UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

LINDINALVA CECÍLIA DO NASCIMENTO

QUANTIFICANDO A INCERTEZA: INVESTIGANDO OS CONHECIMENTOS PROBABILÍSTICOS DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

CARUARU, 2016

LINDINALVA CECÍLIA DO NASCIMENTO

QUANTIFICANDO A INCERTEZA: INVESTIGANDO OS CONHECIMENTOS PROBABILÍSTICOS DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática sob a orientação da Professora Cristiane de Arimatéa Rocha.

Área de Concentração: Ensino (Matemática)

Orientadora: Professora Cristiane de Arimatéa Rocha.

CARUARU, 2016

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier CRB/4 - 1242

N244q Nascimento, Lindinalva Cecília do.
Quantificando a incerteza: investigando os conhecimentos probabilísticos de licenciandos em Matemática. / Lindinalva Cecília do Nascimento. – 2016.
62f. il. ; 30 cm.

Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2016.
Inclui Referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Probabilidades. 3. Professores - Formação. I. Rocha, Cristiane de Arimatéa (Orientadora). II. Título.

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2016-182)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Formação Docente
Curso de Matemática - Licenciatura

QUANTIFICANDO A INCERTEZA: INVESTIGANDO OS CONHECIMENTOS PROBABILÍSTICOS DE ALGUNS LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

LINDINALVA CECÍLIA DO NASCIMENTO

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA - Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e aprovada em 21 de julho de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Cristiane de Arimatéa Rocha
(Orientador (a))

Prof. José Ivanildo Felisberto de Carvalho
(Examinador (a) Interno)

Prof. Michaelle Renata Moraes de Santana
(Examinador (a) Externo)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me concedeu a vida.

À Universidade Federal de Pernambuco- Campus Agreste por possibilitar o desenvolvimento de meus estudos.

Agradeço a minha família. Meus pais, em especial, minha mãe Cecília, que sempre buscou propicia-me o melhor, dando bons exemplos de caráter e valores. Minhas irmãs e irmãos pelo apoio, carinho e compreensão. Meus primos e sobrinhos (fonte de amor e inspiração).

Aos amigos fiéis que conquistei ao longo dessa jornada, principalmente, Marta Sales e Letônio Silva, pelos conselhos e incentivos.

Aos meus professores da educação básica e do curso de Licenciatura pelos conhecimentos construídos e/ou adquiridos e pelos exemplos de profissionais. Em relação aos últimos, destaco as professoras Ana Lúcia Leal e Simone Moura Queiroz pelas ilustres contribuições referentes ao "ser" humano, antes de qualquer coisa.

A minha querida orientadora Cristiane de Arimatéa Rocha, pelo crédito me concedido, pelo acolhimento e paciência.

A meus colegas de curso pelos momentos (de sucesso e aflição) e aprendizados compartilhados, pelas dificuldades superadas em conjunto. A meus colegas do ônibus pelos momentos de descontração e companheirismo.

A todos que de alguma forma contribuíram para a produção deste trabalho e para este meu devir professora de matemática, sendo incentivando ou colocando obstáculos, visto que estes últimos nos tornam pessoas mais fortes.

“O destino é apenas o acaso com mania de grandeza”

Mario Quintana

“Nossas aspirações são nossas possibilidades”

Robert Browning

RESUMO

A matemática é uma disciplina conhecida como exata, rígida, “a disciplina do cálculo”, percebe-se que a probabilidade, contida nesta, consiste em algo imprescindível para a vida do cidadão. Desse modo, a grande dificuldade enfrentada por muitos alunos e até professores ao lidar com o conteúdo e linguagem probabilística, nos despertou a atenção para a importância da construção dos conhecimentos probabilísticos de alguns licenciandos em Matemática. Este trabalho objetiva investigar quais as dificuldades estes licenciandos apresentam ao construírem seus conhecimentos probabilísticos. Para isso, elaboramos e aplicamos um questionário com 15 licenciandos em matemática de uma Universidade pública do Município de Caruaru. Para a análise dos dados, utilizamos alguns conceitos elencados por autores e as concepções de probabilidade de Godino et al (2010). Consideramos que ainda há pouco enfoque da probabilidade durante a escolarização básica, além disso, os licenciandos apresentam dificuldades com os conceitos e linguagem probabilísticos, cometendo equívocos também ao interpretar o espaço amostral. Notamos que os licenciandos dominam os cálculos simples de probabilidade e utilizam mais de um tipo de representação para resolver os problemas probabilísticos. Identificamos nas respostas dos licenciandos as concepções frequentista e clássica, tendo esta última, maior enfoque.

Palavras-chave: Conhecimentos Probabilísticos. Concepções de Probabilidade. Licenciandos em Matemática.

RESUMEN

La matemática es una disciplina conocida como exacta, rígida, "la disciplina de cálculo", es evidente que la probabilidad contenida en este, consiste en algo esencial para la vida del ciudadano. Así, la gran dificultad que enfrentan muchos estudiantes y maestros incluso para tratar con el contenido y lenguaje probabilístico, despierta a la importancia de la construcción del conocimiento probabilístico de algunos licenciandos en matemática. Este trabajo desear investigar lo que las dificultades estos licenciandos presentan para construir el conocimiento probabilístico. Para ello, desarrolló y aplicó un cuestionario con 15 licenciandos en matemática de una universidad pública en la ciudad de Caruaru. Para el análisis de datos, utilizamos algunos de los conceptos mencionados para los autores y las concepciones de probabilidad de Godino et al., (2010). Creemos que todavía hay poco enfoque de probabilidad para la educación básica, además, los licenciandos presentan dificultades con los conceptos y el lenguaje probabilístico, cometer errores también a interpretar el espacio muestral. Vemos que los licenciandos dominan los cálculos simples de probabilidad y utilizar más de un tipo de representación probabilística para resolver los problemas. Se identificaron en las respuestas de licenciandos las concepciones frequentist y clásico, este último, un mayor atención.

Palabras clave: Conocimiento probabilístico. Concepciones de probabilidad. Licenciandos en matemática.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da história, a Matemática sempre foi vista como a ciência da exatidão, do rigor, do cálculo, muitos destes termos e estereótipos criados pela sociedade em geral acerca da disciplina fizeram inúmeras pessoas terem aversão á mesma. Entretanto, em certo período, surge uma teoria, que logo se torna um ramo da mesma ciência, chamada teoria da probabilidade. Contudo, o que mais nos chama a atenção é que esta estuda justamente os fenômenos ligados á incerteza, ora, é impressionante, temos uma disciplina “exata”, que possui e estuda fenômenos aleatórios, incertos.

Então, percebemos que tendo domínio de alguns conhecimentos probabilísticos, os sujeitos podem modificar certas crenças e pensamentos equivocados que possuem acerca da disciplina matemática.

A probabilidade está presente em vários âmbitos da nossa vida (biológico, físico, social, político), assim como em outras áreas da ciência, sendo crucial a compreensão da mesma por parte dos alunos e sociedade em geral, pois “A vida em sociedade é caracterizada como um ambiente sujeito a elevados níveis de incerteza, onde a capacidade de analisar, interpretar e transmitir informações adequadamente é fundamental à vida cotidiana” (REZENDE, 2013, p.17). Além disso, o pensamento probabilístico constitui-se num tipo de raciocínio, numa maneira de pensar, seu domínio por parte dos alunos, torna-os pessoas mais críticas e autônomas.

Apesar disso, nota-se que muitos alunos e até mesmo professores apresentam dificuldades ao lidar com conceitos como aleatório, espaço amostral, evento, provável, enfim com o pensamento probabilístico. Assim, torna-se interessante pesquisar se os licenciandos em Matemática já quase graduados enfrentam tais dificuldades relacionadas à probabilidade. Desse modo, almejamos com este trabalho responder a seguinte pergunta: Quais as dificuldades enfrentadas por alguns Licenciandos em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco - CAA na construção dos conhecimentos probabilísticos?

O presente trabalho é constituído por seis capítulos. No segundo capítulo é apresentado um breve histórico da trajetória da probabilidade desde a sua origem até os dias atuais. Além disso, trazemos um pouco do que os documentos oficiais revelam acerca do ensino de probabilidade para a educação básica, falamos de alguns aspectos da probabilidade na formação de professores e fazemos uma introdução sobre o raciocínio probabilístico.

No capítulo três trazemos alguns conceitos que são fundamentais no processo de ensino e aprendizagem da probabilidade, bem como as cinco concepções de probabilidade elencadas por Godino et al (2010) , discutimos ainda um pouco sobre representações simbólicas e, por fim, apontamos algumas pesquisas acerca dos mesmos.

No capítulo quatro, é apresentada a metodologia usada para realizar essa pesquisa e o público alvo da mesma, nesta discutimos a atividade utilizada para coleta de dados. No quinto capítulo, expomos e discutimos os resultados obtidos em concordância com as concepções destacadas e com os conceitos apresentados. Por fim, no capítulo seis, apresentamos as considerações finais.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Analisar as dificuldades enfrentadas por licenciandos em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco - CAA na construção dos conhecimentos probabilísticos.

1.1.2 Objetivos específicos

- Verificar os tipos de representação e linguagem probabilísticos utilizados pelos licenciandos.
- Analisar as concepções de probabilidade dos licenciandos.
- Identificar as dificuldades enfrentadas pelos discentes com o conceito de probabilidade.

2 O ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE

Com a finalidade de conhecer o contexto em que surgiu a probabilidade bem como a sua situação atual enquanto ramo da matemática e conteúdo a ser ensinado nas escolas, foi realizado algumas pesquisas acerca da história da probabilidade e do que os documentos oficiais abordam a respeito do ensino da mesma, bem como seus aspectos na formação de professores, além de uma pequena introdução do raciocínio probabilístico.

2.1 Um pouco da história da probabilidade

Ao certo, não se sabe onde, nem como, surgiu o estudo das probabilidades. Entretanto, segundo Biajoti (2013), provavelmente estudiosos de civilizações antigas, perceberam a existência de “regularidades” em fenômenos imprevisíveis, analisando-os. Essas civilizações tinham em comum as noções dos conhecidos jogos de azar.

Os povos Romanos gostavam bastante de jogos, porém, ao longo da Idade Média, a Igreja Católica proibiu este tipo de atividade, e talvez tenha destruído os registros dessa época, isto, principalmente, por se tratar de jogos de azar. Além disso, há indícios de que, no Egito, já em 3500 a.C. existia jogos com ossinhos. Enquanto que, há aproximadamente 1500 a.C. era usado um pedaço de osso do calcanhar de um animal (astragalus), em que este formava faces parecidas com as de um dado de acordo com Biajoti (2013), porém as faces não eram iguais nem aconteciam com a mesma frequência.

Desse modo, a probabilidade teve sua origem em jogos e apostas e surgiu como ramo da matemática apenas por volta do século XV, quando matemáticos italianos começaram a estudar na íntegra os jogos de azar. Cabe destacar que estes jogos eram conhecidos como jogos de sorte/azar porque dependem estritamente da sorte e do azar (acaso), não considerando as habilidades do jogador. Nesse sentido, ao se realizar um jogo deste tipo, “os fatores que determinam um destes particulares resultados não podem ser identificados e caso isto ocorra não são passíveis de controle” (VIALI, 2008, p. 144). O jogo com o osso era usado também em previsões do futuro. Além disso, segundo Viali (2008), o acaso presente nesse jogo era visto como obra dos deuses.

A partir daí, foram muitos os matemáticos e estudiosos que pesquisaram e produziram trabalhos significativos para a teoria das probabilidades. Dentre eles, Jerônimo Cardano (1501-1576), Galileu Galilei (1564-1642), Pierre de Fermat (1601-1665), Blaise Pascal

(1623-1662), Jacob Bernouli (1654-1705), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), S. N. Bernstein (1880-1968), Andrei Kolmogorov (1903-1987). Este último matemático foi um dos principais do século XX, marcou o início do desenvolvimento da Teoria Moderna da Probabilidade, com sua proposta de axiomatização.

Assim, a probabilidade é a parte da matemática que estuda os fenômenos que estão ligados à incerteza. Temas como estes são muito relevantes para o currículo de matemática e para o cidadão, já que estão presentes no cotidiano dos mesmos e em outras áreas da ciência. Além disso, o estudo desses possibilita aos alunos desenvolverem autonomia, capacidade de argumentar e tornarem-se sujeitos críticos.

2.2 O Ensino de probabilidade na Educação Básica para os Documentos Oficiais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentam indícios de que já nos anos iniciais de escolarização, devem ser desenvolvidos nos alunos noções de probabilidade, pois, trazem como objetivo para o segundo ciclo do ensino fundamental "identificar características de acontecimentos previsíveis ou aleatórios a partir de situações-problema, utilizando recursos estatísticos e probabilísticos" (BRASIL, 1997, p.56). Assim, neste período inicial, o aluno deve adquirir noções básicas de alguns resultados de acontecimentos, compreendendo palavras como possível, provável, certo, etc., bem como obtendo um vocabulário básico para falar sobre o conceito de probabilidade. Além disso, já no terceiro ciclo do ensino fundamental o documento mostra o seguinte objetivo: "resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão" (BRASIL, 1998, p.65). Enquanto que, no quarto ciclo o PCN revela a finalidade de "construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de um sucesso de um dos eventos" (BRASIL, 1998, p.82).

De acordo com os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PCPE), no Ensino Médio é que a ideia de probabilidade deve ser ampliada, para que o aluno,

> seja capaz de estabelecer o modelo matemático que permite determinar a probabilidade de ocorrência de um evento. O conceito pode ser ampliado também para situações em que seja necessário identificar a probabilidade da união e da interseção de eventos, os eventos disjuntos e o conceito de independência de eventos. (PERNAMBUCO, 2012, p.126).

Então, neste nível de ensino, o estudante deve se aprofundar mais no tema probabilidade, e isto deve ocorrer através de situações reais, experimentação, nos quais o sujeito vai construindo seu conhecimento.

Contudo, apesar dos PCN afirmarem que desde o início do ensino fundamental, devem ser apresentados aos alunos temas relacionados á probabilidade e que o ensino deve alcançar tais objetivos elencados acima. Na prática, isto raramente acontece, pois, muitos alunos só veem tais discussões a partir do ensino médio, isto é, quando veem. Assim, nota-se que as escolas ainda não dão importância suficiente a este ramo da matemática. Além disso, segundo o PCN-EF a finalidade do estudo de probabilidade deve consistir em:

> [...] que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de cada um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1998, p.52)

Desse modo, para que os alunos compreendam conceitos probabilísticos, o ensino destes deve ser diversificado, evidenciando experimentos e aulas práticas. Todavia, geralmente os alunos estudam (“decoram”) algumas fórmulas relacionadas à probabilidade e fazem vários exercícios para aplicar e fixar tais fórmulas. Porém, “Entendemos que o ensino de probabilidade (de Matemática em geral) deve contemplar mais do que fórmulas, técnicas e aplicações em exercícios. Há diversos conceitos a serem compreendidos ao longo da vida escolar, de modo a formar o complexo pensamento probabilístico” (MAROCCI, 2011, p.34).

Entretanto, para que haja ensino e aprendizagem, é necessário que haja interação entre professor, alunos e currículo. Porém, definir algo se constitui numa tarefa não muito simples, assim, temos que a probabilidade envolve conceitos de uma natureza distinta, e isto, muitas vezes implica o não domínio deste conteúdo por parte do docente, deixando-o inseguro, o que afeta diretamente na aprendizagem dos discentes.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) nos traz que:

> Ao estudar probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas á chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia. Outras ideias importantes incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere á probabilidade e á chance. (BRASIL, 2006, p.79-80).

No entanto, se nem mesmo o professor, que é o mediador entre o conhecimento e o aluno compreende tais conceitos, muitas vezes, por não ter aprendido ou estudado os mesmos ao longo de sua formação, tornando improvável a aprendizagem dos seus alunos. Além disso, se ele não possui conhecimentos suficientes acerca do conteúdo, então tende a fugir do problema, deixando probabilidade para se trabalhar a posteriori (adiando-o).

Diante disso, é notável a grande importância do estudo do conteúdo probabilidade nas escolas, pois auxilia no desenvolvimento da criticidade e autonomia do estudante, possibilitando-o realizar sua cidadania plena. Além disso, segundo as OCEM,

> Nas situações e nas experiências aleatórias, os estudantes precisam aprender a descrevê-las em termos de eventualidades, associá-las a um conjunto de eventos elementares e representá-las de forma esquemática. Os alunos necessitam também dominar a linguagem de eventos, levantar hipóteses de equiprobabilidade [...] (BRASIL, 2006, p.80).

Então, o ensino de probabilidade tem que ocorrer de forma a possibilitar que os alunos além de compreenderem e perceberem a mesma em situações do seu cotidiano consigam descrevê-las e representá-las de algum modo. E ainda, ao se deparar com tais problemas saibam questionar, levantar hipóteses, resolver da maneira mais favorável para si.

2.3 Aspectos de probabilidade na formação de professores

Para se ensinar os conteúdos probabilísticos aos alunos, assim como os demais conteúdos, é preciso que o docente domine não só os conhecimentos sobre a matéria matemática, mas domine os conhecimentos pedagógicos e didáticos (LOPES, 2008). Assim, o docente vai interligando a probabilidade a outras áreas de conhecimentos unindo conceitos, metodologias e procedimentos, adquirindo ferramentas e conhecimentos que o possibilite nortear o processo de aprendizagem. E tais conhecimentos devem ser construídos pelos docentes durante a sua formação profissional.

Nesse sentido, temos ainda que “os professores precisam possuir conhecimentos sobre a matéria que ensinam, conheçam o conteúdo em profundidade, sendo capazes de organizá-lo mentalmente, de forma a estabelecer inúmeras relações” (LOPES, 2008, p.66). Pois, torna-se quase impossível ensinar ao outro o que não se tem domínio, não se sabe.

Felisberto de Carvalho e Macedo (2015) nos falam de duas categorias elencadas por Ball, Thames e Phelps (2008): Conhecimento comum do conteúdo e Conhecimento especializado do conteúdo, as quais sugerem alguns conhecimentos primordiais aos docentes para realizar seu trabalho efetivamente. O primeiro constitui-se nos conhecimentos que as pessoas comuns (que estudaram matemática) utilizam para resolver certos problemas matemáticos. Assim, em relação aos conhecimentos probabilísticos, esta categoria envolve situações como descrição de espaços amostrais mais simples, diferenciação de fenômenos aleatórios e fenômenos determinísticos. Já o conhecimento especializado do conteúdo diz respeito ao conhecimento que o professor de matemática deve possuir. Em relação ao conteúdo probabilidade, o docente deve adquirir noções do conceito de probabilidade bem como entender as distintas funções das concepções de probabilidade (frequentista, clássica, subjetiva, etc) e suas consequências para o ensino.

