



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO - UFPE

CENTRO DE EDUCAÇÃO - CE

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLOGIA- EDUMATEC**

CURSO DE MESTRADO

LUIZ GUSTAVO DE LIMA JÚNIOR

**MAPEAMENTO DE RECURSOS DESTINADOS AO ACOMPANHAMENTO
INDIVIDUALIZADO EM SALA DE AULA INVERTIDA: DESIGN DE UM
DISPOSITIVO MODELADO PARA O CONTEÚDO DE FRAÇÕES**

Recife

2020

LUIZ GUSTAVO DE LIMA JÚNIOR

**MAPEAMENTO DE RECURSOS DESTINADOS AO ACOMPANHAMENTO
INDIVIDUALIZADO EM SALA DE AULA INVERTIDA: DESIGN DE UM
DISPOSITIVO MODELADO PARA O CONTEÚDO DE FRAÇÕES**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção de grau de mestre.

Orientadora:

Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira (UFPE)

Recife

2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Natalia Nascimento, CRB-4/1543

L732m Lima Júnior, Luiz Gustavo de.
Mapeamento de recursos destinados ao acompanhamento individualizado em sala de aula invertida: design de um dispositivo modelado para o conteúdo de frações. / Luiz Gustavo de Lima Júnior. – Recife, 2020.
95 f.

Orientadora: Verônica Gitirana Gomes Ferreira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2019. Inclui Referências e Apêndices

1. Matemática – Frações. 2. Dispositivos Educacionais. 3. Metodologias Educacionais. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Ferreira, Verônica Gitirana Gomes (Orientadora). II. Título.

510 (23. ed.)

UFPE (CE2021-015)

LUIZ GUSTAVO DE LIMA JÚNIOR

**MAPEAMENTO DE RECURSOS DESTINADOS AO ACOMPANHAMENTO
INDIVIDUALIZADO EM SALA DE AULA INVERTIDA: DESIGN DE UM
DISPOSITIVO MODELADO PARA O CONTEÚDO DE FRAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 30/06/2020

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Iranete Maria da Silva Lima (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Lúcia de Fátima Durão Ferreira (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho ao meu pai, Luiz Gustavo de Lima. Tenho certeza de que onde ele estiver, a sua felicidade está sendo enorme por ver mais uma realização na minha vida profissional.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pois Ele caminha comigo em todas as batalhas que eu enfrento e sempre me dá algum tipo de vitória. Ele me abençoa em tudo o que faço.

Ao meu pai Luiz Gustavo de Lima que sempre me deu apoio enquanto pôde e à minha maravilhosa mãe, Josicleide Pereira de Lima que sempre me dá apoio em tudo que eu faço. Suas orientações são valiosas.

À minha esposa, Rauanne Thais, que compreendeu meus momentos ausentes, que sempre me encorajou e acreditou em mim. Seu companheirismo foi extremamente importante.

À minha orientadora Profa. Dra. Verônica Gitirana. A ti Serei eternamente grato por me orientar tão cuidadosamente, mesmo diante de tantos atropelos que foram ultrapassados. Quem lhe tem como professora, normalmente tem uma enorme admiração pelas suas orientações, pelas explicações, pela maneira de pensar e, principalmente, pela sua experiência. Após as suas explicações, há de fato uma desconstrução e, em seguida, uma nova e belíssima construção.

Às professoras que compuseram a banca de qualificação e de defesa, Profa. Dra. Iranete Maria da Silva Lima e Profa. Lúcia de Fátima Durão Ferreira, que me ajudou enormemente, com suas colocações esclarecedoras no momento da qualificação. Essas foram decisivas para uma melhor sistematização dessa pesquisa. Agradeço, ainda, pela leitura cuidadosa e contribuições que virão para minha dissertação e formação.

Aos meus familiares, amigos da vida e aos amigos de turma da faculdade, do ano 2018.1. Em especial José Wilson, que não foi colega de sala, mas que me ajudou muito, antes, durante e no final do curso.

À CAPES (Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior), por ter financiado minha bolsa de estudos com investimentos que são feitos de forma indireta pela sociedade.

Aos meus professores que tive no programa do Edumatec- UFPE. As aulas sempre eram esperadas com ansiedade. As experiências de cada professor que tive aula sempre trazia uma novidade. Eu sempre voltava para casa com um sentimento de dever cumprido.

À coordenação do Edumatec-UFPE, que antes era coordenada pelo professor Dr. Sérgio Abranches, que juntamente com sua equipe, sempre me atendeu e me auxiliou perfeitamente.

Ao grupo de pesquisa no qual eu faço parte, GERE (Grupo de Estudos em Recursos para a Educação. Nesse grupo as descobertas são constantes e ao mesmo tempo muito valiosas. Aprendi muito com essa equipe liderada pela Profa. Dra. Verônica Gitirana.

Aos meus alunos que fazem parte da minha vida e carreira profissional. Eles(as) sempre me encorajaram e me deram motivos, mesmo que indiretamente, a fazer esse tipo de pesquisa e tentar entendê-los.

Por fim, a todos que colaboraram de forma indireta e diretamente para realização deste trabalho. A vocês serei eternamente grato.

RESUMO

Esta pesquisa visa elaborar e validar um dispositivo computacional para auxiliar professores no acompanhamento do desenvolvimento do estudante e nas, conseqüentes, escolhas de materiais de conteúdo personalizado para a sala de aula invertida. Metodologia essa que inverte a lógica tradicional de aula, dando oportunidades e meios para que estudantes recebam e estudem o conteúdo em foco, em casa, deixando o tempo de aula dedicado a interações entre estudantes e professor, com base em atividades previamente planejadas. Desse modo, o professor assume a tarefa de mediador e os estudantes podem esclarecer suas dúvidas. Por outro lado, um acompanhamento personalizado requer estratégias e dispositivos para auxiliar o professor a lidar com esse processo em toda uma turma, grupo ou de forma individual. Isso requer uma melhor maneira de achar recursos apropriados para cada estudante sobre o conteúdo de frações. Para elaborar, testar e analisar o protótipo, focamos no conteúdo de frações. Em sua primeira versão, um estudo de caso com um estudante com dificuldades em frações, que, de forma iterada, passou por estudos a partir do material indicado, e por testes também sugeridos pelo dispositivo. Ao final da pesquisa, o protótipo do dispositivo foi composto de uma matriz de habilidades com variáveis que detalham o conhecimento; uma matriz relativa ao banco de vídeos; uma matriz de situações, uma matriz do desenvolvimento do estudante; e uma planilha com relatórios. Quanto aos resultados da aprendizagem da estudante, observou-se que ela conseguiu sanar todas as dificuldades que apresentou no penúltimo teste, a partir das últimas identificações. Durante o processo, observou-se, ainda, como a percepção do professor mudou em relação à aprendizagem esperada por cada vídeo.

Palavras-chave: Metodologias Ativas. Sala de aula invertida. Dispositivo. Frações.

ABSTRACT

This research aims to build and validate a computational device to help teachers on assessing student's development and on choosing personalized content resources to flipped classroom. This research aims to build and validate a computational device that helps teachers in assessing student's development and choosing personalized content resources to a flipped classroom. This teaching methodology inverts traditional class order, promoting opportunities and ways for students to access and study the focused content at home, letting class time dedicated to interactions among students and teacher, on the bases of activities previously prepared. On the one hand, the teacher plays the role of mediator and the students can take their time and overcome their difficulties. On the other hand, a personalized assessment requires devices and strategies to help teacher to deal with this process with a whole class, group, or individual. It requires a better way to find appropriate resources for each student or group of students. To design, try out, and analyze the prototype, we focused on the content of fractions. In the first version, a case study with a student with difficulties in learning fractions, who iterated, studied from resources pointed out by the prototype device, and undertook tests also suggested by the device. At the end of the research, the prototyped device comprised an ability matrix with variables that detail the knowledge; a matrix related to video database; a matrix of situations, a matrix of students assessment, and worksheets with reports. As regards the students learning results, she was able to overcome all her difficulties detected by the last test. Meanwhile, the results also showed how the teacher's perception changed regarding the expected learning from each video.

Keywords: Active Methodology. Flipped classroom. Device. Fractions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Definição de um conceito segundo Vergnaud	31
Figura 2 – Problema com fração como parte-todo	33
Figura 3 – Problema com fração como número na reta numérica	33
Figura 4 – Fração como medida.....	34
Figura 5 – Problema com fração de quantidade.....	34
Figura 6 – Fração como razão	35
Figura 7 - Conceito de frações que serão abordados na pesquisa.....	36
Figura 8 - Exemplo 1	37
Figura 9 - Exemplo 2.....	37
Figura 10 – Extrato da primeira matriz de conhecimento	45
Figura 11 - Questão 1.	54
Figura 12 - Questão 2	55
Figura 13 - Questão 3	55
Figura 14 - Questão 4	56
Figura 15 - Questão 5	58
Figura 16 - Questão 6	59
Figura 17 - Reorganização da matriz de conhecimento	60
Figura 18 – Imagem do Banco de situações versão inicial.....	60
Figura 19 – Protocolo da Questão 1.....	61
Figura 20 – Protocolo da Questão 2.....	62
Figura 21 – Protocolo da Questão 3.....	62

Figura 22 – Protocolo da Questão 4.....	63
Figura 23 – Protocolo da Questão 5.....	63
Figura 24 – Protocolo da Questão 6.....	64
Figura 25 – Imagem da Matriz conhecimento versão inicial	67
Figura 26 – Corte da matriz de conhecimento versão final.....	68
Figura 27 – Imagem do banco de situações - versão inicial	68
Figura 28 – Corte do banco de situações versão final.....	69
Figura 29 – Corte do banco de vídeos - versão final	70
Figura 30 - banco de vídeos versão final.....	70
Figura 31 – Imagem da matriz desenvolvimento da estudante versão inicial ...	71
Figura 32 – Corte da matriz desenvolvimento da estudante versão final.....	72
Figura 33 - Diferença do desenvolvimento da estudante para os vídeos	72
Figura 34 - Relatório das dificuldades identificadas	74
Figura 35 – Protocolo da Questão 1 do 3º teste.....	76
Figura 36 - Protocolo da Questão 2 do 3º teste.....	76
Figura 37 - Protocolo da Questão 3 do 3º teste.....	77
Figura 38 - Protocolo da Questão 4 do 3º teste.....	78
Figura 39 - Protocolo da Questão 5 do 3º teste.....	79
Figura 40 - Protótipo do relacionamento do professor com o dispositivo.....	80
Figura 41 – Protótipo do dispositivo.....	82

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Habilidades nos documentos oficiais.....	26
Quadro 2 - Conhecimentos com base nos documentos oficiais	42
Quadro 3 - Habilidade(s) abordada(s) no primeiro teste.....	43
Quadro 4 - Matriz de conhecimento da estudante.....	50
Quadro 5 - Quantidade de vídeos encontrados e escolhidos	51
Quadro 6 - Banco de vídeos	52
Quadro 7 - Identificação dos vídeos.....	53
Quadro 8 - Quadro de habilidades e variáveis por questão.....	75

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
1.1 OBJETIVOS	17
1.1.1 Objetivos Gerais	17
1.1.2 Objetivos específicos	17
2. REFERENCIAL TEÓRICO E CONCEITOS	18
2.1 METODOLOGIAS ATIVAS	18
2.2 SALA DE AULA INVERTIDA	20
2.3 ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES: DOCUMENTOS OFICIAIS	24
2.4 ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES: NA LITERATURA	27
2.5 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS	29
3. MÉTODO	39
3.1 SUJEITO DO ESTUDO	39
3.2 UM PANORAMA DO DESIGN DO DISPOSITIVO	40
3.2.1 Levantamentos de recursos preliminares	41
3.2.2 Prototipação da versão inicial do dispositivo	44
3.2.3 Revisão e aprimoramento para a 2ª versão do dispositivo	45
3.2.4 Testagem da 2ª versão do dispositivo	46
3.3 A COLETA DE DADOS	47
4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	48
4.1 PANORAMA DA ANÁLISE E DA DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	48
4.2 CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DA PROTOTIPAÇÃO DA VERSÃO INICIAL DO DISPOSITIVO	49
4.2.1 Análise das respostas da estudante ao 1º teste e construção da legenda da matriz de desenvolvimento	49

4.2.2 Desenvolvimento do banco de vídeos	51
4.2.3 Operações de identificação de vídeos adequados a estudante	53
4.3 CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DAS QUESTÕES QUE COMPÕEM O 2º TESTE	53
4.3.1 Construção das questões e descrição das habilidades relacionadas	53
4.3.2 Síntese da análise das situações a partir da TCC	60
4.3.3 Análise do teste respondido pela estudante	61
4.3.4 Prototipação do dispositivo	65
4.4 REVISÃO E APRIMORAMENTO PARA A 2ª VERSÃO DO DISPOSITIVO	73
4.4.1 Construção e Análise do teste respondido pela estudante após assistir aos vídeos	73
4.4.2 Uso do dispositivo e relatório de evolução	79
4.5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	83
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	85
5.1 LIMITAÇÕES DA PESQUISA	87
5.2 PERSPECTIVAS DE NOVAS INVESTIGAÇÕES	87
REFERÊNCIAS	89
Apêndice 1 - Primeiro teste com problemas de frações aplicado proposto à estudante	93

1. INTRODUÇÃO

Essa pesquisa tem por objetivo conceber, testar e validar um dispositivo que auxilie o professor nas escolhas de materiais para a parte externa de suas aulas com a metodologia de sala de aula invertida (LAGE; PLATT; TREGLIA, 2000), especificamente para o estudo de frações. Ela é parte de uma projeto maior de desenvolvimento do dispositivo voltado para qualquer conteúdo de matemática e para auxiliar o professor com toda uma turma e desenvolvida no âmbito do GERE, iniciado pelo grupo Luiz Gustavo de Lima Jr., Joélia Lima e Verônica Gitirana.

Com o passar dos tempos, a evolução e difusão tecnológicas vêm permitindo que todos, inclusive o aluno, tenham acesso a informações. Normalmente, os alunos só tinham tal acesso quando na presença do professor no momento da aula. Nesse sentido, o modelo tradicional de ensino foi ficando obsoleto, passando a dar lugar às metodologias ativas que permitem mais integração dos alunos entre si e com os professores, oportunizando aos alunos um aprendizado em seu ritmo, de forma individual ou em grupo. Com esse fácil acesso à informação, o professor precisa estabelecer uma relação com o momento digital e o momento físico. A essa integração de modos de ensino passou a ser chamada de Blended Learning, que é o modo híbrido de ensino. Valente (2014a) aponta que a concepção da sala de aula invertida foi utilizada inicialmente por Lage, Platt e Treglia (2000), como “inverted classroom”, em uma disciplina de Microeconomia em 1996 na Universidade de Miami (Ohio, EUA).

Com o uso das metodologias ativas (DEWEY, 1978), em particular da sala de aula invertida (LAGE; PLATT; TREGLIA, 2000), o tempo de aula é priorizado para a interação didática entre Professor e aluno, tendo o aluno como protagonista das ações com o conhecimento. A informação teórica é deixada para o espaço extra sala de aula. Cabe ao professor indicar aos estudantes o material a ser estudado para a próxima aula. “A inversão da sala de aula estabelece um referencial que oferece aos estudantes uma educação personalizada, ajustada sob média às suas necessidades individuais” (BERGMANN; SAMS, 2016, p. 6).

No entanto, esse contato permite que o professor perceba os diferentes níveis, avanços e dificuldades de cada estudante. Mesmo sabendo isso, assumir que todos estão em um mesmo patamar de desenvolvimento e indicar o mesmo material a todos representa um impasse para a metodologia. No entanto, o quantitativo de estudantes e o tempo disponível, muitas vezes dificulta uma possível mediação personalizada.

Fora da sala de aula o professor, normalmente, não tem como tirar dúvidas do aluno que está precisando ser acompanhado individualmente. Muitas vezes, com uma dificuldade que pode ser só sua e que, na sala de aula, não é possível tirar por diversos motivos. Há, também, situações nas quais o professor não é procurado pelo aluno para poder tirar suas dúvidas, mas consegue perceber o baixo rendimento desse aluno ou de um grupo de alunos em atividades e em avaliações.

Nesse sentido, o presente estudo se insere no contexto de pensar em soluções para esses entraves e proporcionar ao professor um dispositivo para acompanhar os seus alunos de forma individual ou em grupo. Com o uso do dispositivo, acreditamos que o professor vai poder atender à dificuldade específica do aluno, inferindo o que ele já conseguiu compreender e o que ainda precisa. Mapeamento esse necessário para se propor materiais e atividades que não sejam repetitivas, que sejam direcionadas e que possam minimizar ou até mesmo, eliminar a sua dificuldade.

Os professores precisam encontrar maneiras de chegar até esses estudantes que têm uma necessidade específica. Esses docentes necessitam de meios que facilitem suas escolhas de materiais informativos, assim como os relativos às atividades. Normalmente, a escolha de uma nova atividade atende a um determinado aluno ou grupo de alunos e os outros ficam revendo situações que já têm domínio. Com o dispositivo, pretendemos oportunizar a esse professor menos perda de tempo na procura por materiais direcionados, escolha de materiais para cada tipo de aluno, para cada tipo de dificuldade.

Elaborar um dispositivo desse tipo necessita da definição inicial de um campo de conhecimento e nível de ensino. É, nesse sentido, que escolhemos o

campo de frações, estudados até o nível do trabalho de 1º ano do Ensino Médio. Ingressei no Mestrado com o intuito de estudar a aprendizagem de frações. Continuaremos nesse tema matemático por considerar as inúmeras dificuldades que os estudantes apresentam na aprendizagem de frações, e por já ter feito levantamento bibliográfico sobre este campo.

De acordo com os PCN do anos final do ensino fundamental, no terceiro e no quarto ciclos (BRASIL, 1998) a abordagem dos racionais, em continuidade ao que foi proposto para os ciclos anteriores, tem como objetivo levar os alunos a perceber que os números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações-problema, como as que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão. Devido a essas dificuldades que alunos apresentam, o conteúdo de frações foi mantido para dar base ao projeto no que se refere conteúdo a ser ensinada, testado e para a validação do dispositivo.

Para tal pesquisa utilizaremos uma primeira prototipação com a dinâmica de elaboração, testagem, análise, reelaboração voltando ao ciclo, adotando uma metodologia de pesquisa iterativa. O protótipo, em uma primeira versão, foi desenvolvido e analisado, com um estudo de caso de uma estudante voluntária e com dificuldade no tema.

Esta dissertação está estruturada com essa introdução, seguido por um capítulo de fundamentação teórica sobre as metodologias ativas que são mais utilizadas pelos professores, descrevendo de forma especial a sala de aula invertida, que é uma metodologia ativa que foi escolhida para ser foco de uso do dispositivo. Teremos uma fundamentação matemática sobre frações, conteúdo utilizado para elaboração e testagem do dispositivo, para saber o que esperado se aprender sobre o conteúdo, e o que o dispositivo precisa identificar e mapear. Em seguida, o percurso metodológico para desenvolvimento da pesquisa, as análises e discussão dos dados obtidos e, por fim, a considerações finais e as referências.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivos Gerais

Conceber, desenvolver, testar e validar o protótipo de um dispositivo que auxilie o professor nas escolhas de recursos para a parte externa de suas aulas com a metodologia de sala de aula invertida.

1.1.2 Objetivos específicos

- Definir a estrutura que permite um mapeamento do conhecimento do estudante e explorado em vídeos, a partir do conhecimento esperado em currículos ou documentos oficiais.
- Elaborar e validar uma estrutura de banco de dados que permita prototipar um dispositivo para auxiliar o registro de habilidades e dificuldades dos estudantes a partir da resolução de situações que envolvem adições de frações;
- Montar e validar estratégia de avaliação de vídeos e mapeamento de conhecimento explorados;
- Elaborar procedimentos de localização de vídeo com informação necessária para tirar dúvida específica do aluno, a partir da sua resolução de situação;
- Validar o dispositivo por meio do acompanhamento de um estudante.

