



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ELETRÔNICA E SISTEMAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

VILMAR VAZ DA SILVA

**GRAFOS DE CONTEXTOS DE SISTEMAS DINÂMICOS DE MEMÓRIA
INFINITA**

Recife
2020

VILMAR VAZ DA SILVA

**GRAFOS DE CONTEXTOS DE SISTEMAS DINÂMICOS DE MEMÓRIA
INFINITA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Comunicações.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Pedro Bezerra Chaves.

Coorientador: Prof. Dr. Cecilio José Lins Pimentel.

Recife
2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

S586d Silva, Vilmar Vaz da.
Grafos de contextos de sistemas dinâmicos de memória infinita /
Vilmar Vaz da Silva. - 2020.
94 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Pedro Bezerra Chaves.
Coorientador: Prof. Dr. Cecilio José Lins Pimentel.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2020.
Inclui Referências e Apêndice.

1. Engenharia Elétrica. 2. Dinâmica simbólica. 3. Autômatos. 4.
Grafo de contextos. 5. Sequências com restrições. I. Chaves, Daniel
Pedro Bezerra (Orientador). II. Pimentel, Cecilio José Lins (Coorientador).
III. Título

UFPE

621.3 CDD (22. ed.)

BCTG/2021-78

VILMAR VAZ DA SILVA

**GRAFOS DE CONTEXTOS DE SISTEMAS DINÂMICOS DE MEMÓRIA
INFINITA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Comunicações.

Aprovado em: 22/12/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Daniel Pedro Bezerra Chaves (Orientador e Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Cecílio José Lins Pimentel (Coorientador e Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Ricardo Menezes Campello de Souza (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior (Examinador Externo)
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Stanley Orlando Juriaans (Examinador Externo)
Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Gilson Gerônimo da Silva Júnior (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

À minha **família**
e a todos os meus
amigos, *dedico*.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois sem ele nada seria.

Ao meu orientador Professor Doutor Daniel Pedro Bezerra Chaves pela confiança, incentivo e principalmente pela humanidade em que conduziu a orientação para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu coorientador Professor Doutor Cecilio José Lins Pimentel pelos inúmeros e importantes comentários durante a elaboração do trabalho.

A todos os professores do PPGE/UFPE que direta ou indiretamente colaboraram para realização deste trabalho.

Aos membros da banca pelos comentários e sugestões para o enriquecimento deste trabalho.

Aos colegas de pós-graduação, em particular Carlos Eduardo Correia de Souza e José Antonio Pérez de Morales Artilles por todo o apoio e amizade.

Por todo apoio e sacrifício constante da minha família.

RESUMO

A teoria de sistemas dinâmicos simbólicos, que explora as propriedades de sequências com restrições, é aplicada em problemas nas áreas de comunicação digital e armazenamento de dados. Estes sistemas são especificados por um conjunto mínimo de sequências proibidas $\mathcal{O}$, ou alternativamente, por um grafo direcionado rotulado, denominado de grafo de contextos. O contexto à direita de uma palavra $\mathbf{w}$ de um sistema dinâmico simbólico é o conjunto de todas as palavras que podem seguir $\mathbf{w}$. Neste trabalho, emprega-se o conceito de conjunto de restrições de uma palavra que unicamente caracteriza o seu contexto à direita para a classe dos sistemas dinâmicos simbólicos periódicos (PFT, *periodic shift of finite type*) para estender o algoritmo de SFT, fundamentado no conceito de conjunto de restrições, para a construção do grafo de contexto para esta classe. Conjugando conceitos da teoria de dinâmica simbólica e da teoria dos autômatos, definimos um conjunto finito de palavras, denominado de conjunto suficiente de classes de representantes $\mathcal{W}$, que gera todos os possíveis contextos à direita, para sistemas em que o conjunto $\mathcal{O}$ é infinito, denominados de sistemas dinâmicos simbólicos de memória infinita (SSS, *strict sofic shift*). Utilizando a cardinalidade de $\mathcal{W}$ determinamos um limitante para o número de elementos de um conjunto necessário e suficiente de classes de representantes de contextos de um SSS. Por fim, usando um procedimento sistemático para a partição deste conjunto, propomos um novo algoritmo para a construção do grafo de contextos para a classe de SSS, construção esta que é um problema em aberto na literatura.

Palavras-chave: Engenharia Elétrica. Dinâmica simbólica. Autômatos. Grafo de contextos. Sequências com restrições.

ABSTRACT

The theory of symbolic dynamic systems, which explores the properties of constrained sequences, is applied to problems in the areas of digital communication and data storage. These systems are specified by a minimum set of forbidden sequences $\mathcal{O}$, or alternatively, by a labeled directed graph, called the follower set graph. The follower set of a word $\mathbf{w}$ of a dynamic symbolic system is the set of all words that can follow $\mathbf{w}$. In this work, we use the concept of a set of restrictions of a word that uniquely characterizes its follower set for the class of PFT (*periodic shift of finite type*) to extend the SFT algorithm, based on the concept of set of constraints, for the construction of the follower set graph for this class. Combining concepts from the theory of symbolic dynamics and the theory of automata, we define a finite set of words, called a sufficient set of classes of representatives $\mathcal{W}$, which generates all possible follower sets, for systems where the set $\mathcal{O}$ is infinite, called dynamic symbolic systems of infinite memory (SSS, *strict sofic shift*). Using the cardinality of $\mathcal{W}$ we determine a limit for the number of elements in a necessary and sufficient set of classes of follower sets representatives of an SSS. Finally, using a systematic procedure to partition this set, we propose a new algorithm for the construction of the follower set graph for the SSS class, a construction that is an open problem in the literature.

Keywords: Electrical Engineering. Symbolic dynamic. Automata. Follower set graph. Constrained sequences.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Classificação de Sistemas Simbólicos.	15
2.1	Exemplo de Grafos.	19
2.2	Apresentação do sistema dinâmico simbólico par.	20
2.3	Apresentação do SFT do Exemplo 2.5.	26
3.1	Grafo do TMTR do Exemplo 3.4 obtido da partição $\mathcal{P}^2$	36
3.2	Grafo reduzido do TMTR do Exemplo 3.8 obtido da partição $\mathcal{P}^2$	37
4.1	Diagrama de transição de um autômato finito.	40
4.2	Autômato que reconhece a linguagem $L = \{\mathbf{w} \in (\mathbf{a} + \mathbf{b})^* : \mathbf{w} \equiv 1 \pmod{4}\}$	42
4.3	Sufixo próprio mais longo iniciando em um sufixo próprio de $\mathbf{w}_1$	45
4.4	Sufixo próprio mais longo iniciando em um sufixo de $\mathbf{w}_2$	47
4.5	Sequência de memórias eventualmente periódica.	51
5.1	Grafo de Contextos do SSS com $\mathcal{O} = ac^*bd$ obtido da partição $\mathcal{P}^1$	77
5.2	Grafo de Contextos para o SSS par ternário do Exemplo 5.4 obtido da partição $\mathcal{P}^1$	80
5.3	Grafo de contextos do S -Gap do Exemplo 5.5 obtido da partição $\mathcal{Q}^4$	86
5.4	Grafo de Contextos do PFT com $\mathcal{O} = 1(00)^*1$ obtido da partição $\mathcal{P}^1$	89

LISTA DE TABELAS

2.1	Algoritmo Proposto para o SFT.	24
2.2	Máscara de Restrição dos elementos em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ do SFT do Exemplo 2.5.	25
3.1	Máscara de Restrição para os elementos de $\mathcal{W}$ de um TMTR com $T = 2$	32
3.2	Máscara de Restrição para $\mathcal{W}$ do TMTR do Exemplo 3.8.	37
4.1	Memórias das Palavras de s_3 herdadas de s_2	52
5.1	Algoritmo Proposto para o SSS.	73
5.2	Máscaras de Restrição das palavras de $\mathcal{W}'$ para o SSS com $\mathcal{O} = ac^*bd$	76
5.3	Máscara de Restrição para $\mathcal{W}'$ do SS par ternário.	79
5.4	Máscara de Restrição de $\mathcal{W}'$ para o S -gap.	85
5.5	Máscara de Restrição de $\mathcal{W}'$ para o PFT com $\mathcal{O} = 1(00)^*1$	88

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	Partição mais densa que refina $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$
$\bigwedge_{a \in \mathcal{A}} a \mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$	Partição por máscara de restrição
$\bigwedge_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{P}_a$	Partição por memória de restrição
$\mathcal{B}_n(X)$	Conjunto de todas as palavras de X de comprimento n
$\mathcal{P}$	Partição
$\mathcal{A}$	Alfabeto finito
$\mathcal{A}^*$	Conjunto de todas as palavras sobre $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$	Conjunto de sequências bi-infinitas sobre $\mathcal{A}$
ε	Palavra vazia
$\mathcal{F}$	Conjunto de palavras proibidas
$\mathcal{L}$	Função rotulação
$\mathcal{L}_x$	Conjunto de deslocamentos do ponto $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$
$\mathcal{M}(\mathbf{w})$	Máscara de restrição de $\mathbf{w}$
$\mathcal{O}$	Conjunto proibido mínimo
$\mathcal{O}_p$	Conjunto mínimo periódico de palavras proibidas
$\mathcal{P}(\cdot)$	Conjunto de prefixos
$\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$	Conjunto de prefixos próprios dos elementos de $\mathcal{O}$
$\mathcal{S}(\cdot)$	Conjunto de sufixos
$\mathcal{W}$	Conjunto de representantes das restrições de um SS
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbf{w}$	Palavra
$\mathbf{w}^{(k)}$	Palavra permitida na fase k
$<_i$	Fator com início em i
σ	Aplicação deslocamento
$\text{Máx}_{\mathbf{u} \in \mathcal{O}} \{ \mathbf{u} - 1\}$	Memória de um SFT
$\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})_a$	Extensão pelo símbolo a dos elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$
A	Autômato finito
$F(\mathbf{w})$	Contexto à direita da palavra $\mathbf{w}$
G	Grafo direcionado rotulado
L	Linguagem de um SS

$L(A)$	Linguagem aceita ou reconhecida pelo autômato A
L^*	Operador kleene da linguagem L
$L^{(k)}$	Linguagem associada a fase k em um PFT
R_E	Restrições da expressão regular
R_h	Restrições da memória herdada
R_M	Restrições da memória
T	Período de um PFT
$X_{\mathcal{F}}^A$	Sistema dinâmico simbólico
$X_{\{\mathcal{F}, T\}}$	PFT com período T
$\mathcal{R}(\mathbf{w})$	Memória de restrição de $\mathbf{w}$
$\mathcal{V}$	Conjunto de vértices
$\mathcal{E}$	Conjunto de ramos
$\mathcal{C}(\mathbf{w})$	Conjunto de restrições de $\mathbf{w}$
$\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d$	Conjunto de restrições dependentes
$\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i$	Conjunto de restrições independentes
$\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)})$	Conjunto de restrições periódicas da palavra $\mathbf{w}$ na fase k
PFT	Sistema Dinâmico Simbólico Periódico de Tipo Finito
SFT	Sistema Dinâmico Simbólico de Memória Finita
SS	Sistema Dinâmico Simbólico
SSR	Sistema Dinâmico Simbólico Regular
SSS	Sistema Dinâmico Simbólico Regular de Memória Infinita

SUMÁRIO

	Página
1	INTRODUÇÃO
	14
2	PRELIMINARES
	17
2.1	DINÂMICA SIMBÓLICA 17
2.1.1	Grafos 19
2.1.2	Sistemas Simbólicos Regulares 20
2.2	PARTIÇÕES 20
2.3	CONJUNTO DE RESTRIÇÕES 21
2.4	MÁSCARA DE RESTRIÇÃO 21
2.5	MEMÓRIA DE RESTRIÇÃO 23
2.6	CONSTRUÇÃO DO GRAFO DE CONTEXTOS 23
2.6.1	Grafo de Contextos 25
3	GRAFOS DE CONTEXTOS PARA SISTEMAS DINÂMICOS SIMBÓLICOS PERIÓDICOS
	27
3.1	PRELIMINARES 27
3.2	CONJUNTO DE RESTRIÇÕES DE UM PFT 28
3.3	MÁSCARA E MEMÓRIA DE RESTRIÇÕES DE PALAVRAS POR FASE NA LINGUAGEM DE UM PFT 31
3.3.1	Máscara de Restrição Periódica 31
3.4	ALGORITMO PROPOSTO PARA PFTs 33
3.5	CONSTRUÇÃO DE UMA APRESENTAÇÃO REDUZIDA PARA PFTs . 34
4	CARACTERIZAÇÃO DO CONJUNTO $\emptyset$ COMO LINGUAGEM REGULAR
	39
4.1	LINGUAGENS REGULARES 39
4.1.1	Operações com Linguagens 39
4.1.2	Autômato Finito e suas Linguagens 40
4.2	CARACTERIZAÇÃO DO CONJUNTO $\emptyset$ 43

4.3	CONJUNTO DE REPRESENTANTES DO CONJUNTO DE RESTRI- ÇÕES	43
4.4	CARACTERIZAÇÃO DO CONJUNTO $\mathcal{O}$ COMO UNIÃO DE EXPRES- SÕES REGULARES	50
4.5	ANINHAMENTO DE OPERADORES DE KLEENE	68
5	ALGORITMO PARA CONSTRUÇÃO DE SSS	71
5.1	CONJUNTO SUFICIENTE DE CLASSES DE REPRESENTANTES . . .	71
5.2	ALGORITMO PROPOSTO	72
5.3	CONSTRUÇÃO DO GRAFO DE CONTEXTOS PARA A CLASSE DOS SSSs	74
5.3.1	Grafo de Contextos para a Classe dos <i>S-gap</i>	80
5.3.2	Grafo de Contextos para a Classe dos PFTs Próprios	86
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	90
6.1	CONCLUSÕES	90
6.2	TRABALHOS FUTUROS	90
	REFERÊNCIAS	92
	APÊNDICE A – PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA	94

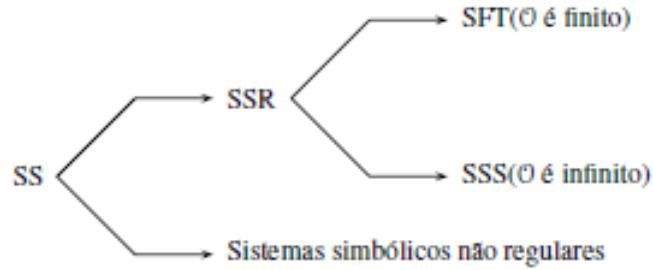
1 INTRODUÇÃO

A área de dinâmica simbólica surge a partir da concepção de sistemas dinâmicos com os trabalhos em topologia de Marston Morse no início do século vinte (Morse (1921)). A idéia destes trabalhos foi oferecer uma descrição algébrica dos sistemas dinâmicos que permitisse traduzir comportamentos geométricos da evolução destes sistemas com o tempo. Esta abordagem é recorrente na história da ciência uma vez que a representação algébrica, em geral, oferece uma maior facilidade nas operações com os elementos do sistema e um grande poder de generalização do seu comportamento geométrico. A teoria de dinâmica simbólica é usada como ferramenta matemática na teoria de códigos e teoria da informação (Lind (1995) e Blahut (1987)). Na teoria de códigos podemos citar os sistemas que empregam os códigos de linhas ou códigos restritivos, que restringem as possíveis sequências de saída do codificador, adequando-as às características do canal (Lind (1995)).

Em dinâmica simbólica, os sistemas dinâmicos simbólicos (SS, *shift space*) são sistemas que estão vinculados a um conjunto $\mathcal{F}$ de palavras proibidas, sobre um alfabeto finito $\mathcal{A}$, que pode ser finito, denominado de sistema dinâmico simbólico de memória finita (SFT, *shift of finite type*) ou infinito, denominado de sistema dinâmico simbólico de memória infinita e todas as palavras sobre $\mathcal{A}$ sem fatores em $\mathcal{F}$ formam a linguagem L do sistema. A única lista mínima de palavras proibidas, denotada por $\mathcal{O}$, é chamada a coleção de todas as palavras proibidas mínimas (Lind, 1995, p. 12). Uma classe particular de SS constitui os sistemas dinâmicos simbólicos regulares (SSRs), também conhecidos como *sofic shifts* que são sistemas que possuem representações geométricas descritas através de grafos rotulados com um número finito de estados. Existe um maior interesse no estudo desses sistemas em virtude das diversas aplicações práticas associadas aos mesmos. Por exemplo, em engenharia elétrica, sistemas usados para armazenar ou transmitir informação digital são modelados como um SSR/SFT (Marcus (1992), Immink (1995), Marcus (1999) e Immink (2001)).

Exemplos de SFTs com alfabeto binário são o MTR(j) - *maximum transition run* - que restringe o número máximo de 1's consecutivos a j e o RLL(d, k) - *run-length limited* - que restringe o número mínimo de 0's consecutivos a d e o máximo a k . Estes são SFTs em que as restrições são globais, porém, restrições têm sido apresentadas para as quais as proibições ocorrem de forma periódica, como por exemplo, a restrição TMTR - *time-varying maximum-transition-run* - proíbe que a palavra 111 seja iniciada em índices ímpares de uma sequência. Para modelagem adequada de restrições como as TMTR, em que as proibições dependem do índice ou fase da sequência, a classe dos sistemas dinâmicos simbólicos periódicos (PFT, *periodic shift of finite type*) foi introduzida em Moision (2001) e Báal (2011). A Figura 1.1 mostra a classificação dos sistemas simbólicos.

O contexto à direita de uma palavra $\mathbf{w}$ é o conjunto de todas as palavras na lingua-

Figura 1.1 – *Classificação de Sistemas Simbólicos.*

Fonte: O Autor (2020).

gem L de um SS que podem ser concatenadas a $\mathbf{w}$ pela direita, formando palavras de L . Se duas palavras tem o mesmo contexto à direita elas são chamadas de palavras de contextos à direita equivalentes. Os possíveis contextos à direita de um SSR permitem a construção de uma representação, o grafo de contextos, que é uma representação reduzida com o menor número de estados para certas classes de SSRs de interesse prático. Esta representação reduzida para o caso de um SFT é obtida, em geral, através de um procedimento de dois passos: o primeiro consiste em gerar uma representação inicial (alguns métodos são propostos em Lind (1995) e Crochemore (1998)). O segundo passo é aplicar um algoritmo de minimização de vértices da representação para identificar vértices da representação inicial com o mesmo contexto à direita. Uma abordagem alternativa para a classe de SFTs proposta em Chaves (2014), inicialmente determina o conjunto de vértices da representação reduzida sem determinar um grafo inicial e depois calcula a transição entre vértices e sua rotulação. Esta abordagem permite uma redução na complexidade, desde que a transição e rotulação sejam calculadas apenas para um conjunto reduzido de vértices. Daí, é de interesse a construção de algoritmos de baixa complexidade que gerem representações reduzidas para outras classes de SSR. Observa-se que não existe na literatura algoritmos que gerem tais representações quando o SSR é um SSS. A ideia central em Chaves (2014) consiste na definição do conjunto de restrições (Chaves, 2014, Definição 1) e da equivalência deste com o contexto à direita (Chaves, 2014, Teorema 1). Fundamentado neste fato, propomos nesta tese como objetivo principal um algoritmo para construção de representações reduzidas para a classe de SSSs. Este algoritmo possui parte da sua complexidade equivalente ao algoritmo do Crochemore (Crochemore (1998)) adicionada a uma complexidade extra associada a comparação dos conjuntos de restrições de palavras de comprimento máximo associadas à símbolos que causam ambiguidade. Como primeira contribuição mostramos, no Capítulo 3, que o algoritmo proposto em Chaves (2014) pode ser estendido para construção de uma representação reduzida para a classe dos PFTs.

No Capítulo 4, apresentamos mais duas contribuições desta tese, sendo uma delas a determinação de um conjunto finito suficiente de classes de representantes que gera todos os possíveis contextos à direita para um SSS através da caracterização do conjunto $\mathcal{O}$

como uma expressão regular. A outra contribuição é a obtenção de um limitante para o número de elementos de um conjunto necessário e suficiente de classes de representantes de contextos de um SSS. No Capítulo 5, apresentamos a principal contribuição da tese, o algoritmo para construção do grafo de contextos para a classe dos SSSs. Acreditamos que a grande relevância dessa contribuição reside no fato de propormos um algoritmo de baixa complexidade, uma vez que não necessitamos de representações iniciais do sistema para posterior minimização de estados e, que generaliza a obtenção do grafo de contextos para a classe dos SSSs. A seguir apresentamos uma breve descrição dos tópicos e resultados apresentados nos capítulos que compõem a tese, em que todos os resultados não referenciados determinam a contribuição do nosso trabalho.

No Capítulo 2 apresentamos uma breve revisão sobre dinâmica simbólica (Lind (1995)), conjunto de restrições e suas propriedades, máscara de restrição, memória de restrição e uma descrição detalhada dos passos do algoritmo proposto para a classe dos SFTs (Chaves (2014)).

No Capítulo 3 fazemos uma descrição, por fase, dos resultados apresentados em Chaves (2014) e estendemos o algoritmo nele proposto para a construção de uma representação reduzida para a classe dos PFTs.

No Capítulo 4 utilizamos a teoria dos autômatos para descrever o conjunto $\mathcal{O}$ como uma linguagem regular, através do uso de expressões regulares; usamos esta descrição para determinar de forma explícita um conjunto finito suficiente de classes de representantes que gera todos os possíveis contextos à direita de um SSS e derivamos da cardinalidade deste um limitante para o número de elementos de um conjunto necessário e suficiente de classes de representantes de contextos de um SSS.

No Capítulo 5 apresentamos um novo algoritmo para obter o grafo de contextos para a classe dos SSSs, descrevendo cada passo e ilustrando a aplicação do mesmo em exemplos diversos.

Finalmente, no Capítulo 6 apresentamos as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 PRELIMINARES

Este capítulo apresenta uma revisão de conceitos sobre dinâmica simbólica (Lind (1995)), partições, conjunto de restrições, máscara de restrição, memória de restrição e construção do grafo de contextos para a classe dos sistemas dinâmicos de memória finita (Chaves (2014)), necessários para o desenvolvimento desta tese.

2.1 DINÂMICA SIMBÓLICA

Seja $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ o conjunto de sequências bi-infinitas $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} = \cdots x_{-2}x_{-1}x_0x_1\cdots$ de símbolos de um alfabeto finito $\mathcal{A}$. Uma sequência finita de símbolos consecutivos $\mathbf{w} = a_1a_2\cdots a_n$, $a_i \in \mathcal{A}$, $1 \leq i \leq n$ é chamada uma palavra ou bloco em $\mathcal{A}$ de comprimento n . Uma palavra $\mathbf{w}$ é um fator de um ponto $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, denotado por $\mathbf{w} < x$, se existem inteiros $i \leq j$, tais que $\mathbf{w} = x_i x_{i+1} \cdots x_j$. Escreve-se $\mathbf{w} <_i x$ para enfatizar que $\mathbf{w}$ é um fator de x iniciando no índice i . A noção de fator de um ponto x pode ser naturalmente estendida para a noção de fator de uma palavra e usar-se-á a mesma notação. O conjunto de todas as palavras sobre $\mathcal{A}$ incluindo a palavra vazia ε que satisfaz $\mathbf{w}\varepsilon = \varepsilon\mathbf{w} = \mathbf{w}$ é $\mathcal{A}^*$, em que $\mathbf{w}\varepsilon$ é a concatenação da palavra $\mathbf{w}$ com a palavra vazia ε .

A aplicação deslocamento $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é definida por $\sigma(x) = y$ com $y_i = x_{i+1}$. Observe que σ é inversível e σ^{-1} é tal que $\sigma^{-1}(y) = x$ com $x_i = y_{i-1}$. Denota-se por σ^k ($k > 0$) a composição de σ por ela mesma k -vezes, ou seja,

$$\sigma^k = \underbrace{\sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{k\text{-vezes}}.$$

Seja $\mathcal{F}$ uma coleção de palavras sobre $\mathcal{A}$ e seja $\mathbf{X}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}}$ o subconjunto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ formado por sequências bi-infinitas que não possuem como fator uma palavra de $\mathcal{F}$. Neste contexto, $\mathcal{F}$ é referido como uma lista de palavras proibidas. Um Sistema Dinâmico Simbólico (SS) é um conjunto $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}}$. Se no contexto não houver confusão sobre o alfabeto usado, utiliza-se a notação mais simples $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$. Quando $\mathcal{F}$ é finito diz-se que X é de tipo finito e denota-se por SFT (*shift of finite type*). É importante observar que um SS X é invariante por deslocamento, ou seja, $\sigma(X) = X$.

Exemplo 2.1. *Seja X o conjunto de todas as sequências binárias em que não ocorrem dois 1's consecutivos. Daí, $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$, em que $\mathcal{F} = \{11\}$. Observe que este espaço é um SFT.*

Denota-se por $\mathcal{B}_n(X)$ o conjunto de todas as palavras de comprimento n que ocorrem em pontos de um SS X e a linguagem de X é a coleção

$$L = \mathcal{B}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(X),$$

em que $\mathcal{B}_0(X) = \varepsilon$, ou seja, L é o conjunto de todas as palavras que ocorrem em pontos de X , incluindo a palavra vazia ε . É importante observar que a linguagem de um SS X é fatorial e prolongável, isto é, se $\mathbf{w} \in L$ então todo fator de $\mathbf{w}$ também está em L , além disso, existem palavras não vazias $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em L tal que $\mathbf{uwv} \in L$. Um SS é completamente determinado pela sua linguagem (Lind, 1995, Proposição 1.3.4), o que garante que dois SSs são iguais se, e somente se, possuem a mesma linguagem. Um SS X com linguagem L é irredutível se para todo par ordenado de palavras $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$ existe $\mathbf{w} \in L$ tal que $\mathbf{uwv} \in L$. Observe que o SFT do Exemplo 2.1 é irredutível, pois, quaisquer duas palavras da linguagem conectadas por uma sequência de zeros gera uma palavra que pertence a linguagem.

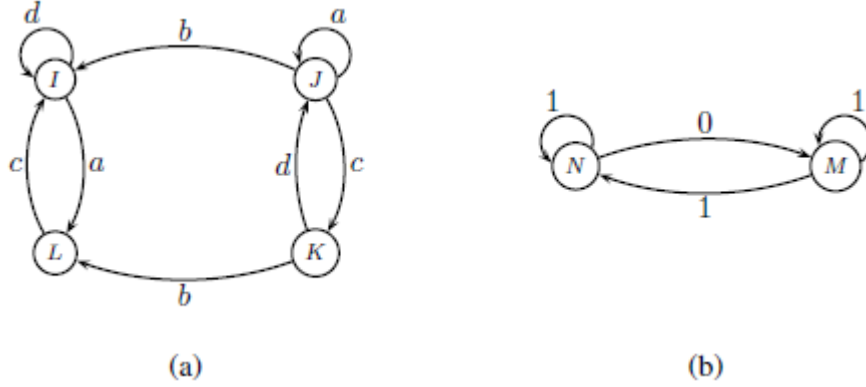
O contexto à direita de uma palavra $\mathbf{w} \in L$, denotado por $F(\mathbf{w})$, é o conjunto de todas as palavras em L que quando concatenadas a $\mathbf{w}$ pela direita, forma-se uma palavra em L , isto é, $F(\mathbf{w}) = \{\mathbf{u} \in L : \mathbf{wu} \in L\}$. Duas palavras $\mathbf{w}, \mathbf{u}$ com o mesmo contexto à direita $F(\mathbf{w}) = F(\mathbf{u})$ são ditas equivalentes. Uma palavra $\mathbf{w} = w_1 \cdots w_n$ é uma proibição mínima se $\mathbf{w} \notin L$ e ambas $w_1 \cdots w_{n-1} \in L$ e $w_2 \cdots w_n \in L$. Denota-se por $\mathcal{O}$ o conjunto formado por todas as palavras proibidas mínimas de um SS. Devido a unicidade de $\mathcal{O}$ (Lind, 1995, p. 12), quando X é um SFT pode-se definir a memória de X por $m = \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{O}} \{|\mathbf{u}| - 1\}$. É importante observar que a minimalidade de $\mathcal{O}$ garante que a linguagem formada por este conjunto é antifatorial (Crochemore (1998)), ou seja, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{O}$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ então, $\mathbf{u}$ não é um fator de $\mathbf{v}$.

Seja $\mathbf{u} \in \mathcal{A}^*$, o conjunto de prefixos de $\mathbf{u}$ é definido como $\mathcal{P}(\mathbf{u}) = \{\mathbf{v} \mid \exists \mathbf{t} \in \mathcal{A}^* \text{ com } \mathbf{vt} = \mathbf{u}\}$, como uma extensão natural, se $M \subseteq \mathcal{A}^*$ então $\mathcal{P}(M) = \bigcup_{\mathbf{u} \in M} \mathcal{P}(\mathbf{u})$. Similarmente, o conjunto de sufixos de $\mathbf{u}$ é definido como $\mathcal{S}(\mathbf{u}) = \{\mathbf{v} \mid \exists \mathbf{t} \in \mathcal{A}^* \text{ com } \mathbf{tv} = \mathbf{u}\}$ e para um subconjunto arbitrário M de $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{S}(M) = \bigcup_{\mathbf{u} \in M} \mathcal{S}(\mathbf{u})$. Observe que $\mathbf{u} \in \mathcal{P}(\mathbf{u}), \mathcal{S}(\mathbf{u})$, pois, $\varepsilon \in \mathcal{A}^*$ e $\mathbf{u}\varepsilon = \varepsilon\mathbf{u} = \mathbf{u}$; daí, os conjuntos dos prefixos e sufixos próprios de $\mathbf{u}$ são dados, respectivamente, por $\mathcal{P}(\mathbf{u}) \setminus \{\mathbf{u}\}$ e $\mathcal{S}(\mathbf{u}) \setminus \{\mathbf{u}\}$. A extensão de uma palavra $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^*$ por outra palavra $\mathbf{v} \in \mathcal{A}^*$ é $\mathbf{wv}$. Dados dois conjuntos $B_1, B_2 \subseteq \mathcal{A}^*$, define-se:

$$\begin{cases} B_1 B_2^{-1} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid \mathbf{w}_1 \mathbf{w} \in B_1 \text{ para } \mathbf{w} \in B_2\} \\ B_1^{-1} B_2 = \{\mathbf{w}_2 \in \mathcal{A}^* \mid \mathbf{w} \mathbf{w}_2 \in B_2 \text{ para } \mathbf{w} \in B_1\} \end{cases}.$$

Exemplo 2.2. Para $B_1 = \{abcd, badd\}$ e $B_2 = \{d, baddc\}$, tem-se

$$\begin{cases} \mathcal{P}(B_1) = \{\varepsilon, a, b, aa, ba, aab, bad, aabc, badd, abcd\} \\ \mathcal{S}(B_2) = \{\varepsilon, c, d, dc, ddc, addc, baddc\} \\ B_1 B_2^{-1} = \{abc, bad\} \\ B_1^{-1} B_2 = \{c\} \end{cases}.$$

Figura 2.1 – *Exemplo de Grafos.*

Fonte: O Autor (2020).

2.1.1 Grafos

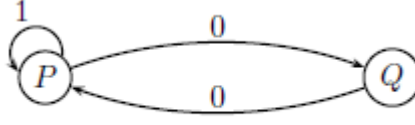
Dados $\mathcal{V}$ um conjunto de vértices, $\mathcal{E}$ um conjunto de ramos (ligações entre vértices) e $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ uma função de rotulação, então $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{L})$ é um grafo direcionado rotulado (doravante denominado de grafo). As funções $i : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$ e $t : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$ especificam o vértice inicial e o vértice final de um ramo, respectivamente. Uma trajetória em G é uma sequência de ramos $\pi = e_1 e_2 \cdots e_n$, tal que, o vértice terminal de e_i é o vértice inicial de e_{i+1} . O rótulo de π é a palavra $\mathcal{L}(\pi) = \mathcal{L}(e_1) \mathcal{L}(e_2) \cdots \mathcal{L}(e_n)$. Um caminho bi-infinito em G é uma sequência bi-infinita de ramos $\xi = \cdots e_{-1} e_0 e_1 \cdots$ tal que $t(e_i) = i(e_{i+1})$ para todo i . Uma palavra $\mathbf{w} \in L$ é gerada por uma trajetória π em G se $\mathbf{w} = \mathcal{L}(\pi)$. A Figura 2.1 mostra dois grafos, em que o grafo em (a) possui 4 vértices e 8 ramos e o grafo em (b) possui 2 vértices e 4 ramos. Observe que *daacbcddda* e *111010* são palavras geradas por trajetórias nos grafos em 2.1(a) e 2.1(b), respectivamente.

Um vértice $I \in \mathcal{V}$ é dito não-essencial se nenhum dos ramos de G inicia ou termina em I . Um grafo é essencial se não possui vértices não-essenciais. Um grafo G é chamado determinístico se para todos $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$, $i(e_1) = i(e_2)$ e $\mathcal{L}(e_1) = \mathcal{L}(e_2)$, então $e_1 = e_2$ e é dito irredutível se para todo par ordenado de vértices I e J existe uma trajetória em G iniciando em I e terminando em J . Para os grafos da Figura 2.1 tem-se que ambos são essenciais, (a) é determinístico e redutível (não existe trajetória iniciando em L e terminando em J), enquanto que (b) não é determinístico (ramos distintos iniciando em M com o mesmo rótulo 1), mas, é irredutível.

