Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Eberson Ferreira da Silva

DIMENSÃO DE HAUSDORFF DE ATRATORES SOLENOIDAIS EM DIMENSÃO ALTA

Recife
2021

Eberson Ferreira da Silva

DIMENSÃO DE HAUSDORFF DE ATRATORES SOLENOIDAIS EM DIMENSÃO ALTA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Geometria.

Orientador(a): Prof. Dr. Ricardo T. Bortolotti.

Recife

2021

Catalogação na fonte
Bibliotecária Mariana de Souza Alves CRB4-2105

S586d Silva, Eberson Ferreira da
Dimensão de Hausdorff de atratores solenoidais em dimensão alta/ Eberson Ferreira da Silva – 2021.
137 f.: il., fig.

Orientador: Ricardo T. Bortolotti.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2021.
Inclui referências.

1. Geometria. 2. Solenoide. 3. Atrator hiperbólico. 4. Dimensão de Hausdorff. I. Bortolotti, Ricardo T. (orientador) II. Título.

516 CDD (22. ed.) UFPE-CCEN 2021-77

EBERSON FERREIRA DA SILVA

DIMENSÃO DE HAUSDORFF DE ATRATORES SOLENOIDAIS EM DIMENSÃO ALTA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 26/03/2021

BANCA EXAMINADORA

_____

Prof. Dr**.** Ricardo Turolla Bortolotti (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. Paulo César Varandas (Examinador Externo)
Universidade Federal da Bahia

_____

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto (Examinador Externo))
Universidade Federal da Paraíba

_____

Prof. Dr. Davi dos Santos Lima (Examinador Externo)
Universidade Federal de Alagoas

AGRADECIMENTOS

Inicialmente agradeço a minha esposa Suelen por toda dedicação e todo companheirismo até este momento. Por toda paciência nas noites longas de trabalho e por todo amor para com a nossa família. A conclusão deste trabalho só foi possível com sua ajuda e sem sua presença certamente seria uma caminho muito mais ingrime.

Agradeço a minha filha Sara, embora seja tão pequena e não compreenda este momento, sua chegada no meio do doutorado trouxe grandes desafios acompanhados de muitos sorrisos que fazem com que todo esforço valha a pena.

Agradeço a minha mãe Eliete por ter me ensinado, através de exemplos, como ser uma pessoa boa e honesta, por ter me apoiado em todas as decisões, por ter sempre zelado pelo bem de nossa família e por todos os sacrifícios feitos para que eu pudesse estudar.

Agradeço ao meu pai Edson, mesmo hoje não estando mais neste mundo, tudo que me ensinou, estará comigo pelo o resto da vida. Todo amor e trabalho duro foram importantes para que eu chegasse até aqui.

Agradeço aos professores do DMAT-UFPE pela construção acadêmica que obtive nas disciplinas cursadas. Em especial, agradeço ao meu orientador o Professor Ricardo Turolla Bortolotti pela grande paciência e enorme contribuição neste trabalho. Sem dúvidas, se não fosse por sua compreensão e senso de humanidade nos momentos mais difíceis, talvez eu não tivesse ido até o fim.

Agradeço aos membros da banca, os professores Carlos Bocker, Davi Lima, Eduardo Leandro e Paulo Varandas por terem aceitado avaliar e contribuir com este trabalho.

Agradeço ao Departamento de Matemática da UFRPE, o qual faço parte, pelo apoio. Em especial aos colegas Tiago Veras e Leon Denis pelas conversas e apoio.

Agradeço aos amigos Eliu Antão, Felipe Fernando e Rafael Barbosa pelo apoio desde a época da graduação. Em especial, a Rafael pela paciência em assistir a apresentação da defesa algumas vezes. Agradeço também a amiga Islanita Cecília pelos conselhos e por ouvir meus desabafos acadêmicos nos momentos mais oportunos.

Por fim, agradeço a todos que de alguma maneira ajudaram ou torceram para que chegássemos até aqui.

RESUMO

Neste trabalho estudamos a dimensão de Hausdorff de atratores solenoidais em dimensão maior ou igual a 3 que são definidos através de skew-products. Provamos que se a contração é forte o suficiente, então para dinâmicas C^r-próximas a dimensão de Hausdorff e a box-counting dimension do atrator associado tem o mesmo valor, o qual corresponde ao zero da pressão topológica como na fórmula de Bowen-Manning. Para este resultado, utilizamos técnicas analíticas de teoria de potenciais. Em seguida, damos condições suficientes para que a dimensão do atrator tenha tal valor esperado, fazemos isto de duas maneiras: A primeira utilizando técnicas geométricas e uma condição de transversalidade entre as componentes do atrator, e a segunda utilizando técnicas de teoria de potencial e a mesma condição de transversalidade. Em todos os casos provamos que a dimensão de uma seção transversal é a mesma em todo ponto (ou em quase todo ponto).

Palavras-chave: Solenoide. Atrator hiperbólico. Dimensão de Hausdorff. Potenciais. Transversalidade intrínseca.

ABSTRACT

In this work we study the Hausdorff dimension of solenoidal attractors in dimensions greater than or equal to 3 that are defined by skew-products. We prove that if the contraction is sufficiently strong, then for dynamics C^r-close the Hausdorff dimension and the box-counting dimension of the associated attractor have the same value, which corresponds to the zero of the topological pressure as in Bowen-Manning formula. For this result, we use analytical techniques of potential theory. After, we give sufficient conditions so that dimension of the attractor has such expected value, we do this in two ways: The first way using geometric techniques and a transversality condition between the components of the attractor, and the second way using potential theoretic methods and the same transversality condition. In all cases we prove that the dimension of a cross section is the same at every point (or almost every point).

Keywords: Solenoid. Hyperbolic attractor. Hausdorff dimension. Potential. Intrinsic transversality.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9
1.1 Dimensão de Hausdorff de Solenoides 9
1.2 Resultados principais 12
1.3 Estrutura da tese 14

2 ATRATORES SOLENOIDAIS 17
2.1 Conjuntos Hiperbólicos 17
2.2 O atrator solenoidal Δ_T 21
2.3 Codificação da dinâmica 24
2.4 Descrição das componentes do atrator 26
2.5 Outras dinâmicas auxiliares 33

3 COTAS DA DIMENSÃO DO ATRATOR Δ_T 36
3.1 Dimensão de Hausdorff 36
3.1.1 Propriedades da dimensão de Hausdorff 39
3.2 Box-counting dimension ou dimensão de Minkowski 41
3.3 Pressão Topológica 42
3.4 Cota superior para $\dim_H(\Delta_T(x))$ e $\dim_H(\Delta_T)$ 43
3.4.1 Estimativa de distorção 46
3.4.2 Cota superior para $\dim_H(\Delta_T(x))$ 49
3.4.3 Cota superior para $\dim_H(\Delta_T)$ 51
3.5 A medida μ_x em $I^\infty(x)$ 53
3.6 Cota Superior para $\overline{\dim}_B(\Delta_T(x))$, $\overline{\dim}_B(\rho(\Delta_T(x)))$ e $\overline{\dim}_B(\Delta_T)$ 55
3.6.1 Cota superior para $\overline{\dim}_B(\rho(\Delta_T(x)))$ e $\overline{\dim}_B(\Delta_T(x))$ 55
3.6.2 Cota superior para $\overline{\dim}_B(\Delta_T)$ 57
3.7 Menor valor singular 58

4 DIMENSÃO DE HAUSDORFF PARA FAMÍLIAS TRANSVERSAIS 59
4.1 Famílias transversais 60
4.2 Dimensão de $\rho(\Delta_{T_t}(x))$ 68
4.2.1 Cálculo da cota inferior via potenciais 69
4.3 Demonstração do Teorema A 75

5 DIMENSÃO DE HAUSDORFF DE ATRATORES Δ_T COM TRANSVERSALIDADE INTRÍNSECA 77
5.1 Condições suficientes para a cota inferior da dimensão de $\Delta_T(x)$ . . 77
5.2 Sobreposições em $T^m(V)$ 80
5.3 Lema Geométrico 91
5.4 Os conjuntos $\mathcal{E}'_{um}$, $C'(m)$ e $\Delta'_T(m)$ 96
5.4.1 Holonomia instável 109
5.5 Demonstração do Teorema B 114
5.5.1 Demonstração do Teorema 5.1 115
5.5.2 Demonstração do Teorema B 115

6 DIMENSÃO DE HAUSDORFF COM TRANSVERSALIDADE INTRÍNSECA VIA POTENCIAIS 117
6.1 Resultados auxiliares 117
6.2 Prova do Teorema C 122

7 EXEMPLOS E COMENTÁRIOS FINAIS 127
7.1 Caso linear 128
7.2 Um exemplo não genérico para $\dim_H \rho_2(\Delta_T)$ 130
7.3 Produto de aplicações com transversalidade intrínseca 132
7.4 Comentários finais 133

REFERÊNCIAS 137

1 INTRODUÇÃO

1.1 Dimensão de Hausdorff de Solenoides

Neste trabalho, iremos estudar a dimensão de Hausdorff de certos atratores hiperbólicos solenoidais. O estudo da dimensão de Hausdorff é uma das ferramentas fundamentais em Geometria Fractal e sua importância, a grosso modo, reside no fato de podermos obter informações sobre conjuntos de medida nula e cuja a dimensão usual não é inteira. Já os atratores solenoidais constituem uma classe de exemplos importantes em Sistemas Dinâmicos Hiperbólicos.

Um dos exemplos mais citados na literatura de atrator solenoidal (veja (10),(23) e (19) para mais detalhes) é o **solenoide de Smale-Williams** que passamos a descrever agora. Considere $\mathbf{D}$ um disco unitário em $\mathbb{R}^2$ centrado na origem e $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ o círculo unitário, o conjunto $S^1 \times \mathbf{D}$ pode ser visto como um toro sólido imerso em $\mathbb{R}^3$.

Seja então $f : S^1 \times \mathbf{D} \to S^1 \times \mathbf{D}$ dado por

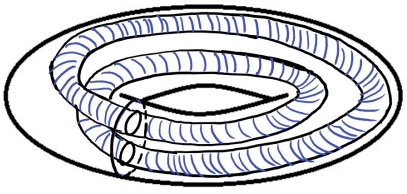
$$f(\theta, x, y) = (2\theta \mod 1, \lambda_1 x + \epsilon \cos(2\pi\theta), \lambda_2 y + \epsilon \text{sen}\,(2\pi\theta)) \tag{1.1}$$

para constantes $0 < \lambda_1, \lambda_2 < \min\left\{\epsilon, \frac{1}{2}\right\}$. Note que f expande na base S^1 e contrai na direção do disco $\mathbf{D}$. A imagem de $f(S^1 \times \mathbf{D})$ está contida e se sobrepõe dentro de $S^1 \times \mathbf{D}$ (ver Figura 1) . O conjunto limite

$$\Delta = \bigcap_{n \geq 0} f^n(S^1 \times \mathbf{D})$$

é o que chamamos de *solenoide*. O conjunto Δ é um atrator para dinâmica f e conjunto $\Delta(\theta) := (\{\theta\} \times \mathbf{D}) \cap \Delta$ é um tipo-Cantor (veja (18) para mais detalhes sobre conjuntos tipo-Cantor).

Figura 1 – Imagem de $S^1 \times \mathbf{D}$ por f.



Fonte: O autor (2021)

Pesin e Weiss mostraram em (17) que se $\lambda_1 \leq \lambda_2$, então a dimensão de Hausdorff ($\dim_H$) do conjunto $\Delta(\theta)$ para cada $\theta \in S^1$ satisfaz o seguinte

$$\frac{\log 2}{-\log(\lambda_1)} \leq \dim_H(\Delta(\theta)) \leq \frac{\log 2}{-\log(\lambda_2)}.$$

E com isso concluíram também

$$1 + \frac{\log 2}{-\log(\lambda_1)} \leq \dim_H(\Delta) \leq 1 + \frac{\log 2}{-\log(\lambda_2)}.$$

Em particular, no caso conforme ($\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$) vale o cálculo da dimensão

$$\dim_H(\Delta) = 1 + \frac{\log 2}{-\log(\lambda)}.$$

No caso afim ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), K. Simon no seu trabalho em (25), usando os métodos encontrados em (24), conseguiu demonstrar que

$$\dim_H(\Delta) = 1 + \frac{\log 2}{-\log(\max\{\lambda_1, \lambda_2\})}.$$

Contudo, para demonstrar que

$$\dim_H(\Delta(\theta)) = \frac{\log 2}{-\log(\max\{\lambda_1, \lambda_2\})}$$

para todo $\theta \in S^1$, foi preciso assumir as hipóteses do trabalho de H.G. Bothe ((3)), conforme mencionamos a seguir.

Bothe, em (3), considerou uma família $\mathcal{F}$ de imersões $f : S^1 \times \mathbf{D} \to S^1 \times \mathbf{D}$ de classe C^1, dadas por

$$f(t, x, y) = (\varphi(t), \lambda_1(t) \cdot x + z_1(t), \lambda_2(t) \cdot y + z_2(t)) \tag{1.2}$$

em que

$$\varphi : S^1 \to S^1,\ \lambda_1, \lambda_2 : S^1 \to (0, 1),\ z_1, z_2 : S^1 \to (-1, 1)$$

são aplicações de classe C^1 e φ é uma expansora de grau ϑ no mínimo 2, isto é, vale $\dot{\varphi} = \dfrac{d\varphi}{dt} > 1$. Além disso, tomou o atrator $\Delta = \bigcap_{n \geq 0} f^n(S^1 \times \mathbf{D})$ e as projeções

$$\pi(t, x, y) = t,\ \rho_1(t, x, y) = (t, x) \text{ e } \rho_2(t, x, y) = (t, y).$$

Definição. *Para $i = 1, 2$, $\mathcal{F}_i^{\times}$ é o conjunto de todas $f \in \mathcal{F}$ tal que vale a seguinte propriedade: Para qualquer arco B em S^1 e quaisquer duas componentes B_1, B_2 de $\Delta \cap \pi^{-1}(B)$ os arcos $\rho_i(B_1)$, $\rho_i(B_2)$ são transversais em $A = S^1 \times [-1, 1]$ em cada ponto de $\rho_i(B_1) \cap \rho_i(B_2)$. Os atratores dos mapas f em $\mathcal{F}^{\times}$ são chamados de intrinsecamente transversais com respeito a ρ_i.*

Com a definição acima e com os seguintes conjuntos

$$\mathcal{F}_i' = \{f \in \mathcal{F} : \sup \lambda_i < \vartheta^{-2}\} \text{ e} \tag{1.3}$$

$$\mathcal{F}_i'' = \{f \in \mathcal{F} : \sup \lambda_i < \inf \dot{\varphi} \sup \dot{\varphi}^{-4 \log \inf \lambda_i / \log \sup \lambda_i}\}, \tag{1.4}$$

Bothe demonstrou os seguintes resultados:

Teorema (Bothe) 1. *Se $i = 1, 2$ e $f \in \mathcal{F}_i^{\times} \cap \mathcal{F}_i''$, então para todo $t \in S^1$ vale que*

$$\dim_H(\rho_i(\Delta \cap (\{t\} \times \mathbf{D}))) = p_i \tag{1.5}$$

em que p_i é o único número real satisfazendo $P(p_i \log \lambda_i) = 0$ (P denota a pressão topológica).

Teorema (Bothe) 2. *O conjunto $\mathcal{F}_i^{\times} \cap \mathcal{F}_i'$ é um aberto e denso em $\mathcal{F}_i'$ na topologia C^1.*

Uma vez que é possível mostrar que $\mathcal{F}_i'' \subset \mathcal{F}_i'$, então $\mathcal{F}_i^{\times} \cap \mathcal{F}_i''$ é um aberto e denso em $\mathcal{F}_i''$ na topologia C^1 e com isso 1.5 vale genericamente em $\mathcal{F}_i''$. Desta forma, Bothe verificou que a dimensão do atrator Δ é a esperada C^1-genericamente. Em seu trabalho, deixou duas perguntas sobre genericidade C^r. São elas:

Questão 1. *O Teorema (Bothe) 2 nos diz que qualquer mapa f de classe C^r, $r \geq 1$ em $\mathcal{F}_i'$ pode ser C^1 aproximado por mapas de classe C^1 em $\mathcal{F}_i'$ que tenham um atrator intrinsecamente transversal. Poderia f ser aproximada por mapas de classe C^r em $\mathcal{F}_i'$?*

Questão 2. *Seja f um mapa em $\mathcal{F}_i'$ e $\mathcal{U}(f)$ uma vizinhança de f em $\mathcal{F}_i'$ $(i = 1, 2)$. Existe sempre um mapa $g \in \mathcal{U}(f) \cap \mathcal{F}_i^{\times}$ que é definido pelos mesmos mapas $\varphi, \lambda_1, \lambda_2, z_{i'} (i' \neq i)$ como em f, isto é, poderia Δ ser intrinsecamente transversal com respeito a ρ_i por uma pequena pertubação de z_i sem alterar $\varphi, \lambda_1, \lambda_2, z_{i'}$?*

Note que estar em $\mathcal{F}_i^{\times}$ é equivalente a uma condição suficiente para sabermos calcular a dimensão de Hausdorff do atrator Δ.

É importante notar que , em superfícies, a dimensão de Hausdorff de um conjunto hiperbólico é igual a soma das dimensões de suas variedades estáveis e instáveis locais, onde ambas são obtidas através de um zero da pressão topológica como no Teorema citado acima, e por isso é diferenciável com respeito à dinâmica ((13),(20), (14)).

Em dimensão maior ou igual a 3, a dimensão de Hausdorff pode ser descontínua em relação à dinâmica ((4)), por isso apenas esperamos obter resultados da dimensão de Hausdorff para alguns exemplos específicos ou para dinâmicas genéricas.

No trabalho aqui apresentado, nós respondemos afirmativamente a uma pequena variação destas duas questões levantadas por Bothe para uma classe de aplicações que descreveremos adiante. Mais precisamente, nos termos colocados por Bothe acima, provamos que f pode ser C^r-aproximada por pertubações com os mesmos mapas $\varphi, \lambda_1, \lambda_2, z_{i'}$ de modo que a dimensão do atrator seja a esperada. Além disso, nossos resultados são válidos para dimensões arbitrárias, isto é, para atratores solenoidais em dimensão maior ou igual a 3.

A parte disso, B. Hasselblatt e J.Schmeling exibem em (9) a seguinte conjectura:

Conjectura 1. *A dimensão fractal de um conjunto hiperbólico é a soma das dimensões de suas partes estáveis e instáveis, onde "fractal"pode significar tanto dimensão de Hausdorff (*$\dim_H$*) ou "upper box dimension"(*$\overline{\dim}_B$*) (ver (7)).*

Em (9), B. Hasselblatt e J.Schmeling mostraram que tal conjectura é verdade para uma classe de solenoides. Neste trabalho os conjuntos instáveis do atrator terão dimensão l e para os conjuntos estáveis, representados por $\Delta_T(x)$, daremos condições para que tenham dimensão $s_0 p$ para todo $x \in \mathbb{T}^l$, onde s_0 é o único valor tal que $P(\sigma, s_0\phi) = 0$, em que P denota pressão topológica do deslocamento σ homeomorfo ao limite inverso com respeito à um determinado potencial geométrico que é definido com mais detalhes no Capítulo 3. Ou seja, no nosso contexto e sob certas condições, mostraremos que a conjectura acima é verdadeira e portanto teremos a dimensão esperada:

$$\overline{\dim}_B \Delta_T = \dim_H \Delta_T = l + s_0 p.$$

1.2 Resultados principais

Vamos agora apresentar o contexto e os resultados principais demonstrados neste trabalho. Iremos considerar um endomorfismo de classe $C^r,\ r \geq 1$,

$$T : \mathbb{T}^l \times E \times F \to \mathbb{T}^l \times E \times F,$$

dado por

$$T(x, y, z) = (\varphi(x), \psi(x, y), \nu(x, z)) \tag{1.6}$$

com $x \in \mathbb{T}^l$, $y \in E$ e $z \in F$, onde $\mathbb{T}^l = \mathbb{R}^l/\mathbb{Z}^l$ é um toro l-dimensional, $E \subset \mathbb{R}^d$ e $F \subset \mathbb{R}^p$ são abertos convexos e limitados contendo a origem e tais que $\text{diam}(E) \leq 1$ e $\text{diam}(F) \leq 1$. Além disso,

1. $\varphi : \mathbb{T}^l \to \mathbb{T}^l$ é expansora de grau $N \geq 2$;

2. $\psi : \mathbb{T}^l \times \mathbb{R}^d \to E$ e $\nu : \mathbb{T}^l \times \mathbb{R}^p \to F$ são aplicações de classe C^r, $r \geq 2$, tais que para $Y = \{0\} \times \mathbb{R}^d$, $Z = \{0\} \times \mathbb{R}^p$ e para cada $x \in \mathbb{T}^l$ fixado, temos:

   - $D_z\nu(x,z)|_Z$ é conforme, isto é,

$$\|D_z\nu(x,z)|_Z\| = \left\|\left(D_z\nu(x,z)|_Z\right)^{-1}\right\|^{-1} \tag{1.7}$$

   -

$$0 < \|(D_y\psi(x,y))\,|_Y\| < \|(D_z\nu(x,z))\,|_Z\| < 1 \tag{1.8}$$

O atrator é definido como

$$\Delta_T = \bigcap_{n\geq 0} \overline{T^n(V)}$$

e uma seção transversal em $x \in \mathbb{T}^l$ é $\Delta_T(x) = \Delta_T \cap \mathbb{D}(x)$ em que $\mathbb{D}(x) = \{x\} \times E \times F$. Denotamos ainda $\lambda(x,z) := \|(D_z\nu(x,z))\,|_Z\|$ e

$$\lambda_{max} = \sup\{\lambda(x,z) : (x,z) \in \mathbb{T}^l \times F\}.$$

Antes mesmo de saber sob quais condições explícitas conseguimos a dimensão esperada para o atrator Δ_T, mostramos que se λ_{max} for suficientemente pequeno, e usando o que chamaremos de *famílias transversais* é possível C^r-perturbar ν e sem alterar φ e ψ, para encontrar uma aplicação T' cuja a dimensão do atrator é a esperada. Mais precisamente teremos:

Teorema A. *Se* $0 < \lambda_{max} < \min\left\{\frac{1}{1+2\sqrt{p}}, N^{-\frac{1}{\min\{p,2\}}}\right\}$, *então existe inteiro* $k > 0$ *e uma família de dinâmicas* $\{T_{\boldsymbol{t}}\}$, C^r *com o parâmetro* $\boldsymbol{t} \in \mathbf{B}(\boldsymbol{0},\eta) \subset \mathbb{R}^k$, *com* $T_{\boldsymbol{0}} = T$ *tal que*

$$\dim_B(\Delta_{T_t}(x)) = \dim_H(\Delta_{T_t}(x)) = s_0 p,$$

para todo $x \in \mathbb{T}^l$ *fixado e para quase todo* $\boldsymbol{t}$. *Em particular, vale o cálculo da dimensão de Hausdorff para dinâmicas* $T_{\boldsymbol{t}}$ *arbitrariamente* C^r-*próximas de* T, *isto é, existe uma aplicação* $T_{\boldsymbol{t}}$ *arbitrariamente* C^r-*próxima de* T *tal que*

$$\dim_B(\Delta_{T_t}(x)) = \dim_H(\Delta_{T_t}(x)) = s_0 p \ ,\forall x \in \mathbb{T}^l \ e \quad \dim_B(\Delta_{T_t}) = \dim_H(\Delta_{T_t}) = l + s_0 p.$$

A técnica usada para provar o **Teorema A** é de potenciais (similar às dos trabalhos (7), (15) e (26)).