2. REFERENCIAL TEÓRICO E CONCEITOS

Nossa pesquisa necessita de um quadro teórico que discuta o conceito de Metodologias Ativas (DEWEY, 1978), pois essas veem o aluno como centro do processo de aprendizagem, levando em consideração ao que o aluno já sabe e permitindo que ele construa o seu conhecimento. Em especial, iremos usar a metodologia da sala de aula invertida (LAGE; PLATT; TREGLIA, 2000), trabalhando com vídeos direcionados a estudante para oportunizar o conhecimento necessário sobre o conteúdo de frações. Faremos também um levantamento das habilidades, conceitos, recomendados pelas orientações curriculares para o ensino de frações. Como fundamentação para estruturação dos conhecimentos esperados utilizamos a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), o qual fundamentamos ao final do capítulo.

2.1 Metodologias Ativas

A educação tradicional está enfrentando dificuldades devido às transformações na sociedade. Existem dificuldades para se compreender a necessidade de cada aluno(a) e, também, para fazer com que todos os eles aprendam no mesmo tempo.

De acordo com Moran (2015, p. 16)

[...], a escola padronizada, que ensina e avalia a todos de forma igual e exige resultados previsíveis, ignora que a sociedade do conhecimento é baseada em competências cognitivas, pessoais e sociais, que não se adquirem da forma convencional e que exigem proatividade, colaboração, personalização e visão empreendedora.

As metodologias tradicionais de ensino já não são suficientes para suprir a necessidade de uma sociedade conectada à internet ou a outros tipos de materiais que podem lhe dar acesso à informação. Com o método tradicional o professor era considerado o único detentor da informação, o acesso a ela era mais difícil para o aluno. Hoje, com o acesso à internet, a vídeos, a textos ou a outros recursos, pode-se aprender em qualquer lugar, em qualquer hora e com diferentes pessoas. A tecnologia proporciona a integração de diversos espaços, tanto do mundo físico

como do mundo digital, não sendo dois espaços, mas um espaço estendido, misturado e unificado, onde o professor vai atuar de dois modos, o físico e o digital.

Os temas de inovação e metodologias ativas, em geral, são associados a Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL - *Problem Based Learning*), sistemas tutoriais, laboratórios de simulação, novas tecnologias de informação e comunicação (NTIC), *peer instruction*, ensino híbrido, perestroika (experience learning), Aprendizagem baseada em equipe (TBL- *Team Based Learning*), Aprendizagem baseada em Projetos (PjBL - *Project based learning*), movimento Maker e outros (MASETTO, 2018). Em poucas palavras, com as metodologias ativas, busca-se que o aluno seja protagonista do seu aprendizado, o ator principal no seu processo de aprendizagem. As metodologias ativas são aquelas em que o professor não é mais o único detentor do conhecimento. É um trabalho realizado nos conhecimentos prévios dos alunos (em grupo) ou do aluno (individual), preparando-o para interação com os pares. Assim, o aluno é estimulado a ser esse agente do seu conhecimento. Tem-se a aprendizagem por descobertas, por colaboração, por resoluções de problemas, por investigação, ... Estimula-se que o aluno descubra novas formas de construir o conhecimento com práticas dentro e fora da sala de aula, visando uma autonomia, é a ideia de aprender fazendo (COSTA, 2018).

De acordo com Valente (2018, p. 28)

[...], as metodologias ativas procuram criar situações de aprendizagem nas quais os aprendizes possam fazer coisas, pensar e conceituar o que fazem e construir conhecimentos sobre os conteúdos envolvidos nas atividades que realizam, bem como desenvolver a capacidade crítica, refletir sobre as práticas realizadas, fornecer e receber feedback, aprender a interagir com colegas e professor, além de explorar atitudes e valores pessoais.

Assim, nasce o modo híbrido em inglês denominado de *blended learning*. Com essa “mistura”, do mundo físico com o digital, o professor precisa encontrar o aluno de duas maneiras de forma física e digital, havendo assim uma comunicação com todos e com cada um dos seus alunos. Segundo Valente (2014a, p.84), um programa de educação formal que mescla momentos em que o aluno estuda os conteúdos e instruções com recursos online, e outros em que o ensino ocorre em uma sala de aula, podendo interagir com outros alunos e com o

professor. O *blended learning* pode ser usado quando se tem muitas aulas presenciais, então são realizadas atividades a distância e o contrário, quando se tem aulas a distância e são realizadas atividades presenciais. Para acontecer esse acompanhamento em grupo ou individual, é necessário um mecanismo de acompanhamento das necessidades de cada aluno ou de grupo deles. O professor precisa acompanhar o aluno e permitir que ele aprenda no seu ritmo, mesmo estando dentro da sala de aula. Moran (2015) nos diz que cada aluno aprende no seu próprio ritmo e necessidade e, também, aprende com os outros em grupos e projetos, com supervisão de professores orientadores.

2.2 Sala de Aula Invertida

Uma das principais características da sala de aula invertida é a inversão da ordem dos acontecimentos para aula. Pode-se ver que não há um criador da sala de aula invertida:

Não propusemos o termo sala de aula invertida. Ninguém é “dono” dessa designação. Não existe essa coisa denominada sala de aula invertida, embora ela tenha se popularizado nas diversas mídias. (BERGMANN; SAMS, 2016, p. 5)

Em meados da década de 90, foram encontrados os primeiros estudos para a metodologia que hoje a conhecemos como sala de aula invertida. Eric Mazur (MAZUR 2015; ARAUJO; MAZUR, 2013) iniciou os estudos sobre o método de ensino instrução por colega em 1991, que resultou em um livro *Peer Instruction: A User's Manual*, em 1997; Greor Novak *et al.* (1999) defendeu o *just-in-time teaching*, método que requer que o aluno assuma a responsabilidade de se preparar para a aula, realizando alguma atividade prévia. O conceito de *flipped classroom* foi apresentado por Baker (2000) na *11th International Conference on College Teaching and Learning*. Podem-se evidenciar os primeiros usos de vídeos por Salman Khan (2008), que criou vídeos para ajudar a sua prima que estava com dificuldades em conversões de unidades. Como eles moravam em locais distantes, Khan ajudava a sua prima por telefone e com o Yahoo Doodle. Como esse procedimento deu certo, ele foi ajudando os demais membros da família, mas começou a ficar sem tempo para atender todos eles, então começou a criar vídeos e colocá-los no YouTube para que todos tivessem acesso por conta própria. Desse modo, ele criou um site em 2008, chamado Khan Academy, sem

fins lucrativos para que qualquer pessoa e em qualquer lugar pudesse ter acesso aos vídeos e pudesse compreender os conteúdos que fossem necessários. Em 2006 e 2007, os professores Jonathan Bergmann e Aaron Sams, conheceram o software screencast, que grava as ações na tela do computador, para preparar vídeos para os estudantes que faltavam às aulas. Percebendo, assim, que os alunos precisavam da presença deles nas situações que “empacaram”, onde não conseguiam resolver determinado problema e precisavam de uma ajuda mais especializada. Pode-se ver o que Bergmann e Sams (2016, p. 4),

E se gravássemos todas as aulas, e se os alunos assistissem ao vídeo como “dever de casa” e usássemos, então, todo o tempo em sala de aula para ajudá-los com os conceitos que não compreenderam?

A ideia da sala de aula invertida é dar oportunidades e meios para que os alunos recebam e estudem o conteúdo que se deseja trabalhar em casa e, posteriormente, na hora da aula, com as atividades previamente preparadas pelo professor, os alunos possam interagir com seus colegas e/ou com o professor, que media a aprendizagem, e os estudantes podem esclarecer suas dúvidas. Pode-se pensar como conceito básico de sala de aula invertida, como uma inversão na ordem. Antes, os momentos de aula eram destinados a que o professor apresentasse o conteúdo formalizado e partia às resoluções de questões. Na sala de aula invertida, ele tem primeiro o contato com o conteúdo disponibilizado pelo professor em forma impressa ou online, em diferentes formatos como texto, vídeo, som, apresentações, mapas, linhas do tempo, Quadrinhos, etc. Ao chegar à sala de aula, depois disso, o contato entre professor e alunos é para interações em que o aluno é agente principal na interação com o conhecimento, destina-se, portanto, ao trabalho com resoluções de problemas, onde o professor busca sanar assim as possíveis dúvidas. “O que tradicionalmente é feito em sala de aula, agora é executado em casa, e o que tradicionalmente é feito como trabalho de casa, agora é realizado em sala de aula” (BERGMANN; SAMS, 2016, p. 11). Assim, a sala de aula passa a ser um local com muito conhecimento de ambas as partes, professor e alunos. O professor tem a possibilidade de promover mais debates significativos em sala, proporcionando um nível de discussão considerado e um melhor aprendizado aos envolvidos.

“A Sala de Aula Invertida é constituída, basicamente, por duas componentes: uma que requer interação humana (atividades em sala de aula), ou seja a ação; e outra que é desenvolvida por meio do uso das tecnologias digitais, como vídeo aulas (atividades fora da sala de aula), textos” (PAVANELO; LIMA, 2017, p. 742). Assim, a sala de aula invertida é um dos modelos mais interessantes para poder mesclar a tecnologia com a metodologia de ensino, pois faz a junção com o conceito básico a ser trabalhado com jogos, vídeos, textos, projetos e problemas reais.

Acredita-se que com a percepção audiovisual os alunos conseguem internalizar os conteúdos de uma forma melhor.

O nível de representação do audiovisual está governado intensamente pela experiência direta que vai além da percepção. Aprendemos sobre coisas que não podemos experimentar diretamente graças aos meios audiovisuais, graças às demonstrações, aos exemplos em forma de modelo. Ainda que uma descrição verbal possa ser uma explicação bastante efetiva, o caráter dos meios audiovisuais diferencia-se muito da linguagem oral, particularmente por sua natureza direta. Não é necessário utilizar nenhum sistema codificado para facilitar a compreensão. Muitas vezes, basta ouvir e ver um processo para compreender seu funcionamento. Ver e ouvir um procedimento proporciona, freqüentemente, um conhecimento suficiente para avaliá-lo e compreendê-lo. Esse caráter de observação/audição não serve apenas como um artifício que nos capacita a aprender, mas também como um vínculo mais estreito com a realidade que está em nosso redor com o ambiente” (WOHLGEMUTH, 2005, p. 51) .

Com o uso de vídeos, os alunos podem pausar a fala do professor e anotar as considerações mais importantes; podem voltar a fala do professor para compreender algo que não conseguiu na primeira vez que assistiu. Essa ideia de pausar a fala, voltar a fala ou até mesmo de adiantar a fala, permite que o aluno possa assistir uma apresentação em seu ritmo. Esse aluno poderá executar o vídeo da maneira que ele achar apropriado, no que se refere à ferramenta (celular, notebook, tv), local e horário. Com esse procedimento, há alunos que aprendem de forma mais vagarosa e há aqueles que aprendem de maneira mais rápida. Isso pode causar nos alunos mais rápidos um desconforto, deixando-os entediados com o fato de assistir os mesmos vídeos e/ou resolver problemas semelhantes, repetitivos. De fato, ficar assistindo vídeos com conteúdo que o aluno já conseguiu aprender é entediante. O professor precisa conhecer a necessidade de cada aluno, para assim poder proporcioná-lo conteúdos e momentos que possam

contribuir para o seu aprendizado. Para que todos os alunos possam caminhar conjuntamente, mas, ao mesmo tempo, respeitando o ritmo de cada aluno, o professor precisa escolher os materiais mais adequados para proporcionar aos alunos. Dessa forma, na aula presencial, o professor poderá dar mais atenção aos alunos que apresentaram maiores dificuldades, e trazer mais desafios para os que tiverem mais avançados. A preparação do aluno antes da aula faz com que ele tenha algum domínio sobre o que está estudando. O aluno poderá se preparar antes e tirar possíveis dúvidas com os colegas e com o professor.

Segundo Valente (2014b, p. 92)

[...] se o aluno se preparou antes do encontro presencial, o tempo da aula pode ser dedicado ao aprofundamento da sua compreensão sobre o conhecimento adquirido, tendo a chance de recuperá-lo, aplicá-lo e com isso, construir novos conhecimentos. De acordo com as conclusões de Bransford, Brown e Cocking (2000), essa é uma importante fase do processo de aprendizagem, e que no ensino tradicional o aluno realiza após a aula, e sem o apoio dos colegas e do professor. Na sala de aula invertida esse apoio acontece no momento em que o aluno mais necessita.

Com o dispositivo, acredita-se que será possível fazer com que o professor ganhe tempo no que se refere à busca de materiais para dar suporte ao aluno. A desmotivação dos alunos dentro da sala de aula, durante uma aula ministrada de maneira tradicional é visível e é um grande problema. Normalmente, alguns alunos não dão atenção a aula em sala ou faltam às aulas por demonstrarem um grande desinteresse. Muitos deles não se sentem motivados com a forma tradicional que alguns professores adotam. Os vídeos escolhidos pelo professor poderão proporcioná-los uma organização sobre sua rotina de estudos. Os vídeos selecionados devem ser atrativos, devem despertar o interesse por parte do aluno, principalmente, levando em consideração à sua necessidade.

O uso da sala de aula invertida está tendo resultados positivos tanto no que se refere às aprendizagens dos alunos como a participação da turma nas atividades. Algumas universidades e escolas têm adotado o uso da metodologia.

Segundo Ramal (2015)

[...] testada e aprovada por universidades classificadas entre as melhores do mundo, como Duke, Stanford e Harvard. Em Harvard, nas classes de cálculo e álgebra, os alunos inscritos em aulas *invertidas* obtiveram ganhos de até 79% a mais na aprendizagem do que os que cursaram o ensino tradicional. Na Universidade de Michigan, um estudo mostrou que os alunos aprenderam em menos tempo. O MIT (Massachusetts Institute of Technology) considera a *Flipped Classroom* fundamental no seu modelo de aprendizagem. O método é adotado em escolas da Finlândia e vem sendo testado em países de alto desempenho em educação, como Singapura, Holanda e Canadá.

No Brasil o modelo tradicional de ensino ainda está preponderando e muitos professores, ainda, têm muita resistência para mudar a sua metodologia de ensino. Mas já ficou claro que devemos tentar mudar a metodologia de ensino para poder diminuir a quantidade de alunos que desistem de ir à escola ou por causa da grande quantidade de alunos que são reprovados ou por sentirem desmotivados pela forma que a aula é executada.

Segundo Schmitz (2016, p. 51)

No Brasil, algumas escolas e universidades já aplicam a abordagem, como é o caso do Colégio Dante Alighieri, das universidades UNIAMÉRICA, UNISAL, PUC do Paraná e Universidade Positivo, e do Instituto Singularidades que, em 2010, foi incorporado pelo Instituto Península e que atua na formação de professores.

Com essa abrangência de uso, percebe-se que as metodologias ativas estão ganhando espaço pelo seu grande diferencial em termos das aprendizagens dos alunos, da participação dos alunos nas aulas, do uso de novas metodologias por parte do professor e, principalmente, da participação dos alunos como protagonistas do seu conhecimento.

2.3 Ensino e Aprendizagem de Frações: Documentos Oficiais

Para entendermos bem como se dá a aprendizagem de números racionais e o que se espera dos nossos alunos, utilizamos como referência os documentos oficiais, BCC - Base Curricular Comum (SEE-PE, 2008), a BNCC - Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) e um mais antigo PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) .

Os anos finais do ensino fundamental pode ser dito como segunda etapa do ensino fundamental. Em seu primeiro ano, o professor precisa fazer uma ligação

entre esses dois segmentos, evitando assim o desinteresse por parte dos alunos. Alguns deles podem sentir desinteresse por estarem estudando conteúdos que já viram no ano anterior ou no segmento de ensino anterior. É necessário que o professor considere as aprendizagens dos alunos que já foram obtidas no que se refere ao conhecimento mais abstrato e simbólico da matemática, e que saiba aplicá-las no novo ano de ensino.

BCC (SEE-PE, 2008, p. 93)

[...]é normal que os alunos cheguem a esse nível de ensino sem conseguir utilizar de forma adequada a linguagem matemática, o que não significa ausência de aprendizagens anteriores. Cabe, então, ao professor identificá-las e utilizá-las como ponto de partida para as novas aprendizagens e para a ampliação dessa linguagem. Não se espera, porém, que isso esteja plenamente consolidado mesmo ao fim dos anos finais do Ensino Fundamental.

O número racional, em sua representação decimal ou fracionária, deve ter sua ampliação e consolidação. Porém, essa consolidação não deve se referir apenas às memorizações de algoritmos trabalhados para resoluções de cálculos. Na segunda etapa, do ensino fundamental 2, espera-se que o aluno compreenda e aprofunde os seus conhecimentos sobre os diferentes tipos de significados dos números racionais, como parte-todo, quociente entre dois números inteiros, medida, razão e operador. Para a ideia de operador, segundo a BCC (SEE-PE, 2008), é necessário fazer a associação com as operações com números racionais e compreender que a sentença, metade de um número, é multiplicar esse número pela fração $\frac{1}{2}$, por exemplo.

Para a BCC (SEE-PE, 2008, p. 96),

A construção dos procedimentos operatórios com esse tipo de número é uma aprendizagem lenta e que não pode ser finalizada em um tempo bem definido. A equivalência de frações ainda deve ser tomada como elemento principal na aprendizagem das operações com as frações. O mais importante é que o aluno seja capaz de construir significado para essas operações.

Alguns erros por parte dos alunos são comuns com o conteúdo de equivalência tanto de frações quanto de números decimais. O aluno pode afirmar que 4,56 é maior que 4,7 porque o primeiro número tem mais algarismos do que o segundo, apresentando, assim, um problema de ordenação com os números

racionais. Como já foi relatado, os documentos oficiais atuais são a BCC - Base Curricular Comum (SEE-PE, 2008), a BNCC - Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

Quadro 1 - Habilidades nos documentos oficiais

Documentos oficiais	Habilidades
BCC	<p>Os diferentes significados dos números racionais devem ser aprofundados: parte-todo; quociente entre dois números inteiros; medida; razão; e operador.</p> <p>Noção de porcentagem para que o aluno não fique apenas nos modos de calcular, mas para que possa criar estratégias de acréscimos e descontos, escolhendo assim uma melhor maneira de fazer um pagamento.</p>
BNCC	<p>(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.</p> <p>(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.</p> <p>(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.</p> <p>(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.</p>
PCN	<p>Reconhecimento de números racionais em diferentes contextos - cotidianos e históricos - e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador;</p> <p>Utilizar os diferentes significados e representações dos números naturais, inteiros, racionais e das operações envolvendo esses números, para resolver problemas, em contextos sociais, matemáticos ou de outras áreas do conhecimento.</p>

Fonte: Elaborada pelos autores

O PCN é um documento antigo, mas acreditamos que ele nos permite elencar as diversas dificuldades que alunos demonstram na representação fracionária dos números racionais. Assim, apesar de antigo, no caso dos PCN de

Matemática, muitas de suas afirmações ainda são atuais. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), no terceiro e no quarto ciclos a abordagem dos números racionais, em continuidade ao que foi proposto para os ciclos anteriores, tem como objetivo levar os alunos a perceber que os números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações-problema como as que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão.

O quadro anterior apresenta as habilidades esperadas para que sejam obtidas pelos alunos do ensino fundamental anos finais, sobre o conteúdo dos números racionais, com ênfase nas frações, pelos documentos oficiais: BNCC (BRASIL, 2018) e BCC (SEE-PE, 2008).