É importante refletirmos sobre a função do docente no processo de ensino e aprendizagem, a qual também é política, se manifestando através de suas decisões e atitudes, deixando visível a não neutralidade do lado político de cada docente (LOPES e FERREIRA, 2004). Discorre que, ao optar (dar prioridade) por alguns conteúdos do currículo escolar (exemplo, probabilidade) e não por outros, indica a posição política do professor. Assim, discussões acerca de probabilidade (sua relevância na formação de um cidadão crítico, por exemplo) são bastante importantes para auxiliar o professor em algumas tomadas de decisões.

Para construção dos conhecimentos probabilísticos é necessário obter uma linguagem própria/ probabilística. Entretanto, de acordo com Costa (2007) apud Costa e Nacarato (2011), nos cursos de Licenciatura em Matemática, geralmente os conteúdos são ensinados através de fórmulas e procedimentos mecânicos, impedindo os futuros docentes de construírem um conjunto de saberes essenciais para sua atuação profissional, desenvolverem um pensamento probabilístico. Assim, quando tornarem-se docentes tenderão a ensinar do mesmo jeito que aprenderam (fórmulas, exercícios) e desse modo, seus alunos também não desenvolverão um pensamento probabilístico.

Lopes e Ferreira (2004) afirmam que o ensino de probabilidade deve ocorrer através de uma metodologia investigativa e ativa, por meio de situações problemas, simulações e experimentações. Daí, entendemos que na formação de professores, os Licenciandos devem aprender probabilidade também desta maneira.

Costa e Nacarato (2011) nos alerta para o fato de que, geralmente, a probabilidade é trabalhada no Ensino Médio, porém, nem sempre com uma ênfase abrangente, discorre que na maioria das vezes é tratada apenas através da concepção clássica.

Felisberto de Carvalho e Macedo (2015) consideram que os licenciandos precisam durante sua formação inicial lidar com atividades que trabalhem as distintas concepções de probabilidade, bem como as ideias que dão suporte ao mesmo conhecimento, possuindo diversas situações didáticas que auxiliem na sua prática docente futura.

2.4 Raciocínio Probabilístico: breve introdução

De acordo com Marocci (2011) apenas na puberdade os sujeitos começam a desenvolverem certas funções cognitivas que possibilitam a formação dos conceitos e do pensar abstratamente, pois quando ainda crianças, estas operações ainda não estão desenvolvidas, por isso, se aconselha que no início da escolarização os estudantes compreendam apenas algumas noções probabilísticas. Todavia, cabe destacar que como são apontados pelos currículos, desde crianças, os sujeitos conseguem aprender probabilidade, sendo aconselhável estudar tal conteúdo já nos anos iniciais de escolarização. Temos que:

> Os conceitos são formados em processos complexos e, à medida que isso ocorre, desenvolve-se o pensamento generalizante do sujeito. Não se assimila um conceito de forma imediata, de uma só vez. Antes da formação de conceitos, formam-se estruturas similares a eles, que se transformam por diversas fases. (VIGOTSKI, 2000 apud MAROCCI, 2011, p.40):

Então, no início a criança possui um pensamento menos complexo, no qual os conceitos são produzidos de maneira espontânea, quando a mesma interage com outras pessoas e lida com linguagem relacionada ao tema proposto (probabilidade) no seu dia-a-dia. Mas, com o passar do tempo, a mesma começa a frequentar o ambiente escolar, seu grau de escolaridade vai aumentando, então seu psicológico vai desenvolvendo-se e tornando-se capaz de elaborar conceitos de uma forma mais científica e completa.

Sabemos que ao desenvolverem o pensamento probabilístico, os alunos estão adquirindo uma forma de pensar, um novo raciocínio, pois,

> [...] o pensamento é aquilo que é trazido à existência através da atividade intelectual. Podemos dizer que é um produto da mente, que pode surgir mediante atividades racionais do intelecto ou por abstrações da imaginação. O pensamento pode implicar uma série de operações racionais, como a análise, a síntese, a comparação, a generalização e a abstração. Por outro lado, devemos ter em conta que o pensamento não só é refletido na linguagem, como também a determina, pois ela trata de transmitir os conceitos, os juízos e os raciocínios do pensamento.
>
> O raciocínio é uma operação lógica, discursiva e mental. O intelecto humano utiliza uma ou mais proposições para concluir, por mecanismos de comparações e abstrações, quais são os dados que levam às respostas verdadeiras, falsas ou prováveis. (LOPES, 2012, pp. 161-162)

Além disso, é necessário que no decorrer da formação desse pensamento, os alunos se deparem com experiências concretas, nas quais, nem sempre vão lidar com fenômenos previsíveis, dessa maneira vão percebendo e identificando certos conceitos e comportamentos conhecidos. Sendo o ser humano afetado pelas experiências ocasionadas pelas diversas situações vivenciadas, consta-se que a formação do pensamento probabilístico do mesmo está articulada a estas, segundo Lopes (2003). Diante disso,

> [...] consideramos que um mesmo aluno possa ter uma concepção, diante de uma determinada tarefa, e outra, em outra tarefa. Entendemos que as situações relacionadas à incerteza podem ser interpretadas de diferentes maneiras, por diferentes concepções probabilísticas, conduzindo ou não as pessoas às respostas adequadas. (SANTOS, 2013, pp.2-3)

Com isso, os assuntos relacionados à probabilidade devem ser trabalhados na escola através de diferentes metodologias de ensino, proporcionando aos alunos diversas atividades. Por outro lado, deve levar em consideração os distintos níveis dos alunos, de acordo com o pensamento probabilístico que possuem.

3 CONCEPÇÕES E CONCEITOS RELACIONADOS Á PROBABILIDADE

Visando compreender alguns conceitos que são de suma importância para o ensino e aprendizagem de probabilidade, pesquisamos e trazemos alguns deles. Além disso, a fim de analisar as concepções de probabilidade trazidas pelos licenciandos, apresentamos as cinco concepções destacadas por Godino et al (2010). É importante colocar que nos referimos a conceitos quando falamos de espaço amostral, eventos, experimentos, probabilidade, já as concepções, serão as elencadas por Godino et al (2010) (clássica, lógica, frequencial, subjetiva, formal). Trazemos também uma breve discussão acerca da importância das Representações. Por fim, apontamos algumas pesquisas relacionadas a tais abordagens.

3.1 Alguns conceitos primordiais ao estudo da probabilidade

Os estudantes utilizam bastante alguns conceitos ao tentarem resolver problemas probabilísticos. Contudo, “São muitos os estudos que revelaram dificuldades dos alunos na aprendizagem de conceitos estocásticos, isto é, de estatística e probabilidades” (BARROS; FERNANDES, 2001, p.1), o que é compreensível, visto que conceituar algo não se constitui numa tarefa fácil. Daí, conceituar probabilidade também consiste num ato complicado, visto que estamos falando de algo que é de uma natureza distinta.

Ao se realizar o cálculo de uma probabilidade, se está almejando calcular/ medir a chance, a possibilidade, o grau de certeza de certo fenômeno acontecer. Nesse sentido, Felisberto de Carvalho e Macedo (2015) revelam “entendemos chance como as possibilidades de um determinado evento acontecer. E a probabilidade o número que mede esta chance” (p.9). Os autores supracitados revelam ainda que as pessoas confundem bastante essas noções (chance e probabilidade).

Podemos encontrar dois tipos de fenômenos na natureza: os fenômenos aleatórios e os fenômenos determinísticos. Os primeiros, segundo Dantas (2008) são os que ao se repetirem sob as mesmas condições, produzem resultados diferentes, isto é, apesar de podermos expor todos os resultados possíveis de acontecer, não conseguimos ter uma previsão segura do acontecimento do fenômeno. Alguns exemplos deste tipo são: lançar um dado e observar a face de cima, escolher um casal dentre outros e observar o sexo do primeiro filho, retirar um lote de peça de um processo de produção e observar o número de peças defeituosas.

Já os fenômenos determinísticos para Dantas (2008) constituem-se naqueles que ao se repetirem sob mesmas condições produzem resultados idênticos, ou seja, conseguimos prever o resultado com certeza. Alguns exemplos são: aquecer a água a 100 graus centígrados, deixar uma pedra cair de determinada altura.

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento (fenômeno) aleatório é denominado de espaço amostral e geralmente é representado por **Ω** (HAZZAN, 1946). Além disso, os elementos que compõem o espaço amostral são chamados de eventos simples (conjuntos unitários, que contém apenas um ponto do espaço amostral) e cada vez que for realizado um experimento, acontecerá somente um evento simples.

Diante disso, Hazzan (1946) nos diz que evento geralmente é representado por uma letra maiúscula do alfabeto (A, B, C,...), e constitui-se num subconjunto de **Ω**, ou ainda, um resultado de um experimento.

Assim, seja **Ω** um espaço amostral e A um evento possível, podemos calcular a probabilidade do evento A ocorrer, da seguinte forma:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Onde P(A) expressa a probabilidade do evento A acontecer, n(A) representa o número de casos favoráveis e n(**Ω**) constitui-se no número de casos possíveis do espaço amostral (definição clássica de probabilidade).

Podemos também definir probabilidade do modo frequencial, assim apresentado por Viali (1999):

Seja Ω um espaço amostral de um experimento E, tome um evento possível qualquer A. Supondo que E é repetido “n” vezes e considerando fr_A a frequência relativa do evento, tal que:

$$fr_A = \frac{m}{n},$$

Onde “m” representa a quantidade de vezes que A ocorre e “n” a quantidade de vezes que E é repetido. Temos que a probabilidade de A é dada por:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} fr_A$$

Isto é, a probabilidade de A é definida como sendo o limite de fr_A quando “n” tende ao infinito.

Outra definição de probabilidade que vem sendo estudada e utilizada para resolver problemas de probabilidade é a geométrica, na qual os fatos são representados por pontos de um segmento, figuras planas ou por sólidos. Todavia, não abordaremos esta neste trabalho, por não fazer parte dos nossos objetivos.

3.2 Concepções de probabilidade

De acordo com Godino et al (2010), na medida que consideramos a probabilidade como útil para se fazer uma escolha e que desejamos aplicar o modelo formal no mundo real, precisamos refletir com mais exatidão sobre a noção de probabilidade propriamente dita. Desse modo, Godino et al (2010) nos traz cinco concepções de probabilidade.

1. *Teoria Clássica:* Ancorada nos estudos de Laplace, presente na obra *Teoríe analytique dés probabilités* publicada em 1812 diz que, a probabilidade é definida pela razão entre o número de casos favoráveis em relação ao total de casos possíveis, sendo que, os resultados precisam ter a mesma chance de ocorrerem, serem igualmente prováveis, ou seja, baseia-se na equiprobabilidade dos sucessos. No entanto, temos que “[...] esta definição se encontra inadequada. Além de ser circular e restritiva, não oferece resposta para pergunta de que é realmente probabilidade; apenas proporciona um método prático de cálculo de probabilidade de alguns sucessos fáceis.” (GODINO ET AL, 2010, p.21) _ (tradução nossa). Isto é, esta definição limita o espaço amostral, pois só considera um número finito de elementos, não sendo aconselhável utilizá-la em alguns casos. Os jogos com dados, moedas, extração de bola de uma urna são exemplos de experimentos que podem ser observados utilizando esta visão de probabilidade.

2. *Teorias Lógicas:* Elaboradas por Keynes, Jeffersys, Kooppman, Carnap e outros instigados em aprimorar a teoria clássica, nesta concepção, "a probabilidade traduz um grau de crença racional, isto é, a taxa de confiança que convém conceder a uma proposição *p* a luz da informação aportada por outra proposição *q*." (GODINO ET AL, 2010, p.23) _ (tradução nossa). Assim, a probabilidade busca explicar a indução, determinando uma relação lógica entre dois enunciados, um evidente e outro hipotético, ou seja, consiste numa generalização das relações de implicação e contradição estabelecida pela lógica dedutiva.

3. *Probabilidade frequencial ou empírica:* Defendida por Richard Von Mises, John Venn, Reichenback e Kolmogorov, nesta concepção, a probabilidade de um fenômeno acontecer é baseada na quantidade de experimentos realizados pelo sujeito, desse modo, o experimento se repete nas mesmas condições, diversas vezes. Então, segundo Godino et al (2010) o foco deste conceito de probabilidade é a objetividade e a experimentação. Assim, nota-se que os resultados alteram-se bastante a cada repetição, de modo que com um número pequeno de experimentos teremos resultados desregulados, porém, quando este número é suficientemente grande podemos ter certa regularidade nos resultados, a este último fato pode-se chamar Lei dos Grandes Números.

4. *Probabilidade Subjetiva:* As probabilidades são realizadas de acordo com o ponto de vista do sujeito, suas crenças, vivências e experiências. Desse modo, podemos ter mais de uma medida de probabilidade para um mesmo acontecimento, pois diferentes sujeitos, geralmente têm percepções distintas e algumas vezes até divergentes. Nesta concepção, temos ainda que "a qualquer entidade aleatória se pode atribuir uma probabilidade. Esta pode ser atribuída de qualquer modo, mas com a condição de que um esteja preparado para aceitar apostas baseadas em dita designação". (GODINO ET AL, 2010, p.25) _ (tradução nossa). Assim, este conceito pode depender apenas de comparações prováveis observadas pelos sujeitos.

5. *Probabilidade Formal:* Surgiu a partir dos trabalhos de Kolmogorov e outros matemáticos, para contrapor a concepção clássica, que se baseia na equiprobabilidade de casos favoráveis e em um número finito de elemento para o espaço amostral. A concepção formal também chamada de axiomática está fundamentada na teoria dos conjuntos. Portanto, nesta concepção, pode-se calcular a probabilidade de sucessos para um espaço amostral com quantidade infinita de elementos.

Note que, todas estas concepções podem ser utilizadas em alguma situação, porém, cabe ao sujeito saber aplicar e escolher a que mais se adéqua a cada uma, com a finalidade de resolver o problema “corretamente”. Entretanto, na nossa investigação trabalharemos apenas com as concepções clássica, frequencial e subjetiva.

3.3 Representações Simbólicas

A compreensão e assimilação de um conceito estão intimamente ligadas ás formas de representação deste, apresentadas pelos sujeitos. Nesse sentido, Vernaud (1982) apud Moreira (2002) nos diz que os símbolos e os conceitos encontram-se entrelaçados e sempre se deve dar importância á utilização que os alunos fazem dos primeiros em relação á utilização que fazem do segundo. Assim, é notável a relevância das representações no processo de construção dos conhecimentos.

Diante disso, as representações “não são processos estáticos e captam o processo de construção de um conceito ou de uma relação matemática” (WOLECK, 2001 apud PINTO; CANAVARRO, 2012, p. 4), isto é, por meio das representações, os discentes tanto podem compreender os conceitos, como podem mostrar que compreendem, através dessas, os alunos organizam seus conhecimentos. Desse modo, as representações são instrumentos matemáticos que auxiliam o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos.

Então, os estudantes ao resolverem certa atividade podem utilizar representações errôneas, vagas, complexas ou que não condizem com o solicitado. Discorrem que, isto vai depender dos conhecimentos, experiências, entendimento do problema que o sujeito possui. Segundo Wielewski (2006) “Muito frequentemente, a resolução de um problema depende da escolha de uma representação adequada” (p.4).

Convém frisar que algumas representações se encontram tão ligadas aos conceitos que parece fazer parte dos mesmos, um exemplo disto constitui na análise combinatória e as árvores de possibilidades. Sendo assim, ás vezes os professores ensinam tal conteúdo como se o objetivo deste fosse aprender a construir árvore de possibilidades.

Entendemos que ao tentar resolver um problema probabilístico, o aluno pode utilizar expressões algébricas, diagrama da árvore, desenhos, entre outros tipos de representação a fim de listar o espaço amostral e/ou para ajudá-lo a chegar a uma solução.

3.4 Algumas pesquisas relacionadas

Diversos trabalhos têm contribuído para o estudo do desenvolvimento probabilístico dos sujeitos investigando os problemas encontrados e buscando modos de auxiliar no ensino dos conteúdos de Probabilidade.

Coutinho (1994) visando investigar como ocorre o processo de aprendizagem dos conceitos iniciais de Probabilidade através de uma concepção frequentista, realizou uma pesquisa com alguns alunos, na qual foi aplicado um questionário e uma sequência didática. A autora considerou que os estudantes usavam a intuição para selecionar as informações que achavam interessantes, não realizando uma investigação científica dos acontecimentos e assim faziam os cálculos estimativos das probabilidades. Discorre que, há uma substituição de significados específicos por outros subjetivos, além disso, algumas concepções errôneas podem continuar a existir mesmo depois dos alunos já terem adquirido noções simples deste assunto. A pesquisadora afirma ainda que, inicialmente, os alunos encararam as experimentações como atividades de lazer e não como alguma coisa que proporcionasse uma aprendizagem.

Lopes (2003) em sua tese de doutorado pesquisou as contribuições da vivência, estudo e reflexões dos conceitos de Estatística e Probabilidade no desenvolvimento profissional e na prática pedagógica de algumas professoras da Educação Infantil. Assim, foi desenvolvida uma intervenção planejada, sendo uma produção colaborativa. A pesquisadora analisou entrevistas, questionários, relatórios, atividades aplicadas, bem como realizou reflexão acerca de textos e aulas filmadas. A partir disto, ela concluiu que projetos colaborativos entre professores e pesquisadores auxiliam bastante no desenvolvimento profissional dos docentes que estão inseridos nos mesmos. A autora percebeu forte presença do conhecimento didático da Matemática na elaboração de problemáticas e na diversidade de estratégias e soluções. Além disso, ela notou que quando os docentes têm interesse e domínio de certos conteúdos matemáticos e estatísticos eles se empolgam mais em investigar, experimentar tais conteúdos em sala de aula.

