Universidade Federal de Pernambuco
Campus Acadêmico do Agreste
Núcleo de Formação Docente
Matemática - Licenciatura

Investigando os Significados de Fração em uma Coleção de Livros Didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental

Wagner Wilson Pereira de Carvalho

Caruaru, 2014

Universidade Federal de Pernambuco

Campus Acadêmico do Agreste

Núcleo de Formação Docente

Matemática - Licenciatura

Wagner Wilson Pereira de Carvalho

Investigando os Significados de Fração em uma Coleção de Livros Didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental

Projeto de Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à disciplina TCC II, como requisito obrigatório para a obtenção do título de licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco - Campus Acadêmico do Agreste.

Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha

Co-orientação: José Marcos da Silva

Caruaru, 2014

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva CRB/4-1223

C331i Carvalho, Wagner Wilson Pereira de.
Investigando os significados de fração em uma coleção de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental. / Wagner Wilson Pereira de Carvalho. – Caruaru, 2014.
72 f., il.; 30 cm.

Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha.
Co-orientador: José Marcos da Silva.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Matemática – Licenciatura, 2014.
Inclui referências.

1. Livro didático. 2. Fração. 3. Matemática – Ensino fundamental. 4. Didática. 5. Fenomenologia. I. Rocha, Cristiane de Arimatéa (Orientadora). II. Silva, José Marcos da (Co-orientador). III. Título.

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2014-114)

Universidade Federal de Pernambuco

Campus Acadêmico do Agreste

Núcleo de Formação Docente

Matemática - Licenciatura

WAGNER WILSON PEREIRA DE CARVALHO

INVESTIGANDO OS SIGNIFICADOS DE FRAÇÃO EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

BANCA EXAMINADORA

____

Cristiane de Arimatéa Rocha
(Orientadora)

____

José Marcos da Silva
(Co-Orientador)

____

José Dilson Beserra Cavalcanti
(Examinador interno)

____

Paulo Câmara Souza
(Examinador externo)

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em __ / __ / 2014

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos sonhadores, que correm atrás de seus sonhos e descobrem que acreditar é parte fundamental para melhor agir e melhor viver. Dentre estes sonhadores, destaco os estudantes, professores, familiares e amigos, pois buscam seus sonhos criando um ambiente propício ao crescimento de novos sonhos, fortalecendo assim os sonhos dos seus próximos. Eles são exemplos que nos motivam e ensinam.

E em especial a minha noiva sonhadora Patrícia, obrigado pela energia, força, carinho. Estamos agora avançando em nossos sonhos e vislumbrando novos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço todas as pessoas que passaram em minha vida e que de alguma forma, direta ou indireta, contribuíram na minha formação, seja no cunho pessoal, profissional ou acadêmico. Algumas dessas pessoas tiveram uma contribuição especial para esse trabalho, portanto agradeço especialmente.

A minha orientadora, Cristiane de Arimatéa Rocha, pela confiança, apoio, recomendações e dedicação ao longo da realização deste trabalho; e principalmente pela valiosa contribuição em minha formação.

Ao meu co-orientador, José Marcos da Silva, pela confiança, incentivo e ensinamentos com atenção aos detalhes.

Ao professor Dilson Cavalcanti pelos textos, recomendações, orientações e debates que foram contribuições essenciais para este trabalho.

Ao professor Paulo Peixoto, pela amizade e diálogos enriquecedores.

A todos os meus professores, sem os quais eu não teria estes conhecimentos do mesmo modo. Obrigado por todo apoio, amizade e dedicação.

Aos colegas de curso, que no estudo e trabalhos foram construindo um ambiente de amizade e apoio.

Aos meus pais José e Cosma, apoiando-me desde o início.

A minha irmã e também colega de turma, Lidiane, por está me acompanhando nessa jornada.

A minha irmã Lucelma, agradeço e desejo sucesso em sua jornada acadêmica.

A minha noiva Patrícia, pelo apoio, incentivo, e por partilhar nossos sonhos.

A todos os meus familiares e amigos que ajudaram no meu percurso acadêmico.

Obrigado a todos.

E para uma entidade especial e amorosa, deixo meu agradecimento, obrigado Deus, pela energia e força sempre presente.

RESUMO

O objetivo desse trabalho foi analisar quais os conceitos de fração presentes em uma coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental por meio do olhar da Teoria da Fenomenologia Didática das Estruturas Matemáticas, visando a análise dos conceitos de fração apresentados (relação parte-todo, quociente entre inteiros, razão, operador multiplicativo e número racional), sua localização no livro e quais têm prioridade em termos quantitativos. Quanto à localização no livro, foi observado o texto de abordagem introdutória do conteúdo, os exemplos, os exercícios propostos, as atividades sugeridas, os gráficos e desenhos e as orientações do manual do professor. Na fundamentação teórica, foram utilizadas as categorias utilizadas por Freudenthal (1999) na teoria acima, através da tradução comentada de textos selecionados do mesmo livro, realizada por Puig (2001) e no trabalho *Análisis Fenomenológico* de Puig (1997). Propõe-se, ainda, uma reflexão sobre como os diferentes conceitos presentes nos livros didáticos influenciam na compreensão de fração para o Ensino Fundamental. De acordo com a análise, a fração como número racional é o aspecto do conceito de fração com maior prioridade na coleção. Enquanto o conceito de fração como operador multiplicativo é o menos abordado, quanto à localização os exercícios se mostraram com a principal localidade nos livros analisados para os fenômenos de fração. Uma observação importante: nesse trabalho o termo conceito é utilizado no lugar do termo significado, então ao tratarmos de conceitos de fração, consideremos significados de fração, a razão da escolha é devida nossa interpretação da fundamentação teórica. Porém, para não causar confusão diante da nomenclaturas normalmente utilizadas, deixamos essa ressalva.

Palavras-Chave: Livro didático; fração; fenomenologia didática.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS E TABELAS

Quadros

Tabelas

SUMÁRIO

"A Matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza."

(Stephen Hawking)

1. INTRODUÇÃO

Uma observação importante: nesse trabalho o termo conceito é utilizado no lugar do termo significado, então ao tratarmos de conceitos de fração, consideremos significados de fração, a razão da escolha é devida nossa interpretação da fundamentação teórica. Porém, para não causar confusão diante da nomenclaturas normalmente utilizadas, deixamos essa ressalva.

Como licenciando, e futuro professor, frequentemente me vinha a seguinte questão: como abordar um determinado conteúdo de forma a facilitar a compreensão do estudante? Uma das considerações, de certo modo automática, que surgia junto à questão era que primeiramente eu devia ter compreensão do conteúdo. Daí surgia novos questionamentos: qual o nível de compreensão necessário, quais os aspectos a serem compreendidos e de que forma conhecer o que devo compreender?

Durante minhas leituras, e ao longo da minha formação inicial, tive contato com diversos aspectos que me permitiram delimitar o olhar inicial para abordagem da pesquisa. No âmbito matemático, é possível perceber a necessidade de cuidados e ênfase nos conceitos para o aprendizado de Matemática. Através da leitura de livros de Matemática, principalmente para as disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, pude ver certas características que trazem uma percepção de beleza, pelo menos para os matemáticos. Surge um agente norteador para minhas inquietações: como trazer essa beleza de forma mais acessível para licenciandos e licenciados, para que esses também consigam mostrar a outras pessoas a beleza matemática? A ideia aqui é como usar a beleza da Matemática para auxiliar no ensino e aprendizagem de Matemática. A beleza ao qual me refiro aqui é a existência de uma lógica permeando cada fenômeno matemático e o fato de que esta lógica faz sentido, senão ao primeiro olhar, mas faz sentido, e não devemos privar o estudante de conhecer determinados significados que irão auxiliar o mesmo nesse lindo relacionamento: estudante e Matemática.

Dentre tantos aspectos e conteúdos, surge a indecisão inicial quanto ao tema e a pergunta diretriz para a pesquisa. Inicialmente escolhi o ensino aprendizagem de números racionais com ênfase nos conceitos, mas houve a primeira mudança: pesquisar sobre as concepções de fração trazidas nos livros didáticos. No entanto, a instabilidade nesse difícil processo de começar o projeto de pesquisa, as inquietações internas e o material com o qual ia tendo contato durante as pesquisas iniciais motivaram-me a uma nova mudança. O novo tema seria sobre o aspecto da leitura em livros didáticos de Matemática. E, finalmente, veio a mudança que se estabilizou tornando-se o tema desse trabalho. Mesclando os aspectos das etapas de mudança desse trajeto, esse trabalho trata de uma análise dos conceitos de fração nos livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, através do olhar da teoria da Fenomenologia Didática das Estruturas Matemáticas, do autor Hans Freudenthal (1999).

1.1. Pergunta Diretriz

Antes de continuar a exposição sobre a escolha do tema e da pergunta diretriz, quero justificar essa abordagem adotada na introdução e seu cárater interessante. Araújo e Borba, em sua obra Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática, trazem:

> O processo de construção da pergunta diretriz de uma pesquisa é, na maioria das vezes, um longo caminho, cheio de idas e vindas, mudanças de rumos, retrocessos, até que, após um certo período de amadurecimento, surge a pergunta. Um grande problema que percebemos em diversas pesquisas é que, muitas vezes, esse caminho não é apresentado pelo autor. Talvez ele pense que aquele caminho percorrido até o estabelecimento da pergunta tenha sido cheio de enganos, não merecendo ser divulgado, e não perceba que a pergunta é a síntese desse caminho, ou seja, que todo o processo de construção da pergunta faz parte da própria pergunta. (ARAÚJO; BORBA, 2010, p. 29).

Assim, nesse cenário, a proposta que pretendo atingir com a pesquisa é trazer uma análise de livros didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental, com ênfase em quais conceitos de fração são trazidos, onde aparecem e quais apresentam maior prioridade em termos quantitativos, possibilitando, desta forma, uma reflexão e amadurecimento das concepções nos licenciandos em Matemática, quanto aos diferentes conceitos de fração presentes no livro didático.

Nesse sentido, elege-se como pergunta diretriz:

Quais os conceitos de fração presentes em uma coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental?

1.2. Pesquisas sobre números racionais

Sobre pesquisas com números racionais, além dos textos de fundamentação dos autores Hans Freudenthal e Puig sobre a Fenomenologia Didática, alguns artigos ajudaram na concepção desta monografia e mostram uma prévia do que pode ser encontrado. De forma sucinta, apenas para vislumbrar uma parte das pesquisas de motivação inicial e que destacam a relevância do tema, temos as seguintes impressões.

Battisti (2013) traz em seu trabalho o resultado de uma pesquisa com estudantes do Ensino Fundamental do 6º ano, sobre os entendimentos de números racionais na representação fracionária na ideia parte-todo. O autor utiliza modelos propostos por Walle (2009), que em sua obra trata a Matemática no Ensino Fundamental para a formação de professores com enfoque na compreensão dos sentidos e significados.

Walle, já no começo do livro, na carta para os estudantes e professores, diz: "O que é mais fundamental na Matemática é simplesmente que ela faz sentido!" (WALLE, 2009, p. 9). As abordagens do autor e da forma detalhada de apresentar suas ideias influenciaram significativamente neste trabalho.

Cavalcanti, autor de diversos trabalhos mediante sua pesquisa sobre os significados de números racionais abordados no Ensino Fundamental, foi de crucial importância nesta pesquisa, destacando que seus trabalhos trazem como resultados:

- Aparece um privilégio de um aspecto, ou seja, uma forma do conceito de fração, favorecendo a relação parte-todo e divisão indicada em possível detrimento de outros aspectos do conceito fracionário (CAVALCANTI, 2007);

- A possibilidade de que determinadas escolhas favoreçam a criação de obstáculos para o aprendizado de fração (CAVALCANTI, 2007).

Dentre estes obstáculos, segundo Cavalcanti, em seu artigo, há uma preocupação e destaque para os obstáculos de natureza epistemológica. Sobre obstáculo epistemológico, Cavalcanti, discorre:

> A noção de obstáculo epistemológico está particularmente ligada ao contexto histórico das ciências. Muitas vezes essa noção é utiliza no contexto pedagógico sem considerar sua especificade histórico-filosófica e isso tem sido alvo de críticas, por isso,a análise dos obstáculos no contexto da matemática deve ser realizada com atenção. (…) Consideramos da noção de obstáculo epistemológico que: - o obstáculo não é a falta de conhecimento, mas pelo contrário, são conhecimentos antigos que resistem à instalação de novas concepções; - aparece todas as vezes que uma organização do pensamento preexistente encontra-se ameaçada; - é uma ideia que impede e bloqueia outras ideias. (CAVALCANTI, 2007, pp. 2, 3)

Este trabalho não trata de epistemologia, e sim de aspectos do conceito de fração segundo a fenomenologia. De todo modo, um cuidado sobre o aspecto da Fenomenologia Didática pode evitar a criação de alguns obstáculos epistemológicos. Os próprios nomes e fenômenos devem ter sua epistemologia valorizada ao serem estudados.

Um ponto de destaque na pesquisa de Cavalcanti para essa pesquisa é o fornecimento da verificação da necessidade de um trabalho sobre os variados significados do conceito de fração. O autor traz a seguinte conclusão sobre sua análise dos resultados obtidos:

> A análise permitiu esclarecer alguns pontos como: que existe diferença de rendimento em situações tratando a relação parte-todo em unidades discretas quando aparecem figuras e quando não aparece, há uma inclinação dos sujeitos em algumas situações, a não reconhecer fração como um único número. (CAVALCANTI, 2006, p.11)

E ainda, segundo Cavalcanti (2007, p. 8), "o baixo índice de rendimento a nosso ver, permitiu perceber que o obstáculo não é a falta de conhecimento, mas pelo contrário, são conhecimentos antigos que resistem à instalação de novas concepções."

É natural pensar que os conceitos trabalhados conjuntamente e organizadamente sobre seus vários aspectos e significados favoreçam o aprendizado.

Cavalcanti traz ainda um indício crucial nesta pesquisa:

> A abordagem introdutória do modelo parte-todo também é o pricnipal método utilizado pelos professores que participaram da nossa pesquisa. Eles justificam que sentem dificuldades na sua compreensão e que quando chega a hora de lecionar esse tema são apresentadas algumas poucas instruções, reproduzindo-se os passos encontrados nos livros didáticos adotados. (CAVALCANTI, 2006, p. 3)

O ponto crucial está nessa reprodução dos passos encontrados nos livros didáticos. Nesta pesquisa, analisamos quais os conceitos de fração que estão presentes em uma coleção de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental.

1.3. Objetivos

O objetivo geral desta pesquisa é encontrar uma resposta para pergunta diretriz, ou seja, analisar quais os conceitos de fração presentes em uma coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.

Para atingir este objetivo geral temos como objetivos específicos:

- Registrar os conceitos de fração presentes nos livros didáticos de uma coleção dos anos finais do Ensino Fundamental;
- Registrar os conceitos de fração encontrados na coleção em termos quantitativos;
- Identificar a distribuição dos conceitos de fração em cada ano da coleção de livro didático;
- Verificar sua distribuição no livro nas categorias de localização:
  - texto: compreendendo a explanação do conteúdo,
  - exemplos: destacando os exemplos e exercícios resolvidos,
  - exercícios propostos,
  - atividades sugeridas: destacando projetos de investigação, pesquisa e escrita para aprofundar o conteúdo,
  - figuras: compreendendo gráficos, desenhos, fotos entre outros tipos de ilustrações,
  - manual do professor: conceitos encontrados nessas orientações.

1.4. Apresentação dos capítulos

Vimos qual a motivação inicial do trabalho, seu tema, sua pergunta diretriz, algumas pesquisas sobre a importância dos conceitos no ensino aprendizagem de fração e os objetivos desse trabalho.

No capítulo seguinte, Capítulo 2, abordamos de forma sucinta o papel do livro didático de Matemática no ensino de Matemática.

No Capítulo 3, a teoria da Fenomenologia Didática das Estruturas Matemáticas é apresentada de acordo com Hans Freudenthal e também de acordo com a análise trazida por Luís Puig.

A seguir, no Capítulo 4, temos o que traz o PCN Matemática sobre frações e de que forma podemos organizar o conceito de fração de acordo com a obra de Hans Freudenthal.