O **Teorema A**, embora seja genérico, não descreve explicitamente quais condições uma dinâmica T deve ter para termos a dimensão esperada do atrator. Em busca de tais condições, seguimos primeiramente as técnicas geométricas de Bothe (3). Definimos as projeções $\pi(x,y,z) = x$, $\rho_1(x,y,z) = (x,y)$ e $\rho_2(x,y,z) = (x,z)$. Além disso, consideramos

T definida como antes, porém sendo um mergulho de classe $C^r, r \geq 1$, e que temos $l \geq p$. Definindo o conjunto $\mathcal{T}_i^{\times}$ como o conjunto dos mergulhos T definidos como acima em que o atrator satisfaz uma condição de *transversalidade intrínseca com respeito a* $\rho_i,\ i = 1, 2$, condição esta que é dada no Capítulo 5, onde também definiremos o conjunto $\mathcal{T}_2^{**}$, concluiremos que se λ_{max} é *pequeno* e φ é *"perto de conforme"*, então $T \in \mathcal{T}_2^{\times} \cap \mathcal{T}_2^{**}$ implica que o atrator Δ_T tem a dimensão esperada. Em termos mais específicos teremos:

Teorema B. *Seja $T \in \mathcal{T}_2^{\times} \cap \mathcal{T}_2^{**}$. Então para cada $x \in \mathbb{T}^l$, vale que*

$$\dim_H (\Delta_T(x)) = s_0 p.$$

Isto implica que

$$\dim_B(\rho_2(\Delta_T)) = \dim_B(\Delta_T) = \dim_H (\Delta_T) = \dim_H(\rho_2(\Delta_T)) = l + s_0 p.$$

Tal como no trabalho do Bothe (3), o coração da prova do **Teorema B** está num resultado chamado de **Lema geométrico**. Esse resultado permite construir conjuntos auxiliares relacionados com os desejados onde o cálculo da dimensão de Hausdorff é possível.

O conjunto $\mathcal{T}_2^{**}$ envolvido no **Teorema B** exige condições restritivas sobre as contrações e sobre a expansão na base, mas garante a primeira parte do Teorema **para todo** $x \in \mathbb{T}^l$. Unindo as técnicas envolvidas na demonstração do **Teorema A** com a definição de transversalidade intrínseca, conseguimos provar que a dimensão de uma seção transversal do atrator em $\Delta_T(x)$ em x é a esperada, porém **para quase todo** $x \in \mathbb{T}^l$. No entanto, isto já é suficiente para provar que a dimensão do atrator é a esperada. Provamos o seguinte:

Teorema C. *Se $T \in \mathcal{T}_2^{\times}$ e $\lambda_{max} < N^{-\frac{1}{\min\{p,2\}}}$, então $\dim_B(\Delta_T(x)) = \dim_H(\Delta_T(x)) = s_0 p$ para quase todo $x \in \mathbb{T}^l$. Isto implica que*

$$\dim_B(\Delta_T) = \dim_H(\Delta_T) = l + s_0 p.$$

O **Teorema C** melhora o resultado em **Teorema B** no sentido de que é exigido menos do valor de λ_{max} para se obter a dimensão esperada para a atrator. Como são duas abordagens diferentes, escrevemos ambas neste trabalho, o **Teorema B** usando técnicas geométricas e o **Teorema C** usando técnicas analíticas.

1.3 Estrutura da tese

Os Capítulos 2 e 3 formam a base teórica preliminar para os resultados principais que estão contidos nos Capítulos 4, 5 e 6. São importantes na contextualização e na apresentação de ferramentas para a utilização ao longo desta Tese.

No Capítulo 2, iniciamos com breves comentários sobre hiperbolicidade de conjuntos. Em seguida descrevemos o atrator Δ_T como um conjunto hiperbólico e passamos a fazer a codificação simbólica da dinâmica T. Ressaltamos a importância das aplicações $S(x, \underline{a})$ na descrição dos pontos de Δ_T. Sugerimos os trabalhos (28) e (6) para ver mais sobre esta aplicação. Definimos outras aplicações auxiliares que serão importantes em definições nos capítulos seguintes.

No Capítulo 3, para estabelecer notação, definimos a dimensão de Hausdorff e citamos suas propriedades e resultados mais relevantes utilizados na tese. Aqui ressaltamos a importância do Teorema 3.1 para conjuntos com estrutura quase-produto em que sabemos a dimensão de um pedaço horizontal e uma cota inferior de cada pedaço vertical. Em seguida, definimos na Seção 3.2 outro conceito de dimensão, chamada box-counting dimension ou dimensão de Minkowski. Sugerimos as referências (7) para ver mais sobre Geometria Fractal. Após isto, definimos e citamos propriedades de Pressão Topológica, sugerimos as referências (29) e (10) para mais detalhes sobre pressão. Definimos na Seção 3.4 o potencial geométrico específico que será importante na obtenção do valor s_0 que zera a pressão com respeito a este potencial. Depois, de posse destas definições, calculamos uma cota superior da dimensão de Hausdorff para $\Delta_T(x)$ e para o Atrator. Na Seção 3.5, estabelecemos algumas propriedades da medida de Gibbs associada ao potencial geométrico definido anteriormente. Com estas propriedades, provamos na Seção 3.6 que a cota superior da box-couting dimension para projeção $\rho_2(\Delta_T(x))$, $\Delta_T(x)$ e Δ_T tem o mesmo valor esperado para a dimensão de Hausdorff. Finalizando o Capítulo 3, definimos o menor valor singular de uma aplicação linear. Tal definição ajuda a medir transversalidade.

No Capítulo 4, definimos famílias transversais $\{T_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^k}$ em termos da aplicação T. A condição de transversalidade neste capítulo está relacionada com o parâmetro $\mathbf{t}$. Provamos a existência de famílias transversais no Teorema 4.1. Calculamos a dimensão de $\rho_2(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}(x))$ utilizando uma técnica que envolve teoria do potencial. Finalizamos o Capítulo com a demonstração do primeiro resultado principal, o **Teorema A** .

No Capítulo 5, estendemos as técnicas encontradas em Bothe (3) para dimensões mais altas. Mostramos que a mesma abordagem, com as devidas generalizações, são aplicáveis para dimensões maiores que 3. Iniciamos descrevendo as condições para termos a cota inferior para a dimensão do atrator. Damos a definição de transversalidade intrínseca e definimos os conjuntos $\mathcal{T}_2^*, E_2^*$ *e* $\mathcal{T}_2^{**}$. Na Seção 5.2 tratamos sobre sobreposições de componentes do atrator e provamos uma série de resultados que serão fundamentais na prova do Lema geométrico 5.2 na Seção 5.3. Em seguida, construímos os conjuntos $\mathcal{E}'_{um}$, $C'(m)$ e $\Delta'_T(m)$ e provamos a cota inferior de pedaços do atrator. Construímos uma

holonomia instável de $\Delta'_T(x')$ para $\Delta_T(x)$ e, de posse de todos os resultados construídos no Capítulo, provamos o segundo resultado principal da tese que é o **Teorema B**.

Os Capítulos 4 e 5 podem ser lidos de forma independentes. Já os Capítulos 6 e 7 necessitam de definições e resultados encontrados nos anteriores.

No Capítulo 6, usamos a técnica da teoria do potencial utilizada no Capítulo 4 e a definição de transversalidade intrínseca do Capítulo 5 para obter um resultado que exige menos da contração e da expansora. Iniciamos com o enunciado do resultado principal do Capítulo. Em seguida demonstramos alguns resultados auxiliares e listamos outros semelhantes aos encontrados no Capítulo 4. A diferença principal se encontra no fato de que agora a condição transversalidade está relacionada com o ponto $x \in \mathbb{T}^l$. Terminamos com a demonstração do terceiro resultado principal, o **Teorema C**.

No Capítulo 7, iniciamos mostrando que a condição de transversalidade é uma condição aberta na topologia C^r. Tratamos em seguida sobre o caso particular, denominado **caso linear**, da dinâmica definida no Capítulo 2, que é o caso em que sabemos explicitar o valor de $s_0 p$. Damos também um exemplo não-genérico em que a dimensão da projeção do atrator não é a esperada. Depois, provamos que o produto de aplicações com transversalidade intrínseca ainda tem a condição de transversalidade intrínseca e citamos o exemplo do solenoide de Smale-Williams como um atrator que satisfaz a condição de transversalidade intrínseca. Terminamos o Capítulo tecendo comentários sobre possíveis direções futuras.

2 ATRATORES SOLENOIDAIS

Neste Capítulo vamos dar a noção de conjunto hiperbólico. Nos concentraremos nos atratores solenoidais e estabeleceremos a codificação através da qual estes conjuntos serão estudados neste trabalho.

2.1 Conjuntos Hiperbólicos

Inicialmente, vamos dar uma definição de conjunto hiperbólico para aplicações de classe $C^r,\ r \geq 1$, chamados de endomorfismos C^r. Para mais detalhes ver (16) e (21). Consideramos M uma variedade Riemanniana, $f : M \to M$ de classe C^r.

Definição 2.1. *Seja V um espaço vetorial normado. Suponhamos que $V = E \oplus F$. Dado $\theta > 0$, definimos o cone de abertura $\theta > 0$ centrado em E como o conjunto:*

$$C^1(\theta) := \{v \in V : v = v_1 \oplus v_2 \text{ onde } v_1 \in E \text{ e } v_2 \in F \ \text{ com } ||v_2|| \leq \theta||v_1||\}$$

De forma semelhante, podemos definir um cone de abertura $\theta > 0$ centrado em F como

$$C^2(\theta) = \{v \in V : v = v_1 \oplus v_2 \text{ onde } v_1 \in E \text{ e } v_2 \in F \ \text{ com } ||v_1|| \leq \theta||v_2||\}.$$

Definição 2.2. *Dada M uma variedade Riemanniana compacta, se existe uma decomposição $T_xM = E_x \oplus F_x$ do espaço tangente em x para cada $x \in M$, então definimos o campo de cones de abertura $\theta > 0$ centrado em E_x como a aplicação $x \longmapsto C(\theta)_x$ que a cada $x \in M$ associa um cone de abertura $\theta > 0$ em T_xM, centrado em E_x.*

Usaremos campos de cones para definir hiperbolicidade no caso em que f é endomorfismo.

Definição 2.3. *Um conjunto $\Delta \subset M$ é dito **hiperbólico** para f, quando é compacto, $f-$invariante, isto é, $f(\Delta) = \Delta$ e para todo $x \in \Delta$ existem uma norma $\|.\|$, um subespaço E^s_x de T_xM, um campo de cones $\Delta \ni x \longmapsto C^u_x \subset T_xM$ e constantes $K > 0$ e $\omega \in (0, 1)$ tais que:*

- $E^s_x \cap C^u_x = 0$ *e* $T_xM = E^s_x \oplus C^u_x$;
- $Df(x)(E^s_x) \subset E^s_{f(x)}$ *e* $Df(x)(C^u_x) \subset C^u_{f(x)}$;
- $||Df^n(x)v|| \leq K\omega^n||v||$, *para todo* $v \in E^s_x$ *e* $n \geq 0$;

- $||Df^n(x)v|| \geq K^{-1}\omega^{-n}||v||$, *para todo* $v \in C^u_x$ *e* $n \geq 0$.

O subespaço E^s_x determina o que chamamos de direção estável no espaço T_xM. Para obter as direções instáveis, considere para cada $x \in \Delta$ uma sequência $(x_{-n})_{n\geq 0}$ tal que $x_0 = x$ e $f(x_{-n}) = x_{-(n-1)}$, ou seja, a sequencia $(x_{-n})_n$ determina um único pré-itinerário de x. Assim, podemos definir o subespaço

$$E^u_{(x_{-n})} := \bigcap_{n\geq 0} Df^n(x_{-n})(C^u_{x_{-n}}).$$

Note que $E^u_{(x_{-n})}$ é $Df-$invariante no sentido que $Df(x)(E^u_{(x_{-n})}) = E^u_{(y_{-n})}$, em que $y_0 = f(x)$ e $y_{-n} = x_{-n+1}$, com $n \geq 1$, e para cada pré-itinerário de x existe uma decomposição do espaço tangente em x dado por

$$T_xM = E^s_x \oplus E^u_{(x_{-n})}.$$

Nestas condições, é possível obter os seguintes resultados:

Teorema 2.1. *(Variedade Estável) Se* Δ *é hiperbólico, então para cada* $x \in \Delta$*, existe uma única variedade* W^s_x *de classe* C^r *tangente a* E^s_x *e invariante, isto é,* $f(W^s_x) \subset W^s_{f(x)}$.

Para a variedade instável, como a decomposição do espaço tangente T_xM em x na direção instável não é única, pois depende do pré-itinerário escolhido de x, temos o seguinte:

Teorema 2.2. *(Variedade Instável) Se* Δ *é hiperbólico, então para cada* $x \in \Delta$ *e para cada escolha de pré-itinerário* $(x_{-n})_{n\geq 0}$ *de* x *em* Δ*, existe uma única variedade* $W^u_{(x_{-n})_n}$ *de classe* C^r *tangente a* $E^u_{(x_{-n})_n}$ *em* x *tal que* $f(W^u_{(x_{-n})_n}) = W^u_{(y_{-n})_{n\geq 0}}$*, em que* $y_0 = f(x)$ *e* $y_{-n} = x_{-n+1}$*, com* $n \geq 1$.

Os resultados acima podem ser obtidos do Teoremas de Hadamard-Perron, ver (10). Ou também pode ser encontrado em mais detalhes em (16) e (21).

Quando estivermos no caso em que $f : M \to M$ é difeomorfismo de classe C^r, então a definição de hiperbolicidade é dada como (ver (23),(27), (30) e (10)):

Definição 2.4. *Sejam* M *uma variedade Riemanniana,* $f : M \to M$ *um difeomorfismo de classe* C^r*,* $r \geq 1$*. Um conjunto* $\Delta \subset M$ *é dito* ***hiperbólico*** *para* f*, quando é compacto,* $f-$*invariante e para todo* $x \in \Delta$ *existem uma norma* $\|.\|$ *em* Δ*, subespaços* $E^s_x, E^u_x \subset T_xM$*, constantes* $K > 0$ *e* $\omega \in (0, 1)$ *tais que:*

- $T_xM = E^s_x \oplus E^u_x$;
- $Df(x)(E^s_x) = E^s_{f(x)}$ *e* $Df(x)(E^u_x) = E^u_{f(x)}$;

- $||Df^n(x)v|| \leq K\omega^n||v||$, *para todo* $v \in E^s_x$ *e* $n \geq 0$;
- $||Df^{-n}(x)v|| \leq K\omega^n||v||$, *para todo* $v \in E^u_x$ *e* $n \geq 0$.

Os espaços E^s_x *e* E^u_x *são chamados de direção estável e direção instável, respectivamente.*

Podemos também usar campos de cones para caracterizar as direções estáveis e instáveis. Mais precisamente, se existem os campos de cones $\Delta \ni x \longmapsto C^s_x$ e $\Delta \ni x \longmapsto C^u_x$ com dimensão constante tais que $Df^{-1}(x)(C^s_{f(x)}) \subsetneq C^s_x$ *e* $Df(x)(C^u_x) \subsetneq C^u_x$ para todo $x \in \Delta$ e existe $\sigma > 1$ tal que $||Df^{-1}(x)v|| \geq \sigma||v||$ para todo $v \in C^s_{f(x)}$ e $||Df(x)w|| \geq \sigma||w||$ para todo $w \in C^u_x$, então podemos tomar

$$E^s_x := \bigcap_{n\geq 0} Df^{-n}(x)C^s_{f^n(x)} \quad \text{e} \quad E^u_x := \bigcap_{n\geq 0} Df^n(f^{-n}(x))C^u_{f^{-n}(x)}.$$

Pode se mostrar que as direções estáveis e instáveis E^s_x e E^u_x variam continuamente com $x \in \Delta$.

Para cada $x \in \Delta$ considere

$$W^s(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty\},$$

$$W^u(x) = \{y \in M : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty\}.$$

Os conjuntos $W^s(x)$ e $W^s(x)$ são chamados de conjunto estável de x e conjunto instável de x, respectivamente. Dado $\epsilon > 0$, considere também

$$W^s_\epsilon(x) = \{y \in \mathbf{B}(x, \epsilon) : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon, \text{ para todo } n \geq 0\} \quad e$$

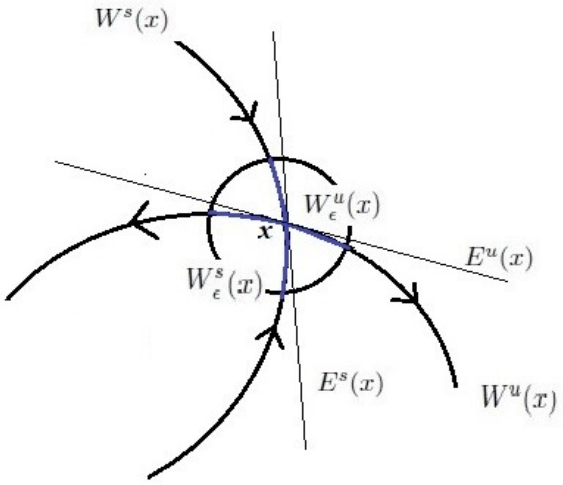
$$W^u_\epsilon(x) = \{y \in \mathbf{B}(x, \epsilon) : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \epsilon, \text{ para todo } n \geq 0\},$$

em que $\mathbf{B}(x, \epsilon)$ é a bola aberta de raio ϵ centrada em x.

Teorema 2.3. *(Variedade Instável) Sejam* $f : M \to M$ *um difeomorfismo de classe* C^r, $r \geq 1$, *e* $\Delta \subset M$ *um conjunto hiperbólico para* f. *Então existe* $\epsilon > 0$ *tal que para todo* $x \in \Delta$, $W^u_\epsilon(x)$ *é uma subvariedade* C^r *imersa em* M *com* $T_xW^u_\epsilon(x) = E^u_x$. *Além disso,* $W^u_\epsilon(x) \subset W^u(x)$ *e* $W^u(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^n(W^u_\epsilon(x))$ *é uma subvariedade* C^r *imersa em* M.

De forma semelhante, existe $\epsilon > 0$ tal que $W^s_\epsilon(x)$ é uma variedade C^r com $T_xW^s_\epsilon(x) = E^s_x$. Assim, $W^s_\epsilon(x)$ é a variedade estável local em x e $W^u_\epsilon(x)$ é a variedade instável local em x. Segue do Teorema 2.3, juntamente com a transversalidade e continuidade dos espaços E^s_x e E^u_x, que existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in \Delta$ e $d(x, y) < \delta$, então $W^s_\epsilon(x)$ e $W^u_\epsilon(y)$ se intersectam transversalmente em um único ponto.

Figura 2 – Variedades Estáveis e Instáveis.



Fonte: O autor (2021)

Na dinâmica apresentada neste trabalho as variedades estáveis locais serão bolas verticais (ou produto de bolas) e as variedades instáveis corresponderão aos gráficos de funções $S(.,\ \underline{a})$ que definiremos mais adiante, onde $\underline{a}$ serão sequências relacionadas com os pré-itinerários de x.

Definição 2.5. *Um conjunto $\Delta \subset M$ compacto é dito um atrator para $f : M \to M$ quando existe um aberto U, com $\Delta \subset U$, tal que $\overline{f(U)} \subset U$ e $\Delta = \bigcap_{n\geq 0} f^n(U)$.*

Proposição 2.1. *Seja $f : M \to M$, um difeomorfismo C^r, $r \geq 1$. Se $\Delta \subset M$ é um atrator hiperbólico para f, então $\Delta = \bigcup_{x\in\Delta} W^u(x)$.*

Demonstração. De fato, seja o aberto $U \subset M$ tal que $\Delta \subset U$ e $\Delta = \bigcap_{n\geq 0} f^n(U)$. Tome $x \in \Delta$ e $x_0 \in W^u(x)$. Temos $d(f^{-n}(x), f^{-n}(x_0)) \to 0$, quando $n \to \infty$. Como $f^{-n}(x) \in U$ para todo $n \geq 0$, segue que existe N grande tal que $f^{-N}(x_0) \in U$. Assim, $x_0 = f^N(f^{-N}(x_0)) \in U$. Se $x_0 \notin \Delta$, então existe N_0 tal que $x_0 \notin f^{N_0}(U)$, isto é, $f^{-N_0}(x_0) \notin U$. Supondo $N \geq N_0$, escrevendo $N - m = N_0$, temos $f^{-N_0}(x_0) = f^{-(N-m)}(x_0) = f^m(f^{-N}(x_0)) \notin U$. O que é absurdo. Portanto, $W^u(x) \subset \Delta$ e $\bigcup_{x\in\Delta} W^u(x) \subset \Delta$. A inclusão $\Delta \subset \bigcup_{x\in\Delta} W^u(x)$ é imediata. □

2.2 O atrator solenoidal Δ_T

Considere um toro l-dimensional $\mathbb{T}^l = \mathbb{R}^l/\mathbb{Z}^l = \mathbb{R}^l/\sim$, onde $\sim$ denota uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^l$ definida por $x \sim y$ se, e só se $x - y \in \mathbb{Z}^l$. Seja $V = \mathbb{T}^l \times E \times F$ em que $E \subset \mathbb{R}^d$ e $F \subset \mathbb{R}^p$ são abertos convexos e limitados contendo a origem. Suponha ainda que $\text{diam}(E) \leq 1$ e $\text{diam}(F) \leq 1$. Iremos considerar a princípio um endomorfismo de classe $C^r,\ r \geq 1$, $T : V \to V$, dado por

$$T(x, y, z) = (\varphi(x), \psi(x, y), \nu(x, z)),$$

com $x \in \mathbb{T}^l$, $y \in E$ e $z \in F$, onde teremos :

1. $\varphi : \mathbb{T}^l \to \mathbb{T}^l$ é expansora de grau $N \geq 2$, isto é, existe $\sigma > 1$ tal que

$$||D\varphi_x(v)|| \geq \sigma||v||, \quad \forall\ x \in \mathbb{T}^l\ , \quad \forall\ v \in T_x\mathbb{T}^l;$$

2. $\psi : \mathbb{T}^l \times \mathbb{R}^d \to E$ e $\nu : \mathbb{T}^l \times \mathbb{R}^p \to F$ são contrações de classe $C^r,\ r \geq 2$ tais que para $Y = \{0\} \times \mathbb{R}^d$, $Z = \{0\} \times \mathbb{R}^p$ e para cada $x \in \mathbb{T}^l$ fixado, supomos:

   - $D_z\nu(x, z)|_Z$ é conforme, isto é,

$$\|D_z\nu(x, z)|_Z\| = \left\|\left(D_z\nu(x, z)|_Z\right)^{-1}\right\|^{-1} \tag{2.1}$$

   - $D_y\psi$ e $D_z\nu$ são contrações e $D_y\psi$ contrai mais forte:

$$0 < \|(D_y\psi(x, y))\,|_Y\| < \|(D_z\nu(x, z))\,|_Z\| < 1 \tag{2.2}$$

Escreveremos $\lambda_2(x, z) := \|(D_z\nu(x, z))\,|_Z\|$ e

$$\lambda_{max} = \sup\{\lambda_2(x, z) : (x, z) \in \mathbb{T}^l \times F\}$$

$$\lambda_{min} = \inf\{\lambda_2(x, z) : (x, z) \in \mathbb{T}^l \times F\}.$$

Note que por 2.2 , temos $\|(D_y\psi(x, y))\,|_Y\| < \lambda_{max}$, para todo $(x, y, z) \in V$.

Analisando o comportamento da imagem $T(V)$, temos $\overline{T(V)} \subset V$ e vemos ainda que T expande V na direção do toro $\mathbb{T}^l$ e faz contrações na direção das verticais E e F, de modo que $T(V)$ deve se sobrepor N vezes dentro de V. Estamos interessados no seguinte subconjunto de V:

$$\Delta_T = \bigcap_{n \geq 0} \overline{T^n(V)}.$$

Temos que Δ_T é um conjunto compacto, não vazio e T-invariante, no sentido de que $T^{-1}(\Delta_T) = \Delta_T$, e também é um atrator para dinâmica T e por isso o denominamos *Atrator solenoidal*. Além disso, tem a seguinte propriedade:

Proposição 2.2. *Δ_T é um conjunto hiperbólico para a transformação $T : V \to V$.*

Demonstração. Para a direção estável tome o conjunto

$$E^s_{(x,y,z)} = \{0\} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p.$$

Temos $DT(x,y,z)E^s_{(x,y,z)} = E^s_{T(x,y,z)}$ e se $u_0 = (0,v,w) \in E^s_{(x,y,z)}$, então

$$DT^n(x,y,z)u_0 = (0, D\psi^n(x,y)(0,v), D\nu^n(x,y(0,w)).$$

De onde podemos concluir que $||DT^n(x,y,z)u_0|| \leq (\lambda_{max})^n||u_0||$.

