UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO ESTUDO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

JULIARA KARLA DA SILVA LIMA

Caruaru, 2015

JULIARA KARLA DA SILVA LIMA

AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO ESTUDO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à disciplina TCC II, como requisito obrigatório para a obtenção do título de licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco - Centro Acadêmico do Agreste.

Orientador: José Marcos da Silva

Caruaru, 2015

Catalogação na fonte:
Bibliotecária - Simone Xavier CRB/4-1242

L732d Lima, Juliara Karla da Silva.
As demonstrações matemáticas no estudo de áreas de figuras planas em livros didáticos do ensino médio. / Juliara Karla da Silva Lima. - Caruaru: O Autor, 2015.
58f. : il. ; 30 cm.

Orientador: José Marcos da Silva.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2015.
Inclui referências bibliográficas

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Livros didáticos. 3. Geometria plana. I. Silva, José Marcos da. (Orientador). II. Título

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2015-167)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Formação Docente
Curso de Matemática – Licenciatura

AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO ESTUDO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Juliara Karla da Silva Lima

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e **aprovada** em 05 de junho de 2015.

Banca examinadora:

Prof. José Marcos da Silva (UFPE -CAA)
(Orientador)

Prof. Marcos Luiz Henrique (UFPE - CAA)
(Examinador)

Prof. Cristiane de Arimatéa Rocha (UFPE-CAA)
(Examinadora)

Dedico a minha mãe Sandra, que sempre me apoio nos estudos, e ao meu noivo Elizaldo, pelo incentivo, companheirismo, pois sempre esteve do meu lado apoiando minhas decisões.

AGRADECIMENTOS

Ao término do Curso de Matemática- Licenciatura, tenho muito a agradecer, pois foi através de todas as dificuldades que passei e dos momentos bons que vivi durante todo o curso, que hoje posso dizer que sou uma pessoa mais forte, capaz de enfrentar todos os obstáculos para realizar meus sonhos. Agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para que eu subisse mais esse degrau em minha vida, na certeza que outros degraus virão e que vou galgar com firmeza para alcançar meus objetivos. Faço alguns agradecimentos especiais:
Primeiramente agradeço a Deus, por ter permitido que tudo isso fosse possível.

Aos meus pais, José e Sandra, por terem me apoiado desde o início.

Ao meu irmão, Wlisses, agradeço e desejo sucesso em sua futura jornada acadêmica e profissional.

Ao meu noivo, Elizaldo, por toda paciência, incentivo e companheirismo nessa importante etapa da minha vida.

A todos os meus familiares pelo incentivo.

Ao meu orientador, José Marcos da Silva, por todo apoio, incentivo e dedicação a este trabalho, e principalmente obrigado pela imensa contribuição em minha formação.

Aos professores Valdir e Cristiane pelas leituras e sugestões. Ao professor Ivanildo por ter ajudado a fazer o "*Resumem*". E mais, obrigado a todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica.

Aos meus professores do Ensino Médio, que foram muito importantes para que eu alcançasse meus objetivos, em particular a Josicláudio e a Patrícia, meus professores de Matemática.

Aos meus colegas de curso, pelo apoio, contribuições ao trabalho e amizade construídos. E a minha amiga Aline, que também deu sua contribuição a este trabalho.

Obrigado a todos!

Nenhuma investigação feita pelo homem pode ser chamada realmente ciência se não puder ser demonstrada matematicamente.

Leonardo da Vinci (1452 – 1519)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo analisar as propostas de demonstração presentes em livros didáticos do Ensino Médio, referentes ao conteúdo de áreas de figuras planas. Para tanto, analisamos os livros didáticos selecionados pelo Programa Nacional do Livro Didático de Matemática do Ensino Médio - PNLD 2015. Discutimos como é feita a abordagem deste assunto, se existem demonstrações nesses livros didáticos e como é feita a generalização para a utilização das fórmulas de áreas de figuras planas. Para fundamentar essa pesquisa, abordamos primeiramente um pouco da origem e da evolução das demonstrações antes e depois da publicação de "Os Elementos" de Euclides, que é considerado um marco histórico quando se fala em demonstração. Em seguida, buscamos compreender a utilização de alguns termos muito importantes, os quais, para alguns, pode não ter diferença de significado, como argumentação, prova e demonstração. E ainda a terminologia de algumas palavras que podemos encontrar em livros didáticos de Matemática e que também pode ser desconhecida para um leigo, entre as quais podemos citar: teorema, lema, corolário, proposição, e ainda a relação desses termos com as demonstrações. Além disso, observamos em dois documentos oficiais – Guia do Programa Nacional do Livro Didático de Matemática para o Ensino Médio 2015 e os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Médio, a recomendação da utilização das demonstrações nos livros didáticos e a relevância da utilização dos livros didáticos no ensino da Matemática. Por conseguinte, a pesquisa é bibliográfica de natureza qualitativa, em que selecionamos seis livros baseados no PNLD 2015 para analisar como as demonstrações estão presentes nesses livros. Notamos que as demonstrações não estão inseridas como deveriam nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, mas isso não implica que elas não sejam utilizadas no ensino da Matemática.

Palavras-chave: Demonstração. Áreas de figuras planas. Livro didático

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo analizar las propuestas de demostración presentes en los libros de texto para el bachillerato en relación con el contenido de áreas de figuras planas. Por lo tanto, se analizaron los libros de texto seleccionados por el “Programa Nacional do Livro Didático de Matemática do Ensino Médio - PNLD 2015”. Discutimos como es el enfoque de este tema, si existen demostraciones en estos libros de texto y como la generalización se hace para el uso de las fórmulas de áreas figuras planas. Para apoyar esta investigación, primero nos dirigimos a algunas partes de él origen y evolución de las demostraciones antes y después de la publicación de "Los Elementos" de Euclides, que se considera un marco histórico cuando se trata de la demostración. Luego intentamos comprender la utilización de algunos términos muy importantes, que, para algunos, pueden no tener diferencia de significado, como argumentos, pruebas y demostración. Y sin embargo, la terminología de algunas palabras que se pueden encontrar en los libros de texto de Matemáticas y que también puede ser desconocido para un lego, entre los que podemos mencionar: teorema, lema, proposición, corolario, y sin embargo, la relación de estos términos con las demostraciones. Por otra parte, se observó en dos documentos oficiales – “Guia do Programa Nacional do Livro Didático de Matemática para o Ensino Médio 2015” y el Plan de Estudios de Estándares Nacionales de Matemáticas para el bachillerato, la recomendación del uso de demostraciones en los libros de texto y la pertinencia de la utilización de libros de texto en la enseñanza de las matemáticas. Por consiguiente, la investigación es bibliográfica de naturalezas cualitativa, en que seleccionamos seis libros basados en PNLD 2015 para analizar cómo las demostraciones están presentes en estos libros. Notamos que las demostraciones no se insertan como deberían en los libros de texto de matemáticas de bachillerato, pero esto no implica que no se utilicen en la enseñanza de las matemáticas.

Palabras clave: Demostración. Áreas de figuras planas. Libro De Texto

LISTA DE FIGURAS

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho surge para realizar uma pesquisa para a conclusão do curso de Matemática – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste – CAA, da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. Nele, temos como objetivo principal: analisar como as demonstrações matemáticas relacionadas ao conteúdo de áreas de figuras planas estão inseridas nos livros didáticos do Ensino Médio que foram aprovados pelo Guia do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD-2015.

A partir de várias inquietações que tive em toda a minha graduação, optei por estudar um pouco sobre as demonstrações matemáticas, pois as mesmas, como afirma Rav (1999 *apud* ALMOULOUD e FUSCO, 2010), são o alicerce do conhecimento matemático. E por este motivo, deveriam ser bem apresentadas na Educação Básica.

A demonstração em Matemática possui várias funções, como afirma De Villiers (2002), e uma delas é de convencer que algum fato matemático é realmente verdadeiro, baseado em axiomas, definições e verdades anteriormente demonstradas. Sabe-se que as demonstrações, na grande maioria das vezes, não são utilizadas como recomendam alguns documentos oficiais. Segundo o Guia do Programa Nacional do Livro Didático-2012 (PNLD-2012) (BRASIL, 2011), no Ensino Médio a formalização matemática ou as demonstrações devem ser bem apresentadas, cabendo ao professor recorrer a demonstrações simples e sugestivas, evitando o excesso de formalismo que afaste o interesse dos alunos.

Ainda sobre a necessidade das demonstrações, podemos nos fazer a seguinte pergunta: Por que demonstrar? Quais as funções de uma demonstração em Matemática? É comum ouvirmos que as demonstrações servem para provar que um fato matemático é realmente verídico. Mas, como veremos posteriormente, essa não é a única utilidade das demonstrações.

Existem demonstrações que são facilmente compreendidas e podem ser verificadas por pelos alunos, o que contribui bastante para a inserção das demonstrações no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. O ponto chave nesse caso é o rigor em que a demonstração é apresentada, ou seja, uma demonstração rigorosa é aquela que se apresenta como uma cadeia de deduções detalhadas.

É importante os professores terem em mente o quanto proposições matemáticas com justificativas convincentes e verdadeiras são interessantes e podem despertar o interesse dos alunos. “No nível escolar, demonstrar é uma forma de convencer com base na razão” (LAGES, 1999, p.5). Esse autor ainda afirma que “um dos méritos educativos da Matemática é o de ensinar aos jovens que toda conclusão se baseia em hipóteses, as quais precisam ser aceitas e admitidas para que a afirmação final seja válida" (LAGES, 1999, p.5).

Não importa quão grande seja a diferença entre o ponto de vista dos pesquisadores quanto à diferenciação entre argumentação, prova e demonstração. Mesmo que, para alguns, não exista diferença entre prova e demonstração, o fato é que estas podem ser inseridas no ensino da Matemática. As demonstrações, as provas e as argumentações estão presentes em todas as vertentes matemáticas, seja na aritmética, na álgebra ou na geometria. No entanto, focamos nossos estudos na geometria.

"A geometria é considerada uma ciência fundamentalmente dedutiva" afirma Fetissov (1985, p.11), ou seja, a veracidade das proposições é deduzida a partir dos axiomas ou de fatos anteriormente demonstrados. Percebemos que em geometria há uma grande utilização de figuras, mas deve-se ter o cuidado em utilizá-las, pois estas servem apenas como auxílio para a demonstração. Segundo Doubnov (1996), a figura tomada como representação de uma demonstração geométrica, serve como um mapa, ou seja, fica mais fácil identificar os erros que podem estar sendo cometidos. Mas se não utilizarmos essa figura como um caminho para compreender melhor o que a demonstração está nos dizendo, o risco de cometermos erros e não conseguir chegar aos objetivos é bem maior. O mesmo ainda afirma que "um desenho é um instrumento cognitivo, um instrumento que interage com nosso raciocínio, potencializando-o, agilizando-o" (DOUBNOV, 1996, p. 21). Vale salientar que quando demonstramos um fato matemático, não estamos verificando um caso específico, mas sim, de forma geral, em que os elementos que possuem as características que se referem a demonstração realizada são satisfeitas. Portanto, podemos utilizar as figuras para auxiliar na demonstração.

As demonstrações geométricas, segundo Fetissov (1985), possuem uma particularidade essencial que a torna indispensável. Por meio dela, são estabelecidas as propriedades gerais das figuras espaciais.

Quando tratamos da Geometria Euclidiana, que também pode ser chamada de Geometria Plana, esta tem seu estudo voltado para as figuras que não possuem volume. Ou seja, conceitos relacionados a ponto, reta, plano, ângulos, área e perímetro de figuras planas, são o foco dessa geometria. Vale salientar que ponto, reta e plano são considerados conceitos primitivos e, por isso, não possuem definição, apenas temos a ideia intuitiva do que é cada objeto. Já ângulo é uma região do plano entre dois segmentos de reta que possuem a mesma origem, enquanto perímetro de uma figura plana é a medida do contorno da figura e área é a medida da superfície da figura apresentada. No caso do cálculo da área de figuras planas, existem fórmulas específicas para áreas dos quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézio, losangos entre outros.

A partir das indicações dos autores e documentos oficiais a respeito das demonstrações matemáticas no Ensino Básico, surge o seguinte questionamento:

- *Como as demonstrações matemáticas relacionadas ao conteúdo de áreas de figuras planas estão inseridas nos livros didáticos do Ensino Médio?*

Para responder a tal questionamento, temos como objetivo geral:

- Analisar como ocorre a inserção de demonstrações, argumentações e/ou provas relativas aos conteúdos de figuras planas nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados pelo PNLD-2015.

Como se pode observar, nosso enfoque são as demonstrações envolvendo áreas de figuras planas, para as quais analisamos como os livros didáticos abordam essa parte da Matemática. Os livros selecionados para a análise são os aprovados pelo Guia do PNLD-2015.

Por fim, para dar suporte ao nosso objetivo geral, buscamos alcançar os seguintes objetivos específicos:

- Compreender o desenvolvimento histórico das demonstrações matemáticas.
- Classificar as funções das demonstrações que aparecem nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio.
- Identificar a frequência da utilização de argumentação, demonstração ou prova nos livros didáticos com relação a área de figuras planas.

Agora, descrevemos resumidamente como está constituído cada capítulo do trabalho.

No Capítulo 1, exibimos um contexto histórico sobre a origem das demonstrações matemáticas e sua evolução até os dias atuais, com foco na geometria.

Já no Capítulo 2, apresentamos as diferenças entre argumentação, prova e demonstrações, para podermos perceber algumas diferenças entre esses termos que utilizamos e compreendermos a utilização correta, além de apresentar os tipos de demonstrações. Apresentamos também alguns conceitos como: lema, teorema, corolário, entre outros, para entender a utilização dos mesmos, e perceber de que forma as demonstrações estão relacionadas com esses conceitos.

O Capítulo 3 está focado no livro didático, onde analisamos como os documentos oficias, PCN e PNLD-2015, recomendam a utilização e inserção das demonstrações em livros didáticos do Ensino Médio, além de discutir um pouco sobre a importância do livro didático.

O Capítulo 4 trata da metodologia que será desenvolvida para análise.

Em seguida, no Capítulo 5, é feita a análise de dados e discussão dos resultados da pesquisa. Por fim, apresentamos as considerações finais com um apanhado geral do que foi discutido e analisado nos livros didáticos relacionados às demonstrações em geometria plana, de forma mais específica, em áreas de figuras planas.

