agora é associada a um caso real vivenciado por ele no cotidiano].

Outras verificações desse tipo são observadas com as demais duplas. A dupla 2, logo no início da segunda atividade, faz uma associação do fenômeno envolvido no problema com um conhecimento da realidade, quando afirma que o tipo de saque era vivenciado na realidade pelo jogador Bernard. Observado no comentário de Ado para a situação "A bola após o saque, ela vai lá em cima e depois começa a cair. Quem dava esse tipo de saque era Bernard".

A dupla 3 na terceira atividade também traz uma característica desse fato ao buscar um conhecimento da realidade associando-o com o conhecimento envolvido no problema.

Weldon: Como é o cálculo na loja, dos juros, o capital é fixo não é, e o juro é quanto? 0.01. Acho que tem que ter o montante, não é por que não vai acumulando a cada mês, não é, não vai acumulando, acumulando. Não é isso.

Um fato importante no comportamento dos sujeitos da pesquisa, é que na atividade 1, eles estabelecem um cenário real para discutir a situação-problema, vivenciando ações a partir dessa associação. Nota-se que estabeleceram uma contextualização baseada em fatos reais, em que se pagou uma conta e percebeu-se a cobrança de acréscimo no valor de 10% no valor da conta.

Dupla 3

Lisa: A gente coloca o salário....o salário mais .... 350 mais.
Weldon: Como se fosse o salário mais uma.....ehh...um bônus, como se fosse recebido por ele, um bônus. Pronto, o salário..... o salário fixo, não é?... R$ 350.
Lisa: Mais, é 10%.

Dupla 1

Tedymar: A gente vai ter quer construir utilizando conhecimentos de matemática do dia-a-dia. O garçom recebe além do salário, uma porcentagem de 10%.
Ado: Aqui no problema não fala nada de porcentagem Ted. [Ado verifica que na leitura do problema nada se falou de porcentagem].
Tedymar: Sim, mas aí, evidentemente não tem. Mas quando vai pagar a conta, sempre tem os 10% do garçom. Tem que se construir. [Tedymar revela a necessidade de apresentar dados complementares ao problema]

Um ponto é observado na análise da situação-problema 1, já discutido nas análises das atividades e que novamente reforçamos, quanto a uma das características de modelagem, que é o processo de inversão que nós observamos no relacionamento da atividade com um fato real.

Comumente em atividades de resolução de problemas, os alunos associam os problemas a uma situação cotidiana. Esse processo também aparece no ensino tradicional. No entanto, quando a atividade recebe um problema completamente aberto e que a técnica de trabalho é modelagem, essa associação, além de ocorrer nesse sentido, é feita também em sentido inverso. Busca-se trazer elementos do fato real para o problema, que necessitará da inclusão dos elementos construtores, enriquecendo a aprendizagem que está ocorrendo pela prática de modelagem de uma situação, utilizando um problema completamente aberto.

No trecho de diálogo observado com as duplas 1, 2 e 3 na atividade 1, evidenciamos fatos dessa natureza, que são agora apresentados.

Dupla 1

Tedymar: Quanto deve ser o salário de um garçom? Um salário mínimo? [procuram estipular um valor para salário fixo dentro do padrão comercial atual].
Ado: 400.
Tedymar: 400 reais.
Ado: bota 350 reais.
Tedymar: Ta bom, 350, mais 0,1 vezes a quantidade de contas pagas.

Dupla 2

Maxwell: Quantidade de horas vezes o valor da hora. Tu achas que tem que colocar adicional? [Maxwell aqui já demonstra pensar em um adicional além do cálculo de quantidade de horas vezes valor da hora].
Marta: É um adicional ao salário fixo. Faz assim, ele ganharia, ele ganha por hora, se ele fizesse extra, iria aumentar.

Dupla 3

Weldon: Como se fosse o salário mais uma.....ehh...um bônus, como se fosse recebido por ele, um bônus. Pronto, o salário..... o salário fixo, não é?... R$ 350.
Lisa: Mais, é 10%.

Observamos que os sujeitos procuram modelar a situação em termos das vivências que possuem do dia-a-dia relacionado à compreensão de fatos do cotidiano ao assunto em questão apresentado no problema.

Essas características relativas às ações dos sujeitos, quanto a relacionar o conhecimento envolvido na situação com fatos ou conhecimentos da realidade, mostram que as atividades trabalhadas na pesquisa levaram os estudantes a vivenciarem esse processo. Isso mostra que a modelagem matemática, tratada como proposta de ensino enriquece a aprendizagem dos estudantes.

Algumas características das habilidades mobilizadas associando o conhecimento envolvido na situação com fatos ou conhecimentos da realidade, estão descritos na Tabela 12 -.

Tabela 12 - Características de associação do problema a fatos e conhecimentos do cotidiano

Habilidades.	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Articular o problema com uma situação real conhecida.	X	X					X	X	X
Associar a um fato real o fenômeno tratado no problema.				X					X
Associação do conhecimento de função quadrática a uma situação do cotidiano.				X					
Vivenciar a situação-problema como uma realidade.	X								

VII.3 – Habilidades mobilizadas quanto ao uso dos recursos oferecidos pelo software.

O software Modellus foi importante na realização das atividades da pesquisa, pois, além de fornecer um ambiente favorável para modelagem matemática, percebemos que os alunos valorizaram o uso dessa ferramenta nas três atividades: comprovando resultados, calculando valores, escolhendo formas de representação ou validando a proposta de modelo que era construída.

Um fato nos chamou atenção desde o início da realização das análises, havia uma preocupação dos estudantes quanto a definição de uma equação matemática (modelo algébrico) para o problema. Primeiro discutiam e depois anotavam, no papel, dados sobre esse modelo e, por fim, recorriam ao software Modellus para digitar essa proposta de modelo algébrico.

O software Modellus, durante a realização de todas as atividades, foi utilizado de forma sistemática pelos estudantes, com esse recurso puderam representar ou validar as situações-problema. O uso de papel e lápis, recurso que também eles dispunham para realizar cálculo ou anotação, apesar de ser também utilizado logo no início das atividades, era logo substituído pelo Modellus.

Várias habilidades foram mobilizadas pelos estudantes quando utilizavam o software Modellus. Estas habilidades foram categorizadas segundo características comuns que discriminamos como: valorização do software na construção do modelo, domínio de conhecimento na utilização do software, utilização correta dos recursos oferecidos pelo software, utilização do software como instrumento para validar um modelo elaborado, entre outras. Essas características evidenciaram ser o software uma ferramenta indispensável na realização das atividades. Portanto, será analisada e discutida a partir da observação das ações dos sujeitos.

Valorização do software na construção do modelo

A valorização do software Modellus, característica observada a partir de algumas das habilidades mobilizadas pelos sujeitos, aparece na pesquisa como um processo de enriquecimento das atividades. A Tabela 13 reúne essas habilidades por atividade e por dupla.

Tabela 13 - Valorização do software na construção do modelo

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Valorizar a importância de um software como recurso auxiliar na solução de um problema.	X	X	X						
Promover efeitos para enriquecer uma simulação.				X					
Reconhecer no software possibilidades de observar a simulação de um fato.	X								
Reconhecer possibilidades de simulação da realidade a partir do software.			X	X			X		
Reconhecer no software possibilidades de realizar interconexões de esquemas para chegar a uma representação.	X								
Selecionar no software um tipo de representação para validar a expressão modelo.			X					X	

Essas várias habilidades mobilizadas pelos sujeitos, nos revelam a característica de valorização dos recursos do software na resolução das atividades de modelagem. No entanto, essa característica é muito marcante na atividade 1, principalmente no que concerne ao reconhecimento dos recursos de simulação permitidos pelo Modellus. Alguns casos ilustram bem essa valorização.

A dupla 1 quando trabalha a primeira atividade, inicia utilizando o papel fornecido com o enunciado do problema, para anotar e calcular dados referentes ao contexto. No entanto, um dos componentes da dupla reconhece que no software esse processo será melhor desenvolvido. Essa característica, evidenciada por Ado quanto à valorização do recurso computacional oferecido em contrapartida ao uso do papel e lápis que eles primeiramente utilizaram na atividade é observado no seguinte trecho de diálogo:

> **Ado**: Acho melhor fazer no computador, pois a gente joga tudo, fica Melhor.
> **Tedymar:** Certo. A gente vai fazer a lei de formação. Fica **X = 350 + 0,1 x t**. interpreta. O atendimento será no máximo 20.

A dupla 2, também na primeira atividade, demonstra que o software oferece recursos para o desenvolvimento da atividade. Em um momento da pesquisa, após conceberem como válido uma etapa de desenvolvimento do modelo, um dos componentes da dupla em diálogo com o professor discute sobre a necessidade de elaborar outra representação além da algébrica que eles validaram para a atividade. Esse ponto é observado quando Maxwell ao interrogar o professor sobre essa necessidade. O professor reforça no sentido de que ele apresente conhecimentos dessa natureza.

> **Maxwell**: Devemos fazer um gráfico ou alguma coisa?
> **Professor**: Se você quiser fazer, para melhorar sua compreensão e visualizar melhor o problema.

A dupla 3 na atividade 1, valoriza o uso do software, quando se observa um trecho de discussão sobre a composição do modelo algébrico. Nesse momento da atividade, Weldon parece entender que a verificação desse modelo seria melhor trabalhada por meio de uma simulação no computador, mecanismo de representação oferecido pelo software Modellus. Essa evidência é observada quando Weldon afirma a necessidade de fazer uma animação da situação-problema:

> **Lisa:** A variável independente agora vai ser o **X**. Aí o limite será...
> **Weldon:** Vai fazer uma animação logo, não!
> **Lisa:** É

No entanto, como mostra a tabela, essa valorização é mais marcante, para todas as duplas, na atividade 1. Nas demais atividades, esse aspecto fica mais presente com a dupla 1.

Domínio de conhecimento na utilização do software

Outra característica das habilidades mobilizadas pelos estudantes quanto ao uso do software Modellus, foi observada em relação ao domínio de conhecimento que eles apresentaram quando trabalhavam no sentido de valorizar as representações que eram utilizadas para o problema. A Tabela 14 apresenta as habilidades selecionadas quanto ao domínio de conhecimento utilizado.

Tabela 14 - Domínio de conhecimento na utilização do software para trabalhar as atividades

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Enriquecer a simulação com efeitos visuais a partir de recursos oferecidos pelo software.				X					
Utilizar corretamente os recursos oferecidos pelo software para expandir a abertura da parábola, modificando a escala horizontal.				X	X	X			
Promover ajuste na localização do objeto através de recursos oferecidos pelo software para decidir sobre um melhor intervalo.				X	X	X		X	
Expressar o modelo em função de uma variável independente.						X			
Visualizar a execução do modelo em mais de uma forma de representação.			X		X				
Demonstrar domínio de conhecimento na utilização do software, correlacionando com conhecimentos matemáticos.	X								
Analisar o movimento do objeto através da representação no computador no sentido de identificar conhecimentos					X				

Em vários momentos da realização das atividades esse fato ocorreu. Como destaque, apresentamos fatos observados com as duplas na primeira e terceira atividade. Um trecho observado inicia-se com uma expressão de entusiasmo de Weldon quanto a realizar melhor a atividade 2. Esse sentimento aparece no momento em que Lisa vem indicando alguns procedimentos para escrever o modelo algébrico.

Nesse mesmo trecho de diálogo, observamos a segurança de Lisa quanto ao domínio de conhecimento na utilização do software. Ela, ao apresentar o modelo algébrico para a atividade, reconhece a necessidade de associá-lo a uma variável dependente, trabalhando o modelo em função de **Y**. Dessa forma, Weldon por entender que o modelo algébrico sugerido por Lis, já define corretamente o trabalho a ser realizado, demonstra querer superar uma dificuldade que tiveram na atividade anterior com relação ao uso do software. Portanto, demonstra expectativa de que essa nova atividade será melhor desenvolvida.

> **Weldon**: Vou digitar no computador.
> **Lisa:** vai ficar: $\mathbf{-X^2 + 4X + 2}$

Weldon: Vamos fazer esse melhor [Esse comentário de Weldon é referente à dificuldade que tiveram na atividade 1].
Lisa: Escreve em função de **t.** [Fica a expressão indicada por $\mathbf{Y=-\ X^2+4X+2}$].

Em outra fase dessa mesma atividade a mesma dupla apresenta conhecimentos que são valorizados a partir da necessidade de utilização do software. Fato observado, quando Lisa busca valorizar uma validação por meio de representações do modelo algébrico. Ela reconhece a necessidade de visualizar a execução desse modelo através de mais de uma forma de representação.

Outro fato importante, nesse momento é a espontaneidade da dupla quando brincam ao observar o movimento do objeto passando em uma janela que está sobreposta a outra.

Lisa: Weldon abre um gráfico também. [Lisa busca outra forma de representação]
Weldon: Aqui.
Lisa: Sim.
Weldon. Está bem... Executar.
Lisa: Olha passou aqui, viu.
Weldon: Na animação.
Professor: Nessa animação você pode modificar a escala horizontal, não é?
Lisa: aqui olha [Lisa apontando para a tela, Figura 191].
Weldon: Estou perdendo ver o avião passar.
Lisa: Ah, ah, ah.

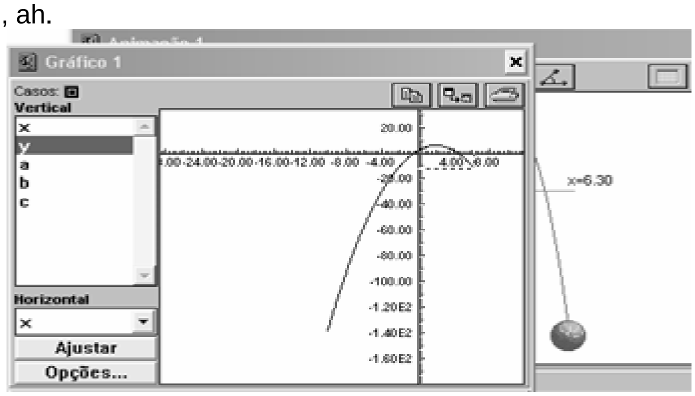


Figura 191 - Representação gráfica e por simulação do modelo em janelas sobrepostas

Com relação à dupla 1, uma característica quanto ao domínio de conhecimento foi verificada na primeira atividade. Quando Tedymar responde ao professor sobre a modificação de uma representação gráfica, ele indica que ao aumentar o número de pessoas atendidas pelo garçom, o gráfico, referente ao modelo que estão elaborando, apresentará uma inclinação maior em relação ao eixo Ox. Esse fato é observado no trecho de dialogo a seguir:

> **Professor**: A gente pode mexer na variação desse gráfico [observando o gráfico na tela].
> **Tedymar:** Pode, aumentando a quantidade de pessoas, quanto maior o número de pessoas, mais descontínuo o gráfico deixa de ser. Ficando mais acentuado. Então a função do primeiro grau representa o salário dos garçons.

Para reforçar esse conhecimento, ele faz uma comparação da representação gráfica oferecida no computador utilizando uma caneta em posição inclinada, mostrando como seria a inclinação do gráfico da função (salário) a partir do acréscimo no número de pessoas atendidas pelo garçom (ver Figura 192).

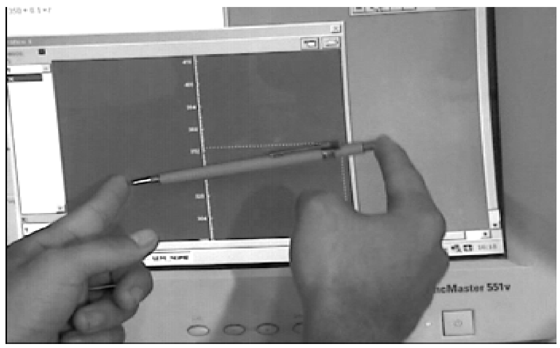


Figura 192 - Tedymar realizando uma comparação da inclinação do coeficiente angular do gráfico oferecido a partir do modelo

Uso correto de recursos oferecidos pelo software

Algumas habilidades observadas que se caracterizam pelo uso correto dos recursos oferecidos pelo software, receberam destaque e estão sendo apresentadas na **Tabela 15**.

Tabela 15 - Utilizar corretamente os recursos oferecidos pelo software

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Manusear corretamente o software no sentido de buscar a visualização de um objeto que não aparece na janela do computador (ampliação da janela condições iniciais).				X	X	X			
Buscar a redução do intervalo (campo de enquadramento do objeto) no sentido de minimizar a redução do movimento na tela imagem.			X	X	X				
Reconhecer recursos no software para melhor apresentar os dados advindos do modelo.		X	X	X					
Manipulação dos recursos do software no sentido de compreender efeitos de conhecimentos oriundos das técnicas computacionais.				X					
Manipular corretamente o software para definição de variáveis e intervalos.	X						X	X	X
Definir no software valores para as grandezas.	X	X	X				X	X	X

A necessidade de utilização do software, evidenciada nas atividades de modelagem que realizamos, foi um fato considerado para o estudo, principalmente por favorecer o surgimento de algumas habilidades quanto ao uso correto dos recursos oferecidos pelo software.

Algumas dessas habilidades apresentam características importantes, merecendo destaque também àquelas em que os estudantes realizam o uso correto dos recursos do software em situações de desenvolvimento do modelo matemático que deverá ser apresentado como solução do problema.

Selecionamos como destaque para esse tópico, os conhecimentos apresentados pela dupla 1, quando na primeira atividade procuram validar um caso do modelo que estão elaborando. Utilizam o software para verificar por meio de representação gráfica como estão sendo oferecidos os resultados de um caso específico de situação, (ver Figura 193).