Sejam G e G' grafos. Um homomorfismo de grafos de G em G' consiste em um par de aplicações $\Phi : \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathcal{V}(G')$ e $\Psi : \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G')$ tais que

$$i(\Psi(e)) = \Phi(i(e)) \quad \text{e} \quad t(\Psi(e)) = \Phi(t(e)), \quad \forall e \in \mathcal{E}(G).$$

Neste caso, escreve-se $(\Phi, \Psi) : G \rightarrow G'$. Este homomorfismo é um isomorfismo de grafos se ambas Φ e Ψ são bijetivas. Dois grafos G e G' são isomorfos, denotado por

Figura 2.2 – Apresentação do sistema dinâmico simbólico par.

Fonte: O Autor (2020).

$G \cong G'$, se existe um isomorfismo de grafos entre eles.

2.1.2 Sistemas Simbólicos Regulares

Dado um grafo cujos ramos são rotulados com símbolos de um alfabeto $\mathcal{A}$ pode-se formar um subconjunto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, em que seus pontos são formados pela leitura dos rótulos dos caminhos bi-infinitos sobre o grafo. Estes conjuntos formam sistemas que modelam sequências usadas em armazenamento e transmissão de informações (Lind (1995) e Imrink (1995)).

Um SS X é representado por G , ou G é uma apresentação de X , se o rótulo de todo caminho bi-infinito em G é um elemento de X , com o contrário também verdadeiro. Um subconjunto $X = \mathbf{X}_G$ de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é um Sistema Simbólico Regular (SSR) se é representado por algum grafo G . SSRs são SSs (Lind , 1995, Teorema 3.1.4). Um sistema simbólico regular no sentido estrito (denotado por SSS, do inglês *strict sofic shift*) é um SSR cujo conjunto mínimo de palavras proibidas $\mathcal{O}$ é infinito.

Exemplo 2.3. Considere o SS X cujo conjunto proibido de palavras de comprimento mínimo é dado por $\mathcal{O} = \{10^{2n+1}1 : n \in \mathbb{N}\}$. Observe que $\mathcal{O}$ é infinito e que este SS é representado pelo grafo da Figura 2.2. Este SSR é um SSS bem conhecido na literatura, denominado de sistema dinâmico simbólico par (even shift) (Lind (1995)).

Teorema 2.1. (Lind , 1995, Teorema 3.2.10) Um SS é um SSR se, e somente se, ele tem um número finito de contextos à direita.

O Teorema 2.1 é relevante para a construção do algoritmo proposto no Capítulo 5.

2.2 PARTIÇÕES

Uma coleção $\mathcal{P}$ de subconjuntos disjuntos não-vazios de um conjunto $\mathcal{D}$ é chamada uma partição se satisfaz $\mathcal{D} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$. Os conceitos de partição e relação de equivalência são interligados (Hernstein , 1970, Teorema 1.A). Seja $\mathcal{Q}$ outra partição de $\mathcal{D}$. Então, $\mathcal{Q}$ é chamada um refinamento de $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{P}$ é a partição mais densa de $\mathcal{Q}$ se cada classe de $\mathcal{Q}$ está contida em alguma classe de $\mathcal{P}$. Dadas as partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, denota-se por $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ a partição mais densa que refina ambas $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ e, os elementos correspondentes são os conjuntos não-vazios $P \cap Q$ para todo $P \in \mathcal{P}$ e $Q \in \mathcal{Q}$. Esta notação é estendida para

algum número finito de partições de $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{P}_n$ é o refinamento mais denso das partições $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$.

Exemplo 2.4. *Seja $\mathcal{D} = \{\varepsilon, a, ab, bcd, cdd\}$ e $\mathcal{P} = \{\{\varepsilon\}, \{a, ab, bcd, cdd\}\}$, $\mathcal{Q} = \{\{\varepsilon, a\}, \{ab\}, \{bcd, cdd\}\}$ duas partições, então:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\varepsilon\} \cap \{\varepsilon, a\} = \{\varepsilon\} \\ \{\varepsilon\} \cap \{ab\} = \emptyset \\ \{\varepsilon\} \cap \{bcd, cdd\} = \emptyset \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{l} \{a, ab, bcd, cdd\} \cap \{\varepsilon, a\} = \{a\} \\ \{a, ab, bcd, cdd\} \cap \{ab\} = \{ab\} \\ \{a, ab, bcd, cdd\} \cap \{bcd, cdd\} = \{bcd, cdd\} \end{array} \right. .$$

Daí, $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} = \{\{\varepsilon\}, \{a\}, \{ab\}, \{bcd, cdd\}\}$.

2.3 CONJUNTO DE RESTRIÇÕES

Seja $\mathbf{w} \in L$. O conjunto de restrições de $\mathbf{w}$, denotado por $\mathcal{C}(\mathbf{w})$ é dado por

$$\mathcal{C}(\mathbf{w}) \triangleq \{\mathbf{v} \in L : \mathbf{w}\mathbf{v} \notin L, \text{ mas, } \mathbf{w}\mathbf{u} \in L \ \forall \ \mathbf{u} \in \mathcal{P}(\mathbf{v}) \setminus \{\mathbf{v}\}\}.$$

Um fato importante a ser considerado é que o contexto à direita de uma palavra na linguagem é unicamente caracterizado pelo seu conjunto de restrições, ou seja, $F(\mathbf{w}) = F(\mathbf{v})$ se, e somente se, $\mathcal{C}(\mathbf{w}) = \mathcal{C}(\mathbf{v})$ (Chaves , 2014, Teorema 1).

Definição 2.1. *Seja X um SS com conjunto proibido mínimo $\emptyset$. Um conjunto suficiente de classes de representantes dos conjuntos de restrições das palavras na linguagem L de X é um subconjunto $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$ tal que*

$$\{\mathcal{C}(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in L\} = \{\mathcal{C}(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in \mathcal{W}\}.$$

Por (Chaves , 2014, Teorema 2), se X é um SFT com linguagem L , então para todo $\mathbf{w} \in L$, $\mathcal{C}(\mathbf{w}) = \mathcal{C}(\mathbf{v})$ para $\mathbf{v}$ o sufixo mais longo de $\mathbf{w}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$. Em outras palavras, $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$ constitui a informação necessária e suficiente para identificar o conjunto de restrições de qualquer palavra na linguagem L de um SFT. Seja $\mathbf{w} \in L$. Se $\mathbf{v}$ é o sufixo mais longo de $\mathbf{w}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$, então $\mathcal{C}(\mathbf{w}a) = \mathcal{C}(\mathbf{v}a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$ (Chaves , 2014, Proposição 3), ou seja, é possível determinar o conjunto de restrições da extensão de uma palavra a partir da extensão do seu sufixo mais longo em $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$ pelo mesmo símbolo, o que é relevante para a construção do grafo de contextos, a ser descrito na Seção 2.6.

2.4 MÁSCARA DE RESTRIÇÃO

Esta seção aborda o conceito de máscara de restrição (Chaves , 2014, Seção IV), que será utilizado para auxiliar a particionar conjuntos de palavras em L que possuam o mesmo conjunto de restrições, ou seja, na identificação de palavras com o mesmo contexto à direita.

Denomina-se $\mathbf{u} \in L$ uma restrição de $\mathbf{w} \in L$ se $\mathbf{wu} \notin L$ ou equivalentemente se $\mathbf{u} \notin F(\mathbf{w})$. A definição a seguir apresenta um mecanismo para identificação inicial de palavras com contexto à direita distintos.

Definição 2.2 (Máscara de Restrição). (*Chaves , 2014, Definição 2*) Seja $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. A máscara de restrição de $\mathbf{w}$, denotada por $\mathcal{M}(\mathbf{w})$ é o subconjunto de $\mathcal{A} \times \{\square, \blacksquare\}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- $(a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \mathbf{wa} \notin L, a \in \mathcal{A};$
- $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \mathbf{wa} \in L, \text{ para } a \in \mathcal{A} \text{ um prefixo próprio de } \mathbf{u} \in L \text{ satisfazendo } \mathbf{wu} \notin L;$
- Se um símbolo não satisfaz às condições anteriores, então não existe um par ordenado em $\mathcal{A} \times \{\square, \blacksquare\}$ com este símbolo.

Observe que a máscara de restrição identifica através das marcas $\square$ e $\blacksquare$ a informação que um símbolo $a \in \mathcal{A}$ transmite sobre as restrições de uma palavra $\mathbf{w} \in L$. Mais especificamente, a marca $\square$ significa que a é um prefixo próprio de uma restrição de $\mathbf{w}$ e a marca $\blacksquare$ significa que a é uma restrição de $\mathbf{w}$.

Uma boa estratégia para calcular a máscara de restrição é começar das palavras mais curtas para as mais longas em $\mathcal{W}$. Inicialmente, sejam $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ e $\mathbf{v}$ seu sufixo próprio mais longo em $\mathcal{W}$. Pode-se começar listando $(a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{w})$ para todo $a \in \mathbf{w}^{-1}\mathcal{O}$ e $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w})$ quando o símbolo a é um prefixo próprio de uma palavra em $\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O}$. Depois disso, incorporar em $\mathcal{M}(\mathbf{w})$ pares ordenados pertencentes a $\mathcal{M}(\mathbf{v})$ tendo os símbolos $a \in \mathcal{A}$ que ainda não tenham aparecido em pares de $\mathcal{M}(\mathbf{w})$. Como $\mathbf{v}$ é mais curta que $\mathbf{w}$, o conjunto $\mathcal{M}(\mathbf{v})$ já foi calculado. Para auxiliar este processo, será enunciado o seguinte Lema.

Lema 2.1. Se $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w})$ então $(a, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(\mathbf{v})$, para $\mathbf{v}$ o sufixo próprio mais longo de $\mathbf{w}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$.

Demonstração. Se $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \mathbf{wa} \in L$, sendo a o prefixo próprio de $\mathbf{u} \in L$ tal que $\mathbf{wu} \notin L$. Daí, $\mathbf{wu} \in \mathcal{O}$. Agora, suponha que $(a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{v})$. Segue então que $\mathbf{va} \notin L, a \in \mathcal{A}$. Como $\mathbf{va} \in \mathcal{S}(\mathbf{wa})$, tem-se um absurdo pelo fato de L ser fatorial. $\square$

Exemplo 2.5. Considere o SFT sobre o alfabeto finito $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ com $\mathcal{O} = \{111\}$. Para este caso $\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1} = \{11\}$ e $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}) = \{\varepsilon, 1, 11\}$. Inicialmente observe que $\mathcal{M}(\varepsilon) = \emptyset$. Para o cálculo de $\mathcal{M}(11)$, observe que $111 \in \mathcal{O}$ e, portanto, $(1, \blacksquare) \in \mathcal{M}(11)$. Agora, observe que o sufixo próprio mais longo de 11 em $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$ é 1 e $\mathcal{M}(1) = \{(1, \square)\}$. Logo, pelo Lema 2.1, $\mathcal{M}(11) = \{(1, \blacksquare)\}$.

Como uma extensão da definição da máscara de restrição, seja $B \subseteq \mathcal{A}^*$ tal que, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in B$, $\mathcal{M}(\mathbf{u}) = \mathcal{M}(\mathbf{w})$, daí define-se $\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(\mathbf{w})$.

2.5 MEMÓRIA DE RESTRIÇÃO

Nesta seção é apresentado o conceito de memória de restrição (Chaves , 2014, Seção IV), cuja importância é determinar as restrições de uma palavra $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ estendida por um símbolo $a \in \mathcal{A}$. Este conceito será aplicado no algoritmo de separação para particionar o conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ bem como para determinar as transições de estado do grafo de contextos, como será visto na Seção 2.6.

Definição 2.3. (Chaves , 2014, Definição 3) Dada uma palavra $\mathbf{w} \in L$, a memória de restrição de $\mathbf{w}$, denotado por $\mathcal{R}(\mathbf{w})$, é o sufixo mais longo de $\mathbf{w}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$.

De (Chaves , 2014, Teorema 2) segue que para todo $\mathbf{w} \in L$, se $\mathbf{v} = \mathcal{R}(\mathbf{w})$ então $\mathcal{C}(\mathbf{w}) = \mathcal{C}(\mathbf{v})$. Da definição de máscara de restrição (Definição 2.2) devem ser considerados quatro casos para o cálculo da memória de restrição da extensão de uma palavra em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$:

1. Para $(a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{w})$, então $\mathcal{R}(\mathbf{w}a)$ não está definida, desde que $\mathbf{w}a \notin L$;
2. Se $\mathbf{w} = \varepsilon$, então $\mathcal{R}(\varepsilon a) = \mathcal{R}(a)$;
3. Para $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w})$ e $\mathbf{w}a \in \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$, então $\mathcal{R}(\mathbf{w}a) = \mathbf{w}a$;
4. Para $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w})$ e $\mathbf{w}a \notin \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$, a memória de restrição $\mathcal{R}(\mathbf{w}a)$ é o sufixo próprio mais longo de $\mathbf{w}a$ em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ o qual de (Chaves , 2014, Proposição 3) é a memória de restrição do sufixo próprio mais longo de $\mathbf{w}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ estendida por a . Neste último caso, a memória de restrição já foi calculada sempre que ela é determinada das palavras mais curtas para as mais longas em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$. Assim, a pesquisa do sufixo próprio mais longo em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ limita a complexidade computacional para determinar a memória de restrição.

Exemplo 2.6. Para o SFT do Exemplo 2.5 deseja-se calcular a memória de restrição da palavra $\mathbf{w} = 1$ quando a mesma é estendida por 0 ou por 1. Observe que $10 \in L$ e $10 \notin \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ e o sufixo próprio mais longo de 10 em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ é ε . Portanto, $\mathcal{R}(10) = \varepsilon$. Por outro lado, $(1, \square) \in \mathcal{M}(1)$ e $11 \in \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$, então pelo caso 3, $\mathcal{R}(11) = 11$.

2.6 CONSTRUÇÃO DO GRAFO DE CONTEXTOS

Nesta seção será apresentada a construção do grafo de contextos para a classe dos SFTs através do algoritmo proposto em Chaves (2014). Este algoritmo cria sucessivas partições de $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ em conjuntos (ou classes) de palavras com o mesmo conjunto de restrições (classes de palavras com o mesmo contexto à direita). Para tanto são definidas a seguir partições.

Definição 2.4. (Chaves , 2014, Definição 4) A partição de $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ relativa a $a \in \mathcal{A}$, denotada por $a|\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$, resulta em no máximo três conjuntos determinados como $P_1 \triangleq$

Tabela 2.1 – *Algoritmo Proposto para o SFT.*

1. $\mathcal{P}^1 \leftarrow \bigwedge_{a \in \mathcal{A}} a \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$	▷ A partição inicial (Passo 1)
2. $k \leftarrow 0$	
3. repetir	▷ Iniciar o passo 2
4. $k \leftarrow k + 1$	
5. para todo $a \in \mathcal{A}$ fazer	
6. $\mathcal{P}_a \leftarrow \bigwedge_{P \in \mathcal{P}^k} (P, a) \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$	
7. $\mathcal{P}^{k+1} \leftarrow \mathcal{P}^k \wedge \bigwedge_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{P}_a$	▷ Nova Partição
8. até $\mathcal{P}^{k+1} = \mathcal{P}^k$	▷ Passo 3

Fonte: Chaves (2014).

$\{\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1}) \mid (a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{w})\}$, $P_2 \triangleq \{\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1}) \mid (a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w})\}$ e $P_3 \triangleq \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1}) \setminus (P_1 \cup P_2)$.

Definição 2.5. (Chaves , 2014, Definição 5) *Seja $P \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ e $a \in \mathcal{A}$, uma seção de $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})a$ com respeito a P é o conjunto:*

$$P | \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})a = \{\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1}) \mid \mathbf{w}a \in L \text{ e } \mathcal{R}(\mathbf{w}a) \in P\}.$$

Especifica-se $(P, a) | \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1}) = \{P_1, P_1^C\}$ como a partição de $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ com respeito a P e o símbolo $a \in \mathcal{A}$, em que $P_1 = P | \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})a$ e P_1^C é o complemento relativo de P_1 em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$.

O algoritmo proposto em Chaves (2014) é baseado nas partições apresentadas nas Definições 2.4 e 2.5, bem como nos conceitos de máscara e memória de restrição, com a primeira estabelecendo a partição inicial enquanto o passo recursivo faz uso da memória de restrição. Quando o critério de parada é satisfeito, as classes de palavras de mesmo contexto à direita em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ são obtidas. O algoritmo é apresentado na Tabela 2.1 e é dividido em três passos.

Passo 1. Particionamento pela máscara de restrição: A partição inicial $\mathcal{P}^1 = \{P_1, \dots, P_n\}$ é a partição mais densa de $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ com respeito a $a | \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ (ver Definição 2.4) $\forall a \in \mathcal{A}$.

Passo 2. Particionamento pela memória de restrição: Neste passo recursivo, o particionamento proposto na Definição 2.5 é empregado para refinar a partição anterior $\mathcal{P}^k$, $k \geq 1$. Deve ser notado que as palavras em $P \in \mathcal{P}^k$ são apenas estendidas por um símbolo $a \in \mathcal{A}$ se $(a, \square) \in \mathcal{M}(P)$. Este passo gera a partição mais densa de $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ relativa a todo $P \in \mathcal{P}^k$ pela extensão de um símbolo específico $a \in \mathcal{A}$ (Linha 6 na Tabela 2.1) e na linha 7 as partições resultantes deste processo (para cada $a \in \mathcal{A}$) refina $\mathcal{P}^k$.

Passo 3. Critério de Parada: O algoritmo termina quando refinamentos não são mais possíveis.

Tabela 2.2 – *Máscara de Restrição dos elementos em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ do SFT do Exemplo 2.5.*

$\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$	$\mathcal{M}(\mathbf{w})$
ε	$\emptyset$
1	$\{(1, \square)\}$
11	$\{(1, \blacksquare)\}$

Fonte: O Autor (2020).

2.6.1 Grafo de Contextos

A descrição do grafo de contextos é dada em (Lind , 1995, Secção 3.2), sendo o grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{L})$ tal que $\mathcal{V} = \{F(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in L\}$ e existe um ramo $e \in \mathcal{E}$, $\mathcal{L}(e) = a$, do vértice $F(\mathbf{w})$ para o vértice $F(\mathbf{w}')$ se, e somente se, $F(\mathbf{w}a) = F(\mathbf{w}')$.

Da correspondência entre contexto à direita e conjunto de restrição (Chaves , 2014, Teorema 1), o conjunto de vértices $\mathcal{V}$ pode ser construído como $\{\mathcal{C}(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})\}$, sendo daí os elementos da partição atingida no Passo 3 do algoritmo descrito na Tabela 2.1. Para determinar as transições dos vértices aplica-se a Proposição 3 de Chaves (2014), daí existe um ramo rotulado a da classe P_i para P_j se $\mathbf{w} \in P_i$, $\mathcal{R}(\mathbf{w}a) \in P_j$ e $(a, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(\mathbf{w})$. Para um símbolo $a \in \mathcal{A}$ pertencente a $\mathcal{M}(\mathbf{w})$ com marca $\square$, a memória de restrição $\mathcal{R}(\mathbf{w}a)$ já foi calculada no Passo 2 do processo de partição.

Para finalizar este capítulo é apresentado um exemplo que ilustra a aplicação do algoritmo proposto na Tabela 2.1.

Exemplo 2.7. *Considere construir o grafo de contextos do SFT do Exemplo 2.5. Pelo referido exemplo, as máscaras de restrição são listadas na Tabela 2.2.*

De acordo com a Tabela 2.2 e a Definição 2.4, tem-se:

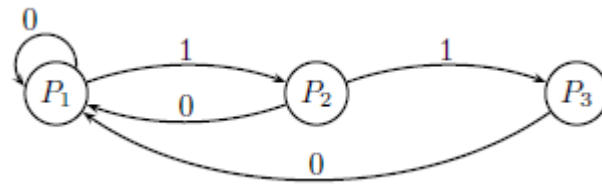
$$\begin{cases} 0|\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1}) &= \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1}) \\ 1|\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1}) &= \{\{\varepsilon\}, \{1\}, \{11\}\} \end{cases}.$$

Pelo Passo 1 do algoritmo,

$$\mathcal{P}^1 = (0|\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})) \wedge (1|\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})) = \{P_1 = \{\varepsilon\}, P_2 = \{1\}, P_3 = \{11\}\}.$$

Observe que refinamentos não são mais possíveis e $\mathcal{P}^1$ é a partição mais fina. De acordo com a descrição feita para as transições do grafo, é possível reproduzir a Figura 2.3.

Figura 2.3 – *Apresentação do SFT do Exemplo 2.5.*



Fonte: O Autor (2020).

3 GRAFOS DE CONTEXTOS PARA SISTEMAS DINÂMICOS SIMBÓLICOS PERIÓDICOS

Uma extensão do conceito de SFT de particular interesse prático, especificamente em codificação conjunta, é o de sistema simbólico com restrições periódicas finitas (PFT, *periodic shift finite-type*). Apesar de um PFT possuir tipicamente um conjunto $\mathcal{O}$ infinito, ao representá-lo de forma periódica, esse conjunto passa a ser descrito por um conjunto finito de restrições periódicas. Esta característica é empregada para estender o algoritmo apresentado no Capítulo 2 para esta classe de sistemas dinâmicos simbólicos.

3.1 PRELIMINARES

Esta seção apresenta alguns conceitos da teoria dos PFTs, maiores detalhes são encontrados em Moision (2001) e Báal (2011).

Seja T um inteiro positivo chamado *período* e $\mathcal{F} = \{\mathbf{w}_1^{(k_1)}, \mathbf{w}_2^{(k_2)}, \dots, \mathbf{w}_n^{(k_n)}\}$ uma coleção finita de palavras em $\mathcal{A}^*$ indexadas com inteiros $k_i \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ os quais serão denominados de *fases*. Chama-se o conjunto $\mathcal{F}$ de *conjunto proibido periódico*. As restrições associadas a uma fase k são denotadas por $\mathcal{F}^{(k)} \triangleq \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w}^{(n)} \in \mathcal{F} \text{ e } n = k\}$. Tem-se para um PFT, a seguinte definição.

Definição 3.1. *Dado um período T e um conjunto proibido periódico $\mathcal{F}$ o PFT, denotado por $X = X_{\{\mathcal{F}, T\}}^{\mathcal{A}}$, é definido como o conjunto de todas as sequências bi-infinitas x sobre o alfabeto $\mathcal{A}$ tal que existe algum inteiro $k \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ com a propriedade:*

$$\mathbf{w} <_i \sigma^k(x), \forall i \in \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbf{w} \notin \mathcal{F}^{(i \bmod T)},$$

em que σ representa a aplicação deslocamento.

Observação 3.1. *Quando não existir confusão sobre o alfabeto utilizado, pode-se usar a notação mais simples $X_{\{\mathcal{F}, T\}}$ para representar o PFT.*

É importante perceber que um PFT $X_{\{\mathcal{F}, T\}}$ com período $T = 1$ é simplesmente o SFT $Y_{\mathcal{F}'}$ com $\mathcal{F}' = \mathcal{F}^{(0)}$, ou seja, a classe dos SFTs está estritamente contida na classe dos PFTs. Diz-se que um PFT é próprio se não é um SFT. Observe que para um PFT próprio existe, necessariamente, uma palavra que é permitida em algumas, mas, não em todas as fases.

Exemplo 3.1. *O sistema simbólico bifase é um PFT sobre o alfabeto binário com $\mathcal{F} = \{00^{(0)}, 11^{(0)}\}$ e $T = 2$.*

A seguir, é apresentado o conceito de linguagem vinculada a fase que será usado para descrever as restrições de palavras em $\mathcal{A}^*$ para uma determinada fase.

Definição 3.2. *Seja $\mathcal{L}_x \subseteq \{0, \dots, T-1\}$ o conjunto de deslocamentos de um ponto $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que $\forall i \in \mathbb{Z}$ e $\ell_x \in \mathcal{L}_x$, se $\mathbf{v} <_i \sigma^{\ell_x}(x)$ então $\mathbf{v} \notin \mathcal{F}^{(i \bmod T)}$. A linguagem associada à fase k é $L^{(k)} = \{\mathbf{u} <_j \sigma^{\ell_x}(x) \mid x \in \mathbf{X}_{\{\mathcal{F}, T\}}, \ell_x \in \mathcal{L}_x \text{ e } j \equiv k \bmod T\}$.*

Baseado na Definição 3.2 usar-se-á a notação mais simples $\mathbf{w}^{(k)}$ quando se quer dizer que $\mathbf{w} \in L^{(k)}$. Quando $\mathbf{w} \notin L^{(k)}$ então $\mathbf{w}^{(k)}$ não está definida, que não impede $\mathbf{w} \in L$, uma vez que este pode pertencer a uma linguagem $L^{(j)}$ com $j \neq k$.

De acordo com a Definição 3.2, a linguagem L de um PFT é tal que $L = \bigcup_{k \in \{0, \dots, T-1\}} L^{(k)}$.

Exemplo 3.2. *Seja $\mathbf{X}_{\{\mathcal{F}, T\}}$ o PFT tal que $\mathcal{F} = \{11^{(0)}, 01^{(1)}\}$ e $T = 2$. Observe que $110 \in L^{(1)}$, mas, $110 \notin L^{(0)}$.*

O exemplo 3.2 ilustra bem a dependência da linguagem com a fase. Como uma extensão da Definição 3.2, diz-se que $\mathbf{s}^{(j)}$ é um fator de $\mathbf{w}^{(k)}$ se $\mathbf{s} <_t \mathbf{w}$ e $j \equiv (k+t) \bmod T$. Se $\mathbf{s} <_0 \mathbf{w}$ então $\mathbf{s}^{(k)}$ é um prefixo de $\mathbf{w}^{(k)}$ (prefixo próprio se $|\mathbf{s}| < |\mathbf{w}|$). Quando $\mathbf{s} <_t \mathbf{w}$ e $k+t+|\mathbf{s}| \equiv (k+|\mathbf{w}|) \bmod T$ então $\mathbf{s}^{(k+t)}$ é um sufixo de $\mathbf{w}^{(k)}$ (sufixo próprio se $t > 0$).

Considere o conjunto $\mathcal{O}_p = \{\mathbf{w}^{(k)}, k \in \{0, \dots, T-1\} \text{ e } \mathbf{w} = w_0 \dots w_n \mid \mathbf{w} \notin L^{(k)}, \text{ mas, todos os fatores próprios } \mathbf{u} <_i \mathbf{w} \text{ pertencendo a } L^{((k+i) \bmod T)}\}$. O conjunto $\mathcal{O}_p$ é denominado conjunto mínimo periódico de palavras proibidas para um PFT. Observe que $\mathbf{w}^{(k)} \in \mathcal{O}_p$ se, e somente se, $\mathbf{w} \notin L^{(k)}$, $w_{[0, |w|-2]} \in L^{(k)}$ e $w_{[1, |w|-1]} \in L^{((k+1) \bmod T)}$.

A seguir apresenta-se a extensão do conceito de contexto à direita de uma palavra $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^*$ para um elemento $\mathbf{w}^{(k)}$.

Definição 3.3. *O contexto à direita de $\mathbf{w} \in L$ associado a uma fase k é dado por $F(\mathbf{w}^{(k)}) = \{\mathbf{s} \mid \mathbf{ws} \in L^{(k)}\}$. O complemento do contexto à direita em relação a L é dado por $F'(\mathbf{w}^{(k)}) = L \setminus F(\mathbf{w}^{(k)}) = \{\mathbf{s} \in L \mid \mathbf{ws} \notin L^{(k)}\}$.*

Exemplo 3.3. *Considere o PFT do Exemplo 3.2. Observe que $1 \in F(0^{(0)})$ e $1 \notin F(0^{(1)})$, enquanto que $01 \notin F(0^{(0)})$ e $01 \in F(0^{(1)})$.*

Caso $\mathbf{w}$ não seja permitido na fase k , então para todo $\mathbf{s} \in L$, $\mathbf{ws} \notin L^{(k)}$. Daí, para todo $\mathbf{w} \notin L^{(k)}$, segue da Definição 3.3 que $F(\mathbf{w}^{(k)}) = \emptyset$.

3.2 CONJUNTO DE RESTRIÇÕES DE UM PFT

Nesta seção apresenta-se a definição do conjunto de restrições de uma palavra para uma determinada fase associado a um conjunto mínimo periódico de palavras proibidas, bem como resultados decorrentes desta definição.

Definição 3.4. *Seja $\mathbf{w}$ uma palavra da linguagem de um PFT. O conjunto de restrições de uma palavra $\mathbf{w}^{(k)}$ é dado por*

$$\mathcal{C}(\mathbf{w}^{(k)}) = \left\{ \mathbf{s} \mid \mathbf{ws} \notin L^{(k)} \text{ and } \mathbf{ws}\mathcal{A}^{-1} \in L^{(k)} \right\},$$

o qual será denotado tipicamente por $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)})$, como consequência de seu particionamento nos conjuntos $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i$, definidos em termos de um conjunto $\mathcal{O}_p$ específico por:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)}) \triangleq \left\{ \mathbf{s}^{(0)} \mid \mathbf{ws}\mathcal{A}^{-1} \in L^{(k \bmod T)} \text{ e existe } \mathbf{p} \in \mathcal{S}(\mathbf{w}) \setminus \{\varepsilon\} \text{ tal que } \mathbf{ps} \in \mathcal{O}_p^{((k+|\mathbf{w}|-|\mathbf{p}|) \bmod T)} \right\},$$

denotado por conjunto de restrições dependentes, e

$$\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{w}^{(k)}) \triangleq \left\{ \mathbf{u}^{(\ell)} \mid \forall \mathbf{s} \in L \text{ tal que } \mathbf{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{s}) \setminus \{\varepsilon\} \text{ e } \mathbf{ws}\mathcal{A}^{-1} \in L^{(k)} \text{ mas } \mathbf{ws} \notin L^{(k)}, \text{ com } \mathbf{u}^{(j)} \in \mathcal{O}_p \text{ e } (j - k - |\mathbf{w}|) \equiv \ell \bmod T \right\},$$

denotado por conjunto de restrições independentes. Observe que os dois conjuntos dependem da fase, contudo só $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)})$ depende efetivamente de $\mathbf{w}$.

Proposição 3.1. *Seja $\mathbf{y} \in L^{(k+|\mathbf{w}|)}$ tal que $\mathbf{wy} \notin L^{(k)}$, então $\mathbf{y}$ possui um fator em $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)}) \cup \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{w}^{(k)})$.*

Demonstração. Se $\mathbf{wy}^{(k)} \notin L^{(k)}$ é por que $\mathbf{wy}^{(k)}$ possui um fator $\mathbf{v} <_i \mathbf{wy}$, tal que $\mathbf{v}^{(i+k)} \in \mathcal{O}_p$. Considera-se a seguir que i é o menor destes valores.

caso i: $i < |\mathbf{w}|$, portanto $\mathbf{v} = \mathbf{ps}$ tal que $\mathbf{p} \in \mathcal{S}(\mathbf{w}) \setminus \{\varepsilon\}$. Como $\mathbf{v}^{(i+k)} \in \mathcal{O}_p$ e i é mínimo, $\mathbf{ws}\mathcal{A}^{-1} \in L^{(k)}$; caso contrário, $\mathbf{v}^{(i+k)}$ teria um fator em $\mathcal{O}_p$. Portanto, $\mathbf{s}^{(0)} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(j)})$.

caso ii: $i \geq |\mathbf{w}|$, neste caso existe $\mathbf{v} <_\ell \mathbf{y}$ tal que $\mathbf{v}^{(i+k)} \in \mathcal{O}_p$, em que $\ell = i - |\mathbf{w}|$. Isso, associado ao fato de i ser mínimo, implica que $\mathbf{ws}\mathcal{A}^{-1} \in L^{(k)}$ e $\mathbf{ws} \notin L^{(k)}$, para $\mathbf{v} <_\ell \mathbf{s}$ e $\mathbf{s} \in \mathcal{P}(\mathbf{y}) \setminus \{\varepsilon\}$. O que implica que $\mathbf{v}^{(\ell)} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{w}^{(k)})$. $\square$

Lema 3.1. *((Chaves, 2006, Lema 4.2)) Se $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{u}^{(j)})$ então $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{u}^{(j)})$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{u}^{(j)})$.*

Teorema 3.1. *Seja $\mathbf{w} \in L^{(k)}$ e $\mathbf{w}' \in L^{(j)}$, então $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}'^{(j)})$ se, e somente se, $F(\mathbf{w}^{(k)}) = F(\mathbf{w}'^{(j)})$.*

Demonstração. Para todo $\mathbf{wv} \notin L^{(k)}$, segue da Proposição 3.1 que há um prefixo $\mathbf{p}$ de $\mathbf{v}$ de comprimento mínimo e tal que $\mathbf{wp} \notin L^{(k)}$, mas $\mathbf{wp}\mathcal{A}^{-1} \in L^{(k)}$. Logo, $\mathbf{wp}^{(k)}$ possui um sufixo em $\mathcal{O}_p$ que, portanto, pertence a $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)})$. Consequentemente, para todo $\mathbf{v} \notin F(\mathbf{w}^{(k)})$, há um prefixo $\mathbf{p}$ de $\mathbf{v}$, tal que, $\mathbf{p} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)})$. Como $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}'^{(j)})$, então $\mathbf{v} \notin F(\mathbf{w}'^{(j)})$. Conclui-se que $F(\mathbf{w}^{(k)}) = F(\mathbf{w}'^{(j)})$, do que segue a implicação direta.

