



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

RAYSSA DE MORAES DA SILVA

**PENSAMENTO ALGÉBRICO EM TAREFA COM PADRÕES: uma investigação nos
anos finais do ensino fundamental**

RECIFE

2021

RAYSSA DE MORAES DA SILVA

**PENSAMENTO ALGÉBRICO EM TAREFA COM PADRÕES: uma investigação nos
anos finais do ensino fundamental**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida.

RECIFE

2021

Catálogo na fonte
Bibliotecária Natalia Nascimento, CRB-4/1543

- S586p Silva, Rayssa de Moraes da.
Pensamento algébrico em tarefa com padrões: uma investigação nos anos finais do ensino fundamental. / Rayssa de Moraes da Silva. – Recife, 2021.
146 f.: il.
- Orientador: Jadilson Ramos de Almeida.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE.
Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2021.
Inclui Referências e Apêndices
1. Álgebra – Estudo e Ensino. 2. Matemática – Ensino Fundamental – Estudo e Ensino. 3. Teoria da Objetivação. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Almeida, Jadilson Ramos de. (Orientador). II. Título.
- 370 (23. ed.) UFPE (CE2021-051)

RAYSSA DE MORAES DA SILVA

**PENSAMENTO ALGÉBRICO EM TAREFA COM PADRÕES: uma investigação nos
anos finais do ensino fundamental**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 03/03/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida (Orientador e Presidente)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Luis Radford (Examinador Externo)
Laurentian University

Prof. Dr. Rodolfo Vergel Causado (Examinador Externo)
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Dedico esse trabalho a todos que lutam por uma educação pública, gratuita, laica, democrática e de qualidade.

AGRADECIMENTOS

Quando começamos o mestrado dizem que nada será fácil e que teremos muito tempo sozinhos dedicados exclusivamente a escrever a tão esperada dissertação. Ao finalizar essa etapa percebo que realmente não foi fácil, escrever um trabalho desses nos desgasta imensamente, nos faz abdicar tempo com a família, com os amigos, tempo esse que nunca voltará. Realmente, aquelas pessoas que encontrei no início disso tudo estavam corretas, mas a maioria delas não imagina a quantidade de seres humanos maravilhosos que eu encontrei e reencontrei no caminho dessa escrita, e a esses eu deixo aqui meus agradecimentos.

Começo agradecendo imensamente à Deus, que é a inteligência suprema e a causa primeira de todas as coisas. Agradeço também ao meu mentor espiritual que me acompanhou nesse percurso que foi o mestrado e ao meu anjo da guarda, obrigada por nossas infinitas conversas, por me acompanhar e me proteger em todas as horas.

Às minhas duas maiores referências na Terra, minha mãe Roberta e meu pai Mario Jorge. Obrigada por me apoiarem em absolutamente tudo que decido realizar na minha vida, hoje compartilhamos conselhos, dias de aflição e dias de alegria. Como costumo dizer, somos nós três por nós três.

Agradeço imensamente às minhas amigas maravilhosas do mestrado, minhas Fadas Sensatas. Rita com seus bolos deliciosos que alegraram muitas aulas cansativas; Jo com sua maneira incrível de fazer graça de todas as situações; Flavinha com seu imenso amor e conhecimento sobre a pedagogia; Elba com quem aprendo diariamente a me desconstruir e me reconstruir em diferentes âmbitos, a nossa relação será uma eterna troca; Glauci que sempre vem com uma pitada de humor na dose certa; Poli com sua incrível, inesquecível e indescritível gargalhada, que alegrou imensos dias difíceis nessa jornada que foi o mestrado; e Claudia, a razão desse grupo, com seu coração enorme que sempre cabe mais um.

A essas duas últimas meus agradecimentos são mais que especiais. Poli e Claudia, obrigada por tudo que compartilhamos nesses dois longos anos, por todas as nossas trocas, vocês são duas amigas de outras vidas que foram pilares importantes desse mestrado. Obrigada por todos os diversos momentos que passamos juntas, desde as longas noites na biblioteca até as nossas idas ao Raul. Vocês são imprescindíveis na minha vida e na minha jornada acadêmica.

Às minhas amigas que me acompanham desde o ensino médio e me apoiam desde o dia que realizei a inscrição para esse mestrado, Duda e Thammy. Duda com seu jeito esquecido, mas sempre se preocupando em perguntar como está a dissertação e como eu estou me sentindo

diante a tudo isso; e Thammy, que mesmo a milhares e milhares de quilômetros se mantém muito próxima, vibrando e torcendo por mim.

Aos meus amigos da graduação, principalmente Ketully, Girlane e Felipe. Mesmo distantes e seguindo caminhos diferentes nessa jornada que é a vida, sempre nos encontramos e reencontramos. Obrigada por toda força e todo apoio ao longo desses anos.

À minha amiga Cândida que me recebeu em sua casa em Natal e ajudou na minha formação nesse mestrado. Obrigada por abrir as portas do seu lar e me acolher, sei que nosso companheirismo é forte e se manterá por longos anos.

Aos meus amigos do intercâmbio que estarão eternamente presentes em minha vida, Gabi e Gui. Vocês fizeram parte de um dos momentos mais importantes da minha vida e fico feliz que essa amizade perdura até hoje. Obrigada por todas as mensagens de preocupação e pela presente torcida para tudo dar certo.

Aos meus colegas do Edumatec Jéssica, Josias, Edivam e principalmente aos meus amigos de seminário: Cláudia, Diego, Robson e Luiz. Ao longo desses dois anos passamos por momentos de ansiedade e muitas outras emoções, obrigada por estarem lá e estenderem a mão quando foi necessário.

Ao meu orientador, Professor Jadilson, por ser uma pessoa que pensa no próximo e em seus orientandos, costumo dizer que tenho sorte em ter ele como orientador. Obrigada por todas as orientações, espero que possamos caminhar juntos por muitos anos nessa vida acadêmica e que outras pesquisas sejam realizadas.

Ao Professor Luis Radford, por ser sempre solícito, paciente e tirar todas minhas dúvidas quando preciso.

À Professora Elisângela e aos Professores Marcelo Câmara e Rodolfo Vergel, pelas contribuições feitas ao meu trabalho durante o exame de qualificação.

Muita gratidão a todos os sujeitos participantes dessa pesquisa, sem vocês nada disso teria sido feito.

À CAPES pelo suporte financeiro ao longo desses dois anos de mestrado, contribuindo para a expansão de pesquisas na área de educação matemática e tecnológica.

À UFPE e ao Edumatec pelo acolhimento.

A todos que lutam pela educação pública no Brasil e pela libertação da classe trabalhadora, vivemos tempos sombrios e perversos, mas vocês me fazem ter esperanças (do verbo esperar) que dias melhores virão. Eles passarão, nós passarinho.

E por fim, mas não menos importante, agradeço a mim mesmo pela paciência que tive com todos os meus conflitos internos e por vencer todos os dias difíceis nesse percurso.

“Sou professor contra a ordem capitalista vigente que inventou esta aberração: a miséria na fartura. Sou professor a favor da esperança que me anima apesar de tudo. Sou professor contra o desengano que me consome e imobiliza.” (FREIRE, 1996, p. 40)

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo identificar as formas de pensamento algébrico mobilizadas por estudantes dos anos finais do ensino fundamental ao responderem uma tarefa de generalização de padrões. Tomamos como base teórica a perspectiva de pensamento algébrico fundamentada na Teoria da Objetivação (TO), que define três distintas formas desse pensamento: factual, contextual e simbólico. Cada uma delas apresenta três elementos caracterizadores que atuam conjuntamente, sendo eles a indeterminação, a denotação da indeterminação e a analiticidade, essa última se configura como o trabalho com o desconhecido realizado a partir de deduções. Além desses aspectos, o pensamento definido na TO possui uma natureza multimodal e é dividido em duas partes: a ideacional, que é composta pela imaginação e pela fala interior; e a material, composta por diferentes meios semióticos de objetivação, como os gestos, os movimentos, os desenhos, as palavras escritas, entre outros. Diante disso, para alcançar o objetivo geral dessa pesquisa foi necessário filmar os alunos participantes, tanto em áudio como em vídeo, no momento de resolução dos sete problemas que compõem a tarefa de generalização de padrões. Em nossa pesquisa houve dois estudos, denominados Estudo 1 e Estudo 2. No primeiro analisamos o pensamento algébrico mobilizado por três duplas, uma composta por alunos do 6º ano e duas por alunos do 9º ano. Dessas três apenas um grupo de estudantes do 9º ano conseguiu pensar algebricamente, mobilizando duas formas desse pensamento: factual e contextual. O segundo estudo ocorreu pela necessidade de aumentar o quantitativo de sujeitos participantes da investigação, mas como ele foi realizado durante a pandemia causada pelo novo coronavírus em 2020, foi necessário realizar algumas modificações em relação ao primeiro, como por exemplo trabalhar individualmente com os alunos. No Estudo 2 analisamos cinco estudantes (três do 6º ano, uma do 8º ano e um do 9º ano), em que a maioria utilizou distintas estratégias para resolver os problemas, mas todos mobilizaram distintas formas de pensamento algébrico definidas pela TO. Como principais resultados apontamos a facilidade que os alunos do 6º ano do Estudo 2 tiveram em trabalhar com o simbolismo alfanumérico a partir de uma tarefa que possibilitou a construção do significado dessa linguagem; a importância dos gestos para com a denotação e o trabalho com o indeterminado; os distintos caminhos percorridos pelos estudantes para resolverem os problemas; o trabalho ombro a ombro entre professor e estudantes; e a não redução da álgebra ao simbolismo alfanumérico.

Palavras-chave: Pensamento Algébrico. Álgebra Escolar. Generalização de Padrões. Teoria da Objetivação.

ABSTRACT

This research aims to analyze forms of algebraic thinking mobilized by students in their final middle school years when answering an activity of generalization of patterns. A perspective of algebraic thinking reasoned with the Theory of Objectification (TO) was taken as a theoretical basis, that defines three distinct forms of thinking: factual, contextual and symbolic. Each one of them presents three characterizing elements that act together, they are: indetermination, the denotation of indeterminacy and analyticity, the latter being configured as the work with the unknown performed from deductions. In addition to these aspects, the thinking defined in TO has a multimodal nature and is divided into two parts: the ideational, which is composed of imagination and inner speech; and the material, composed of different semiotic means of objectification, such as gestures, movements, drawings, written words, among others. In view of this, to reach the general objective of this research, it was necessary to record the participating students, both in audio and video at the time of solving the seven problems that make up the task of generalization of patterns. In our research, there were two studies, they were called Study 1 and Study 2. In the first, we analyzed algebraic thinking mobilized by three pairs, the first group composed by 6th grade students and the second by two groups of 9th grade students. Of these three, only the 9th grade students managed to think algebraically, mobilizing two forms of thought: factual and contextual. The second study was due to the need of increasing the number of subjects participating in the investigation, but as it was carried out during the pandemic caused by the new coronavirus in 2020, some changes in relation to the first were necessary (such as working individually with students). In Study 2 we analyzed five students (three 6th graders, one 8th grader and one 9th grader), in which the majority used different strategies to solve the problems, but all mobilized different forms of algebraic thinking defined by the TO. As main results, we point out the easiness that the 6th grade students of Study 2 had when working with the alphanumeric symbolism from a task that made possible the construction of the meaning of this language; the importance of gestures towards denotation and work with the indeterminate; the different paths taken by students to solve problems; shoulder-to-shoulder work between teacher and students; and not reducing algebra to alphanumeric symbolism.

Keywords: Algebraic Thinking. School Algebra. Generalization of Patterns. Theory of Objectification.

RESUMEN

Esta investigación tiene como objetivo identificar las formas de pensamiento algebraico que movilizan los estudiantes de los últimos años de la educación primaria cuando responden a una tarea de generalización de patrones. Tomamos como base teórica la perspectiva del pensamiento algebraico basado en la Teoría de la Objetivación (TO), que define tres formas distintas de ese pensamiento: factual, contextual y simbólica. Cada uno de ellos presenta tres elementos característicos que actúan conjuntamente, siendo ellos la indeterminación, la denotación de la indeterminación y la analiticidad, configurándose esta última como el trabajo con lo desconocido realizado a partir de deducciones. Además de estos aspectos, el pensamiento definido en la TO tiene un carácter multimodal y se divide en dos partes: el ideacional, compuesto por la imaginación y el habla interior; y el material, compuesto por diferentes medios semióticos de objetivación, como gestos, movimientos, dibujos, palabras escritas y otros. Ante esto, para lograr el objetivo general de esta investigación fue necesario filmar a los alumnos participantes, tanto en audio como en video, a la hora de resolver los siete problemas que componen la tarea de generalización de patrones. En nuestro trabajo hubo dos estudios, nombrados Estudio 1 y Estudio 2. En el primero analizamos el pensamiento algebraico movilizado por tres pares, uno compuesto por alumnos de 6° grado y dos por alumnos de 9° grado. De estos tres, solo un grupo de estudiantes de noveno grado logró pensar algebraicamente, movilizand o dos formas de ese pensamiento: factual y contextual. El segundo estudio se produjo por la necesidad de incrementar el número de alumnos participantes en la investigación, pero como se realizó durante la pandemia provocada por el nuevo coronavirus en 2020, fue necesario hacer algunos cambios con relación al primero, como por ejemplo trabajar individualmente con los estudiantes. En el Estudio 2 analizamos a cinco alumnos (tres de 6° año, uno de 8° y uno de 9°), en los que la mayoría utilizó diferentes estrategias para solucionar los problemas, pero todos movilizaron distintas formas de pensamiento algebraico definidas por la TO. Como principales resultados destacamos la facilidad que tuvieron los alumnos de 6° grado del Estudio 2 para trabajar con el simbolismo alfanumérico a partir de una tarea que posibilitó la construcción del significado de este lenguaje; la importancia de los gestos hacia la denotación y el trabajo con lo indeterminado; los diferentes caminos tomados por los estudiantes para solucionar los problemas; el trabajo hombro a hombro entre la profesora y los alumnos; y la no reducción del álgebra al simbolismo alfanumérico.

Palabras claves: Pensamiento Algebraico. Álgebra Escolar. Generalización de Patrones. Teoría de la Objetivación.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Resolução de uma equação apresentada em um livro de álgebra do início do século XX	25
Figura 2 – Tópicos de álgebra trabalhados em um livro didático de 1977.....	26
Figura 3 – Relação dialética entre saber e conhecimento.....	39
Figura 4 – As fases do Labor Conjunto.....	41
Figura 5 – Esquema gráfico de "coinfluência" entre os processos de Objetivação e Subjetivação entrelaçados no Labor Conjunto.....	42
Figura 6 – O padrão de círculos	47
Figura 7 – Estruturas da generalização algébrica de sequências figurais.....	51
Figura 8 – Arquitetura da indução ingênua	52
Figura 9 – O padrão de palitos de dente	53
Figura 10 – Representação de gestos realizados por uma estudante	56
Figura 11 – Estrutura da Atividade	68
Figura 12 – Tarefa do Estudo 1	68
Figura 13 – As fases do Labor Conjunto - versão antiga	70
Figura 14 – Gestos realizados pelo aluno Arthur para a explicação dos problemas a e b	74
Figura 15 – Respostas escritas dos problemas a e b da Dupla A	75
Figura 16 – Respostas escritas dos problemas a e b da Dupla H	75
Figura 17 – Respostas escritas dos problemas c , d e e da Dupla H	76
Figura 18 – Respostas escritas dos problemas c , d e e da Dupla A.....	77
Figura 19 – Resposta escrita do problema g da Dupla H	78
Figura 20 – Respostas escritas dos problemas a , b e c da Dupla G	79
Figura 21 – Gestos realizados por Paula indicando a quantidade de círculos da linha superior da figura 1, 2, 3 e 4.....	80
Figura 22 – Respostas escritas dos problemas e e f da Dupla G.	83
Figura 23 – Resposta escrita do problema g da Dupla G	85
Figura 24 – Momentos da Atividade do Estudo 2	88
Figura 25 – Respostas escritas dos problemas a e b da aluna Gabriela	93
Figura 26 – Respostas escritas dos problemas c e d da aluna Gabriela.....	95
Figura 27 – Respostas escritas dos problemas e e f da aluna Gabriela.....	96
Figura 28 – Resposta escrita do problema g da aluna Gabriela	97
Figura 29 – Resposta escrita do problema a da aluna Luiza	98

Figura 30 – Desenho realizado por Luiza no decorrer da tarefa	99
Figura 31 – Gesto realizado pela aluna Luiza para explicação do problema <i>d</i>	101
Figura 32 – Respostas escritas dos problemas <i>c</i> , <i>d</i> e <i>e</i> da aluna Luiza.....	102
Figura 33 – Respostas escritas dos problemas <i>f</i> e <i>g</i> da aluna Luiza	103
Figura 34 – Respostas escritas dos problemas <i>a</i> e <i>b</i> do aluno Danilo.....	105
Figura 35 – Sequência de gestos realizados pelo estudante Pedro para a apresentação da sua estratégia.....	107
Figura 36 – Figura 0 suposta pelo aluno Pedro	107
Figura 37 – Gesto do aluno Pedro indicando que o multiplicador de dois é o número da figura 3	108
Figura 38 – Respostas escritas dos problemas <i>f</i> e <i>g</i> do aluno Pedro	109
Figura 39 – Resposta escrita do problema <i>g</i> do aluno Danilo.....	110
Figura 40 – Sequência de gestos realizados pelo estudante Danilo para a apresentação da figura 0	111
Figura 41 – Respostas escritas dos problemas <i>a</i> , <i>b</i> e <i>c</i> da aluna Juliana	112
Figura 42 – Gestos realizados pela aluna Juliana para a explicação do problema <i>d</i>	114
Figura 43 – Respostas escritas dos problemas <i>d</i> , <i>e</i> e <i>f</i> da aluna Juliana.....	116
Figura 44 – Resposta escrita do problema <i>g</i> da aluna Juliana.....	117

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Objetos de conhecimento e habilidades referentes a álgebra e padrões nos anos iniciais do ensino fundamental presentes na BNCC (2018).....	31
Quadro 2 – Expectativas de aprendizagem referentes a álgebra e padrões do 1° ao 6° ano presentes nos PCPE (2012).....	33
Quadro 3 – Objetos de conhecimento e habilidades referentes a álgebra e padrões nos anos finais do ensino fundamental presentes na BNCC (2018).....	34
Quadro 4 – Resolução da equação $3x + 5 = 2x + 15$	45
Quadro 5 – Denotação semiótica e Analiticidade	60
Quadro 6 – Principais Características das Formas de Pensamento Algébrico	64
Quadro 7 – Informações dos estudantes participantes do Estudo 1	71
Quadro 8 – Informações dos estudantes participantes do Estudo 2	90

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	A ÁLGEBRA.....	23
2.1	A Álgebra Escolar, a BNCC e o PCPE	29
3	PENSAMENTO ALGÉBRICO.....	36
3.1	A Teoria da Objetivação	37
3.2	Pensamento Algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação.....	43
3.2.1	Generalização algébrica e aritmética	46
3.2.2	Pensamento Algébrico Factual (ou Concreto).....	52
3.2.3	Pensamento Algébrico Contextual	58
3.2.4	Pensamento Algébrico Simbólico (ou Padrão).....	61
4	METODOLOGIA DO ESTUDO 1	65
4.1	Participantes do Estudo 1	66
4.2	A Tarefa.....	67
4.3	Metodologia da aplicação da tarefa	69
4.4	Coleta e metodologia de análise dos dados	72
5	ANÁLISE DO ESTUDO 1	73
5.1	Análise da Dupla A e da Dupla H	73
5.2	Análise da Dupla G.....	79
6	METODOLOGIA DO ESTUDO 2	87
7	ANÁLISE DO ESTUDO 2	92
7.1	Análise da aluna Gabriela (6º ano)	92
7.2	Análise da aluna Luiza (6º ano).....	97
7.3	Análise dos alunos Pedro (6º ano) e Danilo (9º ano)	105
7.4	Análise da aluna Juliana (8º ano).....	112

8	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	119
	REFERÊNCIAS	124
	APÊNDICE – TRANSCRIÇÃO DE VÍDEOS.....	133

1 INTRODUÇÃO

A matemática é vista por muitos alunos como uma das disciplinas mais difíceis da educação básica¹. Essas dificuldades são refletidas nas provas avaliativas da educação brasileira, como apresenta a Prova Brasil (2017). Nesse exame foi mostrado que 56% dos alunos matriculados no 5º ano não aprenderam o adequado referente à matemática e no 9º ano apenas 15% dos alunos atingiram o esperado.

Segundo um levantamento de pesquisas realizado por Santos Junior (2013), alguns autores consideram que um dos campos da matemática que os alunos apresentam mais dificuldades é o da álgebra. Muitas vezes elas estão associadas ao fato de professores tratarem a álgebra como a utilização de uma linguagem para a resolução de problemas ou até mesmo como processos mecânicos para resolverem equações.

Um exemplo dessa ideia da álgebra reduzida à sua linguagem e à manipulação de regras é observado na pesquisa de Barbosa e Silva Junior (2010), que buscou analisar os reflexos dos conhecimentos sobre aritmética para o estudante do 9º ano do ensino fundamental efetuar as operações e manipulações algébricas. Como resultado dessa pesquisa os autores constataram que os estudantes foram bem-sucedidos na resolução dos problemas aritméticos, porém tiveram dificuldades no momento de acréscimos de símbolos para trabalhar com as mesmas estruturas operacionais, problemas que eles categorizaram como algébricos. Trabalhar a álgebra dessa maneira a leva a um reducionismo, que muitos professores a veem como uma aritmética generalizada por meio de uma linguagem específica.

Mesmo ainda existindo educadores que seguem essa visão sobre a álgebra em suas salas de aula, a partir dos anos de 1990 pesquisadores tais como Lins (1992) e Fiorentini et al. (1993) começaram a ressignificar esse ensino. Perceberam que o simbolismo algébrico alfanumérico é importante, mas que o ensino da álgebra não pode estar limitado apenas a isso, mas, sim, deve haver uma sucessão de processos até o aluno conseguir entender o que aquela linguagem simbólica significa.

Seguindo essas ideias a álgebra começou a ser vista como uma forma de pensar em relação às ideias matemáticas (RADFORD, 2009, 2010a; ALMEIDA, CÂMARA, 2017). Não há um consenso entre os pesquisadores para a definição de pensamento algébrico, o que existem

¹ A educação básica no Brasil é dividida em três etapas: o ensino infantil, o ensino fundamental e o ensino médio. O ensino fundamental possui nove anos de duração (1º ano 9º ano) e é dividido em duas partes: anos iniciais (1º ao 5º ano) e anos finais (6º ao 9º). Segundo a BNCC (2018) é indicado que os alunos cursem essa etapa de ensino durante o período dos 6 aos 14 anos de idade.

são diversas perspectivas baseadas em distintas teorias e algumas dessas colocam o processo de generalização como uma das principais características desse pensamento.

Como exemplo disso temos Blanton e Kaput (2005), que afirmam que essa característica de generalização é expressa gradualmente em sistemas de símbolos convencionais. Além deles, Kieran (2007) defende que a “álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo símbolos em forma de letra, mas também consiste na atividade de generalização e fornece uma série de ferramentas para representar a generalidade de relações matemáticas, padrões e regras”². (p. 7, tradução nossa)

Para estimular o processo de generalização alguns autores, como Radford (2009), Borralho e Barbosa (2009, 2011), Vale (2012, 2013), Barbosa e Vale (2013), Baqueiro (2016), Regis (2017) e Vergel (2019), afirmam que o trabalho com atividades que envolvam exploração de padrões é um dos caminhos para desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes.

Na visão de Barbosa e Vale (2013) a generalização é considerada a base do pensamento algébrico, sendo ela um importante elemento do conhecimento matemático que surge naturalmente em atividades com exploração de padrões. Vale (2012) afirma que “as tarefas com padrões dão aos estudantes oportunidades para observar e verbalizar as suas próprias generalizações e traduzi-las numa linguagem mais formal de acordo com a idade” (p. 190).

Podemos observar que Vale (2012) apresenta uma ideia de que o trabalho com esses tipos de tarefas oportuniza a argumentação dos alunos, e isso é confirmado na investigação de Regis (2017). Esse autor concluiu que “o trabalho com padrões abre caminho para o exercício da comunicação, poder de argumentação, elaboração de hipóteses e justificativas” (p. 30). Isso mostra que o trabalho com padrões vai além do campo algébrico.

É importante ressaltar que a mobilização do pensamento algébrico, assim como o trabalho com padrões, não deve iniciar apenas nos anos finais do ensino fundamental, podendo já ser desenvolvida nos primeiros anos dessa etapa de ensino (BORRALHO; BARBOSA, 2009). Dessa maneira, defendemos que

O processo de generalização de padrões é uma forma de conceber a álgebra que deve estar presente em todas as etapas da educação algébrica, principalmente na educação básica, constituindo-se em um dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico que auxiliam na construção dos objetos matemáticos (BAQUEIRO, 2016, p. 190)

² Texto original: Algebra was not merely a set of procedures involving the letter-symbolic form, but also that it consisted of generalizing activity and provided a range of tools for representing the generality of mathematical relationships, patterns, and rules.

Em concordância com esses autores alguns documentos oficiais da educação, como os Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco – PCPE (2012), a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2018) e o Currículo de Pernambuco para o Ensino Fundamental – CPE (2019), defendem que o ensino da álgebra e a abordagem de atividades que envolvem padrões deve estar presente em quase todo o percurso do ensino fundamental.

Analisando diversas pesquisas brasileiras é notável que alguns professores e pesquisadores já entenderam a álgebra como um pensamento e que a utilização de padrões, que leva o aluno à generalização, é um dos melhores caminhos para desenvolver esse pensar algébrico.

Exemplificando essas ideias tem-se a investigação de Porto, Costa, Marques e Luna (2010). Essas pesquisadoras são professoras polivalentes da educação infantil que buscaram encontrar uma sequência de atividades para o ensino de álgebra para crianças de 6 anos, esse ensino tinha como foco o desenvolvimento do pensamento algébrico. Para isso elas utilizaram atividades que os alunos buscassem observar regularidades e a generalizassem, chegando à conclusão de que essas atividades potencializaram o pensamento dos estudantes para as noções algébricas.

Ainda no ensino infantil a pesquisa de Jungbluth et al. (2019) buscou descrever e compreender como o uso de sequências recursivas e repetitivas contribui para desenvolver o pensamento algébrico nos anos iniciais. Os pesquisadores buscaram exemplos em livros didáticos e em literaturas que discorrem sobre o assunto e concluíram que as atividades envolvendo padrões levam a um ensino e aprendizagem da matemática com mais significado, indo além do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Em concordância com essas ideias a pesquisa de Bredariol e Nacarato (2013) analisou os raciocínios de estudantes do 6º ao 8º ano ao responderem uma tarefa com padrões. Os alunos trabalharam em grupos de 4 componentes, assim como socializaram suas ideias para toda a turma. Em suas conclusões os pesquisadores ressaltam a importância da interação social, da linguagem e do desenvolvimento humano para a mobilização do pensamento algébrico e o uso da linguagem, tanto a falada quanto a escrita, como forma de expressão desse pensamento.

A pesquisa de Rodrigues et al. (2013) buscou identificar os tipos de pensamento algébrico, com base na definição de Blanton e Kaput (2005), que os alunos do 6º ano do ensino fundamental mobilizavam ao responder três tarefas matemáticas envolvendo padrões. Foram analisadas as produções escritas e a fala dos alunos, e os autores concluíram que mesmo sem

utilizar a linguagem simbólica alfanumérica os estudantes mobilizaram alguma forma de pensar algebricamente, expressando as ideias algébricas de diferentes formas.

Esses outros modos de pensar algebricamente, utilizando algo além do simbolismo alfanumérico, também foi identificado no trabalho de Pereira Junior (2016). Ele relata uma atividade realizada com alunos do 8º ano que buscou trabalhar com o cálculo literal utilizando padrões e regularidades. O objetivo dessa pesquisa era fazer com que o estudante conseguisse escrever suas conclusões utilizando uma linguagem algébrica formal, mas o pesquisador observou que é importante os alunos perpassarem por diferentes etapas, em que eles possam conjecturar, levantar hipóteses e desenvolver a argumentação. O autor também defende a importância de ouvir as ideias dos estudantes, para com isso abordar a simbologia algébrica alfanumérica.

A pesquisa de Pereira (2019) investigou os modos de produção de significação do pensamento algébrico que os alunos do 7º ano produziam ao responderem tarefas com sequências figurativas ou numéricas. Podemos observar que as investigações relatadas anteriormente afirmam que a linguagem escrita e oral são expressões do pensamento e Pereira (2019) defende a ideia de que esses elementos são a externalização do pensar, ou seja, a parte material do pensamento. Além da escrita e da fala o autor identificou que os estudantes utilizavam múltiplas linguagens para externar o pensamento algébrico, como os gestos e os desenhos.

Para realizar essas afirmações Pereira (2019) se apoiou na fundamentação de pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação (TO) – uma teoria sociocultural de ensino-aprendizagem desenvolvida pelo professor Luis Radford. Na visão dessa teoria o pensamento possui uma natureza multimodal e é dividido em duas partes: a material e a ideacional. Essa última é composta pela imaginação e fala interior do estudante, enquanto a material é constituída por gestos, percepção, falas, desenhos, escrita, entre outros (MOGOLLÓN, 2020). Esses diversos elementos são denominados *meios semióticos de objetivação*.

Em relação ao pensamento algébrico, Radford (2006, 2009, 2010a, 2010b, 2018) o divide em três formas: factual, contextual e simbólico. Todas elas apresentam três elementos caracterizadores que se interrelacionam, são eles a indeterminação, a denotação e a analiticidade, esse último consiste no trabalho com o desconhecido como se o conhecesse a partir de deduções. Mediante a esses elementos, à estratégia que o estudante recorre e aos meios semióticos que ele emerge durante uma atividade, podemos definir qual das três formas de

pensamento algébrico o aluno está mobilizando. Para chegar à definição dessas formas Radford (2009) realizou uma pesquisa longitudinal com estudantes de diversas idades que responderam a problemas de generalização de padrões.

No pensamento algébrico factual o estudante trabalha com a indeterminação implicitamente e faz uso de gestos, ritmos e movimentos para tornar aparente suas intenções. Quando ele mobiliza o pensamento algébrico contextual a indeterminação já se torna explícita por meio da fala e da escrita. O uso de símbolos alfanuméricos é o meio semiótico de objetivação característico do pensamento algébrico simbólico³.

Com a análise das pesquisas descritas anteriormente percebemos a existência do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos a partir do trabalho com tarefas de generalização de padrões, mas algumas delas se atêm apenas à linguagem escrita e oral do estudante. Diante disso, e tomando como referencial a perspectiva de pensamento algébrico que se fundamenta na Teoria da Objetivação, decidimos que nossa pesquisa não se restringirá apenas à fala e à escrita, considerando também gestos, desenhos, ritmos e outros componentes do pensamento algébrico. Dessa maneira, essa pesquisa se debruçará a responder à seguinte questão: Quais são as formas de pensamento algébrico mobilizadas por alunos dos anos finais do ensino fundamental ao responderem uma tarefa de generalização de padrões?

A escolha por utilizar a perspectiva da TO nessa investigação é justificada pelo fato de ela defender que os gestos, falas, desenhos, entre outros, compõem o pensamento algébrico mobilizado pelo aluno no momento da atividade⁴. A escolha por trabalhar com alunos do 6º ao 9º ano tomou como base os PCPE (2012), pois esse documento apresenta que no campo do ensino da álgebra atividades com sequências figurais e numéricas devem ser trabalhadas desde o primeiro ano do ensino fundamental.

Com isso partimos do princípio de que os estudantes que cursaram os anos finais do ensino fundamental nos anos de 2019 e 2020 em Pernambuco, local que foi realizada a pesquisa, já estavam familiarizados com esses tipos de tarefas e supomos que eles resolveriam os problemas algebricamente.

Portanto, o objetivo geral dessa pesquisa é identificar as formas do pensamento algébrico mobilizadas por estudantes dos anos finais do ensino fundamental ao responderem uma tarefa de generalização de padrões. Para alcançar esse objetivo nossos objetivos

³ As diferentes formas de pensamento algébrico serão mais detalhas na fundamentação teórica dessa pesquisa.

⁴ Referente a atividade na perspectiva da TO, que é definida como “uma forma social de esforço conjunto por meio do qual os indivíduos produzem seus meios de subsistência enquanto se produzem a si mesmo como seres humanos.” (RADFORD, 2020, p. 23, tradução nossa). Na TO essa atividade recebe o nome de *labor conjunto*.

específicos são: identificar os meios semióticos que os estudantes emergem para objetivar suas ideias – pois assim será possível identificar suas formas de pensamento algébrico mobilizadas; identificar a estratégia utilizada pelo estudante para resolver o problema – o que oportunizará a definição de se o aluno está pensando algebricamente ou não; e identificar a presença dos três elementos caracterizadores do pensamento algébrico (indeterminação, denotação e analiticidade) nas respostas dos estudantes.

Após a apresentação da questão de pesquisa e dos objetivos, geral e específicos, organizamos a estrutura do texto de acordo com a discussão sobre a álgebra, fundamentação teórica, procedimentos metodológicos, análise de dados e considerações finais da pesquisa.

O Capítulo 2 é referente à álgebra. Ele apresenta algumas concepções de álgebra e um breve recorrido histórico dela, levando em consideração as antigas civilizações até os dias atuais. Também traz uma abordagem do percurso histórico do ensino da álgebra no Brasil, com breves análises de livros didáticos utilizados no Século XX em diferentes momentos. Por fim, expomos algumas pesquisas desse campo da matemática no Brasil, o entendimento de álgebra para alguns autores e como os problemas com sequências, regularidades e padrões relacionado à álgebra estão presentes nos PCPE (2012) e na BNCC (2018).

O Capítulo 3 trata do pensamento algébrico e da perspectiva desse pensar fundamentado na Teoria da Objetivação (RADFORD, 2009, 2010a). Esse capítulo apresenta uma breve discussão sobre os principais elementos da TO e detalha os elementos caracterizadores desse pensamento e suas três formas distintas.

Nosso trabalho apresenta dois estudos empíricos, denominados Estudo 1 e Estudo 2. O primeiro consistia no estudo piloto da pesquisa, mas após o exame de qualificação decidimos por deixá-lo como um dos principais. O percurso metodológico desse Estudo 1 é detalhado no Capítulo 4. Ele foi realizado com 19 alunos do 6º ao 9º ano, desses 19 estudantes conseguimos gravar três duplas, portanto a análise dele foi realizada apenas com seis alunos. Essa análise está descrita no Capítulo 5, em que apresentamos os principais resultados e conclusões a partir das respostas escritas e das vídeos-gravações dos estudantes no momento da atividade.

Como no Estudo 1 houve poucos sujeitos participantes, buscamos aumentar esse quantitativo realizando um segundo estudo. A ideia principal do Estudo 2 era trabalhar com um grupo de alunos de cada ano escolar dos anos finais do ensino fundamental, porém devido à pandemia causada pelo novo coronavírus (SARS-CoV-2), que teve início no Brasil no primeiro semestre de 2020, tivemos que realizar diversas modificações, buscando evitar qualquer propagação do vírus.

Portanto, o Estudo 2 não foi realizado em duplas, tampouco em salas de aula, mas com cada aluno individualmente, totalizando 11 sujeitos participantes. As modificações e a metodologia utilizada nesse estudo estão descritas no Capítulo 6 desse trabalho. Dos 11 estudantes participantes, 5 conseguiram mobilizar formas de pensar algebricamente. A análise desses resultados é encontrada no Capítulo 7.

Por fim, no capítulo seguinte, apresentamos nossas considerações finais e indicações para próximos estudos.

2 A ÁLGEBRA

A álgebra por muitos anos foi entendida como a utilização de letras para indicar valores (BOOTH, 1995; USISKIN, 1995), mas em meados dos anos 1990 essa concepção começou a sofrer modificações. Educadores perceberam que definir a álgebra dessa maneira seria reduzi-la apenas ao seu simbolismo alfanumérico acompanhado de memorização de regras e procedimentos, a partir disso ela começou a ser entendida como uma forma de pensar em relação às ideias matemáticas (FIORENTINI et al., 1993; LINS; GIMENEZ, 1997; KIERAN, 2007; RADFORD, 2009).

Uma perspectiva histórica da álgebra, que toma como base o desenvolvimento histórico da linguagem algébrica, foi apresentada por Fiorentini et al. (1993) e mostrou que o surgimento do simbolismo alfanumérico ocorreu depois de muitos anos de estudos dessa área da matemática. Essa perspectiva é vinculada a três distintos momentos, que inicialmente se referem à: linguagem retórica; linguagem sincopada; e linguagem simbólica.

O primeiro momento faz referência à fase da utilização da linguagem *retórica verbal*, correspondente à época das antigas civilizações (4000 a 3500 a.C.), como os egípcios, os babilônicos e os gregos anteriores a Diofanto de Alexandria (Século III). Segundo Fiorentini et al. (1993) e Radford (2011a), alguns dos indícios que não levam a identificar o trabalho com álgebra dessas civilizações são: a utilização, pelos egípcios, do método da falsa posição para resolução de equações do primeiro grau e a utilização da geometria ingênua, pelos babilônicos, para resolução de equações do segundo grau. Essas ideias eram apresentadas por meio de uma linguagem corrente, como a escrita cuneiforme gravada nas tábuas de argila pelos Babilônicos

A linguagem *sincopada* é a característica do segundo momento. Esse faz referência à época em que Diofanto começou a utilizar a palavra *arithmos* para indicar uma incógnita, tornando suas equações mais concisas e abreviadas. A utilização do *arithmos* conduziu a álgebra para um tratamento mais sistemático e global dos seus problemas (RADFORD, 2011a). Esse modelo sincopado também foi utilizado por Cardano (1545) ao descrever uma equação da seguinte maneira: “cubus p. 6 rebus aequalis 20”, o que corresponde a $x^3 + 6x = 20$.

A última fase dessa perspectiva histórica de desenvolvimento da álgebra, apresentada por Fiorentini et al. (1993), possui como característica o que eles denominam linguagem *simbólica* e faz referência ao momento de introdução de novos símbolos na álgebra por François Viète (1540-1603). A evolução dessa simbologia deu continuidade com os outros matemáticos

posteriores a Viète, como é o exemplo de Descartes (1596-1650) que fez uso das últimas letras do alfabeto para referir-se a incógnitas e das primeiras letras como referência aos números fixos.

Diante desses relatos históricos observamos que foi uma construção e sucessão de ideias que culminou no desenvolvimento da linguagem simbólica alfanumérica, isso mostra que a partir do aprofundamento dos estudos da álgebra foi que surgiu a necessidade de desenvolver esse simbolismo. Esses fatos nos indicam que não é interessante definir e trabalhar a álgebra dentro da sala de aula apenas com foco em sua simbologia alfanumérica.

Em algumas pesquisas, como as de Pereira e Pires (2010) e Mazaro e Pires (2010), é notável um pouco da preocupação de alguns professores brasileiros com a expansão do ensino da álgebra para além das regras e procedimentos. Ambas as pesquisas citadas indicam que esse ensino não deve ser reduzido ao seu simbolismo, mas, sim, deve estar voltado para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, de modo que eles consigam perceber regularidades, estabelecer relações entre variáveis, entre outros. Para isso as autoras defendem a necessidade de atividades que desafiem os alunos, que os levem a descobertas e reflexões, sendo ativos no processo de resolução. Mas a educação algébrica no Brasil precisou de um longo percurso de modificações para que os educadores começassem a defender o ensino da álgebra dessa maneira.

Chegando às escolas brasileiras nos primeiros anos do Século XIX, a álgebra era ensinada em aulas avulsas de aritmética, geometria e trigonometria. O ensino da matemática nessa época seguia a seguinte sequência: primeiro era ensinado a aritmética, depois a álgebra e por último a geometria.

Nesse período não existia um único livro para a matemática, mas sim diversos livros para cada área. No caso da álgebra os livros presentes na sala de aula eram denominados manuais didáticos e recebiam o nome de Curso de Álgebra (MIGUEL et al., 1992). Esses livros apresentam indícios de como era vista a educação algébrica da época, que, segundo Fiorentini et al. (1993), recebe o nome de percepção *linguístico-pragmática*.

Os livros do Século XIX e primeira metade do Século XX normalmente introduziam os assuntos com alguns problemas resolvidos e depois indicavam outros problemas para serem respondidos. O conceito de equação, por exemplo, sempre estava associado com a necessidade de resolução de problemas (MIGUEL et al., 1992). A Figura 1 apresenta como era trabalhado o tópico de equação de 1º grau em um livro do ano de 1923. Nessa imagem é possível observar a explanação da técnica que os alunos deveriam utilizar para resolver o problema, mostrando a redução da álgebra ao seu simbolismo e às suas regras.

Figura 1 – Resolução de uma equação apresentada em um livro de álgebra do início do século XX

$$\frac{3}{8}x + 6 = \frac{5}{6}x - 5.$$

Multiplicando os dois membros por 24, mínimo múltiplo comum dos denominadores, tem-se:

$$9x + 144 = 20x - 120. (1)$$

A precedente transformação da equação fraccionária em inteira chama-se *eliminação dos denominadores*. Transpondo os termos da equação (1), vem:

$$144 + 120 = 20x - 9x.$$

Reduzindo os termos semelhantes, acha-se:

$$264 = 11x,$$

ou

$$11x = 264.$$

E dividindo os dois membros por 11,

$$x = \frac{264}{11} = 24.$$

Logo, o numero procurado é 24.

Fonte: Pérez e Marin (1923, p. 18)

Em 1931, com a Reforma Francisco Campos⁵, a educação no Brasil começou com a ideia de seriação. Isso levou, gradativamente, ao desaparecimento dos manuais didáticos, como o Curso de Álgebra, dando lugar aos manuais organizados que apresentavam os conteúdos a serem trabalhados em determinado ano escolar.

Em relação a esses novos livros didáticos Miguel et al. (1992) afirmam que a apresentação dos conteúdos relativos ao campo da álgebra não sofreu muitas modificações, continuando com a ideia *linguística*, dando ênfase ao simbolismo algébrico, assim como *pragmática*, por meio de um conjunto de regras que devem ser seguidos para obter a resolução de determinados problemas. Essas características permaneceram até por volta de 1960, quando surge a segunda concepção da educação algébrica no Brasil durante o Movimento da Matemática Moderna⁶.

⁵ A Reforma Francisco Campos foi a primeira reforma da educação de nível nacional no Brasil e foi realizada pelo Ministro da Educação e Saúde da época, o Francisco Campos. Uma das principais contribuições dessa reforma foi a inserção do ensino seriado e a obrigatoriedade da presença dos alunos às escolas.

⁶ O Movimento da Matemática Moderna foi um movimento internacional que chegou ao Brasil nos anos 1960 e perdurou até os anos finais da década de 70.