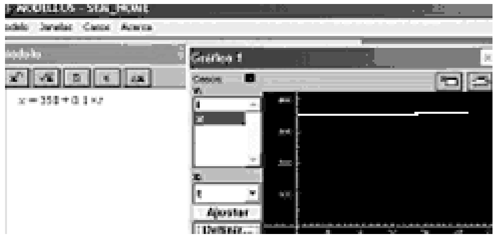


Figura 193 - Dupla 1 verificando a apresentação do gráfico referente ao salário de um garçom na atividade 1

> **Tedymar:** Aparece apenas uma pequena mudança no salário. O gráfico aqui está subindo, mostrando que não diferenciou muito.

Essa observação da ação da dupla nos indica que fazem uso correto do software, pois realizam ações de verificação por meio desse recurso. Na continuidade dessa ação, essa característica novamente aparece, quando o professor interfere na discussão e eles demonstram habilidades para alterar o intervalo que estão utilizando, a partir do domínio, para responder a questões sobre os resultados que desejam verificar.

> **Professor**: Vocês acharam o que no primeiro gráfico?
> **Tedymar:** Vamos supor que no restaurante por mês serão atendidas 200 pessoas. Vou colocar aqui 200 pessoas. Não 100 pessoas. [volta a alterar os limites Mínimo e Máximo].

A ação de Tedymar ocorre no sentido de alterar o intervalo para [0; 100], obtendo uma representação mais acentuada do gráfico. Como verificado na Figura 194.

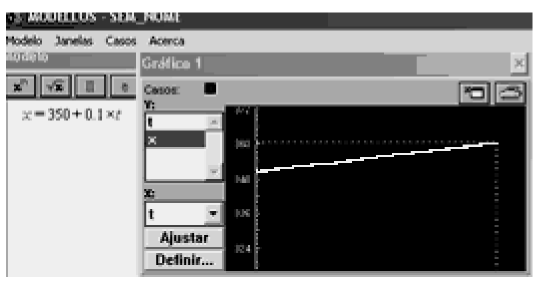
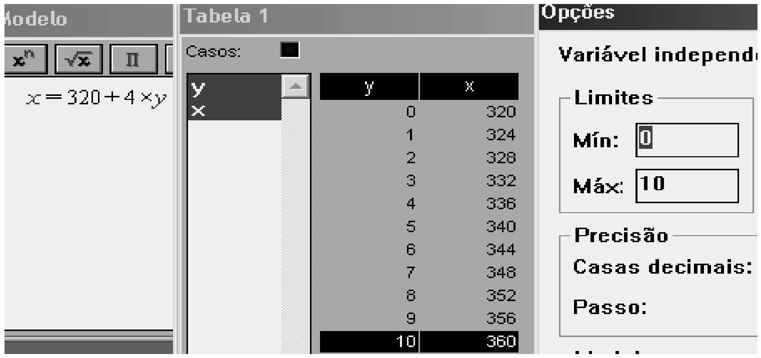


Figura 194 - Representação gráfica do modelo no intervalo [0; 100]

Outro caso dessa habilidade é verificado com a dupla 2, na atividade 1, onde o destaque é a presença da característica relativa ao reconhecimento dos recursos do software para melhor apresentar os dados advindos do modelo.

Os estudantes após definirem o modelo, buscam visualizar em uma tabela a variação de valores para o salário do garçom. O salário variando de 320 a 360 reais como apresentado na Figura 195.



y	x
0	320
1	324
2	328
3	332
4	336
5	340
6	344
7	348
8	352
9	356
10	360

Figura 195 - Valores de salário variando de 320 a 360

A partir da observação na tabela, apresentamos um diálogo ocorrido nesse momento da atividade, que apresenta a indicação do conhecimento matemático que eles dominam ao discutirem sobre o conhecimento de **função constante**, que aparece se não houver hora extra trabalhada pelo garçom.

> **Maxwell**: Se ele não trabalhar hora extra, ganha só o fixo. [Maxwell entende que a variável independente será aplicada apenas à quantidade de horas extras, quando o funcionário trabalhar].
> **Marta**: Se ele não fizer nenhuma hora extra.
> **Professor**: Se ele trabalhar uma hora ganharia quanto reais a mais?
> **Maxwell**: Devemos fazer um gráfico ou alguma coisa
> **Professor**: Se você quiser fazer, para melhorar sua compreensão e visualizar melhor o problema.

Utilizando o software como instrumento de validação

O software Modellus foi utilizado constantemente como um instrumento de validação, sendo bem aceito na realização das atividades. As duplas buscaram realizar a validação das decisões e ações que tomavam na elaboração do modelo para representar a atividade. As habilidades mobilizadas eram caracterizadas pelas etapas de construção do modelo algébrico, utilizando as formas de representação oferecidas, calculando valores e verificando resultados, selecionando uma melhor forma de representar o modelo, entre outras.

As habilidades mobilizadas quanto ao uso do software para validar situações e casos, estão reunidas na Tabela 16.

Tabela 16 - Características de uso do software como instrumento de validação

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Validar no software o modelo de equação elaborado.				X		X	X	X	
Verificar no software a possibilidade de representação do problema para verificar salários diferenciados (validação do modelo).	X								
Reconhecer que o software promove situações de representação de fatos do cotidiano.		X	X	X		X			
Selecionar no software um tipo de representação para validar o modelo.		X	X				X		
Reconhecer a representação do salário do garçom através de um gráfico apresentado no software.	X	X							
Validar o modelo construído por meio de cálculo utilizando o computador.	X		X				X		
Manipulação do software para modificar a representação gráfica do modelo.		X			X	X			

Como destaque das características dessas habilidades, selecionamos conhecimentos da dupla 1 na primeira atividade, quando os estudantes fazem uso dos recursos do software como instrumento de validação. Eles procuram representar no software uma representação do problema em que possam verificar simultaneamente vários casos a partir do modelo elaborado por eles. A preocupação de Ado na atividade é conseguir convencer o companheiro quanto a realizar no software a apresentação de vários gráficos em uma única tela de representação gráfica, como verificado no diálogo:

> **Ado**: Vamos tentar fazer aqui uma situação para ilustrar todos os gráficos. Repete essa lei de formação aqui [referindo-se ao modelo], já colocando no lugar de **X** o valor, tem condições? Vamos supor que aqui seja o garçom 1, depois o dois , o três, pede para interpretar todos os gráficos, num só.

Esse teste é realizado pelos componentes da dupla, buscando no Modellus casos de atendimentos individuais. Portanto, essa ação faz com que recebam seis gráficos constantes e um linear referente à expressão modelo **X = 350 + 0,1 x t** como apresentado na Figura 196.

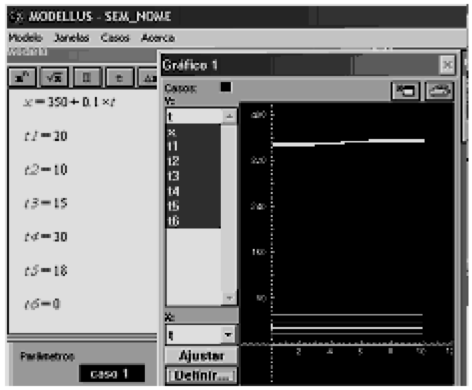


Figura 196 - Representação gráfica do modelo referente a valores fixados para t1, t2, t3, t4, t5 e t6

O que Ado procurou no software, foi validar uma situação em que percebesse o relacionamento entre os casos específicos de salários de vários garçons.

A dupla 2 também se destaca na primeira atividade quando mobilizam conhecimentos relativos à utilização do software para validar o modelo. Eles após verificarem em uma tabela a validação do modelo sugerem apresentar em forma de gráfico o conhecimento produzido na atividade.

> **Maxwell**: Devemos fazer um gráfico ou alguma coisa
> **Professor**: Se você quiser fazer, para melhorar sua compreensão e visualizar melhor o problema.

Entusiasmado com a proposta de modelo que elaborou para o problema, e convicto de que validou a situação, Maxwell compreende que pode utilizar outra forma de representação oferecida software para reforçar seu processo de validação. Então, propõe apresentar os resultados que foram visualizados em uma tabela, por meio de gráfico. Ele executa o programa e recebe em troca uma representação gráfica que indica o salário do garçom a partir do modelo que foi construído para a atividade, como apresentado na Figura 197.

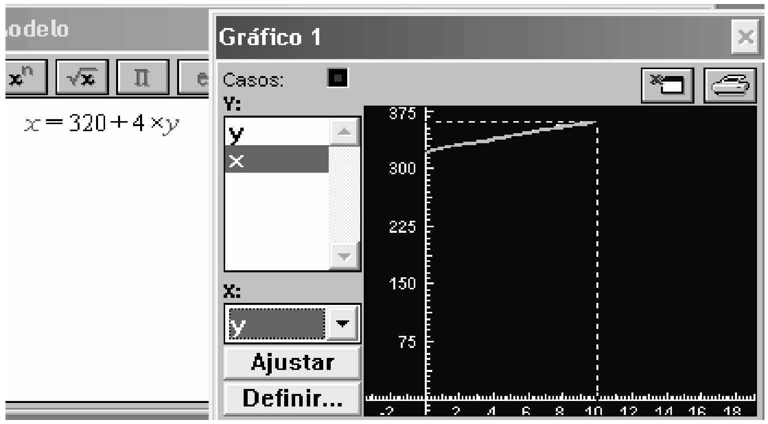


Figura 197 - Representação gráfica do modelo elaborado para o salário do garçom no intervalo [0; 10]

VII.4 – Habilidades para tratamento de representação

Buscando observar as habilidades mobilizadas pelos sujeitos para modelar as atividades selecionadas para a pesquisa, evidenciamos que o conhecimento de representação interferiu no processo de construção dos alunos. Compreendemos que esse fato ocorreu por dois motivos: o primeiro, pelo uso de um software que possibilita várias formas de representação; segundo, pelo fato de as atividades para modelar necessitarem do emprego de representação. Embora as três atividades trabalhadas envolvessem a necessidade desse conhecimento, o destaque maior ocorreu na segunda atividade.

A segunda atividade foi a que mais se caracterizou pela busca de uma representação real do fenômeno. De início, após a leitura e definição do campo de conhecimento que envolvia o problema da segunda atividade, os estudantes trabalharam a atividade definindo uma forma de representação primária, independente do uso do software. A utilização do software vai ocorrer posteriormente pela necessidade de se criar uma simulação que ofereça aproximações do fenômeno a fatos do cotidiano. Esta foi a única atividade em que se construía uma modelagem do movimento em si, e não apenas uma representação das variações entre grandezas.

A representação primária, realizada por duas das duplas investigadas foi o desenho e a terceira dupla utilizou gestos para indicar o movimento da bola. A forma de representação realizada por desenho, não oferecida no software, foi realizada no papel onde constava o problema. Já a representação por gestos foi observada durante a filmagem com a terceira dupla. Essas formas de representação primária, apesar de trazerem informações sobre como estão pensando os estudantes, não ofereceu maiores detalhes quanto à compreensão dos mesmos diante da atividade, mesmo assim achamos prudente comentar esse fato.

Como o software Modellus deveria ser utilizado para realização das atividades, os estudantes partiram para trabalhar com simulação ou representação gráfica. A simulação no computador foi escolhida como a que oferecia uma melhor aproximação da realidade. Essa busca pela representação por simulação ou gráfico ocorreu a partir do momento em que se confirmava o conhecimento de função quadrática envolvido no problema.

As características observadas em relação à definição das formas de representação que foram utilizadas pelos estudantes, sejam por representação primária, efetuada por meio de desenho ou gestos ou pela apresentação de um modelo algébrico, necessário para utilizar no software, serão a partir de agora discutidas.

Escolha das formas de representação

Na primeira atividade, as três duplas, após a realização da representação mental do fenômeno e realização de uma representação semiótica (desenho ou gestos indicando o fenômeno), buscaram definir o modelo algébrico. A definição desse modelo algébrico fornecia aos estudantes, a partir dos recursos do software, outras formas de representação (tabela, gráfico ou simulação). Portanto, os estudantes procuravam por outra forma de representação que validasse o modelo algébrico elaborado para o problema.

A **Tabela 17** reúne algumas habilidades mobilidades pelos estudantes para representar as situações-problema trabalhadas na pesquisa.

Tabela 17 - Manipulação das formas de representação

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Manipular no software mais de uma forma de representação do fenômeno.		X	X		X				X
Verificar através das representações oferecidas pelo computador a que melhor define respostas para o modelo elaborado.	X						X		
Simular no computador a representação de uma situação-problema.				X					
Reconhecer no software tipos de representação para uma mesma situação-problema.	X						X		
Reconhecer outras possibilidades de representação do modelo fornecida pelo software.		X	X						
Compreensão de que ao visualizar mais de uma representação pode chegar a um melhor entendimento do problema para decidir sobre sua solução.	X				X				
Simular no computador a representação de uma situação-problema.				X			X		
Reconhecer no software tipos de representação para uma mesma situação-problema.			X	X				X	
Buscar outra forma de representação quando encontrar dificuldades.			X					X	X
Buscar no software uma forma de representação em que possa ser possível apresentar variação de valores.	X							X	
Utilizar o software como ferramenta para conseguir representações de um mesmo modelo.	X			X					

Como forma de discutir essas habilidades apresentadas na **Tabela 17**, apresentamos algumas situações que merecem ser destacadas.

A dupla 3, após observar a representação gráfica produzida com auxílio do computador, os três personagens da ação Weldon, Lisa e o professor discutem sobre o conhecimento que está sendo apresentado no gráfico:

Weldon: Porque a gente colocou um valor fixo. Não é
Lisa: É o que a gente tinha pensado.
Professor: 350 é só um.....
Weldon: E vai aumentando 10% em cima do salário dele, ai o salário vai aumentando.

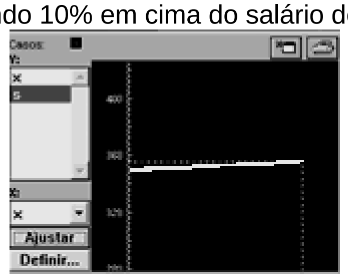


Figura 198 - Tela do Modellus apresentando uma representação gráfica

Nessa fase da atividade, Weldon percebe na forma de representação gráfica elaborada, alguns elementos que não foram apresentados ainda, valorizando esse novo modo de representação utilizado. Percebe casos da atividade e a influência dos valores assumidos pela função a partir da modificação da variável independente, em comparação com a representação algébrica que não indicou esses elementos. Em sua fala ele narra a variação do valor do salário fixo (representado como coeficiente linear da função), quando há manipulação do valor referente ao coeficiente angular da função (variável independente).

O diálogo ainda descreve pontos importantes:

> **Professor**: Se ele trabalhou e vendeu 500 reais por semana, quanto é o salário dele? 5000 reais pronto. Quanto ele ganharia?
> **Weldon**: O senhor quer que eu veja isso no gráfico.
> **Professor**: Avalie isso aí.
> **Professor:** 100 reais**.**
> **Lisa:** Abre uma tabela.
> **Weldon**: Está bem, vou selecionar.
> **Professor**: Por que o **X** aí está sendo apresentado sozinho? ..... Seleciona os dois
> **Weldon**: Os dois, pelo menos dá para ver.
> **Lisa:** O 100 não aparece.

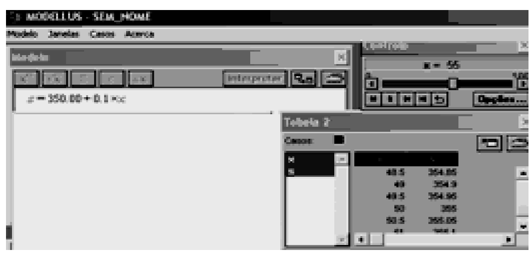


Figura 199 - Tela do Modellus apresentando a tabela que indica valores de salário

Observamos que a interpelação do professor quanto à apresentação de casos do modelo algébrico faz com que Weldon novamente reconheça que a representação gráfica seja mais eficiente nessa resposta. Essa mesma percepção é observada em Lisa quando orienta Weldon a verificar em uma tabela esses resultados. Trazendo para a discussão uma nova forma de representação que oferece em detalhes a verificação de casos da atividade. Nota-se que estão buscando visualizar resultados a partir de diferentes formas representação para uma mesma situação.

Estratégias utilizadas para elaborar representações

Algumas características relativas aos conhecimentos e estratégias envolvidos nas representações, geradas a partir das habilidades mobilizadas, apresentadas na Tabela 18, foram selecionadas e serão discutidas logo a seguir.

Tabela 18 - Conhecimento e estratégias envolvidas nas representações

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Reconhecer que um conhecimento matemático pode representar o modelo de uma situação-problema.	X		X						
Identificar para a situação-problema uma representação matemática (modelo algébrico)			X			X		X	X
Delimitar a representação algébrica para o modelo no campo de conhecimento matemático em que dominam.		X							
Buscar saídas para as dificuldades que estão enfrentando com um tipo de representação fornecida pelo software.			X						
Identificar para a situação-problema uma representação matemática (modelo algébrico).						X		X	
Compreender a forma de representação da equação quadrática quando a<0.				X	X	X			
Reconhecer que uma equação matemática pode representar o movimento de um objeto.				X	X	X			

Essas características observadas a partir das habilidades mobilizadas para elaborar representações da situação-problema, foram também relacionadas com o conhecimento matemático envolvido. Os estudantes percebiam que a linguagem matemática, além de ser um mecanismo de representação algébrica, estava presente nas outras formas de representação geradas a partir do software. Entre as características mais comuns, destacam-se: o reconhecimento da matemática como linguagem própria para elaboração de modelos, estabelecer limitações no campo matemático do modelo construído, o reconhecimento de que equações matemáticas podem ser associadas a fenômenos reais, buscar saídas para as dificuldades que encontram no processo de representação de um fenômeno, entre outras.