No Capítulo 5, tratamos a metodologia do presente trabalho, justificamos a escolha da coleção analisada e elegemos as categorias de análise de acordo com o trazido no Capítulo 4.

A análise dos dados é realizada no Capítulo 6, trazendo os dados em tabelas e gráficos e alguns exemplos que ilustram os fenômenos trazidos como propostas pelo livro didático. Durante a análise são realizados também breves comentários complementando a abordagem teórica.

As considerações finais até o presente são trazidas no Capítulo 7, onde também propomos uma análise mais detalhada dos livros didáticos com novos olhares.

2. O PAPEL DO LIVRO DIDÁTICO NA MATEMÁTICA

O livro didático desempenha um papel essencial na educação, e particularmente na Matemática. O autor Lopes (2000), afirma: "É inegável a importância do livro didático no processo de ensino aprendizagem da Matemática, tanto pelo aspecto histórico quanto pelo ponto de vista da maioria dos professores."(p. 36). Além disso, Lopes nos deixa um alerta:

> Por outro lado, os livros didáticos têm se prestado a divulgar as "verdades" aceitas pela comunidade intelectualizada, resultantes de observações, estudos e pesquisas, realizados por uma pessoa, por um grupo de pessoas ou até mesmo por diversas gerações. Os obstáculos de percurso e as visões errôneas no decorrer da construção do conhecimento dificilmente estão descritos no livro didático, principalmente nos voltados à área das ciências exatas. (LOPES, 2000, p. 38).

Usei o termo alerta, pois devemos refletir sobre essa característica do livro didático. Ao trazer o resultado como uma verdade aceita pela comunidade científica, várias vezes acarreta na perda do encanto do aprendizado, o encanto em se fazer compreender. Diante de algo já defendido como verdade, o leitor do livro didático pode simplesmente memorizar o conceito ali definido e se sentir apto para enunciá-lo e com base nos exemplos trazidos no livro, aplicá-lo na resolução de questões e, algumas vezes, instrumentalizá-lo de forma eficiente.

Porém, a qualidade do livro didático deve ser considerada de forma atenciosa, tornando possível adaptar seu uso de acordo com a proposta de ensino, tomando cuidado especial para não julgar um livro somente pela correção dos conteúdos apresentados, conforme Lopes:

> A qualidade do livro didático, no entanto, não pode se restringir ao desenvolvimento correto dos conteúdos apresentados, ou à elaboração de atividades, sem nenhum deslize conceitual. São vários os indicadores que devem ser considerados numa seleção, na opinião de professores, alunos e pesquisadores. (LOPES, 2000, p. 42).

Dentre tais fatores, consideraremos os aspectos abordados de fração, que compreendemos como os fenômenos que podem ser organizados através do conceito de fração.

De acordo com o documento orientador do Programa Nacional do Livro Didático, o Guia de livros didáticos- PNLD 2014,

> O livro didático no processo de ensino e aprendizagem, o livro didático é um interlocutor que dialoga com o professor e com o aluno. nesse diálogo, o livro é portador de uma perspectiva sobre o saber a ser estudado e sobre o modo mais eficaz de aprendê-lo. (BRASIL, 2014, p.12)

E o PNLD destaca as funções do livro:

> As funções mais importantes do livro didático na relação com o aluno, tomando como base Gérard & Roegiers, são: favorecer a aquisição de conhecimentos socialmente relevantes; propiciar o desenvolvimento de competências cognitivas que contribuam para aumentar a autonomia; consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos adquiridos; auxiliar na autoavaliação da aprendizagem; contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania. (BRASIL, 2014, p.13)

O livro didático é muito importante no processo ensino-aprendizagem e por isso, no Guia do PNLD, o coração do mesmo são as resenhas, que utilizaremos, ao começar a análise dos dados.

3. FENOMENOLOGIA DIDÁTICA DAS ESTRUTURAS MATEMÁTICAS

Hans Freudenthal, em sua obra Fenomenologia Didática das Estruturas Matemáticas, realiza a distinção entre Fenomenologia e Fenomenologia Didática do seguinte modo:

> Inicio com uma antítese - se é realmente uma antítese - entre nome (objeto de pensamento) e fenômeno. Os objetos matemáticos são nomes, mas uma parte da matemática pode ser experenciada como fenômeno; números são nomes, mas o trabalho com números pode ser um fenômeno. (…) A fenomenologia de um conceito matemático, uma estrutura matemática, ou um significado matemático, em minha terminologia, é descrever como este nome se relaciona com os fenômenos dos quais são organizados por seus significados, indicando quais fenômenos são criados para organizar, e quais podem ser extendidos, de que modo agem sobre este fenômeno e sua organização, e os poderes que temos sobre esses fenômenos. Se nesta relação entre nome e fenômeno acrescentarmos o elemento didático. Isto é, se é dada atenção para como a relação é adquirida no processo de ensino-aprendizagem, falamos de fenomenologia didática deste nome. (FREUDENTHAL, 1999, p. 29) (Tradução nossa.)[1]

Assim, a partir de uma antítese, Freudenthal (1999) mostra a relação dos fenômenos em si, com o nome Fenomenologia, sendo a Fenomenologia Didática como um nome para indicar as relações do processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com Puig (2001), Freudenthal deixa um legado fundamental que Puig analisa sobre uma combinação essencial de duas ideias: uma de índole filosófica e outra didática. Em sua tradução da obra de Freudenthal, Luís Puig, traz em uma nota introdutória essa posição com as seguintes considerações:

No âmbito filosófico:

> A primeira diz respeito à natureza dos objetos matemáticos e a prática matemática. Para Freudenthal, objetos matemáticos são construídos na prática matemática como um meio de organização dos objetos do mundo, suas propriedades, as ações que fazemos sobre eles ou as propriedades dessas ações. A meu ver, não é assim Freudenthal não se situa em qualquer uma das filosofias da matemática que têm sido chamadas de "realistas" ou "platônicas" que concebem os objetos

[1] No original: I start with the antithesis – if it really is an antithesis – between nooumenon (thought object) and phainomenon. The mathematical objects are nooumena, but a piece of mathematics can be experienced as a phainomenon; numbers are nooumena, but working with numbers can be a phainomenon. (…) Phenomenology of a mathematical concept, a mathematical structure, or a mathematical idea means, in my terminology, describing this nooumenon in its relation to the phainomena of which it is the means of organising, indicating which phenomena it is created to organise, and to which it can be extended, how it acts upon these phenomena as a means of organising, and with what power over these phenomena it endows us. If in this relation of nooumenon and phainomenon I stress the didactical element, that is, if I pay attention to how the relation is acquired in a learning–teaching process, I speak of didactical phenomenology of this nooumenon.

> matemáticos com uma pré-existência e esta atividade matemática como a descoberta da geografia do mundo em que esses objetos estão. (PUIG, 2001, p.2) (Tradução nossa)[2]

No âmbito didático:

> A segunda idéia que Freudenthal enuncia neste capítulo, e é essencial em minha opinião, é uma tomada de jogo didático: o que ele chama de construção de objetos mentais contra a aquisição de conceitos. Se a análise fenomenológica é uma tarefa prévia a todo o desenvolvimento do currículo para conhecer o conjunto de fenômenos a serem levados em consideração para a apresentação no desenvolvimento curricular, essa tomada de posição de Freudenthal pela constituição de objetos mentais marca a intenção do currículo. (PUIG, 2001, p. 3) (Tradução nossa)[3]

Diante desses textos iniciais, vamos conhecendo um pouco da teoria de uma fenomenologia proposto por Freudenthal. para tornar mais claro, vamos analisar alguns aspectos da teoria de acordo com a análise realizada por Puig (1997). Este traz sobre o apresentado por Freudenthal, uma observação em relação ao uso dos termos nome e fenômeno, o qual a antítese permite uma análise, particularmente para Matemática no que se refere aos conceitos e suas estruturas, onde os conceitos são os nomes e as estruturas são os fenômenos que esses conceitos organizam.

Assim,

> A análise fenomenológica de um conceito ou de uma estrutura matemática consiste de descrever quais são os fenômenos para os quais o conceito é meio de organização e que relação tem o conceito e a estrutura desses fenômenos. (PUIG, 1997, p. 62) (Tradução nossa)[4]

Ressaltando que, de acordo com Puig (1997), a fenomenologia deve considerar a totalidade dos fenômenos dentro do âmbito abordado em sua atualidade, mas também

---

[2] No original: "La primera atañe a la naturaleza de los objetos matemáticos y de la práctica matemática. Para Freudenthal, los objetos matemáticos se construyen en la práctica matemática como medios de organización de objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de estas acciones. A mi entender, Freudenthal no se sitúa pues en ninguna de las filosofías de las matemáticas que se han dado en llamar "realistas" o "platónicas", que conciben los objetos matemáticos con una existencia anterior a la actividad matemática y ésta como el descubrimiento de la geografía del mundo en el que están esos objetos."

[3] No original: "La segunda idea que Freudenthal enuncia en este capítulo, y es fundamental desde mi punto de vista, es una toma de partido didáctica: lo que él llama la constitución de objetos mentales frente a la adquisición de conceptos. Si el análisis fenomenológico es una tarea previa a todo desarrollo curricular para conocer cuál es el conjunto de fenómenos que hay que tomar en consideración para presentarlos en el desarrollo curricular, esa oposición y la toma de partido de Freudenthal por la constitución de objetos mentales marca la intención del currículo."

[4] No original: "El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos."

prevê para quais fenômenos se poderão ampliar esses conceitos. Outro ponto que o autor destaca é que, apesar do uso do termo fenômeno na obra de Freudenthal com um significado amplo, há um objeto nesta relação que podemos considerar de forma específica: o objeto mental. A análise fenomenológica deve tomar consideração do objeto mental e de suas relações entre fenômenos e objeto mental e entre objeto mental e conceito.

Os termos utilizados por Freudenthal já têm significado filosófico tradicional. Quanto a isso, Puig coloca em confronto a tradição e o proposto pela teoria fenomenológica,

> Os termos "nome" e "fenômeno" na verdade vem do grego. 'Nome' vem de "nous" [νοῦς] e pode-se dizer que significa "o que é considerado por razão" ou "inteligível". 'Fenômeno' vem de 'phainomenon' [φαινόμενον], que significa "o que aparece". Os fenômenos são, portanto, aparências ou como nos parece as coisas. Originalmente os fenômenos estão em oposição à verdadeira realidade. Por outro lado, na tradição filosófica "realista" o mundo dos nomes é o definido como real. O contraste entre os fenômenos e os nomes é um contraste entre dois mundos, o mundo do sensível e o inteligível, o quadro da experiência possível e o que cai fora da nossa experiência. (PUIG, 1997, p 63).[5]

Diante desse confronto e para seguir interpretando as ideias de Freudenthal sem colocar em prejuízo sua análise, Puig (1997) considera mais prudente, em vez de carregar os significados já produzidos pelos filósofos, livrar-se ao máximo deles.

Ao tratar de conceitos matemáticos, esses conceitos não estão isolados do mundo real, e podem ser considerados fenômenos, permitindo a construção de novos conceitos, e uma nova organização. Assim, para Freudenthal (1999) e Puig (1997), um conceito matemático é o meio de organização de um fenômeno ou de um conjunto de fenômenos, passando a formar parte de um campo de fenômenos que são organizações de um novo conceito matemático, e este processo se repete uma e outra vez, não estando, portanto, os conceitos separados do nosso mundo. No original,

> [...] O mesmo Freudenthal diz imediatamente: um conceito matemático que é o meio da organização de um evento ou de um fenômeno, torna-

[5] No original: "Los términos 'noúmeno' y 'fenómeno' provienen de hecho del griego. 'Noúmeno' procede de 'nous' [νοῦς] y puede decirse que significa "lo que es pensado mediante la razón" o "lo inteligible". 'Fenómeno' proviene de 'phainómenon' [φαινόμενον], que significa "lo que aparece". Los fenómenos son, por tanto, las apariencias o lo que se nos aparece de las cosas. En su origen pues los fenómenos se contraponen a la realidad verdadera. Por otro lado, en la tradición filosófica "realista" el mundo de los noúmenos es el que se califica de real. La contraposición entre fenómenos y noúmenos es una contraposición entre mundos, el mundo de lo sensible y el de lo inteligible, el marco de la experiencia posible y lo que cae fuera de nuestra experiencia.

> se parte de um campo de fenômenos que são organizados por um novo conceito matemático, e este processo é repetido e repetido. Os conceitos matemáticos não caem fora do âmbito da nossa experiência, ou eles estão em um mundo diferente do mundo dos fenômenos que organizam.[6] (PUIG, 1997, p. 63) (Tradução nossa)

Os conceitos matemáticos por estarem vinculados ao nosso mundo não são, portanto, imutáveis, sendo possível gerar ou alterar conceitos a partir da experiência, das provas matemáticas, de novas definições e da resolução de problemas. Puig (1997) traz em sua obra esses aspectos com uma análise sobre os processos de criação e modificação de conceitos. Como esses são fenômenos que ocorrem sobre os conceitos gerando novos, é de suma importância considerá-los em uma análise da fenomenologia. No caráter desse trabalho, não pretendemos esmiuçar os detalhes porque fogem ao objetivo inicial.

No que se refere aos objetos mentais, que é uma ideia distinta de conceito, de acordo com Puig,

> Podemos começar como uma imagem inicial: a oposição obejto mental / conceito é um contraste entre o que está na mente das pessoas - os objetos mentais - e o que está na matemática como uma disciplina - os conceitos. (PUIG, 1997, p. 75). (Tradução nossa)[7]

Puig (1997) afirma ainda que os conceitos aparecem como diretamente relacionados com uma parte de um objeto mental e ressalta que a relação entre objeto mental e conceito é mais complexa do que definido até aqui.

Sobre o olhar da fenomenologia didática, a obra de Freudenthal traz o método e também uma análise para diversas construções/ideias matemáticas. Mais especificamente, para as frações, temos uma classificação que será a norteadora para a leitura e análise nesse trabalho.

Para o aspecto das frações, elas são uma das representações dos números racionais, mas não se encerra apenas nisso. Freudenthal (1999) traz uma amplitude de significados para fração, entre eles a fração como: relação parte-todo, quociente, razão,

---

[6] No original: […] el mismo Freudenthal señala de inmediato: un concepto matemático que es el medio de organización de un fenómeno o unos fenómenos, pasa a formar parte de un campo de fenómenos que son organizados por un nuevo concepto matemático, y este proceso se repite una y otra vez. Los conceptos matemáticos no caen fuera del campo de nuestra experiencia, ni están en un mundo distinto del mundo de los fenómenos que organizan.

[7] No original: Podemos partir pues de una imagen inicial: la contraposición objeto mental / concepto es una contraposición entre lo que está en la cabeza de las personas —los objetos mentales— y lo que está en las matemáticas como disciplina — los conceptos.

operador, e número racional. Cada significado desse será abordado no próximo capítulo, com os nomes de aspectos dos conceitos que organizam diversos fenômenos.

4. FRAÇÕES

Há diversos fenômenos discutidos e apresentados sobre conceito de fração. Neste capítulo, mostraremos alguns aspectos que serão utilizados como classificadores nessa pesquisa. A seguir, na Metodologia, está destacado quais categorias serão analisadas. A importância em enfatizar os conceitos é crucial para evitarmos a criação de obstáculos de aprendizagem. Vejamos o que diz os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática sobre frações.

4.1. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental foram criados para favorecer o ensino, através de um auxílio aos professores, coordenadores e gestores para a execução de seus trabalhos, possibilitando organizar o planejamento de aulas, o currículo, a atividade docente, as avaliações e contribuindo para reflexão e desenvolvimento profissional dos educadores. São parâmetros nacionais, ou seja, criados para preservar uma igualdade entre os conteúdos e qualidade do mesmo em âmbito nacional, respeitando a cultura e as características de cada local ou região, inclusive sugerindo a complementação e adaptação de acordo com essas características.

Dentro desse conjunto de documentos orientadores oficiais, há os parâmetros específicos por áreas ou disciplinas. No presente trabalho, foi estudado os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental, denominados no ano de sua publicação como 3º e 4º ciclo.

4.1.1. Frações nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática dos terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, o conceito de fração é abordado sobre o nome de números racionais, mas o documento não fica restrito ao conceito de número racional. Mesmo o conceito de fração sendo trabalhado desde cedo, há dificuldades mantidas pelos estudantes nos anos finais.

