



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

INVESTIGANDO DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DE ESTUDANTES
EM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

ELICLÉCIA ROBERTA SILVA DE MELO

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CARUARU

27 de Fevereiro de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ELICLÉCIA ROBERTA SILVA DE MELO

INVESTIGANDO DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DE ESTUDANTES
EM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Núcleo de Formação
Docente da Universidade Federal de
Pernambuco, Campus do Agreste, como
requisito parcial para obtenção do título
de licenciando em Matemática.

Orientador: Dr. Marcos Luiz Henrique

CARUARU

27 de Fevereiro de 2015

Catálogo na fonte:
Bibliotecária - Simone Xavier CRB/4-124

M528i Melo, Eliclécia Roberta Silva de.
Investigando dificuldades na aprendizagem de estudantes em cálculo diferencial e integral I. / Eliclécia Roberta Silva de Melo. - Caruaru: O Autor, 2015.
80f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Marcos Luiz Henrique
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2015.
Inclui referências bibliográficas

1. Cálculo diferencial. 2. Cálculo integral. 3. Dificuldades de aprendizagem. 4. Análise de erros (Matemática). I. Henrique, Marcos Luiz. (Orientador). II. II. Título

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2015-074)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO MATEMÁTICA-LICENCIATURA



ATA DE DEFESA DE TCC DO CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO - CAMPUS CARUARU

Às 14h do dia 27 do mês de fevereiro do ano de 2015, (16h, 27/02/2015) na sala do LEMAPE do Centro Acadêmico do Agreste reuniu-se a banca examinadora composta pelos (as) professores (as) Marcos Luiz Henrique (orientador - UFPE/CAA), José Marcos da Silva (examinador externo - UFPE/CAA) e Cristiane de Arimatéa Rocha (examinadora interna - UFPE/CAA) para defesa pública de **Eliclécia Roberta Silva de Melo** do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática intitulado **Investigando Dificuldades na Aprendizagem de Estudantes em Cálculo Diferencial e Integral I**. A licencianda apresentou o trabalho e foi arguido pela banca que por unanimidade atribuiu a menção **Aprovada**, com a nota 10,0.

Orientador:

Examinador 1:

Examinadora 2:

Dedico este trabalho a minha mãe e minha avó, Luzinete e Maria Josefa, por sempre me apoiarem em minhas decisões de vida. Ao meu irmão, Emerson, pelo apoio, cuidado e preocupação constante. Como também aos meus amigos e professores que nunca me deixaram desistir.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida, pela fé e perseverança para vencer os obstáculos;

Ao meu orientador, Profº Dr. Marcos Luiz Henrique, pela confiança depositada, disponibilidade, paciência e compreensão em momentos difíceis. Obrigada por tudo!

A professora Cristiane de Arimatéa Rocha, pelas suas contribuições para este trabalho, que com seu jeito compreensível soube entender cada dificuldade encontrada nessa jornada;

Ao professor José Marcos da Silva que sempre se dispôs a colaborar durante minha formação acadêmica;

Ao professor Gleybson Miguel da Silva que disponibilizou sua turma e a avaliação da disciplina como instrumento de coleta de dados, contribuindo assim para a realização deste trabalho e que em nenhum momento se omitiu em fornecer informações;

A minha mãe e minha avó, pela orientação, dedicação, incentivo e confiança depositada em mim durante toda minha vida;

A todos os professores do Núcleo de Formação Docente da UFPE-CAA, especialmente àqueles que contribuíram para minha formação acadêmica;

Aos participantes desta pesquisa, que se dispuseram a participarem, pela disponibilidade e pela atenção, sem as quais este trabalho não teria se realizado;

Ao meu irmão, Emerson, que sempre esteve disposto a ajudar-me no que era necessário;

Aos colegas da turma que colaboraram com as diversas discussões sobre a prática docente;

Aos meus amigos que torceram e continuam torcendo pelas minhas conquistas;

Enfim, sou grata a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para realização desta pesquisa. O meu muito obrigada a todos!!!

De que me irei ocupar no céu, durante toda a Eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver? (Augustin Louis Cauchy)

RESUMO

A presente pesquisa objetivou identificar as dificuldades de aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I dos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Campus Acadêmico do Agreste – CAA, no primeiro semestre de 2014. Assim, a pesquisa foi conduzida pela seguinte questão: quais são as possíveis causas dos erros cometidos pelos alunos de Cálculo Diferencial e Integral I? A investigação teve caráter qualitativo e quantitativo e se deu por meio da análise de um Questionário, de um Teste e da primeira avaliação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Os erros analisados constaram de um Teste e da primeira avaliação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, realizado pelos estudantes do 3º período do referido curso, tomamos como base para análise a proposta de Cury (2004), porém foram categorizados de acordo com a proposta de Movshovitz-Hadar et al (1987). Por meio das análises dos dados coletados do questionário aplicado, foi possível identificar os principais fatores contribuintes para o baixo desempenho dos estudantes na referida disciplina, entre eles a falta de tempo para se dedicar ao estudo da disciplina e a metodologia utilizada pelo professor. Já a análise de erros cometidos pelos investigados apontou que muitos alunos, mesmo no curso superior, ainda apresentam dificuldades em conhecimentos básicos de Matemática, tais como manipulações algébricas e função, especificamente em esboço de gráficos e domínio.

Palavras-chaves: Cálculo Diferencial e Integral I, Dificuldades na aprendizagem, Análise de erros.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	14
2. BREVE HISTÓRICO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	20
2.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E DO CÁLCULO INTEGRAL.....	22
3. O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I.....	25
3.1 MUDANÇAS NOS PERFIS CURRICULARES DO CURSO COM RELAÇÃO À DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I.....	25
3.2 ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UFPE-CAA	28
4. ANÁLISE DE ERROS EM MATEMÁTICA.....	32
4.1 ERROS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.....	33
5. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	38
5.1 COLETAS DE DADOS.....	38
5.1.1 PRIMEIRO INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS – QUESTIONÁRIO	38
5.1.2 SEGUNDO INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS – TESTE	39
5.1.3 TERCEIRO INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS – 1ª AVALIAÇÃO DA DISCIPLINA.....	40
5.2 ANÁLISES DOS DADOS.....	40
6. ANÁLISES E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	42
6.1 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DO PRIMEIRO INSTRUMENTO- QUESTIONÁRIO	42
6.2 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DO TESTE	44
6.3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DA 1ª AVALIAÇÃO DA DISCIPLINA	57
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	70
REFERÊNCIAS	75
APÊNDICES	78

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Questão e do Teste Inicial.....	46
Figura 2: Protocolo referente à primeira questão do sujeito 23.....	46
Figura 3: Questão 2 do Teste Inicial.	47
Figura 4: Protocolo referente ao item 2.1 da segunda questão do sujeito 8.	47
Figura 5: Protocolo referente ao item 2.1 da segunda questão do sujeito 4.	48
Figura 6: Protocolo referente ao item 2.2 da segunda questão do sujeito 6.	48
Figura 7: Protocolo referente ao item 2.3 da segunda questão do sujeito 24.	49
Figura 8: Protocolo referente ao item 2.3 da segunda questão do sujeito 12.	49
Figura 9: Protocolo referente ao item 2.3 da segunda questão do sujeito 3.	49
Figura 10: Protocolo referente ao item 2.3 da segunda questão do sujeito 19.	49
Figura 11: Protocolo referente ao item 2.3 da segunda questão do sujeito 5.	50
Figura 12: Protocolo referente ao item 2.4 da segunda questão do sujeito 12.	50
Figura 13: Protocolo referente ao item 2.4 da segunda questão do sujeito 3.	50
Figura 14: Protocolo referente ao item 2.4 da segunda questão do sujeito 7.	50
Figura 15: Questão 3 do Teste Inicial.	51
Figura 16: Protocolo referente ao item 3.1 da terceira questão do sujeito 3.	52
Figura 17: Protocolo referente ao item 3.2 da terceira questão do sujeito 1.	52
Figura 18: Protocolo referente ao item 3.2 da terceira questão do sujeito 4.	52
Figura 19: Protocolo referente ao item 3.3 da terceira questão do sujeito 19.	53
Figura 20: Protocolo referente ao item 3.3 da terceira questão do sujeito 9.	53
Figura 21: Questão 4 do Teste Inicial.	54
Figura 22: Protocolo referente ao item 4.1 da quarta questão do sujeito 20.	54
Figura 23: Protocolo referente ao item 4.1 da quarta questão do sujeito 21.	55
Figura 24: Protocolo referente ao item 4.2 da quarta questão do sujeito 11.	55
Figura 25: Protocolo referente ao item 4.2 da quarta questão do sujeito 21.	55
Figura 26: Protocolo referente ao item 4.2 da quarta questão do sujeito 20.	56
Figura 27: Protocolo referente ao item 4.3 da quarta questão do sujeito 14.	56
Figura 28: Protocolo referente ao item 4.4 da quarta questão do sujeito 21.	56
Figura 29: Questão 1 da 1ª Avaliação.	59
Figura 30: Protocolo referente ao item 1.A da primeira questão do sujeito 11.	59
Figura 31: Protocolo referente ao item 1.A da primeira questão do sujeito 18.	60
Figura 32: Protocolo referente ao item 1.A da primeira questão do sujeito 13.	60
Figura 33: Protocolo referente ao item 1.A da primeira questão do sujeito 21.	60
Figura 34: Protocolo referente ao item 1.B da primeira questão do sujeito 5.	61
Figura 35: Protocolo referente ao item 1.B da primeira questão do sujeito 16.	61
Figura 36: Protocolo referente ao item 1.B da primeira questão do sujeito 4.	62
Figura 37: Protocolo referente ao item 1.C da primeira questão do sujeito 5.	62
Figura 38: Protocolo referente ao item 1.D da primeira questão do sujeito 16.	63
Figura 39: Protocolo referente ao item 1.D da primeira questão do sujeito 14.	63
Figura 40: Protocolo referente ao item 1.D da primeira questão do sujeito 5.	63
Figura 41: Protocolo referente ao item 1.E da primeira questão do sujeito 12.	64
Figura 42: Protocolo referente ao item 1.E da primeira questão do sujeito 7.	64
Figura 43: Questão 2 da 1ª Avaliação.	65
Figura 44: Protocolo referente segunda questão do sujeito 22.	66
Figura 45: Protocolo referente segunda questão do sujeito 12.	66
Figura 46: Questão 3 da 1ª Avaliação.	67

Figura 47: Protocolo referente terceira questão do sujeito 10.....	67
Figura 48: Questão 4 da 1ª Avaliação.	68
Figura 49: Protocolo referente ao item A da quarta questão do sujeito 7.	68
Figura 50: Protocolo referente ao item B da quarta questão do sujeito 1.....	69
Figura 51: Protocolo referente ao item B da quarta questão do sujeito 7.....	69
Figura 52: Protocolo referente ao item B da quarta questão do sujeito 24.....	69
Figura 53: Protocolo referente ao item C da quarta questão do sujeito 5.....	70
Figura 54: Protocolo referente ao item C da quarta questão do sujeito 16.....	70

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Das disciplinas citadas e cursadas pelos alunos.	43
Gráfico 2: Número de alunos por quantidade de acertos	45

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Situação dos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.	29
Tabela 2: Erros e acertos por questões do Teste Inicial.	44
Tabela 3: Erros e acertos por questões da 1ª avaliação.	57

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos o ensino do Cálculo Diferencial e Integral I tem sido objeto de várias pesquisas em razão do alto índice de retenção e evasão nesta disciplina. Sabemos que o baixo grau de aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral I interfere de forma direta no desempenho dos discentes nas demais disciplinas do Curso de Licenciatura em Matemática, estudadas no decorrer do curso, visto que ela é uma base primordial para o aprendizado dos outros Cálculos.

Vários estudiosos apontam diversos fatores que afetam no desempenho dos alunos nesta disciplina, como por exemplo, Rezende (2003), Barreto (1995), Marin (2009), Marcatto e Lima (2013), Santos e Matos (2012), Barbosa, Gomes e Lopes (1994), Soares de Mello e Soares de Mello (2007), Íris, Vieira, Miranda e Silva (2011) e dentre outros.

Santos e Matos (2012) em seu artigo sobre o ensino de Cálculo Diferencial e Integral I no Curso de Licenciatura em Matemática investigaram os obstáculos que influenciam o alto índice de reprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Eles utilizaram a metodologia de estudo de casos por meio de um Questionário aplicados com 12 alunos matriculados no curso de Licenciatura em Matemática e 3 professores da mesma instituição de ensino que lecionaram ou lecionava a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I.

Aplicaram dois tipos de Questionários diferentes, um para os alunos, outro para os professores. No Questionário dos professores foram abordados: índices de reprovação e evasão; dificuldades apresentadas pelos alunos e postura do professor diante destas; desenvolvimento das aulas e postura diante do erro. Já no Questionário dos alunos, este teve como objetivo verificar os possíveis obstáculos de natureza epistemológica, didática, emocional, material ou outros no processo de aprendizagem, explicam Santos e Matos (2012).

Com a análise dos Questionários, identificaram alguns obstáculos que influenciam no alto índice de reprovação em Cálculo, referentes ao emocional, ou mesmo fatores epistemológicos, didáticos, metodologia do professor, as lacunas com relação aos pré-requisitos, a falta de raciocínio, falta de motivação por parte dos alunos de aprenderem os conteúdos apresentados. Alguns professores que participaram da pesquisa também apontaram como obstáculo o grau de abstração da disciplina.

De acordo com Soares de Mello e Soares de Mello (2007), a não compreensão da ideia de infinidade também é um dos fatores responsáveis pela não compreensão dos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral I, visto que os alunos estão acostumados a trabalhar apenas com quantidades finitas.

Em seu artigo, Íris, Vieira, Miranda e Silva (2011), que investigaram as dificuldades dos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, analisaram e classificaram os principais erros.

Para a obtenção dos dados foram aplicados Questionários aos alunos de três turmas (3º, 5º, 7º períodos) que cursavam ou já tinham cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I até o primeiro semestre de 2011. Já para os 3 professores escolhidos também como sujeito foram realizadas entrevistas com objetivo de identificar as dificuldades enfrentadas pelo professor na sua prática docente, e também conhecer melhor as experiências vivenciadas por este em sala de aula e que estão relacionadas com o processo de ensino aprendizagem desta disciplina. Analisaram também as avaliações dos alunos a fim de identificarem os principais erros.

Com base nos Questionários e entrevistas os pesquisadores identificaram como principais fatores que contribuem para o baixo rendimento na referida disciplina foram: a falta de tempo dos alunos para se dedicarem à disciplina fora da sala de aula, salas de aula com número excessivo de alunos e os critérios de avaliação utilizados pelo professor, traçando assim uma auto avaliação sobre o desempenho dos sujeitos no processo ensino-aprendizagem.

Já a análise de erros apontou que muitos alunos, mesmo no curso superior, ainda apresentam dificuldades em conteúdos do Ensino Fundamental e Médio, tais como manipulações algébricas e construção de gráficos, diz IRIAS, VIEIRA, MIRANDA e SILVA, (2011), afetando assim na qualidade do processo de ensino e aprendizagem.

Um motivo apontado por vários professores de não dar a devida fundamentação aos conteúdos da disciplina, dando ênfase mais na parte operacional, é devido à extensa ementa a se cumprir em apenas um período (60h), causando assim um baixo entendimento conceitual por parte dos alunos referentes aos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral I.

Outra justificativa também seria que muitos alunos sabem resolver diversos problemas, mas não sabem o que estão resolvendo, ou seja, há uma falta de compreensão, de modo que eles resolvem grande parte dos problemas com conhecimentos que são verdadeiros para alguns problemas, porém não são válidos para

todos. Desta forma, a falta de não compreender o que está estudando deixa sem sentido o estudo da disciplina.

Para Soares de Mello e Soares de Mello (2007, p.3), esta realidade não é diferente no ensino de Cálculo Diferencial e Integral I, principalmente nos cursos de Matemática.