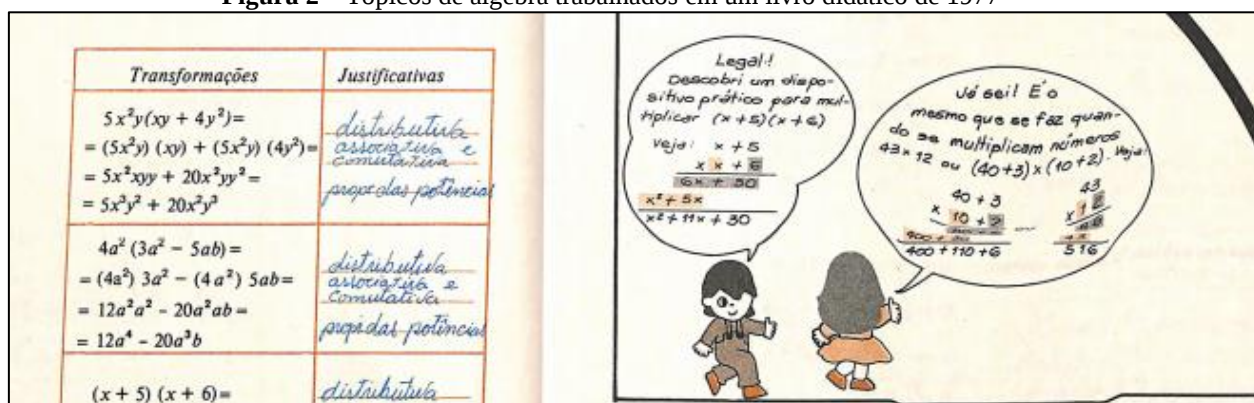
Um dos principais propósitos desse movimento foi unificar o ensino da aritmética, da álgebra e da geometria. Essa unificação não se deu pela introdução ou exclusão de tópicos a serem estudados, mas “pela introdução de elementos unificadores tais como a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas e as relações que, acreditava-se, constituiriam a base para a construção lógica do novo edifício matemático.” (MIGUEL et al., 1992, p. 45).

Nesse período a álgebra ganhou bastante destaque, pois existia uma visão de que ela havia sido responsável pelos avanços da matemática ocorridos nos dois últimos séculos. Com base nessas ideias os educadores defendiam que o papel pedagógico da álgebra era de ser fundamentador dos outros campos da matemática. Com isso a segunda concepção do desenvolvimento da educação algébrica no Brasil recebe o nome de *fundamentalista-estrutural* (FIORENTI et al., 1993).

A abordagem da álgebra continuou fortemente vinculada à linguagem simbólica, mas agora existia a preocupação com a estrutura lógica dos objetos algébricos. Miguel et al. (1992) afirmam que nesse momento o ensino da álgebra começava com a introdução de propriedades, enfatizando os conceitos e a linguagem para expressá-los.

A Figura 2 apresenta a preocupação em explicar os processos lógicos e estruturais da álgebra presentes nos livros didáticos do ano de 1977. Em comparação com o livro didático da concepção *linguístico-pragmática* é possível identificar que o foco não é mais utilizar as equações para resolver um determinado problema, e sim saber os nomes das regras utilizadas em cada passo para resolver a equação, ou seja, justificar todas as etapas dos procedimentos.

Figura 2 – Tópicos de álgebra trabalhados em um livro didático de 1977



Fonte: Averbuch et al. (1977, p. 88-89)

Mesmo mudando o foco da preocupação do ensino da álgebra ambos os momentos direcionam esse ensino para o manuseio do simbolismo alfanumérico e para a identificação e aplicação de regras.

A última concepção da Educação Algébrica no Brasil apresentada por Fiorentini et al. (1993) é denominada *fundamentalista-analógica*, surgiu depois do Movimento da Matemática Moderna e buscava uma fusão entre as duas concepções anteriores. Nela é retomada a ideia de utilizar a álgebra para resolução de problemas e as justificativas são realizadas com bases em recursos analógicos geométricos, materiais concretos, entre outros.

Mesmo existindo essas três distintas concepções Miguel et al. (1992) defendem que todas elas buscaram reduzir o pensamento algébrico ao simbolismo, ou seja, elas tomaram como ponto de partida à álgebra simbólica alfanumérica, deixando de lado todo o desenvolvimento do pensamento algébrico que deve ser realizado até chegar na utilização dessa simbologia. Portanto, todas as concepções estão voltadas para uma visão de álgebra mecânica, em defesa da sua linguagem, regras e procedimentos.

Essas ideias também estão presentes entre pesquisadores e professores, como é o caso de Usiskin (1995) que afirma que a álgebra escolar tem relação com os significados das letras e com as operações que são realizadas com elas. Com base nesta definição ele defende quatro concepções para o ensino da álgebra (a álgebra como aritmética generalizada, a álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problema; a álgebra como estudo de relações entre grandezas; a álgebra como estudo das estruturas), e todas a reduzem ao seu simbolismo e às regras para resolução de problemas. Em paralelo com essas ideias Booth (1995) afirma que a álgebra deve ser vista como uma aritmética generalizada, que a diferença entre elas é que a álgebra utiliza as letras para indicar valores.

Essa visão da álgebra ainda está presente nas salas de aula, como indicam as pesquisas de Ferreira e Wagner (2010) e a de Ramos et al. (2013). A primeira investigação buscou identificar as crenças e concepções de uma professora de matemática no ensino fundamental e médio. Os autores notaram que a professora analisada afirmava que a álgebra corresponde ao estudo de técnicas para resolver exercícios, a definindo como prática de exercícios de memorização. Essas concepções também se fizeram presentes na pesquisa de Ramos et al. (2013) que observando uma aula do 7º ano sobre equações do primeiro grau constataram que a resolução de problemas muitas vezes era confundida com a resolução de exercícios fortemente voltados para a manipulação e memorização de métodos. O professor observado utilizou na aula a sequência de atividades presentes no livro didático e elas estavam voltadas para uma concepção de álgebra como resolutiva de problemas, não favorecendo a autonomia dos alunos para levantar hipóteses e estratégias.

O ensino da álgebra, com base nessa perspectiva mecanicista, se reflete na formação dos alunos nesse campo da matemática, como apresenta a pesquisa de Dorigo e Ribeiro (2010). A investigação desses pesquisadores tinha como objetivo diagnosticar quais as concepções que os alunos do ensino médio possuíam sobre os significados das equações. Os resultados evidenciaram que os estudantes estão muito presos às regras e técnicas de manipulação para obterem o resultado da equação e quando são questionados sobre esses procedimentos não sabem justificar o que fazem e o porquê fazem.

Buscando modificar essa visão tecnicista, autores começaram a buscar outras propostas para definir a álgebra escolar. Na visão de Lins e Gimenez (1997) “a álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade” (p. 137). Os autores afirmam que essa definição serve para identificar possíveis atividades que potencializam o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Com base em suas pesquisas, Modanez (2003) elencou o ensino da álgebra escolar em três categorias, sendo a primeira a visão mais clássica, em sua perspectiva, a que o pensamento algébrico é visto como uma ampliação do pensamento aritmético. A segunda propõe o desenvolvimento inter-relacionado da álgebra e da aritmética, ou seja, que a álgebra e a aritmética sejam desenvolvidas concomitantemente. E a última defende uma semi-dependência dos pensamentos algébricos e aritméticos.

Em paralelo com essas ideias, Castro (2003) defende a existência de duas opções pedagógicas para o ensino da álgebra escolar. A primeira considera esse ensino como aritmética generalizada, que defende que para aprender álgebra precisa entender muito de aritmética, sendo a álgebra vista como uma generalização dos procedimentos aritméticos. Nessa perspectiva a álgebra é caracterizada pelo uso de uma linguagem sofisticada para o aluno abordar os mesmos problemas e procedimentos da aritmética. A segunda concepção é caracterizada pelo pensamento algébrico, que o autor define como “um certo modo de pensar os problemas da Matemática” (CASTRO, 2003, p. 3).

Algumas pesquisas brasileiras já mostram a preocupação com o desenvolvimento desse pensamento, como por exemplo as pesquisas de Silva e Savioli (2012) e Prestes e Ferreira (2018). Ambas realizaram trabalhos com alunos dos anos iniciais do ensino fundamental. Na primeira investigação foram aplicadas tarefas em alunos do 5º ano e as respostas desses estudantes levaram os autores a concluir que mesmo com algumas resoluções equivocadas era possível evidenciar indícios de pensamento algébrico, pois os alunos buscaram entender a

situação do problema e descrever seus processos de pensamento. A segunda pesquisa foi realizada com alunos do 2º ano e os autores utilizaram uma atividade que tinha por objetivo fazer os alunos refletirem sobre simbologias já conhecidas, como por exemplo a placa de proibido fumar. Segundo os autores essa atividade pode iniciar o desenvolvimento do pensamento algébrico de maneira intuitiva.

Observamos então que algumas investigações já indicam que o ensino da álgebra, com foco no desenvolvimento do pensamento algébrico, deve começar a ser realizado já nos primeiros anos do ensino fundamental, para que com isso haja uma construção das ideias algébricas nos estudantes. Isso facilitará no momento que eles se depararem com estudos mais avançados, como equações do segundo grau, possibilitando construir com maior facilidade o significado para o que está sendo estudado. Obviamente esse trabalho com as crianças não deve ser iniciado a partir do simbolismo alfanumérico, mas sim se deve utilizar outros tipos de linguagem. Portanto concordamos que o

Ensino da álgebra na educação básica, começando desde os anos iniciais até o ensino médio, deve estar voltado muito mais para a construção de significado e o desenvolvimento do pensamento algébrico, em detrimento da manipulação da linguagem simbólico algébrica (ALMEIDA, CÂMARA 2017, p. 11)

Em concordância com essas ideias, os Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco – PCPE (2012) apresentam diversas expectativas de aprendizagem referentes ao campo da álgebra, assim como a última versão da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2018) apresenta uma sequência de objetos de conhecimento e habilidades que devem ser trabalhadas em todo o percurso de ensino da álgebra no ensino fundamental. Esses elementos, de ambos os documentos, serão explicados no próximo tópico desse capítulo.

Nesse trabalho não abordamos as ideias relacionadas à álgebra presentes no Currículo de Pernambuco para o Ensino Fundamental – CPE (2019), pois o que ele expõe está muito semelhante com o que foi apresentado sobre álgebra na BNCC no ano de 2018.

2.1 A Álgebra Escolar, a BNCC e o PCPE

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2018) é um documento oficial da educação brasileira e possui um caráter normativo, com o intuito de indicar quais são as aprendizagens essenciais para cada ano escolar. Esse documento busca uma equidade entre os

alunos brasileiros por meio da apresentação dos temas que devem ser abordados durante o percurso do estudante na educação básica.

Em relação ao ensino fundamental, que é o nosso campo de pesquisa, a BNCC (2018) o estrutura por meio dos seguintes elementos: áreas do conhecimento – competências específicas de área; componentes curriculares – competências específicas de componente. A etapa de ensino em questão está organizada em cinco áreas do conhecimento, sendo a matemática uma delas. Essa área apresenta como componente curricular a própria matemática, diferentemente, por exemplo, da área de ciências humanas que é constituída por dois componentes curriculares: história e geografia.

Visando o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades a serem desenvolvidas que fazem referência às aprendizagens essenciais de um determinado ano escolar. Essas habilidades estão relacionadas com os objetos de conhecimento, ou seja, com os conteúdos, conceitos e processos. Esses objetos são organizados em unidades temáticas.

A matemática apresenta cinco unidades temáticas: *números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística*. Nessa pesquisa nos debruçaremos a analisar a unidade temática álgebra.

A BNCC (2018) mostra que a principal finalidade dessa unidade é o desenvolvimento do pensamento algébrico e defende que ele “é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos.” (BRASIL, 2018, p. 270).

O documento em questão defende que o desenvolvimento do pensar algebricamente deve começar nos anos iniciais do fundamental, mas que o trabalho com o simbolismo alfanumérico só deve estar presente a partir do 7º ano dessa etapa do ensino. Para a mobilização desse pensamento nos anos iniciais a BNCC (2018) indica o trabalho com problemas que apresentem determinados padrões. Para isso devem ser utilizadas sequências, sejam elas de crescimento ou de repetição, de modo que os alunos consigam completar a sequência, perceber um determinado padrão, realizar generalizações e criar uma lei de formação.

Além de problemas com padrões, o documento incentiva o desenvolvimento da ideia de equivalência com números particulares, de modo que o aluno consiga perceber, por exemplo, que se $3 + 6 = 9$ e $2 + 7 = 9$, então $3 + 6 = 2 + 7$. Outra indicação para trabalhar álgebra nos anos iniciais é desenvolver as ideias de função juntamente com proporcionalidade.

Segundo a BNCC (2018) os anos finais do ensino fundamental são voltados para aprofundar os conteúdos trabalhados na primeira etapa e os alunos desses anos, ao estudarem conteúdos relativos à álgebra, devem

compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos. (BRASIL, 2018, p. 270 – 271)

É importante evidenciar que as técnicas de resolução de equações e inequações, que são abordadas nos anos finais, devem ser construídas ao longo de todo percurso do ensino fundamental. Dessa forma, os alunos conseguirão atribuir significado e compreender todas as etapas de resolução, sabendo justificar todos os passos realizados.

Analisando as habilidades e objetos de conhecimento referentes à unidade temática álgebra, é perceptível que o trabalho com sequências, ou com padrões, está presente na maioria dos anos da parte inicial do ensino fundamental (Quadro 1). Como a nossa pesquisa está relacionada com atividades que envolvem padrões, buscamos identificar como a BNCC (2018) define o trabalho com esses elementos em cada ano escolar.

Quadro 1 – Objetos de conhecimento e habilidades referentes a álgebra e padrões nos anos iniciais do ensino fundamental presentes na BNCC (2018)

Ano Escolar	Objetos de conhecimento	Habilidades
1º ano	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências.	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
	Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo).	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
2º ano	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas.	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
	Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.	(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.

		(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
3º ano	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas.	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
4º ano	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
	Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero.	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.

Fonte: Adaptado de BNCC (2018)

Para o desenvolvimento do pensamento algébrico o trabalho com padrões tem início no 1º ano do ensino fundamental, em que os alunos são postos a investigar as regularidades, descrever o que conseguem perceber e encontrar elementos ausentes. No 2º ano o estudante é posto para criar suas próprias sequências e descrever os elementos ausentes por meio de símbolos, palavras ou desenhos. Esses momentos podem levar à mobilização do pensamento algébrico: os alunos trabalham com a indeterminação e devem descrevê-la utilizando símbolos por eles já conhecidos. Nota-se que o trabalho com a álgebra, envolvendo indeterminações, não ocorre apenas com o uso do simbolismo alfanumérico, isso só é indicado, segundo a BNCC (2018), no 7º ano do ensino fundamental.

No 3º ano os estudantes devem descrever a regra de formação da sequência, tornando o estudo com padrões mais aprofundado. No 3º e 4º ano o trabalho com esses problemas começa a envolver outros tópicos, como divisão, multiplicação e restos. Isso nos leva a perceber que o problema com sequências pode abordar outras unidades temáticas, não só a álgebra.

É importante destacar que quando se fala em álgebra, em relação à BNCC (2018), os primeiros anos do ensino fundamental basicamente se detêm a trabalhar com sequências e padrões. Esse trabalho ocorre de maneira gradativa, contribuindo para a mobilização e desenvolvimento do pensamento algébrico.

Mesmo sendo um documento de 2012, seis anos antes da BNCC (2018), os Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco – PCPE (2012) já mostravam a importância de ver a álgebra como uma forma de pensar matematicamente, que tem como principal característica a busca por generalizações e regularidades desde os anos iniciais do fundamental. Portanto, esse

documento oficial da educação do Estado de Pernambuco afirma que a formação em álgebra não deve estar voltada apenas para o simbolismo alfanumérico, mas também para a identificação de regularidade em sequências figurais, numéricas e outras.

O PCPE (2012) divide a matemática em blocos de conteúdos semelhantes às unidades temáticas da BNCC (2018), são eles: *geometria, estatística, álgebra e funções, grandezas e medidas, e números e suas operações*. Cada um desses blocos apresenta diversas expectativas de aprendizagem, que significam o mínimo que se espera que o estudante aprenda para desenvolver as competências básicas da disciplina.

No Quadro 2 apresentamos como o trabalho com padrões, sequências e generalização está presente nas expectativas de aprendizagem da álgebra e funções do 1º ao 6º ano do ensino fundamental. Notamos que ele é bem mais modesto em sua descrição quando comparado com a BNCC (2018), mas já mostra a importância da identificação de padrões e regularidades em uma sequência para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Quadro 2 – Expectativas de aprendizagem referentes a álgebra e padrões do 1º ao 6º ano presentes nos PCPE (2012)

Ano Escolar	Expectativas de aprendizagem (Álgebra e Funções)
1º ano	- Compreender a noção de regularidade a partir da construção de uma sequência numérica até 30, em ordem crescente ou decrescente. - Compreender a noção de regularidade a partir da ordenação de números até 30, reconhecendo qual vem antes ou depois na sequência. - Completar uma sequência (numérica ou de figuras) com elementos ausentes no final da sequência.
2º e 3º ano	- Completar uma sequência (numérica ou de figuras) com elementos ausentes no meio ou no final da sequência.
4º ano	- Reconhecer o padrão que está associado à multiplicação de um número por 10 ou por 100 (perceber que todo número multiplicado por 10 termina em zero e que multiplicado por 100 termina em dois zeros). - Descrever e completar uma sequência (numérica ou de figuras) com elementos ausentes no meio ou no final da sequência.
5º ano	- Descrever e completar uma sequência (numérica ou de figuras) com elementos ausentes (no início, no meio ou no fim da sequência). - Reconhecer o padrão associado à multiplicação ou à divisão de um número por 10, 100 ou 1 000 (perceber que todo número natural terminado por três zeros é o resultado de uma multiplicação por 1 000).
6º ano	Descrever, completar e elaborar uma sequência numérica ou formada por figuras.

Fonte: Adaptado de PCPE (2012)

Em relação à BNCC (2018), o 5º e 6º ano não apresentam indicações de trabalho com padrões, eles estão voltados para a igualdade, grandezas diretamente proporcionais e problemas

de partilha. Algo equivalente ocorre nas expectativas de aprendizagem dos PCPE (2012), que não indica o trabalho com sequências do 7º ao 9º ano, estando presente até o 6º ano.

A abordagem de padrões e regularidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico retoma nos objetivos de conhecimento e habilidade da BNCC (2018) referentes ao 7º e 8º ano, como apresenta o Quadro 3.

Quadro 3 – Objetos de conhecimento e habilidades referentes a álgebra e padrões nos anos finais do ensino fundamental presentes na BNCC (2018)

Ano Escolar	Objetos de conhecimento	Habilidades
7º ano	Linguagem algébrica: variável e incógnita.	(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica.	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
8º ano	Sequências recursivas e não recursivas.	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. (EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Fonte: Adaptado de BNCC (2018)

A linguagem algébrica alfanumérica torna-se presente na BNCC (2018) a partir do 7º ano do ensino fundamental e juntamente com esse objeto de conhecimento surge a habilidade de descrever a sequência fazendo o uso desse simbolismo. Os PCPE (2012) abordam que os anos finais do ensino fundamental devem estar voltados para ampliar o que foi trabalhado nos anos iniciais e aponta que o simbolismo alfanumérico deve começar a aparecer no 6º e no 7º ano, porém a manipulação das letras deve ser evitada nesses anos escolares e trabalhada nos anos posteriores. Além disso, esse documento aponta que o trabalho com sequências e regularidades, iniciado no 1º ano e presente em quase todos os anos do ensino fundamental, pode contribuir para o aluno entender o significado de expressões numéricas e determinar leis de formação de sequências.

Com base nessa breve análise dos objetos de conhecimento e habilidades presentes na BNCC (2018) e das expectativas de aprendizagem expostas nos PCPE (2012), é notável uma proposta de trabalhar ao longo de quase todo o ensino fundamental com problemas que

envolvam sequência ou padrões, para que o aluno mobilize o pensamento algébrico e aprofunde seus estudos acerca dos elementos da álgebra.

Como vimos no início desse capítulo, existem distintas concepções para a álgebra, perpassando por uma visão voltada apenas para o simbolismo, outras para o desenvolvimento do pensamento e outras por uma relação estreita entre álgebra e aritmética. Nesse trabalho tomaremos como álgebra a concepção abordada pela Teoria da Objetivação (TO), que a defende como um saber histórico-cultural que pode ser colocado em obra a partir das atividades em sala de aula, sendo esse saber entendido como as distintas formas de pensamento algébrico que são materializados no decorrer de uma atividade.

No próximo capítulo dedicaremos um tópico para abordar as definições que a TO trás em relação ao saber, conhecimento, atividade, entre outros elementos. Também apresentaremos a definição de pensamento na perspectiva dessa teoria, os principais elementos do pensamento algébrico e a caracterização das suas três distintas formas.

3 PENSAMENTO ALGÉBRICO

Coelho e Aguiar (2018) afirmam que não existe um consenso entre os pesquisadores para a definição de pensamento algébrico. Segundo Vergel (2014) isso ocorre porque na álgebra existe uma variedade de objetos, como equações, funções, padrões, entre outros; além disso, as diferentes definições para essa forma de pensar se fundamentam em diferentes teorias. Nesse trabalho de dissertação não temos a intenção de estudar e discutir as diversas perspectivas de pensamento algébrico, assim como não temos a pretensão de apontar os pontos divergentes e convergentes entre elas. Portanto, faremos uma breve apresentação sobre algumas dessas perspectivas e nos aprofundaremos no pensamento algébrico à luz da Teoria da Objetivação.

Baseado na Teoria dos Campos Semânticos, a perspectiva de pensamento algébrico definida por Rômulo Lins (1992) entende esse pensamento como uma maneira de produzir significado para a álgebra. Essa produção de significado é em relação aos objetos algébricos, como equações e inequações (ALMEIDA, CÂMARA, 2017). Diante a isso, Lins (1992) caracterizou o pensamento algébrico em três vertentes: o pensar aritmeticamente, o pensar internamente e o pensar analiticamente.

O pensar aritmeticamente faz referência ao momento que o aluno utiliza os números e as operações para modelar e resolver os problemas algébricos. A segunda vertente, o pensar internamente, “os números são tratados como objetos de estudo, deixando de servir como ferramentas na resolução ou modelação de situações problemas” (ALMEIDA, CÂMARA, 2017, p. 38). O pensar analiticamente é caracterizado pelo momento quando o desconhecido é tratado como conhecido, quando, por exemplo, se faz uso de leis aritméticas para manipular equações algébricas.

Na visão de Carraher e Schliemann (2007) o pensamento algébrico são os processos psicológicos realizados pelo indivíduo para resolver um problema, sendo essa solução expressa por meio do simbolismo alfanumérico, diagramas, tabelas, gráficos, entre outros. Para Blanton e Kaput (2005) esse pensamento faz referência a um processo que os alunos generalizam ideias matemáticas, tomando como base um conjunto de exemplos particulares. Essas generalizações são expressas por meio de diferentes linguagens, que vão se tornando mais formais com a idade dos estudantes.

Almeida e Câmara (2017) buscaram consolidar uma definição de pensamento algébrico que fosse possível ser utilizada por alunos e pesquisadores. Eles defendem que esse pensamento é revelado por meio de cinco características: estabelecer relações, generalizar, modelar, operar

com o desconhecido e construir significado. Essa definição afirma que a característica central é estabelecer relações, ou seja, é a primeira característica revelada por um estudante ao resolver um problema algébrico. As outras estão subjacentes a ela, porém não são menos importantes.

A perspectiva de pensamento algébrico utilizada nessa investigação é a que toma como base a Teoria da Objetivação (TO), uma teoria de ensino-aprendizagem que foi construída pelo Professor Luis Radford. No tópico seguinte apresentaremos um breve resumo sobre os principais pontos da TO que facilitará o entendimento do tópico subsequente, referente a perspectiva de pensamento algébrico fundamentado na teoria em questão e que utilizaremos nessa pesquisa.

3.1 A Teoria da Objetivação

A Teoria da Objetivação (TO) é uma teoria sociocultural de ensino-aprendizagem que começou a ser desenvolvida na primeira metade dos anos 1990 pelo Professor Luis Radford. Fundamentada na dialética de Hegel, no materialismo dialético de Karl Marx, na escola de pensamento de Vygotsky, e nas ideias de Paulo Freire, Leontiev e outros, a teoria não deixa de lado as questões culturais, históricas e sociais e enfatiza que o objetivo da educação matemática deve ser visto como

um esforço dinâmico, político, social, histórico e cultural que busca a criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos que se posicionam criticamente em discursos e práticas matemáticas que se constituem histórica e culturalmente, discursos e práticas que estão em permanente evolução.⁷ (RADFORD, 2017b, p. 97, tradução nossa)

A teoria em questão defende que a educação deve ir além do saber matemático e ter como base formar cidadãos críticos e atuantes na sociedade. Para isso, a TO afirma que o processo de ensino-aprendizagem é caracterizado como uma única atividade que está em uma relação dialética com o saber (o conhecer) e com o ser (tornar-se). Dessa forma, o processo de ensino-aprendizagem deve levar os envolvidos da atividade à “uma compreensão profunda dos conceitos matemáticos e à criação de um espaço político e social dentro do qual os sujeitos

⁷ Texto original: Un esfuerzo dinámico, político, social, histórico y cultural que busca la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en discursos y prácticas matemáticas que se constituyen histórica y culturalmente, discursos y prácticas que están en permanente evolución.

possam desenvolver subjetividades reflexivas, solidárias e responsáveis”⁸ (RADFORD, 2014, p. 136, tradução nossa).

Para tratar tanto do desenvolvimento social do sujeito e do ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos, a TO apresenta distintos conceitos que serão descritos e comentados nesse capítulo, sendo eles: o saber, o conhecimento, a aprendizagem, os processos de objetivação, o ser, os processos de subjetivação e a atividade.

Para Radford (2017b, 2020) existe uma diferença entre saber e conhecimento. O primeiro é caracterizado como pura potencialidade, enquanto o último é visto como a materialização ou a atualização do saber. Esse saber, diferentemente do que defendem algumas teorias individualistas, não se encontra na cabeça do estudante, é uma entidade histórico-cultural (MOREY, 2020), uma capacidade geradora, que não pode ser apropriada ou possuída (RADFORD, 2020).

A palavra potencialidade, utilizada para definir o saber, carrega o sentido adotado por Aristóteles, que significa movimento, poder ou disposição (MOREY, 2020). Por exemplo, uma bateria tem a potencialidade de emitir um som, os alunos têm a potencialidade de pensar algebricamente. Por meio de um movimento, isso é, de uma atividade, esse saber pode ser materializado e atualizado (transformado em ato). Quando o instrumento emite o som, ou quando o aluno mobiliza alguma forma de pensamento algébrico, são exemplos da materialização do saber que é denominada *conhecimento* na Teoria da Objetivação (RADFORD, 2017b, 2020).

O conhecimento é singular. Por exemplo, ao resolvermos problemas de multiplicação de números naturais é possível utilizar diferentes mecanismos. O saber é a multiplicação, que pode ocorrer de diferentes formas, mas sua materialização, isso é sua transformação em ato, ocorre utilizando um dos mecanismos. Portanto, essa forma singular de multiplicação, o conhecimento, está sendo revelada a consciência no decorrer da atividade e pode ser modificada e ampliada.

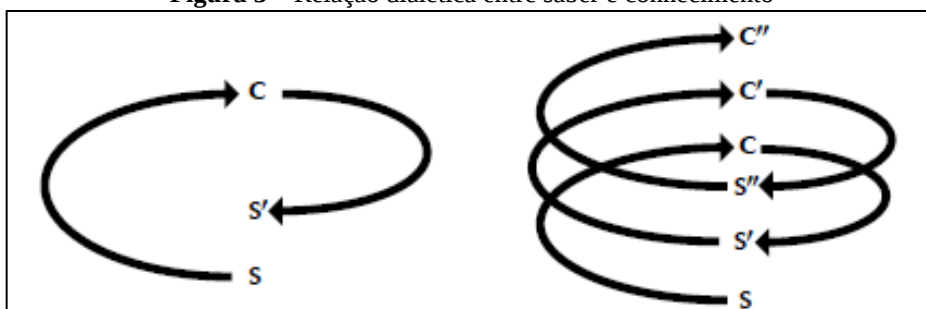
A modificação e transformação do saber se baseia na ideia de que esse não é atemporal, assim como não é universal. Com isso, a TO considera que o saber não surgiu aleatoriamente, mas é fruto de longos processos históricos e culturais. Um exemplo disso é quando olhamos para a história da álgebra: o saber algébrico da época de Diofanto de Alexandria estava relacionado em pensar as incógnitas por meio da utilização da palavra *arithmos*, e as soluções

⁸ Texto original: a una comprensión profunda de los conceptos matemáticos y a la creación de un espacio político y social dentro del cual puedan desarrollarse subjetividades reflexivas, solidarias y responsables.

dos problemas eram diferentes das que conhecemos hoje, ou das que utilizavam os egípcios e os mesopotâmicos na Idade Antiga.

Para que o saber seja transformado e ampliado, como ocorreu com o saber algébrico, é necessário ele ser materializado por meio de uma atividade e refletido pelos seres humanos sobre as necessidades da transformação (RADFORD, 2017b). Isso ocorre porque o saber e o conhecimento estão em uma relação dialética, e, portanto, o conhecimento “supera a potencialidade e abre a brecha para fundamentar novos problemas e criar novas linhas de reflexão e investigação.”⁹ (RADFORD, 2017b, p. 112, tradução nossa). Para entendermos a relação dialética do saber e do conhecimento podemos observar a Figura 3: nela o saber S, colocado em movimento por meio de uma atividade (representada pelas flechas pretas), é revelado à consciência em forma de conhecimento C. Na atividade os sujeitos podem ajustar, refinar e expandir o saber S, resultando em um novo saber S'. Esse novo saber S', que é uma potencialidade, pode se materializar em outro conhecimento C' por meio de uma atividade (RADFORD, 2017b)

Figura 3 – Relação dialética entre saber e conhecimento



Fonte: Radford (2017b, p. 110)

Em relação à aprendizagem a Teoria da Objetivação a considera como os resultados parciais e sempre em andamento dos processos de objetivação (RADFORD, 2020). Esses processos são vistos como o meio que os alunos e professores encontram, ou notam, formas de pensamento e ação constituídas histórica e culturalmente (MOREY, 2020). Esse encontro, que revela algo à consciência por meio da “atividade corporal, sensível, afetiva, emocional, arte factual e semiótica”¹⁰ (RADFORD, 2020, p. 20, tradução nossa), recebe o nome de objetivação. Em síntese, a objetivação é o encontro com o saber constituído histórico e culturalmente na atividade humana, os processos de objetivação são as tomadas de consciência desses saberes e

⁹ Texto original: supera la potencialidad y abre la brecha para plantear nuevos problemas y para crear nuevas líneas de reflexión e investigación.

¹⁰ Texto original: Actividad corpórea, sensible, afectiva, emocional, artefactual y semiótica.

a aprendizagem é o resultado desses processos. Tudo acontece no decorrer de uma atividade (RADFORD, 2017a).

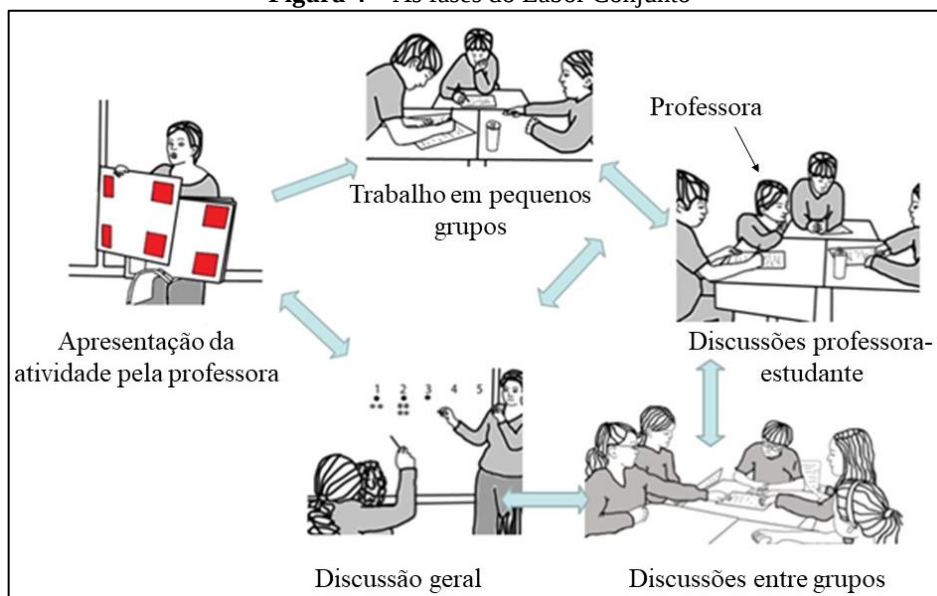
Além da questão do saber Radford (2020) defende a ideia de que o componente emocional e afetivo é uma das partes fundamentais da aprendizagem, ou seja, a teoria se preocupa com o constante desenvolvimento e transformação do ser. Esse ser é visto como um sujeito constituído de formas históricas e culturais de viver e estar no mundo (RADFORD, 2017c), que sofre, vive, pensa e atua em sua cultura (VERGEL, ROJAS, 2018).

Nessa perspectiva, a TO defende que no decorrer de uma atividade de sala de aula ocorre a produção de saberes e a produção de subjetividades, que constitui a materialização e a atualização sempre em curso do ser. Os processos de subjetivação são definidos por Radford (2020) como processos que os alunos e os professores se tornam presença no mundo, que por meio de uma atividade eles se posicionem, ocupem um espaço, se expressem, se transformem, entre outros.

A atividade na TO, espaço em que ocorre os processos de objetivação e de subjetivação, toma como base os princípios do materialismo dialético de Karl Marx e é definida como “uma forma social de esforço conjunto por meio da qual os indivíduos produzem seus meios de subsistência enquanto se produzem a si mesmo como seres humanos”¹¹ (RADFORD, 2020, p. 23, tradução nossa). Para evitar confusões com outros significados de atividade ela é denominada *labor conjunto* quando abordada dentro do contexto da TO.

O labor conjunto é constituído de diversas fases (Figura 4), são elas: apresentação da atividade pela professora, trabalhos em pequenos grupos, discussões professora-estudante, discussões entre grupos, discussão geral.

¹¹ Texto original: una forma social de esfuerzo conjunto a través de la cual los individuos producen sus medios de subsistencia mientras se producen a sí mismos como seres humanos.

Figura 4 – As fases do Labor Conjunto

Fonte: Radford (2020, p.30, tradução nossa)

Nessa atividade a professora e os estudantes trabalham ombro a ombro em busca de uma obra comum, como por exemplo resolver um problema. Eles são postos em diversos debates, pois o objetivo do ensino-aprendizagem na TO é fazer com que o aluno tome consciência do saber matemático à medida que ele entenda a necessidade de se posicionar criticamente diante desse saber e identifique distintas formas de resolver problemas (HERRERA, 2020).

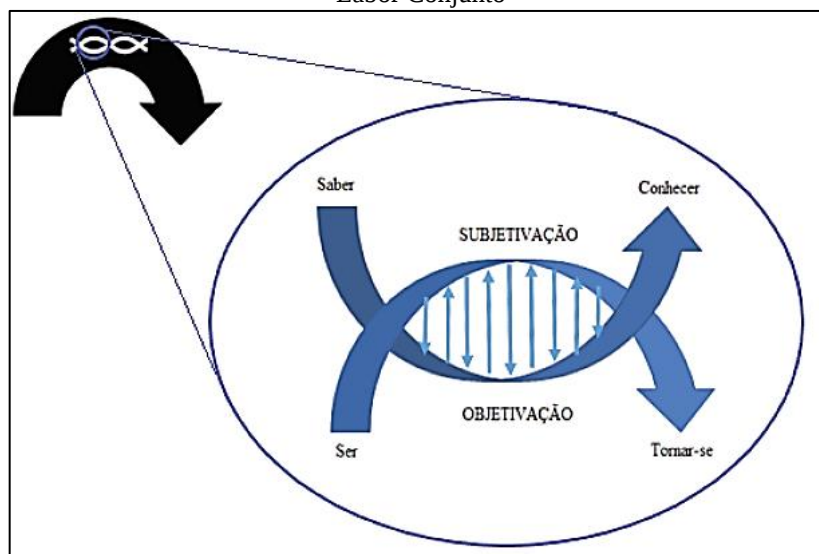
Para que esse labor conjunto funcione, isso é, para que o saber se materialize, ou se atualize, e o ser esteja sempre em constante transformação, Radford (2020) denomina dois eixos para a atividade: o eixo das formas de produção de saberes e o eixo da colaboração humana.

No primeiro eixo busca-se que o aluno se reconheça no seu esforço e com isso não realize um trabalho alienado, nem em relação ao produto e nem em relação às etapas de produção. O eixo da colaboração humana busca uma transformação na maneira que nos relacionamos com o outro, essa maneira é denominada de ética comunitária (RADFORD, 2020).

Essa ética é centrada em três pontos que configuram a estrutura essencial da subjetividade: a responsabilidade, o cuidado e o compromisso com o outro. (RADFORD, 2017c). A responsabilidade está relacionada com a união com o outro, atender ao chamado do outro. O cuidado faz referência ao ato de ver a nós mesmos no outro, reconhecer nossa vulnerabilidade na vulnerabilidade do outro. E o compromisso é buscar fazer o que for possível para a realização da obra comum.

No decorrer do labor conjunto os processos de objetivação e subjetivação estão em uma relação dialética, como esquematiza a Figura 5. Para os alunos materializarem diversas formas do saber é necessário que eles dialoguem, estejam dispostos a ouvir o colega, mostrem suas opiniões, consigam tirar dúvidas com os participantes da atividade, entre outros diversos fatores. Durante esses processos o aluno se constitui como estudante e o equivalente ocorre com o professor.

Figura 5 – Esquema gráfico de "coinfluência" entre os processos de Objetivação e Subjetivação entrelaçados no Labor Conjunto



Fonte: Paiva e Noronha (2020, p. 170)

Todos esses conceitos apresentados da TO nos ajudarão a analisar as formas de pensamento algébrico que os alunos conseguem mobilizar ao responderem uma tarefa de generalização de padrões. Diante das características apresentadas para que essas formas de pensamento algébrico se materializem é importante que os estudantes estejam em uma atividade, em que, se possível, eles possam dialogar, apresentar suas ideias, respeitar as opiniões dos colegas, entre outros elementos. Além disso, os alunos poderão materializar de distintas maneiras um mesmo saber algébrico.

Para entendermos melhor essas formas de pensar algebricamente baseadas na TO no próximo tópico apresentaremos o que é pensamento na visão dessa teoria, a explicação dos elementos característicos do pensamento algébrico, exemplos de atividades em que os alunos materializaram distintas formas de pensar algebricamente e as principais características das três formas desse pensamento na visão da TO: o pensamento algébrico factual, contextual e simbólico.

3.2 Pensamento Algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação

Com base em concepções de pensamentos defendidas pela antropologia e neurociência, Radford (2010a) define o pensamento como “uma forma complexa de reflexão mediada pelos sentidos, pelo corpo, sinais e artefatos”¹² (p.15, tradução nossa). Seguindo esse viés, Vergel e Rojas (2018) argumentam que na TO o pensamento é visto como um processo de atividade humana, sendo essa sensorial e concreta, que está em constante movimento e mudança.

Dessa maneira, a TO defende que o pensamento possui uma natureza multimodal, sendo então composto por diversos elementos, como gestos, movimentos, palavras escritas, desenhos, artefatos, entre outros (RADFORD, 2013b). Esses elementos constituem a parte material do pensamento, enquanto a imaginação e a fala interior a parte ideacional (MOGOLLÓN, 2020).

Esses diversos elementos, que constituem a parte material do pensamento, Radford (2003) denomina-os de *meios semióticos de objetivação*, eles são utilizados pelos indivíduos em “processos de criação de significado social para alcançar uma forma estável de consciência, para tornar aparentes suas intenções e realizar suas ações, com o intuito de atingir o objetivo de suas atividades.”¹³ (RADFORD, 2003, p. 41, tradução nossa). No processo de objetivação, já abordado anteriormente, busca-se apresentar (mostrar ou tornar aparente) um objeto (RADFORD, 2004) e é nesse momento que emergem os meios semióticos de objetivação. Como exemplo temos a utilização da simbologia alfanumérica para designar uma equação algébrica.

Nesse campo algébrico os alunos vão além da utilização do simbolismo alfanumérico, pois, como argumenta Radford (2006, 2010b), não é possível reduzir o pensamento algébrico apenas ao uso de letras, mas sim o entender como uma forma de pensar em relações às situações matemáticas, que é constituída pelos diversos meios semióticos de objetivação. Como o pensamento possui uma natureza multimodal, também chamada de multisemiótica, os estudantes podem mobilizar diversos meios semióticos de objetivação em uma única atividade.

¹² Texto original: I suggested that thinking is a complex form of reflection mediated by the senses, the body, signs and artifacts.

¹³ Texto original: Processes to achieve a stable form of awareness, to make apparent their intentions, and to carry out their actions to attain the goal of their activities.

Para elaborar a perspectiva de pensamento algébrico Radford tomou como base uma pesquisa longitudinal¹⁴ realizada com estudantes do Grade 8 ao Grade 12¹⁵ do Canadá. No decorrer dos anos, Radford (2009, 2010a) aplicou diversas tarefas de generalização de padrões¹⁶, buscando observar como os estudantes evoluíam nas respostas dadas aos problemas e analisar os meios semióticos que eles recorriam para objetivar a generalização. Radford (2006, 2010b) justifica o uso dessas tarefas pois defende que atividades que envolvam generalização de padrões é um bom caminho para iniciar o estudo da álgebra.

A partir dessa pesquisa longitudinal Radford definiu três formas¹⁷ de pensamento algébrico (2009, 2010a), também chamadas de camadas de generalidade (2006, 2010b). O que diferencia uma forma da outra são os níveis de generalidade que os alunos operam, e o que distingue esses níveis são os meios semióticos que os estudantes utilizam para tornar aparente as maneiras de trabalhar com problemas de generalização.

Na TO as três formas de pensamento algébrico são vistas como o saber, que será materializado no decorrer de uma atividade. O *saber algébrico*, na visão dessa teoria, é entendido como uma

síntese evolutiva – sintetiza a ação humana, é dinâmica, transformadora – e culturalmente codificada – como padrões de ação – de fazer e refletir em termos analíticos – isso é, a analiticidade em termos do caráter operatório do desconhecido – sobre números indeterminados e conhecidos¹⁸. (VERGEL, ROJAS, 2018, p. 51, tradução nossa)

Essa analiticidade está interrelacionada com o senso de indeterminação (indeterminação) e o modo particular de designar os objetivos (denotação semiótica ou designação simbólica), sendo esses três os elementos caracterizadores do pensamento algébrico (RADFORD, 2006, 2009, 2010a, 2010b, 2011b). Diferentemente do pensamento aritmético o pensar algebricamente é mobilizado quando o estudante trabalha com quantidades indeterminadas de maneira analítica, ou seja, com bases em algumas premissas se realizam

¹⁴ A pesquisa longitudinal mencionada teve duração de seis anos. Outras investigações como essa foram executadas pelo professor Luis Radford, mas a que deu início as suas explicações sobre as formas de pensamento algébrico foi a realizada entre os anos de 1998 e 2003.