2 SURGIMENTO E EVOLUÇÃO DAS DEMONSTRAÇÕES

As demonstrações têm um surgimento bem remoto. Não existem documentos que comprovem realmente o período de aparecimento das mesmas, apenas alguns relatos de historiadores de períodos subsequentes que remetem a utilização das demonstrações. O principal marco "histórico" no qual temos comprovações de que as demonstrações foram utilizadas é a obra "Os Elementos" de Euclides em 300 a.C. mas isso não quer dizer que antes desta publicação não existia demonstrações. A seguir detalhamos melhor esses períodos antes e depois da publicação dessa obra para a utilização das demonstrações em Matemática.

2.1 AS DEMONSTRAÇÕES ANTES DAS IMPORTANTES CONTRIBUIÇÕES DE EUCLIDES

As primeiras informações sobre a utilização das demonstrações estão voltadas para a Antiguidade Clássica, na Grécia, por volta do século VI a.C., pois os gregos tinham um diferencial em relação aos outros povos. Eles se questionavam bastante sobre a utilização das fórmulas e dos conceitos. É fato que não existem documentos desta época que comprovem esse surgimento, apenas alguns raros comentários de historiadores de um período posterior ao citado anteriormente.

As demonstrações surgem como uma ação social que busca "convencer" o outro. Arsac (1987 *apud* PIETROPAOLO, 2005, p.51) considera a tese de que "a transformação da matemática em ciências hipotética dedutiva teria sua origem no uso de regras do debate argumentativo que conduzia a vida política na sociedade grega".

Relacionada a contribuição dos gregos, podemos frisar a contribuição dos Pitagóricos, no século V a.C., que deram algum caráter dedutivo a Matemática. Estes tinham a crença de que todos os fenômenos do universo poderiam ser justificados por meio do conjunto dos números inteiros. Não se sabe como os Pitagóricos faziam isto, mas o fato é que Hipaso de Metaponto (500 a.C.) comprovou a falsidade dessa crença e Aristóteles supôs que essas demonstrações teriam sido por absurdo. Aristóteles também utilizou o mesmo método para mostrar que o lado do quadrado e sua diagonal são incomensuráveis entre si, ou seja, não se consegue uma proporção entre essas medidas (o lado e a diagonal) que possa ser usada como unidade para medir ambos segmentos. Isto quer dizer que, nesse período descobriu-se então os números que não podem ser representados na forma de razão, os números irracionais. Segundo Eves (2004),

> A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos. Em primeiro lugar porque parecia desferir um golpe mortal na filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros. Além disso, parecia contrária ao senso comum, pois intuitivamente havia o sentimento de que toda grandeza poderia ser expressa por algum número racional. A contrapartida geométrica era igualmente espantosa, pois quem poderia duvidar que, dados dois segmentos de reta, sempre seria possível encontrar um terceiro segmento de reta, talvez muito, muito pequeno, que coubesse exatamente um número inteiro de vezes em cada um dos dois segmentos dados? (EVES, 2004, p. 106)

A partir de então podemos concluir que na geometria nem tudo pode ser medido com precisão. Pietropaolo (2005, p. 52) discorre que "essa demonstração realizada por Aristóteles, talvez a mesma de Hipaso, e que provocou a crise da Matemática grega, indica que a ideia de utilizar encadeamento de propriedades conhecidas e articuladas mediante raciocínios lógicos para constatar a validade de outras propriedades. "

Portanto, devido a esses fatos podemos perceber que antes de Euclides, já se pensava em demonstração e já se demonstrava, não com as mesmas características, pois não se tinha uma estrutura utilizando noções, definições e postulados. Mas podemos dizer que sim, existiam demonstrações.

2.2 AS DEMONSTRAÇÕES COM AS CONTRIBUIÇÕES DE EUCLIDES

Foi com Euclides em sua obra "Os Elementos", composta por 13 livros, que retratava não só geometria, mas também álgebra e aritmética (os seis primeiros livros estão relacionados a geometria plana elementar, os três posteriores a teoria dos números, o décimo as medidas incomensuráveis entre si e os três últimos retratam a geometria espacial) que por volta de 300 a.C. o método axiomático dedutivo com todas as falhas lógicas que continha tornou-se um marco na busca da verdade em Matemática, ou melhor uma importante ferramenta passou a se firmar, as demonstrações. É importante frisar que as demonstrações feitas por Euclides possuíam erros lógicos e também equívocos na escolha dos postulados e axiomas utilizados.

Em sua obra, além das definições, ele trabalhou com cinco postulados que foram formulados no início do livro para ser usado nas demonstrações. Esses postulados foram traduzidos por Vitrac (1994) do livro "Os Elementos":

Postulado1: Pode-se traçar uma reta de qualquer ponto a outro ponto qualquer.
Postulado2: Pode-se prolongar uma reta infinitamente.

Postulado3: Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.

Postulado4: Pode-se considerar todos os ângulos retos iguais entre si.

Postulado5: Se duas retas interceptadas por uma terceira reta, formam, do mesmo lado dessa reta secante, dois ângulos internos cuja soma é menor que dois ângulos retos, as retas quando suficientemente prolongadas se interceptam por esse lado da secante.

Vale salientar que o primeiro postulado garante a existência do segmento de reta, o segundo garante a existência da reta e o terceiro a existência da circunferência.

Muitas críticas foram feitas ao que podemos chamar de Geometria Euclidiana, mas mesmo assim o método utilizado por Euclides perdurou por muito tempo, aproximadamente 2000 anos, como um modelo de excelência.

Na Idade Média, entre os séculos V e XV, o centro de produção matemática, mudou de lugar. Até então era na Grécia, mas nesse período deslocou-se para o mundo árabe e hindu. O fato é que esses povos validavam seus resultados de uma forma diferente, não davam prioridade às demonstrações, estes priorizavam o empirismo. Durante os séculos XVII e XVIII, aconteceu um abandono considerável do método utilizado por Euclides para validar os resultados, pois não se considerava este um método satisfatório para as necessidades da época.

No período do Renascimento (entre os séculos XV e XVI) até o século XIX, aconteceu um resgate da Geometria Euclidiana, mas com um diferencial, foi utilizado um maior rigor lógico e abstração. Desta forma, este foi um período em que a Matemática sofreu uma transformação essencial, pois passou a ter mudanças na própria natureza na busca de um maior rigor e na relação com a própria realidade.

O fato é que a demonstração voltou a ser reformulada de maneira mais formal. E os matemáticos que se destacaram nessa nova perspectiva foram Frege (1848 - 1925) e Russel (1872 – 1970), os quais apresentaram que uma proposição por mais difícil e complexa pode ser demonstrada.

Muitas foram as visões de utilização das demonstrações, o que é certo ou errado, o que pode ou não ser feito em uma demonstração. Mas com todas essas mudanças de olhares, podemos considerar que a demonstração não perdeu seu significado, pois continuou sendo o único método para garantir a verdade dentro de qualquer teoria matemática.

No século XX, com o surgimento do computador, as demonstrações passaram a exercer um papel diferente. Até então, as mesmas tinham o papel de apenas convencer o outro que determinado resultado matemático era verídico, mas a partir de então começou a buscar, investigar e descobrir novos resultados.

Historicamente, podemos perceber que a demonstração possui um caráter não absoluto, pois temos várias possibilidades de mostrar a veracidade de uma proposição, com o passar do tempo essa busca da verdade está constantemente mudando. O importante não é apenas gerar teorias matemáticas novas, mas também explicá-las. Steen (1979) se coloca de uma forma muito interessante quando diz que:

> Sua tarefa [dos matemáticos] está clara agora: não devem eles gastar tempo e energias na busca do fogo fátuo da verdade que constantemente lhes foge das mãos. Ao contrário, deverão encarar suas criações pela óptica da utilidade e da adaptabilidade às circunstâncias, com o espírito sempre aberto a possíveis métodos que possam levar a esses fins. O fato de certos métodos levarem a contradições, quando usados indiscriminadamente, não significa que devam ser abandonados, tal situação apenas aponta para a necessidade de determinar as áreas nas quais esses métodos se mostram seguros. (STEEN, 1979 *apud* DOMINGUES, 2002, p.55).

3 ARGUMENTAÇÃO, PROVA OU DEMONSTRAÇÃO?

Com o intuito de atingir o objetivo principal de nossa pesquisa, que é apresentar como as demonstrações matemáticas relacionadas ao conteúdo de áreas de figuras planas estão inseridas nos livros didáticos do Ensino Médio, os quais foram aprovados pelo PNLD- 2015, verificamos a necessidade de entender melhor a utilização dos termos argumentação, prova e demonstração que são utilizados na Matemática. Diferenciamos os termos baseados em Nicolas Balachef, Marcilene Moreira do Santos Silva e Antônio Sales, Daniel Cordeiro de Morais Filho, a fim de compreender a utilização correta dos mesmos, pois como afirmam Sales e Silva (2009) e Morais Filho (2013), tanto para alguns professores quanto para autores de livros didáticos, há um entrelaçamento nesses conceitos e aplicações, não tendo para alguns deles diferença.

Iniciamos nossa diferenciação dos termos pela argumentação. A argumentação é um nível onde apenas tenta-se convencer outrem da veracidade de uma informação, não se limitando a um campo de saber, como afirmam Sales e Silva (2009). Caso a argumentação seja reconhecida como convincente por uma comunidade, num determinado momento, esta adquire um *status* de prova. Os mesmos ainda afirmam que tanto a prova quanto a argumentação não necessitam de formalismos. E mais, consideram que as provas são métodos para chegar a demonstração, ou seja, a demonstração é um caso particular de prova em que se destina a um público específico e tem caráter científico e mais formal. Um exemplo de prova é apresentado quando se utiliza dobradura para mostrar que as diagonais de um retângulo se interceptam no ponto médio dos segmentos. Para Balachef (1982 *apud* ALMOULOUD E FUSCO ,2010), uma prova só é considerada demonstração quando se refere a um fato matemático.

Segundo Morais Filho (2013, p.196), “uma prova só pode ser a evidência de um fato, mas não necessariamente uma sequência lógico-dedutiva de argumentos, tal como uma demonstração é definida. ” Isto é, uma prova não segue uma sequência lógica com justificativas que adotam um raciocínio dedutivo como as demonstrações.

3.1 UM OLHAR PARA AS DEMONSTRAÇÕES

Segundo Fetissov (1985, p.62), “a demonstração é um sistema de deduções obtidas a partir de axiomas e teoremas anteriormente demonstrados”. Para Bicudo (2003, p.66), “demonstrar uma proposição significa argumentar pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas. ”

As demonstrações caracterizam a Matemática, pois buscam mostrar a validade dos fatos a partir de deduções de outros fatos verdadeiros e não como em outras ciências, que utilizam apenas a observação e experimentação para validar algo, como é o caso da Química.

Almouloud (2007) apresenta três características para a demonstração:

> (i) São as únicas aceitas pelos matemáticos;
> (ii) Respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados, a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas;
> (iii) Trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencente ao mundo sensível, embora a ele faça referência.
> (ALMOULOUD, 2007, p. 3)

Nesse sentido, a demonstração é uma etapa mais formal de uma argumentação ou justificativa dada a uma proposição. De maneira geral, ao analisar uma proposição, percebemos a existência de uma “hipótese”, dada como verdadeira, e que, a partir de argumentações verídicas, provamos o que chamamos de “tese”. Ou seja, as hipóteses são as informações que serão usadas para mostrar que a tese é verdadeira. Desta forma, mostrar a tese é o objetivo de uma demonstração.

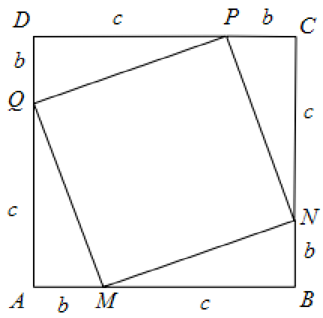
Morais Filho (2013) afirma que uma demonstração consiste em duas partes: a estrutura lógica (utilizar a hipótese e mostrar a tese) e a apresentação (que é o modo como é redigida para ser apresentada a outrem). Note que não é necessário apenas descrever as proposições que serão utilizadas para mostrar a tese como um amontoado de informações, mas sim apresentá-las a partir de um encadeamento lógico escrito de forma coerente e com ligação entre as proposições utilizadas.

Uma proposição normalmente apresenta várias formas de ser demonstrada e não existe uma regra fixa para ser seguida. Assim, desde que sejam utilizados argumentos verdadeiros, uma demonstração pode variar, a depender de como a pessoa que está demonstrando queira fazer. Podem-se encontrar várias possibilidades de mostrar as fórmulas de áreas de figuras planas, a depender do nível que se queira alcançar. Por exemplo, o Teorema de Pitágoras pode ser mostrado de várias formas, dependendo do nível de ensino e do objetivo que se busque com a demonstração do teorema. Existe cerca de 370 demonstrações deste teorema. A seguir apresentaremos uma dessas demonstrações, que segundo Oliveira (2008) é uma demonstração clássica deste teorema.

Figura 1- Demonstração clássica do Teorema de Pitágoras

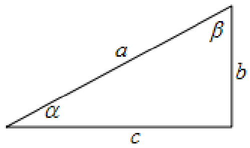
Considere um quadrado ABCD de lado $b+c$.

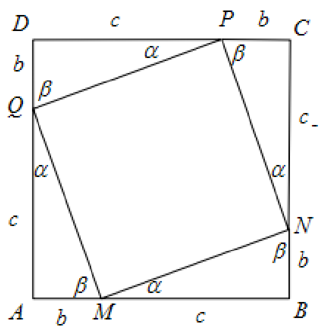
Sobre os lados desse quadrado marque pontos M, N, P, Q, como na figura a seguir, de modo que: $\begin{array}{l} AM = BN = CP = DQ = b \\ MB = NC = PD = QA = c \end{array}$



Pelo caso de congruência LAL os triângulos retângulos QAM,MBN,NCP e PDQ são congruentes ao triângulo retângulo da hipótese. Daí segue que $MN = NP = PQ = QM = a$. Isso implica que o quadrilátero $MNPQ$ é um losango. Vamos mostrar que, de fato, ele é um quadrado.

Suponhamos que os ângulos agudos do triângulo de hipótese sejam: α e β





Pela congruência dos triângulos QAM,MBN,NCP e PDQ descritos acima, os ângulos agudos destes triângulos retângulos medem α e β, de acordo com a figura acima.

Como $\alpha + \beta = 90^o$ segue que cada ângulo interno do quadrilátero $MNPQ$ deve ser reto. Isso demonstra que $MNPQ$ é um quadrado de lado a.

Daí a área do quadrado de lado $b+c$ é igual a soma da área do quadrado de lado a com a área de quatro triângulos retângulos de catetos b e c.