Assim, sem querer eliminar todo o aprendizado operacional, deve-se levantar a questão da introdução do ensino conceitual no Cálculo. O correto entendimento do que é feito e porque é feito, o que não deve ser confundido com o ensino igualmente mecanicista de demonstrações, tão comum nos cursos de Matemática. Outro ponto bastante questionado pelos alunos é a utilidade desses conteúdos cobrados nesta disciplina. Isto é uma prova de que os alunos não sabem o que estão fazendo ao resolverem questões referentes a limite, derivada e integral, ou seja, não conhecem bem os conceitos envolvidos ao resolverem questões que envolvem esses assuntos, visto que os conteúdos ensinados tem grande aplicabilidade em diversas áreas.

Um fator apontado pelos autores Soares de Mello e Soares de Mello (2007), que poderia ajudar a motivar os alunos a estudar a disciplina foi usar a História e a aplicabilidade do Cálculo Diferencial e Integral I junto à disciplina para dar sentido aos conteúdos visto na disciplina e mostrar que o mesmo surgiu a partir de necessidades humanas.

Assim ficaria mais fácil de mudarmos opiniões que o Cálculo serve apenas para reprovar grande parte dos alunos e contribuindo desta forma no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I.

Um fator comum citado por Marcatto e Lima (2013), Rezende (2003), Santos (1994), Barbosa, Gomes e Lopes (1994) que afeta no ensino e aprendizagem desta disciplina é a falta de base oriunda do Ensino Básico, porém na maioria dos cursos existem pré-requisitos para cursar Cálculo Diferencial e Integral I com o objetivo de sanar as lacunas existentes na formação em Matemática no Ensino Básico.

No entanto, estas disciplinas, não suprem as dificuldades apresentadas pelos alunos ao estudarem os conteúdos do Cálculo, pois a lacuna existente nos conhecimentos que são pré-requisitos continua sendo um dos fatores que mais se destacam como obstáculo para o ensino e aprendizagem, ou seja, as disciplinas tidas como pré-requisitos ou até mesmo os conteúdos que são pré-requisitos é um importante fator a questionarmos e repensarmos, pois não adiantam termos algumas disciplinas

como pré-requisitos se essas não são capazes de suprir a falta de base proveniente do Ensino Básico.

Marin (2009, p. 28) em sua dissertação elenca possíveis causas que interferem de forma negativa o ensino de Cálculo. São elas:

- Cálculo é uma disciplina de transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior;
- Cálculo, por ser uma disciplina que, em muitas universidades, está no primeiro semestre, possui um grande número de alunos em sala;
- A alta deficiência pela maioria dos alunos ao entrar na universidade, oriunda da sua formação anterior tem prejudicado seu desempenho nas etapas seguintes;
- O aluno vem com uma formação precária do Ensino Médio. Então o professor tenta sanar algumas dificuldades e acaba condensando os conteúdos que devem ser ministrados na disciplina porque a carga horária é insuficiente. Isso compromete esta e outras disciplinas que dependem do Cálculo;
- O professor que ministra aula no curso superior, principalmente em universidades privadas, trabalha como horista e, muitas vezes, ministra muitas aulas em mais de uma universidade, não tendo tempo de entrar em contato com novas práticas pedagógicas;
- A grande quantidade de matéria a ser exposta, faz com que a aula siga um ritmo acelerado, havendo pouco espaço para o aluno pensar e questionar.

Note que a falta de base oriunda do Ensino Básico por parte dos alunos também é citada como possíveis causas que interferem de forma negativa no ensino de Cálculo por Marin (2009, p.28).

Barreto (1995, p.4) também cita algumas causas dos obstáculos apresentados pelos alunos nos cursos de cálculo.

As causas são muitas e já bem conhecidas, principalmente a má formação adquirida durante o 1º e 2º graus, de onde recebemos um grande contingente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com pouca capacidade crítica, sem hábitos de estudar e, conseqüentemente, bastante inseguro.

Assim, esse trabalho surgiu com a preocupação do grande número de alunos em sala e o índice de evasão no curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I da Universidade Federal de Pernambuco – Campus Acadêmico do Agreste (UFPE-CAA).

Diante de tudo isto, o problema da presente pesquisa ficou delimitado da seguinte forma: **quais são as possíveis causas dos erros cometidos pelos alunos de Cálculo Diferencial e Integral I?**

Espera-se, com esta investigação, contribuir para reflexões e discussões a respeito do ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo diferencial e Integral I, de forma a subsidiar a discursão do Projeto Político Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática em relação ao ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo I da UFPE-CAA e seu pré-requisito.

Assim, com o intuito de contribuir para a aprendizagem dos acadêmicos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I no curso de Licenciatura em Matemática, buscou-se investigar e discutir alguns fatores que afetam o desempenho dos alunos na referida disciplina.

O objetivo geral da pesquisa foi identificar as dificuldades de aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I dos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Campus Acadêmico do Agreste – CAA, por meio da análise de um Questionário, de um Teste e da primeira avaliação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

A pesquisa trouxe como objetivos específicos: investigar o perfil do aluno que cursa esta disciplina; identificar e analisar os erros cometidos pelos alunos na primeira avaliação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I e no Teste; investigar a natureza das dificuldades em Cálculo Diferencial e Integral I que levaram os estudantes a cometer determinados erros.

A pesquisa está estruturada em cinco capítulos: o Capítulo 1 apresenta a introdução que discorre de algumas pesquisas realizadas sobre dificuldades em Cálculo I, apresenta também os objetivos e a justificativa do trabalho.

O Capítulo 2 traz um breve histórico do Cálculo Diferencial e Integral I,

O Capítulo 3 fala um pouco sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I e discutirá sobre o seu ensino nas universidades, as mudanças ocorridas neste ensino e a importância desta disciplina na formação do professor.

Já o Capítulo 4 trata sobre o erro no ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral I.

O Capítulo 5 apresenta a investigação, os procedimentos metodológicos empregado na pesquisa, descrevendo os objetivos, os sujeitos pesquisados e os instrumentos utilizados para a coleta dos dados da pesquisa,

A análise e discussão dos resultados estão apresentadas no Capítulo 6. Finalizando com as considerações finais, embasada na fundamentação teórica e nos resultados obtidos a partir desta pesquisa.

2. BREVE HISTÓRICO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

O século XVII foi um período de grandes descobertas para a Matemática, surgindo diversas áreas de pesquisas, sendo uma delas o surgimento do Cálculo no final deste século.

A origem e o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral se deram, a partir de investigações de problemas que envolviam movimentos e variações, e de algumas necessidades humanas, como por exemplo, cálculo de áreas, volumes, ou seja, a partir de situações problemas, como por exemplo, para determinar áreas de regiões irregulares, volumes de sólidos, velocidade e aceleração de um corpo em movimentos, o comprimento de uma curva, ângulo de lançamento que corresponde ao alcance máximo de um projétil, distância máxima e mínima entre dois corpos e dentre outras situações.

De acordo com Eves (2004, p. 418) “os primeiros problemas da história do Cálculo diziam respeito ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos.”.

Souza (2001, p. 12) afirma que “muitos dos problemas que alimentaram o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, são de origem geométrica ou podem assim ser reduzidos.”[...].

O Cálculo Diferencial e Integral tem sido aplicado não só na Matemática, mas em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo, na Física nos estudos de movimentos, Química para prever resultados de reações químicas, Economia na previsão de resultados econômicos, Biologia para cálculo da taxa de crescimento de bactérias, Engenharia Civil no estudo e dimensionamento de vigas, e dentre outras.

O Cálculo Diferencial e Integral foi resultado de várias contribuições de diversos estudiosos em diferentes épocas, como por exemplo, Eudoxo de Cnido (408-355 a.C), com a criação do método de Exaustão, que possibilita o cálculo de área de regiões planas limitadas por curvas; Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C.), com trabalhos sobre espirais, quadratura da parábola, que é o cálculo de área sobre parábola, e o aprimoramento do Método da Exaustão; Zeno de Eléia (495-435 a.C.), com seus paradoxos; Augustin Cauchy (1789–1857), que definiu formalmente limite; Bernhard Riemann (1826 -1866), com a Integral de Riemann, conceitos de soma superior e soma inferior, dentre outros; Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz

(1646-1716), que descobriram a relação das partes já conhecidas do Cálculo: a derivada e a integral.

Courant (2000, p. 481) diz que: [...] “na realidade, o Cálculo é produto de uma longa evolução que não foi iniciada nem concluída por Newton e Leibniz.” [...]. (Courant apud Souza, 2001, p. 14).

Assim, o mesmo foi produto de estudo de vários estudiosos, iniciado no século XII na Grécia antiga. Entretanto, Newton e Leibniz foram os que mais se destacaram na história do cálculo por terem descoberto de forma independente a relação entre as partes já conhecidas do cálculo: a derivada e a integral. Perceberam que a derivação e a integração são processos inversos, esta relação se deu com o famoso Teorema Fundamental do Cálculo, Newton e Leibniz também ficaram conhecidos por terem aperfeiçoado algumas técnicas de derivação e integração.

Em relação à expressão Cálculo Diferencial e Integral, a mesma está relacionada com a derivação, que trata de taxas de variações instantânea, e a integração, que está relacionada com uma soma infinitesimal.

O Cálculo Diferencial e Integral pode ser dividido em duas partes: a primeira é o cálculo diferencial que está relacionada com as derivadas e a segunda é o Cálculo Integral que são as integrais.

De acordo com Alves, ao contrário da ordem que é ensinado, o surgimento do Cálculo Integral se deu primeiro que o Cálculo diferencial. O surgimento do Cálculo Integral resultou de ideias que os gregos utilizavam para resolver problemas envolvendo áreas de figuras. As áreas de figuras mais difíceis de calcular eram calculadas como o somatório das áreas de figuras já conhecidas, sendo esta a ideia do Cálculo Integral. Já a ideia de derivação, que foi bem depois, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões para determinar máximos e mínimos.

Depois de certo tempo foi que Newton e Leibniz descobriram a relação entre o Cálculo Integral e o diferencial.

Conforme Eves (2004, p. 417):

A ideia da integração teve origem em processos somatórios, ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra.

Mais tarde, no século XIX, com a falta de rigor de alguns conceitos sentiu-se a necessidade da formalidade, para justificarem aqueles métodos de cálculos utilizados, dando desta forma fundamentações lógicas mais sólidas, evitando-se assim contradições e erros. Nesta formalidade, estava inclusa as ideias do Cálculo Diferencial e Integral.

Ainda de acordo Eves (2004, p.462):

“O século XVIII foi gasto em grande parte na exploração dos novos e poderosos métodos do cálculo, já o século XIX foi dedicado grandemente à tarefa de construir uma fundamentação lógica sólida para a enorme, porém débil, superestrutura construída no século precedente. Uma das maiores ênfases do século XX e, porque não dizer, do começo do século XXI, tem sido a de generalizar, tanto quanto possível os progressos já alcançados, e que muitos matemáticos da atualidade estão envolvidos com problemas de fundamentos mais profundos ainda. Esse quadro geral complica-se quando se consideram os vários fatores sociológicos que afetam o desenvolvimento de qualquer ciência. Questões como a expansão dos seguros de vida e construção de grandes navios no século XVIII, os problemas econômicos e tecnológicos ocasionados no século XIX pela industrialização da Europa Ocidental e dos Estados Unidos, o clima de guerra mundial do século XX, o desenvolvimento da computação eletrônica e a luta pela conquista do espaço exterior levaram a muitos progressos no campo da Matemática”.

Com base no exposto, podemos perceber que grande parte do Cálculo que é abordado atualmente nas universidades já estava construída desde o século XVII, sendo apenas reformulado por meio do rigor matemático.

2.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E DO CÁLCULO INTEGRAL

A ideia do Cálculo diferencial teve início na Grécia Antiga a partir de problemas geométricos sobre tangência, porém a primeira manifestação clara do método diferencial foi em 1629, a partir de algumas ideias de Fermat (EVES, 2004).

Em relação ao ponto de máximo e mínimo de uma função, Johannes Kepler (1571–1630) já havia observado que os incrementos de uma função tornam-se infinitesimais nas vizinhanças do ponto de máximo ou mínimo.

Utilizando-se desta ideia, Pierre Fermat (1601-1665) formulou o seguinte procedimento para determinar o ponto de máximo ou de mínimo de uma função:

Se $f(x)$ tem um máximo ou mínimo comum em x e se e é muito pequeno, então o valor de $f(x-e)$ é quase igual ao de $f(x)$. Portanto, pode-se experimentar fazer $f(x-e) = f(x)$ e, para tornar essa igualdade correta, impor que e assuma o valor zero. As raízes da equação

resultante darão, então, os valores de x para os quais $f(x)$ assume um máximo ou mínimo. (EVES, 2004, p. 429).

Porém, esse método não levou em conta que a condição da derivada de $f(x)$ ser nula, ser apenas necessária, mas não suficiente para se ter um ponto de máximo ou mínimo e o mesmo também não distingui o valor máximo do valor mínimo (Eves, 2004).

O Cálculo Diferencial possibilitou o cálculo de velocidade e aceleração de corpos em movimentos, o ângulo que um canhão deveria ser disparado para atingir o alcance máximo, coeficientes angulares de curvas, distância máxima e mínima entre dois planetas.

Segundo Baron (1985, p.1): [...] “A derivação está relacionada com a descrição e mensuração da maneira como as coisas variam, se movem e crescem”. [...]. (Baron apud Souza, 2001, p. 11).

Assim pode-se perceber que sua origem está ligada a problemas envolvendo taxa de variação, tendo seu desenvolvimento prosseguido com contribuições de múltiplos matemáticos: John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677), Isaac Newton (1642-1727), Gottfried Leibniz (1646-1716), Guillaume L’ Hospital (1661-1704) e outros.

Em relação ao Cálculo Integral, este surgiu bem antes do Cálculo Diferencial e se deu na Grécia Antiga a partir de problemas de quadratura de curvas, isto é, áreas limitadas por curvas, nas medições de terras.

Naquela época, os gregos já sabiam calcular área de qualquer figura poligonal, os mesmos dividiam as figuras em triângulos, por ser mais simples de calcular, em seguida somavam as áreas obtidas.

Em relação às áreas de figuras limitadas por curvas os gregos calculavam por meio do Método da Exaustão criado por Eudoxo (406 –355 a.C.) e aprimorado por Arquimedes (287 –212 a.C.), dando-se início desta forma as ideias do Cálculo Diferencial e Integral.

Segundo Eves (2004, p. 419) em relação ao Método da exaustão afirma que:

O método admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: Se uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que a sua metade, do restante subtrai-se uma parte não menor que a sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.

De acordo com Eves (1995, p. 422), o Método do Equilíbrio criado por Arquimedes para determinar o cálculo de áreas ou volumes deveria proceder da seguinte forma:

Corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroide conhecidos.

O método de exaustão era utilizado mais para provar, ou seja, para demonstrar as fórmulas encontradas pelo método de equilíbrio, visto que, aquele, sozinho, não era capaz de encontrar uma fórmula. Assim, Arquimedes descobria as fórmulas de áreas e volumes pelo Método de Equilíbrio e as demonstrava por meio do Método de Exaustão.

A partir do Cálculo Integral as pessoas calculavam áreas de figuras irregulares, volume de sólidos, comprimento de curvas e dentre outros problemas.

O desenvolvimento do Cálculo Integral continuou por meio de diversos outros matemáticos, como por exemplo, Simon Stevin (1548-1620), Johannes Kepler (1571-1630), Bonaventura Cavalieri (1598--1647) e dentre outros.

A partir do exposto sobre a história do cálculo, pode-se perceber que o Cálculo Diferencial e Integral, como diversas áreas da Matemática, não surgiu pronto e acabado nem muito menos por uma só pessoa, mas sim por meio de contribuições de vários estudiosos ao longo do tempo.

3. O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

O Cálculo Diferencial e Integral I é uma das primeiras disciplinas que o aluno das universidades dos cursos da área das ciências exatas lida com a Matemática do Ensino Superior, em alguns cursos ela é vista logo no primeiro período, como por exemplo, nas Engenharias, já nas Licenciaturas, geralmente é vista no segundo ou terceiro período.

Nos diferentes cursos, é abordado: limite, derivada e integral, diferenciando apenas a maneira como a mesma é ministrada, dando enfoque naquilo que está mais relacionado com o curso.

Geralmente a grade curricular desta disciplina aborda: apresentação de conceitos, demonstrações e resolução de listas de exercícios, exercícios estes que abordam conteúdos vistos em sala, com o intuito de fixarem ou exercitarem os conteúdos estudados, porém grande parte dos alunos dá mais relevância em saber resolver questões aplicando fórmulas e regras do que compreender os conceitos envolvidos na resolução daqueles exercícios.