¹⁵ Elementary School (do Grade 1 ao Grade 8) é normalmente cursada por alunos de 6 a 14 anos. A High School (Grade 9 ao Grade 12) é voltada para os alunos de 14 a 18 anos.

¹⁶ As tarefas são um dos componentes da atividade. Cada tarefa é composta por diversos problemas.

¹⁷ A utilização da palavra *formas* se baseia nas ideias do materialismo dialético. Radford explica que a utilização dessa palavra se refere a esquemas que são naturalizados pela sua própria prática.

¹⁸ Texto original: es una síntesis evolutiva — sintetiza acción humana, es dinámica, transformativa — y culturalmente codificada — como patrones de acción — de hacer y reflexionar en términos analíticos — es decir, la analiticidad en términos del carácter operatorio de lo desconocido — sobre números indeterminados y conocidos.

deduções para alcançar alguns resultados, operando com o desconhecido como se o conhecesse (VERGEL, ROJAS, 2018). A analiticidade é o principal elemento que distingue o pensamento algébrico do aritmético, podendo a indeterminação e a denotação também estarem presentes no pensar aritmeticamente (RADFORD, 2018).

O *senso de indeterminação* envolve números desconhecidos e é designado para os objetos algébricos – incógnitas, variáveis, parâmetros, entre outros – sendo oposto à determinação numérica. Um exemplo desse senso de indeterminação é quando um estudante percebe que é possível, em uma equação da forma $y = 2x + 2$, o x assumir diversos valores e significados, dependendo da situação que o problema tenha sido construído (RADFORD, 2006, 2010b). Dessa forma, é possível realizar a substituição de uma incógnita ou uma variável por outra, o que não faz sentido no campo aritmético, por exemplo, substituir 10 por 10.

A *analiticidade* refere-se ao caráter operatório dos objetos algébricos (VERGEL, 2015b), isso é, o momento em que os objetos algébricos são tratados analiticamente (RADFORD, 2006). Ela está fundamentada em dois vetores (GOMES, 2020): trabalhar com o indeterminado como se fosse conhecido; sendo esse trabalho realizado a partir de deduções, ou seja, baseando-se em certas premissas é possível chegar a um determinado resultado (VERGEL, 2019).

Segundo Vergel (2015b) a analiticidade é mediada pelos meios semióticos de objetivação e para entender melhor trazemos um exemplo de resolução (Quadro 4) de uma equação do primeiro grau: $3x + 5 = 2x + 15$. Para respondê-la os estudantes podem recorrer a uma solução aritmética testando diversos valores para x até chegar ao resultado, mobilizando assim a denotação e a indeterminação, porém não a analiticidade. Para mobilizar esse último elemento é necessário que se tome como premissa o fato de que nessa equação está estabelecida uma relação de igualdade e com isso realizar deduções para trabalhar com o indeterminado, o que caracteriza resolver a equação de forma algébrica.

Quadro 4 – Resolução da equação $3x + 5 = 2x + 15$

Ação 1:	(-5)	$3x + 5 = 2x + 15$	(-5)
Ação 2:	(-2x)	$3x = 2x + 10$	(-2x)
Ação 3:		$x = 10$	

Fonte: Adaptado de Gomes e Noronha (2020)

O trabalho no Quadro 4, de subtrair números e incógnitas de ambos os lados, são deduções, ou consequências, realizadas a partir do momento em que $3x + 5 = 2x + 15$ é assumida como uma premissa. As ações 1, 2 e 3 devem manter essa igualdade, o que, segundo Gomes e

Noronha (2020), implica “a visualização da equação em sua totalidade, bidireccionalmente, por intermédio do símbolo de igualdade” (p. 143). Esse método utilizado para revelar o valor da incógnita é denominado por Radford (2013b) de método algébrico analítico e é caracterizado por tratar as quantidades indeterminadas como se fossem conhecidas a partir de deduções.

Os exemplos referentes aos dois primeiros elementos caracterizadores do pensamento algébrico foram realizados com base na simbologia alfanumérica, mas a designação dos objetos algébricos, na perspectiva da TO, não é feita apenas por meio desse simbolismo, mas também por números, ações concretas, palavras, figuras, símbolos e outros (RADFORD, 2009, 2013b). Portanto, cada estudante apresentará seu modo particular simbólico de designar os objetos, também chamado de denotação semiótica e designação simbólica, sendo por eles a maneira que o indeterminado é apresentado (VERGEL, 2016), isso é, “a maneira específica de nomear ou referir os objetos”¹⁹ (VERGEL, 2015b, p. 196, tradução nossa).

No exemplo descrito no Quadro 4 a indeterminação é denotada pela letra x , porém o aluno poderia utilizar a linguagem verbal para fazer essa designação, como por exemplo: três vezes um número mais cinco é igual a duas vezes esse número mais 15. Nesse exemplo a denotação semiótica do indeterminado estaria a cargo da palavra “número”.

Antes de iniciar a discussão pontual sobre as formas de pensamento algébrico defendidas por Radford (2009, 2010a, 2010b, 2011b, 2013b, 2018), abordaremos o que ele entende por generalização algébrica e aritmética, o caminho que deve ser percorrido para o estudante chegar à generalização algébrica e a relação dessas generalizações com os elementos caracterizadores do pensamento algébrico. Essa abordagem é importante pois recorro que as formas de pensar algebricamente, na perspectiva da TO, foram definidas segundo as respostas dos alunos a tarefas de generalização de padrões, além disso esse tipo de tarefa é considerada uma das melhores formas para a introdução da álgebra escolar (VERGEL, ROJAS, 2018). Por meio dessas respostas também apresentaremos como os elementos caracterizadores do pensamento algébrico se apresentam no processo de generalização.

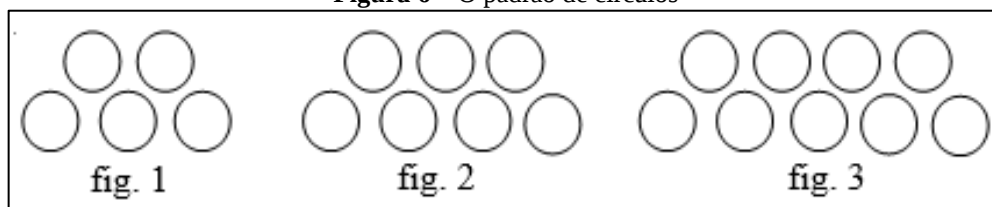
3.2.1 Generalização algébrica e aritmética

Para a explicação das características da generalização algébrica tomaremos como base uma das tarefas que Radford (2009, 2010a) aplicou em suas pesquisas. Essa tarefa é constituída por diversos problemas. Nos primeiros dias trabalhando conjuntamente com os estudantes ele

¹⁹ Texto Original: La manera específica de nombrar o referir los objetos.

os solicita observarem uma sequência figural (Figura 6) e desenhar os dois termos subsequentes, sendo eles a figura 4 e a figura 5. Os problemas posteriores pedem o número de círculos de figuras específicas, como a figura 10, a figura 25 e a figura 100. Em outro momento, para os mesmos alunos, Radford solicita uma explicação deles para outro estudante sobre o que deve ser feito para encontrar o número de círculos de uma figura qualquer e, por fim, os alunos deveriam encontrar uma fórmula para a figura n , com n pertencente ao conjunto dos números naturais. Em todos os problemas sempre é pedido para os estudantes justificarem o que eles estão realizando.

Figura 6 – O padrão de círculos



Fonte: Radford (2009, p.39)

Como o pensamento é realizado pelo ser e pelo corpo do ser²⁰ (RADFORD, 2003), uma das formas para que os alunos mobilizassem os gestos, movimentos, falas, entre outros meios semióticos que constituem o pensamento algébrico, foi agrupá-los em grupos de duas ou três pessoas para resolverem os problemas. Com esse agrupamento os estudantes sempre deveriam explicar suas ideias aos outros do grupo e nesses diversos momentos da atividade ocorreriam a materialização do saber, ou seja, a materialização do pensamento algébrico por meio dos meios semióticos de objetivação. Os momentos dessa atividade são semelhantes às fases do labor conjunto, mas essas etapas só começaram a serem apresentadas nas publicações de Radford nos últimos seis anos.

Podemos observar que os alunos poderiam utilizar diversas estratégias para solucionar os problemas, como por exemplo: o número de círculos aumenta de dois em dois de uma figura para outra; o número de círculos é referente ao número da figura multiplicado por dois e somado a três; o número de círculos da linha superior é o número da figura mais um e os números de círculos da linha inferior é o número da figura mais dois; entre outros. Mas qual dessas ideias poderia levar o aluno a uma generalização algébrica?

²⁰ O corpo do ser faz referência a questão que o pensamento extrapola a mente humana, ou seja, ao fato de gestos, ritmos, movimentos, entre outros, constituírem a parte material do pensamento.

Para Radford (2013a) a generalização é um dos principais caminhos para produzir conhecimento, sendo ela constituída de três problemas fundamentais: fenomenológico, epistemológico e semiótico. No problema fenomenológico participam a intuição, a atenção, a intenção e a sensibilidade. A exploração ou generalização propriamente dita ocorre no problema epistemológico e o problema semiótico é caracterizado pelos meios que se denota o objeto generalizado (RADFORD, 2013a).

Para iniciar a explicação mais detalhada de cada um desses problemas, Radford (2013a) utiliza uma citação de Kant, filósofo prussiano do século XVIII. O exemplo mencionado nos leva a uma passagem em que uma pessoa observa três tipos de vegetação distintas, diante disso ela compara os objetos, percebendo suas diferenças (troncos, ramos, galhos). Posteriormente ela começa a identificar o que há de comum entre esses objetos, fazendo abstrações diante de forma, tamanho e outras características. Por meio dessas observações a pessoa consegue formar o conceito de árvore. Ou seja, diante de alguns exemplos foi possível perceber semelhanças e diferenças, generalizar as ideias e chegar a um determinado conceito.

O que Radford (2013a) nos explica é que a generalização é constituída “primeiro, por meio de um processo de determinações sensíveis sobre objetos no qual participam, entre outros, a intuição, a atenção e a sensibilidade”²¹ (p. 4, tradução nossa). No exemplo de Kant as determinações sensíveis seriam os troncos, os ramos, as folhas, ou seja, o que a pessoa consegue ver de semelhante e diferente no objeto apresentado. Após isso, ela irá buscar observar o que há em comum entre as vegetações. Nesse momento o trabalho está sendo realizado no campo fenomenológico.

Ao fazermos essas análises, do que há em comum e do que há de diferente, escolhemos o que será conservado e o que será deixado de lado. Nesse momento Radford (2013a) afirma que não estamos mais trabalhando no campo fenomenológico, mas, sim, no epistemológico. É nesse campo que os critérios de seleção devem ser tomados, ou seja, “os dados sensíveis serão abstraídos, induzidos ou generalizados a fim de produzir o novo objeto. Fica, por fim, um problema semiótico: o de denotar de alguma maneira o novo objeto”²² (RADFORD, 2013a, p. 4, tradução nossa)

Trazendo essas ideias para o campo da generalização algébrica, Radford (2013a) defende que para o estudante generalizar uma sequência ele deve, inicialmente, proceder a

²¹ Texto original: primero, a través de un proceso de determinaciones sensibles sobre objetos en el que participan, entre otros, la intuición, la atención y la sensibilidad.

²² Texto original: los datos sensibles serán abstraídos, inducidos o generalizados a fin de producir el nuevo objeto. Queda, por fin, un problema semiótico: el de denotar de alguna manera el nuevo objeto.

determinações sensíveis e notar similaridades e diferenças. Essas determinações são diversas, como por exemplo, tomando como base o problema exposto aqui anteriormente (Figura 6), os estudantes podem identificar: número da figura, cor da figura, quantidade de círculos, espaço entre os círculos, espaço entre a figura, entre outros. Nesse momento o estudante está trabalhando no campo fenomenológico, percebendo as semelhanças e as diferenças que a sequência apresenta.

Quando o estudante escolhe o que vai deixar de lado e o que vai ser conservado para resolver a questão ele passa a trabalhar no campo epistemológico. Por exemplo, retomando novamente aos problemas baseados na Figura 6, para responder ao problema que questiona a quantidade de círculos da figura 4 o estudante pode utilizar a ideia de que entre uma figura e outra tem dois círculos a mais. Ele também pode levar essa ideia para encontrar o número de círculos de outras figuras, porém apenas esse procedimento será inviável ao trabalharmos com número de figuras elevados, como por exemplo a figura de número 100, 200 ou 500.

Essa estratégia de somar o número de círculos de dois em dois sempre dependerá do número de círculos de figuras anteriores e com isso podemos afirmar que o aluno utilizou determinações sensíveis que não o levou a uma resposta completa do problema, ou seja, o que ele generalizou “foi uma semelhança local observada em alguns termos da figura, sem poder usar essas informações para fornecer uma expressão de qualquer termo da sequência”²³ (RADFORD, 2010b, p. 47, tradução nossa). Como não é possível deduzir uma fórmula que possa calcular o número de círculos de qualquer figura o que o aluno realizou foi uma generalização aritmética (RADFORD, 2013a).

Diante a isso, Radford (2013a) explica que a diferença entre a generalização aritmética e a generalização algébrica é que na primeira os estudantes vão criar procedimentos que não os levam à dedução de uma fórmula, como por exemplo somar de dois em dois a quantidade de círculos. Assim como também poderão chegar a uma fórmula sem ter passado por um processo de dedução, sendo possivelmente obtida por um processo de tentativa e erro. Já na generalização algébrica a analiticidade se faz presente e o aluno perpassa por um caminho que o leva à dedução de uma fórmula, esse caminho deverá estar baseado nos seguintes pontos:

A tomada de consciência de uma propriedade comum que se nota a partir de um trabalho no campo fenomenológico de observação sobre certas figuras particulares (por exemplo, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$);

²³ Texto original: What they generalized was a local commonality observed on some figures, without being able to use this information to provide an expression of whatever term of the sequence.

A generalização dessa propriedade a todas as figuras subsequentes da sequência (p_{k+1} , p_{k+2} , p_{k+3} , ...);

A capacidade de usar essa propriedade comum a fim de deduzir uma expressão direta que permite calcular o valor de qualquer figura da sequência.²⁴ (RADFORD, 2013a, p. 6, tradução nossa).

Podemos afirmar que o estudante percebe uma característica comum na observação de um número finito de figuras, o que Radford (2013a) chama de “escolha entre determinações sensíveis potenciais”²⁵ (p. 6). Essa característica deve ser generalizada aos outros termos da sequência, esse processo de generalização é chamado *abdução*. Por fim, busca-se que o aluno consiga deduzir uma fórmula, não necessariamente utilizando o simbolismo algébrico, mas que ela possa ser utilizada para encontrar qualquer termo da sequência.

No caso detalhado anteriormente, que o aluno percebeu que de uma figura para outra o número de círculos aumentava em duas unidades, a abdução realizada foi no campo aritmético. Essa afirmação é baseada no fato de a relação estabelecida não levar o aluno a encontrar o número de círculos de qualquer figura (VERGEL, 2015b), mas sim gerar uma relação de recorrência entre elas. A referida abdução permitiu “gerar um procedimento, mas não uma expressão direta – em outras palavras, uma fórmula”²⁶ (RADFORD, 2013a, p. 7, tradução nossa).

Para que a generalização seja algébrica a generalização da característica comum – abdução – deve ser utilizada de maneira analítica, ou seja, ela não deverá ser utilizada como uma possibilidade, mas sim como um princípio assumido para a dedução de uma fórmula e para que isso ocorra a característica comum (C) é convertida em hipótese (H) (RADFORD, 2013a). Para exemplificar retomamos ao exemplo da Figura 6: o aluno pode perceber que o número de círculos da linha superior é o número da figura mais um, em linguagem simbólica alfanumérica $n + 1$, e o número de círculos da linha inferior é o número da figura mais dois, ou seja, $n + 2$, deduzindo que a fórmula é a soma de ambos subtotais, isso é $(n+1) + (n+2) = 2n + 3$. Observemos que nesse processo os três elementos caracterizadores do pensamento algébrico estão presentes, o indeterminado, sendo denotado pela letra n e pela expressão *o número da figura*, e a analiticidade. Nesse último elemento a característica comum é tomada como hipótese

²⁴ Texto original: a) a toma de conciencia de una propiedad común que se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, p_1 , p_2 , p_3 , ..., p_k); b) la generalización de dicha propiedad a todos los términos subsecuentes de la secuencia (p_{k+1} , p_{k+2} , p_{k+3} , ...); c) la capacidad de usar esa propiedad común a fin de deducir una expresión directa que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

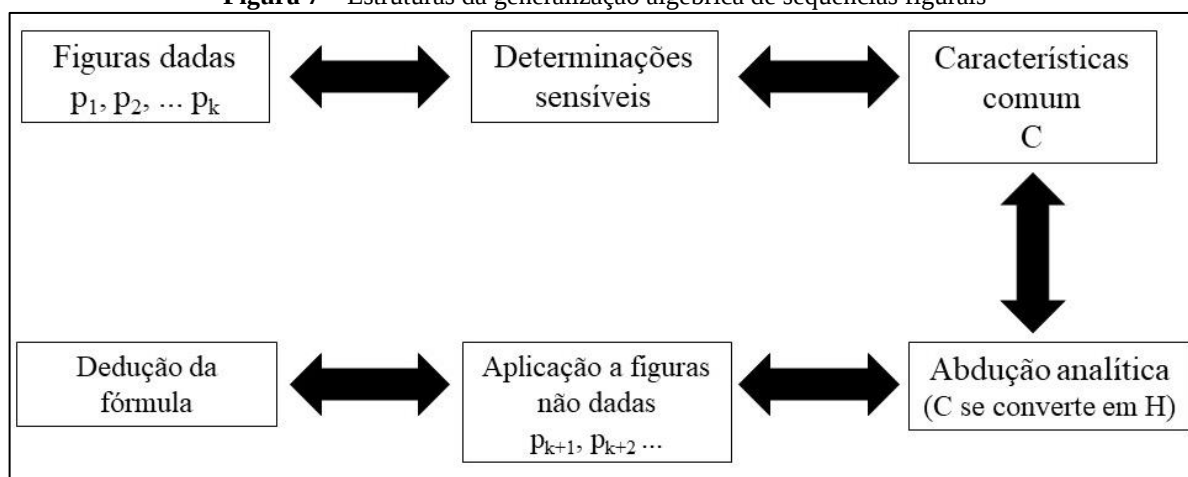
²⁵ Texto original: Escogencia entre determinaciones sensibles potenciales.

²⁶ Texto original: La abducción permite generar un procedimiento, pero no una expresión directa – en otras palabras, una fórmula.

e com isso o aluno opera com o desconhecido em linguagem corrente, por meio da expressão “número da figura mais um”; “número da figura mais dois”, e em linguagem simbólica alfanumérica, chegando à fórmula $(n+1) + (n+2) = 2n + 3$.

A seguir apresentamos um resumo do processo de generalização algébrica (Figura 7) quando trabalhamos com problemas de padrões (RADFORD, 2013a). Observe que as flechas são bidirecionais, isso ocorre pois o aluno pode identificar uma determinada característica, mas quando chegar no momento da abdução perceber que ela não é suficiente para responder ao problema, ou seja, que ela não é capaz de encontrar o número de elementos de uma figura qualquer.

Figura 7 – Estruturas da generalização algébrica de sequências figurais



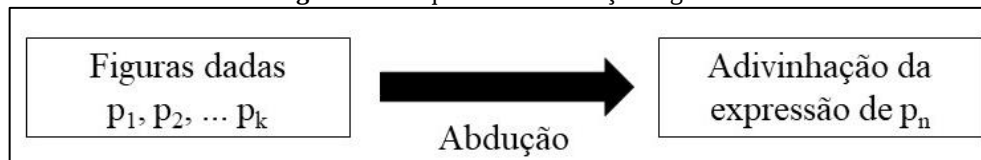
Fonte: Radford (2013a, p. 7, tradução nossa).

Outra estratégia aritmética utilizada para responder a atividade é a *tentativa e erro* (RADFORD, 2006). Nesse momento o aluno vai tentando encontrar uma fórmula que se adeque àquelas figuras que estão explícitas na atividade. Por exemplo, o estudante pode sugerir a fórmula $n+1$, testar para as figuras dadas e ver que não se adequa. E com isso ele tentará outras até chegar à fórmula $2n+3$. Observe que a indeterminação e sua denotação (por meio da letra n) estão presentes, mas o estudante não parte de uma hipótese para deduzir uma fórmula, com isso o indeterminado não é trabalhado por meio de deduções e, portanto, a analiticidade não se faz presente na resposta do aluno. Esse método de testar fórmulas até que se chegue à correta Radford (2006, 2007, 2010b, 2013a) denomina de *indução ingênua*²⁷. Na Figura 8 podemos observar que durante esse processo não há caminhos percorridos para o aluno chegar à fórmula,

²⁷ Termo original: naïve induction.

com isso não podemos afirmar que ele perpassou pelas diversas etapas do processo de generalização algébrica.

Figura 8 – Arquitetura da indução ingênua



Fonte: Radford (2007, p. 86, tradução nossa)

Quando, por exemplo, o estudante coloca a primeira fórmula igual a $n+1$, a segunda como $2n + 2$ e a terceira $2n + 3$, todas por tentativa e erro e não por encontrarem características semelhantes no problema e generalizá-las, afirma-se que ele realizou três abduções (RADFORD, 2007), porém nenhuma delas se enquadra em uma abdução analítica. O resultado desse processo foi uma adivinhação de uma fórmula e não uma dedução, como na generalização algébrica.

Tomando como referência a estrutura da generalização que foi apresentada e discutida (Figura 7), podemos notar que a diferença entre o pensar algebricamente e o pensar aritmeticamente é centrada no elemento caracterizador analiticidade. No pensamento aritmético podem estar presentes a indeterminação e a denotação, como é o caso quando os alunos utilizam a estratégia de tentativa e erro para encontrar a fórmula, mas no pensamento algébrico se faz necessária a presença da analiticidade.

Em todo o percurso para a dedução da fórmula no processo de generalização os alunos utilizam distintos meios semióticos para tornar aparente suas ideias e com isso materializar (e atualizar) o saber algébrico, sendo eles um dos principais fatores que diferenciam uma forma de pensamento algébrico da outra. Essas formas, discutidas por Radford (2009, 2010a, 2018), recebem o nome de: pensamento algébrico factual (ou concreto); pensamento algébrico contextual; pensamento algébrico simbólico (ou padrão). Nos próximos subtópicos desse capítulo apresentaremos as principais características dessas formas de pensamento algébrico, sempre partindo das ideias já discutidas sobre generalização algébrica.

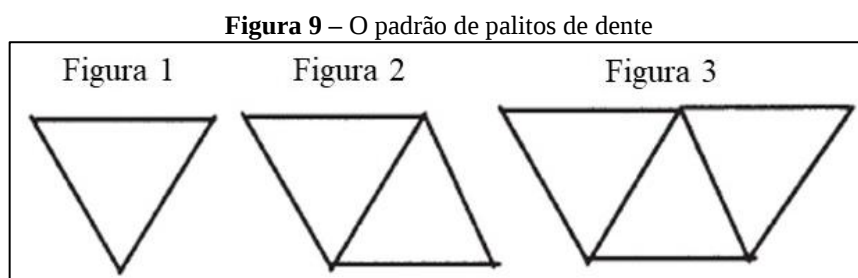
3.2.2 Pensamento Algébrico Factual (ou Concreto)

O pensamento algébrico factual foi inicialmente chamado por Radford (2003, 2004) de forma elementar e pré-simbólica do pensamento algébrico. Isso se deve ao fato de os alunos

não utilizarem nenhum simbolismo alfanumérico para mobilizar esse pensamento e recorrerem a outros meios semióticos de objetivação para tornarem aparente suas ideias.

Segundo Vergel (2015b) os meios semióticos mobilizados nessa forma de pensamento são: os gestos, os movimentos, o ritmo, a atividade perceptiva e as palavras. Além disso, a indeterminação está presente, mas ela ainda não aparece formulada por um processo de nominalização²⁸ (RADFORD, 2002) e acaba sendo denotada pelos estudantes por meio de números específicos ou ações concretas, o que leva a um trabalho com a indeterminação de maneira implícita. Radford (2018) afirma que é devido a esse motivo que essa forma de pensamento recebe o nome de *factual*, pois esse adjetivo “significa que as variáveis da fórmula aparecem de forma *tácita*”²⁹ (RADFORD, 2018, p. 14, tradução nossa).

Para entendermos melhor como emergem os meios semióticos de objetivação e como a indeterminação é denotada e trabalhada no pensamento algébrico *factual* utilizaremos alguns exemplos que foram extraídos das pesquisas de Radford (2003, 2009, 2010a) e da pesquisa de Vergel (2015b). Um deles é o trabalho com a seguinte sequência figural (Figura 9) que foi utilizada por Radford (2003) em um dos momentos de sua pesquisa longitudinal.



Fonte: Radford (2003, p. 45)

Com base na sequência o problema questionava aos estudantes a quantidade de palitos da figura 25 e da figura 100. Observe que o número de palitos de cada figura é equivalente ao número da figura multiplicado por dois e somado a um, ou também o número da figura mais o número da figura sucessora. Em notação simbólica alfanumérica teríamos: $2n + 1$ ou $n + n + 1$, sendo n o número de uma figura qualquer.

Radford (2003) aplicou esse problema em sala de aula e agrupou os alunos em trios. A seguir temos as respostas dos estudantes Judith, Anik e Josh.

²⁸ Corresponde à “um processo em que algo se torna capaz de funcionar como o sujeito ou o objeto de um verbo” (RADFORD, 2002, p. 86, tradução nossa).

²⁹ Texto original: The adjective *factual* means that the variables of the formula appear in a *tacit* form.

Primeiro momento:

Judith: a próxima figura tem mais dois... veja... [...] [Figura] 6 é 13, 13 mais 2. Você tem que continuar lá. Espere um minuto... [pega a calculadora] Ok. Ok, é mais...

Anik: bem, você nem sempre pode usar mais 2, mais 2, mais 2...

Judith: mas é claro. Essa é a figura 7, mais 2 é igual a figura 8.

Josh: isso vai demorar muito.³⁰ (RADFORD, 2003, p. 46, tradução nossa)

A estratégia utilizada por Judith a leva à uma generalização aritmética, ela consegue perceber uma característica comum na sequência, porém a abdução que ela realiza não é analítica, ou seja, a característica comum não passa a ser hipótese, não é possível utilizá-la para deduzir uma fórmula. Portanto Judith cria um esquema, um procedimento.

Observe que Anik e Josh percebem que a estratégia de Judith não é suficiente para encontrar o número de palitos de figuras grandes, pois demoraria muito para chegar nesses altos valores. Mesmo não trabalhando com generalizações algébricas nesse momento Radford (2003, 2004) afirma que é importante esse tipo de observação, pois ajuda o aluno a compreender a construção da sequência, mesmo que por meio dessa estratégia não seja possível chegar à resposta final do problema.

Como a estratégia inicial não foi suficiente para responder aos questionamentos, no segundo momento os estudantes necessitaram recorrer novamente às determinações sensíveis, no campo fenomenológico, e observaram que o número de palitos sempre será o número da figura mais o número da figura sucessora. A afirmação dos estudantes não foi realizada dessa maneira, mas sim com números particulares que obedecem a uma determinada lei – a lei da variável, sendo essa última uma das principais características do pensamento algébrico factual.

Segundo momento:

Josh: é sempre o próximo. Veja! [e apontando para as figuras com o lápis ele diz] 1 mais 2, 2 mais 3 [...]

Anik: Então, 25 mais 26.

Josh: Espere um minuto. Sim, 3 mais 4 é 7, 4 mais 5... então é 27 mais 26?

Anik: Bem, você sempre... olha [e ela estica o braço para apontar para as figuras] 3 mais [...] é 25 mais 26.³¹ (RADFORD, 2003, p. 46-47, tradução nossa)

Podemos notar que analisando as figuras já dispostas na tarefa os estudantes conseguiram observar essa característica comum e levá-la para ser aplicada em qualquer figura

³⁰ Texto original: 1. Judith: The next figure has two more than...look...[...] [Figure] 6 is 13, 13 plus 2. You have to continue there. Wait a minute...[gets a calculator] OK. OK, it's plus 2. Anik: Well, you can't always go plus 2, plus 2, plus 2 3. Judith: But of course. That's Figure 7, plus 2 equals Figure 8. 4. Josh: That will take too long!

³¹ Texto original: 1. Josh: It's always the next. Look! [and pointing to the figures with the pencil he says the following] 1 plus 2, 2 plus 3 [...]. 2. Anik: So, 25 plus 26 3. Josh: Wait a minute. Yeah, 3 plus 4 is 7, 4 plus 5...so it's 27 plus 26? 4. Anik: Well, because you always...like...look [and she stretches her arm to point to the figures—see the second picture in Figure 3], 3 plus [...] it's 25 plus 26.

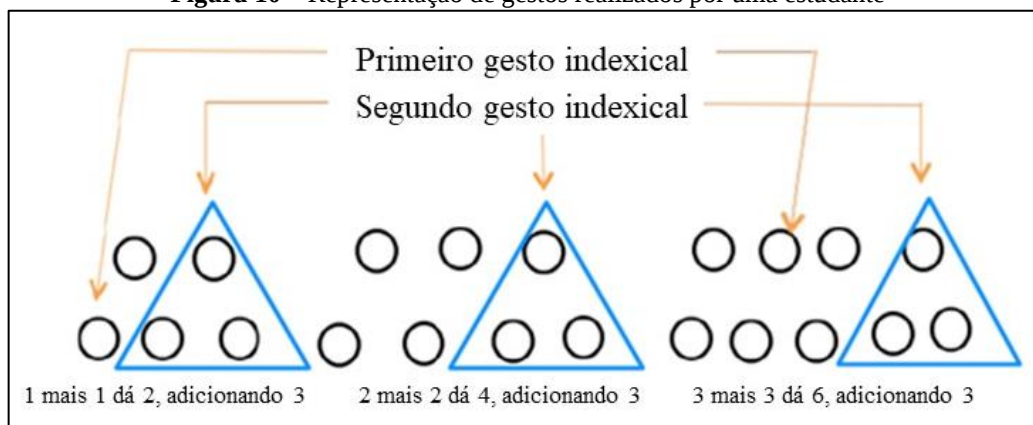
da sequência. Radford (2018) afirma que a utilização do advérbio de tempo *sempre* mostra que o estudante percebeu que aquela determinada característica não é apenas utilizada para as figuras já expostas, mas sim para todas as figuras que possam ser questionadas. Dessa maneira, tomando a característica como hipótese os alunos conseguem chegar à dedução de uma fórmula capaz de encontrar o número de palitos de qualquer figura. Essa fórmula é apresentada por meio de números específicos, isso é, a indeterminação está sendo trabalhada implicitamente e sua denotação é realizada por meio de números ou ações concretas (RADFORD, 2018). Esse trabalho com o indeterminado é realizado a partir da característica observada, sendo ele apresentado na resposta do aluno para o total de palitos da figura 25 como “25 mais 26”, mostrando assim como a analiticidade está presente nessa forma de pensamento.

Os meios semióticos que ele utilizou para tonar aparente suas ideias e realizar suas ações foram a atividade perceptiva, a fala, os gestos, os ritmos³² e movimentos. A atividade perceptiva faz referência à maneira que os estudantes se dirigem à figura, ou seja, a maneira que eles veem a sequência, que eles olham para ela (VERGEL, 2015b, 2016). Os outros meios semióticos estão sustentados por essa atividade perceptiva, que levou à percepção de uma característica comum e com isso a dedução de uma fórmula. A partir dessa percepção o aluno mobiliza os gestos, a fala, o ritmo (quando afirma: 3 mais 4 é 7 (figura 3); 4 mais 5 é 9 (figura 4)) e os movimentos – sendo todos eles, desde a percepção, os meios semióticos que emergem no pensamento algébrico factual.

A mobilização desses meios semióticos também pode ser identificada na resposta de uma aluna (Figura 10) à tarefa de generalização de padrões composta por círculos, observada e analisada na pesquisa de Vergel (2015b). Foi solicitado à estudante que ela encontrasse a quantidade de círculos da figura 9, sem desenhá-la. Podemos observar que inicialmente a aluna realiza uma sequência de gestos, o *primeiro gesto* indica a quantidade de círculos na primeira e na segunda linha, em que em cada linha o número de círculos corresponde ao número da figura. Posteriormente a aluna realiza um *segundo gesto*, que indica o agrupamento de três círculos – que ela denomina *torre*. Esse agrupamento se repete em todas as figuras, ou seja, é algo fixo.

³² Radford (2010b) entende por ritmo toda sensação de ordem que vai além de figuras particulares.

Figura 10 – Representação de gestos realizados por uma estudante



Fonte: Vergel (2015b, p 202, tradução nossa)

Esses gestos assumem a função de *dêiticos*³³ *espaciais*, isso é, eles estão indicando algo em um determinado espaço. Nesse exemplo que está sendo discutido o que os gestos indicam é a quantidade de círculos em cada linha e o agrupamento da *torre*. Segundo Vergel (2015b) quando a aluna separa a *torre* isso a ajuda a notar a igualdade entre os números de círculos da linha superior e da linha inferior. Nesse momento a *torre* também é considerada um meio semiótico de objetivação, afinal contribui para que a estudante torne aparente suas intenções e realize suas ações, assim como para que alcance uma forma estável de consciência (RADFORD, 2003).

Ao ser questionada sobre a quantidade de círculos da figura 9 a aluna afirma que será 9 mais 9, que resulta em 18, mais três, o equivalente a 21. É possível observar que a generalização da característica comum ocorre de maneira analítica no momento que, como mostra a Figura 10, a estudante percebe uma característica comum em todas as figuras expostas, sendo essa característica relacionada a somar o número da figura duas vezes e depois somar a três, e torna essa característica um princípio assumido, de modo que ela percebe que ocorre em todas as figuras. Portanto a aluna deduz a fórmula para o problema, que é expressa por meio de números específicos como $9 + 9 + 3$. Os elementos caracterizadores do pensamento algébrico se fazem presentes no percurso da generalização realizado pela estudante, sendo a indeterminação denotada por um número particular e sendo operada tomando como base a comunalidade observada, o que caracteriza a analiticidade.

Por meio da discussão da resposta da estudante percebemos que a atividade perceptiva, gestos, ritmos e a fala estão presentes na mobilização do pensamento algébrico, ou seja, os

³³ A palavra ‘dêitico’ provem da palavra ‘dêixis’, que significa “ação de mostrar, indicar, assinalar” (AVELAR, 2016, p. 158).

meios semióticos de objetivação foram mobilizados sincronicamente na produção de significados. Essa ação linguística-perceptiva-gestual é denominada *nó semiótico* (RADFORD, 2013a), que consiste em “um segmento da atividade semiótica que signos que provêm de diferentes sistemas semióticos se complementam para alcançar uma tomada de consciência de maneira que a tarefa seja abordada desde um ponto de vista algébrico.”³⁴ (VERGEL, 2015a, p. 14, tradução nossa).

Em um outro momento da pesquisa longitudinal de Radford (2009, 2010a), em que foi utilizada essa mesma tarefa de generalização de padrões que apresentam os círculos (Figura 6), ele conseguiu identificar que os alunos encontravam o número de círculos da figura 10 utilizando a seguinte justificativa: na figura 1 tem dois círculos (apontando para a linha superior) e três círculos (apontando para a linha inferior), a figura 2 tem três círculos (apontando para a linha superior) e quatro (apontando para a linha inferior). A figura 10 terá onze e doze, vinte e três círculos. Quando questionados pela figura 100, eles utilizaram a mesma ideia e afirmam que é 101 e 102 círculos, obtendo como resposta final 203 círculos.

Nesse exemplo o aluno argumentou, por meio da atividade perceptiva, dos gestos tomados como dêiticos espaciais, da fala e de números particulares, que a linha superior terá o número de círculos equivalente ao número da figura mais um e que o número de círculos da linha inferior é equivalente ao número da figura mais dois, em que o número total de círculos da figura será a soma desses dois subtotais. A característica referente ao número de círculos em cada linha é tomada como premissa e a partir dela o indeterminado é trabalhado implicitamente, denotado por números particulares e dos gestos realizados, até a dedução de uma fórmula que pode ser aplicada a qualquer número da sequência.

Nos exemplos das pesquisas de Vergel (2015b) e de Radford (2009, 2010a) podemos observar que mesmo utilizando meios semióticos de objetivação equivalentes os estudantes podem seguir por diferentes caminhos para responderem os questionamentos dos problemas, o que caracteriza uma materialização de um mesmo saber algébrico, nesse caso o pensamento algébrico factual, mas utilizando percepções diferentes de uma mesma figura. Por isso afirmamos que a materialização do saber algébrico, o conhecimento, é particular (ou singular) (RADFORD, 2017b), pois cada aluno terá sua maneira individual de mobilização desse pensamento.

³⁴ Texto original: Un segmento de la actividad semiótica en la que signos que pertenecen de diferentes sistemas semióticos se complementan para lograr una toma de consciencia de la manera en que la tarea puede ser atacada desde un punto de vista algebraico.

Nos exemplos descritos observamos que os estudantes apresentaram os três elementos característicos do pensamento algébrico: o senso de indeterminação, a analiticidade e denotação semiótica. Eles analisaram a sequência, recorreram a determinações sensíveis, escolheram uma característica comum e o processo de generalização dessa característica ocorreu de forma analítica. Nesse momento os estudantes operaram com o indeterminado de forma implícita, fazendo uso de números particulares e ações concretas, e a partir de uma hipótese que os levaram à dedução de fórmulas. Nesse processo diversos meios semióticos foram mobilizados, em que se destacam os gestos utilizados para tornar aparente a maneira que devemos recorrer para encontrar o número de círculos (ou palitos) de uma figura qualquer. Portanto, a fórmula apresentada por meio de gestos é denominada de *fórmula corporal* ou *corporificada* (VERGEL, 2015b)

Concluimos que no pensamento algébrico factual a indeterminação não está em evidência, ela não passa por um processo de nominalização, mas ela está presente por meio da utilização dos números particulares (RADFORD, 2009, 2010a), assim como está incorporada nos gestos, nas palavras e na percepção (VERGEL, 2015b). Nesse pensamento o aluno também não consegue fazer uso do simbolismo alfanumérico, assim como não consegue denotar o indeterminado de uma forma geral.

Mesmo estando dentro de uma camada primária de generalidade e construindo uma fórmula baseada em números particulares, Radford (2009) defende que essa forma de pensar não é simples, pois necessita de mecanismos, coordenação, palavras e símbolos para ser desenvolvida.

3.2.3 Pensamento Algébrico Contextual

Esse pensamento recebe o nome de contextual devido ao fato de a dedução da fórmula estar diretamente ligada a algum contexto observado pelos estudantes no processo de generalização (RADFORD, 2003). Um exemplo, tomando novamente a sequência figural exposta na Figura 6, é o aluno perceber a relação entre o número da figura e a quantidade de círculos nas linhas superior e inferior.

Para a definição das características do pensamento algébrico contextual Radford (2009, 2010a) utilizou como base as respostas que os alunos deram ao problema que solicitava uma explicação para um colega de outra classe de como descobrir o número de círculos de uma

figura qualquer se baseando na sequência figural apresentada na Figura 6. Nessa etapa foi solicitado aos estudantes que escrevessem ou gravassem a mensagem a ser repassada.

Diante a esse problema os alunos não trabalharam mais com números específicos, agora está em curso um novo objeto que é a figura geral. Isso significa que nessa forma de pensar a indeterminação se torna explícita, ou seja, ela é nominalizada, e o estudante começa a substituir os gestos, os ritmos e os movimentos por frases “chaves” (VERGEL, 2015b), que constituem o principal meio semiótico de objetivação mobilizado no pensamento algébrico contextual.

Retomando para o problema de círculos, quando questionados como encontrar o número de círculos de uma figura qualquer uma possível resposta do aluno poderia ser:

Resposta: Adicione um círculo ao número da figura para encontrar o número de círculos da linha superior e adicione dois círculos ao número da figura para encontrar o número de círculos da linha inferior.

Nessa resposta a indeterminação é trabalhada explicitamente, sendo expressa como “número da figura”. Mas é possível observar que a ideia apresentada pelo estudante está muito conectada com a espacialidade da sequência figural. Radford (2009, 2010a) afirma que palavras como *superior* e *inferior* descrevem objetos em um espaço de tempo, e elas, assim como alguns gestos realizados no pensamento algébrico factual, são denominadas de *dêiticos espaciais*. Esses dêiticos escritos ou falados substituem os gestos que indicavam algo em um determinado espaço, como por exemplo quando o aluno apontava para a linha superior e posteriormente para a linha inferior.

Portanto, a fórmula deduzida no pensamento algébrico contextual tenderá a ser uma descrição espacial da figura (VERGEL, 2015b). Nessa fórmula a indeterminação será denotada explicitamente por meio de um conjunto de palavras e o estudante trabalhará com a variável como se a conhecesse, um exemplo dessa analiticidade é: ‘Adicione um círculo ao *número da figura*’ e ‘adicione dois círculos ao *número da figura*’.

Para entendermos melhor a questão do caráter operatório dos objetos algébricos no pensamento algébrico contextual vamos utilizar uma tarefa que Vergel (2015b) aplicou em sua pesquisa. A tarefa tinha como base a sequência figural exposta na Figura 6 e era acompanhada do seguinte questionamento:

A professora Johanna tem uma sacola e dentro dela introduz vários cartões, cada um com um número. Cada um desses números corresponde a uma das figuras da sequência anterior. Ela tira um cartão aleatoriamente e o introduz em um envelope, se assegurando de que nenhum estudante tenha visto o número do cartão. Johanna quer que o envelope seja enviado a professora Estela com uma mensagem que será introduzida ao envelope junto com o cartão que contém o número. Essa mensagem

deve explicar a professora como calcular rapidamente o número de círculos que corresponde ao número do cartão.³⁵ (VERGEL, 2015b, p. 208, tradução nossa).

Podemos observar que a atividade pede para o aluno escrever como é possível encontrar o número de círculos em uma figura qualquer. Mediante a resposta de cinco alunos, Vergel (2015b) conseguiu observar diferentes maneiras de denotar o indeterminado, assim como o seu caráter operatório, sendo essa possível pois os alunos já tinham recorrido a características comuns, que se transformaram em hipóteses, para chegarem à dedução de uma fórmula. As diferentes denotações e analiticidades estão expressas no Quadro 5.

Quadro 5 – Denotação semiótica e Analiticidade

Estudante	Denotação Semiótica da indeterminação	Analiticidade ou caráter operatório da indeterminação
Jimmy Stiven	“o número que está dentro do cartão”	“você deve pegar esse número e multiplicá-lo por dois e nesse resultado você deve colocar essa torre  ”
Luis Felipe	“figura”	“na figura eu adiciono o mesmo número da figura e ao resultado que me dê eu somo três”
Yaneth	“o número que sai no cartão”	“somar o número que sai no cartão duas vezes e somar mais três”
Sunner	“o número que te entregaram”	“o número que te entregaram você tem que multiplicá-lo por dois e ao número que der você soma três”
Astrid	“o número que está no cartão”	“o número que está no cartão você tem que colocar na parte de cima e na parte de baixo e somar três”

Fonte: Vergel (2015b, p. 210-211, tradução nossa)

Nesses exemplos descritos podemos observar que a indeterminação está explícita no discurso, sendo denotada por meio de palavras ou frases curtas. Portanto, o relacionamento das variáveis entra na linguagem verbal e a atividade gestual fica em segundo plano (RADFORD, 2018). Essa linguagem pode ser apresentada por meio da escrita ou da fala, tornando aparente a intenção dos estudantes e sendo assim caracterizado como um meio semiótico de objetivação presente nesse pensamento.