Isto é: $(b+c)^2 = 4\frac{bc}{2} + a^2 \Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$, como queríamos demonstrar.

Fonte: Oliveira (2008, p.7)

Fetissov (1985) e Morais Filho (2013) classificam as demonstrações em *diretas* e *indiretas*. As demonstrações diretas são aquelas nas quais existe uma ligação lógico-dedutiva entre a hipótese e a tese, ou seja, a partir da hipótese deduz-se diretamente a tese. Já as demonstrações indiretas são aquelas que não percebemos uma ligação direta entre a hipótese e a tese. Estas, por sua vez, são classificadas em *demonstração por redução ao absurdo* ou *demonstração usando a contrapositiva*. A seguir, apresentamos dicas de como demonstrar uma sentença condicional da forma *Se H então T*, onde *H* é a hipótese e *T* é a tese, de acordo com sua classificação.

I) Demonstração indireta, por redução ao absurdo: Para mostrar a veracidade da tese, admitimos que a hipótese (H) e a negação da tese (~T) são verdadeiras e deduzimos uma sentença contraditória qualquer.

II) Demonstração indireta, usando a contrapositiva: Para verificar a veracidade da sentença, suponhamos que a negação da tese (~T) é verdadeira e concluímos a negação da hipótese (~H).

III) Demonstração direta: Admitimos H e concluímos diretamente que a tese T é verdadeira.

As dicas apresentadas acima são mais gerais. Dependendo do que se quer provar, existem técnicas e procedimentos mais específicos que são utilizados para demonstrar um fato matemático, entre os quais podemos citar, de acordo com Morais Filho (2013):

I) Demonstração com o auxílio de figuras: Utiliza-se figuras para auxiliar na demonstração e melhor visualizar um determinado fato. As mesmas não substituem a demonstração propriamente dita. Pode-se sim, retirar todas as informações que podemos assimilar das figuras e exprimi-las utilizando a linguagem matemática.

II) Demonstração por indução: Quando queremos mostrar uma proposição P(n) que envolve números naturais é válido, começamos mostrando que P(n) é verdadeira para n = 1, em seguida suponhamos que a proposição é válida para n = k, e verificamos a validade para n = k + 1. Caso este processo se verifique, concluímos que a proposição P(n) é verdadeira.

III) Técnica de trás para frente: Dependendo do caso, para demonstrar um resultado, podemos focalizar nossa atenção na tese, procurando reciprocamente alguma ligação que ela tenha com a hipótese e que possa ajudar na demonstração. Usamos isso, principalmente, quando a hipótese é muito geral.

Esses tipos de técnicas e procedimentos não se excluem, isto é, é possível demonstrar um resultado utilizando uma ou mais formas apresentadas.

3.2 ALGUNS TERMOS IMPORTANTES

É comum vermos em livros de Matemática várias terminologias que muitas vezes podemos achar que possuem o mesmo significado. Por exemplo, quem nunca ouviu falar em teoremas, axiomas, conjecturas, entre outros termos bastante utilizados em Matemática?

Nesta parte do trabalho, apresentamos a função desses e de outros termos para melhor compreendermos a relação deles com as demonstrações, pois iremos perceber que alguns são verdades que não necessitam ser demonstradas, da mesma forma que existem outros que precisam sim, serem demonstrados.

Axiomas ou postulados são sentenças matemáticas que são aceitas, sem precisar ser demonstrada. Como diz Morais Filho,

> Os axiomas ou postulados são apresentados realmente como "decretos". Entretanto, como as noções primitivas, esses "decretos" não surgem de opiniões pessoais isolados, são frutos da experiência, da observação e, também, de um certo "consenso coletivo". (MORAIS FILHO 2013, p. 154)

Por exemplo, em "Os Elementos", Euclides enunciou o seguinte axioma: O todo é maior que as partes.

Os teoremas são sentenças matemáticas que só tem a validade garantida se forem demonstradas matematicamente. É fato que, qualquer resultado matemático por mais simples que possa parecer, é apresentado como teorema. Um teorema presente na obra "Os elementos", por exemplo, é o Teorema de Pitágoras, que já discorremos a respeito. Já a proposição é o nome dado a um teorema que não é essencial no contexto. Corolário é um teorema que é consequência direta de outro anteriormente provado. Já o lema também é um teorema, mas este auxilia a demonstração de um teorema que é apresentado em seguida. Ou seja, será utilizado para provar outro que segue.

A utilização desses três últimos termos expressa uma sequência lógica-dedutiva nas demonstrações dos teoremas da seguinte forma:

$$Lema \Rightarrow Teorema \Rightarrow Corolário$$

Vale salientar que essa sequência não está em grau de dificuldade de ser demonstrado.

Temos também a conjectura, esta é uma afirmação que ainda não foi demonstrada, mas que é tida como verdadeira, até que se prove o contrário.

Morais Filho alerta para o fato que,

> Ninguém está obrigado a usar esses nomes ao enunciar teoremas. Seu uso depende do contexto e da opção pessoal, mas convém ressaltar que o respeito às convenções matemáticas, à elegância da escrita e ao bom senso sempre devem prevalecer. (MORAIS FILHO, 2013, p. 127)

Portanto, podemos afirmar que não se pode separar as demonstrações e os teoremas, um está intimamente interligada com o outro.

No próximo capítulo, discutimos sobre algumas recomendações do PNLD e dos PCN para a utilização das demonstrações em livros didático, além de expormos um pouco a importância do livro didático.

4 O LIVRO DIDÁTICO E AS DEMONSTRAÇÕES

Apesar de atualmente existirem tantas opções de apoio pedagógico, como internet, vídeos, entre outros, o livro didático ainda é a ferramenta mais utilizada pelo professor para auxiliar em seu trabalho pedagógico. Nesse capítulo, discutimos um pouco da importância do livro de didático no ensino de Matemática e como o PNLD e o PCN recomendam a utilização das demonstrações nos livros didáticos.

4.1 CONTRIBUIÇÕES DO LIVRO DIDÁTICO PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

O ensino da Matemática no Ensino Médio tem um caráter bastante especial pela forma como deve ser apresentada, com um maior nível de abstração, que requer do aluno não apenas a resolução de exercícios de forma mecânica, com inúmeras questões que buscam apenas a memorização dos algoritmos, mas sim permitir ao aluno que ele próprio construa um raciocínio lógico dedutivo, com argumentações convincentes que podem evoluir até chegar a uma demonstração propriamente dita.

No PCN (2000) a Matemática é apresentada de uma forma muito importante com um olhar especial para a utilização de um raciocínio logico dedutivo:

> A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, freqüências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos.
> (BRASIL, 2000, p. 9)

O livro é uma importante ferramenta para o ensino, tanto da Matemática quanto das outras disciplinas. Mas por que será que temos que dar tanta importância a esse recurso?

Segundo Dante (1996), o livro didático sendo bem utilizado tem um papel importante no ensino pelas seguintes razões:

> — em geral, só a aula do professor não consegue fornecer todos os elementos necessários para a aprendizagem do aluno, uma parte deles como problemas, atividades e exercícios pode ser coberta recorrendo-se ao livro didático;
>
> — o professor tem muitos alunos, afazeres e atividades extracurriculares que o impedem de planejar e escrever textos, problemas interessantes e questões desafiadoras sem ajuda do livro didático;
>
> — a Matemática é essencialmente sequencial, um assunto depende do outro, e o livro didático fornece uma ajuda útil para essa abordagem;
>
> — para professores com formação insuficiente em Matemática, um livro didático correto e com enfoque adequado pode ajudar a suprir essa deficiência;
>
> — muitas escolas são limitadas em recursos como bibliotecas, materiais pedagógicos, equipamento de duplicação, vídeos, computadores, de modo que o livro didático constitui o básico, senão o único recurso didático do professor;
>
> —a aprendizagem da Matemática depende do domínio de conceitos e habilidades. O aluno pode melhorar esse domínio resolvendo os problemas, executando as atividades e os exercícios sugeridos pelo livro didático;
>
> — o livro didático de Matemática é tão necessário quanto um dicionário ou uma enciclopédia, pois ele contém definições, propriedades, tabelas e explicações, cujas referências são frequentemente feitas pelo professor. (DANTE, 1996, p. 83-84)

Devemos frisar que o livro contribui muito para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, desde que, quem o utilize tome cuidado para não cometer abusos e não ficar preso apenas ao que está sendo dito ali. Quando falamos em demonstração, o cuidado deve ser ainda maior, pois a forma como esta se apresenta no livro pode fazer muita diferença, mas não só isso, a forma que o professor utiliza esse meio também influencia muito no aprendizado. Então cabe ao professor encontrar meios para desenvolver uma ligação de muita produtividade, criatividade e desenvolver espírito argumentativo, que busca entender, justificar e demonstrar os fatos matemáticos juntamente com os alunos. Caso as demonstrações não sejam bem apresentadas, muito provavelmente não despertarão interesse dos alunos. Ordem (2010) destaca que:

> a denominada “demonstração final” de um teorema é o culminar de um processo, a apresentação limpa e ordenada de uma larga investigação nunca isenta de intuição, provas, argumentos, justificações, erros, refinamentos, etc. É isto que se deveria privilegiar nos livros didáticos: estimular que os utilizadores pautem por mais atividades de cunho exploratório que estimulam a exploração de propriedades que levem à formulação de conjecturas seguidas de sua validação por meio de demonstrações do que simples apresentação das provas já acabadas. (ORDEM, 2010, p.37)

4.2 RECOMENDAÇÕES DO PNLD E DO PCN PARA A UTILIZAÇÃO DAS DEMONSTRAÇÕES

Desde o Ensino Fundamental, é interessante que o professor comece a induzir os alunos a desenvolverem um raciocínio dedutivo, por meio de questionamentos, curiosidades acerca dos fatos matemáticos. Nessa fase, é necessário que o aluno saiba que se pode demonstrar a veracidade de um fato matemático e não apenas dizer que é válido sem justificativa alguma.

Já no Ensino Médio, acontece um maior amadurecimento do que foi visto no Ensino Fundamental em relação as demonstrações. Esse é um período em que estas devem estar mais bem inseridas no ensino da Matemática. O PNLD-2015 (BRASIL,2014), assume que no Ensino Médio é onde acontece uma ampliação, aprofundamento e uma melhor organização dos conteúdos estudados no Ensino Fundamental. Portanto, as demonstrações devem ser trabalhadas.

No PCN, os objetivos do ensino da Matemática trazem resultados de forma real e significativa. Assim, nesse nível de escolarização, a disciplina de Matemática deve levar os alunos a:

> • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> • analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
> • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> • utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
> • expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
> • reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
> • promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 2000, p. 42)

Quando focamos nosso olhar para os livros didáticos, estes devem possuir algumas especificidades que auxiliarão no ensino da Matemática. De acordo com o PNLD-2015, os livros didáticos do Ensino Médio devem:

> 1. incluir todos os campos da Matemática escolar, a saber, números, funções, equações algébricas, geometria analítica, geometria, estatística e probabilidade;
> 2. privilegiar a exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas;
> 3. apresentar os conceitos com encadeamento lógico, evitando: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas, entre outros;
> 4. propiciar o desenvolvimento, pelo aluno, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização, entre outras. (BRASIL, 2014, p. 14)

É importante frisar a necessidade de desenvolver a capacidade de argumentação recorrendo as demonstrações, mas não se pode abusar do formalismo, pois isso pode afastar o interesse dos alunos pelas demonstrações.

Um grande problema ao se falar em demonstrações nos livros didáticos é o fato das demonstrações não serem apresentadas em todo estudo da Matemática, mas sim apenas quando está se trabalhando com a geometria, o que pode dar a falsa impressão que só as utilizamos em geometria. O PNLD-2012 afirma que:

> Uma das falhas relacionadas com a tentativa de fazer uma introdução à geometria dedutiva é que isso, em geral, permanece completamente isolado na obra, sem nenhum reflexo em seu restante. Fechada a seção ou o capítulo em que mencionaram axiomas e teoremas, raramente se volta apresentar uma dedução, seja em geometria, seja em outro campo da Matemática escolar. (BRASIL, 2011, p. 34)

As demonstrações, se bem utilizadas pelos professores, são importantes, pois requerem dos alunos um uso maior da imaginação, os mesmos tornam-se capazes de conjecturar, de buscar, de tentar, de fazer verificações que achar que podem trazer algum resultado e isso traz uma satisfação pessoal de conseguir entender e justificar até chegar a um estágio mais avançado de demonstrar propriamente um fato matemático.

O PNLD-2015, em suas avaliações, busca verificar se os livros didáticos selecionados favorecem o desenvolvimento de competências complexas como: observar, explorar, investigar, estabelecer relações, classificar, generalizar, argumentar, tomar decisões, criticar, inferir, conjecturar e provar.

Partindo do pressuposto que, se o livro didático contiver demonstrações, apresentar tanto no livro do aluno, inseridas nos conteúdos, como no manual do professor, com orientações metodológicas, as mesmas devem sim, ser utilizadas no ensino da Matemática. Mas tudo deve ser comedido, pois da mesma forma que o livro pode ser um ótimo instrumento, também pode tornar-se uma fonte intolerável e um vilão no ensino da Matemática, a depender da forma que o professor conduz a sua utilização. Por isso, é bastante importante escolher bem o livro que será utilizado no período de três anos na escola (tempo este em que os livros são renovados, ou seja, é lançado novo edital do Programa Nacional do Livro Didático para seleção de livros didáticos), tomando como norteador as recomendações contidas no PNLD, que discorrem detalhadamente as características das obras que satisfizeram os critérios necessários para obterem a aprovação e serem aceitas de acordo com as exigências do PNLD.

5 METODOLOGIA

A pesquisa desenvolvida é de natureza qualitativa, ou seja, preocupar-se-á com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, focando na compreensão e explicação dos fatos. A partir da delimitação do problema de pesquisa que estamos investigando, é utilizada como metodologia a técnica de análise de conteúdo, técnica em que se espera compreender o que o autor apresenta em seu texto, realizando a interpretação do conteúdo. Por meio desta, buscamos identificar como as demonstrações estão inseridas nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio relacionadas ao conteúdo de áreas de figuras planas.

Os caminhos metodológicos partiram da análise do PNLD-2015, que serviu de suporte para selecionarmos os livros didáticos que continham o conteúdo escolhido e que foram devidamente aprovados no Programa Nacional do Livro Didático.