Agora, considere que $F(\mathbf{w}^{(k)}) = F(\mathbf{w}'^{(j)})$. Para $\mathbf{v} \notin F(\mathbf{w}^{(k)})$, segue da Proposição 3.1 que há $\mathbf{p}$, um sufixo de menor comprimento, tal que $\mathbf{wp} \notin L^{(k)}$ mas $\mathbf{wp}\mathcal{A}^{-1} \in L^{(k)}$. Portanto, $\mathbf{w}'\mathbf{p} \notin L^{(j)}$ e $\mathbf{w}'\mathbf{p}\mathcal{A}^{(-1)} \in L^{(j)}$. Isso implica que $\mathbf{p} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)})$ e $\mathbf{p} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}'^{(j)})$. O

que ocorre para todo $\mathbf{v} \notin F(\mathbf{w}^{(k)})$ ou $\mathbf{v} \notin F(\mathbf{w}'^{(j)})$, implicando que $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}'^{(j)})$ e, portanto, segue a implicação reversa. $\square$

Exemplo 3.4 (TMTR). *Considere o PFT dado pelo conjunto $\mathcal{O}_p = \{111^{(0)}\}$ e $T = 2$. Se $\mathbf{w}^{(k)} = 1^{(0)}$ então, $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(1^{(0)}) = \{11^{(0)}\}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(1^{(0)}) = \{111^{(1)}\}$.*

Lema 3.2. *Para todo $\mathbf{w} \in L^{(k)}$, $\mathbf{u} \in L^{(j)}$ e $a \in \mathcal{A}$, se $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{u}^{(j)})$ então $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{wa}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{ua}^{(j)})$.*

Demonstração. Segue do Teorema 3.1 que $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}'^{(k)})$ se, e somente se, $F(\mathbf{w}^{(k)}) = F(\mathbf{w}'^{(j)})$. Assim, $\mathbf{waz} \in L^{(k)}$ se, e somente se, $\mathbf{waz} \in L^{(j)}$, do que segue que $F(\mathbf{wa}^{(k)}) = F(\mathbf{w}'a^{(j)})$ e, portanto, $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{wa}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}'a^{(j)})$. $\square$

O teorema seguinte estabelece que o conjunto $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{O}_p \mathcal{A}^{-1}) \cup \{\varepsilon^{(0)}, \dots, \varepsilon^{(T-1)}\}$ é a informação suficiente para identificar o conjunto de restrições de qualquer palavra na linguagem L de um PFT.

Teorema 3.2. *Seja L a linguagem de um PFT. Para todo $\mathbf{w} \in L^{(k)}$,*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{v}^{(k+t)}),$$

para $\mathbf{v}^{(k+t)}$ o sufixo mais longo de $\mathbf{w}^{(k)}$ em $\mathcal{W}$.

Demonstração. Considere $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)})$, logo $\mathbf{wu} \notin L^{(k)}$ e $\mathbf{wu}\mathcal{A}^{-1} \in L^{(k)}$. Isso implica que há um $\mathbf{p} \in \mathcal{S}(\mathbf{w})$ e $\mathbf{q} \in \mathcal{S}(\mathbf{v}) \setminus \{\varepsilon\}$ tal que $\mathbf{pq}^{(k+|\mathbf{wu}|-|\mathbf{pq}|)} \in \mathcal{O}_p$, com $\mathbf{pq}$ sendo um sufixo de $\mathbf{wu}$, o que segue da Proposição 3.1. Observe que $\mathbf{p}$ pode ser igual a ε e $\mathbf{q}$ pode ser igual a $\mathbf{v}$. Como $\mathbf{v}^{(k+t)}$ é o sufixo mais longo de $\mathbf{w}^{(k)}$ em $\mathcal{W}$, $\mathbf{p}$ também é sufixo de $\mathbf{v}$ e, portanto, $\mathbf{pq}^{(k+t+|\mathbf{vu}|-|\mathbf{pq}|)}$ também é um sufixo de $\mathbf{vu}^{(k+t)}$ contido em $\mathcal{O}_p$, consequentemente $\mathbf{vu} \notin L^{(k+t)}$. Por outro lado, deve-se ter $\mathbf{vu}\mathcal{A}^{-1} \in L^{(k+t)}$, caso contrário, sendo $\mathbf{v}^{(k+t)}$ um sufixo de $\mathbf{w}^{(k)}$, necessariamente ter-se-á $\mathbf{wu}\mathcal{A}^{-1} \notin L^{(k)}$, uma contradição. Portanto, $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{v}^{(k+t)})$ e, consequentemente, $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{v}^{(k+t)})$.

Considera-se a inclusão inversa, supondo inicialmente que $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{v}^{(k+t)})$, têm-se que $\mathbf{vu} \notin L^{(k+t)}$ e $\mathbf{vu}\mathcal{A}^{-1} \in L^{(k+t)}$. Segue da Proposição 3.1 que $\mathbf{vu}^{(k+t)}$ possui um sufixo $\mathbf{pq}^{(k+|\mathbf{wu}|-|\mathbf{pq}|)}$ em $\mathcal{O}_p$. Como $\mathbf{v}^{(k+t)}$ é um sufixo de $\mathbf{w}^{(k)}$, então $\mathbf{pq}^{(k+|\mathbf{wu}|-|\mathbf{pq}|)}$ também é sufixo de $\mathbf{wu}^{(k)}$ e, portanto, $\mathbf{wv} \notin L^{(k)}$. Ao supor-se que $\mathbf{wu}\mathcal{A}^{-1} \notin L^{(k)}$, admite-se que $\mathbf{wu}\mathcal{A}^{-1}$ possui um fator em $\mathcal{O}_p$, o qual também deve ser fator de $\mathbf{vu}\mathcal{A}^{-1}$, já que $\mathbf{v}^{(k+t)}$ é o sufixo mais longo de $\mathbf{w}^{(k)}$ em $\mathcal{W}$, o que acarreta em $\mathbf{vu}\mathcal{A}^{-1} \notin L^{(k+t)}$, o que é uma contradição. Assim, $\mathbf{wu}\mathcal{A}^{-1} \in L^{(k)}$ e, portanto, $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)})$. Conclui-se que $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{v}^{(k+t)}) \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)})$. $\square$

Observação 3.2. *Os elementos do conjunto de representantes devem ser interpretados como a informação mínima por fase, ou memória, para que as restrições de uma palavra sejam definidas. Assim, se uma palavra não possui sufixo entre os representantes não*

nulos, essa memória é a palavra nula. Portanto, o conjunto $\mathcal{W}$ deve conter palavras nulas para todas as fases.

O lema a seguir, assim como no caso de um SFT, permite determinar o conjunto de restrições de uma palavra $\mathbf{w}^{(k)}$ através da extensão pelo mesmo símbolo do seu sufixo mais longo em $\mathcal{W}$. Esse resultado é importante para a construção de uma apresentação reduzida para um PFT baseado no conceito do conjunto de restrições.

Lema 3.3. *Seja L a linguagem de um PFT e seja $\mathbf{w} \in L^{(k)}$. Se $\mathbf{v}^{(l)}$ é o sufixo mais longo de $\mathbf{w}^{(k)}$ em $\mathcal{W}$, então $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{v}a^{(l)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}a^{(k)})$ para $a \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. O resultado segue da aplicação do Teorema 3.2 seguido da aplicação do Lema 3.2. $\square$

3.3 MÁSCARA E MEMÓRIA DE RESTRIÇÕES DE PALAVRAS POR FASE NA LINGUAGEM DE UM PFT

Nesta seção estende-se os conceitos de máscara de restrição e memória de restrição apresentados nas Definições 2.2 e 2.3 do Capítulo 2 para uma palavra $\mathbf{w}^{(k)}$ de um PFT.

3.3.1 Máscara de Restrição Periódica

De forma similar, a máscara de restrição também identifica através das marcas $\square$ e $\blacksquare$ a informação que um símbolo $a \in \mathcal{A}$ transmite sobre as restrições de uma palavra $\mathbf{w}^{(k)}$ na linguagem de um PFT.

Definição 3.5. *Seja $\mathbf{w}^{(k)} \in \mathcal{W}$, em que $\mathcal{O}_p$ é o conjunto mínimo periódico proibido de um PFT. Os elementos da máscara de restrição de $\mathbf{w}^{(k)}$, $\mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)}) \subset \mathcal{A} \times \{\square, \blacksquare\}$ satisfazem as seguintes propriedades:*

- $(a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)}) \Leftrightarrow \mathbf{w}a \notin L^{(k)}, a \in \mathcal{A};$
- $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)}) \Leftrightarrow \mathbf{w}a \in L^{(k)}, \text{ para } a \in \mathcal{A} \text{ um prefixo próprio de } \mathbf{u}^{(0)} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)});$
- *Se um símbolo $a \in \mathcal{A}$ não satisfaz as declarações anteriores, então não existe um par ordenado em $\mathcal{A} \times \{\square, \blacksquare\}$ com este símbolo.*

Observe que para pertencer à máscara, o símbolo deve fazer parte do conjunto $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)})$ e não deve fazer parte do conjunto $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{w}^{(k)})$.

Assim como no SFT, mantêm-se a estratégia de calcular a máscara de restrição das palavras mais curtas para as mais longas em $\mathcal{W}$. Primeiramente, determinam-se os $\mathbf{u}^{(l)} \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_p)$ tal que $\mathbf{w}\mathbf{u}^{(k)} \notin L^{(k)}$, observando-se que $l \equiv (k + |\mathbf{w}|) \pmod T$. Se $|\mathbf{u}| = 1$, então $(\mathbf{u}, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$, caso contrário $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$, em que $a \in \mathcal{A}$ é sufixo de $\mathbf{u}$. Por fim, faz-se a inclusão dos elementos de $\mathcal{M}(\mathbf{v}^{(l)})$ em $\mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$, para $\mathbf{v}^{(l)}$ sufixo próprio mais longo de $\mathbf{w}^{(k)}$ em $\mathcal{W}$, para elementos em $\mathcal{A}$ ainda não presentes em pares de $\mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$.

Tabela 3.1 – Máscara de Restrição para os elementos de $\mathcal{W}$ de um TMTR com $T = 2$.

$\mathbf{w}^{(k)} \in \mathcal{W}$	$\mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$
$\varepsilon^{(0)}$	$\emptyset$
$\varepsilon^{(1)}$	$\emptyset$
$1^{(0)}$	$\{(1, \square)\}$
$11^{(0)}$	$\{(1, \blacksquare)\}$

Fonte: O Autor (2020).

Como único caso relevante, não ocorrerá $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$ e $(a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{v}^{(l)})$, já que implicaria que $\mathbf{w}a^{(k)}$, um prefixo próprio em $\mathcal{O}_p$, possui como sufixo próprio um elemento em $\mathcal{O}_p$, o que contradiz a minimalidade deste conjunto.

Exemplo 3.5. Para o PFT do Exemplo 3.4, $\mathcal{O}_p = \{111^{(0)}\}$. Então $\mathcal{O}_p\mathcal{A}^{-1} = \{\mathbf{w}^{(k)} : \mathbf{w}a^{(k)} \in \mathcal{O}_p \text{ para } a \in \mathcal{A}\} = \{11^{(0)}\}$. Daí, $\mathcal{P}(\mathcal{O}_p\mathcal{A}^{-1}) = \{\varepsilon^{(0)}, 1^{(0)}, 11^{(0)}\}$ e $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{O}_p\mathcal{A}^{-1}) \cup \{\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}\} = \{\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, 1^{(0)}, 11^{(0)}\}$. Observe que $\mathcal{M}(\varepsilon^{(0)}) = \mathcal{M}(\varepsilon^{(1)}) = \emptyset$. Novamente do Exemplo 3.4, $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(1^{(0)}) = \{11^{(0)}\}$ e 1 é prefixo próprio de $11^{(0)}$, ou seja, pela segunda propriedade da Definição 3.5, $(1, \square) \in \mathcal{M}(1^{(0)})$. Para determinar o sufixo próprio mais longo $\mathbf{v}^{(j)}$ de $1^{(0)}$ em $\mathcal{W}$, deve-se lembrar que $j \equiv (1 - |\mathbf{v}|) \pmod{2}$. Como $\mathbf{v}$ é sufixo próprio, então $|\mathbf{v}| = 0$ e a única palavra de comprimento 0 na fase 1 que é sufixo em $\mathcal{W}$ é $\varepsilon^{(1)}$ cuja máscara de restrição é vazia. Portanto, $\mathcal{M}(1^{(0)}) = \{(1, \square)\}$. Por fim, $111 \notin L^{(0)}$ e pela primeira propriedade da Definição 3.5, $(1, \blacksquare) \in \mathcal{M}(11^{(0)})$. Sendo $\mathbf{v}^{(j)}$ o sufixo próprio mais longo de $11^{(0)}$ em $\mathcal{W}$ têm-se $j \equiv (2 - |\mathbf{v}|) \pmod{2}$ com $|\mathbf{v}| \in \{0, 1\}$. Observe que não existe sufixo próprio de $11^{(0)}$ de comprimento 1 na fase 1 em $\mathcal{W}$, ou seja, $\mathbf{v}^{(j)} = \varepsilon^{(0)}$ cuja máscara de restrição é vazia. Logo, $\mathcal{M}(11^{(0)}) = \{(1, \blacksquare)\}$. As respectivas máscaras de restrição estão listadas na Tabela 3.1.

A seguir apresenta-se a definição de memória de restrição de uma palavra $\mathbf{w} \in L$, em que L é a linguagem de um PFT.

Definição 3.6. Dado um PFT com linguagem L e uma palavra $\mathbf{w} \in L^{(k)}$, a memória de restrição de $\mathbf{w}^{(k)}$, denotada por $\mathcal{R}(\mathbf{w}^{(k)})$, é o sufixo mais longo de $\mathbf{w}^{(k)}$ em $\mathcal{W}$.

De forma análoga ao SFT, o Teorema 3.2 garante que para todo $\mathbf{w} \in L$, se $\mathbf{v}^{(l)} = \mathcal{R}(\mathbf{w}^{(k)})$ então $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{v}^{(l)})$. O cálculo da memória de restrição no caso periódico, levando em consideração a Definição 3.5 da máscara de restrição, exige também os mesmos quatro casos vistos no Capítulo 2 para o SFT, porém, observando que para o segundo caso, se $\mathbf{w}^{(k)} = \varepsilon^{(k)}$, então $\mathcal{R}(\varepsilon^{(k)}a) = \mathcal{R}(a^{(k)})$, para todo $0 \leq k < T$.

Exemplo 3.6. Para o PFT do Exemplo 3.5 calcular-se-á a memória de restrição da extensão de $\mathbf{w}^{(k)} = 1^{(0)}$ por 1, ou seja, $\mathcal{R}(1^{(0)}1) = \mathcal{R}(11^{(0)})$. Observando a Tabela 3.1, têm-se que $(1, \square) \in \mathcal{M}(1^{(0)})$ e $11^{(0)} \in \mathcal{W}$, então $\mathcal{R}(11^{(0)}) = 11^{(0)}$.

3.4 ALGORITMO PROPOSTO PARA PFTs

Nesta seção resume-se os passos do algoritmo proposto em Chaves (2014) para obter os vértices de uma apresentação reduzida para um sistema dinâmico simbólico. O algoritmo cria sucessivas partições de $\mathcal{W}$ até obter classes de palavras com o mesmo conjunto de restrições periódico. Este é baseado nos conceitos de máscara de restrição periódica e memória de restrição periódica, com o primeiro estabelecendo a primeira partição, enquanto o segundo estabelece recursivamente o refinamento desta pela aplicação do algoritmo de Moore. Quando o critério de parada é satisfeito, as classes de palavras em $\mathcal{W}$ com mesmo contexto à direita por fase são obtidas. O pseudo-código do algoritmo é apresentado em (Chaves, 2014, Tabela 1). A seguir descreve-se os seus três passos.

- **Passo 1.** Particionamento pela máscara de restrição periódica: Os elementos da partição inicial $\mathcal{P}^1$ são subconjuntos de $\mathcal{W}$ cujas palavras possuem a mesma máscara de restrição periódica (Chaves, 2014, *Definition 4*);
- **Passo 2.** Particionamento pela memória de restrição periódica: O algoritmo de Moore é aplicado de acordo com (Chaves, 2014, *Definition 5*) para refinar as partições $\mathcal{P}^k$, $k \geq 1$;
- **Passo 3.** Critério de parada: O algoritmo termina quando refinamentos não são mais possíveis.

A Proposição 3.2 e o Teorema 3.3 estabelecem a consistência deste algoritmo para a classe dos PFTs.

Proposição 3.2. *Em cada partição $\mathcal{P}^k$, as palavras em $\mathcal{W}$ em classes distintas têm contextos à direita distintos.*

Demonstração. A prova segue por indução. Para a partição $\mathcal{P}^1$, sejam $\mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{w}^{(k)} \in \mathcal{W}$ tais que $\mathcal{M}(\mathbf{u}^{(j)}) \neq \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$. Considere as possibilidades:

- Existe $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{u}^{(j)})$ tal que $(a, \square) \notin \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$. Segue, da Definição 3.5, $\mathbf{u}a \in L^{(j)}$ para $a \in \mathcal{A}$ um prefixo próprio de $\mathbf{v}^{(0)} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{u}^{(j)})$. Observe agora que $\mathbf{v}^{(0)} \notin \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)})$, caso contrário, ter-se-ia $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$, que é uma contradição.
- Existe $(a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{u}^{(j)})$ tal que $(a, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$. Pela Definição 3.5, $\mathbf{u}a \notin L^{(j)}$ e $a^{(0)} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{u}^{(j)})$. Observe que $a^{(0)} \notin \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)})$, caso contrário, ter-se-ia $(a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$, que é uma contradição. Portanto, nas duas possibilidades, têm-se $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{u}^{(j)}) \neq \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)})$. Do Lema 3.1, $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{u}^{(j)}) \neq \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)})$ e, do Teorema 3.1, $F(\mathbf{u}^{(j)}) \neq F(\mathbf{w}^{(k)})$ e o resultado é válido para a partição inicial $\mathcal{P}^1$ no Passo 1.

Agora, assuma que a afirmação é verdadeira para $\mathcal{P}^k$, $k \geq 2$. Sejam $\mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{w}^{(k)} \in \mathcal{W}$ palavras na mesma classe em $\mathcal{P}^k$, mas em classes distintas em $\mathcal{P}^{k+1}$. Do Passo 3, isto ocorre porque existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{R}(\mathbf{u}a^{(j)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{w}a^{(k)})$ estão em classes distintas em $\mathcal{P}^k$. Pela hipótese de indução $\mathcal{R}(\mathbf{u}a^{(j)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{w}a^{(k)})$ possuem contextos à direita distintos e,

portanto, $\mathbf{u}^{(j)}$ e $\mathbf{w}^{(k)}$ também possuem contextos à direita distintos. Logo, a proposição é válida para $\mathcal{P}^{k+1}$. $\square$

Teorema 3.3. *O algoritmo proposto particiona $\mathcal{W}$ em classes de palavras de contextos à direita equivalentes.*

Demonstração. Empregando a Proposição 3.2, só precisa-se demonstrar que na partição final as palavras em uma mesma classe possuem o mesmo contexto à direita. Suponha que $\mathcal{P}^k = \mathcal{P}^{k+1}$ (condição de parada do algoritmo) e que existem palavras $\mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{w}^{(k)} \in \mathcal{W}$ na mesma classe com contextos à direita distintos. Pelo Teorema 3.1 $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) \neq \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{u}^{(j)})$. Têm-se as possibilidades:

a) Como o conjunto $\mathcal{O}_p$ é finito, existe uma palavra $\mathbf{v} \in L$, $\mathbf{v} = v_1 v_2 \dots v_n$ tal que $\mathbf{u}\mathbf{v} \in L^{(j)}$, $\mathbf{w}\mathbf{v} \in L^{(k)}$ mas, $\mathbf{u}\mathbf{v}a \notin L^{(j)}$ e $\mathbf{w}\mathbf{v}a \in L^{(k)}$ para algum $a \in \mathcal{A}$. Portanto, $(a, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathbf{w}\mathbf{v}^{(k)}))$ e $(a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathbf{u}\mathbf{v}^{(j)}))$. Daí, as memórias de restrição $\mathcal{R}(\mathbf{w}\mathbf{v}^{(k)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{u}\mathbf{v}^{(j)})$ devem pertencer a classes distintas em $\mathcal{P}^1$.

Desde que $\mathcal{P}^k$ e $\mathcal{P}^{k+1}$ são iguais, então $\mathcal{R}(\mathbf{w}v_1^{(k)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{u}v_1^{(j)})$ estão na mesma classe em $\mathcal{P}^k$. Como consequência, $\mathcal{R}(\mathbf{w}v_1 v_2^{(k)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{u}v_1 v_2^{(j)})$ estão na mesma classe em $\mathcal{P}^{k-1}$. Em geral, $\mathcal{R}(\mathbf{w}v_1 v_2 \dots v_i^{(k)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{u}v_1 v_2 \dots v_i^{(j)})$ estão na mesma classe em $\mathcal{P}^{k-i+1}$. Finalmente, $\mathcal{R}(\mathbf{w}\mathbf{v}^{(k)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{u}\mathbf{v}^{(j)})$ devem pertencer a mesma classe em $\mathcal{P}^{k-n+1}$ e isto é uma contradição, desde que $\mathcal{R}(\mathbf{w}\mathbf{v}^{(k)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{u}\mathbf{v}^{(j)})$ estão em classes distintas em $\mathcal{P}^1$.

b) Suponha que $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{u}^{(j)})$, mas $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{w}^{(k)}) \neq \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{u}^{(j)})$. Assim, entre todos os elementos na diferença simétrica $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{w}^{(k)}) \Delta \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{u}^{(j)})$, existe um $\mathbf{v}^{(l)}$ tal que $n = l + |\mathbf{v}|$ é mínimo. Sem perda de generalidade, suponha que $\mathbf{v}^{(l)} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{w}^{(k)})$. Portanto, existe $\mathbf{s} = s_1 s_2 \dots s_n$ tal que $\mathbf{v} <_l \mathbf{s}$, $\mathbf{w}\mathbf{s}\mathcal{A}^{-1} \in L^{(k)}$ e $\mathbf{w}\mathbf{s} \notin L^{(k)}$. Conclui-se que $\mathbf{s} \in F(\mathbf{u}^{(j)})$, pois $\mathbf{s}$ não é excluído por elementos em $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{u}^{(j)})$, já que este é igual a $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)})$, e isso implicaria que $\mathbf{v}^{(l')} \in \mathcal{O}_p$, $l' - k - |\mathbf{w}| \equiv l \pmod{T}$, é fator próprio de um outro elemento de $\mathcal{O}_p$ ou que $\mathbf{w}\mathbf{s}\mathcal{A}^{(-1)} \notin L^{(k)}$, ambos são absurdos. Portanto, $\mathcal{R}(\mathbf{w}s_1 \dots s_{n-1}^{(k)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{u}s_1 \dots s_{n-1}^{(j)})$ estão em classes distintas em $\mathcal{P}^1$, aplicando o raciocínio do item a), $\mathbf{w}^{(k)}$ e $\mathbf{u}^{(j)}$ também devem estar em classes distintas na partição final.

Logo, se $\mathbf{w}^{(k)}$ e $\mathbf{u}^{(j)}$ estão na mesma classe em $\mathcal{P}^k$, deve-se ter $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{u}^{(j)})$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{u}^{(j)})$. Pelo Lema 3.1 têm-se $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{u}^{(j)})$ e pelo Teorema 3.1 o resultado segue. $\square$

3.5 CONSTRUÇÃO DE UMA APRESENTAÇÃO REDUZIDA PARA PFTs

Nesta seção usa-se o algoritmo apresentado na Seção 3.4 para obter um grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{L})$ que é uma apresentação reduzida de um PFT.

Inicia-se definindo o conjunto $\mathcal{V}$, cujos elementos são as classes obtidas com o algoritmo apresentado na Seção 3.4. O conjunto de ramos do grafo, com os respectivos rótulos, é determinado a partir de $\mathcal{V}$ como descrito a seguir.

Definição 3.7. *Sejam $P_i \in \mathcal{V}$ e $\mathbf{w}^{(k)} \in P_i$. A relação $\delta: \mathcal{V} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}$ é definida como:*

$$\delta(P_i, a) = \left\{ P_j \mid \mathcal{R}(\mathbf{w}a^{(k)}) \in P_j \text{ para } a \in \mathcal{A} \text{ com } (a, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(P_i) \right\},$$

em que $\mathcal{M}(P_i) = \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$ para $\mathbf{w}^{(k)} \in P_i$. Observe que esta extensão do conceito de máscara está bem definida, já que pelo Passo 1 do algoritmo todas as palavras em uma mesma classe possuem a mesma máscara. Segue da Definição 3.7 e do Teorema 3.3 que o grafo G é determinístico, ou seja, dados ramos distintos $e_i, e_j \in \mathcal{E}$, se $i(e_i) = i(e_j)$ então $\mathcal{L}(e_i) \neq \mathcal{L}(e_j)$. Portanto, quaisquer caminhos distintos em G que partem de um mesmo vértice possuem rótulos distintos. Observe que palavras de mesmo contexto à direita quando estendidas por uma letra em A geram palavras de mesmo contexto à direita. Disso, decorre do Teorema 3.2 e do Teorema 3.3 que a memória destas pertencem a mesma classe de $\mathcal{W}$, do que segue o determinismo de G .

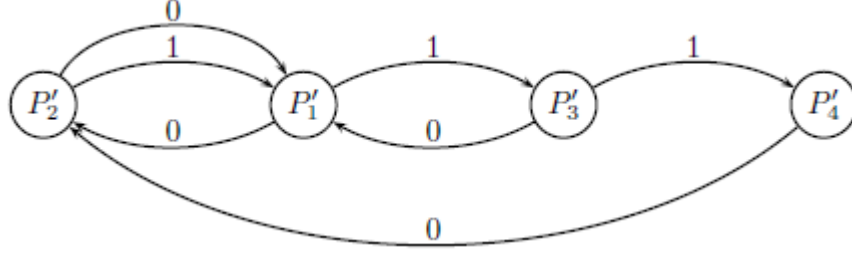
Teorema 3.4. *Seja $X = X_{\{\mathcal{O}_p, T\}}$ um PFT. O grafo G é uma apresentação reduzida de X .*

Demonstração. Mostrar-se-á inicialmente que G é uma apresentação de $X_{\{\mathcal{O}_p, T\}}$. Seja $\mathbf{v} = a_1 a_2 \dots a_n \in B(X_{\{\mathcal{O}_p, T\}})$, logo $\mathbf{v}$ pertence ao conjunto de contextos à direita para alguma palavra em L . Segue do Teorema 3.2 que há $\mathbf{w}^{(k)} \in \mathcal{W}$ tal que $\mathbf{v} \in F(\mathbf{w}^{(k)})$. Suponha que $\mathbf{w}^{(k)} \in P_i$, como $\mathbf{w}a_1 \in L^{(k)}$, então $(a_1, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$, portanto, há um ramo rotulado por a_1 de P_i para P_j em que $\mathcal{R}(\mathbf{w}a_1^{(k)}) \in P_j$. De forma similar, $\mathbf{w}a_1 a_2 \in L^{(k)}$, acarretando em $(a_2, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathbf{w}a_1^{(k)}))$ e, conseqüentemente, na existência de um ramo rotulado por a_2 de P_j para P_l , em que $\mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathbf{w}a_1^{(k)})a_2) \in P_l$. Seguindo esse processo, determina-se uma trajetória π em G tal que $\mathcal{L}(\pi) = \mathbf{v}$. Conclui-se que $F(\mathbf{w}^{(k)}) \subseteq F(P_i)$ e como, empregando o Teorema 3.2, a união dos conjuntos de contextos à direita das palavras em $\mathcal{W}$ formam L , tem-se que $B(X_{\{\mathcal{O}_p, T\}}) \subset B(X_G)$.

Por outro lado, seja $\mathbf{v} = b_1 b_2 \dots b_m \in B(X_G)$, com $\mathbf{v}$ iniciando em um vértice P_i com $\mathbf{w}^{(k)} \in P_i$. Usar-se-á indução sobre m para provar que $\mathbf{v} \in F(\mathbf{w}^{(k)})$. Pela Definição 3.7 segue que $(b_1, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(P_i) = \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$, ou seja, $\mathbf{w}b_1 \in L^{(k)}$ e o resultado é válido para $m = 1$. Suponha que o resultado é válido para todo $t \leq m - 1$. Como $\mathbf{w}b_1 \dots b_{m-1} \in L^{(k)}$ e G é determinístico, existe único estado P_j terminal de $\mathbf{w}b_1 \dots b_{m-1}$. Se $\mathbf{w}b_1 \dots b_m \notin L^{(k)}$, então $(b_m, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathbf{w}b_1 \dots b_{m-1})) = \mathcal{M}(P_j)$ e, pela Definição 3.7 $\mathbf{v} \notin B(X_G)$ que é uma contradição. Logo, $\mathbf{v} \in F(\mathbf{w}^{(k)})$ e $B(X_G) \subset B(X_{\{\mathcal{O}_p, T\}})$. Portanto, G é uma apresentação do PFT caracterizada por $F(P_i) = F(\mathbf{w}^{(k)})$, $P_i \in \mathcal{V}$ e $\mathbf{w}^{(k)} \in P_i$. Por fim, o fato de G ser uma apresentação reduzida segue diretamente da Proposição 3.2 e do Teorema 3.3. $\square$

A seguir, ilustra-se a construção do grafo de um PFT através de exemplos.

Exemplo 3.7. *Utilizar-se-á o algoritmo proposto para construir o grafo do PFT do Exemplo 3.4. Do Exemplo 3.5, $\mathcal{W} = \{\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, 1^{(0)}, 11^{(0)}\}$. Utiliza-se o Passo 1 do al-*

Figura 3.1 – Grafo do TMTR do Exemplo 3.4 obtido da partição $\mathcal{P}^2$.

Fonte: O Autor (2020).

goritmo para determinar a partição inicial $\mathcal{P}^1$. Nesta, os elementos em cada classe possuem máscaras de restrições periódicas iguais e, portanto, da Tabela 3.1 do Exemplo 3.5, $\mathcal{P}^1 = \{P_1 = \{\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}\}, P_2 = \{1^{(0)}\}, P_3 = \{11^{(0)}\}\}$. Para o Passo 2, observe que $\mathcal{R}(\varepsilon^{(0)}1) = 1^{(0)} \in P_2$ enquanto que $\mathcal{R}(\varepsilon^{(1)}1) = \varepsilon^{(0)} \in P_1$. Daí, P_1 deve ser particionado e temos a partição $\mathcal{P}^2 = \{P'_1 = \{\varepsilon^{(0)}\}, P'_2 = \{\varepsilon^{(1)}\}, P'_3 = \{1^{(0)}\}, P'_4 = \{11^{(0)}\}\}$.

Portanto, refinamentos não são mais possíveis, $\mathcal{P}^2$ é a partição mais fina, o critério de parada é estabelecido e o grafo possui 4 vértices. Agora, observe que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}(\varepsilon^{(0)}0) = \mathcal{R}(0^{(0)}) = \varepsilon^{(1)}, \\ \mathcal{R}(\varepsilon^{(1)}0) = \mathcal{R}(0^{(1)}) = \varepsilon^{(0)}, \\ \mathcal{R}(1^{(0)}0) = \mathcal{R}(10^{(0)}) = \varepsilon^{(0)}, \\ \mathcal{R}(11^{(0)}0) = \mathcal{R}(110^{(0)}) = \varepsilon^{(1)} \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}(\varepsilon^{(0)}1) = \mathcal{R}(1^{(0)}) = 1^{(0)}, \\ \mathcal{R}(\varepsilon^{(1)}1) = \mathcal{R}(1^{(1)}) = \varepsilon^{(0)}, \\ \mathcal{R}(1^{(0)}1) = \mathcal{R}(11^{(0)}) = 11^{(0)}, \\ 111^{(0)} \notin L^{(0)}. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Observando as igualdades em (3.1) e utilizando a Definição 3.7 é possível reproduzir a apresentação dada na Figura 3.1, que representa o TMTR do Exemplo 3.4.

O exemplo a seguir ilustra um efeito que pode ser causado na apresentação reduzida de um PFT quando aumenta-se o período T .