³⁵ La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números corresponde a una de las figuras de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose de que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. Johanna quiere que el sobre sea enviado a la profesora Estella con un mensaje que será introducido en el sobre junto con la tarjeta que contiene el número. Este mensaje debe explicar a la profesora como calcular rápidamente el número de círculos que corresponde al número de la tarjeta.

Nesses exemplos descritos é possível notar que a materialização do pensamento contextual também ocorre de maneira particular e singular, em que cada estudante recorreu a uma forma diferente de perceber a sequência figural e chegar a maneiras distintas de materialização do saber.

A maneira que a indeterminação é denotada e os meios semióticos que constituem a parte material do pensamento algébrico são os principais pontos que diferenciam o pensamento algébrico factual do contextual. Nesse último o estudante utiliza meios semióticos mais concisos para objetivar a generalização, mesmo que a dedução da fórmula esteja presa ao que o aluno consegue perceber e contextualizar em relação à sequência observada.

O uso do simbolismo alfanumérico não é característico nessa forma de pensamento, mas algumas fórmulas que fazem uso desse meio semiótico de objetivação não conseguem romper com a estrutura figural observada e com isso as letras são vistas como índices, que indicam o passo a passo que deve ser realizado para trabalhar com a indeterminação explicitamente. O rompimento entre o pensamento algébrico contextual e o simbólico ocorre na transformação de índice em símbolo. Mais sobre este aspecto será abordado no próximo tópico.

3.2.4 Pensamento Algébrico Simbólico (ou Padrão)

O pensamento algébrico simbólico apresenta como principal característica o uso do simbolismo alfanumérico como meio semiótico de objetivação (RADFORD, 2003, 2004) e é visto como o pensamento algébrico mais sofisticado dentre os três já discutidos. Essa forma de pensar foi definida com base nas respostas dos alunos quando foram solicitados a escrever uma fórmula que fosse possível de ser utilizada para encontrar o número de círculos da figura n (RADFORD, 2009. 2010a).

Mas não são todas fórmulas que utilizam esse tipo de simbolismo que pode evidenciar que o aluno pensa algebricamente. Se a fórmula for encontrada com base em adivinhações ou tentativa e erro (*indução ingênua*), ela não pode ser considerada uma fórmula algébrica, pois, como já mostramos anteriormente, não foi deduzida por um processo que envolve determinações sensíveis, características comuns e abdução analítica.

Além disso, mesmo trabalhando com o simbolismo alfanumérico as fórmulas encontradas por alguns estudantes ainda podem estar presas à descrição espacial da figura, o que Radford (2007, 2009, 2010a) denomina de *fórmulas icônicas*. Elas recebem esse nome pois descrevem geometricamente a figura, narrando de forma condensada as experiências do aluno

(RADFORD, 2009, 2010a). Um exemplo desse tipo de fórmula é $(n+1) + (n+2)$, em que o uso desses parênteses não ocorre de maneira arbitrária, mas sim tem a função de separar o que acontece na linha superior $(n+1)$ e na linha inferior $(n+2)$. Outra característica das fórmulas icônicas é a letra n ser vista como um índice, algo que indica, fazendo referência a como a figura deve ser pensada e construída.

O que ocorre é que os estudantes não conseguem perceber, por exemplo, a equivalência entre $(n+1) + (n+2)$ e $2n + 3$, eles tratam como se fossem fórmulas distintas por ainda estarem muito presos à descrição da figura. Quando isso ocorre afirmamos que a fórmula descrita foi deduzida por meio de um processo de generalização algébrica, mas ela está carregada de espacialidade. Portanto, a fórmula ainda está presa ao contexto que a figura foi construída e com isso sinaliza que o aluno ainda está mobilizando o pensamento algébrico contextual (RADFORD, 2009, 2010a).

Quando o estudante consegue enxergar a fórmula alfanumérica além da sua espacialidade, chegando por exemplo a $n + n + 3$ ou $2n + 3$ isso indica que o significado espacial do desconhecido é superado (RADFORD, 2011b). Dessa forma, torna-se evidente o rompimento entre o índice e o símbolo, e com isso a letra n não está mais com a função de indicar algo, mas sim está atuando de maneira simbólica. Quando isso ocorre afirmamos que os estudantes conseguem operar com a sintaxe alfanumérica e perpassar do pensamento algébrico contextual para o simbólico. Radford (2018) afirma que “a novidade não é apenas a introdução do simbolismo alfanumérico, mas toda uma reconceitualização das operações numéricas.”³⁶ (p. 17, tradução nossa)

É importante destacar que nessa forma de pensamento algébrico a indeterminação está sendo denotada por meio do simbolismo alfanumérico, que em nosso exemplo anterior se refere à letra n . Quando o aluno deduz que a fórmula $(n+1) + (n+2)$ é igual à $2n + 3$ ele está trabalhando com o desconhecido por meio da adição de ambos os subtotais $(n+1)$ e $(n+2)$, que resulta em $2n + 3$. Com base nisso afirmamos que o elemento característico analiticidade está em curso, isso é, o aluno consegue operar com o desconhecido como se o conhecesse a partir de deduções. Ressaltamos que essa operação com o desconhecido não ocorre somente no pensamento algébrico simbólico, mas sim em todas as três formas de pensar algebricamente discutidas com base na TO – como exemplificamos no decorrer desse capítulo.

³⁶ Texto original: The novelty is not only the introduction of alphanumeric symbolism, but a whole reconceptualization of numerical operations.

Muitas vezes a indeterminação que agora está sendo denotada por um símbolo alfanumérico, como é o caso da letra n , anteriormente foi expressa por um conjunto de palavras (pensamento contextual) ou por ações concretas e números particulares (pensamento factual). Esse processo recebe o nome de *contração semiótica* (RADFORD, 2007) e pode ser definido como a concentração de significados ao menor número de sinais (palavras) para denotar a indeterminação (RADFORD, 2006).

Essa contração semiótica pode ocorrer dentro de um mesmo sistema semiótico ou entre sistemas semióticos distintos (RADFORD, 2007). Um exemplo dessa contração utilizando diferentes meios semióticos de objetivação é quando o aluno mobiliza a ideia no pensamento algébrico factual e a leva até o pensamento algébrico simbólico, com isso ele inicia o problema utilizando gestos e depois consegue objetivar a generalidade por meio de frases chaves e, por último, uma fórmula utilizando o simbolismo alfanumérico. Uma contração semiótica em um mesmo conjunto de sistema semióticos é quando, por exemplo, o aluno consegue perceber a igualdade entre $n + n + 3$ e $2n + 3$.

É importante ressaltar que para chegar nesse nível mais avançado do pensamento algébrico, que é o pensamento algébrico simbólico, o simbolismo não deve atuar de maneira indexical, ou seja, o aluno deve conseguir operar com o simbolismo alfanumérico para que a fórmula não represente uma descrição espacial da figura. Para Radford (2018) “a importância do simbolismo algébrico padrão não reside em sua tremenda eficiência apenas para realizar cálculos. Ela também reside nas possibilidades que oferece para alcançar novos modos estéticos de imaginação e percepção”³⁷ (p. 23, tradução nossa).

Mesmo Radford (2009, 2010a) afirmando que a linguagem simbólica com significado é o auge do pensamento algébrico, ele também defende que essa tipologia não deve ser seguida de maneira hierarquicamente rígida. Ele afirma que essas três camadas de generalidade é “uma tentativa de entender os processos pelos quais os alunos passam a ter contato com as formas de ação, reflexão e raciocínio veiculados pela práxis historicamente constituída da álgebra escolar”³⁸ (RADFORD, 2010a, p. 15, tradução nossa).

³⁷ Texto original: The importance of the standard algebraic symbolism does not reside in its tremendous efficiency to carry out calculations only. It also resides in the possibilities it offers to reach new aesthetic modes of imagination and perception.

³⁸ Texto original: The typology is rather an attempt at understanding the processes that the students undergo in their contact with the forms of action, reflection and reasoning conveyed by the historically constituted praxis of school algebra.

Destacamos que as formas de pensamento algébrico que o estudante mobilizará dependerá do contexto, da atividade, dos problemas propostos na tarefa, da interação com os alunos e com o professor, e alguns outros fatores.

O Quadro 6 apresenta as principais características das três formas de pensamento algébrica discutidas.

Quadro 6 – Principais Características das Formas de Pensamento Algébrico

Pensamento Algébrico	Principais características
Factual	- A indeterminação é trabalhada implicitamente; - Os principais meios semióticos de objetivação são: gestos, movimentos, ritmos, atividade perceptiva; - Trabalho com números específicos.
Contextual	- O contexto que a fórmula foi construída fica em evidência; - A indeterminação é trabalhada explicitamente; - Os principais meios semióticos de objetivação são: frases chaves que emergem por meio da fala e da escrita; - Fórmula icônicas.
Simbólico	- O aluno consegue utilizar o simbolismo alfanumérico de maneira simbólica e operar com a sintaxe alfanumérica; - A indeterminação é trabalhada explicitamente; - O principal meio semiótico de objetivação: simbolismo alfanumérico.

Fonte: A autora (2020)

Diante dessa explicação das formas de pensamento algébrico fundamentadas na Teoria da Objetivação é importante destacar que Radford (2018) defende que o *simbolismo algébrico* não é apenas o simbolismo alfanumérico, mas sim os gestos, a linguagem, o ritmo, ou qualquer outro recurso semiótico que o estudante utilize para significar ou apresentar a generalidade.

Partindo dessa ideia que defende que a álgebra não se reduz ao simbolismo alfanumérico, nessa pesquisa buscaremos identificar quais das três formas de pensamento algébrico descritos nesse capítulo os estudantes dos anos finais do ensino fundamental conseguem mobilizar ao responderem uma tarefa de generalização de padrões. Para isso é necessário investigar se eles recorrerão a estratégias de tentativa e erro ou buscarão realizar uma generalização algébrica; identificar quais os meios semióticos que eles utilizarão para tornar aparente suas intenções; identificar os três elementos caracterizadores do pensamento algébrico em suas respostas e como eles percorrerão a todo o processo da generalização algébrica. No próximo capítulo detalhamos a metodologia utilizada para alcançar o objetivo dessa investigação.

4 METODOLOGIA DO ESTUDO 1

Essa investigação apresenta dois estudos, que denominamos Estudo 1 e Estudo 2. O primeiro era caracterizado como o estudo piloto da pesquisa, mas após o exame da qualificação decidimos por incluí-lo como um dos estudos principais. Como foi solicitado que essa investigação tivesse mais sujeitos participantes decidimos realizar um segundo estudo, denominado Estudo 2. Esse sofreu algumas modificações referentes ao primeiro devido à suspensão das aulas nas redes de ensino, causada pela pandemia do novo coronavírus que teve início nos primeiros meses de 2020. As referidas modificações serão descritas no decorrer desse trabalho.

Ambos os estudos apresentam uma abordagem qualitativa de pesquisa. Segundo Ludke e André (1986) essa abordagem tem como principais características o pesquisador ser um participante atuante no processo de coleta de dados, em que esses são predominantemente descritivos e o processo é muito mais importante do que o produto. Diante a isso, para alcançarmos nosso objetivo de identificar as formas de pensamento algébrico que os alunos do 6º ao 9º ano conseguem mobilizar ao responderem uma tarefa de generalização de padrões, partiremos da definição de atividade que a TO apresenta, em que professor e aluno trabalham ombro a ombro em busca da realização de uma obra comum.

Para identificarmos as formas de pensamento algébrico mobilizada pelos alunos utilizamos como base de dados as gravações de todos os momentos da atividade e as respostas da folha de tarefa dos estudantes, posteriormente houve a descrição, interpretação e categorização desses dados. As gravações, tanto em áudio como em vídeo, são justificadas pela natureza do pensamento algébrico, que, na perspectiva da TO, possui uma natureza multimodal, apresentando sua parte material (gestos, percepção, fala, escrita, entre outros) e ideacional (imaginação e a fala interior).

Durante a atividade os estudantes foram postos a resolver uma tarefa, composta de sete problemas, envolvendo a generalização de padrões de uma sequência figural. Para entendermos melhor a estrutura dessa atividade, assim como os estudantes que responderam a tarefa proposta, esse capítulo está dividido nos seguintes subtópicos: participantes do estudo 1; a tarefa; metodologia da aplicação da tarefa; coleta e metodologia de análise de dados.

4.1 Participantes do Estudo 1

A motivação para escolher alunos dos anos finais do ensino fundamental como os sujeitos dessa pesquisa se deu pois de acordo com os PCPE (2012) os alunos começam a investigar regularidades em sequências, voltadas para o estudo da álgebra, desde o 1º ano do ensino fundamental, o que nos levou a supor que alunos do 6º ao 9º ano nos anos de 2019 e 2020 estariam acostumados com esse tipo de tarefa. Assim como os PCPE (2012) outros documentos oficiais da educação, como a BNCC (2018) e o Currículo de Pernambuco para o Ensino Fundamental (2019), também defendem que os alunos devem trabalhar com tarefas que envolvam padrões figurais e numéricos desde os anos iniciais de escolarização. Com isso entendemos que esse tipo de tarefa já é comum para os estudantes que estão nos referidos anos de ensino.

Como o Estudo 1 se caracterizava como o estudo piloto dessa pesquisa, escolhemos trabalhar com os estudantes do Núcleo de Estudos Avançados e Científicos – NEAC, pois era possível encontrar alunos do 6º ao 9º ano em uma única turma, facilitando a nossa coleta de dados.

O NEAC é um projeto que reúne professores e estudantes com o objetivo de fazer pesquisa. Está localizado no Município do Cabo de Santo Agostinho³⁹ e, segundo sua instrução normativa, tem por objetivo aprofundar os conhecimentos dos estudantes e impulsionar sua aprendizagem e humanização por meio de práticas científicas. Essas práticas são realizadas em laboratórios de ciências, matemática e robótica, e consistem em observar, pesquisar, experienciar, registrar e difundir. As turmas são mistas (estudantes do 6º ao 9º ano) e as práticas ocorrem no contraturno escolar do aluno duas vezes por semana (segunda e quarta; terça e quinta).

Os estudantes do NEAC têm três aulas durante o turno que participam, cada aula em um laboratório distinto. Esses laboratórios trabalham com projetos pedagógicos que são desenvolvidos de acordo com a ciência estudada, possibilitando o estímulo à uma postura de pesquisador. A capacidade de cada laboratório é de 25 alunos. Com isso eles podem compor até três turmas no período da manhã (75 alunos) e três turmas no período da tarde (75 alunos). Como esses estudantes estão distribuídos em dois dias da semana, o total da capacidade de alunos do NEAC é de 300 estudantes.

³⁹ Esse município faz parte da Região Metropolitana do Recife.

Uma das maneiras que o NEAC encontrou para promover o pensamento científico a partir das relações humanas e pelas diferenças foi formar as turmas mescladas constituídas por alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental. Para participar desse projeto o estudante deve estar matriculado em uma escola da rede municipal do Cabo de Santo Agostinho e ter um bom desempenho, possuindo notas acima da média nas provas bimestrais das disciplinas de língua portuguesa, matemática e ciências.

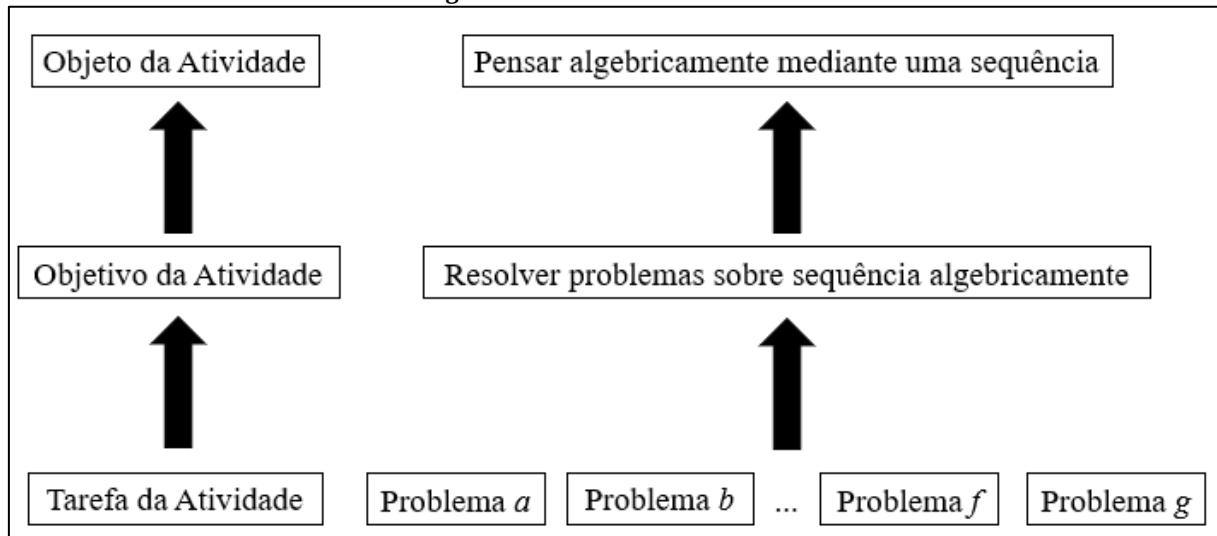
A atividade do estudo em questão foi realizada com dezenove estudantes de uma das turmas da quinta feira do horário da manhã. Eles tinham idades variadas de 11 a 17 anos e buscaram resolver problemas referentes à generalização de padrões. Esses problemas, que compõe uma tarefa, serão apresentados no tópico a seguir.

4.2 A Tarefa

A tarefa trabalhada com os estudantes se baseia na estrutura da atividade da sala de aula definida pela Teoria da Objetivação (RADFORD, 2017a), essa estrutura é denominada *componente didático* da atividade e é composta por três elementos: o objeto, o objetivo e a tarefa.

O objeto corresponde ao projeto didático do professor, que no caso dessa pesquisa é referente ao pensar algebricamente mediante uma sequência figural. O objetivo é o caminho percorrido para alcançar o objeto, ou seja, para os alunos conseguirem pensar algebricamente eles precisam resolver os problemas propostos em relação à sequência figural de forma algébrica. A tarefa é referente aos problemas utilizados para chegar ao objetivo (RADFORD, 2017a).

Na Figura 11 visualizamos o esquema da estrutura da atividade equivalente ao que Radford (2017a) criou para sua pesquisa. Os componentes são correspondentes à nossa, pois também trabalhamos com sequência figural e pensamento algébrico. A diferença realizada é a abordagem de uma única tarefa, e não várias, assim como todos os problemas aplicados em um único momento, sem ser realizada uma pesquisa longitudinal.

Figura 11 – Estrutura da Atividade

Fonte: Adaptado de Radford (2017a, p. 126)

A Figura 12 apresenta a tarefa utilizada nesse Estudo 1. Inicialmente foi apresentada aos estudantes uma das sequências figurais utilizadas por Radford (2009, 2010a) em suas investigações. Os alunos precisavam observar essa sequência e com base nisso responder sete problemas.

Figura 12 – Tarefa do Estudo 1

Observe a sequência a seguir e responda as seguintes questões:



fig. 1



fig. 2



fig. 3

- a) Quantos círculos terá a figura 4? Justifique sua resposta.
- b) Quantos círculos terá a figura 5? Justifique sua resposta.
- c) Quantos círculos terá a figura 10? Como você fez para encontrar esta quantidade?
- d) Quantos círculos terá a figura 100? Explique o que você fez para chegar a este valor.
- e) Escreva uma mensagem para um aluno de outra classe indicando como descobrir o número de círculos da figura 200.
- f) Escreva uma mensagem para um aluno de outra classe indicando como descobrir o número de círculos em qualquer figura.
- g) Escreva uma fórmula para o número de círculos da figura n .

Fonte: Adaptado de Radford (2009, 2010a)

Os cinco primeiros problemas referem-se à mobilização do pensamento algébrico factual, pois aborda questionamentos sobre números específicos. O problema *f* faz referência ao pensamento algébrico contextual, no momento que aborda uma figura indeterminada e, por fim, o problema *g* refere-se ao pensamento simbólico ao solicitar que o aluno utilize o simbolismo alfanumérico. É importante ressaltar que mesmo esses problemas estando alinhados com as características das distintas formas de pensamento algébrico é possível que o aluno não consiga pensar algebricamente quando for resolvê-los ou não mobilize todas as formas de pensamento algébrico.

Algumas modificações foram realizadas referentes à tarefa que Radford (2009, 2010a) trabalhou com seus estudantes. Nos problemas *a* e *b* não solicitamos ao aluno desenhar as próximas figuras, eles ficaram livres para decidir qual método utilizar para chegar à quantidade de círculos das figuras 4 e 5. Retiramos a ação desenhar para evitar que os alunos busquem realizá-la nos problemas subsequentes.

Outra modificação foi a inserção do problema *e*, que solicita ao estudante escrever uma mensagem para outra pessoa explicando como encontrar o número da figura 200. Nesse momento não é perguntado diretamente quantos círculos terá uma figura qualquer, mas sim solicita que o aluno escreva para outro como encontrar os círculos de uma figura determinada. Esse problema foi adicionado com o objetivo de facilitar a escrita do aluno no problema *g*.

No próximo subtópico desse capítulo será explicado como ocorreu a aplicação dessa tarefa com os dezenove estudantes participantes desse estudo, visando apresentar como a turma foi organizada e os momentos da atividade.

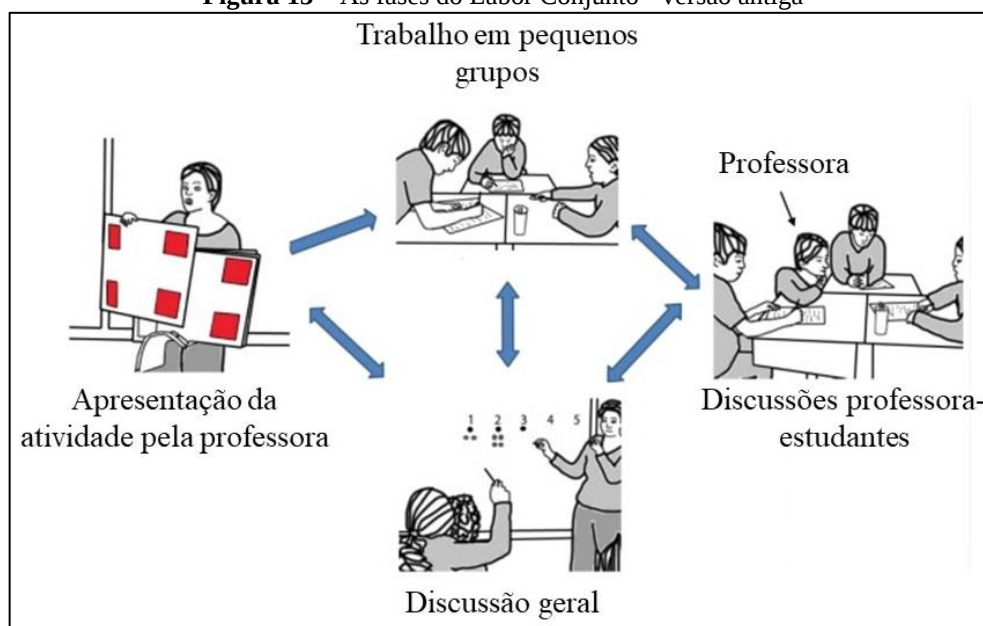
4.3 Metodologia da aplicação da tarefa

Para a aplicação da tarefa tomamos como base as ideias de labor conjunto definidas na Teoria da Objetivação. Recordamos que o conceito que essa teoria toma de atividade faz referência a um “sistema dinâmico orientado para a satisfação das necessidades coletivas”⁴⁰ (RADFORD, 2020, p. 23, tradução nossa), ou seja, a atividade não é vista como uma ação, como um simples fato de estar fazendo algo, mas como uma relação dialética entre produzir meios que satisfaçam as necessidades humanas e ao mesmo tempo se produzir como ser humano.

⁴⁰ Texto original: Sistema dinámico orientado a la satisfacción de las necesidades colectivas.

Existem, como exposto na Figura 4, diversas fases para a construção do *labor conjunto*, nome que recebe a atividade na TO (RADFORD, 2020), mas quando o Estudo 1 foi realizado só tínhamos conhecimentos de quatro delas (Figura 13): apresentação da atividade pela professora; trabalho em pequenos grupos; discussões professora-estudantes; discussão geral.

Figura 13 – As fases do Labor Conjunto - versão antiga



Fonte: Radford (2015, p. 556, tradução nossa)

Como explicado no capítulo anterior, os processos de objetivação (referentes ao saber) e de subjetivação (referentes ao ser) ocorrem simultaneamente (Figura 5) na construção do *labor conjunto*. Sendo assim, durante os momentos da atividade sempre deve haver uma preocupação com a construção social do indivíduo, de maneira que os sujeitos envolvidos sempre respeitem a opinião do colega, esperem a vez para falar, não interrompam quem estiver falando, entre outras questões.

Portanto, entendemos que os processos de subjetivação são imprescindíveis para a ocorrência dos processos de objetivação, mas nessa pesquisa não nos debruçaremos a estudar a constante transformação do *ser*, mesmo ela estando presente em todos os momentos da atividade. Nosso foco é estudar as formas de pensamento algébrico que os alunos mobilizam, ou seja, o campo de materialização do *saber* algébrico.

Para a realização dessa atividade os dezenove alunos do NEAC trabalharam em duplas e trios formados por estudantes do mesmo ano escolar. A separação por alunos do mesmo ano é justificada pelo fato de querermos analisar separadamente as respostas dos estudantes, afinal, como mostra os documentos oficiais da educação, cada ano possui competências diferentes em

relação à álgebra. No momento dessa atividade a pesquisadora assumiu o papel de professora da turma, mesmo não fazendo parte do grupo de professores do NEAC. O professor responsável da turma decidiu por não participar e se retirou da sala de aula no momento da atividade.

Os alunos foram separados em oito duplas (uma dupla com alunos do 6º ano; duas duplas com alunos do 7º ano; três duplas com alunos do 8º ano e duas duplas com alunos do 9º ano) e um trio (composto por alunos do 7º ano). Buscando evitar a falta de diálogo entre os participantes, a cada grupo foi entregue uma única folha com a tarefa. No quadro a seguir (Quadro 7) atribuímos nomes fictícios para os estudantes que compõem as turmas, evidenciando a sua idade e o ano escolar.

Quadro 7 – Informações dos estudantes participantes do Estudo 1

Duplas/Trio	Ano	Alunos	Idade (Letra correspondente a inicial do nome)
Dupla A	6º ano	Arthur e Bianca	11 (A); 11(B)
Dupla B	7º ano	Carla e Daniela	13 (C); 12 (D)
Dupla C	7º ano	Eduardo e Flávio	14 (E); 12 (F)
Dupla D	8º ano	Gustavo e Igor	13 (G); 15 (I)
Dupla E	8º ano	João e Lucas	14 (J); 14 (L)
Dupla F	8º ano	Marta e Nara	14 (M); 14 (N)
Dupla G	9º ano	Paula e Otávio	17 (P); 15 (O)
Dupla H	9º ano	Raul e Saulo	15 (R); 15 (S)
Trio A	7º ano	Úrsula, Vanessa e Henrique	13 (U); 14 (V); 12 (H)

Fonte: A autora (2020)

A atividade ocorreu em duas etapas: a primeira, que teve duração de 1h, os estudantes se organizaram em pequenos grupos, foi entregue a folha com a tarefa de generalização de padrões e eles resolveram os problemas em conjunto. Inicialmente foi realizada a explicação de cada problema pela professora e quando as dúvidas eram pertinentes a alguns grupos ela foi explanada para toda a turma. Após essa primeira etapa os alunos tiveram um intervalo de 20 minutos e voltamos com uma conversa que se caracterizou como a etapa final.

Esse último momento foi realizado com todos os estudantes juntos, formando assim um grande grupo com os dezenove sujeitos. Inicialmente ocorreu a exposição do problema no quadro e os alunos, alocados em um único círculo, expuseram suas ideias e dúvidas. Durante o intervalo de 20 minutos foram recolhidas as folhas de respostas dos estudantes com o intuito de evitar adulteração, sendo devolvidas no início do segundo momento para eles acompanharem as explicações e recolhidas novamente no final de toda atividade para as análises serem realizadas.

4.4 Coleta e metodologia de análise dos dados

Para a identificação das formas de pensamento algébrico que os alunos conseguiram mobilizar no decorrer dessa atividade foi necessária a gravação das distintas fases do labor conjunto, exceto do momento da discussão geral, pois se aproximou mais da metodologia tradicional do ensino, fugindo do objetivo da TO, e com isso não será abordado nesse estudo.

Para a gravação desses momentos possuíamos três equipamentos: uma câmera digital e dois smartphones. Devido a isso foi inviável a gravação do momento “trabalho em pequenos grupos” de todas as duplas e trio, sendo possível apenas a filmagem de três duplas: Dupla A – 6º ano (Arthur e Bianca), Dupla G – 9º ano (Paula e Otávio) e Dupla H – 9º ano (Raul e Saulo).

Com a Dupla A e H não ocorreu o momento de interação entre professor e estudantes, sucedido apenas com a dupla G. Como não foi possível filmar todos os grupos optamos por realizar as análises apenas com as duplas que possuíamos as gravações.

Como dados dessa pesquisa temos as gravações das fases do labor conjunto e as respostas escritas dos alunos na folha da tarefa, mas como essa investigação possui uma abordagem qualitativa nos importa não apenas a resposta final do estudante, mas todo o processo de resolução dos problemas.

Partindo do princípio de que o pensamento algébrico possui uma natureza multimodal utilizamos como base para análise dos dados a metodologia de análise multimodal (ou multisemiótica). Essa metodologia busca considerar e relacionar os “recursos cognitivos, físicos e perceptíveis que os estudantes utilizam quando trabalham com ideias matemáticas”⁴¹ (VERGEL, 2016, p. 26, tradução nossa).

O próximo capítulo será voltado para a análise desse primeiro estudo, em que buscamos descrever e interpretar os dados obtidos a partir das respostas escritas e das gravações das três duplas, e com isso identificar se eles mobilizaram alguma forma de pensamento algébrico, quais são essas formas e como eles materializaram esse saber algébrico.

⁴¹ Texto original: recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes utilizan cuando trabajan con ideas matemáticas.

5 ANÁLISE DO ESTUDO 1

A partir da aplicação da atividade já descrita buscamos identificar a forma de pensamento algébrico que os participantes conseguiram mobilizar ao trabalharem com uma tarefa de generalização de padrões. Com base na Teoria da Objetivação (RADFORD, 2017b) a materialização do saber algébrico é algo particular, singular, que surge no projeto didático estabelecido, mas não podemos determinar previamente se irá ou não acontecer.

A não materialização do pensamento algébrico ocorreu com duas das três duplas que foram filmadas durante a coleta de dados, especificamente as duplas A e H. Devido a isso vamos apresentar de forma breve suas respostas conjuntamente, lembrando que não houve nenhuma mobilização de pensamento algébrico, mas existem indícios de generalizações aritméticas. Em seguida apresentaremos as respostas da dupla G, que conseguiu mobilizar duas das três formas de pensamento algébrico.

Para chegarmos na identificação do pensar algebricamente mobilizado pelos alunos buscamos identificar as estratégias recorridas para responder os problemas, os meios semióticos emergidos e a presença dos três elementos caracterizadores dessa forma de pensar em suas respostas – indeterminação, denotação da indeterminação e analiticidade (RADFORD, 2006. 2010b).

5.1 Análise da Dupla A e da Dupla H

A Dupla A, composta pelos alunos Arthur e Bianca do 6º ano, e a Dupla H, pelos alunos Raul e Saulo do 9º ano, iniciaram a atividade utilizando estratégias semelhantes para responderem os problemas *a* e *b* da tarefa de generalização de padrões. Analisando o áudio da Dupla A observamos que o aluno Arthur se baseia em uma estratégia de aumentar de dois em dois a quantidade de círculos, tratando esses aumentos como saltos, afirmando que é necessário saber quantos círculos *pula* de uma figura para outra. A dupla começa a resolução dos problemas com uma explicação de Arthur sobre o que eles devem fazer para chegar ao número de círculos das figuras 4 e 5, como podemos observar a transcrição do áudio:

Arthur: aqui, figura 1 (gesto apontando para a figura 1), quantos círculos terá a figura 4? Ele quer saber quantos círculos terá na figura 4, quer saber quantos círculos ele pula ô. (Neste momento o aluno faz alguns gestos com a caneta no papel e complementa). 1, 2, 3, aí ele pula mais dois. Se aqui tem quatro e cinco (aponta para a figura 3) a figura 4 será... vai pular mais dois em cada fileira. Quatro em cima,

cinco embaixo (novamente referente à figura 3). Aí vai pular mais um, ou seja, a figura quatro terá cinco dessas bolinhas (apontando para a linha superior) e seis (apontando para a linha inferior). Aí você vai fazer a mesma coisa na cinco (problema b), mais um em cima, mais um embaixo.

Por meio da atividade perceptiva o aluno Arthur notou que a quantidade de círculos aumenta em uma unidade na linha superior e em uma unidade na linha inferior. Mas essa característica não se transforma em hipótese, ou seja, apenas com a utilização dela o estudante não consegue deduzir uma fórmula algébrica (RADFORD, 2013a).

A Figura 14 mostra que além da fala Arthur realiza alguns gestos na busca de explicar o seu raciocínio para responder os problemas *a* e *b*. Esses gestos correspondem a um dos meios semióticos que o estudante emerge para objetivar seu pensamento, eles ajudam o aluno a tornar aparente suas ideias e intenções que tem como propósito responder os questionamentos dos problemas (RADOFRD, 2003).

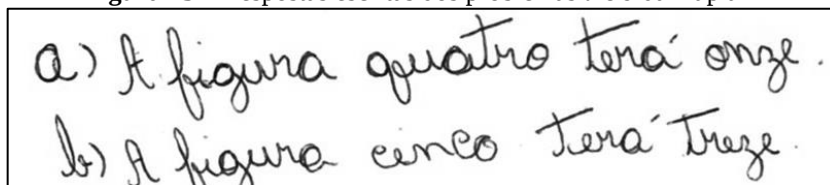
O primeiro gesto equivale ao aumento de um círculo na linha superior e o segundo ao aumento de um círculo na linha inferior. Mesmo não mobilizando o pensamento algébrico, esses gestos estão atuando como dêiticos espaciais – pois possuem a função de indicar algo em um determinado espaço, nesse caso o espaço é referente às linhas superior e inferior da figura.

Figura 14 – Gestos realizados pelo aluno Arthur para a explicação dos problemas *a* e *b*



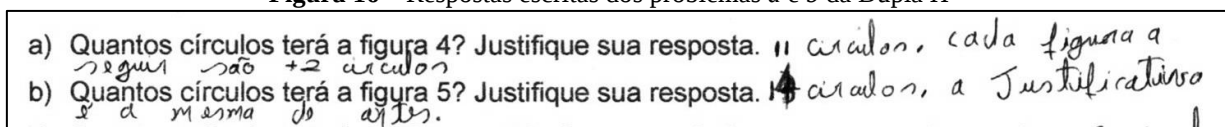
Fonte: Print screen do momento da atividade

A resposta escrita da Dupla A aos dois primeiros problemas (Figura 15) está correta numericamente, mas com base nas análises das gravações concluímos que esses números foram obtidos por meio de uma generalização aritmética (RADFORD, 2013a), cuja característica comum foi ‘somar de dois em dois a quantidade de círculos’.

Figura 15 – Respostas escritas dos problemas *a* e *b* da Dupla A

Fonte: Dados da pesquisa

A mesma estratégia foi adotada pela Dupla H. Com a análise do vídeo notamos que diante dos questionamentos iniciais a dupla não interagiu muito, ficando subentendido que ambos concordaram com as respostas encontradas. Um dos pontos que diferenciou uma dupla da outra foi o fato de os alunos do 9º ano terem justificado sua estratégia por meio de uma resposta escrita, como é apresentado na Figura 16. Essa justificativa é correspondente a “cada figura a seguir são mais dois círculos”.

Figura 16 – Respostas escritas dos problemas *a* e *b* da Dupla H

Fonte: Dados da pesquisa

A resposta da Dupla H ao problema *b* apresenta um erro, eles afirmam que a quantidade de círculos da figura 5 será 14, mas a resposta correta, com base na estratégia que eles estão utilizando, é 13. Essa observação é importante pois os alunos tomam esse valor como referência para responder os problemas *c*, *d* e *e*.

Com a análise das gravações do momento da atividade observamos que os estudantes estabeleceram uma relação entre a quantidade de círculos da figura 5 e a quantidade de círculos da figura 10. Eles seguiram uma lógica de que como 10 é 5 multiplicado por 2 a quantidade de círculos da figura 10 será 14 multiplicado por 2, ou seja, 28. Essas afirmações podem ser observadas no extrato da fala dos estudantes descrita a seguir.

Saulo: agora, quantos círculos terá a figura 10? (leitura do problema *c*). Se cinco tem cinco, acho que dez vezes cinco.

Raul: dez vez cinco?

Saulo: é um negócio assim.

Raul: tem certeza? A figura cinco tem quanto, tem quatorze né?

Saulo: uhum, 14. Se a (apontando para o desenho da figura 1 no papel) tem cinco.

Raul: uhum.

Saulo: a figura 10 é $14 + 14$?

Raul: 28?

Saulo: então, 28.

A estratégia de somar a quantidade de círculos de dois em dois foi totalmente abandonada para responder o problema *c*, resposta essa que não apresenta indícios de que os estudantes tenham recorrido a determinações sensíveis observadas na sequência figural, pois a ideia de multiplicar o número de círculos pelo mesmo fator que se multiplica o número da figura não ocorre em outros momentos, como por exemplo entre a figura 1 e 2, ou entre a figura 2 e 4.

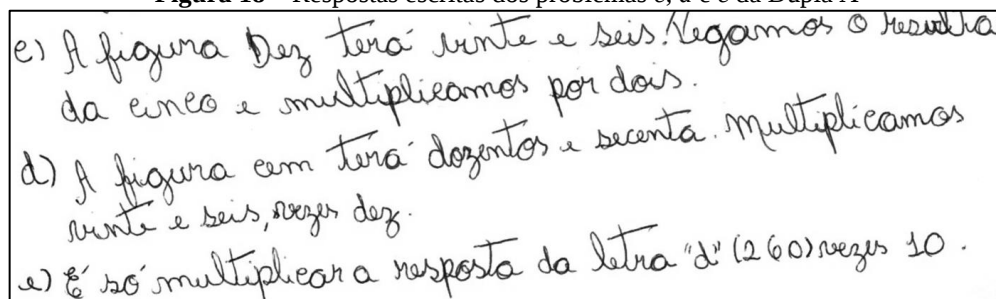
Os alunos também utilizaram essa estratégia para responder erroneamente os problemas *d* e *e* (Figura 17). No problema *d*, que solicita o número de círculos da figura 100, eles multiplicam 28 por 10 e para o problema *e* eles afirmaram que basta dobrar o valor encontrando no problema *d*. A justificativa dos alunos não está baseada em nada que eles percebem na sequência disposta no início do problema, ou seja, não está baseada em uma análise de diferenças e similaridades que a sequência figural apresenta (RADFORD, 2006, 2010b).

Figura 17 – Respostas escritas dos problemas *c*, *d* e *e* da Dupla H

- c) Quantos círculos terá a figura 10? Como você fez para encontrar esta 28 círculos quantidade? 28 círculos, Dobramos o valor da figura "5".
- d) Quantos círculos terá a figura 100? Explique o que você fez para chegar neste valor. 280 círculos, multiplicamos o valor da figura "10" por 10.
- e) Escreva uma mensagem para um aluno de outra classe indicando como descobrir o número de círculos da figura 200. Se você pegar a resposta da letra d, e novamente dobrar o valor, você vai ter a resposta.

Fonte: Dados da pesquisa

A Figura 18, que apresenta as respostas da dupla A, evidencia que Arthur e Bianca seguiram a mesma estratégia de Raul e Saulo para responder os problemas de *c* a *e*. O que diferencia são os valores encontrados, pois os alunos do 6º ano responderam corretamente o questionamento sobre a quantidade de círculos da figura 10.

Figura 18 – Respostas escritas dos problemas c, d e e da Dupla A


c) A figura dez terá vinte e seis. Pegamos o resultado da c) e multiplicamos por dois.

d) A figura com terá doze e seis. Multiplicamos vinte e seis, vezes dez.

e) É só multiplicar a resposta da letra "d" (260) vezes 10.

Fonte: Dados da pesquisa

Quando estavam resolvendo esses três problemas, os componentes da Dupla A não conversaram entre si para utilizarem essa determinada estratégia. Enquanto nos problemas a e b Arthur explicou para a colega o que ele tinha percebido e pensado, nos problemas c, d e e Bianca responde diretamente, sem nenhuma conversa prévia com o companheiro de dupla. Esses momentos também fazem parte da atividade e corresponde ao que a TO denomina de ética comunitária (RADFORD, 2020). Não houve, por parte dos estudantes, uma preocupação com o outro, com a questão se o outro estava entendendo o que estava sendo realizado, isso é, não existiu um cuidado com o outro. Radford (2020) explica que isso é reflexo de um ensino em que os alunos não estão acostumados a compartilhar suas experiências, assim como também eles não são colocados em uma posição de se preocupar com a aprendizagem dos que estão ao seu redor.

A dupla dos alunos do 6º ano não consegue chegar à resposta do problema g, eles afirmam não saberem o que é uma fórmula e dizem não entender o que n representa. Esse argumento está em concordância com os documentos oficiais da educação (BNCC (2018) e Currículo de Pernambuco para o Ensino Fundamental (2019)), que abordam que o simbolismo alfanumérico deve começar a ser trabalhado no campo da álgebra a partir do 7º ano. Em relação a esse problema a transcrição da fala dos alunos Saulo e Raul, dupla H, aponta que eles não entendem que n faz referência a um número qualquer da figura e a partir disso eles começaram a assumir números específicos para esse símbolo, como o 1 e o 5.

Raul: o número de figura n .

Saulo: n é 1.

Raul: é o que?

Saulo: n é referente a 5.

Raul: isso é contigo (Raul entrega a folha da tarefa a Saulo).

Saulo: deixa eu pensar em um negócio aqui.

Após esse primeiro debate Saulo escreve no papel $\frac{n}{5}$ e afirma:

Saulo: dá para montar uma regra de três.

Raul: cálculo é com você.