Como é realizada a análise de conteúdo, nos baseamos nos questionamentos feitos por Deus (2013) e Rosa *et al* (2013) em suas devidas pesquisas. As perguntas que norteiam nossa pesquisa são:

- Como o conteúdo de áreas de figuras planas está sendo apresentado no livro didático de forma geral?
- Em que parte do conteúdo estudado estão apresentadas as demonstrações?
- O que e como o livro demonstra as propriedades no conteúdo em estudo?
- Que termos são utilizados para se referir as demonstrações?
- Quais os tipos de demonstração são utilizados?
- Qual o rigor utilizado nas demonstrações?

Complementando a análise do conteúdo é feita a categorização do conteúdo que, segundo Franco (2008 *apud* DEUS, 2013, p. 10), "é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação seguida de um reagrupamento baseado em analogias, a partir de critérios definidos". Essa categorização é baseada nas funções das demonstrações apresentadas por De Villiers, que além da mera verificação, tem-se:

- Explicação (proporcionar compreensão sobre porque é que é verdade)
- Descoberta (a descoberta ou a invenção de novos resultados)
- Comunicação (a negociação do significado)

- Desafio intelectual (a realização/satisfação pessoal por se ter construído uma demonstração)
- Sistematização (a organização de vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas)

(DE VILLIERS, 2002, p. 3)

Por fim, verificamos se as demonstrações presentes nos livros que se adequam ao ensino na Educação Básica, podem ser consideradas motivadoras para os alunos perceberem a Matemática de outra forma e se também servem para auxiliar no trabalho do professor no processo de ensino e aprendizagem.

6 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

O objetivo dessa análise é investigar como os livros didáticos abordam o conteúdo de áreas de figuras planas, mais especificamente das regiões limitadas por quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios e do círculo, dando ênfase a como as demonstrações estão inseridas nesse conteúdo. Das coleções aprovadas no PNLD – 2015, selecionamos seis livros do PNLD – 2015 do Ensino Médio, os quais continham o conteúdo em estudo. Estes foram: Matemática Contexto e Aplicações – 2º Ano, Matemática Ciência e Aplicações – 2º Ano, Conexões com a Matemática – 2º Ano, Matemática Ensino Médio – 2º Ano, Novo Olhar Matemática – 2º ano, Matemática Paiva – 1º Ano.

Vale destacar que em algumas demonstrações, provas ou argumentações são usados argumentos análogos, ou seja, a maneira como se obtém a expressão para determinar a área de duas ou mais regiões é muito semelhante. Por isso, em certos momentos, agrupamos nosso estudo em duas ou mais áreas de regiões poligonais.

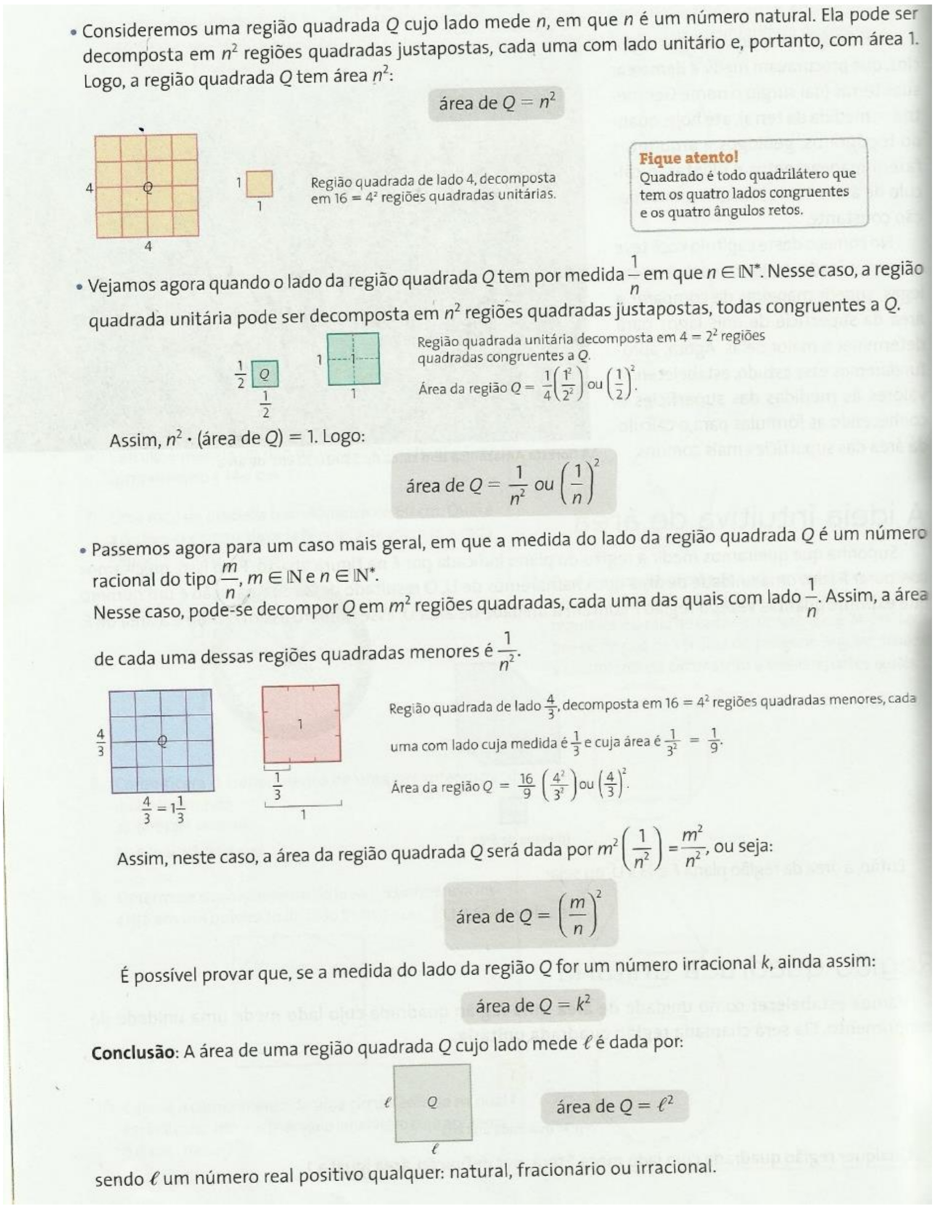
6.1 MATEMÁTICA CONTEXTO E APLICAÇÕES – 2º ANO

O livro apresenta o conteúdo em estudo como uma parte do Capítulo 7, intitulado *Polígonos Inscritos e Áreas*. Na introdução do capítulo, apresenta-se o objetivo de estudar esse assunto, há uma ideia do que é área e também uma questão em que propõe ao aluno comparar áreas sem a utilização da fórmula. A seção chamada *Áreas: Medidas de Superfície* começa com a ideia intuitiva de área. Em seguida, cada região poligonal possui uma parte específica para o seu estudo mais aprofundado. O autor, no decorrer do texto, chama atenção para algumas informações importantes em pequenos boxes que trazem reflexões ou dicas para o estudo. A seguir, detalhamos como a área de cada figura plana está sendo apresentada.

6.1.1 Área da Região Quadrada

O autor busca demonstrar que a área da região limitada por um quadrado é a medida do lado elevado ao quadrado. Podemos notar isso implicitamente, visto que em momento algum o autor utiliza a palavra demonstração. São utilizados termos como: *Consideramos*, *vejamos agora*, *Passemos agora para um caso mais geral*, para se demonstrar. Com relação às figuras, são utilizadas nesse caso apenas como exemplo. Podemos observar na Figura 2 que essa demonstração utiliza um certo rigor, são mostrados três casos específicos para poder confirmar que a fórmula da área do quadrado é válida: quando a medida do lado é um número natural; um número na forma $\frac{1}{n}$, sendo n um número inteiro; e um número racional da forma $\frac{m}{n}$,com n sendo um número diferente de zero. No caso da medida do lado ser um número irracional, como apresenta um alto nível de dificuldade, o autor não demonstra esse caso, mas diz que a fórmula também é válida. O tipo de demonstração utilizado é a demonstração direta e a mesma possui a função de sistematização, pois traz o resultado organizado num sistema dedutivo de conceitos e teoremas.

Figura 2- Área da região quadrada



- Consideremos uma região quadrada Q cujo lado mede n, em que n é um número natural. Ela pode ser decomposta em n^2 regiões quadradas justapostas, cada uma com lado unitário e, portanto, com área 1. Logo, a região quadrada Q tem área n^2:

área de $Q = n^2$

Região quadrada de lado 4, decomposta em $16 = 4^2$ regiões quadradas unitárias.

Fique atento! Quadrado é todo quadrilátero que tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos.

- Vejamos agora quando o lado da região quadrada Q tem por medida $\frac{1}{n}$ em que $n \in \mathbb{N}^*$. Nesse caso, a região quadrada unitária pode ser decomposta em n^2 regiões quadradas justapostas, todas congruentes a Q.

Região quadrada unitária decomposta em $4 = 2^2$ regiões quadradas congruentes a Q.

Área da região $Q = \frac{1}{4}\left(\frac{1^2}{2^2}\right)$ ou $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Assim, $n^2 \cdot$ (área de Q) $= 1$. Logo:

área de $Q = \frac{1}{n^2}$ ou $\left(\frac{1}{n}\right)^2$

- Passemos agora para um caso mais geral, em que a medida do lado da região quadrada Q é um número racional do tipo $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Nesse caso, pode-se decompor Q em m^2 regiões quadradas, cada uma das quais com lado $\frac{1}{n}$. Assim, a área de cada uma dessas regiões quadradas menores é $\frac{1}{n^2}$.

Região quadrada de lado $\frac{4}{3}$, decomposta em $16 = 4^2$ regiões quadradas menores, cada uma com lado cuja medida é $\frac{1}{3}$ e cuja área é $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Área da região $Q = \frac{16}{9}\left(\frac{4^2}{3^2}\right)$ ou $\left(\frac{4}{3}\right)^2$.

Assim, neste caso, a área da região quadrada Q será dada por $m^2\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{m^2}{n^2}$, ou seja:

área de $Q = \left(\frac{m}{n}\right)^2$

É possível provar que, se a medida do lado da região Q for um número irracional k, ainda assim:

área de $Q = k^2$

Conclusão: A área de uma região quadrada Q cujo lado mede ℓ é dada por:

área de $Q = \ell^2$

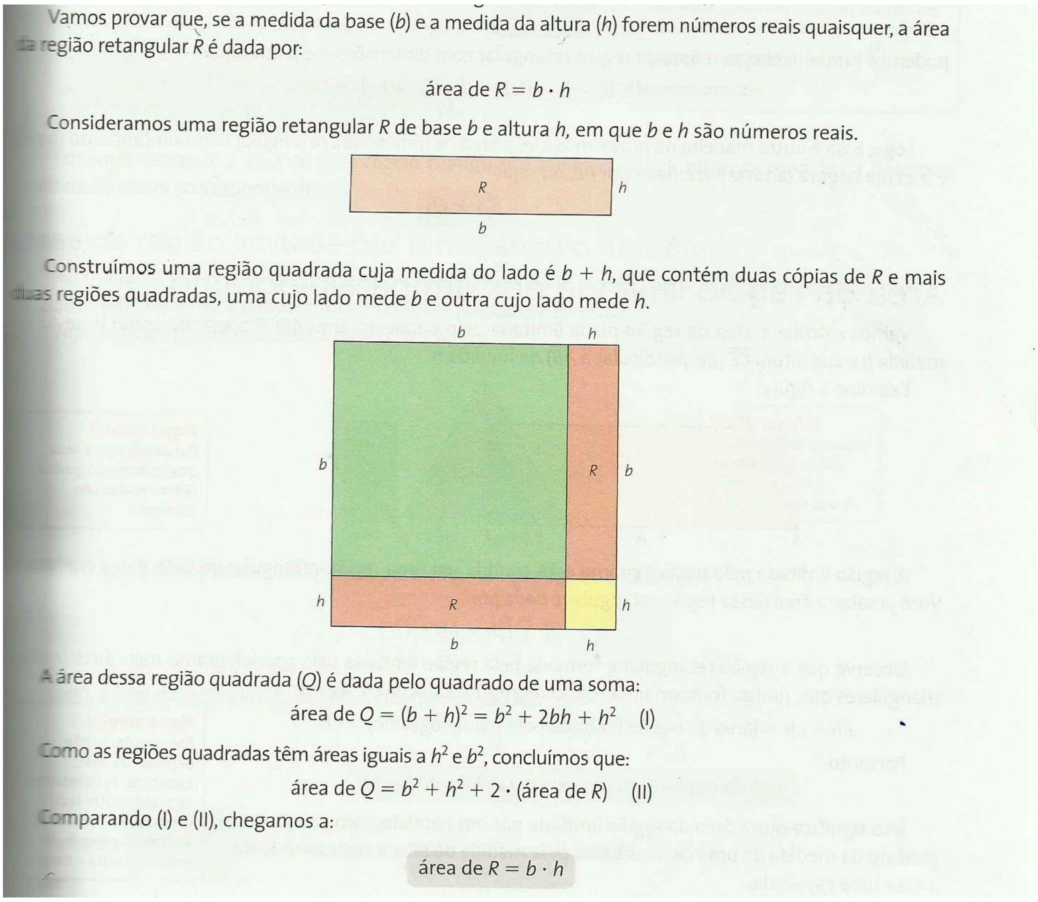
sendo ℓ um número real positivo qualquer: natural, fracionário ou irracional.

Fonte: Dante (2014, p.140)

6.1.2 Área da Região Retangular

O autor inicia apresentando um exemplo numérico, utilizando a malha quadriculada. Em seguida, o mesmo deixou explícito que iria realizar uma demonstração quando utilizou o termo *Vamos provar que*. Outra observação é que o autor já especifica o que irá demonstrar posteriormente, ou seja, que a área da região retangular é dada pelo produto da medida da base pela medida da altura do retângulo. É apresentada uma figura no meio da demonstração, para auxiliar nesse processo e poder ter uma melhor visualização. Mas vale salientar que a demonstração independe da figura. Observemos na Figura 3 que o tipo de demonstração é a direta, cuja função nesse caso é de verificação, pois o autor busca convencer-nos da veracidade da afirmação.

Figura 3- Área da região retangular



Vamos provar que, se a medida da base (b) e a medida da altura (h) forem números reais quaisquer, a área da região retangular R é dada por:

$$\text{área de } R = b \cdot h$$

Consideramos uma região retangular R de base b e altura h, em que b e h são números reais.

Construímos uma região quadrada cuja medida do lado é $b + h$, que contém duas cópias de R e mais duas regiões quadradas, uma cujo lado mede b e outra cujo lado mede h.