Para a direção instável, vamos usar um argumento de cones. Note que existem L_1, L_2 positivos tais que $||D\psi_x(x,y)u|| \leq L_1||u||$ e $||D\nu_x(x,z)u|| \leq L_2||u||$, pois ψ e ν são C^r. Defina o Cone vertical como o seguinte conjunto

$$C^u_{(x,y,z)} = \{(u,v,w) \in T_{(x,y,z)}V \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p : ||(v,w)|| \leq \theta||u||\},$$

onde $||(v,w)|| = ||v|| + ||w||$ e $\theta = \dfrac{L_1 + L_2}{\sigma - \lambda_{max}}$.

Afirmação 2.1. *$DT(x,y,z)(u,v,w) \in C^u_{T(x,y,z)}$, para $(u,v,w) \in C^u_{(x,y,z)}$.*

De fato, para $(u,v,w) \in C^u_{(x,y,z)}$, escreva $\tilde{u} = D\varphi(x)(u)$, $\tilde{v} = D\psi(x,y)(u,v)$ e $\tilde{w} = D\nu(x,z)(u,w)$. Assim,

$$\begin{aligned}
||(\tilde{v},\tilde{w})|| &= ||(D\psi(x,y)(u,v), D\nu(x,z)(u,w))|| \\
&= ||D\psi(x,y)(u,v)|| + ||D\nu(x,z)(u,w)|| \\
&\leq \lambda_{max}(||v|| + ||w||) + (L_1 + L_2)||u|| \\
&\leq \lambda_{max}(||(v,w)||) + (L_1 + L_2)||u|| \\
&\leq (\lambda_{max}\theta + L_1 + L_2)||u||.
\end{aligned}$$

Como $||D\varphi(x)(u)|| \geq \sigma||u||$, temos:

$$||(\tilde{v},\tilde{w})|| \leq \left(\frac{\lambda_{max}\theta + L_1 + L_2}{\sigma}\right)||D\varphi(x)(u)|| = \left(\frac{\lambda_{max}\theta + L_1 + L_2}{\sigma}\right)||\tilde{u}|| = \theta||\tilde{u}||.$$

Afirmação 2.2. *Existe uma norma $||.||^*$ em $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ tal que*

$$||DT(x,y,z)(u,v,w)||^* \geq \sigma||(u,v,w)||^*, \quad \forall (u,v,w) \in C^u_{(x,y,z)}.$$

De fato, defina a norma em $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ por

$$||(u,v,w)||^* = \frac{1}{\theta}\max\{||(v,w)||, \theta||u||\}.$$

Note que $||(u,v,w)||^* = ||u||$ se $(u,v,w) \in C^u_{(x,y,z)}$. Logo,

$$||DT(x,y,z)(u,v,w)||^* = ||(D\varphi(x)(u), D\psi(x,y)(u,v), D\nu(x,z)(u,w))||^* = ||D\varphi(x)(u)||$$

$$\geq \sigma||u|| = \sigma||(u,v,w)||^*.$$

A desigualdade acima se deve a Afirmação 2.1 e pelo fato de que φ é expansora.

Note ainda que se $(0,v,w) \in E^s_{(x,y,z)}$, então

$$||DT^n(x,y,z)(0,v,w)||^* = \frac{1}{\theta}||(D\psi^n(x,y)(0,v), D\nu^n(x,z)(0,w))||$$

$$\leq \frac{2(\lambda_{max})^n}{\theta}||(v,w)|| = 2(\lambda_{max})^n||(0,v,w)||^*.$$

Além disso, temos

$$T_{(x,y,z)}V = E^s_{(x,y,z)} + C^u_{(x,y,z)} \text{ e } E^s_{(x,y,z)} \cap C^u_{(x,y,z)} = 0.$$

Portanto, concluímos que Δ_T é um conjunto hiperbólico para T. □

Definimos os conjuntos $A_1 = \mathbb{T}^l \times \mathbb{I}^d$ e $A_2 = \mathbb{T}^l \times \mathbb{I}^p$, onde $\mathbb{I} = [-1,1]$. Vamos considerar no decorrer do texto as seguintes projeções:

1. $\pi : V \to \mathbb{T}^l$ em que $\pi(x,y,z) = x$;
2. $\rho_1 : V \to A_1$ onde $\rho_1(x,y,z) = (x,y)$ e $\rho_2 : V \to A_2$ em que $\rho_2(x,y,z) = (x,z)$.

Como estamos considerando ν sendo a contração mais fraca, em geral denotaremos apenas $\rho = \rho_2$ e $A = A_2$.

Para cada $x \in \mathbb{T}^l$, vamos escrever $\mathbb{D}(x) = \{x\} \times E \times F$. Note que $\mathbb{D}(x) = \pi^{-1}(x)$. Denotaremos ainda o conjunto

$$\Delta_T(x) = \Delta_T \cap \mathbb{D}(x) = \left(\bigcap_{n\geq 0} \overline{T^n(V)}\right) \cap \mathbb{D}(x).$$

O conjunto $\Delta_T(x)$ é o que chamaremos de *seção transversal ao atrator Δ_T no ponto $x \in \mathbb{T}^l$.*

2.3 Codificação da dinâmica

Para estudarmos a dinâmica do atrator solenoidal vamos considerar uma partição de Markov de φ para o toro $\mathbb{T}^l$.

Definição 2.6. *Considere $\varphi : M \to M$ uma transformação expansora de classe C^1 em uma variedade compacta. Uma coleção $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, ..., R_n\}$ de abertos disjuntos é dita uma* ***Partição de Markov*** *de φ para M se:*

1. $\bigcup_{j=1}^{n} \overline{R_j} = M$
2. *Para todo ramo contrativo g de φ^{-1} e todo $j = 1, 2..., n$, vale que*

$$g(R_i) \cap R_j \neq \emptyset \Longrightarrow g(R_i) \subset R_j.$$

Lembremos que se $\varphi : M \to M$ é expansora e $S \subset M$, então $g : S \to M$ é ramo contrativo de φ^{-1} quando $\varphi \circ g(x) = x$, para todo $x \in S$, e

$$d(g(x), g(y)) \leq \delta\left(d(x, y)\right), \ \forall x, y \in S, \qquad com\ 0 < \delta < 1.$$

Dados $x \in M$ e $p \in \varphi^{-1}(x)$, é possível encontrar $g : \mathcal{B}(x, r) \to M$, $r > 0$, ramo contrativo de φ^{-1} com $g(x) = p$. Sabe-se ainda que existem partições de Markov de φ com diâmetro arbitrariamente pequeno (para mais detalhes sobre partições de Markov ver, por exemplo (2) e (12)).

Voltemos então para a transformação $T : V \to V$, dada por

$$T(x, y, z) = (\varphi(x), \psi(x, y), \nu(x, z)),$$

em que φ, ψ e ν são aplicações com as propriedades já citadas no Seção anterior. Considere $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, ..., R_s\}$ uma partição de Markov de $\mathbb{T}^l$ com respeito a φ. Suponha que o diâmetro $\gamma = \text{diam}(\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}$ seja tal que $0 < \gamma < \min\{\frac{1}{2}, \alpha\}$, em que α é a constante de expansividade de φ. Vamos considerar ainda γ suficientemente pequeno de modo que os ramos contrativos inversos $g_x : \mathbf{B}(x, \gamma) \to \mathbb{T}^l$ estejam bem definidos, isto é, $\varphi|_{\mathbf{B}(x,\gamma)}$ é injetora para $x \in \mathbb{T}^l$.

Considere $I = \{1, 2, ..., s\}$ e I^n o conjunto de palavras com comprimento n e com letras em I. Defina em I^n o seguinte subconjunto:

$$\mathcal{E}_n = \{\underline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in I^n : \varphi(R_{a_j}) \cap R_{a_{j+1}} \neq \emptyset, \ \forall j = 1, ..., n-1\}.$$

Note que $\bigcap_{j\geq 0}^{n-1} \varphi^{-j}(R_{a_{j+1}})$ é não vazio se, e somente se $\underline{a} \in \mathcal{E}_n$ e que a cardinalidade de $\mathcal{E}_n$ é sN^{n-1}. As palavras em $\mathcal{E}_n$ serão ditas **admissíveis**. Diremos que a palavra $\underline{a} =$

$(a_1, a_2, ..., a_m) \in \mathcal{E}_m$ aparece em $\underline{\hat{a}} \in \mathcal{E}_n$, quando $n \geq m$ e para algum $j_0 \in \{0, 1, ..., n-m\}$ temos $\hat{a}_{j_0+j} = a_j$, com $j = 1, ..., m$. Vamos considerar as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{ccc} \pi_m : \bigcup\limits_{m\leq n\leq\infty} \mathcal{E}_n & \longrightarrow & \mathcal{E}_m \\ (a_1, a_2, ..., a_n) & \longmapsto & (a_1, a_2, ..., a_m) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \sigma : \mathcal{E}_n & \longrightarrow & \mathcal{E}_{n-1} \\ (a_1, a_2, ...) & \longmapsto & (a_2, a_3, ...). \end{array}$$

Defina também $\tau : \mathcal{E}_\infty \longrightarrow \mathbb{T}^l$ por

$$\tau(a_1, a_2, ...) = R_{a_1} \cap \varphi^{-1}(R_{a_2}) \cap \varphi^{-2}(R_{a_3}) \cap ... = \bigcap_{j\geq 0} \varphi^{-j}(R_{a_{j+1}}).$$

Observemos que τ está bem definida, pois basta considerar o diâmetro da partição de Markov tão pequeno de modo que a imagem de qualquer $\underline{a} = (a_1, a_2, ..) \in \mathcal{E}_\infty$ por τ é apenas um ponto. Note ainda que τ é injetora . Além disso, se $\underline{a} = (a_1, a_2, ..) \in \mathcal{E}_\infty$, então

$$\varphi(\tau(\underline{a})) = \varphi(\bigcap_{j\geq 0} \varphi^{-j}(R_{a_{j+1}})) = \bigcap_{j\geq 0} \varphi^{-j+1}(R_{a_{j+1}})$$

$$= \varphi(R_{a_1}) \cap \left(\bigcap_{j\geq 0} \varphi^{-j}(R_{a_{j+2}}) \right) = \bigcap_{j\geq 0} \varphi^{-j}(R_{a_{j+2}}) = \tau(\sigma(\underline{a}))).$$

A ultima igualdade se deve a definição dos conjuntos $\mathcal{E}_n$.

Para cada $\underline{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathcal{E}_n(\ 1 \leq n < \infty)$, o conjunto

$$\mathbf{T}'_{\underline{a}} = R_{a_1} \cap \varphi^{-1}(R_{a_2}) \cap ... \cap \varphi^{-(n-1)}(R_{a_n}) = \bigcap_{j\geq 0}^{n-1} \varphi^{-j}(R_{a_{j+1}})$$

é um aberto de $\mathbb{T}^l$. Denotaremos $\mathbf{T}_{\underline{a}} = \overline{\mathbf{T}'_{\underline{a}}}$. Fixado n, a família $\mathcal{T}_n$ dos conjuntos $\mathbf{T}_{\underline{a}}$, com $\underline{a} \in \mathcal{E}_n$, é uma partição de $\mathbb{T}^l$ em conjuntos que podem se intersectar na fronteira. Assim, dado um subconjunto $B \subset \mathbb{T}^l$, temos que duas componentes de $T^k(V) \cap \pi^{-1}(B)$ são descritas por palavras $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{E}_k$ tais que $\varphi^k(\mathbf{T}_{\underline{a}}) \cap B \neq \emptyset$ e $\varphi^k(\mathbf{T}_{\underline{b}}) \cap B \neq \emptyset$.

Dados $x, x_0 \in \mathbf{T}_{\underline{a}}$ em $\mathcal{T}_n$ e denotando por $\underline{\beta} = (\sup ||(D\varphi)^{-1}||)^{-1}$ e $\overline{\beta} = \sup(||D\varphi||)$, temos que

$$\overline{\beta}^{(1-n)}||\varphi^{n-1}(x) - \varphi^{n-1}(x_0)|| \leq ||x - x_0|| \leq \underline{\beta}^{(1-n)}||\varphi^{n-1}(x) - \varphi^{n-1}(x_0)||.$$

De fato, basta aplicar a desigualdade do valor médio sucessiva vezes para φ e um ramo contrativo g de φ^n. Dessa forma, concluímos que o diâmetro D_n de cada um dos elementos de $\mathcal{T}_n$ é tal que

$$\delta_0 \overline{\beta}^{(1-n)} \leq D_n \leq \underline{\beta}^{(1-n)}\gamma,$$

em que $\delta_0 = \min\limits_{1\leq j\leq s} diam(R_j)$. Daí, $D_n \to 0$, quando $n \to \infty$.

Notemos ainda que se $\underline{a} \in \mathcal{E}_n$, com $1 < n < \infty$, então $\varphi(\mathbf{T}_{\underline{a}}) = \mathbf{T}_{\sigma(\underline{a})}$ e, para $1 \leq m < n < \infty$, se $\underline{a} \in \mathcal{E}_m$, então $\mathbf{T}_{\underline{a}} = \bigcup\limits_{\underline{a}' \in \mathcal{E}_n,\ \pi_m(\underline{a}') = \underline{a}} \mathbf{T}_{\underline{a}'}$.

2.4 Descrição das componentes do atrator

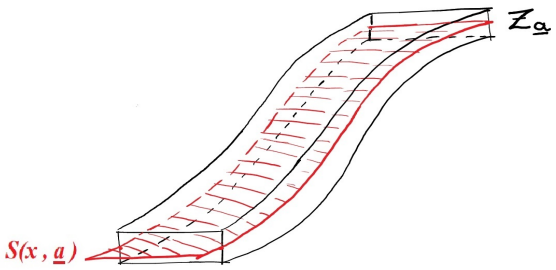
Para cada $x \in \mathbb{T}^l$, fixe e denote por $s(x)$ uma letra em I tal que $x \in \overline{R}_{s(x)}$, a qual é única em quase todo ponto x. Definimos o conjunto $I^n(x) := \{\underline{a} \in \mathcal{E}_n : \varphi^n(\mathbf{T}_{\underline{a}}) \cap \overline{R}_{s(x)} \neq \emptyset\}$. Dado $\underline{a} \in I^n(x)$, denotaremos $\underline{a}(x)$ como o ponto x_0 em $\mathbf{T}_{\underline{a}}$ tal que $\varphi^n(x_0) = x$. Denotaremos ainda por $[\underline{a}]_j(x)$ o elemento em $\bigcap_{i\geq 0}^{j-1} \varphi^{-i}(R_{a_{i+1}})$ tal que $\varphi^j([\underline{a}]_j(x)) = x$ e por $[\underline{a}]_j = \pi_j(\underline{a}) \in I^j(x)$.

Seja $\mathbb{D}(\underline{a}) = \{x \in \mathbb{T}^l : \underline{a} \in I^n(x)\}$ e para cada $x \in \mathbb{T}^l$ escreva $\psi(x, y) = \psi_x(y)$ e $\nu(x, z) = \nu_x(z)$. A imagem de $\mathbf{T}_{\underline{a}} \times \{0\} \times \{0\}$ por T^n é o gráfico da aplicação $S(., \underline{a}) : \mathbb{D}(\underline{a}) \subset \mathbb{T}^l \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ dada por

$$S(x, \underline{a}) = \left(\psi_{[\underline{a}]_1(x)} \circ \psi_{[\underline{a}]_2(x)} \circ ... \circ \psi_{\underline{a}(x)}(0),\ \nu_{[\underline{a}]_1(x)} \circ \nu_{[\underline{a}]_2(x)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}(x)}(0)\right). \tag{2.3}$$

Dado um aberto $B \subset \mathbb{T}^l$, uma componente $Z_{\underline{a}}$ de $T^n(V) \cap \pi^{-1}(B)$ está contida numa vizinhança tubular de raio menor ou igual a $(\lambda_{max})^n$ do gráfico de $S(., \underline{a})$.

Figura 3 – Ilustração de $(x, S(x, \underline{a}))$ e $Z_{\underline{a}}$



Fonte: O autor (2021)

Vamos considerar também o conjunto $I^\infty(x) = \{\underline{a} \in \mathcal{E}_\infty : [\underline{a}]_i \in I^i(x)\}$.

Proposição 2.3. *Fixe $x \in \mathbb{T}^l$ e seja $\underline{a} \in I^\infty(x)$. Temos que a sequência $(S(x, [\underline{a}]_n))_{n\geq 1}$ é de Cauchy.*

Demonstração. De fato, tome $m, n \geq 1$ com $m > n$, então

$$||S(x, [\underline{a}]_m) - S(x, [\underline{a}]_n)|| = ||\psi_{[[\underline{a}]_n]_1(x)} \circ ... \circ \psi_{[\underline{a}]_n(x)}(y_0) - \psi_{[[\underline{a}]_n]_1(x)} \circ ... \circ \psi_{[\underline{a}]_n(x)}(0)$$

$$, \nu_{[[\underline{a}]_n]_1(x)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}]_n(x)}(z_0)) - \nu_{[[\underline{a}]_n]_1(x)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}]_n(x)}(0)||$$

em que $y_0 = \psi_{[[\underline{a}]_m]_{n+1}(x)} \circ ... \circ \psi_{\underline{a}]_m(x)}(0)$ e $z_0 = \nu_{[[\underline{a}]_m]_{n+1}(x)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}]_m(x)}(0)$. Assim,

$$||S(x,[\underline{a}]_m) - S(x,[\underline{a}]_n)|| \leq Lip(\psi_{[[\underline{a}]_n]_1(x)} \circ ... \circ \psi_{\underline{a}]_n(x)})||y_0 - 0|| + Lip(\nu_{[[\underline{a}]_n]_1(x)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}]_n(x)})||z_0 - 0||.$$

Agora note que

$$||y_0 - 0|| < 1,$$

$$||z_0 - 0|| < 1,$$

$$Lip(\psi_{[[\underline{a}]_n]_1(x)} \circ ... \circ \psi_{\underline{a}]_n(x)}) < (\lambda_{max})^n$$

$$e\ Lip(\nu_{[[\underline{a}]_n]_1(x)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}]_n(x)}) < (\lambda_{max})^n$$

Portanto,

$$||S(x,[\underline{a}]_m) - S(x,[\underline{a}]_n)|| \leq 2(\lambda_{max})^n.$$

Dado $\epsilon > 0$, basta tomar m, n grandes o suficiente para que $(\lambda_{max})^n < \epsilon$. □

Seja $\mathbb{D}(\underline{a}) := \{x \in \mathbb{T}^l : \underline{a} \in I^\infty(x)\}$, definimos então

$$S(x,\underline{a}) := \lim_{n\to\infty} S(x,[\underline{a}]_n), \text{ para } \underline{a} \in I^\infty(x).$$

Temos para $\underline{a} \in I^n(x)$, que

$$\begin{aligned} DS(x,\underline{a}) := \quad & (D_x\psi(x_1,y_1)D\varphi^{-1}(x_1) + \sum_{i=2}^{n}(\prod_{j=1}^{i-1} D_y\psi(x_j,y_j))(D_x\psi(x_i,y_i))(D\varphi^i(x_i))^{-1}, \\ & D_x\nu(x_1,z_1)D\varphi^{-1}(x_1) + \sum_{i=2}^{n}(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(x_j,z_j))(D_x\nu(x_i,z_i))(D\varphi^i(x_i))^{-1}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

em que $x_i = [\underline{a}]_i(x)$, $y_i = \psi_{[\underline{a}]_{i+1}(x)} \circ ... \circ \psi_{\underline{a}(x)}(0)$, $y_n = 0$, $z_i = \nu_{[\underline{a}]_{i+1}(x)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}(x)}(0)$ e $z_n = 0$.

Observação 1. *Note que y_i e z_i dependem do ponto x fixado e da palavra $\underline{a} \in I^n(x)$. Desta forma, quando for conveniente, os denotaremos $y_i^{\underline{a}}(x)$ e $z_i^{\underline{a}}(x)$ para deixar claro sobre qual o ponto x e qual palavra $\underline{a}$ estamos lidando.*

Proposição 2.4. *Para cada $x \in \mathbb{T}^l$ e $\underline{a} \in I^\infty(x)$ a sequência $(DS(x,[\underline{a}]_n))_{n\geq 1}$ é de Cauchy, portanto converge.*

Demonstração. Para ver isto, vamos considerar apenas a primeira entrada e abusaremos da notação em $\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{i-1} D_y\psi(x_j,y_j))(D_x\psi(x_i,y_i))(D\varphi^i(x_i))^{-1}$ no sentido de que para $i = 1$

teremos $D_x\psi(x_1,y_1)D\varphi^{-1}(x_1)$. Para $m,n\geq 1$, com $m>n$, escreva $y_i^{[\underline{a}]_m}=\psi_{[\underline{a}]_{i+1}(x)}\circ ...\circ \psi_{[\underline{a}]_m(x)}(0)$ e $y_i^{[\underline{a}]_n}=\psi_{[\underline{a}]_{i+1}(x)}\circ ...\circ \psi_{[\underline{a}]_n(x)}(0)$. Note que $||y_i^{[\underline{a}]_m}-y_i^{[\underline{a}]_n}||\leq(\lambda_{max})^{n-i}$. Temos

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\left((\prod_{j=1}^{i-1}D_y\psi(x_j,y_j^{[\underline{a}]_m}))(D_x\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_m}))-(\prod_{j=1}^{i-1}D_y\psi(x_j,y_j^{[\underline{a}]_n}))(D_x\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_n}))\right)(D\varphi^i(x_i))^{-1}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=n+1}^{m}\left((\prod_{j=1}^{i-1}D_y\psi(x_j,y_j^{[\underline{a}]_m}))(D_x\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_m}))\right)(D\varphi^i(x_i))^{-1}\right\|$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}\left\|\left((\prod_{j=1}^{i-1}D_y\psi(x_j,y_j^{[\underline{a}]_m}))(D_x\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_m}))-(\prod_{j=1}^{i-1}D_y\psi(x_j,y_j^{[\underline{a}]_m}))(D_x\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_n}))\right)\right\|$$

$$||(D\varphi^i(x_i))^{-1}||$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left\|\left((\prod_{j=1}^{i-1}D_y\psi(x_j,y_j^{[\underline{a}]_m}))(D_x\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_n}))-(\prod_{j=1}^{i-1}D_y\psi(x_j,y_j^{[\underline{a}]_n}))(D_x\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_n}))\right)\right\|$$

$$||(D\varphi^i(x_i))^{-1}||$$

$$+\sum_{i=n+1}^{m}\left\|\left((\prod_{j=1}^{i-1}D_y\psi(x_j,y_j^{[\underline{a}]_m}))(D_x\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_m}))\right)\right\|||(D\varphi^i(x_i))^{-1}||$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\|(\prod_{j=1}^{i-1}D_y\psi(x_j,y_j^{[\underline{a}]_m}))\left((D_x\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_m}))-(D_x\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_n}))\right)\right\|||(D\varphi^i(x_i))^{-1}||$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left\|(D_x\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_n}))\left((\prod_{j=1}^{i-1}D_y\psi(x_j,y_j^{[\underline{a}]_m}))-(\prod_{j=1}^{i-1}D_y\psi(x_j,y_j^{[\underline{a}]_n}))\right)\right\|||(D\varphi^i(x_i))^{-1}||$$

$$+\sum_{i=n+1}^{m}\left\|\left((\prod_{j=1}^{i-1}D_y\psi(x_j,y_j^{[\underline{a}]_m}))(D_x\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_m}))\right)\right\|||(D\varphi^i(x_i))^{-1}||.$$

Fixe constantes positivas L_1 e L_0 tais que

$$||(D_x\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_m}))-(D_x\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_n})||\leq L_1||y_i^{[\underline{a}]_m}-y_i^{[\underline{a}]_n}||\leq L_1(\lambda_{max})^{n-i}$$

$$||(D_y\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_m}))-(D_y\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_n})||\leq L_0||y_i^{[\underline{a}]_m}-y_i^{[\underline{a}]_n}||\leq L_0(\lambda_{max})^{n-i}.$$