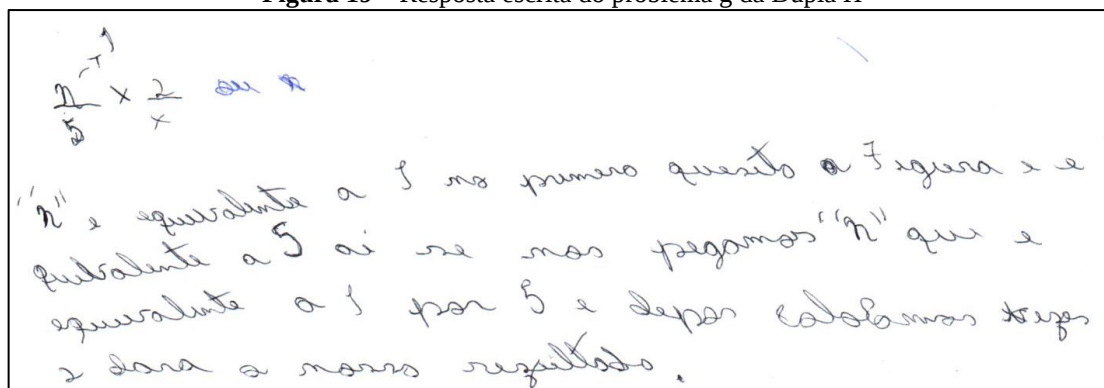
Saulo: eu acho que vai assim

Raul: assim?

Saulo: é... cinco por dois 10.

Saulo tenta utilizar uma regra de três para responder o problema e chega à: $\frac{n}{5} \times \frac{2}{x}$, explicando que: “n é equivalente a 1 no primeiro quesito a figura e é equivalente a 5 aí se nós pegamos “n” que é equivalente a 1 por 5 e depois colocamos vezes 2 dará o nosso resultado” (Figura 19).

Figura 19 – Resposta escrita do problema g da Dupla H



Fonte: Dados da pesquisa.

A expressão encontrada pelos estudantes não responde corretamente a solicitação do problema g. Ela não passa por um processo de generalização para ser deduzida, assim como não fica evidente qual foi a característica comum utilizada para chegar a esse resultado. Isso demonstra que utilizar o simbolismo alfanumérico não determina se o aluno está pensando algebricamente ou não, o que determina é todo o processo que ele percorreu para chegar a uma fórmula juntamente com a presença dos três elementos caracterizadores (indeterminação, denotação e analiticidade).

Os alunos até então analisados não conseguiram mobilizar nenhuma das formas de pensamento algébrico que estamos considerando na nossa base teórica, mas emergiram diversos meios semióticos para apresentar suas estratégias. Ambas as duplas não tiveram o momento de

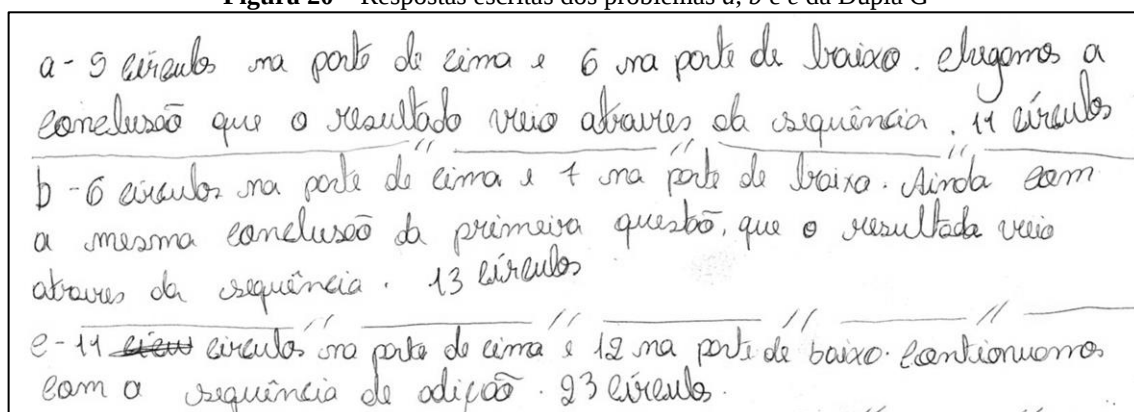
discussão professora-estudantes, que corresponde a uma das fases do labor conjunto (RADFORD, 2020). Esse momento poderia ter sido importante para os estudantes identificarem seus erros e buscarem sair de uma generalização aritmética e mobilizarem alguma forma de pensamento algébrico, pois a professora poderia fazer diversos questionamentos a eles e, com isso, os ajudar a aprimorar e aprofundar suas ideias por meio de um trabalho conjunto.

Diferentemente da Dupla A e da Dupla H, a Dupla G conseguiu mobilizar duas formas do pensamento algébrico que perpassa por toda a estrutura da generalização, composta por determinações sensíveis, características comuns e abdução analítica (RADFORD, 2013a). A indeterminação, denotação e analiticidade também estão presentes nas respostas dos estudantes (RADFORD, 2009, 2010a).

5.2 Análise da Dupla G

Para responder aos problemas de a a c , que questiona a quantidade de círculos da figura 4, 5 e 10 respectivamente, os estudantes da dupla G também recorreram a uma generalização aritmética. Apenas as respostas escritas desses alunos (Figura 20) poderiam nos induzir a concluir que eles tivessem mobilizado alguma forma de pensar algebricamente, pois o modo que eles justificaram suas ideias se assemelha bastante com a estratégia de relacionar o número da figura com o número de círculos da linha superior e inferior, o que poderia levar à presença dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico (RADFORD, 2006, 2010b).

Figura 20 – Respostas escritas dos problemas a , b e c da Dupla G



Fonte: Dados da pesquisa

Porém, com a análise da descrição do áudio e das gravações dos momentos da atividade, se observa que eles notaram, por meio da atividade perceptiva, uma característica comum que pode ser traduzida como: ‘em cada linha da figura se adiciona um círculo em relação à linha da

figura anterior.’ Essa característica os leva a uma estratégia equivalente a somar de dois em dois a quantidade de círculos, isso é, os leva a uma generalização aritmética (RADFORD, 2013a).

Otávio: se aqui tem dois (aponta com a caneta para a linha superior da figura 1).

Paula: esse aqui tem três (apontando para linha superior da figura 2), aí quatro (apontando para linha superior da figura 3), aí na sequência seria cinco...

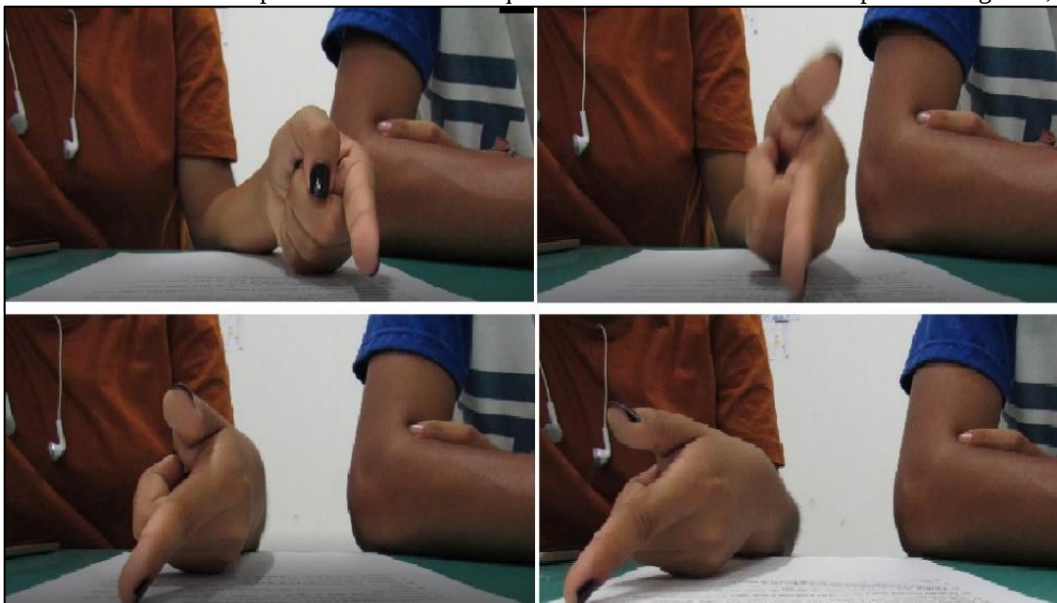
Otávio: aí no caso seria cinco (aponta para cima), seis (aponta para baixo). Como é que a gente vai justificar?

Paula: que pela sequência dos círculos de cima, dependendo dos círculos, é 2, 3, 4, 5 (movimentos que indicam a quantidade de círculos da linha superior da figura 1, 2, 3 e 4), daí seguindo a sequência será 5 depois dele, na quarta figura.

Otávio: através da sequência dá o valor que se pede na questão.

Juntamente com a percepção e com a fala os alunos materializaram seu pensamento ainda no campo aritmético, fazendo emergir alguns gestos (Figura 21). Essa ação linguística-perceptiva-gestual é denominada de nó semiótico, afinal distintos signos de diferentes sistemas semióticos se complementam para a apresentação das ideias dos estudantes (RADFORD, 2013a; VERGEL, 2016).

Figura 21 – Gestos realizados por Paula indicando a quantidade de círculos da linha superior da figura 1, 2, 3 e 4



Fonte: Print screen do momento da atividade

Após esse momento de resposta dos três primeiros problemas, Otávio e Paula começam a buscar soluções para o problema *d*. Inicialmente eles percebem que com a estratégia que eles estão utilizando demoraria muito para chegar à quantidade de círculos da figura 100. Mas ao mesmo tempo que eles notam que esse não é o melhor caminho para solucionar o atual problema, eles tampouco retomam as observações das figuras já dispostas na sequência figural, isso é, eles não retomam a um trabalho no campo fenomenológico de observações das determinações sensíveis. No entanto, eles buscam se apoiarem em algum conteúdo matemático já estudado para tentar encontrar o que foi solicitado. Essa conclusão foi realizada a partir da fala dos estudantes, cuja transcrição pode ser observada a seguir.

Paula: quantos círculos terá a figura 100? (leitura do problema d)

Otávio: não seria 100 mais 10, eu acho. O resultado de 10 deu 11 e 12, então o de 100 é 100 vezes 10, daria 1000.

Paula: acho que não.

Otávio: porque tipo, se continuar nessa sequência, fazer tipo um cálculo a gente vai se perder (referindo-se a contar o número de círculos figura por figura). Que aqui está pedindo a de 100. Entendesse? Então... tem que continuar com a sequência.

Paula: mas tem que achar a quantidade de círculos.

Otávio: a gente usaria o que?

Paula: poderia ver...

Otávio: no caso a gente faria como?

Paula: poderia fazer, esqueci o nome, quando bota o número elevado.

Otávio: elevar ao quadrado?

Paula: a potência.

Otávio: eu acho que não.

Os alunos recorreram a multiplicações e cogitaram utilizar potenciação para resolverem o problema, mas eles perceberam que nenhum desses caminhos os levaria à resposta correta. Nesse momento os estudantes não estão realizando uma observação das características da sequência figural que possam ajudá-los a deduzir uma fórmula, mas sim buscam algum método matemático já estudado para tentar encaixar como resposta.

Diante de diversas dúvidas eles resolveram se dirigir à professora. Por meio do trabalho conjunto, na etapa de discussão professora-estudantes, Otávio e Paula expuseram o que eles já tinham realizado nos problemas anteriores, sempre dividindo a figura em linha superior e linha inferior. Com base nisso, a professora os questionou se não havia uma relação entre a

quantidade de círculos em cada linha e o número da figura. Essa pergunta dava margem para diversas respostas, inclusive de que não existia relação, porém Otávio apresenta por meio de números particulares qual é a relação por eles encontrada, como é mostrado na descrição da fala do estudante.

Otávio: tem, a sequência, aaa. A sequência 3: 4 e 5. Ai na figura 4: 5 e 6. Ai na figura 10: 11 e 12. No 100... me perdi. Mas no caso se é sequência no 100 seria o que, 101 e 102. Conforme a sequência (gestos “suspensos no ar”).

Professora: e o total?

Paula: 203.

Uma das maneiras que podemos traduzir a estratégia dos alunos é: o número de círculos de uma determinada figura será a soma do sucessor do número da figura com o sucessor do sucessor.

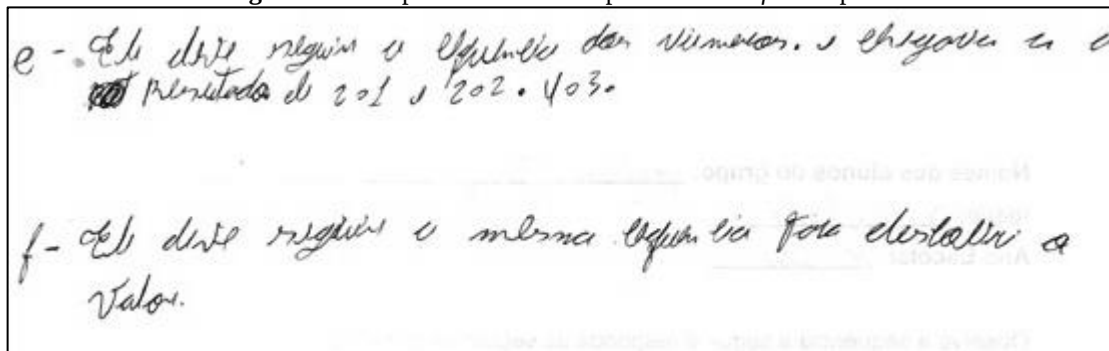
A fórmula deduzida pelos estudantes não designa a indeterminação como ‘número da figura’, sendo a denotação da variável realizada implicitamente por meio de números particulares, e com isso o trabalho com o desconhecido é realizado no momento que eles somam $100 + 1$, $101 + 1$ e totalizam 203. Além disso, os alunos perpassaram pelas etapas de generalização algébrica (RADFORD, 2013a), iniciando esse processo por meio de uma observação das figuras já dadas e conhecidas, como a figura 3 e figura 4, e a partir disso eles conseguem estabelecer uma relação nessas figuras que se transforma em princípio assumido, podendo ser utilizado para encontrar o número de círculos de figuras não conhecidas, como é o caso da figura 100.

Os meios semióticos de objetivação que emergiram nessa etapa do labor conjunto foram a percepção, a linguagem oral e os gestos dos estudantes, o que constitui, novamente, um nó semiótico. Esses elementos, assim como o uso de números particulares para denotar e trabalhar com o indeterminado, nos levam a concluir que os alunos mobilizaram, até o momento, o pensamento algébrico factual (RADFORD, 2009, 2010a).

Com base nas respostas escritas dos estudantes e nas discussões realizadas entre eles para resolverem o problema *e*, que solicita aos alunos escrever uma mensagem indicando como encontrar o número de círculos da figura 200, fica evidente a dificuldade que Paula e Otávio têm em descrever sua estratégia, assim como sair de uma denotação da indeterminação com números particulares para uma denotação de forma explícita. Na Figura 22 apresentamos as

respostas dos alunos aos problemas *e* e *f*, e suas justificativas que sempre consistem em ‘seguir a sequência de números’.

Figura 22 – Respostas escritas dos problemas *e* e *f* da Dupla G.



Fonte: Dados da pesquisa.

A conversa dos alunos referente ao problema *f* também evidencia que eles não conseguem apresentar em linguagem natural sua estratégia para responderem os problemas com números específicos, assim como não conseguem adentrar no campo em que a indeterminação é trabalhada explicitamente.

Otávio: no caso como seria, como é que a gente faz?

Paula: seria quase a mesma resposta da letra *e*.

Otávio: no caso ele deveria seguir a sequência de números? Coloco?

Paula: sim.

No momento de responderem o problema *g*, que solicita uma fórmula para o número de círculos da figura *n*, os alunos também apresentaram muitas dificuldades que podem ser reflexo do que ocorreu anteriormente, isso é, o fato de que os estudantes apresentaram a variável de maneira ainda muito fraca e a passagem para a figura geral, o que corresponde a uma forte generalização, ainda não foi executada. Diante a isso, retomamos a etapa de discussão professora-estudantes a partir da estratégia que eles utilizaram no problema *d*.

Professora: vamos lá, como vocês fizeram no problema *d*?

Otávio: a gente acrescentou mais um.

Professora: acrescentou mais um ao que?

Otávio: ao número da figura.

Professora: com esse mais um vocês encontraram o que?

Otávio: a gente encontrou o resultado de círculos da figura 100.

Professora: só com mais um vocês acharam isso, ou fizeram mais outra coisa?

Otávio: só isso.

Professora: foi? E esse 102 aqui, vocês acharam como?

Otávio: tipo, na parte de cima a gente fez mais um, no caso ficou 101, e na parte de baixo a gente fez mais um, que ficou 102.

Professora: mais um ou mais dois?

Paula: mais dois.

A pergunta ‘acrescentou mais um ao que?’ fez emergir a indeterminação de forma explícita, que foi apresentada por meio de uma linguagem natural e denotada pelo conjunto de palavras ‘número da figura’. A presença da analiticidade é mais perceptível no momento que Otávio questiona a professora em relação ao simbolismo alfanumérico, como mostra a descrição da sua fala.

Otávio: sei lá, seria tipo, n mais um n mais dois n . Porque o valor que ela desse da figura, seria no caso, a figura mais um, a figura mais dois.

Professora: como eu escrevo isso com n , sendo n uma figura qualquer?

Otávio: falar é mais fácil que escrever... no caso seria, $n + 1$, $n + 2$.

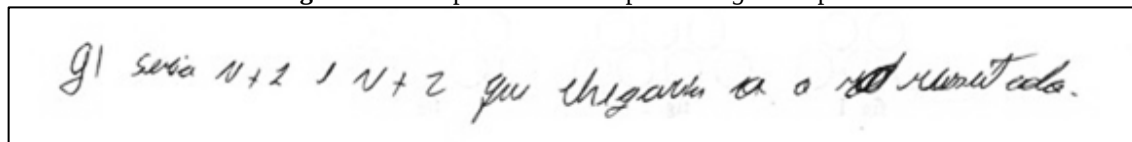
Agora a indeterminação é denotada pela palavra ‘figura’ e a partir da característica comum, estabelecida e tomada como premissa, eles conseguiram trabalhar com o desconhecido como se o conhecesse (RADFORD, 2009, 2010a; VERGEL, 2019), quando Otávio afirma ‘a figura mais um, a figura mais dois’.

Além dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico, a fórmula deduzida por esses estudantes é uma descrição espacial da figura (VERGEL, 2015b), pois pode ser traduzida como: a linha superior sempre tem um número a mais do que o número da figura, e a linha inferior tem dois números a mais. Portanto, a análise multimodal dos dados dos estudantes nos leva a concluir que eles mobilizaram o pensamento algébrico contextual (RADFORD, 2009, 2010a).

Mesmo com a utilização do simbolismo alfanumérico a quebra com a espacialidade não ocorre, afinal a maneira que eles descreveram a fórmula com esse signo, tanto em uma linguagem oral como em uma linguagem escrita (Figura 23), indica que eles ainda não se desprenderam da geometria da figura. Na fórmula, que é apresentada como ‘ $n+1$ e $n+2$ ’, o

conectivo “e” não foi utilizado arbitrariamente, mas, sim, possuiu a função de mostrar a separação que o aluno faz da figura, destacando o que ocorre em cada uma das linhas.

Figura 23 – Resposta escrita do problema *g* da Dupla G



Fonte: Dados da pesquisa

Quando questionados se era possível escrever a fórmula de maneira mais reduzida os estudantes afirmaram que não, o que mostra que não ocorreu a quebra com a espacialidade da figura, isso é, o significado espacial do desconhecido não foi superado (RADFORD, 2011b). Portanto, o simbolismo alfanumérico utilizado pelos estudantes está operando como índice e não como símbolo, como ocorre no pensamento algébrico simbólico (RADFORD, 2009, 2010a).

Mesmo Paula não participando tão ativamente das respostas, ficando mais com Otávio essa responsabilidade, ele sempre se preocupava em perguntar se a companheira de dupla estava compreendendo todo o processo. Em alguns momentos o aluno sempre retomava as explicações para a colega, até que ele realmente percebesse que ela havia compreendido. Esses instantes demonstram as questões éticas dentro de uma atividade, em que os alunos tiveram responsabilidade, compromisso e cuidado com o outro (RADFORD, 2020).

Com a finalização da análise das duplas A, G e H evidenciamos que apenas uma delas mobilizou duas formas de pensamento algébrico, factual e contextual, porém os alunos Otávio e Paula não chegaram à forma mais sofisticada desse pensamento – o pensamento algébrico simbólico, mesmo que, de acordo com a BNCC (2018), eles já deveriam ter tido um forte contato com essas representações simbólicas. As outras duas duplas, que não tiveram o momento de discussão professora-estudantes, recorreram a estratégias aritméticas. Talvez essa etapa da atividade poderia ter ajudado os alunos a mobilizarem o pensamento algébrico, pois algumas perguntas poderiam levá-los a tornar presente os elementos caracterizadores desse pensamento, como foi realizado com a dupla G.

Diante das respostas das três duplas mostramos a natureza multimodal do pensamento (RADFORD, 2013b, 2018), e que a materialização do saber algébrico ocorre por meio dos diferentes meios semióticos de objetivação, como por exemplo gestos, atividade perceptiva e linguagem natural (oral e escrita). Com isso, destacamos que o pensamento algébrico, como

mobilizou a Dupla G, vai muito além de letras para indicar valores, ele emerge por meio de um processo de generalização que inclui diversas etapas.

Buscamos no Estudo 2 dessa pesquisa aumentar o quantitativo de alunos participantes, oportunizando o momento de discussão professor-estudantes. Seguiremos com o objetivo de identificar as formas de pensamento algébrico (RADFORD, 2009, 2010a) que eles mobilizam ao resolverem uma tarefa de generalização de padrões e para isso identificaremos as estratégias por eles utilizadas, os meios semióticos de objetivação que emergem durante a atividade e a presença dos três elementos caracterizadores do pensamento algébrico.

6 METODOLOGIA DO ESTUDO 2

Visando aumentar o quantitativo de sujeitos dessa pesquisa, decidimos por realizar um segundo estudo com mais estudantes, sendo denominado de Estudo 2. A ideia principal era realizar as fases do labor conjunto em quatro momentos, sendo cada um deles composto por 10 alunos do mesmo ano escolar, formando assim quatro grupos: um do 6º ano, um do 7º ano, um do 8º ano e um do 9º ano. Esses alunos trabalhariam em duplas, totalizando cinco duplas por grupo. Esse segundo estudo utilizaria ideias semelhantes ao primeiro, sendo filmado de duas a três duplas por ano escolar.

Devido a pandemia do novo coronavírus (SARS-CoV-2), que se iniciou no primeiro semestre de 2020, foi estabelecido, por meio do decreto estadual de número 48.810 de 16.03.2020, o fechamento de escolas e universidades do estado de Pernambuco. A previsão da reabertura das escolas era final de outubro de 2020, porém seria uma reabertura gradual: começando pelo 3º ano do Ensino Médio até os primeiros anos da educação infantil. Mesmo com esse plano de retomada seria inviável realizar esse segundo estudo semelhante ao primeiro, pois os alunos não poderiam trabalhar lado a lado, afinal era necessário evitar aproximação entre as pessoas para não correr o risco de propagação do vírus. Diante desse cenário decidimos por realizar diversas modificações na estrutura do Estudo 2.

A primeira modificação está relacionada com a realização da pesquisa tomando como base as fases do labor conjunto, mas evitando qualquer tipo de aglomeração. Uma das opções era realizar virtualmente a atividade por meio de vídeo chamadas, porém muitos dados seriam perdidos: não teríamos como filmar os alunos integralmente resolvendo os problemas e com isso não seria possível realizar uma análise completa da forma de pensamento algébrico que eles conseguissem mobilizar; também poderíamos ter problemas com falhas do sinal da internet.

Pensando nesses possíveis empecilhos decidimos por realizar a pesquisa presencialmente nos meses de agosto e setembro de 2020. Como as escolas ainda estavam fechadas a coleta de dados ocorreu na casa dos estudantes ou na casa da pesquisadora, buscando sempre tomar todas as medidas necessárias para evitar a contaminação pelo novo coronavírus (utilização de máscara, álcool em gel e distanciamento social).

Não modificamos os anos escolares dos sujeitos da pesquisa, continuando com alunos do 6º ano ao 9º ano do ensino fundamental, mas pontuo que tivemos dificuldades para encontrar estudantes que aceitassem participar da coleta de dados. Essas dificuldades estão relacionadas

ao medo que os responsáveis dos alunos possuíam em relação à contaminação pelo novo coronavírus, evitando que os filhos tivessem contato com pessoas desconhecidas.

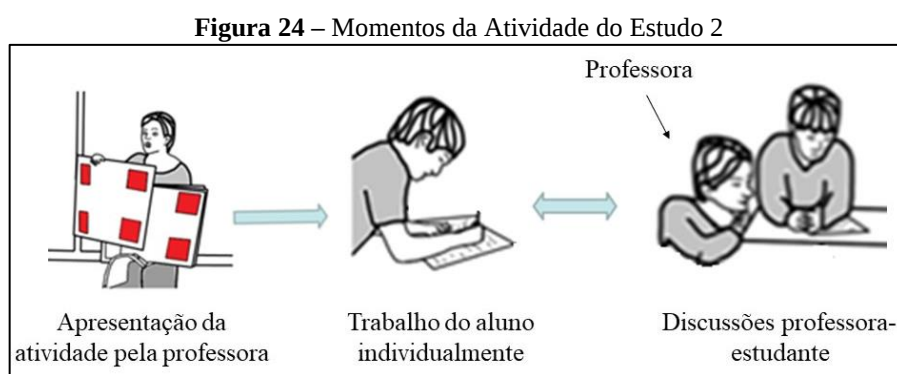
Para encontrar estudantes que aceitassem participar da pesquisa utilizamos dois métodos de busca: contato com amigos próximos à pesquisadora que conhecessem alunos matriculados em algum ano final do ensino fundamental e a divulgação da pesquisa em grupos de WhatsApp composto por pais ou responsáveis de estudantes provenientes de diversas escolas. Totalizamos esse estudo com 11 alunos: 4 alunos do 6º ano; 3 alunos do 7º ano; 3 alunos do 8º ano e 1 aluno do 9º ano.

Buscamos tomar como base as fases de labor conjunto da TO e como os alunos não poderiam resolver os problemas em duplas a pesquisadora atuou como professora no momento da atividade, tentando sempre trabalhar conjuntamente com o estudante, um trabalho ombro a ombro como denomina a TO (RADFORD, 2020). A atividade desse segundo estudo se dividiu em três momentos (Figura 24) e em todos eles a pesquisadora sempre estava presente ao lado do estudante.

1º momento: entrega da folha da tarefa ao aluno, realização da leitura da tarefa e explicação da atividade para o estudante.

2º momento: o aluno iniciou a resolução dos problemas individualmente

3º momento: voltado para as discussões professora-estudante.



Fonte: Adaptado de Radford (2020)

Podemos observar na figura anterior que a seta que interliga o segundo e o terceiro momento é bidirecional, pois muitas vezes os alunos retiravam suas dúvidas e voltavam para a resolução individual do problema. Frequentemente esses dois momentos foram transformados em um único, em que os alunos mostravam suas ideias, dialogavam sobre suas dúvidas e respondiam o problema, transformando-o em um trabalho conjunto. Quando era notável que o aluno estava com dificuldade, mas, por algum motivo, não queria tirar suas dúvidas algumas

perguntas eram feitas a eles, como por exemplo: “está com alguma dificuldade?”; “como você pensou para encontrar esses resultados?”; “explique-me como você resolveu esse problema.”.

Pensando no contexto pandêmico que todos viveram em 2020, realizamos algumas pequenas mudanças na escrita dos problemas. Mantivemos a sequência figural do Estudo 1 (Figura 12) e realizamos modificações no problema *e* e *f*, modificando a frase “aluno de outra classe” para “um outro estudante”. Essa modificação se deve ao fato de que no momento de realização desse segundo estudo não estávamos trabalhando em turmas dentro da escola, por isso não seria viável falar de alunos de outra classe.

Para atingir o nosso objetivo de identificar as formas de pensamento algébrico que os alunos mobilizam ao resolver uma tarefa de generalização de padrões, todos os momentos da atividade foram gravados (áudio e vídeo). Buscando evitar qualquer perda de dados nas gravações foram utilizados dois equipamentos: uma câmera digital, que ficou localizada estaticamente na frente do aluno, e um smartphone localizado em um tripé diagonal ao estudante que poderia ser descolado dependendo dos movimentos que o aluno fizesse. É importante ressaltar que na atividade apenas a pesquisadora e o sujeito da pesquisa estavam presentes, logo a pesquisadora também foi responsável pela gravação de toda as fases da atividade.

Equivalentemente ao Estudo 1, a base de dados para a análise das formas de pensamento algébrico mobilizados pelos alunos foram as gravações dos momentos da atividade e a folha de resposta, recolhida quando o estudante finalizou suas respostas aos problemas. Na análise buscaremos descrever, interpretar e categorizar os dados, o que caracteriza a abordagem da pesquisa como qualitativa (LUDKE, ANDRÉ, 1986), e utilizaremos a metodologia de análise multimodal (ou multisemiótica) para a análise dos dados, que gira em torno da análise refinada das gravações, dando atenção aos gestos, percepção, linguagens e outros meios semióticos que os alunos utilizam para tornar aparente suas ideias (RADFORD, 2018).

Como os alunos participantes da pesquisa eram provenientes de diversas instituições de ensino, decidimos, após a resolução de toda a tarefa, realizar uma conversa informal com o estudante. Nessa conversa buscamos reunir algumas informações sobre o aluno, com o intuito de saber um pouco mais sobre a relação dos sujeitos da pesquisa com a escola e principalmente com a matemática. Para isso foram realizadas as seguintes perguntas: Onde você estuda? Onde você já estudou? Já reprovou algum ano escolar? Quais são as disciplinas que você tem mais afinidade? E a que tem mais dificuldade? Como é sua relação com a matemática? Você gosta de estudar essa disciplina?

Com base nessas perguntas conseguimos reunir algumas características dos 11 estudantes que podem ser encontradas no Quadro 8. Para expô-las usaremos nomes fictícios para cada aluno.

Quadro 8 – Informações dos estudantes participantes do Estudo 2

Nome do Aluno	Idade	Ano Escolar	Características
Luiza	11 anos	6° ano	A aluna cursa o 6° ano em uma escola particular e sempre frequentou esse tipo de instituição de ensino. Nunca reprovou nenhum ano escolar, tem afinidade com as disciplinas de história, geografia e português e ela afirmou que não gosta de estudar matemática, mas sempre tira notas boas nessa disciplina.
Gabriela	12 anos	6° ano	Essa estudante está cursando o 6° ano pela segunda vez, mas ela não reprovou o ano escolar. Estudando sempre em escolas particulares, a aluna quando finalizou pela primeira vez o 6° ano realizou provas para entrar em determinadas instituições públicas de ensino e ao ser aprovada ela decidiu retomar ao 6° ano para ingressar em uma dessas instituições. Desde o 2° ano do ensino fundamental a estudante frequenta cursos específicos de português e matemática e por isso ela afirmou não possuir dificuldade com essas disciplinas.
Pedro	12 anos	6° ano	O aluno cursa o 6° ano em uma escola pública, mas desde a educação infantil até o 5° ano do ensino fundamental ele estudou em instituições particulares de ensino. Ele nunca reprovou, afirmou gostar de estudar matemática e não ter dificuldade com essa disciplina.
Tiago	13 anos	6° ano	Esse aluno cursou até o 7° ano do ensino fundamental em uma escola particular, mas em 2019 ele foi aprovado em um concurso para estudar em uma escola de ensino público. Para ingressar nessa instituição ele precisou retomar ao 6° ano do ensino fundamental. O aluno afirmou não ter dificuldades em matemática, que sempre tira boas notas mesmo sem se dedicar muito ao estudo. História é a disciplina que ele tem mais dificuldade.
Beatriz	12 anos	7° ano	A aluna estudou até o 5° ano em uma escola particular e a partir do 6° ano começou seus estudos em uma escola pública. Ela nunca reprovou o ano escolar, gosta de estudar matemática, mas tem dificuldades nos assuntos de geometria.
Alice	12 anos	7° ano	A aluna iniciou seus estudos em escolas públicas no 5° ano do ensino fundamental, mas da educação infantil até o 4° ano estudou em diversas escolas particulares. Nunca reprovou de ano, ela afirmou ter maior facilidade com a matéria de ciências e algumas dificuldades em matemática.

Isabela	12 anos	7º ano	Estudante de escola particular desde o ensino infantil e nunca reprovou nenhum ano escolar. Não tem muita afinidade com a matemática e apontou possuir diversas dificuldades nessa disciplina.
Juliana	13 anos	8º ano	Estuda desde o 6º ano no mesmo colégio público, gosta de estudar matemática e música, nunca reprovou de ano.
Laura	13 anos	8º ano	A aluna cursou a educação infantil e o 1º ano em uma escola particular, do 2º ao 6º ano em escolas públicas e o 7º e 8º ano em um colégio particular. Nunca reprovou nenhum ano escolar, gosta de estudar matemática, mas está apresentando muitas dificuldades em aprender os conteúdos matemáticos por meio do ensino remoto.
Sofia	14 anos	8º ano	Estudante de escola particular desde a educação infantil e nunca reprovou. A aula afirmou não gostar muito de matemática e a disciplina que tem mais facilidade é ciências.
Danilo	12 anos	9º ano	Esse estudante possui altas habilidades (superdotado) e por isso ele não cursou o 2º ano do ensino fundamental. É estudante de uma escola particular e afirmou não possuir dificuldades com nenhuma disciplina. Matemática, física, biologia e inglês são as matérias que ele tem mais afinidade, e não gosta muito de história, geografia e português.

Fonte: A autora (2020)

Como pontuado no Quadro 8 os participantes do Estudo 2 possuíam idades variadas entre 11 e 14 anos. Desses onze alunos cinco conseguiram mobilizar alguma forma de pensamento algébrico (Gabriela, Luiza, Pedro, Juliana e Danilo) e os outros seis (Tiago, Isabela, Beatriz, Alice, Laura e Sofia) ficaram presos a uma generalização aritmética. No próximo capítulo abordaremos brevemente a estratégia utilizada por esses seis alunos e apresentaremos mais detalhadamente as respostas dos cinco estudantes que mobilizaram diferentes formas de pensamento algébrico.

7 ANÁLISE DO ESTUDO 2

Equivalente ao estudo 1, o estudo 2 dessa pesquisa buscou analisar as formas de pensamento mobilizadas por estudantes dos anos finais do ensino fundamental ao responderem uma tarefa de generalização de padrões. Para isso buscamos identificar as estratégias que eles utilizaram, os meios semióticos que emergiram no momento da atividade e a presença dos três elementos caracterizadores do pensamento algébrico nas respostas dos estudantes.

Durante a realização da coleta de dados, seis dos onze alunos (Tiago – 6º ano; Beatriz, Alice, Isabela – 7º ano; Laura, Sofia – 8º ano) não conseguiram pensar algebricamente, mesmo com todo o trabalho conjunto que buscamos realizar. Os estudantes se prenderam apenas à característica ‘somar mais dois à quantidade de círculos da figura anterior’ e ao fato de a quantidade de círculos ser representada por um número ímpar. Apenas essas observações referentes à sequência figural exposta na tarefa não levaram os alunos a uma generalização algébrica.

Sendo assim e para alcançar o objetivo dessa pesquisa, optamos por analisar apenas aqueles que conseguiram transformar uma característica comum em hipótese por meio de um processo de abdução analítica, e com isso deduzir uma fórmula algébrica, mobilizando alguma das três formas de pensamento algébrico definidas pela TO.

Os cinco estudantes que conseguiram pensar algebricamente iniciaram suas respostas percebendo a característica comum ‘somar dois círculos de uma figura para outra’, porém quando se depararam com os problemas *c* e *d*, que questiona o número de círculos das figuras 10 e 100 respectivamente, eles começaram a mudar de estratégia ou aprimorar a característica observada.

Separamos a análise a partir das estratégias utilizadas para resolver algebricamente os problemas que compõem a tarefa. Portanto, as alunas Gabriela (6º ano), Luiza (6º ano) e Juliana (8º ano) foram analisadas separadamente, isso é, uma a uma, e a análise dos alunos Pedro (6º ano) e Danilo (9º ano) está descrita em um único subtópico, pois eles recorreram à mesma estratégia.

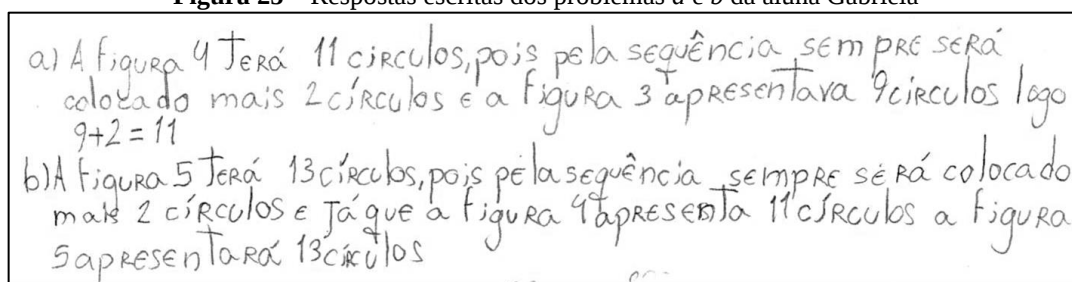
7.1 Análise da aluna Gabriela (6º ano)

Equivalente a todos os outros alunos do Estudo 2 que mobilizaram alguma forma de pensamento algébrico, a aluna Gabriela inicia a resolução de seus problemas tomando como

característica comum o fato de que de uma figura para outra a quantidade de círculos aumenta de dois em dois. O uso dessa característica pode ser observado na fala da estudante quando responde os problemas *a* e *b*, assim como em suas respostas escritas apresentadas na Figura 25.

Gabriela: quantos círculos terá a figura 5? Justifique sua resposta. O motivo é pelo mesmo motivo que a primeira questão (se referindo ao problema *a*), que seria porque a ordem sempre vai adicionando mais dois círculos, e por conta disso como na figura 4 tem onze círculos mais 2 ficaria 13 círculos.

Figura 25 – Respostas escritas dos problemas *a* e *b* da aluna Gabriela



Fonte: Dados da pesquisa

Radford (2013a) defende que apenas a identificação dessa característica indica que a estudante mobiliza o pensamento aritmético, em que o fato de somar de dois em dois a quantidade de círculos leva à criação de um procedimento, mas não à dedução de uma fórmula. Porém em algumas situações enxergar essa característica no campo aritmético ajuda o aluno a entender melhor como a sequência foi construída, chegando a identificar um padrão algébrico (RADFORD, 2003, 2004). Foi esse o caso da aluna Gabriela, ela traduz essa soma repetida como uma multiplicação e esse feito faz aparecer a variável. Para entendermos melhor vamos analisar as respostas aos problemas *c* e *d* dessa estudante, mas antes disso ela trabalha com as figuras já conhecidas, como é apresentado no extrato da sua fala a seguir.

Gabriela: (leitura do problema *c*) quantos círculos terá a figura 10? Como você fez para encontrar essa quantidade? Deixa eu tentar descobrir aqui a ordem logo (nesse momento a aluna olha para as figuras já desenhadas). Ah, agora que eu percebi uma coisa, que eu poderia ter percebido mais cedo, é que está sempre assim: a figura 1 tinha cinco; a figura 2 tinha cinco mais dois, logo sete bolas; a figura 3 tem cinco mais quatro; a figura 4 tinha cinco mais seis; a figura 5 tinha cinco mais oito. Logo é só seguir essa sequência, mas agora deixa eu calcular.

Enquanto fala a aluna Gabriela não realiza gestos, apenas segue com o olhar atento sobre as figuras já desenhadas na folha da tarefa. Em sua resposta observamos que ela consegue

encontrar um padrão nas figuras já conhecidas (as figuras 1, 2 e 3 que foram dadas na tarefa e as figuras 4 e 5, questionadas nos problemas *a* e *b*), isso é, por meio da atividade perceptiva ela notou que não é apenas somar de dois em dois de uma figura para outra, mas sim quantas vezes esse dois será somado a partir da figura 1. Um exemplo é: ‘na figura 5 ela somará 5 mais 8’, esse 8 corresponde à 4 vezes 2, ou seja, cinco mais o número da figura menos 1 multiplicado por dois.

Porém até o momento a aluna ainda não conseguiu mostrar que essa relação entre o número da figura com o número que está multiplicando o 2 foi estabelecida, isso significa que a variável (número da figura) apareceu, mas ela ainda não se encontra evidente na explicação realizada pela estudante. Isso só ocorre quando ela se volta para pensar na construção da sua estratégia para entender como é encontrado o número que sempre está multiplicando o dois, chegando à conclusão de que esse número é equivalente ao número da figura menos um, sendo ele expresso por meio de números particulares, como é possível ver em sua fala que se remete ao argumento realizado antes da resposta ao problema *c*. Para realizar essa explicação a aluna não realiza nenhum gesto, apenas argumenta por meio de uma linguagem oral.

Professora: como você está pensando?

Gabriela: eu fui pensando nessa ordem e eu fui checando de um em um para ver se eu percebia, aí eu percebi que a partir da figura 1 segue a ordem assim, eu já descobri a última resposta, mas é o seguinte: sempre faça assim - você conta a figura 1 como zero, a figura 2 como 1, aí 1 vezes 2 dois mais cinco. Aí a figura 3 menos 1, dois vezes dois, quatro mais cinco, sempre adiciona cinco no final. Aí segue a sequência até chegar no número que você quer.

Agora Gabriela começa a deixar evidente em suas respostas que o número que multiplica o dois é equivalente ao número da figura menos 1, isso pode ser visto quando ela afirma ‘a figura 3 menos 1’. Além disso, o advérbio de tempo *sempre* nos faz concluir que essa relação estabelecida não está restringida apenas a essas figuras que ela se refere (RADFORD, 2018), mas que pode ser utilizada também em outros momentos, como para responder os problemas *c* e *d* da tarefa.

Esses problemas são respondidos por Gabriela por meio de uma linguagem oral e ao mesmo tempo que discursa ela realiza contas dando significado para cada número utilizado (Figura 26). A seguir podemos ver a descrição da fala realizada pela estudante para responder esses dois problemas e as contas que nos referimos.

Professora: e como você faria na figura 10?

Gabriela: a figura 10 seria (ao mesmo tempo que fala ela realiza a conta no papel): 10 menos 1, 9 vezes dois, $18 + 5$, que daria 23 círculos. Aí a partir daí só segue essa ordem para responder as outras perguntas. Por exemplo, na letra *d* (leitura do problema *d*): quantos círculos terá a figura 100? Explique como você fez para chegar nesse valor. Exatamente esse cálculo (a aluna realiza o cálculo no papel e fala ao mesmo tempo): 100 menos 1, que você desconsidera a primeira figura porque a gente considera como zero, 99 vezes dois, você calcula 99 vezes dois que dá 198, mais cinco, que dá 203.