A área dessa região quadrada (Q) é dada pelo quadrado de uma soma:

$$\text{área de } Q = (b + h)^2 = b^2 + 2bh + h^2 \quad \text{(I)}$$

Como as regiões quadradas têm áreas iguais a h^2 e b^2, concluímos que:

$$\text{área de } Q = b^2 + h^2 + 2 \cdot (\text{área de } R) \quad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), chegamos a:

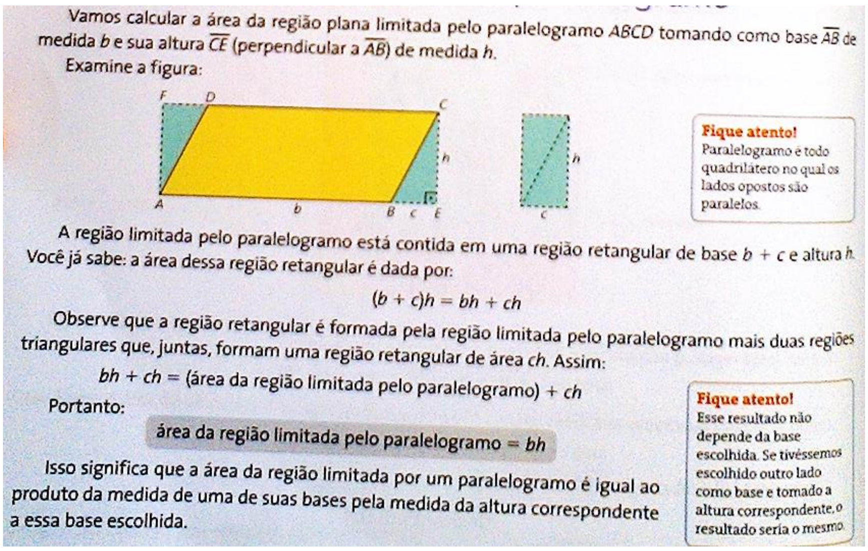
$$\text{área de } R = b \cdot h$$

Fonte: Dante (2014, p.141)

6.1.3 Área da Região Limitada pelo Paralelogramo

O autor está provando que a área delimitada por um paralelogramo é dada pelo produto da medida da base pela medida da altura, mesmo utilizando termos que não indicam o que realmente está sendo feito, ou seja, não é possível compreender de forma clara o que está sendo proposto pelo autor. Inicialmente, o autor afirma *Vamos calcular a área da região limitada por um paralelogramo*, além do que posteriormente sugere *Examine a figura*. Logo, temos uma prova, pois existem argumentos utilizados que dependem diretamente da figura apresentada e como citamos anteriormente, uma demonstração não pode depender de uma figura. Posteriormente, é feita a prova, mesmo com a utilização de termos que não induzem o leitor a saber o que está sendo feito. Observemos a Figura 4.

Figura 4- Área da região limitada por um paralelogramo


Vamos calcular a área da região plana limitada pelo paralelogramo $ABCD$ tomando como base $\overline{AB}$ de medida b e sua altura $\overline{CE}$ (perpendicular a $\overline{AB}$) de medida h.

Examine a figura:

Fique atento!
Paralelogramo é todo quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.

A região limitada pelo paralelogramo está contida em uma região retangular de base $b + c$ e altura h. Você já sabe: a área dessa região retangular é dada por:

$$(b + c)h = bh + ch$$

Observe que a região retangular é formada pela região limitada pelo paralelogramo mais duas regiões triangulares que, juntas, formam uma região retangular de área ch. Assim:

$$bh + ch = (\text{área da região limitada pelo paralelogramo}) + ch$$

Portanto:

$$\text{área da região limitada pelo paralelogramo} = bh$$

Isso significa que a área da região limitada por um paralelogramo é igual ao produto da medida de uma de suas bases pela medida da altura correspondente a essa base escolhida.

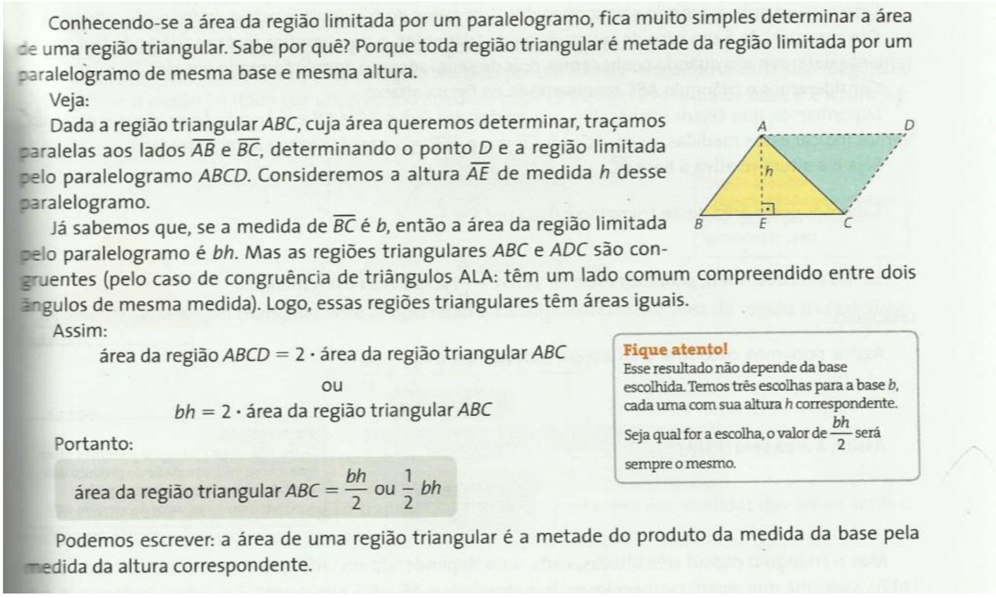
Fique atento!
Esse resultado não depende da base escolhida. Se tivéssemos escolhido outro lado como base e tomado a altura correspondente, o resultado seria o mesmo.

Fonte: Dante (2014, p.142)

6.1.4 Área da Região Triangular

O autor inicia o texto fazendo uma relação entre a área da região limitada por um paralelogramo e a área da região triangular. Em seguida, usa o termo *Veja* para designar que irá demonstrar que a área da região triangular é a metade da área da região limitada por um paralelogramo. Como podemos observar na Figura 5, o autor utiliza uma figura para auxiliar na demonstração e faz uma demonstração direta, com um maior rigor matemático. A função dessa demonstração é de explicação, pois está justificando o porque a afirmação ser verdadeira.

Figura 5- Área da região triangular



Conhecendo-se a área da região limitada por um paralelogramo, fica muito simples determinar a área de uma região triangular. Sabe por quê? Porque toda região triangular é metade da região limitada por um paralelogramo de mesma base e mesma altura.

Veja:

Dada a região triangular ABC, cuja área queremos determinar, traçamos paralelas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, determinando o ponto D e a região limitada pelo paralelogramo $ABCD$. Consideremos a altura $\overline{AE}$ de medida h desse paralelogramo.

Já sabemos que, se a medida de $\overline{BC}$ é b, então a área da região limitada pelo paralelogramo é bh. Mas as regiões triangulares ABC e ADC são congruentes (pelo caso de congruência de triângulos ALA: têm um lado comum compreendido entre dois ângulos de mesma medida). Logo, essas regiões triangulares têm áreas iguais.

Assim:

área da região $ABCD = 2 \cdot$ área da região triangular ABC

ou

$bh = 2 \cdot$ área da região triangular ABC

Portanto:

área da região triangular $ABC = \frac{bh}{2}$ ou $\frac{1}{2} bh$

Fique atento!
Esse resultado não depende da base escolhida. Temos três escolhas para a base b, cada uma com sua altura h correspondente. Seja qual for a escolha, o valor de $\frac{bh}{2}$ será sempre o mesmo.

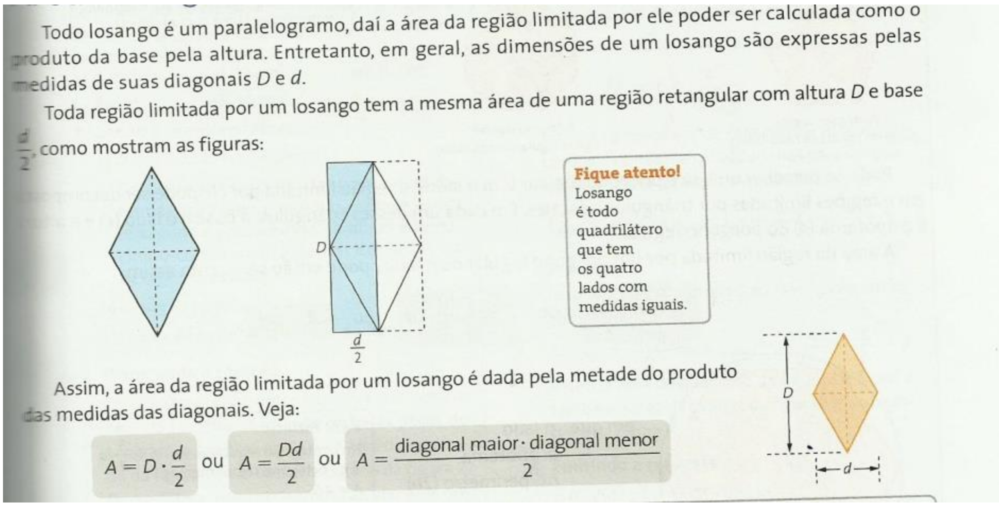
Podemos escrever: a área de uma região triangular é a metade do produto da medida da base pela medida da altura correspondente.

Fonte: Dante (2014, p. 143)

6.1.5 Área da Região Limitada por um Trapézio e por um Losango

Nesses dois casos, utiliza-se os conhecimentos de regiões que já foram estudados, a saber regiões limitadas por um triângulo e por um retângulo. Como as expressões para calcular as áreas dessas regiões já foram obtidas, o autor só faz uma breve argumentação que tem como suporte as figuras do trapézio e do losango. Observemos a Figura 6 (área da região limitada por um losango).

Figura 6- Área da região limitada por um losango



Todo losango é um paralelogramo, daí a área da região limitada por ele poder ser calculada como o produto da base pela altura. Entretanto, em geral, as dimensões de um losango são expressas pelas medidas de suas diagonais D e d.

Toda região limitada por um losango tem a mesma área de uma região retangular com altura D e base $\frac{d}{2}$, como mostram as figuras:

Fique atento!
Losango é todo quadrilátero que tem os quatro lados com medidas iguais.

Assim, a área da região limitada por um losango é dada pela metade do produto das medidas das diagonais. Veja:

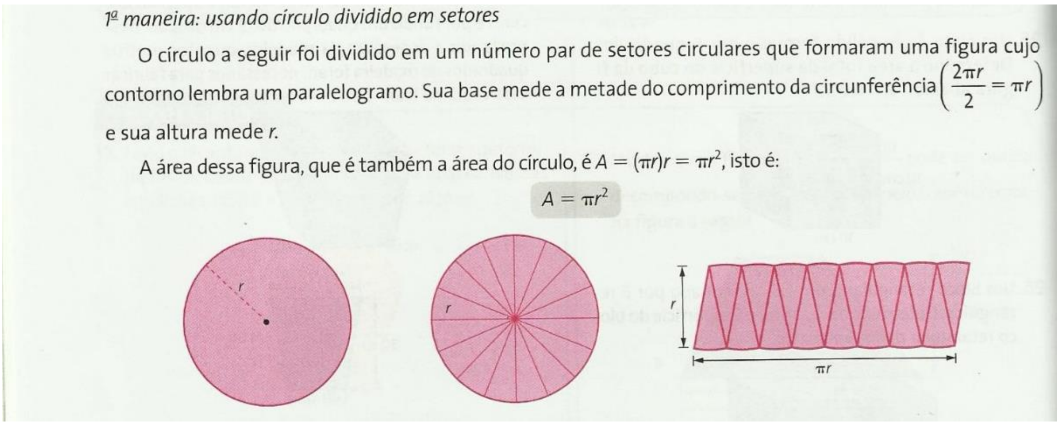
$A = D \cdot \frac{d}{2}$ ou $A = \frac{Dd}{2}$ ou $A = \frac{\text{diagonal maior} \cdot \text{diagonal menor}}{2}$

Fonte: Dante (2014, p. 145)

6.1.6 Área do Círculo

O autor utiliza duas formas para determinar a área do círculo. Na primeira, divide o círculo em setores, em seguida planifica o círculo, que ficou semelhante a um paralelogramo. Neste caso, foi feita apenas uma argumentação, com uma visualização das imagens para compreender o que estava sendo feito. Observemos a Figura 7.

Figura 7- Área do círculo usando a divisão em setores


1ª maneira: usando círculo dividido em setores

O círculo a seguir foi dividido em um número par de setores circulares que formaram uma figura cujo contorno lembra um paralelogramo. Sua base mede a metade do comprimento da circunferência $\left(\frac{2\pi r}{2} = \pi r\right)$ e sua altura mede r.

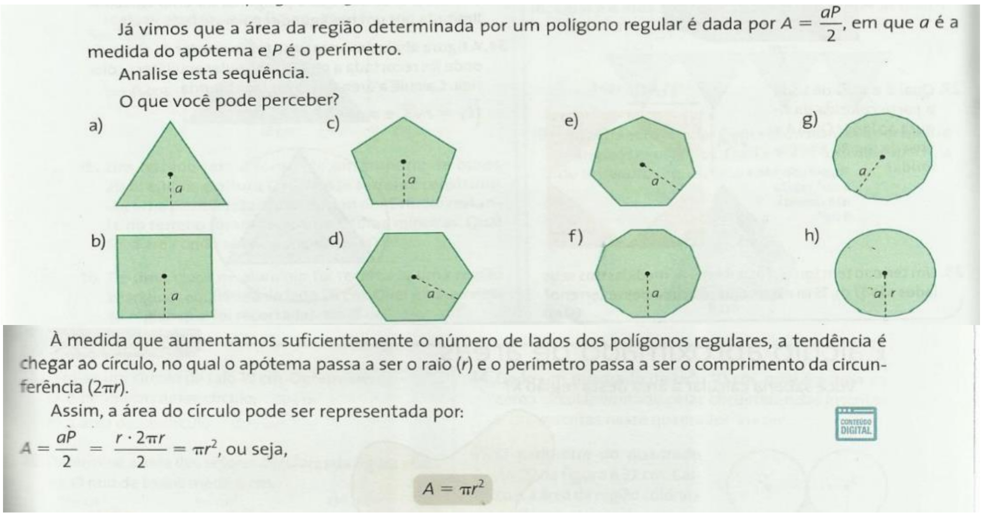
A área dessa figura, que é também a área do círculo, é $A = (\pi r)r = \pi r^2$, isto é:

$$A = \pi r^2$$

Fonte: Dante (2014, p.150)

Na outra forma, utiliza-se polígonos regulares. Foi bastante interessante a forma em que o autor buscou induzir o leitor a perceber como se pode chegar a fórmula da área do círculo, como veremos na Figura 8.