Santos (2010), buscando averiguar as ideias sobre linguagem e pensamentos probabilísticos em um ambiente de resolução de problemas realizou uma pesquisa com estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental. A mesma foi composta por duas etapas, nas quais eram propostas aos alunos sequências de atividades envolvendo estocástica, acontecendo em meio a um processo de comunicação. Segundo a pesquisadora os estudantes usam os termos probabilísticos quando medem as probabilidades de certos acontecimentos e compreendem que estes termos expressam as chances dos eventos. Além disso, a partir da pesquisa, notaram-se equívocos relacionados aos significados das palavras “possibilidade” e “probabilidade”, já que muitos estudantes as veem como sinônimas. A pesquisadora afirmou também que houve equívocos ao se interpretar o espaço amostral, bem como, equívocos de linguagem, ocasionados pelos enunciados das questões.

Santana (2011) pesquisou como os docentes do Ensino Fundamental de escolas públicas encaram o ensino de probabilidade, objetivando analisar os conhecimentos e concepções que os mesmos possuem. Nesse sentido, foi aplicado uma entrevista semi-estruturada com oito docentes. A autora considerou que os professores trabalhavam muito pouco os conceitos probabilísticos com seus alunos, não se sentiam preparados para isto e que no decorrer de suas formações não lhes foram propiciados adquirir práticas e conhecimentos que os auxiliassem no ensino desses conteúdos de probabilidade em sala de aula. De acordo com a autora, os docentes mostraram ter dificuldades em entender o conceito de probabilidade, não demonstraram terem domínio de conceitos como espaço amostral, evento, fenômeno aleatório e acaso.

Marocci (2011) realizou uma pesquisa com alunos do primeiro ano do Ensino Médio, na qual analisou os processos de elaboração conceitual probabilística dos estudantes quando imersos num ambiente de resolução de problemas. Para isto, foram realizados de modo repetido planejamentos, ação e reflexão relacionados às ações e situações da sala de aula, desde a escolha das atividades até a avaliação. Assim, foram analisados o diário de campo da pesquisadora, áudio gravações e videogravações das discussões e os registros escritos e entrevistas semi-estruturadas realizadas com os mesmos. Conforme a autora, este trabalho com a probabilidade através da resolução de problemas possibilitou aos estudantes progredirem em seu processo de elaboração conceitual, apesar de ocorrer em distintos níveis. Notou-se também que os alunos conseguiram apresentar alguns dos conceitos que aprenderam.

Biajoti (2013), objetivando apresentar os resultados de uma investigação didático-pedagógica que buscava introduzir a noção de probabilidade, desenvolver uma linguagem probabilística de modo adequado e formalizar os conceitos através do uso de jogos com dados e moeda, realizou uma pesquisa com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental II. Então, houve a criação e aplicação de uma sequência didática. O pesquisador concluiu que os alunos identificavam situações de incertezas e usavam palavras e expressões obtidas nas observações e nas vivências do dia a dia para explicarem suas respostas. Além disso, a maior parte dos alunos expunham suas ideias de maneira intuitiva, ocasionando erros na interpretação do espaço amostral. Por fim, o autor frisa que a utilização da sequência didática contribuiu significantemente para a aprendizagem das noções simples de probabilidade.

Felisberto de Carvalho e Macedo (2015) apontaram os resultados de uma sequência didática, buscando debater acerca dos conhecimentos necessários aos futuros professores de matemática em suas primeiras formações para o entendimento do conceito de probabilidade. Então, o público alvo foi licenciandos em Matemática e utilizou-se para a análise, as discussões em sala de aula, o registro das respostas e estratégias adotadas para cada atividade. Os autores consideram que os licenciandos sentem dificuldades nas noções do espaço amostral, no cálculo das probabilidades, nos significados probabilísticos e ainda possuem lacunas na compreensão da probabilidade condicional. Os autores enfatizam também que há uma resistência dos licenciandos em aceitar a teoria frequentista de probabilidade.

Rezende (2013) realizou um estudo com três professoras de Matemática, tendo por finalidade analisar a movimentação dos saberes sobre probabilidade destas professoras que participavam de um grupo de pesquisa de probabilidade. Desse modo, a equipe se reuniu durante oito meses, onde existia o diário de campo da pesquisadora, gravação em áudio, fotos e registros produzidos pelos sujeitos. A autora constatou que há uma grande movimentação de saberes probabilísticos, bem como, saberes profissionais ligados á análise de erros dos discentes ao estudarem o conteúdo. De acordo com a pesquisadora, as professoras compreendem os conceitos de acaso, probabilidade, aleatório, além disso, o grupo de pesquisa foi bastante significante para as docentes, pois puderam rever seu modo de ensinar, suas práticas e puderam obter mais conhecimentos acerca do tema probabilidade.

Diante disso, percebemos que apesar dos muitos trabalhos desenvolvidos com a Probabilidade, ainda existem lacunas no ensino da mesma, desde a escolarização básica até o Ensino Superior, o que acarreta muitas dificuldades em compreender e aprender tal conteúdo.

4 METODOLOGIA

A presente pesquisa busca investigar como ocorre a construção dos conhecimentos probabilísticos de alguns licenciandos, dando ênfase a questões como compreensão, linguagem, representação, concepções de probabilidade, assim, procura vestígios das dificuldades enfrentadas pelos graduandos ao resolver a atividade proposta.

Então, a pesquisa é constituída por quatro etapas. Na primeira etapa, foi realizada uma pesquisa bibliográfica na qual se buscou ter contato com alguns trabalhos já produzidos nessa área, temas ligados ao ensino da probabilidade. Desse modo, utilizamos referenciais de livros, artigos, dissertações, teses e documentos oficiais.

Na etapa dois, foi elaborado um questionário visando identificar as concepções de probabilidade mais usadas pelos estudantes, bem como, as dificuldades encontradas pelos mesmos, a linguagem e a representação utilizadas ao resolver problemas.

Na etapa três houve a aplicação do questionário com estudantes do oitavo e nono períodos do curso de Licenciatura em Matemática. Na quarta etapa, analisamos os questionários.

O público alvo da pesquisa consiste em alunos a partir do oitavo período, mas que ainda não concluíram o curso. Cabe enfatizar que, como os alunos deste campo vêm de várias cidades do agreste pernambucano, este se constitui em um campo interessante de se pesquisar, pois abarca uma diversidade de público, com realidades distintas.

Escolhemos alunos dos últimos semestres por serem sujeitos quase graduados. Assim, estes já devem possuir experiências com o conteúdo probabilidade, pois além de ter tido contato na educação básica, estudaram disciplinas que envolviam este conteúdo no ensino superior. Então, nos possibilitará encontrar possíveis dificuldades que ainda possam existir mesmo nesses licenciandos quase prontos para lecionar na educação básica.

Nosso instrumento de pesquisa foi o questionário, contendo apenas perguntas abertas. Este foi aplicado com 15 licenciandos em Matemática, os quais serão identificados ao longo da análise por códigos L1 a L15 (distribuídos de forma aleatória), almejando preservar suas identidades.

A presente pesquisa tem caráter qualitativo e analisamos os dados baseados nos conceitos de autores como Dantas (2008), Felisberto de Carvalho e Macedo (2015), Hazzan (1946), assim como, nas concepções de Godino et al (2010) ambos apontados no nosso referencial, comparando também com as investigações semelhantes já realizadas sobre Probabilidade, as quais já apresentamos no decorrer do nosso trabalho.

4.1 A escolha do instrumento de pesquisa

Optamos pelo questionário por constituísse numa ferramenta que alcança uma grande quantidade de pessoas, as quais não necessariamente precisam está reunidas num momento comum. Isto, de certa forma facilitaria a execução da nossa pesquisa, levando em consideração os nossos objetivos.

Assim, sendo o questionário um instrumento de pesquisa "composto por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, valores, interesses, expectativas [...]" (GIL, 2008, p.121). Esta se constitui uma boa ferramenta para investigarmos os conhecimentos probabilísticos de alguns licenciandos em Matemática.

Ainda, de acordo com Gil (2008), um questionário pode conter questões fechadas, abertas e dependente, podendo ser composto por ambas as formas de questões ou apenas uma. No nosso questionário, escolhemos colocar apenas questões abertas, pois almejávamos que os estudantes ao responder apresentassem suas próprias ideias.

Contudo, é oportuno salientar que esse instrumento, assim como outros possui limitações e estas podem afetar a nossa investigação, em especial, assim como Gil (2008) aborda, as respostas dos estudantes podem não ser interessantes para os objetivos da nossa pesquisa, pode ser trabalhoso analisar as respostas e mesmo não estamos certos de que os participantes da pesquisa entregam o questionário com as questões devidamente respondidas.

4.2 Apresentação e discussão do questionário

Elaboramos e aplicamos um questionário envolvendo conhecimentos probabilísticos (conceitos, concepções, representações). Este foi composto por dez questões abertas, das quais, algumas possuíam mais de um item.

Inicialmente, os sujeitos da pesquisa deveriam preencher as informações abaixo:

Nome:____ Idade: ____________

Curso: ____ Período: __________

Semestre de ingresso na universidade: __________________________________

Nestas, solicitávamos alguns dados pessoais importantes para nossa investigação. Desse modo, o nome foi pedido almejando que os sujeitos encarassem a pesquisa com seriedade, respondendo o questionário com responsabilidade, além disso, caso surgissem alguma dúvida ou item pendente, teríamos condições de encontrar o licenciando para esclarecer. Já o curso foi solicitado para constar e garantir que os sujeitos faziam parte da Licenciatura em Matemática, pois, caso contrário, não seria útil para nossa pesquisa. Por fim, a idade, período e semestre de ingresso foram requeridos com a finalidade de verificarmos se tais dados interferiam nos conhecimentos probabilísticos apresentados pelos licenciandos.

Abaixo, apresentamos e discutimos cada questão proposta no nosso instrumento de pesquisa. Cabe salientar que por terem propósitos semelhantes, detalhamos algumas em conjunto.

Questão 1: Durante a escolaridade (educação básica) você se lembra como foram às aulas de probabilidade? Comente.
Questão 2: Durante o curso de Licenciatura em Matemática em que momentos foram abordados o conceito de probabilidade. Comente quando foi e o que você aprendeu.

Estas questões propõem ao licenciando fazer uma retrospectiva ao passado, discorrendo sobre suas aulas de probabilidade durante a Educação Básica e Ensino Superior. Almejamos com essas saber se os estudantes tiveram aulas de probabilidade no decorrer destes níveis de escolaridade (em que momento), bem como conhecer suas percepções acerca delas, mencionando o modo como eram ministradas essas aulas (se tinha experimentações, simulações, jogos, etc.), e descrevendo suas experiências com o conteúdo probabilidade.

Questão 3. Que conceito você daria a probabilidade? Como você a definiria?
Questão 4. O que é espaço amostral?
Questão 5: Como você definiria e diferenciaria fenômenos aleatórios e fenômenos determinísticos?
Questão 6: O que é evento probabilístico? Cite um exemplo.

Nas quatro questões elencadas acima, os estudantes precisarão, para resolverem, de conhecimentos adquiridos no decorrer de toda sua formação escolar envolvendo probabilidade, assim, apresentarão as noções que possuem acerca desses conceitos. Diante disso, objetivamos com elas conhecer as definições e exemplos dados por estes licenciandos, assim como o modo dos mesmos exporem tais conhecimentos, a fim de compararmos com as definições trazidas por alguns autores (referencial teórico). Concerne frisarmos a justificativa para elaboração e aplicação da questão 5: é notável que as pessoas utilizam bastante as palavras “determinísticos” e “aleatório” no seu cotidiano (principalmente a última, sendo mencionada também a palavra azar), assim, queremos saber se elas compreendem o seu significado, se compreendem esta diferença entre estes fenômenos e se sabem definir. Vale lembrar também que estes fenômenos estão muito presentes no dia a dia das pessoas, e mesmo as que não usem tais palavras, com certeza se deparam bastante com tais fenômenos.

Questão 7: Numa caixa foram colocadas três fichas quadrangulares de mesmo tamanho, sendo uma verde em ambos os lados, outra com um lado rosa e outro verde e a última com ambos os lados rosa. Ao retirarmos uma ficha da caixa, podemos obter diversos resultados. Cite um exemplo de acontecimento:

a) Impossível ____

b) Possível ____

c) Bastante Provável ____

d) Certo ____

e) Há alguma probabilidade ____

Nesta questão, trazemos para o estudante uma situação-problema a qual ele deve refletir a respeito, temos que, esta não objetiva obter dos sujeitos respostas semelhantes, visto que há diversos exemplos. Com esta atividade, podemos observar se os estudantes possuem uma linguagem probabilística, se eles dominam esta, compreendem e sabem se expressar probabilisticamente, podemos também identificar concepções probabilísticas, visto que esta questão trabalha com medidas de chances. É oportuno destacar que os conhecimentos explicitados nesta consistem em eventos, espaço amostral e experimento aleatório. Diante desta, notamos que os licenciandos podem cometer erros devido a concepções de probabilidades que possuam, eles podem se confundir com as palavras, não saberem medir chances, errar o espaço amostral, não dominarem esta linguagem probabilística.

Questão 8: Fábio e Alice adoravam jogar palitinhos (também conhecido como “porrinha”).

Jogo de palitinhos ou Porrinha

É um jogo de adivinhação e simulação. Cada jogador recebe três palitos. Eles colocam as mãos para trás e escolhem uma quantidade de palitos (1,2 ou 3), a qual colocam na mão direita (que é apresentada na frente, com a mão fechada). Posteriormente, cada jogador estipula (“chama”), mencionando o total de palitos do jogo (somando os palitos de todos). Os valores estipulados não podem ser repetidos. Vence a rodada quem falar o valor exato da soma de todos os palitos em jogo. Por fim, o jogador que vencer a rodada retira um palito e passa a jogar com um a menos. Além disso, cada jogador estipula a soma em uma rodada (isto é, tem uma ordem, aquele que estipulou primeiro em uma rodada, será o último a estipular o valor na próxima).

Regras: Vence o jogo quem ficar sem palitos primeiro. Na primeira rodada não pode vir sem nenhum palito (“vir de lona”). Não há um número máximo de jogadores, uma quantidade grande deixa o jogo cansativo, enquanto que com apenas dois jogadores, o jogo fica um pouco previsível.

Tudo indica que este jogo surgiu na “Morra”, onde os antigos romanos jogavam com os dedos, ao invés de palitos. Por outro lado, outros dizem que o nome “porrinha” originou-se da frase dita por Santo Agostinho, em meados no séc. IV d.c: “Porro cum quo micas in tenebris ei liberum est, si velit, fallere”. (Com certeza, àquele com quem jogas morra no escuro, ainda que avisado, podes enganar)

Eles jogavam com o zero na primeira rodada (ao contrário da regra do jogo). Certo dia, Fábio decidiu que seria ele o primeiro a estipular a soma dos palitos em todas as jogadas daquele dia. Observando que Alice sempre ganhava o jogo, Fábio ficou sem entender o que acontecia e começou a anotar as supostas estratégias da adversária.

i) Alice apostava bastante nas somas 3 e 4 porque ela gostava mais desses números.

ii) Se eu pedir soma 6, ela sempre acerta a soma porque é bem provável que eu esteja com 3 palitos em mãos.

iii) Durante várias jogadas repetiu-se as somas 3 e 4, então, é mais provável que continuem saindo esses resultados.

iv) Ao realizar sua jogada, independentemente da estipulação, Alice tinha 50% de chance de acertar e 50% de chance de errar a soma.

a) Você acha que Fábio fez uma boa escolha/ proposta? Justifique.

b) Por que Alice sempre vencia o jogo? Explique.

c) Você concorda com as especulações de Fábio? Qual (is)? Acrescentaria ou reformularia alguma?

Na questão acima convidamos os licenciandos a se imaginarem jogando, desse modo, temos uma questão que envolve interpretação, na qual os sujeitos deverão perceber as estratégias utilizadas pelos personagens criados. Assim, esperamos que os mesmos elenquem os possíveis resultados/somas e vejam as probabilidades, obtendo assim, suas conclusões, exemplo: Na i), esperamos que digam que Alice apostava mais em 3 e 4 porque estas somas possuem maior probabilidade de ocorrer, entretanto, eles podem concordar com o pensamento de Fábio (que ela apostava porque gostava _ concepção subjetiva), nesse sentido, nesta questão trabalhamos com as três concepções de probabilidade (clássica, frequentista e subjetiva). Cabe salientar, que no item “a)”, nos referimos a opção de Fábio, em ser o primeiro a estipular a soma em todas as rodadas do jogo. Achamos interessante explicar o funcionamento do jogo, trazendo um pequeno texto explicativo, visto que, poderíamos nos deparar com pessoas que se recusassem (ou não conseguissem) responder por não conhecer o jogo.

Questão 9: *(Adaptada de Rezende, Desenvolvimento Profissional e Pensamento Probabilístico: estudo do processo vivido por um grupo de professores de Matemática de Conselheiro Lafaiate (MG), 2013, p.90).*

A escolha

Seja você um professor de Matemática. Suponha que você vai participar de um concurso para lecionar em determinada instituição e uma das etapas do mesmo constitui-se em um jogo.

São apresentadas ao professor três envelopes com as letras A, B e C, em que uma representa a sua aprovação e as outras duas a sua reprovação. Você escolhe um dos envelopes. O aplicador da seleção, então, sabendo em qual dos envelopes está a aprovação, abre um dos envelopes que você não escolheu (onde está a reprovação). Assim, restam apenas dois envelopes (o escolhido por você e o que não foi aberto). Dentro de um deles tem a sua aprovação. O aplicador do exame, então, pergunta se você quer manter a escolha original ou quer trocar de envelope, optando pela outra que ele não abriu e que pode ter a aprovação.

O que você deve fazer?

i) Manter a escolha original?
ii) Trocar de envelope?

Observação: Os resultados dos envelopes não mudam durante o jogo.

Diante dessa situação, você pode escutar as opiniões de três dos seus alunos (os mais dedicados).

Ana diz o seguinte:

Ora, tanto faz, obviamente. Como continuo sem saber em qual envelope está a aprovação, a chance é a mesma de ele estar em qualquer um dos dois envelopes que ainda estão fechados. É claro que o fato do aplicador ter aberto uma dos envelopes onde está uma reprovação não altera em nada minhas chances – como poderia??? Tenho pela frente dois envelopes a escolher, e minha chance é de 50% de escolher o envelope certo. Tanto faz.