Figura 26 – Respostas escritas dos problemas *c* e *d* da aluna Gabriela

$$\begin{array}{r} 10 \\ - 1 \\ \hline 9 \\ \times 2 \\ \hline 18 \\ + 5 \\ \hline 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 1 \\ \hline 99 \\ \times 2 \\ \hline 198 \\ + 5 \\ \hline 203 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

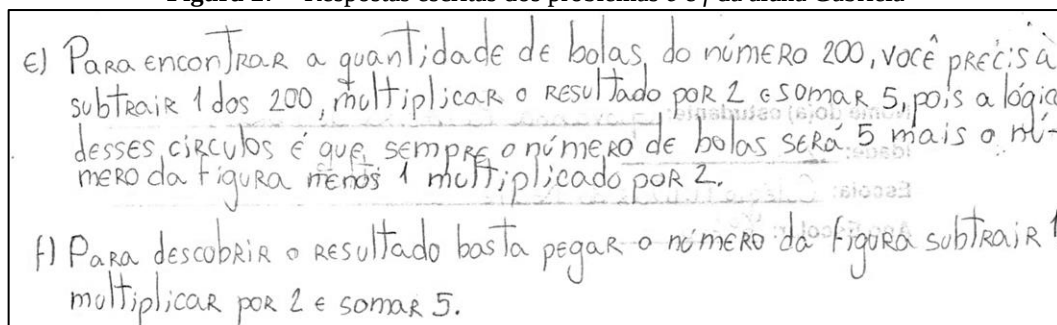
Ainda que ela esteja trabalhando com números específicos a variável começa a ganhar vida em suas respostas, isso é, a indeterminação começa a ser denotada por números particulares e trabalhada por meio de somas e multiplicações (analiticidade), como por exemplo $(3 - 1) \times 2 + 5$, sendo esses os três elementos caracterizadores do pensamento algébrico presentes nas respostas da estudante (RADFORD, 2006, 2010b).

Também destacamos que mesmo que a fórmula de Gabriela esteja presa a números específicos, ela foi encontrada por meio de um processo dedutivo, em que ela tomou como base não só a característica ‘somar de dois em dois’, mas também buscou relacionar o número da figura e o multiplicador do dois, transformando assim essa característica em uma hipótese por meio de uma abdução analítica, ou seja, um princípio assumido que a levou à dedução da fórmula (RADFORD, 2013a).

A presença dos três elementos caracterizadores do pensamento algébrico e o processo de generalização percorrido pela estudante nos mostra que ela mobilizou o pensamento algébrico factual (RADFORD, 2009, 2010a), afinal ela faz uso da linguagem natural (oral e escrita) para apresentar e organizar suas ideias e utiliza números particulares para denotar e trabalhar com o indeterminado.

Para responder o problema *e*, que solicitava uma mensagem para outro estudante indicando como descobrir o número de círculos da figura 200, a aluna Gabriela utiliza a mesma estratégia que ela vem construindo, mas agora ela sai do trabalho com números específicos e o indeterminado começa a ser denotado por meio do conjunto de palavras “número da figura”. Isso é identificado na última frase da resposta escrita a esse problema apresentada na Figura 27.

Figura 27 – Respostas escritas dos problemas *e* e *f* da aluna Gabriela



Fonte: Dados da pesquisa

O pensamento algébrico mobilizado pela estudante nesse momento já é mais sofisticado que o factual, afinal apresentar essa mudança de denotação da indeterminação não é algo simples, pois agora surge um novo objeto no discurso que é a *figural* geral. Portanto, o indeterminado é denotado por “número da figura” e a analiticidade também está presente no momento que a aluna opera com o desconhecido como se o conhecesse, inicialmente subtraindo um, depois multiplicando o resultado por dois e, por fim, somando a cinco. Diante esses fatos podemos afirmar que a estudante mobilizou o pensamento algébrico definido como contextual (RADFORD, 2009, 2010a).

A Figura 27 também apresenta a solução da aluna ao problema *f*, que durante a discussão com a professora ela afirma que ficou mais bem explicada do que o que foi escrito no problema *e*. Destacamos a resposta de Gabriela a esse problema, que corresponde a ‘para descobrir o resultado basta pegar o número da figura subtrair 1, multiplicar por 2 e somar 5’, porque a fórmula inicial utilizando o simbolismo alfanumérico, apresentada no problema *g* (Figura 28), está muito presa a essa afirmação, sendo essa fórmula igual a $[(n - 1) \times 2 + 5]$. Como afirma Radford (2009, 2010), o uso dos parênteses e colchetes não ocorre de forma arbitrária, eles estão muitas vezes conectados com as experiências anteriores do estudante. E é isso que ocorre no caso da aluna Gabriela, o uso dos parênteses na fórmula está relacionado com a vírgula que separa os períodos ‘número da figura subtrair 1’ e ‘multiplicar por 2’.

Figura 28 – Resposta escrita do problema *g* da aluna Gabriela

$$g[(n-1) \times 2] + 5 = (n-1) \times 2 + 5 = [(n \times 2) - (1 \times 2)] + 5 = (n + n - 2 + 5) = n + n + 3$$

Fonte: Dados da pesquisa

Nesse momento a aluna está denotando a indeterminação por meio da letra *n* e operando com o desconhecido como se o conhecesse – a analiticidade. Mas observe que a estudante vai um pouco além, ela consegue superar a relação entre a resposta escrita e a fórmula simbólico alfanumérica, realizando uma sintaxe alfanumérica e finalizando sua resposta ao problema *g* com a fórmula $n + n + 3$. Essa fórmula vai além do que foi escrito nos problemas *e* e *f*, ou seja, a letra *n* começa a atuar como símbolo, e não apenas como índice. Portanto, podemos afirmar que nesse momento a aluna mobiliza o pensamento algébrico mais sofisticado dentre os três definidos na TO, que é o pensamento algébrico simbólico (RADFORD, 2009, 2010a, 2018).

Diante das suas respostas à tarefa de generalização de padrões inferimos que a estudante conseguiu concentrar significado de uma mesma variável em um menor número de sinais, começando com o uso de números particulares, expressos por meio da linguagem natural, e finalizando com o uso de símbolos alfanuméricos, sendo esse processo denominado contração semiótica (RADFORD, 2006, 2007, 2018).

Concluimos a análise multimodal das respostas da aluna Gabriela afirmando que ela mobilizou todas as três formas de pensamento algébrico: factual, contextual e simbólico. Para isso ela partiu de uma estratégia inicial com números específicos, em que não sabia explicar muito bem os valores encontrados, mas por meio da atividade perceptiva, que emergiu como meio semiótico de objetivação, ela conseguiu estabelecer uma hipótese e a denotação da fórmula foi aprimorada com o passar dos problemas, dando destaque à passagem de números específicos para a figura geral, esse último denotado por um conjunto de palavras e posteriormente pela letra *n*.

7.2 Análise da aluna Luiza (6º ano)

A resposta da estudante Luiza ao problema *a* da tarefa (Figura 29) indica que a aluna inicialmente também realizou uma generalização aritmética, em que, por meio da atividade perceptiva, ela nota que a cada figura está sendo adicionado dois círculos. Apenas essa característica observada leva à criação de um procedimento, mas não permite a dedução de uma fórmula (RADFORD, 2013a).

Figura 29 – Resposta escrita do problema *a* da aluna Luiza

9) 11, pois a cada figura esta sendo adicionada dos circulos

Fonte: Dados da pesquisa

No decorrer do diálogo com a estudante observamos que ela tem consciência de que essa ideia primária não a ajudará a encontrar as respostas dos outros problemas dispostos na tarefa. Isso fica em evidência na argumentação oral da aluna quando ela está tentando encontrar uma solução para o problema *b*.

Professora: você pode explicar o que você está pensando?

Luiza: como na letra *d* pergunta quantos círculos terá na figura 100 eu pensei em, ao invés de eu ir somando de dois em dois, que seria mais fácil se não estivesse perguntando um número tão alto, eu... Se eu soubesse quanto seria a cada número, qualquer número aleatório, e quando eu adicionasse dois iria funcionar, então estou tentando pegar um número baixo e tentando isso antes de eu pegar um número alto e não conseguir fazer.

Professora: certo.

Esse extrato da fala da estudante demonstra que mesmo sem ter conhecimento da existência das etapas da estrutura da generalização algébrica em sequência figural (Figura 7) ela está buscando perpassar por todas elas. Isso é perceptível a partir da afirmação “se eu soubesse quanto seria a cada número, qualquer número aleatório”, ou seja, ela busca uma relação que permita levá-la à dedução de uma fórmula capaz de encontrar o número de círculos de qualquer figura, não apenas daquelas determinadas por números específicos.

Após essa breve discussão entre a professora e a estudante, Luiza responde ao problema *b*, mas volta a argumentar que necessita encontrar algo além de somar de dois em dois, esse momento pode ser observado na descrição da fala da aluna.

Professora: então, você consegue perceber alguma outra relação além de aumentar de dois em dois? Porque isso sabemos que acontece, mas será que você consegue encontrar algo além disso? Que possa funcionar para todas?

Luiza: todas são números ímpares?!

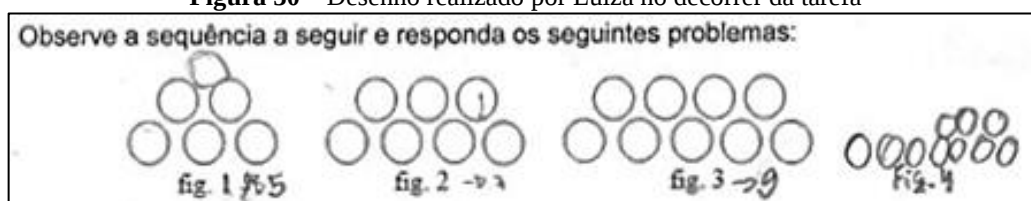
Professora: certo, mas isso vai te levar a encontrar o número da figura 100, por exemplo? Sem muita dificuldade?

Luiza: não.

Professora: será que tem algo a mais? Você já percebeu que aumenta de dois em dois e é ímpar, será que olhando para figura você consegue observar alguma outra relação que sempre funcione?

Ao ser questionada se não existia uma outra relação além de somar de dois em dois ou que a quantidade de círculos sempre é um número ímpar, a estudante buscou desenhar um círculo a mais na figura 1 e depois desenhar a figura 4 (Figura 30), porém rapidamente notou que ambos os desenhos foram feitos aleatoriamente e que isso não a ajudaria a encontrar uma característica comum que levasse à dedução de uma fórmula.

Figura 30 – Desenho realizado por Luiza no decorrer da tarefa



Fonte: Dados da pesquisa

Depois de aproximadamente cinco minutos, a aluna afirma que não consegue notar uma relação que sirva para encontrar o número de círculos de qualquer figura. Com isso, voltamos mais uma vez a dialogar na tentativa de encontrar essa relação que Luiza tem consciência da sua existência, mas não consegue percebê-la.

Luiza: eu não sei.

Professora: vamos lá. A figura 1 por exemplo, tem quantos círculos?

Luiza: cinco círculos.

Professora: e como eles estão dispostos?

Luiza: está em uma ordem.

Professora: qual é a ordem?

Luiza: do maior para o menor.

Professora: e quanto é o menor?

Luiza: o menor é dois.

Professora: dois. E o maior?

Luiza: três.

Quando a professora pergunta à estudante como os círculos estão dispostos ela poderia responder de diversas maneiras, mas a atividade perceptiva, que emerge como meio semiótico de objetivação e corresponde à maneira que a aluna percebe e olha para a sequência (VERGEL,

2015b, 2016), a levou a fazer uma distinção entre a menor quantidade de círculos (fileira superior) e a maior quantidade (fileira inferior). Essa relação percebida na figura 1 foi levada, a partir dos questionamentos realizados pela professora, para as demais figuras e a aluna fez uso dela para resolver o problema *c*, como pode ser observado no diálogo a seguir:

Professora: na figura 10, quem vai ser o menor?

Luiza: vai ser o 11

Professora: e o maior?

Luiza: o 12.

Professora: qual é o total de círculos?

Luiza: vai ser 23.

Professora: por quê?

Luiza: porque vai somar os números.

A característica observada por Luiza pode ser traduzida como: “a primeira fileira é o número da figura mais um e a segunda fileira é o número da figura mais dois”. Essa característica foi percebida em figuras dadas (1, 2, e 3), em figuras conhecidas previamente (figura 4 e 5 dos problemas *a* e *b*) e com isso utilizada para encontrar a quantidade de círculos de figuras maiores, como por exemplo a figura 10. Portanto, a característica comum se transformou em princípio assumido, isso é, se transformou em hipótese e isso levou a aluna a deduzir uma fórmula, sendo essa utilizada para além das figuras dadas, como podemos perceber no extrato da discussão professora-estudante que corresponde à resposta ao problema *d*.

Professora: conseguiu fazer o problema *d*?

Luiza: consegui.

Professora: como você fez?

Luiza: eu fiz usando a mesma lógica dos desenhos e como o número que está pedindo é o 100 então eu somei mais 1 (a aluna aponta com o lápis para cima), que ficaria 101, e eu peguei, como se fosse [inaudível] em baixo coloquei 102, e daí deu 203.

Professora: você pode falar um pouco mais alto, porque eu quase não ouvi o que você falou.

Luiza: como na questão tem pedindo o número 100, eu usei a mesma lógica dos desenhos, peguei o número 100 e somei mais 1, e depois, separadamente, somei mais dois. E depois eu somei esses números que deu, e deu 203.

Professora: certo.

A Figura 31 mostra o gesto que a aluna realiza para se referir ao momento que soma 1 ao número 100. Esse gesto é entendido como um dêitico espacial, que está sendo mobilizado no mesmo momento que a aluna afirma “então eu somei 1”, indicando assim que essa soma é referente ao que ocorre na fileira superior da figura.

Figura 31 – Gesto realizado pela aluna Luiza para explicação do problema *d*



Fonte: Print screen do momento da atividade

Até a resposta ao problema *d* a estudante Luiza mobilizou alguns meios semióticos de objetivação, sendo eles: a atividade perceptiva, as palavras (por meio da fala e da escrita) e os gestos. A indeterminação está implícita no discurso da estudante, sendo denotada por números específicos, como o número 10 e o número 100. A analiticidade também está presente a partir do momento em que ela opera com essa indeterminação, por exemplo quando ela realiza a soma $11 + 12$ e $101 + 102$, deduzindo que a quantidade total de círculos será a soma da quantidade de círculos de ambas as fileiras, ou seja, a soma de dois subtotaís.

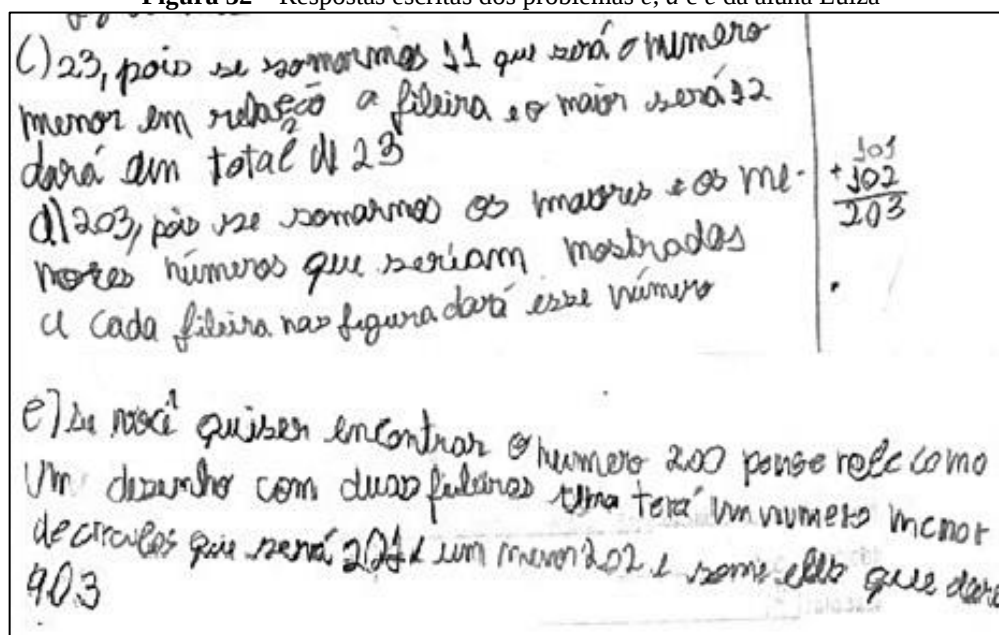
Diante de todos esses elementos, como os meios semióticos utilizados e o trabalho com a indeterminação de maneira implícita realizado por meio de ações concretas e números particulares, é possível afirmar que a estudante Luiza mobilizou o pensamento algébrico factual (RADFORD, 2009, 2010a). Esse pensamento materializado pela aluna nos apresentou indícios de estar preso à descrição da figura, como ela deve ser imaginada ou desenhada – isso é perceptível a partir do momento em que ela realiza gestos sinalizando as fileiras superiores e

inferiores juntamente com a afirmação ‘menor’ e ‘maior’. Essa espacialidade é comumente encontrada no pensamento algébrico contextual, porém não podemos afirmar aqui que a aluna está mobilizando essa forma de pensamento, afinal no pensamento contextual a indeterminação já é trabalhada explicitamente (VERGEL, 2015b), o que até o momento a estudante não conseguiu realizar.

Esse fato nos leva a pensar que a mobilização das formas de pensamento algébrico é um processo contínuo, em que é possível encontrar indícios de uma forma de pensamento mais avançada enquanto está sendo mobilizada uma menos sofisticada. No caso da estudante Luiza podemos afirmar que o pensamento factual já começa a se posicionar para avançar ao pensamento contextual.

A Figura 32 apresenta como a aluna transcreveu todas essas ideias percebidas, faladas e gesticuladas para a folha de respostas da tarefa de generalização de padrões.

Figura 32 – Respostas escritas dos problemas c, d e e da aluna Luiza



Fonte: Dados da pesquisa

Em relação ao problema f a aluna consegue quebrar com a descrição espacial da figura e afirma que o número total de círculo é o dobro da figura mais três. No extrato apresentado a seguir é possível observar que a estudante entende que a resposta vai além da espacialidade figural.

Luiza: eu vou fazer a letra g agora.

Professora: ok, mas como você fez a f?

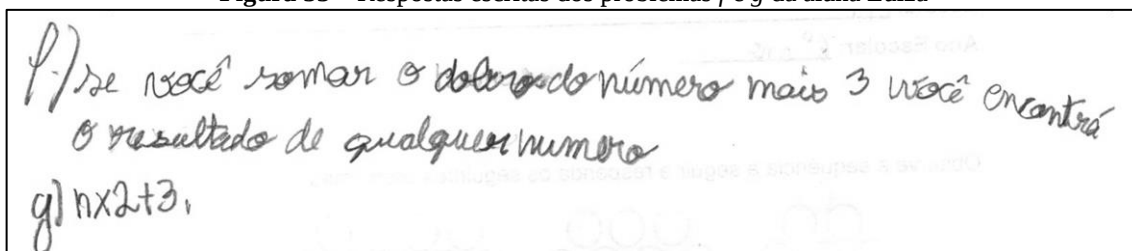
Luiza: a letra *f* está pedindo para escrever uma mensagem para outro estudante indicando como descobrir o número de círculos de qualquer figura. Então eu pedi para botarem o dobro, tipo, o dobro da figura 100 deu 200, e somar mais três. Então o resultado de qualquer número vai ser o dobro mais três.

Professora: o dobro mais três? Certo. Você percebeu isso como?

Luiza: quando você pediu para eu ver as relações dos números e depois que eu percebi, eu entendi que ela não está pedindo para você ver o número de fileiras, ou qualquer coisa assim, ela está pedindo para você multiplicar por dois ou somar o mesmo número e depois adicionar mais três.

Quando Luiza fala “o resultado de qualquer número” entendemos que ela defende que sua estratégia funcionará para qualquer número da figura, denotando assim uma fórmula algébrica que passou por todas as etapas do processo de generalização (RADFORD, 2013a). Juntamente com a resposta escrita da aluna (Figura 33) identificamos que a indeterminação se tornou explícita, sendo agora denotada por meio da palavra “número”. A operação com o indeterminado, ou seja, a analiticidade, é apresentada quando a aluna multiplica esse número por dois, ou soma o mesmo número, e depois adiciona mais três. Esses elementos evidenciam que Luiza conseguiu mobilizar o pensamento algébrico contextual, isso é, agora ela não utiliza mais números específicos, mas sim palavras ou frases chaves que tornam aparentes suas intenções e a ajudam a realizar suas ações, emergindo como meio semiótico de objetivação (RADFORD, 2003).

Figura 33 – Respostas escritas dos problemas *f* e *g* da aluna Luiza



Fonte: Dados da pesquisa

Para responder o problema *g* (Figura 33) a aluna realiza uma contração semiótica (RADFORD, 2006, 2007) entre distintos sistemas semióticos. Ela agora denota a indeterminação não mais por meio da palavra ‘número’, mas sim utilizando a letra *n*, ou seja, ela concentrou o significado da indeterminação em poucos sinais. Para utilizar esse simbolismo alfanumérico a estudante não apresentou dificuldades, entendendo facilmente que a letra *n* correspondia a qualquer número da figura e afirmando que essa fórmula funcionaria para qualquer valor de *n*.

Além de utilizar esse simbolismo alfanumérico, nesse caso a letra n , Luiza também consegue operar com o desconhecido como se o conhecesse a partir da hipótese já estabelecida desde o pensamento algébrico factual. Esse trabalho com a indeterminação corresponde ao elemento caracterizador analiticidade (RADFORD, 2006, 2010b), além dele os outros dois (indeterminação e denotação) também estão presentes na resposta da estudante. A dedução da fórmula $n \times 2 + 3$ foi realizada a partir de uma característica comum, percebida ainda no decorrer do trabalho com números particulares, e seguindo todas as etapas do processo de generalização. Isso nos leva a concluir que a estudante chegou ao ápice do pensamento algébrico, isso é, ela mobilizou o pensamento algébrico simbólico (RADFORD, 2009, 2010a).

Mesmo cursando o 6º ano pela primeira vez a aluna Luiza não demonstrou dificuldades em utilizar e trabalhar com a simbologia alfanumérica. Destacamos esse fato pois a BNCC (2018) indica que essa linguagem só deve ser apresentada aos estudantes quando eles estiverem no 7º ano e o PCPE (2012) defende que ela apareça nos 6º e 7º anos, mas que sua manipulação só ocorra nos dois últimos anos da etapa final do ensino fundamental. Portanto, o trabalho de Luiza com essa simbologia nos mostra indícios de que no campo da álgebra ela pode estar mais avançada do que os documentos oficiais da educação propõem para o seu ano escolar, ou que a sequência dos problemas trabalhados lhe deu oportunidades para construir significado para a linguagem algébrica alfanumérica abordada na tarefa.

Diante dessas evidências, concluímos que a aluna perpassou por todas as formas de pensamento algébrico definidas por Radford (2009, 2010a): pensamento algébrico factual, contextual e simbólico. Destacamos a evolução da estudante nessa tarefa, que foi iniciada com muitas dificuldades, mas depois que ela percebeu a relação entre o número da figura e o número de círculos em cada fileira ela conseguiu concluir rapidamente. Para isso foi necessário um trabalho entre a professora e a estudante (RADFORD, 2020), em que a professora buscou entender as estratégias da aluna, questionar suas ideias e ouvir todas suas dúvidas, proporcionando a evolução de Luiza nas respostas dos problemas.

Também é importante ressaltar que no decorrer das respostas de Luiza conseguimos identificar como os três elementos caracterizadores do pensamento algébrico (indeterminação, analiticidade e denotação) estão presentes em cada uma das três formas de pensar algebricamente que ela materializou. Além disso, também pudemos observar como os meios semióticos de objetivação, como por exemplo os gestos, ajudaram a organizar as ideias e as estratégias, levando-a a perpassar por cada uma das distintas formas de pensamento algébrico.

7.3 Análise dos alunos Pedro (6º ano) e Danilo (9º ano)

Como explicado anteriormente, a análise desses alunos é realizada conjuntamente pois mesmo cursando anos escolares distintos eles utilizaram a mesma estratégia para responder os problemas que compõem a tarefa de generalização de padrões. Essa estratégia, que será apresentada no decorrer da análise das respostas de Pedro e Danilo, possui algumas similaridades com a que foi utilizada pela aluna Gabriela.

Destacamos que com o aluno Pedro os momentos descritos na metodologia foram realizados concomitantemente, de maneira que quando a professora realizou a leitura do primeiro problema ele já o respondeu, sem esperar a leitura de todos eles para começar a resolvê-los. Já o aluno Danilo aguardou a leitura, mas só mostrou sua solução depois que perpassou por todos os problemas, portanto o 3º momento, que corresponde à discussão professora-estudante, ocorreu no final da atividade. Além disso, os dois alunos escreveram muito pouco na folha da tarefa, preferindo dar mais importância para as respostas apresentadas por meio de uma linguagem oral e dos gestos.

Para resolver os dois primeiros problemas os alunos recorrem a uma característica que os levaram a um pensamento aritmético (RADFORD, 2013a), sendo ela apresentada por meio da fala de Pedro e da resposta escrita de Danilo (Figura 34). Essa característica corresponde à ‘a cada figura aumenta-se dois círculos’.

Pedro: a figura 4 ela terá 11 círculos.

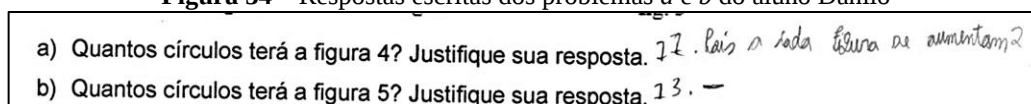
Professora: por que?

Pedro: porque a cada figura (aponta para a figura 1, 2 e 3) aumenta dois círculos.

Professora: certo, vamos para as próximas. Quantos círculos terá a figura 5? Pede para justificar também.

Pedro: a figura ela terá 13.

Figura 34 – Respostas escritas dos problemas a e b do aluno Danilo



Fonte: Dados da Pesquisa

Ao se depararem com o problema c, que questiona o número de círculos da figura 10, ambos os estudantes percebem algo além da característica utilizada para responder os primeiros problemas, isso é, por meio da atividade perceptiva, que consiste na forma que esses alunos

olham para a figura (VERGEL, 2015b, 2016), eles conseguiram agregar mais uma informação à característica ‘somar de dois em dois’.

É nesse momento que a estratégia deles se assemelha com a da aluna Gabriela. Pedro e Danilo se referem a uma figura 0 composta por três círculos. A partir dela eles percebem que a quantidade de círculos que aumenta em cada figura é equivalente a dois vezes o número da figura. Relembramos que na solução de Gabriela ela tomou como figura 0 a figura 1, e com isso o fator multiplicador do 2 era equivalente ao número da figura menos 1. Portanto, assim como a estudante os alunos aqui discutidos perceberam algo além da característica de somar de dois em dois, que foi a relação entre a quantidade de vezes que esse dois é somado e o número da figura, tomando uma figura 0 com três círculos como referência inicial.

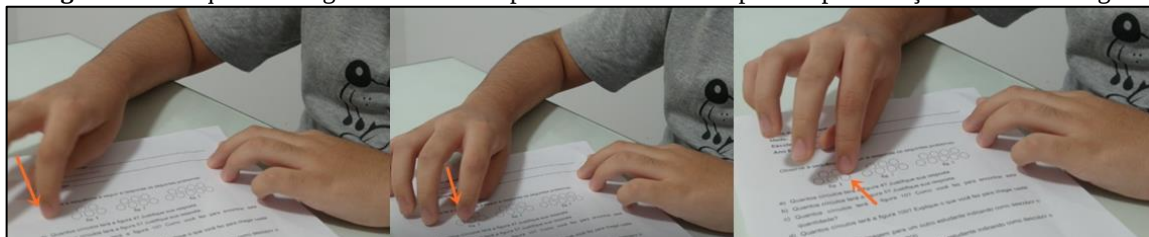
Primeiramente vamos analisar como essa estratégia surgiu nas respostas do aluno Pedro, sendo ela evidenciada por meio da linguagem oral e dos gestos. Para se referir à figura 0 ele aponta, como pode ser observado na sequência de imagens apresentada na Figura 35, para uma parte em branco ao lado da figura 1, e afirma que ela tem três círculos. E assim ele segue com os gestos, mostrando como esses três círculos estão dispostos na figura 1 e depois aponta para os outros dois círculos que se somam ao três. A seguir apresentamos a fala que acompanha os gestos do estudante.

Pedro: eu contei como se tivesse só três (nesse momento ele faz gestos sobre a figura 1) e tivesse mais dois, aí eu contei como se cada um aumentasse dois. Aí eu fiz 10 vezes dois que dá 20 mais os três da figura 1, 23.

Professora: como é? Me explica novamente por favor.

Pedro: aqui na figura 1, eu vi que cada figura aumenta 2, então eu contei como se tivesse uma figura 0 (gesto sobre a parte em branco no papel) fosse três, três bolinhas (indicando as três bolinhas na figura 1), aí na figura aumenta dois (gestos indicando o local que está posicionado essas duas bolinhas na figura 1), ou seja, um vezes dois, aqui (aponta para a figura 2) fosse as três mais quatro, dois vezes dois quatro, e aqui fosse aquelas três mais seis, três (aponta para o número da figura 3) vezes dois dá seis. Aí eu contei dois vezes 10 dá 20, mais três (aponta para a figura imaginária 0).

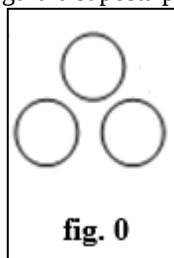
Figura 35 – Sequência de gestos realizados pelo estudante Pedro para a apresentação da sua estratégia



Fonte: Print screen do momento da atividade

A Figura 36 mostra o desenho equivalente ao que seria essa figura 0 suposta por Pedro. Ela, assim como os gestos, emerge como meio semiótico de objetivação (RADFORD, 2003), pois faz tornar aparente e ajuda a organizar as ideias do aluno com o intuito de chegar ao objetivo que é solicitado no problema c. Destacamos que esses gestos realizados pelo estudante emergem como *dêiticos espaciais*, pois possuem a função de indicar algo em um determinado espaço. A estratégia utilizada por Pedro se assemelha com a de uma estudante analisada na pesquisa de Vergel (2015b), em que esses três círculos ela tratou com uma *torre*, e para descobrir a quantidade de círculos de uma figura ela somava o número da figura duas vezes e posteriormente a torre de três círculos que compunha todas as figuras. Essa estratégia foi exposta na nossa fundamentação teórica e poder ser revista mediante a Figura 10.

Figura 36 – Figura 0 suposta pelo aluno Pedro

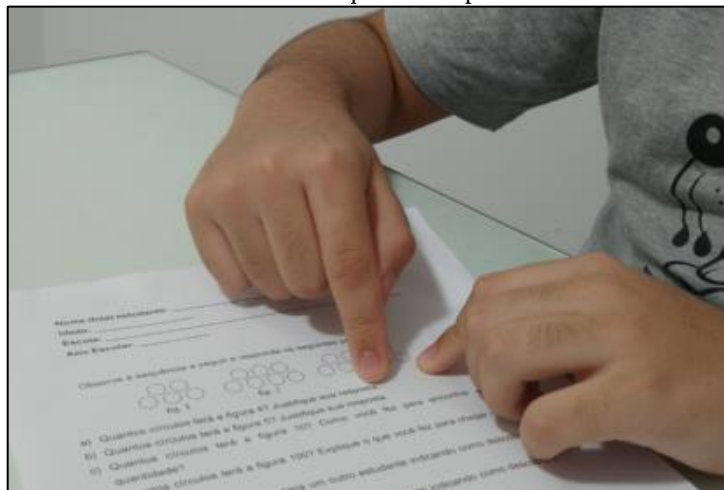


Fonte: Dados da pesquisa

Na resposta oral do aluno percebemos que ele encontra um determinado padrão, que é “três mais duas vezes o número da figura”. Inicialmente o aluno denota a variável por meio de número específicos, dos gestos e da fala, quando, por exemplo, afirma: ‘aquelas três mais seis, três (aponta para o número da figura) vezes dois dá seis’. A Figura 37 indica o gesto realizado pelo estudante ao fazer essa afirmação, o que demonstra que o número que multiplica o dois é equivalente ao número da figura 3. Sendo assim, o indeterminado se faz presente na estratégia utilizada, mesmo que de uma maneira implícita – sendo denotado por números particulares e ações concretas (RADFORD, 2018). A analiticidade, que se refere ao caráter operatório do indeterminado, também está presente quando o aluno realiza somas e multiplicações com a

variável que corresponde ao número da figura, mostrando assim que os três elementos caracterizadores do pensamento algébrico (RADFORD, 2006, 2009, 2010a, 2018) estão presentes e interrelacionados na resposta do estudante.

Figura 37 – Gesto do aluno Pedro indicando que o multiplicador de dois é o número da figura 3



Fonte: Print screen do momento da atividade

Além dessas características a resposta de Pedro indica que ele chegou a uma fórmula algébrica por meio de um processo dedutivo, afinal ele foi além da característica ‘somar de dois em dois’, percebendo que tendo a figura 0 como ponto inicial a quantidade de conjuntos de dois círculos que aumentavam em cada figura era equivalente ao número da figura. Com isso a característica comum se torna hipótese (RADFORD, 2013a), passando a ser um princípio assumido que o aluno utiliza para a dedução de sua fórmula.

Essa fórmula está muito presa aos números específicos e diversos signos, de diferentes sistemas semióticos, emergem para que o saber algébrico seja materializado. Diante dessas observações podemos afirmar que esse aluno está mobilizando o pensamento algébrico factual (RADFORD, 2009, 2010a).

Na resposta ao problema *d*, que questiona o número de círculos da figura 100, o aluno surge com um novo elemento – a figura geral. Isso significa que Pedro vai deixando de lado os gestos e os números particulares e começa a denotar a indeterminação por meio do conjunto de palavras “número da figura”, como podemos ver no extrato de sua fala apresentando a seguir.

Professora: certo, vamos continuar. Quantos círculos terá a figura 100? Explique o que você fez para chegar neste valor.

Pedro: 203.

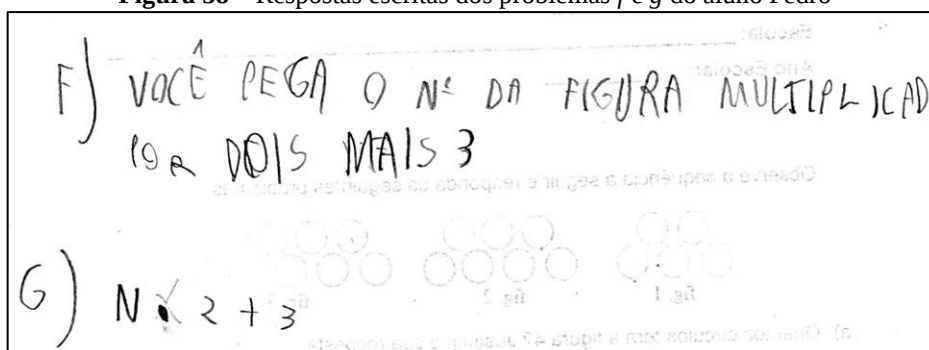
Professora: como você fez?

Pedro: foi o mesmo raciocínio, eu fiz assim: eu multipliquei o número da figura por dois e adicionei três, porque tem três bolinhas e sempre aumenta dois.

Esse novo elemento, a figura geral, indica uma passagem muito importante no pensamento algébrico do estudante, algo que não é simples, é considerada uma generalização muito forte, pois os alunos saem de números específicos para trabalharem como uma figura qualquer. Dessa maneira, como a indeterminação começa a ser denotada de uma maneira explícita, mas ainda não de uma forma simbólico alfanumérica, o pensamento algébrico mobilizado pelo estudante passa a ser o contextual (RADFORD, 2009, 2010a).

A Figura 38 apresenta a resposta de Pedro aos problemas *f* e *g*. Nesse último o aluno faz uso do simbolismo alfanumérico, isso é, nessa sua nova fórmula a indeterminação passa a ser denotada pela letra *n* e o trabalho com o indeterminado se mantém, como é visto desde o pensamento factual. Indicamos que para chegar à fórmula descrita no problema *f* e com simbolismo alfanumérico no problema *g* o estudante segue utilizando a mesma característica, transformada em hipótese, que foi generalizada no pensamento factual. Portanto, destacamos a contração semiótica (RADFORD, 2007, 2018) que o aluno realiza na denotação da indeterminação, passando de números específicos e ações concretas, para ‘número da figura’ e por fim para a letra *n*. O uso do simbolismo dessa maneira indica que o aluno chegou ao ápice do pensamento algébrico (RADFORD, 2009, 2010a), ou seja, ele conseguiu mobilizar o pensamento algébrico simbólico.

Figura 38 – Respostas escritas dos problemas *f* e *g* do aluno Pedro



Fonte: Dados da Pesquisa

Assim como a aluna Luiza, o estudante Pedro também está cursando o 6º ano pela primeira vez, e com base nos documentos oficiais da educação (BNCC (2018) e PCPE (2012)) o simbolismo alfanumérico não é indicado ser manipulado no 6º ano do ensino fundamental.

Porém ambos os alunos conseguiram construir significado para essa simbologia e a utilizaram sem apresentar muitas dificuldades.

Após escrever uma fórmula muito semelhante (Figura 39) o aluno Danilo inicia sua explicação, por meio da linguagem oral e dos gestos, de qual foi o caminho percorrido por ele para chegar à dedução dessa fórmula. Como essa explicação só é realizada no final da resolução dos problemas se tornou difícil dizer o momento exato que o aluno mobilizou as três formas de pensamento algébrico, o que temos são indícios da materialização de cada uma delas.

Danilo: é porque em cada figura aumentam duas bolinhas, então para descobrir a figura 4 basta colocar a figura 3 mais dois que dá a figura 4, aí quatro mais dois que daria a cinco. Só que aí a figura 10, ao invés de ficar somando eu tentei criar uma fórmula, que seria 3, que seria a quantidade de bolinhas iniciais da figura 0.

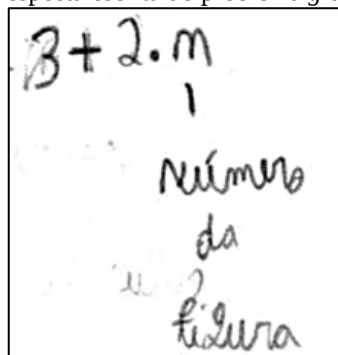
Professora: como assim?

Danilo: três seria meio que a figura inicial, se eu comesse com cinco iria dar o dobro, então eu escolhi 3, como se a figura (aponta para a figura 1) fosse a segunda e a 0 fosse a primeira realmente.

Professora: entendi.

Danilo: aí ficaria 3 mais dois vezes o número de ordem da figura.

Figura 39 – Resposta escrita do problema *g* do aluno Danilo



$$3 + 2.m$$

Número
da
figura

Fonte: Dados da Pesquisa

A ideia do aluno Danilo para responder os problemas de *c* a *f* é a mesma utilizada por Pedro. Na Figura 40 podemos visualizar os gestos realizados por esse estudante sobre a figura 1, esses gestos também emergem como *dêiticos espaciais*, pois indicam o que seria a figura 0 que é tomada como referência para o desenvolvimento da estratégia.

Figura 40 – Sequência de gestos realizados pelo estudante Danilo para a apresentação da figura 0



Fonte: Print screen do momento da atividade

Na descrição da fala do estudante fica evidente que ele conseguiu deduzir uma fórmula, sendo ela expressa pela frase ‘três mais dois vezes o número de ordem da figura’. Nesse momento a indeterminação está sendo denotada pelo conjunto de palavras ‘número de ordem da figura’, e está sendo trabalhada por meio das somas e multiplicações realizadas pelo estudante. Esses elementos nos levam a afirmar que o aluno mobilizou o pensamento algébrico contextual (RADFORD, 2009, 2010a).

Por meio da fala descrita a seguir Danilo evidencia como chegou ao multiplicador do número dois, isso é, como conseguiu chegar à variável.

Professora: certo, pode continuar.

Danilo: é duas vezes o número de ordem, porque assim no primeiro aumentariam dois, três mais dois da cinco. No segundo (a segunda figura) três mais, que seria o primeiro (figura 0), como são duas figuras aumentaria dois duas vezes, então seria duas vezes dois, depois aumentaria três vezes.

Professora: você está fazendo como se a figura 0 tivesse três círculos?

Danilo: é, como se a figura fosse três. Aí o número da figura iria aumentando de dois em dois, aí figura 1 aumenta dois; figura dois aumenta quatro. Então o jeito que eu dei foi: duas vezes o número da figura.

Professora: o que você escreveu no problema f ?

Danilo: que para resolver basta usar a fórmula abaixo, não é necessária nenhuma outra explicação muito complexa porque basta usar a fórmula que já resolve. E a fórmula é 3 mais 2 vezes o número da figura.

No primeiro momento dessa segunda explicação o aluno utiliza números particulares, especificamente o número da figura 1 e 2, para se referir ao indeterminado. Isso nos leva a pensar que para chegar à fórmula apresentada anteriormente o aluno iniciou seu trabalho com os números particulares, ou seja, mobilizando o pensamento algébrico factual (RADFORD, 2003, 2004).

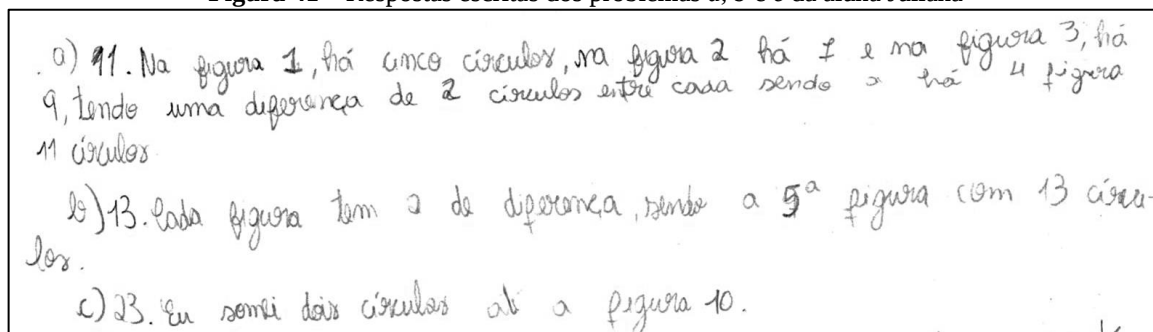
Não temos dados suficientes para afirmar o momento exato que ele saiu de uma forma de pensamento algébrico para outra, momentos esses que provavelmente ocorreram na imaginação e na fala interior do aluno, ou seja, na parte ideacional do pensamento (MOGOLLÓN, 2020). O que temos são indícios de que todas as três formas de pensamento algébrico foram mobilizadas, pois a indeterminação foi trabalhada analiticamente e denotada por número particulares, pelas palavras ‘número de ordem da figura’ ou ‘número da figura’ e pelo simbolismo alfanumérico, quando foi utilizado a letra n (Figura 39).

Como foi possível observar, Pedro e Danilo utilizaram a mesma estratégia para mobilizar as distintas formas de pensamento algébrico, em que se destacaram como meios semióticos a atividade perceptiva e os gestos dos estudantes, sendo esse último muito utilizado para que ambos os alunos tornassem aparente o que eles chamaram de figura 0. Outro ponto importante a ser destacado é a facilidade que eles tiveram com a denotação e com o trabalho com o indeterminado, respondendo a todos os problemas em um curto período e perpassando pelas três formas de pensar algebricamente.