Exemplo 3.8. Seja $X_{\mathcal{O}_p}$ o PFT tal que $\mathcal{O}_p = \{111^{(0)}\}$ e $T = 3$. Têm-se que $\mathcal{O}_p \mathcal{A}^{-1} = \{\mathbf{w}^{(k)} \in L : \mathbf{w}a^{(k)} \in \mathcal{O}_p \text{ para } a \in \mathcal{A}\} = \{11^{(0)}\}$. Daí, $\mathcal{P}(\mathcal{O}_p \mathcal{A}^{-1}) = \{\varepsilon^{(0)}, 1^{(0)}, 11^{(0)}\}$ e $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{O}_p \mathcal{A}^{-1}) \cup \{\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}\} = \{\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, 1^{(0)}, 11^{(0)}\}$. Utilizar-se-á o Passo 1 do algoritmo para determinar a partição inicial $\mathcal{P}^1$. Observe que $0^{(k)}, 1^{(k)} \notin \mathcal{O}_p$ para $k \in \{0, 1, 2\}$ e, portanto, $\mathcal{M}(\varepsilon^{(0)}) = \mathcal{M}(\varepsilon^{(1)}) = \mathcal{M}(\varepsilon^{(2)}) = \emptyset$. Pela Descrição do conjunto de restrições periódicas, obtêm-se $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(1^{(0)}) = \{11^{(0)}\}$. Como 1 é prefixo próprio de $11^{(0)}$, pelo item 2) da Definição 3.5, $(1, \square) \in \mathcal{M}(1^{(0)})$. Como o máximo sufixo próprio de $1^{(0)}$ em $\mathcal{W}$ é $\varepsilon^{(1)}$ cuja máscara é vazia então, $\mathcal{M}(1^{(0)}) = \{(1, \square)\}$. Por outro lado, $111 \notin L^{(0)}$ e pelo item 1) da Definição 3.5, $(1, \blacksquare) \in \mathcal{M}(11^{(0)})$. Como o máximo sufixo próprio de $11^{(0)}$ em $\mathcal{W}$ é $\varepsilon^{(2)}$ cuja máscara é vazia então, $\mathcal{M}(11^{(0)}) = \{(1, \blacksquare)\}$. As respectivas máscaras de restrição estão listadas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – *Máscara de Restrição para $\mathcal{W}$ do TMTR do Exemplo 3.8.*

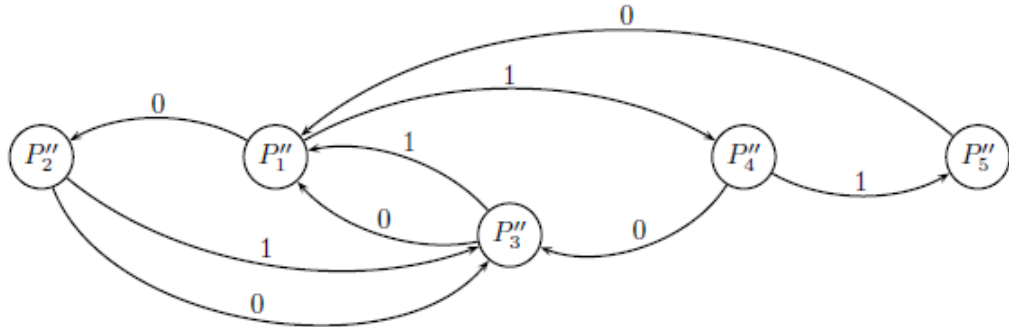
$\mathbf{w}^{(k)} \in \mathcal{W}$	$\mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$
$\varepsilon^{(0)}$	$\emptyset$
$\varepsilon^{(1)}$	$\emptyset$
$\varepsilon^{(2)}$	$\emptyset$
$1^{(0)}$	$\{(1, \square)\}$
$11^{(0)}$	$\{(1, \blacksquare)\}$

Fonte: O Autor (2020).

Observando a Tabela 3.2, segue que $\mathcal{P}^1 = \{P_1 = \{\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}\}, P_2 = \{1^{(0)}\}, P_3 = \{11^{(0)}\}\}$. Para o Passo 2, observe que $\mathcal{R}(\varepsilon^{(0)}1) = 1^{(0)} \in P_2$ enquanto que $\mathcal{R}(\varepsilon^{(1)}1) = \varepsilon^{(2)}$, $\mathcal{R}(\varepsilon^{(2)}1) = \varepsilon^{(0)} \in P_1$. Daí, P_1 deve ser particionado e têm-se a partição $\mathcal{P}^2 = \{P'_1 = \{\varepsilon^{(0)}\}, P'_2 = \{\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}\}, P'_3 = \{1^{(0)}\}, P'_4 = \{11^{(0)}\}\}$. Por fim, $\mathcal{R}(\varepsilon^{(1)}1) = \varepsilon^{(2)} \in P'_2$ e $\mathcal{R}(\varepsilon^{(2)}1) = \varepsilon^{(0)} \in P'_1$. Portanto, P'_2 deve ser particionado e têm-se a partição $\mathcal{P}^3 = \{P''_1 = \{\varepsilon^{(0)}\}, P''_2 = \{\varepsilon^{(1)}\}, P''_3 = \{\varepsilon^{(2)}\}, P''_4 = \{1^{(0)}\}, P''_5 = \{11^{(0)}\}\}$. Observe agora que refinamentos não são mais possíveis, o critério de parada no passo 3 é atingido, $\mathcal{P}^3$ é a partição mais fina e o grafo reduzido possui 5 estados. Observe agora que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}(\varepsilon^{(0)}0) = \mathcal{R}(0^{(0)}) = \varepsilon^{(1)}, \\ \mathcal{R}(\varepsilon^{(1)}0) = \mathcal{R}(0^{(1)}) = \varepsilon^{(2)}, \\ \mathcal{R}(\varepsilon^{(2)}0) = \mathcal{R}(0^{(2)}) = \varepsilon^{(0)}, \\ \mathcal{R}(1^{(0)}0) = \mathcal{R}(10^{(0)}) = \varepsilon^{(2)}, \\ \mathcal{R}(11^{(0)}0) = \mathcal{R}(110^{(0)}) = \varepsilon^{(0)} \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}(\varepsilon^{(0)}1) = \mathcal{R}(1^{(0)}) = 1^{(0)}, \\ \mathcal{R}(\varepsilon^{(1)}1) = \mathcal{R}(1^{(1)}) = \varepsilon^{(2)}, \\ \mathcal{R}(\varepsilon^{(2)}1) = \mathcal{R}(1^{(2)}) = \varepsilon^{(0)}, \\ \mathcal{R}(1^{(0)}1) = \mathcal{R}(11^{(0)}) = 11^{(0)}, \\ 111^{(0)} \notin L^{(0)}. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Por fim, utilizando a Definição 3.7 e as igualdades em (3.2) é possível reproduzir a apresentação dada na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Grafo reduzido do TMTR do Exemplo 3.8 obtido da partição $\mathcal{P}^2$.

Fonte: O Autor (2020).

Observe que o efeito do aumento no período se reflete, neste caso, na obtenção de um estado a mais na apresentação do sistema.

4 CARACTERIZAÇÃO DO CONJUNTO $\mathcal{O}$ COMO LINGUAGEM REGULAR

Neste capítulo são utilizados conhecimentos da teoria dos autômatos (Hopcroft (2007) e Lawson (2004)), em particular do conhecimento sobre linguagens regulares para caracterizar o conjunto de palavras proibidas de comprimento mínimo $\mathcal{O}$ de um SSS como uma linguagem regular. A motivação para esta caracterização é devida ao Teorema de Kleene (Lawson, 2004, Teorema 5.2.1) o qual garante que uma linguagem L é reconhecível, ou seja, existe um autômata finito (grafo com um número finito de estados) que a reconhece se, e somente se, ela é regular. Em seguida, mostra-se a existência de um conjunto finito suficiente de classes de representantes dos conjuntos de restrições das palavras na linguagem de um SSS e mais, tal conjunto é explicitamente determinado.

4.1 LINGUAGENS REGULARES

Nesta seção será abordada, de forma sucinta, a teoria de autômatos e linguagem necessárias para caracterização do conjunto $\mathcal{O}$.

4.1.1 Operações com Linguagens

Seja $\mathcal{A}$ um alfabeto finito. Uma linguagem sobre $\mathcal{A}$ é qualquer subconjunto de $\mathcal{A}^*$. Se L e M são linguagens sobre $\mathcal{A}$ então $L \cap M$, $L \cup M$ e $L \setminus M$ também são. Se L é uma linguagem sobre $\mathcal{A}$, então $L' = \mathcal{A}^* \setminus L$ é uma linguagem chamada o complemento de L . As operações de interseção, união e complementação são chamadas operações Booleanas e têm a mesma definição na teoria dos conjuntos. Em teoria de autômato, usualmente se escreve $L + M$ ao invés de $L \cup M$ quando se lida com linguagens.

Existem mais duas operações sobre linguagens: o produto e a estrela de Kleene. Sejam L e M linguagens. Então,

$$L \cdot M = \{ab : a \in L \text{ e } b \in M\}$$

é chamado o produto de L e M . Usualmente se escreve LM em vez de $L \cdot M$. Observe ainda que o produto LM é a concatenação à direita das palavras de M às palavras de L .

Exemplo 4.1. *Sejam $L = \{a, bb\}$ e $M = \{aa, ab, bb\}$. Então,*

$$LM = \{aaa, aab, abb, bbaa, bbab, bbbb\} \text{ e } ML = \{aaa, aabb, aba, abbb, bba, bbbb\}.$$

O Exemplo 4.1 mostra que, em geral, $LM \neq ML$. Para uma linguagem L , define-se $L^0 = \{\varepsilon\}$ e $L^{n+1} = L^n L$. Para $n > 0$ a linguagem L^n consiste de todas as palavras $\mathbf{u}$ da forma $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n$ onde $\mathbf{u}_i \in L$, $\forall i = 1, \dots, n$. A estrela de Kleene de uma linguagem L ,

denotada por L^* , é definida como sendo

$$L^* \triangleq L^0 + L^1 + L^2 + L^3 + \dots$$

Exemplo 4.2. A linguagem $L = (a^2)^*$ consiste de todas as palavras $\varepsilon, a^2, a^4 = a^2a^2, a^6 = a^2a^2a^2, \dots$, ou seja, todas as palavras sobre o alfabeto $\{a\}$ de comprimento par.

Pode-se usar operações Booleanas, o produto e a estrela de Kleene para descrever linguagens (Lawson (2004)).

Exemplo 4.3. A linguagem $L = aab(a+b)^*$ consiste de todas as palavras sobre o alfabeto $\{a, b\}$ que iniciam com o prefixo aab , enquanto que a linguagem $M = (a+b)^*aab$ consiste de todas as palavras sobre o mesmo alfabeto que terminam com o sufixo aab . Por fim, a linguagem $N = (a+b)^*aab(a+b)^*$ consiste de todas as palavras sobre o mesmo alfabeto que contém a palavra aab como fator.

4.1.2 Autômato Finito e suas Linguagens

Um autômato finito é uma máquina especificada por cinco partes:

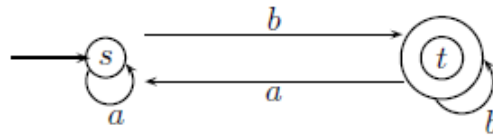
$$A = (S, \mathcal{A}, i, \delta, T),$$

em que S é um conjunto finito chamado o conjunto de estados, $\mathcal{A}$ é o alfabeto finito, i é um elemento fixado de S chamado o estado inicial, δ é uma função $\delta : S \times \mathcal{A} \rightarrow S$ chamada a função de transição e T é um subconjunto de S chamado o conjunto de estados finais.

Uma forma de especificar um autômato finito é através de um diagrama de transição que é um tipo especial de grafo.

Exemplo 4.4. Considere o diagrama de transição dado na Figura 4.1.

Figura 4.1 – Diagrama de transição de um autômato finito.



Fonte: Lawson (2004).

Tem-se:

- $S = \{s, t\}$
- $\mathcal{A} = \{a, b\}$

- $i = \{s\}$
- $T = \{t\}$
- $\delta : S \times \mathcal{A} \rightarrow S$ é tal que:

$$\delta(s, a) = s, \delta(s, b) = t, \delta(t, a) = s, \delta(t, b) = t$$

Considere agora uma nova função $\delta^* : S \times \mathcal{A}^* \rightarrow S$, chamada a função de transição estendida, satisfazendo as seguintes três condições em que $a \in \mathcal{A}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^*$ e $s \in S$:

- (i) $\delta^*(s, \varepsilon) = s$;
- (ii) $\delta^*(s, a) = \delta(s, a)$;
- (iii) $\delta^*(s, a\mathbf{w}) = \delta^*(\delta(s, a), \mathbf{w})$.

Escreveremos $s \cdot \mathbf{w}$ ao invés de $\delta^*(s, \mathbf{w})$.

Seja $A = (S, \mathcal{A}, i, \delta, T)$ um autômato finito. Define-se a linguagem aceita ou reconhecida por A , denotada $L(A)$, como sendo:

$$L(A) = \{\mathbf{w} \in \mathcal{A}^* : i \cdot \mathbf{w} \in T\}.$$

Uma linguagem é dita ser reconhecível se ela é reconhecida por algum autômato finito.

Exemplo 4.5. Considere a construção de um autômato finito reconhecendo a linguagem:

$$L = \{\mathbf{w} \in (a+b)^* : |\mathbf{w}| \equiv 1 \pmod{4}\}.$$

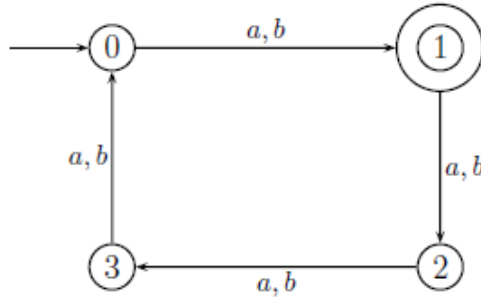
Neste caso, a palavra $\mathbf{w}$ está em L se seu comprimento é da forma $4q+1$ para algum inteiro q . Segue então que palavras cujos comprimentos são da forma $4q$, $4q+2$ ou $4q+3$ para algum inteiro q devem ser rejeitadas; em outras palavras, existem apenas 4 possibilidades e estas serão representadas por 4 estados, rotulados por $0, 1, 2, 3$, em que o estado r significa que o comprimento da palavra lida até o mesmo é $4q+r$ para algum inteiro q . O autômato que reconhece L é mostrado na Figura 4.2.

A propriedade a seguir é relevante na teoria de linguagens.

Propriedade 4.1. • Linguagens finitas são reconhecíveis (Lawson, 2004, Proposição 2.2.4);

- A união de duas linguagens reconhecíveis é reconhecível (Lawson, 2004, Proposição 2.5.6);

Figura 4.2 – Autômato que reconhece a linguagem $L = \{\mathbf{w} \in (\mathbf{a} + \mathbf{b})^* : |\mathbf{w}| \equiv 1 \pmod{4}\}$.



Fonte: Lawson (2004).

- O produto de duas linguagens reconhecíveis é reconhecível (Lawson, 2004, Proposição 3.3.4);
- O operador Kleene de uma linguagem reconhecível é reconhecível (Lawson, 2004, Proposição 3.3.6).

A partir da Propriedade 4.1 define-se de maneira mais precisa as linguagens formadas pelo uso de um número finito dos operadores regulares.

Definição 4.1. Uma expressão regular sobre $\mathcal{A}$ é uma aplicação finita dos operadores regulares soma, produto e Kleene sobre o conjunto das partes de $\mathcal{A}^*$.

Exemplo 4.6. A expressão $ab(cd)^*a + cbb(a+bc)^*da$ é uma expressão regular sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$.

Cada expressão regular s descreve uma linguagem, denotada por $L(s)$. Esta linguagem é calculada por meio das seguintes regras:

- $L(\emptyset) = \emptyset$;
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$;
- $L(a_i) = \{a_i\}$;
- $L(s_1 + s_2) = L(s_1) + L(s_2)$;
- $L(s_1 \cdot s_2) = L(s_1) \cdot L(s_2)$;
- $L(s^*) = L(s)^*$.

Exemplo 4.7. Uma expressão regular para a linguagem L do Exemplo 4.5 é $((a+b)^4)^*(a+b)$.

Uma linguagem L é dita regular (ou racional) se existe uma expressão regular s tal que $L = L(s)$. Finalizar-se-á esta seção com o importante teorema de Kleene.

Teorema 4.1. (Kleene) Uma linguagem é reconhecível se, e somente se, ela é regular.

Demonstração. Ver (Lawson, 2004, Teorema 5.2.1). □

4.2 CARACTERIZAÇÃO DO CONJUNTO $\mathcal{O}$

Nesta seção será apresentada a caracterização do conjunto de palavras de comprimento mínimo $\mathcal{O}$ de um SSS por meio de uma expressão regular específica.

Definição 4.2. *O conjunto de palavras de comprimento mínimo $\mathcal{O}$ de um SSS é dado pela expressão regular $s = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2^* \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_{n-1}^* \mathbf{w}_n$ com $(n-1)/2$ operadores de Kleene, em que n é ímpar e $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ são palavras sobre um alfabeto finito $\mathcal{A}$ satisfazendo às seguintes condições:*

1. $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{w}_n \neq \varepsilon$ sendo $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_n$ sem operadores de Kleene e $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_{n-1}$ com operadores de Kleene;
2. O operador de Kleene só ocorre em palavras $\mathbf{w}_i$ para i par;
3. As palavras $\mathbf{w}_j$ para j ímpar podem ser vazias (isto permite que o conjunto $\mathcal{O}$ tenha palavras consecutivas com o operador de Kleene).

Observação 4.1. *A exigência da não existência de operadores de Kleene nas palavras $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_n$ na primeira condição é devida ao fato que $\mathcal{O}$ é anti-fatorial, pois, se por exemplo $\mathbf{w}_1$ tiver operador de Kleene, então $\mathbf{w}' = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \cdots \mathbf{w}_n \in \mathcal{O}$, $\mathbf{w}'' = \mathbf{w}_2 \cdots \mathbf{w}_n \in \mathcal{O}$ com $\mathbf{w}''$ fator de $\mathbf{w}'$ o que é uma contradição.*

Exemplo 4.8. *Seja X um SSS sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{ a, b, c, d \}$ com conjunto proibido mínimo $\mathcal{O} = ac^*bd$. Então, $n = 3$, $r = 1$, $|\mathbf{w}_1| = |\mathbf{w}_2| = 1$, $|\mathbf{w}_3| = 2$.*

4.3 CONJUNTO DE REPRESENTANTES DO CONJUNTO DE RESTRIÇÕES

Nesta seção, determina-se um conjunto finito suficiente de classes de representantes do conjunto de restrições das palavras na linguagem de um SSS $X = X_{\mathcal{O}}$, em que $\mathcal{O}$ é dado pela Definição 4.2, o que possibilita a construção do grafo de contextos para a classe de SSSs. Também se estabelece um limitante para um conjunto necessário e suficiente de tais classes de representantes.

Inicia-se esta seção com um resultado que é útil na demonstração da Proposição 4.1.

Lema 4.1. *Sejam $\mathbf{v} = v_1 \cdots v_m, \mathbf{w} = w_1 \cdots w_n \in \mathcal{A}^*$ com $|\mathbf{v}| = m$, $|\mathbf{w}| = n$ e $n \geq m$. Se $\mathbf{vw} = \mathbf{wv}$, então $\mathbf{v} = \mathbf{u}^p$ e $\mathbf{w} = \mathbf{u}^q$, em que $\mathbf{u} = w_1 w_2 \cdots w_d$ é prefixo e sufixo de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ com $p = \frac{m}{d}$, $q = \frac{n}{d}$ e d um divisor comum de m e n .*

Demonstração. Sejam $\mathbf{v} = v_1 \cdots v_m, \mathbf{w} = w_1 \cdots w_n \in \mathcal{A}^*$. Se $\mathbf{vw} = \mathbf{wv}$ então

$$v_1 \cdots v_m w_1 \cdots w_{n-m} \cdots w_n = w_1 \cdots w_m w_{m+1} \cdots w_n v_1 \cdots v_m. \quad (4.1)$$

Da igualdade (4.1) segue que

$$\begin{cases} v_i = w_i, & \forall i = 1, \dots, m \\ w_{m+i} = w_i, & \forall i = 1, \dots, n-m \\ w_{n-m+i} = v_i = w_i, & \forall i = 1, \dots, m \end{cases} . \quad (4.2)$$

Das igualdades em (4.2) têm-se,

$$\mathbf{v} = w_1 \cdots w_m \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = w_1 \cdots w_m w_1 \cdots \underbrace{w_{n-m}}_{=w_m} . \quad (4.3)$$

Agora, sendo d um divisor comum de m e n , segue de (Martinez , 2013, Lema 1.1) que d divide qualquer combinação linear de m e n , em particular, $d \mid (n-m)$. De (4.3) observamos que as palavras $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são formadas por sequências iguais de d símbolos $w_1 \cdots w_d$ que se repetem para algum d divisor comum de m e n . Tomando $\mathbf{u} = w_1 \cdots w_d$ tem-se $\mathbf{v} = \mathbf{u}^p$ e $\mathbf{w} = \mathbf{u}^q$, com $p = \frac{m}{d}$ e $q = \frac{n}{d}$. $\square$

Observação 4.2. *Se no Lema 4.1 tivermos $d = \text{mdc}(m, n) = 1$ então, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são formadas, respectivamente, por m e n repetições de um mesmo símbolo $a \in \mathcal{A}$. Por outro lado, se $d = m$ fornece a única sequência de repetição em $\mathbf{v}$ então, n é múltiplo de m .*

A proposição a seguir garante que o sufixo próprio mais longo (memória) de qualquer palavra em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ tem comprimento finito e mais, fornece um limitante para tais comprimentos, o que será útil na busca das restrições das palavras na linguagem de um SSS cujo conjunto $\mathcal{O}$ é dado pela Definição 4.2.

Proposição 4.1. *Seja $\mathcal{O}$ dado pela Definição 4.2. Se $\mathbf{w}$ é uma palavra em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ formada pela extensão dos símbolos de alguma $\mathbf{w}_i$ com operador de Kleene, então $|\mathbf{v}| < |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2| + \cdots + |\mathbf{w}_i|$, em que $\mathbf{v}$ é o sufixo próprio mais longo de $\mathbf{w}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$.*

Demonstração. Inicialmente considere palavras $\mathbf{w}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ obtidas pela extensão dos símbolos da palavra com o primeiro operador de Kleene, ou seja, $\mathbf{w}_2$. É claro que se $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \mathbf{s}$, com $\mathbf{s}$ um prefixo de $\mathbf{w}_2$ o resultado segue trivialmente, pois,

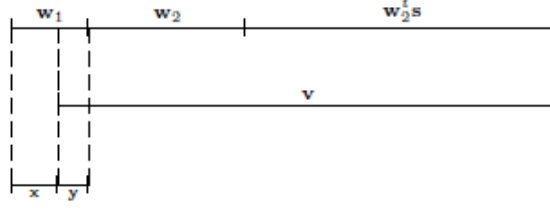
$$|\mathbf{v}| < |\mathbf{w}| = |\mathbf{w}_1 \mathbf{s}| \leq |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2|.$$

Daí, admita que $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2^t \mathbf{s}$, com $|\mathbf{w}_2^t \mathbf{s}| \geq 1$ e suponha que $|\mathbf{v}| \geq |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2|$. Deve-se considerar dois casos, em que no primeiro se supõe $|\mathbf{w}_1| > 1$, pois o segundo caso inclui a possibilidade de $|\mathbf{w}_1| = 1$.

Caso 1) $\mathbf{v}$ inicia em um sufixo próprio de $\mathbf{w}_1$.

Observe a representação na Fig. 4.3.

Figura 4.3 – Sufixo próprio mais longo iniciando em um sufixo próprio de $\mathbf{w}_1$.



Fonte: O Autor (2020).

Seja $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{r}$, com $\mathbf{r}$ um sufixo próprio de $\mathbf{w}_2^t \mathbf{s}$, então

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{r} = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{r} \mathbf{u}, \quad (4.4)$$

em que $\mathbf{x}$ é um prefixo próprio de $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{u}$ é tal que $|\mathbf{u}| = |\mathbf{x}|$ e $\mathbf{r} \mathbf{u} = \mathbf{w}_2^t \mathbf{s}$. Observe que $\mathbf{r}$ é também prefixo próprio de $\mathbf{w}_2^t \mathbf{s}$. Se colocar $\mathbf{w}_1 = \mathbf{x} \mathbf{y}$, é possível escrever (4.4) na forma:

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{w}_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{w}_2 \mathbf{r} \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{w}_2 \mathbf{r} = \mathbf{y} \mathbf{w}_2 \mathbf{r} \mathbf{u}. \quad (4.5)$$

Considere os seguintes casos:

- $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|$:

Neste caso, observando (4.5) é possível escrever $\mathbf{x} = \mathbf{y} \mathbf{l}$ e, substituindo em (4.5), obtêm-se:

$$\mathbf{w} = \mathbf{y} \mathbf{l} \mathbf{y} \mathbf{w}_2 \mathbf{r} = \mathbf{y} \mathbf{w}_2 \mathbf{r} \mathbf{u}. \quad (4.6)$$

Segue de (4.6) que

$$\mathbf{l} \mathbf{y} \mathbf{w}_2 \mathbf{r} = \mathbf{w}_2 \mathbf{r} \mathbf{u} = \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2^t \mathbf{s} = \mathbf{w}_2^t \mathbf{s} \mathbf{n} \mathbf{s} = \mathbf{r} \mathbf{u} \mathbf{s},$$

em que $\mathbf{s} \mathbf{n} = \mathbf{w}_2$. Como $|\mathbf{r} \mathbf{u}| > |\mathbf{x}| = |\mathbf{y} \mathbf{l}|$ e $\mathbf{r} \mathbf{u} = \mathbf{w}_2^t \mathbf{s}$ segue que $\mathbf{l} \mathbf{y}$ é prefixo próprio de $\mathbf{r} \mathbf{u}$ e então,

$$\mathbf{l} \mathbf{y} \mathbf{w}_2 \mathbf{r} = \mathbf{w}_2 \mathbf{l} \mathbf{y} \mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{l} \mathbf{y} \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_2 \mathbf{l} \mathbf{y}. \quad (4.7)$$

Aplicando o Lema 4.1 à (4.7) se pode concluir que

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{z}^p \text{ e } \mathbf{l} \mathbf{y} = \mathbf{z}^q,$$

em que $p, q \geq 1$ e $\mathbf{z}$ é prefixo e sufixo de $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{l} \mathbf{y}$. Daí, segue que $\mathbf{w}_1 = \mathbf{y} \mathbf{l} \mathbf{y} = \mathbf{y} \mathbf{z}^q$ e utilizando

a expressão regular têm-se que a palavra

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_2)^{2q} \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^q)^{2p} \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n \\
 &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^q)^{2p-2} \mathbf{z}^q \mathbf{z}^q \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n \\
 &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^q)^{2p-2} \mathbf{l} \mathbf{y} \mathbf{z}^q \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n \\
 &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^q)^{2p-2} \mathbf{l} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n
 \end{aligned}$$

é proibida e contém a palavra proibida $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n$ como fator e isto é absurdo, pois $\mathcal{O}$ é anti-fatorial.

- $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$:

Este caso é semelhante ao caso anterior bastando fazer $\mathbf{l} = \varepsilon$. Daí, segue que

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{z}^p \text{ e } \mathbf{l} \mathbf{y} = \varepsilon \mathbf{y} = \mathbf{y} = \mathbf{z}^q,$$

em que $p, q \geq 1$ e $\mathbf{z}$ é prefixo e sufixo de $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{y}$. Portanto,

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{y} \mathbf{y} = \mathbf{z}^{2q}$$

e utilizando a expressão regular têm-se que a palavra

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_2)^{2q} \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^p)^{2q} \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n \\
 &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^{2q})^p \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n \\
 &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^{2q})^{p-1} (\mathbf{z})^{2q} \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n \\
 &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^{2q})^{p-1} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n
 \end{aligned}$$

é proibida e contém a palavra proibida $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n$ como fator e isto é absurdo, pois $\mathcal{O}$ é anti-fatorial.

- $|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|$:

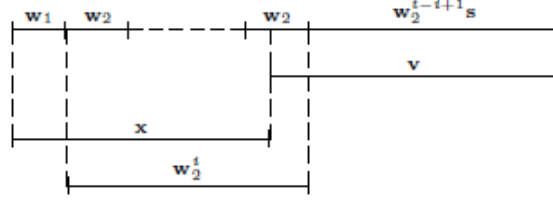
Neste caso, ainda observando (4.5) é possível escrever $\mathbf{y} = \mathbf{x}^m \mathbf{l}$ com $|\mathbf{l}| < |\mathbf{x}|$ e substituindo em (4.5) têm-se

$$\mathbf{x} \mathbf{x}^m \mathbf{l} \mathbf{w}_2 \mathbf{r} = \mathbf{x}^m \mathbf{l} \mathbf{w}_2 \mathbf{r} \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{x}^m \mathbf{x} \mathbf{l} \mathbf{w}_2 \mathbf{r} = \mathbf{x}^m \mathbf{l} \mathbf{w}_2 \mathbf{r} \mathbf{u}.$$

Portanto,

$$\mathbf{x} \mathbf{l} \mathbf{w}_2 \mathbf{r} = \mathbf{l} \mathbf{w}_2 \mathbf{r} \mathbf{u}. \quad (4.8)$$

Figura 4.4 – Sufixo próprio mais longo iniciando em um sufixo de $\mathbf{w}_2$.



Fonte: O Autor (2020).

Observe que (4.8) é equivalente à (4.5), em que $\mathbf{y} = \mathbf{l}$ e $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| = |\mathbf{l}|$, ou seja, recai-se novamente no primeiro caso. Fazendo $\mathbf{x} = \mathbf{lh}$, segue que

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{z}^p \text{ e } \mathbf{hl} = \mathbf{z}^q,$$

em que $\mathbf{z}$ é prefixo e sufixo de $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{hl}$. Logo,

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{xy} = \mathbf{xx}^m \mathbf{l} = \mathbf{lh} (\mathbf{lh})^m \mathbf{l} = \mathbf{l} (\mathbf{hl})^{m+1} = \mathbf{l} (\mathbf{z}^q)^{m+1}$$

e, utilizando a expressão regular observa-se que a palavra

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_2)^{qm+2q} \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^p)^{qm+2q} \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n \\ &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^q)^{pm+2p} \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n \\ &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^q)^{(p-1)m+2p-2} \mathbf{z}^q (\mathbf{z}^q)^{m+1} \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n \\ &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^q)^{(p-1)m+2p-2} \mathbf{hl} (\mathbf{z}^q)^{m+1} \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n \\ &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^q)^{(p-1)m+2p-2} \mathbf{hw}_1 \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n \end{aligned}$$

é proibida e contém a palavra proibida $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n$ como fator e isto é absurdo, pois $\mathcal{O}$ é anti-fatorial.

Caso 2) $\mathbf{v}$ inicia em um sufixo de $\mathbf{w}_2$.

Como foi comentado anteriormente se $|\mathbf{w}_1| = 1$, então $\mathbf{w}_1 = a$ com $a \in \mathcal{A}$ e $a \neq \varepsilon$ e, portanto, seu sufixo próprio mais longo em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ é ε e se pode admitir que tal sufixo inicia-se em $\mathbf{w}_2$. Daí, suponha que $\mathbf{v}$ inicia em um sufixo do i -ésimo $\mathbf{w}_2$ para algum $i = 1, 2, \dots, t+1$.

Seja $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{r}$, em que $\mathbf{r}$ é sufixo de $\mathbf{w}_2^{t-i+1} \mathbf{s}$. Observando a Figura 4.4, é possível escrever:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{ru} = \mathbf{xw}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{r} \quad (4.9)$$

em que $\mathbf{u}$ satisfaz $\mathbf{ru} = \mathbf{w}_2^t \mathbf{s}$ e $\mathbf{x}$ é tal que $|\mathbf{x}| = |\mathbf{u}| \geq |\mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_2)^{i-1}|$ e daí pode-se escrever $\mathbf{x} = \mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_2)^{i-1} \mathbf{y}$. Substituindo em (4.9), segue que $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_2)^{i-1} (\mathbf{w}_2)^{t-i+2} \mathbf{s} =$

$\mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_2)^{i-1} \mathbf{y} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{r}$, ou seja, $(\mathbf{w}_2)^{t-i+2} \mathbf{s} = \mathbf{y} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{r}$. Portanto

$$\mathbf{w}_2 (\mathbf{w}_2)^{t-i+1} \mathbf{s} = \mathbf{y} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{r}. \quad (4.10)$$

De (4.10) segue que $|(\mathbf{w}_2)^{t-i+1} \mathbf{s}| = |\mathbf{y} \mathbf{w}_1 \mathbf{r}|$. Como $\mathbf{y} \mathbf{w}_1$ começa num prefixo de $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{r}$ é sufixo de $(\mathbf{w}_2)^{t-i+1} \mathbf{s}$, então $(\mathbf{w}_2)^{t-i+1} \mathbf{s} = \mathbf{y} \mathbf{w}_1 \mathbf{r}$ e substituindo em (4.10) segue que,

$$\mathbf{w}_2 (\mathbf{y} \mathbf{w}_1) \mathbf{r} = (\mathbf{y} \mathbf{w}_1) \mathbf{w}_2 \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{w}_2 (\mathbf{y} \mathbf{w}_1) = (\mathbf{y} \mathbf{w}_1) \mathbf{w}_2. \quad (4.11)$$

Aplicando o Lema 4.1 à (4.11) segue que $\mathbf{y} \mathbf{w}_1 = \mathbf{z}^p$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{z}^q$ com $p, q \geq 1$ e $\mathbf{z}$ é prefixo e sufixo de $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{y} \mathbf{w}_1$. Utilizando a expressão regular, a palavra

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_2)^p \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^q)^p \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n \\ &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^p)^q \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n \\ &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^p)^{q-1} \mathbf{z}^p \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n \\ &= \mathbf{w}_1 (\mathbf{z}^p)^{q-1} \mathbf{y} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n \end{aligned}$$

é proibida e contém a palavra proibida $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_n$ como fator e isto é um absurdo, pois $\mathcal{O}$ é anti-fatorial.