Além disso, $||(D_y\psi(x_i,y_i^{[\underline{a}]_m}))||\leq\lambda_{max}$, $||(D\varphi^i(x_i))^{-1}||\leq\underline{\beta}^{-i}$ e

$$||(\prod_{j=1}^{i-1}D_y\psi(x_j,y_j^{[\underline{a}]_m}))-(\prod_{j=1}^{i-1}D_y\psi(x_j,y_j^{[\underline{a}]_n}))||$$

$$\leq||\left(D_y\psi(x_1,y_1^{[\underline{a}]_m})-D_y\psi(x_1,y_1^{[\underline{a}]_n})\right)D_y\psi(x_2,y_2^{[\underline{a}]_m})D_y\psi(x_3,y_3^{[\underline{a}]_m})...D_y\psi(x_{i-1},y_{i-1}^{[\underline{a}]_m})||+$$

$$||D_y\psi(x_1,y_1^{[\underline{a}]_n})\left(D_y\psi(x_2,y_2^{[\underline{a}]_m})-D_y\psi(x_2,y_2^{[\underline{a}]_n})\right)D_y\psi(x_3,y_3^{[\underline{a}]_m})...D_y\psi(x_{i-1},y_{i-1}^{[\underline{a}]_m})||+...$$

$$+||D_y\psi(x_1, y_1^{[\underline{a}]_n})D_y\psi(x_2, y_2^{[\underline{a}]_n})D_y\psi(x_3, y_3^{[\underline{a}]_n})... \left(D_y\psi(x_{i-1}, y_{i-1}^{[\underline{a}]_m}) - D_y\psi(x_{i-1}, y_{i-1}^{[\underline{a}]_n})\right)||$$
$$\leq L_0(\lambda_{max})^{i-2}\left\{(\lambda_{max})^{n-1} + (\lambda_{max})^{n-2} + ... + (\lambda_{max})^{n-(i-1)}\right\}$$
$$= L_0(\lambda_{max})^{n-1}\left\{(\lambda_{max})^{i-2} + (\lambda_{max})^{i-3} + ... + 1\right\}.$$

Ou seja,

$$||(\prod_{j=1}^{i-1} D_y\psi(x_j, y_j^{[\underline{a}]_m})) - (\prod_{j=1}^{i-1} D_y\psi(x_j, y_j^{[\underline{a}]_n}))|| \leq L_0(\lambda_{max})^{n-1}\left(\frac{1}{1-\lambda_{max}}\right).$$

Portanto,

$$||\sum_{i=1}^{n}\left((\prod_{j=1}^{i-1} D_y\psi(x_j, y_j^{[\underline{a}]_m}))(D_x\psi(x_i, y_i^{[\underline{a}]_m})) - (\prod_{j=1}^{i-1} D_y\psi(x_j, y_j^{[\underline{a}]_n}))(D_x\psi(x_i, y_i^{[\underline{a}]_n}))\right)(D\varphi^i(x_i))^{-1}$$
$$+\sum_{i=n+1}^{m}\left((\prod_{j=1}^{i-1} D_y\psi(x_j, y_j^{[\underline{a}]_m}))(D_x\psi(x_i, y_i^{[\underline{a}]_m}))\right)(D\varphi^i(x_i))^{-1}||$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} L_1(\lambda_{max})^{i-1}(\lambda_{max})^{n-i}(\underline{\beta}^{-i}) + \sum_{i=1}^{n} L_1L_0(\lambda_{max})^{n-1}\left(\frac{1}{1-\lambda_{max}}\right)(\underline{\beta}^{-i})$$
$$+\sum_{i=n+1}^{m} L_1(\lambda_{max})^{i-1}(\underline{\beta}^{-i})$$
$$= L_1(\lambda_{max})^{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\underline{\beta}^{-i}) + \left(\frac{L_1L_0(\lambda_{max})^{n-1}}{1-\lambda_{max}}\right)\sum_{i=1}^{n}(\underline{\beta}^{-i}) + \sum_{i=n+1}^{m} L_1(\lambda_{max})^{i-1}(\underline{\beta}^{-i})$$

Dado $\epsilon > 0$, tomamos n grande de modo que $L_1\sum_{i=n+1}^{m}(\lambda_{max})^{i-1}(\underline{\beta}^{-i}) < \frac{\epsilon}{4}$ e

$$\left(L_1(\lambda_{max})^{n-1} + \left(\frac{L_1L_0(\lambda_{max})^{n-1}}{1-\lambda_{max}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(\underline{\beta}^{-i})\right) < \frac{\epsilon}{4}.$$

Chegamos a mesma conclusão considerando a entrada relacionada com $\nu(x, z)$. Concluímos então se $m, n \geq 1$ são grandes o suficiente, então

$$||DS(x, [\underline{a}]_m) - DS(x, [\underline{a}]_n)|| < \epsilon.$$

□

Para $m, n \geq 1$, com $m > n$, temos $||y_i^{[\underline{a}]_m} - y_i^{[\underline{a}]_n}|| \leq (\lambda_{max})^{n-i}$ e $||z_i^{[\underline{a}]_m} - z_i^{[\underline{a}]_n}|| \leq (\lambda_{max})^{n-i}$. Assim, vamos denotar para cada $\underline{a} \in I^{\infty}(x)$ os seguintes limites

$$y_i^{\underline{a}} := \lim_{n\to\infty} y_i^{[\underline{a}]_n} = \lim_{n\to\infty} \psi_{[\underline{a}]_{i+1}(x)} \circ ... \circ \psi_{[\underline{a}]_n(x)}(0)$$

$$z_i^{\underline{a}} := \lim_{n\to\infty} z_i^{[\underline{a}]_n} = \lim_{n\to\infty} \nu_{[\underline{a}]_{i+1}(x)} \circ ... \circ \nu_{[\underline{a}]_n(x)}(0).$$

Escreveremos também

$$\begin{aligned} DS(x,\underline{a}) &= \lim_{n\to\infty}(DS(x,[\underline{a}]_n)) \\ = \quad & (D_x\psi(x_1, y_i^{\underline{a}})D\varphi^{-1}(x_1) + \sum_{i=2}^{\infty}(\prod_{j=1}^{i-1} D_y\psi(x_j, y_j^{\underline{a}}))(D_x\psi(x_i, y_i^{\underline{a}}))(D\varphi^i(x_i))^{-1}, \\ & D_x\nu(x_1, z_i^{\underline{a}})D\varphi^{-1}(x_1) + \sum_{i=2}^{\infty}(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(x_j, z_j^{\underline{a}}))(D_x\nu(x_i, z_i^{\underline{a}}))(D\varphi^i(x_i))^{-1}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

em que $x_i = [\underline{a}]_i(x)$.

Passamos agora a uma Proposição que caracteriza os pontos do atrator através da aplicações $S(x.\underline{a})$. De fato, o atrator é formado pelos gráficos das aplicações $S(.,\underline{a})$.

Proposição 2.5. *Se $(x,y,z) \in \Delta_T$, então $(x,y,z) = (x, S(x,\underline{b}))$ para algum $\underline{b} \in I^\infty(x)$.*

Demonstração. De fato, como $(x,y,z) \in \Delta_T$, podemos para cada $n \geq 0$ tomar $\underline{a}_n \in I^n(x)$ tal que $(y,z) = S(x,\underline{a}_n) + (y_n, z_n)$, com $(x, y_n, z_n) \in \mathbb{D}(x)$ para todo $n \geq 0$. Tomando $\underline{u}_n \in I^n(\underline{a}_n(x))$, temos

$$\begin{aligned} ||(y,z) - S(x,\underline{a}_n\underline{u}_n)|| &\leq ||(y,z) - S(x,\underline{a}_n)|| + ||S(x,\underline{a}_n) - S(x,\underline{a}_n\underline{u}_n)|| \\ &\leq 2(\lambda_{max})^n + ||S(x,\underline{a}_n) - S(x,\underline{a}_n\underline{u}_n)||. \end{aligned}$$

Escrevendo $y_0 = \psi_{[\underline{u}_n]_1(\underline{a}_n(x))} \circ ... \circ \psi_{\underline{u}_n(\underline{a}_n(x))}(0)$ e $z_0 = \psi_{[\underline{u}_n]_1(\underline{a}_n(x))} \circ ... \circ \psi_{\underline{u}_n(\underline{a}_n(x))}(0)$, temos

$$||y_0 - 0|| \leq 1 \ e \ ||z_0 - 0|| \leq 1.$$

Como

$$\begin{aligned} ||S(x,\underline{a}_n) - S(x,\underline{a}_n\underline{u}_n)|| = ||&(\psi_{[\underline{a}_n]_1(x)} \circ ... \circ \psi_{\underline{a}_n(x)}(0) - \psi_{[\underline{a}_n]_1(x)} \circ ... \circ \psi_{\underline{a}_n(x)}(y_0), \\ &\nu_{[\underline{a}_n]_1(x)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}_n(x)}(0) - \nu_{[\underline{a}_n]_1(x)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}_n(x)}(z_0))|| \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} ||S(x,\underline{a}_n) - S(x,\underline{a}_n\underline{u}_n)|| &\leq Lip(\psi_{[\underline{a}_n]_1(x)} \circ ... \circ \psi_{\underline{a}_n(x)})||y_0 - 0|| + Lip(\nu_{[\underline{a}_n]_1(x)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}_n(x)})||z_0 - 0|| \\ &\leq (Lip(\psi_{[\underline{a}_n]_1(x)} \circ ... \circ \psi_{\underline{a}_n(x)}) + Lip(\nu_{[\underline{a}_n]_1(x)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}_n(x)})). \\ &\leq 2(\lambda_{max})^n. \end{aligned}$$

Logo, fazendo $n \to \infty$ e notando $I^\infty(x)$ é um conjunto compacto, segue que $(y,z) = S(x,\underline{b})$ em que $\underline{b} \in I^\infty(x)$ é algum ponto para o qual alguma subsequência de $(\underline{a}_n\underline{u}_n)$ converge quando $n \to \infty$.

□

Desta forma, com a Proposição 2.5 acima, vemos que a aplicação $S(.,\underline{a})$ será útil na descrição do conjunto Δ_T. Além disso, para $x \in \mathbb{T}^l$ fixo e também fixado um pré-itinerário, aqui descrito por uma palavra $\underline{a} \in I^\infty(x)$, temos que $DS(x,\underline{a})$ indica uma direção instável $E^u_{\underline{a}}$ em $T_{(x,y,z)}M$. Mais especificamente, vale:

Lema 2.1. *Sejam $(x,y,z) \in \Delta_T$ e $\underline{a} \in \mathcal{E}_n$ tal que $(x,y,z) \in Z_{\underline{a}}$, onde $Z_{\underline{a}}$ é a componente descrita por $\underline{a}$. Então existe $a_\infty \in I^\infty(x)$, com $\pi_n(a_\infty) = \underline{a}$ e para $n \geq 0$, se escrevemos $x_{-n} = [a_\infty]_n(x)$, então $E^u_{(x_{-n},y_{-n},z_{-n})} = \mathrm{graf}(DS(x_{-n},\sigma^n(a_\infty)))$.*

Demonstração. Dado o inteiro n_1, note que se $(x,y,z) \in Z_{[\underline{a}]_{n_1}}$, então $\pi_j([\underline{a}]_{n_1}) = \pi_j([\underline{a}]_{n_2})$ para todos $n_1, n_2 \geq j$. Defina então $a_\infty \in \mathcal{E}_\infty$ tal que $(x,y,z) \in Z_{\pi_j(a_\infty)}$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Temos assim que $\pi_n(a_\infty) = \underline{a}$. Como $(x,y,z) \in \Delta_T$, para todo $n \geq 0$ e escrevendo $x_{-n} = [a_\infty]_n(x)$, existe (x_{-n},y_{-n},z_{-n}) tal que $T(x_{-(n+1)},y_{-(n+1)},z_{-(n+1)}) = (x_{-n},y_{-n},z_{-n})$ e $T^n(x_{-n},y_{-n},z_{-n}) = (x,y,z)$. O Teorema de Hadamard-Perron fornece que $\{E^u_{(x_{-n},y_{-n},z_{-n})}\}_{n\geq 0}$ é a única sequência de subespaços $l-$dimensionais que é invariante, isto é, $DT(x_{-n},y_{-n},z_{-n})E^u_{(x_{-n},y_{-n},z_{-n})} = E^u_{(x_{-(n-1)},y_{-(n-1)},z_{-(n-1)})}$, $\forall n \geq 1$, e que é transversal a $E^s_{(x_{-n},y_{-n},z_{-n})} = \{0\} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$. Considere então para $n \geq 0$ o conjunto

$$E_{-n} = \mathrm{graf}(DS(x_{-n},\sigma^n(a_\infty))) = \{(v, DS(x_{-n},\sigma^n(a_\infty)v) \ : v \in \mathbb{R}^l\}.$$

Note que

$$E^s_{(x_{-n},y_{-n},z_{-n})} \cap E_{-n} = \{(0,0,0)\},$$

ou seja, $E^s_{(x_{-n},y_{-n},z_{-n})}$ é transversal a $\mathrm{graf}(DS(x_{-n},\sigma^n(a_\infty))$. Agora, basta mostrar que

$$DT(x_{-n},y_{-n},z_{-n})E_{-n} = E_{-(n-1)}, \ \forall n \geq 1.$$

Vamos escrever

$$S(x_{-n},\sigma^n(a_\infty)) = \lim_{m\to\infty}(S(x_{-n},[\sigma^n(a_\infty)]_m)).$$

Logo,

$$DS(x_{-n},\sigma^n(a_\infty)) =$$

$$(D_x\psi(x_1,y_1^{\sigma^n(a_\infty)})D\varphi^{-1}(x_1) + \sum_{i=2}^{\infty}(\prod_{j=1}^{i-1} D_y\psi(x_j,y_j^{\sigma^n(a_\infty)}))(D_x\psi(x_i,y_i^{\sigma^n(a_\infty)}))(D\varphi^i(x_i))^{-1}$$

$$, D_x\nu(x_1,z_1^{\sigma^n(a_\infty)})D\varphi^{-1}(x_1) + \sum_{i=2}^{\infty}(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(x_j,z_j^{\sigma^n(a_\infty)}))(D_x\nu(x_i,z_i^{\sigma^n(a_\infty)}))(D\varphi^i(x_i))^{-1})$$

em que $x_i = [\sigma^n(a_\infty)]_i(x_{-n})$. Escreva $(w_1,w_2) = DS(x_{-n},\sigma^n(a_\infty))v$, onde

$$w_1 = (D_x\psi(x_1,y_1^{\sigma^n(a_\infty)})D\varphi^{-1}(x_1) + \sum_{i=2}^{\infty}(\prod_{j=1}^{i-1} D_y\psi(x_j,y_j^{\sigma^n(a_\infty)}))(D_x\psi(x_i,y_i^{\sigma^n(a_\infty)}))(D\varphi^i(x_i))^{-1})v$$

$$w_2 = (D_x\nu(x_1, z_1^{\sigma^n(a_\infty)})D\varphi^{-1}(x_1)+\sum_{i=2}^{\infty}(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(x_j, z_j^{\sigma^n(a_\infty)}))(D_x\nu(x_i, z_i^{\sigma^n(a_\infty)}))(D\varphi^i(x_i))^{-1})v.$$

Uma vez que

$$DT(v, DS(x_{-n}, \sigma^n(a_\infty))v) =$$

$$(D\varphi(x_{-n})v, D\psi(x_{-n}, y^{\sigma^n(a_\infty)}(x_{-n}))(v, w_1), D\nu(x_{-n}, z^{\sigma^n(a_\infty)}(x_{-n}))(v, w_2)),$$

basta provar que

$$DS(x_{-(n-1)}, \sigma^{n-1}(a_\infty))(D\varphi(x_{-n})v) =$$

$$(D\psi(x_{-n}, y^{\sigma^n(a_\infty)}(x_{-n}))(v, w_1), D\nu(x_{-n}, z^{\sigma^n(a_\infty)}(x_{-n}))(v, w_2)).$$

e assim teremos o que queremos. Vamos, por simplicidade, escrever apenas a primeira entrada em $DS(x_{-(n-1)}, \sigma^{n-1}(a_\infty))$, pois a segunda é análoga trocando ψ por ν. Assim, escrevemos

$$DS(x_{-(n-1)}, \sigma^{n-1}(a_\infty)) =$$

$$D_x\psi(x_1^*, y_1^{\sigma^{n-1}(a_\infty)})D\varphi^{-1}(x_1^*)+\sum_{i=2}^{\infty}(\prod_{j=1}^{i-1} D_y\psi(x_j^*, y_j^{\sigma^{n-1}(a_\infty)}))(D_x\psi(x_i^*, y_i^{\sigma^{n-1}(a_\infty)}))(D\varphi^i(x_i^*))^{-1},$$

onde $x_i^* = [\sigma^{n-1}(a_\infty)]_i(x_{-(n-1)})$.

Afirmamos que $[\sigma^{n-1}(a_\infty)]_j(x_{-(n-1)}) = [\sigma^n(a_\infty)]_{j-1}(x_{-n})$. De fato, temos

$$\begin{aligned}\varphi^j([\sigma^{n-1}(a_\infty)]_j(x_{-(n-1)})) &= x_{-(n-1)} = \varphi(x_{-n})\\ &= \varphi(\varphi^{j-1}([\sigma^n(a_\infty)]_{j-1}(x_{-n}))\\ &= \varphi^j([\sigma^n(a_\infty)]_{j-1}(x_{-n})).\end{aligned}$$

Usando o fato de que $\bigcap_{i\geq 0}^{j-1} \varphi^{-i}(R_{a_{i+1}}) \subset \bigcap_{i\geq 0}^{j-2} \varphi^{-i}(R_{a_{i+1}})$ e pela escolha do $diam\mathcal{R}$, temos que φ^j é injetora nesses conjuntos, logo temos a afirmação.

Vemos que $x_i^* = x_{i-1}$ e que $y_i^{\sigma^{n-1}(a_\infty)} = y_{i-1}^{\sigma^n(a_\infty)}$. Logo,

$$\begin{aligned}DS(x_{-(n-1)}, \sigma^n(a_\infty)) &= D_x\psi(x_{-n}, y^{\sigma^n(a_\infty)}(x_{-n}))D\varphi^{-1}(x_{-n})\\ &\quad+\sum_{i=2}^{\infty}(\prod_{j=1}^{i-1} D_y\psi(x_{j-1}, y_{j-1}^{\sigma^n(a_\infty)}))(D_x\psi(x_{i-1}, y_{i-1}^{\sigma^n(a_\infty)}))(D\varphi^i(x_{i-1}))^{-1}\end{aligned}$$

Aplicando em $D\varphi(x_{-n})v$ e escrevendo $i' = i - 1$ teremos

$$\begin{aligned}DS(x_{-(n-1)}, \sigma^{n-1}(a_\infty))(D\varphi(x_{-n})v) &= D_x\psi(x_{-n}, y^{\sigma^n(a_\infty)}(x_{-n}))v\\ &\quad+\left(\sum_{i'=1}^{\infty}(\prod_{j=1}^{i'} D_y\psi(x_{j-1}, y_{j-1}^{\sigma^n(a_\infty)}))(D_x\psi(x_{i'}, y_{i'}^{\sigma^n(a_\infty)}))(D\varphi^{i'+1}(x_{i'}))^{-1}\right) D\varphi(x_{-n})v\end{aligned}$$

$$= D_x\psi(x_{-n}, y^{\sigma^n(a_\infty)}(x_{-n}))v$$
$$+D_y\psi(x_{-n}, y^{\sigma^n(a_\infty)}(x_{-n}))\left(\sum_{i'=1}^{\infty}(\prod_{j=2}^{i'} D_y\psi(x_{j-1}, y_{j-1}^{\sigma^n(a_\infty)}))(D_x\psi(x_{i'}, y_{i'}^{\sigma^n(a_\infty)}))\right.$$
$$\left.(D\varphi^{-1}(x_{-n})D\varphi^{i'+1}(x_{i'}))^{-1}v\right)$$
$$= D_x\psi(x_{-n}, y^{\sigma^n(a_\infty)}(x_{-n}))v$$
$$+D_y\psi(x_{-n}, y^{\sigma^n(a_\infty)}(x_{-n}))\left(\sum_{i'=1}^{\infty}(\prod_{j=1}^{i'-1} D_y\psi(x_j, y_j^{\sigma^n(a_\infty)}))(D_x\psi(x_{i'}, y_{i'}^{\sigma^n(a_\infty)}))(D\varphi^{i'}(x_{i'}))^{-1}v\right)$$
$$= D_x\psi(x_{-n}, y^{\sigma^n(a_\infty)}(x_{-n}))v$$
$$+D_y\psi(x_{-n}, y^{\sigma^n(a_\infty)}(x_{-n}))\left\{(D_x\psi(x_1, y_1^{\sigma^n(a_\infty)})D\varphi^{-1}(x_1)v\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{i'=2}^{\infty}(\prod_{j=1}^{i'-1} D_y\psi(x_j, y_j^{\sigma^n(a_\infty)}))(D_x\psi(x_{i'}, y_{i'}^{\sigma^n(a_\infty)}))(D\varphi^{i'}(x_{i'}))^{-1}v\right)\right\}$$
$$= D_x\psi(x_{-n}, y^{\sigma^n(a_\infty)}(x_{-n}))v + D_y\psi(x_{-n}, y^{\sigma^n(a_\infty)}(x_{-n}))(w_1)$$
$$= D\psi(v, w_1).$$

□

2.5 Outras dinâmicas auxiliares

Vamos definir aqui algumas dinâmicas auxiliares que serão uteis adiante no cálculo da cota superior da dimensão de Δ_T através da pressão topológica.