Desta forma, podemos perceber que a maioria dos alunos desta disciplina é capaz de calcular grande parte de questões envolvendo: limites, derivadas e integrais, porém estas resoluções se dar, em grande parte, de forma automática, ou seja, os alunos resolvem os problemas com a ausência de uma análise mais aprofundada do que está ocorrendo naquela determinada questão. Isto porque, pelo que parece, eles estão mais preocupados em passar na disciplina do que na aprendizagem da mesma.

3.1 MUDANÇAS NOS PERFIS CURRICULARES DO CURSO COM RELAÇÃO À DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

A ementa desta disciplina sofreu e continua sofrendo modificações em diversas universidades, tendo como um dos principais motivos o fracasso dos discentes na mesma, tentando desta forma minimizar os obstáculos encontrados por alunos e professores no ensino e aprendizagem desta disciplina.

Na Universidade Federal Fluminense (UFF), a primeira modificação que houve no ensino de Cálculo Diferencial e Integral I ocorreu na década de 1980, aumentando-se a carga horária de 60 horas para 90 horas semestrais, incluindo na ementa conceitos

elementares, como por exemplo, polinômios, funções, trigonometria e dentre outros. Porém grande parte desses conceitos era abordada dando-se ênfase mais na parte operacional do que no conceito em si, ou seja, os alunos continuaram não compreendendo os conceitos elementares. Ao contrário do que se esperava, o índice de reprovação continuou crescendo.

Esses conceitos elementares inseridos na ementa de Cálculo Diferencial e Integral I, aqui na UFPE-CAA está incluso na disciplina de Matemática Básica.

A partir de 1997 a disciplina de Matemática Básica foi inserida na grade curricular do Curso de Matemática da UFF com o objetivo de dar alicerce para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Outra reforma curricular que aconteceu na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, da Universidade Federal Fluminense (UFF) citada por Mello, Mello e Fernandes (2001), foi a redução da carga horária para 4 horas semanais, com o objetivo de ensinarem menos conceitos novos para os alunos, pois um dos motivos apresentados em relação ao fracasso dos alunos em Cálculo Diferencial e Integral I era a grande quantidade de conceitos novos que o mesmo deveria aprender em pouco tempo, passando desta forma parte do conteúdo desta disciplina para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II. Com essa alteração tiveram o índice de reprovação reduzido em 50%.

Outra mudança constituiu nas disciplinas de Cálculo e Física serem co-requisitos, pois os alunos tinham o primeiro contato com os conceitos de derivada e integral na disciplina de Física.

A metodologia de ensino também sofreu algumas modificações, como por exemplo, acrescentou-se a contextualização e a aplicabilidade de alguns conteúdos, tendo como resultado a motivação dos alunos.

Barufi (1999) em sua tese também cita uma das alterações feitas na grade curricular dos cursos de Matemática e Arquitetura da USP em relação aos cursos de Cálculo. Os mesmos passaram, a partir de 1993, a ser anuais, ao contrário das outras disciplinas, que eram semestrais.

Aqui na UFPE-CAA, está sendo pauta das reuniões do Núcleo Docente Estruturante-NDE a ementa das disciplinas de Matemática Básica e Matemática I, com o objetivo de suprir os conhecimentos básicos necessários para os alunos que virão a cursar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Uma das propostas realizadas na UFPE-CAA objetivando dar oportunidade ao aluno que reprovou a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I não atrasar sua formação foi aumentando o número de turmas oferecidas no semestre. Antes eram oferecidas três turmas nos cursos de Licenciatura: uma no 2º período do Curso de Licenciatura em Química, outra no 2º período do curso de Licenciatura em Física e outra no 3º período de Licenciatura em Matemática. Porém os alunos que reprovavam a mesma atrasavam no mínimo um período sua formação, tendo em vista que chocavam horários com outras disciplinas.

Em 2014.1 foram oferecidas mais duas turmas extras no horário da tarde, possibilitando ao aluno cursar esta disciplina sem deixar de cursar as disciplinas do período seguinte e que não tenham como pré-requisito a disciplina de cálculo, diminuindo também o número de alunos por turma.

Fazendo uma comparação entre o perfil dos cursos de Cálculo Diferencial e Integral I das Universidades analisadas nesta pesquisa e o da UFPE-CAA, percebe-se que o nosso tem um perfil diferenciado de forma que facilita para os alunos terem um melhor desempenho na referida disciplina, como por exemplo, ser oferecida no 3º período, ter uma carga horária de 60h, ser co-requisito de Física I, ter a disciplina de Matemática Básica como pré-requisito.

Com base em diversas pesquisas, percebe-se que obstáculos no ensino desta disciplina, não é um problema presente apenas nas universidades do Brasil, segundo Marin (2009, p.24 apud Richit 2010, p. 28), diz que:

“[...] A literatura nos mostra que a problemática do ensino de Cálculo “não é um problema localizado” e que na verdade, trata-se de uma problemática que está presente em várias instituições brasileiras e também do exterior (Marin, 2009).”

Nasser (2007, apud Chaves p. 5) traz que:

“[...] Tem-se atualmente uma preocupação no âmbito mundial em relação ao fracasso em Cálculo Diferencial e Integral, dando origem a um movimento social conhecido na década de 80 como Calculus reform (Reforma do Cálculo).”

Com base no exposto e diante de várias modificações na grade curricular da disciplina de Cálculo, pode-se perceber que o ensino desta disciplina continua sendo objeto de estudo de diversas pesquisas em todo o mundo, tendo como objetivo identificar os fatores responsáveis pelo baixo desempenho de aprendizagem dos alunos.

nesta disciplina. Desta forma, pode-se perceber que o tema em questão continua sendo motivo de inquietação por parte de vários pesquisadores.

3.2 ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UFPE-CAA

A Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, oferece os seguintes cursos de Licenciatura: Pedagogia, Física, Química e Matemática, dos quais apenas os três últimos têm no seu componente curricular a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

O sistema de ensino é o de crédito. Assim, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I é periódica, com duração de 60 horas, distribuída em quatro aulas semanais de 50 minutos cada, ou seja, 72 h/a. De acordo com o Projeto Pedagógico do Curso de Matemática – Licenciatura-UFPE-CAA 2013, a disciplina de Matemática Básica é um dos componentes curriculares obrigatório do 1º Período do curso, com carga horária de 60 horas, sendo pré-requisito das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e Metodologia do Ensino de Matemática I, contendo como conteúdos programáticos:

Álgebra Básica; Lógica Matemática e Teoria dos Conjuntos; Conjuntos Numéricos; Sistemas de Coordenadas Cartesianas; Relações e Teoria Básica das Funções de uma variável; Funções Polinomial do 1º e 2º grau; Função Exponencial e Função Logarítmica.

Já a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I também é um componente curricular obrigatório do curso de Licenciatura em Matemática – UFPE-CAA, sendo que a mesma está inserida no 3º período, tendo como pré-requisito a Matemática Básica e sendo pré-requisito de Cálculo Diferencial e Integral II, Elementos de Cálculo Numérico e Fundamentos de Física II e co-requisito de Fundamentos de Física I.

A ementa desta disciplina consta dos seguintes conteúdos: Limite; continuidade e derivada de funções reais; Teorema do valor médio e aplicações; Primitiva; Integral de Riemann e Técnicas de integração.

São objetivos do componente desta disciplina, entre outros, fazer o estudo qualitativo de funções reais, estudando limite, derivada e integral de funções, dando destaque a aplicações em outras áreas da ciência e sempre que possível relacionar a

disciplina com assuntos vistos no Ensino Médio, como por exemplo análise de gráfico e cálculo de áreas de figuras planas.

No primeiro semestre de 2014 foram oferecidas cinco turmas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I para os alunos das licenciaturas, essas turmas tiveram em média 40 alunos matriculados, porém é importante salientar que este número de turmas varia, já que são oferecidas de acordo com a quantidade de matriculados. Neste semestre o índice de retenção no curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I foi de 47,06% e o de evasão foi de 20,83%(5), sendo a média final da turma 4,77. A tabela abaixo mostra a situação dos alunos na disciplina de Cálculo diferencial e Integral I em 2014.1 do curso de Matemática.

Tabela 1: Situação dos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

	QUANTIDADE DE ALUNOS
MATRICULADOS	39(100%)
APROVADOS POR MÉDIA	11(28%)
ALUNOS QUE FORAM PARA RECUPERAÇÃO	16(67%)
REPROVADOS DIRETO	7(29%)
APROVADOS NA FINAL	7(29%)
NÚMERO DE EVASÃO	5(21%)
TOTAL DOS APROVADOS	18(53%)
TOTAL DOS REPROVADOS	16(47%)

Com a grande demanda de matriculados em Cálculo Diferencial e Integral I, em razão do alto índice de reprovação e retenção na disciplina, o colegiado do curso de Matemática criou mais duas turmas, oferecidas no período da tarde.

Assim, esperasse que o índice de reprovação e evasão diminua, já que as turmas serão formadas com um número menor de alunos, o que ajuda no processo de ensino e

aprendizagem, e que os alunos retidos tenham oportunidade de concluir seu curso no período certo.

Com base na análise dos conteúdos que compreende a ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I nota-se que é imprescindível para sua aprendizagem domínio dos conteúdos da disciplina de Matemática Básica e outros que não foram contemplados na sua ementa, como por exemplo, expressões polinomiais, frações algébrica, fatoração, produtos notáveis, funções elementares (trigonométrica, logarítmica, exponencial, radical, recíproca, polinomial), suas propriedades e seus respectivos gráficos, sendo este último essencial para se ter um bom desempenho na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, visto que a maioria dos conteúdos compreendidos na ementa do mesmo está relacionado com função. Segundo Torres e Giraffa (2009, p. 19):

O conhecimento matemático é, por natureza, encadeado e cumulativo, de modo que o desconhecimento de conceitos elementares pode impedir ou até mesmo dificultar a compreensão dos conceitos subsequentes. Para nos apropriarmos de um conteúdo, é necessário, entre outros fatores, compreender como ele se estrutura e suas inter-relações com os demais itens que compõem aquele arcabouço de informações para que se construa o conhecimento necessário para se resolver problemas.

Assim, a ausência desses conteúdos poderá dificultar no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I.

A falta de certos conhecimentos básicos matemáticos é citada em alguns trabalhos relacionados aos índices de repetência e evasão na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, como consequência da deficiente formação básica em Matemática no ensino fundamental e médio dos alunos, sendo assim um dos obstáculos citados por eles para o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral I.

De acordo com Barbosa e Concordido (2009, p. 3) em relação aos alunos que ingressam no ensino superior, diz que:

Com frequência, os estudantes apresentam grandes dificuldades no entendimento do conceito de função e na construção e interpretação de seus gráficos. Além disso, é comum também verificar que uma parcela significativa de estudantes possui deficiências nas operações elementares com números racionais, na teoria elementar de polinômios e nos conceitos básicos de geometria. Ocorrem também situações em que o estudante, apesar de ter um conhecimento razoável dos pré-requisitos, não os domina no nível exigido em uma disciplina de Cálculo.

Desta forma, a partir do Teste aplicado e da análise da 1ª avaliação escritas do professor da turma de Matemática 3º período 2014.1 da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I analisamos se a ausência desses conteúdos na disciplina de Matemática Básica é um dos obstáculos que influencia no ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I no curso de Matemática - Licenciatura - UFPE-CAA.

4. ANÁLISE DE ERROS EM MATEMÁTICA

A análise de erros é uma abordagem de pesquisa em Matemática que vem sendo desenvolvida desde a segunda metade do século XX, tendo diversos enfoques.

De acordo com Cury e Cassol (2004) as pesquisas apresentadas em Educação Matemática sobre análise de erros apresentam-se de três formas:

Identificação e classificação: o foco desta abordagem é detectar e classificar os erros cometidos pelos alunos, sem se preocupar com as suas causas, ou seja, com a origem dos erros.

Identificação e classificação com consequências: da mesma forma que a anterior, aqui os erros cometidos pelos alunos também são detectados e classificados, porém o enfoque nesta abordagem está nas causas e consequências destes erros, de forma que os conteúdos, as causas das dificuldades e as consequências destes erros no processo de ensino e aprendizagem de Matemática são relevantes.

Diagnóstica: nesta última abordagem o enfoque da análise dos erros está nas atividades propostas para os alunos, sendo as soluções dos alunos a base para esta análise. Diferentemente da primeira e segunda abordagem que a preocupação está no erro, nesta está no processo de ensino e aprendizagem.

Atualmente vários trabalhos estão sendo desenvolvidos sobre o papel dos erros no processo de ensino e aprendizagem, visto que, de acordo com Cury (2007) a partir da análise de erro podemos compreender o processo de ensino e aprendizagem, tendo como base as produções dos alunos. Sendo possível, desta forma, compreender os obstáculos encontrados pelos educandos na aprendizagem de determinados conteúdos.

De acordo com a autora, ao analisar as respostas dos alunos, o importante não é o acerto ou o erro, mas sim, como se deu o desenvolvimento daquele conhecimento, pois a partir dele é possível identificar dificuldades no decorrer da aprendizagem.

Ainda segundo Cury (2008) o processo da análise das produções dos alunos em Matemática pode constituir uma das importantes fases do processo de aprendizagem para o docente, já que com base nestas produções pode-se compreender como os alunos se apropriam de um conhecimento matemático.

De acordo com Boot (1995), a análise do erro possibilita exprimir elementos que identificam níveis de dificuldades dos alunos, de forma que, quando esses elementos são descobertos, o professor pode através dos mesmos definir etapas a serem seguidas

no decorrer das suas práticas de ensino, tendo assim, um melhor acompanhamento da aprendizagem.

Ainda, em relação ao estudo dos erros no âmbito das práticas metodológicas dos professores, Abrate, Pochulu e Vargas (2006, p. 16) diz que o mesmo poderia: “proporcionar chaves sobre quais estratégias resultam mais convenientes na hora de levar adiante os processos de ensino e aprendizagem em Matemática”.

Desta forma, a análise de erros é uma das ferramentas que pode contribuir nos estudos sobre dificuldades encontradas na aprendizagem da Matemática, pra só então criar alternativas de superá-las.

4.1 ERROS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Diversos estudos estão sendo realizados em relação às dificuldades no ensino e na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos superiores, tendo como justificativa principal, o alto nível de reprovação e evasão encontrado nesta disciplina.

Uma das investigações feitas nesta área que podemos citar a de Cury (2007), realizada com 368 alunos calouros de nove instituições de Ensino Superior brasileiro, tendo como objetivo analisar e classificar os erros apresentados pelos participantes e em seguida desenvolver estratégias de ensino que contribuam de forma significativa nas dificuldades apresentadas pelos alunos.

Esta investigação teve como instrumento de coleta de dados um teste formado por doze questões de múltipla escolha, envolvendo conteúdos de Matemática Básica.

De acordo com Cury (2007), na elaboração dessas questões levou em consideração questões que abordassem conteúdos relacionados com as dificuldades geralmente encontradas no ensino de tópicos de Cálculo: esboço de gráficos, cálculo de limites, derivadas e integrais, ainda, segundo a autora, estas dificuldades não estão relacionados especificamente com conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, mas sim com noções de Matemática Básica.

Cury (2007) analisou duas questões: a que teve o índice mais alto de acerto (54% de acertos) e aquela que os estudantes mais erraram ou não responderam, correspondendo ao percentual de 83%.

A primeira questão era a seguinte:

Um produto foi revendido por R\$ 1.035,00, com um lucro de 15% sobre o preço de compra. Esse produto foi adquirido por:

- a) R\$ 1.020,00 b) R\$ 1.000,00 c) R\$ 935,00 d) R\$ 900,00
e) R\$ 850,00

Dos 368 participantes, apenas 134 apresentaram sua resposta com desenvolvimento, ou seja, 234 apenas marcaram uma alternativa. A análise se deu apenas sobre os 134.

Das categorizações apresentadas, uma se referia ao erro que os alunos cometeram fazendo o seguinte cálculo: $1.035,00 - 0,15$. De acordo com a autora, este erro é bastante frequente em questões de diferencial no Cálculo Diferencial e Integral I, visto que, consideram que 15% de determinado valor corresponde, simplesmente, a 0,15, sem considerar em conta o enunciado da questão.