Carla fala:

Professor, eu acho que não deveria trocar, acho que deveria ser fiel à sua escolha original, acredito que isto é uma questão de sorte.

Tomás diz que:

Eu mudaria de envelope, com certeza! Veja: se eu pudesse optar entre escolher apenas o envelope A ou ficar com ambos os envelopes B e C, é claro que ficando com B e C eu teria mais chances de ganhar, pra ser mais exato, 2/3 concorda? Então, trocando de envelope, eu acho que é exatamente isso que acontece, uma vez que o aplicador do exame, gentilmente, abriu um dos dois envelopes e eu vi que lá só tinha uma reprovação. Então, trocar de envelope pode ser entendido como poder escolher dois envelopes de uma só vez, e, como eu não sei onde a aprovação está, isso vai me dar uma chance de 2/3 de conseguir!!!

a) Você concorda com as ideias de algum dos seus alunos? Por quê?
b) Como você resolveria essa situação?

Nesta questão trazemos uma situação-problema, que carece de interpretação para ser respondida, movimentando o raciocínio dos alunos. Almejamos com esta, identificar as concepções de probabilidade apresentadas pelos estudantes, verificar se eles conseguem fazer o cálculo da probabilidade (se vão fazer isso para resolver (esperamos que façam), pois a partir daí perceberemos os tipos de representações). Aqui, estamos trabalhando com as concepções clássica e subjetiva. Cabe destacarmos que os conceitos envolvidos nesta atividade são probabilidade, experimento aleatório, evento e espaço amostral. Além disso, é importante destacarmos que este tipo de atividade permite ao estudante pensar criticamente, conjecturar, utilizar o raciocínio.

Questão 10: Melissa vai ao shopping com as suas amigas e precisa escolher entre três saias (preta, branca e vermelha), quatro blusas (amarela, branca, rosa e cinza) e dois sapatos (branco e dourado). Com base na situação acima, responda:

a) Qual a probabilidade de Melissa obter vestes e calçados de mesma cor?

b) Cite um acontecimento impossível de ocorrer. Explique.

Consideramos esta questão bastante simples, principalmente para licenciandos em Matemática. Objetivamos com esta, perceber as representações apresentadas pelos licenciandos, ver os cálculos da probabilidade, se eles vão elencar o espaço amostral, assim como se conseguem trabalhar com a linguagem probabilística (impossível) e se sabem distinguir um evento/acontecimento em meio a uma situação dada. Os conceitos envolvidos são espaço amostral, evento, probabilidade.

Abaixo, apresentamos um quadro com resumo das atividades, objetivos e conceitos envolvidos.

Quadro 1: Resumo de atividades versus objetivos versus conceitos

ATIVIDADE PROPOSTA	OBJETIVOS	CONCEITOS ENVOLVIDOS
Discorrer sobre as aulas de probabilidade da Educação Básica e Ensino Superior.	Conhecer as percepções e experiências dos licenciandos acerca da probabilidade.	___
Definir probabilidade, espaço amostral, fenômenos aleatórios e fenômenos determinísticos, evento	Conhecer as definições e exemplos dados pelos licenciandos, comparando	Probabilidade, espaço amostral, fenômenos aleatórios

probabilístico (citar exemplo deste).	com algumas definições de autores.	e fenômenos determinísticos, evento probabilístico.
Dada uma caixa com fichas quadrangulares com lados rosa, rosa e verde, verde, respectivamente. Na retirada de uma ficha, citar exemplos de acontecimento impossível, possível, bastante provável, certo, há alguma probabilidade.	Observar a linguagem probabilística apresentada pelos licenciandos; Identificar concepções probabilísticas.	Eventos, espaço amostral, experimento aleatório.
Fábio e Alice jogavam Palitinhos ou “Porrinha” com o zero na primeira rodada. Certo dia, Fábio resolveu que seria ele o primeiro a estipular a soma dos palitos em todas as jogadas daquele dia. Ele observou que Alice sempre ganhava o jogo e começou a anotar as supostas estratégias da adversária (são dadas algumas estratégias). Você acha que Fábio fez uma boa escolha/proposta? Justifique. Por que Alice sempre vencia o jogo? Explique. Você concorda com as especulações de Fábio? Qual (is)? Acrescentaria ou reformularia alguma?	Identificar as concepções de probabilidade apresentadas pelos licenciandos (clássica, frequentista e subjetiva).	____
Suponha que você é um professor de matemática e que vai participar de um concurso para lecionar em determinada instituição e uma das etapas do mesmo constitui-se num jogo. São apresentadas ao professor três envelopes com as letras A, B e C, em que uma representa a sua aprovação e as outras duas a sua reprovação. Você escolhe um dos envelopes. O aplicador da seleção, então, sabendo em qual dos envelopes está a aprovação, abre um dos envelopes que você não escolheu (onde está a reprovação) e pergunta se você quer manter a escolha original ou quer trocar de envelope. Diante dessa situação, você pode escutar as opiniões de três dos seus alunos (os mais dedicados) _ são descritas as opiniões. Você concorda com as ideias de algum dos seus alunos? Por	Identificar as concepções de probabilidade apresentadas pelos estudantes (clássica, subjetiva); Verificar se os alunos conseguem (vão) fazer o cálculo da probabilidade.	Probabilidade, experimento aleatório, evento e espaço amostral.

quê? Como você resolveria essa situação?		
Melissa vai ao shopping com as suas amigas e precisa escolher entre três saias (preta, branca e vermelha), quatro blusas (amarela, branca, rosa e cinza) e dois sapatos (branco e dourado). Com base na situação acima, responda: Qual a probabilidade de Melissa obter vestes e calçados de mesma cor? Cite um acontecimento impossível de ocorrer. Explique.	Perceber as representações apresentadas pelos licenciandos; Observar os cálculos da probabilidade; Verificar se conseguem trabalhar com a linguagem probabilística.	Espaço amostral, evento, probabilidade.

Fonte: O autor (2016)

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

5.1 Perfil dos Sujeitos da Pesquisa

Responderam ao questionário 15 estudantes, sendo todos do curso Licenciatura em Matemática, com semestre de ingresso na universidade variando entre 2010.1 e 2012.2, tendo a maioria iniciado em 2012.1 (8 pessoas), isto é, a maior parte dos estudantes deveriam está cursando exatamente o 9º período do curso, enquanto que, dos demais havia alguns que deveriam está no 8º período e outros que já deveriam ter concluído o curso.

É importante frisar que apesar dessa grande quantidade de pessoas estarem oficialmente no 9º período, poucas dessas concluirá no devido tempo. Quanto, aos sujeitos que já ultrapassaram os 9 períodos (4 anos e meio) de curso, estes se constituem em um público que favorece ainda mais a nossa pesquisa, visto que, como estão a mais tempo na universidade é bem provável que tenham tido mais experiências com a probabilidade.

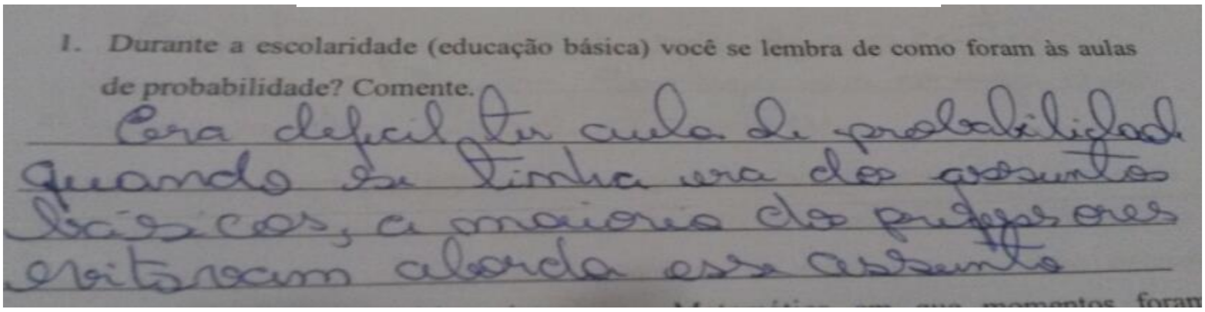
As idades dos licenciandos variavam de 22 a 44 anos, sendo que grande parte possuía 22 ou 24 anos. Além disso, ao solicitarmos o nome, mesmo enfatizando o sigilo das informações, muitos não se sentiram à vontade em se identificar, desse modo, consideramos esse item como não obrigatório, logo, a maioria optou por não colocar o nome.

5.2 Experiências com probabilidade

Para a primeira questão destacamos três tipos de respostas semelhantes encontradas nas afirmações dos licenciandos: havia os que não tiveram aulas de probabilidade, os que tiveram poucas aulas e os que afirmaram ter estudado tal conteúdo apenas no Ensino Médio.

Os dois estudantes que tiveram poucas aulas, afirmaram que estas consistiam em assuntos básicos e resolução de exercícios, conforme a resposta de L13 (Figura 1).

Figura 1: Resposta de L13 para a primeira questão

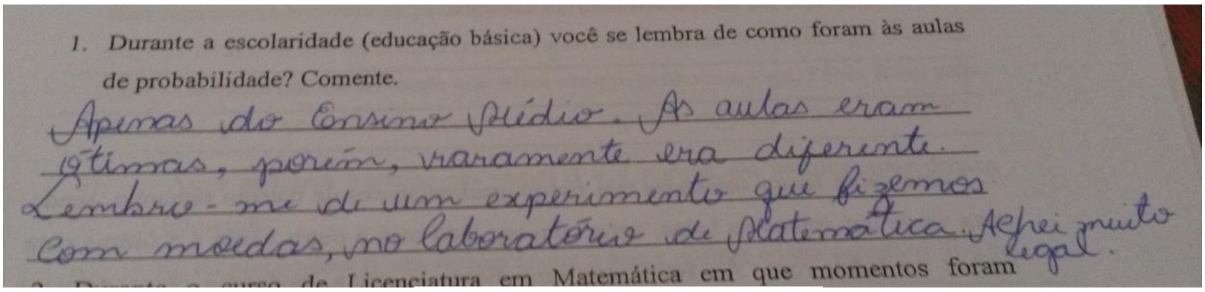

1. Durante a escolaridade (educação básica) você se lembra de como foram às aulas de probabilidade? Comente.

Era dificil ter aula de probabilidade quando eu tinha era dos assuntos básicos, a maioria dos professores evitavam aborda esse assunto

Fonte: o autor (2016)

Já entre os que afirmaram ter tido aulas de probabilidade somente no Ensino Médio (cinco licenciandos), mencionaram aulas básicas, aulas difíceis, aulas expositivas. Destacamos a resposta de L9 (Figura 2), na qual o licenciando tem aulas boas, mas entendemos que frequentemente utilizando a mesma metodologia, já que ele diz “raramente era diferente” e então o mesmo frisa uma aula em que teve experimentos (justamente a aula de que ele lembrou-se e achou interessante).

Figura 2: Resposta de L9 para a primeira questão

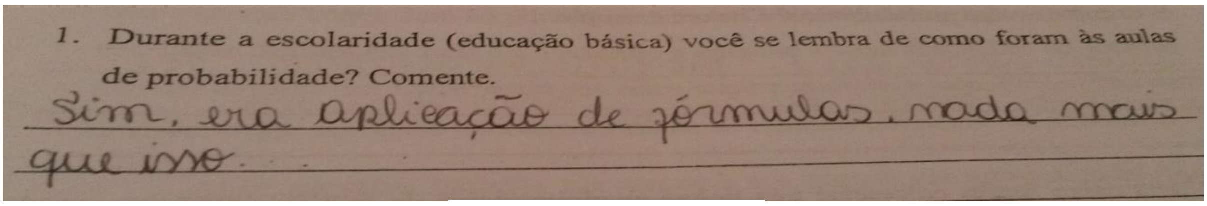

1. Durante a escolaridade (educação básica) você se lembra de como foram às aulas de probabilidade? Comente.

Apenas do Ensino Médio. As aulas eram ótimas, porém, raramente era diferente. Lembro-me de um experimento que fizemos com moedas, no laboratório de Matemática. Achei muito legal.

Fonte: O autor (2016)

Por fim, tivemos outras respostas (de seis licenciandos) que não se enquadravam nessas que destacamos, pois os licenciandos não afirmavam se tiveram poucas aulas do conteúdo ou se tiveram probabilidade apenas no Ensino Medio, nessas evidenciavam aulas expositivas, repetitivas e tradicionais (uso de fórmulas e exercícios), vejamos na Figura 3.

Figura 3: Resposta de L1 para a primeira questão



1. Durante a escolaridade (educação básica) você se lembra de como foram às aulas de probabilidade? Comente.

Sim, era aplicação de fórmulas, nada mais que isso.

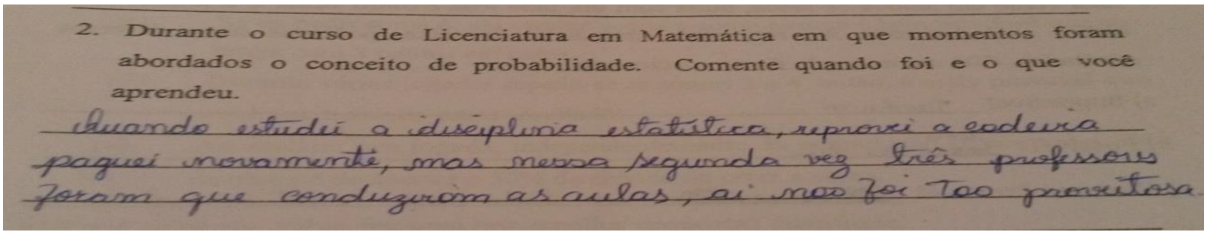
Fonte: O autor (2016)

Portanto, percebemos que ainda há pouco enfoque durante a escolarização básica do conteúdo probabilidade, e, quando se tem, o ensino deste tema geralmente ocorre no ensino médio apenas. Contudo, os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam que este ensino deve ocorrer desde os anos iniciais de escolarização dos estudantes. Além disso, notamos que nas situações em que tinham aulas sobre probabilidade os alunos enfatizaram bastante o fato de as aulas serem muito expositivas e mecânicas, muitas vezes apenas trabalhando-se com fórmulas e exercícios. Todavia, isto contraria o que autores como Lopes e Ferreira (2004) e Marocci (2011) revelam acerca do ensino de probabilidade, o qual deve ocorrer por meio de simulações, experimentações reais, investigações.

Por outro lado, na segunda questão, tivemos sete licenciandos que revelaram ter visto probabilidade na disciplina Estatística (um mencionou 2º período apenas), quatro que estudaram tais conteúdos em Matemática II e Estatística, um estudante citou Estatística e Matemática III, outro citou Metodologia da Matemática I e Matemática II bem como discussões em outras disciplinas. Por fim, tivemos um estudante que revelou não lembrar o momento/disciplina exato e outro que disse ter visto poucas vezes tais conteúdos. Diante disso, é perceptível que há uma abordagem acerca de conteúdos probabilísticos durante o curso de Licenciatura em Matemática.

Em geral, teve muitas respostas distintas relacionadas ao que aprenderam inclusive alguns nem citaram conteúdos ou algo relacionado, destacamos, por exemplo, a resposta de L14 (Figura 4).

Figura 4: Resposta de L14 para a segunda questão



2. Durante o curso de Licenciatura em Matemática em que momentos foram abordados o conceito de probabilidade. Comente quando foi e o que você aprendeu.

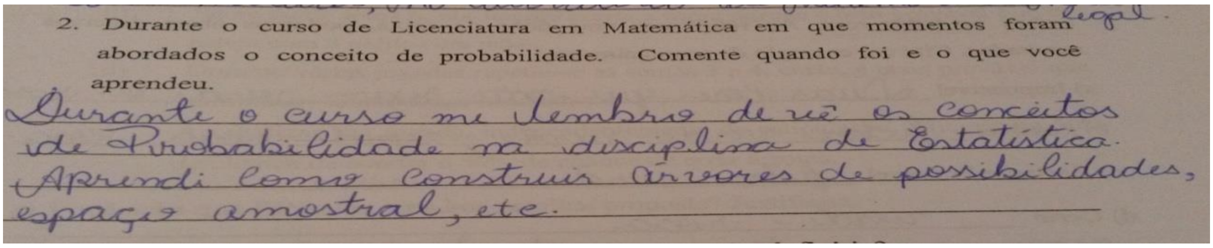
Quando estudei a disciplina estatística, reprovei a cadeira paguei novamente, mas nessa segunda vez três professores foram que conduziram as aulas, aí não foi tão proveitosa

Fonte: O autor (2016)

Notamos que o Licenciando apesar de ter cursado a disciplina Estatística pela segunda vez, não a considerou proveitosa, ou seja, entendemos que não lhe proporcionou grandes aprendizados.

Dos demais estudantes alguns mencionaram ter aprendido espaço amostral (dois), calcular a probabilidade (três). Citaram também arranjo, teoremas, combinação, árvores de possibilidades. Vejamos a Figura 5.

Figura 5: Resposta de L9 para a segunda questão


2. Durante o curso de Licenciatura em Matemática em que momentos foram abordados o conceito de probabilidade. Comente quando foi e o que você aprendeu.

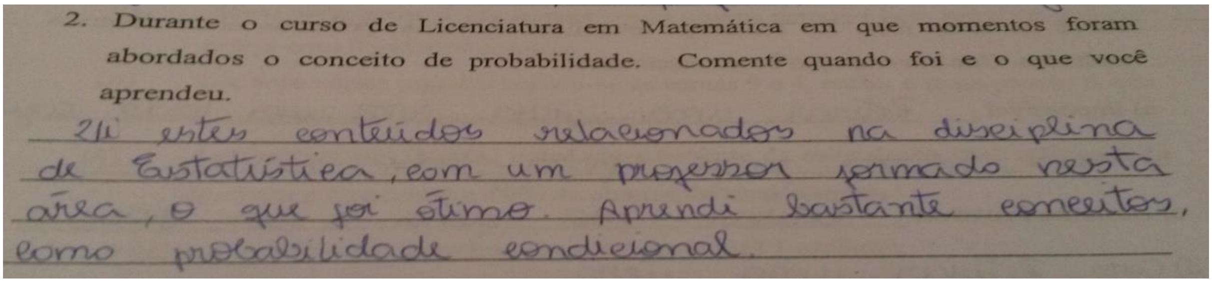
legal.

Durante o curso me lembro de ver os conceitos de Probabilidade na disciplina de Estatística. Aprendi como construir árvores de possibilidades, espaço amostral, etc.