2.4 Ensino e Aprendizagem de Frações: na literatura

Segundo Bertoni (2008), para o aluno ter a compreensão de números naturais, é necessário ter bastante tempo de estudo com esse conjunto e a compreensão melhorada acontece por volta dos 6 e 8 anos, mas com frações é diferente, os alunos são apresentados às frações no 4º ano do ensino fundamental 1 e os livros mostram o conteúdo de forma mais rápida. Para ela, o tema frações têm sido apontado pelos professores como um dos mais problemáticos na aprendizagem da matemática dos anos iniciais. As avaliações nacionais do rendimento do aluno têm demonstrado baixo índice de acertos nesse tema. Segundo os PCN (BRASIL, 1998), os números racionais possuem diversos significados, como relação parte/todo, divisão e razão e os estudantes precisam reconhecer racionais em diferentes contextos e situações.

[...] Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal. (BRASIL, 1998, p. 100).

No que se refere ao significado de frações parte-todo, os alunos não podem ficar apenas com a ideia de nomear qual termo é o numerador e qual é o denominador, ou entender que o denominador é o inteiro dividido nessa quantidade, e que o numerador é a quantidade tomada desse inteiro que foi

dividido, para assim fazer também uma relação com equivalência de frações. Os alunos precisam de situações que possam proporcioná-los a compreensão de frações e dos seus significados no seu cotidiano, com situações que ele presencia muitas vezes sem saber.

Segundo Nunes (2006, p.128),

O uso de outras situações poderia ser mais proveitoso para a apropriação da lógica como alicerce para as ideias de fração. Por exemplo, situações de quociente podem ser usadas para que as crianças se apropriem do invariante de ordenação das frações por meio do raciocínio lógico: quanto mais crianças para dividirem o bolo, menor o pedaço de bolo que cada uma receberá. Essa relação inversa entre o divisor e o quociente poderia facilitar o entendimento das crianças de que quanto maior o denominador, menor a parte.

Fazendo uma conexão com o exemplo dos pedaços de bolos e das crianças, o professor pode trabalhar com os alunos a ideia de equivalência e razão, mostrando que se manter à mesma razão do número de crianças para a quantidade de bolos, a quantidade para cada um será a mesma, independente se as variantes bolos e crianças mudarem.

É possível ver que os alunos apresentam certas dificuldades no aprendizado do conteúdo de frações, quando queremos começar a trabalhar com o conteúdo, na revisão de literatura, e em rodas de conversas com professores e estudantes podemos ouvir vários tipos de relatos de dificuldades dos estudantes com esse conteúdo. Pela revisão de literatura, percebemos que há muito tempo essas dificuldades foram analisadas, investigadas, mapeadas por vários pesquisadores.

De acordo com Campos (2011), estudos (BEHR *et al.*, 1992; BEHR *et al.*, 1984; HART, 1986; KAMII; CLARCK, 1995; KERSLAKE, 1986) apontam dificuldades dos alunos na identificação de frações equivalentes, e em especial, quando lidam com frações em situação de parte-todo. Segundo Nunes (2004), um dos fatores que geram dificuldades nos alunos é o fato deles não terem contatos com situações que envolvem frações no seu cotidiano. Para compreender bem o conceito de frações, é necessário que os alunos se tornem capazes de utilizar esse conceito nas diversas situações em que ele é usado. Os alunos não podem ficar detidos com alguns exemplos que na verdade não lhe dão o conhecimento de

forma efetiva sobre frações. Para Lopes (2008), aprendizagem de frações não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudoproblemas sobre pizzas e barras de chocolates.

Grando e Vieira (2006) apontam que as principais dificuldades dos alunos sobre o número decimal estão relacionadas às diferentes formas de representação do número racional e do domínio do sistema de numeração. Para muitos alunos, os números decimais e frações são números diferentes. Muitos não conseguem compreender que a fração é uma forma diferente de representar um número decimal, assim como a porcentagem também é. Sobre as dificuldades enfrentadas pelos estudantes em relação ao estudo dos números racionais, Brolezzi (1996, p.1) destaca que:

[...] ao que tudo indica o ensino elementar de Matemática não consegue construir na mente dos estudantes um conceito de Número Racional que permita sua utilização mais tarde. As operações com racionais são quando muito mecanizadas em torno de algumas regrinhas básicas geralmente confundidas uma com as outras.

Foram realizadas buscas para encontrar provas da Saeb e Prova Brasil, mas essas provas não são disponibilizadas. Assim, foram usadas as questões dos simulados para Prova Brasil (BRASIL, 2011) e Saeb, disponíveis no site do portal do Mec e no site da secretaria de educação do Paraná, que foram produzidas para trabalhar com os alunos. Com o uso dessas questões, foi criado um questionário para avaliar os conhecimentos prévios dessa estudante, sobre o conteúdo de frações.

2.5 Teoria dos campos conceituais

Entender como um indivíduo aprende não é uma tarefa fácil. Do mesmo modo, para o professor entender como trabalhar determinados conteúdos com os alunos também é algo muito difícil. Para que ele consiga preparar aulas que sejam ricas em conhecimentos novos, que sejam prazerosas a ponto de não perder a atenção dos seus alunos, que sejam suficientes para atender de forma igualitária a cada aluno e que facilitem tal aprendizado, o professor precisa de um planejamento muito minucioso, que tenha a capacidade de fazer com que sua aula consiga alcançar todas essas características listadas. Para mapearmos como os

alunos aprendem adições de frações e decidirmos o que explorar a cada etapa, tomamos como base a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1990).

De acordo com Moreira (2002. p.1)

[...]a teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista neopiagetiana que pretende oferecer um referencial mais frutífero do que o piagetiano ao estudo do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem de competências complexas, particularmente aquelas implicadas nas ciências e na técnica, levando em conta os próprios conteúdos do conhecimento e a análise conceitual de seu domínio.

Como discípulo de Piaget, Vergnaud dá sequência aos trabalhos de Piaget, utilizando as estruturas gerais do pensamento. De acordo com Vergnaud (1990), o conhecimento surge a partir de situações-problemas, do enfrentamento dessas situações e as possíveis dificuldades dos alunos são específicas do campo conceitual considerado. Segundo Vergnaud (1983, p. 393), citado por Moreira (2002. p.2),

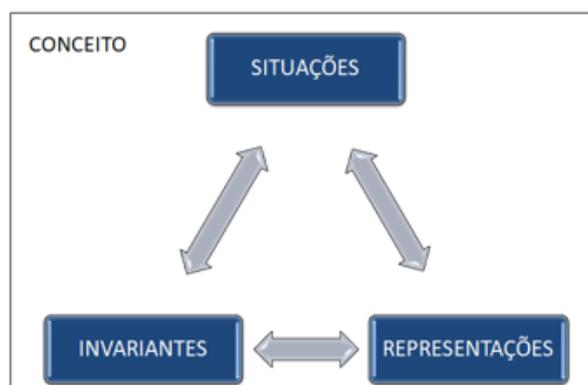
[...] três argumentos principais levaram Vergnaud ao conceito de campo conceitual: 1) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações; 2) uma situação não se analisa com um só conceito; 3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes.

Desse modo, segundo a teoria, o conhecimento é organizado em campos conceituais.

Um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão. (VERGNAUD, 1996b, p. 84)

Para ele , um conceito é definido como uma tríade de conjuntos (S, I , R), onde: **S** é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; **I** são os invariantes (objetos, propriedades e relações) que são reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações propostas no primeiro conjunto; **R** é um conjunto de representações que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e situações.

Figura 1 - Definição de um conceito segundo Vergnaud



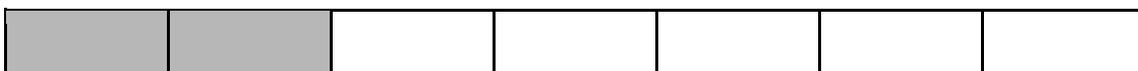
Fonte: Adaptada pelos autores

No momento de resolver um problema, as crianças, involuntariamente, buscam dentre seus conhecimentos, aqueles que possam lhe auxiliar na resolução. Elas mobilizam conhecimentos antigos, conhecimentos matemáticos que já foram internalizados para, assim, mobilizá-los no momento da resolução. Vergnaud diz que essa busca de invariantes e essa organização, recebe o nome de “esquema”. Dentre os invariantes, Vergnaud identifica os conceitos em ação e os teoremas em ação. Ele define como conceito em ação, um conceito considerado pelo sujeito como pertinente, e teoremas em ação, uma proposição tida como verdadeira pelo sujeito ao agir na situação. Um teorema em ação se diferencia de um conceito em ação da mesma forma que um conceito se diferencia de um teorema na matemática. Como uma proposição, um teorema em ação é passível de se testar a sua veracidade. Já os conceitos não. Não se deve confundir o teste de veracidade de uma proposição com a equivalência entre dois conceitos matemáticos, ou entre um conceito matemática e um conceito em ação. Um conceito em ação não é passível de teste de veracidade, mesmo que não corresponda a um conceito matemático convencional. Assim como uma definição não torna um conceito passível de ser testado sua veracidade, a explicitação de um conceito em ação também não.

Os teoremas em ação são proposições que o sujeito assume como verdadeira para resolver uma situação. No entanto, em geral esses teoremas são implícitos, a criança não consegue explicitá-lo. Algumas vezes, essas proposições são válidas do ponto de vista matemático, outras não. Exemplo, é comum o

estudante ao somar frações contar o número de partes tomadas (no exemplo, 5) e o número total de partes (7, no exemplo) da fração.

Exemplo:



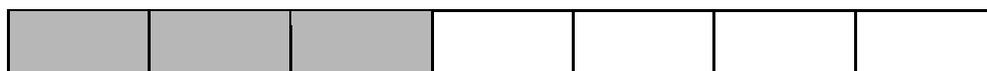
e escrever a fração como

$$\frac{\textit{Partes tomadas}}{\textit{Total de partes}}$$

No exemplo acima

$$\frac{5}{7}$$

No entanto, muitas vezes, o estudante não observa que isso é válido quando se tem partes de mesma área. E culmina por somar as duas frações como:



$$\frac{5}{7}$$

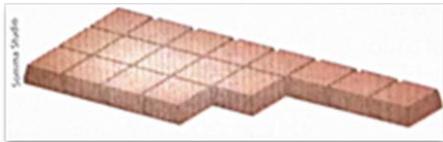
O estudante usa, portanto, um teorema em ação que é válido para ele, mas não tem validade matemática. Já os conceitos em ação, são os conceitos utilizados na resolução das situações, em geral implícitos.

Vergnaud (1996a, p. 202) , “Conceito-em-ação é um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante a uma dada situação”. Um mesmo conceito matemático, como as frações, assume diferentes significados. No caso das frações, têm-se os significados: parte-todo, quociente entre dois números inteiros, medida, razão e operador.

O problema retirado do livro didático “Convergências Matemática”, de Eduardo Chavante (2018, p.122), é um exemplo de fração como parte-todo.

Figura 2 – Problema com fração como parte-todo

Uma barra de chocolate foi dividida em 24 partes iguais. Depois de serem consumidas 7 partes, a barra ficou como mostra a figura abaixo. Qual é a fração que representa a parte de chocolate consumida?



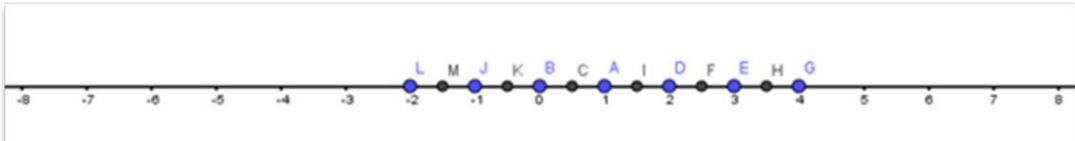
Fonte: Chavante (2018, p.122)

Nesse exemplo, temos que o denominador é o valor no qual a barra é dividida (24) e o numerador é o valor de pedaços da barra que foram consumidas (7), chegando à fração $\frac{7}{24}$.

Já o significado de **Quociente entre dois números** pode ser ilustrado pela situação:

Figura 3 – Problema com fração como número na reta numérica

Na reta numérica a seguir, marque o ponto que representa a fração $\frac{1}{2}$.

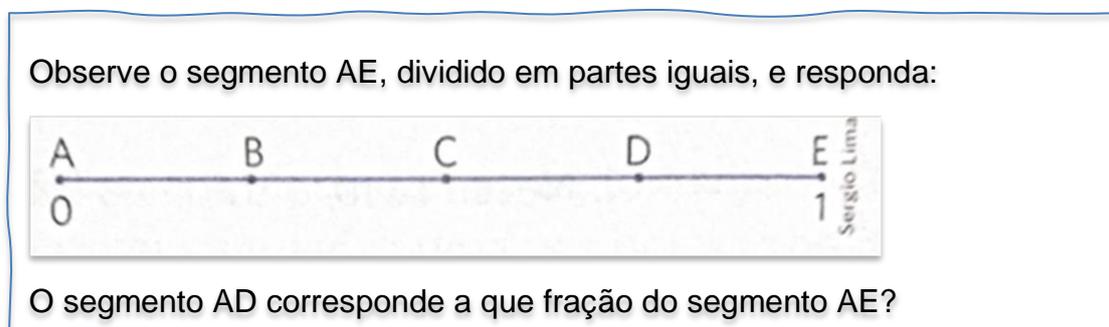


Fonte: elaborado pelo autor

Como pode ser visto na questão, os pontos representam números na reta numérica. Para o(a) aluno(a) marcar a fração $\frac{1}{2}$, é necessário entender a fração como um número racional localizado no ponto médio entre o 0 e o 1.

O significado de medida por ser ilustrado pela situação:

Figura 4 – Fração como medida



Fonte: Chavante (2018, p. 124)

Nesse exemplo, a estudante deve notar que de 0 a 1, foi dividido em quatro partes iguais. Sendo assim, a resposta correta seria usar 3 como numerador, e usar o 4 como denominador.

A fração de quantidade ou operador pode ser ilustrada pelo problema:

Figura 5 – Problema com fração de quantidade

Felícia tem 32 carrinhos em sua coleção, dos quais, $\frac{5}{8}$ ela ganhou de presente e os demais ela comprou. Quantos carrinhos ela ganhou de presente?

Fonte: Chavante (2018, p. 125)

Nesse problema é possível entender que há uma necessidade de calcular apenas uma parte do todo, que no caso, são os $\frac{5}{8}$ da quantidade que é 32. O todo da fração não é uma unidade, mas uma quantidade maior que um. Para resolver, o estudante pode dividir o 32 por 8, encontrando 8 grupos iguais com 4 carrinhos cada um, depois é só escolher 5 grupos desses, chegando à resposta de 20 carros.

O significado de razão pode ser ilustrado pela situação:

Figura 6 – Fração como razão

Para fazer uma mistura de cimento, um mestre de obras usa a razão de 3 para 7, 3 partes de cimento para 7 partes de areia fina. Seu auxiliar foi fazer uma mistura com 14 pás de areia fina, quanto ele teve que colocar de cimento?

Fonte: elaborado pelo autor

Podemos entender uma relação da quantidade de cimento para a quantidade de areia, chegando à razão $\frac{3}{7}$, ou seja, podemos dizer que a relação da quantidade de cimento para a quantidade de areia na razão 3 para 7.

Além do conceito de fração em nossa dissertação, o foco em atuar com adições de frações nos leva ao campo conceitual aditivo. Encontramos embasamentos no campo conceitual aditivo (VERGNAUD, 1982), onde os problemas aditivos são classificados como: Composição, transformação e comparação, além desses há os problemas mistos. Para Magina *et al.* (2001), as três classes (composição, transformação e comparação) apresentam níveis de complexidades distintas, que elas denominam de extensões, e os problemas encaixados nas mais simples situações são conhecidos como protótipos. De acordo com Magina *et al.* (2010), podemos ter as classificações dos problemas como:

Composição: essa classe compreende as situações de parte e todo. Dessa forma, pode-se apresentar aos estudantes os valores de duas ou mais partes e perguntar sobre o valor do todo (classificado como um dos protótipos de problemas aditivos). Alternativamente, pode-se informar o valor do todo e de uma (ou mais) parte(s) e perguntar sobre o valor da parte restante (classificado como um dos problemas de 1ª extensão das estruturas aditivas).

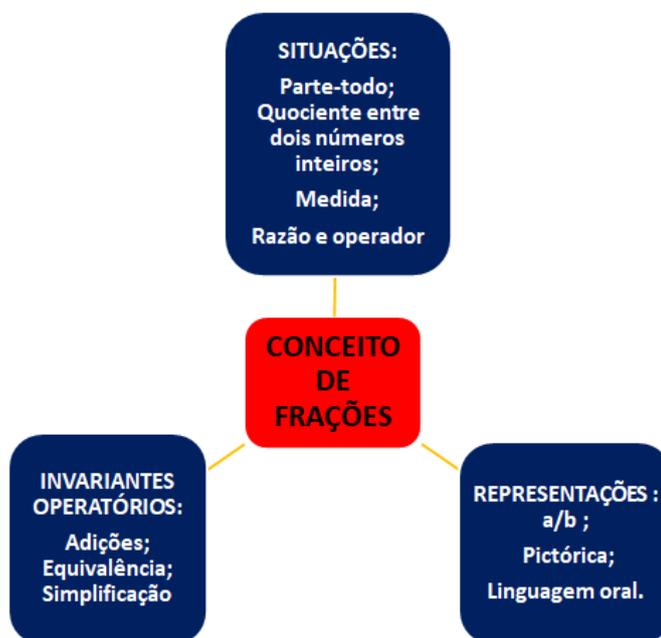
Transformação: nessa classe de problemas a ideia temporal está sempre envolvida. Ela estabelece uma relação entre uma quantidade inicial e uma quantidade final. Há seis situações possíveis, sendo três relacionadas a transformações positivas e três relacionadas às transformações negativas. Os problemas que informam sobre a quantidade inicial e sobre a transformação (positiva ou negativa) são considerados como problemas protótipos. Já os problemas que informam sobre as quantidades iniciais e finais, perguntando sobre o valor da transformação são considerados problemas de 1ª extensão. Por fim, os

problemas que oferecem os valores da transformação e quantidade final, perguntando pela quantidade inicial é considerado como um problema de maior complexidade, enquadrado como de 4ª extensão.

Comparação: nessa classe é possível comparar duas quantidades, denominadas referente e referido, existindo sempre uma relação entre elas. Se o problema oferecer uma das quantidades (referente) e a relação entre elas e perguntar sobre a outra quantidade (referido) têm-se um problema de 2ª extensão. Ao se fornecer as duas quantidades (referente e referido) e perguntar sobre a relação entre elas, os problemas são classificados como de 3ª extensão. E se, as quantidades informadas forem a do referido e da relação, pedindo-se a quantidade do referente, então se trata de um problema de 4ª extensão. (MAGINA *et al.*, 2010, p. 19-20).

As representações são: a/b , pictórica e linguagem oral. Podemos observar em resumo, na figura 7 como serão abordados na pesquisa os esquemas para o conceito de frações.

Figura 7 - Conceito de frações que serão abordados na pesquisa

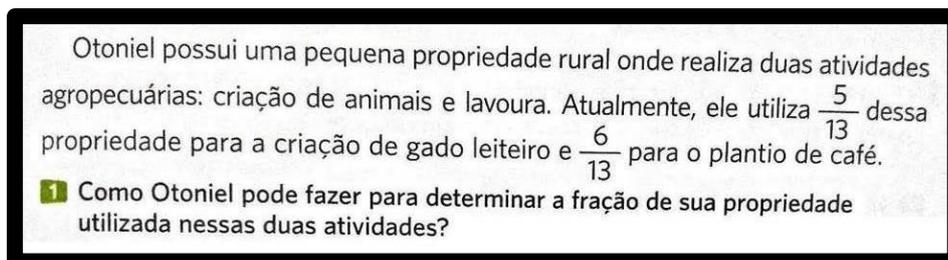


Fonte: Elaborada pelos autores

Para ficar claro ao leitor como serão “analisados”, os problemas de frações e as respostas da estudante, iremos propor dois exemplos que envolvem os problemas que ela irá responder, nos atendo apenas para problemas do tipo composição. As questões serão chamadas de exemplo 1 e exemplo 2. Os

exemplos foram tirados do livro de matemática “convergências matemática”, do escritor Eduardo Chavante.