Como forma de apresentar essas características a partir das habilidades mobilizadas pelos estudantes, selecionamos algumas passagens das análises. A dupla 1 na primeira atividade, discute sobre como o conhecimento matemático envolvido na situação deve ser trabalhado. Primeiro compõem o modelo algébrico com bases em um salário fixo acrescido de uma comissão calculada em cima desse salário, como apresentado na anotação da dupla e indicada na Figura 200.

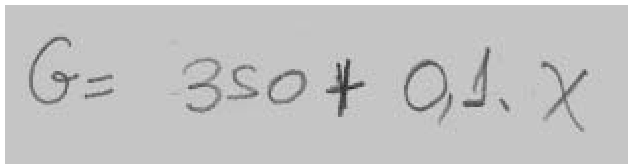


Figura 200 - Primeira anotação da dupla para o modelo algébrico da situação.

Posteriormente, através do diálogo entre os componentes da dupla, percebe-se que as bases matemáticas utilizadas pela dupla para composição desse modelo algébrico, estão relacionadas à função afim. A elaboração desse modelo levou a diferentes compreensões dos sujeitos, quanto à decisão de qual variável representará o salário do garçom e como apresentar um cálculo para o percentual de acréscimo no salário a partir da variável que será tratada como independente. A discussão da dupla gera o entendimento de que o modelo algébrico construído pode representar o fenômeno, na composição do problema que eles realizaram.

Tedymar: Fica 350 mais a comissão. Eu quero dar 10% de comissão por cada.......
Ado: Então 10%, a gente pode dizer que **X** é a quantidade de garçons.
Tedymar: Não, porque a quantidade de garçons é **G**.....é um garçom só.....**G** é a quantidade de garçons. Quanto é que eu vou pagar a um garçom ele quer saber do salário que deve ser pago a cada garçom [Tedymar entende que o **G** será a variável de atribuição do salário. Explica a Ado sua compreensão fazendo referência ao texto do problema]. Então isso aqui é um garçom. [apontando para o **G** da expressão anotada no papel]. A um garçom eu vou pagar 350 reais, o salário fixo dele. Se no caso nosso restaurante.... mais 0,1 que é 10% de cada venda, de cada cliente que sai do restaurante. Que é...
Ado: Que é 0,1 vezes **X**.
Tedymar: Que é. Esse é o meu caso, que eu vou pagar a ele, que é esse **X**, que vai ser a quantidade de pessoas, de contas que foram pagas a ele. [Tedymar demonstra compreensão de como atribuir os 10% em cima do valor de contas pagas pelos clientes]. Um garçom só.
Ado: É. Vamos dizer que existe uma quantidade de pessoas e de cada pessoa ele vai ter 10% do valor da conta que ele atendeu.
Tedymar: É. Ele vai ter 10% de cada pessoa que ele atendeu.

Outra fase das análises em que evidenciamos as estratégias utilizadas para elaborar uma representação é observada com a dupla três na segunda atividade. Eles Identificam para a situação-problema uma representação matemática (modelo algébrico), essa ação foi imediata após entenderem que o conhecimento do fenômeno estava associado ao conhecimento de função quadrática. Lisa gesticula indicando como será o movimento da bola (representação primária), fato esse aprovado por Weldon, como observado no diálogo:

Weldon: O jogador de voleibol vai treinar saque jornada nas estrelas.
Lisa: Deixa eu fazer....vai ser assim. [Lisa tenta representar por gestos a descrição da trajetória da bola nesse tipo de saque].
Weldon: É desde o início até atingir o solo.
Lisa: Vai ficar: $\boxed{\mathbf{X^2 + 4X + 2}}$.
Weldon: É negativo.

As características das habilidades apresentadas na Tabela 18, observadas na elaboração de representações também foram verificadas na primeira atividade com a dupla 2. O trecho de diálogo a seguir indica a tentativa de elaboração de um modelo algébrico estabelecido apenas por quantidade de horas trabalhadas, que não foi validado. Então, a dupla começa a discutir sobre a inclusão no salário de um salário fixo, no entanto, essa idéia não é plenamente aceita e o modelo fica baseado apenas em horas trabalhadas. Nota-se que procuram incluir nessa proposta de modelo, um acrescido de horas extras. Voltam a discutir os elementos construtores e novamente apresentam a idéia de um salário fixo acrescido de um valor referente à hora extra de trabalho do garçom. Dessa forma, o modelo preliminar que eles elaboraram vai sendo modificado para um novo modelo. O diálogo a seguir reflete essa compreensão:

Maxwell: Mais o fixo**,** não, aí tu falasse do valor de hora extra, aí você tem o total de hora extra que ele trabalharia por mês.
Marta: Hora extra.
Maxwell: Aí você teria o total de hora extra e o total de salário por mês. Total das horas extras. Seria quanto mais quatro?
Marta: Mais quatro.
Maxwell: Aí a gente representa por **y1**. Quarenta **y,** mais a quantidade de horas. Aí tem que saber a quantidade de horas que ele trabalhou por mês. [Maxwell parece querer retornar a compreensão do modelo de salário como sendo: **Salário total = 40** x **Y** + **comissão**].
Marta: É, como nós não sabemos como dar outra variável, não é a mesma variável.

> **Maxwell:** Acho que está bom, pra estipular só o salário, **X = 40 . 2** basta Interpretar. A gente vai estipular um valor para **y** não é? Que é quatro, só é ver na tabela, aí o salário dele deve ser....
> **Marta**: Não é bom estipular um salário fixo, por mês?
> **Maxwell:** Mas por mês ele trabalha oitenta horas, não é quarenta não? Trabalha 20 por semana. Dá oitenta horas por mês. Aqui olha deu oitenta.

A dificuldade que enfrentam é como delimitar a representação algébrica do modelo no campo matemático de função afim, Marta inclusive afirma ter dificuldade de não saber definir variáveis para um modelo que para ela é complexo: "É, como nós não sabemos como dar outra variável, não é a mesma variável". Recorrendo a definição de um modelo nas seguintes bases: *salário é igual à quantidade de horas trabalhadas vezes o valor da hora*, (ver Figura 201).

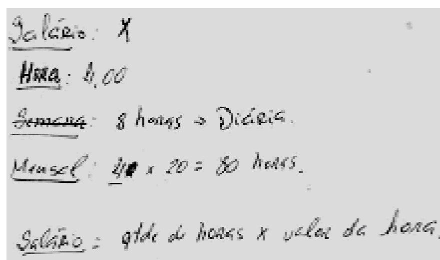


Figura 201 - Anotação do modelo: salário igual a quantidade de horas vezes valor da hora

Esse modelo, posteriormente não é validado, então resolvem voltar a compor o modelo com base em um salário fixo acrescido de comissão, como apresentado na Figura 202.

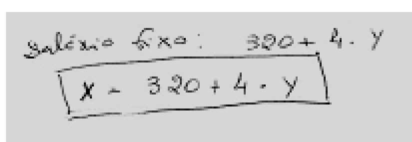


Figura 202 - Modelo algébrico anotado no papel pelos estudantes

Utilizando formas de representação para validação do modelo

Algumas características apresentadas a partir das habilidades mobilizadas para utilizar uma representação, apresentadas na Tabela 19, relacionadas aos processos de testagem e validação do modelo, serão também discutidas.

Tabela 19 - Utilizando formas de representação para validação

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Usar uma das formas de representação oferecida pelo software para verificar o nível de validação do modelo.	X		X	X	X				X
Adquirir entendimento da situação a partir das formas de representações oferecidas pelo computador.	X	X		X		X	X	X	
Identificar na representação por tabela valores de salário do garçom.			X						
Compreender que a representação gráfica do modelo algébrico facilita a identificação de casos da situação-problema.	X	X	X	X	X	X	X	X	
Utilizar a representação por tabela para verificar valores e resultados obtidos do modelo.	X	X	X		X		X	X	X

Uma análise dessas características relativas às habilidades mobilizadas para validar o modelo através de formas de representação, nos revelou que os estudantes utilizavam o software na intenção de construir representações para o modelo de cada situação-problema. Em alguns casos, essas representações serviram como instrumento de validação ou testagem.

Essa característica pode ser observada com a dupla 3 na primeira atividade, quando definem uma proposta de modelo, discutem com o professor sobre como na representação gráfica poderiam verificar um caso da situação.

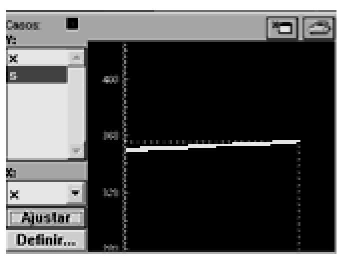


Figura 203 - Tela do Modellus com representação gráfica do modelo elaborado pela dupla

No diálogo apresentado a seguir, verifica-se a sugestão do professor para que a dupla trabalhe uma representação gráfica, modificando o intervalo para [0; 100]. Após essa modificação o professor interroga no sentido de que apresentem uma compreensão do modelo a partir do gráfico. Então Weldon responde que colocou o salário fixo e que o gráfico vai variar a partir do acréscimo dos 10%, como observado na Figura 203.

Professor: É esse aí que você queria, ajuste fica melhor [indicando para o gráfico de **S**].
Weldon: É
Professor: Veja que está em notação científica, os valores ficam reduzidos, não é.
Weldon: É
Lisa: Só o **S**. [Lisa indica que só o gráfico de **S** que interessa].
Professor: Você já respondeu?......Esse gráfico é o que? Aumenta o limite para 100 e o passo para 0.5 fica mais rápido, não é.
Weldon: É [afirma de forma positiva enquanto efetua as modificações sugeridas].
Professor: Pronto ai está o modelo que vocês escreveram. Vocês estavam querendo uma animação e não conseguiram, mas ai ele apresenta não é isso. Como é que vocês verificam um garçom.....
Weldon: Por que a gente colocou um valor fixo. Não é
Lisa: é o que a gente tinha pensado.
Professor: 350 é só um.....
Weldon: E vai aumentando 10% em cima do salário dele, aí o salário vai aumentando.
Professor: Se ele trabalhou e vendeu 500 reais por semana, quanto é o salário dele? 5000 reais pronto. Quanto ele ganharia?
Weldon: O senhor quer que eu veja isso no gráfico.
Professor: Avalie isso ai. 100 reais**.**
Lisa: Abre uma tabela:
Weldon: Está bem, vou selecionar.
Professor: Por que o **X** ai está sendo apresentado sozinho? ..... Seleciona os dois
Weldon: Os dois, pelo menos dá para ver.
Lisa: O 100 não aparece. [preocupação pela não visualização do valor 100 sugerido pelo professor].

Um fato que nos chamou atenção é quando Lisa entende que existe a dificuldade de observar um caso da situação na representação gráfica. Então, sugere outra forma de representação, a tabulação, apresentada na Figura 204, onde para ela é mais claro a identificação de valores do salário do garçom.

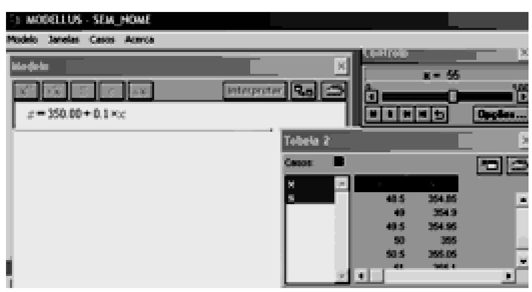


Figura 204 - Tela do Modellus com representação tabular de valores do salário obtidos a partir do modelo

Outra verificação dessa análise pode ser observada com a segunda dupla na terceira atividade. Eles discutem sobre valores observados em uma tabela, (ver Figura 205). Maxwell começa a detalhar os valores oferecidos, entendendo que os resultados satisfazem casos da situação.

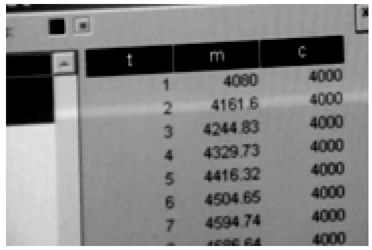


Figura 205 - Tela de tabela apresentando os resultados obtidos a partir do modelo.

O diálogo reflete essa compreensão, quando observamos Maxwell realizando a validação do modelo a partir da representação por tabulação. Quando é sugerido a verificar esses dados por meio de representação gráfica, Maxwell primeiro procura avaliar os resultados que seriam obtidos a partir da decisão do intervalo e valores já realizados. Marta também entende que se deve redefinir o intervalo, para que recebam uma representação gráfica indicando valores referentes ao montante do investimento.

Maxwell: No primeiro mês 4.080 ....,segundo mês 4.000 e.... , no terceiro mês.....
Professor: E no gráfico, como seria a representação?
Maxwell: No gráfico, seria... deixa eu ver aqui como vai ficar....isso aqui é 4.000 não é....vai ser assim mesmo?
Marta: Qual vai ser o intervalo?....
Maxwell: Executando...

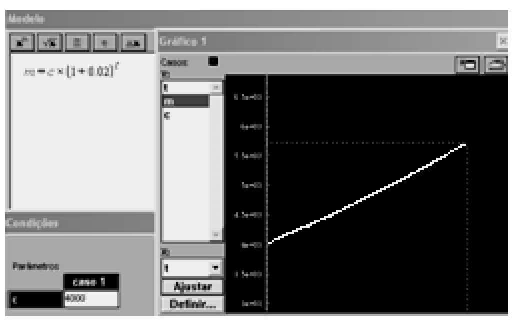


Figura 206 - Representação gráfica da equação modelo elaborada pela dupla

O professor, por entender que o gráfico não oferece uma boa visualização quanto à forma da curva, solicita a modificação do intervalo. Marta, nesse entremeio, indica que o gráfico apresentado a partir do modelo algébrico é de uma parábola, Figura 206. De pronto ela é logo contestada por Maxwell, que busca provar através da modificação do intervalo para [-50; 50] que a representação é de uma função exponencial, demonstrando entendimento da situação.

Professor: Aumenta esse intervalo Maxwell.
Maxwell: Está bem, de quanto?
Professor: Bota 50.

Maxwell: Ok. Executar.
Marta: Vai ser uma parábola.
Professor: Parábola?
Maxwell: Uma parábola? E pode? [Maxwell pela sua surpresa, com a fala de Marta dá a entender que a expressão modelo não pode gerar uma parábola].
Maxwell: Vou colocar o intervalo negativo. [digita um novo intervalo [-50; 50]]
Professor: Será?
Maxwell: É exponencial, exponencial, no caso aqui deixa eu colocar..... ficaria o zero mesmo ficando com o intervalo de [**0 ; 50**] [aqui, Maxwell ao voltar ao intervalo [0; 50] demonstra que o investimento deve iniciar no zero, não existindo valores monetários negativos].

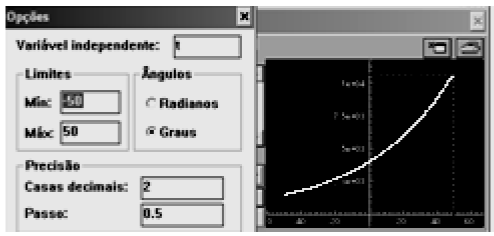


Figura 207 - Representação gráfica do modelo no intervalo [-50; 50].

Professor: É exponencial [Figura 207].
Maxwell: Montante não é... Que é igual ao capital,.... Ao capital, mais 0,02.... Lembrava não dessa fórmula não.
Marta: O que?
Maxwell: Lembrava não.
Marta: É de juros compostos.
Maxwell: Por isso eu perguntei logo, tu lembras?
Marta: Pronto, eu só não estava lembrando qual era o tipo da......

Representação do fenômeno por meio de um desenho

Algumas habilidades demonstradas pelos sujeitos estavam relacionadas à forma de representar o fenômeno por meio de desenho. Essas habilidades foram observadas na segunda atividade e estão reunidas na Tabela 20.

Tabela 20 - Representando o fenômeno por meio de um desenho

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Realizar uma representação primária do fenômeno por meio de desenho para melhor entender a situação.				X	X				
Realiza uma representação primária do fenômeno por meio de gestos e movimento.						X			
Entender que uma representação facilita a compreensão de um fenômeno.	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Reconhecer a necessidade de uma representação semiótica do problema.				X	X	X			

As representações dos fenômenos por meio de desenho e gesticulação com as mãos não estavam sendo propostas para ser representadas no software. Sendo assim, a segunda atividade foi a que melhor destacou essas formas de representação primária, indicando que os sujeitos primeiramente criaram uma representação mental que foi posteriormente indicada por meio de representação semiótica (DUVAL, 1995), desenho realizado por duas das duplas e gestos efetuados com as mãos pela terceira dupla.

A observação dessas características serão agora apresentadas através de trechos de diálogos obtidos das analises. As duplas 1 e 2 após a representação mental, contextualizam a situação-problema, desenhando no papel a forma de movimento da bola para indicar como entendem o fenômeno. A representação mental é transformada em representação primária, como observado no diálogo.

Ado: A bola após o saque, ela vai lá em cima e depois começa a cair. Quem dava esse tipo de saque era Bernard. [faz referencia ao jogador que costumava dar esse tipo de saque].
Tedymar: A gente poderia fazer um desenho. No caso, vai ser uma parábola.

A dupla 1 percebe a necessidade de indicar o fenômeno por meio de um desenho, realizado no papel que foi utilizado na atividade, como apresentado na Figura 208.