Usando os mesmos argumentos anteriores se obtém o resultado válido para as palavras em $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$ geradas pela extensão de símbolos da palavra com o segundo Kleene. Prosseguindo desta maneira até a palavra com o r -ésimo Kleene, o resultado desejado é obtido. $\square$

Observação 4.3. *Em virtude da Proposição 4.1 e do caráter cíclico do operador de Kleene, as memórias das palavras obtidas por extensões de símbolos de palavras com operador de Kleene de uma expressão regular que representa um conjunto mínimo proibido $\mathcal{O}$, dado pela Definição 4.2, formam uma sequência eventualmente periódica, em que a mesma é obtida por extensões de símbolos de uma sequência da forma,*

$$\underbrace{\mathbf{t}}_{\text{Transiente}} \mid \mathbf{v} \quad \mathbf{v} \quad \underbrace{\mathbf{v}}_{\text{Permanente}} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{v} \quad \cdots, \quad (4.12)$$

em que as extensões por símbolos de $\mathbf{t}$ geram as memórias da parte não periódica e as extensões seguintes (por símbolos de $\mathbf{v}$) geram as memórias da parte periódica.

Exemplo 4.9. *Considere a expressão regular $s = cfcfcfcfcfcfdc(cf)^*df$. Observem:*

$$c f c f c f c f c f c d c \mid \underbrace{\bar{c} f c f c f c f c f c f c \cdots}_{\text{transiente}} \mid d f,$$

em que a barra no símbolo c indica o início das extensões por símbolos da palavra com

operador de Kleene $\mathbf{w}_2 = cf$. Portanto, as memórias formam a sequência

$$(c, cf, cfc, (cf)^2, (cf)^2c, (cf)^3, (cf)^3c, (cf)^4, (cf)^4c, (cf)^5, (cf)^5c, (cf)^5, (cf)^5c, \dots),$$

que é eventualmente periódica de período fundamental $p = 2$ e transiente $\mathbf{t} = cfcfcfcfc$.

Agora, se pode enunciar o principal resultado desta seção, que determina de forma explícita um conjunto de classes de representantes dos conjuntos de restrições de um SSS com conjunto mínimo proibido $\mathcal{O}$ dado pela Definição 4.2 e estabelece um limitante para o número de elementos deste conjunto.

Teorema 4.2. *Seja X um SSS com $\mathcal{O}$ dado pela Definição 4.2. Então, existe um conjunto suficiente $\mathcal{W}$ de classes de representantes dos conjuntos de restrições das palavras na linguagem L de X tal que $\mathcal{W}$ é finito.*

Demonstração. As restrições das palavras em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ são obtidas por pares (R_E, R_M) , em que R_E são as restrições da expressão regular e R_M são as restrições da memória. Como palavras obtidas por extensões de símbolos de palavras com operador de Kleene distintos possuem R_E 's distintas então, seus conjuntos de restrições também serão distintos, o que permite calcular as restrições por extensões de símbolos de palavras com operador de Kleene de forma individual. Daí, sendo

$$\mathcal{O} = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2^* \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_{2j-1} \mathbf{w}_{2j}^* \cdots \mathbf{w}_{2n}^* \mathbf{w}_{2n+1},$$

determinar-se-á a quantidade mínima de ciclos k_j de $\mathbf{w}_{2j}$ necessária para que todas as restrições das palavras em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ geradas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{2j}$ sejam obtidas. Pela Observação 4.3, as memórias das palavras geradas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{2j}$ formam uma sequência eventualmente periódica de período p_j e transiente $\mathbf{t}_j$, ou seja, após $|\mathbf{t}_j|$ símbolos de $\mathbf{w}_{2j}$ a mesma se repete de p_j em p_j símbolos da referida palavra. Por outro lado, as restrições dessas palavras obtidas da expressão regular se repetem a cada $|\mathbf{w}_{2j}|$ símbolos e, portanto, para sincronizar os pares (R_E, R_M) basta tomar $k_j \geq 1$ como o menor inteiro tal que

$$k_j \cdot |\mathbf{w}_{2j}| \geq |\mathbf{t}_j| + \text{mmc}(p_j, |\mathbf{w}_{2j}|).$$

Procedendo de forma similar determina-se k_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Considere o conjunto

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1\} \{\varepsilon, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_2^{k_1}\} \{\mathbf{w}_3\} \cdots \{\mathbf{w}_{2n-1}\} \{\varepsilon, \mathbf{w}_{2n}, \dots, \mathbf{w}_{2n}^{k_n}\} \{\mathbf{w}_{2n+1}\}.$$

O conjunto

$$\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B}$$

é um conjunto suficiente de classes de representantes do conjunto de restrições da linguagem L de X e $\mathcal{W}$ é finito. $\square$

Corolário 4.1. *Seja $\mathcal{W}'$ um conjunto necessário e suficiente de classes de representantes do conjunto de restrições de um SSS. Então,*

$$|\mathcal{W}'| \leq 1 + |\mathbf{w}_1| + k_1 \times |\mathbf{w}_2| + \dots + (k_1 + 1) \times (k_2 + 1) \times \dots \times (k_n + 1) \times (|\mathbf{w}_{2n+1}| - 1).$$

Demonstração. Considere $\mathcal{W}$ como descrito no Teorema 4.2. Como $\mathcal{W}'$ é um conjunto necessário e suficiente de classes de representantes do conjunto de restrições de um SSS então $|\mathcal{W}'| \leq |\mathcal{W}|$. O resultado segue agora pela aplicação do princípio fundamental da contagem (Magalhães, 2006, p. 09) ao conjunto $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B}$. $\square$

Exemplo 4.10. *Neste exemplo, calcular-se-á o conjunto $\mathcal{W}$ de classes de representantes do conjunto de restrições das palavras na linguagem L do SSS cujo conjunto $\mathcal{O}$ é dado pela expressão regular do Exemplo 4.9. Do referido exemplo, têm-se que a sequência de memórias é eventualmente periódica de período fundamental $p = 2$ e transiente $\mathbf{t} = cfcfcfcfc$. Observe ainda que $\mathbf{w}_2 = cf$. Pelo Teorema 4.2, para sincronizar os pares (R_E, R_M) basta tomar $k_1 \geq 1$ como o menor inteiro tal que*

$$k_1 \cdot |\mathbf{w}_2| \geq |\mathbf{t}| + mmc(p, |\mathbf{w}_2|),$$

ou seja,

$$2 \cdot k_1 \geq 9 + 2 = 11 \Rightarrow k_1 = 6.$$

Ainda pelo teorema,

$$\mathcal{B} = \{cfcfcfcfcfcfdc\} \{ \varepsilon, cf, (cf)^2, (cf)^3, (cf)^4, (cf)^5, (cf)^6 \} \{ df \}$$

e, $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B}$ é um conjunto suficiente de classes de representantes do conjunto de restrições. Observe ainda que, pelo Corolário 4.1,

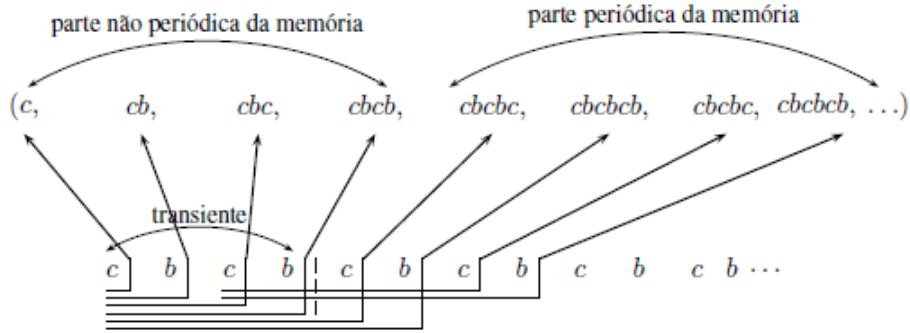
$$|\mathcal{W}| \leq 1 + |\mathbf{w}_1| + k_1 \cdot |\mathbf{w}_2| + (k_1 + 1) \cdot |\mathbf{w}_3| \Rightarrow |\mathcal{W}| \leq 1 + 13 + 6 \times 2 + 7 \times 2 = 40.$$

4.4 CARACTERIZAÇÃO DO CONJUNTO $\mathcal{O}$ COMO UNIÃO DE EXPRESSÕES REGULARES

O principal objetivo desta seção é estender o resultado obtido anteriormente para a classe de SSSs quando o conjunto mínimo de palavras proibidas $\mathcal{O}$ é dado por uma união de expressões regulares.

Definição 4.3. *Sejam s_1 e s_2 duas expressões regulares caracterizadas pela Definição 4.2. Diz-se que s_2 é fatorável por s_1 se alguma palavra de s_2 possui como fator um*

Figura 4.5 – Sequência de memórias eventualmente periódica.



Fonte: O Autor (2020).

prefixo próprio de s_1 . Neste caso, as memórias das palavras de s_2 obtidas em s_1 , serão denominadas de memórias herdadas.

Exemplo 4.11. Considere as expressões regulares:

$$s_1 = cfd(cfdccfdab)^*ef, \quad s_2 = abcf(dcfdc)^*cfdcf,$$

$$s_3 = cf(dccfdc)^*efaf, \quad s_4 = cfd(cfdcabcfdcfdd)^*bf$$

Observe que s_1 , s_2 e s_3 são fatoráveis por s_4 , pois, a palavra $cfdc$ é fator das palavras com o operador de Kleene em cada uma delas e é prefixo próprio de s_4 . A palavra $cfdcfdc$ é memória da palavra $abcfdcfdc$ de s_2 herdada de s_4 .

Observação 4.4. As memórias das palavras formadas pela extensão de símbolos de uma palavra com operador de Kleene de uma expressão regular fatorável por outra podem formar uma sequência eventualmente periódica ou uma sequência de palavras de comprimento tendendo ao infinito.

Exemplo 4.12. Considere as expressões regulares dadas por $s_1 = cbc bcb(ad)^*b$, $s_2 = df(cbc b)^*a$ e $s_3 = adf(cb)^*e$. Observe que s_2 é fatorável por s_1 com sequência de memórias eventualmente periódica de período 2, transiente $cbcb$ e permanente cb , como mostra a Figura 4.5.

Por outro lado, a Tabela 4.1 apresenta a sequência de memórias de s_3 herdadas de s_2 , sequência esta ilimitada.

A seguir, será apresentada a importante definição de bloco fundamental que será útil na prova de alguns resultados importantes, aqui desenvolvidos, que auxiliarão na construção das idéias que conduzirão à prova do principal resultado desta seção.

Definição 4.4. Uma palavra $\mathbf{u} \neq \varepsilon$ sobre um alfabeto finito $\mathcal{A}$ é chamada de bloco fundamental se toda vez que $\mathbf{u} = \mathbf{v}^n$, com $\mathbf{v} \in \mathcal{A}^*$ e $n \in \mathbb{N}$ então, $n = 1$ e $\mathbf{v} = \mathbf{u}$.

Tabela 4.1 – *Memórias das Palavras de s_3 herdadas de s_2 .*

Palavra	Memória
ad	d
adf	df
$adfc$	dfc
$adfc b$	$dfcb$
$adfc b c$	$dfcb c$
$adfc b c b$	$dfcb c b$
$adfc b c b c$	$dfcb c b c$
$\vdots$	$\vdots$

Fonte: O Autor (2020).

Exemplo 4.13. Considere as palavras $\mathbf{u} = abcd$ e $\mathbf{w} = abababab$ sobre o alfabeto finito $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$. Observe que $\mathbf{u}$ é bloco fundamental, mas, $\mathbf{w}$ não, pois, $\mathbf{w} = (ab)^4$, com $\mathbf{v} = ab$ um bloco fundamental.

Lema 4.2. Para toda palavra $\mathbf{w} \neq \varepsilon$ sobre um alfabeto finito $\mathcal{A}$ existe um único bloco fundamental $\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{w} = \mathbf{u}^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Existência. Considere o conjunto:

$$\mathcal{P} = \{|\mathbf{v}| : \mathbf{v} \in \mathcal{P}(\mathbf{w}) \setminus \{\varepsilon\} \text{ e } \mathbf{w} = \mathbf{v}^n, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Pela finitude de $|\mathbf{w}|$, $\mathcal{P}$ é um subconjunto finito dos naturais e mais, como $|\mathbf{w}| \in \mathcal{P}$ então, $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Pelo Princípio da Boa Ordem (Santos, 2009, p. 01), $\mathcal{P}$ possui um elemento mínimo $|\mathbf{v}_0|$. Será mostrado que $\mathbf{v}_0$ é um bloco fundamental. Suponha que $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1^n$, $n \in \mathbb{N}$. A conclusão que se deve chegar é que $n = 1$. Suponha que não, ou seja, que $n > 1$. Daí, segue que $|\mathbf{v}_1| < |\mathbf{v}_0|$ e, sendo $\mathbf{v}_0$ prefixo de $\mathbf{w}$ então, $\mathbf{v}_1$ também o é. Por fim,

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_0^m = \mathbf{v}_1^{n \cdot m} \Rightarrow |\mathbf{v}_1| \in \mathcal{P}$$

e, isto é um absurdo pela minimalidade de $|\mathbf{v}_0|$. Portanto, $n = 1$ e $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0$, ou seja, $\mathbf{v}_0$ é bloco fundamental.

Unicidade. Suponha que exista outro bloco fundamental $\mathbf{v}_1$ tal que

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1^k = \mathbf{v}_0^n, k, n \in \mathbb{N}. \quad (4.13)$$

Como $|\mathbf{v}_1| \in \mathcal{P}$ segue, da minimalidade de $|\mathbf{v}_0|$, que $|\mathbf{v}_1| \geq |\mathbf{v}_0|$. Portanto, da igualdade em (4.1) segue que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0^{p+1} \mathbf{r}$, com $\mathbf{r}$ prefixo próprio de $\mathbf{v}_0 = \mathbf{r} \mathbf{s}$. Substituindo em (4.13), têm-se:

$$\mathbf{v}_0^{p+1} \mathbf{r} (\mathbf{r} \mathbf{s}) (\mathbf{v}_0^p \mathbf{r}) (\mathbf{v}_0^{p+1} \mathbf{r}) \cdots (\mathbf{v}_0^{p+1} \mathbf{r}) = \mathbf{v}_0^{p+1} \mathbf{r} \overbrace{(\mathbf{r} \mathbf{s}) \cdots (\mathbf{r} \mathbf{s})}^{n-p-2} \mathbf{s},$$

ou seja,

$$(\mathbf{rs})(\mathbf{v}_0^p \mathbf{r})(\mathbf{v}_0^{p+1} \mathbf{r}) \cdots (\mathbf{v}_0^{p+1} \mathbf{r}) = (\mathbf{sr})(\mathbf{sr})^{n-p-3} \mathbf{s}. \quad (4.14)$$

Da igualdade em (4.14), $\mathbf{rs} = \mathbf{sr}$ e pelo Lema 4.1, $\mathbf{r} = \mathbf{v}^q$ e $\mathbf{s} = \mathbf{v}^\ell$ com $q = \frac{|\mathbf{r}|}{d}$ e $\ell = \frac{|\mathbf{s}|}{d}$, sendo d um divisor comum de $|\mathbf{r}|$ e $|\mathbf{s}|$. Daí, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}^{q+\ell}$. Como $\mathbf{v}_0$ é bloco fundamental então, $q + \ell = 1$ e, sendo $\mathbf{r}$ prefixo próprio então, $q = 0$ e $\ell = 1$, ou seja, $\mathbf{r} = \varepsilon$ e $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0$. $\square$

Lema 4.3. *Sejam $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}^p$ e $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}^q$ palavras sobre um alfabeto finito $\mathcal{A}$, tais que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ são blocos fundamentais. Se*

$$\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \cdots = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1 \cdots, \quad (4.15)$$

ou seja, uma infinidade de fatores $\mathbf{u}_1$ é igual a uma infinidade de fatores $\mathbf{w}_1$, então $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

Demonstração. Da substituição de $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}^p$ e $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}^q$ em (4.15), segue:

$$\mathbf{u}^p \mathbf{u}^p \mathbf{u}^p \cdots = \mathbf{w}^q \mathbf{w}^q \mathbf{w}^q \cdots$$

ou seja,

$$\mathbf{u} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdots = \mathbf{w} \mathbf{w} \mathbf{w} \cdots \quad (4.16)$$

Da igualdade (4.16) segue que $\mathbf{u} = \mathbf{w}^k \mathbf{r}$, com $k \geq 0$ e $\mathbf{r} \neq \varepsilon$ um prefixo de $\mathbf{w} = \mathbf{rs}$. Voltando à (4.16), substituindo $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$, têm-se:

$$(\mathbf{rs})^k \mathbf{r} (\mathbf{rs}) (\mathbf{rs})^{k-1} \mathbf{r} (\mathbf{rs})^k \mathbf{r} \cdots = (\mathbf{rs})^k \mathbf{r} (\mathbf{sr}) (\mathbf{sr}) \cdots,$$

ou seja,

$$(\mathbf{rs}) (\mathbf{rs})^{k-1} \mathbf{r} (\mathbf{rs})^k \mathbf{r} \cdots = (\mathbf{sr}) (\mathbf{sr}) \cdots \quad (4.17)$$

De (4.17), $\mathbf{sr} = \mathbf{rs}$. Pelo Lema 4.1, $\mathbf{r} = \mathbf{t}^m$ e $\mathbf{s} = \mathbf{t}^n$ com $m = \frac{|\mathbf{r}|}{d}$, $n = \frac{|\mathbf{s}|}{d}$ e d um divisor comum de $|\mathbf{r}|$ e $|\mathbf{s}|$. Daí,

$$\mathbf{w} = \mathbf{rs} = \mathbf{t}^m \cdot \mathbf{t}^n = \mathbf{t}^{m+n}.$$

Sendo $\mathbf{w}$ bloco fundamental, deve-se ter $m + n = 1$ e $\mathbf{t} = \mathbf{w}$. Como $\mathbf{r} \neq \varepsilon$ então, $m = 1$ e $n = 0$, ou seja, $\mathbf{r} = \mathbf{t} = \mathbf{w}$. Logo, $\mathbf{u} = \mathbf{w}^k \mathbf{w} = \mathbf{w}^{k+1}$ e, como $\mathbf{u}$ é bloco fundamental, $k + 1 = 1$ e $\mathbf{w} = \mathbf{u}$. $\square$

Proposição 4.2. *Sejam $s_1 = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2^* \mathbf{u}_3 \cdots \mathbf{u}_{k-1} \mathbf{u}_k^* \mathbf{u}_{k+1} \cdots \mathbf{u}_n$ e $s_2 = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2^* \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_{j-1} \mathbf{w}_j^* \mathbf{w}_{j+1} \cdots \mathbf{w}_m$ expressões regulares caracterizadas pela Definição 4.2 tais que s_1 é fatorável por s_2 . Se a sequência de memórias herdadas é uma sequência de palavras de comprimento tendendo ao infinito, então a mesma não pode iniciar em palavras de s_1 com operador de Kleene.*

Demonstração. Suponha que a sequência de memórias herdadas seja obtida por extensões dos símbolos da palavra com operador de Kleene $\mathbf{u}_k$ de s_1 iniciando na mesma e sua infinidade se dá pela extensão da palavra $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2^{t_1} \mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_{j-2}^{t_{j-2}} \mathbf{w}_{j-1}$. Têm-se as possibilidades:

a) $\mathbf{w}$ é fator de $\mathbf{u}_k$:

Neste caso é possível escrever $\mathbf{u}_k = \mathbf{rws}$, em que $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ são, respectivamente, prefixo e sufixo próprios de $\mathbf{u}_k$. Da infinitude da memória herdada e da expressão regular s_2 , segue que:

$$\mathbf{ww}_j\mathbf{w}_j\cdots = \mathbf{w}(\mathbf{srw})(\mathbf{srw})\cdots$$

ou seja,

$$\mathbf{w}_j\mathbf{w}_j\mathbf{w}_j\cdots = (\mathbf{srw})(\mathbf{srw})(\mathbf{srw})\cdots \quad (4.18)$$

Segue da igualdade (4.18) e dos Lemas 4.2 e 4.3 que:

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{v}^q \quad \text{e} \quad \mathbf{srw} = \mathbf{v}^\ell, \quad q, \ell \in \mathbb{N}. \quad (4.19)$$

De (4.19), se $q \leq \ell$, seja $p = \lceil \frac{\ell}{q} \rceil$ (menor inteiro maior ou igual a $\frac{\ell}{q}$). Então, $q \cdot p \geq \ell$. Da expressão regular s_2 e das igualdades em (4.19), a palavra

$$\begin{aligned} \mathbf{ww}_j^p\mathbf{w}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m &= \mathbf{wv}^{qp}\mathbf{w}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m \\ &= \mathbf{wv}^{qp-\ell}\mathbf{v}^\ell\mathbf{w}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m \\ &= \mathbf{wv}^{qp-\ell}\mathbf{srww}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m \end{aligned}$$

é proibida e possui como fator a palavra proibida $\mathbf{ww}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m$, o que é absurdo, pois, s_2 é anti-fatorial. Por outro lado, se $q > \ell$ então

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{v}^q = \mathbf{v}^{q-\ell}\mathbf{v}^\ell = \mathbf{v}^{q-\ell}\mathbf{srw}. \quad (4.20)$$

Da expressão regular s_2 e de (4.20), a palavra

$$\mathbf{ww}_j\mathbf{w}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m = \mathbf{wv}^{q-\ell}\mathbf{srww}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m$$

é proibida e possui como fator a palavra proibida $\mathbf{ww}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m$, o que é novamente absurdo, sendo s_2 anti-fatorial.

b) $\mathbf{u}_k$ possui como sufixo um prefixo próprio $\mathbf{t}$ de $\mathbf{w}$:

Neste caso, $\mathbf{u}_k = \mathbf{at}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{tx}$ com $\mathbf{x} \neq \varepsilon$. Portanto,

$$\mathbf{u}_k^* = (\mathbf{at})^* = \varepsilon + \mathbf{at} + \mathbf{atat} + \cdots \quad (4.21)$$

Da infinitude da memória herdada, segue de s_2 e da igualdade (4.21) que

$$\mathbf{ww}_j\mathbf{w}_j\cdots = \mathbf{t}(\mathbf{at})(\mathbf{at})(\mathbf{at})\cdots$$

ou seja,

$$\mathbf{xw}_j\mathbf{w}_j\cdots = (\mathbf{at})(\mathbf{at})(\mathbf{at})\cdots \quad (4.22)$$

De (4.22), $\mathbf{x} = (\mathbf{at})^r\mathbf{f}$, com $r \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{f} \neq \varepsilon$ prefixo de $\mathbf{at} = \mathbf{fg}$. Substituindo em (4.22), têm-se:

$$(\mathbf{at})^r\mathbf{fw}_j\mathbf{w}_j\cdots = (\mathbf{at})^r\mathbf{f}(\mathbf{gf})(\mathbf{gf})\cdots,$$

ou seja,

$$\mathbf{w}_j\mathbf{w}_j\mathbf{w}_j\cdots = (\mathbf{gf})(\mathbf{gf})(\mathbf{gf})\cdots \quad (4.23)$$

Da igualdade (4.23) e dos Lemas 4.2 e 4.3 segue que:

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{v}^q \text{ e } \mathbf{gf} = \mathbf{v}^\ell, \quad q, \ell \in \mathbb{N}. \quad (4.24)$$

Da segunda igualdade de (4.24), obtêm-se:

$$(\mathbf{gf})^{r+2} = (\mathbf{gf})\mathbf{g}(\mathbf{fg})^r\mathbf{f} = \mathbf{v}^{\ell \cdot (r+2)}.$$

Sendo $\mathbf{at} = \mathbf{fg}$, $\mathbf{x} = (\mathbf{at})^r\mathbf{f}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{tx}$ então,

$$\mathbf{v}^{\ell \cdot (r+2)} = \mathbf{gaw}. \quad (4.25)$$

Se $q \leq \ell \cdot (r+2)$, tomando $p = \lceil \frac{\ell \cdot (r+2)}{q} \rceil$, têm-se que $p \cdot q \geq \ell \cdot (r+2)$. Usando a primeira igualdade de (4.24), a igualdade em (4.25) e a expressão regular s_2 se obtêm a palavra proibida

$$\begin{aligned} \mathbf{ww}_j^p\mathbf{w}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m &= \mathbf{wv}^{p \cdot q}\mathbf{w}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m \\ &= \mathbf{wv}^{p \cdot q - \ell \cdot (r+2)}\mathbf{v}^{\ell \cdot (r+2)}\mathbf{w}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m \\ &= \mathbf{wv}^{p \cdot q - \ell \cdot (r+2)}\mathbf{gaww}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m, \end{aligned}$$

cujo fator $\mathbf{ww}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m$ é também proibido e, sendo s_2 anti-fatorial, isto é absurdo. Por outro lado, se $q > \ell \cdot (r+2)$ então,

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{v}^q = \mathbf{v}^{q - \ell \cdot (r+2)}\mathbf{v}^{\ell \cdot (r+2)}. \quad (4.26)$$

Da expressão regular s_2 , de (4.25) e de (4.26), a palavra

$$\mathbf{ww}_j\mathbf{w}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m = \mathbf{wv}^{q - \ell \cdot (r+2)}\mathbf{gaww}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m,$$

é proibida com fator proibido $\mathbf{ww}_{j+1}\cdots\mathbf{w}_m$ e, novamente temos um absurdo. $\square$

Lema 4.4. *Sejam $s_1 = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2^*\mathbf{u}_3$ e $s_2 = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2^*\mathbf{w}_3$ expressões regulares caracterizadas pela Definição 4.2. Se s_2 é fatorável por s_1 com sequência de memórias herdadas $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$*

eventualmente periódica de período fundamental p e transiente $\mathbf{t}$ então, $p \mid |\mathbf{w}_2|$.

Demonstração. Suponha que $p \nmid |\mathbf{w}_2|$. Pelo Algoritmo da Divisão, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$|\mathbf{w}_2| = p \cdot q + r, \quad 0 < r < p \quad (4.27)$$

Devido ao caráter cíclico do operador de Kleene em $\mathbf{w}_2$, têm-se:

$$a_{n+|\mathbf{w}_2|} = a_n, \quad \forall n \geq |\mathbf{t}| + 1. \quad (4.28)$$

Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é eventualmente periódica de período fundamental p e transiente $\mathbf{t}$ então,

$$a_{n+p} = a_n, \quad \forall n \geq |\mathbf{t}| + 1. \quad (4.29)$$

De (4.27), (4.28) e (4.29) segue que:

$$\begin{aligned} a_{n+|\mathbf{w}_2|} &= a_{n+r+p \cdot q} \\ &= a_{n+r+(q-1) \cdot p+p} \\ &= a_{n+r+(q-1) \cdot p} = \dots = a_{n+r+p} = a_{n+r} = a_n, \quad \forall n \geq |\mathbf{t}| + 1, \end{aligned}$$

ou seja, $a_{n+r} = a_n$, $\forall n \geq |\mathbf{t}| + 1$, o que é absurdo pela minimalidade de p . $\square$

O próximo resultado garante que as restrições de uma palavra obtida pela extensão de símbolos de alguma palavra com operador de Kleene podem ser determinadas descon siderando os operadores de Kleene antecedentes, o que será muito útil para o estudo de todas as restrições de palavras em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$.

Proposição 4.3. *Sejam $s = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2^* \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_4^* \dots \mathbf{u}_{2n}^* \mathbf{u}_{2n+1}$ uma expressão regular dada pela Definição 4.2, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_3 \dots \mathbf{u}_{2k-1} \mathbf{u}_{2k}^{r_k} \mathbf{m}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2^{r_1} \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_4^{r_2} \dots \mathbf{u}_{2k-2}^{r_{k-1}} \mathbf{u}_{2k-1} \mathbf{u}_{2k}^{r_k} \mathbf{m}$, com $r_1, r_2, \dots, r_k \geq 0$, $k \leq n$ e $\mathbf{m}$ um prefixo de $\mathbf{u}_{2k}$, palavras obtidas de s pela extensão dos símbolos da palavra $\mathbf{u}_{2k}$. Se $r_k \geq t$, em que $t \geq 0$ é o menor inteiro tal que*

$$(t-1) \cdot |\mathbf{u}_{2k}| + |\mathbf{m}| \geq |\mathbf{u}_1| + \dots + |\mathbf{u}_{2k-2}|$$

então, $\mathcal{C}(\mathbf{u}) = \mathcal{C}(\mathbf{w})$.

Demonstração. As restrições de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ são dadas pela expressão regular juntamente com as restrições dos seus sufixos próprios mais longos $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$. Como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ são obtidas por extensões dos mesmos símbolos da palavra com operador de Kleene $\mathbf{u}_{2k}$ então, suas restrições pela expressão regular são claramente iguais. Daí, é suficiente verificar que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. Sendo $r_k \geq t$, em que $t \geq 0$ é o menor inteiro tal que

$$(t-1) \cdot |\mathbf{u}_{2k}| + |\mathbf{m}| \geq |\mathbf{u}_1| + \dots + |\mathbf{u}_{2k-2}| \quad (4.30)$$

então, da Inequação (4.30) segue, para todo $r_k \geq t$, que:

$$|\mathbf{u}_{2k-1}| + r_k \cdot |\mathbf{u}_{2k}| + |\mathbf{m}| \geq |\mathbf{u}_1| + \dots + |\mathbf{u}_{2k-1}| + |\mathbf{u}_{2k}| \quad (4.31)$$

ou seja,

$$|\mathbf{u}_{2k-1} \mathbf{u}_{2k}^{r_k} \mathbf{m}| \geq |\mathbf{u}_1| + \dots + |\mathbf{u}_{2k-1}| + |\mathbf{u}_{2k}| \quad (4.32)$$

Por outro lado, sendo $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ os sufixos próprios mais longos de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ segue, da Proposição 4.1 que:

$$|\mathbf{v}_i| < |\mathbf{u}_1| + \dots + |\mathbf{u}_{2k-1}| + |\mathbf{u}_{2k}|, \quad i = 1, 2. \quad (4.33)$$

Como $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{u}_{2k-1} \mathbf{u}_{2k}^{r_k} \mathbf{m}$ são sufixos de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$, segue de (4.32) e de (4.33) que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ são sufixos próprios de $\mathbf{u}_{2k-1} \mathbf{u}_{2k}^{r_k} \mathbf{m}$ e, portanto, são iguais. $\square$

Em virtude da Proposição 4.3 utilizar-se-á duas expressões regulares com um único operador de Kleene para enunciar e provar dois resultados que determinam de forma explícita um conjunto suficiente de classes de representantes de restrições das palavras de uma expressão regular, obtidas por extensões do operador de Kleene da outra expressão. O fato de proceder dessa maneira se reflete numa maior facilidade de compreensão na determinação do número de ciclos do operador de Kleene necessários para garantir que todas as restrições já tenham sido obtidas.

Proposição 4.4. *Sejam $s_1 = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2^* \mathbf{u}_3$ e $s_2 = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2^* \mathbf{w}_3$ expressões regulares caracterizadas pela Definição 4.2 tais que s_2 é fatorável por s_1 com sequência de memórias herdadas eventualmente periódica de período p . Então, um conjunto suficiente de representantes das restrições das palavras de s_2 obtidas pela extensão de símbolos de $\mathbf{w}_2$ é dado por*

$$\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B}, \text{ em que } \mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1\} \{\varepsilon, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_2^k\} \{\mathbf{w}_3\},$$

sendo $k \geq 1$ o menor inteiro tal que $(k-1) \cdot |\mathbf{w}_2| \geq |\mathbf{t}|$, em que $\mathbf{t}$ é o transiente.