Seja $\underline{c} \in \mathcal{E}_m$ e denote por $I^n(\underline{c}) = \{\underline{a} \in \mathcal{E}_n : \varphi^n(\mathbf{T}_{\underline{a}}) \cap \mathbf{T}_{\underline{c}} \neq \emptyset\}$ e também

$$I^\infty(\underline{c}) = \{\underline{a} \in \mathcal{E}_\infty : [\underline{a}]_n \in I^n(\underline{c}),\ \forall\ n\}. \tag{2.6}$$

Defina as seguintes aplicações

$$H_1 : \bigcup_{\underline{c}\in\mathcal{E}_m} \mathbf{T}_{\underline{c}} \times I^\infty(\underline{c}) \to \bigcup_{\underline{c}\in\mathcal{E}_m} \mathbf{T}_{\underline{c}} \times I^\infty(\underline{c})$$
$$(x, \underline{a}) \longmapsto H_1(x, \underline{a}) = (\varphi(x), s(x)\underline{a})$$

e

$$H : \bigcup_{\underline{c}\in\mathcal{E}_m} \mathbf{T}_{\underline{c}} \times I^\infty(\underline{c}) \to V$$
$$(x, \underline{a}) \longmapsto H(x, \underline{a}) = (x, S(x, \underline{a})).$$

Da injetividade de φ em cada $\mathbf{T}_{\underline{c}}$ segue que H_1 é um homeomorfismo. Note também que $\mathrm{Im}(H) = \Delta_T$. Além disso, vale ainda que $T \circ H = H \circ H_1$. De fato, como

$$S(\varphi(x), s(x)\underline{a}) = \lim_{n\to\infty} \left(\psi_{[s(x)\underline{a}]_1(\varphi(x))} \circ ... \circ \psi_{[s(x)\underline{a}]_n(\varphi(x))}(0),\ \nu_{[s(x)\underline{a}]_1(\varphi(x))} \circ ... \circ \nu_{[s(x)\underline{a}]_n(\varphi(x))}(0)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\psi_x \circ ... \circ \psi_{[\underline{a}]_{n-1}(x)}(0),\ \nu_x \circ ... \circ \nu_{[\underline{a}]_{n-1}(x)}(0)\right)$$

$$= (\psi(x, S(x, \underline{a})), \nu(x, S(x, \underline{a}))),$$

segue que

$$(H \circ H_1)(x, \underline{a}) = (\varphi(x), S(\varphi(x), s(x)\underline{a})) = (\varphi(x), \psi(x, S(x, \underline{a})), \nu(x, S(x, \underline{a})))$$

$$= T(x, S(x, \underline{a})) = (T \circ H)(x, \underline{a}).$$

Seja $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, ..., R_s\}$ a partição de Markov de $\mathbb{T}^l$ com respeito a φ dada na Seção anterior. Definimos uma matriz $A = [a_{ij}]_{s\times s}$ tal que $a_{ij} = 1$ se $\varphi(R_i) \cap R_j \neq \emptyset$ e $a_{ij} = 0$, caso contrário. Denote por $\Sigma_s = \{1, ..., s\}^{\mathbb{Z}}$ o conjunto das sequências bilaterais $\underline{\tilde{a}} = (..., \tilde{a}_{-2}, \tilde{a}_{-1}, \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ...)$ em que cada letra $\tilde{a}_k \in \{1, 2, ..., s\}$. Seja agora Σ_A o subconjunto de Σ_s definido por

$$\Sigma_A = \{(..., \tilde{a}_{-2}, \tilde{a}_{-1}, \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ...) \in \Sigma_s : a_{\tilde{a}_n, \tilde{a}_{n+1}} = 1 \text{ para todo } \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Com a notação que estávamos usando na Seção anterior, podemos escrever que $\Sigma_A \subset \mathcal{E}_{-\infty} \times \mathcal{E}_\infty$, em que $\mathcal{E}_{-\infty} = \{(..., \tilde{a}_{-2}, \tilde{a}_{-1}, \tilde{a}_0) : a_{\tilde{a}_{-n-1}, \tilde{a}_{-n}} = 1 \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}\cup 0\}$. Vamos considerar o **shift** $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ por $\sigma((\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (\tilde{a}_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. Escreva $\underline{\tilde{a}} = (\underline{\tilde{c}}, \underline{a})$, em que $\underline{\tilde{c}} = (..., \tilde{a}_{-2}, \tilde{a}_{-1}, \tilde{a}_0)$ e $\underline{a} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ...)$, para cada $\underline{\tilde{a}} \in \Sigma_A$. Defina então

$$\tilde{H} : \Sigma_A \to \bigcup_{\underline{c}\in\mathcal{E}_m} \mathbf{T}_{\underline{c}} \times I^\infty(\underline{c})$$

$$\underline{\tilde{a}} \longmapsto \tilde{H}(\underline{\tilde{a}}) = (x, \underline{a}),$$

onde x é tal que $\varphi^i(x) \in R_{\tilde{a}_{-i}}$ para todo $i = 0, 1, ...$ Temos que $\tilde{H}$ é sobrejetivo e $\tilde{H} \circ \sigma = H_1 \circ \tilde{H}$. De fato, Note que $x \in R_{\tilde{a}_0}$, isto é, $s(x) = \tilde{a}_0$. Assim,

$$(\tilde{H} \circ \sigma)(\underline{\tilde{a}}) = \tilde{H}(\sigma(\underline{\tilde{a}})) = (\varphi(x), s(x)\underline{a}) = H_1(x, \underline{a}) = (H_1 \circ H)(\underline{\tilde{a}}).$$

Denotando agora por

$$\tilde{T}(x, z) = \rho_2(T(x, y, z)) = (\varphi(x), \nu(x, z)).$$

Temos então o seguinte diagrama comutativo:

$$
\begin{array}{ccc}
\Sigma_A & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_A \\
\downarrow{\scriptstyle \tilde{H}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{H}} \\
\bigcup_{\underline{c}\in\mathcal{E}_m} \mathbf{T}_{\underline{c}} \times I^{\infty}(\underline{c}) & \xrightarrow{H_1} & \bigcup_{\underline{c}\in\mathcal{E}_m} \mathbf{T}_{\underline{c}} \times I^{\infty}(\underline{c}) \\
\downarrow{\scriptstyle H} & & \downarrow{\scriptstyle H} \\
\Delta_T & \xrightarrow{T} & \Delta_T \\
\downarrow{\scriptstyle \rho_2} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_2} \\
\Delta_{\tilde{T}} & \xrightarrow{\tilde{T}} & \Delta_{\tilde{T}}
\end{array}
$$

3 COTAS DA DIMENSÃO DO ATRATOR Δ_T

O intuito deste trabalho será mostrar sob quais condições é possível calcular a dimensão de Hausdorff ($\dim_H$) do atrator Δ_T, mais precisamente queremos mostrar que

$$\dim_H \Delta_T = l + s_0 p.$$

Onde s_0 será o único número real para o qual a pressão topológica $P(\sigma, s_0\phi) = 0$ para uma função potencial $\phi : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(\underline{\tilde{a}}) = \log |\det D_z \nu((\rho \circ H \circ \tilde{H})(\underline{\tilde{a}}))|_Z|$.

Para isto, será importante mostrar que sob certas condições e para cada $x \in \mathbb{T}^l$, teremos

$$\dim_H \Delta_T(x) = s_0 p.$$

Ou seja, iremos mostrar que existem condições para as quais todas as seções transversais do atrator Δ_T tem a mesma dimensão de Hausdorff.

Neste Capítulo iremos fornecer as cotas superiores para estas dimensões. Mais ainda, provaremos que estas cotas são as mesmas com respeito a outra noção de dimensão em Geometria Fractal conhecida como box-couting dimension ($\dim_B$). Vamos primeiramente estabelecer notação definindo a medida de Hausdorff e em seguida a dimensão de Hausdorff, listando algumas propriedades e resultados que serão usados no texto. Depois, definiremos a box-counting dimension de um conjunto e ressaltamos apenas a sua relação com a dimensão de Hausdorff. Indicamos a referência (7) ou (19) para mais detalhes e exemplos sobre dimensão de Hausdorff e box-counting dimension. Definimos em seguida pressão topológica, pois esta será uma ferramenta utilizada na obtenção da cota superior. Sugerimos a referência (29) para mais detalhes sobre pressão.

3.1 Dimensão de Hausdorff

Uma cobertura aberta de $F \subset \mathbb{R}^n$ é uma família enumerável de conjuntos abertos $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tais que $F \subset \bigcup_i \mathcal{U}_i$. Escreveremos, por simplicidade, que $\mathcal{U}$ é uma cobertura de F ficando subentendido que cada elemento de $\mathcal{U}$ é um conjunto aberto. Dado $\mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^n$, definimos o diâmetro de $\mathcal{U}_i$ como

$$\operatorname{diam}(\mathcal{U}_i) = \sup\{||x - y||; x, y \in \mathcal{U}_i\}$$

e o diâmetro de $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ como $\operatorname{diam}(\mathcal{U}) = \sup_{\mathcal{U}_i\in\mathcal{U}}\{\operatorname{diam}(\mathcal{U}_i)\}$. Vamos denotar $|\mathcal{U}| = \operatorname{diam}(\mathcal{U})$.

Diremos que $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma $\delta-$cobertura de F, quando $\mathcal{U}$ é uma cobertura de F e $0 \leq |\mathcal{U}| \leq \delta$, ou seja, $0 \leq |\mathcal{U}_i| \leq \delta$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Dado $F \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto de todas as $\delta-$ coberturas de F será denotado por $\mathbf{D}(F, \delta)$.

Sejam $s \in \mathbb{R}$ não-negativo e $F \subset \mathbb{R}^n$. Dado $\delta > 0$, definimos

$$\mathcal{H}^s_\delta = \inf_{\mathcal{U}=\{\mathcal{U}_i\}} \{\sum_{i=1}^{\infty} |\mathcal{U}_i|^s : \mathcal{U} \in \mathbf{D}(F, \delta)\}. \tag{3.1}$$

Note que, fixado $s \geq 0$, se $\delta_1 \leq \delta_2$, então $\mathbf{D}(F, \delta_1) \subset \mathbf{D}(F, \delta_2)$ e com isso $\mathcal{H}^s_{\delta_1} \geq \mathcal{H}^s_{\delta_2}$, ou seja, temos que $\mathcal{H}^s_\delta$ é monótona em δ.

Definição 3.1. *Dado $s \geq 0$, considere a função $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ dada por*

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F).$$

*O valor $\mathcal{H}^s(F)$ será chamado de **medida de Hausdorff $s-$dimensional de F.***

A função $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ satisfaz as seguintes propriedades básicas:

1. $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$;
2. Se $F_1 \subset F_2$, então $\mathcal{H}^s(F_1) \leq \mathcal{H}^s(F_2)$;
3. Dada uma família finita ou enumerável $F = \{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, então

$$\mathcal{H}^s(F) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_j).$$

Estas propriedades mostram que $\mathcal{H}^s$ é uma medida exterior sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. É possível mostrar também que $\mathcal{H}^s$ é uma medida sobre a $\sigma-$ álgebra gerada pelos conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$($\sigma-$álgebra de Borel), ou seja, se F_1 e F_2 são dois borelianos disjuntos, então vale que

$$\mathcal{H}^s(F_1 \cup F_2) = \mathcal{H}^s(F_1) + \mathcal{H}^s(F_2).$$

Dizemos que uma aplicação $f : F \to \mathbb{R}^m$ é Hölder contínua quando existem $c > 0$ e $\alpha > 0$ tais que

$$||f(x) - f(y)|| \leq c||x - y||^\alpha$$

para todos $x, y \in F$. Em particular, se $\alpha = 1$ denominamos aplicação Lipschitz contínua.

Proposição 3.1. *Para cada $s \geq 0$, se $f : F \to \mathbb{R}^m$ é Hölder contínua, tem-se*

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F).$$

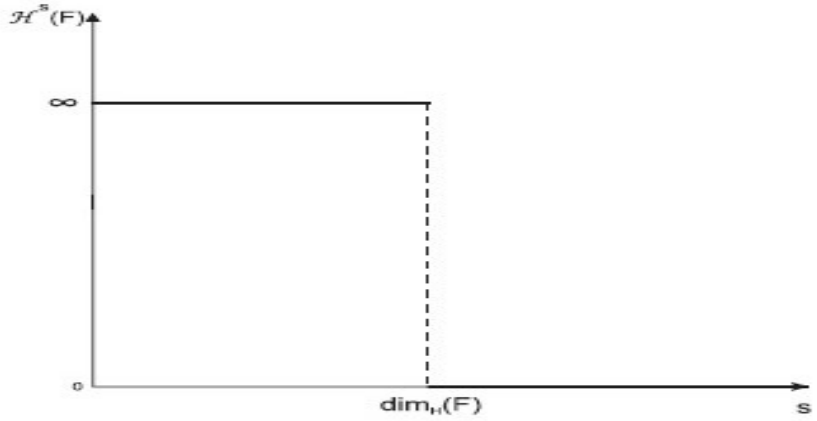
E se $f : F \to \mathbb{R}^m$ é Lipschitz contínua, então $\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F)$.

A próxima Proposição nos permite definir a dimensão de Hausdorff.

Proposição 3.2. *Dado $s \geq 0$, se $0 \leq \mathcal{H}^s(F) < \infty$, então vale que $\mathcal{H}^d(F) = 0$ para todo $d > s$ e $\mathcal{H}^d(F) = \infty$ para todo $0 \leq d < s$.*

Assim, de acordo com a Proposição 3.2, existe um único valor crítico s_0 onde $\mathcal{H}^s$ passa de ∞ para 0.

Figura 4 – gráfico de $\mathcal{H}^s(F)$



Fonte: O autor (2021)

Definição 3.2. *Dado $F \subset \mathbb{R}^n$, a **dimensão de Hausdorff** do conjunto F é dada por*

$$\dim_H(F) = \inf\{s \geq 0; \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0; \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$

Note que $\mathcal{H}^s(F) = 0$ se $s \geq \dim_H(F)$ e $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ se $s \leq \dim_H(F)$. No entanto, nada podemos afirmar sobre $\mathcal{H}^s(F)$, quando $s = \dim_H(F)$.

Observação 2. *Para mostrar que $\dim_H(F) \leq d_0$ é suficiente obter $c > 0$ tal que para qualquer $\epsilon > 0$ **exista** cobertura $\mathcal{U}_0 = \{\mathcal{U}_{i_0}\}_{i_0}$ de F, com $|\mathcal{U}_0| \leq \epsilon$, tal que $\sum_{\mathcal{U}_{i_0} \in \mathcal{U}_0} |\mathcal{U}_{i_0}|^{d_0} \leq c$. De fato, se existem $c > 0$ e $\mathcal{U}_0$ com estas propriedades, então*

$$\mathcal{H}^{d_0}_\delta = \inf_{\mathcal{U}=\{\mathcal{U}_i\}} \{\sum_{i=1}^{\infty} |\mathcal{U}_i|^s : \mathcal{U} \in \mathbf{D}(F, \delta)\} \leq \sum_{\mathcal{U}_{i_0} \in \mathcal{U}_0} |\mathcal{U}_{i_0}|^{d_0} \leq c.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, temos $\mathcal{H}^{d_0} \leq c < \infty$. Logo, $\dim_H(F) \leq d_0$.

*Por outro lado para mostrar que $dim_H(F) \geq d_0$ é suficiente exibir um $c > 0$ e $\epsilon > 0$ tal que **para toda** $\epsilon-$cobertura $\mathcal{U}_0 = \{\mathcal{U}_{i_0}\}_{i_0}$ de F vale $\sum_{\mathcal{U}_{i_0} \in \mathcal{U}_0} |\mathcal{U}_{i_0}|^{d_0} \geq c$.*

Em geral, como vemos na Observação 2, é mais simples obter cotas superiores para a dimensão de Hausdorff de um conjunto, pois basta mostrar que **existe** uma cobertura com conjuntos de diâmetro arbitrariamente pequeno com $\sum_{\mathcal{U}_{i_0} \in\, \mathcal{U}_0} |\mathcal{U}_{i_0}|^{d_0} \leq c$. Já para obter cotas inferiores é preciso lidar com **todas** as $\epsilon-$coberturas.

3.1.1 Propriedades da dimensão de Hausdorff

As propriedades básicas da dimensão de Hausdorff decorrem das propriedades da medida de Hausdorff. São elas:

1. $\dim_H(\emptyset) = 0$;
2. **(Monotonicidade).** Se $E_1 \subset E_2$, então $\dim_H(E_1) \leq \dim_H(E_2)$;
3. **(Estabilidade Enumerável).** Se $F_1, F_2, ..$ é uma sequência enumerável de conjuntos, então
$$\dim_H \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) = \sup_{1 \leq j < \infty} \{\dim_H(F_j)\};$$
4. **(Conjuntos Enumeráveis).** Se F é enumerável, então $\dim_H(F) = 0$;
5. **(Conjuntos Abertos).** Se F é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, então $\dim_H(F) = n$.
6. **(Aplicações Hölder Contínuas).** Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação $\alpha-$Hölder contínua e $\alpha > 0$, então
$$\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(F).$$
   - Se $f : F \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação **Lipschitz contínua,** isto é, $\alpha = 1$, então
   $$\dim_H f(F) \leq \dim_H(F);$$
   - Se $f : F \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação **bi-Lipschitz contínua,** isto é, existem $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ tais que
   $$c_1||x - y|| \leq ||f(x) - f(y)|| \leq c_2||x - y||, \ \forall \ x, y \in F,$$
   então
   $$\dim_H f(F) = \dim_H(F).$$

Além das propriedades listadas acima. Apresentamos agora um resultado que será importante no decorrer do texto na obtenção de cotas inferiores para a dimensão de Hausdorff. O resultado abaixo é uma generalização do Corolário 7.12, p.106, Cap. 7 do Falconer (7).

Teorema 3.1. *Sejam F um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e E um subconjunto de $\mathbb{R}^k$, borelianos, com $k < n$ e $m_k(E) > 0$(medida de Lebesgue $k-$dimensional). Considere L como um subespaço de $\mathbb{R}^n$, $n-k$ dimensional e $L_x = L + x$ a translação de L por E. Se $dim_H(F \cap L_x) \geq t$ para quase todo $x \in E$, com $t > 0$, então $dim_H(F) \geq t + dim_H(E)$.*

Demonstração. Denotaremos por m_d a medida de Lesbegue $d-$dimensional. Vamos provar antes que, se $k \leq s \leq n$, então

$$\int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{s-k}(F \cap L_x)\,\mathrm{d}\,x \leq \mathcal{H}^s(F).$$

Dado $\epsilon > 0$, considere $\{U_i\}_i$ uma $\delta-$cobertura de F tal que

$$\sum_i |U_i|^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(F) + \epsilon.$$

Cada U_i está contido num $n-$cubo S_i de aresta $|U_i|$ e com as faces paralelas aos eixos canônicos de $\mathbb{R}^n$. Seja 1_{S_i} a função indicadora de S_i, isto é, $1_{S_i}(y) = 1$, se $y \in S_i$ e $1_{S_i}(y) = 0$ caso $y \notin S_i$. Para cada $x \in \mathbb{R}^k$, os conjuntos $S_i \cap L_x$ formam uma $\sqrt{(n-k)}\delta-$cobertura de $F \cap L_x$. Assim, chamando $\sqrt{(n-k)}\delta = \delta'$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{s-k}_{\delta'}(F \cap L_x) &\leq \sum_i |S_i \cap L_x|^{s-k} \\
&= \sum_i |S_i \cap L_x|^{s-n} |S_i \cap L_x|^{n-k} \\
&\leq \sum_i (\sqrt{n-k})^{s-n} |U_i|^{s-n} \int_{L_x} 1_{S_i}\,\mathrm{d}\,m_{n-k}(y).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int \mathcal{H}^{s-k}_{\delta'}(F \cap L_x)\,\mathrm{d}\,m_k(x) \leq (n-k)^{\left(\frac{s-n}{2}\right)} \sum_i |U_i|^{s-n} \int \left(\int_{L_x} 1_{S_i}\,\mathrm{d}\,m_{n-k}(y) \right) \mathrm{d}\,m_k(x).$$

Note que $(n-k)^{\left(\frac{s-n}{2}\right)} \leq 1$, pois $n-k \geq 1$ e $s-n \leq 0$. Além disso,

$$\int \left(\int_{L_x} 1_{S_i}\,\mathrm{d}\,m_{n-k}(y) \right) \mathrm{d}\,m_k(x) = \mathrm{vol}_n(S_i \cap L_x) \leq |U_i|^n.$$

Logo,

$$\int \mathcal{H}^{s-k}_{\delta'}(F \cap L_x)\,\mathrm{d}\,m_k(x) \leq \sum_i |U_i|^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(F) + \epsilon.$$

Uma vez que $\epsilon > 0$ é arbitrário e $\mathcal{H}^s_\delta$ é monótona em δ, usando o Teorema da Convergência Monótona, fazendo $\delta \to 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{s-k}(F \cap L_x)\,\mathrm{d}\,x \leq \mathcal{H}^s(F). \tag{3.2}$$

Tome agora $s = dim_H(F) + \epsilon' > dim_H(F)$, sendo $\epsilon' > 0$ qualquer. Temos $\mathcal{H}^s(F) = 0$.

Note que devemos ter $dim_H(F) > k$. De fato, por hipótese, existe um conjunto E' de pontos x em E com medida de Lebesgue positiva tal que $dim_H(F \cap L_x) \geq t > 0$ para todo $x \in E'$. Dado $\epsilon'' > 0$, para cada m considere os conjuntos $E_m = \{x \in E' : \mathcal{H}^{t-\epsilon''}(F \cap L_x) > \frac{1}{m}\}$. Temos $E_m \subset E_{m+1}$ e $E' \subset \bigcup_m E_m$. Daí, $\lim_m m_k(E_m) \geq m_k(E') > 0$ e assim, existe N tal que $m_k(E_N) > 0$. Como

$$\int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{t-\epsilon''}(F \cap L_x)\,\mathrm{d}\,x \geq \int_{E_N} \mathcal{H}^{t-\epsilon''}(F \cap L_x)\,\mathrm{d}\,x \geq \int_{E_N} \frac{1}{N}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{N} m_k(E_N) > 0$$

e, por (3.2), vale

$$\int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{t-\epsilon''}(F \cap L_x)\,\mathrm{d}\,x \leq \mathcal{H}^{t-\epsilon''+k}(F),$$

segue que $\mathcal{H}^{t-\epsilon''+k}(F) > 0$, isto é, $dim_H(F) \geq t - \epsilon'' + k > k$, para $\epsilon'' > 0$ pequeno.

Sendo então $s > k$, temos que (3.2) fornece $\mathcal{H}^{s-k}(F \cap L_x) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^k$. Logo, $\dim_H(F \cap L_x) \leq s - k$ para quase todo x. Como $\dim_H(E) \leq k$, segue que

$$\dim_H(F \cap L_x) \leq s - \dim_H(E)$$

para quase todo x. Como $\epsilon' > 0$ é qualquer, temos

$$\dim_H(F) \geq \dim_H(F \cap L_x) + \dim_H(E),$$

e assim

$$\dim_H(F) \geq t + \dim_H(E).$$

□

Note que o Teorema 3.1 relaciona a dimensão de Hausdorff de F com a dimensão de seções transversais de F em cada $x \in E$ e também com a dimensão de E. No nosso caso, teremos E identificado com $\mathbb{T}^l$ e $F \cap L_x$ identificado com $\Delta_T(x)$. Por isso a importância de encontrar condições para termos

$$\dim_H \Delta_T(x) \geq s_0 p, \text{ para quase todo } x \in \mathbb{T}^l.$$

3.2 Box-counting dimension ou dimensão de Minkowski

Passamos a falar agora sobre outro conceito de dimensão muito utilizado em Geometria Fractal, tanto por ter uma definição mais simples quanto por ser possível obter de modo mais fácil estimativas a seu respeito. Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto não-vazio e limitado, denote por $N(F, \delta)$ o menor número de conjuntos de diâmetro no máximo δ que podem

cobrir F. Definimos como *lower* e *upper box-counting* dimensions de F, respectivamente os seguintes limites:

$$\underline{\dim}_B F := \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N(F, \delta)}{-\log \delta} \tag{3.3}$$

e

$$\overline{\dim}_B F := \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N(F, \delta)}{-\log \delta}. \tag{3.4}$$

Se tivermos $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$, então a *box-dimension* de F é dada por

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N(F, \delta)}{-\log \delta}. \tag{3.5}$$

Na definição de $N(F, \delta)$ podemos considerar os conjuntos como: bolas fechadas de raio δ que cobrem F, $n-$cubos de aresta δ que cobrem F ou bolas disjuntas de raio δ com centros em F. Sugerimos a referência (7) para mais detalhes e propriedades de box-dimension.

Box-dimension é também referida como *dimensão de Minkowski* ou *dimensão de Minkowiski-Bouligand*.

Para todo $F \subset \mathbb{R}^n$ a relação entre a dimensão de Hausdorff e box-counting dimension é dada pela desigualdade

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F. \tag{3.6}$$

Onde, de maneira geral, não temos a igualdade. Assim, uma cota inferior da dimensão de Hausdorff fornece uma cota inferior para a box-dimension (caso esta exista).

Aqui, provaremos a igualdade $\dim_B F = \dim_H F$ para o caso em que $F = \Delta_T$ e onde sabemos calcular a cota inferior de $\dim_H(\Delta_T)$. Note que precisamos apenas mostrar que $\overline{\dim}_B(\Delta_T)$ tem a mesma cota superior que $\dim_H(\Delta_T)$ e depois calcular a cota inferior para $\dim_H(\Delta_T)$.

3.3 Pressão Topológica

Nesta seção considere $f : M \to M$ uma transformação contínua em um espaço métrico compacto M. Considere $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_i$ cobertura aberta de M. Temos que $f^{-j}(\mathcal{U}) := \{f^{-j}(\mathcal{U}_i) : \mathcal{U}_i \in \mathcal{U}\}$ é também uma cobertura aberta de M. Para cada $n \geq 1$, denotamos por $\mathcal{U}^n$ uma cobertura de M tal que cada elemento é a interseção de elementos das coberturas $\mathcal{U}, f^{-1}(\mathcal{U}), ..., f^{-n+1}(\mathcal{U})$. Assim, todo elemento de $\mathcal{U}^n$ está contido em algum elemento de $\mathcal{U}$. Chamamos de potencial em M qualquer $\phi : M \to \mathbb{R}$ contínua. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $\phi_n : M \to \mathbb{R}$ por $\phi_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (\phi \circ f^i)(x)$. Para $A \subset M$, com $A \neq \emptyset$,

denotamos

$$\phi_n(A) := \sup\{\phi_n(x); x \in A\} \tag{3.7}$$

Dada uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de M, definimos

$$P_n(f, \phi, \mathcal{U}) = \inf\{\sum_{\mathcal{B}_i \in \mathcal{B}} \exp(\phi_n(\mathcal{B}_i)) : \mathcal{B} \text{ é subcobertura finita de } \mathcal{U}^n\}. \tag{3.8}$$

A sequência $\{P_n(f, \phi, \mathcal{U})\}_{n\in\mathbb{N}}$ é subaditiva e assim existe o limite

$$P(f, \phi, \mathcal{U}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(P_n(f, \phi, \mathcal{U})). \tag{3.9}$$

Definimos *pressão* do potencial ϕ relativamente a f como o seguinte limite

$$P(f, \phi) = \lim_{diam(\mathcal{U})\to 0} P(f, \phi, \mathcal{U}) \tag{3.10}$$

O limite em 3.10 existe e não depende da cobertura escolhida.