Figura 8- Área do círculo usando polígonos regulares


Já vimos que a área da região determinada por um polígono regular é dada por $A = \frac{aP}{2}$, em que a é a medida do apótema e P é o perímetro.

Analise esta sequência.

O que você pode perceber?

À medida que aumentamos suficientemente o número de lados dos polígonos regulares, a tendência é chegar ao círculo, no qual o apótema passa a ser o raio (r) e o perímetro passa a ser o comprimento da circunferência ($2\pi r$).

Assim, a área do círculo pode ser representada por:

$A = \frac{aP}{2} = \frac{r \cdot 2\pi r}{2} = \pi r^2$, ou seja,

$$A = \pi r^2$$

Fonte: Dante (2014, p. 150-151)

É importante frisar que não é realizada a demonstração da área do círculo, apenas foi realizada uma prova para se chegar a fórmula, mas a segunda forma chama a atenção pela necessidade da utilização do raciocínio dedutivo, com a interpretação do que está ocorrendo nas figuras.

6.1.7 Comentários sobre o livro Matemática Contexto e Aplicações

Este livro se bem utilizado pode ser uma excelente ferramenta tanto para o professor, que tem um material de apoio que predispõe a utilização das demonstrações de uma forma simples e facilmente compreensível de ser repassada para os alunos, como para os alunos, que tem um material em um rigor adequado. Mesmo o livro não demonstrando todas as fórmulas, percebemos que se apresentam provas que propiciam o desenvolvimento posteriormente de uma demonstração. No caso do círculo, que são trazidas duas formas de determinar a área do círculo, o raciocínio lógico dedutivo está bastante presente, principalmente na segunda forma. Portanto, esse livro é um destaque quando falamos em demonstrações, pois possibilita ver a Matemática de uma forma mais interessante, mostrando o porquê de determinada fórmula ser válida. Fica a critério do professor utilizar a demonstração ou não, ou ao aluno pesquisar e querer saber mais. No entanto, o livro está cumprindo o seu papel.

6.2 MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES – 2º ANO

Neste livro, é destinado o Capítulo 8 para abordar o conteúdo de áreas de figuras planas. Inicialmente, é apresentada algumas situações que envolvem o cálculo de áreas, também vem a definição de área. Entre quase todas as seções que é apresentada a área da região limitada de uma figura, como: retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, losango, trapézio, e também a área do círculo, os exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos estão sempre presentes. Com relação ao conteúdo, estão presentes em alguns casos provas ou demonstrações mostrando como obtemos as fórmulas utilizadas no cálculo de áreas de figuras planas.

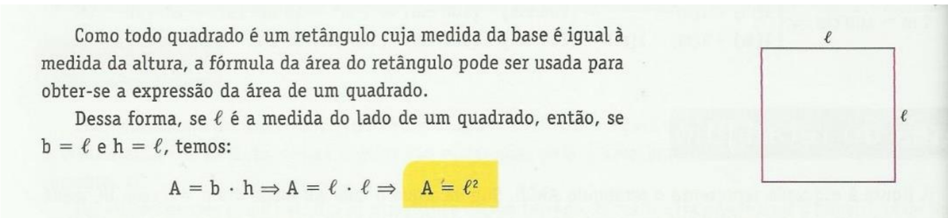
6.2.1 Área da Região Limitada pelo Retângulo e pelo Quadrado

Neste caso, são apresentadas apenas as fórmulas, sem a realização de provas e demonstrações. No retângulo, a partir de um exemplo numérico, é feita a generalização e é apresentada a fórmula

$$A = b \times h.$$

Já o quadrado, explica-se apenas que se trata de um retângulo particular cujas medidas dos lados são iguais, como podemos observar na Figura 9.

Figura 9- Área de uma região quadrada



Como todo quadrado é um retângulo cuja medida da base é igual à medida da altura, a fórmula da área do retângulo pode ser usada para obter-se a expressão da área de um quadrado.

Dessa forma, se ℓ é a medida do lado de um quadrado, então, se $b = \ell$ e $h = \ell$, temos:

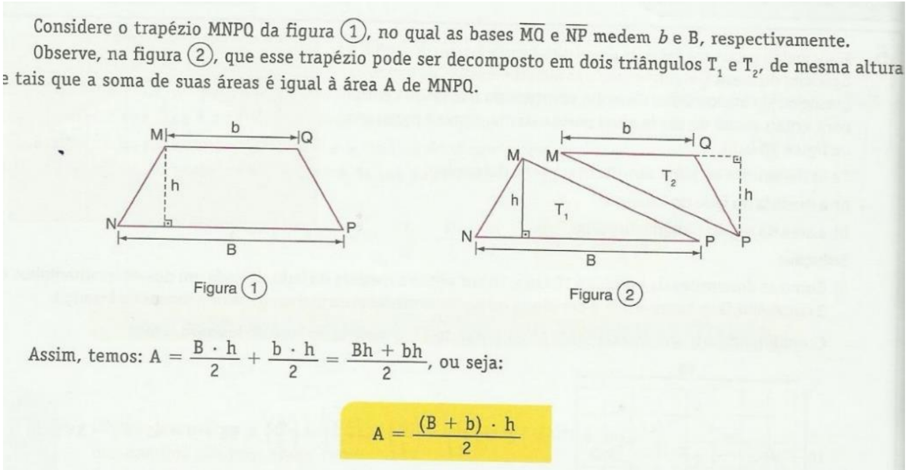
$$A = b \cdot h \Rightarrow A = \ell \cdot \ell \Rightarrow \boxed{A = \ell^2}$$

Fonte: Iezzi et al.(2013, p.136)

6.2.2 Área da Região Limitada por Paralelogramo, Losango e Trapézio e a Área do Círculo

Percebemos a presença de provas, ou seja, de fatos que evidenciam a veracidade de algo sem a utilização de uma sequência lógico-dedutiva. Em todos os casos existem figuras que constituem parte da justificativa e favorecem a visualização de como obter as fórmulas. Observemos a seguir a Figura 10, que traz a área da região limitada por um trapézio.

Figura 10- Área da região limitada pelo trapézio



Considere o trapézio MNPQ da figura (1), no qual as bases $\overline{MQ}$ e $\overline{NP}$ medem b e B, respectivamente. Observe, na figura (2), que esse trapézio pode ser decomposto em dois triângulos T_1 e T_2, de mesma altura e tais que a soma de suas áreas é igual à área A de MNPQ.

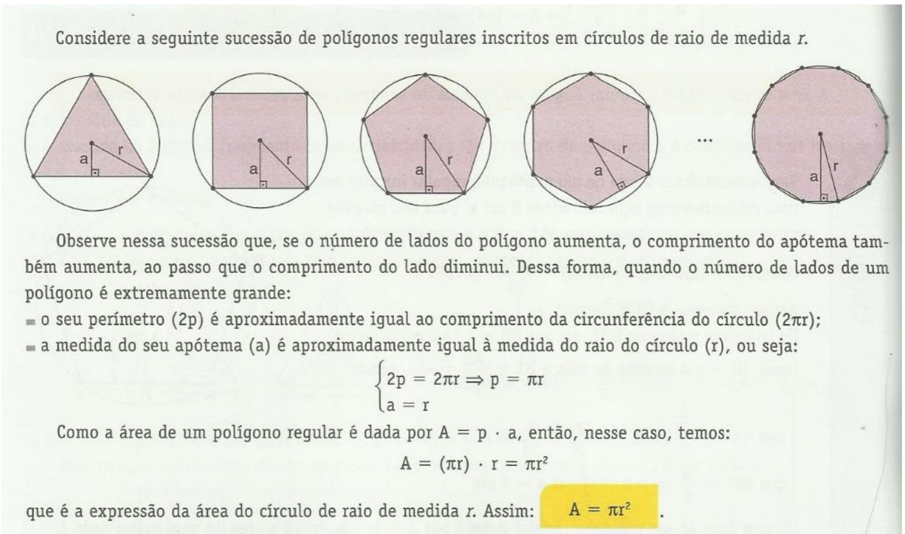
Assim, temos: $A = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{Bh + bh}{2}$, ou seja:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Fonte: Iezzi et al.(2013, p.148)

No caso da área do círculo, tem-se uma construção muito interessante, pois requer uma visualização e percepção do que está ocorrendo na sequência de figuras. Vejamos a Figura 11.

Figura 11- Área do círculo



Considere a seguinte sucessão de polígonos regulares inscritos em círculos de raio de medida *r*.

Observe nessa sucessão que, se o número de lados do polígono aumenta, o comprimento do apótema também aumenta, ao passo que o comprimento do lado diminui. Dessa forma, quando o número de lados de um polígono é extremamente grande:

- o seu perímetro (2p) é aproximadamente igual ao comprimento da circunferência do círculo ($2\pi r$);
- a medida do seu apótema (a) é aproximadamente igual à medida do raio do círculo (r), ou seja:

$$\begin{cases} 2p = 2\pi r \Rightarrow p = \pi r \\ a = r \end{cases}$$

Como a área de um polígono regular é dada por $A = p \cdot a$, então, nesse caso, temos:

$$A = (\pi r) \cdot r = \pi r^2$$

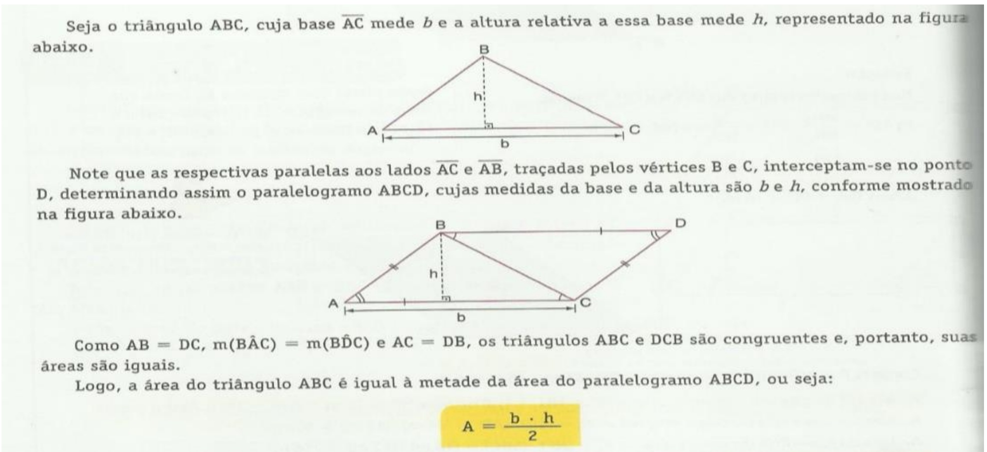
que é a expressão da área do círculo de raio de medida *r*. Assim: $A = \pi r^2$.

Fonte: Iezzi et al. (2013,p. 152)

6.2.3 Área da Região Limitada pelo Triângulo

Na seção referente a área da região triangular, é feita uma demonstração, com um rigor adequado a série que o livro está voltado. Podemos perceber que o livro não usa o termo demonstração, mas a partir das características identificadas podemos afirmar que se trata de uma demonstração. Também são utilizadas figuras que auxiliam a demonstração. Observemos a Figura 12.

Figura 12- Área da região limitada pelo triângulo



Seja o triângulo ABC, cuja base $\overline{AC}$ mede b e a altura relativa a essa base mede h, representado na figura abaixo.

Note que as respectivas paralelas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, traçadas pelos vértices B e C, interceptam-se no ponto D, determinando assim o paralelogramo ABCD, cujas medidas da base e da altura são b e h, conforme mostrado na figura abaixo.

Como AB = DC, $m(B\hat{A}C) = m(B\hat{D}C)$ e AC = DB, os triângulos ABC e DCB são congruentes e, portanto, suas áreas são iguais.

Logo, a área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo ABCD, ou seja:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Fonte: Iezzi et al.(2013, p.140)

Essa é uma demonstração direta, cuja função é sistematização, pois os resultados estão organizados em um sistema dedutivo de conceitos e teoremas.

6.2.4 Comentários sobre o Livro Matemática Ciência e Aplicações

Na maior parte dos casos, as demonstrações não estão presentes neste livro, apenas na área do triângulo que é feita de fato uma demonstração. O livro deixa a desejar quando tratamos de demonstrações, pois como é o instrumento mais utilizado em sala de aula e uma importante ferramenta para o professor deveria proporcionar essa peculiaridade. Mas, mesmo assim, com as diversas fontes que existem hoje em dia, fica a cargo do professor, pesquisar e apresentar provas e demonstrações aos seus alunos e não ficar preso apenas a apresentação das fórmulas.

6.3 CONEXÕES COM A MATEMÁTICA – 2º ANO

No livro em análise, o conteúdo de áreas de figuras planas está presente na seção *Áreas das principais superfícies poligonais planas* do Capítulo 4 intitulado *Superfícies Poligonais, Círculo e Áreas.* Inicialmente, chama-se atenção a forma como se denota as figuras, estas são chamadas de superfícies poligonais, pois é a união do polígono com sua região interna. Com relação ao conteúdo, apresenta-se primeiramente a definição de área de uma superfície poligonal, em seguida, são apresentadas argumentações, provas ou demonstrações das fórmulas que envolvem as superfícies poligonais. Vários exemplos são dados em cada parte, alguns exercícios resolvidos e ainda exercícios propostos. Nesse livro, vale salientar que trazem as definições dos polígonos que são utilizados, e ainda algumas reflexões que requerem do aluno um pensamento mais crítico e de busca de novas descobertas. No final do capítulo, tem a seção de exercícios complementares, que são divididos em: aplicação (que são os que trabalham conceitos e procedimentos específicos), aprofundamento (que exige uma maior atenção), desafio (que testam conhecimentos em situações mais complexas), também tem a autoavaliação (que propõem atividades que dependem da boa compreensão dos conteúdos para serem resolvidos) , a pesquisa e ação (que envolvem atividades de pesquisa e elaboração de um produto final) , finalizando o capítulo com a resolução comentada de uma questão de vestibular relacionada ao conteúdo.