Demonstração. O conjunto de restrições é formado por pares $(R_p; R_h)$, em que R_p são restrições da própria expressão regular e R_h são restrições da memória herdada. Sendo a sequência de memórias herdadas das palavras de s_2 obtidas pela extensão de símbolos de $\mathbf{w}_2$ uma sequência eventualmente periódica de período p , a mesma é obtida, de acordo com (4.12), de uma sequência infinita da forma

$$\mathbf{t} \ \mathbf{v} \ \mathbf{v} \ \mathbf{v} \ \dots, \quad (4.34)$$

em que $\mathbf{t}$ é o transiente e $|\mathbf{v}| = p$. De (4.34) observa-se que após $|\mathbf{t}|$ símbolos de $\mathbf{w}_2$ as restrições R_h se repetem de p em p símbolos e as restrições R_p de $|\mathbf{w}_2|$ em $|\mathbf{w}_2|$ símbolos, ou seja, os pares $(R_p; R_h)$ se repetem de $\text{mmc}(p, |\mathbf{w}_2|)$ em $\text{mmc}(p, |\mathbf{w}_2|)$

símbolos. Daí, o número mínimo de repetições k da palavra $\mathbf{w}_2$ para que todas as restrições das palavras em s_2 , obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_2$, tenham sido obtidas, deve ser escolhido de tal forma que:

$$k \cdot |\mathbf{w}_2| \geq |\mathbf{t}| + \text{mmc}(p, |\mathbf{w}_2|).$$

Pelo Lema 4.4, $p \mid |\mathbf{w}_2|$ e, portanto, $\text{mmc}(p, |\mathbf{w}_2|) = |\mathbf{w}_2|$. Logo,

$$k \cdot |\mathbf{w}_2| \geq |\mathbf{t}| + |\mathbf{w}_2| \Rightarrow (k - 1) \cdot |\mathbf{w}_2| \geq |\mathbf{t}|.$$

Por fim, tomando $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1\} \{\varepsilon, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_2^k\} \{\mathbf{w}_3\}$, o conjunto $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B}$ é um conjunto suficiente de representantes das restrições das palavras de s_2 . $\square$

Exemplo 4.14. *Têm-se, do Exemplo 4.12, que as expressões regulares $s_1 = cbc bcb a^* b$ e $s_2 = df (cbcb)^* a$ são tais que s_2 é fatorável por s_1 com sequência de memórias herdadas eventualmente periódica de período $p = 2$ e transiente $\mathbf{t} = cbc b$, ou seja, $|\mathbf{t}| = 4$. Como $|\mathbf{w}_2| = |cbcb| = 4$. Pela Proposição 4.4, $k \geq 1$ é o menor inteiro que satisfaz:*

$$4 \cdot (k - 1) \geq 4 \Rightarrow k - 1 \geq 1 \Rightarrow k = 2.$$

Daí, o conjunto $\mathcal{B}$ é dado por:

$$\mathcal{B} = \{df\} \{\varepsilon, cbc b, cbc bcbcb\} \{a\} = \{dfa, dfcbcb a, dfcbcbcbcb a\}$$

e,

$$\mathcal{W} = \{\varepsilon, d, df, dfc, dfcb, dfcbc, dfcbcb, dfcbcbc, dfcbcbcb, dfcbcbcbc, dfcbcbcbcb\}.$$

Proposição 4.5. *Sejam $s_1 = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2^* \mathbf{u}_3$ e $s_2 = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2^* \mathbf{w}_3$ expressões regulares caracterizadas pela Definição 4.2 tais que s_1 é fatorável por s_2 com sequência de memórias herdadas formada por palavras de comprimento tendendo ao infinito. Então, um conjunto suficiente de representantes das restrições das palavras de s_1 obtidas pela extensão de símbolos de $\mathbf{u}_2$ é dado por*

$$\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B}, \text{ em que } \mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1\} \{\varepsilon, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_2^K\} \{\mathbf{u}_3\},$$

em que $k \geq 1$ é o menor inteiro tal que $k \cdot |\mathbf{u}_2| \geq t + a$, em que t é o comprimento da palavra que antecede o início do operador de Kleene em $\mathbf{w}_2$ a partir do início do operador de Kleene em $\mathbf{u}_2$ e a é o mínimo múltiplo comum entre $|\mathbf{u}_2|$ e $|\mathbf{w}_2|$.

Demonstração. Já se sabe que as restrições das palavras de s_1 são dadas por pares (R_p, R_h) , em que R_p é restrição própria e R_h é restrição de memória herdada de s_2 .

Portanto, é suficiente determinar a quantidade mínima k de repetições da palavra $\mathbf{u}_2$ para que o par (R_p, R_h) se repita. Pela Proposição 4.2 a memória herdada deve iniciar na palavra $\mathbf{u}_1$. Considere os casos:

a) $\mathbf{w}_1$ é fator de $\mathbf{u}_1$:

Neste caso,

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}\mathbf{w}_1\mathbf{r}. \quad (4.35)$$

Da expressão regular s_2 e pela infinitude da memória herdada, de (4.35) segue

$$\mathbf{w}_1\mathbf{r}\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 \cdots = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{w}_2 \cdots \Rightarrow \mathbf{r}\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 \cdots = \mathbf{w}_2\mathbf{w}_2\mathbf{w}_2 \cdots \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{w}_2^q\mathbf{t},$$

com $\mathbf{t}$ prefixo de $\mathbf{w}_2 = \mathbf{t}\mathbf{m}$. Daí,

$$\mathbf{w}_2^q\mathbf{t}\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 \cdots = \mathbf{w}_2^q\mathbf{t}(\mathbf{m}\mathbf{t})(\mathbf{m}\mathbf{t})(\mathbf{m}\mathbf{t}) \cdots,$$

ou seja,

$$\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 \cdots = (\mathbf{m}\mathbf{t})(\mathbf{m}\mathbf{t})(\mathbf{m}\mathbf{t}) \cdots \quad (4.36)$$

A igualdade em (4.36) diz que ao iniciar as extensões da palavra $\mathbf{u}_1$ de s_1 por símbolos de $\mathbf{u}_2$, a palavra $\mathbf{w}_1$ de s_2 já tem sido estendida por $\mathbf{w}_2^q\mathbf{t}$ símbolos, continuando suas extensões a partir do sufixo $\mathbf{m}$. Observe ainda que os operadores de Kleene em $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{w}_2$ geram, respectivamente, restrições próprias que se repetem a cada $|\mathbf{u}_2|$ -vezes e restrições de memórias herdadas que se repetem a cada $|\mathbf{w}_2|$ -vezes. Como $|\mathbf{m}\mathbf{t}| = |\mathbf{w}_2|$, segue de (4.36) que o par (R_p, R_h) se repete a cada $\text{mmc}(|\mathbf{u}_2|, |\mathbf{w}_2|)$ -vezes, ou seja, é suficiente tomar $k \geq 1$ tal que $k \cdot |\mathbf{u}_2| \geq t + a = 0 + a = a$, com a o mínimo múltiplo comum entre $|\mathbf{u}_2|$ e $|\mathbf{w}_2|$.

b) $\mathbf{u}_2$ possui um sufixo próprio de $\mathbf{w}_1$ como prefixo:

Neste caso, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}\mathbf{m}$, $\mathbf{m} \neq \varepsilon$ prefixo próprio de $\mathbf{w}_1 = \mathbf{m}\mathbf{y}$. Da expressão regular s_2 e pela infinitude da memória herdada, segue que:

$$\mathbf{m}\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 \cdots = \mathbf{m}\mathbf{y}\mathbf{w}_2\mathbf{w}_2 \cdots$$

ou seja,

$$\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 \cdots = \mathbf{y}\mathbf{w}_2\mathbf{w}_2\mathbf{w}_2 \cdots \quad (4.37)$$

A igualdade em (4.37) diz que no início do operador de Kleene em $\mathbf{u}_2$ a palavra $\mathbf{y}$ antecede o início do operador de Kleene em $\mathbf{w}_2$. Segue, ainda de (4.37) que $\mathbf{y} = \mathbf{u}_2^p\mathbf{n}$, com $\mathbf{n}$ prefixo de $\mathbf{u}_2 = \mathbf{n}\mathbf{z}$. Novamente de (4.37), têm-se:

$$\mathbf{u}_2^p\mathbf{n}(\mathbf{z}\mathbf{n})(\mathbf{z}\mathbf{n})(\mathbf{z}\mathbf{n}) \cdots = \mathbf{u}_2^p\mathbf{n}\mathbf{w}_2\mathbf{w}_2\mathbf{w}_2 \cdots$$

e,

$$(\mathbf{zn})(\mathbf{zn})(\mathbf{zn}) \cdots = \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2 \cdots \quad (4.38)$$

Como $|\mathbf{zn}| = |\mathbf{nz}| = |\mathbf{u}_2|$, a igualdade em (4.38) sincroniza as restrições obtidas pelas evoluções dos operadores de Kleene após completar o mínimo múltiplo comum entre $|\mathbf{u}_2|$ e $|\mathbf{w}_2|$. Portanto, basta tomar $k \geq 1$ tal que $k \cdot |\mathbf{u}_2| \geq t + a = |\mathbf{y}| + a$, com a o mínimo múltiplo comum entre $|\mathbf{u}_2|$ e $|\mathbf{w}_2|$. Logo, para ambos os casos, têm-se:

$$\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B}, \text{ em que } \mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1\} \{\varepsilon, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_2^K\} \{\mathbf{u}_3\},$$

em que $k \cdot |\mathbf{u}_2| \geq t + a$. □

Exemplo 4.15. *Do Exemplo 4.12, a expressão regular $s_3 = \text{adf}(cb)^*$ e herda memória infinita de $s_2 = \text{df}(cbcb)^*a$. Neste caso, $t = 0$, $|\mathbf{u}_2| = 2$, $|\mathbf{w}_2| = 4$ e $a = \text{mmc}(2, 4) = 4$. Pela Proposição 4.5, têm-se:*

$$k \geq 1, \text{ menor inteiro tal que } 2k \geq 4 \Rightarrow k = 2.$$

Portanto, $\mathcal{B} = \{\text{adf}\} \{\varepsilon, cb, cbcb\} \{e\}$ e,

$$\mathcal{W} = \{\varepsilon, a, ad, \text{adf}, \text{adfc}, \text{adfc}b, \text{adfc}bc, \text{adfc}bcb\}.$$

Teorema 4.3. *Seja X um SSS cujo conjunto mínimo de palavras proibidas é dado por $\mathcal{O} = \sum_{i=1}^n s_i$, em que cada s_i , $i = 1, \dots, n$ é uma expressão regular caracterizada pela Definição 4.2. Então, existe um conjunto finito e suficiente de classes de representantes do conjunto de restrições das palavras na linguagem L de X .*

Demonstração. Inicialmente, determina-se o conjunto de representantes de uma expressão regular qualquer da união, como por exemplo,

$$s_j = \mathbf{w}_{j1} \mathbf{w}_{j2}^* \mathbf{w}_{j3} \cdots \mathbf{w}_{j(2t_j)}^* \mathbf{w}_{j(2t_j+1)}.$$

Em virtude da Proposição 4.3, para cada palavra $\mathbf{w}_{j(2i)}$ ($1 \leq i \leq t_j$) de s_j com operador de Kleene determina-se quantos ciclos de Kleene k_{ji} são necessários para que todas as restrições das palavras obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{j(2i)}$ tenham sido obtidas. Considere os seguintes casos:

a) As palavras de s_j obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{j(2i)}$ não herdam memórias:

Neste caso, k_{ji} é obtido como no Teorema 4.2.

b) As palavras de s_j obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{j(2i)}$ herdam memórias:

Suponha que as palavras de s_j obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{j(2i)}$ herdam memórias de $r + m$ ($1 \leq r + m \leq n - 1$) expressões regulares, das quais, r com sequências de memórias herdadas eventualmente periódicas de períodos p_s e transientes $\mathbf{t}_s$ ($s = 1, \dots, r$)

e m com sequências de memórias herdadas infinitas que, após uma reindexação, pode-se admitir como sendo $s'_1, \dots, s'_r, s'_{r+1}, \dots, s'_{r+m}$ com $s'_i \neq s_j$, $1 \leq i \leq r+m$. Para as r expressões regulares é possível determinar, pela Proposição 4.4, os números $k_{ji}^{(1)}, k_{ji}^{(2)}, \dots, k_{ji}^{(r)} \geq 1$ que são os menores inteiros tais que:

$$k_{ji}^{(s)} \cdot |\mathbf{w}_{j(2i)}| \geq |\mathbf{t}_s| + \text{mmc}(|\mathbf{w}_{j(2i)}|, p_s), \quad s = 1, \dots, r$$

e que representam os ciclos de Kleene necessários para identificar todas as restrições das palavras de s_j obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{j(2i)}$ que herdaram memórias de $s'_1, \dots, s'_r$, respectivamente. Por outro lado, para as m expressões regulares é possível determinar, pela Proposição 4.5, os números $k_{ji}^{(r+1)}, k_{ji}^{(r+2)}, \dots, k_{ji}^{(r+m)} \geq 1$ que são os menores inteiros tais que:

$$k_{ji}^{(s)} \cdot |\mathbf{w}_{j(2i)}| \geq |\mathbf{t}_s| + \text{mmc}(|\mathbf{w}_{j(2i)}|, |\mathbf{w}_{s(2q_s)}|), \quad s = r+1, \dots, r+m,$$

em que $\mathbf{t}_s$ representa a palavra que antecede o início do operador de Kleene em $\mathbf{w}_{s(2q_s)}$ a partir do início do operador de Kleene em $\mathbf{w}_{j(2i)}$ e $\mathbf{w}_{s(2q_s)}$ é a palavra com operador de Kleene que gera a memória infinita e, estes números representam os ciclos de Kleene necessários para identificar todas as restrições das palavras de s_j obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{j(2i)}$ que herdaram memórias de $s'_{r+1}, \dots, s'_{r+m}$, respectivamente. Por fim, em virtude do caráter cíclico do operador de Kleene e da Proposição 4.1 as memórias próprias obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{j(2i)}$ formam uma sequência eventualmente periódica de período p e transiente $\mathbf{t}$. Daí, para sincronizar as $(r+m+1)$ -uplas $(R_p, R_{h_1}, \dots, R_{h_r}, R_{h_{r+1}}, \dots, R_{h_{r+m}})$ de restrições próprias e herdadas basta tomar $k_{ji} \geq 1$ o menor inteiro tal que:

$$k_{ji} \cdot |\mathbf{w}_{j(2i)}| \geq \max_{1 \leq s \leq r+m} \{|\mathbf{t}|, |\mathbf{t}_s|\} + \text{mmc}(|\mathbf{w}_{j(2i)}|, p, p_1, \dots, p_r, |\mathbf{w}_{(r+1)(2q_{r+1})}|, \dots, |\mathbf{w}_{(r+m)(2q_{r+m})}|).$$

Como, pelo Lema 4.4 $p, p_s \mid |\mathbf{w}_{j(2i)}|$, $\forall s = 1, \dots, r$, a desigualdade acima passa a ser

$$k_{ji} \cdot |\mathbf{w}_{j(2i)}| \geq \max_{1 \leq s \leq r+m} \{|\mathbf{t}|, |\mathbf{t}_s|\} + \text{mmc}(|\mathbf{w}_{j(2i)}|, |\mathbf{w}_{(r+1)(2q_{r+1})}|, \dots, |\mathbf{w}_{(r+m)(2q_{r+m})}|).$$

Daí, um conjunto suficiente de representantes das restrições das palavras de s_j é dado por

$$\mathcal{W}_j = \mathcal{P}(\mathcal{B}_j) \setminus \mathcal{B}_j,$$

em que

$$\mathcal{B}_j = \{\mathbf{w}_{j1}\} \{\varepsilon, \mathbf{w}_{j2}, \dots, \mathbf{w}_{j2}^{k_{j1}}\} \{\mathbf{w}_{j3}\} \dots \{\varepsilon, \dots, \mathbf{w}_{j(2t_j)}^{k_{jt_j}}\} \{\mathbf{w}_{j(2t_j+1)}\}.$$

Raciocinando de forma similar, para todas as expressões regulares, é possível determinar

os conjuntos finitos de representantes $\mathcal{W}_i$, $1 \leq i \leq n$ das mesmas. Finalmente,

$$\mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{W}_i$$

é um conjunto finito suficiente de classes de representantes das restrições das palavras na linguagem de X . $\square$

Observação 4.5. Na prática, o Teorema 4.3 também fornece um limitante para o número de elementos de qualquer conjunto necessário e suficiente $\mathcal{W}'$ de representantes das restrições das palavras na linguagem do SSS X , pois, $|\mathcal{W}'| \leq |\mathcal{W}|$, para $\mathcal{W}$ apresentado no mesmo e este limitante, em muitos casos, oferece uma excelente aproximação do $|\mathcal{W}'|$ como bem ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 4.16. Seja X o SSS cujo conjunto mínimo de palavras proibidas é dado por $\mathcal{O} = s_1 + s_2 + s_3$, em que $s_1 = cbcbcb(ad)^*b$, $s_2 = df(cbcb)^*a$ e $s_3 = adf(cb)^*e$ são as expressões regulares do Exemplo 4.12. Determinar-se-á um conjunto finito e suficiente $\mathcal{W}$ de classes de representantes do conjunto de restrições das palavras na linguagem L de X . Deve-se determinar os conjuntos finitos de representantes $\mathcal{W}_i$, $1 \leq i \leq 3$ de cada uma das expressões regulares.

Determinação de $\mathcal{W}_1$:

Observe que as palavras de s_1 obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{12} = ad$ herdam memórias de s_2 e de s_3 e, as sequências de memórias herdadas são dadas por

$$(\varepsilon, d, \varepsilon, d, \dots) \text{ e } (a, ad, a, ad, \dots),$$

respectivamente, ambas eventualmente periódicas de períodos fundamentais $p_1 = p_2 = 2$ e transientes $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 = \varepsilon$ e geram sequência de memórias próprias dada por $(\varepsilon, \varepsilon, \dots)$ que é eventualmente periódica de período fundamental $p = 1$ e transiente $\mathbf{t} = \varepsilon$. Pelo Teorema 4.3, $k_{11} \geq 1$ é o menor inteiro tal que:

$$k_{11} \cdot |\mathbf{w}_{12}| \geq \max\{|\mathbf{t}|, |\mathbf{t}_1|, |\mathbf{t}_2|\} + |\mathbf{w}_{12}| \Rightarrow 2 \cdot k_{11} \geq 0 + 2 = 2.$$

Portanto, $k_{11} = 1$ e,

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{P}(\mathcal{B}_1) \setminus \mathcal{B}_1,$$

em que

$$\mathcal{B}_1 = \{cbcbcb\}\{\varepsilon, ad\}\{b\} = \{cbcbcb, cbcbcbadb\}.$$

Daí,

$$\mathcal{W}_1 = \{\varepsilon, c, cb, cbc, cbcb, cbcbc, cbcbcb, cbcbcbcb, cbcbcbcbad\}.$$

Determinação de $\mathcal{W}_2$:

Agora, as palavras de s_2 obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{22} = cbcb$ herdam memórias somente de s_1 e, a sequência de memórias herdadas é dada por

$$(c, cb, cbc, cbcb, cbcbc, cbcbcb, cbcbcb, cbcbcb, \dots),$$

que é eventualmente periódica de período fundamental $p_1 = 2$ e transiente $\mathbf{t}_1 = cbcb$ e geram sequência de memórias próprias dada por $(\varepsilon, \varepsilon, \dots)$ que é eventualmente periódica de período fundamental $p = 1$ e transiente $\mathbf{t} = \varepsilon$. Pelo Teorema 4.3, $k_{21} \geq 1$ é o menor inteiro tal que:

$$k_{21} \cdot |\mathbf{w}_{22}| \geq \max\{|\mathbf{t}|, |\mathbf{t}_1|\} + |\mathbf{w}_{22}| \Rightarrow 4 \cdot k_{21} \geq 4 + 4 = 8.$$

Portanto, $k_{21} = 2$ e,

$$\mathcal{W}_2 = \mathcal{P}(\mathcal{B}_2) \setminus \mathcal{B}_2,$$

em que

$$\mathcal{B}_2 = \{df\}\{\varepsilon, cbcb, cbcbcbcb\}\{a\} = \{dfa, dfcbcb, dfcbcbcbcb\}.$$

Daí,

$$\mathcal{W}_2 = \{\varepsilon, d, df, dfc, dfcb, dfcbc, dfcbcb, dfcbcbc, dfcbcbcb, dfcbcbcbc, dfcbcbcbcb\}.$$

Determinação de $\mathcal{W}_3$:

Por fim, as palavras de s_3 obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{32} = cb$ herdam memórias de s_1 e de s_2 e, as sequências de memórias herdadas são dadas por

$$(c, cb, cbc, cbcb, cbcbc, cbcbcb, cbcbcb, cbcbcb, \dots) \text{ e } (dfc, dfcb, dfcbc, dfcbcb, \dots),$$

respectivamente, em que a primeira é eventualmente periódica de período fundamental $p_1 = 2$ e transiente $\mathbf{t}_1 = cbcb$ e a segunda é infinita com comprimento da palavra $\mathbf{t}_2$ que antecede o início do operador de Kleene em $\mathbf{w}_{22}$ a partir do início do operador de Kleene em $\mathbf{w}_{32}$ nulo e geram sequência de memórias próprias dada por $(\varepsilon, \varepsilon, \dots)$ que é eventualmente periódica de período fundamental $p = 1$ e transiente $\mathbf{t} = \varepsilon$. Pelo Teorema 4.3, $k_{31} \geq 1$ é o menor inteiro tal que:

$$k_{31} \cdot |\mathbf{w}_{32}| \geq \max\{|\mathbf{t}|, |\mathbf{t}_1|, |\mathbf{t}_2|\} + mmc(|\mathbf{w}_{32}|, |\mathbf{w}_{22}|) \Rightarrow 2 \cdot k_{31} \geq 4 + 4 = 8.$$

Portanto, $k_{31} = 4$ e,

$$\mathcal{W}_3 = \mathcal{P}(\mathcal{B}_3) \setminus \mathcal{B}_3,$$

em que

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_3 &= \{adf\}\{\varepsilon, cb, cbcb, cbcbcb, cbcbcbcb\}\{e\} \\ &= \{adfe, adfcbe, adfcbe, adfcbe, adfcbe\}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\mathcal{W}_3 = \{\varepsilon, a, ad, adf, adfc, adfcb, adfcbc, adfcbcb, adfcbcbc, adfcbcbcb, adfcbcbcbcb, adfcbcbcbcb\}.$$

Novamente, pelo Teorema 4.3, têm-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_3 \\ &= \{\varepsilon, c, d, a, cb, df, ad, cbc, dfc, adf, cbcb, dfcb, adfc, cbcbc, dfcbc, adfcb, cbcbcb, dfcbcb, adfcbc, cbcbcb, dfcbcbcb, adfcbcbcb, dfcbcbcbcb, adfcbcbcbcb, adfcbcbcbcbcb, adfcbcbcbcbcbcb\}.\end{aligned}$$

No próximo exemplo apresenta-se a determinação do conjunto de classes de representantes do conjunto de restrições no caso em que algumas expressões regulares apresentam mais de uma palavra com operador de Kleene, o que aumenta consideravelmente o número de representantes.

Exemplo 4.17. Considere X o SSS cujo conjunto mínimo de palavras proibidas é dado por $\mathcal{O} = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$, em que

$$\begin{cases} s_1 = cabc(ad)^*db(cfd)^*fe \\ s_2 = bca(dada)^*be \\ s_3 = da(db)^*cfdcf(dbfdbf)^*d \\ s_4 = cfdc(fdb)^*dad(bca)^*fg \end{cases}.$$

Determinar-se-á um conjunto finito e suficiente $\mathcal{W}$ de classes de representantes do conjunto de restrições das palavras na linguagem L de X . Sabe-se que $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_3 \cup \mathcal{W}_4$, em que cada $\mathcal{W}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ representa o conjunto de classes de representantes do conjunto de restrições de cada s_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Determinação de $\mathcal{W}_1$:

Observe que as palavras de s_1 obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{12} = ad$ herdam memórias de s_2 e de s_3 e, as sequências de memórias herdadas são dadas por

$$(bca, bcad, bcada, bcadad, \dots) \text{ e } (\varepsilon, d, da, dad, da, dad, \dots),$$

respectivamente, em que a primeira é infinita com $|\mathbf{t}_1| = 1$, em que $\mathbf{t}_1 = a$ é a palavra

que antecede o início do operador de Kleene em $\mathbf{w}_{22}$ a partir do início do operador de Kleene em $\mathbf{w}_{12}$ e a segunda é eventualmente periódica de período fundamental $p_1 = 2$ e transiente $\mathbf{t}_2 = ad$ e geram sequência de memórias próprias dada por $(ca, \varepsilon, \varepsilon, \dots)$ que é eventualmente periódica de período fundamental $p = 1$ e transiente $\mathbf{t} = a$. Pelo Teorema 4.3, $k_{11} \geq 1$ é o menor inteiro tal que:

$$k_{11} \cdot |\mathbf{w}_{12}| \geq \max \{|\mathbf{t}|, |\mathbf{t}_1|, |\mathbf{t}_2|\} + \text{mmc}(|\mathbf{w}_{12}|, |\mathbf{w}_{22}|) \Rightarrow 2 \cdot k_{11} \geq 2 + 4 = 6.$$

Portanto, $k_{11} = 3$. Por outro lado, as palavras de s_1 obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{14} = cfd$ herdam memórias de s_2 , de s_3 e de s_4 e, as sequências de memórias herdadas são dadas por

$$(bc, \varepsilon, \varepsilon, \dots), (\varepsilon, \varepsilon, d, \varepsilon, \varepsilon, d, \dots) \text{ e } (c, cf, cfd, cfcd, cfcdcf, cfcdcf, cfcdcf, cfcdcf, cfcdcf, \dots),$$

respectivamente, sendo as três eventualmente periódicas de períodos fundamentais $p_1 = 1$ e $p_2 = p_3 = 3$ e transientes $\mathbf{t}_1 = c$, $\mathbf{t}_2 = \varepsilon$ e $\mathbf{t}_3 = cfd$ e geram sequência de memórias próprias dada por $(c, \varepsilon, \varepsilon, c, \varepsilon, \varepsilon, \dots)$ que é eventualmente periódica de período fundamental $p = 3$ e transiente $\mathbf{t} = \varepsilon$. Pelo Teorema 4.3, $k_{12} \geq 1$ é o menor inteiro tal que:

$$k_{12} \cdot |\mathbf{w}_{14}| \geq \max \{|\mathbf{t}|, |\mathbf{t}_1|, |\mathbf{t}_2|, |\mathbf{t}_3|\} + |\mathbf{w}_{14}|,$$

ou seja,

$$3 \cdot k_{12} \geq \max\{0, 1, 0, 3\} + 3 = 6 \Rightarrow k_{12} = 2.$$

Daí,

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{P}(\mathcal{B}_1) \setminus \mathcal{B}_1,$$

em que

$$\mathcal{B}_1 = \{cab\}\{\varepsilon, ad, adad, adadad\}\{db\}\{\varepsilon, cfd, cfcdcf\}\{fe\}.$$

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, têm-se:

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}_1| &= |cab| + 3 \cdot |ad| + 4 \cdot |db| + 8 \cdot |cfd| + 12 \cdot (|fe| - 1) + 1 \\ &= 4 + 6 + 8 + 24 + 12 + 1 = 55. \end{aligned}$$

Determinação de $\mathcal{W}_2$:

As palavras de s_2 obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{22} = dada$ só herdam memórias de s_3 e, a sequência de memórias herdadas é dada por $(d, da, dad, da, dad, \dots)$ que é eventualmente periódica de período fundamental $p_1 = 2$ e transiente $\mathbf{t}_1 = d$ e geram sequência de memórias próprias dada por $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots)$ que é eventualmente periódica de período

fundamental $p = 1$ e transiente $\mathbf{t} = \varepsilon$. Pelo Teorema 4.3, $k_{21} \geq 1$ é o menor inteiro tal que:

$$k_{21} \cdot |\mathbf{w}_{22}| \geq \max\{|\mathbf{t}|, |\mathbf{t}_1| + |\mathbf{w}_{22}|\},$$

ou seja,

$$4 \cdot k_{21} \geq \max\{0, 1\} + 4 = 5 \Rightarrow k_{21} = 2.$$

Daí,

$$\mathcal{W}_2 = \mathcal{P}(\mathcal{B}_2) \setminus \mathcal{B}_2,$$

em que

$$\mathcal{B}_2 = \{bca\}\{\varepsilon, dada, dadadada\}\{be\}.$$

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, têm-se:

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}_2| &= |bca| + 2 \cdot |dada| + 3 \cdot (|be| - 1) + 1 \\ &= 3 + 8 + 3 + 1 = 15. \end{aligned}$$

Determinação de $\mathcal{W}_3$:

As palavras de s_3 obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{32} = db$ só herdam memórias de s_2 e, a sequência de memórias herdadas é dada por $(\varepsilon, b, \varepsilon, b, \dots)$ que é eventualmente periódica de período fundamental $p_1 = 2$ e transiente $\mathbf{t}_1 = \varepsilon$ e geram sequência de memórias próprias dada por $(d, \varepsilon, d, \varepsilon, \dots)$ que é eventualmente periódica de período fundamental $p = 2$ e transiente $\mathbf{t} = \varepsilon$. Pelo Teorema 4.3, $k_{31} \geq 1$ é o menor inteiro tal que:

$$k_{31} \cdot |\mathbf{w}_{32}| \geq \max\{|\mathbf{t}|, |\mathbf{t}_1|\} + |\mathbf{w}_{32}|,$$

ou seja,

$$2 \cdot k_{31} \geq \max\{0, 0\} + 2 = 2 \Rightarrow k_{31} = 1.$$

Por outro lado, as palavras de s_3 obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{34} = dbfdbf$ herdam memórias de s_2 e de s_4 e, as sequências de memórias herdadas são dadas por

$$(\varepsilon, b, \varepsilon, \varepsilon, b, \varepsilon, \dots) \text{ e } (cfdcfd, cfdcfd, cfdcfd, cfdcfd, \dots),$$

respectivamente, sendo a primeira eventualmente periódica de período fundamental $p_1 = 3$ e transiente $\mathbf{t}_1 = \varepsilon$ e a segunda é infinita com $|\mathbf{t}_2| = 0$, em que $\mathbf{t}_2 = \varepsilon$ é a palavra que antecede o início do operador de Kleene em $\mathbf{w}_{42}$ a partir do início do operador de Kleene em $\mathbf{w}_{34}$ e geram sequência de memórias próprias dada por $(d, \varepsilon, \varepsilon, d, \varepsilon, \varepsilon, \dots)$ que é eventualmente periódica de período fundamental $p = 3$ e transiente $\mathbf{t} = \varepsilon$. Pelo Teorema 4.3, $k_{32} \geq 1$ é o

menor inteiro tal que:

$$k_{32} \cdot |\mathbf{w}_{34}| \geq \max\{|\mathbf{t}|, |\mathbf{t}_1|, |\mathbf{t}_2|\} + \text{mmc}(|\mathbf{w}_{34}|, |\mathbf{w}_{42}|) \Rightarrow 6 \cdot k_{32} \geq 0 + 6 = 6.$$

Portanto, $k_{32} = 1$. Daí,

$$\mathcal{W}_3 = \mathcal{P}(\mathcal{B}_3) \setminus \mathcal{B}_3,$$

em que

$$\mathcal{B}_3 = \{da\}\{\varepsilon, db\}\{cfdcf\}\{\varepsilon, dbfdbf\}\{d\}.$$

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, têm-se:

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}_3| &= |da| + |db| + 2 \cdot |cfdcf| + 2 \cdot |dbfdbf| + 4 \cdot (|d| - 1) + 1 \\ &= 2 + 2 + 10 + 12 + 1 = 27. \end{aligned}$$

Determinação de $\mathcal{W}_4$:

As palavras de s_4 obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{42} = fdb$ herdam memórias de s_2 e de s_3 e, as sequências de memórias herdadas são dadas por

$$(\varepsilon, \varepsilon, b, \varepsilon, \varepsilon, b, \dots) \text{ e } (\varepsilon, d, \varepsilon, \varepsilon, d, \varepsilon, \dots),$$

respectivamente, sendo ambas eventualmente periódicas de períodos fundamentais $p_1 = p_2 = 3$ e transientes $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 = \varepsilon$ e possuem sequência de memórias próprias dada por $(cf, cfd, \varepsilon, \varepsilon, \dots)$ que é eventualmente periódica de período fundamental $p = 1$ e transiente $\mathbf{t} = fd$. Pelo Teorema 4.3, $k_{41} \geq 1$ é o menor inteiro tal que:

$$k_{41} \cdot |\mathbf{w}_{42}| \geq \max\{|\mathbf{t}|, |\mathbf{t}_1|, |\mathbf{t}_2|\} + |\mathbf{w}_{42}|,$$

ou seja,

$$3 \cdot k_{41} \geq \max\{2, 0, 0\} + 3 = 5 \Rightarrow k_{41} = 2.$$

Por outro lado, as palavras de s_4 obtidas por extensões de símbolos de $\mathbf{w}_{44} = bca$ herdam memórias de s_1 , de s_2 e de s_3 e, as sequências de memórias herdadas são dadas por $(\varepsilon, c, ca, cab, cabc, cabca, cab, cabc, cabca, \dots)$, $(b, bc, bca, bcab, bc, bca, bcab, \dots)$ e $(dadb, dadbc, \varepsilon, \varepsilon, \dots)$, respectivamente, sendo as três eventualmente periódicas de períodos fundamentais $p_1 = p_2 = 3$ e $p_3 = 1$ e transientes $\mathbf{t}_1 = bca$, $\mathbf{t}_2 = b$ e $\mathbf{t}_3 = bc$ e possuem sequência de memórias próprias dada por $(\varepsilon, c, \varepsilon, \varepsilon, c, \varepsilon, \dots)$ que é eventualmente periódica de período fundamental $p = 3$ e transiente $\mathbf{t} = \varepsilon$. Pelo Teorema 4.3, $k_{42} \geq 1$ é o menor inteiro tal que:

$$k_{42} \cdot |\mathbf{w}_{44}| \geq \max\{|\mathbf{t}|, |\mathbf{t}_1|, |\mathbf{t}_2|, |\mathbf{t}_3|\} + |\mathbf{w}_{44}|,$$

ou seja,

$$3 \cdot k_{42} \geq \max\{0, 3, 1, 2\} + 3 = 6 \Rightarrow k_{42} = 2.$$

Daí,

$$\mathcal{W}_4 = \mathcal{P}(\mathcal{B}_4) \setminus \mathcal{B}_4,$$

em que

$$\mathcal{B}_4 = \{cfdc\}\{\varepsilon, fdb, fdbfdb\}\{dad\}\{\varepsilon, bca, bcabca\}\{fg\}.$$

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, têm-se:

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}_4| &= |cfdc| + 2 \cdot |fdb| + 3 \cdot |dad| + 6 \cdot |bca| + 9 \cdot (|fg| - 1) + 1 \\ &= 4 + 6 + 9 + 18 + 9 + 1 = 47. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_3 \cup \mathcal{W}_4.$$

Como o prefixo $\varepsilon \in \mathcal{W}_i$, $i = 1, 2, 3$ e 4 e o prefixo $c \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_4$ então,

$$|\mathcal{W}| = |\mathcal{W}_1| + |\mathcal{W}_2| + |\mathcal{W}_3| + |\mathcal{W}_4| - 3 - 1 = 55 + 15 + 27 + 47 - 3 - 1 = 140.$$

4.5 ANINHAMENTO DE OPERADORES DE KLEENE

É importante perceber que o Teorema 4.3 oferece uma boa generalização da representação do conjunto mínimo de palavras proibidas $\mathcal{O}$ de um SSS via expressões regulares, porém, gostar-se-ia de representar o conjunto $\mathcal{O}$ por expressões regulares as mais generalizadas possíveis. Neste sentido, esta seção apresenta uma sucinta discussão sobre as dificuldades encontradas na utilização do chamado aninhamento de operadores de Kleene (Kleene dentro de Kleene).