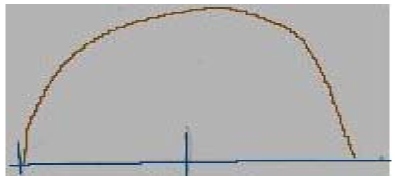


Figura 208: Desenho realizado pela dupla 1 para indicar o fenômeno.

A dupla 2 também caminha nesse mesmo sentido de análise, pois Maxwell, após realizar a representação mental, sugere a necessidade de indicá-la por outra forma de representação. Logo é incentivado a realização dessa atividade pelo professor e por sua companheira de dupla Marta. Então, recorre ao papel da atividade para realizar essa ação. O diálogo apresentado a seguir indica essa observação.

> **Maxwell:** Acho que tem que fazer uma representação para o problema.
> **Marta**: É
> **Maxwell**: Aqui vai ser uma equação do segundo grau. [Maxwell associa o movimento da bola a uma expressão matemática – equação do 2º grau].
> **Professor:** Como é, faça o desenho da sua compreensão.
> **Marta:** Faz um desenho Maxwell.
> **Maxwell:** Vamos colocar um jogador de vôlei, tem uma cesta, aí ele vai lançar a bola, ela cai, ela vai e cai na cesta. [Maxwell gesticula com as mãos a representação visual do saque e movimento da bola, depois desenha no papel essa representação].

O desenho realizado por Maxwell indica elementos do fenômeno que foi pensado por eles. Coloca a figura do jogador, a bola e uma cesta, além de descrever a trajetória da bola em direção cesta. Posteriormente, já definem que o problema trata de um conhecimento relativo à função quadrática e resolvem anotar a representação algébrica desse conhecimento, como observado na Figura 209.

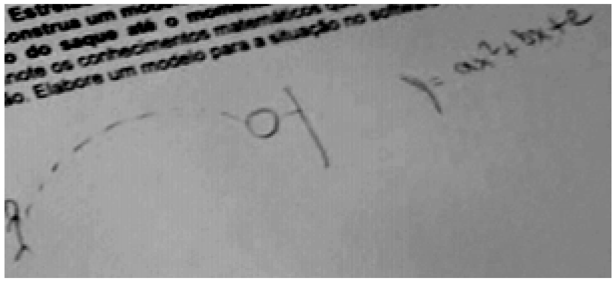


Figura 209 - Desenho realizado pela dupla 2 indicando o movimento da bola

A terceira dupla, na segunda atividade, não realiza um desenho para indicar a representação mental que fizeram do fenômeno, mas, no início da realização da atividade, eles discutem nesse sentido. Weldon destaca que o jogador está em uma situação de treino, indicando uma possível representação mental em forma de replay o fenômeno. Esse fato leva Lisa a representar por meio de gestos e movimento com as mãos a descrição do fenômeno. Ela descreve o movimento de subida e descida da bola. Tal ação é aprovada pelo seu parceiro de dupla que concorda com o modo de representação utilizado, indicando que realizaram a mesma compreensão do fenômeno, como indica o diálogo.

> **Weldon**: O jogador de voleibol vai treinar saque jornada nas estrelas.
> **Lisa:** Deixa eu fazer....vai ser assim. [Lisa tenta representar por gestos a descrição da trajetória da bola nesse tipo de saque].
> **Weldon**: É desde o início até atingir o solo.
> **Lisa:** Vai ficar: $\boxed{\mathbf{X^2 + 4X + 2}}$.
> **Weldon**: É negativo.

Valorizar uma representação em detrimento de outra

Durante a realização das atividades, as duplas elaboraram várias formas de representação para descrever os fenômenos que constavam nas atividades. No entanto, observamos que algumas características observadas a partir das habilidades mobilizadas quanto à valorização de uma forma de representação em detrimento de outras eram demonstradas pelos sujeitos. A seguir, apresentamos a Tabela 21, compondo essas habilidades e uma posterior discussão das características observadas.

Tabela 21 - Valorização das formas de representação

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Valorizar uma forma de representação em detrimento de outra.	X		X	X	X	X	X		
Adquirir conhecimentos a partir das formas de representação.	X			X	X	X	X	X	X
Entender que a partir da representação gráfica do modelo algébrico pode identificar casos da situação-problema.	X	X	X					X	

As características dessas habilidades foram evidenciadas em alguns momentos das atividades e estão sendo destacadas a partir de trechos de análise construídas pela ação das duplas investigadas.

A dupla 1, na segunda atividade, apresenta essas características, observadas quando os estudantes discutem sobre casos do modelo que elaboraram, utilizando apenas o papel e lápis. Um dos componentes da dupla reconhece que o software vai priorizar, através de suas formas de representação, elementos que em uma representação primária não é possível observar. Essa observação é apresentada a partir do diálogo entre os estudantes da dupla um.

Tedymar: Vamos supor que o garçom **A** atendeu no mês 20 pessoas, o garçom **B** atendeu no mês 10 pessoas, o garçom C......
Ado: O garçom **C**, 15 pessoas,
Tedymar: 15 pessoas.
Ado: O garçom **D**, 30 pessoas,
Tedymar: O garçom **E** vou colocar 18 pessoas e pro garçom F que teve o azar de não atender ninguém, zero pessoas, não atendeu ninguém. Bora lá.
Ado: Ta bom.

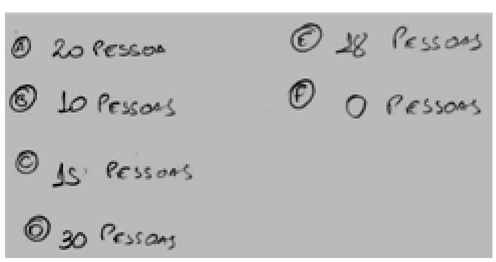


Figura 210 - Anotação da dupla para casos específicos de atendimentos dos garçons.

Nesse momento da atividade, Ado percebe que seria mais prudente o uso das representações oferecidas pelo software em relação ao que eles vêm realizando com o papel e o lápis, (ver Figura 210).

> **Ado**: Acho melhor fazer no computador, pois a gente joga tudo, fica melhor.
> **Tedymar:** Certo. A gente vai fazer a lei de formação. Fica **X = 350 + 0,1** x **t.** interpreta. O atendimento será no máximo 20.

A dupla 2 também apresenta características relativas à valorização de uma representação em detrimento de outra durante a realização das atividades. Após a realização da representação a dupla discute sobre a elaboração da atividade a partir da definição do modelo algébrico. Compreendem que o software Modellus apresenta recursos de representação gráfica que podem auxiliar na testagem do modelo, como mostra o diálogo.

> **Maxwell:** A gente monta a equação, estipula valores e faz um gráfico pra vê como é que fica a parábola dela.
> **Marta:** É
> **Maxwell:** Dá **X** elevado ao quadrado, né.
> **Marta**: É.
> **Maxwell**: Vezes **X** mais **C**, agora vai ter o valor, falta colocar.
> **Marta:** Os valores bota .....

No diálogo apresentado a seguir, a compreensão de Maxwell é que a representação de uma simulação tem mais significado do que a representação por meio de gráfico, mesmo ele observando casos e questões nesse segundo tipo de representação.

> **Maxwell:** Agora aqui as opções ela não está partindo do zero ela está menos dez ela vai partir daqui. Aí a gente vai fazer.
> **Professor**: Uma simulação?
> **Maxwell**: É a gente pode fazer uma animação para ver como é que fica. Deixa-me ver uma coisa aqui no gráfico.

Com relação à dupla 3, observamos na primeira atividade que eles trazem essa característica que estamos discutindo, já no início da primeira atividade. Eles conversam sobre a composição do modelo algébrico e em certo momento Weldon interroga Lisa pela necessidade de elaboração de uma animação, como se esse modo de representar a atividade tivesse mais valia.

Lisa: A variável independente agora vai ser o **X**. aí o limite será.... [apresenta conhecimento quanto à definição da variável independente].
Weldon: Vai fazer uma animação logo, não! [Weldon parece querer decidir por um modelo de representação oferecida pelo computador]
Lisa: É

Em outro trecho de diálogo que já foi discutido anteriormente e que também está ligado a esse tipo de valorização de uma representação em detrimento de outra, é também observado. Os estudantes por interferência do professor são orientados a indicar casos do modelo elaborado (validação). Então Weldon percebe que a representação gráfica oferece essa possibilidade em detrimento da representação algébrica. Já Lisa, percebe que a representação por tabela é a mais indicada.

Professor: Como é que vocês verificam um garçom.....
Weldon: Porque a gente colocou um valor fixo. Não é
Lisa: é o que a gente tinha pensado.
Professor: 350 é só um.....
Weldon: E vai aumentando 10% em cima do salário dele, aí o salário vai aumentando.
Professor: Se ele trabalhou e vendeu 500 reais por semana, quanto é o salário dele?, 5000 reais pronto. Quanto ele ganharia?
Weldon: O senhor quer que eu veja isso no gráfico.
Professor: Avalie isso aí.
Professor: 100 reais**.**
Lisa: Abre uma tabela:
Weldon: Está bem, vou selecionar.

Relacionar a representação de um fenômeno com um fato real

As habilidades mobilizadas quanto a associação do problema a fatos reais estão apresentadas na Tabela 22 e serão a partir de agora discutidas.

Tabela 22 - Relacionar a representação de um fenômeno como um fato real

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Reconhecer o tipo de efeito que o modelo deve apresentar.		X		X	X	X		X	
Trazer fatos da realidade para compor a representação a ser trabalhada na atividade.	X		X	X	X	X	X	X	
Reconhecer a atividade como representação de um fato real.	X			X	X	X		X	X

Um ponto comum verificado nas habilidades mobilizadas pelos sujeitos está na ação de relacionarem as atividades a fatos reais. Essa característica aparece em alguns momentos da realização das atividades, quando os sujeitos buscaram associar o problema com situações reais do cotidiano.

A dupla 2, na segunda atividade, faz esse tipo de relação quando Maxwell, logo no início da atividade traz para a discussão a idéia de como será o movimento da bola, ele alega a necessidade de uma representação que descreva o fenômeno que envolve o problema. Nesse caso, a situação começa a ser tratada como um fato real, como observado no diálogo:

> **Maxwell:** Vamos colocar um jogador de voleibol, tem a cesta, aí ele vai lançar a bola, ela cai, ela vai e cai na cesta. [Maxwell gesticula com as mãos a representação visual do saque e movimento da bola, depois desenha no papel essa representação].

Nessa mesma atividade, a dupla 3 faz um tipo de associação que está diretamente ligada à contextualização que construíram para a atividade. Eles associam o fenômeno que envolve o problema a um fato real explicando-o através da representação mental elaborada.

> **Weldon**: O jogador de voleibol vai treinar saque jornada nas estrelas.
> **Lisa:** Deixa eu fazer....vai ser assim. [Lisa tenta representar por gestos a descrição da trajetória da bola nesse tipo de saque].
> **Weldon**: É desde o início até atingir o solo.

Já com a dupla 1, esse tipo de associação ocorre também na primeira atividade, eles associam fatos do cotidiano ao problema. Essa observação é verificada em dois momentos na atividade. O primeiro é quando Tedymar em discussão com Ado precisa reforçar sobre o conhecimento associado ao cotidiano que está presente na situação:

> **Tedymar:** Sim, mas ai, evidentemente não tem. Mas quando vai pagar a conta, sempre tem os 10% do garçom. Tem que se construir. [Tedymar reconhece a necessidade de apresentar dados complementares ao problema]

E, o segundo é quando Tedymar reforça a relação da atividade com uma situação real para esclarecer de vez a Ado que está relutante quanto as decisões tomadas por ele para compor a atividade:

> **Tedymar:** Quando você vai a um restaurante, você paga a conta e mais 10% do valor da conta é somado como salário adicional para o garçom. Só que no caso, 10% de comissão por cada garçom. Só que no caso eu não vou atribuir esses 10%.....[A compreensão de Tedymar para o problema, agora é associada a um caso real vivenciado por ele no cotidiano].

Valorizar a forma de representação utilizada

Uma característica importante apresentada pelas duplas quando mobilizavam habilidades para solucionar o problema, aparecia quando ao utilizar o software reconheciam a necessidade de valorizar a representação que estavam construindo para o problema. A Tabela 23 apresenta algumas das habilidades mobilizadas.

Tabela 23 - Valorização das formas de representação

Habilidades	Atividade 1			Atividade 2			Atividade 3		
	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Compreender que ao visualizar mais de uma forma de representação pode chegar a um melhor entendimento do problema.	X	X	X	X		X	X		
Capacidade para obter efeitos de simulação através dos recursos oferecidos pelo software.				X			X		X
Reconhecimento das possibilidades para realizar efeitos que o software pode promover.				X	X				
Promover tipos de efeitos em uma simulação.				X					
Manipular o software para elaborar uma simulação do problema.				X		X			

Na discussão dessas habilidades, destacam-se ações da dupla 1 na segunda atividade. Os estudantes buscam no software valorizar a representação por simulação para o fenômeno, enriquecendo com detalhes a representação por simulação que escolheram para validar o modelo que elaboraram.

Os estudantes buscaram mostrar, por meio da representação, escolhida uma demonstração do fenômeno, portanto, incluíram elementos visuais que trouxeram de uma realidade para envolver a simulação. Algumas etapas são observadas nas análises e estão sendo apresentadas a seguir.

Após testarem e validarem corretamente o modelo algébrico que construíram, os componentes da dupla começam incluindo na simulação um objeto bola que vai indicar a partir de uma das equações selecionadas por eles a trajetória descrita pelo objeto. Posteriormente, definem a inclusão de uma figura de jogador, criando um cenário tipo quadra de vôlei, como observado na Figura 211:

Figura 211 - Tela de simulação do Modellus apresentando os objetos que farão parte da simulação.

As etapas posteriores são de enriquecimento dessa forma de representação escolhida por eles. Associam no software, o jogador a uma nova equação algébrica que vai representá-lo em movimento, ao lançar a bola. Ajustam esse novo modelo e o cenário que o envolve, explicando que ainda há outras possibilidades de melhora desse cenário que estão realizando para representar o fenômeno envolvido na atividade. Como observado na Figura 212.

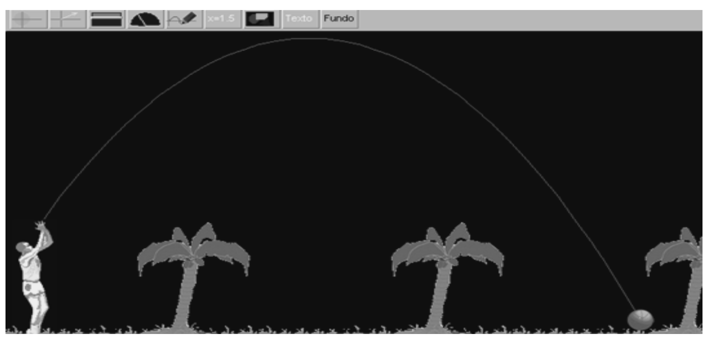


Figura 212 - Tela apresentando a simulação elaborada pela dupla para a atividade 2.

O diálogo de que eles participam nesse momento da atividade, é também uma clara prova do conhecimento deles as várias representações em torno do fenômeno.

Tedymar: Se a gente quiser ter uma realidade maior disso a gente diminui o número do passo [altera o passo para 1, buscando um movimento mais acelerado da simulação], a gente vai ter uma realidade mais próxima certo, deixa eu diminuir o número aqui, para voltar. Então essa é a solução do problema. Realidade mais próxima do jogador atirando uma bola fazendo um saque jornada nas estrelas, não é.
Ado: Ficou bom.
Professor: É, acho que podemos encerrar.

VII.5 – Análise da presença de fenômenos didáticos

Um ponto importante da pesquisa é a evidência, nas atividades, da influência dos fenômenos didáticos que são vivenciados nas relações de aprendizagem. Portanto, nos preocupamos em analisar essa evidência à luz da teoria das situações didáticas.

Um primeiro ponto é analisar os comportamentos verificados nos estudantes, relacionados ao contrato didático estabelecido na escola. Vários dos comportamentos observados nos estudantes, em diversos momentos, formaram barreiras para o trabalho com modelagem. Dessa forma, algumas evidências foram selecionadas, a partir do levantamento realizado nos documentos de análises e serão agora discutidas.

Contrato Didático e Modelagem Matemática

As pesquisas voltadas para compreensão da modelagem como estratégia de ensino (BASSANEZI, 2002; BEAN, 2001; BIEMBENGUT e HEIN, 2000; BLUM & NISS, 1991; BORBA, MENEGHETTI & HERMINI, 1997; BARBOSA, 2001), como estudos mais profundos, partiram de mudanças no contrato didático ou se promoveu um novo contrato, para se implementar esse tipo de experiência. Observamos que relatos de experiência sobre modelagem matemática (CAROLYN ENGLISH, 1996; BEAN, 2001; PONTE, 1992), informados na literatura, não trazem essa discussão quanto ao tipo de contrato estabelecido, fazendo crer que as experiências partiram do contrato didático já vivenciado com os estudantes. Esse é um fato que merece ser discutido, pois questões começam a ser percebidas. Será que, para se implementar modelagem matemática é necessário ajustes no contrato didático ou devemos estabelecer um novo tipo de contrato? Que tipos de regras do contrato didático vivenciadas na escola pelo aluno, influencia a nova situação escolar, a de modelagem? E quais delas impedem uma metodologia deste tipo?