Decorre da definição de pressão que se $\phi \leq \xi$, então $P(f, \phi) \leq P(f, \xi)$ e para uma constante real k_0, temos $P(f, \phi + k_0) = P(f, \phi) + k_0$. Além disso, temos:

- $P(f, 0)$ coincide com a *entropia topológica* $h_{top}(f)$ (ver (10) e (29) para definição e propriedades sobre entropia).
- Se $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de M tal que $diam(\mathcal{U}^k)$ converge para zero quando $k \to \infty$, então $P(f, \phi) = P(f, \phi, \mathcal{U})$ para todo potencial ϕ.
- Para f fixada a função pressão $P(f, .)$, definida no espaço $C^0(M, \mathbb{R})$ munido da norma do supremo, é Lipschitz, com constante de Lipschitz igual a 1.
- A função pressão $P(f, .)$ é convexa, isto é

  $$P(f, (1-t)\phi + t\xi) \leq (1-t)P(f, \phi) + tP(f, \xi)$$

  em que $0 \leq t \leq 1$ e $\phi, \xi : M \to \mathbb{R}$.

3.4 Cota superior para $\dim_H(\Delta_T(x))$ e $\dim_H(\Delta_T)$

Considere $\phi : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(\underline{\tilde{a}}) = \log|\det D_z\nu((\rho \circ H \circ \tilde{H})(\underline{\tilde{a}}))|_Z|, \tag{3.11}$$

em que $Z = \{0\} \times \mathbb{R}^p$ e $H, \tilde{H}$ são dadas no Capitulo 2, Seção 2.5. Note que

$$\begin{aligned}
\phi_n(\tilde{\underline{a}}) &= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi \circ \sigma^i)(\tilde{\underline{a}}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \log |\det D_z\nu((\rho \circ H \circ \tilde{H})(\sigma^i(\tilde{\underline{a}})))|_Z| \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \log |\det D_z\nu(\tilde{T}^i((\rho \circ H \circ \tilde{H})(\tilde{\underline{a}})))|_Z| \\
&= \log \left(\prod_{i=0}^{n-1} |\det D_z\nu(\tilde{T}^i((\rho \circ H \circ \tilde{H})(\tilde{\underline{a}})))|_Z| \right) \\
&= \log |\det D_z\nu^n((\rho \circ H \circ \tilde{H})(\tilde{\underline{a}}))|_Z|.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Usamos acima a Regra da Cadeia e o fato de que Z é invariante. Portanto, para $b \in \mathbb{R}$, temos

$$e^{b\phi_n(\tilde{\underline{a}})} = |\det D_z\nu^n((\rho \circ H \circ \tilde{H})(\tilde{\underline{a}}))|_Z|^b. \tag{3.13}$$

Queremos provar o seguinte:

Teorema 3.2. *Para cada $x \in \mathbb{T}^l$ vale que*

$$\dim_H \Delta_T(x) \leq s_0 p$$

em que s_0 é o único número real tal que $P(\sigma, s_0\phi) = 0$

Precisaremos de uma estimativa de distorção para a prova do Teorema 3.2. Antes, mostraremos a existência e unicidade do s_0 com a Proposição a seguir.

Proposição 3.3. *Existe único $s_0 \in (0, +\infty)$ tal que $P(\sigma, s_0\phi) = 0$.*

Demonstração. Lembremos que

$$\|D_z\nu(x,z)|_Z\| = \left\|(D_z\nu(x,z)|_Z)^{-1}\right\|^{-1}.$$

Assim,

$$1 = |\det D_z\nu|_Z||\det(D_z\nu)^{-1}|_Z| \leq \left(\|D_z\nu|_Z\| \left\|(D_z\nu)^{-1}|_Z\right\|\right)^p$$

implica que

$$|\det D_z\nu|_Z| = \|D_z\nu|_Z\|^p. \tag{3.14}$$

e o mesmo vale para $(D_z\nu)^{-1}$. Assim,

$$\phi = \log |\det D_z\nu(\rho \circ H \circ \tilde{H})(\tilde{\underline{a}})|_Z| = p \log \left\| D_z\nu(\rho \circ H \circ \tilde{H})(\tilde{\underline{a}})|_Z \right\| \leq p \log(\lambda_{max}). \tag{3.15}$$

Sejam agora $s < s^*$ quaisquer reais. Temos

$$s^*\phi = s^*\phi - s\phi + s\phi = (s^* - s)\phi + s\phi,$$

ou seja, por 3.15, temos

$$s^*\phi \leq (s^* - s)p\log(\lambda_{max}) + s\phi.$$

Logo,

$$P(\sigma, s^*\phi) \leq P(\sigma, s\phi) + (s^* - s)p\log(\lambda_{max}). \tag{3.16}$$

Como $\log(\lambda_{max}) < 0$, segue que $P(\sigma, s^*\phi) < P(\sigma, s\phi)$. Concluímos então que a função $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\xi(b) = P(\sigma, b\phi)$ é estritamente decrescente. Além disso, ξ é contínua, pois é de Lipschitz. Por (3.15), temos

$$\lim_{s^* \to +\infty} P(\sigma, s^*\phi) = -\infty \quad e \quad \lim_{s \to -\infty} P(\sigma, s^*\phi) = +\infty.$$

Portanto, existe único $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P(\sigma, s_0\phi) = 0$. Agora note que $\xi(0) = P(\sigma, 0) = h_{top}(\sigma) = \log(s) > 0$. Segue então que devemos ter $s_0 > 0$.

□

Usando propriedades de pressão topológica temos

$$P(\sigma, s\phi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\sum_{\underline{a}\in\mathcal{E}_n} \exp(s\phi_n(\underline{a}))\right). \tag{3.17}$$

Veja a referência (5) para mais detalhes. Se ϕ é como na Seção 3.4, então por 3.14, segue que

$$\begin{aligned} 0 = P(\sigma, s_0\phi) &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(sN^{n-1}(\lambda_{max})^{ns_0p}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\log(N) - \frac{1}{n}\log(N) + \frac{1}{n}\log(s) + ps_0\log(\lambda_{max})), \end{aligned}$$

ou seja,

$$0 \leq \log(N) + s_0p\log(\lambda_{max}).$$

Portanto,

$$s_0 \leq \frac{\log(N)}{-p\log(\lambda_{max})}.$$

Logo, se considerarmos $(\lambda_{max}) < N^{-\frac{1}{p}}$, então teremos $s_0 < 1$.

3.4.1 Estimativa de distorção

Para cada $x \in \mathbb{T}^l$, denote por $T_x(y,z) = (\psi(x,y), \nu(x,z))$. Para $n \geq 1$, temos

$$T_x^n(y,z) = (\psi(\varphi^{n-1}(x), ...(\psi(\varphi(x), \psi(x,y))...)), \nu(\varphi^{n-1}(x), ...(\nu(\varphi(x), \nu(x,z))...)),$$

ou seja, $T_x^n(y,z) = (\psi^n(x,y), \nu^n(x,z))$ em que $T^n(x,y,z) = (\varphi^n(x), \psi^n(x,y), \nu^n(x,z))$. Note que, para x fixado, vale a igualdade $DT_x(y,z) = (D_y\psi(x,y), D_z\nu(x,z))$. Temos que $\mathbb{D}(x)$ é convexo e para algum $(x, y_0, z_0) \in \mathbb{D}(x)$ vale

$$\|T_x(y_1,z_1) - T_x(y_2,z_2)\| \leq \|DT_x(y_0,z_0)\|\|(x,y_1,z_1) - (x,y_2,z_2)\|, \ \forall\, (x,y_1,z_1), (x,y_1,z_2) \in \mathbb{D}(x). \tag{3.18}$$

Como

$$\|DT_x(y_0,z_0)\| = ||(D_y\psi(x,y_0), D_z\nu(x,z_0))|| < 2\lambda_{max},$$

segue que

$$\|T_x(y_1,z_1) - T_x(y_2,z_2)\| < 2\lambda_{max}\|(x,y_1,z_1) - (x,y_2,z_2)\|.$$

De modo que

$$\mathrm{diam}(T_x^{n-k}(\mathbb{D}(x))) < (2\lambda_{max})^{n-k}(\mathrm{diam}(\mathbb{D}(x))), \quad \forall k = 0,1,...,n-1. \tag{3.19}$$

Lema 3.1. *Existe $K_1 > 1$ tal que para todo $n \geq 1$ e todo $\underline{a} \in I^\infty(x)$, vale*

$$\log \prod_{k=0}^{n-1} \frac{|\det D_z\nu(t_k)|}{|\det D_z\nu(w_k)|} \leq K_1$$

para quaisquer $t_k = (\varphi^{n-k}(x), z_k)$ e $w_k = (\varphi^{n-k}(x), z_k^*)$ tais que $(\varphi^{n-k}(x), y_k, z_k)$ e $(\varphi^{n-k}(x), y_k, z_k^*)$ estão na envolvente convexa de $T^{n-k}_{[\underline{a}]_n(x)}(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x)))$ com $k = 0,1,...,n-1$.

Demonstração. Uma vez que ν é uma aplicação $C^r, r \geq 2$, é possível mostrar que existe $C_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\log \frac{|\det D_z\nu(t_k)|}{|\det D_z\nu(w_k)|} &\leq C_0||t_k - w_k|| \\
&\leq (C_0)\,\mathrm{diam}(T^{n-k}_{[\underline{a}]_n(x)}(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x)))) \\
&\leq C_0(2\lambda_{max})^{n-k}\,\mathrm{diam}(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x)).
\end{aligned}$$

Segue então que

$$\log \frac{|\det D_z\nu(t_k)|}{|\det D_z\nu(w_k)|} \leq C_0(2\lambda_{max})^{n-k}\,\mathrm{diam}(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x)).$$

Assim,

$$\log \prod_{k=0}^{n-1} \frac{|\det D_z\nu(t_k)|}{|\det D_z\nu(w_k)|} = \sum_{k=0}^{n-1} \log \frac{|\det D_z\nu(t_k)|}{|\det D_z\nu(w_k)|} \leq \sum_{k=0}^{n-1} C_0(2\lambda_{max})^{n-k}\,\mathrm{diam}(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x)).$$

Portanto, tome $K_1 > C_0 \left(\mathrm{diam}(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x))\right) \sum_{j=1}^{\infty} (2\lambda_{max})^j$.

□

Lembremos que

$$\lambda_2(x,z) := \|(D_z\nu(x,z))\,|_Z\|\,.$$

Assim, podemos obter do Lema 3.1 o seguinte:

Corolário 3.1. *Existe $\hat{K}_1 > 1$ tal que para todo $n \geq 1$ e todo $\underline{a} \in I^\infty(x)$, vale*

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_2(t_k)}{\lambda_2(w_k)} \leq \hat{K}_1$$

para quaisquer $t_k = (\varphi^{n-k}(x), z_k)$ e $w_k = (\varphi^{n-k}(x), z_k^*)$ tais que $(\varphi^{n-k}(x), y_k, z_k)$ e $(\varphi^{n-k}(x), y_k, z_k^*)$ estão na envolvente convexa de $T^{n-k}_{[\underline{a}]_n(x)}(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x)))$ com $k = 0, 1, ..., n-1$.

Estamos interessados agora em provar o seguinte resultado:

Proposição 3.4. *Existe $K_0 > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, toda palavra $\underline{a} \in I^\infty(x)$ e todo $t = ([\underline{a}]_n(x), y, z) \in D^*$, com D^* subconjunto de $\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x))$, tem-se*

$$\frac{1}{K_0}(\mathrm{diam}(T^n_{[\underline{a}]_n(x)}(D^*)))^p \leq (\mathrm{diam}(D^*))^p |\det D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x), z)|. \tag{3.20}$$

Demonstração. Considere $([\underline{a}]_n(x), y_0, z_0) \in \mathbb{D}([\underline{a}]_n(x))$ de modo que

$$||DT^n_{[\underline{a}]_n(x)}(y_0, z_0)||$$

seja máxima. Usando o teorema da média, temos

$$||T^n_{[\underline{a}]_n(x)}(t_1) - T^n_{[\underline{a}]_n(x)}(t_2)|| \leq ||DT^n_{[\underline{a}]_n(x)}(y_0, z_0)||\|t_1 - t_2\|, \quad \forall t_1, t_2 \in D^*. \tag{3.21}$$

Usando o Lema 3.1, existe $K_1^* > 1$ tal que

$$\frac{|\det D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x), z_0)|}{|\det D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x), z)|} \leq e^{K_1^*}.$$

Escrevendo $K \geq e^{K_1^*}$ e usando a conformalidade de ν , temos

$$\|D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x), z_0)\|^p = |\det D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x), z_0)| \leq K|\det D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x), z)|.$$

Ou seja,

$$\|D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x), z_0)\|^p \leq K|\det D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x), z)|. \tag{3.22}$$

Notando que

$$||DT^n_{[\underline{a}]_n(x)}(y,z)|| = ||(D_y\psi^n([\underline{a}]_n(x),y), D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x),z))||$$

$$\leq 2||D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x),z))||$$

para $([\underline{a}]_n(x),y,z) \in \mathbb{D}([\underline{a}]_n(x))$, e combinado 3.21 com 3.22, segue que

$$||T^n_{[\underline{a}]_n(x)}(t_1) - T^n_{[\underline{a}]_n(x)}(t_2)||^p \leq 2K|\det D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x),z)|||t_1-t_2||^p.$$

Assim, concluímos que

$$(\mathrm{diam}(T^n_{[\underline{a}]_n(x)}(D^*)))^p \leq K_0(\mathrm{diam}(D^*))^p|\det D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x),z)|.$$

□

O próximo Lema é similar à Proposição 3.4, mas agora para $\tilde{T}(x,z) = \rho_2(T(x,y,z)) = (\varphi(x),\nu(x,z))$ valem as desigualdades dos dois lados. Para cada $x \in \mathbb{T}^l$ denotamos a aplicação $\tilde{T}_x(z) = \nu(x,z)$. Para $n \geq 1$, temos $\tilde{T}^n_x(z) = \nu(\varphi^{n-1}(x),...(\nu(\varphi(x),\nu(x,z))...)$, ou seja, $\tilde{T}^n_x(z) = \nu^n(x,z)$ em que $T^n(x,y,z) = (\varphi^n(x),\psi^n(x,y),\nu^n(x,z))$.

Lema 3.2. *Existe $K_0 > 0$ tal que para toda palavra $\underline{a} \in I^\infty(x)$ e todo $t = ([\underline{a}]_n(x),z) \in D_*$, com D_* subconjunto de $\rho_2(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x)))$, tem-se*

$$\frac{1}{K_0}(\mathrm{diam}(\tilde{T}^n_{[\underline{a}]_n(x)}(D_*)))^p \leq (\mathrm{diam}(D_*))^p|\det D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x),z)| \leq K_0(\mathrm{diam}(\tilde{T}^n_{[\underline{a}]_n(x)}(D_*)))^p \tag{3.23}$$

para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Para $k = 0,1,...,n-1$ considere t_k um ponto em $\tilde{T}^{n-k}_{[\underline{a}]_n(x)}(D_*)$ tal que $||(D_z\nu)^{-1}||$ seja máximo. Assim,

$$||\tilde{T}^k_{[\underline{a}]_n(x)}(t_1) - \tilde{T}^k_{[\underline{a}]_n(x)}(t_2)|| \leq ||(D_z\nu(t_k))^{-1}||||\tilde{T}^{k+1}_{[\underline{a}]_n(x)}(t_1) - \tilde{T}^{k+1}_{[\underline{a}]_n(x)}(t_2)||$$

$$\leq |\det(D_z\nu(t_k))^{-1}|^{\frac{1}{p}}||\tilde{T}^{k+1}_{[\underline{a}]_n(x)}(t_1) - \tilde{T}^{k+1}_{[\underline{a}]_n(x)}(t_2)||.$$

Ou seja,

$$||\tilde{T}^{k+1}_{[\underline{a}]_n(x)}(t_1) - \tilde{T}^{k+1}_{[\underline{a}]_n(x)}(t_2)|| \geq \left(|\det(D_z\nu(t_k))^{-1}|^{-1}\right)^{\frac{1}{p}}||\tilde{T}^k_{[\underline{a}]_n(x)}(t_1) - \tilde{T}^k_{[\underline{a}]_n(x)}(t_2)||.$$

De onde chegamos em

$$||\tilde{T}^n_{[\underline{a}]_n(x)}(t_1) - \tilde{T}^n_{[\underline{a}]_n(x)}(t_2)||^p \geq \prod_{k=0}^{n-1}|\det D_z\nu(t_k)|(||t_1-t_2||)^p. \tag{3.24}$$

Usando o Lema 3.1, existe constante $C > 0$ tal que

$$\prod_{k=0}^{n-1} |\det D_z\nu(t_k)| \geq e^{-C}|detD_z\nu^n(t)|.$$

Aplicando em (4.10), temos

$$||\tilde{T}^n_{[\underline{a}]_n(x)}(t_1) - \tilde{T}^n_{[\underline{a}]_n(x)}(t_2)||^p \geq e^{-C}|detD_z\nu^n(t)|(||t_1 - t_2||)^p.$$

Tomando $K_0 \geq e^C$, concluímos que

$$K_0(\mathrm{diam}(\tilde{T}^n_{[\underline{a}]_n(x)}(D_*)))^p \geq |detD_z\nu^n(t)|(\mathrm{diam}(D_*))^p.$$

A outra desigualdade é análoga a demonstração da Proposição 3.4. □

3.4.2 Cota superior para $\dim_H(\Delta_T(x))$

Provaremos nesta seção o Teorema 3.2. Mostraremos que para qualquer $x \in \mathbb{T}^l$ fixado e qualquer $\epsilon > 0$ vale que $\mathcal{H}^{(s_0+\epsilon)p}(\Delta_T(x)) = 0$. Assim, fazendo $\epsilon \to 0$, teremos

$$\dim_H(\Delta_T(x)) \leq s_0 p.$$

Note inicialmente que se $b(\epsilon) = s_0 + \epsilon > s_0$, então $P(\sigma, b(\epsilon)\phi) < 0$. Vamos escrever apenas $b = b(\epsilon)$.

Lembremos que os cilindros em Σ_A são conjuntos da forma

$$[m; a_m, ..., a_n] = \{\underline{u} = (u_1, u_2...) \in \Sigma_A; u_i = a_i, m \leq i \leq n\}.$$

Seja então $\mathcal{L}$ uma cobertura aberta de Σ_A por cilindros $[0, l],\ l = 1, ...s$, de comprimento 1. Temos que $\mathcal{L}^{\pm n}$ é uma cobertura de Σ_A tal que cada elemento é a interseção de elementos das coberturas $\sigma^n(\mathcal{L})$, $\sigma^{(n-1)}(\mathcal{L}), ..., \mathcal{L}, \sigma^{-1}(\mathcal{L}), ..., \sigma^{-n+1}(\mathcal{L})$. Isto é, $\mathcal{L}^{\pm n}$ é uma cobertura formada pelos cilindros de comprimento $2n$ que começam no $-n$. Considerando a métrica

$$d((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (b_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \theta^M$$

em que $\theta \in (0, 1)$ é fixado e $M = M((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (b_i)_{i\in\mathbb{Z}}) \geq 0$ é o maior inteiro tal que $a_i = b_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$ com $|i| < M$, temos que

$$\mathrm{diam}(\mathcal{L}^{\pm n}) \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Assim, vale que

$$P(\sigma, b\phi) = P(\sigma, b\phi, \mathcal{L}).$$

Sendo $P(\sigma, b\phi) < 0$, existem $\kappa > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ grande o suficiente, tais que $\frac{1}{n}\log(P_n(\sigma, b\phi, \mathcal{L})) < -\kappa$, ou seja,

$$P_n(\sigma, b\phi, \mathcal{L}) < e^{-\kappa n}$$

para todo $n \geq n_0$. Tome então $\mathcal{V}_n$ uma subcobertura finita de $\mathcal{L}^n$ para a qual tenhamos

$$P_n(\sigma, b\phi, \mathcal{L}) = \sum_{L \in \mathcal{V}_n} e^{b\phi_n(L)}.$$

Note que $L \in \mathcal{V}_n$ é da forma $L = [-n, l_{-(n-1)}, l_{-n}, ..., l_0]$. Supomos também que $diam(\mathcal{L}^n)$ é menor que o raio de injetividade de φ, isto implica que para cada $L \in \mathcal{L}^n$ e para cada n fixado existe no máximo uma palavra $\underline{a}$ tal que $(H \circ \tilde{H})(L) \cap \mathbb{D}([\underline{a}]_n(x)) \neq \emptyset$. Para cada $x \in \mathbb{T}^l$ e cada $n \in \mathbb{N}$ considere os conjuntos

$$\tilde{L}_x = T^n(\tilde{L} \cap \mathbb{D}(l(x)))$$

em que $\tilde{L} = H(\tilde{H}(L))$ com $L \in \mathcal{V}_n$ e $\underline{l} \in I^n(x)$ sendo a única palavra tal que $\tilde{L} \cap \mathbb{D}(l(x)) \neq \emptyset$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $\mathcal{U}_n = \{\tilde{L}_x : L \in \mathcal{V}_n\}$ é uma cobertura de $\Delta_T(x)$ e que

$$\mathrm{diam}(\mathcal{U}_n) \leq 2(\lambda_{max})^n \,\mathrm{diam}(\mathbb{D}(l(x))),$$

isto é, $\mathrm{diam}(\mathcal{U}_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Aplicando a Proposição 3.4, com $D^* = \tilde{L} \cap \mathbb{D}(l(x))$ juntamente com o fato $\mathrm{diam}(\tilde{L} \cap \mathbb{D}(l(x))) \leq K_*$, para algum $K_* > 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{L \in \mathcal{V}_n} (\mathrm{diam}(\tilde{L}_x))^{bp} &= \sum_{L \in \mathcal{V}_n} (\mathrm{diam}(T^n_{l(x)}(\tilde{L} \cap \mathbb{D}(l(x)))))^{bp} \\
&\leq K_0^b \sum_{L \in \mathcal{V}_n} (\mathrm{diam}(\tilde{L} \cap \mathbb{D}(l(x))))^{bp} |\det D_z \nu^n(l(x), z)|^b \\
&< (K_*^p K_0)^b \sum_{L \in \mathcal{V}_n} |\det D_z \nu^n(l(x), z)|^b.
\end{aligned}$$

Como $(l(x), z) \in \rho_2(H \circ \tilde{H}(L))$ segue que, usando (3.13),

$$|\det D_z \nu^n(l(x), z)|^b \leq e^{b\phi_n(L)}.$$

Logo,

$$\sum_{L \in \mathcal{V}_n} (\mathrm{diam}(\tilde{L}_x))^{bp} \leq (K_*^p K_0)^b \sum_{L \in \mathcal{V}_n} e^{b\phi_n(L)}.$$

Então para $n \geq n_0$, vale que

$$\sum_{L \in \mathcal{V}_n} (\mathrm{diam}(\tilde{L}_x))^{bp} \leq (K_*^p K_0)^b e^{-\kappa n}.$$

Portanto, $\sum_{L \in \mathcal{V}_n} (\mathrm{diam}(\tilde{L}_x))^{bp} \to 0$ quando $n \to \infty$. Desta forma, temos $\mathcal{H}^{bp}(\Delta_T(x)) = 0$ e com isso $\dim_H(\Delta_T(x)) \leq bp$.