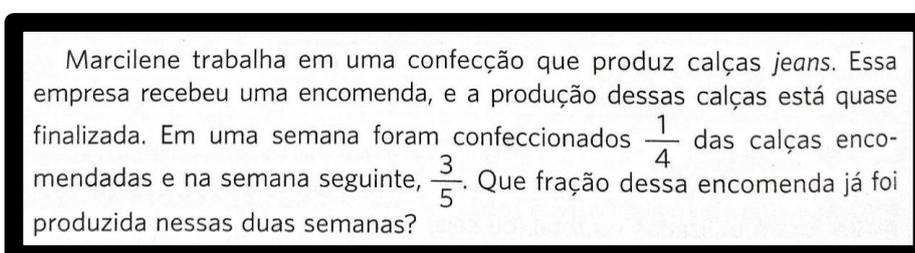
Figura 8 - Exemplo 1



Fonte: Chavante (2018, p. 137)

No primeiro exemplo, podemos observar que é um problema de adição com frações com denominadores iguais, com estrutura de adição como composição com total desconhecido, que envolve a representação a/b e a fração é do tipo parte todo. Em termos do cálculo das relações, ou ainda, do cálculo relacional, a resolução consiste primeiro em o aluno interpretar a situação e perceber que para encontrar a fração total utilizada do terreno, deve somar as frações de cada parte utilizada. Logo, vem uma parte do cálculo numérico, em que o aluno deve perceber que como os denominadores são iguais, deve-se conservar o denominador e somar os numeradores. Logo, depois, voltando a uma habilidade de cálculo relacional, precisará interpretar que o resultado da operação é corresponde a fração total utilizada do terreno.

Figura 9 - Exemplo 2



Fonte: Chavante (2018, p. 138)

No exemplo 2, temos um problema de adição com frações com denominadores diferentes e não múltiplos, com estrutura de adição como composição com total desconhecido, que envolve a representação a/b e a fração é do tipo parte todo. Como cálculo relacional, a resolução consiste primeiro em o aluno interpretar a situação e perceber que para encontrar a fração total da

encomenda produzida nas duas semanas, deve somar a fração da encomenda produzida em cada semana. Logo, vem uma parte do cálculo numérico, em que o aluno deve perceber que como os denominadores são diferentes, deve-se então buscar frações equivalentes as iniciais de modo que se chegue a um mesmo denominador. Uma maneira é multiplicar os dois denominadores e outra é achar o MMC entre os dois denominadores. Para este problema, os dois invariantes levam ao mesmo denominador. Depois de encontradas as frações equivalentes, deve conservar o denominador e somar os numerados. Logo, depois, voltando a uma habilidade de cálculo relacional, precisará interpretar que o resultado da operação é corresponde a fração total produzida da encomenda.

3. MÉTODO

A pesquisa trata-se de uma prototipação inicial de um dispositivo que auxilie o professor nas escolhas de recursos para a parte externa de suas aulas com a metodologia de sala de aula invertida. O protótipo do dispositivo foi construído como um mecanismo construído com base em uma planilha eletrônica, em que o professor cria um banco de vídeos com a avaliação de vídeos pesquisados ou criados por ele, a partir de uma lista de variáveis importantes para a aprendizagem do tema em foco. Além disso, no dispositivo são inseridos a avaliação de estudante a cada momento. Ao corrigir o protocolo do aluno, o professor dá entrada na situação do aluno, e o dispositivo, como retorno, oferta os vídeos que mais exploram os conhecimentos que o aluno mostrou ter dificuldades.

O aprimoramento da prototipação do dispositivo aconteceu com as seguidas respostas da estudante a testes propostos. Por meio de tais respostas foi possível identificar as habilidades já desenvolvidas pelo sujeito (estudante) e as habilidades que ele precisava desenvolver e indicar os vídeos considerados suficientes para sanar tais dificuldades. A cada etapa novas características são elencadas e tem-se a evolução do protótipo.

Como um estudo, ainda em um primeiro momento do dispositivo, consideramos ainda a testagem laboratorial do dispositivo, de forma iterada com apenas um estudante, em estudo de caso.

3.1 Sujeito do estudo

O estudo se desenvolveu com uma estudante do 1º ano do ensino médio do IFPE (Instituto Federal de Pernambuco) - campus Vitória. A partir de conhecimento das dificuldades em matemática da estudante, particularmente no conteúdo de frações, a estudante foi selecionada. O contato com ela foi acessível e tivemos a sua aceitação para realizar a experimentação mesmo em momento de férias, garantindo o anonimato. Foi explicado à estudante, a garantia de anonimato, e que ela poderia a qualquer momento se retirar da pesquisa. Foi garantido, ainda, buscar que ela sanasse as dificuldades identificadas na pesquisa, mesmo após o final da pesquisa.

3.2 Um panorama do design do dispositivo

O design do protótipo do dispositivo (o qual passaremos a chamar apenas de dispositivo) foi composto até o momento de quatro grandes etapas. Ele partiu de levantamentos preliminares, uma primeira prototipação, e suas evoluções de forma iterada com testagens em um estudo de caso, como detalhado a seguir:

1. Levantamentos de recursos preliminares:
 - a. Levantamento nos documentos oficiais de habilidades requeridas para a aprendizagem de fração;
 - b. Montagem de um teste sobre o conteúdo de frações, quanto às representações, significados e problemas com frações, tendo por base as habilidades.
2. Prototipação da versão inicial do dispositivo:
 - a. Na primeira etapa, foi feita a aplicação do teste com a estudante, selecionada por apresentar dificuldades em frações;
 - b. Análise do teste e do protocolo da estudante para prototipação de uma primeira versão do dispositivo;
 - c. Criação do primeiro banco de vídeos a serem utilizados no dispositivo;
 - d. Definição das operações de identificação dos melhores materiais de suporte para sanar as dificuldades da estudante e execução, com identificação dos vídeos a serem assistidos.
3. Revisão e aprimoramento para a 2ª versão do dispositivo:
 - a. Recorte do conteúdo tratado para habilidades relativas às adições e equivalência de frações, com diferentes representações, estruturas e tipos de frações, tendo por base a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990);
 - b. Construção de um segundo teste, com base na restrição das habilidades elencadas para se trabalhar com o sujeito, apenas com os conteúdos de equivalência e adições de frações com denominadores iguais ou diferentes (múltiplos e não múltiplos), tendo a simplificação e conversão entre representações habilidades necessárias à resolução dos problemas;
 - c. Sessão de vídeos, seguida de resposta ao teste pela estudante;

- d. Aprimoramento do dispositivo, até a emissão de relatórios sobre o desenvolvimento do estudante e vídeos a serem escolhidos;
 - e. Inserção dos dados do protocolo da estudante no dispositivo.
4. Testagem da 2ª versão do dispositivo
- a. Revisão do Banco de vídeos para escolha dos vídeos e testagem com emissão dos relatórios, com indicação dos vídeos a serem assistidos;
 - b. Na terceira etapa, houve a criação de um novo teste para a estudante, com base nas habilidades que ainda não tinha se desenvolvido e habilidades mais complexas que as que já tinha demonstrado dominar.
 - c. Inserção dos dados do protocolo da estudante no dispositivo para emissão de relatório de avanço dela e perspectivas futuras para melhoria do dispositivo.

3.2.1 Levantamentos de recursos preliminares

A construção do primeiro protótipo do dispositivo foi feita por meio de um levantamento sobre o conteúdo de frações, no que se refere às habilidades a serem desenvolvidas para tal conteúdo, segundo os documentos oficiais. O primeiro levantamento de conhecimentos para o conteúdo de frações que são exigidos pelos documentos oficiais, BCC - Base Curricular Comum (SEE-PE, 2008), a BNCC - Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) e um mais antigo PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) foi realizado. Na listagem desses conhecimentos, foi possível ver a grande abrangência que se tem com o conteúdo em estudo.

Quadro 2 - Conhecimentos com base nos documentos oficiais

	Conhecimentos sobre fração
Habilidades	Conversão de fração para número decimal
	Conversão de fração de área para a representação a/b
	Conversão da representação p/q para fração de área
	Simplificação de frações
	Identificação de frações equivalentes
	Cálculo da adição de fração
	Identificação dos termos da fração
Atitudes	Revisar respostas de questões anteriores com base na resolução da outra questão
	Sempre deixar a fração na forma irredutível
Significados	Parte-todo
	Fração de quantidade ou operador multiplicativo
	Fração como divisão
Tipos	Fração decimal

Fonte: Elaborada pelos autores

Uma listagem das habilidades relativas à fração foi construída, revelando a abrangência e amplitude do conteúdo a tratar. A partir desse levantamento dos conteúdos, fizemos buscas por exercícios em livros didáticos e nos simulados para a prova Brasil e Saeb que estão disponíveis no site do portal do MEC e no site da Secretaria de Educação do Paraná, que envolvessem tal conteúdo buscando as habilidades listadas. Desse modo, vimos que muitas questões abordavam várias habilidades, e isso nos levou a aumentar o campo de busca. Mas, o tempo para a execução da pesquisa e a necessidade de fazermos um dispositivo que seja validado, nos fizeram restringir as habilidades a serem investigadas.

Iniciamos com a aplicação de um teste (Apêndice 1) envolvendo problemas com frações para saber o conhecimento sobre o conteúdo de frações e para identificar os tipos de representações que a estudante apresenta dificuldades, já que estamos analisando o conteúdo de frações sem ter um filtro sobre o que será

abordado. Sabendo onde se encontram as dificuldades, poderemos seguir com as buscas de materiais. Então, esse primeiro teste pretendeu buscar dar um direcionamento na pesquisa ao identificar o conhecimento inicial da estudante. As habilidades relacionadas estão listadas no quadro a seguir.

Quadro 3 - Habilidade(s) abordada(s) no primeiro teste

Questão	Habilidades
1	<ul style="list-style-type: none"> ● Representação da fração: $\frac{a}{b}$, para $b \neq 0$; ● Conversão da forma decimal para a forma fracionária $\frac{a}{b}$, para $b \neq 0$; ● Reconhecimento dos termos da fração(numerador e denominador); ● Significado da fração: parte-todo.
2	<ul style="list-style-type: none"> ● Significado da fração: operador multiplicativo.
3	<ul style="list-style-type: none"> ● Significado da fração: operador multiplicativo.
4	<ul style="list-style-type: none"> ● Representação da fração: <ul style="list-style-type: none"> ➤ $\frac{a}{b}$, para $b \neq 0$; ➤ Fração de área; ● Reconhecimento dos termos da fração(numerador e denominador); ● Significado da fração: parte-todo.
5	<ul style="list-style-type: none"> ● Representação da fração $\frac{a}{b}$, para $b \neq 0$; ● Significado da fração: operador multiplicativo.
6	<ul style="list-style-type: none"> ● Representação da fração: $\frac{a}{b}$, para $b \neq 0$; ● Significado da fração: parte-todo; ● Equivalência de frações; ● Simplificação de frações.
7	<ul style="list-style-type: none"> ● Representação da fração: <ul style="list-style-type: none"> ➤ $\frac{a}{b}$, para $b \neq 0$; ➤ Fração de área; ● Reconhecimento dos termos da fração(numerador e denominador); ● Significado da fração: parte-todo.
8	<ul style="list-style-type: none"> ● Representação da fração: $\frac{a}{b}$, para $b \neq 0$; ● Reconhecimento dos termos da fração(numerador e denominador); ● Significado da fração: parte-todo.
9	<ul style="list-style-type: none"> ● Representação da fração: $\frac{a}{b}$, para $b \neq 0$; ● Conversão da forma decimal para a forma fracionária $\frac{a}{b}$, para $b \neq 0$; ● Reconhecimento dos termos da fração(numerador e denominador); ● Significado da fração: parte-todo.

Fonte: Elaborado pelos autores

3.2.2 Prototipação da versão inicial do dispositivo

Após a aplicação desse teste com a estudante, de coletar seu protocolo e registrar seu relato sobre suas dificuldades com adições de frações e frações equivalentes, as respostas foram analisadas. Um relatório do que foi realizado foi sendo preenchido para dar um direcionamento e deixar tudo registrado sobre o desempenho da estudante. A partir daí foi feita a primeira prototipação do dispositivo, com as habilidades esperadas da estudante e as habilidades que ela demonstrou não ter desenvolvido ainda.

Com base nessa listagem de habilidades, foi criada um banco de vídeos, por meio de uma matriz na planilha eletrônica. Foram realizadas buscas no Youtube por vídeos que pudessem dar embasamentos à estudante. Esses vídeos, conforme a ideia de sala de aula invertida, não deveriam ser vídeos extensos. Como um dos objetivos da pesquisa é montar e validar estratégia de avaliação de vídeos, foi necessário cautela nessas buscas para que os vídeos selecionados não fossem extensos demais, entediante ou que fossem suficientes para sanar as dificuldades dos estudantes. Não determinamos uma obrigatoriedade quanto aos tamanhos dos vídeos, mas tentamos não ultrapassar 10 minutos de duração para que os alunos não sintam o desconforto e desinteresse.

Os vídeos localizados foram analisados antes de serem propostos aos alunos. Deve-se fazer uma análise na abordagem do conteúdo, correção conceitual, as habilidades trabalhadas e uma aproximação com a necessidade do aluno com o que é proposto no vídeo. Tinha-se por objetivo que o professor pudesse não usar o tempo de sala de aula para expor o conteúdo e sim, trabalhar com problemas, fazer resoluções de listas de exercícios, discussões sobre o tema e tirar as possíveis dúvidas.

Um primeiro design das operações com os dados para se identificar os vídeos mais que melhor sanariam as dificuldades do estudante foram elaboradas e testadas. Posteriormente, os vídeos foram assistidos novamente de forma a ter uma primeira validação das operações.

3.2.3 Revisão e aprimoramento para a 2ª versão do dispositivo

Envolver todas as linhas de conhecimento para esse conteúdo tornou-se inviável, para o tempo disponível no curso de mestrado, considerando o tempo hábil para tais análises e criação do dispositivo e do banco de vídeos. Desse modo, quando fomos elencando as habilidades a serem analisadas, percebemos que se nos determos a pelo menos algumas habilidades, conseguiríamos validar, ou não, o dispositivo.

Assim, foi feito um recorte do conteúdo tratado para habilidades relativas às adições e equivalência de frações, com diferentes representações, estruturas e tipos de frações, tendo por base a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), como pode ser visto na figura a seguir:

Figura 10 – Extrato da primeira matriz de conhecimento

Tipo	Conhecimento	Código	Grupo	Habilidade	Código	Estrutura	Significac	Repres	Dificuldade
Habilidade do Cálculo numérico	Adição de frações	HN1							
	Simplificação e Reconhecimento de frações equivalentes	HN2				1	1	1	Inter
	Converter uma fração em outra representação	HN3				1	1	2	Inter
Habilidade do Cálculo relacional						1	2	1	Inter
	Interpretação do problema	HR1				1	2	2	Inter
	Interpretação do resultado das operações em relação ao problema	HR2				1	3	1	Inter
						1	3	2	Inter
Significados de fração						1	4	1	Inter
	Parte-todo	S1				1	4	2	Inter
	Fração de quantidade ou operador	S2				1	5	1	Inter
	Número	S3				1	5	2	Inter
	razão	S4				2	1	1	Inter
	medida	S5				2	1	2	Inter
Estruturas aditivas						2	2	1	Inter
	Composição com total desconhecido	E1				2	2	2	Inter
	Composição com parte desconhecida	E2				2	3	1	Inter
	Comparação aditiva (Equalização)	E3				2	3	2	Inter
Representações de fração						2	4	1	Inter
	a/b ou A sobre B	R1				2	4	2	Inter
	Fração de área	R2				2	4	1	Inter

Fonte: Elaborada pelo autor

Em relação a busca de vídeos, foi criado um banco de vídeos com os conteúdos de simplificação de frações, para frações equivalentes e adição de frações com denominadores iguais ou diferentes.

Um segundo teste foi criado para se trabalhar apenas com os conteúdos de equivalência e adições de frações com denominadores iguais ou diferentes (múltiplos e não múltiplos), tendo a simplificação e conversão entre representações habilidades necessárias à resolução dos problemas. A partir das respostas da estudante a esse segundo teste, foi feita a inserção do protocolo da estudante no dispositivo, para ser feita a escolha dos vídeos julgados pelo próprio

dispositivo, suficientes para ela, tendo assim mais um aprimoramento do dispositivo e o preenchimento do relatório do desempenho da estudante.

Após as respostas da estudante a esse segundo teste, foi feito o preenchimento do protocolo da estudante no dispositivo, gerando um novo relatório sobre as habilidades que a estudante já demonstrou ter alcançado e as habilidades que ela ainda precisa alcançar. Essa inserção do protocolo da estudante é fundamental. Por meio dela, é possível identificar as lacunas que ainda precisam ser preenchidas, em relação às habilidades desenvolvidas pela estudante. Após os preenchimentos do protocolo e do relatório no dispositivo, foi feito o cruzamento da matriz conhecimento com a matriz banco de vídeos, encontrando assim, os vídeos que previamente analisados, são escolhidos como suficientes para sanar as dificuldades que a estudante ainda tem.

3.2.4 Testagem da 2ª versão do dispositivo

Após aprimoramento do dispositivo e o preenchimento do relatório, foi realizado uma revisão no banco de vídeos e foi necessário fazer uma nova busca por vídeos que abordassem esses temas, pois foi notado que muitos deles estavam abordando as mesmas habilidades, mas que não eram as habilidades que a estudante precisava obter, sendo assim, os vídeos foram listados mas não usados. Nessa nova busca, 5 novos vídeos foram encontrados, totalizando assim, em 22 vídeos registrados. Após a inclusão desses novos vídeos, o relatório sobre a evolução da estudante foi atualizado, indicando os vídeos que foram selecionados pelo próprio dispositivo.

Dando continuidade às testagens, o terceiro teste foi criado com questões que envolvessem os conteúdos de equivalência e adições de frações com denominadores iguais ou diferentes (múltiplos e não múltiplos). Esse novo teste abordou as habilidades que a estudante precisava obter, que estavam listadas no relatório, assim como habilidades mais complexas do que as habilidades que ela já havia desenvolvido. Após as análises das novas respostas, foi feita a inserção dos novos dados do protocolo da estudante no dispositivo e em seguida, um

relatório de evolução da estudante, juntamente com as perspectivas de pesquisas futuras para a melhoria do dispositivo, pois foi percebido que existem algumas limitações com o uso do dispositivo, assim como perspectivas para o seu aprimoramento.

3.3 A coleta de dados

Nesta seção, serão descritas as etapas das coletas, o sujeito que foi analisado, a estrutura da análise, as questões que foram escolhidas, as respostas da estudante a essas questões, os vídeos que foram escolhidos e em seguida os resultados obtidos.

Em uma sessão, cada um dos testes foi aplicado com a estudante, solicitando que ela deixasse os registros de resolução no papel. Antes da resolução do teste, era solicitado que a estudante assistisse aos vídeos selecionados.

Um diário de bordo com observações sobre ações e relatos da estudante era realizado pelo pesquisador.