Começamos a entender que a necessidade da negociação do contrato didático vai depender do tipo de experiência que se procura implementar. De outro modo, se discute a necessidade de capacitação de professores para trabalhar essa abordagem, o que em parte concordamos, pois nossa experiência vem apontando noutro sentido, quando ao se trabalhar um tipo de problema específico, tornou essa necessidade efêmera. Mesmo assim, concordamos que há a necessidade de que professores sejam trabalhados para entenderem o que é modelagem matemática, por ser um novo campo de ensino aprendizagem.

O embasamento científico desta discussão só poderá se configurar em novas pesquisas estabelecidas nesse gênero. Portanto, não nos cabe aqui afirmar categoricamente essa observação, pois ainda estamos em fase de conclusão da pesquisa, mas estes pontos são importantes nessa discussão e precisam ser investigados em estudos futuros.

Quando alguns relatos de experiência sobre modelagem matemática apontam para um tratamento dessa técnica dentro de um contrato didático já estabelecido, não diminui o seu caráter científico se comparado às pesquisas mais específicas. Compreendemos que esses relatos são decorrentes já da aplicação de situações de modelagem matemática em sala de aula, partindo dos conhecimentos que são apresentados nos estudos mais profundos.

Nosso trabalho com modelagem partiu do contrato didático que os estudantes vivenciaram. Dessa forma, a experiência nos fez perceber nuances desse contrato, que não são as mesmas verificadas nos documentos de orientação ao professor ou em seu discurso, pois os estudantes falam como se estivessem utilizando conhecimentos adquiridos no cotidiano e relacionando esse conhecimento ao adquirido na escola, portanto, ocorrendo em sentido inverso.

Um ponto que se destaca a partir dessa discussão é o fato de se afirmar que sempre se busca estabelecer no ensino uma relação do conteúdo estudado com fatos reais do cotidiano, como forma de enriquecer a aprendizagem. O trecho de diálogo observado a seguir procura trazer elementos para enriquecer essa discussão.

Ado: Esse percentual de 0,1 que você colocou aqui é em relação a que?
Tedymar: Esse é o 10% do garçom. Se tu pagar uma conta, tu vai ter 0,1 por cento.

Ado: Mas ele ta falando só o salário do garçom, o salário dele aí é só 350. Se você colocou esse 0,1 ele é em relação a quê?
Tedymar: Os 10% é do garçom?
Ado: Você tinha colocado em relação ao garçom. O problema não está pedindo isso?
Tedymar:: Sim, mas ele está pedindo da gente para usar conhecimentos matemáticos do nosso dia-a-dia.

O diálogo dos estudantes indica que contratos didáticos diferenciados foram trabalhados e que sendo a modelagem matemática uma metodologia de ensino que vai romper com algumas decisões de um contrato didático estabelecido. Demonstrou que Tedymar vivenciou bem essa situação, quando aceitou a quebra de contrato e se envolveu com os efeitos da modelagem matemática utilizada na situação-problema. Dessa forma, notamos que a modelagem deixa o aluno livre para confrontar suas novas decisões, com outros alunos oriundos de outros contratos, sobre as leis que foram instituídas. Nessa confrontação, percebe-se a quebra de contrato e a instituição de novas decisões que são tomadas em direção ao que a situação de modelagem (típica de situação adidática) propõe.

Pré-Quebra de Contrato X Modelagem

Dessa relação entre contrato didático e modelagem matemática, percebe-se que, quando se trabalham experiências com modelagem partindo de contrato didático já firmado, um fenômeno didático discutido por Brousseau (1986) se torna evidente, a pré-quebra de contrato. A modelagem vai exigir relações do aluno com o conhecimento, não estimuladas pelo professor. Esse fenômeno e essa relação serão também discutidos neste capítulo de análises.

Os contratos didáticos estabelecidos para a relação ensino-aprendizagem muitas vezes herdam orientações de textos escolares (livro didático) e documentos institucionais (das secretarias de educação a que o professor está vinculado). Nesses documentos, a orientação é que os conteúdos de matemática devem ser abordados de modo que os alunos façam associação com fatos reais, como também façam aplicações desse conteúdo em situações do cotidiano. Mas, a evidência é que esse fato pouco acontece, o professor em alguns casos não parece confortável diante dessa tarefa com relação a determinados conteúdos e situações, deixando de lado a necessidade de estabelecer a relação do conteúdo com o cotidiano, assim, ele como ator da situação, coloca em evidência a pré-quebra de contrato. Além disso, não é atribuição do aluno, em geral, acrescentar dados, nem construir modelos para tratar um problema completamente aberto.

Esse ponto que destacamos, aparece no material analisado. Verificamos que os alunos, para fugir de dificuldades com o problema, são forçados a evidenciar uma relação de aprendizagem que não viveram na escola. Observamos que, em algumas situações, eles não buscaram de imediato associar o problema a fórmulas ou equações, fato comum do contrato didático vivenciado nas escolas, exceto na atividade 2. Procuraram, sim, decidir constantemente sobre os elementos que devem ser apresentados como construtores do problema. Os estudantes não vivenciaram um contrato didático específico para esse tipo de problema completamente aberto que nós trabalhamos na pesquisa, que exige em algumas situações de análise a necessidade de relacionamento com o cotidiano. A evidência é que os estudantes foram envolvidos em uma pré-quebra de contrato estabelecida pelo professor. O trecho de diálogo a seguir traz um pouco dessa evidência.

> **Maxwell:** Mais o fixo**,** não, aí tu falasse do valor de hora extra, aí você tem o total de hora extra que ele trabalharia por mês.
> **Marta**: Hora extra.
> **Maxwell:** Aí você teria o total de hora extra e o total de salário por mês. Total das horas extras. Seria quanto mais quatro?
> **Marta:** Mais quatro.
> **Maxwell:** Ai a gente representa por **y1**. Quarenta **y,** mais a quantidade de horas. Aí tem que saber a quantidade de horas que ele trabalhou por mês. [Maxwell parece querer retornar a compreensão do modelo de salário como sendo: **Salário total = 40** x **Y** + **comissão**].
> **Marta:** É, como nós não sabemos como dar outra variável, não é a mesma variável.

A discussão estabelecida entre os estudantes mostra que estão envolvidos na construção de um modelo para a situação, seguindo pela decisão dos elementos construtores e composição de uma fórmula. Em nenhum momento, a discussão parece seguir especificamente no modo de ensino vivenciado na escola, em que uma fórmula existe para chegar a solução. No entanto, percebemos que há evidências de dois fenômenos didáticos na atividade de modelagem matemática, a pré-quebra de contrato e o contrato didático. A primeira é quando demonstram dificuldade por estar vivendo a experiência de uma atividade nova, a modelagem matemática, indicando que o contrato didático anterior experienciado por eles não contemplou essa modalidade de atividade, percebendo-se a pré-quebra de contrato. A segunda quando discutem as bases de construção do modelo algébrico, semelhante ao processo de resolução de problema, fato comum trabalhado por eles na escola.

Contrato Pedagógico X Situações de Modelagem

A idéia de contrato pedagógico, relacionada a modelagem, trazida para a análise do estudo, parte da consideração de que pontos importantes da interação estabelecida entre os sujeitos investigados e a relação com o saber que eles dominam, ficaram evidentes.

A partir da compreensão da proximidade entre contrato didático e contrato pedagógico discutida por Chevallard (1991) e, entendendo que alguns pontos podem ser discutidos nesse estudo quanto a essa relação (contrato pedagógico, contrato didático e modelagem), adentramos nessa consideração. Nossos sujeitos, ao trabalhar em duplas na realização das atividades, apresentavam em alguns momentos diferentes compreensões sobre a organização do conhecimento mobilizado para a situação. Esse é um fato que pode ter sido gerado a partir do contrato pedagógico vivenciado por cada um deles, seguindo a concepção de Chevalier & Briand (1995), pois pareciam ter participado de relações pedagógicas diferenciadas na escola. Essa evidência é realçada pelas duplas em argumentações discordantes, quando procuravam solucionar a atividade. Selecionamos algumas das falas dos estudantes para justificar tal análise.

<u>Dupla 1 atividade 1</u>:

Ado: O problema não está pedindo isso?
Tedymar: Sim, mas ele está pedindo da gente para usar conhecimentos matemáticos do nosso dia-a-dia.

<u>Dupla 2 atividade 1</u>:

Maxwell: Acho que está bom, pra estipular só o salário, **X = 40 . 2,** basta Interpretar. A gente vai estipular um valor para **y,** não é? Que é quatro, só é ver na tabela, ai o salário dele deve ser....
Marta: Não é bom estipular um salário fixo, por mês? [Discussão sobre o que cada um faz da sua responsabilidade].
Maxwell: Mas por mês ele trabalha oitenta horas. Não é quarenta não! Trabalha 20 por semana. Dá oitenta horas por mês. Aqui, olha, deu oitenta.

<u>Dupla 3 atividade 3</u>:

Weldon: Bota **x,** mais **x + 18...**.**x** a gente...
Lisa: Por que você está usando esse valor para idade?
Weldon: A maioridade, não é **x** anos, não vai aumentando, quando a gente quiser ver.

Contrato experimental e contrato didático para modelagem

A idéia de contrato experimental (SCHUBAUER-LEONI e GROSSEN, 1993), se apresenta em situações próprias de experimento, ocorre na relação sujeito e pesquisador sem que haja a intenção de se trabalhar um conteúdo curricular, pois a situação é puramente de pesquisa. O diálogo estabelecido entre os parceiros dessa relação se deve à realização do experimento.

Essa relação entre o contrato experimental e modelagem em alguns momentos da pesquisa ficou evidente. Notamos que ao estabelecer com as duplas de sujeitos um contrato experimental, houve uma influência deste tipo de contrato no comportamento dos sujeitos. No entanto, para cada sujeito a influência muda, que vai desde a inibição até a assumir uma postura de “ator” principal.

Apesar de envolvidos com esse novo tipo de contrato, que de certa forma incomodava os sujeitos, ficaram também evidentes os efeitos de contratos didáticos anteriores, que foram aparecendo durante o desenvolvimento da atividade. Portanto, achamos prudente evidenciar esses fatos que fazem referência à relação entre esses dois tipos de contratos com a atividade de modelagem. Seqüências de diálogo do material foram selecionadas e estão sendo apresentadas, indicando essa evidência.

<u>Atividade 1 Dupla 1</u> – Tedymar no início da atividade, quando se vê diante da filmagem, demonstra-se preocupado em apresentar uma boa postura e desenvolvimento, procura falar bastante alto como se estivesse preocupado em não estar sendo gravado, tenta tomar a iniciativa dos trabalhos interrompendo em algumas vezes a fala de Ado, entre outros aspectos. Logo no início dessa atividade, Ado tenta apresentar uma compreensão do problema e de imediato Tedymar o interrompe, como se quizesse apresentar-se ao trabalho.

> **Ado**: Aqui nesse problema.... É....
> **Tedymar**: A gente vai ter quer construir utilizando conhecimentos de matemática do dia-a-dia. O garçom recebe além do salário, uma porcentagem de 10%.

Tedymar afirma que para solucionar o problema deve "*fazer uso de conhecimentos matemáticos do dia-a-dia*". Esse posicionamento nos levou a seguinte questão: Por que não o conhecimento escolar? Nota-se que a expressão de Tedymar parece ter sido colocada pela evidência de que o problema traz elementos não comuns à abordagem que ele vivenciou na escola. Nota-se que a sua preocupação é quanto à necessidade de tomar algumas decisões e efetuar ações, fora do padrão de contrato didático que vivenciou. Ações estas que não são comuns àquelas que ele geralmente enfrentou na escola.

<u>Atividade 2 Dupla 2</u> – Marta ficou bastante inibida em saber que estaria sendo gravada e filmada em suas ações, de forma que sua fala foi um pouco travada. Constantemente, o pesquisador insistia para que a dupla de sujeitos falasse em tom mais alto, senão, não obteria sucesso com a gravação da fala dos mesmos.

> **Marta:** Acho que deveria ficar assim. O montante seria igual a.
> **Professor**: Por favor. Marta, fale mais alto, para poder gravar.
> **Marta:** Ta bom. Assim, elevado ao período.
> **Professor:** Não Marta do início.
> **Marta:** Seria assim, o montante, quanto ele vai apurar. O capital dele investido, multiplicado por cem que aqui no caso seria a porcentagem, mais a taxa que está sempre sendo elevado ao valor do tempo. O tempo que vai ser aplicado. Só que ai no caso, vai ser quando o menino já tiver com dezoito anos. Esse tempo aqui [apontando para a variável tempo].
> **Professor:** Hum, hum.

Marta: Mas ele vai verificar.... Investigar isso aqui no período.
Maxwell: Em qualquer período que a gente quiser saber.
Marta: Sim, em qualquer período. Então o valor da variável aqui, esse valor é que vai....
Maxwell: É que vai ser o valor da variável independente, a gente pode estipular então de 1 até 18, não é?
Marta: Aí você coloca o valor da variável em cima e não aqui, nos parênteses você coloca só a taxa de juros..... [pausa].
Professor: Vocês têm que falar alto, Marta gosta de falar baixinho não é Maxwell?
Maxwell: Ela é assim mesmo professor, mas na sala só o senhor vendo.

O contrato experimental estabelecido fez transparecer uma dificuldade em relação a Marta quando existiu a necessidade de apresentação de um conhecimento que ela dominava, oriundo da aprendizagem escolar. As bases desse conhecimento que ela apresenta, reflete nuances do contrato didático vivenciado na escola, quando o professor deve ter apresentado a fórmula do juro composto, que agora está sendo apresentada por Marta baseada nos dados da atividade.

<u>Atividade 2 Dupla 3</u> – Lisa parecia, o tempo todo, preocupada com a gravação, mesmo demonstrando ter domínio de conhecimento na atividade, interferia pouco e falava muito baixo. O trecho de diálogo, a seguir, apresenta o comportamento de Lisa, mostrando-se acanhada, falando pausadamente e dificultando a compreensão de Weldon sobre o que ela queria informar.

Lisa: A gente coloca o salário... O salário mais ... 350 mais.
Weldon: Como se fosse o salário mais uma... ehh... um bônus, como se fosse recebido por ele, um bônus. Pronto, o salário... O salário fixo, não é?... R$ 350.
Lisa: Mais, é 10%.
Weldon: 10% não é, como se fosse...
Lisa: 350. Vezes o percentual... vezes o **X.** [Falando muito baixo, Lisa vai informando uma expressão para indicar o modelo, $\boxed{\mathbf{350} + \mathbf{10\%} \times \mathbf{X}}$, onde o **X** será o valor do salário que é igual a R$ 350,00 mais 10% de um determinado valor].

Lisa, no início da atividade, revela o nervosismo comum que é observado em algumas pessoas quando são informadas que serão gravadas em suas ações. Mesmo assim, trabalha a atividade de modelagem (composição do modelo), cometendo erros de elaboração e consertando-os, mostrando que domina o conhecimento envolvido na atividade.

Contrato Diferencial X Contrato Didático em situações de Modelagem

A relação entre contrato diferencial (SCHUBAUER-LEONI, 1988) e contrato didático (BROUSSEAU, 1986) foi evidenciada na pesquisa em um trecho de diálogo com a dupla 1, no qual os estudantes foram alunos de um mesmo professor em um curso anterior, fato esse destacado por eles no final da terceira atividade. O diálogo apresentado e discutido a seguir mostra essa relação entre esses dois tipos de contrato:

> **Ado**: Aqui no problema não fala nada de porcentagem, Ted. [Ado verifica que na leitura do problema nada se falou de porcentagem].
> **Tedymar:** Sim, mas ai, evidentemente não tem. Mas quando vai pagar a conta, sempre tem os 10% do garçom. Tem que se construir. [Tedymar revela a necessidade de apresentar dados complementares ao problema]

Ado intervem na ação de Tedymar afirmando: "*Aqui no problema não fala nada de porcentagem*", esse comentário de Ado é bem característico de um contrato didático bastante comum que é estabelecido na escola, aquele de só trabalhar com as informações que estão sendo indicadas no problema. Ado tem outro modo de interpretação do problema, quando entende que o percentual para acréscimo no salário como está sendo decidido por Tedymar é uma informação que não aparece no problema. Evidenciando contratos didáticos diferenciados entre os parceiros de dupla.

Outro ponto que mostra o tipo de contrato didático estabelecido para Ado está relacionado à regras implícitas ao se trabalhar com resolução de problemas matemáticos. Brito Menezes (2007, p. 60) discute esse fato quando destaca a abordagem dada por Michel Henry (1991, p. 45) a algumas regras, denominadas "*implícitas*" por Chevallard (1988), estabelecidas para contrato didático ao se trabalhar a resolução de problema. Algumas dessas regras são apresentadas no trabalho de Brito Menezes (2007, p. 61), já apresentadas na fundamentação do estudo e que agora fazemos uso para enriquecer nossa discussão.

"*Para resolver um problema, é necessário encontrar os dados no enunciado. Todos os dados necessários devem estar no enunciado, que não deve conter* *dados supérfluos*”. Essa regra é evidente nas palavras de Ado ao destacar que no problema não se fala nada de porcentagem.

“*As questões colocadas não têm, em geral, nada a ver com a realidade cotidiana, mesmo se elas dão essa impressão, por meio de uma arrumação astuciosa. De fato, elas servem somente para verificar se os alunos compreenderam o assunto*.” Essa regra é verificada na ação dos sujeitos evidenciando o tipo de contrato que receberam. Ado, ao não reconhecer o problema como envolvido em uma realidade cotidiana, e Tedymar quando apresenta efeitos de um contrato diferente do estabelecido para resolução de problemas, pois, se caracteriza em lado oposto a essas regras estabelecidas, quando se dispõe a apresentar elementos construtores para o problema.