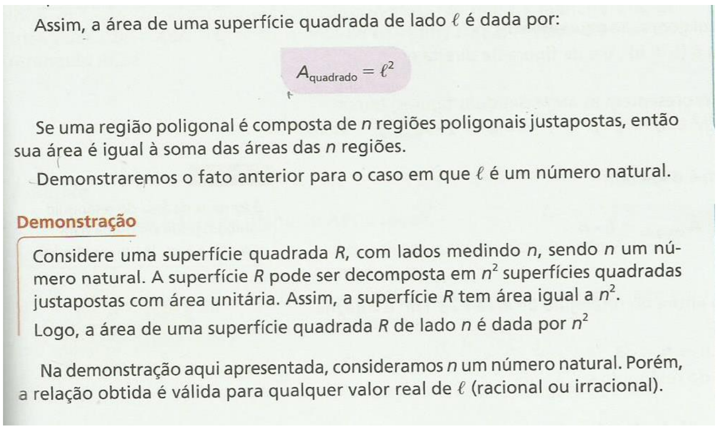
6.3.1 Área de uma Superfície Quadrada

O autor informa que será demonstrado o fato da área da superfície quadrada de lado l é dada por

$$A = l^2 \text{ , sendo } l \in \mathbb{N}.$$

Utiliza-se o termo “Demonstração”. É feita referência, mas não se demonstra os casos em que $l \in \mathbb{Q}$ ou $l\ \acute{e}\ irracional$. Tem uma figura para auxiliar a demonstração, que por sua vez tem um certo rigor. Observemos a seguir a Figura 13.

Figura 13- Área de uma superfície quadrada



Assim, a área de uma superfície quadrada de lado ℓ é dada por:

$$A_{\text{quadrado}} = \ell^2$$

Se uma região poligonal é composta de n regiões poligonais justapostas, então sua área é igual à soma das áreas das n regiões.

Demonstraremos o fato anterior para o caso em que ℓ é um número natural.

Demonstração

Considere uma superfície quadrada R, com lados medindo n, sendo n um número natural. A superfície R pode ser decomposta em n^2 superfícies quadradas justapostas com área unitária. Assim, a superfície R tem área igual a n^2.

Logo, a área de uma superfície quadrada R de lado n é dada por n^2

Na demonstração aqui apresentada, consideramos n um número natural. Porém, a relação obtida é válida para qualquer valor real de ℓ (racional ou irracional).

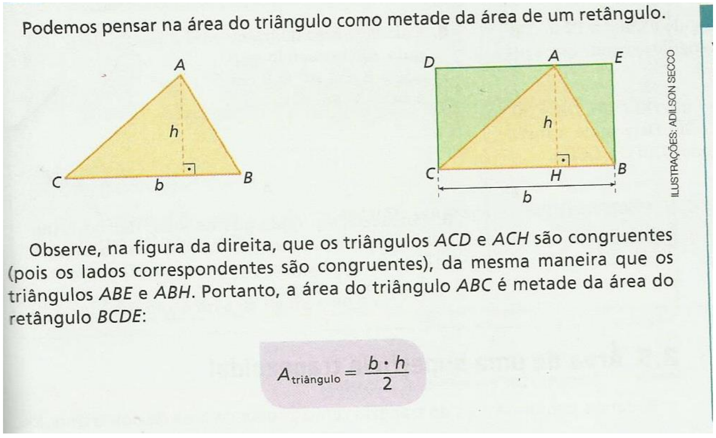
Fonte: Leonardo (org.) (2013, p.97)

A demonstração é do tipo direta, cuja função é de verificação, ou seja, está verificando a veracidade da afirmação.

6.3.2 Áreas das Superfícies Retangular, Triangular, Trapezoidal e do Círculo

Nestes casos, temos a realização de provas, que por sua vez não utilizam um raciocínio lógico-dedutivo. São feitas em alguns casos uma breve justificativa para obtenção das fórmulas. Em outros, apenas as figuras são usadas para justificar a fórmula. Observemos a seguir a Figura 14, que apresenta duas figuras mostrando como conseguir a fórmula da área da superfície triangular e também uma breve justificativa.

Figura 14- Área de uma superfície triangular

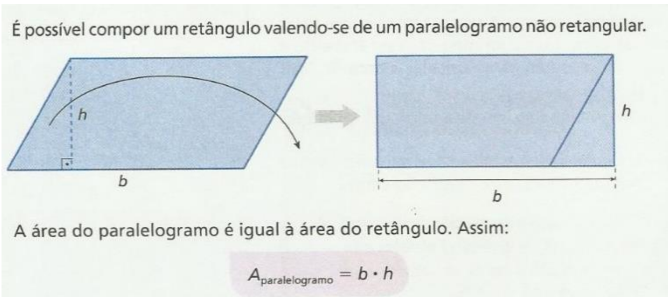


Fonte: Leonardo (org.) (2013, p.99)

6.3.3 Área de uma Superfície Limitada por um Paralelogramo e por um Losango

Estes são os casos em que não existe nenhum formalismo, ou seja, temos apenas argumentações para apresentar as fórmulas das áreas das superfícies limitadas por um paralelogramo e um losango. Observemos a seguir o exemplo do paralelogramo.

Figura 15- Área da superfície limitada por um paralelogramo



Fonte: Leonardo (org.) (2013, p. 98)

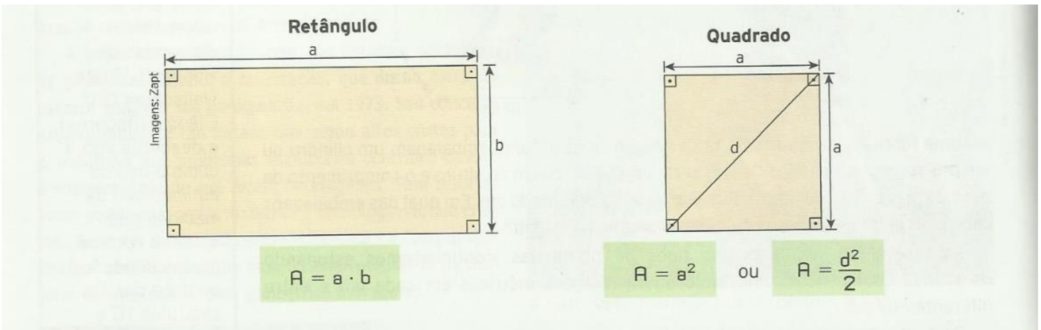
6.3.4 Comentários sobre o livro Conexões com a Matemática

As demonstrações estão presentes apenas no caso do quadrado e mesmo assim só traz o caso de mais fácil visualização, que é quando a medida do lado é um número natural. Além disso, em dois casos são apresentadas uma figura e posteriormente a fórmula. Ou seja, o livro apresenta dois lados distintos, um que apresenta um pouco de formalização e outro que não apresenta nenhuma formalização. Logo, o livro não favorece a utilização das demonstrações em sala de aula, mas isso não implica que o professor não vá utilizar as demonstrações, pois basta pesquisar em outras fontes.

6.4 MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO – 2º ANO

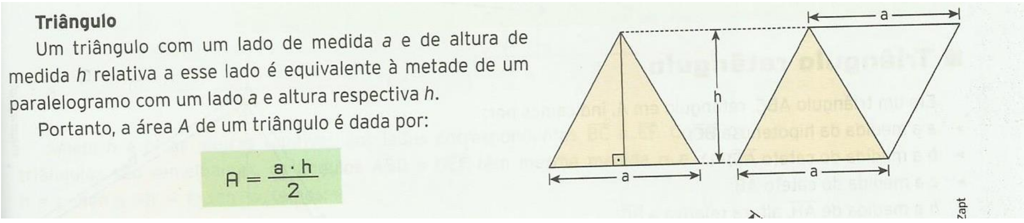
Neste livro, o conteúdo de áreas de figuras planas está apresentado na Seção 2: *Recordação a Geometria Métrica nos Polígonos*, fazendo parte da Unidade 9, intitulada *Geometria Métrica Espacial*. O conteúdo é colocado como revisão, mas em nenhum dos livros da coleção para o Ensino Médio contém o assunto na íntegra. Com relação aos exercícios, está presente no livro a parte de problemas e exercícios, e apenas quatro das doze questões pedem para calcular a área, porém, na maioria dos casos, utilizando outros artifícios que não se restringem apenas a utilização da medida dos lados. Já sobre os conteúdos, é apresentado apenas os quadriláteros e triângulos, são colocadas figuras para visualização das fórmulas. Não são feitas demonstrações, somente uma breve e rápida justificativa ou, como em alguns casos, apenas a apresentação das fórmulas. Observemos as figuras, nas quais trazemos um exemplo do caso em que se apresenta somente a fórmula, como na Figura 16, e na Figura 17 apresenta-se uma breve justificativa.

Figura 16- Área da região limitada pelo quadrado e pelo retângulo



Fonte: Smole, Diniz (2013, p. 186)

Figura 17- Área da região limitada pelo triângulo



Triângulo

Um triângulo com um lado de medida *a* e de altura de medida *h* relativa a esse lado é equivalente à metade de um paralelogramo com um lado *a* e altura respectiva *h*.

Portanto, a área *A* de um triângulo é dada por:

$$A = \frac{a \cdot h}{2}$$

Fonte: Smole, Diniz (2013, p. 187)

6.4.1 Comentários sobre o livro Matemática Ensino Médio

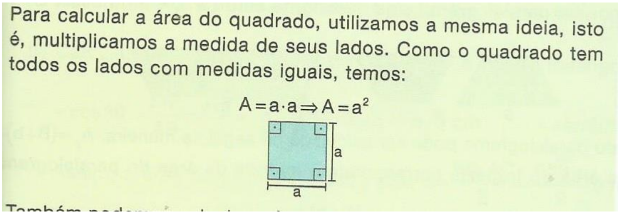
Este livro não propicia nem ao professor, nem ao aluno sequer uma utilização do raciocínio logico dedutivo, podendo progredir para uma demonstração. Como são apresentadas, de forma geral, apenas as fórmulas, cabe ao professor buscar em outros meios para apresentar aos alunos as demonstrações. Além disso, o conteúdo de áreas de figuras planas é apresentado como uma revisão no livro do segundo ano do Ensino Médio e o conteúdo não está presente de forma mais explicada em outros volumes da mesma coleção.

6.5 NOVO OLHAR MATEMÁTICA – 2º ANO

O Capítulo 7 deste livro é dedicado ao conteúdo de áreas de figuras planas. Inicialmente, é apresentada um pouco da história de quando o conceito de área começou a ser utilizado. Posteriormente, constrói-se as fórmulas da área da região limitada pelo retângulo, quadrado e prova as do paralelogramo, do losango, do trapézio, do triângulo e do círculo. Com relação aos exercícios apresentam-se atividades resolvidas, atividades propostas, atividades complementares, uma seção denominada contexto que vão além do conteúdo estudado outra de desafio em que a resolução leva o aluno a desenvolver suas próprias estratégias de resolução, finalizando com a seção explorando o tema em que se tem a apresentação de assuntos relacionados a Matemática e outras áreas de conhecimento. Também apresenta no decorrer do capítulo algumas observações que apresentam conceitos importantes.

A seguir, exemplificaremos como está apresentada a área da região limitada pelo quadrado, que está apenas com a apresentação da fórmula, e a área da região limitada pelo losango, que vem acompanhada de uma prova, ou seja, não possui uma sequência lógico-dedutiva.

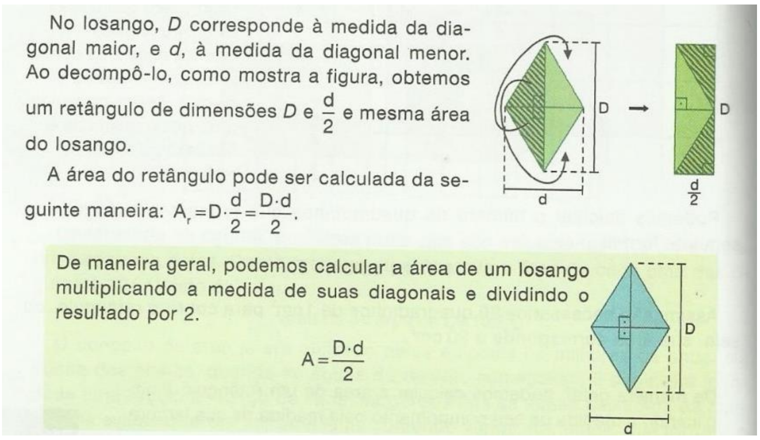
Figura 18- Área da região limitada pelo quadrado


Para calcular a área do quadrado, utilizamos a mesma ideia, isto é, multiplicamos a medida de seus lados. Como o quadrado tem todos os lados com medidas iguais, temos:

$$A = a \cdot a \Rightarrow A = a^2$$

Fonte: Souza (2013, p. 185)

Figura 19- Área da região limitada por um losango


No losango, *D* corresponde à medida da diagonal maior, e *d*, à medida da diagonal menor. Ao decompô-lo, como mostra a figura, obtemos um retângulo de dimensões *D* e $\frac{d}{2}$ e mesma área do losango.

A área do retângulo pode ser calculada da seguinte maneira: $A_r = D \cdot \frac{d}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$.

De maneira geral, podemos calcular a área de um losango multiplicando a medida de suas diagonais e dividindo o resultado por 2.

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Fonte: Souza (2013, p. 186)

6.5.1 Comentários sobre o livro Novo Olhar

Apesar deste livro reservar um capítulo para o conteúdo de áreas de figuras planas, não se teve o cuidado de inserir demonstrações, o máximo que pudemos encontrar foram provas e em alguns casos apenas argumentações. Vale salientar que a presença de provas é importante, pois pode propiciar a evolução para uma demonstração caso o professor ache necessário.

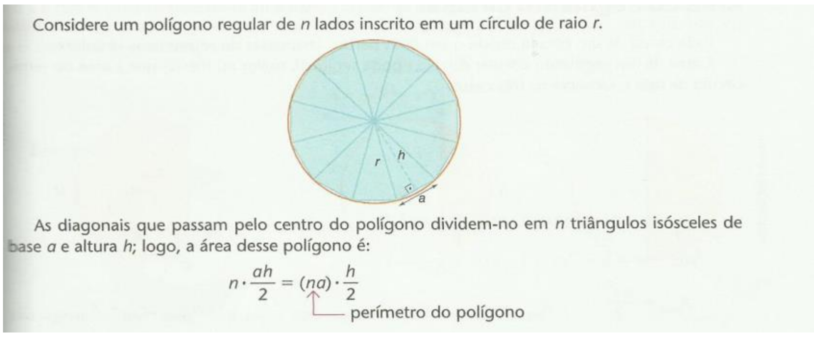
6.6 MATEMÁTICA PAIVA – 1º ANO

O conteúdo Áreas de Figuras Planas neste livro está presente como uma seção do Capítulo 4 sobre *Geometria Plana: Circunferência, Círculo e Cálculos de Áreas.* Esta é dividida em duas partes, estando a parte da área da região limitada pelo quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio e losango separados por uma seção de exercícios da área do círculo. São apresentados exemplos, exercícios resolvidos, na apresentação das fórmulas alguns apresentam e mostram uma construção da fórmula geral, outros exibem apenas a fórmula, também possuem figuras que auxiliam na visualização das fórmulas. Além dos exercícios propostos, ao final do capítulo tem-se um roteiro de trabalho em que é apresentado questões que exploram a habilidade de argumentar e sintetizar, exercícios complementares, análise da resolução de uma questão no qual traz textos interessantes com situações que aplicam os conceitos trabalhados no capítulo.