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo traz a análise e discussão dos resultados organizados a partir de 2 ciclos de elaboração e testagem do dispositivo. Iniciamos com a aplicação de um teste cujas habilidades centrais relacionadas são adições de frações com denominadores iguais e diferentes, simplificação de frações e reconhecimento de frações equivalentes. O capítulo está estruturado com 4 subtópicos, com legendas descritas da seguinte maneira: 5.1 - Panorama da análise e da discussão dos resultados; 5.2 - Construção e Análise da prototipação da versão inicial do dispositivo; 5.3 - Construção e análise das questões que compõem o 2º teste; 5.4 - Revisão e aprimoramento para a 2ª versão do dispositivo; e por fim, o 5.5 - Discussão dos resultados.

4.1 Panorama da análise e da discussão dos resultados

A análise e discussão dos resultados se deu com o preenchimento de relatórios, com anotações do diário de bordo feitas pelo pesquisador, com as análises dos protocolos da estudante, que aqui chamamos de respostas e com o passo a passo do aprimoramento do dispositivo, como pode ser detalhado a seguir:

1. Construção e Análise da prototipação da versão inicial do dispositivo:
 - a. Análise das respostas da estudante ao 1º teste e construção da legenda da matriz de desenvolvimento;
 - b. Desenvolvimento do banco de vídeos;
 - c. Definição de operações para identificar melhor(es) vídeo(s) para a estudante assistir.
2. Análise das questões que compõe o 2º teste:
 - a. Construção das questões e descrição das habilidades relacionadas;
 - b. Síntese dos conhecimentos tratados nas situações a luz da TCC;
 - c. Análise do teste respondido pela estudante.
3. Prototipação do dispositivo:
 - a. Aprimoramento do dispositivo com base nos protocolos da estudante;
 - b. Estruturamento do dispositivo com uso da planilha do excel;

- c. Listagem das legendas usadas nas matrizes para o preenchimento do dispositivo;
 - d. Listagem das matrizes criadas para ter como resultado, os cruzamentos dos seus dados;
 - e. Quantidade de vídeos encontrados para serem propostos para a estudante;
 - f. Escolha dos vídeos considerados suficientes para a estudante com base no preenchimento do dispositivo.
4. Revisão e aprimoramento para a 2ª versão do dispositivo
- a. Construção e Análise do teste respondido pela estudante após assistir aos vídeos;
 - b. Uso do dispositivo e relatório de evolução.

4.2 Construção e Análise da prototipação da versão inicial do dispositivo

Nesta seção, serão descritos: como foram realizadas as análises das respostas da estudante ao primeiro teste, quais matrizes foram criadas e como foram preenchidas, a quantidade de vídeos encontrados e a descrição de como se foram feitas as escolhas dos vídeos julgados adequados para abordar as dificuldades encontradas pela estudante.

4.2.1 Análise das respostas da estudante ao 1º teste e construção da legenda da matriz de desenvolvimento

Com a matriz de conhecimento montada (figura 17) e o teste inicial elaborado (Apêndice 1), como já discutido na metodologia, partimos para a aplicação do diagnóstico com a estudante. A estudante recebeu primeiramente um primeiro teste diagnóstico sobre seu conhecimento de adição de frações. Foi visto que a estudante fez os cálculos mentalmente, sem os registros. Com isso, ela precisava repetir a leitura do enunciado mais vezes para poder retomar seu raciocínio. Isso nos levou a solicitar que em um próximo teste ela deixasse todos os cálculos explícitos, mesmo sem retirar os itens.

Após a entrega do teste resolvido pela estudante, foi feita a identificação e análise das respostas. À luz da matriz de conhecimentos, de materiais

informativos (inicialmente vídeos), foi formado o banco de vídeos a serem propostos a ela. Para montagem da matriz dificuldade, consideramos três possibilidades, a resposta poderia mostrar: (a) que a estudante apresentava dificuldade, que (b) ela dominava ou (c) não permitir uma conclusão. Para cada caso, definimos a legenda: 1 = apresenta dificuldade; 0 = Não apresenta dificuldade. Caso não fosse possível avaliar se a estudante apresenta ou não dificuldade a célula corresponde ficava vazia. A quadro a seguir mostra como foi montada essa matriz.

Quadro 4 - Matriz de conhecimento da estudante.

	Conhecimentos sobre fração	Dif
Habilidades	Conversão de fração para número decimal	1
	Conversão de fração de área para a representação a/b	1
	Conversão da representação p/q para fração de área	
	Simplificação de frações	1
	Identificação de frações equivalentes	0
	Cálculo da adição de fração	
	Identificação dos termos da fração	1
Atitudes	Revisar respostas de questões anteriores com base na resolução da outra questão	1
	Sempre deixar a fração na forma irredutível	1
Significados	Parte-todo	
	Fração de quantidade ou operador multiplicativo	0
	Fração como divisão	
Tipos	Fração decimal	

Fonte: Elaborada pelos autores

A matriz classificava os conhecimentos em habilidades, atitudes e dentre os conceitos considerava outras classificações como significados e tipos de frações.

4.2.2 Desenvolvimento do banco de vídeos

Com base nessa matriz dos conhecimentos da estudante, o Banco de vídeos foi construído, e preenchido com vídeos identificados em uma busca. Foram feitas buscas por vídeos no Youtube sobre frações que se aproximam das necessidades da estudante registradas na matriz.

Quadro 5 - Quantidade de vídeos encontrados e escolhidos

Habilidades	Vídeos encontrados	Vídeos escolhidos
Simplificação de frações	10	5
Frações equivalentes	9	4
Adição de frações com denominadores iguais	3	3
Adição de frações com denominadores diferentes	11	5

Fonte: Elaborada pelos autores

Para “simplificação de frações” (string de busca), foram encontrados 10 vídeos, mas ao utilizarmos o filtro de vídeos com menos de 10 minutos, restaram apenas 5 vídeos. Para “frações equivalentes”, encontramos 9 vídeos no total, mas só 4 foram escolhidos, devido aos mesmos filtros. Para “adição de frações com denominadores iguais”, encontramos 3 vídeos no total e todos atendem aos filtros. Já para “adição de frações com denominadores diferentes”, encontramos 11 vídeos ao todo, dos quais apenas 5 foram escolhidos.

Na quadro a seguir, pode ser visto como ficou a matriz com os vídeos.

Quadro 6 - Banco de vídeos

	Conhecimentos sobre fração	Víd. 1	Víd. 2	Víd. 3	Víd. 4	Víd. 5	Víd. 6	Víd. 7
Habilidades	Conversão de fração para número decimal	0	1	1	0	1	0	0
	Conversão de fração de área para a representação a/b	1	1	0	0	0	1	1
	Conversão da representação p/q para fração de área	1	1	0	0	0	0	1
	Simplificação de frações	0	0	0	1	0	0	0
	Identificação de frações equivalentes	0	0	1	1	1	0	0
	Cálculo da adição de fração	1	0	0	1	0	0	1
	Identificação dos termos da fração	1	1	1	1	0	0	0
Atitudes	Revisar respostas de questões anteriores com base na resolução da outra questão	0	0	0	0	0	0	0
	Sempre deixar a fração na forma irredutível	0	0	0	0	0	0	0
Significados	Parte-todo	1	1	1	1	0	0	0
	Fração de quantidade ou operador multiplicativo	0	1	0	0	0	0	1
	Fração como divisão	1	0	1	1	1	0	0
Tipos	Fração decimal	0	1	1	0	1	0	0

Fonte: Elaborada pelos autores

Para os vídeos, a legenda foi que “1”, o vídeo aborda o conteúdo e “0” o vídeo não aborda.

4.2.3 Operações de identificação de vídeos adequados a estudante

Foi feito o uso do banco de vídeos e da matriz de desenvolvimento da estudante para construir operações que pudessem determinar o quão cada vídeo se aproxima ou não de dar suporte à estudante para superar suas dificuldades. Para tanto, fez-se a diferença entre o vetor das dificuldades e o vetor do vídeo, depois calculou-se a soma dos módulos de cada componente do vetor resultante. Verificou-se que os vídeos 2 e 4 são os que mais se aproximam das necessidades registradas pela matriz sobre as dificuldades da estudante. No quadro 7, são apresentados os nomes dos vídeos escolhidos com seus devidos *links*.

Quadro 7 - Identificação dos vídeos

Nome do vídeo		Link
19	OPERAÇÕES COM FRAÇÕES - SOMA	https://www.youtube.com/watch?v=8j2IXOiDh7U
20	FRAÇÃO 5 FRAÇÕES EQUIVALENTES	https://youtu.be/cNz9Qi8oNZ0

Fonte: Elaborada pelos autores

4.3 Construção e análise das questões que compõem o 2º teste

Após a escolha dos vídeos, foi realizada uma nova busca por questões que envolvessem frações e que estivessem de acordo com a necessidade da estudante segundo a matriz de dificuldades. Na construção do segundo teste, foi levado em consideração o nível de desenvolvimento da estudante, as habilidades a dominar e as habilidades trabalhadas nos vídeos.

4.3.1 Construção das questões e descrição das habilidades relacionadas

Nesta seção, iremos ver os tipos de problemas que foram propostos no 2º teste, que envolveram apenas adição, simplificação e equivalência de frações. Para cada questão, as frações serão analisadas quanto aos tipos de significados dos números racionais, como parte-todo, quociente entre dois números inteiros, medida, razão e operador. Serão descritos se as operações de adições são feitas com denominadores iguais ou diferentes, se a estrutura do problema é de comparação, composição ou transformação.

Figura 11 - Questão 1.

1. Regina, Bruno, Carlos e Mariana participaram de uma olimpíada de Matemática. Do total das questões propostas Regina acertou $\frac{2}{5}$, Bruno acertou $\frac{1}{2}$, Carlos acertou $\frac{3}{8}$ e Mariana acertou $\frac{2}{4}$. Houve um empate entre dois deles. Identifique os dois participantes que acertaram o mesmo número de questões.

- Regina e Bruno
- Bruno e Carlos
- Carlos e Mariana
- Bruno e Mariana

Fonte: SEE-PR, 2009

A primeira questão, as frações aparecem com o significado de parte-todo, pois analisa o total de questões respondidas sobre o total de questões propostas. A habilidade central dessa questão é reconhecer as frações equivalentes ao fazer a simplificação. A alternativa correta para esta questão é a afirmação 4, isto é, Bruno e Mariana têm frações equivalentes. Para resolvê-la, a estudante terá que reconhecer que a fração $\frac{2}{4}$ pode ser simplificada, resultando em $\frac{1}{2}$ que é igual à quantidade de acertos de Bruno.

Figura 12 - Questão 2

2. Pensando em modernizar sua casa, uma arquiteta desenhou uma faixa na parede de seu quarto, como mostra a figura abaixo, que será pintada de azul e rosa. Até o momento, o pintor só utilizou a tinta azul. A fração que representa a parte pintada da faixa é igual a:



- 2/4
- 8/4
- 4/12
- 4/2

Fonte: SEE-PR, 2009

Nesta questão, podemos observar o significado de fração como parte-todo. A questão envolve a habilidade de simplificação de fração e equivalência, assim como a habilidade de converter uma fração de área para uma fração representada por a/b . Para acertá-la, a estudante terá que concluir que o todo é 8, pois são 8 triângulos ao todo, e que a parte é 4, porque foram pintados 4 triângulos de azul. A fração correspondente à situação seria $4/8$, mas pelas alternativas, percebe-se que há uma necessidade de simplificar fração $4/8$, chegando em $2/4$. Essa não é a forma irredutível dessa fração, mas é a resposta esperada.

Figura 13 - Questão 3

3. Marque a alternativa que apresenta uma fração equivalente a $2/5$, com numerador 16.

- 40/16
- 16/40
- 16/56
- 16/5

Fonte: SEE-PR, 2009

Para essa questão, as habilidades mobilizadas são identificar frações equivalentes e conhecer os termos dos elementos da fração. Para encontrar a resposta correta, a estudante precisa igualar as frações pois elas são equivalentes, terá que perceber que a fração $\frac{2}{5}$ já está na forma irredutível, mas que a fração no qual está igualada tem numerador 16. Então, percebe-se que esse 2 foi multiplicado por 8, para ter dado 16. Assim, para descobrir o denominador, deverá multiplicar o 5 por 8, encontrando como resposta 40 e a fração vai ser $\frac{16}{40}$. Analisando as alternativas, podemos chegar cada alternativa foi construída a partir de um tipo de erro: A primeira alternativa, indica uma falta de domínio do da posição do numerador e do denominador. A terceira alternativa, pode-se obter ao encontrar o denominador, o 40, e somar com o numerador, deixando como denominador o resultado da adição, o 56; A quarta alternativa, pode ser obtida ao se encontrar a fração correta $\frac{16}{40}$ e simplificar apenas o denominador, ou que, por serem frações equivalentes, o denominador deveria o mesmo.

Figura 14 - Questão 4

4. A figura mostra duas barras idênticas de chocolate que foram divididas, cada uma delas, em partes iguais. A área destacada representa a quantidade de chocolate consumido por uma pessoa. A quantidade total de chocolate consumido, indicado na figura abaixo, pode ser representada por um número racional na forma fracionária. Qual é esse número?



$\frac{8}{11}$
 $\frac{8}{12}$
 1
 $\frac{11}{8}$

Fonte: SEE-PR, 2009

Para a questão 4, podemos ver que a habilidade em ação é interpretar as frações que correspondem às partes consumidas das barras de chocolates. Após a formalização da fração, é necessário que se faça uma soma, pois no enunciado

pede-se a quantidade total de chocolates consumidos. Essa soma será feita com frações com denominadores diferentes. Dessa forma, o problema aditivo é caracterizado como um problema do tipo composição, pois existem duas partes que se juntam para formar um todo. Para resolução, a estudante teria que encontrar as frações $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{4}$ que correspondem às partes comidas e fazer a soma dessas frações, chegando em $\frac{11}{8}$. Se fosse marcada a segunda alternativa, teríamos a conclusão que a ela somou os numeradores e os denominadores; se fosse marcada a terceira alternativa, veríamos que a ela poderia ter somado os numeradores chegando a 8 e tê-lo dividido pelo mmc (mínimo múltiplo comum), dos denominadores, que é 8, chegando ao resultado 1; caso tivesse marcado a última alternativa, veríamos que ela conseguiu identificar as frações, ter feito a soma, mas que apresenta dificuldade na representação da fração com relação às posições do numerador e denominador.

Figura 15 - Questão 5

5. Um fazendeiro semeia $\frac{2}{5}$ de sua fazenda com milho e $\frac{3}{7}$ com soja. Qual é a fração que representa o total semeado?

- 29/35
- 35/29
- 5/35
- 5/12

Fonte: SEE-PR, 2009

Para a questão 5, podemos ver que ela é do tipo composição, pois existem duas partes que se juntam para formar um todo, envolvendo soma de frações com denominadores diferentes. A resposta correta é a primeira alternativa. Observando as outras alternativas, podemos chegar a conclusão que: a segunda alternativa pode ser obtida ao se fazer a soma das frações, mas apresenta dificuldades na representação da fração na posição do numerador e do denominador; se for marcada a terceira alternativa, podemos entender que a ela somou os numeradores, e fez o mmc correto dos denominadores; se for marcada a quarta alternativa, percebemos que foi feita soma dos numeradores e dos denominadores.

Figura 16 - Questão 6

6. Para comemorar o aniversário de Maria, o seu pai comprou uma pizza grande para que todos da família pudessem comer. Essa pizza foi dividida em 16 pedaços iguais. Maria se adiantou e comeu 6 pedaços de pizza e Marta, sua irmã, comeu 4 pedaços de pizza. Qual é a fração que corresponde ao total de pizza comido por elas?

10/32

5/16

5/8

10/8

Fonte: SEE-PR, 2009

Para a questão 6, podemos ver que ela envolve um problema de composição aditiva, pois existem duas partes que se juntam para encontrar um todo, ela envolve ainda a habilidade de simplificação e equivalência. A resolução dessa questão pode ser feita de duas formas: pode ser compreendido para a situação duas frações, por serem duas pessoas, $6/16 + 4/16$, chegando à resposta $10/16$ e em seguida, após a simplificação, $5/8$; ou pode ser feita imaginando o total de pedaços comidos sobre o total de pedaços existentes originalmente, $10/16$ e após a simplificação, $5/8$. Caso a primeira alternativa tenha sido marcada, poderíamos entender que a estudante fez a soma dos numeradores e denominadores; se for marcada a segunda alternativa, podemos entender que ela somou de maneira correta, mas que na hora de simplificar a resposta, simplificou apenas o numerador; se for marcada a quarta alternativa, podemos entender que ela fez a soma corretamente, mas que na hora de simplificar, simplificou apenas o denominador.

4.3.2 Síntese da análise das situações a partir da TCC

A partir da qualificação, e das discussões sobre a necessidade de ter uma maneira de uma mesma habilidade não está sendo contado diversas vezes, decidimos utilizar a habilidade como centro, e contar com as variáveis que as tornem em diferentes níveis. A partir das sugestões da qualificação, centramos as habilidades mais próximas à Teoria dos campos conceituais. Assim, sistematizamos as situações a partir das habilidades, reorganizada na matriz de conhecimento a seguir:

Figura 17 - Reorganização da matriz de conhecimento

Tipo	Conhecimento	Código
Habilidade relativas ao Cálculo numérico	Adição de frações com denominadores iguais	h1
	Adição de frações com denominadores múltiplos	h2
	Adição de frações com denominadores não múltiplos	h3
	Reconhecimento de frações equivalentes	h4
	Simplificação de frações	h5
	Interpretação do problema	h6
	Interpretação do resultado das operações no problema	h7
	Converter uma fração em outra representação	H8
Significados de fração	Parte-todo	S1
	Fração de quantidade ou operador	S2
	quociente entre dois números	S3
	razão	S4
	medida	S5
Estruturas aditivas	Composição com total desconhecido	E1
	Composição com parte desconhecida	E2
	Comparação aditiva (Equalização)	E3
Representações de fração	a/b	R1
	a sobre b	R2

Fonte: Elaborada pelos autores

As situações ficaram identificadas pelos conhecimentos mobilizados, inicialmente no seguinte modelo de matriz.

Figura 18 – Imagem do Banco de situações versão inicial

Situação	Link	Fonte	Estrutura	Significado de fr.	Representação	Habilidades
Situação 1	http://www.edu	Secretaria	Não encontrado	S1	R1 ; R2	H4 ; H5
Situação 2	http://www.edu	Secretaria	Não encontrado	S1	R1 ; R2; R3	H4; H5
Situação 3	http://www.edu	Secretaria	Não encontrado	S1	R1 ; R2	H4; H5
Situação 4	http://www.edu	Secretaria	E1	S1	R1 ; R2; R3	H2
situação 5	http://www.edu	Secretaria	E1	S1	R1 ; R2	H3
Situação 6	http://www.edu	Secretaria	E1	S1	R1 ; R2;	H1; H4 ; H5

Fonte: Elaborada pelos autores

4.3.3 Análise do teste respondido pela estudante

A seguir analisamos as respostas da estudante para preenchimento e reflexão sobre a matriz de desenvolvimento, buscando identificar seus conhecimentos e dificuldades. Para uma melhor compreensão do que foi analisado, as respostas das questões estarão dispostas em figuras como foi feita na seção 9.1, com todos os cálculos feitos por ela.

Figura 19 – Protocolo da Questão 1

1. Regina, Bruno, Carlos e Mariana participaram de uma olimpíada de Matemática. Do total das questões propostas Regina acertou $\frac{2}{5}$, Bruno acertou $\frac{1}{2}$, Carlos acertou $\frac{3}{8}$ e Mariana acertou $\frac{2}{4}$. Houve um empate entre dois deles. Identifique os dois participantes que acertaram o mesmo número de questões.