Definição 4.5. Diz-se que uma expressão regular possui um aninhamento de operadores de Kleene se existirem na mesma a ocorrência de operadores de Kleene dentro de outros operadores de Kleene.

Exemplo 4.18. Considere as expressões regulares

$$s_1 = ca(b(dc)^*)^*ef \text{ e } s_2 = abd((cb)^*)^*cc.$$

Observe que estas expressões regulares possuem aninhamento de operadores de Kleene, pois, os operadores de Kleene em dc e cb estão dentro dos operadores de Kleene em $b(dc)^*$ e $(cb)^*$, respectivamente.

Das propriedades do operador de Kleene (Lawson (2004)), temos que se L é uma linguagem sobre um alfabeto finito então $(L^*)^* = L^*$ e portanto, a expressão regular s_2 do

Exemplo 4.18 é tal que $s_2 = abd(cb)^*cc$. Este tipo de aninhamento é trivial e não dar-se-á atenção ao mesmo.

Exemplo 4.19. *Considere a expressão regular $s = cabca^*b$. Esta expressão atende as exigências da Definição 4.2 e portanto pode representar o conjunto $\mathcal{O}$ de um SSS. No entanto a expressão regular $s' = ca(bca^*)^*b$ com aninhamento de operadores de Kleene não pode representar o conjunto mínimo de palavras proibidas de um SSS, pois, a mesma não é anti-fatorial; observe que a palavra $cabcb$ é proibida e possui como fator a palavra proibida cab .*

Suponha agora que um SSS tivesse o conjunto mínimo de palavras proibidas dado por:

$$\mathcal{O} = \mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3^*)^* \mathbf{w}_4. \quad (4.39)$$

Pela definição do operador de Kleene, a igualdade em (4.39) pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{O} = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2^* \mathbf{w}_4 + \mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3)^* \mathbf{w}_4 + \dots + \mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3^k)^* \mathbf{w}_4 + \dots \quad (4.40)$$

Mostrar-se-á que qualquer expressão regular da união dada em (4.40), digamos

$$\mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3^k)^* \mathbf{w}_4, \quad k \geq 1,$$

contribui para o conjunto de representantes $\mathcal{W}$ com, no mínimo, uma palavra em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ cujo conjunto de restrições é diferente do conjunto de restrições de todas as palavras em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ geradas pelas expressões regulares $\mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3^j)^* \mathbf{w}_4$ com $j < k$, o que implicará na infinitude de $\mathcal{W}$. De fato, considere a palavra $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3^k$. Primeiro observe que $\mathbf{w}$ não é gerada por nenhuma expressão regular $\mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3^j)^* \mathbf{w}_4$ com $j < k$. Por outro lado, o conjunto de restrições de $\mathbf{w}$ é dado pelas restrições da expressão regular juntamente com as restrições do seu sufixo próprio mais longo $\mathbf{v}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$, ou seja,

$$\mathcal{C}(\mathbf{w}) = \left[(\mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3^k)^* \mathbf{w}_4 + \mathbf{w}_3 (\mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3^{k+1})^* \mathbf{w}_4 + \dots \right] + \mathcal{C}(\mathbf{v}). \quad (4.41)$$

Admitindo-se que $\mathbf{v} = \varepsilon$, observa-se de (4.41) que a palavra $\mathbf{w}' = \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3^k \mathbf{w}_4 \in \mathcal{C}(\mathbf{w})$. De (4.40), pode-se concluir que a única palavra em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ de comprimento menor que $|\mathbf{w}|$ que possui a palavra $\mathbf{w}'$ em seu conjunto de restrições é $\mathbf{w}_1$. Também pode-se facilmente observar de (4.40) que a palavra $\mathbf{w}_2 \mathbf{w}_4 \in \mathcal{C}(\mathbf{w}_1)$ e $\mathbf{w}_2 \mathbf{w}_4 \notin \mathcal{C}(\mathbf{w})$. Logo, $\mathcal{C}(\mathbf{w}) \neq \mathcal{C}(\mathbf{u})$, $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ com $|\mathbf{u}| < |\mathbf{w}|$ e têm-se que $\mathcal{W}$ é infinito.

O exemplo a seguir ilustra de forma particular a discussão apresentada anteriormente.

Exemplo 4.20. *Suponha que o conjunto mínimo de palavras proibidas seja dado por $\mathcal{O} = a[b(cd)^*]^*e$. Daí segue que*

$$\mathcal{O} = ab^*e + a[b(cd)]^*e + \dots + a[b(cd)^k]^*e + \dots \quad (4.42)$$

Considere em (4.42) a expressão regular $a[b(cd)^k]^*e$. A palavra $\mathbf{w} = ab(cd)^k$, $k \geq 1$ em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ é gerada por esta expressão regular, porém, não é gerada por nenhuma outra expressão regular $a[b(cd)^i]^*e$ em (4.42) com $i < k$. Observe ainda que o sufixo próprio mais longo de $\mathbf{w}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ é ε e portanto, de (4.42) segue que

$$\mathcal{C}(\mathbf{w}) = [b(cd)^k]^*e + (cd)[b(cd)^{k+1}]^*e + \dots \quad (4.43)$$

Verifica-se de (4.43) que a palavra $\mathbf{w}' = b(cd)^ke \in \mathcal{C}(\mathbf{w})$. Por outro lado, de (4.42), têm-se que a única palavra em $\mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ de comprimento menor que $|\mathbf{w}|$ que possui a palavra $\mathbf{w}'$ em seu conjunto de restrições é a , porém, a palavra $be \in \mathcal{C}(a)$ e $be \notin \mathcal{C}(\mathbf{w})$, ou seja, $\mathcal{C}(a) \neq \mathcal{C}(\mathbf{w})$. Logo, $\mathcal{C}(\mathbf{w}) \neq \mathcal{C}(\mathbf{u})$, $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$ com $|\mathbf{u}| < |\mathbf{w}|$ e têm-se que $\mathcal{W}$ é infinito.

O que se pode concluir da discussão apresentada nesta breve seção é que um SSS não pode ter o seu conjunto mínimo de palavras proibidas $\mathcal{O}$ dado, em geral, por uma expressão regular com aninhamento de operadores de Kleene na forma apresentada em (4.39), pois, um SSS possui um número finito de contextos à direita. Daí, cabe questionar a possibilidade de existirem expressões regulares com outros tipos de aninhamento de operadores de Kleene que possam representar o conjunto mínimo de palavras proibidas $\mathcal{O}$ de um SSS.

5 ALGORITMO PARA CONSTRUÇÃO DE SSS

Este capítulo propõe um algoritmo para a construção do grafo de contextos para a classe dos SSSs. Este algoritmo é baseado em um conjunto suficiente de classes de representantes do conjunto de restrições das palavras na linguagem do sistema utilizando os conceitos de máscara de restrição e memória de restrição apresentados na Definição 2.2 e na Seção 2.5. A maior dificuldade encontrada para implementação do algoritmo reside na determinação das memórias de restrição das extensões das palavras de comprimento máximo por símbolos que geram memórias não pertencentes ao conjunto de representantes, fato este que não ocorre para um SFT.

5.1 CONJUNTO SUFICIENTE DE CLASSES DE REPRESENTANTES

Esta seção apresenta um conjunto suficiente de classes de representantes que facilitará a construção do grafo de contextos, auxiliando nas transições dos estados que possuem palavras de comprimento máximo.

Seja $\mathcal{W}$ um conjunto suficiente de classes de representantes do conjunto de restrições da linguagem L de um SSS X dado pela Definição 2.1. Do conjunto $\mathcal{W}$, que é finito, formar-se-á um novo conjunto $\mathcal{W}'$, também finito, como segue. Se as palavras de comprimento máximo $\mathbf{w}_i \in \mathcal{W}$ são tais que $|\mathbf{w}_i| = l$, adicione a $\mathcal{W}$ todas as palavras $\mathbf{w}_j \in \mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}) \setminus \mathcal{W}$ tais que $|\mathbf{w}_j| \leq l + 1$. Como $\mathcal{W}$ é um conjunto suficiente de classes de representantes, cada elemento adicionado a $\mathcal{W}$ é equivalente a algum elemento de $\mathcal{W}$ e, por esta razão, $\mathcal{W}'$ é também um conjunto suficiente de classes de representantes e será usado no algoritmo para construir o grafo de contextos. É importante notar que no caso de um SFT o conjunto $\mathcal{W}'$ é igual a $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$. A vantagem de se adotar o conjunto $\mathcal{W}'$ é que após todo o processo de refinamento as palavras de comprimento máximo em $\mathcal{W}'$ são, necessariamente, equivalentes a alguma palavra de comprimento menor que pertença à mesma classe e desta forma o processo de transição de estados pode ser feito por qualquer palavra de comprimento menor que esteja na mesma classe.

Exemplo 5.1. *Seja X o SSS sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$ com $\mathcal{O} = ac^*bd$. A sequência de memórias obtida pela extensão de símbolos da palavra $\mathbf{w}_2 = c$ é dada por $(\varepsilon, \varepsilon, \dots)$ e a mesma é eventualmente periódica de período $p = 1$ e transiente $\mathbf{t} = \varepsilon$. Pelo Teorema 4.2 $k \geq 1$ é o menor inteiro tal que*

$$k \times |\mathbf{w}_2| \geq |\mathbf{t}| + mmc(p, |\mathbf{w}_2|) \Rightarrow k \times 1 \geq 0 + 1,$$

ou seja, $k = 1$. Ainda pelo Teorema 4.2, $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1\}\{\varepsilon, \mathbf{w}_2\}\{\mathbf{w}_3\} = \{a\}\{\varepsilon, c\}\{bd\} = \{abd, acbd\}$ e $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B} = \{\varepsilon, a, ab, ac, acb\}$. Observe que acb é a palavra de comprimento máximo em $\mathcal{W}$ e $l = |acb| = 3$. Agora, acrescentando as palavras $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}) \setminus \mathcal{W}$ tais que $|\mathbf{w}| \leq 4$, obtêm-se $\mathcal{W}' = \{\varepsilon, a, ab, ac, acb, acc, accc, accb\}$.

Definição 5.1. *Seja $\mathbf{w} \in \mathcal{W}'$ uma palavra de comprimento máximo. Um símbolo $a \in \mathcal{A}$ é dito ambíguo associado a $\mathbf{w}$ se $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w})$ e $\mathbf{w}a \in \mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$.*

Observação 5.1. *Na Definição 5.1 $\mathbf{w}a$ não pertence a $\mathcal{W}'$, já que seu comprimento é $|\mathbf{w}| + 1$ e $|\mathbf{w}|$ é o comprimento máximo.*

Exemplo 5.2. *Para o SSS do Exemplo 5.1, as palavras $\text{accccbd}, \text{acc cbd} \in \mathcal{O}$ e, portanto, b, c são prefixos próprios de proibições da palavra de comprimento máximo accc , ou seja, $(b, \square), (c, \square) \in \mathcal{M}(\text{accc})$. Observe também que $\text{acccc}, \text{acc cb} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$ e, pela Definição 5.1, os símbolos b e c são ambíguos associados à palavra accc .*

A partição definida a seguir é utilizada no algoritmo apresentado na Seção 5.2.

Definição 5.2. *Seja $\mathbf{w} \in \mathcal{W}'$ uma palavra de comprimento máximo associada a algum símbolo ambíguo $a \in \mathcal{A}$. Especifica-se $\mathbf{w}|\mathcal{W}' = \{P_1, P_1^C\}$ como a partição de $\mathcal{W}'$ com respeito a $\mathbf{w}$, em que $P_1 = \{\mathbf{v} \in \mathcal{W}' \mid \mathcal{C}(\mathbf{v}) = \mathcal{C}(\mathbf{w})\}$ e P_1^C é o complemento relativo de P_1 em $\mathcal{W}'$.*

5.2 ALGORITMO PROPOSTO

Esta seção apresenta o algoritmo proposto para a construção do grafo de contextos para a classe dos SSSs. O algoritmo é por separação de estados e cria sucessivas partições de $\mathcal{W}'$ em conjuntos (ou classes) de palavras com o mesmo conjunto de restrições. Este também utiliza os mesmos conceitos de máscara de restrição e memória de restrição. A diferença deste para o algoritmo proposto em Chaves (2014) (Tabela 2.1) reside no particionamento por equivalência de palavras (palavras equivalentes à palavras de comprimento máximo associadas à símbolos ambíguos). O algoritmo é apresentado na Tabela 5.1 e é dividido em cinco passos.

Passo 1. *Particionamento pela máscara de restrição:* A partição inicial $\mathcal{P}^1 = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ é a partição mais densa de $\mathcal{W}'$ com respeito a $a|\mathcal{W}'$ (ver Definição 2.4) $\forall a \in \mathcal{A}$. É importante perceber que neste passo as palavras, em cada classe $P_i \in \mathcal{P}^1$, possuem máscaras de restrições iguais.

Passo 2. *Particionamento pela memória de restrição para símbolos não ambíguos:* Neste passo recursivo, o particionamento proposto na Definição 2.5 é empregado para refinar a partição anterior $\mathcal{P}^k$, $k \geq 1$, sem fazer uso de símbolos ambíguos. Deve ser notado que as palavras em $P \in \mathcal{P}^k$ são apenas estendidas por símbolos não ambíguos $a \in \mathcal{A}$ se $(a, \square) \in \mathcal{M}(P)$. Este passo gera a partição mais densa de $\mathcal{W}'$ relativa a todo $P \in \mathcal{P}^k$ pela extensão de um símbolo não ambíguo específico $a \in \mathcal{A}$ (Linha 6 na Tabela 5.1) e na Linha 7 as partições resultantes deste processo (para cada $a \in \mathcal{A}$ não ambíguo) refina $\mathcal{P}^k$.

Passo 3. *Particionamento por palavras equivalentes às palavras de comprimento máximo associadas a símbolos ambíguos:* Neste passo, também recursivo, o particionamento

Tabela 5.1 – Algoritmo Proposto para o SSS.

1. $\mathcal{P}^1 \leftarrow \bigwedge_{a \in \mathcal{A}} a \mathcal{W}'$	▷ A partição inicial (Passo 1)
2. $k \leftarrow 0$	
3. repetir	▷ Iniciar o passo 2
4. $k \leftarrow k + 1$	
5. para todo $a \in \mathcal{A}$ símbolo não ambíguo fazer	
6. $\mathcal{P}_a \leftarrow \bigwedge_{P \in \mathcal{P}^k} (P, a) \mathcal{W}'$	
7. $\mathcal{P}^{k+1} \leftarrow \mathcal{P}^k \wedge \bigwedge_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{P}_a$	▷ Nova Partição
8. até $\mathcal{P}^{k+1} = \mathcal{P}^k$	
9. repetir	▷ Iniciar o passo 3
10. Para $\mathbf{w} \in P_i$ associada a símbolo ambíguo fazer	
11. $\mathcal{P}_{\mathbf{w}} \leftarrow \mathbf{w} \mathcal{W}'$	
12. $\mathcal{P}^{k+1} \leftarrow \mathcal{P}^k \wedge \mathcal{P}_{\mathbf{w}}$	▷ Nova Partição
13. Até não existir $\mathbf{w}$ associada a símbolo ambíguo	
14. repetir o passo 2, linhas 3 à 8	▷ Passo 4

Fonte: O Autor (2020).

proposto na Definição 5.2 é empregado para refinar a partição anterior $\mathcal{P}^k$, $k \geq 1$. Este passo gera a partição mais densa de $\mathcal{W}'$ relativa às palavras equivalentes à alguma palavra de comprimento máximo $\mathbf{w}$ associada a algum símbolo ambíguo $a \in \mathcal{A}$ (Linha 11 na Tabela 5.1) e na Linha 12 as partições resultantes deste processo (para cada palavra de comprimento máximo associada a símbolo ambíguo $a \in \mathcal{A}$) refina $\mathcal{P}^k$. Para cada palavra $\mathbf{w} \in \mathcal{W}'$ de comprimento máximo em alguma classe $P_i \in \mathcal{P}^k$ associada a algum símbolo ambíguo $a \in \mathcal{A}$, determina-se, nesta mesma classe, palavras equivalentes à mesma. Como as palavras de comprimento máximo em $\mathcal{W}'$ foram acrescidas ao conjunto suficiente de representantes inicial $\mathcal{W}$, então elas devem ser equivalentes a palavras de comprimento menor em $\mathcal{W}$ e, caso alguma delas fique acompanhada de uma única palavra em alguma classe de $\mathcal{P}^k$, então elas são automaticamente equivalentes.

Passo 4. Repetição do Passo 2: Retorno ao refinamento por símbolos não ambíguos. O Passo 2, linhas 5 à 8 na Tabela 5.1, é executado até que a condição na linha 8 seja observada, o que implicará que o conjunto de classes de representantes $\mathcal{W}$ estará particionado em classes de palavras com mesmo contexto à direita.

Passo 5. Critério de Parada: O algoritmo termina quando refinamentos não são mais possíveis.

Os resultados apresentados a seguir provam a consistência do algoritmo.

Lema 5.1. *Em cada partição $\mathcal{P}^k$ de $\mathcal{W}'$, palavras em classes distintas possuem contextos à direita distintos.*

Demonstração. A afirmação é válida para $\mathcal{P}^1$, já que $\mathcal{M}(\mathbf{u}) \neq \mathcal{M}(\mathbf{v})$ implica que $F(\mathbf{u}) \neq F(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{P}(\mathcal{OA}^{-1})$. Seguindo um argumento indutivo, assuma que essa característica se mantém para $\mathcal{P}^k$, $k \geq 2$. Além disso, considere que $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{W}'$ são palavras

pertencentes à mesma classe em $\mathcal{P}^k$, mas em classes distintas em $\mathcal{P}^{k+1}$. Nesse caso, há duas possibilidades. A primeira (referente às linhas 5 à 8 da Tabela 5.1) ocorre se $\mathcal{R}(\mathbf{v}a)$ e $\mathcal{R}(\mathbf{w}a)$ estão em classes distintas em $\mathcal{P}^k$, o que, pela hipótese indutiva, implica que $F(\mathcal{R}(\mathbf{v}a)) \neq F(\mathcal{R}(\mathbf{w}a))$ e, portanto, que $F(\mathbf{v}) \neq F(\mathbf{w})$. A segunda possibilidade (referente às linhas 10 à 13 da Tabela 5.1), supondo sem perda de generalidade que $\mathbf{w}$ possui símbolo ambíguo, implica que $\mathcal{C}(\mathbf{v}) \neq \mathcal{C}(\mathbf{w})$ e, conseqüentemente, que $F(\mathbf{v}) \neq F(\mathbf{w})$, (Chaves, 2014, Teorema 1). $\square$

Teorema 5.1. *Ao final do algoritmo, o conjunto $\mathcal{W}'$ estará particionado em classes de palavras com mesmo contexto à direita.*

Demonstração. Seguindo um argumento por contradição, suponha que há uma palavra $\mathbf{u} = a_1 \cdots a_n \in L$ de comprimento mínimo em

$$\mathcal{C}(\mathbf{w}) \triangle \mathcal{C}(\mathbf{v}) = (\mathcal{C}(\mathbf{w}) - \mathcal{C}(\mathbf{v})) \cup (\mathcal{C}(\mathbf{v}) - \mathcal{C}(\mathbf{w})),$$

o conjunto que representa a diferença simétrica entre $\mathcal{C}(\mathbf{w})$ e $\mathcal{C}(\mathbf{v})$. Sem perda de generalidade, será admitido que $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathbf{v})$. Considere a extensão de $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ pelos prefixos de $\mathbf{u}$ e a associação do conjunto de restrições das palavras resultantes com o conjunto de restrições das palavras em $\mathcal{W}'$, conjunto esse particionado através do algoritmo.

Posto esse cenário, dois casos devem ser considerados. Primeiramente, $\mathcal{R}(\mathbf{w}a_1 \cdots a_j)$ e $\mathcal{R}(\mathbf{v}a_1 \cdots a_j)$, $1 \leq j \leq n$, sendo quaisquer extensões de $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ por um prefixo de $\mathbf{u}$, pertencem ao conjunto $\mathcal{W}$. Neste caso a prova segue como em (Chaves, 2014, Teorema 5). O segundo caso é a memória de pelo menos uma dessas extensões ser uma palavra de comprimento máximo em $\mathcal{W}'$. Suponha que esta seja $\mathcal{R}(\mathbf{v}a_1 \cdots a_l)$, $l \leq n$, então, em decorrência do Passo 3, no término do algoritmo, esta e a memória $\mathcal{R}(\mathbf{w}a_1 \cdots a_l)$ estarão em classes distintas, já que, $\mathcal{C}(\mathcal{R}(\mathbf{v}a_1 \cdots a_l)) \neq \mathcal{C}(\mathcal{R}(\mathbf{w}a_1 \cdots a_l))$ em decorrência da suposição inicial. Contudo, como $\mathcal{P}^k$ e $\mathcal{P}^{k+1}$ são iguais, então $\mathcal{R}(\mathbf{w}a_1)$ e $\mathcal{R}(\mathbf{v}a_1)$ estão na mesma classe em $\mathcal{P}^k$. Portanto, $\mathcal{R}(\mathbf{v}a_1 a_2)$ e $\mathcal{R}(\mathbf{w}a_1 a_2)$ estão na mesma classe em $\mathcal{P}^{k-1}$ e, recursivamente, $\mathcal{R}(\mathbf{v}a_1 \cdots a_l)$ e $\mathcal{R}(\mathbf{w}a_1 \cdots a_l)$ deverão estar na mesma classe em $\mathcal{P}^{k-l}$. Isso leva a uma contradição, pois após o Passo 3 do algoritmo estas estarão em classes distintas. $\square$

5.3 CONSTRUÇÃO DO GRAFO DE CONTEXTOS PARA A CLASSE DOS SSSs

Esta seção apresenta a construção do grafo de contextos de um SSS utilizando o algoritmo proposto na Tabela 5.1, detalhando cada passo do mesmo. Como os conceitos de conjunto de contextos e conjunto de restrições são duais, a construção do grafo de contextos pode ser realizada com o conjunto de vértices $\mathcal{V}$ obtido a partir do conjunto

$$\{\mathcal{C}(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in \mathcal{W}'\},$$

sendo daí os elementos da partição atingida no Passo 5 do algoritmo proposto na Tabela 5.1. Para determinar as transições dos vértices estende-se (Chaves, 2014, Proposição 3), daí existe um ramo com rótulo a do vértice P'_i para P'_j se $\mathbf{w} \in P'_i$, $\mathcal{R}(\mathbf{w}a) \in P'_j$ e $(a, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(\mathbf{w})$ e $\mathbf{w} \in \mathcal{W}'$ diferente de uma palavra de comprimento máximo associada a um símbolo ambíguo.

Observação 5.2. *A exclusão das palavras de comprimento máximo no processo de determinação das transições se dá pela equivalência destas com palavras de comprimento menor identificadas pelo Passo 3 do algoritmo proposto na Tabela 5.1.*

Exemplo 5.3. *Considere a construção do grafo de contextos para o SSS do Exemplo 5.1, em que $\mathcal{O} = ac^*bd$ e*

$$\mathcal{W}' = \{\varepsilon, a, ab, ac, acb, acc, accc, accb\}.$$

Para o primeiro passo do algoritmo as máscaras de restrição dos elementos de $\mathcal{W}'$ são calculadas. Se $\mathbf{w} = \varepsilon$, então $\mathcal{M}(\varepsilon) = \emptyset$. Se $\mathbf{w} = a$, então

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = a^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid a\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = \{c^*bd\}.$$

*Observe que tanto b como c são prefixos próprios de c^*bd , então $(b, \square), (c, \square) \in \mathcal{M}(a)$. Como o maior sufixo próprio de a em $\mathcal{W}$ é ε e $\mathcal{M}(\varepsilon) = \emptyset$, então*

$$\mathcal{M}(a) = \{(b, \square), (c, \square)\}.$$

Para $\mathbf{w} = ab$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (ab)^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid ab\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = \{d\}.$$

Observe que $abd \notin L$, ou seja, $(d, \blacksquare) \in \mathcal{M}(ab)$. O maior sufixo próprio de ab em $\mathcal{W}$ é ε e $\mathcal{M}(\varepsilon) = \emptyset$. Portanto,

$$\mathcal{M}(ab) = \{(d, \blacksquare)\}.$$

Para $\mathbf{w} = ac$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (ac)^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid ac\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = \{c^*bd\}.$$

Logo,

$$\mathcal{M}(ac) = \mathcal{M}(a) = \{(b, \square), (c, \square)\}.$$

Para $\mathbf{w} = acb$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (acb)^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid acb\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = \{d\}$$

e

$$\mathcal{M}(acb) = \mathcal{M}(ab) = \{(d, \blacksquare)\}.$$

Para $\mathbf{w} = acc$,

$$(acc)^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid acc\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = \{c^*bd\}.$$

Tabela 5.2 – Máscaras de Restrição das palavras de $\mathcal{W}'$ para o SSS com $\mathcal{O} = ac^*bd$.

$\mathbf{w} \in \mathcal{W}'$	$\mathcal{M}(\mathbf{w})$
ε	$\emptyset$
a	$\{(b, \square), (c, \square)\}$
ab	$\{(d, \blacksquare)\}$
ac	$\{(b, \square), (c, \square)\}$
acb	$\{(d, \blacksquare)\}$
acc	$\{(b, \square), (c, \square)\}$
$accc$	$\{(b, \square), (c, \square)\}$
$accb$	$\{(d, \blacksquare)\}$

Fonte: O Autor (2020).

Daí,

$$\mathcal{M}(acc) = \mathcal{M}(a) = \{(b, \square), (c, \square)\}.$$

De forma similar,

$$\mathcal{M}(accc) = \{(b, \square), (c, \square)\}.$$

Por fim, se $\mathbf{w} = accb$,

$$(accb)^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid accb\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = \{d\}$$

e

$$\mathcal{M}(accb) = \mathcal{M}(ab) = \{(d, \blacksquare)\}.$$

As respectivas máscaras de restrição estão listadas na Tabela 5.2.

Daí, a partição inicial é dada por

$$\mathcal{P}^1 = \{P_1 = \{\varepsilon\}, P_2 = \{a, ac, acc, accc\}, P_3 = \{ab, acb, accb\}\}.$$

Para o segundo passo do algoritmo, não existem símbolos não ambíguos com marca $\square$ nas máscaras de restrição dos elementos de $\mathcal{W}'$ então, refinamentos não são possíveis.

Para o terceiro passo, a palavra de comprimento máximo $accc \in P_2$ é a única palavra associada aos símbolos ambíguos b, c . Da expressão regular que representa $\mathcal{O}$, têm-se que

$$\mathcal{C}(accc) = \mathcal{C}(a) = \mathcal{C}(ac) = \mathcal{C}(acc) = c^*bd.$$

Portanto,

$$\mathcal{P}_{accc} = \{\{a, ac, acc, accc\}, \{\varepsilon, ab, acb, accb\}\}$$

e $\mathcal{P}^1 \wedge \mathcal{P}_{accc} = \mathcal{P}^1$. Refinamentos também não são possíveis.

No passo anterior foi identificado que todas as palavras em P_2 são equivalentes então,

para o quarto passo, como $\mathcal{M}(P_3)$ não possui símbolos com marca $\square$, então suas palavras não podem ser estendidas e as palavras em P_3 não podem ser separadas. Logo, refinamentos não são mais possíveis e o critério de parada no quinto passo é estabelecido, sendo $\mathcal{P}^1$ a partição mais fina. Portanto, o grafo de contextos possui três vértices. Utilizando (Chaves, 2014, Proposição 3) e a Observação 5.2 é possível reproduzir o grafo mostrado na Fig. 5.1.

Outro exemplo é o SS par ternário que será visto a seguir.

Exemplo 5.4 (Sistema dinâmico simbólico par ternário). *Seja X o SSS sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ com $\mathcal{O} = 01(11)^*0 + 02(22)^*0$. Observe que as expressões regulares não são fatoráveis uma na outra. As sequências de memórias próprias obtidas por extensões de símbolos das palavras $\mathbf{w}_2 = 11$ e $\mathbf{w}'_2 = 22$ são ambas iguais à $(\varepsilon, \varepsilon, \dots)$ que é eventualmente periódica de período 1 e transiente ε . Pelo Teorema 4.2, $k, k' \geq 1$ são os menores inteiros tais que:*

$$\begin{cases} k \times |11| \geq 0 + mmc(1, 2) \\ k' \times |22| \geq 0 + mmc(1, 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k \geq 2 \\ 2k' \geq 2 \end{cases},$$

ou seja, $k = k' = 1$. Novamente pelo Teorema 4.2, $\mathcal{B} = \{01\}\{\varepsilon, 11\}\{0\}$, $\mathcal{B}' = \{02\}\{\varepsilon, 22\}\{0\}$, $\mathcal{W}_1 = \{0, 01, 011, 0111\}$ e $\mathcal{W}_2 = \{0, 02, 022, 0222\}$. Agora, pelo Teorema 4.3,

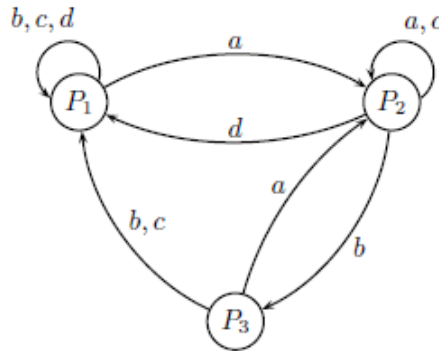
$$\mathcal{W} = \{\varepsilon, 0, 01, 02, 011, 022, 0111, 0222\}.$$

Observe que 0111 e 0222 são palavras de comprimento máximo em $\mathcal{W}$ e $l = |0111| = |0222| = 4$. Agora, acrescentando as palavras $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}) \setminus \mathcal{W}$ tais que $|\mathbf{w}| \leq 5$, obtêm-se

$$\mathcal{W}' = \{\varepsilon, 0, 01, 02, 011, 022, 0111, 0222, 01111, 02222\}.$$

Inicialmente calcula-se as máscaras de restrição para os elementos de $\mathcal{W}'$. Observe que os sufixos próprios mais longos das palavras de $\mathcal{W}'$ em $\mathcal{W}'$ são iguais a ε e $\mathcal{M}(\varepsilon) = \emptyset$.

Figura 5.1 – Grafo de Contextos do SSS com $\mathcal{O} = ac^*bd$ obtido da partição $\mathcal{P}^1$.



Fonte: O Autor (2020).

Para $\mathbf{w} = \varepsilon$, $\mathcal{M}(\varepsilon) = \emptyset$. Para $\mathbf{w} = 0$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = 0^{-1}\mathcal{O} = 1(11)^*0 + 2(22)^*0.$$

Observe que 1 e 2 são prefixos próprios em $0^{-1}\mathcal{O}$ e, portanto, $(1, \square), (2, \square) \in \mathcal{M}(0)$. Então,

$$\mathcal{M}(0) = \{(1, \square), (2, \square)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 01$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (01)^{-1}\mathcal{O} = (11)^*0.$$

Observe que 1 é prefixo próprio em $(01)^{-1}\mathcal{O}$ e, portanto, $(1, \square) \in \mathcal{M}(01)$. Como $010 \notin L$, $(0, \blacksquare) \in \mathcal{M}(01)$. Daí,

$$\mathcal{M}(01) = \{(1, \square), (0, \blacksquare)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 02$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (02)^{-1}\mathcal{O} = (22)^*0.$$

Observe que 2 é prefixo próprio em $(02)^{-1}\mathcal{O}$ e, portanto, $(2, \square) \in \mathcal{M}(02)$. Como $020 \notin L$, $(0, \blacksquare) \in \mathcal{M}(02)$. Então,

$$\mathcal{M}(02) = \{(2, \square), (0, \blacksquare)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 011$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (011)^{-1}\mathcal{O} = 1(11)^*0.$$

Observe que 1 é prefixo próprio em $(011)^{-1}\mathcal{O}$ e, portanto, $(1, \square) \in \mathcal{M}(011)$. Então,

$$\mathcal{M}(011) = \{(1, \square)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 022$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (022)^{-1}\mathcal{O} = 2(22)^*0.$$

Observe que 2 é prefixo próprio em $(022)^{-1}\mathcal{O}$ e, portanto, $(2, \square) \in \mathcal{M}(022)$ e

$$\mathcal{M}(022) = \{(2, \square)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 0111$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (0111)^{-1}\mathcal{O} = (11)^*0.$$

Então,

$$\mathcal{M}(0111) = \mathcal{M}(01) = \{(1, \square), (0, \blacksquare)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 0222$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (0222)^{-1}\mathcal{O} = (22)^*0.$$

Tabela 5.3 – *Máscara de Restrição para $\mathcal{W}'$ do SS par ternário.*

$\mathbf{w} \in \mathcal{W}'$	$\mathcal{M}(\mathbf{w})$
ε	$\emptyset$
0	$\{(1, \square), (2, \square)\}$
01	$\{(1, \square), (0, \blacksquare)\}$
02	$\{(2, \square), (0, \blacksquare)\}$
011	$\{(1, \square)\}$
022	$\{(2, \square)\}$
0111	$\{(1, \square), (0, \blacksquare)\}$
0222	$\{(2, \square), (0, \blacksquare)\}$
01111	$\{(1, \square)\}$
02222	$\{(2, \square)\}$

Fonte: O Autor (2020).