Fonte: O autor (2016)

Um estudante afirmou ter aprendido bastantes conceitos, como probabilidade condicional, segue a resposta dele (Figura 6).

Figura 6: Resposta de L4 para a segunda questão

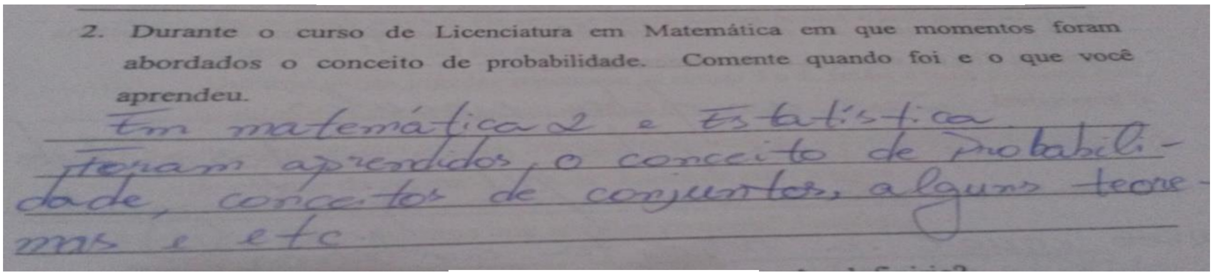

2. Durante o curso de Licenciatura em Matemática em que momentos foram abordados o conceito de probabilidade. Comente quando foi e o que você aprendeu.

Vi estes conteúdos relacionados na disciplina de Estatística, com um professor formado nesta área, o que foi ótimo. Aprendi bastante conceitos, como probabilidade condicional.

Fonte: O autor (2016)

Destacamos também a resposta de L12 (Figura 7)

Figura 7: Resposta de L12 para a segunda questão


2. Durante o curso de Licenciatura em Matemática em que momentos foram abordados o conceito de probabilidade. Comente quando foi e o que você aprendeu.

Em matemática 2 e Estatística foram aprendidos o conceito de probabili-dade, conceitos de conjuntos, alguns teore-mas e etc.

Fonte: O autor (2016)

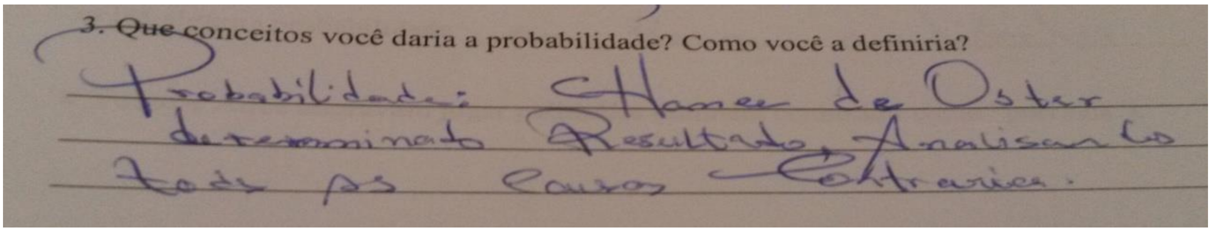
Consideramos interessantes as respostas dos três licenciandos acima, pois os mesmos afirmam terem aprendidos alguns conceitos. Por fim, tivemos dois estudantes que revelaram não terem aprendido conteúdos de probabilidade durante o curso de Licenciatura e um que afirmou que estes conteúdos foram vistos de modo superficial.

Salientamos a importância dos futuros docentes adquirirem conhecimentos relacionados à probabilidade durante a sua formação inicial, conhecimentos estes, que não devem se referir apenas aos conhecimentos comuns, assim como nos aporta Lopes (2008) e Carvalho e Macedo (2015).

5.3 Conceitos relacionados à probabilidade

Na terceira questão, muitos licenciandos (seis) definiram probabilidade como chance (Figura 8). Esta confusão de ideias já nos tinha sido alertada por Felisberto de Carvalho e Macedo (2015).

Figura 8: Resposta de L6 para a terceira questão


3. Que conceitos você daria a probabilidade? Como você a definiria?

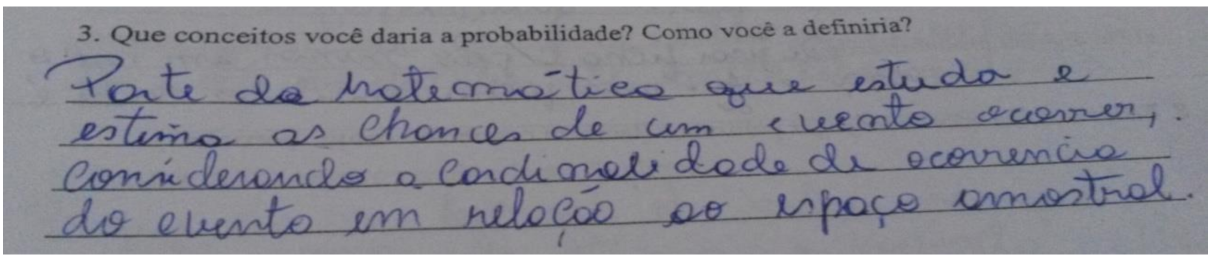
Probabilidade: Chance de Ocorrer determinado Resultado, Analisando todas as Causas Contrarias.

Fonte: O autor (2016)

Tivemos ainda, dois licenciandos que consideraram probabilidade como possibilidades, isto é, também veem probabilidade como chance, de acordo com a definição de chance trazida no nosso referencial teórico.

Dois estudantes definiram probabilidade como uma parte da matemática. Entretanto, consideramos uma destas definições como a mais aproximada da apontada no nosso referencial (Figura 9).

Figura 9: Resposta de L8 para a terceira questão


3. Que conceitos você daria a probabilidade? Como você a definiria?

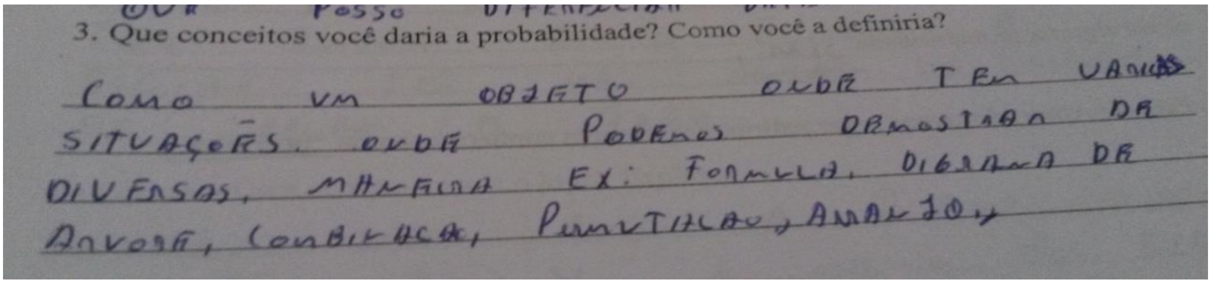
Parte da matemática que estuda e estima as chances de um evento ocorrer, considerando a condicionalidade de ocorrência do evento em relação ao espaço amostral.

Fonte: O autor (2016)

Percebemos que o estudante L8 apresenta certa noção de probabilidade, pois além de afirmar que a probabilidade estima a chance de um evento ocorrer, já começa a nos dá uma ideia de como calcular esta chance.

Dentre os demais estudantes, dois nos deram respostas que não condiziam com a nossa questão, um estudante usou palavras relacionadas à probabilidade, porém não a definiu. Já outro licenciando apresentou a probabilidade como um método de representação (Figura 10).

Figura 10: Resposta de L3 para a terceira questão

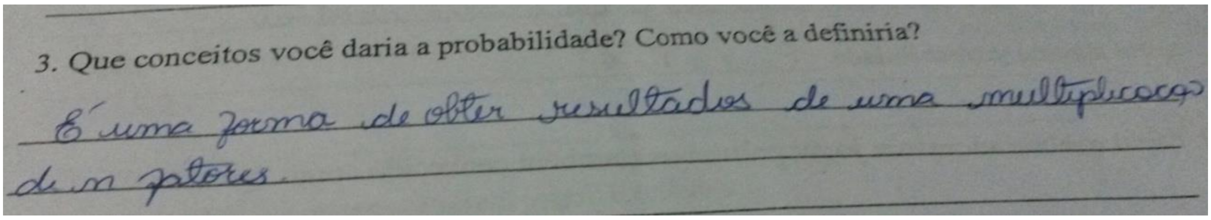

3. Que conceitos você daria a probabilidade? Como você a definiria?

COMO UM OBJETO ONDE TEM VARIAS SITUAÇÕES. ONDE PODEMOS DEMOSTRAR DE DIVERSAS, MANEIRA EX: FORMULA, DIAGRAMA DE ARVORE, COMBINAÇÃO, PERMUTAÇÃO, ARRANJO,

Fonte: O autor (2016)

Discorre que este licenciando talvez tenha visto em sala de aula estes diversos métodos de representação e tenha associado ao conceito de probabilidade. Por fim, achamos pertinente a reposta de L14, o qual entende probabilidade como uma área.

Figura 11: Resposta de L14 para a terceira questão


3. Que conceitos você daria a probabilidade? Como você a definiria?

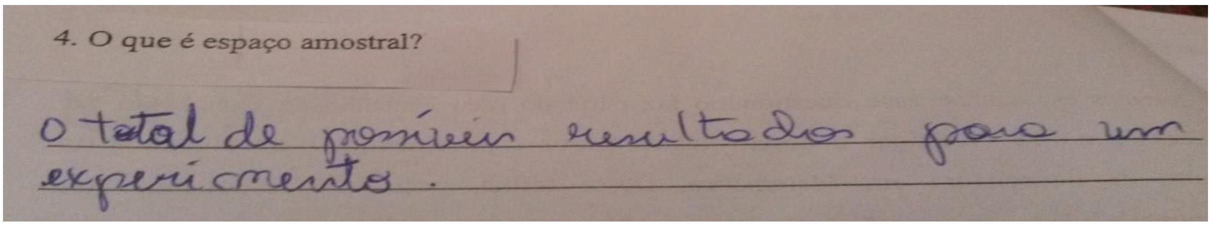
É uma forma de obter resultados de uma multiplicação de n fatores.

Fonte: O autor (2016)

Note que o licenciando acima nos fala de uma multiplicação de n fatores, assim, faz-nos lembrar da área de um quadrado, a qual é constituída pela multiplicação de dois de seus lados.

Na quarta questão, quatro licenciandos definiram o espaço amostral corretamente de acordo com a definição de Hazzan (1946), observe a figura 12.

Figura 12: Resposta de L8 para a quarta questão

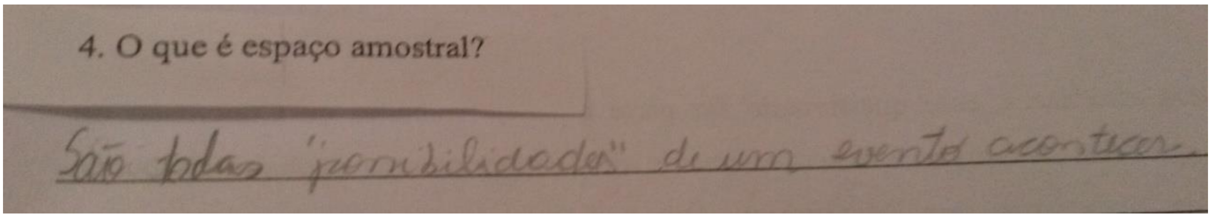

4. O que é espaço amostral?

O total de possíveis resultados para um experimento.

Fonte: O autor (2016)

Tivemos também quatro licenciandos que definiram o espaço amostral como todas as possibilidades de um evento (Figura 13), assim, parece não compreenderem o que é um evento. Ainda, tivemos dois licenciandos que definiram como um conjunto do qual se calcula a probabilidade e um licenciando que deixou em branco.

Figura 13: Resposta de L1 para a quarta questão


4. O que é espaço amostral?

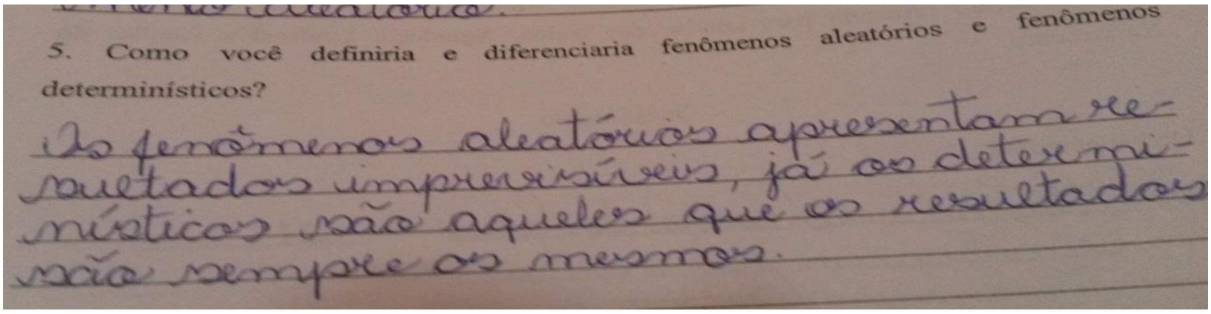
São todas "possibilidades" de um evento acontecer.

Fonte: O autor (2016)

Obtemos ainda respostas como: todos os elementos de um conjunto; o conjunto de todos os valores possíveis; o espaço de todos os elementos que estou trabalhando; várias situações diferentes. Consideramos que tais licenciandos nos apresentam definições muito amplas, ao se referir a "todos os elementos", "todos os valores possíveis", se esquecem de especificar o que estão falando, de restringir a um experimento.

Na quinta questão, seis estudantes apresentaram as definições que mais se aproximaram da apresentada por Dantas (2008), observemos a resposta de L15.

Figura 14: Resposta de L15 para a quinta questão

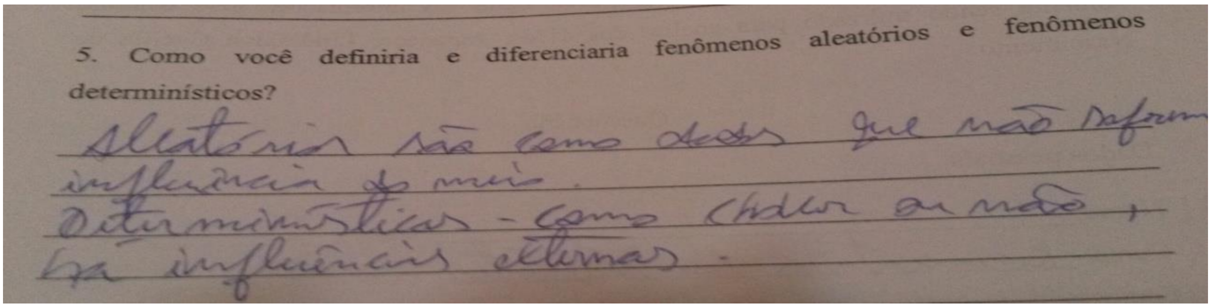

5. Como você definiria e diferenciaria fenômenos aleatórios e fenômenos determinísticos?

Os fenômenos aleatórios apresentam resultados imprevisíveis, já os determinísticos são aqueles que os resultados são sempre os mesmos.

Fonte: O autor (2016)

Dois licenciandos não responderam a essa questão. Dois estudantes definiram experimentos aleatórios e determinísticos como sendo os que não obedecem e os que obedecem a ordens, respectivamente. Dos demais estudantes encontramos respostas variadas, que se mostram confusas em relação a nossa pergunta. Destacamos a resposta da figura 15.

Figura 15: Resposta de L11 para a quinta questão

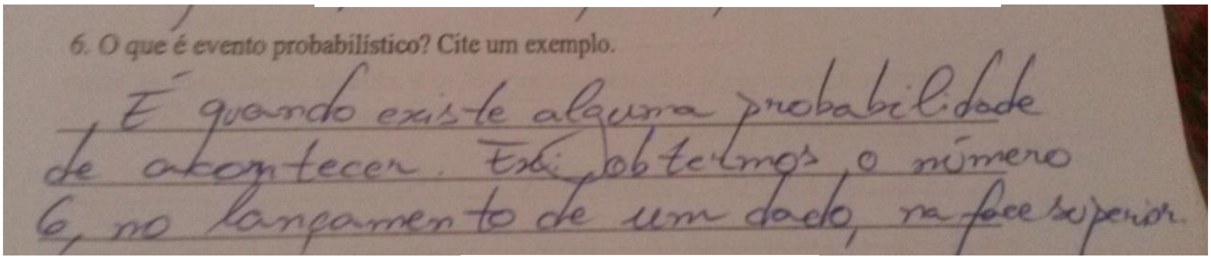


Fonte: O autor (2016)

Este licenciando se recorda que um experimento com dados se constitui um experimento aleatório, porém no exemplo de experimento determinístico, o mesmo se atrapalha. Além disso, ele não nos apresenta uma definição de tais experimentos, apenas tenta dar exemplos.

A sexta questão, dois licenciandos deixaram em branco, quatro nos trouxeram respostas que não condizem com a nossa proposta (entretanto, um desses nos apresenta um exemplo de evento probabilístico), seis definiram evento probabilístico como aquele que possui uma probabilidade envolvida (Figura 16).

Figura 16: Resposta de L12 para a sexta questão

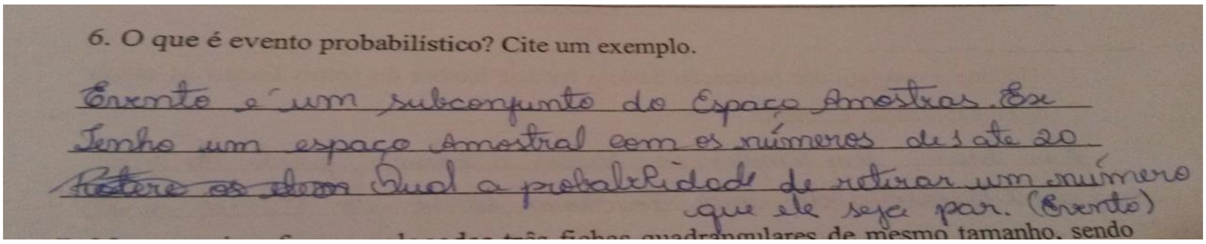


Fonte: O autor (2016)

Observamos que na resposta do licenciando (L12), é apresentado corretamente um exemplo de evento probabilístico. Cabe destacarmos que outros seis licenciandos apresentam também exemplos corretos, inclusive, um destes tentou apresentar a definição por meio de um exemplo.