Marcar apenas uma oval.

Regina e Bruno
 Bruno e Carlos
 Carlos e Mariana
 Bruno e Mariana

Handwritten work:

$$\text{Bruno} = \frac{1}{2} \quad \frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3}{4}$$

$$\text{Mariana} = \frac{2}{4} = \frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$$

Fonte: Elaborada pelos autores

Para a questão 1, podemos ver que a estudante interpretou bem o problema, identificou que a questão se refere às habilidades de frações equivalentes e simplificação de frações. Pelo que está escrito, ela percebeu que havia uma relação entre Bruno e Mariana, então simplificou a fração de Mariana, verificando assim que ela é igual a de Bruno.

Figura 20 – Protocolo da Questão 2

2. 2. Pensando em modernizar sua casa, uma arquiteta desenhou uma faixa na parede de seu quarto, como mostra a figura abaixo, que será pintada de azul e rosa. Até o momento, o pintor só utilizou a tinta azul. A fração que representa a parte pintada da faixa é igual a:



Marcar apenas uma oval.

2/4

8/4

4/12

4/2

TOTAL = 8
4 pintados

$\frac{4}{8} = \frac{2}{4}$

Fonte: Elaborada pelos autores

Para a questão 2, pode-se observar que a estudante interpretou bem o problema, percebendo que as habilidades abordadas eram simplificação de frações e frações equivalentes. Percebe-se que ela entendeu o contexto da questão, pois ela poderia ter reduzido a fração à sua forma irredutível, mas ao observar as alternativas, viu que necessitava apenas de uma simplificação, sem precisar chegar à forma irredutível.

Figura 21 – Protocolo da Questão 3

3. 3. Marque a alternativa que apresenta uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$, com numerador 16.

Marcar apenas uma oval.

40/16

16/40

16/56

16/5

$\left(\frac{2}{5}\right) \text{ de } 16 = \frac{40}{16}$

$\frac{30}{10} = \frac{3}{1}$

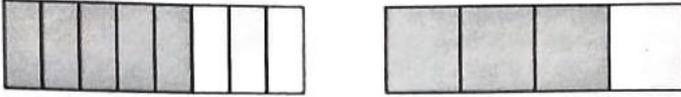
$\frac{3}{1} \times 16 = 48$

Fonte: Elaborada pelos autores

Para a questão 3, podemos ver que a estudante entendeu que o problema exige a habilidade de reconhecer frações equivalentes, e que ela traçou um cálculo para chegar à resposta correta, encontrando os termos corretos, mas em posições trocadas. Desse modo, a resposta dela está incorreta.

Figura 22 – Protocolo da Questão 4

4. 4. A figura mostra duas barras idênticas de chocolate que foram divididas, cada uma delas, em partes iguais. A área destacada representa a quantidade de chocolate consumido por uma pessoa. A quantidade total de chocolate consumido, indicado na figura abaixo, pode ser representada por um número racional na forma fracionária. Qual é esse número?



Marcar apenas uma oval.

8/11
 8/12
 1
 11/8

$\frac{8}{12}$

Consumido = 8
 Total = 12

Fonte: Elaborada pelos autores

Na questão 4, temos um problema que envolve adição de frações com denominadores diferentes, sendo um problema de adição como composição com total desconhecido. Percebe-se que a estudante encontra a fração $\frac{8}{12}$, o que nos leva a entender que ela somou o total de partes chegando a 12, colocando-o no denominador e somou o total de partes chegando a 8, colocando-o no numerador. Dessa forma, entendemos que ela apresenta dificuldades com adições de frações com denominadores diferentes.

Figura 23 – Protocolo da Questão 5

5. 5. Um fazendeiro semeia $\frac{2}{5}$ de sua fazenda com milho e $\frac{3}{7}$ com soja. Qual é a fração que representa o total semeado?

Marcar apenas uma oval.

29/35
 35/29
 5/35
 5/12

$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$

$\begin{array}{r} 5,7 \quad 7 \\ 519 \quad 5 \\ \hline 11 \quad 12 \end{array}$

Fonte: Elaborada pelos autores

Para a questão 5, temos um problema que envolve adição de frações com denominadores diferentes, com um problema de composição com total desconhecido. Nesta questão, percebemos claramente que a aluna apresenta dificuldades com adições de frações com denominadores diferentes, pois a aluna reconheceu que o problema é de adição, mas na hora de somar, somou numerador com numerador e denominador com denominador.

Figura 24 – Protocolo da Questão 6

6. 6. Para comemorar o aniversário de Maria, o seu pai comprou uma pizza grande para que todos da família pudessem comer. Essa pizza foi dividida em 16 pedaços iguais. Maria se adiantou e comeu 6 pedaços de pizza e Marta, sua irmã, comeu 4 pedaços de pizza. Qual é a fração que corresponde ao total de pizza comido por elas?

Marcar apenas uma oval.

10/32
 5/16
 5/8
 10/8

TOTAL = 16
 Comeram = 10

$$\frac{10 \div 2}{16 \div 2} = \frac{5}{8}$$

Fonte: Elaborada pelos autores

Na questão 6, que é um problema de adições de frações com denominadores iguais, do tipo de composição e simplificação de frações, percebemos que a estudante interpretou bem o problema. Ela entendeu de quais habilidades se trata e executou bem os cálculos, simplificando sua resposta final, chegando à forma irredutível, marcando a resposta correta.

Para as questões respondidas pela estudante, foi entendido que ela apresenta dificuldades com problemas que envolvam adições de frações com denominadores diferentes e com frações equivalentes, quando se quer encontrar um dos termos. Dessa forma, vimos que ela precisará assistir aos vídeos que envolvem apenas estes dois conteúdos.

4.3.4 Prototipação do dispositivo

Nesta seção, retomamos o processo da prototipação do dispositivo e a sua primeira conclusão quanto às respostas da estudante em relação aos testes que envolvem apenas os conteúdos de adição de frações, frações equivalentes e simplificação de frações. Como tomamos por base a organização das estruturas aditivas (VERGNAUD, 1990), dividimos as habilidades em cálculo relacional e cálculo numérico.

Para a prototipação do dispositivo utilizou-se uma planilha eletrônica, que nos permite elaborar planilhas de dados, construir tabelas de valores (matrizes), realizar cálculos com as matrizes, e realizar questionamentos em cima dos dados. Simulamos o trabalho com banco de dados. Nessa etapa criamos matrizes para que pudéssemos fazer os devidos cruzamentos, para chegar recurso de conteúdo ao(s) vídeo(s) que atingisse as dificuldades apresentadas pela estudante mediante aos testes.

Na planilha criada, denominada por nós de “definição da métrica”, cinco planilhas interligadas foram definidas: matriz de conhecimento ou de habilidades, banco de situações (são as questões que constam nos testes), banco de vídeos e desenvolvimento da estudante.

Na matriz conhecimento ou habilidades, foram listadas as habilidades relativas ao cálculo relacional e ao cálculo numérico em foco na pesquisa. O cálculo relacional foi subdividido em interpretação do problema e interpretação do resultado obtido em relação ao problema. Essas duas habilidades foram caracterizadas a partir da: estruturas aditivas envolvida no problema, os significados das frações envolvidas, os tipos de representações de frações. Já as habilidades de cálculo numérico três foram listadas: adição de frações, identificação e simplificação de frações, e conversão entre representações. Essas foram caracterizadas segundo: representação de fração envolvida e a dificuldade operacional. A dificuldade operacional foi listada por habilidade.

Para identificar cada situação analisada, criamos alguns códigos para facilitar a anotação. Desse modo, usamos como código a letra H para indicar que seria a habilidade, S para indicar o significado, E para indicar a estrutura, R para

indicar a representação, D para indicar a dificuldade operacional e as numerações sequenciadas para indicá-las em seu tipo.

No entanto, chegar a uma organização final, levou várias etapas e iterados testes. Na figura a seguir podemos ver como a matriz foi estruturada de forma inicial.

Figura 25 – Imagem da Matriz conhecimento versão inicial

Tipo	Conhecimento	Código
Habilidade relativas ao Cálculo numérico	Adição de frações com denominadores iguais	h1
	Adição de frações com denominadores múltiplos	h2
	Adição de frações com denominadores não múltiplos	h3
	Reconhecimento de frações equivalentes	h4
	Simplificação de frações	h5
	Interpretação do problema	h6
	Interpretação do resultado das operações no problema	h7
	Converter uma fração em outra representação	H8
Significados de fração	Parte-todo	S1
	Fração de quantidade ou operador	S2
	quociente entre dois números	S3
	razão	S4
	medida	S5
Estruturas aditivas	Composição com total desconhecido	E1
	Composição com parte desconhecida	E2
	Comparação aditiva (Equalização)	E3
Representações de fração	a/b	R1
	a sobre b	R2

Fonte: Elaborada pelos autores

Com a construção das situações, chegamos à conclusão que é necessário analisar também as dificuldades operacionais que cada situação apresenta ao aluno. Assim, foi acrescentado a essa matriz conhecimento, os tipos de dificuldades operacionais. No entanto, para cada habilidade do cálculo numérico as dificuldades são diferentes. Para a adição de frações: (1) Denominadores iguais; (2) Denominadores múltiplos; (3) Denominadores não múltiplos. Para simplificação ou identificação de frações equivalentes: (1) numerador e denominador iguais; (2) numerador e denominador múltiplos; (3) numerador e denominador não múltiplos. Depois de fazer a junção dessas partes e alguns ajustes, vimos a necessidade de elencar em habilidades, as habilidades no cálculo numérico que envolve adições de frações; a simplificação e reconhecimento de frações equivalentes ; converter as frações em outras representações e as habilidades no cálculo relacional que se refere às interpretações do problema e das respostas em relação aos problemas. Na figura abaixo, é possível ter a ideia de como ficou finalizada a matriz conhecimento.

Figura 26 – Corte da matriz de conhecimento versão final

The image shows a spreadsheet titled 'Definição da métrica' with a grid of data. The columns are labeled 'Tipo' and 'Conhecimento', and the rows list various mathematical skills and concepts. The cells contain numbers indicating the relationship between these elements. The spreadsheet is a 'cut' of a larger matrix, showing a portion of the data.

Fonte: Elaborada pelos autores

Dando continuidade às matrizes, iremos apresentar a matriz **banco de situações**. No banco de situações (questões de cada teste) é apresentada a relação de cada questão do teste com a matriz conhecimento. Na figura a seguir está sendo apresentada a matriz como ficou de modo inicial.

Figura 27 – Imagem do banco de situações - versão inicial

Situação	Link	Fonte	Estrutura	Significado de fr.	Representação	Habilidades
Situação 1	http://www.edu	Secretaria	Não encontrado	S1	R1 ; R2	H4 ; H5
Situação 2	http://www.edu	Secretaria	Não encontrado	S1	R1 ; R2; R3	H4; H5
Situação 3	http://www.edu	Secretaria	Não encontrado	S1	R1 ; R2	H4; H5
Situação 4	http://www.edu	Secretaria	E1	S1	R1 ; R2; R3	H2
situação 5	http://www.edu	Secretaria	E1	S1	R1 ; R2	H3
Situação 6	http://www.edu	Secretaria	E1	S1	R1 ; R2;	H1; H4 ; H5

Fonte: Elaborada pelos autores

Após algumas discussões, vimos que as habilidades nas situações também devem ter a referência se é habilidade com cálculo numérico ou relacional, assim como as representações que mudaram, pois antes podíamos ver que R1 se referia a representação da fração a/b ; R2 se referia a representação $\frac{a}{b}$ e R3 se referia a representação de frações de área. As mudanças passaram a ser que R1 envolve tanto a representação a/b quanto $\frac{a}{b}$ e que R2 refere-se agora a representação de

fração de área. Na figura abaixo podemos ver como ficou a matriz banco de situações.

Figura 28 – Corte do banco de situações versão final

Legenda:	Grupo	Habilidade	Código	Estrutura	Signifios da fraç	Representação	Dificuldade	Situação 1	Situação 2	Situação 3	Situação 4	Situação 5			
1 - mobiliza a ha	Cálculo relacional	Interpretação do problema	HR1	1	1	1				1					
0 - Não mobiliza				1	1	2							1		
				1	2	1									
				1	2	2									
				1	3	1									
				1	3	2									
				1	4	1									
				1	4	2									
				1	5	1									
				1	5	2									
				2	1	1									
				2	1	2									
				2	2	1									
				2	2	2									
				2	3	1									
				2	3	2									
				2	4	1									
		2	4	2											
		2	5	1											
		2	5	2											
		3	1	1											
		3	1	2											
		3	2	1											
		3	2	2											
		3	3	1											
		3	3	2											
		3	3	3											
		3	3	4											
		3	4	1											
		3	4	2											
		3	5	1											
		3	5	2											
		4	1	1											
	4	1	2												
	4	2	1												
	4	2	2												
	4	3	1												
	4	3	2												
	4	4	1												
	4	4	2												
	4	5	1												
	4	5	2												
	5	1	1												
	5	1	2												
	5	2	1												
	5	2	2												
	5	3	1												
	5	3	2												
	5	4	1												
	5	4	2												
	5	5	1												
	5	5	2												
	5	5	3												

Fonte: Elaborada pelos autores

A matriz a ser apresentada agora é o **banco de vídeos**, onde os vídeos sobre adições de frações, simplificação e equivalência de frações foram analisados. Como já foi dito anteriormente foram encontrados 33 vídeos ao todo, mas apenas 17 foram escolhidos para compor os passíveis a serem apresentados a estudante. Os vídeos foram analisados com as devidas relações para que fosse possível elencar o que eles abordavam em relação às habilidades, para assim fazer o cruzamento com a matriz desenvolvimento da estudante. Na figura a seguir pode-se observar como ficaram as primeiras análises dos vídeos.

Dos 22 vídeos analisados, foi verificado apenas que um vídeo teve soma 6, que sete vídeos tiveram soma 7 e que catorze vídeos tiveram soma 8. O vídeo de número 19, foi o vídeo que apresentou a diferença 6, desse modo sendo escolhido.

Nesse momento vimos a necessidade de que o dispositivo explicitasse ao professor as habilidades e complexidades que o vídeo apontado trata. Além disso, vimos que outros vídeos que exploravam habilidades que a estudante tinha dúvida, poderia complementar o vídeo indicado. Para tanto, foi traçado um mecanismo de identificar os vídeos que exploravam outras habilidades diferentes do vídeo escolhido. Dois outros vídeos foram indicados para o professor: o 20 e o 21. O vídeo de número 20 foi um dos vídeos que apresentou a soma 7, mas que foi escolhido para ser apresentado à estudante pelo fato de contemplar habilidades diferentes do número 19 e ter mais habilidades contempladas do que os outros que também tiveram soma 7.

4.4 Revisão e aprimoramento para a 2ª versão do dispositivo

Após uma sucessão de procedimentos, como o aprimoramento do dispositivo, os preenchimentos dos relatórios e dos protocolos da estudante, as escolhas dos vídeos e das questões para serem trabalhadas no terceiro teste, é necessário fazer a análise das respostas da estudante ao terceiro teste, para assim poder validar ou não, o uso do dispositivo. Essa análise é verificar se houve um ganho por parte da estudante em relação ao seu conhecimento, sobre as habilidades identificadas nos vídeos pelo dispositivo.

4.4.1 Construção e Análise do teste respondido pela estudante após assistir aos vídeos

Ao decidir passar por um terceiro ciclo de teste, decidimos que precisávamos do dispositivo um relatório das dificuldades que a estudante ainda apresentava, e um relatório das habilidades exploradas nos vídeos. Desenhamos as situações do teste para mapear as necessidades que resistirão, e habilidades mais complexas das que a estudante domina. Novos relatórios foram lançados.

Figura 34 - Relatório das dificuldades identificadas

Dificuldades identificadas.
Interpretação do problema do tipo Composição com total desconhecido com fração com significado de Parte-todo com representação Fração de área
Interpretação do problema do tipo Composição com total desconhecido com fração com significado de medida com representação Fração de área
Interpretação do problema do tipo Comparação aditiva (Equalização) com fração com significado de Número com representação a/b ou A sobre B
Interpretação do resultado das operações em relação ao problema do tipo Composição com total desconhecido com fração com significado de medida com representação Fração de área
Interpretação do resultado das operações em relação ao problema do tipo Comparação aditiva (Equalização) com fração com significado de Parte-todo com representação Fração de área
Interpretação do resultado das operações em relação ao problema do tipo Comparação aditiva (Equalização) com fração com significado de Número com representação a/b ou A sobre B
Adição de frações com representação a/b ou A sobre B e com Denominadores não múltiplos
Adição de frações com representação Fração de área e com Denominadores múltiplos

Fonte: Elaborado pelos autores.

As habilidades mobilizadas e as respostas às questões serão analisadas. Após ela ter assistido aos vídeos 19 e 20 que foram selecionados conforme o cruzamento da matriz desenvolvimento da estudante com a matriz banco de vídeos, a estudante teve acesso ao teste e o respondeu ao teste, com algumas questionamento ao pesquisador/professor.

O teste contou com cinco questões, que em termos das habilidades pode sintetizada no Quadro a seguir.

Quadro 8 - Quadro de habilidades e variáveis por questão

Questão	Habilidade + variáveis
1	<p>Cálculo numérico:</p> <ul style="list-style-type: none"> Simplificação de frações, fração como número, representação a/b, com numerador e denominador não múltiplo.
2	<p>Cálculo relacional:</p> <ul style="list-style-type: none"> interpretação de problema com estrutura aditiva do tipo composição com total desconhecido, fração como operador, representado como a/b. interpretação do resultado do problema com estrutura aditiva do tipo composição com total desconhecido, fração como operador, representado como a/b.
	<p>Cálculo numérico:</p> <ul style="list-style-type: none"> Adição de frações, representada como a/b, com denominadores diferentes.
3	<p>Cálculo numérico:</p> <ul style="list-style-type: none"> identificação de frações equivalentes, representada como a/b, numerador e denominador não múltiplos (um do outro).
4	<p>Cálculo relacional:</p> <ul style="list-style-type: none"> interpretação de problema com estrutura aditiva do tipo composição com total desconhecido, fração parte-todo, representado por área. interpretação do resultado do problema com estrutura aditiva do tipo composição com total desconhecido, fração parte-todo, representado por área.
	<p>Cálculo numérico:</p> <ul style="list-style-type: none"> conversão de representação de fração de área para fração do tipo a/b, fração como parte-todo. adição de frações, fração parte todo, representado por área ou como a/b (a depender da resolução do aluno), com denominadores não múltiplos
5	<p>Cálculo numérico:</p> <ul style="list-style-type: none"> adição de frações, fração parte todo, representado por área, com denominadores múltiplos.

Fonte: elaborado pelo autor

A seguir analisamos as respostas da estudante às questões.

Figura 35 – Protocolo da Questão 1 do 3º teste.

1. Simplifique a fração $\frac{32}{80}$, deixando o resultado na sua forma irredutível.

a) $\frac{4}{20}$ ~~b) $\frac{2}{5}$~~ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{4}{10}$

$$\frac{32 \cdot 2}{80 \cdot 2} \Rightarrow \frac{16}{40} \Rightarrow \frac{8 \cdot 2}{20 \cdot 2} \Rightarrow \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{2}{5} //$$

Fonte: Elaborada pelos autores

Na questão 1, as habilidades necessárias são simplificação de frações e/ou reconhecer frações equivalentes. Além de reconhecer uma fração irredutível. Mas a fração final é irredutível e pode-se obter simplificação por números inteiros. A estudante utiliza como estratégias simplificar até chegar a uma fração irredutível. Pela maneira como a estudante respondeu, pode-se chegar à conclusão que ela desenvolveu às habilidades esperadas e resolveu corretamente a questão.