Corolário 3.2. *Para cada $x \in \mathbb{T}^l$, temos $dim_H(\rho(\Delta_T(x))) \leq s_0 p$.*

De fato, como a aplicação $\rho : V \to A$ em que $\rho(x, y, z) = (x, z)$ é Lipschitz contínua, segue que

$$dim_H(\rho(\Delta_T(x))) \leq dim_H(\Delta_T(x)).$$

3.4.3 Cota superior para $\dim_H(\Delta_T)$

Teorema 3.3. $\dim_H(\Delta_T) \leq l + s_0 p$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, escreva $b = b(\epsilon) = s_0 + \epsilon$. Considere $\mathcal{L}$ a cobertura aberta de Σ_A definida como na prova do Teorema 3.2 em 3.4.2. Temos

$$P_n(\sigma, b\phi, \mathcal{L}) < e^{-\kappa n}$$

para todo $n \geq n_0$ e algum $\kappa > 0$. Tomamos mais uma vez uma subcobertura finita $\mathcal{V}_n$ de $\mathcal{L}^n$ tal que

$$P_n(\sigma, b\phi, \mathcal{L}) = \sum_{L \in \mathcal{V}_n} e^{b\phi_n(L)}.$$

Isto é,

$$\sum_{L \in \mathcal{V}_n} e^{b\phi_n(L)} < e^{-\kappa n}. \tag{3.25}$$

Note que, usando a Proposição 3.4, existe $K_0 > 0$ tal que

$$(\mathrm{diam}(T^n(\tilde{L}) \cap \mathbb{D}(x)))^{bp} < K_0 e^{b\phi_n(L)} \tag{3.26}$$

para algum $x \in \mathbb{T}^l$ e $b > 0$, onde $\tilde{L} = H(\tilde{H}(L))$.

Para cada $L \in \mathcal{V}_n$, seja uma cobertura do toro $\mathbb{T}^l$ em $l-$cubos $C_1^L, C_2^L, ..., C_{M(L)}^L$ de diâmetro menor ou igual a $e^{\frac{1}{p}\phi_n(L)}$, onde $M(L) \leq 2^l e^{-\frac{l}{p}\phi_n(L)}$. Defina o seguinte conjunto

$$P_{L,i} = (C_i^L \times E \times F) \cap T^n(\tilde{L}).$$

Note que

$$\Delta_T \subset \bigcup_{\substack{L \in \mathcal{V}_n \\ 1 \leq i \leq M(L)}} P_{L,i}.$$

Dados $t_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $t_1 = (x_2, y_2, z_2)$ em $P_{L,i}$ tome $t = (x, y, z) \in C_i^L \times E \times F$ tal que $(x, y) = (x_2, y_2)$ e $(y, z) = (y_1, z_1)$. Assim,

$$\mathrm{diam}(P_{L,i}) \leq \sup_{t_1, t_2 \in P_{L,i}} \|t_1 - t_2\| \leq \sup_{t_1, t_2 \in P_{L,i}} (\|t_1 - t\| + \|t - t_2\|).$$

Portanto,

$$\mathrm{diam}(P_{L,i}) \leq \mathrm{diam}(C_i^L) + \mathrm{diam}(T^n(\tilde{L}) \cap \mathbb{D}(x)).$$

Usando (3.26) e a definição de C_i^L, temos

$$\mathrm{diam}(P_{L,i}) \leq C_0(e^{\frac{1}{p}\phi_n(L)}), \quad \text{para } L \in \mathcal{V}_n, 1 \leq i \leq M(L) \tag{3.27}$$

e para uma constante $C_0 > 0$. Por (3.25), segue que $e^{b\phi_n(L)} < e^{-\kappa n}$ para todo $n \geq n_0$ e todo $L \in \mathcal{V}_n$. Logo,

$$\mathrm{diam}(P_{L,i}) \leq C_0(e^{-\frac{\kappa}{bp}n})$$

para todo $n \geq n_0$. De modo que, quando $n \to \infty$ temos $\mathrm{diam}(P_{L,i}) \to 0$ uniformemente. Note que como o número de $l-$cubos é inversamente proporcional a $(\mathrm{diam}(P_{L,i}))^l$, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{L\in\mathcal{V}_n \\ 1\leq i\leq M(L)}} (\mathrm{diam}(P_{L,i}))^{l+bp} &\leq \sum_{L\in\mathcal{V}_n} \left(\sum_{1\leq i\leq M(L)} (\mathrm{diam}(P_{L,i}))^l (\mathrm{diam}(P_{L,i}))^{bp} \right) \\
&\leq \sum_{L\in\mathcal{V}_n} \left(2^l e^{-\frac{l}{p}\phi_n(L)} (C_0^l e^{\frac{l}{p}\phi_n(L)})(C_0^{bp} e^{b\phi_n(L)}) \right) \\
&\leq (2^l C_0^{l+bp}) \sum_{L\in\mathcal{V}_n} (e^{b\phi_n(L)}).
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\sum_{\substack{L\in\mathcal{V}_n \\ 1\leq i\leq M(L)}} (\mathrm{diam}(P_{L,i}))^{l+bp} \leq (2^l C_0^{l+bp}) e^{-\kappa n}, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

E com isso,

$$\sum_{\substack{L\in\mathcal{V}_n \\ 1\leq i\leq M(L)}} (\mathrm{diam}(P_{L,i}))^{l+bp} \to 0$$

quando $n \to \infty$. O que implica que $\mathcal{H}^{l+bp}(\Delta(T)) = 0$ para todo $b = s_0 + \epsilon$ e isto nos permite concluir que

$$\dim_H(\Delta_T) \leq l + ps_0.$$

□

Usando o fato das projeções $\rho_j, j = 1, 2$ serem Lipschitz, segue que:

Corolário 3.3. $\dim_H \rho_j(\Delta_T) \leq l + s_0 p, \ j = 1, 2.$

3.5 A medida μ_x em $I^\infty(x)$

Sejam os cilindros

$$[m; a_m, ..., a_n] = \{\underline{u} = (u_1, u_2...) \in I^\infty; u_i = a_i, m \leq i \leq n\}.$$

Considere o potencial $\phi^{'} : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ dado por $\phi^{'}(\tilde{\underline{a}}) = s_0\phi(\tilde{\underline{a}})$, onde

$$\phi(\tilde{\underline{a}}) = \log |\det D_z\nu(\rho \circ H \circ \tilde{H}(\tilde{\underline{a}}))|_Z|$$

(Ver Seções 2.5 e 3.4). Como ϕ é Hölder contínua (ϕ é Lipschitz contínua), pois $\nu \in C^r$, $r \geq 2$, segue que existe um estado de equilíbrio μ em Σ_A com respeito a $\sigma^{-1} : \Sigma_A \to \Sigma_A$ e para o potencial $\phi^{'}$. Indicamos a referência (2) para mais detalhes sobre estados de equilíbrio. Uma vez que $P(\sigma, s_0\phi) = 0$ e σ é um homeomorfismo em Σ_A, temos também que $P(\sigma^{-1}, s_0\phi) = 0$. Assim, como μ é medida de Gibbs, existe constante $C_0 > 0$ tal que

$$C_0^{-1}e^{s_0\phi_n^*(\tilde{\underline{a}})} \leq \mu([0; a_1, ..., a_n]) \leq C_0e^{s_0\phi_n^*(\tilde{\underline{a}})} \tag{3.28}$$

em que $\phi_n^*(\tilde{\underline{a}}) = \sum_{i=0}^{n-1}(\phi \circ \sigma^{-i})(\tilde{\underline{a}})$ é a soma estatística com respeito a σ^{-1} e $\tilde{\underline{a}} \in [0; a_1, ..., a_n]$. Lembremos que por (3.13) e (3.14) , temos

$$e^{s_0\phi_n(\tilde{\underline{a}})} = \|D_z\nu^n(\rho \circ H \circ \tilde{H}(\tilde{\underline{a}}))\|^{s_0p}, \tag{3.29}$$

com $\phi_n(\tilde{\underline{a}}) = \sum_{i=0}^{n-1}(\phi \circ \sigma^i)(\tilde{\underline{a}})$ a soma de Birkhof com respeito a σ.

Para cada $x \in \mathbb{T}^l$, denote por $I_{x,[\underline{a}]_n} := \tilde{T}^n_{[\underline{a}]_n(x)}(\rho(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x))))$, onde $\underline{a} \in I^\infty(x)$ satisfaz $\tilde{H}(\tilde{\underline{a}}) = (x, \underline{a})$, com $\tilde{\underline{a}} \in \Sigma_A$. Assim:

$$e^{s_0\phi_n(\tilde{\underline{a}})} = \|D_z\nu^n(x, z)\|^{s_0p}$$

para algum $z \in F$, e com isso

$$e^{s_0\phi_n(\sigma^{-n}(\tilde{\underline{a}}))} = \|D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x), z)\|^{s_0p} \tag{3.30}$$

para algum $z \in F$. Note que

$$\begin{aligned}\phi_n^*(\tilde{\underline{a}}) &= \sum_{i=0}^{n-1}(\phi \circ \sigma^{-i})(\tilde{\underline{a}}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(\phi \circ \sigma^i)(\sigma^{-(n-1)}(\tilde{\underline{a}}))\end{aligned}$$

$$= \phi_n(\sigma^{-(n-1)}(\underline{\tilde{a}}))$$
$$= \phi_n(\sigma^{-n}(\underline{\tilde{a}})) + \phi(\underline{\tilde{a}}) - \phi(\sigma^{-n}(\underline{\tilde{a}})).$$

Aplicando isto em (3.28) e escrevendo $K = C_0\tilde{K}$, em que $\tilde{K} = 2e^{\sup||\phi||}$, concluímos que

$$K^{-1}e^{s_0\phi_n(\sigma^{-n}(\underline{\tilde{a}}))} \leq \mu([0; a_1, ..., a_n]) \leq Ke^{s_0\phi_n(\sigma^{-n}(\underline{\tilde{a}}))} \tag{3.31}$$

O Lema 3.2 fornece então que existe constante $K_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{K_0}(\text{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n}))^p \leq (\text{diam}(\rho_2(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x)))))^p||D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x), z)||^p \leq K_0(\text{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n})))^p.$$

Como $(\text{diam}(\rho_2(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x)))))^p$ é limitado, podemos concluir, usando (3.30), que existe constante $C_0^* > 0$ tal que

$$(C_0^*)^{-1}(\text{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n}))^{s_0p} \leq e^{s_0\phi_n(\sigma^{-n}(\underline{\tilde{a}}))} \leq C_0^*(\text{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n}))^{s_0p}.$$

Aplicando isto em 3.31, temos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$C_1^{-1} \leq \frac{\mu([0; a_1, ..., a_n])}{\text{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n}))^{s_0p}} \leq C_1 \tag{3.32}$$

Ainda usando o Lema 3.2, podemos concluir também que existe constante $C_2 > 0$ tal que

$$C_2^{-1} \leq \frac{\text{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n}))^{s_0p}}{||D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x), 0)||^{s_0p}} \leq C_2. \tag{3.33}$$

Considere agora a seguinte projeção

$$\pi^+ : \Sigma_A \to \Sigma_A^+ := \bigcup_{\underline{a}_0 \in \mathcal{E}_1} \{\underline{a}_0\} \times I^\infty(\underline{a}_0)$$

dada por

$$\pi^+(\underline{\tilde{a}}) = \pi^+(\underline{\tilde{c}}, \underline{a}) = \tilde{a}_0\underline{a}$$

em que $\underline{\tilde{c}} = (..., \tilde{a}_{-2}, \tilde{a}_{-1}, \tilde{a}_0)$ e $\underline{a} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ...)$. Para cada $x \in \mathbb{T}^l$, definimos μ_x em $I^\infty(x)$ pelo "push-forward"por π^+ da medida de Gibbs μ para $s_0\phi$ em Σ_A restrita à $\{s(x)\} \times I^\infty(x)$, isto é,

$$\mu_x = (\pi_*^+\mu)|_{\{s(x)\}\times I^\infty(x)}.$$

Assim, se $\underline{a} \in I^\infty(x)$, então

$$\mu_x(\underline{a}) = \mu((\pi^+)^{-1}(s(x)\underline{a})).$$

Usando (3.32) , (3.33) e notando que $\mu_x([1; a_1, ..., a_n]) = \mu([0; s(x), a_1, ...a_n])$, concluímos que existe constante $C_3 > 0$ tal que

$$C_3^{-1} \leq \frac{\mu_x([1; a_1, ..., a_n])}{||D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x), 0)||^{s_0p}} \leq C_3. \tag{3.34}$$

3.6 Cota Superior para $\overline{\dim}_B(\Delta_T(x))$, $\overline{\dim}_B(\rho(\Delta_T(x)))$ e $\overline{\dim}_B(\Delta_T)$

Vamos agora estabelecer que a cota superior para a box-dimension dos conjuntos $\Delta_T(x)$, $\rho(\Delta_T(x))$ e Δ_T é a mesma que foi provada para a dimensão de Hausdorff para estes conjuntos. Iremos usar a medida μ_x e as desigualdades obtidas na Seção passada.

3.6.1 Cota superior para $\overline{\dim}_B(\rho(\Delta_T(x)))$ e $\overline{\dim}_B(\Delta_T(x))$

Teorema 3.4. $\overline{\dim}_B(\rho(\Delta_T(x))) \leq s_0 p$

Demonstração. Para cada $x \in \mathbb{T}^l$ e $\underline{a} \in I^\infty(x)$ denote por $I_{x,[\underline{a}]_n} := \tilde{T}^n_{[\underline{a}]_n(x)}(\rho_2(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x))))$ como na Seção passada. Então existe $C_0 > 0$ tal que

$$C_0^{-1} \leq \frac{\mu_x([1; a_1, ..., a_n])}{\operatorname{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n}))^{s_0 p}} \leq C_0. \tag{3.35}$$

Seja agora $0 < \delta < 1$ e defina o seguinte conjunto

$$A(\delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{[\underline{a}]_n \in I^n(x) | \operatorname{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n}) < \delta \text{ e } \operatorname{diam}(I_{x,[\underline{a}]_k}) \geq \delta \ \forall k < n\}.$$

O conjunto $A(\delta)$ é formado por palavras de comprimento n que fazem com que $\operatorname{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n}) < \delta$, cada elemento de $[\underline{a}]_n \in A(\delta)$ determina um cilindro $C_{[\underline{a}]_n} = [1; a_1, ...a_n]$ em $I^\infty(x)$. Tais cilindros $C_{[\underline{a}]_n}$ são dois a dois disjuntos e formam uma partição em $I^\infty(x)$. Vale então que

$$\sum_{C_{[\underline{a}]_n} \in A(\delta)} \mu_x(C_{[\underline{a}]_n}) = 1. \tag{3.36}$$

Usando (3.35) para os cilindros $C_{[\underline{a}]_n}$, temos

$$(C_0)^{-1} \operatorname{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n})^{s_0 p} \leq \mu_x(C_{[\underline{a}]_n}) \leq C_0 \operatorname{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n})^{s_0 p}. \tag{3.37}$$

Pela conformalidade de ν, podemos mostrar que

$$\operatorname{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n}) \geq \prod_{k=1}^{n} \lambda_2(t_k) \operatorname{diam}(\rho(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x)))), \text{ com } t_k \in \tilde{T}^{n-k}_{[\underline{a}]_n(x)}(\rho(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x))).$$

Também vale que

$$\operatorname{diam}(I_{x,[\underline{a}]_{n-1}}) \leq \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_2(w_k) \operatorname{diam}(\rho(\mathbb{D}([\underline{a}]_{n-1}(x)))) \text{ com } w_k \in \tilde{T}^{n-k}_{[\underline{a}]_{n-1}(x)}(\rho(\mathbb{D}([\underline{a}]_{n-1}(x)))).$$

Logo,

$$\frac{\operatorname{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n})}{\operatorname{diam}(I_{x,[\underline{a}]_{n-1}})} \geq \frac{\prod_{k=1}^{n} \lambda_2(t_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} \lambda_2(w_k)}.$$

Usando o Corolário 3.1, existe $K_1 > 0$ tal que

$$\frac{\mathrm{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n})}{\mathrm{diam}(I_{x,[\underline{a}]_{n-1}})} \geq K_1 \lambda_{min}.$$

Assim, pela desigualdade acima e definição de $A(\delta)$, existe $0 < C_1 \leq 1$ tal que

$$C_1\delta \leq \mathrm{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n}) < \delta.$$

Aplicando isto em (3.37), segue que existe $C_2 > 0$ tal que

$$C_2\delta^{s_0p} \leq \mu_x(C_{[\underline{a}]_n}) < C_0\delta^{s_0p}.$$

Somando em todos os $[\underline{a}]_n \in A(\delta)$, temos

$$C_2 \sum_{[\underline{a}]_n \in A(\delta)} \delta^{s_0p} \leq \sum_{[\underline{a}]_n \in A(\delta)} \mu_x(C_{[\underline{a}]_n}) < C_0 \sum_{[\underline{a}]_n \in A(\delta)} \delta^{s_0p}.$$

Denotando por $\#A(\delta)$ a cardinalidade de $A(\delta)$, temos

$$\#A(\delta)C_2\delta^{s_0p} \leq 1 < \#A(\delta)C_0\delta^{s_0p},$$

ou seja, vale que $\#A(\delta) \leq (C_2)^{-1}\delta^{-s_0p}$.

Note agora que o conjunto $\mathcal{I}_x := \{I_{x,[\underline{a}]_n} : \underline{a} \in A(\delta)\}$ é uma $\delta-$cobertura para $\rho(\Delta_T(x))$. Assim, $N(\rho(\Delta_T(x)), \delta) \leq C_2^{-1}\delta^{-s_0p}$ e com isso

$$\overline{\dim}_B\rho(\Delta_T(x)) := \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log N(\rho(\Delta_T(x)), \delta)}{-\log\delta} \leq s_0p.$$

□

Teorema 3.5. $\overline{\dim}_B(\Delta_T(x)) \leq s_0p$.

Demonstração. Para cada $x \in \mathbb{T}^l$ e $\underline{a} \in I^\infty(x)$, considere $L_{x,[\underline{a}]_n} := T^n_{[\underline{a}]_n(x)}(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x)))$. Definimos também $\hat{T}_x(x,y) := \psi(x,y)$ de modo que $\hat{T}^n_x(x,y) = \psi^n(x,y)$. Além disso, denote por $J_{x,[\underline{a}]_n} = \hat{T}^n_{[\underline{a}]_n(x)}(\rho_1(\mathbb{D}([\underline{a}]_n(x))))$. Note então que $L_{x,[\underline{a}]_n} = (J_{x,[\underline{a}]_n}, I_{x,[\underline{a}]_n})$. Uma vez que $\|D_y\psi(x,y)\| < ||D_z\nu(x,z)||$, segue existe constante $K > 0$ tal que

$$\mathrm{diam}(J_{x,[\underline{a}]_n}) \leq K\,\mathrm{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n}).$$

Dessa forma, existe constante $K^* > 0$ tal que

$$\mathrm{diam}(L_{x,[\underline{a}]_n}) \leq 2K^*\,\mathrm{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n}).$$

Note que o conjunto $\mathcal{L}_x := \{L_{x,[\underline{a}]_n} : \underline{a} \in I^\infty(x)\}$ forma uma cobertura para $\Delta_T(x)$. Se $\mathcal{I}_x := \{I_{x,[\underline{a}]_n} : \underline{a} \in I^\infty(x)\}$ é tal que $\mathrm{diam}(\mathcal{I}_x) < \delta$, com $0 < \delta < 1$, então $\mathrm{diam}(\mathcal{L}_x) < 2K^*\delta$. Pelo que já foi visto na prova do Teorema 3.5, a cardinalidade de $\mathcal{L}_x$ com esta propriedade é da ordem de δ^{-s_0p} e assim para L_x ser uma $2K^*\delta-$cobertura de $\Delta_T(x)$, sua cardinalidade também é da ordem de δ^{-s_0p}. De onde segue o resultado pela definição de $\overline{\dim}_B(\Delta_T(x))$. □

3.6.2 Cota superior para $\overline{\dim}_B(\Delta_T)$

Teorema 3.6. $\overline{\dim}_B(\Delta_T) \leq l + s_0 p$.

Demonstração. Para $\underline{a} \in \Sigma_A$ denotamos $P_{[\underline{a}]_n} = H(\tilde{H}(C_{[\underline{a}]_n}))$ em que $C_{[\underline{a}]_n} = [1; a_1, ..., a_n]$. Seja gora, para $0 < \delta < 1$, o conjunto

$$\tilde{A}(\delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ [\underline{a}]_n \in I^n(x) : \sup_{\substack{x \in \mathbb{T}^l \\ \underline{a} \in I^\infty(x)}} \{\mathrm{diam}(I_{x,[\underline{a}]_n})\} < \delta \text{ e } \sup_{\substack{x \in \mathbb{T}^l \\ \underline{a} \in I^\infty(x)}} \{\mathrm{diam}(I_{x,[\underline{a}]_k})\} \geq \delta, \ \forall k < n \right\}.$$

Pelo que ja foi mostrado, podemos concluir que $\#\tilde{A}(\delta) \leq K_0 \delta^{-s_0 p}$, onde K_0 é uma constante positiva. Além disso, os cilindros $C_{[\underline{a}]_n}$, com $[\underline{a}]_n \in \tilde{A}(\delta)$, formam uma partição em Σ_A.

Para cada $C_{[\underline{a}]_n}$, com $[\underline{a}]_n \in \tilde{A}(\delta)$, considere uma cobertura de $\mathbb{T}^l$ em conjuntos disjuntos $C_1^{[\underline{a}]_n}, C_2^{[\underline{a}]_n}, ..., C_{M([\underline{a}]_n)}^{[\underline{a}]_n}$ com $\frac{\delta}{10} \leq \mathrm{diam}(C_i^{[\underline{a}]_n}) < \delta$, $1 \leq i \leq M([\underline{a}]_n)$ e $M([\underline{a}]_n) \leq 10^l \delta^{-l}$.

Definimos agora, para $1 \leq i \leq M([\underline{a}]_n)$ e $[\underline{a}]_n \in \tilde{A}(\delta)$ os seguintes conjuntos

$$P_{[\underline{a}]_n, i} = (C_i^{[\underline{a}]_n} \times E \times F) \cap P_{[\underline{a}]_n}.$$

Temos

$$\Delta_T \subset \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq M([\underline{a}]_n) \\ [\underline{a}]_n \in \tilde{A}(\delta)}} P_{[\underline{a}]_n, i}.$$

Note ainda que a cardinalidade do conjunto dos $P_{[\underline{a}]_n, i}$ é limitada por $10^l K_0 \delta^{-l - s_0 p}$.