Além disso, dois estudantes definiram evento como algo que pode calcular a chance. Por fim, destacamos a resposta de L14, a qual, consideramos semelhante à definição dada por Hazzan (1946).

Figura 17: Resposta de L14 para a sexta questão



Fonte: O autor (2016)

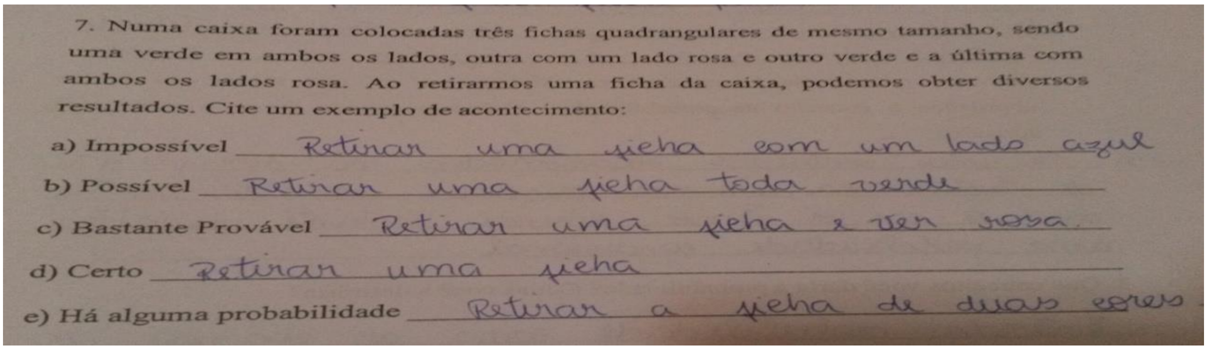
Percebemos que o licenciando reconhece e define evento como um subconjunto do espaço amostral e ainda nos apresenta um exemplo. Porém cabe frisar que somente um estudante definiu evento probabilístico desta maneira.

Logo, conceituar/definir consiste uma tarefa bastante complicada. Assim como nos revela Barros e Fernandes (2001) acerca das dificuldades dos estudantes em aprenderem tais conceitos. Então, notamos tais dificuldades nesses licenciandos em Matemática, visto que nas quatro questões que solicitávamos alguns conceitos, houve, em geral, poucas semelhanças ("acertos") em relação aos conceitos apresentados pelos autores. Em relação aos conceitos de Probabilidade e Evento Probabilístico houve apenas 1 resposta "correta" de cada , quanto ao Espaço Amostral houve 4 definições "corretas" e sobre Experimentos Aleatórios e Determinísticos encontramos 6 respostas "corretas". Este último dado talvez tenha ocorrido pelo fato dos estudantes terem mais familiaridade com tais fenômenos, lidando com eles inclusive no seu cotidiano. Diante disso, aqui, assim como nas pesquisas de Santana (2011) percebemos dificuldades dos licenciandos com os conceitos de probabilidade, espaço amostral, evento, fenômenos. Por fim, é oportuno ressaltar que os estudantes têm mais facilidades em apresentar exemplos, do que definir (ficou nítido na sexta questão), desse modo, ás vezes, alguns tentam fazer isso através de exemplos.

5.4 Linguagem e representação

Na sétima questão, apenas dois alunos (L2 e L4) demonstraram não ter dificuldades em citar exemplos de todos os acontecimentos solicitados (Figura 18), três estudantes não compreenderam o que seria um acontecimento certo, dois tiveram dificuldades em citar um acontecimento impossível, dois não entenderam o "bastante provável" e cinco não compreenderam o que seria um acontecimento em que "há alguma probabilidade".

Figura 18: Resposta de L4 para a sétima questão


7. Numa caixa foram colocadas três fichas quadrangulares de mesmo tamanho, sendo uma verde em ambos os lados, outra com um lado rosa e outro verde e a última com ambos os lados rosa. Ao retirarmos uma ficha da caixa, podemos obter diversos resultados. Cite um exemplo de acontecimento:

a) Impossível Retirar uma ficha com um lado azul

b) Possível Retirar uma ficha toda verde

c) Bastante Provável Retirar uma ficha e ver rosa.

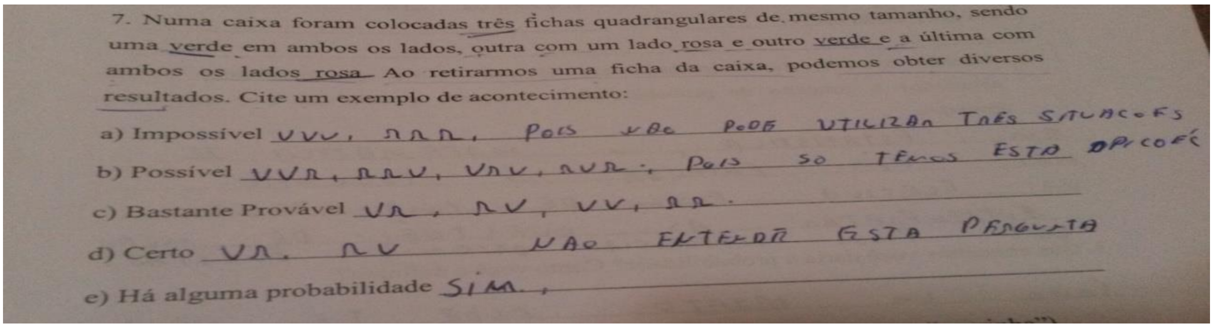
d) Certo Retirar uma ficha

e) Há alguma probabilidade Retirar a ficha de duas cores

Fonte: O autor (2016)

Encontramos ainda quatro estudantes que apresentaram respostas não adequadas a nossa pergunta, destacamos abaixo uma dessas respostas (Figura 19).

Figura 19: Resposta de L3 para a sétima questão


7. Numa caixa foram colocadas três fichas quadrangulares de mesmo tamanho, sendo uma verde em ambos os lados, outra com um lado rosa e outro verde e a última com ambos os lados rosa. Ao retirarmos uma ficha da caixa, podemos obter diversos resultados. Cite um exemplo de acontecimento:

a) Impossível VVV, RRR, POIS NÃO PODE UTILIZAR TRÊS SITUAÇÕES

b) Possível VVR, RRV, VRV, RVR, POIS SÓ TEMOS ESTA OPÇÕES

c) Bastante Provável VR, RV, VV, RR.

d) Certo VR, RV NÃO ENTENDI ESTA PERGUNTA

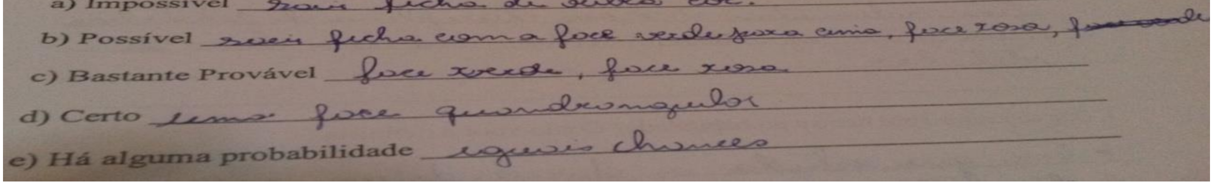
e) Há alguma probabilidade SIM.

Fonte: O autor (2016)

Notamos que L3 possui dificuldades com a linguagem probabilística, ou então, não compreendeu o enunciado da questão. Consideramos que ele tomou como espaço amostral as cores e não as fichas, o que ocasionou o erro.

Quanto aos que se equivocaram em relação ao acontecimento que “Há alguma probabilidade”, temos a resposta de L7.

Figura 20: Resposta de L7 para a sétima questão


7. Numa caixa foram colocadas três fichas quadrangulares de mesmo tamanho, sendo uma verde em ambos os lados, outra com um lado rosa e outro verde e a última com ambos os lados rosa. Ao retirarmos uma ficha da caixa, podemos obter diversos resultados. Cite um exemplo de acontecimento:

a) Impossível sair ficha de outra cor.

b) Possível sair ficha com a face verde para cima, face rosa,

c) Bastante Provável face verde, face rosa.

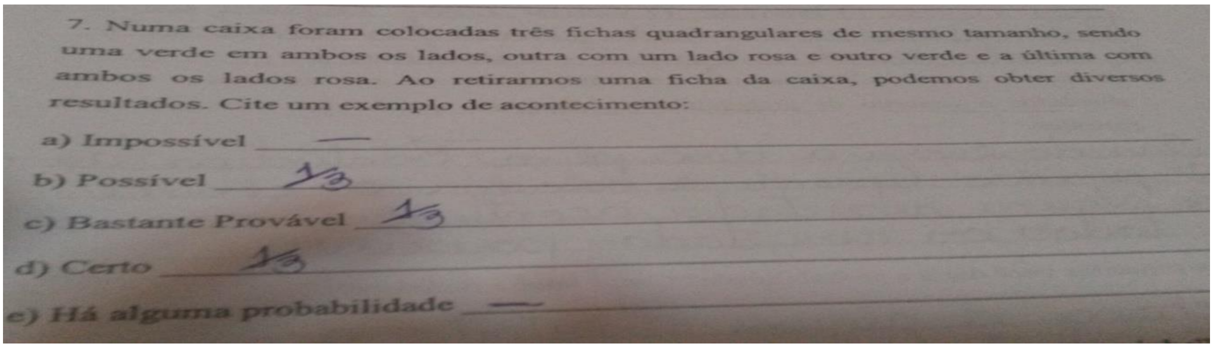
d) Certo temos face quadrangular

e) Há alguma probabilidade iguais chances

Fonte: O autor (2016)

O licenciando acima destacado assim como alguns dos que erraram o item “e)”, não entendeu que deveria citar um exemplo de acontecimento que achasse que tinha alguma probabilidade. O mesmo entende o termo “Há alguma probabilidade” como o cálculo de uma probabilidade ou algo parecido. Por outro lado, o licenciando L15, aparenta ter compreendido a questão toda neste sentido (de calcular probabilidade).

Figura 21: Resposta de L15 para a sétima questão



7. Numa caixa foram colocadas três fichas quadrangulares de mesmo tamanho, sendo uma verde em ambos os lados, outra com um lado rosa e outro verde e a última com ambos os lados rosa. Ao retirarmos uma ficha da caixa, podemos obter diversos resultados. Cite um exemplo de acontecimento:

a) Impossível —

b) Possível 1/3

c) Bastante Provável 1/3

d) Certo 1/3

e) Há alguma probabilidade —

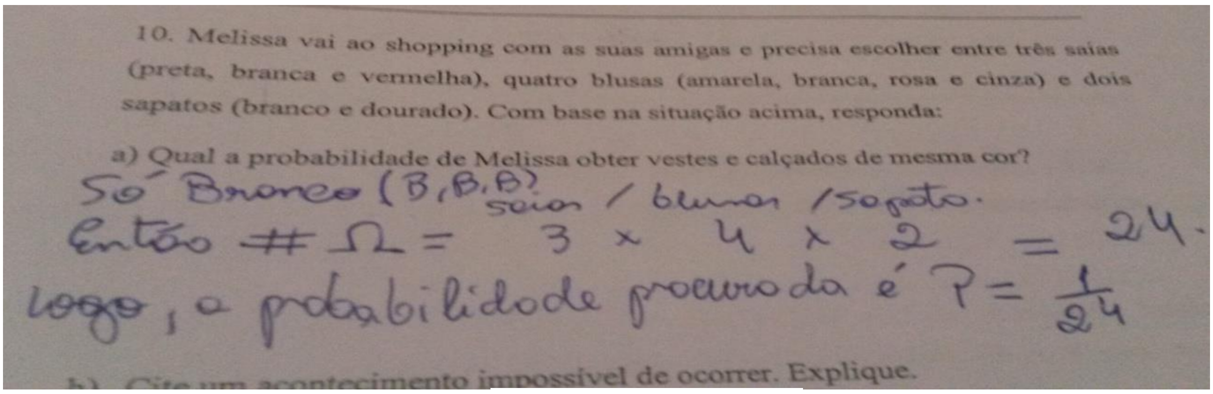
Fonte: O autor (2016)

Note que o estudante, não cita exemplos de acontecimentos e apresenta apenas algumas frações (sem justificativas) as quais entendemos se tratar de probabilidades. Assim, é perceptível que este licenciando não compreendeu o enunciado da questão.

Por fim, salientamos que muitos estudantes, nesta questão, buscaram citar todos os exemplos possíveis que conseguiam, apesar de termos solicitado apenas um.

Na última questão (décima), no item “a)” tivemos um total de nove acertos da probabilidade, sendo que três estudantes não realizaram cálculos (colocaram apenas a resposta final), entendemos que isto deveu-se a simplicidade da questão abordada. Destacamos abaixo as respostas de L8, L10 e L12, por apresentarem modos diferentes de representação no decorrer do cálculo de uma probabilidade.

Figura 22: Resposta de L8 para o item a) da décima questão



10. Melissa vai ao shopping com as suas amigas e precisa escolher entre três saias (preta, branca e vermelha), quatro blusas (amarela, branca, rosa e cinza) e dois sapatos (branco e dourado). Com base na situação acima, responda:

a) Qual a probabilidade de Melissa obter vestes e calçados de mesma cor?

Só Branco (B, B, B) saias / blusas / sapato.

Então $\#\Omega = 3 \times 4 \times 2 = 24$.

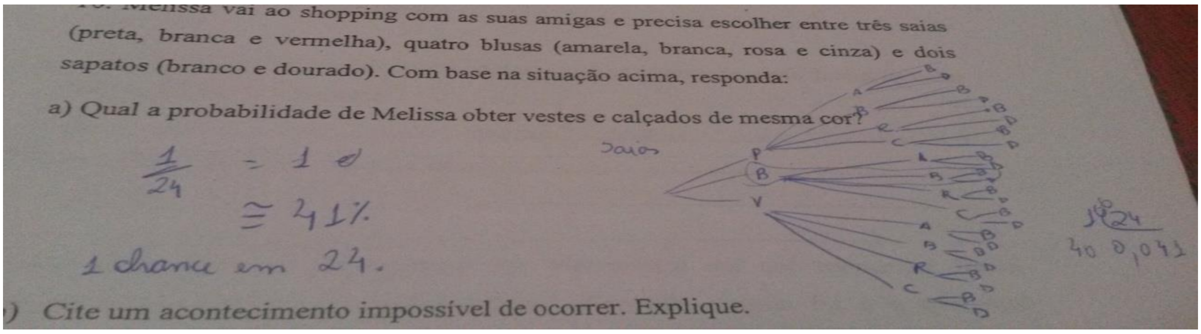
Logo, a probabilidade procurada é $P = \frac{1}{24}$

b) Cite um acontecimento impossível de ocorrer. Explique.

Fonte: O autor (2016)

Este licenciando já utiliza uma notação de probabilidade de ensino superior (#Ω), assim, já encontra o espaço amostral final e a partir daí calcula a probabilidade. Cabe ressaltar que outros estudantes também encontram o espaço amostral deste modo, porém não detalham, não citam a expressão #Ω.

Figura 23: Resposta de L10 para o item a) da décima questão


10. Melissa vai ao shopping com as suas amigas e precisa escolher entre três saias (preta, branca e vermelha), quatro blusas (amarela, branca, rosa e cinza) e dois sapatos (branco e dourado). Com base na situação acima, responda:

a) Qual a probabilidade de Melissa obter vestes e calçados de mesma cor?

$\frac{1}{24} = 1$ ≅ 4,1%

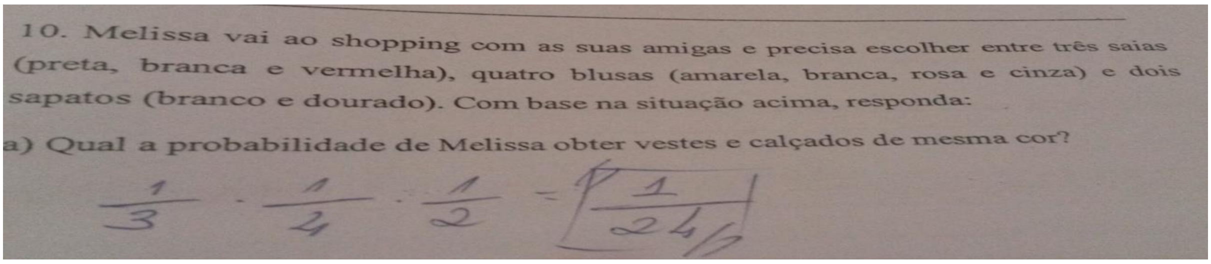
1 chance em 24.

b) Cite um acontecimento impossível de ocorrer. Explique.

Fonte: O autor (2016)

Na resposta acima, o estudante utiliza a árvore de possibilidades para encontrar o espaço amostral e logo após calcular a probabilidade, por fim ele ainda calcula o percentual referente à probabilidade. Cabe ressaltarmos que a árvore de possibilidades constitui-se numa representação que auxilia o estudante a resolver o problema, já que possibilita realizar uma listagem de todas as possibilidades, organizando seus conhecimentos. Todavia, não esperávamos que o licenciando utilizasse tal representação para resolver o problema, visto que é uma atividade simples e essa representação geralmente é muito utilizada no ensino básico.

Figura 24: Resposta de L12 para o item a) da décima questão


10. Melissa vai ao shopping com as suas amigas e precisa escolher entre três saias (preta, branca e vermelha), quatro blusas (amarela, branca, rosa e cinza) e dois sapatos (branco e dourado). Com base na situação acima, responda:

a) Qual a probabilidade de Melissa obter vestes e calçados de mesma cor?