7.4 Análise da aluna Juliana (8º ano)

Como todos os outros participantes da pesquisa a estudante Juliana inicia a atividade resolvendo os três primeiros problemas por meio de uma generalização aritmética, seguindo o raciocínio de somar dois círculos de uma figura para outra. Nesse primeiro momento a aluna não faz muito o uso de gestos, apenas lê e escreve suas respostas no papel. Essas respostas podem ser visualizadas na Figura 41.

Figura 41 – Respostas escritas dos problemas a, b e c da aluna Juliana



Fonte: Dados da pesquisa

Ao finalizar sua escrita a aluna foi questionada em como chegou às respostas dos três primeiros problemas, ela afirma que foi somando de dois em dois até chegar à figura de número

10 – evidenciando, mais uma vez, um pensamento aritmético na perspectiva de Radford (2013a). Após esse momento a estudante retoma a resolução da tarefa e demora um pouco para responder o problema *d*, que se refere à quantidade de círculos da figura 100. Percebendo que ela está levando um longo tempo para responder esse problema a professora retoma o diálogo.

Professora: como você está resolvendo o problema *d*?

Juliana: eu já fiz uma parecida, mas faz muito tempo, então fica difícil de me lembrar.

Professora: mas como você está fazendo para chegar à quantidade de círculos da figura 100?

Juliana: eu estou... assim... é... de 1 para 10 eu fiz a soma de quantos dois somariam, aí é 18. Aí eu ia fazer 18 vezes 9 para 100, é... e depois ia... somar mais 18 antes.

Professora: pensa se essa ideia funciona também para as figuras que você já conhece.

Quando Juliana afirma estar buscando uma ideia parecida com problemas que ela resolveu durante sua vida escolar para solucionar o problema *d* é o momento que emerge o elemento *iconicidade* definido na teoria da objetivação, que se caracteriza por um “processo pelo qual os alunos recorrem a experiências anteriores para orientar suas ações em uma nova situação”⁴² (RADFORD, 2007, p. 94, tradução nossa.). A continuidade da discussão professora-estudante evidencia que a ideia da aluna não a ajuda encontrar a resposta da quantidade de círculos da figura 100, o que é confirmado pela própria estudante.

Nesse momento que Juliana percebe que a característica comum de somar de dois em dois a quantidade de círculos não vai levá-la a encontrar o número de círculos da figura 100, tampouco a ideia de tomar como referência problemas anteriores, ela busca observar as diferentes determinações sensíveis, por meio do trabalho no campo fenomenológico (RADFORD, 2013a), a fim de que alguma delas a ajude a encontrar a solução para o problema *d*. Ao afirmar que mesmo por meio da observação ela não consegue resolver o problema, a estudante foi solicitada a observar mais uma vez as figuras dadas. Abaixo segue a transcrição do momento dessa discussão entre Juliana e a professora.

Juliana: eu não estou conseguindo.

Professora: vamos fazer o seguinte, vamos voltar para essas figuras que você já tem (referência às figuras 1, 2 e 3) e perceber se tem alguma outra relação além dessa que você percebeu. Observa as figuras, a quantidade de círculos em relação ao número da figura. Será que tem alguma relação?

⁴² Texto original: It is the process through which the students draw on previous experiences to orient their actions in a new situation.

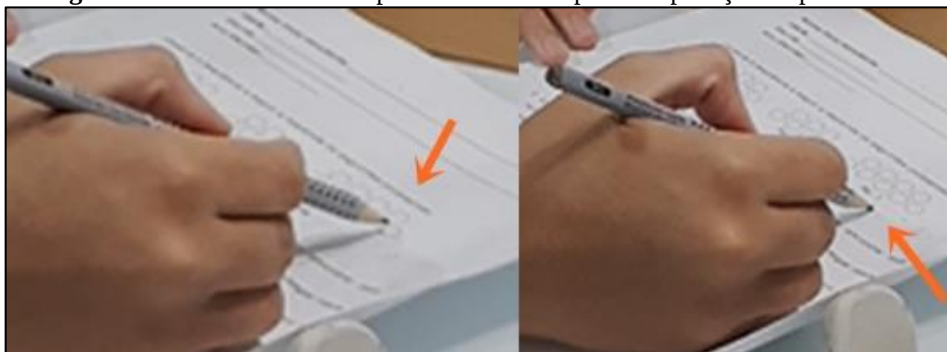
Por meio da atividade perceptiva, que emerge como meio semiótico de objetivação, Juliana consegue observar uma outra característica comum nessa sequência figural. Mas para compreender o raciocínio da aluna é necessário observar sua fala juntamente com os gestos realizados no mesmo momento – indicados por uma seta laranja na Figura 42.

Juliana: aqui (aponta para a quantidade de círculos da figura 1), subtraindo (aponta para o número da figura 1) da 4; aqui (aponta para a quantidade de círculos da figura 2) subtraindo (aponta para o número da figura 2) da 5; aqui (aponta para a quantidade de círculos da figura 3) subtraindo (aponta para o número da figura 3) da 6.

Professora: não entendi, você pode repetir? Subtraindo o que? E do que?

Juliana: os círculos, aqui tem cinco círculos (aponta para os círculos da figura 1), ai cinco menos a figura (aponta para o número da figura 1) daria 4; ai aqui teria (aponta para os círculos da figura 2) 4, 5, 6, 7 (conta o número de círculos da figura 2)... ai 7 subtraindo 2 (aponta para o número da figura 2) aqui da 5. Ai aqui o 9 (aponta para os círculos da figura 3) subtraindo 3 (aponta para o número da figura 3) aqui da 6.

Figura 42 – Gestos realizados pela aluna Juliana para a explicação do problema *d*



Fonte: Print screen do momento da atividade

Em outras palavras o raciocínio da aluna é correspondente a: a quantidade de círculos menos o número da figura é equivalente ao número da figura mais três. Em uma linguagem simbólica alfanumérica podemos escrever como: $N_c - n = n + 3$, o que é equivalente a $N_c = 2n + 3$, em que N_c representa o número de círculos e n o número da figura. Mas essas indeterminações não foram denotadas por Juliana dessa maneira, isso é, a indeterminação estava implícita e sendo denotada por números específicos e ações concretas (RADFORD, 2018).

Na resposta dessa estudante as ações concretas para denotar a indeterminação são os gestos e o ritmo: quando aponta primeiro para o número de círculos e posteriormente para o número da figura. Esses gestos estão acompanhados da fala e da percepção da aluna, o que

indica uma ação linguística-perceptiva-gestual. Nesse momento Juliana faz uso de diferentes meios semióticos de objetivação, que a ajudam a tornar aparente suas ideias e atingir o objetivo de responder aos problemas propostos.

O elemento caracterizador analiticidade também se faz presente na resposta da estudante, podemos observar que ela opera com a indeterminação, subtraindo do número de círculos o número da figura e percebendo que isso equivale ao número da figura mais três. Com essa igualdade estabelecida e tomando-a como premissa ela consegue rapidamente responder o questionamento do problema *d*, deduzindo que o número de círculos da figura 100 é 203. Essa resposta pode ser observada na fala da estudante.

Professora: e o que isso te ajuda a encontrar o número de círculos da figura 100?

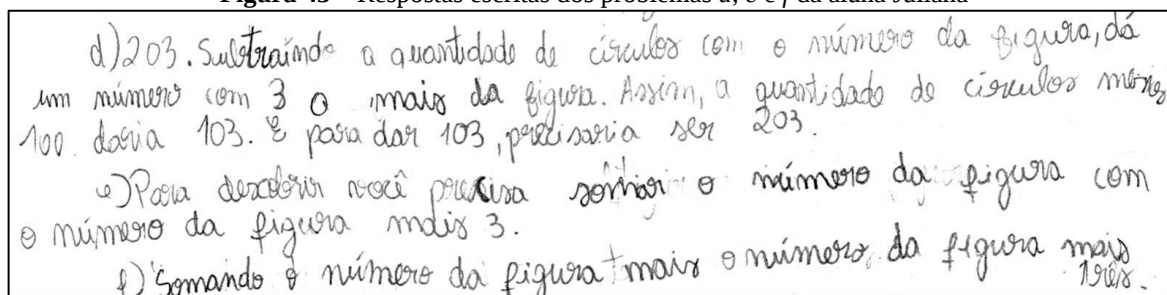
Juliana: a subtração fica em sequência (nesse momento ela aponta para a figura 1, figura 2 e figura 3 já desenhadas), aí fica uma diferença de... que esse daqui (aponta para quantidade de círculos da figura 3) subtraindo (aponta para o número da figura 3) fica aumentando... aí aqui (apontando para o número da figura 3) dá uma diferença de 3. Cada um tem uma diferença de três. Aí eu coloquei 103, que seria a figura 100... subtraindo a quantidade de círculos com a figura 100 daria 103. Ai eu fazendo assim a quantidade de círculos daria 203.

No momento que a aluna afirma que “a subtração fica em sequência” e “cada um tem uma diferença de três”, ela mostra que a ideia que teve para as figuras iniciais, ou seja, a característica comum encontrada não fica restrita apenas para algumas figuras, mas pode ser aplicada em qualquer uma delas. Nesse momento ocorre a abdução analítica, em que a característica comum se transforma em hipótese e é generalizada, levando à dedução de uma fórmula (RADFORD, 2013a).

Com base nessa análise multimodal da resposta da aluna ao problema *d*, podemos afirmar que ela mobilizou o pensamento algébrico factual (RADFORD, 2009, 2010a), com a indeterminação trabalhada implicitamente e denotada por números particulares e ações concretas. Além disso, os principais meios semióticos de objetivação que emergiram para a materialização do saber algébrico nesse momento foram: atividade perceptiva, os gestos, a fala e a escrita.

A Figura 43 apresenta a resposta escrita da aluna Juliana aos problemas *d*, *e* e *f*.

Figura 43 – Respostas escritas dos problemas *d*, *e* e *f* da aluna Juliana



d) 203. Subtraindo a quantidade de círculos com o número da figura, dá um número com 3 o mais da figura. Assim, a quantidade de círculos menos 100, daria 103. E para dar 103, precisaria ser 203.

e) Para descobrir você precisa somar o número da figura com o número da figura mais 3.

f) Somando o número da figura mais o número da figura mais 3.

Fonte: Dados da pesquisa

Na resposta dos problemas *d* e *e* é possível observar a evidência do caráter operatório da indeterminação, ou seja, a analiticidade, em que a aluna toma como premissa o fato de “o número de círculos menos o número da figura é igual ao número da figura mais três”, ideia desenvolvida para responder o problema *d*, e a partir disso e por meio de um processo de dedução ela consegue descrever como resposta ao problema *e* que “para descobrir o número de círculos você precisa somar o número da figura com o número da figura mais 3”, isso é, $N_c = n + n + 3$. Nesse momento, mesmo o problema *e* questionando sobre um número específico – a figura 200, a indeterminação implícita é deixada de lado e passa a ser denotada por meio das palavras “número da figura”. Esse momento demonstra que a aluna perpassa o pensamento algébrico factual e mobiliza o pensamento algébrico contextual (RADFORD, 2009, 2010a).

Ao ler o problema *f* a aluna realiza uma expressão facial que indica não perceber o sentido daquele questionamento e por meio de um breve diálogo com a professora ela percebe que é a mesma resposta do problema *e*. Isso pode ter ocorrido pois quando ela foi solicitada a indicar como descobrir o número de círculos da figura 200 ela não se deteve a um número específico e realizou o trabalho com um número qualquer, o que caracteriza o questionamento do problema *f*.

Em relação ao problema *g*, que traz o simbolismo alfanumérico, a aluna não apresentou muitas dificuldades para respondê-lo. Ao realizar a leitura do problema, ela rapidamente escreveu como resposta $n + (n+3)$. Radford (2009, 2010a) afirma que o uso desses parênteses não ocorre de maneira arbitrária, mas sim narra de forma condensada as experiências da estudante, nesse caso o $n + 3$ que está entre parênteses é equivalente ao “número da figura mais três” apresentado na mobilização do pensamento algébrico contextual.

Nesse momento que a aluna faz uso do simbolismo alfanumérico com significado e a indeterminação também é explícita, mas agora está sendo denotada pela letra n . Ao ser questionada se não poderia escrever essa fórmula de uma outra maneira a estudante Juliana

opera com o desconhecido mais uma vez e demonstra que há uma equivalência entre $n + (n+3)$ e $2n + 3$. Na Figura 44 podemos observar a resposta da estudante a esse problema.

Figura 44 – Resposta escrita do problema *g* da aluna Juliana

A photograph of a handwritten mathematical equation on a piece of paper. The equation is written in black ink and reads: $g) n + (n+3) = 2n + 3$. The handwriting is somewhat informal, with the 'g)' at the beginning and the equation itself written in a single line.

Fonte: Dados da pesquisa

Ao finalizar a análise das respostas de todos os problemas da tarefa de generalização de padrões da aluna Juliana, podemos afirmar que ela mobilizou as três formas de pensamento algébrico definidas por Radford (2009, 2010a): factual, contextual e o simbólico. Destacamos a importância da atividade perceptiva, que fez com que a aluna retomassem ao campo fenomenológico algumas vezes para encontrar uma característica comum que a levasse à dedução de uma fórmula, assim como destacamos a importância dos gestos nas respostas iniciais da estudante, eles foram um meio semiótico de objetivação que a ajudou a trabalhar com a indeterminação implicitamente e começou a configurar toda a ideia que foi apresentada, posteriormente, em uma linguagem natural (oral e escrita) e evoluída para uma linguagem simbólica alfanumérica.

Outro ponto importante é a contração semiótica realizada no percurso de toda a tarefa. Essa contração, que é o momento que a aluna concentra o mesmo significado em um menor número de símbolos (RADFORD, 2006), ocorreu em diferentes sistemas semióticos: quando ela iniciou utilizando gestos juntamente com sua fala e trabalhou a indeterminação por meio de números específicos e ações concretas, depois conseguiu apresentar a indeterminação por meio de um conjunto de palavras e, por fim, denotá-la com o uso da letra n . A contração semiótica em um mesmo sistema foi realizada no momento que a aluna percebe que $n + (n+3)$ é equivalente a $2n + 3$.

Concluimos a análise das respostas da aluna Juliana afirmando que para a materialização do saber algébrico a estudante fez uso do simbolismo alfanumérico, da atividade perceptiva, gestos e linguagem (oral e escrita), evidenciando que o pensamento algébrico é de natureza multimodal (RADFORD, 2018).

Com a análise multisemiótica das respostas dos cinco estudantes participantes do Estudo 2, percebemos que três deles (Gabriela, Luiza e Danilo) utilizaram estratégias semelhantes, enquanto os outros dois (Luiza e Juliana) seguiram por caminhos totalmente distintos. Mesmo assim todos conseguiram materializar o saber algébrico e mobilizaram a forma mais sofisticada

do pensamento algébrico, o pensamento algébrico simbólico, após perpassarem por todas as etapas da generalização algébrica.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como apresentamos ao longo desse escrito quando alguns professores são questionados sobre o que é a álgebra escolar eles se remetem apenas ao uso de letras para indicar valores, ou à manipulação desse simbolismo. A partir dessas ideias, de leituras que envolvem uma visão da álgebra além da simbologia alfanumérica e que afirmam que problemas com padrões e sequências contribuem para a mobilização do pensamento algébrico, nossa pesquisa buscou identificar as diferentes formas de pensamento algébrico que alunos dos anos finais do ensino fundamental conseguem mobilizar ao responderem uma tarefa de generalização de padrões.

Esse trabalho se fundamentou na definição de pensamento algébrico que toma como base a Teoria da Objetivação (TO). Segundo essa perspectiva, o pensamento é de natureza multimodal, possuindo sua parte material (gestos, ritmos, desenhos, palavras faladas e escritas, entre outros) e a parte ideacional (imaginação e fala interior). Isso indica que o pensamento algébrico, na visão da TO, não é resumido apenas ao uso de símbolos alfanuméricos para denotar a variável.

A nossa fundamentação teórica apresentou detalhes sobre essa perspectiva, que é dividida em três formas: factual, contextual e simbólica (RADFORD, 2009, 2010a). Cada uma delas possui características específicas, como por exemplo: no pensamento factual o aluno mobiliza muitos gestos e denota a indeterminação implicitamente por meio de números específicos; no pensamento contextual a indeterminação é explícita, mas o aluno está muito conectado com a espacialidade da sequência figural; e no pensamento simbólico a indeterminação também é trabalhada explicitamente, mas agora a simbologia alfanumérica é utilizada.

Para identificar quais dessas formas de pensamento algébrico os alunos mobilizaram ao responderem uma tarefa de generalização de padrões, realizamos dois estudos: O Estudo 1, que era inicialmente o nosso estudo piloto, mas que se tornou um dos estudos principais desse trabalho; e o Estudo 2, que foi necessário para aumentar o quantitativo de sujeitos participantes da investigação. Em ambos utilizamos a mesma tarefa composta por sete problemas.

Como dados para as análises desses estudos utilizamos as respostas dos alunos escritas na folha da tarefa e as gravações que foram realizadas no momento da atividade, afinal como o pensamento possui sua parte material gravamos em áudio e vídeo o momento da resolução dos problemas. A partir desses dados realizamos uma análise multimodal (VERGEL, 2016), em

que consideramos e relacionamos diversos recursos que os estudantes utilizaram para trabalhar com ideias matemáticas, mais precisamente com ideias algébricas.

Durante a análise dos nossos resultados notamos que, mesmo não sendo nosso objeto de estudo, tampouco o objetivo dessa investigação, o trabalho conjunto entre estudantes e professora, o respeito pelos alunos e as oportunidades que foram dadas a eles para que mostrassem e aprofundassem suas ideias, foram importantes para que o saber algébrico se materializasse. Recordamos que esses momentos, denominados de processos de objetivação (RADFORD, 2017b), não foram analisados nessa pesquisa, mas era a medida que analisamos a mobilização do pensamento algébrico percebíamos a importância do trabalho ombro a ombro entre os envolvidos da atividade.

A importância desse trabalho ficou evidente na análise de diversos alunos, principalmente na descrição dos resultados da Dupla G (Estudo 1) e da aluna Luiza (Estudo 2), que buscaram um diálogo com a professora algumas vezes durante a atividade. Isso aponta a necessidade de abrir espaços na sala de aula para que os alunos se expressem, exponham suas soluções e suas dúvidas, e com isso obteremos um ensino da matemática mais dinâmico, que busca formar pessoas reflexivas e éticas diante de diversos discursos, e que não se fechem apenas em suas opiniões ou em seus conhecimentos.

No decorrer da atividade as distintas formas de pensamento algébrico foram mobilizadas pelos estudantes, em outras palavras, o saber algébrico, que é histórico-cultural, foi materializado e atualizado pelos alunos. Nesse momento esse saber passa a ser chamado de conhecimento, que é particular, singular (RADFORD, 2017b). Isso foi identificado nas respostas dos alunos participantes dessa pesquisa, afinal, eles estavam resolvendo uma mesma tarefa de generalização de padrões, mas utilizaram distintas estratégias, mobilizaram diversos meios semióticos de objetivação e materializaram o mesmo saber algébrico, porém de diferentes maneiras.

Diante das respostas dos alunos, apontamos a importância dos gestos para a materialização do saber algébrico durante a atividade. Um exemplo é a maneira que Juliana os utiliza para construir sua estratégia algébrica e responder os problemas. Se não déssemos destaques a eles no decorrer da análise seria trabalhoso identificar, apenas por meio da linguagem oral da aluna, a maneira inicial do seu pensamento algébrico. É por meio desses gestos e números particulares, que seguem a lei da variável, que ela trabalha com o indeterminado (analiticidade) implicitamente, mobilizando o pensamento algébrico factual.

Outro exemplo são os gestos realizados por Pedro e Danilo para indicar o que eles chamam de figura 0, que proporcionou a resolução algébrica de todos os problemas. Portanto, isso se torna mais uma evidência de que a álgebra não está apenas ancorada no simbolismo alfanumérico, mas sim em todo o percurso que leva os estudantes a denotarem e trabalharem como uma indeterminação.

A fórmula algébrica de alguns estudantes, deduzida no pensamento algébrico factual, já apresentava indícios do estar conectada com a espacialidade da sequência figural, como é o caso da fórmula da aluna Luiza, em que ela trabalha com números específicos, mas realiza gestos para se referir às linhas superior e inferior da figura. Nesse momento o pensamento factual começa a se posicionar para avançar ao contextual, como se um já estivesse adentrando às características do outro. Diante esse fato, indicamos a necessidade de pesquisas que busquem identificar e analisar as aproximações e distanciamentos dessas formas de pensamento algébrico que podem emergir em diferentes respostas dos estudantes, indicando que esse pensamento deve ser visto como algo linear, e não separados em distintos blocos.

Em relação à espacialidade presente nas fórmulas algébricas, alguns alunos não conseguiram perpassar por ela quando começaram a trabalhar com o simbolismo alfanumérico, como é o caso da Dupla G, que não conseguiu simplificar a expressão $(n+1) + (n+2)$. Com isso os símbolos trabalharam como índices, e o que estava separado por parênteses se referia ao que acontecia na linha superior e na linha inferior da figura. Mas isso não significou que eles não conseguiram adentrar ao trabalho no campo algébrico, pois não foi necessário esse simbolismo para que existisse a denotação e o trabalho com o indeterminado.

O simbolismo alfanumérico foi utilizado por diversos alunos do 6º ano sem muitas dificuldades, indo na direção contrário do que indica a BNCC (2018) que é iniciar o trabalho com esse simbolismo apenas no 7º ano do ensino fundamental. Destacamos que alguns desses estudantes estão cursando o 6º ano pela segunda vez, mas apenas esse dado não nos permite afirmar que eles já tinham trabalhado com o simbolismo alfanumérico no decorrer da sua vida escolar, sendo assim podemos supor que eles já tinham tido contato com esse simbolismo, mas não temos dados suficientes que confirmem essa suposição. O que fica evidente nas respostas analisadas é que os problemas propostos levaram os sujeitos da pesquisa a construírem uma fórmula usando essa linguagem com significado, não a vendo apenas como um conjunto de letras que devem ser manipuladas seguindo determinadas regras.

Alguns estudantes demonstraram entusiasmo ao construírem uma fórmula utilizando o simbolismo usual, como por exemplo o aluno Danilo do 9º ano, que mesmo estando no último

ano escolar do ensino fundamental afirmou nunca ter criado uma fórmula algébrica alfanumérica, e que iria desafiar os colegas de sua turma para ver se eles também conseguiriam resolver a tarefa.

Posto isso, mostramos que a linguagem algébrica alfanumérica pode ser melhor entendida quando existem diversas etapas para construir o seu significado, e não apenas quando é exposta de maneira imediata aos estudantes. Além disso, percebemos que o trabalho com uma tarefa de generalização de padrões pode contribuir para que o aluno mobilize as diferentes formas de pensamento algébrico.

Outro dado importante dessa investigação são os *nós semióticos*. Ao longo das análises observamos que os alunos recorrem muitas vezes a um mesmo conjunto desses nós, por exemplo, quando mobiliza os gestos, a percepção e a fala ao mesmo tempo. Queremos destacar que mesmo utilizando um mesmo conjunto de nós cada estudante os mobilizou de maneira distinta, ou seja, foram ativados de diferentes formas por cada aluno. Isso nos leva a pensar que os nós semióticos podem estar relacionados com a materialização do saber, isso é, com o conhecimento que é tido na TO como algo individual. Esperamos que sejam realizadas investigações que se atenham a essa especificidade.

Concluimos essa pesquisa afirmando que o nosso objetivo de identificar as formas de pensamento algébrico mobilizadas por diversos estudantes dos anos finais do ensino fundamental foi alcançado. Também mostramos como os três elementos caracterizadores estão interconectados em cada uma das formas de pensamento algébrico e evidenciamos que a álgebra não deve ser reduzida a sua linguagem alfanumérica, mas que devemos levar em consideração todo o processo percorrido pelo estudante, desde o trabalho com números particulares até o uso da simbologia usual.

Acreditamos que esse trabalho de dissertação apresenta contribuições importantes para o ensino da álgebra, mostrando suas diversas faces e os distintos caminhos percorridos para a mobilização do pensamento algébrico quando trabalhamos com uma tarefa de generalização de padrões. Também destacamos que é imprescindível que os educadores entendam a relação dialética entre o saber e o ser, pois com isso poderemos contribuir para a formação de cidadãos que adentrem diversos discursos, sejam eles matemáticos ou referentes a distintas esferas da sociedade.

Por fim, esperamos que outros trabalhos surjam no campo da álgebra, que utilizem distintas perspectivas de pensamento algébrico e que contribuam para o ensinar desse campo

da matemática. Almejamos que as pesquisas futuras ultrapassem as limitações que houve nessa e que as ideias aqui apresentadas sejam expandidas para as outras etapas de ensino.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Pensamento Algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 6, n. 10, p.34-60, jun. 2017. Disponível em: <<http://rpem.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/1124#:~:text=Ap%C3%B3s%20nos%20an%C3%A1lises%2C%20acreditamos%20que,%3B%20e%20%E2%80%9Cconstruir%20significado%E2%80%9D.>>>. Acesso em: 04 abr. 2019.
- AVELAR, M. O papel dos gestos de apontar na construção da dêixis multimodal: dos usos concretos aos usos abstratos. **Revista Linguística/Revista do Programa de Pós-Graduação em Linguística da Universidade Federal do Rio de Janeiro**, [S.I.], v. 12, n. 1, p. 157-172, jan-jun. 2016. Disponível em: <<https://revistas.ufrj.br/index.php/rl/article/view/4525>>. Acesso em: 15 jan. 2021.
- AVERBUCH, A.; GOTTLIEB, F; C.; SANCHEZ, L. B.; LIBERMAN, M. P. **Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau - 7ª série**. 3. ed. São Paulo: Nacional, 1977. 212 p. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208960>>. Acesso em: 03 maio 2020.
- BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a Classroom Practice that promotes Algebraic Reasoning. **Journal For Research In Mathematics Education**. Reston, p. 412-446. nov. 2005. Disponível em: <<https://mathed.byu.edu/kleatham/Classes/Fall2010/MthEd590Library.enlp/MthEd590Library.Data/PDF/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning-1974150144/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning.pdf>>. Acesso em: 18 jun. 2019.
- BAQUEIRO, G. D. S. **Achados sobre generalização de padrões ao "garimpar" pesquisas brasileiras de educação matemática (2003-2013)**. 2016. 227 f. Tese (Doutorado) - Programa de Estudos Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: <<https://tede2.pucsp.br/handle/handle/19005>>. Acesso em: 12 set. 2019.
- BARBOSA, A.; VALE, I. A resolução de tarefas com padrões figurativos e a generalização. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2013, Montevideo. **Anais [...]**. Montevideo: [s.n.], 2013. p. 3073-3081. Disponível em: <<https://core.ac.uk/download/pdf/328836564.pdf>>. Acesso em: 20 set. 2019.
- BARBOSA, E. J. T.; SILVA JUNIOR, C. A aritmética e seus reflexos no ensino aprendizagem da álgebra. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais [...]**. Salvador: [s.n.], 2010. p. 1-10. Disponível em: <https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T4_CC41.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2019.
- BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F; SHULTE, A. P.; (org.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual Editora, 1995. p. 23-36.

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Exploração de Padrões e Pensamento Algébrico. In: VALE, I.; BARBOSA, A. **Padrões: múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática**. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo – Projecto Padrões, 2009. p. 59-68. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Ana_Barbosa13/publication/335106822_Exploring_generalization_with_visual_patterns_tasks_developed_with_pre-algebra_students/links/5d50423c92851cd046b4c2ae/Exploring-generalization-with-visual-patterns-tasks-developed-with-pre-algebra-students.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2021.

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais [...]**. Recife: [s.n], 2011. p. 1-12. Disponível em: <http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1111/604>. Acesso em: 24 maio 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão Final. Ministério da Educação, Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 16 maio 2019.

BREDARIOL, C. C.; NACARATO, A. M. Raciocínios Algébricos de alunos do 6º ao 8º ano quando resolvem uma situação-problema envolvendo padrões. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2013, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba: SBEM, 2013. p. 1-14. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1899_684_ID.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2019.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Early Algebra and algebraic reasoning. In: LESTER, F. K (ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte: NCTM, 2007. Cap. 15. p. 669-705. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/David_Carraher/publication/292696143_Early_algebra_and_algebraic_reasoning/links/58b712a792851c471d47a4fc/Early-algebra-and-algebraic-reasoning.pdf>. Acesso em: 26 mar. 2020.

CASTRO, M. R. Educação algébrica e resolução de problemas. In: **Boletim Salto para o Futuro**. TV Escola, 2003. Disponível em: <<https://cdnbi.tvescola.org.br/contents/document/publicationsSeries/110456EducacaoAlgebraicaResolucaoProblemas.pdf>>. Acesso em: 14 set. 2019.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, [S.L.], v. 32, n. 94, p.171-187, dez. 2018. FapUNIFESP (SciELO). Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142018000300171>. Acesso em: 07 fev. 2019.

DORIGO, M; RIBEIRO, A. J. Concepções de equação de um grupo de alunos do ensino médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais [...]**. Salvador: SBEM, 2010. p. 1-10. Disponível em: <https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T4_CC608.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2019.

FERREIRA, M. L.; WAGNER, V. M. P. S. Crenças e concepções de uma professora de matemática sobre álgebra. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais [...]**. Salvador: SBEM, 2010. p. 1-10. Disponível em: <https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T4_CC443.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2019.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A.; MIGUEL, A. A contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, SP, v. 4, n. 1, p. 78-91, mar. 1993. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644384?articlesBySameAuthorPage=1>>. Acesso em: 30 mar. 2019.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 25° ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GOMES, L. P. S. **Introdução à álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental**: uma análise a partir da Teoria da Objetivação. 2020. 182 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2020. Disponível em: <<https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/29327>>. Acesso: 15 jul. 2020.

GOMES, L. P. S.; NORONHA, C. A. Caracterização do Pensamento Algébrico na Perspectiva da Teoria da Objetivação. In: GOBARA, S. T.; RADFORD, L (org.). **Teoria da Objetivação**: Fundamentos e Aplicações para o Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020. p. 135-151. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/2020%20-%20Gobara%20_%20Radford%20-%20Teoria%20da%20objetivacao.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2020.

HERRERA, A. L. Reflexiones sobre aspectos éticos presentes en una actividad. In: GOBARA, S. T.; RADFORD, L (org.). **Teoria da Objetivação**: Fundamentos e Aplicações para o Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020. p. 117-134. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/2020%20-%20Gobara%20_%20Radford%20-%20Teoria%20da%20objetivacao.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2020.

JUNGBLUTH, A.; SILVEIRA, E.; GRANDO, R. C. O estudo de sequências na Educação Algébrica nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [S.L.], v. 21, n. 3, p. 96-118, 20 dez. 2019. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/44255>>. Acesso em: 20 abr. 2020.

KIERAN, C. Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher question from the primary to the early secondary school levels. **Quadrante**, [S.I.], v. 16, n. 1, p. 5-26, jun. 2007.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinkins is**. 1992. 362 f. Tese (Doutorado), University of Nottingham, Nottingham, 1992. Disponível em: <<http://eprints.nottingham.ac.uk/13227/>>. Acesso em: 12 fev. 2021.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas: Papirus, 1997. 176 p.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. Métodos de Coleta de dados: observação, entrevista, e análise documental. In: LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: Epu, 1986. Cap. 3. p. 25-44. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4091392/mod_resource/content/1/Lud_And_cap3.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2020.

MAZARO, E. C. P.; PIRES, M. N. M. O desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da investigação matemática: uma experiência de estudo. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais [...]**. Salvador: SBEM, 2010. p. 1-10. Disponível em: <https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/RE/T21_RE514.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2019.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? **Pro-Posições**. v. 3, n. 1, p. 39-54, mar. 1992. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644424>>. Acesso em: 30 mar. 2019.

MODANEZ, L. **Das sequências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico**. 2003. 92 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2003. Disponível em: <<https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11235>>. Acesso em: 12 maio 2019.

MOGOLLÓN, O. L. P. Contando cantidades: más allá del establecimiento de correspondencias uno a uno. In: GOBARA, S. T.; RADFORD, L (org.). **Teoria da Objetivação: Fundamentos e Aplicações para o Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020. p. 71-93. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/2020%20-%20Gobara%20_%20Radford%20-%20Teoria%20da%20objetivacao.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2020.

MOREY, B. Abordagem semiótica na Teoria da Objetivação. In: GOBARA, S. T.; RADFORD, L (org.). **Teoria da Objetivação: Fundamentos e Aplicações para o Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020. p. 43-68. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/2020%20-%20Gobara%20_%20Radford%20-%20Teoria%20da%20objetivacao.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2020.

PAIVA, J. P. A. A.; NORONHA, C. A. O entrelaçamento entre os processos de objetivação e subjetivação no labor conjunto em uma tarefa sobre orientação espacial para alunos do 6º ano do ensino fundamental. In: GOBARA, S. T.; RADFORD, L (org.). **Teoria da Objetivação: Fundamentos e Aplicações para o Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020. p. 153-173. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/2020%20-%20Gobara%20_%20Radford%20-%20Teoria%20da%20objetivacao.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2020.

PEREIRA, A. M. M.; PIRES, M. N. M. A noção de função por meio da investigação matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais [...]**. Salvador: SBEM, 2010. p. 1-10. Disponível em:

<https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/RE/T21_RE462.pdf >. Acesso em: 25 jun. 2019.

PEREIRA, J. T. G. **O desenvolvimento do pensamento algébrico: significações produzidas por alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental**. 2019. 178 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação Stricto Sensu em Educação, Universidade São Francisco, Itaíba, 2019. Disponível em: <<https://www.usf.edu.br/galeria/getImage/385/3742992432660818.pdf> >. Acesso em: 10 mar. 2020.

PEREIRA JUNIOR, A. Cálculo Algébrico: um relato de uma atividade. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6010_3032_ID.pdf >. Acesso em: 21 jun. 2019.

PERÉZ, A.; MARIN. **Elementos de Algebra**. 5. ed. São Paulo: [S.N.], 1923. 121 p. Disponível em: < <https://app.uff.br/riuff/handle/1/731> >. Acesso em: 04 maio 2020.

PERNAMBUCO. **Parâmetros curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco** – Concepções. 2012. Disponível em: <http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/4171/matematica_ef_em.pdf>. Acesso em: 16 maio 2019.

PERNAMBUCO. **Currículo para o Ensino Fundamental: Matemática**. Secretária de Educação e Esportes, Recife, 2019. Disponível em: <[http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/19487/Matem%C3%A1tica\(2\).pdf](http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/19487/Matem%C3%A1tica(2).pdf) >. Acesso em: 20 mar. 2020.

PORTO, M. L; COSTA, B. S. A.; MARQUES, M. S; LUNA, A. V. A. Construindo a base do pensamento algébrico com crianças de 6 anos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais [...]**. Salvador: SBEM, 2010. p. 1-10. Disponível em: < https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/RE/T4_RE1226.pdf >. Acesso: 24 jun. 2019

PRESTES, D. B.; FERREIRA, A. G. Tarefa da Early Algebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico no 2º ano do ensino fundamental: um relato. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 23, n. 59, p. 101-114, set. 2018. Disponível em: <<http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr/article/view/1022/pdf> >. Acesso em: 09 agosto 2019.

RADFORD, L. On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking. In: PME-NA, 26., 2002, Norwich. **Anais [...]**. Norwich, 2002. p. 81 - 88. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/87_PME_26.pdf>. Acesso em: 07 jan. 2021.

_____. Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: a semiotic-cultural approach to students' types of generalization. **Mathematical Thinking And Learning**, [S.L.], v. 5, n. 1, p.37-70, jan. 2003. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/79_gestures.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2020.

_____. La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In: ARRIGO, G. (ed.) **Alta Scuola Pedagogica**. Suíça: Alta Scuola Pedagogica, 2004. p. 11 - 27. Disponível em: <[http://www.luisradford.ca/pub/Radford%20L.%20\(2004\)%20-%20La%20generalisation%20mathematique%20comme%20processus%20semiotique.pdf](http://www.luisradford.ca/pub/Radford%20L.%20(2004)%20-%20La%20generalisation%20mathematique%20comme%20processus%20semiotique.pdf)>. Acesso em: 15 jan. 2020.

_____. Algebraic Thinking and The Generalization of Patterns: a semiotic perspective. In: PME-NA, 28., 2006, Mérida. **Anais [...]**. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional, 2006. p. 1 - 21. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/60_pmena06.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2019.

_____. Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. **Zdm**, [S.L.], v. 40, n. 1, p.83-96, 5 dez. 2007. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/45_zdm_radford.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2020.

_____. Signs, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: CERME, 6., 2009, Lyon, França. **Anais [...]**. Lyon: INRP, 2009. p. 33 - 53. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/25_CERME6plenary1radford.pdf>. Acesso em: 17 mar. 2019.

_____. Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. **Research In Mathematics Education**, [S.L.], v. 12, n. 1, p.1-19, mar. 2010a. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/22_RME2010Algebraicthinkingfromaculturalsemioticspective.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2020.

_____. Layers of Generality and Types of Generalization in Pattern Activities. **PNA (Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática)**, Granada, v. 4, n. 2, p.37-62, jan. 2010b. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/23_PNA2010Layersgenerality.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2020.

_____. A origem histórica do pensamento algébrico. In: MOREY, B; MENDES, I. A. (org.). **Cognição Matemática: História, Antropologia e Epistemologia**. São Paulo: Livraria da Física, 2011a. Cap. 5. p. 117-153.

_____. Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. **Early Algebraization**, [S.L.], p. 303-322, 2011b. Springer Berlin Heidelberg.

_____. En torno a tres problemas de generalización. In: RICO, L.; CAÑADAS, M. C.; GUTIÉRREZ, J.; MOLINA, M.; SEGOVIA, I. (ed.). **Investigación en Didáctica de las Matemáticas**. Granada, Espanha: Editorial Comares, 2013a. p. 3-12. Disponível em: <<http://www.luisradford.ca/pub/2013%20-%20En%20torno%20a%20tres%20problemas%20de%20la%20generalizacion.pdf>>. Acesso em: 27 maio 2019.

_____. The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. **Mathematics Education Research Journal**, [S.L.], v. 26, n. 2, p.257-277, 28 dez. 2013b. Springer Science and Business Media LLC. Disponível em: <[http://www.luisradford.ca/pub/Radford%20L.%20\(2014\)%20-%20The%20progressive%20development.pdf](http://www.luisradford.ca/pub/Radford%20L.%20(2014)%20-%20The%20progressive%20development.pdf)>. Acesso em: 15 jan. 2020.

_____. De la teoría de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática**, [S.I.], v. 7, n. 2, p. 132-150, jun. 2014. Disponível em: <<http://www.luisradford.ca/pub/2014%20-%20De%20la%20teoria%20de%20la%20objetivacion%20Revista%20Latinoam%20de%20etnomatematicas.pdf>>. Acesso em: 22 jul. 2020.

_____. Methodological Aspects of the Theory of Objectification. **Perspectivas da Educação Matemática**, [S.I.], v. 18, n. 8, p. 547-567, 18 dez. 2015. Disponível em: <<http://www.luisradford.ca/pub/2015%20-%20Radford%20PEM%20Methodology%20of%20the%20TO.pdf>>. Acesso em: 28 jun. 2020.

_____. Aprendizaje desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. In: D'AMORE, B.; RADFORD, L. **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. Bogotá: Ud Editorial, 2017a. Cap. 5. p. 115-136. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/2017%20-%20D%20Amore%20_%20Radford%20-%20ensenanza%20aprendizaje%20de%20las%20matematicas.pdf>. Acesso em: 13 fev. 2020.

_____. Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. In: D'AMORE, B.; RADFORD, L. **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. Bogotá: Ud Editorial, 2017b. Cap. 4. p. 97-114. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/2017%20-%20D%20Amore%20_%20Radford%20-%20ensenanza%20aprendizaje%20de%20las%20matematicas.pdf>. Acesso em: 13 fev. 2020.

_____. Ser, Subjetividad y Alienación. In: D'AMORE, B.; RADFORD, L. **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. Bogotá: Ud Editorial, 2017c. Cap. 6. p. 137-165. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/2017%20-%20D%20Amore%20_%20Radford%20-%20ensenanza%20aprendizaje%20de%20las%20matematicas.pdf>. Acesso em: 13 fev. 2020.

_____. The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. In: KIERAN, C (ed.). **Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds**: the global evolution of an emerging field of research and practice. New York: Springer, 2018. p. 3-25. Disponível em: <<http://www.luisradford.ca/pub/2018%20-%20Radford%20-%20The%20emergence%20of%20symbolic%20algebraic%20thinking%20-%20web.pdf>>. Acesso em: 19 nov. 2020.

_____. Un recorrido a través de la Teoría de la Objetivación. In: GOBARA, S. T.; RADFORD, L (org.). **Teoria da Objetivação**: Fundamentos e Aplicações para o Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020. p. 15-42. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/2020%20-%20Gobara%20_%20Radford%20-%20Teoria%20da%20objetivacao.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2020.

RAMOS, C. S.; SILVA, A. B.; OLIVEIRA, R. C. Os problemas e as concepções de álgebra em uma aula de matemática do sétimo ano. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba: SBEM, 2013. p. 1-10. Disponível

em: < http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/618_1434_ID.pdf >.
Acesso em: 28 jun. 2019

REGIS, F. C. N. **Introdução ao pensamento algébrico**: a generalização de padrões. 2017. 164 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação Stricto Sensu em Educação e Docência, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2017. Disponível em: < <https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/BUOS-ARKFTE> >. Acesso em: 08 abr. 2019.

RODRIGUES, P. H.; SILVEIRA, A. R. C.; NAGY, M. C. Índícios de mobilização de pensamento algébrico por alunos de uma turma de 6º ano do ensino fundamental. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., 2013, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba: SBEM, 2013. p. 117-13. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/315_723_ID.pdf > Acesso: 28 jun. 2019.

SANTOS JUNIOR, C. P. **Estratégias utilizadas por alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha**. 2013. 105 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013. Disponível em: <<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/13228>>. Acesso em: 08 abr. 2019.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do ensino fundamental I. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 6, n. 1, p. 206-222, maio 2012. Disponível em: <<http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/387/172> >. Acesso em: 16 mar. 2019.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F; SHULTE, A. P.; (org.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual Editora, 1995.

VALE, I. As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos. **Revista Interações**, [S.L.], v. 8, n. 20, p. 181-207, abr. 2012. Disponível em: <<https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/493/446>>. Acesso em: 02 maio 2019.

_____. Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, [S.L.], v. 8, n. 2, p. 64-81, 16 dez. 2013. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n2p64/26020> > Acesso em: 02 maio 2019.

VERGEL, R. **Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)**. 2014. 326 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doctorado Interinstitucional en Educación, Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, 2014. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11349/2608>>. Acesso em: 27 maio 2019.

_____. ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. **Uno: Revista de Didáctica de Las Matemáticas**, La Rioja, España, v. 68, n. 1, p. 9-17, abr. 2015a.