Já em relação à segunda questão analisada, a mesma tinha o seguinte enunciado:

O conjunto solução, em R, da equação $\frac{1}{x+5} + \frac{1}{2x+9} + \frac{2}{2x^2+19x+45}$ é:

Dos 368 calouros apenas 78 assinalaram a alternativa correta e destes, 63 desenvolveram o cálculo, dos quais, apenas 13 acertaram.

Uma das categorizações dos erros identificados foi aquela que o aluno mostrou não saber adicionar frações algébricas outra estava relacionada aos alunos que não souberam multiplicar polinômios, de forma que pareciam que os alunos não sabiam a propriedade distributiva da multiplicação, são essas e outras dificuldades que podem vir a ser um dos obstáculos apresentados pelos discentes no aprendizado da disciplina de Cálculo diferencial e integral I.

Ainda de acordo com a autora, o ensino das habilidades para se trabalhar com as regras para cálculo de limites, derivadas e integrais, parece estar sendo prejudicado em razão da falta de habilidades com propriedades operatórias básicas.

Outra investigação, bastante interessante por está diretamente relacionado a este trabalho de conclusão de curso, apresentada pela autora envolvendo produções dos alunos, foi realizada em um curso de Engenharia na disciplina de Cálculo A, que teve como objetivo investigar os erros cometidos em provas de verificação de aprendizagem.

Uma das questões analisada foi a seguinte: Apresentando o desenvolvimento, calcule a derivada da função dada por $f(x) = 3x^2 + \sqrt[3]{x^4}$.

De acordo com a autora, todos os alunos derivaram corretamente o $3x^2$, porém, dos 23 alunos que responderam, 13 cometeram algum erros ao derivar a segunda parte da função. Cury categorizou estes erros em dois tipos: aqueles relacionados com a incorreta derivação e os causados por uso equivocados de propriedades das operações empregadas.

Na primeira categorização alguns alunos pensaram ser a função cúbica uma função composta e aplicaram a regra da cadeia, já na segunda categorização, alguns alunos encontraram a resposta correta, porém alguns tentaram simplificar, por meio de manipulações algébricas de forma errada, como por exemplo, considerar $\sqrt[3]{x^4}$ como sendo $x^{\frac{3}{4}}$.

Neste caso, percebe-se que a dificuldade do aluno não está em um conteúdo específico do Cálculo Diferencial e Integral I, mas sim em conceitos básicos da Matemática.

Com base nas perguntas em sala de aula, no acompanhamento às duplas feito durante a realização de trabalhos e atendimento individualizado, segundo Cury (2007), pode-se dizer que grande parte das dificuldades apresentadas por esses alunos estão relacionadas com conteúdos de Ensino Fundamental e Médio.

Segundo Cury e Cassol (2004, p. 33- 34), com base nas investigações com calouros, afirma ser:

[...] primordial repensar o ensino de Cálculo para alunos ingressantes em cursos superiores, empregando metodologias e recursos variados e, especialmente, destinando períodos para atendimento individual, seja com monitores, seja com bolsistas de Iniciação Científica, ou até mesmo com alunos de mestrado, que podem realizar seus estágios curriculares com atividades voltadas para alunos das disciplinas Matemáticas iniciais dos cursos de graduação.

Com base no exposto, a análise dos erros é uma das possibilidades que podem contribuir no estudo das dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, de forma a conhecer as verdadeiras causas destes obstáculos, ou seja, essas dificuldades apresentadas remetem à necessidade de uma análise detalhada sobre os reais motivos da ocorrência desses erros, para só então conseguirmos criar alternativas para superá-los.

Na presente pesquisa, categorizamos e analisamos os erros cometidos por alunos do 3º período do curso de Licenciatura em Matemática tanto nas questões relacionadas à conteúdos de Matemática Básica, como por exemplo, esboço de gráficos, conteúdos de álgebras: fatoração, simplificação, produtos notáveis e equações, visto ser estes importantes na aprendizagem de Cálculo diferencial e Integral, quanto na 1ª avaliação desta disciplina.

Para a presente pesquisa nos baseamos no modelo de categorização de erros de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987). Esse modelo foi desenvolvido a partir da análise de erros cometidos em um exame nacional aplicado para 20.000 estudantes de ensino secundário em Israel, que corresponde ao Ensino Médio Brasileiro.

Esta investigação considerou o exame de dois anos consecutivos e se deu a partir da análise das soluções obtidas nas 18 questões abertas do teste que abordavam os seguintes conteúdos: funções linear e quadrática, equações, exponenciais e logaritmos, geometria espacial e plana, séries aritméticas e geométricas, estatística, probabilidade e trigonometria.

Os autores classificaram os erros nas seguintes categorias: uso errado dos dados, linguagem mal interpretada, inferência lógica inválida, definição ou teorema distorcido, solução não verificada e erros técnicos, segue abaixo a descrição de cada categoria de acordo com Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987).

- *Uso errado dos dados*: esta categoria abrange os erros relacionados à interpretação do enunciado, inclusão ou negligenciamento de informações nos enunciados das questões pelos alunos, podemos citar como exemplo, a utilização de um determinado valor numérico referente a uma variável para uma outra variável. Pereira (2012, p. 23) cita como exemplo o uso de um valor numérico referente à distância como o valor numérico de velocidade.

○ *Linguagem mal interpretada*: nesta categoria estão inclusos os erros matemáticos oriundos de uma interpretação incorreta de fatos matemáticos apresentados por meio de uma linguagem simbólica ou natural. Um exemplo deste erro é o aluno interpretar a informação $x \in A \cup B$ como sendo $x \in a A$ e $x \in a b$.

○ *Inferência lógica inválida*: nesta categoria estão presentes os erros que lidam com raciocínios falaciosos, ou seja, uso de informações inválidas retiradas de determinada parte de um conhecimento, exemplo, concluir com base na proposição condicional (se p, então q) que (se q, então p).

○ *Definição ou teorema distorcido*: nesta categoria estão os erros cometidos em razão da distorção de um princípio específico e identificável, uma regra, um teorema ou uma definição, como exemplo deste tipo de erro pode citar o uso de um teorema fora de suas condições.

○ *Solução não verificada*: esta categoria inclui aqueles erros cometidos apenas no resultado final, ou seja, o desenvolvimento da resolução está todo correto, porém o resultado não o está. Percebesse nesta categoria que os erros poderiam ter sido evitados caso o aluno comparasse sua solução com o enunciado do problema

Como exemplo desta categoria podemos citar uma questão que solicita o tempo gasto por uma pessoa durante uma determinada caminhada e o aluno encontra a resposta apenas com o sinal invertido, ou seja, com o sinal negativo em vez de positivo.

○ *Erros técnicos*: Esta categoria inclui erros relacionados à execução de algoritmos, de manipulação algébrica, como por exemplo, $8+7=13$, podendo ter sido ocasionado por mera distração.

Com base no exposto, classificamos os erros cometidos pelos alunos na primeira avaliação da disciplina e no Teste com base neste modelo, com o objetivo de compreender a natureza desses erros com o intuito de verificar as dificuldades e suas possíveis causas.

5. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa tem caráter qualitativo, ao analisar soluções e tipos de erros cometidos pelos estudantes, e quantitativo quanto à frequência dos mesmos.

A investigação foi realizada com base em três instrumentos de investigação: um Questionário, um Teste e a Primeira Avaliação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I aplicada pelo professor referente à primeira nota do período. Os dados obtidos para esta pesquisa foram de caráter qualitativo - quantitativo.

5.1 COLETAS DE DADOS

Os participantes da pesquisa foram vinte e quatro alunos (os presentes) do primeiro semestre de 2014 que estavam cursando a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Centro Acadêmico do Agreste – CAA, dos quais apenas três desses alunos não eram do curso de Licenciatura em Matemática, e sim de Licenciatura em Física.

5.1.1 PRIMEIRO INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS – QUESTIONÁRIO

O primeiro instrumento de coleta de dados se constituiu em um Questionário, apresentado no Apêndice A, que teve como objetivo constatar o perfil dos acadêmicos que estavam pagando a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I e tomar ciência das disciplinas já cursadas por eles, com a finalidade de analisarmos a relação entre os conteúdos vistos nos períodos anteriores e o desempenho na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

O Questionário foi composto por seis questões objetivas. A primeira questão foi sobre as disciplinas cursadas pelos alunos até o momento, a segunda era se o discente só estudava ou estudava e trabalhava, a terceira abordava a frequência que o aluno vinha às monitórias, a quarta era para o aluno se posicionar em relação ao tempo de estudo que o mesmo dedicava para a disciplina, a quinta questionava sobre como o aluno considerava sua formação em Matemática do Ensino Básico e para finalizar, colocamos uma sexta questão referente a alguns fatores que poderia ter influência de forma negativa no desempenho dos alunos em Cálculo Diferencial e Integral I.

Por meio deste Questionário, foi possível tomar ciência do perfil do grupo investigado, ou seja, dos alunos que estavam cursando aquela disciplina.

De início sua aplicação estava prevista para o segundo dia de aula da disciplina, porém aconteceram inúmeros imprevistos de forma que só foi possível sua aplicação no final do período. Assim, já tinham sido realizadas as três avaliações referentes à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. A aplicação desse instrumento teve duração de 1 h 40 min, visto que foi aplicado junto com o Teste.

Aplicamos com todos os alunos que estavam na sala, porém só analisamos os Questionários daqueles que realizaram a primeira avaliação da disciplina.

5.1.2 SEGUNDO INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS – TESTE

O segundo instrumento de investigação, apresentado no Apêndice B, foi constituído por quatro questões que abordavam conteúdos do Ensino Médio e da disciplina de Matemática Básica, tais como: Funções, gráfico de funções, conjuntos, fatoração, produtos notáveis, racionalização, inequação do 2º grau, potenciação e operações Matemáticas nos reais e suas propriedades.

Esta atividade foi denominada de Teste e teve como fim verificar a base que os alunos tinham sobre conteúdos mínimos necessários para a aprendizagem dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral I.

Planejamos aplicá-lo no início da disciplina, na busca de elementos que desde o início já evidenciam dificuldades dos alunos, porém aconteceram alguns imprevistos, sendo sua aplicação possível apenas no final do período, ou seja, já tinham sido realizadas as três avaliações referentes à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Os conteúdos abordados neste teste foram referentes a assuntos que são utilizados no decorrer da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

O Teste tinha quatro questões subjetivas que para ser resolvidas eram necessárias ter algumas habilidades e competências elencadas logo abaixo, porém é importante salientar que nem todas as habilidades e competências destacadas concorreram para resolução das questões do referido instrumento:

- Determinar domínio de funções;
- Resolver inequação de 2º grau;
- Simplificar expressões racionais por meio de produtos notáveis;
- Esboçar gráficos;

- Operar com frações, potenciação e radiciação.

5.1.3 TERCEIRO INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS – 1ª AVALIAÇÃO DA DISCIPLINA

O terceiro instrumento de investigação, apresentado no Apêndice C, se constitui na primeira avaliação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, abordando os seguintes conteúdos: relações, funções, limites de funções.

A análise desta avaliação teve como objetivo identificar fatores que levaram os alunos a cometer alguns erros e saber se aqueles erros estavam relacionados a conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral I ou a conteúdos básicos de Matemática.

5.2 ANÁLISES DOS DADOS

Com base nesses três instrumentos de coleta de dados buscou-se conhecer o perfil dos alunos, os tipos de erros apresentados, suas origens e identificar os principais problemas que afetaram no aprendizado dos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral I, para só assim sabermos se as dificuldades encontradas no decorrer do ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I tem alguma relação com seu pré-requisito que é a Matemática Básica.

Para analisar os dados advindos da realização do teste e da avaliação tomamos como base a metodologia empregada por Cury e Cassol (2004) utilizada para análise de erros que se divide nas seguintes etapas: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Em um primeiro momento, as respostas coletadas foram organizadas e em seguida corrigidas para serem analisadas, quantitativamente, o número de acertos totais ou parciais, de erros ou de questões em branco.

Já na fase de exploração do material classificamos as respostas, para isso o material teve que ser lido mais uma vez. Os erros apresentados pelos acadêmicos foram identificados e classificados com base no modelo de categorização de erros de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), que se divide em seis categorias: uso errado dos dados, linguagem mal interpretada, inferência lógica inválida, definição ou teorema distorcido, solução não verificada e erros técnicos. Após analisarmos os erros cometidos pelos alunos fez-se necessário introduzirmos algumas categorias:

Erro sem justificativa: Nesta categoria está incluso aqueles erros que os alunos não justificaram.

Resposta parcialmente correta: Aqui os alunos iniciaram a resolução corretamente, porém no final cometeram algum erro ou acertaram, mas não justificaram.

Erro Conceitual: o aluno não dominava o conteúdo exigido para a resolução da questão.

Desta forma, classificamos os tipos de erros em nove categorias:

- Uso errado dos dados (A);
- Linguagem mal interpretada (B);
- Inferência lógica inválida (C);
- Definição ou teorema distorcido (D);
- Solução não verificada (E);
- Erros técnicos (F);
- Erro sem justificativa (G);
- Erro Conceitual (H)
- Resposta parcialmente correta (I).

Em relação à fase de tratamento dos resultados, as categorias das respostas foram descritas ou por meio de um texto que permite ao leitor a compreensão do significado da classe ou por meio de tabelas e seus respectivos gráficos.

Para identificar o erro, primeiro elencamos os conteúdos matemáticos relevantes para resolução do problema que o aluno deveria ter domínio e os procedimentos necessários para resolver as questões.

Em seguida, identificamos e classificamos os mesmos nas categorias citadas anteriormente para só então começarmos nossa análise dos resultados.

6. ANÁLISES E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, apresentaremos dados e análises referentes à aplicação dos instrumentos de coletas de dados: Questionário, Teste e 1ª Avaliação da Disciplina realizada pelos discentes do 3º período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Centro Acadêmico do Agreste – CAA, que cursavam a disciplina no primeiro semestre de 2014.

Em cada resposta analisada os alunos são identificados por um número, exemplo, ALUNO 1 para preservar suas identidades. Como os dias das aplicações dos instrumentos de coletas de dados foram diferentes, só foram sujeitos da nossa pesquisa aqueles que responderam os três instrumentos, ou seja, foram 24 alunos.

6.1 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DO PRIMEIRO INSTRUMENTO-QUESTIONÁRIO

Por meio desse instrumento, foram identificados pontos relevantes para a formação do perfil do grupo investigado: disciplinas cursadas, frequência nas monitórias, tempo de dedicada aos estudos, desempenho da sua formação em Matemática no ensino médio e fatores que eles julgam terem contribuído para o baixo rendimento na disciplina.

Com base nos dados do questionário 75% (18) dos investigados cursaram Matemática I e Geometria Analítica, 12,5% (3) cursaram apenas Geometria Analítica, das disciplinas questionadas, 8,33% (2) dos alunos cursaram apenas Matemática I e 4,17% (1) não cursou nenhuma das disciplinas. O gráfico a baixo mostra estes dados.

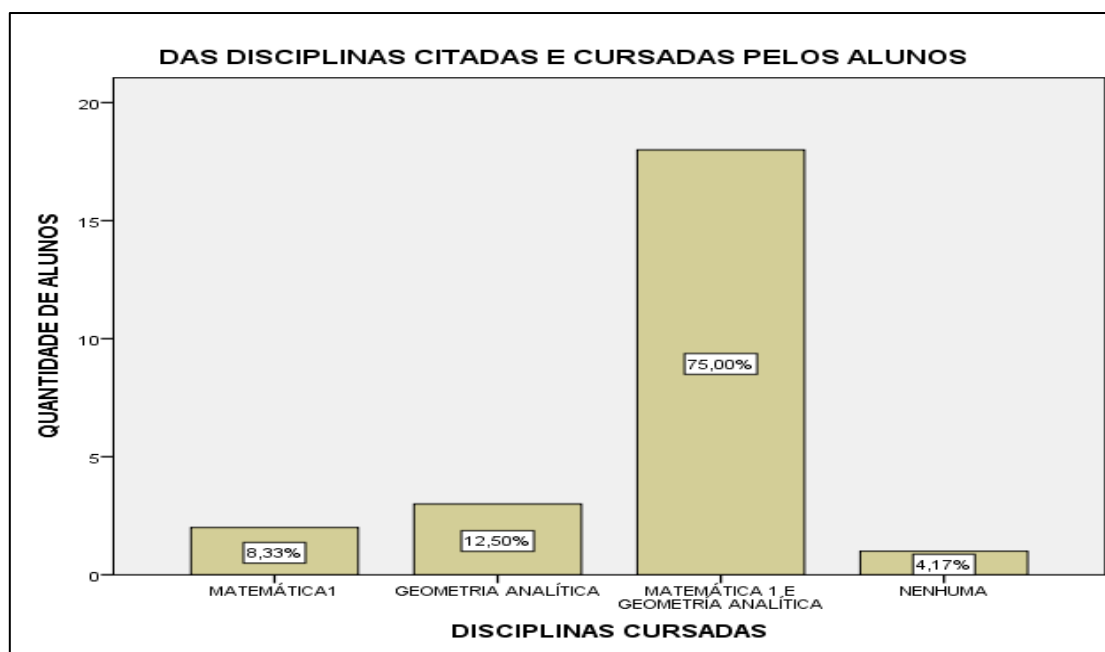


Gráfico 1: Das disciplinas citadas e cursadas pelos alunos.