Conforme o PCN de Matemática,

> Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal. (BRASIL, 1998, pp. 100, 101).

Os documentos também propõe uma explicação para as dificuldades encontradas. Essa explicação consiste na exigência de rupturas com ideias previamente construídas durante o estudo dos números naturais. O PCN destaca os seguintes obstáculos:

- Equivalência: referindo-se a representação dos números racionais sobre diferentes e infinitas escritas fracionárias, diferente do que é tradicionalmente trabalhado com números naturais. Por exemplo: $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \cdots$ são diferentes escritas para um mesmo número racional, isto é, são frações equivalentes. Observação: o termo tradicionalmente trabalhado foi utilizado porque geralmente se aborda a representação de um número natural como tendo uma única representação, porém: $7, 5+2, 4+3, 8-1, \cdots$ são também diferentes representações de um mesmo número natural, mas às vezes essas formas de escrita são reconhecidas como uma tarefa, a operação de adicionar ou subtrair dois números, e não como uma nova forma de representar um número em si;
- Comparação: estudantes acostumados com relação $5 > 2$ tem que compreender algo que a princípio lhes parece contraditório, como $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$. Números que aparecem como maiores em termos naturais, gerando números menores, é um aspecto novo;
- Multiplicação: ao se multiplicar um número natural por outro natural, se este segundo for diferente de 0 ou 1, a expectativa é encontrar um número maior que ambos, porém ao multiplicarem 100 por $\frac{1}{4}$, os estudantes se surpreendem ao saberem que o resultado é 25, um número menor do que 100;
- Escrita: o "tamanho" da escrita numérica, no caso dos naturais, números com escritas maiores são maiores, por exemplo: 12563 > 35. Já se formos comparar 1,7 e 1,618083 não podemos utilizar essa tática;

- Antecessor e Sucessor: nos números naturais isso faz sentido, para os racionais não o faz, visto que entre dois racionais quaisquer sempre é possível encontrar outro.

O PCN traz também o fato de que os racionais assumem diferentes significados nos diversos contextos: relação parte-todo, divisão e razão, além do aspecto de número racional em si, concordando com as categorias que veremos na Seção 4.2.

Um aspecto muito importante trazido no documento se refere à compreensão dos significados e procedimentos nas operações com frações. Vejamos:

> Quanto ao cálculo da adição e da subtração envolvendo frações com denominadores diferentes, pode-se transformá-las em frações com o mesmo denominador (não necessariamente o menor), aplicando as propriedades das frações equivalentes. A compreensão da multiplicação com frações pode ser pensada como partes de partes do total (neste caso a multiplicação não se apóia na idéia de adição reiterada). […] No caso da divisão envolvendo frações pode-se interpretá-la como partes que cabem em partes. Entretanto, nem sempre representações desse tipo permitem a visualização do resultado e por isso deve-se lançar mão de outras estratégias. […] Por exemplo, a propriedade: um quociente não se altera quando dividendo e divisor são multiplicados por um mesmo número”(invariância do quociente) permite obter na divisão de frações, uma fração com denominador 1. […]Assim, uma forma de interpretar a divisão é lançar mão da idéia do inverso multiplicativo de um racional diferente de zero: “dividir é multiplicar pelo inverso". (BRASIL, 1998, pp. 104, 105)

Conforme trazido em exemplos do próprio PCN:

Figura 1: Recorte **(**Denominador e inverso)

$$\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{4} \times \frac{3}{2}}{\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}} = \frac{\frac{15}{8}}{1} = \frac{15}{8}$$

Fonte: PCN (BRASIL, 1998, p.105).

Figura 2: Recorte (Multiplicar pelo inverso)

$$\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$$

Fonte: PCN (BRASIL,1998, p.105).

Podemos perceber que a ausência de explicações dessa natureza pode auxiliar nas construções de obstáculos didáticos com relação ao conceito de fração, principalmente na compreensão das diferentes operações e propriedades ligadas a esse conceito.

4.2. Os conceitos de Frações

De acordo com Freudenthal (1999) e Puig (1997), um conceito é meio de organização para diferentes fenômenos. A classificação a seguir, traz como conceitos um grupo de fenômenos que partilham de certas características comuns, sendo esses conceitos novos fenômenos organizados sobre o conceito de fração. Às vezes, nos referimos como aspecto do conceito para evitar equívocos.

4.2.1. Relação parte-todo

Nesse aspecto, conforme Freudenthal (1999), a fração seria uma relação entre o todo partido em partes iguais ou imaginado como se estivesse partido e um número de partes considerada. Considerando-se a natureza e a variedade de fenômenos, o autor propõe uma classificação, ressaltando que não são representações extremas, pois há uma variedade de transições entre as mesmas. De acordo com a classificação proposta:

- o todo pode ser:

Discreto	Contínuo

Definido	Indefinido

Estruturado	Carente de Estrutura

- a atenção pode ser dirigida a:

Uma parte	Um número de partes	Todas as partes

- as partes podem estar:

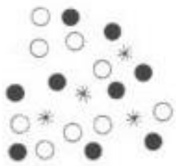
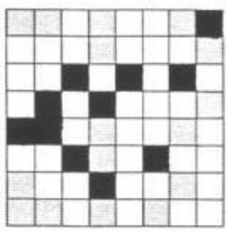
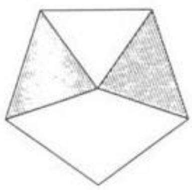
Conectadas	Desconectadas

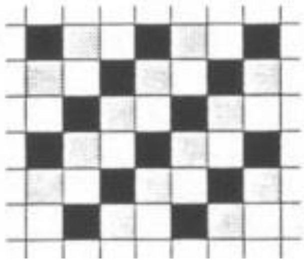
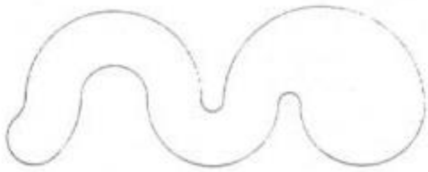
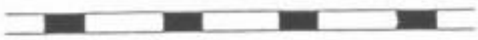
- o modo de dividir pode ser:

Estruturado	Não estruturado

Em seu livro, Freudenthal (1999) traz exemplos para ilustrar essa classificação. Em relação ao todo, temos utilizando os exemplos e imagens do próprio livro.

Quadro 1: Relação parte-todo

1		Todo definido, discreto e carente de estrutura.
2		Todo definido, discreto e estruturado numericamente
3		Todo definido, contínuo e estruturado por setores.
4		Todo definido, discreto, dividido de modo não estruturado.
5		Todo definido, discreto, dividido de modo não estruturado.

6		Todo definido.
7		Todo indefinido.
8		Todo definido.
9		Todo indefinido, contínuo, estruturado.

Fonte: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (FREUDENTHAL, 1999, pp. 141 a 143).

Note que os aspectos de estruturado e não estruturado dependem do modo como interpretamos os dados, bem como os possíveis tipos de estrutura. Em alguns casos, como nos Exemplos 6 e 8 da tabela acima, é possível uma mudança de interpretação, inclusive a classificação de discreto ou contínuo. Principalmente no caso do Exemplo 8, a representação da fração de um inteiro pode gerar múltiplas interpretações.

Ao se abordar o conceito de chance, por exemplo, o todo pode ser visto como indefinido. Se a cada dois lançamentos de uma moeda honesta a chance de cair cara é de $\frac{1}{2}$, então espera-se que aproximadamente na metade dos resultados de um conjunto de lançamentos dessa moeda, obtenha-se cara, mesmo que não seja definido o total de lançamentos. No Exemplo 9, devido à ausência das linhas laterais definindo o final do objeto, podemos supor que o padrão observado se repete pelo todo, mesmo não o definindo, e relacionar por uma fração, a região pintada em relação ao todo, nesse caso, por exemplo, a fração $\frac{1}{3}$. Observação: estamos utilizando nesse caso e em vários outros casos suposições, devemos também alertar o estudante que pode ocorrer que o padrão não se mantenha no restante do objeto. Um caso parecido, ocorre ao se considerar por exemplo: $\frac{7}{9} = 0{,}77777777 \ldots$ .O que nos garante que a sequência do lado direito continua indefinidamente com algarismos 7 e não por exemplo da forma: $0{,}7777777714855148\ldots$, ou seja, temos apenas uma ideia, uma suposição. A notação $0,\overline{7}$, torna-se, portanto, mais adequada, pois deixa explícito que trata-se de uma dízima periódica e qual o seu período.

A teoria da Fenomenologia Didática das Estruturas Matemáticas faz uma análise bastante minuciosa, mas no presente trabalho iremos considerar apenas os aspectos mais básicos, isto é, as categorias relação parte-todo, quociente entre inteiros, razão, operador multiplicativo e número racional, sendo recomendada uma leitura aprofundada da obra de Freudenthal para aqueles que queiram analisar mais detalhadamente seus aspectos.

4.2.2. Quociente entre inteiros

Há situações em que ao invés de considerarmos um número de partes iguais de um todo, queremos saber o valor de um número inteiro ao ser dividido por outro, como por exemplo, quanto é 8 dividido por 5. Nesse caso, a fração $\frac{8}{5}$ indica o quociente $8 : 5 = 1{,}6$. Desta forma, essa fração traz o aspecto de uma divisão indicada, sendo, portanto, o quociente entre dois inteiros da forma $a : b = \frac{a}{b}$, com a restrição de $b \neq 0$.

Comentário sobre a restrição: no caso em que $b = 0$, se $a \neq 0$, não existiria um número x que fosse válido tal que $b \cdot x = a$. E se $a = 0$, qualquer valor de x satisfaria a relação $b \cdot x = a$, sendo portanto uma indeterminação. Em qualquer caso, não faria sentido a divisão indicada.

4.2.3. Razão

Outro aspecto de fração, distinto dos já apresentados, é quando queremos um índice comparativo entre duas quantidades, quantos de um tipo em relação ao todo ou a outro tipo, sendo assim considerada como uma razão. Por exemplo, se para cada nove clientes atendidos, 1 cliente fará alguma reclamação. A fração $\frac{1}{9}$ indica o número de clientes insastifeitos.

Outro ponto importante sobre o aspecto da fração como razão, é que além de agir como um índice comparativo entre duas medidas ou uma terceira medida fixada, ela aparece também sobre os aspectos de probabilidade e percentual.

4.2.4. Operador multiplicativo

A fração tem o aspecto de operador multiplicativo nos casos em que ela atua como agente transformador. Por exemplo, $\frac{1}{3}x$, indica que o valor x ou objeto x será reduzido para um terço do seu valor ou aspecto inicial, sofrendo, portanto, nesse caso, a transformação indicada.

4.2.5. Número racional

A fração como número racional finaliza de certo modo o conceito de fração, sendo seu ápice. Conforme Freudenthal (1999) discorre, na didática tradicional só se reconhece a fração sobre os aspectos de operador fraturante, englobando a ideia de relação parte e todo e quociente entre inteiros, da qual passa diretamente ao final da sequência, a fração como número racional[8].

A fração como número racional é normalmente definida como o conjunto dos números que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, com a e b pertencentes aos números inteiros e b diferente de zero. Essa estrutura de conjuntos é análoga à estudada em disciplinas como Estruturas Algébricas.

Porém, outro modo de trabalhar número racional, é associando com a reta numérica. Nesse processo, com uma atividade que tem um aspecto intradisciplinar entre a aritmética e a geometria, utilizando semelhança de triângulos, é possível localizar os racionais na reta, conforme traz os autores Reis e Silva, em sua obra de Geometria Analítica:

[8] No original: "(…) the traditional didactics knows the fraction only in the fracturing operador, from which it passes straightforwardly to the end of the sequence: the fraction as rational number."

Figura 3: Recorte (Racionais na reta)

Os números racionais também podem ser representados por pontos de uma reta. A seguir representaremos, na reta **R** da Figura 1.2, o número racional p/q.

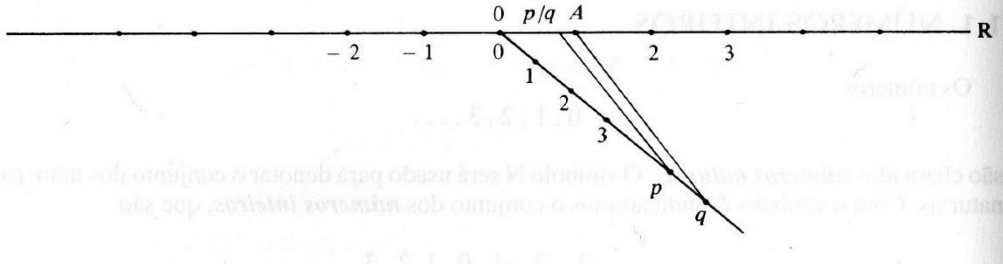


Fig. 1.2

O processo consiste em traçar uma semi-reta qualquer, com origem em O, formando com OA um ângulo agudo, e nela marcar p e q, utilizando-se uma unidade de comprimento qualquer. Traçando, pelo ponto correspondente a p, uma reta paralela à reta determinada pelo ponto A e o ponto correspondente a q, onde esta reta intercepta a reta **R**, temos o ponto correspondente ao número p/q. Se o número p/q for negativo, $-p/q$ será positivo e, usando o processo anterior, podemos marcar sobre a reta **R** o número $-p/q$; tomando seu simétrico em relação à origem O, temos o ponto sobre R correspondente a p/q.

A Figura 1.3 mostra os números

$$\frac{3}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{3}{5}$$

representados por pontos na reta.

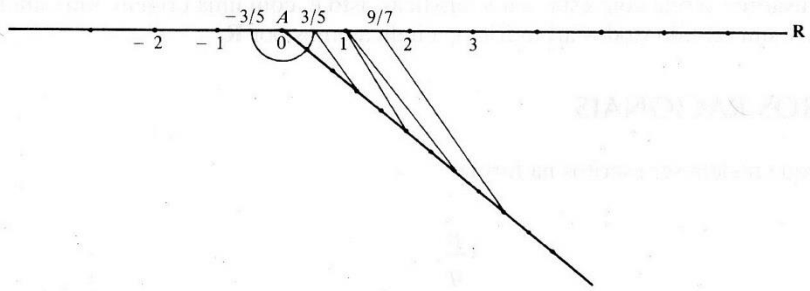


Fig. 1.3

Fonte: Geometria Analítica (REIS e SILVA, 1996, p.2).

Com base na atividade proposta por Reis e Silva (1996), vemos a possibilidade de trabalhar com mais de um conceito. O conceito de fração como número racional representado por um ponto na reta real, o conceito de fração como razão entre os segmentos no processo da atividade com o uso da semelhança de triângulos para localizá-la na reta. E também é possível trabalhar o conceito de quociente entre inteiros ao se usar dos números decimais como uma possível verificação dos resultados obtidos pelo processo.

5. METODOLOGIA

Adotando uma Pesquisa Qualitativa voltada para Educação Matemática, segundo (BORBA, 2004) e diante da Teoria da Fenomenologia Didática das Estruturas Matemáticas, elegemos como categorias de análise os seguintes aspectos do conceito de fração:

Quadro 2: Categorias de análise

1. Relação parte-todo	Com todo definido ou indefinido, discreto ou contínuo, organizado ou não estruturado. Os casos de frações impróprias também serão analisados nessa categoria, ao invés de criar outra como quantidade. Apesar das distinções de aspectos, iremos analisar conjuntamente devido as semelhanças na abordagem.
2. Quociente entre inteiros	Efetuar a Divisão. Considerando também os casos em que a fração atua como divisor em uma expressão numérica.
3. Razão	Inclusive as razões percentuais e o uso da razão no estudo de proporções, cálculo de chance e probabilidades.
4. Operador multiplicativo	Ou seja, na ação de reduzir pela metade, reduzir para um terço, etc.
5. Número Racional	Em suas representações como fração e também como número decimal associado a uma fração. Quando as frações forem utilizadas em operações, iremos considerar o uso como número racional, número sendo o que pode ser operado, ou seja, faz sentido adicionar, subtrair, multiplicar, dividir, elevar a um expoente, extrair raízes. O aspecto de medida também será classificado aqui, onde a medida é considerada um número seguido de sua unidade de medida.