Figura 36 - Protocolo da Questão 2 do 3º teste

2. (Imenis e Lélis - 6º Ano, 2010 - Adaptada pelos Autores) Em minha classe, vai haver eleição para representante da turma de alunos, $\frac{3}{5}$ preferem Mariana, $\frac{2}{7}$ preferem Caio, há 4 indecisos e nenhum vota em branco. Que fração da classe já decidiu seu voto?

a) $\frac{5}{12}$ ~~b) $\frac{31}{35}$~~ c) $\frac{5}{35}$ d) $\frac{1}{7}$

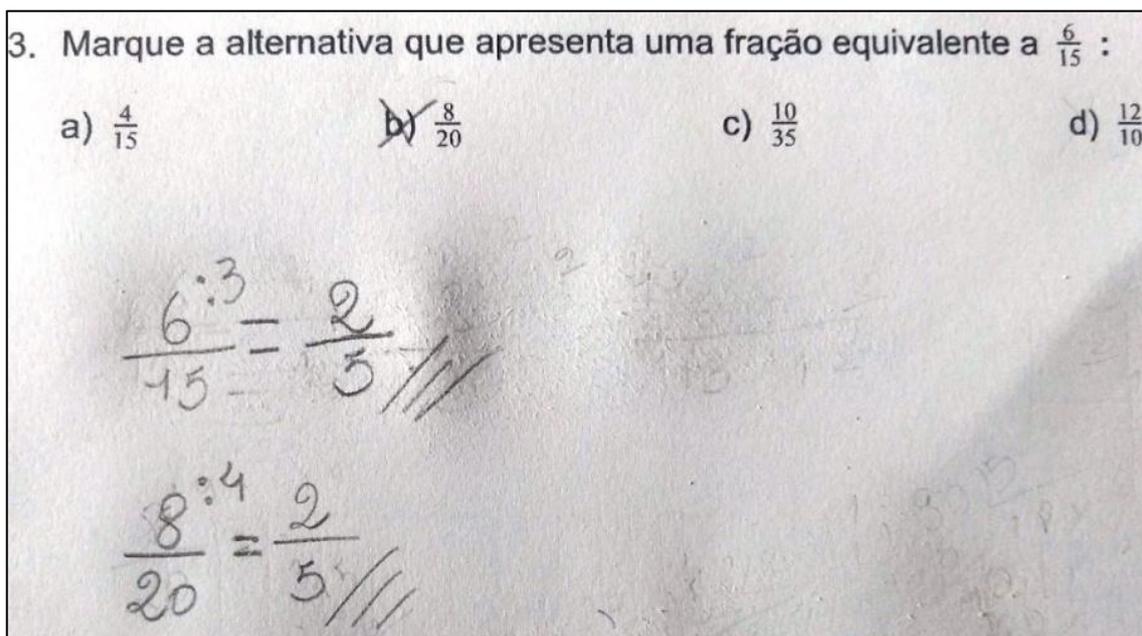
$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{21 + 10}{5 \cdot 7} = \frac{31}{35} //$$

Fonte: Elaborada pelos autores

Na questão 2, as habilidades abordadas são adição de frações com denominadores não múltiplos, com a estrutura de adição como composição com total desconhecido.

Em relação ao vídeo assistido, a estudante resolver a questão com mesma estratégia de adição de frações com denominadores diferentes, apresentada nos vídeos. Dessa forma, podemos chegar à conclusão que ela compreendeu a forma de fazer e que o vídeo foi muito importante ao apresentar uma nova maneira de resolver esse tipo de adição.

Figura 37 - Protocolo da Questão 3 do 3º teste



Fonte: Elaborada pelos autores

Na questão 3 as habilidades relacionadas são simplificação de fração e reconhecimento de frações equivalentes. Pelas marcas de borracha pode-se perceber que a estudante tentou de várias formas resolver a questão, mas que apresentou dúvidas. No momento, ela respondeu as outras questões, deixando essa por último, e para não entregar em branco pediu orientação ao autor. Desse modo, teve um pequeno diálogo:

Autor: Como encontramos frações equivalentes?

Estudante: Simplificando as frações e comparando.

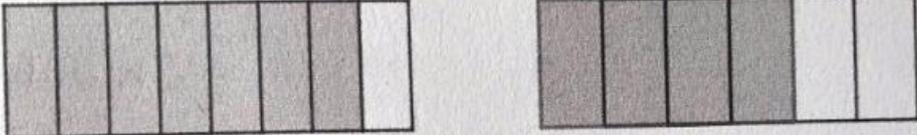
Autor: Mas a fração da questão está na forma irredutível?

Estudante: Ah.. Entendi. Vou deixar todas na forma irredutível e comparar para ver.

Depois do diálogo, ela deu continuidade e resolveu a questão de forma correta, finalizando assim o questionário. A partir da discussão, elencou-se mais uma dificuldade para a matriz de conhecimento relativa à simplificação de frações, que é a simplificação por números inteiros ou não; ou uma delas ser a fração irredutível.

Figura 38 - Protocolo da Questão 4 do 3º teste

4. Abaixo, na situação 1, podemos ver a figura que representa o terreno de Paulo e a região em destaque, é sua plantação de cenoura. Na situação 2, a figura representa o terreno do primo de Paulo, e a região em destaque é a sua plantação de batata.



Situação 1

Situação 2

Uma vez por mês, os dois juntam sua produção total e vende a um único restaurante. As cenouras e batatas vendidas, representam que produção de que fração de um terreno?

a) $\frac{24}{37}$ b) $\frac{37}{24}$ c) $\frac{11}{24}$ d) $\frac{11}{14}$

$$\frac{7}{8} + \frac{4}{6} = \frac{42+32}{8 \cdot 6} = \frac{74}{48} = \frac{37}{24}$$

Fonte: Elaborada pelos autores

Na questão 4 as habilidades relacionadas são adição de frações com denominadores não múltiplos com a estrutura de composição com total desconhecido, reconhecimento da fração de área, conversão de fração de área para fração representada como a/b. Na resolução fica claro que a estudante fez a adição conforme feito no vídeo de número 19, mostrando assim que houve um ganho ao assistir ao vídeo selecionado para ela.

Figura 39 - Protocolo da Questão 5 do 3º teste

5. Represente a soma das duas frações



Na barra a seguir:



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2+4}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{2}$$

Fonte: Elaborada pelos autores.

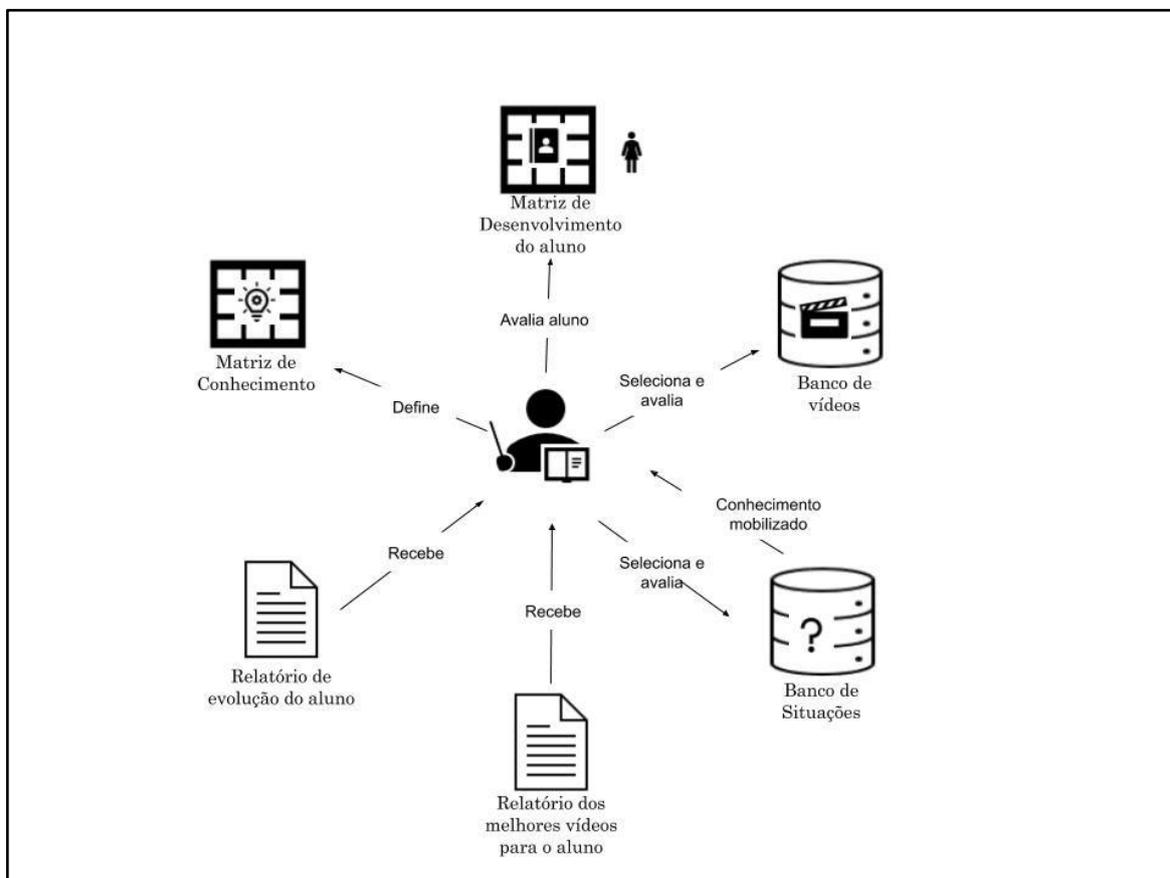
Na questão 5, que foi a última questão, as habilidades abordadas foram adição de frações com denominadores múltiplos, reconhecimento de frações equivalentes. Na resolução é possível notar, assim como na questão 4, que ela executa o cálculo da mesma forma que aprendeu ao assistir ao vídeo de número 19. Dessa maneira, é notório que ela apresentou um bom desenvolvimento depois de assistir aos vídeos.

4.4.2 Uso do dispositivo e relatório de evolução

Neste capítulo vai ser relatado o uso do dispositivo para as escolhas dos vídeos feitos para a estudante e o relatório de evolução dela após assistir aos vídeos escolhidos. Esse relatório fornece o processo de evolução da estudante e esclarece o quão os vídeos escolhidos abordavam habilidades, que representavam dificuldades para a estudantes, e as que foram superadas. Apenas para a leitura do relatório ficar esclarecedora, as habilidades de Adição de

frações com denominadores iguais e diferentes, Simplificação de frações e reconhecimento de frações equivalentes, serão chamadas de habilidades centrais. A figura 40 exemplifica como ficou a relação do professor com o dispositivo.

Figura 40 - Protótipo do relacionamento do professor com o dispositivo



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para as habilidades centrais, com base nas respostas do segundo teste, foi percebido que a estudante apresentou domínio em simplificação de frações, pois em todas as questões em que essa habilidade foi relacionada ela demonstrou domínio no manejo dos cálculos, chegando assim à resposta correta quando era essa a única habilidade relacionada. Ela apresentava os cálculos corretos quando simplificar a fração fazia parte do processo de resposta da questão.

Para a habilidade reconhecimento de frações equivalentes, foi notado que nas questões em que era apresentada a fração com significado parte-todo e com a representação de fração de área, ela demonstrou domínio, pois fez os devidos reconhecimentos, apresentou um correto manejo nos cálculos, acertando assim as questões. A dificuldade apresentada com essa habilidade se deu em determinar

um dos termos da fração, para tornar duas frações equivalentes. Essa dificuldade ficou em evidência pelo fato da questão apresentar uma fração e necessitar do denominador de outra fração com o numerador dado, para torná-las equivalentes. Dessa forma ela apresentou uma incoerência no manejo dos cálculos, ocorrendo assim um erro na resposta.

Com a habilidade adição de frações com denominadores iguais e diferentes, foi notado que ela apresentou dificuldades tanto nas frações com denominadores iguais quanto nas com denominadores diferentes. Essas dificuldades foram identificadas em frações com significado parte-todo e com representações de fração de área.

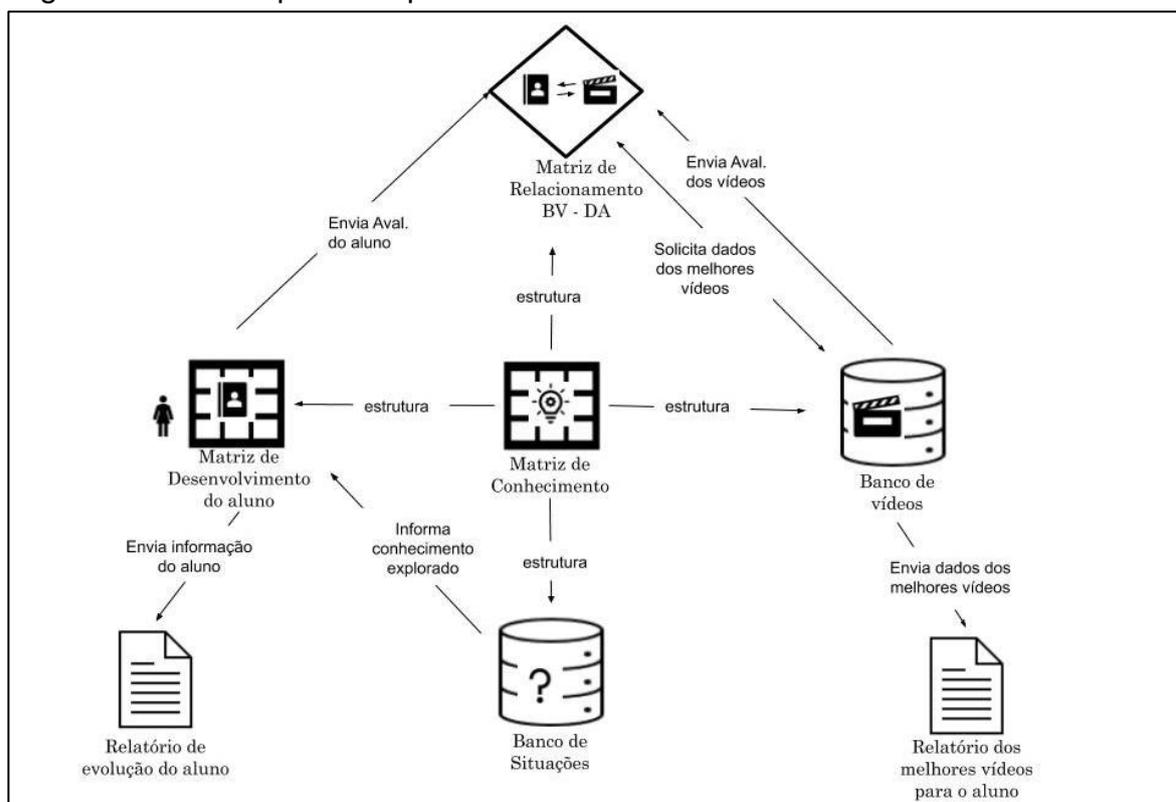
Em relação às habilidades não centrais, que são extremamente importantes para o relatório, pode-se chegar à conclusão que ela apresentou dificuldades na interpretação do problema do tipo composição com total desconhecido com fração com significado de Parte-todo, na representação a/b ou $\frac{a}{b}$; na interpretação do resultado das operações em relação ao problema do tipo composição com total desconhecido com fração com significado de Parte-todo, na representação a/b ou $\frac{a}{b}$; na adição de frações com representação a/b ou $\frac{a}{b}$ e com denominadores iguais; na simplificação e Reconhecimento de frações equivalentes com representação a/b ou $\frac{a}{b}$ e com numerador e denominador múltiplos; em converter uma fração em outra representação de fração de área para a/b ou $\frac{a}{b}$ e com Fração de área com partes contínuas e divisões iguais; em converter uma fração em outra representação de fração de área para a/b ou $\frac{a}{b}$ e com fração de área com partes tomadas descontínuas, mas divisões iguais.

Para proporcionar à estudante um embasamento para que ela pudesse sanar as dificuldades encontradas pelo dispositivo, este, após os cruzamentos nos permitiu identificar que o vídeo de número 19 apresenta uma melhor aproximação das habilidades por ela necessitados e que também foi escolhido para corroboração o vídeo de número 20. Após esses vídeos serem apresentados, a estudante fez um novo teste para comprovar um uso efetivo ou não deles.

No novo teste, o terceiro, foi notado que houve um êxito por parte da estudante, pois em todas as questões que envolvia a simplificação de frações, ela demonstrou um manejo correto dos cálculos, deixando-os escritos de forma correta e organizada. Para a habilidade de reconhecimento de frações equivalentes ela ainda apresentou dificuldades para determinar se as frações são equivalentes, mas que após uma pequena intervenção do pesquisador, ela conseguiu dar continuidade, apresentando os cálculos de forma correta e acertando a questão. No que se refere às adições de frações com composição com total desconhecido, com significado de fração parte-todo, nas representações a/b , $\frac{a}{b}$ ou fração de área, foi notado que ela executou as devidas adições conforme é apresentado em um dos vídeos que lhe foi apresentado, acertando os cálculos mesmo quando a frações tinham denominadores múltiplos e não múltiplos.

Até o presente momento, foi usado um protótipo do dispositivo para chegar a toda essa conclusão. Na figura 41, é possível ver como ficou esse protótipo ficou:

Figura 41 – Protótipo do dispositivo



Fonte: Elaborada pelos autores

Com base no que foi descrito no relatório acima, totalmente feito com bases no uso do dispositivo, ilustrado na figura 41, é possível notar que de fato o uso do dispositivo auxiliou nas escolhas dos vídeos para serem apresentados à estudante, proporcionando para ela embasamentos e estratégias diferentes e eficazes para a execução das resoluções, a julgar pelas suas estratégias no decorrer do primeiro e do segundo teste.

4.5 Discussão dos resultados

O uso das metodologias ativas não significa em colocar de lado o modelo tradicional de ensino, mas sim, reconhecer que esse modo tradicional já não é mais tão suficiente, num momento em que o(a) estudante tem acesso às tecnologias digitais que possibilitam ter um contato com o conhecimento. Dessa forma, o professor não é mais considerado o detentor do conhecimento, e isso permite uma outra visão para o ensino. Com o “poder” que a tecnologia tem de integrar os espaços físicos e digitais, nós professores precisamos interagir para assim poder atender às necessidades dos alunos.

Com esse pensamento, identificar a dificuldade de forma individual ou permitir que o(a) aluno(a) possa aprender e mostrar que aprendeu dentro de um grupo ou de forma individual, parece uma tarefa difícil. As metodologias ativas defendem a ideia de que o aprendizado é um trabalho realizado nos conhecimentos prévios dos alunos (em grupo) ou do aluno (individual). Com essa metodologia, busca-se que o aluno seja estimulado a ser esse agente do seu conhecimento. O aluno é o protagonista do seu aprendizado, dessa forma o objetivo é estimular ele a descobrir novas formas de construir o conhecimento com práticas dentro e fora da sala de aula, visando uma autonomia, é a ideia de aprender fazendo (COSTA MATOS, 2018, p.28). Nas metodologias ativas o professor tem o papel de mediador, podendo chegar a ser chamado pelos autores de gerenciador do conhecimento, onde ele organiza os conteúdos a serem trabalhados, prepara as atividades de maneira significativa, orienta aos alunos durante o processo de dúvidas, permite aos alunos a serem os agentes do seu próprio aprendizado com materiais que são suficientes para dar-lhes embasamentos sobre o conteúdo abordado, prepara atividades que possam

validar esses conhecimentos pelos alunos. É possível ver que o trabalho do professor é enorme e que uma das tarefas mais difíceis é encontrar materiais que sejam suficientes para dar embasamentos para o aluno.