Situação Adidática X Modelagem

Brousseau (1986) destaca situação adidática como aquela em que o aluno é capaz de colocar em funcionamento e utilizar por ele mesmo, o conhecimento que está construindo até em situações que são desprovidas de qualquer contexto de ensino. Em nossa pesquisa utilizando modelagem, alguns fatos evidenciam que os alunos buscaram construir conhecimentos a partir de situações desprovidas de informações importantes que qualificam o contexto. O trecho de diálogo apresentado e as discussões pontuadas a seguir refletem esse ponto de análise.

> **Tedymar:** Quando você vai a um restaurante, você paga a conta e mais 10% do valor da conta é somado como salário adicional para o garçom. Só que no caso, 10% de comissão por cada garçom. Só que no caso eu não vou atribuir esses 10%.....[Observamos que o problema não traz essa referência observada por Tedymar].

Tedymar nesse momento da atividade é estimulado a buscar alternativas, ele a partir da situação de modelagem que enfrenta, contextualiza o problema com uma situação real e procura fechar o campo de aplicação da situação, para melhor definir a solução. Nota-se que o problema não aponta no sentido de compreensão de Tedymar, porém ele entende a necessidade dessa contextualização e insere no problema dados de uma situação real, destacando ações que demonstram estar envolvido com uma situação adidática.

Em outro ponto de diálogo com a mesma dupla ficou evidente essa relação entre situação a-didática e modelagem, aparecendo no envolvimento de normas estabelecidas em um contrato didático anterior. Como observado no seguinte trecho de diálogo:

> **Ado**: Esse percentual de 0,1 que você colocou aqui é em relação a que?
> **Tedymar:** Esse é o 10% do garçom. Se tu pagar uma consta, tu vai ter 0,1 por cento.
> **Ado**: Mas ele ta falando só o salário do garçom, o salário dele aí é só 350. Se você colocou esse 0,1 ele é em relação a quê?
> **Tedymar:** Os 10% é do garçom?
> **Ado:** Você tinha colocado em relação ao garçom.

Tedymar coloca em funcionamento o conhecimento que está construindo a partir da contextualização que ele realizou, típico de situação adidática, enquanto Ado segue pela lei de contrato didático que vivenciou, obedecendo aos procedimentos de fidelidade aos dados do problema. Geralmente, os problemas formulados nos livros textos não requisitam a necessidade de apresentar elementos construtores, cobrando dos estudantes ações como a realizada por Ado. Em nossa análise, nos livros já vêm claro o campo de aplicação, o detalhamento das grandezas envolvidas e as pistas das variáveis que deverão ser utilizadas. Isso é parte de um contrato didático estabelecido, como indicado nas ações de Ado para a atividade.

Educação Tecnológica X Contrato Didático

Esse é um momento em que se indaga sobre dois pontos. Um sobre a influência do computador na quebra de contrato didático e o outro referente a ferramenta computacional ser um instrumento de auxílio às relações didáticas.

O aluno com a inclusão da ferramenta computador no ensino, passa a receber novas relações de contrato didático, sob as quais estará mais liberto da presença do professor. Essa ferramenta poderosa passa a fazer parte da relação entre os pólos do triângulo das situações didáticas, chegando a omitir em certos casos, a presença do professor. O instrumento (computador) é muitas vezes uma espécie de tutor que entra no triângulo das situações didáticas na região intermediária Aluno-Professor, como destacado na Figura 213.

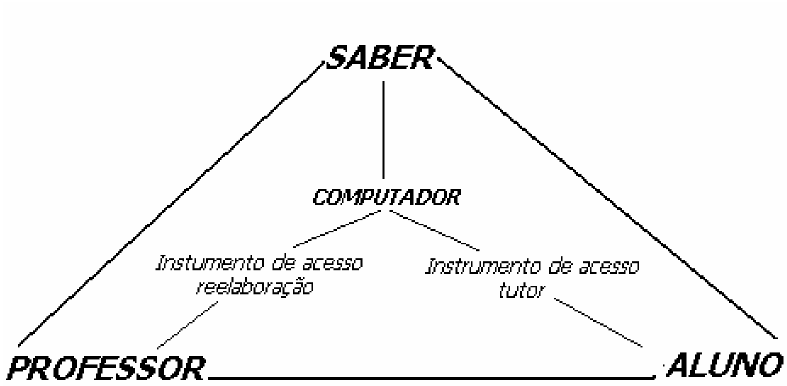


Figura 213 - Triângulo das situações didáticas com inclusão da ferramenta computacional.

Esse ponto de discussão foi evidenciado em nosso trabalho a partir das habilidades mobilizadas pelos estudantes, quando reconhecem no computador possibilidades importantes, próximas da função do professor, e quando observadas a partir do triângulo das situações didáticas, nos indica que essa ferramenta tem destaque por entrar na relação professor-aluno por um outro caminho, ligado exclusivamente ao saber. Entre essas habilidades destacamos o fato de reconhecerem possibilidades no software para simular uma situação-problema, verificado com as três duplas de estudantes e apresentados a seguir:

Caso 1

Ado: Acho melhor fazer no computador, pois a gente joga tudo, fica melhor.
Tedymar: Certo. A gente vai fazer a lei de formação. Fica **X = 350 + 0,1** x **t.** interpreta. O atendimento será no máximo 20.

Caso 2

Maxwell: Se ele não trabalhar hora extra, ganha só o fixo. [Maxwell entende que a variável independente será aplicada apenas à quantidade de horas extras, quando o funcionário trabalhar].
Marta: Se ele não fizer nenhuma hora extra.
Professor: Se ele trabalhar uma hora ganharia quanto reais a mais?
Maxwell: Devemos fazer um gráfico ou alguma coisa
Professor: Se você quiser fazer, para melhorar sua compreensão e visualizar melhor o problema.

Caso 3

> **Weldon:** Vai fazer uma animação logo, não! [Weldon parece querer decidir por um modelo de representação oferecida pelo computador]
> **Lisa:** É.

Validação X Contrato Didático em situação de modelagem

A validação de um conhecimento, segundo Pais (2001, p. 75) "*constitui-se por um conjunto sistematizado de argumentos elaborados com a finalidade de assegurar as condições formais de aceitabilidade de uma proposição ou de uma teoria científica*". Entendemos que a validação da construção de um conhecimento realizado pelo aluno é um momento de comprovação e reconhecimento. A validação é uma passagem que vai do saber escolar ao saber científico, ocorrendo tanto na relação Professor-Aluno, quando o professor valida a construção do aluno e na relação Aluno-Saber quando o aluno reconhece a validade da sua construção confrontando com o saber instituído. Nesse caso, a validação realizada pelo aluno passa a ter a conotação de prova como defendida por Ballachef (1990), quando compreende que uma prova é caracterizada como um processo de validação no contexto de sala de aula.

O trecho de diálogo apresentado traz fatos dessa relação:

> **Tedymar:** Aparece apenas uma pequena mudança no salário. O gráfico aqui está subindo, mostrando que não diferenciou muito. [Tedymar efetua uma validação da variação do valor do salário que está calculando].
> **Ado:** Não diferenciou muito. Mas eu estou interessado ai no que ele gastou com cada garçom. [Ado tem interesse em como verificar (comprovar no computador) agora o salário individual de cada garçom. Portanto, busca uma confirmação (prova)]. A gente deve mostrar na tela cada um.
> **Tedymar:** Deixa eu fechar esse daqui. [fechando o gráfico] vou abrir outro gráfico para ver o garçom B. ele teve 10 pessoas. [procurando comparar os valores de cálculo do salário dos garçons]

Encerramos este capítulo de análises, apresentando nossa compreensão da relação observada entre os fenômenos didáticos (BROUSSEAU, 1986) e as situações de modelagem matemática vivenciadas na pesquisa, verificam-se possibilidades de enriquecimento das discussões sobre essas duas correntes da Educação Matemática. No entanto, não houve possibilidade de nos aprofundarmos nessa relação, visto que os objetivos não contemplavam esse caminho. No entanto, fizemos destaque desse fato por estar evidente esse conhecimento a partir das análises do estudo. Nossa preocupação é que esses pontos em destaque necessitam ser melhor investigados.

Como contribuição para o debate, identificamos regras implícitas de um contrato didático anterior que se contrapõem ao uso de situações de modelagem no ensino. Entendemos também que a implementação de nossa investigação implicou no surgimento de novos conhecimentos quanto aos fenômenos didáticos observados, evidenciando ser a modelagem matemática uma técnica capaz para verificação desses fenômenos.

CAPÍTULO VIII – DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo discutiremos os principais pontos observados a partir da investigação sobre modelagem matemática como estratégia para a aprendizagem de função utilizando simulação computacional à luz das teorias e pesquisas da área.

VIII.1 – A natureza das atividades

As atividades realizadas neste estudo partiram do conceito de problema aberto (ARSAC et al., 1991) onde construímos três situações-problema. Como nos preocupamos em investigar a modelagem como metodologia de ensino, buscamos um tipo de problema que pudesse contemplar as etapas de modelagem discutidas na literatura.

A partir de uma análise nos livros texto da coleção de Dante (2004), Iezzi et al. (2004) e Smole e Diniz (2003), visualizamos alguns problemas do tipo aberto, que nos dispusemos a testar de modo informal com estudantes em sala de aula, onde atuo como professor. Observamos que esse tipo de problema estava mais indicado para o trabalho em situações de resolução de problemas, diferente do trabalho que buscávamos desenvolver. Dessa forma, percebemos que o tipo de problema necessário para a pesquisa, não foi encontrado nesses documentos. Portanto, partimos para elaboração dos problemas que necessitávamos e chegamos a construir o que passamos a chamar de problema completamente aberto - aquele que necessita de elementos construtores para a sua solução. As atividades envolveram esse tipo de problema, já apresentado na metodologia da pesquisa.

A proposta de trabalho, utilizando problemas completamente abertos, foi bastante satisfatória quanto às necessidades de conhecimento que buscávamos para verificar a modelagem como metodologia de ensino, revelando três pontos. O primeiro está no fato de que ao trabalharmos em um campo do conhecimento matemático no qual uma variedade de discussões ainda está sendo realizada, aventuramo-nos a utilizar uma proposta de atividade com problema do tipo completamente aberto que poderia nos deixar em dificuldades quanto aos conhecimentos envolvidos. Portanto, alguns resultados poderiam não constar nas leituras já realizadas sobre o assunto. O segundo é a escolha que fizemos em trabalhar uma proposta de modelagem dentro de padrões, próprios do ensino tradicional, com questões do cotidiano escolar do aluno. Nesse sentido, as atividades construídas revelaram conhecimentos significativos para o estudo. O terceiro foi o fato de verificar o favorecimento do software Modellus aos objetivos selecionados para a validação dos modelos e simulação dos problemas.

VIII.2 – O uso de software

Nossas investigações trazem evidências dos conhecimentos mobilizados pelos estudantes a partir das atividades, quando fizeram uso do software Modellus para simular no computador os problemas que foram investigados na pesquisa, que serão agora apresentadas.

Identificamos o favorecimento do software em dois sentidos de verificação de conhecimentos. Primeiro, evidenciamos conhecimentos e observações proporcionadas aos estudantes, que podiam ser repetidos, sem a necessidade de o fenômeno estar ocorrendo no mesmo instante da realização da atividade, como discutido por Bellemain, Bellemain e Gitirana (2006). De outra forma, há também a observação de que os conhecimentos mobilizados pelos estudantes eram realçados quando procuravam compor o modelo para as questões oferecidas.

Quanto à questão da simulação, o software permitia simular um fenômeno, repetidas vezes. Dessa forma, os estudantes recorriam a essa possibilidade de rever uma mesma simulação gerada no software para o problema trabalhado, ampliando a capacidade de entendimento dos estudantes, como discutido por Valpassos Pedro & Sampaio (2005).

A partir do tratamento dado às atividades, observamos discussões realizadas pelos estudantes que não são comuns sem a utilização de um software, pois são levantadas a partir dos efeitos produzidos pelos mesmos. Compreendemos que devemos mobilizar ações para incorporar essas vivências de sala de aula, como forma de expandir a compreensão dos alunos acerca de conhecimentos mobilizados em que só é possível observar a partir da manipulação de um software. Gitirana (1997) discute em sua tese de doutoramento esse fato, ao afirmar que o software serve como lupa para a observação do desenvolvimento dos alunos.

O software forneceu aos alunos facilitações para composição de modelos em que há dificuldade de realizar sem os recursos computacionais, como discutidos por Bellemain, Bellemain e Gitirana (2006) quando destacam que modelizações são complexas demais sem as reduções possíveis de simulações pré-programadas.

Os estudantes ficaram motivados em relação ao uso do software, quando verificavam os efeitos da situação simulada. Esse recurso tecnológico legitimou o trabalho dos estudantes, quando observamos que eles validavam suas construções e ampliavam a compreensão do conhecimento envolvido na atividade. Verificação esta também apontada por Valpassos Pedro & Sampaio (2005).

Sierpinska (2002) destaca uma dificuldade que os estudantes apresentam na ligação de conhecimentos sobre função em diferentes formas de representações. Nesse mesmo campo de observação, Selden & Selden (1992) discutem que, muitas vezes, os estudantes consideram difícil passar de uma rotina de representação a outra. Ao avaliar essas preocupações, observamos que os resultados encontrados em nosso estudo apontam em outro sentido, percebemos que a valorização da representação de um mesmo fenômeno em formas diferenciadas aparece com freqüência na pesquisa. Além da observação de que os estudantes também decidem em algumas situações, pela escolha da melhor forma de representar a atividade. Esse conhecimento indica que os estudantes ao utilizar um software que permite várias formas de representação aplicado em atividades envolvendo o conhecimento de função, minimizam as dificuldades apontadas por Sierpinska e demonstram que a dificuldade de passar de uma forma de representação a outra como destaca Selden & Selden, vai depender do tipo de trabalho que realizam. De fato, a navegação permitida entre diferentes representações permite ao aluno um melhor entendimento e resolução do problema envolvido.

Dugdale (1993) destaca o potencial de um software gráfico para compreensão sobre relacionamento funcional. Esse ponto, levantado pelo pesquisador, pode ser enriquecido a partir dos resultados da pesquisa, quando entendemos que o uso do Modellus nas atividades auxiliou o tratamento dado pelos alunos às situações utilizadas para modelagem sobre o conhecimento de função. O software Modellus permitiu uma melhor condução das atividades, pois os estudantes, quando relacionavam as situações a fatos reais, percebiam que essas situações poderiam ser representadas e simuladas no computador.

Outro ponto de discussão, em relação ao uso de um software em atividades de modelagem, é que verificamos algumas dificuldades com uma das duplas investigadas. Esse fato é interessante, pois a dificuldade residia na definição de escalas, quando os estudantes trabalharam as três atividades e também quando tentaram simular a situação-problema da segunda atividade. Indicando que apesar de não terem um domínio suficiente do software, mesmo assim, não houve prejuízo quanto ao domínio de conhecimento envolvido, para realizar as atividades, pois reconheceram que podiam buscar no software outras formas de representação que validasse o problema.

A decisão quanto a escolhas pelo modo de representar no computador uma situação também foi característica das demais duplas, quando entendiam que o software promovia diferentes representações de um mesmo fenômeno. Assim, os estudantes, ao reconhecer uma dificuldade quanto à forma de representação escolhida, procuravam por aquela que oferecesse uma maior segurança quanto à observação do conhecimento envolvido ou em outros casos, validasse o modelo elaborado para a situação-problema.

VIII.3 – O conhecimento de representação

Durante a realização da pesquisa, observamos uma forte presença do conhecimento de representação nas atividades. Essa observação é decorrente do fato de que função tem uma forte influência nesse conhecimento, como discutido em pesquisas já realizadas (KAPUT, 1986; EVEN, 1998). Essa discussão se tornou pertinente em nosso estudo quando evidenciamos que o conhecimento de função favorecia as representações do conhecimento envolvido nas situações-problema.

Duval (1993) discute que as representações semióticas podem ser múltiplas para indicar um mesmo objeto, trazendo para a análise do conhecimento a informação de que podemos converter formas de representações equivalentes.

Essa compreensão, destacada por Duval, é uma constante em nossas análises. Pois, os estudantes em vários momentos utilizavam os recursos oferecidos pelo software nesse sentido, o de converter um tipo de representação para verificar um conhecimento que não era possível observar de outro modo.

Um destaque importante quanto a esta discussão, já apresentada na análise dos resultados, é quando os estudantes valorizam uma forma de representação em detrimento de outra. Kaput (1993) traz essa discussão, indicando que algumas formas de representação podem ser mais úteis que outras em algumas situações. Nosso estudo evidenciou esse fato com bastante clareza. Os estudantes recorriam a um procedimento que melhor oferecesse a indicação do fenômeno. Quando não era possível, por falta de domínio do software, recorriam a outra forma de representação que estivesse mais próxima da desejada.

Vergnaud (1991), ao destacar a utilização das formas de representação para expressar o conhecimento, nos faz entender que esse é um forte caminho para se investigar como conhecemos ou como elaboramos nossos conceitos. Um destaque dessa informação é a demonstração dos estudantes na manipulação do conhecimento que dominavam durante a realização das atividades, claramente eles divulgavam esses conceitos e conhecimentos que também participavam das situações-problema.