A partir dessas categorias, serão analisados onde e quais os aspectos do conceito de fração que estão presentes nos livros analisados, inicialmente consultando e preenchendo as tabelas do modelo em Apêndice 1, marcando a página e uma referência ordinal de acordo com alguns tipos de formatos, onde essa referência ordinal se remete a posição na página, considerando o sentido de leitura ocidental. Exemplos: pág. 1 - 2ª figura; pág. 15, 1ª tabela. Então, utilizando de um software de edição de planilhas, realizar as contagens, os percentuais e elaboração de gráficos que serão utilizados na análise. Quanto à localização no livro, foi observado o texto de abordagem introdutória do conteúdo, os exemplos, os exercícios propostos, as atividades sugeridas, os gráficos e desenhos e as orientações do manual do professor.

Durante esse processo, foram destacados alguns exemplos significativos para ilustrarem e tornarem mais claro, os aspectos adotados para o conceito de fração.

A escolha da coleção avaliada foi a coleção mais adotada nacionalmente de acordo com dados do FNDE relativos aos PNLD 2014, conforme Anexo 1.

6. ANÁLISE E DISCUSSÃO

Na escolha da coleção de acordo com o Anexo 1, o livro mais adotado nacionalmente neste ano foi à coleção Praticando Matemática (Edição Renovada). E de acordo com pesquisa da licenciada em Matemática, pela Universidade Federal de Pernambuco, Lucivânia Santos (2013), é a segunda mais adotada no município de Caruaru, na região agreste do estado de Pernambuco, conforme gráfico produzido em sua pesquisa, Anexo 2.

6.1. Coleção Praticando Matemática: Edição Renovada

De acordo com o manual do professor, podemos entender que a coleção Praticando Matemática: Edição Renovada se organiza, em quatro volumes, 6, 7, 8 e 9, divididos em unidades e seções. As seções desta coleção são as seguintes:

- Exercícios: propostos ao final de cada assunto, colocados em grau de crescente dificuldade e muitos deles retiradas de avaliações externas;
- Revisando: exercícios para revisão e aprofundamento do conteúdo, permitindo também interligar diferentes assuntos e sendo recomendados para aplicação em recuperação paralela;
- Desafios: trabalhando resolução de problemas, exigindo criatividade e possibilitando o trabalho em equipe;
- Autoavaliação: questões selecionadas de vestibulares, concursos e avaliações da rede oficial, sempre de acordo com o nível de estudo destinado;
- Seção livre: Visa à motivação do aprendizado, são apresentados exercícios ou textos envolvendo várias áreas, com curiosidades, informações científicas, situações do cotidiano etc;
- Vale a pena ler: trabalha a leitura e interpretação de textos envolvendo Matemática, História da Matemática e outras áreas do conhecimento;
- Manual do professor: o manual do professor traz os principais temas abordados na obra, com textos de apoio, ideias e sugestões, proporcionando reflexão sobre o processo de ensino-aprendizagem, motivando a integração com ouras áreas do conhecimento e fornecendo subsídios para as aulas e atividades educativas.

Quanto ao campo dos números e operações, onde é normalmente trabalhado o conceito de fração, o livro busca uma adequação a proposta de currículo espiral, conforme poderemos averiguar durante a análise da distribuição dos conceitos de frações.

Segundo resenha do PNLD 2014:

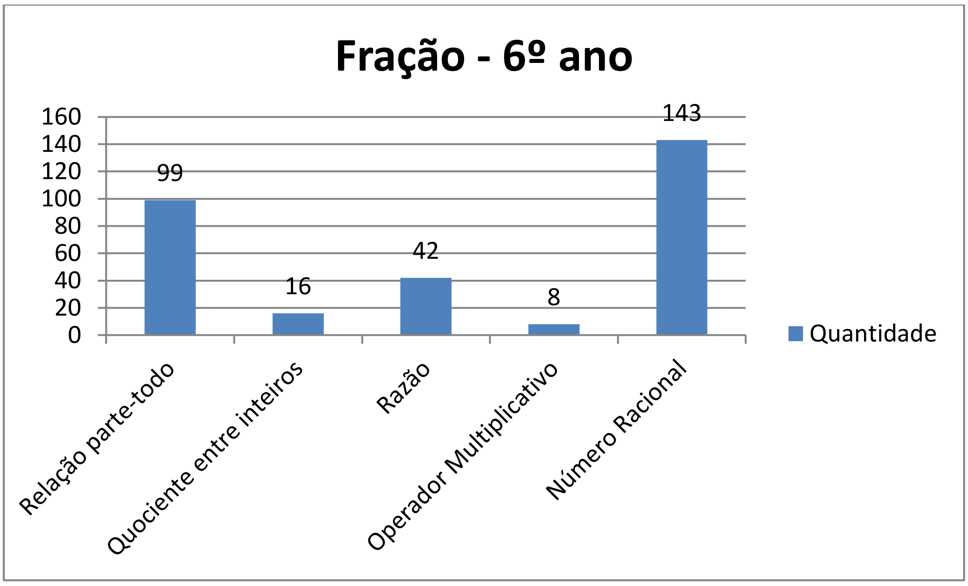
> O desenvolvimento dos conteúdos do campo de números e operações é bastante apropriado. Ao longo dos volumes, todos os conceitos e procedimentos são retomados e ampliados, o que favorece a compreensão e a atribuição de significados pelos alunos. (BRASIL, 2014, p. 59)

A análise não ficará restrita aos números e operações, mas sim ao uso do conceito de fração na coleção em diversos capítulos do livro.

6.1.1. Livro do 6º ano

Ao todo foram observados 308 elementos relacionados ao conceito de fração, nesse ano, em todas as seções do livro didático. A distribuição dos aspectos do conceito de fração trabalhados no livro do 6º ano da coleção Praticando a Matemática ocorre de acordo com o seguinte gráfico.

Gráfico 1: Conceitos de fração no 6º ano



Em termos percentuais, temos o tratamento do conceito de fração, sobre os aspectos analisados distribuídos da seguinte forma, nesse livro:

Tabela 1: Conceitos de fração no 6º ano

Relação parte-todo	Quociente entre inteiros	Razão	Operador Multiplicativo	Número Racional
32%	5%	14%	3%	46%

Os autores da coleção adotaram a concepção de trabalhar inicialmente fração como uma relação entre um inteiro dividido ou imaginado como em partes iguais, entre algumas de suas partes. O livro do 6º ano traz esse aspecto, porém, mesmo diante dessa concepção, há uma preocupação para que os estudantes compreendam fração também como um número, e assim são trazido muitos casos em que fração é tratada como número desde cedo.

Figura 4: Recorte **(**Número Racional, Exercício)

Fonte: Coleção Praticando Matemática 6º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.27).

A Figura 4, acima, traz a primeira vez que fração aparece na coleção, no caso ela aparece na Unidade 2 do 6º ano, que aborda os números naturais, preparando o estudante para o fato de que há diversos tipos de números dentre eles, os naturais, e também para o segundo fato, que números da forma $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ não são números naturais. Ou seja, já se começa a preparar o estudante para o aspecto de fração como número racional.

A Unidade 11 do livro, ao qual é intitulada Frações, começa utilizando a relação parte-todo para abordar o conceito, conforme temos na Figura 5. Na página 172, o livro aborda como ler frações, um aspecto essencial para facilitar o reconhecimento do seu uso e o trabalho em sala de aula, e assim, termos próprios da leitura são introduzidos: meios, terços, quartos, quintos, nonos, décimos, avos entre outros.

Figura 5: Recorte (Relação parte-todo, Texto)


UNIDADE 11

Frações

1. Inteiro e parte do inteiro

Daniel vai se atrasar para o jantar. A mãe dele preparou uma pizza. Dividiu-a em 4 partes iguais e guardou uma delas para Daniel.

Para representar a parte da pizza reservada para Daniel, usamos uma fração: $\frac{1}{4}$

Nas frações temos:

$1 \longrightarrow$ numerador
$4 \longrightarrow$ denominador

- O número que aparece embaixo (chamado **denominador** da fração) indica em quantas partes iguais o inteiro foi dividido.
- O número que aparece em cima (**numerador** da fração) indica quantas dessas partes foram tomadas.

Observe que $\frac{4}{4}$ da pizza correspondem à pizza inteira.

A fração $\frac{4}{4}$ indica uma quantidade inteira, ou seja, $\frac{4}{4} = 1$

Veja mais um exemplo:

O triângulo foi dividido em 9 partes iguais e 6 delas foram pintadas.

A parte pintada corresponde a $\frac{6}{9}$ do triângulo.

$\frac{9}{9} = 1$

FRAÇÕES 171

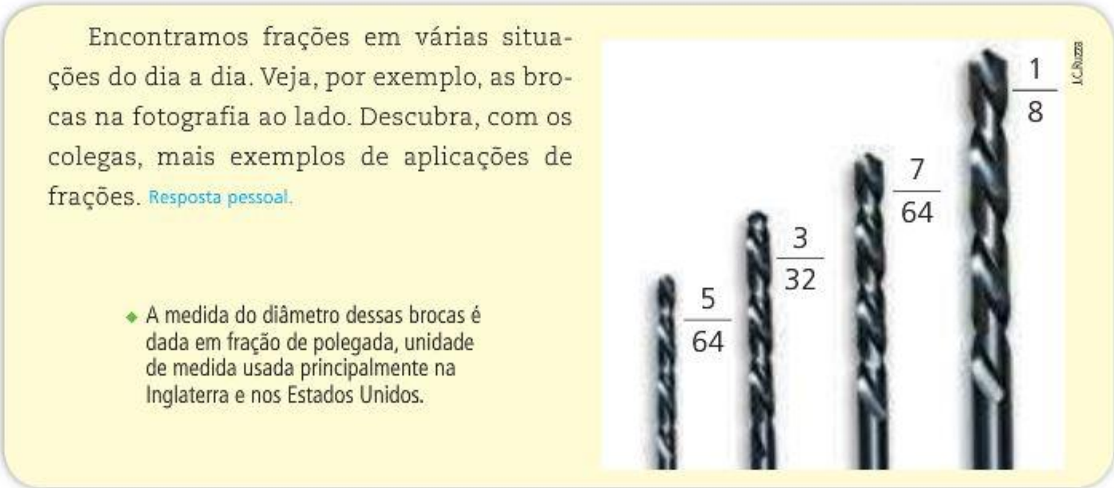
Fonte: Coleção Praticando Matemática 6º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.171).

Logo após a nomenclatura das frações, o livro traz em destaque a utilização de fração para medir. Neste trabalho, estamos considerando o conceito de medida e seu uso com frações como o uso de um número racional seguindo de uma unidade de medida.

Há vantagens e desvantagens nessa abordagem, porém não iremos discutir as mesmas, compreendendo a necessidade de algumas limitações de análise nesse momento.

O primeiro exemplo trazido pelo livro de fração como número (Figura 4) está também no seu uso para medir, mesmo não tendo sido explicitado isso. No segundo exemplo o texto já destaca esse uso (Figura 6).

Figura 6: Recorte (Número racional, Texto)



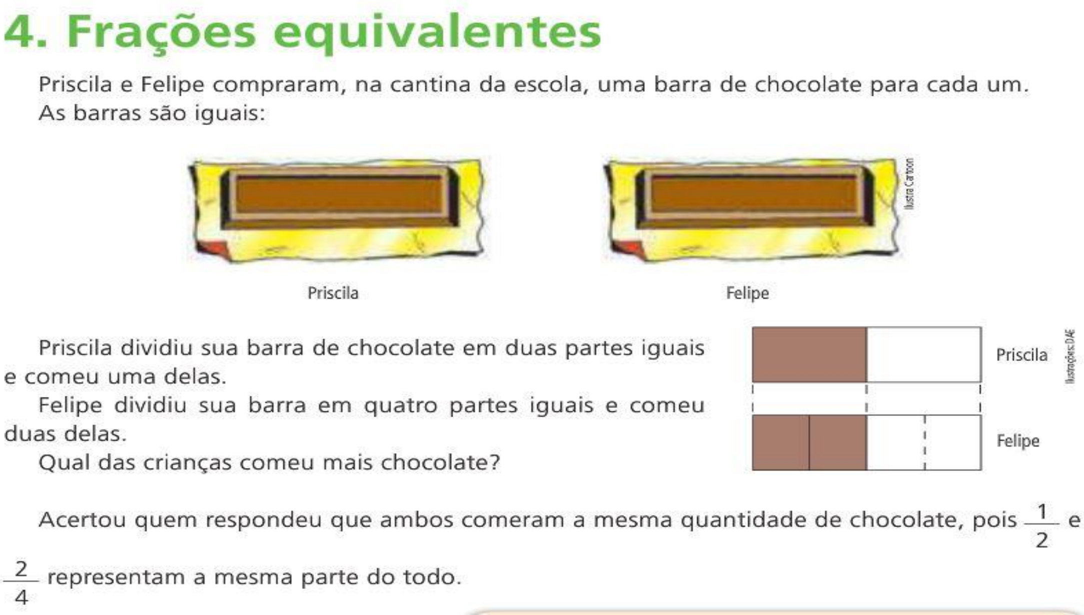
Encontramos frações em várias situações do dia a dia. Veja, por exemplo, as brocas na fotografia ao lado. Descubra, com os colegas, mais exemplos de aplicações de frações. Resposta pessoal.

- A medida do diâmetro dessas brocas é dada em fração de polegada, unidade de medida usada principalmente na Inglaterra e nos Estados Unidos.

Fonte: Coleção Praticando Matemática 6º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.172).

No prosseguimento do conteúdo, o livro trabalha ainda na unidade de frações: frações de uma quantidade, números mistos e frações impróprias, frações equivalentes, simplificação de frações, comparação de frações, operações com frações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada) e inversa de uma fração, sempre associando como principais aspectos a relação parte-todo, mesmo que já preparando o uso de frações como número racional, portanto pode ser operado. Além disso, possui inverso multiplicativo e possui uma relação de ordem, isto é, podemos comparar duas frações não equivalentes entre si e afirmar qual a menor delas. Assim, temos o começo do estudo das propriedades e características de frações. Um exemplo de como o livro aborda a relação parte-todo com o ensino de uma determinada propriedade é dado na figura a seguir, a qual mostra a relação de frações equivalentes.

Figura 7: Recorte (Relação parte-todo, Texto)



4. Frações equivalentes

Priscila e Felipe compraram, na cantina da escola, uma barra de chocolate para cada um. As barras são iguais:

Priscila Felipe

Priscila dividiu sua barra de chocolate em duas partes iguais e comeu uma delas.

Felipe dividiu sua barra em quatro partes iguais e comeu duas delas.

Qual das crianças comeu mais chocolate?

Priscila

Felipe

Acertou quem respondeu que ambos comeram a mesma quantidade de chocolate, pois $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ representam a mesma parte do todo.

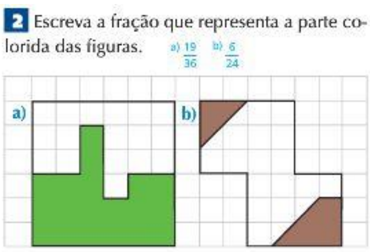
Fonte: Coleção Praticando Matemática 6º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.179).

Depois desse capítulo, mais dois capítulos do livro do 6º ano abordam as frações: o capítulo referente aos números decimais e o capítulo sobre porcentagens; tendo os aspectos de número racional e razão como os mais trabalhados neles, respectivamente.

Uma das possíveis localizações de frações em um livro está nos exercícios, que podem reforçar, desafiar e fazer pensar sobre novos aspectos e características do conceito e de seu uso. No livro, a quantidade de situações em que frações em um de seus diversos aspectos aparecem nos exercícios foi 183 vezes. Dos 308 usos de frações encontrados no livro, 183 estão nos exercícios. Alguns desses exercícios são bastante interessantes, sendo alguns deles trazidos nos exemplos seguintes.

Exemplo 6.1:

Figura 8: Recorte (Relação parte-todo, Exercício)



2 Escreva a fração que representa a parte colorida das figuras. a) $\frac{19}{36}$ b) $\frac{6}{24}$

a) b)

Fonte: Coleção Praticando Matemática 6º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.173).

Esse exercício é particularmente interessante considerando a fenomenologia, pois há uma comparação entre duas formas de dividir a região, sendo que a forma do item b traz um fenômeno novo: frações não precisam está relacionadas a partes adjacentes e a divisão não precisa está restrita a malha de divisão indicada.