Os dados revelam que dos 24 alunos investigados, 62,5% (15) do grupo trabalham e estudam e 37,5% (9) só estudam. Com relação à frequência nas monitorias de Cálculo Diferencial e Integral I, 41,67% (10) dos alunos, responderam que nunca foram à monitoria, enquanto que 58,33% (14) alunos afirmaram que pelo menos uma vez compareceu as monitorias.

Quando questionados sobre sua dedicação aos estudos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, 29,17% (7) alunos consideram bom, 33,33% (8) afirmaram ser pouco seu tempo de estudo, 8,33% (2) consideram ruim e 29,17% (7) insuficiente.

Em relação como consideram sua formação em Matemática no Ensino Básico, 70,83% (17) dos estudantes considera boa, enquanto que 29,17% (7) declararam regular.

Quando questionados sobre os fatores que mais dificultou ou dificultaram a sua aprendizagem dos conteúdos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, 79,17% (19) concordaram que a metodologia utilizada pelo professor em sala de aula dificultou seu aprendizado na disciplina, 75% (18) dos estudantes concordaram que o pouco tempo de dedicação para estudar a disciplina também é um dos fatores que influenciou no seu aprendizado, 12,5% (3) discentes afirmaram que a falta de conhecimentos básicos de Matemática do 1º e 2º graus dificultou sua aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral I, 29,27% (7) dos alunos concordaram que os conteúdos ensinados

em Matemática Básica deixam a desejar em relação aos conteúdos que são exigidos para aprendizagem dos assuntos de Cálculo Diferencial e Integral I.

Fazendo uma análise mais detalhada do desempenho daqueles alunos que só estudam, percebe-se que dos 37,55% (9) dos estudantes que apenas estudam 55,55% (5), reprovaram, ou seja, o fator só estudar não indica que o aluno se dará bem na disciplina, podendo ou não este ter um bom desempenho.

6.2 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DO TESTE

As questões do Teste abordaram: domínio de funções; esboço de gráficos, fatoração e simplificação de frações algébricas; esses foram os conteúdos que julgamos ser básicos para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral I, já que serão bastante utilizados no decorrer da disciplina.

Foram analisadas e classificadas 264 respostas, de forma que na tabela 1 apresentamos a distribuição de acertos, erros e respostas parcialmente corretas por questões.

Tabela 2: Erros e acertos por questões do Teste.

QUESTÃO	CONTEÚDO	ACERTOS	PARCIALMENTE CORRETA	ERROS	EM BRANCO
1	DOMÍNIO DE FUNÇÃO INEQUAÇÃO DO 2º GRAU	1(4%)	1(4%)	7(29%)	15(63%)
2.1	ADIÇÃO COM FRAÇÃO	17(71%)	6(25%)	-	1(4%)
2.2	POTENCIAÇÃO	14(59%)	8(33%)	1(4%)	1(4%)
2.3	ADIÇÃO COM RADICAÇÃO	8(33%)	5(20%)	11(47%)	-
2.4	SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÃO RACIONAL	4(16%)	9(37%)	11(47%)	-
3.1	SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÃO RACIONAIS/PRODUTO NOTÁVEL	11(46%)	-	7(29%)	6(25%)
3.2	SIMPLIFICAÇÃO/DIFERENÇA DE QUADRADOS	6(25%)	-	2(8%)	16(67%)
3.3	SIMPLIFICAÇÃO/PRODUTOS NOTÁVEIS	14(59%)	-	7(29%)	3(12%)
4.1	ESBOÇO DE GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL	5(20%)	-	2(8%)	17(72%)
4.2	ESBOÇO DE GRÁFICO DE $f(x) = \sqrt{x}$	5(20%)	-	3(12%)	16(68%)
4.3	ESBOÇO DE GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARTÍMICA	5(21%)	-	2(8%)	17(71%)

Com base na tabela, percebe-se que o grande número de respostas em branco foi na questão 1 que trata de domínio de função, e que o maior número de acertos foi no item 2.1, enquanto que a maior frequência em erros foram nos itens 2.3 e 2.4, que tratam de simplificação de frações algébricas por meio de produtos notáveis.

Nota-se que os alunos sentiram mais dificuldade em simplificações de expressões racionais por meio de produtos notáveis e em simbologia de função.

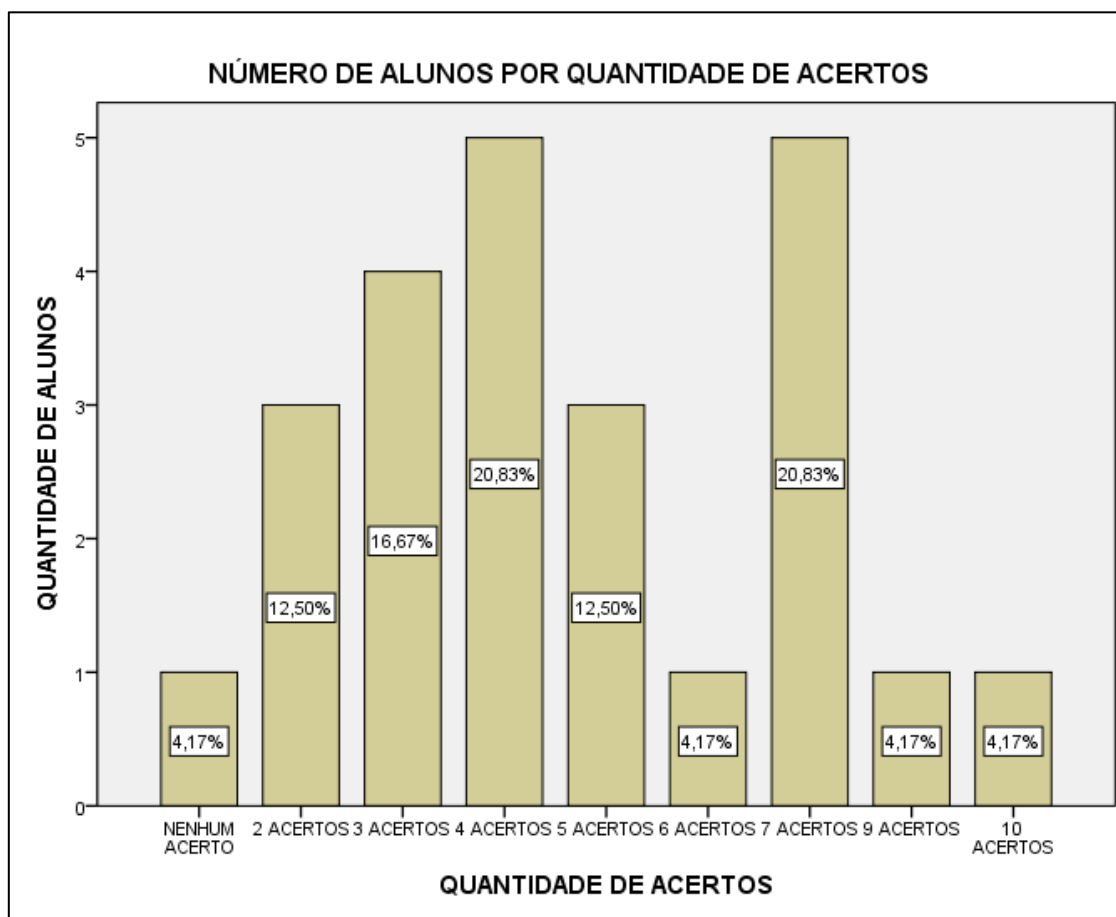
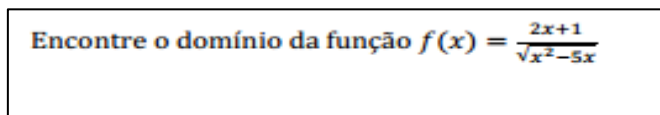


Gráfico 2: Número de alunos por quantidade de acertos

De acordo com o gráfico acima, 33,34%(8) dos alunos acertaram pelo menos 6 itens, um aluno não acertou nenhum, isso não quer dizer que ele errou todas as questões já que as respostas em branco não conta como erro, percebe-se também que nenhum aluno acertou todas as questões. Atribuindo um ponto a cada item a média geral da turma foi 4,75.

A seguir apresentaremos e analisaremos as questões do Teste de forma individual.

A questão 1 do Teste, apresentada na figura 1, envolve a determinação do domínio da função, para isto é necessário o conceito de inequação de 2º grau e de radical de expoente par.



Encontre o domínio da função $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-5x}}$

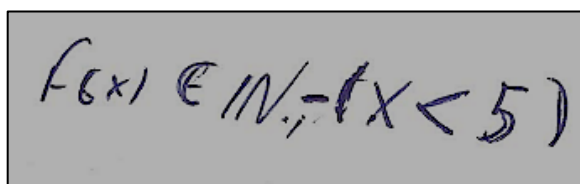
Figura 1: Questão e do Teste

Nesta questão foram analisadas as 37,5% (9) respostas erradas, ou parcialmente corretas, sendo descartadas as 62,5 (15) em branco, já que nos interessa categorizar os erros apresentados pelos alunos.

Das 8 respostas analisadas, 1 está parcialmente correta e 7 foram classificadas em erros conceituais.

Dos 7 erros conceituais analisados percebe-se que os alunos não sabem identificar o domínio da função apresentada, alguns demonstraram não saber resolver a inequação de 2º grau necessária para se encontrar o domínio e a grande maioria demonstraram ter dificuldade de se expressar por meio da linguagem simbólica.

Dentre os investigados que cometeram esses erros, destacamos a resolução do Aluno 23, que demonstrou não saber o conceito de domínio, confundindo domínio com imagem da função, além de cometer erros de linguagem simbólica.



$f(x) \in \mathbb{N}, -(x < 5)$

Figura 2: Protocolo referente à primeira questão do sujeito 23.

Com base nos dados coletados percebe-se que toda a turma demonstrou ter dificuldade em determinar o domínio da função apresentada, isto é um fator preocupante já que poderá afetar no seu desempenho dos alunos em alguns conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral I, como por exemplo, quando solicitado para encontrar o limite da função em um ponto e o aluno não sabe nem se a função está definida naquele ponto.

Nesta questão esperávamos um número razoável de acertos já que 83,33% (20) dos investigados já cursaram Matemática Básica e Matemática I, sendo domínio de funções um dos conteúdos previsto na ementa dessas duas disciplinas.

Na questão 2 o aluno tinha que julgar se verdadeiro ou falso algumas igualdades envolvendo operações com frações, exponenciais e radiciação em seguida justificar a resposta. Esta questão foi dividida em 4 itens: 2.1; 2.2; 2.3; 2.4.

2. Classifique em verdadeiro ou falso. Justifique sua resposta:

2.1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{b+a}$

2.2) $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$

2.3) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

2.4) $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = a + b$

Figura 3: Questão 2 do Teste.

No item 2.1 envolve a soma de frações com denominadores diferentes. Para resolver o aluno teria que transformar os denominadores diferentes em denominadores iguais para só então somar numerador com numerados e denominador com denominador.

Nesta questão foram analisadas as 29,17 (7) respostas erradas, ou parcialmente corretas, sendo descartadas as 62,5% (15) corretas e 8,33% (2) em branco. Das 7 respostas erradas ou parcialmente correta, 1 foi classificada em erro de teorema ou definição distorcido e 6 foram classificadas em parcialmente correta.

Quanto ao erro de teorema ou definição distorcido, o aluno 8 jugou este item como falso, porém na hora de justificar afirmou que: $a^2 + b^2 = (a + b)^2$.

a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{b+a}$ (FALSO)

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{b+a} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a+b}{b+a} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{a+b}{b+a}$$

Figura 4: Protocolo referente ao item 2.1 da segunda questão do sujeito 8.

Quanto às respostas parcialmente correta, os 6 alunos que responderam parcialmente correta este item, apenas julgaram como falsa sem justificar sua resposta.

$$a) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{b+a} \quad \text{Falso}$$

Figura 5: Protocolo referente ao item 2.1 da segunda questão do sujeito 4.

No item 2.2 foram analisadas 29,17% (7) respostas parcialmente correta e 8,33% (2) erradas, sendo 1 classificada em erro de teorema ou definição distorcido e 1 em erro sem justificativa, de modo que foram descartadas as 58,33% (14) respostas certas.

Quanto às respostas parcialmente correta, os 7 alunos que responderam parcialmente correto este item, todos apenas julgaram como verdadeiro sem justificar, ou seja, acertaram mas não justificaram.

Quanto ao erro de teorema ou definição distorcido, o aluno 6 jogou este item como falso, ao analisar sua justificativa percebemos que o aluno se equivocou no momento que tomou $(a \cdot b)^2 = 2a + 2ab + b^2$.

$$b) (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{falso} \\ = 2a + 2ab + b^2 \neq a^2 \cdot b^2$$

Figura 6: Protocolo referente ao item 2.2 da segunda questão do sujeito 6.

Item 2.3 foram 29,17% (7) respostas classificadas em erro de teorema ou definição distorcido, 20,83% (5) em resposta parcialmente correta, 16,67% (4) em erro sem justificativa e 33,33% (8) acertos, logo só analisamos as de erro de teorema ou definição distorcido e as parcialmente corretas.

Quanto às respostas parcialmente correta, os 5 alunos que responderam parcialmente correto este item, todos apenas julgaram como verdadeiro sem justificar, ou seja, acertaram mas não justificaram.

Quanto ao erro de teorema ou definição distorcido, os alunos 5, 7, 8, 12 e 24 utilizaram a definição de $\sqrt{(a \cdot b)^2} = a \cdot b$ como sendo verdade também para $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$, afirmando ser verdade, pois é só simplificar o quadrado da raiz com o quadrado dos expoentes.

$$c) \sqrt{a^2 + b^2} = a + b \quad \checkmark, \text{ pois podemos simplificar a raiz com os expoentes}$$

Figura 7: Protocolo referente ao item 2.3 da segunda questão do sujeito 24.

$$c) \sqrt{a^2 + b^2} = a + b \quad \text{Verdadeira} \quad \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$$

Figura 8: Protocolo referente ao item 2.3 da segunda questão do sujeito 12.

Já o aluno 3 e o 19 utilizaram a seguinte igualdade $\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b$ como sendo verdade na soma, ou seja, afirmaram que $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

$$c) \sqrt{a^2 + b^2} = a + b \quad \text{verdadeiro,} \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$$

Figura 9: Protocolo referente ao item 2.3 da segunda questão do sujeito 3.

$$c) \sqrt{a^2 + b^2} = a + b \quad \sqrt{a^2 + b^2} = a^{\frac{2}{2}} + b^{\frac{2}{2}} = a^1 + b^1 \quad \text{Logo é verdadeira}$$

Figura 10: Protocolo referente ao item 2.3 da segunda questão do sujeito 19.

No item 2.4 apresentou um total de 16,67% (4) acertos, 37,5% (9) respostas parcialmente correta, 8,33% (2) erros sem justificativa, ou seja, apenas afirmaram ser verdadeiro e 37,5% (9) erros de teorema ou definição distorcido.

Quanto às respostas parcialmente correta, os 9 alunos que responderam parcialmente correto este item, todos apenas julgaram como falso sem justificar, ou seja, acertaram mas não justificaram.