Os resultados desse estudo apresentam informações quanto à influência das representações (GOLDEMBERG, 1992) para expressar o conhecimento (VERGNAUD, 1991). Algumas já discutidas, enquanto outras necessitam de uma maior determinação e dedicação para serem investigadas. Preocupamo-nos, nesse sentido, pois o compromisso em cumprir os prazos determinados para o estudo, não nos deu chance para um debruçar com mais carinho sobre esses importantes dados colhidos das análises, dentro do campo das influências das representações para expressar o conhecimento. O que permite um campo de investigação para aprofundamento desse estudo. Como forma de enriquecimento desse campo, percebemos que os estudantes discutiam sobre as estratégias que eram construídas para solução dos problemas, procuravam validar cada construção, identificavam o tipo de conceito verificado nas atividades, reconheciam os conceitos envolvidos no conhecimento mobilizado, confrontavam conhecimentos, entre outros.

VIII.4 – Fenômenos didáticos

Uma discussão sobre os fenômenos didáticos (BROUSSEAU, 1986) mereceu ser incluída no estudo, quando começamos as análises. Era recorrente a observação de influências de regras de contratos didáticos anteriores na ação dos estudantes ao realizarem as atividades. Percebemos que o trabalho não foi capaz de romper o contrato didático em alguns casos e que outros fenômenos também estavam envolvidos e tinham relação direta com a atividade de modelagem trabalhada na pesquisa. Dessa forma, a análise dos resultados trouxe informações sobre a relação existente entre o conhecimento de modelagem matemática e os fenômenos observados no campo da teoria das situações didáticas.

Não cabe aqui abrir uma discussão da relação sobre esses dois campos do conhecimento, a modelagem matemática e a teoria das situações didáticas. O que destacamos é o fato de nossa pesquisa ter nos levado a essa relação, por percebermos elementos comuns, os quais precisam ser investigados.

Achamos pertinente apresentar nesse estudo a relação entre fenômenos didáticos e a prática de modelagem, pela evidência nos documentos de análise das ações dos sujeitos. Apesar de as relações ficarem evidentes, não houve um aprofundamento desse campo por conta de não figurar em nossos objetivos essa necessidade. No entanto, compreendemos que essa relação merece ser melhor investigada a partir de novos estudos direcionados para esse fim.

Um ponto também levantado na investigação é essa nova relação existente entre a educação tecnológica e os fenômenos didáticos. Durante a fase de análise, trouxemos para a discussão o fato da inclusão do computador no triângulo das situações didáticas. Sendo o computador em nossa compreensão, uma ferramenta de acesso e reelaboração por parte do professor e por outro lado, observado como um tutor por parte do aluno (ver Figura 213).

Os fenômenos didáticos observados nas informações obtidas durante as análises das atividades nos levaram a identificar conhecimentos de situação adidática e pré-quebra de contrato e um caso de obstáculo didático (BROUSSEAU, 1986), que enriquecem a relação que destacamos anteriormente entre modelagem matemática e teoria das situações didáticas.

Nossa pesquisa, como contribuição para o estudo dos fenômenos didáticos, identifica regras implícitas do contrato didático vivenciado anteriormente que se contrapõem ao uso de situações de modelagem no ensino. Traz, portanto, para a discussão a relação entre os fenômenos didáticos com a prática de modelagem que merecem ser discutidos em novas pesquisas desse gênero.

Entendemos que a implementação de uma proposta de investigação do tipo que realizamos, implicou a partir do contrato experimental estabelecido, no surgimento de novos conhecimentos. Dessa forma, entendemos que o trabalho realizado foi bastante valorizado quando passamos a contemplar as nuances dos fenômenos didáticos sendo observados nos documentos de análises das ações dos sujeitos, evidenciando a modelagem matemática como uma técnica de forte influência para verificação desses fenômenos.

VIII.5 – Modelo

A compreensão de modelo (BADIOU, 1972; BIEMBENGUT, 1999; MACHADO, 2005; GRANGER, 1969; BIEMBENGUT & HEIN, 2003; BLACK, 1962) concebida pelos estudantes para cada uma das situações-problema, representado em forma algébrica por meio de expressões matemáticas (DUVAL, 1995), revelou o conhecimento de funções afim, quadrática e exponencial tratado nas atividades. A elaboração do modelo matemático (MACLONE, 1976; BASSANEZI, 2002; NISS, 1988) para representar cada situação-problema, utilizando modelagem matemática em simulação computacional evidenciou uma evolução dos estudantes nesse tipo de atividade, a cada realização de nova etapa da pesquisa.

Quando os estudantes reconheceram dificuldade em representar a situação por meio de simulação no computador, recorreram a outra forma de representação tabela ou gráfico.

Reconhecemos que os estudantes, ao se defrontarem com um problema do tipo completamente aberto, tiveram certo impacto, pois isso era novidade para eles. No entanto, trabalharam de forma a construir um modelo para o conhecimento envolvido em cada situação-problema.

VIII.6 – Modelagem

A modelagem matemática tratada como abordagem de ensino (BASSANEZI, 2002; BORBA, MENEGHETTI & HERMINI, 1997; BARBOSA, 2001; BEAN, 2001; BIEMBENGUT & HEIN, 2000) é uma atividade recente. Diversas pesquisas investigam esse conhecimento em diferentes aplicações: obtenção dos modelos (BASSANEZI, 2002); ação pedagógica (D'AMBROSIO, 1993; OREY, 2000); participação do aluno no processo de aprendizagem (BORBA, MENEGHETTI e HERMINI, 1997); compreensão crítica e de desenvolvimento de habilidades intelectuais (BARBOSA, 2001); desenvolvimento de habilidades de raciocínio (BEAN, 2001); problematização de conteúdos estatísticos (FRANCHI, 1993). Em nossa análise, observamos que esses estudos não se preocupam com o tipo de problema a ser trabalhado, apenas fazem referência aos problemas em que fenômenos da realidade estão envolvidos. Dessa forma, o caminho que escolhemos para o desenvolvimento da pesquisa partiu da seguinte decisão, trabalhar no sentido das investigações já realizadas ou abordá-la dentro do campo de uma matemática mais tradicional. Escolhemos a segunda opção e caminhamos no sentido de apresentar uma nova proposta de trabalho com modelagem matemática, a partir de problemas do tipo completamente aberto, modificados de problemas normalmente utilizados em livros, nos quais aproveitamos o contexto e retiramos todos os valores e definições de grandezas envolvidas.

Nossa discussão é no sentido de que na sala de aula o professor precisa iniciar a abordagem de modelagem matemática partindo da realidade vivida pelos alunos, utilizando problemas comuns que precisem apenas de pequenas modificações para esconder os elementos construtores e assim mobilizar nos estudantes habilidades para modelar. Essa, então, seria uma passagem para aplicações dessa nova metodologia de ensino que vem sendo investigada como modelagem matemática.

Essa escolha nos fez reconhecer que a construção do tipo de problema completamente aberto foi essencial para a proposta a qual nos aventuramos. Notamos que o impacto sentido pelos estudantes em relação à modelagem ou com relação ao tipo de problema pouco foi considerado. Os estudantes trabalharam de forma a aplicar os conteúdos matemáticos exigidos como se tivessem sido requisitados para trabalhar nesse sentido. No entanto, quanto ao tipo de problema houve certo receio após uma leitura inicial, pois percebiam a ausência de elementos construtores nos problemas, que logo era sanado, pois se aventuraram a solucioná-los. A ausência dos elementos construtores os forçou à apresentação desses elementos e reconstrução do problema, deixando-os mais em prontidão para apresentar solução às atividades.

A modelagem matemática não se mostrou complexa, uma vez que os problemas do tipo completamente abertos elaborados para a pesquisa tiveram uma forte influência na cobrança de conhecimentos dos estudantes para realizar as atividades, proporcionando ações para desenvolver modelos matemáticos.

Entendemos que a modelagem matemática colaborou como metodologia no seguinte sentido: motivou os estudantes a aplicarem os conhecimentos que dominam, foi eficaz na adaptação ao tipo de problema completamente aberto que utilizamos, por emergir compreensões das ações dos sujeitos a partir dos fenômenos didáticos observáveis e por gerar habilidades nos estudantes para modelar.

Em nossa pesquisa, observamos que a atividade de modelagem despertou motivação dos estudantes, promoveu o relacionamento do conhecimento com fatos da realidade, houve valorização da aprendizagem, resgate de conhecimentos e estímulo ao desenvolvimento de habilidades. Parte desses conhecimentos reforça o que afirma Bassanezi (2002), quando ressalta que as atividades de modelagem ampliam os conhecimentos dos estudantes elevando a sua maneira agir e pensar.

A forma de investigação realizada para a pesquisa demonstra possibilidades de uso da modelagem matemática como metodologia de ensino para tratar do conhecimento de função, a partir do uso de problemas completamente aberto.

VIII.7 – O tipo de problema trabalhado

Nossa proposta de pesquisa utilizando problemas do tipo completamente aberto trouxe para as atividades de ensino envolvendo modelagem matemática, novas situações de aprendizagem. Um fato é que vivenciamos atividades de modelagem sem informar previamente aos estudantes do que se tratava, pois reconhecemos que essa informação não se fazia necessária, mesmo com a proposta utilizando um tipo de problema não conhecido dos estudantes. No entanto, observamos que a atividade se assemelhava a uma situação comum de sala de aula. O importante também é que trabalhamos a matemática no contrato didático que os estudantes vivenciaram na escola sem a necessidade de estabelecer novas regras nesse contrato já firmado. Pois, o que se discute é que os problemas para modelagem geralmente devem estar relacionados a temas que proponham questionamentos do meio social como é discutido por Skovsmose (2001). E dessa forma, trata-se com os estudantes sobre esclarecimentos das propostas de modelagem.

CAPÍTULO IX – CONSIDERAÇÕES FINAIS

IX.1 – Conclusão

Nosso estudo, ao investigar a abordagem de função em situações de modelagem, evidenciou que algumas habilidades para modelar são específicas desse tipo de abordagem, e outras são comuns àquelas tratadas nos livros-didáticos.

Verificamos que o tratamento dado à aplicação do conhecimento de função utilizando um tipo de problema em que o estudante constrói o contexto, trouxe para a situação elementos do cotidiano, como é típico em situações de modelagem. Verificamos também que o contexto utilizado pelos estudantes, apesar de semelhanças com aqueles explorados em situações-problema contidas nos livros didáticos, eram envolvidos com propostas mais elaboradas e bastante discutidas, quando requisitadas para a situação.

Os resultados do estudo permitem indicar uma nova forma de abordar o trabalho com modelagem matemática. A partir do uso de problemas do tipo completamente aberto, constituídos de conhecimento matemático como os vivenciados em sala de aula, sem a presença dos elementos construtores.

O comportamento dos estudantes diante das atividades de modelagem utilizando o software Modellus para tratar do conhecimento de função, da forma como foi oferecida, trabalhando com pares de alunos, mostrou-se adequada. Os estudantes adaptaram-se bem ao trabalho, mesmo sem a prévia informação do tipo de atividade que iriam participar.

No diálogo entre estudantes observado nas análises, verificamos conhecimentos e questões que alimentam o debate sobre a forma de trabalho com modelagem matemática. As atividades nos levaram a pensar em questões como: Será que a modelagem matemática pode ser explorada em sala de aula utilizando apenas esse tipo de problema completamente aberto? Que dificuldades seriam observadas em atividades desse tipo sem o uso de um software? Sem o uso do software que habilidades seriam mobilizadas? Isto é importante, por entendermos a influência que esse tipo de problema pode gerar em sala de aula.

Um ponto em destaque na pesquisa é a observação de que as atividades resgataram ricas informações sobre os fenômenos didáticos que envolvem as relações de ensino aprendizagem. Apontando para questionamentos que merecem ser investigados entre modelagem e teoria dos fenômenos didáticos. Como as apresentadas a seguir:

- Foi recorrente a observação da influência de contratos didáticos anteriores na ação dos estudantes para realizar as tarefas.
- Percebemos nas análises das atividades que os fenômenos didáticos tinham relação com os processos de modelagem utilizados pelos estudantes no desenvolvimento da investigação. Sendo bastante significativa essa relação.
- Identificamos regras implícitas do contrato didático vivenciado anteriormente que se contrapõem ao uso de situações de modelagem no ensino.
- A modelagem matemática quando trabalhada com problemas do tipo completamente aberto se torna uma técnica de forte influência para verificação dos fenômenos didáticos.
- A modelagem matemática colaborou por trazer compreensões das ações dos sujeitos a partir dos fenômenos didáticos observados.
- O tipo de contrato didático trabalhado na escola parece gerar impedimento quanto à implementação de atividades de modelagem.

Quanto à mobilização de novas habilidades, destacamos aquelas que o tipo de problema requisitou dos estudantes diante da ausência dos elementos construtores, nas atividades 1 e 3, como: definir o campo de conhecimento matemático a utilizar, verificar a relação do conhecimento envolvido com outras áreas do conhecimento, definir as grandezas envolvidas, atribuir valores para as grandezas, delimitar o alcance da solução apresentado ao problema, efetuar a seleção das variáveis a serem utilizadas como forma de equacionar o problema, apresentar um modelo matemático para representar o problema, buscar a validação do modelo construído para a solução.

A dificuldade no processo de validação que é discutida em algumas pesquisas (BASSANEZI, 2002; BARBOSA, 2001; BIEMBENGUT & HEIN, 2000) foi minimizada com a presença do software Modellus, pois os estudantes através das representações oferecidas nesse software buscavam validar o conhecimento que elaboravam para a situação, escolhendo a melhor forma de representação para validar o modelo construído.

Os resultados do estudo, em parte vêm confirmar as pesquisas já realizadas por diversos pesquisadores (BASSANEZI, 2002; BORBA, MENEGHETTI & HERMINI, 1997; BARBOSA, 2001; BEAN, 2001; BIEMBENGUT & HEIN 2000; BARBOSA, 2001; BEAN, 2001; FRANCHI, 1993) quando salientam as potencialidades do trabalho com modelagem como estratégia de ensino, indicando para esse tipo de atividade o desenvolvimento de novas habilidades, envolvimento com a contextualização do problema, relacionar o conhecimento com fatos da realidade, valorização da aprendizagem, resgate de conhecimentos, entre outras.

IX.2 – Sugestões para novos estudos

Partindo dos resultados obtidos em nossa pesquisa trazemos para a discussão sobre a abordagem de modelagem como estratégia de ensino, pontos e questões que merecem serem investigados:

- Será que as experiências com modelagem matemática devem partir do contrato didático vivenciado pelos estudantes ou deve-se promover modificações nesse tipo de contrato?
- Que regras do contrato didático vivenciadas na escola pelo aluno, influenciam essa nova abordagem de ensino, a modelagem?
- Que tipo de problema deve ser explorado em sala de aula sem discutir modificações nas regras de contrato didático vivenciado pelos estudantes?

- É possível se trabalhar atividades de modelagem partindo de problemas do tipo completamente aberto em sala de aula sem utilização de um software?

Sugerimos esses pontos para investigação, a partir da implementação de atividades envolvendo modelagem matemática na sala de aula, fazendo uso de problemas do tipo completamente aberto, para verificar o nível de alcance dos mesmos sem o uso de software.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, A. "*Episódios da História Antiga da Matemática*". Trad. J. B. Pitombeira de Carvalho. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2002.

ALMOULOUD, S. A. Fundamentos da Didática da Matemática e Metodologia de Pesquisa. Caderno de Educação Matemática, vol. III, PUC-SP, 1997.

ARSAC, G., et. Al., Probleme ouvert et situation-problème. Presses Universitaires de Lyon: Franca, IREM, 1991.

BACHELARD, G., *A formação do Espírito Científico*. São Paulo: Contraponto, 1996.

BADIOU. A. *Sobre o Conceito de Modelo*. Librairie François Maspero, Paris, Editorial Estampa, Lda., Lisboa, 1972.

BARBOSA, A. C. M. "Uma Introdução ao Estudo de Funções Utilizando Softwares Educativos*". Boletim Gepem*, Rio de Janeiro: Seropédica, Fev-Jul, n. 42, 2003.

BARBOSA J. C. "*Modelagem na educação Matemática*: Contribuições para o debate Teórico". In: Anais 24ª ANPED, Rio de Janeiro, 2001.

BASSANEZI , R. C. "*Ensino*-Aprendizagem *com Modelagem Matemática*". São Paulo: Contexto, 2002.

____________. "Modelagem Matemática". DYNAMIS – Revista Tecno-Científica. Universidade Regional de Blumenau. V. 2, n. 7, p. 55-80. 1994.

BASSANEZI, R. C. & FERREIRA, JR, W. "*Equações diferenciais com aplicações*". São Paulo: Harbra, 1988.

BEAN, D. "*O que é modelagem matemática?*" In: Educação Matemática em Revista. São Paulo, SBEM. ano 8, n. 9/10, p. 49-57, abril, 2001

BERGAMINI, D. "*Mathematics*" In: (Time/life Series), New York: Time, 1963.

BELLEMAIN, F., BELLEMAIN, P. M. B. & GITIRANA, V., *Simulação no ensino de matemática: Um exemplo com Cabri-Géometrè para abordar os conceitos de área e perímetro. III simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006.*

BEILLEROT, J. *Le rapport au savoir: une notion en formation*. In: BEILLEROT, J., BOULLET, A. BLANCHARD-LAVILLE, C. & MOSCONI, N. *Savoir et Rapport au Savoir.* Paris, Editions Universitaires, 1989.

BILLY, M. et al., *Entre Situation Didactique Situation a-didactique: regard de l'éleve ou regardu technicien?* Repères-IREM, Nº 19, Avril, Topiques éditions, 1995.

BIEMBENGUT, M. S. & HEIN, N,. "*Modelagem matemática no ensino"*. São Paulo: Contexto. 2000.