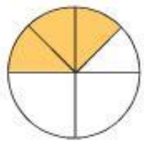
Exemplo 6.2:

Figura 9: Recorte (Relação parte-todo, Exercício)

57 A parte colorida corresponde a que fração:

a) da metade? $\frac{3}{4}$

b) do total? $\frac{3}{8}$



Fonte: Coleção Praticando Matemática 6º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.189).

Nesse exercício, há um novo item a considerar, o que é um inteiro a imagem fornecida ou uma restrição imposta na análise. O estudante pode ir percebendo a partir do estudo e dos exercícios, a fração como um conceito organizador ao conhecer diversos fenômenos e aprender como olhar para eles e associar com a concepção que o mesmo construiu do conceito de fração.

Exemplo 6.3:

Figura 10: Recorte (Razão, Número racional, Exercício)

17 Complete a tabela em seu caderno.

	Porcentagem	Número decimal	Fração	
0,25	25%			$\frac{1}{4}$
35%		0,35		$\frac{7}{20}$
75%			$\frac{3}{4}$	0, 75
8%		0,08		$\frac{2}{25}$
0,03	3%			$\frac{3}{100}$
1%			$\frac{1}{100}$	0,01
70%		0,7		$\frac{7}{10}$
0,16	16%			$\frac{4}{25}$

Fonte: Coleção Praticando Matemática 6º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.233).

Aqui o livro, através de uma tabela, possibilita ao estudante relacionar frações como forma de representar os significados de porcentagens e número decimais. Desse modo, os fenômenos de razão percentual e número racional estão sendo fortalecidos com uso da representação fracionária e a concepção fornecida pelo aspecto trabalhado, inicialmente a relação parte-todo.

Os aspectos encontrados condizem com a metodologia proposta no manual do professor do próprio livro (ADRINI, 2012), o qual destaca que a relação parte-todo e a leitura de frações são o foco do livro para o 6º ano; no livro para o 7º ano será trabalhado a fração como quociente entre inteiros e no 8º e 9º ano, as operações e a fração como número racional serão abordadas formalmente, apesar de que já são inicialmente trabalhadas desde o 6º ano.

O manual do professor contém orientações metodológicas, avaliativas e pedagógicas gerais e específicas, dentre as específicas trazidas por textos complementares, um dos textos condiz com o mostrado nesse trabalho sobre o ensino das operações com frações de acordo com o PCN, é trazido no recorte do manual do professor a seguir.

Figura 11: Recorte (Número racional, Manual)

V. Texto complementar para o professor

Divisão de fração por fração

Normalmente, muitos alunos de uma turma do 1º grau têm dificuldade em entender os passos dados na divisão por fração. Uma forma diferente de encaminhar essa divisão pode melhorar o entendimento.

Por exemplo: $6 : \frac{2}{3}$ pode ser representado na forma $6 \,\big|\, \underline{\frac{2}{3}}$ e, se multiplicarmos o divisor, $\frac{2}{3}$, e o dividendo, 6, pelo número $\frac{3}{2}$ transformamos o divisor em 1. Representamos:

$$6 \times \frac{3}{2} \,\Big|\, \underline{\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}} \quad \text{ou} \quad 6 \times \frac{3}{2} \,\big|\, \underline{1} \quad \text{ou} \quad 9 \,\big|\, \underline{1}$$

que tem 9 como resultado. É claro que 9 é também o resultado da divisão original $6 : \frac{2}{3}$, uma vez que a multiplicação do divisor e do dividendo por um mesmo número não altera o resultado da divisão.

Um outro exemplo:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{7} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3} \,\Big|\, \underline{\frac{4}{7}} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3} \times \frac{7}{4} \,\Big|\, \underline{\frac{4}{7} \times \frac{7}{4}} \quad \text{ou} \quad \frac{7}{6} \,\big|\, \underline{1}$$

que é igual a $\frac{7}{6}$.

MADEIRO, Paulo C. Divisão de fração por fração. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: IME-USP n. 30, 1996. p. 22.

Fonte: Coleção Praticando Matemática 6º ano M. Professor (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.90).

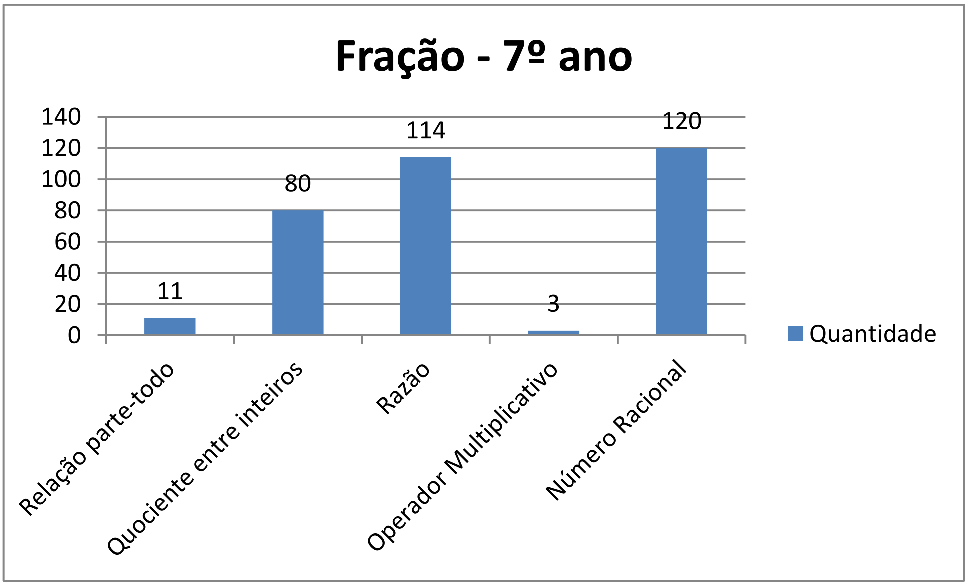
6.1.2. Livro do 7º ano

Os aspectos do conceito de fração presentes no livro do 7º ano estão de acordo com a tabela e gráfico a seguir.

Tabela 2: Conceitos de fração no 7º ano

Relação parte-todo	Quociente entre inteiros	Razão	Operador Multiplicativo	Número Racional
3%	24%	35%	1%	37%

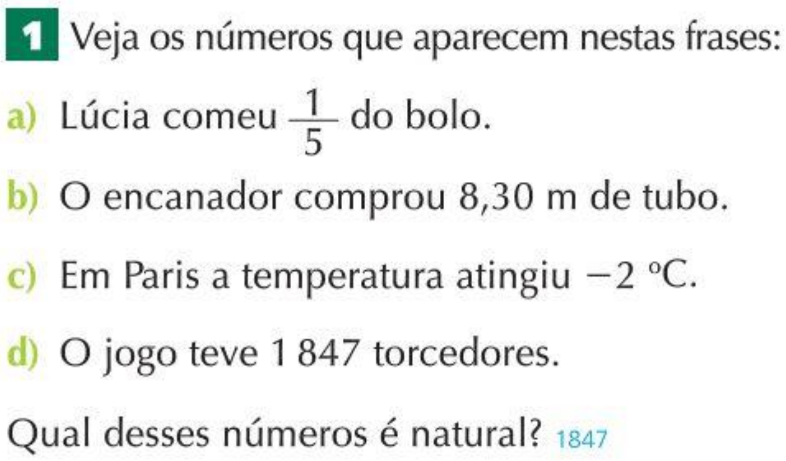
Gráfico 2: Conceitos de fração no 7º ano



Neste livro, começa a ser abordada a fração como quociente entre inteiros, e na unidade de proporcionalidade seguida pela unidade sobre razões e porcentagens. O fenômeno estudado e organizado sobre o conceito de fração é o aspecto da razão.

Do mesmo modo que o primeiro volume da coleção, neste o uso de fração aparece antes da unidade destinada ao mesmo e bem cedo no livro. Já o encontramos na página 9, e novamente em um exercício onde o reconhecimento da fração com o aspecto de número racional como um número não natural.

Figura 12: Recorte (Número racional, Exercício)



1 Veja os números que aparecem nestas frases:

a) Lúcia comeu $\frac{1}{5}$ do bolo.

b) O encanador comprou 8,30 m de tubo.

c) Em Paris a temperatura atingiu −2 °C.

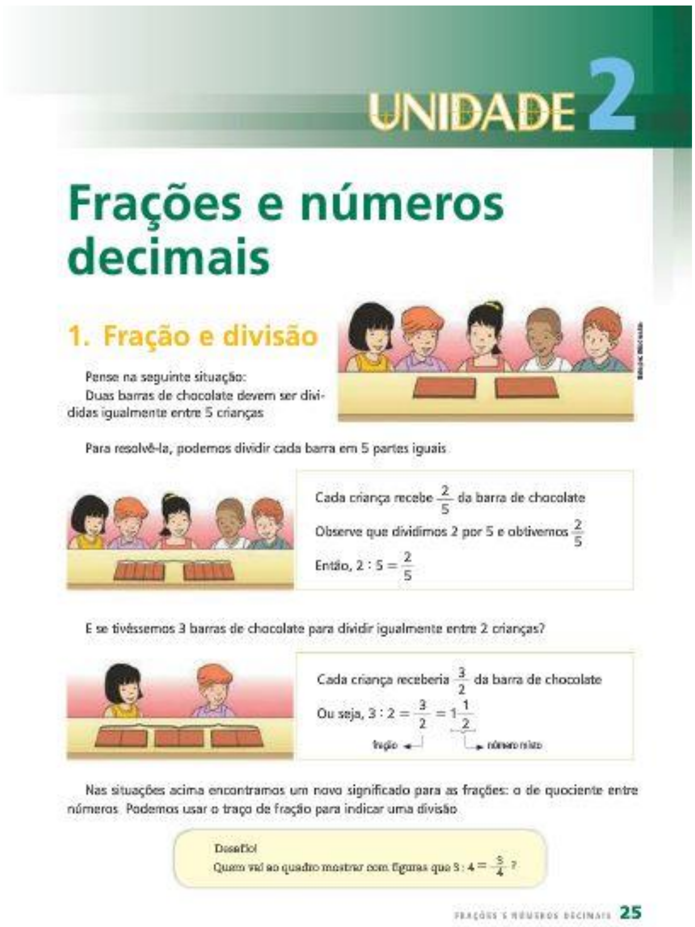
d) O jogo teve 1 847 torcedores.

Qual desses números é natural? 1847

Fonte: Coleção Praticando Matemática 7º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.9).

Também temos claramente a intencionalidade dos autores na unidade de título: Frações e números decimais, conforme a página de abertura da mesma.

Figura 13: Recorte (Quociente entre inteiros, Texto)



UNIDADE 2

Frações e números decimais

1. Fração e divisão

Pense na seguinte situação:

Duas barras de chocolate devem ser divididas igualmente entre 5 crianças

Para resolvê-la, podemos dividir cada barra em 5 partes iguais

Cada criança recebe $\frac{2}{5}$ da barra de chocolate

Observe que dividimos 2 por 5 e obtivemos $\frac{2}{5}$

Então, $2 : 5 = \frac{2}{5}$

E se tivéssemos 3 barras de chocolate para dividir igualmente entre 2 crianças?

Cada criança receberia $\frac{3}{2}$ da barra de chocolate

Ou seja, $3 : 2 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

fração — número misto

Nas situações acima encontramos um novo significado para as frações: o de quociente entre números. Podemos usar o traço de fração para indicar uma divisão

Desafio!

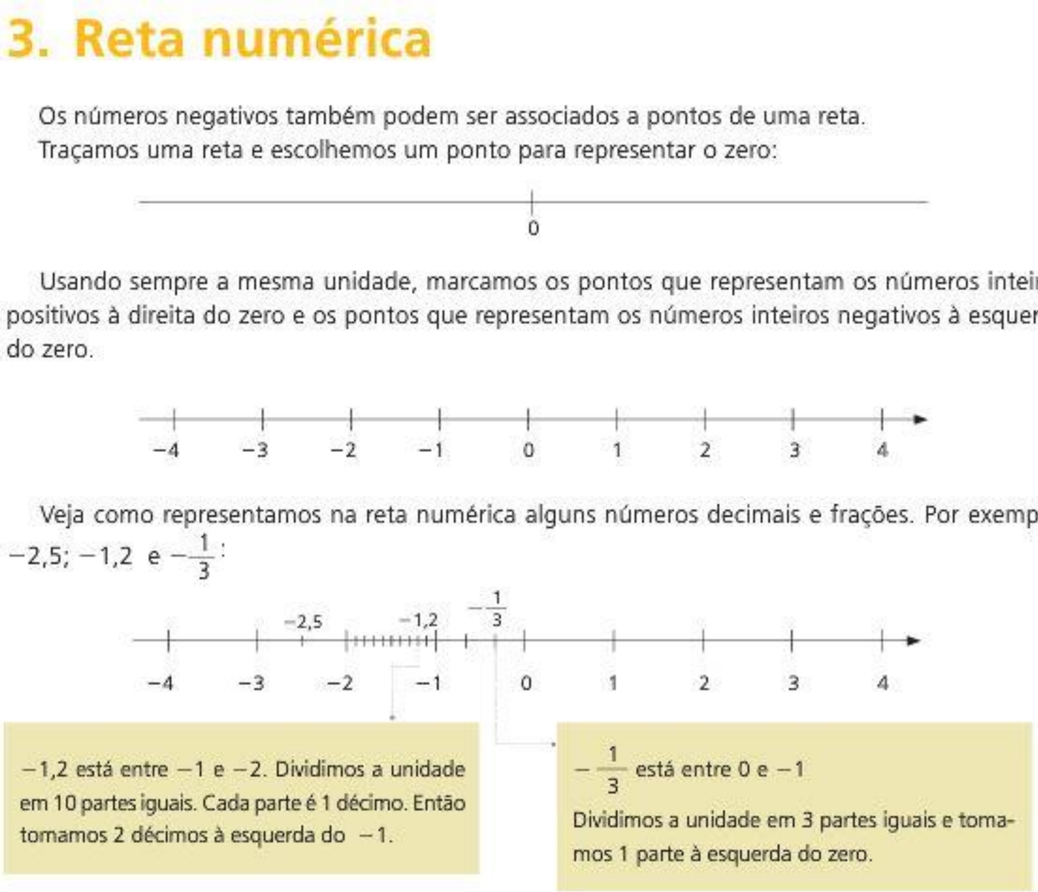
Quem vai ao quadro mostrar com figuras que $5 : 4 = \frac{5}{4}$?

FRAÇÕES E NÚMEROS DECIMAIS 25

Fonte: Coleção Praticando Matemática 7º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.25).

O uso de frações aparece principalmente na unidade destinada ao seu estudo, e também nas unidades de nomes: números naturais, números negativos, proporcionalidade, razões e porcentagens, construindo e interpretando gráficos. Durante esse uso, o aspecto da fração como número racional é sempre indicado, como por exemplo, ao trabalhar com a representação dos números na reta numérica (Figura 14) e no seu uso em expressões numéricas.

Figura 14: Recorte (Número racional, Texto)



3. Reta numérica

Os números negativos também podem ser associados a pontos de uma reta.
Traçamos uma reta e escolhemos um ponto para representar o zero:

Usando sempre a mesma unidade, marcamos os pontos que representam os números inteiros positivos à direita do zero e os pontos que representam os números inteiros negativos à esquerda do zero.

Veja como representamos na reta numérica alguns números decimais e frações. Por exemplo, $-2,5$; $-1,2$ e $-\frac{1}{3}$:

$-1,2$ está entre -1 e -2. Dividimos a unidade em 10 partes iguais. Cada parte é 1 décimo. Então tomamos 2 décimos à esquerda do -1.

$-\frac{1}{3}$ está entre 0 e -1
Dividimos a unidade em 3 partes iguais e tomamos 1 parte à esquerda do zero.

Fonte: Coleção Praticando Matemática 7º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.60).

Os exercícios correspondem novamente a maior parcela do uso de frações no livro, sendo 218 dos 328 usos encontrados. Ilustraremos com alguns exemplos.

Exemplo 6.4.

Figura 15: Recorte (Quociente entre inteiros, Exercício)

1 Em quais das situações a seguir há possibilidade de uma distribuição em partes iguais?

a) Dividir 48 camisas entre 5 pessoas.

x b) Dividir 3 litros de leite para 4 crianças.

c) Dividir 19 tesouras entre 3 pessoas.