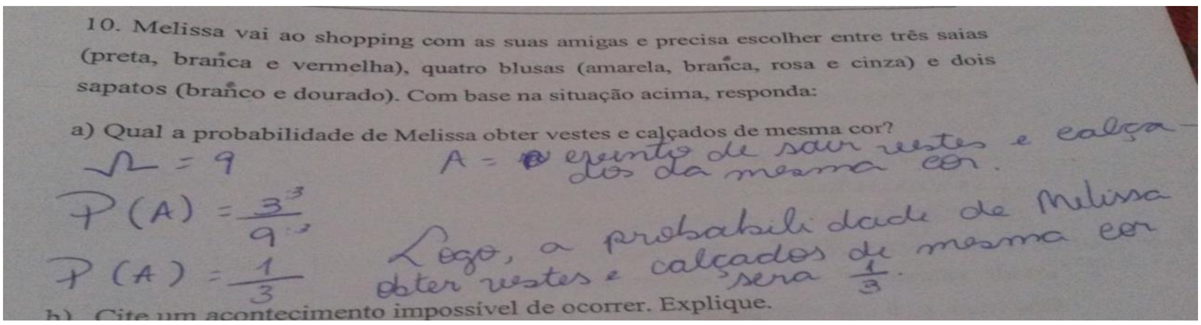
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{24}}$

Fonte: O autor (2016)

O estudante L12 calcula a probabilidade do modo como geralmente aprendemos no ensino básico, onde calculamos as probabilidades dos eventos separadamente, o mesmo faz isto de maneira bem sucinta.

Dos estudantes que erraram esta questão, achamos pertinente discutir a resposta de L9.

Figura 25: Resposta de L9 para o item a) da décima questão


10. Melissa vai ao shopping com as suas amigas e precisa escolher entre três saias (preta, branca e vermelha), quatro blusas (amarela, branca, rosa e cinza) e dois sapatos (branco e dourado). Com base na situação acima, responda:

a) Qual a probabilidade de Melissa obter vestes e calçados de mesma cor?

$\Omega = 9$

A = evento de sair vestes e calçados da mesma cor.

$P(A) = \frac{3}{9}$

$P(A) = \frac{1}{3}$

Logo, a probabilidade de Melissa obter vestes e calçados de mesma cor será $\frac{1}{3}$.

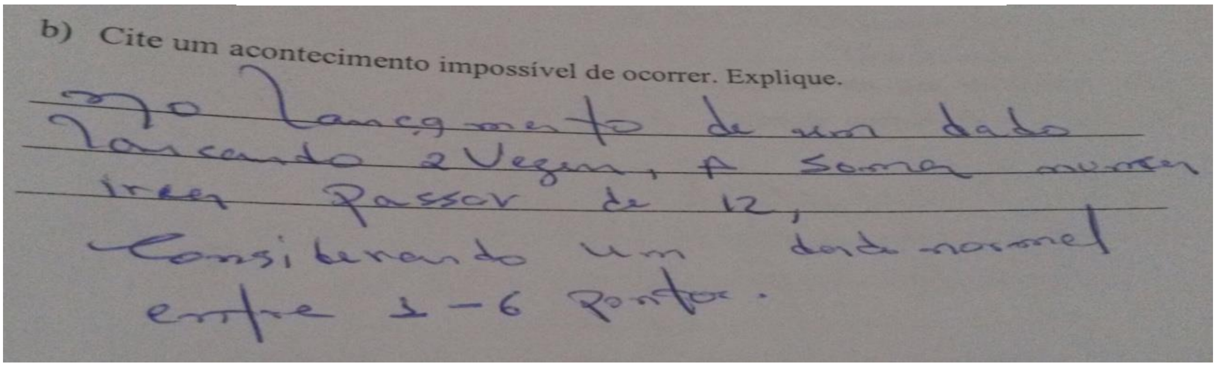
b) Cite um acontecimento impossível de ocorrer. Explique.

Fonte: O autor (2016)

O estudante elencado acima pensa na probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, entretanto, ele comete erros ao visualizar o espaço amostral, bem como em detectar o número de casos possíveis. Desse modo, visualiza as cores das três peças (blusa, saia e sapato) separadamente e não como um conjunto que formaria o evento único (vestes e calçados brancos).

No item b) dessa mesma questão, a investigação nos forneceu sete acertos, três respostas em branco e cinco erros. Em relação a estes últimos, vejamos a Figura 26.

Figura 26: Resposta de L6 para o item b) da décima questão



Fonte: O autor (2016)

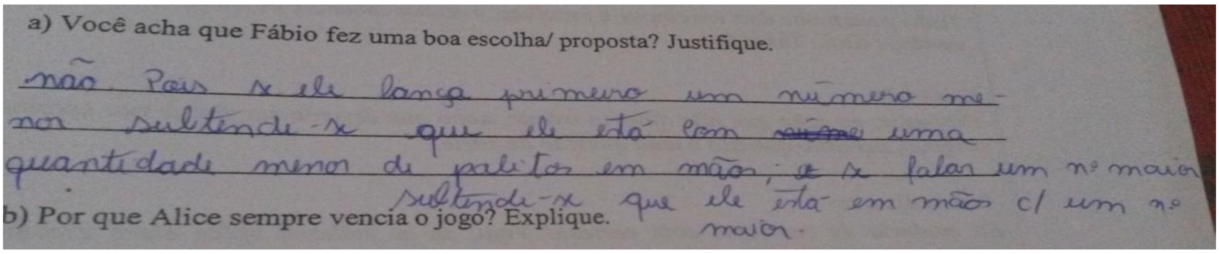
É perceptível que o erro acorreu devido ao não entendimento, ou mesmo falta de atenção (distração) do enunciado da questão, pois a lógica de acontecimento impossível está correta. Vale destacar que alguns dos que erraram esta questão, cometeram este mesmo equívoco.

Portanto, percebemos que os licenciandos possuem dificuldades em trabalhar com a linguagem probabilística, assim como nos estudos de Santos (2010), encontramos equívocos de linguagem e equívocos ao se interpretar o espaço amostral. Cabe enfatizar que os estudantes tiveram bastante dificuldade, principalmente no entendimento da expressão “há alguma probabilidade”. Já em relação ao cálculo simples da probabilidade, a maioria dos estudantes mostrou dominar tais cálculos, além disso, notamos que os alunos usam mais de uma forma de representação para resolver o cálculo da probabilidade, porém esperávamos que tivesse um quantitativo maior de acertos, visto que consideramos a questão de nível fácil.

5.5 Concepções de Probabilidade

No item a) da oitava questão, a maioria dos licenciandos (nove) considerou que Fábio não fez uma boa proposta, muito das justificativas se referiam ao fato de Alice sair em vantagem por saber das estimativas dele (Figura 27), o que já era esperado, visto que isto é a ideia correta da questão. Enquanto que os demais afirmaram o contrário (que Fábio fez uma boa escolha).

Figura 27: Resposta de L10 para o item a) da oitava questão



a) Você acha que Fábio fez uma boa escolha/ proposta? Justifique.

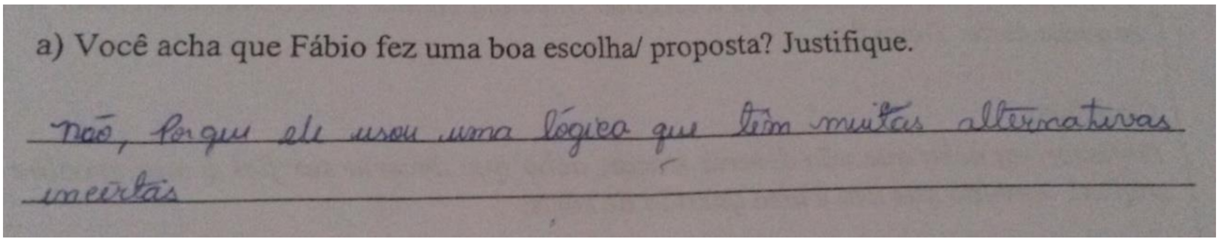
não. Pois se ele lança primeiro um número menor subtende-se que ele está com uma quantidade menor de palitos em mãos; se falar um nº maior subtende-se que ele está em mãos c/ um nº maior.

b) Por que Alice sempre vencia o jogo? Explique.

Fonte: O autor (2016)

Contudo, achamos pertinente destacar a resposta de L14.

Figura 28: Resposta de L14 para o item a) da oitava questão



a) Você acha que Fábio fez uma boa escolha/ proposta? Justifique.

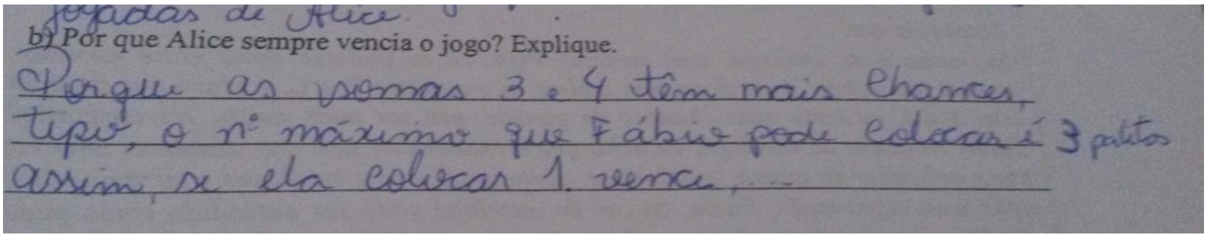
não, porque ele usou uma lógica que têm muitas alternativas incertas

Fonte: O autor (2016)

O estudante acima, já elenca as observações de Fábio depois de ter realizado diversas rodadas do jogo (digamos que no fim) e utiliza isto como justificativa dele não ter feito uma boa proposta. Assim, entendemos que apesar do licenciando está certo em relação ás observações de Fábio, não interpretou corretamente o problema.

Em relação ao item b) dessa questão, a maioria dos licenciandos (nove) afirmou que Alice sempre vencia o jogo, porque se baseava na resposta de Fábio (sendo que dois desses, no item anterior, afirmaram que Fábio fez uma boa proposta, isto é, entraram em contradição). Tivemos um estudante que deixou esta atividade em branco e três estudantes que afirmaram que Alice vencia porque utilizava boas estratégias (explicitavam isto utilizando o fato de ela sempre utilizar uma mesma quantidade), vejamos a figura abaixo.

Figura 29: Resposta de L9 para o item b) da oitava questão


jogadas de Alice.

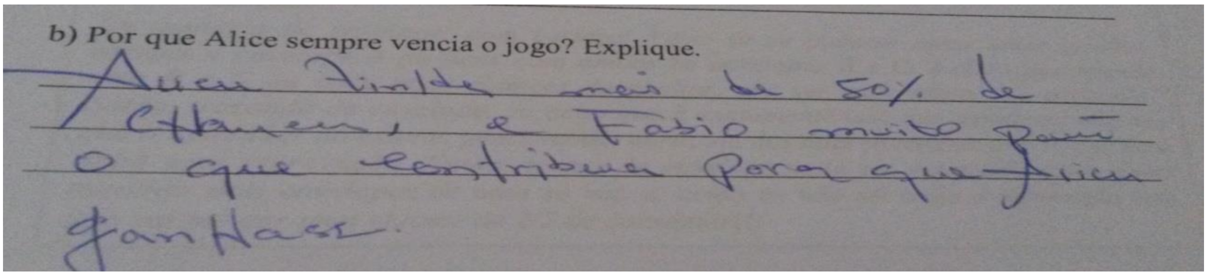
b) Por que Alice sempre vencia o jogo? Explique.

Porque as somas 3 e 4 têm mais chances, tipo, o nº máximo que Fábio pode colocar é 3 palitos assim, se ela colocar 1, vence, ...

Fonte: O autor (2016)

Tivemos ainda dois licenciandos que nos apresentaram justificativas interessantes, as quais, iremos frisar nas figuras adiante.

Figura 30: Resposta de L6 para o item b) da oitava questão

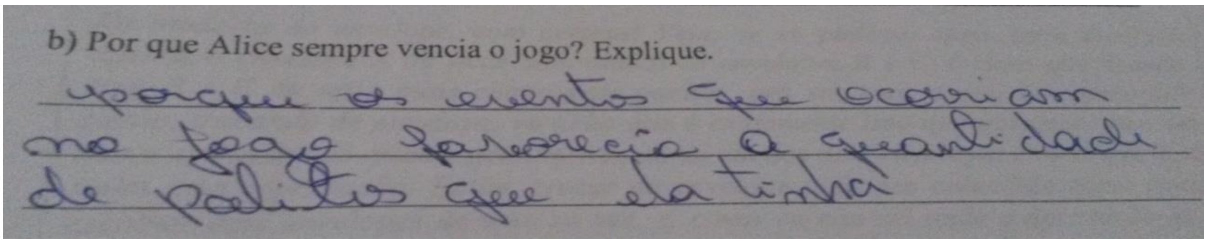

b) Por que Alice sempre vencia o jogo? Explique.

Alice tinha mais de 50% de chances, e Fabio muito pouco o que contribuia para que Alice ganhasse.

Fonte: O autor (2016)

Na resposta acima, L6 diz que Alice tinha mais de 50% de chances de vencer. Desse modo, o estudante entende que por Alice já souber a estimativa de Fábio, suas chances aumentavam.

Figura 31: Resposta de L13 para o item b) da oitava questão


b) Por que Alice sempre vencia o jogo? Explique.

porque os eventos que ocorriam no jogo favorecia a quantidade de palitos que ela tinha

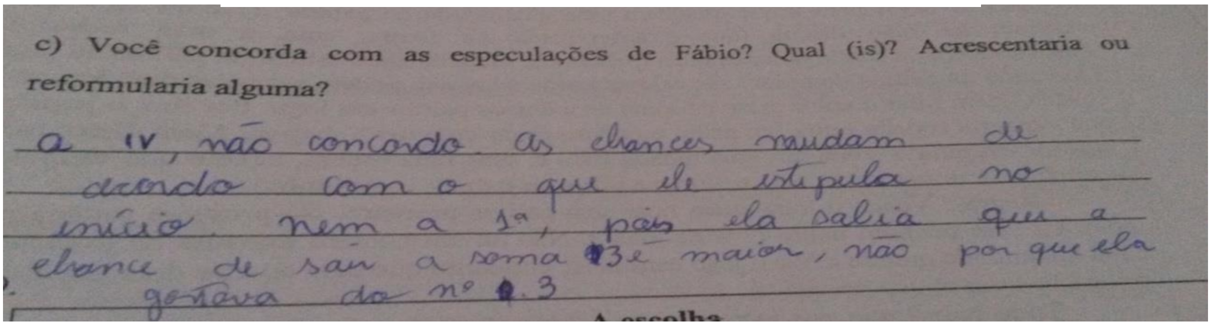
Fonte: O autor (2016)

Notamos que nesta resposta o licenciando atribui à sorte o motivo de Alice sempre ganhar o jogo. Nesse sentido, identificamos a concepção subjetivista na fala deste sujeito.

Por fim, no item c) da oitava questão (nosso foco principal desta), quase todos os estudantes (14 aproximadamente) concordaram com algumas ou todas as especulações de Fábio. Entretanto, apenas 5 licenciandos mencionaram os itens que concordavam, muitos nos deram respostas vazias tais como: Sim, não mudaria; tá ótimo, etc.

Dentre as respostas dos cinco estudantes, identificamos as concepções frequentista (três alunos) e clássica (dois alunos). Destacamos a resposta de L10 para evidenciar tal fato.

Figura 32: Resposta de L10 para o item c) da oitava questão


c) Você concorda com as especulações de Fábio? Qual (is)? Acrescentaria ou reformularia alguma?

a IV, não concordo as chances mudam de acordo com o que ele estipula no início. nem a 1ª, pois ela sabia que a chance de sair a soma 3 é maior, não porque ela gostava do nº 3

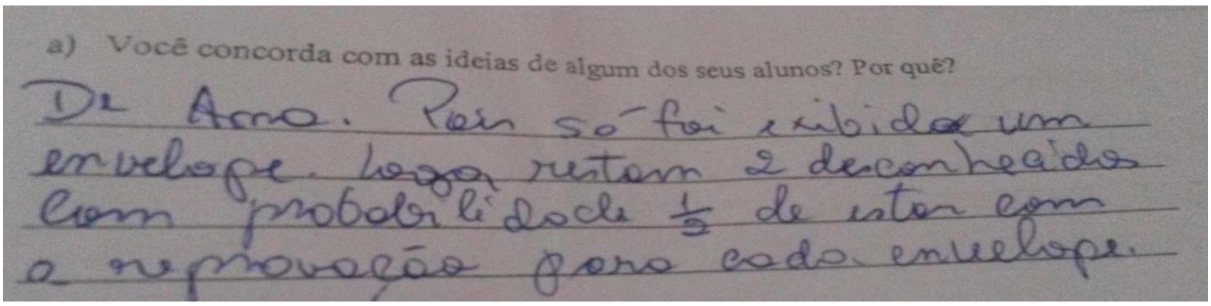
Fonte: O autor (2016)

Na resposta acima, o licenciando deixa claro sua discordância com as concepções subjetivista e clássica. Assim, mostra concordar apenas com as especulações (ii) e (iii), as quais nos dão ideia de um fenômeno certo e traz a concepção frequentista, respectivamente.

Em relação à nona questão, no item a), 7 licenciandos concordaram com Ana, 3 concordaram com Tomás, 2 afirmaram concordar com os três alunos (Ana, Carla e Tomás), 1 com Ana e Carla, 1 apenas com Carla e 1 não respondeu a questão. Logo, de acordo com as concepções elencadas por Godino et al (2010), tivemos um maior quantitativo de estudantes (sete) que se identificaram com a concepção clássica de probabilidade (lógica de Ana). Convém frisar que os estudantes utilizaram os argumentos encontrados nas falas do texto para justificarem suas escolhas.

Não encontramos cálculos de probabilidades realizados pelos estudantes, muito menos listagem de espaço amostral. Nesse sentido, observemos a resposta de L8.

Figura 33: Resposta de L8 para o item a) da nona questão


a) Você concorda com as ideias de algum dos seus alunos? Por quê?