_____. Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. **PNA (Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática)**, Granada, Espanha, v. 9, n. 3, p.193-215, mar. 2015b. Disponível em: <<https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6220/5534>>. Acesso em: 27 maio 2019.

_____. El gesto y el ritmo en la generalización de patrones. **Uno: Revista de Didáctica de Las Matemáticas**, La Rioja, España, v. 73, n. 1, p. 23-31, jul. 2016.

_____. Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico. In: CIAEM, 15., 2019, Medellín, Colômbia. **Anais [...]**. Medellín: [S.N.], 2019. p. 1-18. Disponível em: < <https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/1072/571>>. Acesso em: 08 jun. 2020.

VERGEL, R.; ROJAS, P. J. Álgebra temprana, pensamiento y pensamiento algebraico. In: VERGEL, R.; ROJAS, P. J. **Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en aula**. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2018. Cap. 3. p. 41-74.

APÊNDICE – TRANSCRIÇÃO DE VÍDEOS

Transcrição Dupla G – Otávio e Paula

Otávio inicia lendo o problema a. Otávio lendo o problema a.

Otávio: se aqui tem dois (aponta com a caneta para a linha superior da figura 1).

Paula: esse aqui tem três (apontando para linha superior da figura 2), aí quatro (apontando para linha superior da figura 3), aí na sequência seria cinco...

Otávio: aí no caso seria cinco (aponta para cima), seis (aponta para baixo). Como é que a gente vai justificar?

Paula: que pela sequência dos círculos de cima, dependendo dos círculos, é 2, 3, 4, 5 (movimentos que indicam a quantidade de círculos da linha superior da figura 1, 2, 3 e 4), daí seguindo a sequência será 5 depois dele, na quarta figura.

Otávio: através da sequência dá o valor que se pede na questão.

Paula começa a escrever a resposta do problema

Otávio: através da sua sequência...

Paula: vai ter que desenhar os círculos?

Otávio: acho que só escrever é melhor. Cinco em cima, seis em baixo.

Paula: quantos?

Otávio: seis. Eu acho que o resultado foi através da sequência. Sei lá, eu cheguei à conclusão de que o resultado foi através da sequência.

Paula: nós chegamos à conclusão que através da sequência chegaremos ao resultado [inaudível]... da figura seguinte.

Otávio: no caso a figura 4. Chegamos à conclusão de que o resultado veio através da sequência.

Paula: quantos círculos terá a figura 5?

Otávio: seis e sete, a mesma coisa daqui (aponta para a resposta do problema a).

Paula escreve o resultado falado por Otávio.

Otávio: é tipo, é a mesma coisa, do quatro, é a mesma justificção.

Paula: que o resultado veio através da sequência.

Otávio: quantos círculo terá a figura 10? Como se faz para encontrar...

Paula: este resultado.

Otávio: acho que em cima seria... Tipo, se pega 10 mais o resultado de cinco vai dar o resultado de 10.

Paula: mas acho melhor outro caminho.

Nesse momento os alunos realizam cálculos mentais para descobrir quantos círculos tem na parte superior da figura 10.

Paula: onze.

Otávio: onze em cima e em baixo, no caso, seria 12. Onze em cima e doze em baixo.

Paula: quantos círculos terá a figura 100? (leitura do problema d)

Otávio: não seria 100 mais 10, eu acho. O resultado de 10 deu 11 e 12, então o de 100 é 100 vezes 10, daria 1000.

Paula: acho que não.

Otávio: porque tipo, se continuar nessa sequência, fazer tipo um cálculo a gente vai se perder (referindo-se a contar o número de círculos figura por figura). Que aqui está pedindo a de 100. Entendesse? Então... tem que continuar com a sequência.

Paula: mas tem que achar a quantidade de círculos.

Otávio: a gente usaria o que?

Paula: poderia ver...

Otávio: no caso a gente faria como?

Paula: poderia fazer, esqueci o nome, quando bota o número elevado.

Otávio: elevar ao quadrado?

Paula: a potência.

Otávio: eu acho que não.

Paula: quer fazer o *e* (problema *e*) primeiro depois a gente volta para o *d*?

Otávio: é melhor.

Os alunos realizam a leitura do problema *e*.

Paula: porque dependendo da letra *e* pode ser a resposta da letra *d* também, pelo que eu estou pensando.

Otávio: porque vê só, escreva uma mensagem para um aluno de outra classe indicando como descobrir o número de círculos da figura 200.

Paula: não tem multiplicação na *d*.

Otávio: acho que pela *d* a gente vai conseguir compreender a *e*.

Paula: é.

Otávio: só que está muito complicado.

Paula: eu tô voando nisso.

Otávio: eu tô pensando em tipo: 100 mais o valor do...

Paula: do 23?

Otávio: da letra *c*, que é 23. Então 100 mais 23

Paula: se você perceber, daqui para cá aumenta 3 (figura 4 e 5) e daqui para cá aumenta 10 (figura 5 e figura 10). Então, se aqui aumenta 3, não, aqui aumenta 2 (figura 4 e 5)

Otávio: porque tipo, se fizer 100 com o resultado da (aponta para o número 23 da letra *c*), seria bem melhor. Entendeu? Qual o método a gente vai usar? 100 mais 23?

Paula: ou 100 vezes... eu tô perdida.

Otávio: essa é minha dúvida, se usar 100 mais o resultado da figura 10 acho que encontraria o valor. Só que isso é o que está me complicando. Como é que a gente vai fazer aqui? Vamos tentar fazer de mais, aí a gente chega a uma conclusão.

Paula: a gente podia fazer assim vê: no...

Otávio: porque aqui vê, foi tudo mais (apontando para as figuras já postas na tarefa e os problemas *a* e *b*). Então a gente bota: $100 + 23$

Paula: ou a gente poderia calcular assim se na terceira...

Otávio: 100 mais 11, 111 em cima e 112 em baixo. Que ficaria: 100 mais 11 e 100 mais 12

Paula: já é (gíria que expressa concordância). Então daria 111 e 112?

Otávio: é. Só que não sei se... a gente aprende com o erro. No caso seria 110 em cima e 112 em baixo.

Paula: é.

Os alunos escrevem as ideias no papel.

Otávio: aí qual seria a conclusão?

Paula: somar o resultado da figura 10 com a figura 100.

Otávio: aí no caso a gente somou o resultado?

Paula: não, daria errado. Porque essa é a figura 100 (aponta para o problema *d*), aí... tinha que calcular o resultado das próximas, não a figura.

Otávio: complicou agora.

Paula: eu não tô conseguindo raciocinar

Professora: vocês estão com alguma dúvida?

Otávio: não, é que a questão aqui a gente tá usando, tipo 100, o resultado de 10 mais 100, que no caso deu esse resultado. Só que...

Professora: certo. Mas como vocês fizeram para achar que aqui era 11? (Aponta para a resposta da figura 10).

Paula: somando.

Professora: somando como?

Paula: somando de figura em figura

Otávio: no caso a gente fez soma de mais. No caso ficou... por exemplo tipo, na figura 3 em cima tem quatro para chegar na quatro a gente somou com mais 1, ficou cinco em cima e seis em baixo.

Professora: certo, aí vocês somaram...

Otávio: na figura três tem quatro, para chegar na conclusão da quatro a gente somou mais um, em cima ficou cinco e em baixo seis.

Professora: e para chegar até a 10 vocês fizeram essa lógica também?

Otávio: isso. Só que na 100 tá complicado.

Professora: mas será que não tem outro caminho??

Os alunos ficam em silêncio pensando nos problemas.

Paula: multiplicação mesmo.

Otávio: multiplicação? É o que tá me complicando. Bora para letra *f*.

Paula: vamos.

A leitura do problema *f* é feita por Otávio

Otávio: olha aí a multiplicação.

Paula: soma.

Otávio: aqui a gente vai montar (aponta para o problema *f*), tipo, escrever uma mensagem, para um aluno de outra classe, só que para descobrir o número de qualquer figura, então seria bem mais fácil. Se tipo a gente usasse (escreve no final da folha $n/2 = 2$)

Os alunos retomam o problema *d*.

Otávio: vamos logo pra *f*, que ela tá mais fácil. Daí tipo, a gente poderia colocar. Primeiro você deveria... um cálculo, tipo soma, adição, tudo isso.

Paula: eu não estou conseguindo pensar não.

Otávio: a gente não tá conseguindo chegar a uma conclusão do resultado.

Professora: vocês acham que para chegar não é preciso, talvez, retomar lá e ver se há algo que vocês possam melhorar ou outro caminho que vocês possam pensar.

Otávio: é porque tá difícil de se concentrar pra arrumar o cálculo.

Professora: por exemplo, o número que vocês acharam na figura 4, não tem nenhuma relação com o número da figura não?

Otávio: como?

Professora: vocês têm quantos círculos na figura 3?

Otávio: 4.

Professora: e na outra parte?

Paula: nove, são nove

Professora: certo, mas aí não tem nenhuma relação com o número da figura não? Porque vocês estão dizendo que aqui em cima tem quatro e aqui embaixo tem cinco.

Paula: o número da figura vez 3 é nove, 3 por 3 é nove, poderia ser uma multiplicação.

Professora: mas isso funciona para as outras figuras?

Paula: não.

Professora: prestem atenção, vocês estão me dizendo que aqui tem quatro e aqui tem cinco. Tem alguma relação com o número da figura esses valores?

Otávio: tem, a sequência, aaa. A sequência 3: 4 e 5. Ai na figura 4: 5 e 6. Ai na figura 10: 11 e 12. No 100... me perdi. Mas no caso se é sequência no 100 seria o que, 101 e 102. Conforme a sequência (gestos "suspensos no ar").

Professora: e o total?

Paula: 203.

Otávio: e daí qual seria a conclusão? O que que a gente iria explicar? No caso a gente chegou através da sequência.

Paula: aí no caso seria a sequência, do número da figura e do círculo.

Otávio escreve a resposta do problema *d* e iniciam o problema *e*.

Otávio: no caso a gente vai ter que seguir a sequência ou colocar o cálculo? No caso seria 200, 201 e 202.

Professora: vocês podem escrever como vocês pensaram.

Otávio: no caso seria 403, né isso?

Paula: é.

Leitura do problema *f*.

Otávio: no caso como seria, como é que a gente faz?

Paula: seria quase a mesma resposta da letra *e*.

Otávio: no caso ele deveria seguir a sequência de números? Coloco?

Paula: sim.

Problema *g*

Otávio: aqui eu acho que a gente usaria a seguinte fórmula, poderia colocar n sobre cinco igual a dois x .

Paula: poderia ser dois. Porque se você perceber aqui é dois (aponta para a figura 1), cada um aumentou dois (movimento sobre as figuras já desenhadas): 5, 7, 9 ...

Otávio: é, no caso a gente colocaria n sobre dois, tipo, vezes dois x , alguma coisa assim.

Paula: no caso você colocaria n , não n . O valor da incógnita aí é n , não n .

Otávio: então, mas tipo, a gente colocaria n sobre dois que seria igual a dois n dois x , sei lá, alguma coisa assim. Porque oh: escreva uma fórmula para o número de círculos da figura n (leitura do problema *g*), como a figura n não tem o valor poderia ser zero, tipo n igual a zero. Só como que a gente montaria essa fórmula?

Professora: mas existe a figura zero?

Otávio: não, então tem que ser um valor. Tipo p , quando geralmente o professor dá o valor para calcular p .

Professora: como estamos trabalhando com figuras, o n vai pertencer ao conjunto dos naturais a partir do 1.

Otávio: no caso a gente montaria como? Eu acho que seria assim, tipo, x sobre um determinado valor, vezes algum outro, ou então igual a dois.

Paula: é

Otávio: então tipo ficaria tipo assim, n sobre dois igual a dois.

Professora: essa fórmula da conta de achar o número de círculos de qualquer figura?

Otávio: eu acho que dá, porque se tipo no lugar de n tivesse, acho que seis, a gente vai acrescentar mais dois no seis, no caso ficaria 8. Então tipo, se tivesse figura 6, com determinado valor, a gente ia adicionar mais dois. Não, pera aí, tá meio...

Professora: e se fosse uma figura ímpar? Por exemplo, n igual a 1, sendo n o número da figura.

Otávio: ficaria 1 sobre dois igual a dois.

Professora: um sobre dois é igual a dois? Voltem para ideias que vocês estavam utilizando para ver se vocês conseguem achar alguma coisa.

Otávio: aaa, então no caso a gente poderia botar tipo é quatro sobre cinco igual a n , porque somando isso aqui tudinho (apontando para os círculos) vai dar o valor de n .

Professora: n não é o número de círculos, é o número da figura.

Paula: ou poderia ser n elevado a dois.

Otávio: n elevado a dois?

Os alunos não chegam a uma conclusão.

Professora: vamos lá, como vocês fizeram no problema *d*?

Otávio: a gente acrescentou mais um.

Professora: acrescentou mais um ao que?

Otávio: ao número da figura.

Professora: com esse mais um vocês encontraram o que?

Otávio: a gente encontrou o resultado de círculos da figura 100.

Professora: só com mais um vocês acharam isso, ou fizeram mais outra coisa?

Otávio: só isso.

Professora: foi? E esse 102 aqui, vocês acharam como?

Otávio: tipo, na parte de cima a gente fez mais um, no caso ficou 101, e na parte de baixo a gente fez mais um, que ficou 102.

Professora: mais um ou mais dois?

Paula: mais dois.

Otávio: ficaria na sequência que ficaria pela sequência 100, 101 e 102.

Professora: então se vocês têm uma figura qualquer, vocês devem fazer o que com ela, já que na 100...

Otávio: seria no caso, 5, que é para a figura, no caso a gente daria a n que é o número de figura 5 e a gente acrescentaria tipo quatro mais dois que ficaria igual a seis. Seis em cima e depois pegaria... Porque vê só, cinco, seis. Não, não... Porque tipo, a gente vai usar a mesma sequência tá ligado, a figura três em cima tem quatro e em baixo tem cinco, então três, quatro e cinco. Mesmo coisa que se desse cinco, cinco, seis e sete.

Professora: se fosse n ?

Otávio: é se cinco fosse n .

Professora: mas se fosse n ?

Otávio: no caso a gente colocaria n no lugar aqui do cinco, no caso ficaria n , cinco e tipo.

Professora: veja, aqui você fez: 101, 102. Se fosse n vocês fariam como?

Paula: 2 em baixo e n em cima, ou n igual a dois.

Otávio: é, porque vê só. Se ela desse um determinado valor no n , então seria $n + 2$ e daria o resultado. Pode ser essa daí, só que.

Professora: como vocês finalizam?

Otávio: sei lá, seria tipo, n mais um n mais dois n . Porque o valor que ela desse da figura, seria no caso, a figura mais um, a figura mais dois.

Professora: como eu escrevo isso com n , sendo n uma figura qualquer?

Otávio: falar é mais fácil que escrever... no caso seria, $n + 1$, $n + 2$.

Professora: vocês conseguem simplificar?

Otávio: não

Transcrição Aluna Gabriela

Primeiro momento: leitura dos problemas.

Professora: alguma dúvida?

Gabriela: não, parece simples. Quantos círculos terá a figura 4? 11

Professora: por que tem 11?

Gabriela: 11 porque a ordem da sequência é que cada vez vai adicionando mais dois círculos, aí na figura 1 nós temos cinco círculos, na figura dois nós temos sete círculos, na figura 3 nós temos nove círculos, logo na próxima figura, a figura 4, seria no caso mais dois, que seria onze círculos.

Professora: certo

Gabriela escreve a resposta do problema *a*.

Gabriela: pronto, escrevi.

Professora: certo, vamos para a próxima então.

Gabriela: quantos círculos terá a figura 5? Justifique sua resposta. O motivo é pelo mesmo motivo que a primeira questão (se referindo ao problema *a*), que seria porque a ordem sempre vai adicionando mais dois círculos, e por conta disso como na figura 4 tem onze círculos mais 2 ficaria 13 círculos.

Professora: certo

Gabriela: pronto, agora vou escrever isso aí.

Gabriela: (leitura do problema *c*) quantos círculos terá a figura 10? Como você fez para encontrar essa quantidade? Deixa eu tentar descobrir aqui a ordem logo (nesse momento a aluna olha para as figuras já desenhadas). Ah, agora que eu percebi uma coisa, que eu poderia ter percebido mais cedo, é que está sempre assim: a figura 1 tinha cinco; a figura 2 tinha cinco mais dois, logo sete bolas; a figura 3 tem cinco mais quatro; a figura 4 tinha cinco mais seis; a figura 5 tinha cinco mais oito. Logo é só seguir essa sequência, mas agora deixa eu calcular.

Nesse momento a aluna abaixa as mãos e foca o olhar nas figuras já desenhadas - depois de 01min e 15seg ela começa a escrever no papel.

Gabriela: deixa eu fazer um teste (escreve no papel). É, exatamente.

Professora: como você está pensando?

Gabriela: eu fui pensando nessa ordem e eu fui checando de um em um para ver se eu percebia, aí eu percebi que a partir da figura 1 segue a ordem assim, eu já descobri a última resposta, mas é o seguinte: sempre faça assim - você conta a figura 1 como zero, a figura 2 como 1, aí 1 vezes 2 dois mais cinco. Aí a figura 3 menos 1, dois vezes dois, quatro mais cinco, sempre adiciona cinco no final. Aí segue a sequência até chegar no número que você quer.

Professora: e como você faria na figura 10?

Gabriela: a figura 10 seria (ao mesmo tempo que fala ela realiza a conta no papel): 10 menos 1, 9 vezes dois, $18 + 5$, que daria 23 círculos. Aí a partir daí só segue essa ordem para responder as outras perguntas. Por exemplo, na letra *d* (leitura do problema *d*): quantos círculos terá a figura 100? Explique como você fez para chegar nesse valor. Exatamente esse cálculo (a aluna realiza o cálculo no papel e fala ao mesmo tempo): 100 menos 1, que você desconsidera a primeira figura porque a gente considera como zero, 99 vezes dois, você calcula 99 vezes dois que dá 198, mais cinco, que dá 203.

Professora: certo

Gabriela: agora: escreva uma mensagem para um outro estudante indicando como descobrir o número de círculos da figura 200. Eu só vou escrever o mesmo cálculo.

Professora: mas veja, nessa pergunta ela já é um pouco diferente, ela pede para você escrever uma mensagem, pede pra você explicar a ele o deve ser feito para encontrar o número de círculos da figura 200.

Gabriela: tá certo, vou escrever e depois eu digo o que eu escrevi.

Alguns minutos depois

Gabriela: acho que ficou bom o que escreveu.

Professora: o que você escreveu?

Gabriela: para encontrar a quantidade de bolas do número 200, você precisa subtrair 1 dos 200, multiplicar o resultado por 2 e somar 5, pois a lógica desses círculos é que sempre o número de bolas será 5 mais o número da figura menos 1 multiplicado por 2.

Professora: certo

Gabriela: deixa eu ver o próximo aqui. Escreva uma mensagem para outro estudante indicando como descobrir o número de círculos em qualquer figura. Basicamente eu fiz isso agora, vou só pegar o finalzinho da letra *e* e colocar na *f*.

A aluna escreva a resposta do problema *f*.

Gabriela: foi.

Professora: você explicou como?

Gabriela: para descobrir o resultado basta pegar o número da figura subtrair 1, multiplicar por 2 e somar 5.

Professora: foi um pouco diferente do que você escreveu na anterior, você concorda?

Gabriela: sim, é um pouco diferente. É porque eu pensei que no contexto fica melhor eu escrever uma frase nova e adaptar, porque imagina só começar a frase assim: pois a lógica desses círculos é sempre que o número de bolas será 5 mais o número da figura menos 1 multiplicado por 2. Eu sinto que na *f* ficou melhor explicado.

Professora: certo, vamos resolver o problema *g* agora.

Gabriela: escreva uma fórmula para o número de círculos da figura *n*.

Professora: como você escreve isso?

Gabriela: eu só coloco assim, espera vou escrever aqui primeiro e depois eu falo, porque tem aspas essas coisas.

Professora: certo

A aluna escreve a fórmula: $[(n-1) \times 2] + 5$

Professora: isso que você escreveu é igual a que?

Gabriela: ãn?

Professora: isso que você escreveu aqui (aponta para a fórmula escrita), você consegue simplificar um pouco mais?

Gabriela: tirar essas coisinhas aqui (aponta para os colchetes) para ficar mais simples ainda?

Professora: isso. Você consegue simplificar mais?

Aluna escreve: $(n-1) \times 2 + 5$

Professora: dá para simplificar mais?

Gabriela: não que eu consiga perceber, mas eu vou fazer um teste aqui.

A aluna consegue chegar a $n + n + 3$.

Professora: você consegue simplificar ainda mais?

Gabriela: não que eu consiga perceber.

Transcrição Aluna Luiza

A aluna escreve na parte inferior das figuras 1, 2 e 3 a quantidade de círculos que cada uma tem.

Luiza: eu posso fazer uma pergunta?

Professora: pode.

Luiza: é porque na sequência primeiro eu achei que era de dois em dois, só que aí eu contei de novo a figura dois e... eu não estou entendendo qual é a sequência.

Professora: a sequência? O que você pensou primeiro? Que era de dois em dois? Por que não funciona?

Luiza: porque a figura 2... (nesse momento a aluna retoma a contagem da quantidade de círculos da figura 2), porque eu sou burra, né. É porque eu fiz assim (faz um risco no papel e apaga).

Professora: você fez como?

Luiza: porque eu contei como se um círculo dessa figura (aponta para a quantidade de círculos da figura 2) fosse dessa (aponta para a quantidade de círculos da figura 1).

Professora: entendi.

Luiza começa a escrever sua justificativa para o problema *a*.

Professora: lembre que você precisa justificar como encontrou o valor.

Luiza: sim, sim.

A aluna olha para as figuras já desenhadas e depois escreve algo.

Professora: você pode explicar o que você está pensando?

Luiza: como na letra *d* pergunta quantos círculos terá na figura 100 eu pensei em, ao invés de eu ir somando de dois em dois, que seria mais fácil se não estivesse perguntando um número tão alto, eu... Se eu soubesse quanto seria a cada número, qualquer número aleatório, e quando eu adicionasse dois iria funcionar, então estou tentando pegar um número baixo e tentando isso antes de eu pegar um número alto e não conseguir fazer.

Professora: certo.

A aluna escreve algo como resposta do problema *b*.

Luiza: posso fazer uma pergunta?

Professora: sim, pode fazer a pergunta que você quiser, sempre.

Luiza: está certo. Quando eu fiz o cálculo, da figura 5, eu fiz só porque eu somei mais dois. Mas na figura 10, eu poderia fazer de outro jeito para eu poder conseguir descobrir o número de qualquer figura.

Professora: vamos fazer o seguinte, o que você fez no problema *a*?

Luiza: eu somei dois, mas na *b* eu queria determinar um jeito de que eu conseguisse responder sem ir contando de dois em dois.

Professora: certo, então vamos fazer o seguinte. Observe as figuras e tente perceber alguma outra relação da figura, no número da figura, além de contar de dois em dois. Perceber alguma relação entre elas.

Luiza: assim, eu sei que a cada figura vai adicionar mais dois círculos, certo?

Professora: certo

Luiza: mas em toda figura vai crescendo o número sem adicionar essas coisas.

Professora: como assim?

Luiza: por exemplo, na figura 1 (a aluna aponta para a figura 1) tem cinco círculos, certo?

Professora: certo

Luiza: sendo que na figura 2 deveria ter seis, na figura 3 sete, e ir aumentando, certo?

Professora: mas você já percebeu que é de dois em dois!

Luiza: sim

Professora: aí na figura dois é mais dois. Mas você me falou que se levar esse raciocínio para uma figura muito grande vai ficar muito distante.

Luiza: é, é isso.

Professora: então, você consegue perceber alguma outra relação além de aumentar de dois em dois? Porque isso sabemos que acontece, mas será que você consegue encontrar algo além disso? Que possa funcionar para todas?

Luiza: todas são números ímpares?!

Professora: certo, mas isso vai te levar a encontrar o número da figura 100, por exemplo? Sem muita dificuldade?

Luiza: não.

Professora: será que tem algo a mais? Você já percebeu que aumenta de dois em dois e é ímpar, será que olhando para figura você consegue observar alguma outra relação que sempre funcione?

Luiza: o número da figura...

A aluna olha para as figuras já desenhadas.

Luiza: nessa figura aqui (aponta para a figura 1), nessa figura de número 1... eu não sei o que fazer.

Professora: vamos pensar, pensa mais um pouquinho.

A aluna pergunta desenha algo ao lado da figura 3.

Luiza: aqui (aponta para a figura 1)... não, não tem o menor sentido.

Professora: pode falar.

Luiza: pensei isso daqui (e desenha um círculo a mais na figura 1).

Professora: mas por que você desenharia um círculo a mais?

A aluna não responde, fica em silêncio.

Professora: você desenhou a figura 4?

Luiza: sim

Professora: com base nessas outras figuras (aponta para a figura 1, 2 e 3) essa figura 4 está desenhada corretamente?

Luiza: não.

Professora: por quê?

Luiza: porque eu só coloquei aqui uma figura e depois coloquei em cima. Eu coloquei aleatoriamente.

Professora: certo, mas vamos nessa estrutura que temos, sem o círculo que você desenhou, será que não há nenhuma relação entre o número de círculos e o número da figura? Ou alguma outra relação que você veja e que diga “com ela eu posso responder os problemas das figuras maiores”?

A estudante passa uns dois minutos pensando.

Luiza: eu não sei.

Professora: vamos lá. A figura 1 por exemplo, tem quantos círculos?

Luiza: cinco círculos.

Professora: e como eles estão dispostos?

Luiza: está em uma ordem.

Professora: qual é a ordem?

Luiza: do maior para o menor.

Professora: e quanto é o menor?

Luiza: o menor é dois.

Professora: dois. E o maior?

Luiza: três.

Professora: então na figura 1 você está dizendo que o menor é dois e o maior é três. É isso? Na figura 2, quem é o menor?

Luiza: o três.

Professora: e o maior?

Luiza: quatro.

Professora: então na figura 2 você está me dizendo que o menor é 3 e o maior é 4.

Luiza: sim

Professora: na figura 3, quem é o menor?

Luiza: é o 4.

Professora: e o maior?

Luiza: o cinco.

Professora: então vamos supor (já que não está desenhada), na figura 4, quem é o menor?

Luiza: é o cinco.

Professora: e o maior?

Luiza: é o seis.

Professora: cinco mais seis?

Luiza: onze, que é o resultado.

Professora: na figura 10, quem vai ser o menor?

Luiza: vai ser o 11

Professora: e o maior?

Luiza: o 12.

Professora: qual é o total de círculos?

Luiza: vai ser 23.

Professora: por quê?

Luiza: porque vai somar os números.

Professora: pronto, agora você justifica (se referindo a escrever a resposta do problema c) como você encontrou esse resultado.

A aluna inicia a escrita da resposta do problema c.

Professora: conseguiu fazer o problema d?

Luiza: consegui.

Professora: como você fez?

Luiza: eu fiz usando a mesma lógica dos desenhos e como o número que está pedindo é o 100 então eu somei mais 1 (a aluna aponta com o lápis para cima), que ficaria 101, e eu peguei, como se fosse [inaudível] em baixo coloquei 102, e daí deu 203.

Professora: você pode falar um pouco mais alto, porque eu quase não ouvi o que você falou.

Luiza: como na questão tem pedindo o número 100, eu usei a mesma lógica dos desenhos, peguei o número 100 e somei mais 1, e depois, separadamente, somei mais dois. E depois eu somei esses números que deu, e deu 203.

Professora: certo.

A aluna inicia a resposta do problema e.

Luiza: pronto

Professora: você respondeu a e?

Luiza: sim.

Professora: o que você escreveu?

Luiza: ele tem pedindo para você responder, mandar uma mensagem para quem quiser descobrir o número 200. Aí eu falei assim: que se você quiser encontrar o número 200, você tem que pensar nele como duas fileiras e uma terá um número menor de círculos, que será o número 201, e o maior, que será 202. Então você só deverá somá-los para obter o resultado.

Professora: certo, que vai da quanto?

Luiza: 203.

Professora: 201 mais 202 é 203? Quanto é 201 mais 202?

Luiza: 203

Professora: certeza?

Luiza: 201 mais 202 é 203.

Professora: faça a conta.

Nesse momento a aluna realiza a adição no papel.

Luiza: ai meu Deus! (expressão de surpresa pois encontrou o resultado correto que é 403).

A aluna escreve a resposta correta no problema *e*.

Começa a resolução do problema *f*.

Luiza: eu vou fazer a letra *g* agora.

Professora: ok, mas como você fez a *f*?

Luiza: a letra *f* está pedindo para escrever uma mensagem para outro estudante indicando como descobrir o número de círculos de qualquer figura. Então eu pedi para botarem o dobro, tipo, o dobro da figura 100 deu 200 e somar mais três. Então o resultado de qualquer número vai ser o dobro mais três.

Professora: o dobro mais três? Certo. Você percebeu isso como?

Luiza: quando você pediu para eu ver as relações dos números e depois que eu percebi, eu entendi que ela não está pedindo para você ver o número de fileiras, ou qualquer coisa assim, ela está pedindo para você multiplicar por dois ou somar o mesmo número e depois adicionar mais três.

Professora: muito bem, vamos fazer o problema *g* agora.

Em poucos segundos

Luiza: na letra *g* está pedindo para você escrever uma fórmula de como resolver do número *n*, então eu usei o *n* como qualquer outro número, e como eu tinha explicado em cima (referência a resposta escrita do problema *f*) eu botei para multiplicar e depois somar.

Professora: muito bem. E essa fórmula funciona para todas as figuras?

Luiza: sim, ela funciona para qualquer número.

Transcrição Aluno Pedro

Leitura dos problemas – o aluno vai respondendo a partir da leitura dos problemas.

Professora: observe a sequência a seguir e responda os seguintes problemas (nesse momento o aluno olha fixamente para as figuras desenhadas). Então você vai observar a sequência e responder. Quantos círculos terá a figura 4? Justifique sua resposta.

Pedro: a figura 4 ela terá 11 círculos.

Professora: por que?

Pedro: porque a cada figura (aponta para a figura 1, 2 e 3) aumenta dois círculos.

Professora: certo, vamos para as próximas. Quantos círculos terá a figura 5? Pede para justificar também.

Pedro: a figura ela terá 13.

Professora: o problema *c* pergunta: quantos círculos terá a figura 10? Como você fez para encontrar esta quantidade?

Pedro: deixa só eu fazer os cálculos...

Professora: como você fez?

Pedro: eu contei como se tivesse só três (nesse momento ele faz gestos sobre a figura 1) e tivesse mais dois, aí eu contei como se cada um aumentasse dois. Aí eu fiz 10 vezes dois que dá 20 mais os três da figura 1, 23.

Professora: como é, me explica novamente por favor.

Pedro: aqui na figura 1, eu vi que cada figura aumenta 2, então eu contei como se tivesse uma figura 0 (gesto sobre a parte em branco no papel) fosse três, três bolinhas (indicando as três bolinhas na figura 1), aí na figura aumenta dois (gestos indicando o local que está posicionado essas duas bolinhas na figura 1), ou seja, um vezes dois, aqui (aponta para a figura 2) fosse as três mais quatro, dois vezes dois quatro, e aqui fosse aquelas três mais seis, três (aponta para o número da figura 3) vezes dois dá seis. Aí eu contei dois vezes 10 dá 20, mais três (aponta para a figura imaginária 0).

Professora: certo, vamos continuar. Quantos círculos terá a figura 100? Explique o que você fez para chegar neste valor.

Pedro: 203.

Professora: como você fez?

Pedro: foi o mesmo raciocínio, eu fiz assim: eu multipliquei o número da figura por dois e adicionei três, porque tem três bolinhas e sempre aumenta dois.

Professora: vamos continuar. Escreva uma mensagem para um outro estudante indiciando como descobrir o número de círculos da figura 200.

Pedro: uma mensagem?

Professora: isso. Como se fosse um amigo seu da escola, o que você escreveria para ele?

O aluno escreve: $200 \times 2 + 3 = 403$

Professora: você só escreveria isso para ele?

Pedro: sim, sim.

Professora: certo. O problema *f* diz assim: escreva uma mensagem para um outro estudante indicando como descobrir o número de círculos em qualquer figura.

Pedro: posso escrever?

Professora: pode sim.

Nesse momento o desenho realiza desenhos na folha da tarefa

Pedro: pronto, isso aqui é um exemplo.

Professora: certo, me explique o que você fez. Lembrando que o problema *f* pede uma mensagem indicando como descobrir o número de círculos em qualquer figura.

Pedro: aqui eu coloquei um exemplo, aí aqui tem tipo figura 7, você pega o número da figura e multiplica por dois mais três, esses três são as três primeiras e esse dois, sete vezes dois daria o resto das bolinhas, que são 14. Então 14 mais 3 aqui dá 17 bolas.

Professora: certo, aí você colocou um exemplo. Mas quando eu te pergunto ‘qualquer figura’, sem um número específico, você responderia como?

Pedro: você pega o número da figura e multiplica por dois mais três?

Professora: você pode escrever isso, por favor?

Pedro: claro.

O aluno escreve a resposta do problema *f*.

Professora: escreva uma fórmula para o número de círculos da figura *n*.

Pedro: como assim?

Professora: *n* é um número qualquer, ele pode ser 1, pode ser 2, pode 1000, *n* pode ser qualquer número da figura.

Pedro: ah, entendi, para a figura *n*.

O aluno escreve a fórmula: $n \cdot 2 + 3$

Professora: você concorda comigo que isso é igual à $2n + 3$?

Pedro: sim.

Ao finalizar as questões, o aluno olha para o desenho da figura *f* e afirma:

Pedro: eita, aqui não tem 14 bolinhas, tem alguma coisa errada. Eita, acho que eu coloquei o número de bolinhas errado, mas o meu raciocínio foi correto, mas o número de bolinhas eu botei errado.

Professora: uma pergunta, por que você mudou a estratégia do problema *b* para o problema *c*?

Pedro: porque nesse aqui (problema *b*) o número era muito pequeno, aí quando o número é muito pequeno aí... eu não fui logo pro raciocínio porque era a maneira mais rápida, eu não precisaria pensar o raciocínio. Mas aí como o 10 era muito grande aí seria mais rápido eu fazer o raciocínio, usar o raciocínio e descobrir todas, bem facilmente, só multiplicar por dois mais três.

Transcrição Aluno Danilo

Leitura dos problemas da tarefa.

Professora: qual a ideia que você está usando?

Danilo: eu tô usando... a figura que eu estou agora (nesse momento o aluno aponta para a figura 2), no caso seria a quantidade que eu tenho agora vou representar por *x* mais 2 vezes o número da imagem.

Professora: x? Esse x seria o que?

Danilo: aí seria, 1, 2, 3, 4...

Professora: no caso seria 1 mais dois vezes um?

Danilo: não, seria cinco (aponta para os círculos da figura 1) mais dois... cinco mais dois vezes um.

Danilo responde todos os problemas e avisa que terminou.

Danilo: terminei.

Professora: você pode me explicar como você fez os problemas, por favor.

Danilo: é porque em cada figura aumentam duas bolinhas, então para descobrir a figura 4 basta colocar a figura 3 mais dois que dá a figura 4, aí quatro mais dois que dá a cinco. Só que aí a figura 10, ao invés de ficar somando eu tentei criar uma fórmula, que seria 3, que seria a quantidade de bolinhas iniciais da figura 0.

Professora: como assim?

Danilo: três seria meio que a figura inicial, se eu comesse com cinco iria dar o dobro, então eu escolhi 3, como se a figura (aponta para a figura 1) fosse a segunda e a 0 fosse a primeira realmente.

Professora: entendi.

Danilo: aí ficaria 3 mais dois vezes o número de ordem da figura.

Professora: primeiro você fez a fórmula para depois responder os outros problemas?

Danilo: eu fiz a fórmula e depois eu corriji o que estava errado.

Professora: certo, pode continuar.

Danilo: é duas vezes o número de ordem, porque assim no primeiro aumentariam dois, três mais dois da cinco. No segundo (a segunda figura) três mais, que seria o primeiro, como são duas figuras aumentaria dois duas vezes, então seria duas vezes dois, depois aumentaria três vezes.

Professora: você está fazendo como se a figura 0 tivesse três círculos?

Danilo: é, como se a figura fosse três. Aí o número da figura iria aumentando de dois em dois, aí figura 1 aumenta dois; figura dois aumenta quatro. Então o jeito que eu dei foi: duas vezes o número da figura.

Professora: o que você escreveu no problema f?

Danilo: que para resolver basta usar a fórmula abaixo, não é necessária nenhuma outra explicação muito complexa porque basta usar a fórmula que já resolve. E a fórmula é 3 mais 2 vezes o número da figura.

Transcrição Aluna Juliana

Leitura dos problemas por parte da professora.

Juliana conta a quantidade de círculos com a ajuda do lápis.

Professora: como você fez o problema c?

Juliana: eu fui somando de dois em dois até a 10 (nesse momento a Juliana aponta com o lápis para a sequência que ela criou, simbolizando o “de dois em dois”).

Professora: deu quanto ao todo?

Juliana: vinte e três.

Juliana passa um tempo resolvendo o problema d.

Professora: como você está resolvendo o problema d?

Juliana: eu já fiz uma parecida, mas faz muito tempo, então fica difícil de me lembrar.

Professora: mas como você está fazendo para chegar à quantidade de círculos da figura 100?

Juliana: eu estou... assim... é... de 1 para 10 eu fiz a soma de quantos dois somariam, aí é 18. Aí eu ia fazer 18 vezes 9 para 100, é... e depois ia... somar mais 18 antes.

Professora: pensa se essa ideia funciona também para as figuras que você já conhece.

A Juliana faz alguns rabiscos na folha de respostas.

Juliana: eu não estou conseguindo.

Professora: vamos fazer o seguinte, vamos voltar para essas figuras que você já tem (referência às figuras 1, 2 e 3) e perceber se tem alguma outra relação além dessa que você percebeu. Observa as figuras, a quantidade de círculos em relação ao número da figura. Será que tem alguma relação?

A Juliana começa a responder o problema e.

Professora: conseguiu pensar em alguma coisa?

Juliana: sim.

Professora: me fala como você fez então.

Juliana: 203??

Professora: como você chegou nesse resultado?

Juliana: aqui (aponta para a quantidade de círculos da figura 1), subtraindo (aponta para o número da figura) da 4; aqui (aponta para a quantidade de círculos da figura 2) subtraindo da 5; aqui (aponta para a quantidade de círculos da figura 3) subtraindo (aponta para a quantidade de círculos da figura 3) da 6.

Professora: não entendi, você pode repetir? Subtraindo o que? E do que?

Juliana: os círculos, aqui tem cinco círculos (aponta para os círculos da figura 1), aí cinco menos a figura (aponta para o número da figura 1) daria 4; aí aqui teria (aponta para os círculos da figura 2) 4, 5, 6, 7 (conta o número de círculos da figura 2)... aí 7 subtraindo 2 (aponta para o número da figura 2) aqui da 5. Aí aqui o 9 (aponta para os círculos da figura 3) subtraindo 3 (aponta para o número da figura 3) aqui da 6.

Professora: e o que isso te ajuda a encontrar o número de círculos da figura 100?

Juliana: a subtração fica em sequência (nesse momento ela aponta para a figura 1, figura 2 e figura 3 já desenhadas), aí fica uma diferença de... que esse daqui (aponta para quantidade de círculos da figura 3) subtraindo (aponta para o número da figura 3) fica aumentando... aí aqui (apontando para o número da figura 3) dá uma diferença de 3. Cada um tem uma diferença de três. Aí eu coloquei 103, que seria a figura 100... subtraindo a quantidade de círculos com a figura 100 daria 103. Aí eu fazendo assim a quantidade de círculos daria 203.

Professora: certo. Justifique como você encontrou esse valor (sinalizando que era para escrever sua resposta).

Juliana: terminei, é para fazer essa agora (apontando para o problema e).

Professora: isso.

Quando finaliza a resposta do e Juliana sinaliza que finalizou.

Professora: certo, como você respondeu?

Juliana: eu pus que para descobrir quanto é o número de círculos da figura precisaria somar o número da figura mais três... com o número da figura mais três.

Professora: como é? Repete, o número da figura...

Juliana: com o número da figura mais três.

Professora: daria quanto?

Juliana: 403.

Professora: certo, como você chegou nessa ideia?

Juliana: é... eu fui vendo que o número daqui (aponta para a figura 1)... Que o número de círculos menos o número da figura dava três a mais que a figura.

Professora: três a mais que a figura. O número de círculos, por exemplo, aqui tem cinco (fazendo referência à figura 1), menos um, daria três a mais que o número da figura. É isso?

Juliana: sim, é isso.

Professora: certo.

Juliana: é para fazer esse outro?

Professora: isso. É para você escrever uma mensagem para outro estudante indicando como descobrir o número de círculos de qualquer figura. Nesse já não estamos trabalhando com um número, é com uma figura qualquer.

Juliana fica sem ver muito sentindo nessa pergunta.

Professora: como você respondeu?

Juliana: contando o padrão entre as figuras.

Professora: contando o padrão? Mas você não tinha respondido de outra forma o problema e?

Juliana: aqui (aponta para a resposta do problema e). Que a quantidade de círculos menos a figura tinha três de diferença da figura.

Professora: isso. E como você respondeu o problema e?

Juliana: que somar o número da figura com o número da figura mais três.

Professora: essa resposta não pode ser a do problema *f*? Não é equivalente

Juliana: aaa, sim, sim.

Professora: e o problema *g*, como faríamos?

Juliana retoma a leitura dos problemas *e* e *f* e em 20 segundos responde o problema *g*.

Juliana: eu pus isso aqui, $n + (n + 3)$

Professora: isso é igual a alguma coisa, você pode simplificar mais ainda essa fórmula?

Juliana: sim.

Professora: n ao quadrado?

Juliana: aaa não, desculpa. Estou doida. É, $2n$?

Professora: $2n + 3n$? (essa fórmula é a que estava escrita na folha do estudante).

Juliana: $2n + 3$.

Juliana: eu arrumo esse daqui (referindo-se ao problema *f*).

Professora: sim, se você quiser.

Juliana: eu entendi que está perguntando sobre qualquer tipo de figura, não sobre esses exemplos (referindo-se as figuras 1, 2 e 3).

Professora: isso, pode ser a figura 1 ou 10000000, qualquer uma.

Juliana: pronto.

Professora: o que você escreveu?

Juliana: somando o número da figura mais o número da figura mais três.

Professora: você pode me explicar mais uma vez como você chegou nesse resultado?

Juliana: sim, primeiro eu percebi que tinha dois de diferença entre cada um (nesse momento ela aponta para as figuras já desenhadas). Ai depois eu fui... eu subtraí esses daqui.

Professora: esse daqui o que que você subtraiu?

Juliana: a quantidade de círculos com a figura.

Professora: certo.

Juliana: aí eu subtraí em todos, aí eu vi que ficava na sequência, ou seja, todos ficavam mais três.

Professora: o que mais três?

Juliana: a figura mais o número da figura mais três. A quantidade de círculos menos o número da figura era o número da figura mais três.

Professora: certo. E por que você não usou aquela estratégia de somar de dois em dois?

Juliana: aaa, porque ia ficar muito grande.