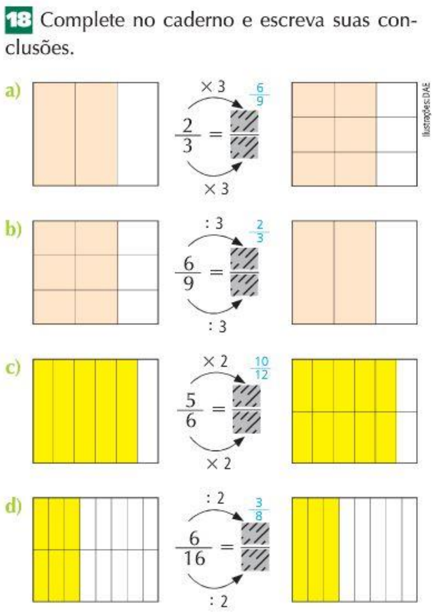
x d) Dividir 21 metros de arame entre 6 pessoas.

Fonte: Coleção Praticando Matemática 7º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.28).

Temos na Figura 15, um exemplo de exercício que trabalha a fração como relação parte-todo. Notamos que esta questão objetiva que o estudante perceba que é necessária a possibilidade de divisão em partes iguais para poder se falar de fração. Esse aspecto também é reforçado no Manual do Professor que acompanha o livro como veremos depois.

Exemplo 6.5.

Figura 16: Recorte (Relação parte-todo, Exercício)



Fonte: Coleção Praticando Matemática 7º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.33).

Neste exemplo, observamos o uso da relação parte-todo como ferramenta para o aprendizado de frações equivalentes.

Exemplo 6.6.

Figura 17: Recorte (Número racional, Exercício)

29 Descubra o nome de um objeto colocando os números indicados em ordem crescente.

A	A	C
0,5	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{5}$
E	**N**	**T**
2,99	$1\frac{1}{3}$	3

Caneta.

Fonte: Coleção Praticando Matemática 7º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.35).

O Exmplo 3 traz a fração com o aspecto de número racional e sua relação de ordem. O estudante pode comparar as frações, relacionar números decimais e números mistos com frações e então resolver o exercício proposto.

Exemplo 6.7.

Figura 18: Recorte (Razão, Exercício)

24 Nesta caixa há bolas numeradas de 1 a 10.

Ângela vai retirar, sem olhar, uma bola; anotar o número e devolver a bola na caixa. Calcule a probabilidade de sair uma com:

a) o número 7; $\frac{1}{10}$

b) um número par; $\frac{1}{2}$

c) um número menor que 4; $\frac{3}{10}$

d) um número maior que 10; 0

e) um número múltiplo de 3. $\frac{3}{10}$

Fonte: Coleção Praticando Matemática 7º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.99).

Neste exemplo, o aspecto da fração como razão está sendo utilizada no conceito de chance, qual a probabilidade de se obter determinados resultados. Aumenta, assim, para o estudante, a variedade de fenômenos que podem ser organizados pelo nome fração.

Exemplo 6.8.

Figura 19: Recorte (Operador multiplicativo, Exercício)

99 Uma pesquisa com seiscentas pessoas concluiu que $\frac{3}{4}$ delas são esportistas e $\frac{2}{5}$ dos esportistas praticam futebol. Qual é o número de pessoas que praticam futebol? 180 pessoas; $600 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = 180$

Fonte: Coleção Praticando Matemática 7º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.51).

Neste exemplo, a fração pode ser interpretada como um operador multiplicativo sobre um valor, resultando em um novo valor que pode sofrer transformação por outro operador multiplicativo, ou transformar os operadores em um único antes, como sugere a solução adotada.

Assim, diante dos dados e dos exemplos, notamos que o livro do 7º ano, trouxe não de forma igualitária, variados aspectos de fração.

O Manual do Professor vem destacando alguns aspectos, entre eles a conversão entre números decimais e frações e o cuidado para a importância de partes iguais na relação parte-todo, conforme recorte abaixo.

Figura 20: Recorte (Relação parte-todo, Manual)

Uma outra forma de entender as frações é pensar em todo e partes. Em nosso exemplo acima, costuma-se dizer que o número correspondente à parte que foi comida é $\frac{6}{8}$ porque ao todo havia 8 fatias *iguais*, e destas 6 foram comidas, e a fração $\frac{6}{8}$ expressa este fato.

Do ponto de vista matemático, é muito importante enfatizar que as partes têm que ser *iguais*. Na figura abaixo *não* é verdade que a parte colorida corresponde a $\frac{2}{5}$!

Fonte: Coleção Praticando Matemática 7º ano M. Professor (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.59).

6.1.3. Livro do 8º ano

Quanto à distribuição dos conceitos de fração encontradas no livro do 8º ano, trazemos sua representação em gráfico e tabela.

Gráfico 3: Conceitos de fração no 8º ano

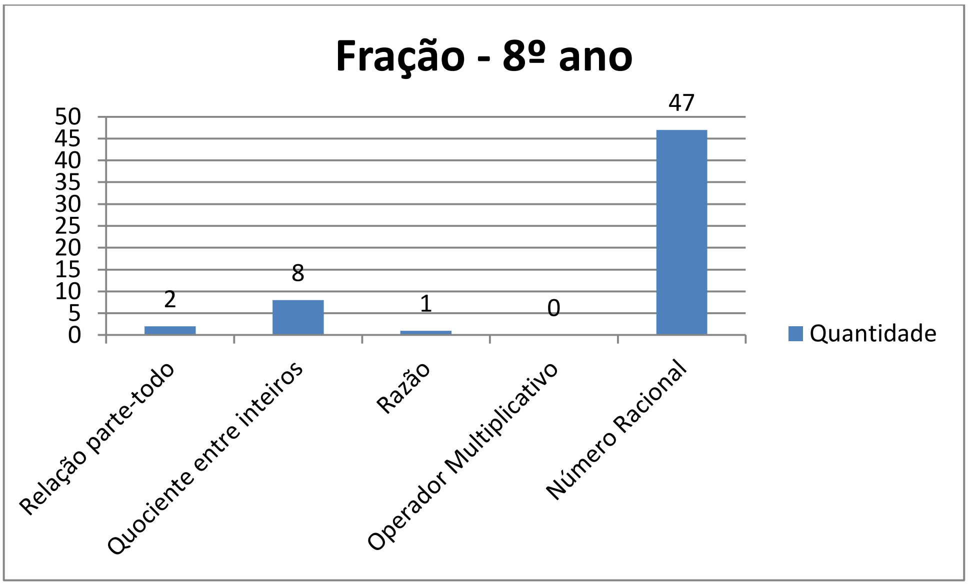


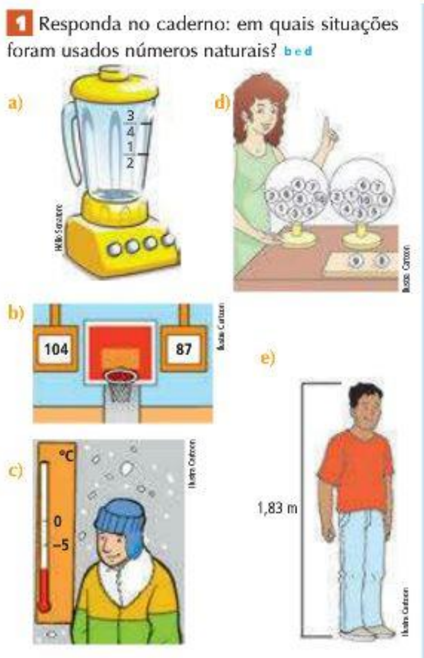
Tabela 3: Conceitos de fração no 8º ano

Relação parte-todo	Quociente entre inteiros	Razão	Operador Multiplicativo	Número Racional
3%	14%	2%	0%	81%

Um comentário sobre os baixos valores no gráfico, com apenas 58 usos de frações no livro, a causa é que todos os usos se referem unicamente à primeira unidade do livro de título Conjuntos Numéricos, que foi a única contabilizada. A razão para isso, é que nas demais unidades, a fração deixa de ser trabalhado explicitamente e apenas é utilizado o conceito como número racional, o que iria alavancar ainda mais o percentual dessa concepção, dificultando bastante o trabalho de coleta dos dados na pesquisa, podendo, inclusive, trazer inferências erradas, visto que o uso como número racional está mais inserido como parte dos números reais, ou seja, não é o objetivo das unidades e nem dos exercícios o tratamento da fração em si. Ressalva feita, a unidade de título: Frações Algébricas, onde o traço utilizado na notação de fração passa a ser utilizado como indicador da operação divisão, porém não restrita aos inteiros na maioria dos casos, e assim saindo da concepção de quociente entre inteiros. O aspecto algébrico não foi, portanto, considerado neste trabalho e essa unidade de Frações Algébricas não foi analisada.

Uma característica da coleção aparece mais uma vez na unidade de Conjuntos Numéricos, ao tratar dos números naturais, temos o primeiro uso de fração neste volume, com um exemplo familiar.

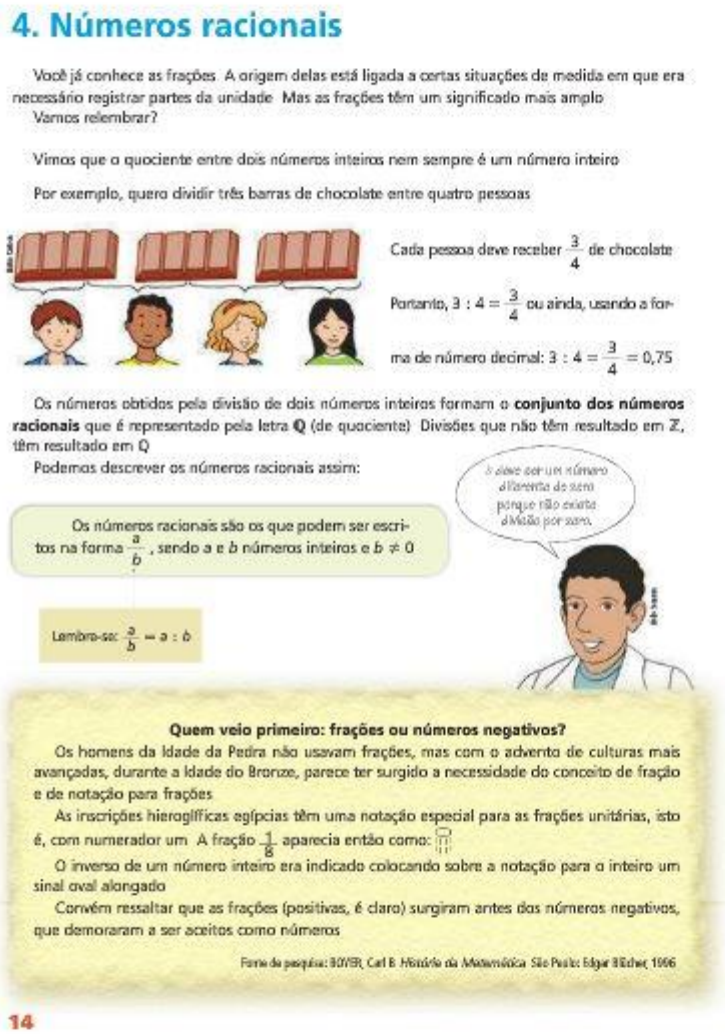
Figura 21: Recorte (Número racional, Exercício)



Fonte: Coleção Praticando Matemática 8º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.9).

A introdução ao termo formal de números racionais, como elemento do conjunto numérico dos racionais, ocorre mesclando a relação parte-todo como quantidade e quociente entre inteiros.

Figura 22: Recorte (Número racional, quociente entre inteiros, relação parte-todo, Texto)



4. Números racionais

Você já conhece as frações. A origem delas está ligada a certas situações de medida em que era necessário registrar partes da unidade. Mas as frações têm um significado mais amplo.

Vamos relembrar?

Vimos que o quociente entre dois números inteiros nem sempre é um número inteiro.

Por exemplo, quero dividir três barras de chocolate entre quatro pessoas.

Cada pessoa deve receber $\frac{3}{4}$ de chocolate.

Portanto, $3 : 4 = \frac{3}{4}$ ou ainda, usando a forma de número decimal: $3 : 4 = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Os números obtidos pela divisão de dois números inteiros formam o **conjunto dos números racionais** que é representado pela letra $\mathbb{Q}$ (de quociente). Divisões que não têm resultado em $\mathbb{Z}$, têm resultado em $\mathbb{Q}$.

Podemos descrever os números racionais assim:

Os números racionais são os que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b números inteiros e $b \neq 0$

Lembre-se: $\frac{a}{b} = a : b$

Quem veio primeiro: frações ou números negativos?

Os homens da Idade da Pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas, durante a Idade do Bronze, parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações.

As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para as frações unitárias, isto é, com numerador um. A fração $\frac{1}{8}$ aparecia então como:

O inverso de um número inteiro era indicado colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado.

Convém ressaltar que as frações (positivas, é claro) surgiram antes dos números negativos, que demoraram a ser aceitos como números.

Fonte da pesquisa: BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo: Edgar Blücher, 1996.

14

Fonte: Coleção Praticando Matemática 8º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.14).

Da página vamos destacar o seguinte trecho que traz uma definição formal para os números racionais.

Figura 23: Recorte (Número racional, Texto)

Os números racionais são os que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b números inteiros e $b \neq 0$.

Lembre-se: $\frac{a}{b} = a : b$

Fonte: Coleção Praticando Matemática 8º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.14).

Dois aspectos textuais interessantes trazidos nessa unidade:

- O uso da História da Matemática sobre o uso de um número misto como aproximação para o número irracional Pi (π);

Figura 24: Recorte (Número racional, Texto)

A relação entre a medida do comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro deu muito trabalho aos matemáticos.

Na Bíblia há referências sobre o uso da relação $C = 3 \cdot d$ para calcular a medida do comprimento de uma circunferência. Muitas civilizações trabalharam com aproximações para π.

Os mesopotâmios utilizavam $\pi = 3\frac{1}{8}$, que corresponde a 3,125. Muito bom para a época!

Fonte: Coleção Praticando Matemática 8º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.22).

Salientamos que o recurso à História da Matemática é um dos aspectos elencados pelo PCN (Brasil, 1998) para o ensino e aprendizagem de Matemática.

- Uma atividade sugerida.

Figura 25: Recorte (Número racional, Atividade)

Faça este experimento!

Peça a uma pessoa que diga qualquer número entre 1 e 10. É quase certo que a pessoa dirá um número inteiro. Uma resposta como 8,534 ou $5\sqrt{2}$ é rara, apesar de serem respostas tão boas quanto qualquer número inteiro entre 1 e 10. Por que isso ocorre?

Fonte: Coleção Praticando Matemática 8º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.25).

Números reais, em particular os racionais e irracionais, são geralmente esquecidos ou não considerados como números. A atividade ajuda a refletir sobre isso ao levantar o questionamento.

Entre os exercícios, destacamos dois por trabalharem um aspecto que pode detectar um fenômeno didático e a concepção que o estudante traz sobre os conceitos, considerando a importância da atividade docente junto ao livro para permitir uma construção por parte do estudante de concepções cada vez mais adequadas a compreender os conceitos estudados em suas variadas formas, fenômenos e analisar suas características permitindo o uso de suas propriedades.

Exemplo 6.9.

Figura 26: Recorte (Número racional, Exercício)

15 Veja os números que aparecem nas frases a seguir.

- A jarra tem capacidade para $\frac{3}{4}$ de litro.
- Numa cidade há 8 049 bicicletas.
- O saldo de gols de um time de futebol é −6.
- Leandro tem 17 anos.
- A velocidade de um carro é de 92,75 km/h.
- A temperatura atingiu −2,8 °C.

Responda no caderno.

a) Quais deles representam números naturais?
8049 e 17

b) Quais deles representam números inteiros?
8049, 17 e −6

c) Quais deles representam números racionais?
Todos

Fonte: Coleção Praticando Matemática 8º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.15).

Neste exercício, pode ser analisado se para o estudante os conceitos são excludentes, por exemplo, um número natural ou inteiro não ser identificado como um número racional. O uso dos conjuntos é a estratégia adotada durante o texto para evitar essa caracterização.

Exemplo 6.10.

Figura 27: Recorte (Número racional, Exercício)

82 O que você pode dizer sobre estes números?

São iguais.