6.6.1 Áreas das Regiões Limitadas pelo Retângulo, Quadrado e a Área do Círculo

Na área limitada pelo retângulo e na área do círculo são apresentadas apenas argumentações, com generalizações para encontrar a fórmula. No caso do quadrado se apresenta apenas a fórmula. Observemos a Figura 20, em que trazemos a Área do Círculo:

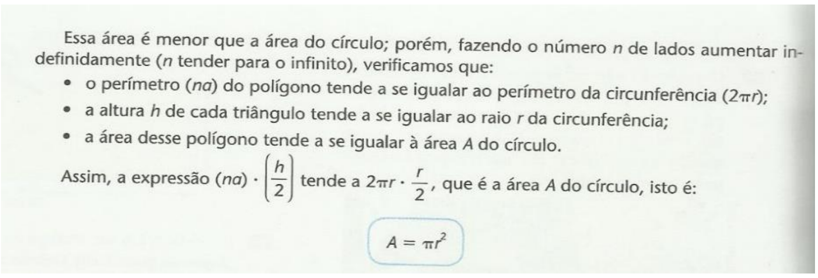
Figura 20- Área do círculo


Considere um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r.

As diagonais que passam pelo centro do polígono dividem-no em n triângulos isósceles de base a e altura h; logo, a área desse polígono é:

$$n \cdot \frac{ah}{2} = (na) \cdot \frac{h}{2}$$

perímetro do polígono


Essa área é menor que a área do círculo; porém, fazendo o número n de lados aumentar indefinidamente (n tender para o infinito), verificamos que:

- o perímetro (na) do polígono tende a se igualar ao perímetro da circunferência ($2\pi r$);
- a altura h de cada triângulo tende a se igualar ao raio r da circunferência;
- a área desse polígono tende a se igualar à área A do círculo.

Assim, a expressão $(na) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)$ tende a $2\pi r \cdot \frac{r}{2}$, que é a área A do círculo, isto é:

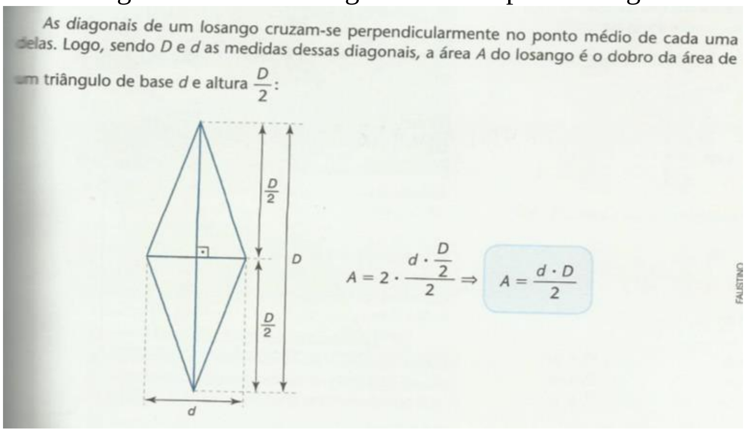
$$\boxed{A = \pi r^2}$$

Fonte: Paiva (2013, p.103-104)

6.6.2 Área da Região Limitada por Paralelogramo, Losango e Trapézio

São realizadas provas para validar as fórmulas das áreas das regiões limitadas por paralelogramo, losango e trapézio, como podemos observar na Figura 21:

Figura 21- Área da região limitada pelo losango


As diagonais de um losango cruzam-se perpendicularmente no ponto médio de cada uma delas. Logo, sendo D e d as medidas dessas diagonais, a área A do losango é o dobro da área de um triângulo de base d e altura $\frac{D}{2}$:

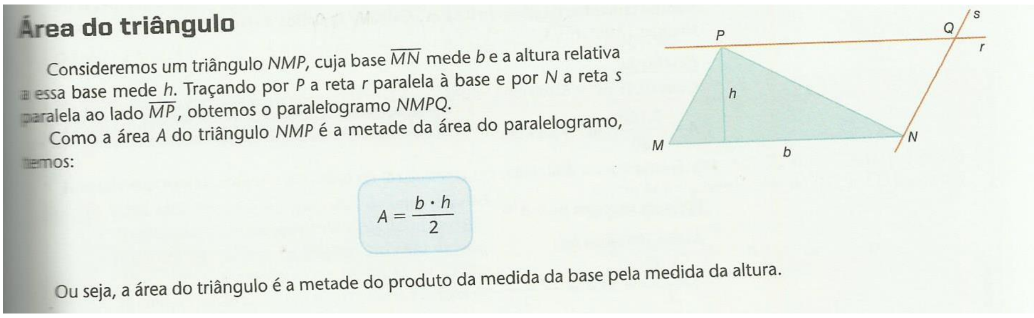
$$A = 2 \cdot \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{d \cdot D}{2}}$$

Fonte: Paiva (2013, p.101)

6.6.3 Área da Região Limitada pelo Triângulo

Neste caso, foi apresentada uma demonstração com pouco rigor, também não se utilizou o termo *Demonstração*. A partir da forma como foi exposta, podemos concluir que se trata de uma demonstração, tem uma figura para auxiliar. Observemos a seguir a Figura 22.

Figura 22- Área da região limitada pelo triângulo


Área do triângulo

Consideremos um triângulo NMP, cuja base $\overline{MN}$ mede b e a altura relativa a essa base mede h. Traçando por P a reta r paralela à base e por N a reta s paralela ao lado $\overline{MP}$, obtemos o paralelogramo $NMPQ$.

Como a área A do triângulo NMP é a metade da área do paralelogramo, temos:

$$\boxed{A = \frac{b \cdot h}{2}}$$

Ou seja, a área do triângulo é a metade do produto da medida da base pela medida da altura.

Fonte: Paiva (2013, p. 99)

Esta é uma demonstração direta, cuja função é verificação, ou seja, busca-se nos convencer da veracidade da afirmação.

6.6.4 Comentários sobre o livro Matemática Paiva

Neste livro, é apresentada uma demonstração com pouco rigor em um dos casos. No restante são realizadas apenas argumentações e provas. É um livro que também deixa a desejar quanto às demonstrações, mas nada impede que o professor busque outras fontes para apresentar ao aluno.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com as análises, podemos perceber que na maior parte dos livros não há propensão para utilização das demonstrações. Em alguns, vimos que estão apresentando apenas as fórmulas ou evoluem apenas para uma argumentação e provas, dificilmente chegando às demonstrações.

Notamos que nenhum dos livros didáticos analisados apresenta a demonstração de todas as fórmulas das áreas das regiões limitadas pelo quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio e losango e do círculo. Normalmente, apenas os casos do quadrado, do retângulo e do triângulo continham demonstrações.

As demonstrações que encontramos nos livros didáticos tem um caráter muito importante, pois estão apresentando de uma forma bastante convincente, para as séries as quais estão direcionadas, as demonstrações no conteúdo de Áreas de Figuras Planas. Em relação ao rigor, tiveram casos que alguns autores foram bastante rigorosos e outros nem tanto. Mas nada que afastasse o interesse dos alunos caso os professores viessem a apresentar estas demonstrações.

Outro ponto que chamou atenção foi a não utilização da palavra “Demonstração”. Em apenas um dos casos, dos seis livros analisados, o autor utilizou esta palavra, ficando a cargo do leitor identificar as palavras que estavam se referindo as demonstrações implicitamente.

É importante ressaltar que os estágios anteriores às demonstrações, como a argumentação e a prova, podem evoluir sistematicamente para uma demonstração, pois as mesmas estão de certa forma propondo um pensamento mais crítico, mais lógico, mais dedutivo com relação aos fatos Matemáticos.

Como já foi dito, o livro é uma importante ferramenta em sala de aula, mas o professor não pode ficar preso apenas a esse recurso. No caso dos livros analisados que não apresentam as demonstrações, cabe ao professor a pesquisa em outras fontes para proporcionar esse conhecimento a seus alunos, mesmo que de uma forma bastante simples, sem muito formalismo.

Fica a proposta de continuar a observar e analisar como as demonstrações estão inseridas em outras instâncias além do livro didático, como por exemplo, a posição do professor frente às demonstrações, a visão do aluno quanto a utilização das demonstrações. Dessa forma, surgem outros questionamentos como: Será que a formação acadêmica prepara um licenciado em Matemática prepara a utilização das demonstrações em sala de aula? De que forma as demonstrações estão inseridas no currículo tanto da Educação Básica como do Ensino superior em um curso de Matemática – Licenciatura?

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. *Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem*. GT 19, 2007.

AMOULOUD, S. A.; FUSCO, C. A. Provas e demonstrações em Matemática: Uma questão problemática nas práticas docentes do ensino básico. In: *Anais do X ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática*, Salvador, BA, 2010.

BICUDO, I. Demonstração em matemática. In: *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática.* Rio Claro: Editora Unesp. Ano 15, n. 18, pp. 65-72, 2003.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica (SEB). *Guia de livros didáticos PNLD 2012: Matemática*. Brasília, 2011.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica (SEB). *Guia de livros didáticos PNLD 2015: Matemática*. Brasília, 2014.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica (SEB). *Parâmetros Curriculares Nacionais: PCN.* Brasília, 2000.

DANTE, L.R., *Livro didático de matemática: uso ou abuso?.* Revista Em Aberto. Brasília ano 16, n.69, jan/mar1996.

DANTE, L.R., *Matemática: contexto e aplicações*. Volume 2, 2ª ed., São Paulo, Editora Ática, 2014.

DE VILLIERS, M.. *Para uma Compreensão dos Diferentes Papéis da Demonstração em Geometria Dinâmica.* Tradução Rita Bastos. ProfMat, 10, 2002, Visue, Portugal. Actas. Disponível em: <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html> .Acesso em 20 de maio de 2015.

DEUS, K. A. . O recurso de demonstração em livros didáticos de diferentes níveis do ensino de matemática. In: XVII Encontro brasileiro de pós-graduação em educação matemática, 2013, Vitória. *Anais do XVII EBRAPEM*, 2013. V. 17.

DOMINGUES, H. H. A demonstração ao longo dos séculos. In *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática.* Rio Claro: Editora Unesp. Ano 15, n. 18, pp. 46-55, 2002.

DOUBNOV, I. *Erros nas Demonstrações Geométricas*. Tradução de Robinson M. Tenório. São Paulo: Atual; Moscou: Mir, 1996. (Coleção Matemática: aprendendo e ensinando).

EUCLIDES (1994) : *Les Éléments*, volume 1,2,3,4, PUF,1994 Tradução Bernard Vitrac.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FETISSOV, A. *A demonstração em geometria.* Tradução para o português de Pedro Lima. Editora MIR: Moscovo, 1985.

IEZZI, G., DOLCE,O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R., ALMEIDA, N. *Matemática: ciência e aplicações*. Vol 2: Ensino Médio, 7ª edição. São Paulo. Editora Saraiva, 2013.

LAGES, E. L..*Conceituação, manipulação e aplicações, as três componentes do ensino da matemática.* RPM, 3º quadrimestre, 1999.

LEONARDO, F. M. (org.) *Conexões com a Matemática*. Organizadora: Editora Moderna, obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna- 2ª edição, São Paulo, 2013.

MORAIS FILHO, D. C.de.*Um convite a Matemática*. 2ª edição - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

OLIVEIRA, J. A.. *Teorema de Pitágoras*. Monografia (Especialização em Matemática). Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2008.

ORDEM, J. *Prova e demonstração em geometria: uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6° a 8° séries de Moçambique*. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

PAIVA, M. *Matemática.* 2ª Edição – São Paulo: Moderna, 2013

PIETROPAOLO, R. C. *(Re) Significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática.*Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP), 2005.

ROSA, F.C.; *et al*. Investigando demonstrações, justificativas e argumentações nos livros didáticos. In: *Anais do XI ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática*, Curitiba, PR, 2013.

SILVA, M. M. S.; SALES, A. *A demonstração, prova e argumentação no ensino da matemática*. Mato Grosso do Sul, 2009.

SOUZA, J. R. *Novo olhar Matemática*. Vol 2, 2ª edição, São Paulo : FTD, 2013.

STOCCO SMOLE, K; DINIZ, M. I. *Matemática Ensino Médio*. Vol 2 , 8ª edição, São Paulo: Saraiva, 2013.

APÊNDICE A – TABELAS – RESUMO

Tabela 1- Quantidade de argumentações, provas e demonstrações

Quantidade / ***Livros***	**Argumentação**	**Prova**	**Demonstração**	**Apenas apresentação das fórmulas**
Matemática Contexto e Aplicações	2	2	3	0
Matemática Ciências e Aplicações	0	4	1	2
Conexões com a Matemática	2	4	1	0
Matemática Ensino Médio	4	0	0	2
Novo Olhar Matemática	0	5	0	2
Matemática Paiva	3	3	1	0

Tabela 2 – Classificação das deduções das fórmulas

Livro	**Área da região limitada pelo quadrado**	**Área da região limitada pelo retângulo**	**Área da região limitada pelo triângulo**	**Área da região limitada pelo Trapézio**	**Área da região limitada pelo Losango**	**Área da região limitada pelo Paralelogramo**	**Área do Círculo**
Matemática Contexto e Aplicações	D	D	D	A	A	P	A/P
Matemática Ciências e Aplicações	N	N	D	P	P	P	P
Conexões com a Matemática	D	P	P	P	A	A	P

Matemática Ensino Médio	N	N	N	N	N	N	-
Novo Olhar Matemática	N	N	P	P	P	P	P
Matemática Paiva	A	A	D	P	P	P	A

Legenda: A: Argumentação

P: Prova

D: Demonstração

N: Nenhuma das opções anteriores