Quanto ao erro de teorema ou definição distorcido, os alunos 5, 6, 10 e 12 utilizaram a seguinte igualdade como base: $\frac{a^2 \cdot b^2}{a \cdot b} = a \cdot b$, ou seja, simplificando os

expoentes dos numeradores e denominadores, tomando este conceito como verdade também para a soma, isto é: $\frac{a^2+b^2}{a+b} = a + b$ o que não é verdade.

d) $\frac{a^2+b^2}{a+b} = a+b$ Verdadeiro, Admita $a=2, b=3 \Rightarrow \frac{2^2+3^2}{2+3} = \frac{4+9}{2+3} = \boxed{\frac{13}{5}}$ $a+b$

Figura 11: Protocolo referente ao item 2.3 da segunda questão do sujeito 5.

Além desse erro o aluno 12 também cometeu outro erro, separando a fração $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ em duas da seguinte forma: $\frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b}$. Nota-se que as simplificações que vale para o produto alguns alunos também fazem na soma.

d) $\frac{a^2+b^2}{a+b} = a+b$ Verdadeira $\frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} = a+b$

Figura 12: Protocolo referente ao item 2.4 da segunda questão do sujeito 12.

Já os alunos 3, 19 e 24 tomaram como sendo verdade a seguinte igualdade: $a^2 + b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ o que também está incorreto.

d) $\frac{a^2+b^2}{a+b} = a+b \rightarrow$ falso, pois $\frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = a-b$

Figura 13: Protocolo referente ao item 2.4 da segunda questão do sujeito 3.

Já os alunos 7 e 8 tomaram como sendo verdade a seguinte igualdade: $a^2 + b^2 = (a + b) \cdot (a + b)$ o que também está incorreto.

d) $\frac{a^2+b^2}{a+b} = a+b$ (VERDADEIRO), pois que $\frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{(a+b) \cdot (a+b)}{a+b} = a+b$

Figura 14: Protocolo referente ao item 2.4 da segunda questão do sujeito 7.

Na questão 2 percebemos que quando o aluno cometeu algum erro ou foi referente ao tipo D: Uso de definição ou teorema distorcido, relacionados a conceitos

básicos da Matemática ou foi erro sem justificativa, ou seja, o aluno apenas julgou o item incorretamente sem justificar, isto é, não anexou nenhum cálculo.

Em relação aos erros tipo D percebe-se que este irá dificultar o aprendizado do aluno nos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral I, principalmente em Limite, já que a maioria das questões os estudante deverá aplicar estratégias de manipulação algébricas de forma a tornar a questão viável para resolução.

Na questão 3 o aluno tinha que simplificar as funções polinomiais. Esta questão foi dividida em 3 itens: 3.1; 3.2; 3.3.

3. Simplifique as expressões:

3.1) $\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$, onde $g(x) = x^2$

3.2) $\frac{x^2 - 5}{x - \sqrt{5}}$

3.3) $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$

Figura 15: Questão 3 do Teste.

No item 3.1 foram analisadas 29,17% (7) respostas erradas, sendo todos erros conceituais de $g(x+h)$. De forma que foram descartadas 45,83% (11) corretas e 25% (6) em branco.

The image shows a student's handwritten work for item 3.1. The student has written: $a) \frac{g(x+h) - x^2}{h} = \frac{g(x) - x^2}{h} = \frac{0}{h} = 0$. There are several corrections and cancellations in the work, indicating a conceptual error in identifying $g(x+h)$.

Figura 15: Protocolo referente ao item 3.1 da terceira questão do sujeito 6.

$$= \frac{x^2 + h}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Figura 16: Protocolo referente ao item 3.1 da terceira questão do sujeito 3.

O item 3.2 foi composto por uma amostra de 25% (6) acertos, 66,67% (16) em branco e 8,33% (2) erros de teorema ou definição distorcido.

Quanto aos erros de teorema ou definição distorcido, o aluno 1 multiplicou o item por $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$, até ai tudo bem, em seguida colocou $\sqrt{5}$ em evidência de forma que cometeu alguns erros o que deixou o item ainda mais complicado sem simplificar.

$$b) \frac{x^2 - 5}{x - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(-x^2 + 5)}{\sqrt{5}(-x + \frac{5}{\sqrt{5}})} = \frac{-x^2 + 5}{-x + \frac{5}{\sqrt{5}}}$$

Figura 17: Protocolo referente ao item 3.2 da terceira questão do sujeito 1.

Já o aluno 4 começou com a ideia correta que era multiplicar a função polinomial por $\frac{x+\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}$, porém na hora de multiplicar o aluno se atrapalhou no numerador e no denominador ele considerou $(x + \sqrt{5}) \cdot (x - \sqrt{5}) = (x + \sqrt{5})^2$, ou seja, o aluno utilizou definição distorcida.

$$b) \frac{x-5}{x-\sqrt{5}} \cdot \frac{x+\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}} = \frac{x^2 + x\sqrt{5} - 5x - 5\sqrt{5}}{(x+\sqrt{5})^2} = \frac{x^2 + x\sqrt{5} - 5x - 5\sqrt{5}}{x^2 + 2x\sqrt{5} + 5}$$

Figura 18: Protocolo referente ao item 3.2 da terceira questão do sujeito 4.

No item 3.3, 58,33% (14) alunos acertaram, 12,5% (3) deixaram em branco e 29,17 (7) erraram, sendo 5 erros de teorema ou definição distorcido e 2 erros técnicos.

Quanto aos erros de teorema ou definição distorcido.

$$= \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3} = -1$$

Figura 19: Protocolo referente ao item 3.3 da terceira questão do sujeito 19.

Quanto aos erros técnicos, a baixo segue a resposta do aluno 9.

$$c) \frac{x^2-9}{x^2-6x+9} = \frac{(x-3) \cdot (x+3)}{(x-3)} = x+3$$

$$(x-3)^2 = (x-3) \cdot (x-3)$$

$$x^2 - 3x - 3x + 9$$

$$x^2 - 6x + 9$$

Figura 20: Protocolo referente ao item 3.3 da terceira questão do sujeito 9.

Nota-se nesta questão 3 um grande número de respostas em branco. As resoluções efetuadas por esses sujeitos evidenciaram que nem mesmo as propriedades da Aritmética estavam sendo respeitadas, dividindo termos do numerador e do denominador, desprezando a adição.

As resoluções tanto desta questão quanto da anterior deixaram em evidência que a maioria dos sujeitos não possui conceitos algébricos apropriados, nem mesmo algumas das propriedades da Aritmética, uma vez que não aplicaram na resolução do problema proposto ou quando aplicados aplicaram de forma incorreta.

Fica desta forma evidenciada a deficiência dos sujeitos em relação aos conceitos relativos aos conteúdos matemáticos do Ensino Básico, de forma que a falta desses conteúdos na ementa da disciplina de Matemática básica reflete-se diretamente no desempenho dos estudantes na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, visto que serão utilizados.

A questão 4 o aluno tinha que esboçar gráficos de algumas funções fundamentais. Esta questão foi dividida em 3 itens: 4.1; 4.2; 4.3. Nesta questão esperávamos um número razoável de acertos, já que essas funções são frequentemente utilizadas no decorrer da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I e esse Teste estava sendo aplicado no final da disciplina, porém não foi essa a realidade.

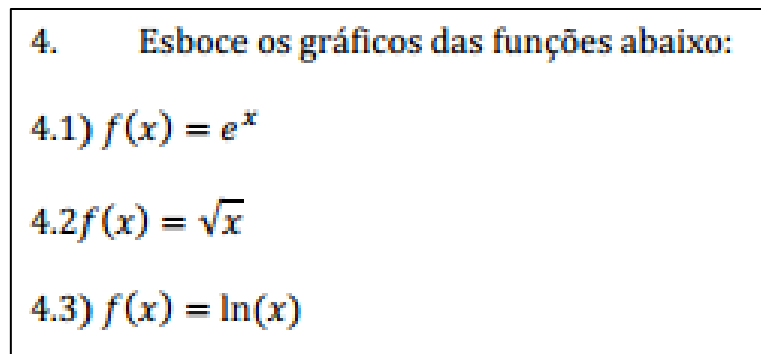


Figura 21: Questão 4 do Teste.

O item 4.1 solicitava que o aluno esboçasse o gráfico da função exponencial. Neste item foram 8,34% (2) respostas classificadas em erro conceitual, 20,83% (5) acertos e 70,83% (17) em branco.

Quanto aos erros conceituais, com a análise das respostas, os alunos demonstraram não ter nenhuma preocupação com o rigor matemático de forma a desconsiderar características relevantes da função exponencial, como por exemplo, a função se aproxima do eixo horizontal do plano cartesiano, porém não toca nele.

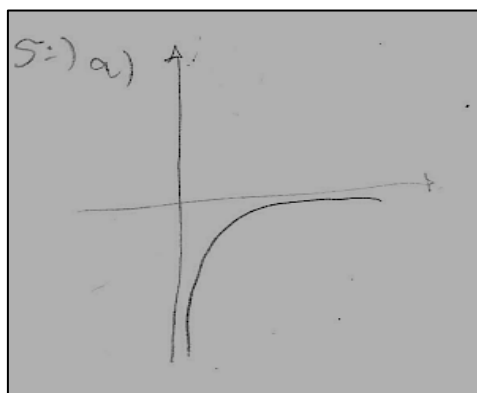


Figura 22: Protocolo referente ao item 4.1 da quarta questão do sujeito 20.

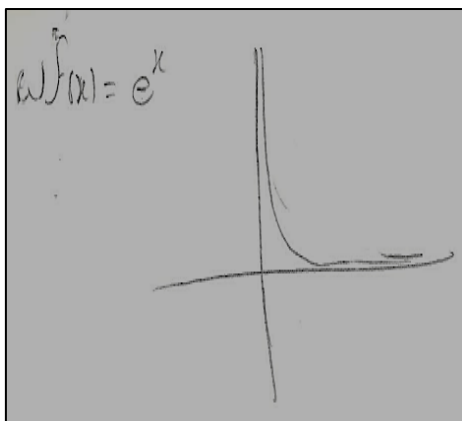


Figura 23: Protocolo referente ao item 4.1 da quarta questão do sujeito 21.

No item 4.2 tiveram 20,83% (5) respostas corretas, 66,67% (16) em branco e 12,5% (3) erro conceituais.

Quanto aos erros conceituais, analisando as respostas, o aluno 11 demonstrou não saber o gráfico da função $f(x) = k$; k é uma constante, pois o mesmo esboçou o gráfico de uma função constante.

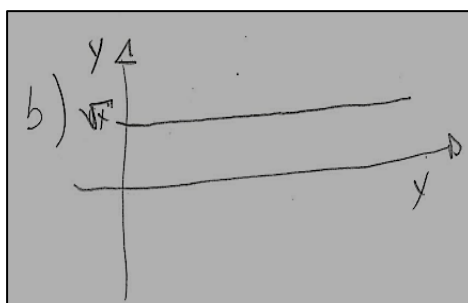


Figura 24: Protocolo referente ao item 4.2 da quarta questão do sujeito 11.

Já o aluno 21 esboçou um gráfico parecido com o da função $f(x) = x$.

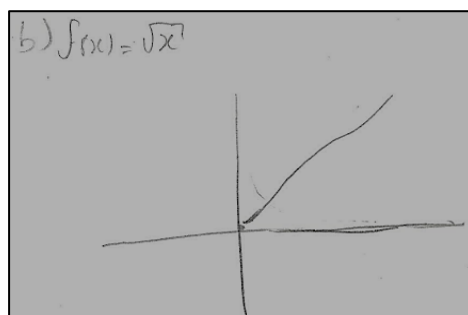


Figura 25: Protocolo referente ao item 4.2 da quarta questão do sujeito 21.

Em relação a resposta do aluno 20, ele foi atribuindo valores e ligando os pontos, porém como ele desprezou o rigor matemático o gráfico ficou errado.

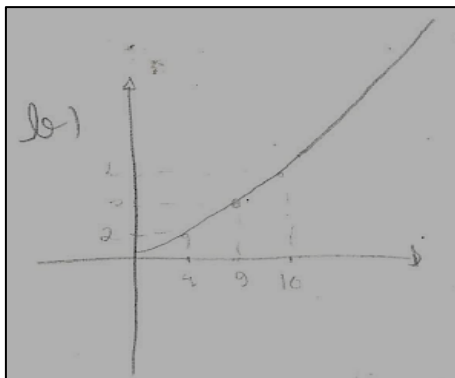


Figura 26: Protocolo referente ao item 4.2 da quarta questão do sujeito 20.

Em relação ao item 4.3, a função logarítmica é uma das mais utilizadas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, porém apenas 20,83% (5) alunos acertaram, de forma que 8,34% (2) alunos cometeram erro conceitual e 70,83% (17) estudantes deixaram em branco.

O aluno 14 fez um gráfico parecido com o da função exponencial decrescente, já o aluno 21 fez um gráfico parecido com o de uma função de 2º grau.

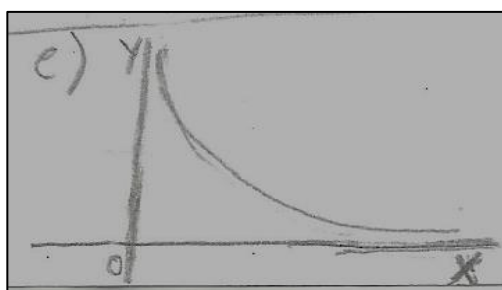


Figura 27: Protocolo referente ao item 4.3 da quarta questão do sujeito 14.

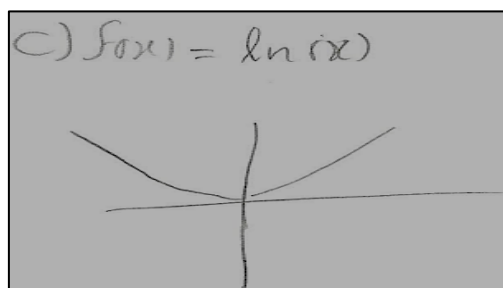


Figura 28: Protocolo referente ao item 4.4 da quarta questão do sujeito 21.

Os gráficos solicitados nesta na questão 4 são exemplos de três funções elementares, de modo que deveria ser de conhecimento básico dos investigados, pois de acordo com as ementas de Matemática Básica e Matemática I já foram estudadas pelos alunos, visto que 83,33% (20) cursaram estas disciplinas e além do mais podemos dizer que os alunos já tinham cursado Cálculo Diferencial e Integral I, pois esse instrumento foi aplicado no final da disciplina, após as três avaliações.

Porém, houve um alto índice de itens em branco e alguns errados. Em cada item, dessa questão, houve apenas 5 respostas corretas.

Desta forma, os dados indicam a ausência de conhecimento das funções elementares e seus respectivos gráficos por parte dos alunos, também é perceptivo que a ausência deste conhecimento poderá dificultar o aprendizado dos alunos em Cálculo Diferencial e Integral I, já que é um conteúdo base para aprendizagem de outros.

Sendo assim, a falta desse conhecimento, uma questão a se questionar, já que os alunos já cursaram: Matemática Básica, Matemática I e Cálculo Diferencial e Integral I.

6.3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DA 1ª AVALIAÇÃO DA DISCIPLINA

O instrumento aqui analisado faz parte da primeira avaliação do aprendizado da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, aplicada de acordo com o calendário acadêmico, no dia 08 de maio de 2014, com duração de 1 hora e 40 minutos. Participaram desta avaliação 38 acadêmicos, porém só analisamos os 24 alunos que responderam o Questionário e o Teste.

Foram analisadas e classificadas 240 respostas. A tabela 2 apresenta a distribuição das questões certas, parcialmente certas e erradas referente a 1ª avaliação da disciplina.

Tabela 3: Erros e acertos por questões da 1ª avaliação.