$\frac{\sqrt{16}}{5}$ $\frac{8}{10}$ $\frac{4}{5}$ 0,8

Fonte: Coleção Praticando Matemática 8º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.31).

Aqui a percepção dos números como iguais, pode se tornar uma ferramenta útil para compreensão das operações e o uso de estratégias de conversão em exercícios aplicados. Esse exercício, assim como vários outros da coleção, possibilita perceber que podemos representar um mesmo número de variadas formas.

Dentre os 58 usos de frações analisados, 44 correspondem aos exercícios.

O Manual do Professor do livro do 8º ano apenas trata de conjunto numérico dos números racionais, sem orientações específicas para o ensino de frações, visto que dentro da coleção essas orientações já foram trabalhadas nos volumes anteriores.

6.1.4. Livro do 9º ano

Neste livro, fração não é mais o foco do trabalho, mas sua nomenclatura e uso notacional são adotados em duas unidades do livro, uma sobre noções de probabilidade e outra sobre porcentagem e juro. Esse uso pode ajudar o estudante a consolidar ou expandir, de acordo com as concepções do mesmo até o momento, sua concepção do conceito de fração. A distribuição dos conceitos de fração no livro do 9º ano nesses capítulos será representada a seguir. Lembrando que nos demais capítulos o uso de fração se restringe em sua grande maioria ao conceito de número racional, portanto não foi objeto da análise nessa pesquisa.

Gráfico 4: Conceitos de fração no 9º ano

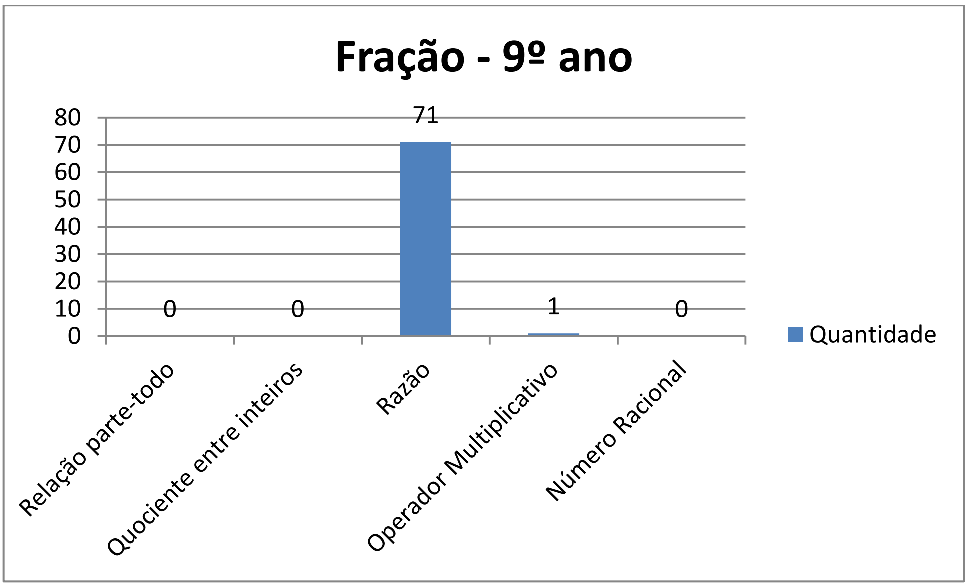


Tabela 4: Conceitos de fração no 9º ano

Relação parte-todo	Quociente entre inteiros	Razão	Operador Multiplicativo	Número Racional
0%	0%	99%	1%	0%

As frações são trazidas na explanação do texto, mais principalmente nos exercícios que correspondem a 55 dos 72 usos de frações. Desses exercícios, a título de exemplos, vejamos alguns.

Exemplo 6.11.

Figura 28: Recorte (Operador multiplicativo, Razão, Exercício)

28 A quantidade de sangue no corpo de um homem é $\frac{1}{11}$ do peso de seu corpo. Se o sangue contém 80% de água, quantos litros de água existem no sangue de um homem que pesa 55 kg? 4 litros $\frac{1}{11}$ de $55 = 5$ $0{,}8 \cdot 5 = 4$

CONECTANDO SABERES

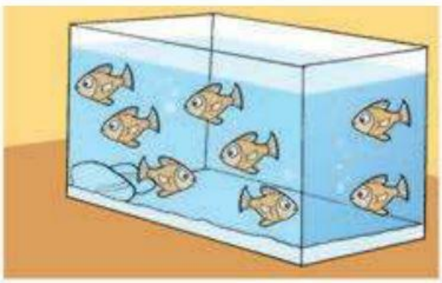
Fonte: Coleção Praticando Matemática 9º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.253).

O uso do conceito de fração como operador multiplicativo é raro, e não é normalmente a única possibilidade de resolução mesmo quando esta é sugerida pelos autores como no exemplo.

Exemplo 6.12.

Figura 29: Recorte (Razão, Exercício)

25 Leandro tem 8 peixes machos no seu aquário. Quantas fêmeas ele deve colocar nesse aquário para que a probabilidade de se tirar ao acaso um peixe macho seja:



a) 1? 0 b) $\frac{2}{3}$? 4

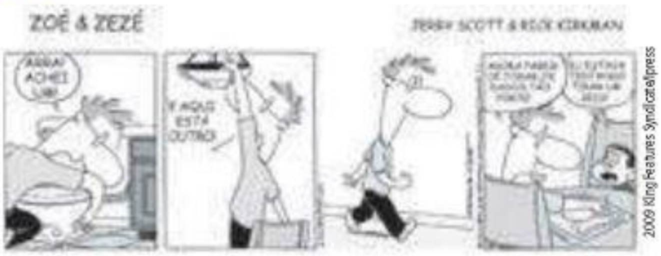
Fonte: Coleção Praticando Matemática 9º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.151).

O aspecto interessante desse exemplo é, ao invés do cálculo da probabilidade simplesmente, a análise de como alterá-la, modificando assim a razão, sendo também necessário associar a razão a sua representação como fração para a resolução.

Exemplo 6.13.

Figura 30: Recorte (Razão, Exercício)

41 (Prominp)



Se o menino da historinha lançar os dois dados ao mesmo tempo, a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja igual a 6 será:

x a) $\frac{5}{36}$ b) $\frac{1}{18}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{1}{6}$

(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)

Fonte: Coleção Praticando Matemática 9º ano (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.153).

O menino lançou os dados com muita força para tentar tirar um seis, qual a probabilidade dele obter essa soma. A força não importa, mas para representar essa probabilidade a representação fracionária da razão da quantidade das formas que pode ocorrer soma 6 em relação a todos as formas possíveis dos dados é fundamental.

O Manual do Professor para o livro do 9º ano não traz orientações específicas para o ensino de frações. Porém, há uma orientação comum em todos os manuais, pois as primeiras 51 páginas de cada manual são iguais, tratando dos aspectos gerais e nela temos uma sugestão breve sobre as operações com frações, referindo-se a expressão em língua materna do processo pelo estudante.

Figura 31: Recorte (Número racional, Manual)

"Explique com palavras como você ensinaria uma pessoa que não sabe operar com frações a calcular $\frac{5}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}$."

Fonte: Coleção Praticando Matemática 9º ano M. Professor (ANDRINI e VASCONCELOS, 2006, p.38).

6.2. Distribuição dos conceitos na coleção

Temos como síntese das tabelas e gráficos, a respeito da distribuição dos conceitos de fração contemplando os quatro volumes da coleção Praticando Matemática (Edição Renovada), os seguintes gráficos e tabelas:

Gráfico 5: Conceitos de fração na coleção

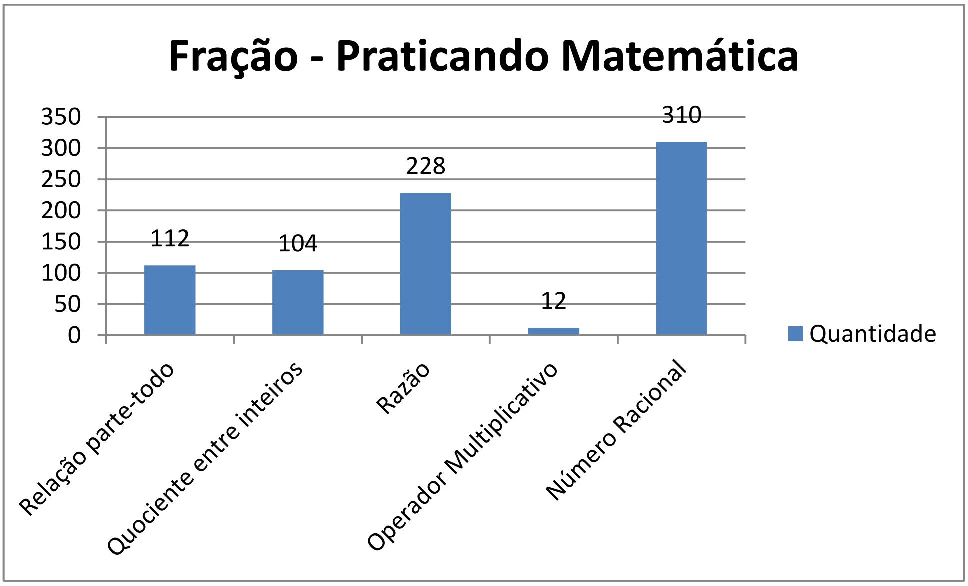


Tabela 5: Conceitos de fração na coleção

Relação parte-todo	Quociente entre inteiros	Razão	Operador Multiplicativo	Número Racional
15%	14%	30%	2%	40%

E quanto à localização dos usos da fração:

Gráfico 6: Localização do uso de fração na coleção

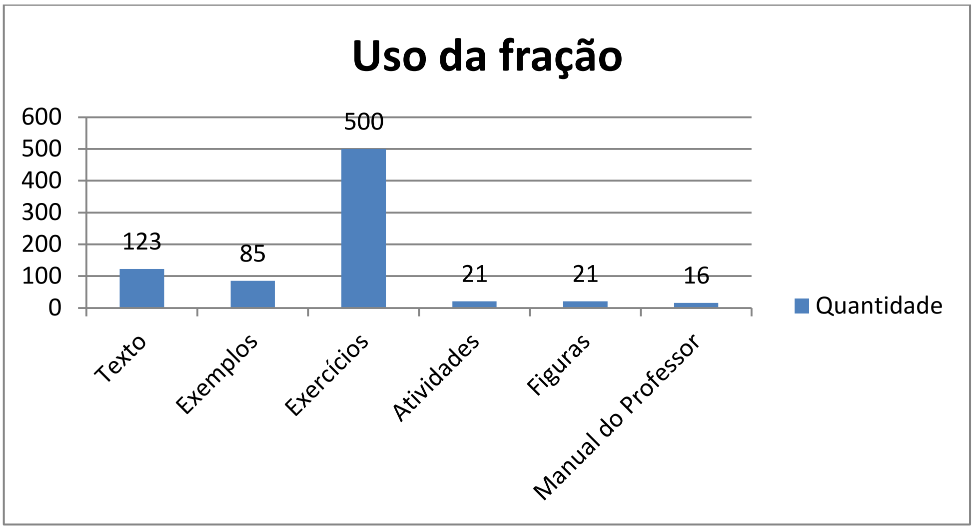


Tabela 6: Localização do uso de fração na coleção

Textos	Exemplos	Exercícios	Atividades	Figuras	Manual
16%	11%	65%	3%	3%	2%

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com a análise, o fenômeno inicialmente trabalhado na coleção para abordagem do conceito de fração é o aspecto da relação parte-todo, porém a maior ênfase durante a coleção é dada ao aspecto de fração como representação de um número racional. Número racional é o tipo de fenômeno organizado sobre o conceito fração com mais ocorrências nos primeiros três volumes da coleção. No quarto volume, esse uso aparece bastante e pode reforçar esse aspecto. Contudo, como o enfoque dos exercícios e exemplos não está neste aspecto, não consideramos as unidades que só fazem uso desse aspecto sem objetivos explícitos.

Os aspectos focos de cada volume juntamente ao conceito de fração como número racional são: relação parte-todo no 6º ano, quociente entre inteiros e razão no 7º ano, e razão no 9º ano. No 8º ano, o aspecto que é mais trabalhado é o de reconhecimento da fração como número racional, conversões na forma de escrita e uso das propriedades dos números racionais.

Os exercícios correspondem ao local onde podemos encontrar a maior variedade de usos, incluindo diversos exercícios que abordam particularidades de cada categoria de análise adotada. Alguns desses exercícios atuam como verdadeiros problemas e permitem ao estudante novos questionamentos. Conforme Luís Puig traz em sua obra da *Análisis Fenomenológico*, o processo de questionarmos e testarmos um conceito o modifica e aperfeiçoa. O professor ao trabalhar esses exercícios pode abordar novos fenômenos e possibilitar situação para uma possível complementação da concepção que o estudante tem sobre o conceito, favorecendo a criação de objetos mentais que permitam compreender melhor o conceito, suas ações, propriedades e propriedades dessas ações.

Quanto aos outros elementos de localização: o texto, as ilustrações, exemplos, atividades sugeridas estão em menor número do que os exercícios e abordam os mesmos aspectos que os exercícios, apresentando, entretanto, uma variedade menor de fenômenos. O Manual do Professor traz diversas orientações e textos complementares que destacam alguns pontos importantes, principalmente sugerindo possíveis enganos cometidos pelos estudantes. Vale destacar a atenção dos autores aos fenômenos relacionados a taxas percentuais, probabilidades, medidas, que também estão organizados pelo conceito fração.

Durante cada etapa da formação, de acordo com a distribuição nos volumes, um aspecto de fração é considerado, sendo que o único aspecto dentre os analisados para o qual não há um direcionamento ou instrução específica, mesmo que alguns casos se pudesse fazer uso como estratégia de resolução, é o conceito da fração como um operador multiplicativo. Esse uso não aparece como um objetivo nessa coleção.

Uma análise mais detalhada com um maior número de categorias, e inclusive coleções analisadas, nos permitiria melhores conclusões sobre como o conceito de fração é trabalhado nos livros didáticos para o Ensino Fundamental em nosso país. Um estudo mais detalhado, possivelmente aliado com o estudo das representações semióticas, pode atuar como uma pesquisa norteadora para novas estratégias de ensino de frações, um conceito básico e que pode ser aperfeiçoado.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, A; VASCONCELLOS, M. J. **Coleção Praticando Matemática – Edição renovada (Manual do professor).** 3 ed. renovada. 4 v. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2014: Matemática.** Brasília SEF/MEC, 2013.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (3o e 4o ciclos do Ensino Fundamental).** Brasília: SEF/MEC, 1998.

BATTISTI, I. K..; GAVIRAGHI, A. Número racional na representação fracionária Ideia Parte-Todo: Entendimentos Produzidos por Alunos. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: PUCPR, 2013. Disponível em: <http://sbem.bruc.com.br/XIENEM/pdf/855_161_ID.pdf>. Acesso em: 18 set. 2013.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

CAVALCANTI, José Dilson Beserra ; CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo . **A compreensão de professores das séries iniciais do ensino fundamental sobre os diferentes significados das frações: o caso do município de Tupanatinga.** In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2006, Recife. SIPEMAT, 2006.

CAVALCANTI, José Dilson Beserra; CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo ; JÓFILI, Zélia Maria Soares. **Um olhar sobre alguns obstáculos que permeiam a aula de matemática: um exemplo com frações**. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. Anais do IX ENEM. Belo Horizonte, 2007. v. 1. p. 1-9.

FREUDENTHAL, Hans. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.** Nova Iorque: Kluwer Academic Publishers, 1999. p. 1-33, 133-177.

LOPES, Jairo de Araújo. Livro didático de Matemática: concepção, seleção e possibilidades frente a descritores de análise e tendências em Educação Matemática. Campinas, 2000. **Tese (Doutorado em Educação)** - Faculdade de Educação - Universidade Estadual de Campinas. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000213902&fd=y>. Acesso em: 25 fev. 2014.

PUIG, L. Análisis fenomenológico. Em L. Rico (coord.) **La educácion matemática en la enseñanza secundaria** (págs. 61-94). Barcelona: Horsori, 1997. Disponível em: <http://www.uv.es/puigl/libros.html>. Acesso em: 01 jun 2014.