Respeitando que cada aluno tem seu ritmo de aprendizado, o professor precisa criar meios para que ele possa atender ao seu aluno em grupo ou de forma individual e o uso da tecnologia digital permite ao professor criar esse ambiente. Usando a sala de aula invertida, que é uma das metodologias ativas, o professor pode criar esse ambiente misturado, onde o aluno pode ter acesso ao conhecimento tanto de forma presencial quanto de forma à distância, que no nosso caso foi com o uso de vídeos. Pavaleno e Lima (2017) nos diz que uma das componentes que constitui a sala de aula invertida é desenvolvida por meio do uso das tecnologias digitais, como vídeo aulas (atividades fora da sala de aula), e isso é possível observar com a pesquisa realizada.

Foi feito o uso de vídeo aulas previamente escolhidas, com o uso do dispositivo para que não fosse apenas uma vídeo aula que abordasse o conteúdo, mas que fosse, de fato, uma vídeo aula suficiente para a estudante sanar suas dificuldades e progredir. E aqui é dito suficiente quando a vídeo aula não só aborda o conteúdo, mas sim, aborda os conhecimentos que a estudante demonstrou dificuldades. Com base no relatório no tópico 8.5, foi notado que houve um aprendizado por parte da estudante, houve uma evolução, onde o uso dos vídeos foram extremamente fundamentais para o seu aprendizado e que isso só aconteceu porque os vídeos utilizados abordavam não só o conteúdo que estava querendo ser ensinado, mas também as habilidades que ela ainda precisava obter. Dessa forma, a pesquisa corrobora com a literatura em afirmar que o uso de vídeo aula é um dos recursos externos que o professor pode fazer uso para proporcionar o aprendizado a seu estudante, obtendo êxito. Além disso, também mostra que a escolha desse vídeo deve ser feito de forma minuciosa, atendendo as necessidades do(a) estudante, não apenas a escolha de um vídeo com o conteúdo/ e sim a escolha do vídeo com o conteúdo, de forma suficiente a tirar as dúvidas do seu estudante, por trabalhar exatamente as habilidades que ele ainda não desenvolveu.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observar as dificuldades individuais de um estudante e poder tirar sua dúvida também de forma individual é uma tarefa difícil que o(a) professor(a) precisa conseguir para que isso possa fazer parte do processo de aprendizado por parte daquele ou daquela que busca por conhecimentos. Na busca de auxiliar o(a) professor(a) nessa tarefa, a pesquisa faz um mapeamento de recursos destinados ao acompanhamento individualizado em sala de aula invertida, para que o(a) estudante possa ter suas dúvidas esclarecidas em qualquer lugar que ele esteja. Dessa forma, a pesquisa obteve êxito em elaborar e validar um protótipo de dispositivo que auxilie o professor nas escolhas de recursos para a parte externa de suas aulas com a metodologia de sala de aula invertida (BAKER, 2000) com o conteúdo de frações, abordando apenas adições de frações com denominadores iguais e diferentes, simplificação de frações e reconhecimento de frações equivalentes.

Esse dispositivo foi criado com o uso de matrizes, onde foram registradas as habilidades já adquiridas pela estudante e as habilidades que ela ainda precisa obter, para assim buscar recursos, que na pesquisa foram vídeos, que pudessem dar embasamentos para que ela pudesse tirar suas dúvidas. O dispositivo nos permitiu montar e validar estratégia de avaliação de vídeos e mapeamento de conhecimento explorados, pautado na centralidade das habilidades com diferenciação de complexidades a partir do significado, da representação e de dificuldades operacionais. A busca de recursos que sejam julgados suficientes para a estudante faz uma ligação completa com uma das metodologias ativas, sala de aula invertida. Em sala de aula, na atualidade, é possível observar que as posturas dos estudantes perante as informações são um tanto diferentes de como acontecia quando não se tinha o acesso tão amplo com o uso de ferramentas digitais. Isso também acontece pelo fato do acesso à informação já não ser mais só do(a) professor(a), e sim, ser mais acessível àquele que assim desejar pesquisar com o uso da internet, que se convém ser de maneira mais rápida. Com o passar dos tempos, os alunos puderam ter acesso a informações que normalmente só se tinha quando estivesse na presença do professor no momento

da aula. No entanto, pela liberdade e facilidade de elaboração e compartilhar, cada vez mais uma avaliação do material é necessária.

A sala de aula invertida vem da ideia de inverter a lógica tradicional de aula, dando oportunidades e meios para que os estudantes recebam e estudem o conteúdo, que se deseja trabalhar, em casa e, na hora da aula, os estudantes possam interagir com seus colegas e/ou com o professor, com base em atividades previamente por ele planejadas. O uso da sala de aula invertida na pesquisa, também se dá no processo em que a estudante não está dentro de uma sala de aula em uma escola e consegue desenvolver seu conhecimento.

Ao responder a testes elaborados com os conteúdos de adição de frações com denominadores iguais e diferentes, simplificação de frações e reconhecimento de frações equivalentes, foi possível identificar as habilidades adquiridas e não adquiridas pela estudante, que foram registradas para assim ser feita a busca de vídeos que abordassem o conteúdo, que tivessem num limite de tempo considerável no que se refere à metodologia sala de aula invertida e que estiver em livre acesso para qualquer estudante com acesso às tecnologias digitais.

Essas respostas aos testes fazem parte do processo da metodologia da pesquisa, onde o primeiro teste foi realizado para direcionar sobre o conteúdo de frações, e isso revelou que a ampla abrangência do conteúdo não iria viabilizar uma pesquisa que fosse viável em tão curto tempo. Após fazer o corte e trabalhar apenas com adições de frações com denominadores iguais e diferentes, simplificação de frações e reconhecimento de frações equivalentes, foi feito um segundo teste apenas com esses temas para fazer os registros necessários para a pesquisa. Após esses registros, foi feita uma busca incansavelmente por vídeos que abordassem apenas esses temas, que se limitassem a um tempo de no máximo 10 minutos e que fosse esclarecedor no que se refere às dúvidas da estudante. Isso foi feito, os vídeos elencados pelo dispositivo foram apresentados à estudante, e daí ela foi apresentada a um novo teste, o terceiro teste, para assim validar o uso do dispositivo ou não.

Como descrito na prototipação do dispositivo, no qual se refere ao uso do dispositivo e o relatório de evolução da estudante, o dispositivo obteve êxito, pois foi possível validá-lo por meio do acompanhamento da estudante, superando as expectativas, deixando todas as informações necessárias organizadas, listadas e de fácil compreensão para que o(a) professor(a) possa fazer uso nas suas aulas, trabalhando com seus estudantes com a metodologia sala de aula invertida, onde o(a) estudante vai ser protagonista do seu conhecimento, pois não só o(a) professor(a) pode apresentar os recursos externos, mas o(a) estudante pode por si só pesquisar esses recursos ao saber que é possível aprender com as mediações do(a) professor(a).

5.1 Limitações da pesquisa

As limitações que tivemos com a pesquisa se encaixa no fato do tempo, que não nos possibilitou fazer um levantamento mais abrangente com o conteúdo de frações. Tivemos que segmentar o conteúdo para conseguir finalizar a pesquisa em tempo hábil.

Também tivemos limitações em conseguir fazer o levantamento com uma turma ou grupo, pois para fazer com uma turma deveríamos ter outros caminhos, por exemplo, listar todas as habilidades de forma individual e/ou em grupo para poder buscar os recursos para o grupo em relação a essas habilidades, e isso demanda bastante tempo.

5.2 Perspectivas de novas investigações

Acreditamos que seja necessário fazer novas buscas sobre o uso da metodologia sala de aula invertida assim como outras metodologias que foram listadas na pesquisa, mas não trabalhadas. Assim, temos como sugestões:

- Investigar o uso da sala de aula invertida, com a escolha de vídeos como recursos externos à sala de aula para outros conteúdos da matemática;
- Realizar pesquisas sobre o uso de outras metodologias ativas para o conteúdo de frações ou outro conteúdo de matemática.

Para pesquisas futuras, com o uso do dispositivo aqui criado ou com outros recursos, na área da matemática, nossas sugestões são:

- Validar o uso de vídeos ou outros recursos, se possível, com uma turma ou grupo, usando o dispositivo aqui criado;
- Validar o uso do dispositivo com uma turma com outros conteúdos de matemática;
- Dar continuidade com a pesquisa, estendendo o campo de frações, para o conteúdo em si.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, I. S.; MAZUR, E. Instrução pelos Colegas e Ensino sob Medida: Uma proposta para engajamento dos alunos no processo de ensino-aprendizagem de Física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 30, n. 2, p. 362-284, 2013.
- BAKER, Jhon Wesley. The classroom flip: Using web course management tools to become the guide by the side. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COLLEGE TEACHING AND LEARNING, 11., 2000, Jacksonville. [**Conference proceeding...**] Jacksonville: Florida Community College Jacksonville, 2000. p. 9-17.
- BEHR, M., HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational number, ratio and proportion. In: GROWS, D. A. (Ed), **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: MacMillan, 1992, pp. 296-333.
- BEHR, M., WACHSMUTH, I., POST, T., e LESH, R. Order and Equivalence. **Journal for Research in Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. Mathematics Education**, v. 15, n. 5, p. 323-341, 1984.
- BERGMANN, J., SAMS, A. **Sala de aula invertida: Uma metodologia ativa de aprendizagem**. Tradução Afonso Celso da Cunha Serra. v. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- BERTONI, N. E. Um novo paradigma no ensino e aprendizagem de frações. **Bolema**, Rio Claro (SP), ano 21, n. 31, p. 209-237, 2008.
- BRANSFORD, J. D., BROWN, A. L., e COCKING, R. R. **How people learn** (Vol. 11). Washington, DC: National academy press. 2000.
- BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: MEC-SEB, 2018.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : Matemática – Anos Finais/ Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC / SEF, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Simulado prova brasil 2011**. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/prova-brasil/simulado-prova-brasil-2011>>
- BROLEZZI, A. C. **Frações e Decimais: história e significado**. CAEM/USP - SP, 1996.
- CAMPOS, T.M.M. Sobre ensino e aprendizagens com frações. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM**. Recife(PE) - Brasil, 2011. Disponível em: <<http://www.lematec.net.br/CDS/XIIICIAEM/artigos/CP-campos.pdf>> Acesso em: 31 ago. 2019.
- CHAVANTE, E. **Convergências matemática**. 2.ed. São Paulo: SM, 2018.

COSTA MATOS, V. **Sala de aula invertida**: uma proposta de ensino e aprendizagem em matemática, 2018. 142p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), PROFMAT em Universidade de Brasília(UNB), Brasília - DF, 2018.

DEWEY, J. **Vida e educação**. Tradução e estudo preliminar por Anísio S. Teixeira. – 10. Ed.- São Paulo: Melhoramentos; [Rio de Janeiro]: Fundação Nacional de Material Escolar, 1978.

GRANDO, N.I., VIEIRA, G.B. Números decimais: Dificuldades conceituais. *In*: GRANDO, N. I., **Pesquisas na educação matemática**: contribuições para o processo de ensino e aprendizagem. 1ª ed. Passo fundo: Universidade de Passo Fundo, 2006. p.110-135.

HART, K. The Step to Formalisation. *In*: Burton, L., HOYLES, C. (Eds.), **Proceedings of the Tenth International Conference of Psychology of Mathematics Education**, 159- 164. London: University of London - Institute of Education. 1986.

KAMII, C.; CLARK, F. Equivalent Fractions: Their Difficulty and Educational Implications. **Journal of Mathematical Behavior**. v. 14, p. 365-378, 1995.

KERSLAKE, D. **Fractions**: Children's strategies and errors. Londres: NFR-Nelson, 1986.

KHAN, S. **Qual é a história da Khan Academy?** Khan Academy, 2008. Disponível em: <<https://khanacademy.zendesk.com/hc/pt-br/articles/202483180-Qual-%C3%A9-a-hist%C3%B3ria-da-Khan-Academy->>. Acesso em: 26 de jul de 2019.

LAGE, M. J.; PLATT, G.J; TREGLIA, M. Invertendo a sala de aula: a porta de entrada para a criação de um ambiente de aprendizagem inclusivo. **Journal of Economic Education**, United States, 2000. c. 31, p. 30-43.

LOPES, A.J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Boletim de Educação Matemática**, v. 21, n. 31, p. 1-22, 2008.

MAGINA, S., CAMPOS, T., NUNES, T., e GITIRANA, V. **Repensando adição e subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA, S, SANTANA, E.; CAZORLA, I.; CAMPOS, T. As estratégias de resolução de problemas das estruturas aditivas nas quatro primeiras séries do Ensino Fundamental. **Zetetike** (UNICAMP), v. 18, p. 15-50, 2010.

MASETTO, M.T. **Trilhas abertas na universidade [recurso eletrônico]** : inovação curricular, práticas pedagógicas e formação de professores. São Paulo: Summus, 2018.

MAZUR, E. **Peer instruction: a revolução da aprendizagem ativa**. Tradução: Anatólio Laschuk. Porto Alegre: Penso, 2015. 252 p. Título original: Peer Instrucion: a user's manual.

MORAN, J. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens. In: SOUZA, C., MORALES, O. (Org.). **Coleção Mídias Contemporâneas**. Ponta Grossa: Editora Foca Foto, 2015. p. 15-33.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 7, n. 1, 2002. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_n1_a1.html. Acesso em: 23 dez. 2019.

NOVAK, G. M., GAVRINI, A., CHRISTIAN, W., PATTERSON, E. **Just-in-time Teaching: blending active learning with web technology.**[S.l.] 1999. Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall, p.188. Disponível em: <<https://jittdl.physics.iupui.edu/jitt/>>. Acesso em: 25 de jul. 2019

NUNES, T. Diferentes significados de frações e sua influência sobre o ensino e a aprendizagem. **Anais do VIII ENEM**. Recife,(PE), Ano 2004. Disponível em: <<http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/15/PA15.pdf>>. Acesso em: 18 de maio 2019

PAVANELO, E.; LIMA, R.. Sala de Aula Invertida: a análise de uma experiência na disciplina de Cálculo I. **Bolema**, Rio Claro(SP), 2017. Disponível em: <<https://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n58/0103-636X-bolema-31-58-0739.pdf>>. Acesso em: 08 de maio 2019.

RAMAL, A. **Sala de aula invertida: a educação do futuro**. [internet]. Rio de Janeiro, G1 Educação, 2015 Disponível em: <<http://g1.globo.com/educacao/blog/andrea-ramal/post/sala-de-aula-invertida-educacao-do-futuro.html>> Acesso em: 04 jun. 2019.

SCHMITZ, E.X.S. **Sala de aula invertida: Uma abordagem para combinar metodologias ativas e engajar alunos no processo de ensino-aprendizagem**.2016.187f. Dissertação (Mestrado em tecnologias educacionais em rede) - Universidade federal de Santa Maria - UFMS, Rio Grande do Sul, 2016

SEE-PE. **Base Curricular Comum, do estado de Pernambuco**. Recife: SEE-PE, 2008.

SEE-PR, **Cadernos de Atividades elaborados para os alunos dos anos iniciais e finais do ensino Fundamental, com base na Matriz de Referência (descritores) de Língua Portuguesa e Matemática da Prova Brasil**. Secretaria do estado do Pará, 2009. Disponível em: <<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1267>> Acesso em: 05 de jun de 2019.

WOHLGEMUTH, J. **Vídeo Educativo: uma pedagogia audiovisual**. v. 1, Brasília: Senac, 2005.

VALENTE, J. A. Blended learning e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 4, p. 79-97, 2014a.

_____. **Aprendizagem Ativa no Ensino Superior: a proposta da sala de aula invertida**. São Paulo: PUC, 2014b.

_____. A sala de aula invertida e a possibilidade do ensino personalizado: uma experiência com a graduação em midialogia. *In*: BACICH, L., MORAN, J. (Orgs.) **Metodologias ativas para uma educação inovadora**. Porto Alegre: Penso Editora, 2018. p. 26 -44.

VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. (Org.) **Addition and subtraction**. A cognitive perspective. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1982. pp. 39-59.

VERGNAUD, G. Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. **Perspectivas**, v. 26, n.10, p. 195-207, 1996a.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, v.1, p. 75-90, 1996b.

VERGNAUD, G. Quelques problèmes théoriques de la didactique a propos d'un exemple: les structures additives. **Atelier International d'Eté: Recherche en Didactique de la Physique**. La Londe les Maures, França, 26 de junho a 13 de julho, 1983.

VERGNAUD, G. Theory of conceptual fields. **Human Development**, , v. 52, n. 2, p. 83-94, 2009.1990.

Apêndice 1 - Primeiro teste com problemas de frações aplicado proposto à estudante

- Em uma questão da prova de Matemática, a professora pediu para que os alunos representassem o número 0,05 em forma de fração. Mariana representou assim $\frac{5}{10}$, Fabiano representou $\frac{10}{5}$, Fernanda $\frac{5}{100}$ e Marcela $\frac{5}{1000}$. Qual deles acertou a questão?
 a) Mariana b) Fabiano c) Fernanda d) Marcela
- João está participando de uma corrida de bicicletas, na qual o percurso total da prova é de 45 km. Ele já percorreu $\frac{1}{3}$ deste percurso. Isso significa que ele já percorreu:
 a) 9 km b) 10 km c) 12 km d) 15 km
- Sônia foi até a panificadora comprar biscoito. Para brincar com o vendedor, pediu $\frac{1}{4}$ de um quilo. Quantos gramas de biscoito Sônia pretendia comprar?
 a) 200g b) 250g c) 400g d) 500g
- Observe as figuras a seguir:



A parte pintada destas figuras é representada pelas frações?

- a) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ e $\frac{4}{1}$ c) $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{4}$
- Você sabe que as frações estão presentes no nosso dia a dia. Então você pode afirmar que $\frac{1}{4}$ de um dia, $\frac{1}{4}$ de uma hora, $\frac{1}{4}$ de um quilo, $\frac{1}{4}$ de um litro e $\frac{1}{4}$ de um ano é respectivamente o mesmo que:
 a) 4 h, 45 min, 500g, 200ml e 9 meses.
 b) 6 h, 15 min, 250g, 250ml e 3 meses.
 c) 8 h, 20 min, 250g, 500ml e 4 meses.
 d) 12 h, 30 min, 500g, 600ml e 6 meses.
 - Regina, Bruno, Carlos e Mariana participaram de uma olimpíada de Matemática. Do total das questões propostas Regina acertou $\frac{2}{5}$, Bruno acertou $\frac{1}{2}$, Carlos acertou $\frac{3}{8}$ e Mariana acertou $\frac{2}{4}$. Houve um empate entre dois deles. Identifique os dois participantes que acertaram o mesmo número de questões.
 a) Regina e Bruno
 b) Bruno e Carlos
 c) Carlos e Mariana

d) Bruno e Mariana

7. Pensando em modernizar sua casa, uma arquiteta desenhou uma faixa na parede de seu quarto, como mostra a figura abaixo, que será pintada de azul e rosa. Até o momento, o pintor só utilizou a tinta azul. A fração que representa a parte pintada da faixa é igual a:

- a) $\frac{2}{4}$
- b) $\frac{8}{4}$
- c) $\frac{4}{12}$
- d) $\frac{4}{2}$



9. Marcos é vendedor em uma loja de bonés. No final do mês, ao verificar as vendas da loja, percebeu que, de um total de 25 bonés, havia vendido 12. Qual a fração que representa o número de bonés que ficaram no estoque?

- a) $\frac{12}{25}$
- b) $\frac{9}{25}$
- c) $\frac{13}{25}$
- d) $\frac{1}{25}$

10. Luma comprou um metro de fita e gastou 0,8 dele. Qual é a fração que representa essa parte?

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{3}{4}$
- c) $\frac{8}{10}$
- d) $\frac{2}{5}$