QUESTÃO	CONTEÚDO	ACERTOS	PARCIALMENTE CORRETA	ERROS	EM BRANCO
1.A	LIMITES	12(50%)	-	10(42%)	2(8%)
1.B	LIMITES	16(67%)	-	6(25%)	2(8%)
1.C	LIMITES	14(59%)	-	7(29%)	3(12%)
1.D	LIMITES	7(29%)	1	11(46%)	5(21%)

1.E	LIMITES	-	-	17(71%)	7(29%)
2	LIMITE/TEOREMA DO CONFRONTO	20(84%)	1(4%)	1(4%)	2(8%)
3	LIMITE/MANIPULAÇÕES ALGÉBRICAS	11(46%)	-	7(29%)	6(25%)
4.A	LIMITES LATERIAS	24(100%)	-	-	-
4.B	LIMITES LATERIAS	21(88%)	-	3(12%)	-
4.C	CONTINUIDADE DE FUNÇÃO	5(21%)	6(25%)	11(46%)	2(8%)

De acordo com a tabela acima, o maior número de questões em branco foi no item 1.E que era para calcular um limite, o maior número de acertos foi na questão 2 e de erros foi também no item 1.E, neste item o aluno se deparava com uma indeterminação, para sua resolução bastava o aluno explicar: como o numerador é uma constante negativa e o denominador está tendendo a um valor muito pequeno, podemos concluir que o limite é menos infinito.

Percebe-se que a partir da questão 2 as questões exigiam pouco conhecimentos básicos de Matemática, ou seja, para o bom desempenho bastava o aluno dominar o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral I e foi nessas questões que tiveram o maior número de acertos. Assim, podemos concluir que quando não era exigido um conteúdo básico da Matemática para resolução da questão a quantidade de acertos era maior.

Se analisarmos o índice de aprovação apenas na 1ª avaliação, ou seja, o índice daqueles que tiram nota maior ou igual a 7 este será de 28,20%, isto é, apenas 11 alunos conseguiram tirar nota maior ou igual a 7, ou seja, um índice muito baixo.

Apresentaremos e analisaremos as questões da 1ª Avaliação da disciplina, sendo esta de modo individual.

A questão 1 contém cinco itens, apresentada na figura 29, envolve o conceito de limite de funções: racionais e trigonométricas que é usado para descrever o comportamento de uma função próximo de um ponto de acumulação que não pertence ao domínio.

Nesta questão o aluno se depara com indeterminações Matemáticas, de forma que para resolver os itens da questão o estudante deveria aplicar estratégias de manipulação algébricas através do produto notável a tornar a questão viável para

resolução. As habilidades e competências necessárias para a resolução dessa questão são:

- Identificar a indeterminação de limite de funções;
- Estabelecer e aplicar as relações de produtos notáveis e fatoração;
- Calcular o limite.

1. (Peso 2,5) Calcule os seguintes limites

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 5x + 2)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 3}{x^2}$

Figura 29: Questão 1 da 1ª Avaliação.

No item 1.A tiveram 12(50%) respostas corretas, 8,33%(2) em branco e 41,67%(10) erros, sendo 5 erros de teorema ou definição distorcido, 1 erro técnico e 4 erros conceituais.

Quanto aos erros de teorema ou definição distorcido, aqui os 5 alunos erraram na manipulação algébricas por meio ou do produto notável ou da divisão polinomial. Percebe-se a partir da análise que o aluno sabe calcular o limite da função atrapalhando-se apenas nas manipulações.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} &= \frac{x^3 + 1}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^3 + 1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{-x^2 + x + 1}{x-1} \quad (x^2 - x + 1) \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + x + 1}{x-1} &= \frac{-1 - 1 + 1}{-1 - 1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Figura 30: Protocolo referente ao item 1.A da primeira questão do sujeito 11.

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

0,2

Figura 31: Protocolo referente ao item 1.A da primeira questão do sujeito 18.

Percebe-se que os alunos sabem calcular o limite, porém se atrapalham nas manipulações algébricas necessárias para resolverem a questão.

Quanto aos erros conceituais, os 4 estudantes colocaram o x de maior expoente em evidência e os fatores fracionários que ficaram com o numerador com um número e o denominador com o x afirmaram que essa fração tendia a 0 o que não é verdade já que o x está tendendo a -1 , isso só seria verdade caso o x estivesse tendendo ao infinito,

$$1) a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} = \frac{x^2 \cdot (x + \frac{1}{x^2})}{x^2 \cdot (x - \frac{1}{x^2})} = \frac{x}{x} = 1 = +\infty$$

Figura 32: Protocolo referente ao item 1.A da primeira questão do sujeito 13.

Quanto ao erro técnico, o aluno 21 encontrou o produto notável correspondente ao polinômio, simplificou o mesmo, porém no final o aluno inverteu um sinal podendo ter sido ocasionado por mera distração.

$$1) a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2-x+1)}{(x-1)} =$$

$$= \frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{-1 - 1} = \frac{1 - 2}{-2} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

0,4

Figura 33: Protocolo referente ao item 1.A da primeira questão do sujeito 21.

Já no item 1.B tiveram 66,67%(16) respostas corretas, 8,33%(2) em branco e 25%(6) erros, sendo 2 erros de teorema ou definição distorcido e 4 erros conceituais.

Quanto aos erros de teorema ou definição distorcido, de acordo com as respostas dos alunos eles sabiam o que deveria fazer para responder a questão: colocar o x de maior expoente em evidência, porém ao tentar fazer isso cometeram erros.

Figura 34: Protocolo referente ao item 1.B da primeira questão do sujeito 5.

Quanto aos erros conceituais, para este item bastava o aluno colocar em evidência o fator de maior expoente, ou seja, ficaria da seguinte forma: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(3 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2})$, como o x está tendendo ao infinito os dois últimos fatores do polinômio tende a 0 restando apenas o $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 = \infty$.

Porém de acordo com a resposta dos alunos 13 e 16 eles não tiveram essa ideia respondendo de forma intuitiva, cometendo assim um erro conceitual.

x	y
1	0
2	4
3	14
...	...
+\infty	\infty

Figura 35: Protocolo referente ao item 1.B da primeira questão do sujeito 16.

Já o aluno 4 não deu a devida atenção ao rigor matemático, demonstrou saber calcular o limite da função porém na hora de finalizá-la cometeu alguns erros conceituais, segue a baixo.

Handwritten student work for item 1.B. The student starts with the expression $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 5x + 2)$. They then write $\lim_{x \rightarrow \infty} = x^2 \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$. There are arrows pointing to the terms $\frac{5}{x}$ and $\frac{2}{x^2}$ with the note "Se já". Below this, they write $\lim_{x \rightarrow \infty} = x^2 \cdot (3)$ with the note "então já". Then they write $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty \cdot 3 = \infty$ with the note "calcula".

Figura 36: Protocolo referente ao item 1.B da primeira questão do sujeito 4.

O item 1.C teve uma amostragem de 58,33%(14) acertos, 29,17%(7) erros de definição ou teorema distorcido e 12,5%(3) em branco.

Quanto aos erros de teorema ou definição distorcido, os 7 estudantes demonstraram saber calcular o limite da função solicitada no item, ou seja, fizeram todo o procedimento necessário, porém erraram na soma de duas raízes.

Handwritten student work for item 1.C. The student starts with the expression $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x-3(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3}$. Then they write $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}+\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}+\sqrt{3} = \boxed{3}$ with a large 'X' and the note "o, 3".

Figura 37: Protocolo referente ao item 1.C da primeira questão do sujeito 5.

No item 1.D 29,17%(7) estudantes acertaram, 4,17%(1) acertou parcialmente, 45,83%(11) erraram, sendo 7 erros de definição ou teorema distorcido, 2 erros conceituais e 2 erros técnicos e 20,83%(5) alunos deixaram em branco.

Quanto aos erros de teorema ou definição distorcido, 7 alunos começaram respondendo corretamente o item, porém no final usou o limite fundamental do cálculo de forma errada.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 0 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{0}$

Figura 38: Protocolo referente ao item 1.D da primeira questão do sujeito 16.

Quanto aos erros conceituais, os alunos 14 e 17 demonstraram não saber calcular o limite da função, segue abaixo sua resposta.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{x} = \frac{0}{x} = \boxed{0}$

Figura 39: Protocolo referente ao item 1.D da primeira questão do sujeito 14.

Quanto a resposta parcialmente correta, o aluno começou a resolver o item de forma correta, porém chegou em um determinado momento que o mesmo não sabia mais o que fazer.

1º d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \Rightarrow \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $0,1$

$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \frac{x}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ $\boxed{0,1}$

Figura 40: Protocolo referente ao item 1.D da primeira questão do sujeito 5.

Quanto ao erro técnico, de acordo com a resposta os alunos demonstraram saber resolverem o limite da função, porém na hora de uma substituição trigonométrica trocaram um sinal.

No item 1.E tiveram 70,83%(17) de erros, sendo 15 erros conceituais e 2 de definição ou teorema distorcido, e 29,17%(7) respostas em branco, ou seja, nenhum aluno acertou.

Em relação aos erros conceituais temos este como exemplo:

Handwritten student work for item 1.E of question 12. The work shows the limit expression $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{x^2}$ and a diagram of a coordinate system with a point at $(0, 3)$ and a line passing through it. The final answer is $\lim_{x \rightarrow 0^-} = -\infty$.

Figura 41: Protocolo referente ao item 1.E da primeira questão do sujeito 12.

Já quanto ao erro de definição ou teorema distorcido segue a resposta do aluno 7.

Handwritten student work for item 1.E of question 1. The work shows the limit expression $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{x^2}$ and a diagram of a coordinate system with a point at $(0, 3)$ and a line passing through it. The final answer is $\lim_{x \rightarrow 0^-} = -\infty$.

Figura 42: Protocolo referente ao item 1.E da primeira questão do sujeito 7.

Em geral, na questão 1, no cálculo de limite, que envolveu simplificações de expressões racionais e conhecimento de trigonometria, houve razoável número de acertos. Segue a baixo o número de acertos e erros:

Tabela 4: Erros e acertos da primeira questão da 1ª avaliação.

QUESTÃO 1	ACERTOS	PARCIALMENTE CORRETA	ERROS	EM BRANCO
1.A	12(50%)	-	10(42%)	2(8%)
1.B	16(67%)	-	6(25%)	2(8%)
1.C	14(59%)	-	7(29%)	3(12%)
1;D	7(29%)	1(4%)	11(46%)	5(21%)
1.E	-	-	17(71%)	7(29%)

A maioria dos erros cometidos pelos alunos nessa questão estava relacionado ou a manipulações algébricas ou a substituição trigonométrica. Isso nos leva a refletir sobre a falta de conhecimentos de álgebra e de trigonometria que não estão previstos nas ementas de Matemática Básica nem de Matemática I, principalmente a ausência do conteúdo de função trigonométrica nas ementas dessas duas disciplinas, pois é necessário para calcular alguns limites.

A questão 2, Figura 42, envolve o limite da função por meio do teorema do confronto. Para resolução da questão era necessário as seguintes competências:

- Determinar os limites das funções,
- Mencionar o teorema do confronto para justificar o limite da função $f(x)$.

Note que os conceitos envolvidos nesta questão são de Cálculo Diferencial e Integral I, exigindo apenas uma fatoração simples.

2. (Peso 2,0) Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que para todo $x \neq 1$,

$$2\sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e justifique. 2

Figura 43: Questão 2 da 1ª Avaliação.

Nesta questão tiveram 83,33%(20) acertos, 4,17%(1) resposta parcialmente correta, 8,33%(2) erros conceituais e 4,17%(1) em branco.

Quanto à resposta parcialmente correta, para que o aluno tivesse acertado a questão faltou o rigor matemático na hora de escrever a resposta, cometendo assim alguns erros de linguagem.

2- $2\sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{x^2-1}{x-1}$

lim $2\sqrt{x}$ $x \rightarrow 1$ Pelo teorema do confronto com o $\lim$ que se existe limb

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1) \cdot \cancel{(x-1)}}{(x-1)}$

$\lim_{x \rightarrow 1} 2\sqrt{x} = 2$ no mesmo limb no lado, logo do lado da o mesmo valor.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = (1+1) = 2$

Figura 44: Protocolo referente segunda questão do sujeito 22.

Quanto aos erros conceituais, os dois alunos sabiam que deveria se embasar no teorema do confronto, porém não sabiam explicar o referido teorema.

② $2\sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{x^2-1}{x-1}$

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} = (x+1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} = 2$

0,5

Se $h(x) = g(x)$ não 2, $f(x)$ também tem como resultado 2.

Figura 45: Protocolo referente segunda questão do sujeito 12.

Com nos dados, conclui-se que o grupo de alunos assimilou o conceito necessário para solução do problema, no qual exigiu pouco conhecimento básico de Matemática.

A questão 3, apresentada na figura 45, envolve também o conceito de limite de funções polinomiais descrevendo o comportamento da função, à medida que seu domínio se aproxima do ponto 1.

Nesta questão o aluno para resolvê-la deveria aplicar estratégias de manipulação algébricas de forma a tornar a questão viável para resolução. As habilidades e competências necessárias para a resolução dessa questão são:

- Interpretar e utilizar as informações dadas;
- Estabelecer e aplicar manipulações algébricas;
- Utilizar propriedades de limite.

3. (Peso 2,5) Seja f definida em $\mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = k$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - 1)}{x - 1}$.

Figura 46: Questão 3 da 1ª Avaliação.

Nesta questão 45,83%(11) alunos acertaram, 29,17%(7) cometeram erro de definição ou teorema distorcido e 25%(6) deixaram em branco.

Quanto aos erros de definição ou teorema distorcido, aqui os alunos consideraram $f(x^2 - 1)$ sendo igual a $f(x + 1) \cdot (x - 1)$, o que não é verdade.

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = k$. calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2-1)}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2-1)}{x-1} = \frac{(k+1) \cdot (x-1)}{x-1} = k+1$ ②

Se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = k$ logo $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1) \cdot (x-1)}{x-1} = (k+1)$

k^2-1

$k+1=2$

Figura 47: Protocolo referente terceira questão do sujeito 10.

Os erros cometidos pelos alunos nesta questão foram de natureza algébrica e de linguagem simbólica de função.

A questão 4, cuja imagem está na Figura 47, envolve o conceito de limite laterais de uma função, existência de limite e continuidade de função em um ponto. Esta questão foi dividida em 3 itens.

Para resolução da questão têm-se as seguintes competências e habilidades necessárias:

- Verificar se os limites laterais existem e se são iguais;
- Calcular a imagem da função no ponto 0;
- Analisar se a função é contínua.

4. (Peso 3,0) Seja .

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & x \leq 0 \\ \frac{\sin(2x)}{x} & x > 0 \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(c) A função é contínua? Por quê?

Figura 48: Questão 4 da 1ª Avaliação.

No item 4.A bastava o aluno saber qual função a ser utilizada para calcular o limite lateral quando x tende a 0 pela esquerda e calcular o limite da referida função. Este item teve 100% de acerto, ou seja, os 24 estudantes analisados acertaram.

Handwritten student solution for item 4A: $a) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 + 2 = 0^3 + 2 = 2$

Figura 49: Protocolo referente ao item A da quarta questão do sujeito 7.

Análogo ao item anterior, no item 2.B o aluno tinha que calcular o limite da função quando x tende a 0 agora pela direita. Aqui tiveram 87,5%(21) acertos e 12,5%(3) erros, sendo 2 de definição ou teorema distorcido e 1 erro conceitual.

Quanto aos erros de definição ou teorema distorcido, de acordo com a análise das respostas dos alunos 1 e 7 demonstraram saber calcular limite de função, porém se atrapalharam nas manipulações que eram necessárias para se calcular o limite.

O aluno 1 substituiu o $\sin(2x)$ por $\sin(x) + \sin(x)$. Segue a imagem.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} = 2$$

Figura 50: Protocolo referente ao item B da quarta questão do sujeito 1.

Já o aluno 7 ele fez a manipulação necessária para se resolver o limite, porém cometeu um erro algébrico referente a conteúdo do Ensino Básico.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{2}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$$

Figura 51: Protocolo referente ao item B da quarta questão do sujeito 7.

Quanto ao erro conceitual, o aluno 24 tentou resolver o limite de forma intuitiva analisando o comportamento da função quando a mesma se aproximava do ponto 0 pela direita por meio do plano cartesiano. Desta forma ficou evidente que o aluno não sabia calcular o limite da função.