PUIG, L. Tradução de Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Hans Freudenthal. Publicada em **Fenomenologia didática de las estruturas matemáticas. Textos selecionados.** México: CINVESTAV, 2001. Disponível em: <http://www.uv.es/puigl/libros.html>. Acesso em: 01 jun 2014.

REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar da. **Geometria analítica.** 2. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

SANTOS, Maria Lucivânia Souza dos. Um estudo sobre a abordagem da história da matemática em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental. **Monografia** - Universidade Federal de Pernambuco. Caruaru, 2013.

WALLE, John A. Van de. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicações em sala de aula**. Tradução Paulo H. Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

APÊNDICES

Apêndice 1 - Tabelas para coleta de dados

Praticando a Matemática: Edição Renovada (Manual do Professor)					
6º ano	Relação parte-todo				
Texto	Exemplos	Exercícios propostos	Atividades sugeridas	Figuras	Manual do Professor

Praticando a Matemática: Edição Renovada (Manual do Professor)					
6º ano	Quociente entre inteiros				
Texto	Exemplos	Exercícios propostos	Atividades sugeridas	Figuras	Manual do Professor

Praticando a Matemática: Edição Renovada (Manual do Professor)					
6º ano	Razão				
Texto	Exemplos	Exercícios propostos	Atividades sugeridas	Figuras	Manual do Professor

Praticando a Matemática: Edição Renovada (Manual do Professor)					
6º ano	Operador multiplicativo				
Texto	Exemplos	Exercícios propostos	Atividades sugeridas	Figuras	Manual do Professor

Praticando a Matemática: Edição Renovada (Manual do Professor)					
6º ano	Número racional				
Texto	Exemplos	Exercícios propostos	Atividades sugeridas	Figuras	Manual do Professor

Um exemplo preenchido:

Praticando a Matemática: Edição Renovada (Manual do Professor)					
6º ano	Quociente entre inteiros				
Texto	Exemplos	Exercícios propostos	Atividades sugeridas	Figuras	Manual do Professor
p.174 situação 1		p.175 Ex.9		p. 174 figurinhas	
p.174 situação 2		p.181 Ex. 29			
p.182 N. iguais		p.201 Ex.1			
p.182 D. iguais		p.201 Ex.6			
p.199		p.203 Ex.12			
p.200		p.211 Ex.1			
p.232		p.233 Ex.17			
		p.233 Ex.18			

ANEXOS

Anexo 1

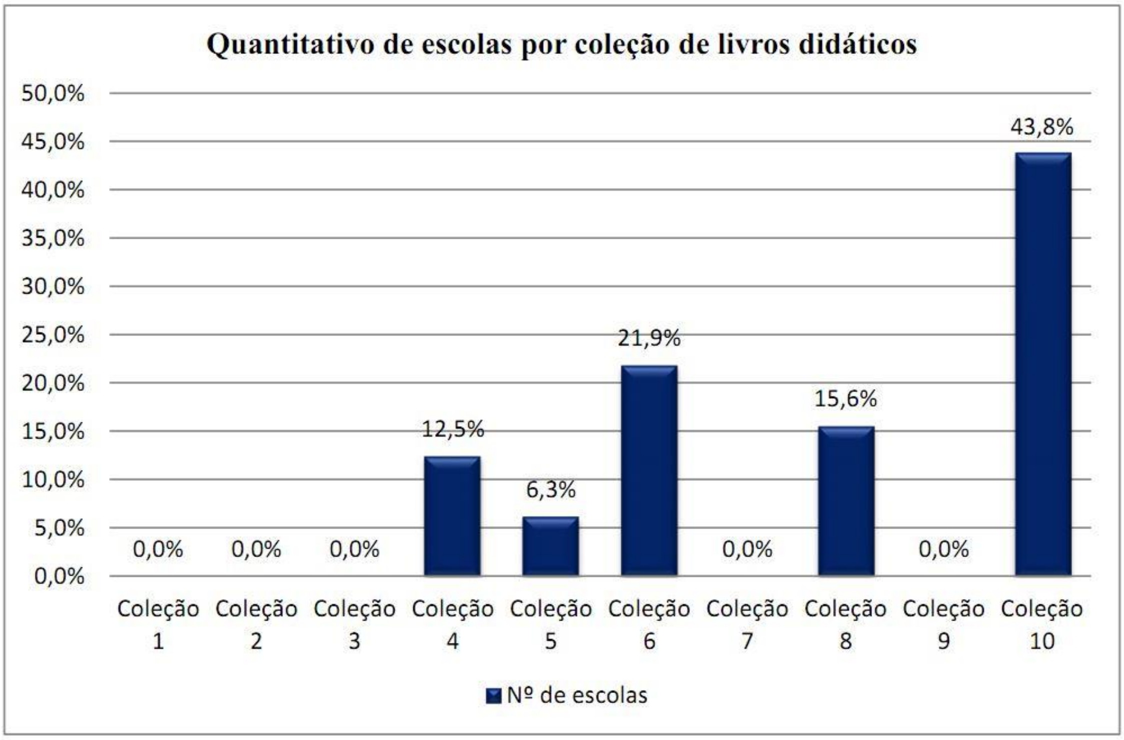
FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO
Programa Nacional do Livro Didático - PNLD

PNLD 2014 - Coleções mais distribuídas por componente curricular
Português

	Código	Título	Tipo	Qtde. Página	Cad. Tipog.	Quantidade	Quantidade por Coleção
1ª	27451C0124	PORTUGUÊS: LINGUAGENS	L	256	17	865.061	3.172.012
	27451C0124	PORTUGUÊS: LINGUAGENS	M	336	22	16.811	
	27451C0125	PORTUGUÊS: LINGUAGENS	L	240	16	791.104	
	27451C0125	PORTUGUÊS: LINGUAGENS	M	320	21	15.912	
	27451C0126	PORTUGUÊS: LINGUAGENS	L	256	17	743.657	
	27451C0126	PORTUGUÊS: LINGUAGENS	M	336	22	15.482	
	27451C0127	PORTUGUÊS: LINGUAGENS	L	256	17	708.522	
	27451C0127	PORTUGUÊS: LINGUAGENS	M	336	22	15.363	
2ª	27469C0124	PROJETO TELÁRIS - PORTUGUÊS - 6º ANO	L	312	20,5	365.445	2.081.451
	27469C0124	PROJETO TELÁRIS - PORTUGUÊS - 6º ANO	M	392	25,5	10.916	
	27469C0125	PROJETO TELÁRIS - PORTUGUÊS - 7º ANO	L	320	21	520.696	
	27469C0125	PROJETO TELÁRIS - PORTUGUÊS - 7º ANO	M	392	25,5	10.349	
	27469C0126	PROJETO TELÁRIS - PORTUGUÊS - 8º ANO	L	352	23	484.397	
	27469C0126	PROJETO TELÁRIS - PORTUGUÊS - 8º ANO	M	424	27,5	9.864	
	27469C0127	PROJETO TELÁRIS - PORTUGUÊS - 9º ANO	L	352	23	469.869	
	27469C0127	PROJETO TELÁRIS - PORTUGUÊS - 9º ANO	M	424	27,5	9.815	
3ª	27494C0124	VONTADE DE SABER PORTUGUÊS - 6º ANO	L	256	17	524.595	1.887.984
	27494C0124	VONTADE DE SABER PORTUGUÊS - 6º ANO	M	352	23	10.843	
	27494C0125	VONTADE DE SABER PORTUGUÊS - 7º ANO	L	272	18	473.667	
	27494C0125	VONTADE DE SABER PORTUGUÊS - 7º ANO	M	368	24	10.209	
	27494C0126	VONTADE DE SABER PORTUGUÊS - 8º ANO	L	256	17	437.176	
	27494C0126	VONTADE DE SABER PORTUGUÊS - 8º ANO	M	336	22	9.819	
	27494C0127	VONTADE DE SABER PORTUGUÊS - 9º ANO	L	272	18	411.917	
	27494C0127	VONTADE DE SABER PORTUGUÊS - 9º ANO	M	352	23	9.758	
4ª	27399C0124	JORNADAS.PORT - LÍNGUA PORTUGUESA	L	320	21	366.200	1.323.698
	27399C0124	JORNADAS.PORT - LÍNGUA PORTUGUESA	M	368	24	7.076	
	27399C0125	JORNADAS.PORT - LÍNGUA PORTUGUESA	L	320	21	329.379	
	27399C0125	JORNADAS.PORT - LÍNGUA PORTUGUESA	M	368	24	6.687	
	27399C0126	JORNADAS.PORT - LÍNGUA PORTUGUESA	L	320	21	308.661	
	27399C0126	JORNADAS.PORT - LÍNGUA PORTUGUESA	M	368	24	6.461	
	27399C0127	JORNADAS.PORT - LÍNGUA PORTUGUESA	L	320	21	292.806	
	27399C0127	JORNADAS.PORT - LÍNGUA PORTUGUESA	M	368	24	6.428	
5ª	27478C0124	SINGULAR & PLURAL - LEITURA, PRODUÇÃO E ESTUDOS DE	L	296	19,5	340.587	1.251.956
	27478C0124	SINGULAR & PLURAL - LEITURA, PRODUÇÃO E ESTUDOS DE	M	496	32	6.594	
	27478C0125	SINGULAR & PLURAL - LEITURA, PRODUÇÃO E ESTUDOS DE	L	344	22,5	313.025	
	27478C0125	SINGULAR & PLURAL - LEITURA, PRODUÇÃO E ESTUDOS DE	M	576	37	6.267	
	27478C0126	SINGULAR & PLURAL - LEITURA, PRODUÇÃO E ESTUDOS DE	L	288	19	292.722	
	27478C0126	SINGULAR & PLURAL - LEITURA, PRODUÇÃO E ESTUDOS DE	M	496	32	6.034	
	27478C0127	SINGULAR & PLURAL - LEITURA, PRODUÇÃO E ESTUDOS DE	L	296	19,5	280.717	
	27478C0127	SINGULAR & PLURAL - LEITURA, PRODUÇÃO E ESTUDOS DE	M	480	31	6.010	
6ª	27409C0124	LÍNGUA PORTUGUESA	L	280	18,5	271.495	1.008.796
	27409C0124	LÍNGUA PORTUGUESA	M	384	25	4.885	
	27409C0125	LÍNGUA PORTUGUESA	L	264	17,5	248.186	
	27409C0125	LÍNGUA PORTUGUESA	M	376	24,5	4.586	
	27409C0126	LÍNGUA PORTUGUESA	L	208	14	237.245	
	27409C0126	LÍNGUA PORTUGUESA	M	312	20,5	4.499	
	27409C0127	LÍNGUA PORTUGUESA	L	248	16,5	233.376	
	27409C0127	LÍNGUA PORTUGUESA	M	352	23	4.524	
7ª	27442C0124	PARA VIVER JUNTOS PORTUGUÊS 6	L	304	20	182.740	674.442
	27442C0124	PARA VIVER JUNTOS PORTUGUÊS 6	M	400	26	3.383	
	27442C0125	PARA VIVER JUNTOS PORTUGUÊS 7	L	288	19	167.266	
	27442C0125	PARA VIVER JUNTOS PORTUGUÊS 7	M	376	24,5	3.178	
	27442C0126	PARA VIVER JUNTOS PORTUGUÊS 8	L	288	19	159.371	
	27442C0126	PARA VIVER JUNTOS PORTUGUÊS 8	M	384	25	3.086	
	27442C0127	PARA VIVER JUNTOS PORTUGUÊS 9	L	288	19	152.342	
	27442C0127	PARA VIVER JUNTOS PORTUGUÊS 9	M	384	25	3.076	
8ª	27452C0124	PORTUGUÊS NOS DIAS DE HOJE	L	248	16,5	110.437	390.249
	27452C0124	PORTUGUÊS NOS DIAS DE HOJE	M	320	21	2.112	
	27452C0125	PORTUGUÊS NOS DIAS DE HOJE	L	200	13,5	96.919	
	27452C0125	PORTUGUÊS NOS DIAS DE HOJE	M	264	17,5	1.960	
	27452C0126	PORTUGUÊS NOS DIAS DE HOJE	L	240	16	89.071	

	27452C0126	PORTUGUÊS NOS DIAS DE HOJE	M	312	20,5	1.869	
	27452C0127	PORTUGUÊS NOS DIAS DE HOJE	L	208	14	86.026	
	27452C0127	PORTUGUÊS NOS DIAS DE HOJE	M	280	18,5	1.861	
9ª	27447C0124	PERSPECTIVA LÍNGUA PORTUGUESA	L	312	20,5	68.618	259.367
	27447C0124	PERSPECTIVA LÍNGUA PORTUGUESA	M	400	26	1.352	
	27447C0125	PERSPECTIVA LÍNGUA PORTUGUESA	L	304	20	64.544	
	27447C0125	PERSPECTIVA LÍNGUA PORTUGUESA	M	376	24,5	1.250	
	27447C0126	PERSPECTIVA LÍNGUA PORTUGUESA	L	328	21,5	60.628	
	27447C0126	PERSPECTIVA LÍNGUA PORTUGUESA	M	416	27	1.186	
	27447C0127	PERSPECTIVA LÍNGUA PORTUGUESA	L	352	23	60.572	
	27447C0127	PERSPECTIVA LÍNGUA PORTUGUESA	M	448	28	1.216	
10ª	27453C0124	PORTUGUÊS, UMA LINGUA BRASILEIRA	L	296	19,5	69.126	246.887
	27453C0124	PORTUGUÊS, UMA LINGUA BRASILEIRA	M	400	26	1.305	
	27453C0125	PORTUGUÊS, UMA LINGUA BRASILEIRA	L	312	20,5	60.163	
	27453C0125	PORTUGUÊS, UMA LINGUA BRASILEIRA	M	424	27,5	1.211	
	27453C0126	PORTUGUÊS, UMA LINGUA BRASILEIRA	L	256	17	57.081	
	27453C0126	PORTUGUÊS, UMA LINGUA BRASILEIRA	M	352	23	1.153	
	27453C0127	PORTUGUÊS, UMA LINGUA BRASILEIRA	L	280	18,5	55.757	
	27453C0127	PORTUGUÊS, UMA LINGUA BRASILEIRA	M	376	24,5	1.161	
11ª	27484C0124	UNIVERSOS LÍNGUA PORTUGUESA 6	L	256	17	65.630	242.010
	27484C0124	UNIVERSOS LÍNGUA PORTUGUESA 6	M	384	25	1.336	
	27484C0125	UNIVERSOS LÍNGUA PORTUGUESA 7	L	264	17,5	58.872	
	27484C0125	UNIVERSOS LÍNGUA PORTUGUESA 7	M	392	25,5	1.213	
	27484C0126	UNIVERSOS LÍNGUA PORTUGUESA 8	L	264	17,5	58.168	
	27484C0126	UNIVERSOS LÍNGUA PORTUGUESA 8	M	392	25,5	1.176	
	27484C0127	UNIVERSOS LÍNGUA PORTUGUESA 9	L	272	18	55.353	
	27484C0127	UNIVERSOS LÍNGUA PORTUGUESA 9	M	400	26	1.162	
12ª	27317C0124	A AVENTURA DA LINGUAGEM	L	272	18	32.086	117.527
	27317C0124	A AVENTURA DA LINGUAGEM	M	328	21,5	734	
	27317C0125	A AVENTURA DA LINGUAGEM	L	296	19,5	29.156	
	27317C0125	A AVENTURA DA LINGUAGEM	M	344	22,5	690	
	27317C0126	A AVENTURA DA LINGUAGEM	L	376	24,5	27.165	
	27317C0126	A AVENTURA DA LINGUAGEM	M	420	27,25	660	
	27317C0127	A AVENTURA DA LINGUAGEM	L	336	22	26.372	
	27317C0127	A AVENTURA DA LINGUAGEM	M	380	24,75	664	

Anexo 2


Quantitativo de escolas por coleção de livros didáticos
50,0%
45,0%
40,0%
35,0%
30,0%
25,0%
20,0%
15,0%
10,0%
5,0%
0,0%
0,0%
0,0%
0,0%
12,5%
6,3%
21,9%
0,0%
15,6%
0,0%
43,8%
Coleção 1
Coleção 2
Coleção 3
Coleção 4
Coleção 5
Coleção 6
Coleção 7
Coleção 8
Coleção 9
Coleção 10
Nº de escolas