Então,

$$\mathcal{M}(0222) = \mathcal{M}(02) = \{(2, \square), (0, \blacksquare)\}.$$

De forma similar,

$$\mathcal{M}(01111) = \mathcal{M}(011) = \{(1, \square)\}$$

e

$$\mathcal{M}(02222) = \mathcal{M}(022) = \{(2, \square)\}.$$

As respectivas máscaras de restrição estão listadas na Tabela 5.3.

A partição inicial é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^1 = \{ & P_1 = \{\varepsilon\}, P_2 = \{0\}, P_3 = \{01, 0111\}, P_4 = \{02, 0222\}, \\ & P_5 = \{011, 01111\}, P_6 = \{022, 02222\} \}. \end{aligned}$$

Para o segundo passo, não existem símbolos não ambíguos com marca $\square$ nas máscaras de restrição dos elementos de $\mathcal{W}'$ então, refinamentos não são mais possíveis.

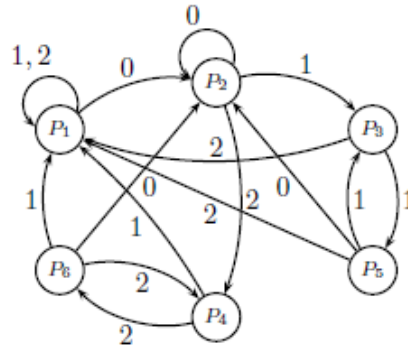
Para o terceiro passo, $01111 \in P_5$ e $02222 \in P_6$ são as únicas palavras de comprimento máximo em $\mathcal{W}'$ associadas a símbolos ambíguos e estão acompanhadas apenas de uma palavra nos elementos de $\mathcal{P}^1$ então, elas são equivalentes às mesmas, ou seja,

$$\mathcal{C}(01111) = \mathcal{C}(011) \quad e \quad \mathcal{C}(02222) = \mathcal{C}(022).$$

Refinamentos não são mais possíveis.

Para o quarto passo, os símbolos 1 e 2 são ambíguos e associados às palavras de comprimento máximo 01111 e 02222, respectivamente. As palavras em P_3 só podem ser estendidas por 1 e $\mathcal{R}(011) = 011$, $\mathcal{R}(01111) = 01111 \in P_5$, enquanto que as palavras em P_4 só podem ser estendidas por 2 e ambas, $\mathcal{R}(022) = 022$, $\mathcal{R}(02222) = 02222 \in P_6$. Portanto,

Figura 5.2 – Grafo de Contextos para o SSS par ternário do Exemplo 5.4 obtido da partição $\mathcal{P}^1$.



Fonte: O Autor (2020).

refinamentos não são mais possíveis, o critério de parada é estabelecido e $\mathcal{P}^1$ é a partição mais fina. Portanto, o grafo de contextos possui seis vértices e é dado na Fig. 5.2.

5.3.1 Grafo de Contextos para a Classe dos S -gap

Esta subseção apresenta os S -gap, bem como a construção, no caso em que os mesmos são SSSs, dos respectivos grafos de contextos a partir do conjunto mínimo de palavras proibidas $\mathcal{O}$ dado como uma união de expressões regulares.

Para definir um S -gap $X(S)$, fixe

$$S = \{s_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 0 \leq s_i < s_{i+1}, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Se S é finito, defina $X(S)$ como o conjunto de todas as sequências binárias para os quais 1's ocorrem infinitamente em cada direção e tal que o número de 0's entre ocorrências sucessivas de um 1 está em S . Quando S é infinito, precisa-se permitir pontos que iniciam ou terminam com uma sequência infinita de 0's. Para extrair algumas propriedades dinâmicas de $X(S)$ necessita-se de uma sequência $\Delta(S)$ obtida da diferença de dois sucessivos s_n em S , ou seja $d_0 = s_0$ e $\Delta(S) = \{d_n\}$, em que $d_n = s_n - s_{n-1}$. Uma dessas propriedades afirma que um S -gap é SSR se, e somente se, $\Delta(S)$ é eventualmente periódica (Dastjerdi, 2012, Teorema 3.4). Vale a pena lembrar que uma sequência $\{a_n\}$ é eventualmente periódica, de período l , se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq k$ têm-se $a_{n+l} = a_n$.

Exemplo 5.5. Seja $X(S)$ o S -gap, em que $S \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ é dado por

$$S = \{0, 2, 5, 6, 8, 11, 12, 14, 17, 18, 20, 23, \dots\} = \{0, 2, 5\} \cup \{6k, 6k+2, 6k+5 : k \in \mathbb{N}\}.$$

Observe que neste caso,

$$\Delta(S) = (0, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots) = (0, \overline{2, 3, 1}).$$

Têm-se que $\Delta(S)$ é claramente eventualmente periódica de período 3 e, portanto, por (Dastjerdi, 2012, Teorema 3.4), $X(S)$ é SSR. Observe ainda que o conjunto mínimo de palavras proibidas é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \{10^{6k+1}1, 10^{6k+3}1, 10^{6k+4}1 : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \\ &= 10(0^6)^*1 + 1000(0^6)^*1 + 10000(0^6)^*1,\end{aligned}$$

que é um conjunto infinito e, portanto, um SSS.

A construção do grafo de contextos é discutida como segue. Sendo cada expressão regular fatorável pelas outras duas com memórias infinitas segue do Teorema 4.3 que $\mathcal{B}_1 = \{10\}\{\varepsilon, 0^6, 0^{12}\}\{1\} = \{101, 10^71, 10^{13}1\}$, $\mathcal{B}_2 = \{10^3\}\{\varepsilon, 0^6, 0^{12}\}\{1\} = \{10^31, 10^91, 10^{15}1\}$, $\mathcal{B}_3 = \{10^4\}\{\varepsilon, 0^6\}\{1\} = \{10^41, 10^{10}1\}$ e $\mathcal{W}_1 = \{\varepsilon, 1, 10, \dots, 10^{13}\}$, $\mathcal{W}_2 = \{\varepsilon, 1, 10, \dots, 10^{15}\}$, $\mathcal{W}_3 = \{\varepsilon, 1, 10, \dots, 10^{10}\}$. Segue novamente do Teorema 4.3 que

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_2 = \{\varepsilon, 1, 10, \dots, 10^{15}\}.$$

Observe que 10^{15} é a palavra de comprimento máximo em $\mathcal{W}$ e $l = |10^{15}| = 16$. Agora, acrescentando as palavras $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}A^{-1}) \setminus \mathcal{W}$ tais que $|\mathbf{w}| \leq 17$, obtêm-se

$$\mathcal{W}' = \{\varepsilon, 1, 10, \dots, 10^{16}\}.$$

A primeira etapa do algoritmo consiste em calcular as máscaras de restrição para os elementos de $\mathcal{W}'$. Observe inicialmente que o sufixo próprio mais longo de todas as palavras de $\mathcal{W}'$ em $\mathcal{P}(\mathcal{O}A^{-1})$ é ε . Para $\mathbf{w} = \varepsilon$, $\mathcal{M}(\varepsilon) = \emptyset$. Para $\mathbf{w} = 1$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = 1^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid 1\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = 0(0^6)^*1 + 0^3(0^6)^*1 + 0^4(0^6)^*1.$$

Como 0 é prefixo próprio de palavras em $1^{-1}\mathcal{O}$ então,

$$\mathcal{M}(1) = \{(0, \square)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (10)^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid 10\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = (0^6)^*1 + 0^2(0^6)^*1 + 0^3(0^6)^*1.$$

Como 0 é prefixo próprio de palavras em $(10)^{-1}\mathcal{O}$, então $(0, \square) \in \mathcal{M}(10)$. Como $101 \notin L$, então $(1, \blacksquare) \in \mathcal{M}(10)$. Daí,

$$\mathcal{M}(10) = \{(0, \square), (1, \blacksquare)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10^2$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (10^2)^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid 10^2\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = 0^5(0^6)^*1 + 0(0^6)^*1 + 0^2(0^6)^*1.$$

Como 0 é prefixo próprio de palavras em $(10^2)^{-1}\mathcal{O}$ então,

$$\mathcal{M}(10^2) = \{(0, \square)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10^3$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (10^3)^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid 10^3\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = 0^4(0^6)^*1 + (0^6)^*1 + 0(0^6)^*1.$$

Como 0 é prefixo próprio de palavras em $(10^3)^{-1}\mathcal{O}$, então $(0, \square) \in \mathcal{M}(10^3)$. Como $10^31 \notin L$, então $(1, \blacksquare) \in \mathcal{M}(10^3)$. Daí,

$$\mathcal{M}(10^3) = \{(0, \square), (1, \blacksquare)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10^4$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (10^4)^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid 10^4\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = 0^3(0^6)^*1 + 0^5(0^6)^*1 + (0^6)^*1.$$

Como 0 é prefixo próprio de palavras em $(10^4)^{-1}\mathcal{O}$, então $(0, \square) \in \mathcal{M}(10^4)$. Como $10^41 \notin L$, então $(1, \blacksquare) \in \mathcal{M}(10^4)$. Daí,

$$\mathcal{M}(10^4) = \{(0, \square), (1, \blacksquare)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10^5$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (10^5)^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid 10^5\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = 0^2(0^6)^*1 + 0^4(0^6)^*1 + 0^5(0^6)^*1.$$

Como 0 é prefixo próprio de palavras em $(10^5)^{-1}\mathcal{O}$ então,

$$\mathcal{M}(10^5) = \{(0, \square)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10^6$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (10^6)^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid 10^6\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = 0(0^6)^*1 + 0^3(0^6)^*1 + 0^4(0^6)^*1.$$

Como 0 é prefixo próprio de palavras em $(10^6)^{-1}\mathcal{O}$ então,

$$\mathcal{M}(10^6) = \{(0, \square)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10^7$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (10^7)^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid 10^7\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = (0^6)^*1 + 0^2(0^6)^*1 + 0^3(0^6)^*1.$$

Como 0 é prefixo próprio de palavras em $(10^7)^{-1}\mathcal{O}$, então $(0, \square) \in \mathcal{M}(10^7)$. Como $10^71 \notin L$, então $(1, \blacksquare) \in \mathcal{M}(10^7)$. Daí,

$$\mathcal{M}(10^7) = \{(0, \square), (1, \blacksquare)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10^8$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (10^8)^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid 10^8\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = 0^5(0^6)^*1 + 0(0^6)^*1 + 0^2(0^6)^*1.$$

Como 0 é prefixo próprio de palavras em $(10^8)^{-1}\mathcal{O}$ então,

$$\mathcal{M}(10^8) = \{(0, \square)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10^9$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (10^9)^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid 10^9\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = 0^4(0^6)^*1 + (0^6)^*1 + 0(0^6)^*1.$$

Como 0 é prefixo próprio de palavras em $(10^9)^{-1}\mathcal{O}$, então $(0, \square) \in \mathcal{M}(10^9)$. Como $10^91 \notin L$, então $(1, \blacksquare) \in \mathcal{M}(10^9)$. Daí,

$$\mathcal{M}(10^9) = \{(0, \square), (1, \blacksquare)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10^{10}$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (10^{10})^{-1}\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid 10^{10}\mathbf{w}_1 \in \mathcal{O}\} = 0^3(0^6)^*1 + 0^5(0^6)^*1 + (0^6)^*1.$$

Como 0 é prefixo próprio de palavras em $(10^{10})^{-1}\mathcal{O}$, então $(0, \square) \in \mathcal{M}(10^{10})$. Como $10^{10}1 \notin L$, então $(1, \blacksquare) \in \mathcal{M}(10^{10})$. Daí,

$$\mathcal{M}(10^{10}) = \{(0, \square), (1, \blacksquare)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10^{11}$,

$$(10^{11})^{-1}\mathcal{O} = 0^2(0^6)^*1 + 0^4(0^6)^*1 + 0^5(0^6)^*1 = (10^5)^{-1}\mathcal{O}.$$

Portanto,

$$\mathcal{M}(10^{11}) = \mathcal{M}(10^5) = \{(0, \square)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10^{12}$,

$$(10^{12})^{-1} \mathcal{O} = 0 (0^6)^* 1 + 0^3 (0^6)^* 1 + 0^4 (0^6)^* 1 = (10^6)^{-1} \mathcal{O}.$$

Portanto,

$$\mathcal{M}(10^{12}) = \mathcal{M}(10^6) = \{(0, \square)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10^{13}$,

$$(10^{13})^{-1} \mathcal{O} = (0^6)^* 1 + 0^2 (0^6)^* 1 + 0^3 (0^6)^* 1 = (10^7)^{-1} \mathcal{O}.$$

Portanto,

$$\mathcal{M}(10^{13}) = \mathcal{M}(10^7) = \{(0, \square), (1, \blacksquare)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10^{14}$,

$$(10^{14})^{-1} \mathcal{O} = 0^5 (0^6)^* 1 + 0 (0^6)^* 1 + 0^2 (0^6)^* 1 = (10^8)^{-1} \mathcal{O}.$$

Portanto,

$$\mathcal{M}(10^{14}) = \mathcal{M}(10^8) = \{(0, \square)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10^{15}$,

$$(10^{15})^{-1} \mathcal{O} = 0^4 (0^6)^* 1 + (0^6)^* 1 + 0 (0^6)^* 1 = (10^9)^{-1} \mathcal{O}.$$

Portanto,

$$\mathcal{M}(10^{15}) = \mathcal{M}(10^9) = \{(0, \square), (1, \blacksquare)\}.$$

Finalmente, para $\mathbf{w} = 10^{16}$,

$$(10^{16})^{-1} \mathcal{O} = 0^3 (0^6)^* 1 + 0^5 (0^6)^* 1 + (0^6)^* 1 = (10^{10})^{-1} \mathcal{O}.$$

Portanto,

$$\mathcal{M}(10^{16}) = \mathcal{M}(10^{10}) = \{(0, \square), (1, \blacksquare)\}.$$

As respectivas máscaras de restrição estão listadas na Tabela 5.4.

A partição inicial é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^1 &= \{P_1 = \{\varepsilon\}, P_2 = \{1, 10^2, 10^5, 10^6, 10^8, 10^{11}, 10^{12}, 10^{14}\}, \\ &\quad P_3 = \{10, 10^3, 10^4, 10^7, 10^9, 10^{10}, 10^{13}, 10^{15}, 10^{16}\}\}. \end{aligned}$$

Para o segundo passo do algoritmo, como não existem símbolos não ambíguos com marca $\square$ nas máscaras de restrição dos elementos de $\mathcal{W}'$ então, refinamentos não são mais possíveis.

Tabela 5.4 – *Máscara de Restrição de $\mathcal{W}'$ para o S -gap.*

$\mathbf{w} \in \mathcal{W}'$	$\mathcal{M}(\mathbf{w})$
ε	$\emptyset$
1	$\{(0, \square)\}$
10	$\{(0, \square), (1, \blacksquare)\}$
10^2	$\{(0, \square)\}$
10^3	$\{(0, \square), (1, \blacksquare)\}$
10^4	$\{(0, \square), (1, \blacksquare)\}$
10^5	$\{(0, \square)\}$
10^6	$\{(0, \square)\}$
10^7	$\{(0, \square), (1, \blacksquare)\}$
10^8	$\{(0, \square)\}$
10^9	$\{(0, \square), (1, \blacksquare)\}$
10^{10}	$\{(0, \square), (1, \blacksquare)\}$
10^{11}	$\{(0, \square)\}$
10^{12}	$\{(0, \square)\}$
10^{13}	$\{(0, \square), (1, \blacksquare)\}$
10^{14}	$\{(0, \square)\}$
10^{15}	$\{(0, \square), (1, \blacksquare)\}$
10^{16}	$\{(0, \square), (1, \blacksquare)\}$

Fonte: O Autor (2020).

Para o terceiro passo, 10^{16} é a única palavra de comprimento máximo associado ao símbolo ambíguo 0. Da expressão regular que representa $\mathcal{O}$, obtêm-se que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}(10^{16}) &= 0^3 (0^6)^* 1 + 0^5 (0^6)^* 1 + (0^6)^* 1 \\
 &= \mathcal{C}(10^4) = \mathcal{C}(10^{10}),
 \end{aligned}$$

ou seja, 10^4 , 10^{10} e 10^{16} são palavras equivalentes. Então,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{10^{16}} &= \{\{10^4, 10^{10}, 10^{16}\}, \{\varepsilon, 1, 10, 10^2, 10^3, 10^5, 10^6, 10^7, \\
 &\quad 10^8, 10^9, 10^{11}, 10^{12}, 10^{13}, 10^{14}, 10^{15}\}\}
 \end{aligned}$$

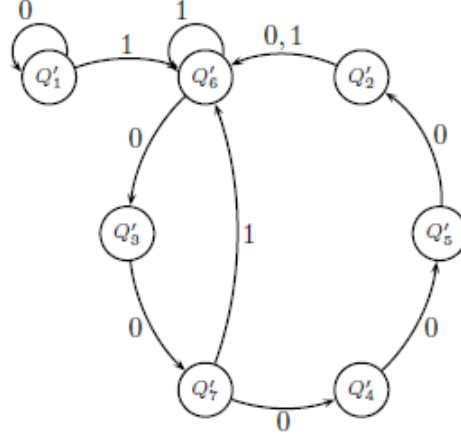
e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}^2 &= \mathcal{P}^1 \wedge \mathcal{P}_{10^{16}} \\
 &= \{P'_1 = \{\varepsilon\}, P'_2 = \{10^4, 10^{10}, 10^{16}\}, P'_3 = \{1, 10^2, 10^5, \\
 &\quad 10^6, 10^8, 10^{11}, 10^{12}, 10^{14}\}, P'_4 = \{10, 10^3, 10^7, 10^9, 10^{13}, 10^{15}\}\}
 \end{aligned}$$

Para o quarto passo, o único símbolo ambíguo é 0. As palavras em P'_4 são tais que

$$\mathcal{R}(10^2) = 10^2, \mathcal{R}(10^8) = 10^8, \mathcal{R}(10^{14}) = 10^{14} \in P'_3,$$

Figura 5.3 – Grafo de contextos do S -Gap do Exemplo 5.5 obtido da partição $\mathcal{Q}^4$.



Fonte: O Autor (2020).

enquanto que

$$\mathcal{R}(10^4) = 10^4, \mathcal{R}(10^{10}) = 10^{10}, \mathcal{R}(10^{16}) = 10^{16} \in P'_2.$$

Portanto, o conjunto P'_4 deve ser particionado e obtêm-se o refinamento de $\mathcal{P}^2$ dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^3 = \{ & Q_1 = \{\varepsilon\}, Q_2 = \{10^4, 10^{10}, 10^{16}\}, Q_3 = \{1, 10^2, 10^5, 10^6, \\ & 10^8, 10^{11}, 10^{12}, 10^{14}\}, Q_4 = \{10, 10^7, 10^{13}\}, Q_5 = \{10^3, 10^9, 10^{15}\} \}. \end{aligned}$$

Por fim observe que as palavras em Q_3 só podem ser estendidas por 0 e $\mathcal{R}(10) = 10$, $\mathcal{R}(10^7) = 10^7$, $\mathcal{R}(10^{13}) = 10^{13} \in Q_4$, $\mathcal{R}(10^3) = 10^3$, $\mathcal{R}(10^9) = 10^9$, $\mathcal{R}(10^{15}) = 10^{15} \in Q_5$ e $\mathcal{R}(10^6) = 10^6$, $\mathcal{R}(10^{12}) = 10^{12} \in Q_3$. Então, o conjunto Q_3 deve ser particionado e obtêm-se o refinamento de $\mathcal{Q}^3$ dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^4 = \{ & Q'_1 = \{\varepsilon\}, Q'_2 = \{10^5, 10^{11}\}, Q'_3 = \{10, 10^7, 10^{13}\}, Q'_4 = \{10^3, 10^9, 10^{15}\}, \\ & Q'_5 = \{10^4, 10^{10}, 10^{16}\}, Q'_6 = \{1, 10^6, 10^{12}\}, Q'_7 = \{10^2, 10^8, 10^{14}\} \}. \end{aligned}$$

Refinamentos não são mais possíveis, o algoritmo para $\mathcal{Q}^4$ é a partição mais fina. Logo, o grafo de contextos possui sete vértices e é dado na Fig. 5.3.

5.3.2 Grafo de Contextos para a Classe dos PFTs Próprios

Esta subseção apresenta a construção do grafo de contextos, através de um exemplo, para a classe dos PFTs próprios utilizando a Definição 4.2 de $\mathcal{O}$. Isto mostra o quão geral pode ser a construção do grafo de contextos utilizando a representação de $\mathcal{O}$ através de expressões regulares.

Exemplo 5.6. Seja X o PFT sobre o alfabeto binário tal que $X = X_{\{\mathcal{F}, T\}}$, com $\mathcal{F} = \{1^{(0)}\}$ e $T = 2$. Observe que este PFT não pode conter pontos com blocos contendo um número

par de 0's entre duas ocorrências sucessivas de 1. Daí, o conjunto mínimo $\mathcal{O}$ de palavras proibidas é dado por $\mathcal{O} = 1(00)^*1$. A sequência de memórias obtida por extensões da palavra $\mathbf{w}_2 = 00$ é $(\varepsilon, \varepsilon, \dots)$ que é eventualmente periódica de período $p = 1$ e transiente $\mathbf{t} = \varepsilon$. Pelo Teorema 4.2, $k \geq 1$ é o menor inteiro tal que

$$k \times |\mathbf{w}_2| \geq |\mathbf{t}| + mmc(p, |\mathbf{w}_2|) \Rightarrow 2k \geq 2 \Rightarrow k = 1.$$

Daí,

$$\mathcal{B} = \{1\}\{\varepsilon, 00\}\{1\} = \{11, 1001\} \quad e \quad \mathcal{W} = \{\varepsilon, 1, 10, 100\}.$$

Observe que 100 é a palavra de comprimento máximo em $\mathcal{W}$ e $l = |100| = 3$. Agora, acrescentando as palavras $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}A^{-1}) \setminus \mathcal{W}$ tais que $|\mathbf{w}| \leq 4$, obtêm-se

$$\mathcal{W}' = \{\varepsilon, 1, 10, 100, 1000\}.$$

Na primeira etapa do algoritmo, observe que o sufixo próprio mais longo de todas as palavras de $\mathcal{W}'$ em $\mathcal{P}(\mathcal{O}A^{-1})$ é ε e $\mathcal{M}(\varepsilon) = \emptyset$. Para $\mathbf{w} = 1$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = 1^{-1}\mathcal{O} = (00)^*1.$$

Como 0 é prefixo próprio de palavras em $1^{-1}\mathcal{O}$, então $(0, \square) \in \mathcal{M}(1)$. Como $11 \notin L$, então $(1, \blacksquare) \in \mathcal{M}(1)$. Portanto,

$$\mathcal{M}(1) = \{(0, \square), (1, \blacksquare)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 10$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (10)^{-1}\mathcal{O} = 0(00)^*1.$$

Como 0 é prefixo próprio de palavras em $(10)^{-1}\mathcal{O}$, então $(0, \square) \in \mathcal{M}(10)$ e,

$$\mathcal{M}(10) = \{(0, \square)\}.$$

Para $\mathbf{w} = 100$,

$$\mathbf{w}^{-1}\mathcal{O} = (100)^{-1}\mathcal{O} = (00)^*1.$$

Como 0 é prefixo próprio de palavras em $(100)^{-1}\mathcal{O}$, então $(0, \square) \in \mathcal{M}(100)$. Como $1001 \notin L$, então $(1, \blacksquare) \in \mathcal{M}(100)$. Portanto,

$$\mathcal{M}(100) = \{(0, \square), (1, \blacksquare)\}.$$

Por fim, se $\mathbf{w} = 1000$,

$$(1000)^{-1}\mathcal{O} = 0(00)^*1 = (10)^{-1}\mathcal{O}.$$

Tabela 5.5 – *Máscara de Restrição de $\mathcal{W}'$ para o PFT com $\mathcal{O} = 1(00)^*1$.*

$\mathbf{w} \in \mathcal{W}'$	$\mathcal{M}(\mathbf{w})$
ε	$\emptyset$
1	$\{(0, \square), (1, \blacksquare)\}$
10	$\{(0, \square)\}$
100	$\{(0, \square), (1, \blacksquare)\}$
1000	$\{(0, \square)\}$

Fonte: O Autor (2020).

Portanto,

$$\mathcal{M}(1000) = \mathcal{M}(10) = \{(0, \square)\}.$$

As máscaras de restrição estão listadas na Tabela 5.5.

A partição inicial é dada por

$$\mathcal{P}^1 = \{P_1 = \{\varepsilon\}, P_2 = \{1, 100\}, P_3 = \{10, 1000\}\}.$$

Para o segundo passo, como não existem símbolos não ambíguos com marca $\square$ nas máscaras de restrição dos elementos de $\mathcal{W}'$ então, refinamentos não são mais possíveis.

Para o terceiro passo, 10^3 é a única palavra de comprimento máximo associado ao símbolo ambíguo 0. Da expressão regular que representa $\mathcal{O}$, obtêm-se que

$$\mathcal{C}(10^3) = 0(00)^*1 = \mathcal{C}(10),$$

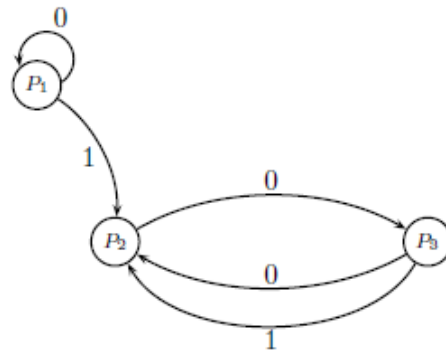
ou seja, 10^3 e 10 são palavras equivalentes. Então,

$$\mathcal{P}_{10^3} = \{\{10, 10^3\}, \{\varepsilon, 1, 10^2\}\} \quad e \quad \mathcal{P}^2 = \mathcal{P}^1 \wedge \mathcal{P}_{10^3} = \mathcal{P}^1.$$

Portanto, refinamentos não são mais possíveis.

Para o quarto passo, o único símbolo ambíguo é o 0. As palavras em P_2 só podem ser estendidas por 0 e $\mathcal{R}(10) = 10$, $\mathcal{R}(1000) = 1000 \in P_3$. Daí, refinamentos não são mais possíveis, $\mathcal{P}^1$ é a partição mais fina, o grafo de contextos possui 3 vértices e é dado na Fig. 5.4.

Figura 5.4 – Grafo de Contextos do PFT com $\mathcal{O} = 1(00)^*1$ obtido da partição $\mathcal{P}^1$.



Fonte: O Autor (2020).

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

6.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho, resolvemos o problema da representação de um sistema dinâmico simbólico de memória infinita através de um grafo rotulado direcionado com um número finito de estados. A relevância da solução de tal problema consiste nas diversas aplicações em engenharia elétrica e, acreditamos, nas diversas áreas do conhecimento científico que são modeladas por tais sistemas dinâmicos. A seguir listamos as contribuições do nosso trabalho.

- ▷ Mostramos, no Capítulo 3, que o algoritmo proposto para a construção de representações reduzidas para a classe dos SFTs fundamentado nos conceitos de conjunto de restrições, máscara de restrição e memória de restrição pode ser estendido para a classe dos PFTs, quando estes conceitos são definidos por fase;
- ▷ No Capítulo 4, utilizamos linguagens regulares para representar o conjunto mínimo de palavras proibidas de um SSS através de determinadas expressões regulares e descrevemos de forma explícita um conjunto suficiente $\mathcal{W}$ de classes de representantes do conjunto de restrições destes sistemas;
- ▷ Ainda no Capítulo 4, apresentamos um limitante para o número de elementos de um conjunto necessário e suficiente $\mathcal{W}'$ de classes de representantes do conjunto de restrições de um SSS;
- ▷ Também foi proposto, no Capítulo 5, um algoritmo para construção do grafo de contextos para a classe dos SSSs, a principal contribuição deste trabalho.

6.2 TRABALHOS FUTUROS

Como prosseguimento deste trabalho sugerimos:

1. Determinar um conjunto suficiente de classes de representantes do conjunto de restrições para a classe dos SSSs representando o conjunto mínimo de palavras proibidas através de expressões regulares mais gerais;
2. Procurar estabelecer um limitante que aproxime mais o conjunto suficiente $\mathcal{W}$ de classes de representantes do conjunto de restrições de um conjunto suficiente e necessário de classes de representantes;
3. Fazer um estudo da complexidade computacional do algoritmo proposto para a construção do grafo de contextos para a classe dos SSSs, buscando métodos combinatoriais que possam reduzir esta complexidade;

4. Utilizar propriedades da teoria ergódica dos números para eliminar comparações entre conjunto de restrições de palavras na linguagem de um SSS (linhas 10 à 14) do algoritmo proposto para a construção do grafo de contextos para esta classe de sistemas simbólicos.

REFERÊNCIAS

- BÁL, M. P.; CROCHEMORE, M.; MOISION, B. E.; SIEGEL, P. H. **Periodic finite-type shifts spaces**. *IEEE Trans. Inform. Th.*, 57, (6), (2011), 3677-3691.
- BERSTEL, J.; BOASSON, L.; CARTON, O.; FAGNOT, I. **Minimization of automata**. *CoRR*, vol. abs/1010.5318, 2010.
- BLAHUT, R. E. **Principles and Practice of Information Theory**. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1987.
- CHAVES, D. P. B.; PIMENTEL, C. **On the Follower Set Graph of Shifts of Finite Type**. *International Symposium on Information Theory*, (Honolulu, HI, USA), pp. 1802-1806, 2014.
- CHAVES, D. P. B. **Representação de sistemas dinâmicos simbólicos de memória finita usando grafos**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFPE, Recife, 2006.
- CROCHEMORE, M.; MIGNOSI, F.; RESTIVO, A. **Automata and forbidden words**. *Inform. Process. Lett.*, vol. 67, pp. 111-117, 1998.
- DASTJERDI, D. A.; JANGJOO, S. **Dynamics and topology of S-gap shifts**. *Topology Appl.*, vol. 159, Issues 10-11, 15 June - 1 July 2012, Pages 2654-2661.
- HERNSTEIN, I. N. **Tópicos de álgebra**. Tradução de Adalberto P. Bergamasco e L. H. Jacy Monteiro. S. Paulo, Editôra da Univ. e Polígono, 1970.
- HOPCROFT, J. E.; MOTWANI, R.; ULLMAN, J. D. **Introduction to automata theory, languages, and computation**. 3rd ed., Pearson Education, 2007.
- IMMINK, K. A. S. **Efmplus: The coding format of the multimedia compact disc**. *IEEE Trans. Consum. Electron.*, vol. 41, no. 3, pp. 491-497, 1995.
- IMMINK, K. A. S. **A survey of codes for optical disk recording**. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications.*, vol. 19, pp. 756-764, April 2001.
- LAWSON, M. V. **Finite Automata**. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- LIND, D.; MARCUS, B. H. **An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding**. Cambridge University Press, 1995.
- MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. Edusp, 2006.
- MARCUS, B. H.; ROTH, R. M.; SIEGEL, P. H. **Constrained systems and coding for recording channels**. *Handbook of Coding Theory* (V. S. Pless and W. Huffman, eds.), vol. 2, pp. 1635-1764, Eds. Amsterdam:Elsevier, 1999.
- MARCUS, B. H.; SIEGEL, P. H.; WOLF, J. K. **Finite-state modulation codes for data storage**. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications.*, vol. 10, pp. 5-37, January 1992.

- MARTINEZ, F. B. et al. **Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. 2 ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- MOISION, B. E.; SIEGEL, P. H. **Periodic-finite-type shift spaces**. *Proc. IEEE Int. Symp. Inform. Theory*, (Washington, DC), p. 65, June 2001.
- MORSE, M. **Recurrent geodesics on a surface of negative curvature**. *Trans. Amer. Math. Soc.*, no.22, pp. 84-110, 1921.
- SANTOS, J. P. O. **Introdução à Teoria dos Números**. 3 ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

APÊNDICE A – PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA

A.1 Artigos Publicados em Congresso

- ▷ SILVA, V. V.; CHAVES, D. P. B.; PIMENTEL, C. **Grafos de contextos de sistemas dinâmicos simbólicos de memória infinita.** *XXXV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT 2017)*, Setembro de 2017, pp. 639-643.
- ▷ SILVA, V. V.; CHAVES, D. P. B.; PIMENTEL, C. **Grafos Reduzidos para Restrições Periódicas.** *XXXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT 2018)*, Setembro de 2018, pp. 1-5.