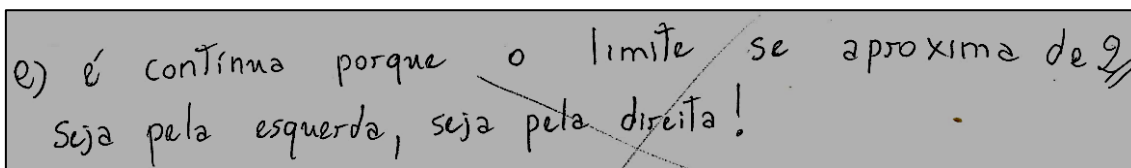
$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{x} = 0 \text{ continua}$$

Figura 52: Protocolo referente ao item B da quarta questão do sujeito 24.

Depois de ter calculado os limites laterais e verificado que eram iguais o aluno teria que concluir no item 4.C que o limite da função $f(x)$ existia. Para concluir que a mesma era continua bastava calcular a função no ponto 0 e justificar sua resposta.

Neste item apenas 20,83%(5) alunos acertaram, 70,83%(17) estudantes cometeram erro conceitual e 8,33%(2) deixaram o item em branco.

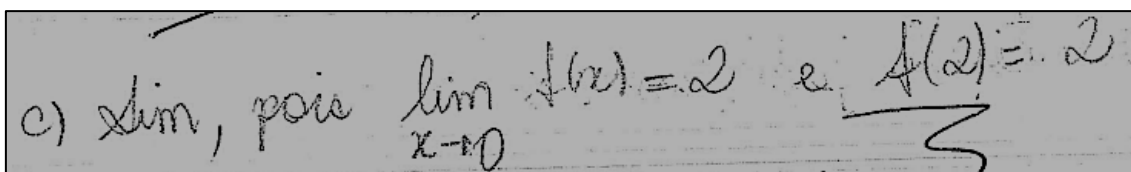
Quanto aos erros conceituais, aqui 16 alunos responderam que a função era continua com base apenas na informação que os limites laterais eram iguais sem concluir qual era o limite da função e sem calcular a função no ponto, sabemos que os limites laterais ser iguais é necessário para a função ser continua, mas não suficiente.



e) é contínua porque o limite se aproxima de 2 seja pela esquerda, seja pela direita!

Figura 53: Protocolo referente ao item C da quarta questão do sujeito 5.

Já o aluno 16 concluiu que o limite da função era 2 e calculou a função no ponto 2 e não no 0.



c) sim, pois $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ e $f(2) = 2$

Figura 54: Protocolo referente ao item C da quarta questão do sujeito 16.

Desta forma, foi constatado, através das análises dos instrumentos de coleta de dados, que as dificuldades demonstradas pelos estudantes pesquisados em grande maioria estão relacionadas à ausência de conhecimentos matemáticos básicos, isto fica confirmado se fizermos uma comparação entre a quantidade de acertos no Teste e na 1ª avaliação da disciplina.

Percebe-se que na 1ª avaliação o número de respostas corretas foi bem maior que no Teste e que a quantidade de questões deixadas em branco comparado ao do Teste foi baixa. Esta informação pode ser confirmada analisando os dados das tabelas 1 e 2.

Um dos motivos que poderia justificar esses índices é que as questões do Teste para serem resolvidas necessitava de conhecimentos básicos de Matemática o que não aconteceu com a grande maioria das questões referente a 1ª avaliação da disciplina.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo identificar as dificuldades de aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I dos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Campus Acadêmico

do Agreste – CAA, por meio da análise de um Questionário, de um Teste e da primeira avaliação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Com base na fundamentação teórica e no resultado da pesquisa, diversos são os fatores que dificultam o aprendizado do aluno na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, sendo as principais dificuldades identificadas as seguintes: Pouco tempo de dedicação para estudar a disciplina e a ausência de conhecimentos básicos de Matemática, sendo esta última identificada a partir da análise dos erros cometidos pelos alunos no Teste e na 1ª Avaliação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

A partir dos dados apresentados, observa-se que os erros de maior frequência estão categorizados como do tipo D e H, ou seja, de definição ou teorema distorcido e erro conceitual. Quando o erro foi categorizado em erro conceitual no Teste, isso quer dizer que o aluno cometeu um erro relacionado a conceitos básicos de Matemática, quando o erro foi categorizado em erro conceitual na 1ª avaliação da disciplina de cálculo Diferencial e Integral I, implica dizer que o aluno errou em conceitos de Cálculo Diferencial e Integral I.

Para as respostas dos acadêmicos no Teste, verifica-se uma prevalência de erros categorizado em erro tipo D (uso de definição ou teorema distorcido), erros causados por uso equivocado de propriedades das operações empregadas.

Houve também um grande índice de erro tipo H (erro conceitual), principalmente na primeira questão do Teste para determinar o domínio da função apresentada, apenas um aluno demonstrou saber resolver a questão.

No Teste, notamos que a maioria dos erros estava relacionada a conteúdos de Álgebra do Ensino Básico, especialmente relacionados a operações e propriedades, produtos notáveis e fatoração.

Já na 1ª avaliação da referida disciplina, os investigados cometeram mais erro conceitual, ou seja, relacionados a Cálculo Diferencial e integral I, já que a maioria das questões não exigiam tanto conhecimentos básicos de Matemática e sim de Cálculo, porém na primeira questão da avaliação prevaleceu o erro tipo D, os alunos demonstraram saber calcular limite, porém atrapalhavam-se nas manipulações algébricas necessárias para resolver o problema, de forma que grande parte das

dificuldades apresentadas pelos estudantes estava relacionada com conteúdos de básicos de Matemática.

Os investigados também demonstraram ter dificuldades em calcular limites que envolviam funções trigonométricas, sendo uma possível causa desta dificuldade a ausência dessas funções nas disciplinas de Matemática Básica e Matemática I.

Nota-se que quando a questão não exigia conceitos básicos de Matemática, ou seja, quando exigia conteúdos de cálculo o índice de acerto era maior e o de questão em branco era menor. Assim, percebe-se que a dificuldade do aluno não está em um conteúdo específico do Cálculo Diferencial e Integral I, mas sim em conceitos básicos da Matemática.

Um aspecto que chamou a atenção foi o índice de respostas em branco no Teste comparado ao da 1ª avaliação, já que os conteúdos necessários para resolverem as questões estão ou na ementa de Matemática Básica ou na de Matemática I e que 83,33% da turma já cursaram essas duas disciplinas.

No Teste foi 34,85% (92) respostas em branco, já na 1ª avaliação esse índice foi de apenas 12,08% (29), de modo que desses 12,08%, 7, 92% (19) foram na questão 1 e 2,5% (6) na questão 3, ou seja, 86,26% (25) das respostas em branco foram nessas questões que inclusive era as duas questões que exigia manipulações algébricas para resolver o limite da função.

Com base nos dados acima, fica evidenciado mais uma vez um dos fatores que os alunos demonstraram ter dificuldades: manipulações algébricas.

Em relação ao desempenho dos alunos no Teste, 5 estudantes não acertaram nenhuma questão, analisando o desempenho dos mesmos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I apenas um conseguiu passar e mesmo assim foi para final ficando com média 5,78, os outros reprovaram direto.

Dos 11 alunos aprovados por média, apenas um que participou do Teste está neste conjunto dos aprovados por média, inclusive foi o que acertou o maior número de itens: 10, ou seja, o restante que participaram do Teste ou reprovaram direto ou foram para final.

Com base nos dados, observa-se que muitos alunos, mesmo no curso superior, ainda apresentam dificuldades em conteúdos do ensino fundamental e médio, tais como manipulações algébricas e construção de gráficos, afetando assim na qualidade do processo de ensino e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral I.

Ao analisar as respostas dos alunos, é perceptivo que a grande maioria dos investigados não dá a devida atenção ao rigor matemático, contribuindo assim para a ocorrência de alguns erros, como exemplo podemos citar, o esboço dos gráficos, alguns alunos tinham a ideia de certos gráficos, porém desprezavam algumas características principais de determinadas funções, exemplo, o gráfico da função exponencial se aproxima do eixo horizontal do plano cartesiano, porém não toca nele, cometendo assim erro no conceito de função.

Os erros e dificuldades que se evidenciaram nesta pesquisa levam a pensar na importância do desenvolvimento de estratégias que favoreçam a superação dos mesmos uma vez que o domínio e aplicação de alguns conceitos são fundamentais para que o aluno possa prosseguir na aquisição dos conhecimentos matemáticos.

Assim acredita-se que uma possível solução a fim de melhorar o desempenho dos estudantes na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I seria dar mais ênfase no estudo das funções elementares, visto que os alunos demonstraram ter bastante dificuldade em trabalhar com funções, tanto para determinar o domínio da função quanto para esboçar seu gráfico inclusive também no conceito de função.

Percebe-se que mesmo 83,33% da turma ter cursado a disciplina de Matemática I ainda o índice de reprovação continua alto sendo de 47,06% (16). Uma possível solução para isso poderia ser inserir alguns conteúdos que sua ausência nas ementas das disciplinas cursadas pelos alunos demonstraram influenciar no desempenho dos estudantes: Funções trigonométricas, que está apenas em Matemática II e fazer um estudo mais intensificados de expressões algébrica, visto ser a ausência do domínio deste conteúdo responsável por grande parte das dificuldades demonstrada pelos alunos.

Acredita-se, portanto, que a análise e classificação dos erros cometidos pelos estudantes confirmaram a necessidade de engajá-los em atividades que propiciem o desenvolvimento de habilidades e competências, de acordo com as deficiências

detectadas, possibilitando ao aluno um melhor desempenho na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Espera-se que as informações, obtidas por meio desse trabalho, possam provocar reflexões acerca das dificuldades encontradas no aprendizado de Cálculo Diferencial e Integral I.

.

REFERÊNCIAS

ABRATE, R. S.; POCHULU, M. D.; VARGAS, J. M. **Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo**. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María, 2006.

ALVES, L. L. S. **Derivadas como no tempo de newton e leibniz**. Universidade Católica de Brasília, Curso de Matemática.

BARBOSA, A. C. C, CONCORDIDO, C. F. R, **Tutorial de pré-cálculo**. 2009, Rio de Janeiro, Brasil.

BARBOSA, G. O. **Raciocínio lógico formal e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral: O caso da Universidade Federal do Ceará**. Dissertação de Mestrado em Educação Brasileira pela Faculdade de Educação-FECED da Universidade Federal do Ceará-UFC – 1994.

BARRETO, A. **O ensino de Cálculo Diferencial e Integral I nas Universidades**. Informativo da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 1995.

BOOTH, Lesley R. **Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra**. In: COXFORD, Arthur F. (org.); SHULTE, Albert P. (org.). *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

BRESSAN, P.M, AZAMBUJA, C., GONÇALVES, N, **Cálculo Diferencial e Integral I: Investigação sobre dificuldades dos alunos**. In: X Salão de Iniciação Científica PUCRS, 2009, Rio grande de Sul, Brasil.

CARMO, J.R.C, PANTOJA, L.N.G. **Identificação dos fatores que causam o baixo desempenho em Cálculo Diferencial e Integral I no curso de Engenharia de alimentos da Universidade Federal do Pará**. In: Cobenge, XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2012, Bélem, Pará, Brasil.

CAVASOTTO, M, **Reflexões sobre as dificuldades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral**. In: III Mostra de Pesquisa da Pós-Graduação PUCRS, 2008, Rio grande do Sul, Brasil.

CHAVES, M, S. **O fracasso na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: Uma abordagem sobre as séries de Fourier**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA).

CURY, H. N.; CASSOL, M. **Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças**. Acta Scientiae, v. 6, n. 1, p. 33-34, jan./jun.2004.

CURY, H. N.; CASSOL, M. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Unicamp, Campinas, 2004.

IRIS, D. F.; VIEIRA, J. P.; MIRANDA, P. R.; SILVA, R. C., **Cálculo Diferencial e Integral I: Analisando as dificuldades dos alunos de um curso de Licenciatura em Matemática**. Artigo Científico/ Revista da Educação Matemática- UFOP-XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, 2011, Rio Pomba, Minas Gerais, Brasil.

MARIN, D. **Professores de Matemática que usam tecnologia de informação e comunicação no ensino superior**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

MARCATTO, F. S. F, LIMA, R.S, **Um olhar para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I com o objetivo de utilizar recursos educacionais online**. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba- PB, Brasil.

MELLO, J. C. C. B. S, MELLO, H. C. S, FERNANDES, A.J, **MUDANÇAS NO ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I: HISTÓRICO E PERSPECTIVAS**. In: Cobenge, 2001, Niterói, Brasil.

MELLO, M. H. C. S., MELLO, J.C.C.B.S., **Reflexões sobre o ensino de Cálculo**. Fluminense, Artigo Científico/UFF, 2007.

MENDES, K. B, GIOSTRI, E. C, **O ensino de Cálculo Diferencial e Integral I e a realidade dos alunos de Engenharia e tecnologia**, Santa Catarina, Brasil.

MOVSHOVITZ-HADAR, Nitsa; ZASLAVSKY, Orit; INBAR, Shlomo. **An Empirical Classification Model For Errors In High School Mathematics**, Israel, 1987.

NASCIMENTO, J. L., **Uma proposta metodológica para disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I**. In: VI Encontro de Educação em Engenharia, Rio de Janeiro, Brasil.

RICHT, A. **Aspectos conceituais e instrumentais do conhecimento da prática do professor de Cálculo Diferencial e Integral no contexto das tecnologias digitais**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Centro de Rio Claro, 2010.

SANTOS, R. S., **Avaliação do desempenho de ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral I (o caso da UFC)**. Dissertação de Mestrado em Educação. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 1994.

SANTOS, S. P.; MATOS, M. G.O., **O ensino de Cálculo Diferencial e Integral I no curso de Licenciatura em Matemática: Obstáculos na aprendizagem**. Artigo Científico/ Revista Eventos Pedagógicos, 2012.

SOUZA, V. C, **A origem do Cálculo Diferencial e Integral I**. Monografia, 2001, Rio de Janeiro, Universidade Candido Mendes, Brasil.

TORRES, T. I. M, GIRAFFA, L. M. M, **O ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: Da régua de calcular ao moodle**. In: REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática, 2009, UFSC, Brasil.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário

1. Das disciplinas citadas abaixo, quais você já cursou até agora?
☐ Matemática I
☐ Geometria Analítica
☐ Nenhuma delas
2. Assina-le uma das opções abaixo:
☐ Só estuda
☐ Estuda e trabalha
3. Com que frequência costuma vim as monitorias?
☐ Sempre
☐ As vezes
☐ Nunca
4. Como considera o tempo de dedicação para os estudos de Cálculo Diferencial e Integral I?
☐ Bom
☐ Pouco
☐ Ruim
☐ Insuficiente
5. Como você classificaria sua formação em Matemática no Ensino Básico?
☐ Muito Boa
☐ Boa
☐ Regular
☐ Fraca
☐ Muito Ruim
6. Em sua opinião qual ou quais fatores mais dificultou ou dificultaram a sua aprendizagem dos conteúdos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

☐ A metodologia utilizada pelo professor em sala de aula.

☐ O pouco tempo de dedicação para estudar a disciplina.

☐ O livro adotado pelo professor.

☐ A falta de conhecimentos básicos de Matemática do 1º e 2º graus.

☐ Os conteúdos ensinados em Matemática Básica deixam a desejar em relação aos conteúdos que são exigidos para a aprendizagem dos assuntos de Cálculo Diferencial e Integral I.

APÊNDICE B - Teste.

1. Encontre o domínio da função $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-5x}}$

2. Classifique em verdadeiro ou falso. Justifique sua resposta:

2.1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{b+a}$

2.2) $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$

2.3) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

2.4) $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = a + b$

3. Simplifique as expressões:

3.1) $\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$, onde $g(x) = x^2$

3.2) $\frac{x^2 - 5}{x - \sqrt{5}}$

3.3) $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$

4. Esboce os gráficos das funções abaixo:

4.1) $f(x) = e^x$

4.2) $f(x) = \sqrt{x}$

4.3) $f(x) = \ln(x)$

APÊNDICE C- Primeira avaliação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

1ª Avaliação

1. (Peso 2,5) Calcule os seguintes limites

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 5x + 2)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 3}{x^2}$

2. (Peso 2,0) Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que para todo $x \neq 1$,

$$2\sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e justifique.

3. (Peso 2,5) Seja f definida em $\mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = k$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - 1)}{x - 1}$.

4. (Peso 3,0) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & x \leq 0 \\ \frac{\sin(2x)}{x} & x > 0 \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(c) A função é contínua? Por quê?