BIEMBENGUT, M. S. & HEIN, N. "*Principios de metamodelagem matemática*". II SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Santos-SP. 2003.

BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem Matemática & Implicações no Ensino Aprendizagem de Matemática*. Blumenau: Editora da FURB, 1999.

BLUM, W. & NISS, M. "*Applied Mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics instruction".* Educational Studies in Mathematics, Dordrecth, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

BLACK, M. "*Models and Metaphors: studies in language and philosophy".* New York: Cornell University Press, 1962.

BORBA, M. "*Students understanding of transformation of functions using multirepresentational software*". Tese de Doutoramento, Cornell University, Ithaca, New York, 1993. (Publicada pela Associação de Prof. de Matemática de Portugal, 1995).

____________. "Calculadora gráficas e educação matemática". Série Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1999.

____________. "Computadores, representações múltiplas e a construção de idéias matemáticas" In: *Bolema*, ano 9, especial 3, p. 83-101, UNESP, Rio Claro, 1994.

BORBA, MENEGHETTI e HERMINI, "*Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas*". In: Educação Matemática em Revista. São José do Rio Preto, SBEM, n. 3, p. 63-70, 1997.

BOYER, C. B. "*História da Matemática"*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRITO MENEZES, A. P. de A., *Contrato Didático e Transposição Didática: inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do ensino Fundamental*. Tese de doutoramento UFPE 2006.

____________., *Contrato Didático e Transposição Didática: inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do ensino Fundamental*. Tese de doutoramento UFPE 2006.

BROUSSEAU, G. *Ingéniere Didactique*. D'un problème à l'étude à priori d'un situation didactique, deuxiéme école d'étude de didactique des mathématiques, Olivete. 1982.

___________. *Le contrat didactique: Le mileu*. In: *Recherches en Didactique des Mathematiques*, nº 9 (3), p. 309-336. 1988.

___________. *Fondememts et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques*, V. 7, Nº 2. Grenoble, 1986.

BUCK, R. C. "Functions", In: E. G. Begle & H. G. Richey (Eds), *Mathematics education, the 69th yearbook of the National Society for the Study of Education.* p. 236-259, Chicago: University of Chicago, 1970.

CAROLYN ENGLISH. "Modelling for the Millennium". In: *Mathematics for the new millennium: what needs to be changed and why*?. Mathematical Sciences Group Institute of Education. Nuffield foundation, p. 9-11, October, 1996.

CÂMARA DOS SANTOS, M. *A didática da Matemática.* Notas de aula (mimeo). ME-CE, UFPE, 2001.

___________. "Um exemplo de situação-problema: o problema do bilhar". In: *Revista do Professor de Matemática*, SBM. n. 50, Out/Nov, São Paulo, 2002.

___________. *Le rapport au savoir de l'eiseignant de mathématique en situation didactique: une approche par l'analyse de son discours*. Tese de Doutoramento, Université Paris-X. 1995.

CHARLOT, B.. *Da Relação com o Saber: Elementos para uma Teoria*. Porto Alegre: Artmed, 2000.

CHEVALIER, M.C. & BRIAND, J. *Les Enjeux Didactiques dans l'Enseignement des Mathématiques.* Paris: Hatier, (1995)

CHEVALLARD, Y. La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La pensée sauvage, 1985.

___________. *La Transposition Didactique: Du Savoir Savant au Savoir Ensigné*. Grenoble, La pensée Sauvage. 1991.

___________. *Sur la notion de temps didactique*. *IVème École d'Eté de Didactique des mathématiques.* 1986.

___________. *Sur lánalyse didactique: deux études sur les notions de contrat e de situation*. Publication de I´Irem d`Ais Marseille, 14. 1988.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. & GASCÓN, J. *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.* Porto Alegre: Artmed, 2001.

DAMM, R. F. “Registros de representação”. In: Educação matemática: uma Introdução. São Paulo: EDUC, Série trilhas, p.135-152, 1999.

D’AMBROSIO, U. “*Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática”***.** 2. ed. UNICAMP, São Paulo: Summus, 1986.

____________. “Etnomatemática: um programa a educação matemática.” revista da Sociedade Brasileira de Matemática. Blumenau: SBEM, Ano 1 (p.5-11) 1993.

DANTE, L. R. “*Matemática”.* Volume I. Ensino Médio, São Paulo: Ática, 2004.

DE CORTE, E. & VERSCHAFFEL, L. “*Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: a teaching experiment with fifth graders”*. Journal for Research in Mathematics Education, v. 28, n. 5, p. 577-601, 1997.

DIEUDONNÉ, J. “O método das Coordenadas e o Conceito de Função”. *Educação e Matemática.* n. 15, p. 10, Lisboa, Portugal. 1990.

DOCA, R. H., BISCUOLA, G. J. & VILLAS BÔAS. “*Tópicos de física*”. 10. ed. São Paulo: Saraiva, 1992.

DREYFUS, T & EISEMBERG, T. “The function concept in college students: Linearity, smoothness, and periodicity”. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, v. 5, p. 119-132. 1983.

DUGDALE, S. “*Green Globs: A* microcomputer *application for graphing [computer program]*”. Sunnydale, New York: sunburst communications, 1993.

DUVAL, R. “Registres de representation sémiotique et fonctionnementes cognitif de la pensée”. Annales de didactique et Sciences Cognitives, v. 5. IREM-ULP, Strasbourg, p. 37-65, 1993.

____________. “Sémiosis et pensée humaine. Registres semiotiques et apprentissages intellectuels”. Peter Lang. S.A. Suisse: Editions scientifiques européenns, p. 1-14, 1995.

EVEN, R. “Factors involved in linking representations of functions”, *Journal of Mathematical Behavior*, v. *17*, n. 1, p.105-121. 1998.

FILLOUX, J. (1974). *Du Contrat Pedagogique*. Paris: Dunod.

FRANCHI, A. *Onde está o problema?* Educação Matemática em Revista – Séries Iniciais. SBEM, Nº 3, 1994.

FIORENTINI, D. SOUZA Jr, A. J. de S. & MELO, G. F. A. “Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos”. In: C. M. G. Geraldi, D. Fiorentini & E. M. de

A. Pereira (orgs.). *Cartografias do Trabalho Docente: Professor(a)-pesquisador(a)*. Campinas: Mercado de Letras, 1998. p 307-305.

FREUDENTHAL, H. “Variables and functions”. In: G. Van Barnveld & H. Krabbendam (Eds.), *Conference on functions* (Report 1, p. 7-20). Enschede, The Netherlands: Foundation fo Curriculum Development. 1982.

FRANT, J. B. “As equações e o conceito de função”. In: Boletim Gepem n. 42 Fev/Jul, Rio de Janeiro: , Seropédica, 2003.

FRANCHI, R. A. “A modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos de engenharia”. Rio claro, 1993. 148p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Instituto de Eurociências e Ciências Exatas, UNESP.

GRANGER, G. G. “A razão”. 2ª ed. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1969.

GRANJA, B. A. & GITIRANA, V. “Abordagem de Funções: Uma Análise de Livros-Didáticos para o Ensino Médio”. Anais do V EPEM, Recife: 2000.

GRAVINA, M. A. “O quanto precisamos de tabelas na construção de gráficos de funções” In: *Revista do Professor de Matemática*, SBM. n. 17, 2º semestre, São Paulo, 1990.

GOMES FERREIRA, V. G. “*Exploring Mathematical Functions through Dynamic Microworlds”*, a PhD Thesis submitted in October, 1996 at Institute of Education, University of London, 1997.

GOLDEMBERG, P., LEWIS, P. & O’KEEFE, J. “Dynamic representation and the development of a process understanding of function”. In: G. HAREL and Ed. Dubinsky, (Eds.), *The Concept of Function - Aspects of Epistemology and Pedagogy,* M.A.A. Notes, v. 25, p. 235-60, 1992.

GOLDENBERG, P. “Mathematics, metaphors and human factors: mathematical, technical and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions”. *The Journal of Mathematical Behavio*r, v. 7, n. 2, p.135-73, 1988.

____________. “The difference between graphing software and educational graphing software”. In: W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Washington DC: Mathematical Association of America. 1990.

GOLDIN, G. A. *The PME Working Group on Representation*, Proceedings of PME 16, v. I, p. 11. 1992.

HOUAISS, A. VILLAR, M. S. & FRANCO, F. M. M. HOUAISS – “*Dicionário da Língua Portuguesa”*. Objetiva, 2001.

HENRY, M. *Didactique des Mathématiques: sensibilizations à la didactique en vue de la formation initiale dês ensignants de mathématiques. Laboratoire de Mathématiques*. IREM, Besançon, 1991.

HERSHKOWITZ, R. e SCHWARZ, B. "*Unifying cognitive and sociocultral aspects in research on learning the function concept"*, in: anais do XXI PME, v. 1, p 148-164, Lahti, Finlândia, 1997.

IEZZI, G., DOLCE. O., DEGENSZAJN, D. et. al. "*Matemática Ciências e Aplicações"***.** 2. ed., coleção. Matemática: ciência e aplicações, vol. 1, São Paulo: Atual, 2004.

JONNAERT, P. & BORGHT, C. V. *Criar condições para aprender: o sócio construtivismo na formação de professores*. Porto Alegre: Artmed, 2002.

JANVIER, C. "Approaches to the notion of function in relation to set theory". In: G. Van Barnveld & H. Krabbendam (Eds.), C*onference on fuctions* (Repport 1, p. 114-124). Enschede, The Netherlands: Foundation for Curriculum Development, 1982.

____________. "Constructing the notion of variable using history and bottles". In: J. Moser (Ed.), *Proceedings of the sixth annual meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Madison*, WI IGPME-NA.1984.

____________. "Representation and understanding: the notion of fuction as an example". In: C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. p. 67-72, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 1987.

JAPIASSU, H. & MARCONDES, D. M. "*Dicionário Básico de Filosofia"*. 3ª ed, Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1996.

KAPUT, J. "Research on Mathematics Teaching and Learning". New York: Macmillan, p. 515-56. 1992.

____________. "The urgent need for proleptic research in the representation of quantitative relationships". In: *Integrating Research on the Grafical Representation of Functions*, (Ed.). T. Romberg, E. Fenema & T. P. Carpenter. Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates publishers, p. 279-312, 1993.

____________. "Information technology and mathematics: opening new representational windows". *Journal of* Mathematical *Behavior*, v. 5, n. 2, p. 187-207, 1986.

KLEINER, I.. "Evolution of the function concept: A brief survey". The College Mathematics Journal, v. 20, n. 4, p. 282-300. 1989.

LEINHARDT, G., ZASLAVSKY, O. & STEIN, M. “Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching”, *Review of Educational Research*, v. 60, n. 1, p. 1-64. 1990.

LOPES et al., *Resolução de problemas: observações a partir do desempenho dos alunos*. Educação Matemática em Revista – Séries Iniciais. SBEM. Nº. 3, 1994

MEDEIROS, K. M. *O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula*. Educação Matemática em Revista. SBEM. Nº 9/10, Abril, 2001.

LIMA, P. F. (coord). “Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio”. PNLEM/2005: Matemática. Brasília: MEC, SEMTEC, FNDE, 2004.

MACLONE, R. R. “Mathematical Modelling – The art of applying mathematics, in Math”. Modelling (Andrews-McLone), London: Butterwords, 1976.

MAGINA, S. “Investigating the Factors Which Influence the Child’s Conception of Angle” – Tese de Doutoramento, Institute of Education, University of London. 1994.

MALIK, M. A. “Historical and pedagogical aspects of the history of function”. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, v. 11, n. 4, p. 489-92. 1980.

MARKOVITS, Z., EYLON, B. S. & BRUCKHEIMER, M. “Functions today and yesterday”. For the Learning of Mathematics, v. 6, n. 2, p. 18-28, 1986.

MARKOVITS, Z., EYLON, B. S. & BRUCKHEIMER, M. “Dificuldades dos alunos com o conceito de função”. In: *As Idéias da* Álgebra. trad. Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1994.

MARIOTTI, M. A., LABORDE, C. & FALCADE, R. “Function and graph in dgs environment”. PME, v. 3, p. 237-44, 2003.

MEIRA, L. “Significados e modelagem na atividade algébrica”. In: Boletim GEPEM, n 42: Artigos sobre Educação Matemática. Rio de janeiro, fev/Jul, p. 37-45, 2003.

NICHOLAS, C. P. “A dilemma in definition”. American Mathematical Monthly. p. 762-768, 1966.

NISS, M. (Ed.) Theme group 3: Problem solving, modelling, and applications. In A. Hirst & K. Hirst (Eds.), Proceedings of the sixth International Congress on Mathematical Education. Budapest, János Bolyai Mathematical Society, p. 237-252, 1988.

____________. “O papel das aplicações e da modelação na matemática escolar”. In: *Educação e Matemática*, Lisboa, n. 23, p. 1-2, Jul/Ago, 1992.

NASCIMENTO, R. A. Um estudo sobre obstáculos em adição e subtração de números inteiros relativos: Explorando a reta numérica dinâmica. Dissertação de Mestrado UFPE, Recife: 2002.

OREY, D. C. Ethnomathematics as Pedagogical Action. California State University, Sacramento, USA, 2000.
http://www.csus.edu/indiv/o/oreyd/papers/bookcontentes.htm

PEREIRA, C. M., CEGONHO, J. M. & ISABEL ROCHA, M. “A trigonometria à volta de uma caneca de cerveja” In: *Educação e Matemática*, Lisboa, n. 23, p. 15-9, Jul/Ago, 1992

PIAGET, J. “Biology and Knowledge”. In: Gruber, H. E. E Vormech, J. J. *the Essencial Piaget*. London: Routledge and Kegan Paul ltda, 1977.

____________. “*A formação do símbolo na criança”*. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1978.

POLENTTINI, A. F. F. “analise das experiências vividas determinando o desenvolvimento profissional do professor de matemática” In: M. A. V. Bicudo. *Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas*. São Paulo: ed. UNESP, 1999. p. 247-261.

PONTE J. P. “O conceito de Função no Currículo de Matemática”. In: *Educação e Matemática.* Revista da faculdade de ciências de Lisboa, Portugal. 1990.

____________. “A modelação no processo de aprendizagem”. In: *Educação e Matemática*, Lisboa, n. 23, p. 15-9, Jul/Ago, 1992.

PAIS, L. C., *Didática da Matemática; uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

SCHUBAUER-LEONI, M.L. & GROSSEN, M. *Negotiating the Meaning os questions in didactic and experimental contracts*. *Europian Journal of Psychology of Education.* Vol. III, nº 4, 451-471. I.S.P.A. 1993.

SCHUBAUER-LEONI, M.L. *Le contrat didactique dans une approche psychosociale des situations d’ensigneiment. Interactions Didactiques*. Europian Journal of Psychological Education, 8, 63-75, 1988.

SMOLE, K. C. *A matemática na educação infantil: a teoria das inteligências múltiplas na prática escolar*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

SEALY, B. “Why do Penguins Huddle? Mathematics Teaching 153, p. 26-29, 1995.

SELDEN, A. e SELDEN J. “Research perspective on conceptions of function summary and overview”. In: *The Concept of Function*. Edited by Guershon Harel and Dubinsky, M.A.A. Mathematical Association of America, notes, v. 25, 1992

SIERPINSKA, A. “On understanding the notion of function”. In: *The Concept of Function: aspects of epistemology and pedagogy*. Guershon Harel and Dubinsky, (Eds.), M.A.A. Mathematical Association of America, notes, v. 25, 1992.

SMOLE, S. S. e DINIZ, M. I. “Matemática Ensino Médio” v. 1, 3 ed. São Paulo: Saraiva, 2003.

SCHWARZ, B. *The use of a Microworld to improve ninth graders concept image of a function: the Triple Representations Model curriculum*. tese de doutorado, Instituto Weizmann, Jerusalém, 1987.

SCHWARZ, B. B. & HERSKOWITZ, R. “effects of computerized tools on prototypes of the function concept”. In: Proceedings of PME 20, v. 4, p. 259-66, 1996.

TEODORO, V. D. et al., Modellus, interactive modelling with mathematics [software for windows]. San Mateo, CA: Knowledge Revolution, 1997. http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus

TRIGUEROS, M., et. al. “College Studentes’ conceptions of variable”. In: proceedings PME. Valência, IV, p. 315-322, 1996.

VALPASSOS PEDRO, M. & SAMPAIO, F. F. *PCNs e Modelagem Computacional: Reflexões a partir de Relatos de Experimentos com o Software WlinkIt*. XXV Congresso da Sociedade Brasileira de Computação. UNISINOS, São Leopoldo, realizado em 22 a 29 de Julho, 2005.

VINNER, S. & DREYFUS, T. “Images and definitions for the concept of function”. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 20, n. 5, p. 356-66, 1989.

VERGNAUD, G. “*El niño, las matemáticas y la realidad*”, Mexico: trillas 1991.

____________. “*La théorie des champs conceptueles*”. RDM, v. 10, n. 2, p. 133-170, 1990.

VINNER, S. “Concept definition, concept image and the notion of function”. *International Journal of Mathematics Education in Sience and Technology*, v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

VINNER, S. & DREYFUS, T. “Images and definitions for the notion of function”. *Journal for Reseacher in Mathematics Education*, v. 20, n. 4, p. 356-366, 1989

YOUSCHKEVITCH, A. P. “*The Concept of Function*”. in Archive for History of Exact Sciences, v. 16, n. 1, p. 37-85, 1976.

YERUSHALMY, M. *Problem solving strategies and mathematical resources: A longitudinal view on problem solving in a function based approach to álgebra*. Educational Studies in Mathematics, 43(2), p. 125-147, 2000.