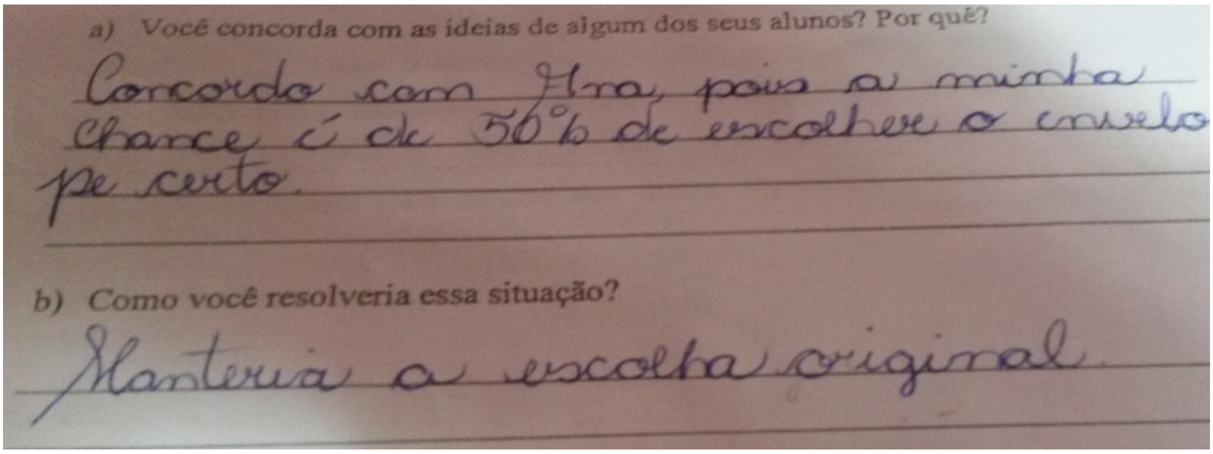
De Ana. Pois só foi exibido um envelope. Logo, restam 2 desconhecidos com probabilidade $\frac{1}{2}$ de estar com a reprovação para cada envelope.

Fonte: O autor (2016)

Percebemos que L8, assim como outros desta pesquisa, não realiza cálculos de probabilidade, nem elenca o espaço amostral (apesar de aparentar), ele utiliza os argumentos encontrados no texto (note que 1/2 = 50%). Este apresenta durante esta atividade, concepção clássica de probabilidade.

Já no item b) da questão que estamos a discutir, sete licenciandos responderam utilizando a justificativa do item anterior, dois não responderam, e seis apresentaram justificativas distintas da anterior, no sentido de apresentar outra concepção de probabilidade (destes, um trouxe uma resposta irrelevante). Dos 6 que mencionamos, 2 se referiam aqueles que haviam concordado com todas as ideias sugeridas (apresentaram concepção clássica), 1 se referia ao que optou pelas ideias de dois alunos (apresentou concepção subjetivista) e 2 mudaram de escolha mesmo (Figura 34).

Figura 34: Resposta de L15 para a nona questão


a) Você concorda com as ideias de algum dos seus alunos? Por quê?

Concordo com Ana, pois a minha chance é de 50% de escolher o envelope certo.

b) Como você resolveria essa situação?

Manteria a escolha original.

Fonte: O autor (2016)

O estudante acima concorda com as ideias de Ana (concepção clássica de probabilidade), entretanto, logo após afirma que resolveria a questão mantendo a escolha inicial, isto é, como aborda Carla (concepção subjetivista de probabilidade)

Portanto, na oitava questão, conseguimos identificar concepções frequentista e clássica, sendo a primeira a mais encontrada, enquanto que na nona questão a concepção clássica teve grande evidência. Talvez, isso decorra do fato desta concepção ser bastante trabalhada no Ensino Médio, conforme nos abordam Costa e Nacarato (2011). Por outro lado, entendemos ser um fato comum, a adesão maior a uma concepção de probabilidade em uma questão e a outra em outra questão, visto que Santos (2013) revela que um mesmo estudante pode apresentar concepções de probabilidades diferentes para situações diferentes.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A probabilidade é muito importante para a vida das pessoas em geral, estando presente em vários aspectos da mesma, como também em outras ciências. Em virtude disso, nos últimos tempos ela tem ganhado mais espaço tanto nas pesquisas e discussões como nas instituições de ensino. No entanto, sentindo-nos inquietados com algumas dificuldades observadas em relação aos conteúdos de probabilidade, analisamos as dificuldades enfrentadas por licenciandos em Matemática da UFPE-CAA na construção dos conhecimentos probabilísticos.

Assim, a nossa pesquisa revelou que ainda há pouco enfoque da probabilidade durante a escolarização básica e, este, geralmente ocorre durante o Ensino Médio apenas. Além disso, sente-se falta de simulações, experimentações e investigações durante as aulas de probabilidade. Todavia, no curso de licenciatura há uma abordagem de tais conteúdos probabilísticos.

Consideramos que os licenciandos apresentam dificuldades com os conceitos de probabilidade, espaço amostral, evento, experimentos aleatórios e determinísticos. Notamos que a maior parte dos estudantes confunde probabilidade com chance. Outro fato que se destacou foi a grande quantidade de definições corretas (em comparação ás demais definições) dos fenômenos aleatórios e determinísticos, o que acreditamos decorrer da familiaridade dos sujeitos com tais fenômenos (se deparando com eles no dia-a-dia). É oportuno salientar que os estudantes tem mais facilidade em apresentar exemplos do que definir, visto que a maioria dos licenciandos citaram exemplos corretamente.

Além disso, possuem dificuldades em lidar com a linguagem probabilística, assim cometem equívocos de linguagem e equívocos ao interpretar o espaço amostral. Sentem também dificuldades de interpretar os enunciados das questões. Em relação ao cálculo simples da probabilidade, a investigação nos mostrou que os alunos dominam tais cálculos, talvez por no seu ensino básico e curso de licenciatura em matemática trabalharem frequentemente com fórmulas e cálculos. Convém frisar que os licenciandos usam mais de um tipo de representação para resolver os problemas de probabilidade, nos chamou a atenção á utilização da árvore de possibilidades. Desse modo, conseguimos verificar os tipos de representação e linguagem probabilísticos utilizados pelos licenciandos.

Por fim, identificamos nas respostas dos licenciandos as concepções frequentista e clássica, tendo esta última, um maior enfoque. Assim, alcançando o nosso objetivo de analisar as concepções de probabilidade dos licenciandos. E então, concluindo todas essas investigações, foi possível identificar as dificuldades enfrentadas pelos discentes com o conceito de probabilidade.

Portanto, entendemos que os estudantes apesar de terem uma abordagem dos conhecimentos probabilísticos durante o curso de Licenciatura em Matemática, estes não abarcam todos os conhecimentos necessários à formação de um professor de matemática para ensinar Probabilidade. Assim, carece uma abordagem mais conceitual e experimental da probabilidade durante o curso mencionado, de modo que os futuros docentes possam adquirir um modo de pensar probabilisticamente e também entendam que a probabilidade pode ser vista por diferentes concepções, desse modo, ao estar numa sala de aula ensinando probabilidade saberão qual a mais adequada para cada momento.

Diante disso, pensando em novas pesquisas relacionadas ao tema, consideramos que será pertinente desenvolver minicursos ou cursos de extensão destinados a trabalhar com estes conceitos probabilísticos (probabilidade, espaço amostral, evento, experimentos aleatórios), sendo também interessantes discutir as concepções de probabilidades existentes (clássica, subjetivista, lógica, frequentista e axiomática), trazendo também momentos de simulações e experimentos. Outra pesquisa interessante refere-se a discutir e/ou trabalhar com os docentes o questionário trazido neste trabalho, buscando investigar como os mesmos agiriam em sala de aula em cada questão, ao vivenciar tais momentos.

7 REFERÊNCIAS

BARROS, Paula Maria; FERNANDES, José António. *Dificuldades de Alunos (Futuros Professores) em Conceitos de Estatística e Probabilidades*. 2001.

BIAJOTI, Emerson Donizeti. *Experimentos probabilísticos: noções de probabilidades no ensino fundamental II.* 2013. 107 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. (1º e 2º ciclos do ensino fundamental). v.3. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e cultura (MEC). *Secretaria da Educação Básica* (SEB)**.** *Orientações curriculares para o ensino médio:* Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. 2006. Brasília: MEC/SEB.

FELISBERTO DE CARVALHO, José Ivanildo; MACEDO, Robson Candeias. *Conhecimentos Necessários para o ensino de Probabilidade: Discussão de uma Sequência Didática Desenvolvida com Estudantes de Matemática-Licenciatura.* In: VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Anais... Pirenópolis, 2015.

COSTA, Adriana; NACARATO, Adair Mendes. *A Estocástica na Formação do Professor de Matemática: percepções de professores e de formadores*. Boletim de Educação Matemática, vol. 24, num. 39, agosto, 2011, pp. 367-386. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro (SP), 2011.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. *Introdução ao conceito de Probabilidade por uma visão frequentista*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

DANTAS, Carlos Alberto Barbosa. *Probabilidade: Um Curso Introdutório.* 3ª ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008.

GIL, Antonio Carlos. Métodos e Técnicas de Pesquisa Social. 6ª ed. São Paulo: Editora Atlas S.A, 2008.

GODINO, Juan Dias; BATANERO, Mª Del Carmen; CAÑIZARES, Mª Jesus. *AZAR Y PROBABILIDAD Fundamentos Didacticos y Propuestas Curriculares.* Madrid: Editorial Síntesis, S. A., 2010.

HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de Matemática Elementar, 5: combinatória, probabilidade*. 1946. 7ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

LOPES, Celi A. E. *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil.* Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação, São Paulo, 2003.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin; FERREIRA, Ana Cristina. *A Estatística e a Probabilidade no currículo da escola básica.* Recife, 2004.

LOPES, Celi Espadasin. *O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação de professores*. Cad. Cedes, Campinas, vol. 28, n.74, p. 57-73, jan./abr. 2008. Disponível em: http://www.cedes.unicamp.br

LOPES, C. E., CARVALHO, F. D., MENDONÇA, L. *Modelagem matemática gerando a educação estocástica de futuros economistas.* Acta Scientiae, v. 14, n. 2, p. 185-199, 2012.

MAROCCI, Lia Marques. *O movimento das significações probabilísticas proporcionado pela resolução de problemas e pela prática colaborativa numa turma do ensino médio do 1º ano do ensino médio.* Dissertação (Mestrado) – Universidade São Francisco. Pós-graduação Stricto Sensu em Educação, Itatiba, 2011.

MOREIRA, Marco Antonio. *A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área.* In: Investigações em Ensino de Ciências - v. 7(1), pp. 7-29. Porto Alegre, 2002.

PERNAMBUCO, Secretária de Educação. *Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio.* Recife, 2012.

PINTO, Maria Elisa; CANAVARRO, Ana Paula. *O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1º ano de escolaridade.* In: O. Magalhães, & A.Folgue (org.), Práticas de investigação em Educação. Évora: Departamento de Pedagogia e Educação. 2012.

REZENDE, Fernanda Monteiro de Castro. *Desenvolvimento Profissional e Pensamento Probabilístico: estudo do processo vivido por um grupo de professores de Matemática de Conselheiro Lafaiete (MG).* Dissertação (Mestrado) –Universidade Federal de Ouro Preto. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Ouro Preto, 2013.

SANTANA, Michaelle Moraes de. *O acaso, o provável, o determinístico: Concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CE. Pós-graduação em Educação Matemática.

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. *O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do ensino fundamental.* Dissertação (Mestrado) – Universidade São Francisco. Pós -graduação Stricto Sensu em Educação, Itatiba, 2010.

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. *O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do ensino fundamental.* Uruguai, 2013.

VIALI, Lorí. *Probabilidade*. Instituto de Matemática - Departamento de Estatística. Rio Grande do Sul, 1999.

VIALI, Lorí. *Algumas considerações sobre a origem da teoria da Probabilidade*. Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 8, nº 16 (outubro/2008 -março/2009), p. 143-153, 2008.

WIELEWSKI, Gladys Denise. *Representação e Resolução de Problemas Matemáticos*. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática- SIPEMAT. Recife, 2006.

8 APÊNDICE

8.1 Questionário

Prezados estudantes, esse questionário faz parte do meu Trabalho de Conclusão de Curso que visa investigar a construção dos conhecimentos probabilísticos no curso de licenciatura em Matemática. Dessa forma, peço que respondam com responsabilidade as questões. Será garantido sigilo das informações nele contida, somente sendo utilizado para analise dos dados. Agradeço, Lindinalva Cecília do Nascimento.

Questionário

Dados pessoais

Nome:____ Idade: ______________

Curso: ____ Período: ____________

Semestre de ingresso na universidade: ____________________________________

1. Durante a escolaridade (educação básica) você se lembra de como foram às aulas de probabilidade? Comente.

____

____

____

____

2. Durante o curso de Licenciatura em Matemática em que momentos foram abordados o conceito de probabilidade. Comente quando foi e o que você aprendeu.

____

____

____

____

3. Que conceitos você daria a probabilidade? Como você a definiria?

____

____

____

____

4. O que é espaço amostral?

____

____

5. Como você definiria e diferenciaria fenômenos aleatórios e fenômenos determinísticos?

____

____

____

____

____

6. O que é evento probabilístico? Cite um exemplo.

____

____

____

7. Numa caixa foram colocadas três fichas quadrangulares de mesmo tamanho, sendo uma verde em ambos os lados, outra com um lado rosa e outro verde e a última com ambos os lados rosa. Ao retirarmos uma ficha da caixa, podemos obter diversos resultados. Cite um exemplo de acontecimento:

a) Impossível ____

b) Possível ____

c) Bastante Provável ____

d) Certo ____

e) Há alguma probabilidade ____

8. Fábio e Alice adoravam jogar palitinhos (também conhecido como “porrinha”).

Jogo de palitinhos ou Porrinha

É um jogo de adivinhação e simulação. Cada jogador recebe três palitos. Eles colocam as mãos para trás e escolhem uma quantidade de palitos (1,2 ou 3), a qual colocam na mão direita (que é apresentada na frente, com a mão fechada). Posteriormente, cada jogador estipula ("chama"), mencionando o total de palitos do jogo (somando os palitos de todos). Os valores estipulados não podem ser repetidos. Vence a rodada quem falar o valor exato da soma de todos os palitos em jogo. Por fim, o jogador que vencer a rodada retira um palito e passa a jogar com um a menos. Além disso, cada jogador estipula a soma em uma rodada (isto é, tem uma ordem, aquele que estipulou primeiro em uma rodada, será o último a estipular o valor na próxima).

Regras: Vence o jogo quem ficar sem palitos primeiro. Na primeira rodada não pode vir sem nenhum palito ("vir de lona"). Não há um número máximo de jogadores, uma quantidade grande deixa o jogo cansativo, enquanto que com apenas dois jogadores, o jogo fica um pouco previsível.

Tudo indica que este jogo surgiu na "Morra", onde os antigos romanos jogavam com os dedos, ao invés de palitos. Por outro lado, outros dizem que o nome "porrinha" originou-se da frase dita por Santo Agostinho, em meados no séc. IV d.c: *"Porro cum quo micas in tenebris ei liberum est, si velit, fallere".* (Com certeza, àquele com quem jogas morra no escuro, ainda que avisado, podes enganar)

Eles jogavam com o zero na primeira rodada (ao contrário da regra do jogo). Certo dia, Fábio decidiu que seria ele o primeiro a estipular a soma dos palitos em todas as jogadas daquele dia. Observando que Alice sempre ganhava o jogo, Fábio ficou sem entender o que acontecia e começou a anotar as supostas estratégias da adversária.

v) Alice apostava bastante nas somas 3 e 4 porque ela gostava mais desses números.

vi) Se eu pedir soma 6, ela sempre acerta a soma porque é bem provável que eu esteja com 3 palitos em mãos.

vii) Durante várias jogadas repetiu-se as somas 3 e 4, então, é mais provável que continuem saindo esses resultados.

viii) Ao realizar sua jogada, independentemente da estipulação, Alice tinha 50% de chance de acertar e 50% de chance de errar a soma.

a) Você acha que Fábio fez uma boa escolha/ proposta? Justifique.

____

____

b) Por que Alice sempre vencia o jogo? Explique.

____

____

c) Você concorda com as especulações de Fábio? Qual (is)? Acrescentaria ou reformularia alguma?

9.

A escolha

Seja você um professor de Matemática. Suponha que você vai participar de um concurso para lecionar em determinada instituição e uma das etapas do mesmo constitui-se em um jogo.

São apresentadas ao professor três envelopes com as letras A, B e C, em que uma representa a sua aprovação e as outras duas a sua reprovação. Você escolhe um dos envelopes. O aplicador da seleção, então, sabendo em qual dos envelopes está a aprovação, abre um dos envelopes que você não escolheu (onde está a reprovação). Assim, restam apenas dois envelopes (o escolhido por você e o que não foi aberto). Dentro de um deles tem a sua aprovação. O aplicador do exame, então, pergunta se você quer manter a escolha original ou quer trocar de envelope, optando pela outra que ele não abriu e que pode ter a aprovação.

O que você deve fazer?

iii) Manter a escolha original?

iv) Trocar de envelope?

Observação: Os resultados dos envelopes não mudam durante o jogo.

Diante dessa situação, você pode escutar as opiniões de três dos seus alunos (os mais dedicados).

Ana diz o seguinte:

Ora, tanto faz, obviamente. Como continuo sem saber em qual envelope está a aprovação, a chance é a mesma de ele estar em qualquer um dos dois envelopes que ainda estão fechados. É claro que o fato do aplicador ter aberto uma dos envelopes onde está uma reprovação não altera em nada minhas chances – como poderia??? Tenho pela frente dois envelopes a escolher, e minha chance é de 50% de escolher o envelope certo. Tanto faz.

Carla fala:

Professor, eu acho que não deveria trocar, acho que deveria ser fiel à sua escolha original, acredito que isto é uma questão de sorte.

Tomás diz que:

Eu mudaria de envelope, com certeza! Veja: se eu pudesse optar entre escolher apenas o envelope A ou ficar com ambos os envelopes B e C, é claro que ficando com B e C eu teria mais chances de ganhar, pra ser mais exato, 2/3 concorda? Então, trocando de envelope, eu acho que é exatamente isso que acontece, uma vez que o aplicador do exame, gentilmente, abriu um dos dois envelopes e eu vi que lá só tinha uma reprovação. Então, trocar de envelope pode ser entendido como poder escolher dois envelopes de uma só vez, e, como eu não sei onde a aprovação está, isso vai me dar uma chance de 2/3 de conseguir!!!

a) Você concorda com as ideias de algum dos seus alunos? Por quê?

b) Como você resolveria essa situação?

10. Melissa vai ao shopping com as suas amigas e precisa escolher entre três saias (preta, branca e vermelha), quatro blusas (amarela, branca, rosa e cinza) e dois sapatos (branco e dourado). Com base na situação acima, responda:

a) Qual a probabilidade de Melissa obter vestes e calçados de mesma cor?

b) Cite um acontecimento impossível de ocorrer. Explique.