Afirmamos agora que $\mathrm{diam}(P_{[\underline{a}]_n, i}) < C_5 \delta$, ou seja, que o conjunto dos $P_{[\underline{a}]_n, i}$ forma uma $C_5\delta-$cobertura para o atrator. De fato, se $t_1, t_2 \in P_{[\underline{a}]_n, i}$, então podemos escrever $t_1 = (x_1, S(x_1, \underline{a}))$ e $t_2 = (x_2, S(x_2, \underline{a}))$, onde $x_1, x_2 \in C_i^{[\underline{a}]_n}$. De onde

$$||t_1 - t_2|| \leq C_1(||x_1 - x_2|| + ||S(x_1, \underline{a}) - S(x_2, \underline{a})||).$$

Temos $||x_1 - x_2|| < \delta$ e usando a definição de $S(x, \underline{a})$ e a desigualdade do valor médio, temos

$$\begin{aligned} ||S(x_1, \underline{a}) - S(x_2, \underline{a})|| &\leq C_2 \lim_{n \to \infty} \big(||\psi_{[\underline{a}]_1(x_1)} \circ ... \circ \psi_{[\underline{a}]_n(x_1)}(0) - \psi_{[\underline{a}]_1(x_2)} \circ ... \circ \psi_{[\underline{a}]_n(x_2)}(0)|| \\ &\quad + ||\nu_{[\underline{a}]_1(x_1)} \circ ... \circ \nu_{[\underline{a}]_n(x_1)}(0) - \nu_{[\underline{a}]_1(x_2)} \circ ... \circ \nu_{[\underline{a}]_n(x_2)}(0)|| \big) \\ &\leq C_3 \lim_{n \to \infty} \big(\lambda_{max} \big(||[\underline{a}]_1(x_1) - [\underline{a}]_1(x_2)|| \\ &\quad + ||\psi_{[\underline{a}]_2(x_1)} \circ ... \circ \psi_{[\underline{a}]_n(x_1)}(0) - \psi_{[\underline{a}]_2(x_2)} \circ ... \circ \psi_{[\underline{a}]_n(x_2)}(0)|| \big) \\ &\quad + \lambda_{max} \big(||[\underline{a}]_1(x_1) - [\underline{a}]_1(x_2)|| \end{aligned}$$

$$+||\nu_{[\underline{a}]_2(x_1)} \circ ... \circ \nu_{[\underline{a}]_n(x_1)}(0) - \nu_{[\underline{a}]_2(x_2)} \circ ... \circ \nu_{[\underline{a}]_n(x_2)}(0)||\big)\big)$$

$$\leq C_3 \lim_{n\to\infty} \big(\lambda_{max}\underline{\beta}^{-1}||x_1 - x_2||$$

$$+\lambda_{max}||\psi_{[\underline{a}]_2(x_1)} \circ ... \circ \psi_{[\underline{a}]_n(x_1)}(0) - \psi_{[\underline{a}]_2(x_2)} \circ ... \circ \psi_{[\underline{a}]_n(x_2)}(0)||$$

$$+\lambda_{max}\underline{\beta}^{-1}||x_1 - x_2||$$

$$+\lambda_{max}||\nu_{[\underline{a}]_2(x_1)} \circ ... \circ \nu_{[\underline{a}]_n(x_1)}(0) - \nu_{[\underline{a}]_2(x_2)} \circ ... \circ \nu_{[\underline{a}]_n(x_2)}(0)||\big)\big).$$

Continuando o procedimento, chegamos em

$$||S(x_1, \underline{a}) - S(x_2, \underline{a})|| \leq \left(2\frac{C_4\underline{\beta}^{-1}\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}}\right)||x_1 - x_2|| < \left(2\frac{C_4\underline{\beta}^{-1}\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}}\right)\delta,$$

e isso prova nossa afirmação.

Portanto, concluímos que $N(\Delta_T, C_5\delta) \leq 10^l K_0 \delta^{-l-s_0 p}$ e usando a definição $\overline{\dim}_B(\Delta_T)$, teremos

$$\overline{\dim}_B(\Delta_T) \leq l + s_0 p.$$

□

3.7 Menor valor singular

Nesta Seção apresentamos a definição de menor valor singular de uma aplicação linear. Através deste conceito podemos medir transversalidade.

Definição 3.3. *Considere uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, com $m \geq n$. Denotaremos o **menor valor singular de** A por*

$$\boldsymbol{m}(A) := \sup_{dim(W)=n} \left(\inf_{v\in W,\ ||v||=1} ||A(v)||\right),$$

em que $W \subset \mathbb{R}^m$ é um subespaço.

Vamos apresentar um Lema técnico que será usado nesta Tese para limitar o volume das pré-imagens de bolas de raio $r > 0$ por uma aplicação g quando temos uma cota inferior positiva para $\mathbf{m}(Dg)$.

Lema 3.3. *Dados um aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^k$, $g \in C^2(U, \mathbb{R}^p)$, com $||g||_{C^2} \leq 2\alpha_0$, $\alpha_0 > 0$ e um número $\delta > 0$ tal que $diam(U) \leq \dfrac{\delta}{4\alpha_0}$ e $\boldsymbol{m}(Dg(\boldsymbol{t})) \geq \delta$ para todo $\boldsymbol{t} \in U$, então existe uma constante $K(\delta) > 0$ tal que que*

$$m_k(g^{-1}(\mathbf{B}(w, r))) < K(\delta)r^p$$

para todo $w \in \mathbb{R}^p$ e todo $r > 0$.

Demonstração. A demonstração deste lema é encontrado em (6), pp 2064-2065. □

4 DIMENSÃO DE HAUSDORFF PARA FAMÍLIAS TRANSVERSAIS

Neste Capítulo vamos considerar $T : V \to V$, com $V = \mathbb{T}^l \times E \times F$ e $T(x, y, z)$ definidos como na seção 2.2 do Capítulo 2. Denotamos $\tilde{T}(x, z) = \rho_2(T(x, y, z)) = (\varphi(x), \nu(x, z))$. Para $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_k) \in \mathbb{R}^k$ e aplicações $\psi_1, ..., \psi_k$ em $C^\infty(\mathbb{T}^l, \mathbb{R}^p)$ escrevemos

$$\nu_{\mathbf{t}}(x, z) = \nu(x, z) + \sum_{j=1}^{k} t_j \psi_j(x) \quad e \quad \tilde{T}_{\mathbf{t}}(x, z) = (\varphi(x), \nu_{\mathbf{t}}(x, z)).$$

Para cada $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$, $x \in \mathbb{T}^l$ e $\underline{a} \in I^\infty(x)$, definimos ainda a aplicação

$$S(x, \underline{a}; \mathbf{t}) = \lim_{n\to\infty} ((\nu_{\mathbf{t}})_{[\underline{a}]_1(x)} \circ (\nu_{\mathbf{t}})_{[\underline{a}]_2(x)} \circ ... \circ (\nu_{\mathbf{t}})_{[\underline{a}]_n(x)}(0)).$$

De forma semelhante ao Capítulo 3, denotamos para cada $x \in \mathbb{T}^l$ a aplicação $\tilde{T}_x(z) = \nu(x, z)$. Para $n \geq 1$, teremos $\tilde{T}_x^n(z) = \nu(\varphi^{n-1}(x), ...(\nu(\varphi(x), \nu(x, z))...)$, ou seja, $\tilde{T}_x^n(z) = \nu^n(x, z)$ em que $T^n(x, y, z) = (\varphi^n(x), \psi^n(x, y), \nu^n(x, z))$. Note ainda que, para x fixado, vale a igualdade $DT_x(z) = D_z\nu(x, z)$.

Como primeiro resultado significativo deste Capítulo, mostraremos que se λ_{max} é suficientemente pequeno e a família $\{\tilde{T}_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^k}$ satisfaz uma condição de transversalidade em termos dos parâmetros $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$, a qual daremos adiante, então é possível provar que a dimensão de Hausdorff do conjunto $\Delta_{T_{\mathbf{t}}}(x)$ associado a dinâmica $T_{\mathbf{t}}(x, y, z) = (\varphi(x), \psi(x, y), \nu_{\mathbf{t}}(x, z))$ é igual a

$$\dim_H(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}(x)) = s_0 p.$$

para todo $x \in \mathbb{T}^l$ e quase todo $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{b_0}$, com s_0 sendo o único valor tal que $P(\sigma, s_0\phi) = 0$. Isto implicará que

$$\dim_B(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}) = \dim_H(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}) = l + s_0 p.$$

Ou seja, mesmo ainda não tendo provado que $\dim_H(\Delta_T) = l + s_0 p$ para a dinâmica inicial T, mostraremos que se λ_{max} é pequeno o suficiente, então será possível tomar o parâmetro $\mathbf{t}$ arbitrariamente próximo de $\mathbf{0}$ tal que existirá uma dinâmica C^r-próxima de $T : V \to V$ em que o atrator tem a dimensão de Hausdorff desejada. Mais precisamente, provaremos :

Teorema A. *Se* $0 < \lambda_{max} < \min\left\{\frac{1}{1+2\sqrt{p}}, N^{-\frac{1}{\min\{p,2\}}}\right\}$, *então existe inteiro* $k > 0$ *e uma família de dinâmicas* $\{T_t\}$, C^r *com o parâmetro* $\boldsymbol{t} \in \mathbf{B}(\boldsymbol{0}, \eta) \subset \mathbb{R}^k$, *com* $T_{\boldsymbol{0}} = T$ *tal que*

$$\dim_B(\Delta_{T_t}(x)) = \dim_H(\Delta_{T_t}(x)) = s_0 p,$$

para todo $x \in \mathbb{T}^l$ fixado e para quase todo $\boldsymbol{t}$. Em particular, vale o cálculo da dimensão de Hausdorff para dinâmicas $T_{\boldsymbol{t}}$ arbitrariamente C^r-próximas de T, isto é, existe uma aplicação $T_{\boldsymbol{t}}$ arbitrariamente C^r-próxima de T tal que

$$\dim_B(\Delta_{T_t}(x)) = \dim_H(\Delta_{T_t}(x)) = s_0 p \ , \forall x \in \mathbb{T}^l \ e \quad \dim_B(\Delta_{T_t}) = \dim_H(\Delta_{T_t}) = l + s_0 p.$$

Embora o Teorema A seja genérico, ele não descreve como construir uma pertubação explícita satisfazendo o cálculo da dimensão. Na continuação, nos Capítulos 5 e 6, vamos dar condições suficientes sobre T para termos a dimensão desejada.

4.1 Famílias transversais

Sejam $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_k) \in \mathbb{R}^k$, aplicações $\psi_1, ..., \psi_k$ em $C^\infty(\mathbb{T}^l, \mathbb{R}^p)$ e $\tilde{T}_{\mathbf{t}}(x, z) = (\varphi(x), \nu_{\mathbf{t}}(x, z))$ descritos anteriormente. Denotaremos por m_d a medida de Lesbegue $d-$dimensional.

Definição 4.1. *A família $\{\tilde{T}_{\boldsymbol{t}}\}_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^k}$ é dita **transversal** se existem $\eta > 0$ e $K > 0$ tais que para todo $x \in \mathbb{T}^l$, para qualquer $r > 0$ e quaisquer $\underline{a}, \underline{b} \in I^\infty(x)$, com $[\underline{a}]_1 \neq [\underline{b}]_1$, tem-se*

$$m_k(\{\boldsymbol{t} \in \mathbf{B}(0, \eta); ||S(x, \underline{a}; \boldsymbol{t}) - S(x, \underline{b}; \boldsymbol{t})|| < r\}) \leq K r^p.$$

Um questionamento natural é se tais famílias existem. A resposta é afirmativa para λ_{max} suficientemente pequeno. Ou seja, vale o seguinte:

Teorema 4.1. *Para $\lambda_{max} < \dfrac{1}{1 + 2\sqrt{p}}$, existe $k > p$ e existem funções $\psi_1, ..., \psi_k$ em $C^\infty(\mathbb{T}^l, \mathbb{R}^p)$ tais que a correspondente família $\{\tilde{T}_{\boldsymbol{t}}\}_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^k}$ é transversal.*

Demonstração. Considere $R_1, ..., R_s$ os elementos da partição de Markov de $\mathbb{T}^l$, com diâmetro pequeno o suficiente para que quaisquer duas pré-imagens de qualquer $x \in \mathbb{T}^l$ não estejam em retângulos adjacentes da partição. Seja $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ base canônica do $\mathbb{R}^p$. Para $i' \in \{1, ..., s\}$ e $j' \in \{1, ..., p\}$ defina as aplicações $\psi_{i',j'}$ em $C^\infty(\mathbb{T}^l, \mathbb{R}^p)$ por :

- $\psi_{i',j'}(x) = e_{j'}$ para todo $x \in R_{i'}$;
- $\psi_{i',j'}(x) = (\alpha_{i',j'}(x))e_{j'}$, com $\alpha_{i',j'} \in C^\infty(\mathbb{T}^l, \mathbb{R})$ e $0 < |\alpha_{i',j'}(x)| \leq 1$, para todo x em retângulos adjacentes a $R_{i'}$;
- $\psi_{i',j'}(x) = 0$ para x que não esteja em $R_{i'}$ e nem em retângulos adjacentes a $R_{i'}$.

Se escrevermos $\psi_k = \psi_{i',j'}$, então para $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{sp}$, temos $\nu_{\mathbf{t}}(x, z) = \nu(x, z) + \displaystyle\sum_{k=1}^{sp} t_k \psi_k(x)$ e a família correspondente $\{\tilde{T}_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}}$. Observe que $||\psi_k(x)|| \leq 1$.

Fixemos um x qualquer em $\mathbb{T}^l$ e para $\underline{a}, \underline{b} \in I^\infty(x)$, em que $[\underline{a}]_1 \neq [\underline{b}]_1$, definimos a seguinte aplicação $g : \mathbb{R}^{sp} \to \mathbb{R}^p$ por

$$g(\mathbf{t}) = S(x, \underline{a}; \mathbf{t}) - S(x, \underline{b}; \mathbf{t}).$$

Note que sendo $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_{sp})$, temos

$$g(\mathbf{t}) = \lim_{n\to\infty} (S_n(x, \underline{a}; \mathbf{t}) - S_n(x, \underline{b}; \mathbf{t})) + \sum_{k=1}^{sp} t_k(\psi_k([\underline{a}]_1(x)) - \psi_k([\underline{b}]_1(x)))$$

em que,

$$S_n(x, \underline{a}; \mathbf{t}) = \nu([\underline{a}]_1(x), \nu([\underline{a}]_2(x), ..., \nu([\underline{a}]_{n-1}(x), \nu([\underline{a}]_n(x), 0) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_n(x)))$$

$$+ \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_{n-1}(x))) + ...) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_2(x))).$$

Note ainda que vale

$$S_n(x, \underline{a}; \mathbf{t}) = \nu([\underline{a}]_1(x), S_{n-1}([\underline{a}]_1(x), \sigma(\underline{a}); \mathbf{t}) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_2(x))).$$

Assim, derivando em relação ao parâmetro $\mathbf{t}$, temos

$$D_{\mathbf{t}}S_n(x, \underline{a}; \mathbf{t}) = D_x\nu \left([\underline{a}]_1(x), S_{n-1}([\underline{a}]_1(x), \sigma(\underline{a}); \mathbf{t}) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_2(x)) \right) D_{\mathbf{t}}([\underline{a}]_1(x))$$

$$+D_z\nu \left([\underline{a}]_1(x), S_{n-1}([\underline{a}]_1(x), \sigma(\underline{a}); \mathbf{t}) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_2(x)) \right)$$

$$\left(DS_{n-1}([\underline{a}]_1, \sigma(\underline{a}); \mathbf{t}) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_2(x)) \right).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{t}}S_n(x, \underline{a}; \mathbf{t}) = \quad & D_z\nu([\underline{a}]_1(x), S_{n-1}([\underline{a}]_1(x), \sigma(\underline{a}); \mathbf{t}) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_2(x))) \\ & (DS_{n-1}([\underline{a}]_1, \sigma(\underline{a}); \mathbf{t}) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_2(x))). \end{aligned} \tag{4.1}$$

No caso em que temos $D_{t_{k_0}}S_n(x, \underline{a}; \mathbf{t})$ para algum $t_{k_0} \in \{1, 2, ..., sp\}$, vale

$$\begin{aligned} D_{t_{k_0}}S_n(x, \underline{a}; \mathbf{t}) = \quad & D_z\nu([\underline{a}]_1(x), S_{n-1}([\underline{a}]_1(x), \sigma(\underline{a}); \mathbf{t}) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_2(x))) \\ & (D_{t_{k_0}}S_{n-1}([\underline{a}]_1, \sigma(\underline{a}); \mathbf{t}) + \psi_{k_0}([\underline{a}]_2(x))). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Escreva $a_n = \sup \left\| D_{t_{k_0}} S_n(x, \underline{a}; \mathbf{t}) \right\|$. Então, passando a norma em (4.2), concluímos o seguinte

$$a_n \leq \lambda_{max}(a_{n-1} + 1). \tag{4.3}$$

Usando a desigualdade (4.3) de forma recorrente finitas vezes chegamos em

$$a_n \leq (\lambda_{max})^{n-1} a_1 + (\lambda_{max})^{n-1} + (\lambda_{max})^{n-2} + ... + \lambda_{max}. \tag{4.4}$$

Uma vez que $a_1 \leq \lambda_{max}$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \frac{\lambda_{max}}{1 - \lambda_{max}}. \tag{4.5}$$

Sejam $\mathbf{v}_{i',j'}$, $1 \leq i' \leq s$, $1 \leq j' \leq p$, vetores da base canônica de $\mathbb{R}^{sp}$. Dado $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{sp}$, podemos escrever $\mathbf{t} = \sum_{i',j'} t_{i',j'} \mathbf{v}_{i',j'}$. Considere $i'_0 \in \{1, ..., s\}$ tal que $[\underline{a}]_1(x) \in R_{i'_0}$ e $\psi_{i'_0,j'}$ definida como acima. Assim, $\psi_{i'_0,j'}([\underline{a}]_1(x)) = e_{j'}$ e $\psi_{i'_0,j'}([\underline{b}]_1(x)) = 0$. Para algum $1 \leq j'_0 \leq p$, escreva $\mathbf{v}_{i'_0,j'_0}$, $\mathbf{t}_{i'_0,j'_0} = k_0$ e $\psi_{i'_0,j'_0} = \psi_{k_0}$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}_{i'_0,j'_0}}(\mathbf{t}) = & \quad \psi_{k_0}([\underline{a}]_1(x)) - \psi_{k_0}([\underline{b}]_1(x)) \quad + \lim_{n\to\infty} (D_{t_{k_0}} S_n(x, \underline{a}; \mathbf{t}) - D_{t_{k_0}} S_n(x, \underline{b}; \mathbf{t})) \\ = & \quad e_{j'_0} \quad + \lim_{n\to\infty} (D_{t_{k_0}} S_n(x, \underline{a}; \mathbf{t}) - D_{t_{k_0}} S_n(x, \underline{b}; \mathbf{t})). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Seja agora $W \subset \mathbb{R}^{sp}$ o espaço gerado pelo conjunto $\{\mathbf{v}_{i'_0,j'}\}$, $j' = 1, ..., p$. Note que $\dim(W) = p$. Tome $\mathbf{v} = \sum_{j'=1}^{p} a_{j'} \mathbf{v}_{i'_0,j'}$ um vetor unitário em W. Assim, $||\mathbf{v}||^2 = \sum_{j'=1}^{p} a_{j'}^2 = 1$. Temos

$$\begin{aligned} ||Dg(\mathbf{t})\mathbf{v}|| &= || \sum_{j'=1}^{p} a_{j'} (Dg(\mathbf{t})(\mathbf{v}_{i'_0,j'}) || \\ &= || \sum_{j'=1}^{p} a_{j'} (\frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}_{i'_0,j'}}(\mathbf{t})) ||. \end{aligned}$$

Por (4.6), podemos escrever

$$\begin{aligned} ||Dg(\mathbf{t})\mathbf{v}|| &= || \sum_{j'=1}^{p} a_{j'}(e_{j'}) + \sum_{j'=1}^{p} a_{j'} (\lim_{n\to\infty} (D_{t_{i'_0,j'}} S_n(x, \underline{a}; \mathbf{t}) - D_{t_{i'_0,j'}} S_n(x, \underline{b}; \mathbf{t}))) || \\ &\geq || \sum_{j'=1}^{p} a_{j'}(e_{j'}) || - || \sum_{j'=1}^{p} a_{j'} (\lim_{n\to\infty} (D_{t_{i'_0,j'}} S_n(x, \underline{a}; \mathbf{t}) - D_{t_{i'_0,j'}} S_n(x, \underline{b}; \mathbf{t}))) || \end{aligned}$$

Note que $|| \sum_{j'=1}^{p} a_{j'}(e_{j'}) || = \sqrt{\sum_{j'=1}^{p} a_{j'}^2} = 1$ e escrevendo

$$P_{j'} = \lim_{n\to\infty} (D_{t_{i'_0,j'}} S_n(x, \underline{a}; \mathbf{t}) - D_{t_{i'_0,j'}} S_n(x, \underline{b}; \mathbf{t})),$$

temos

$$||Dg(\mathbf{t})\mathbf{v}|| \geq 1 - ||\sum_{j'=1}^{p} a_{j'}(P_{j'})||.$$

Vale que

$$\begin{aligned}||P_{j'}|| &= \| \lim_{n\to\infty} (D_{t_{i'_0,j'}} S_n(x,\underline{a};\mathbf{t}) - D_{t_{i'_0,j'}} S_n(x,\underline{b};\mathbf{t}))\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|(D_{t_{i'_0,j'}} S_n(x,\underline{a};\mathbf{t})\| + \lim_{n\to\infty} \|(D_{t_{i'_0,j'}} S_n(x,\underline{b};\mathbf{t})\|.\end{aligned}$$

Usando (4.5), segue que

$$||P_{j'}|| \leq \frac{2\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}||\sum_{j'=1}^{p} a_{j'}(P_{j'})||^2 &\leq \left(\sum_{j'=1}^{p} |a_{j'}|\ ||(P_{j'})||\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{j'=1}^{p} |a_{j'}| \left(\frac{2\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}}\right)\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{2\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}}\right)^2 \left(\sum_{j'=1}^{p} |a_{j'}|\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{2\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}}\right)^2 \left(\sum_{j'=1}^{p} 1^2\right) \left(\sum_{j'=1}^{p} a_{j'}^2\right) \\ &\leq \left(\frac{2\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}}\right)^2 p.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$||\sum_{j'=1}^{p} a_{j'}(P_{j'})|| \leq \left(\frac{2\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}}\right)\sqrt{p}.$$

Portanto, temos

$$||Dg(\mathbf{t})\mathbf{v}|| \geq 1 - \left(\frac{2\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}}\right)\sqrt{p}.$$

E, tomando o ínfimo sobre todos os vetores unitários em W e o supremo sobre todos os espaços W com dimensão p, podemos concluir que

$$\mathbf{m}(Dg(\mathbf{t})) \geq 1 - \left(\frac{2\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}}\right)\sqrt{p} = \frac{1-(1+2\sqrt{p})\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}}.$$

Consideramos então

$$0 < \eta \leq \min\{\frac{(1-(1+2\sqrt{p})\lambda_{max})(1-\lambda_{max})^2}{8((3-2\lambda_{max})(1-\lambda_{max})^2+M)}, 1\},$$

em que M é tal que $||D_z^2\nu|| \leq M$, e g restrita a bola $\mathbf{B}(0,\eta)$. Além disso, notando que $||\mathbf{t}|| < \eta < 1$, temos

$$||g(\mathbf{t})|| \leq \lim_{n\to\infty} ||S_n(x,\underline{a};\mathbf{t})|| + \lim_{n\to\infty} ||S_n(x,\underline{b};\mathbf{t})|| + \sum_{k=1}^{sp} |t_k||\psi_k([\underline{a}]_1(x)) - \psi_k([\underline{b}]_1(x))|| \leq 4$$

e

$$||Dg(\mathbf{t})|| \leq \lim_{n\to\infty} ||DS_n(x,\underline{a};\mathbf{t})|| + \lim_{n\to\infty} ||DS_n(x,\underline{b};\mathbf{t})|| + \sum_{k=1}^{sp} |t_k||\psi_k([\underline{a}]_1(x)) - \psi_k([\underline{b}]_1(x))||.$$

Observando (4.1) e usando os mesmos argumentos das estimativas (4.3) e (4.4), chegamos em

$$||DS_n(x,\underline{a};\mathbf{t})|| \leq \frac{\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}}, \quad \forall\ n.$$

Assim,

$$||Dg(\mathbf{t})|| \leq \frac{2\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}} + 2 = \frac{2}{1-\lambda_{max}}.$$

Agora, note que

$$D^2g(\mathbf{t}) = \lim_{n\to\infty} (D^2S_n(x,\underline{a};\mathbf{t}) - D^2S_n(x,\underline{a};\mathbf{t})). \tag{4.7}$$

De fato, temos

$$D^2S_n(x,\underline{a};\mathbf{t}) = D_z^2\nu\left([\underline{a}]_1(x), S_{n-1}([\underline{a}]_1(x),\sigma(a);\mathbf{t}) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_2(x))\right)$$

$$\left(DS_{n-1}([\underline{a}]_1(x),\sigma(a);\mathbf{t}) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_2(x))\right)^2 +$$

$$D_z\nu\left([\underline{a}]_1(x), S_{n-1}([\underline{a}]_1(x),\sigma(a);\mathbf{t}) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_2(x))\right)(D^2S_{n-1}([\underline{a}]_1(x),\sigma(a);\mathbf{t})). \tag{4.8}$$

Como $\nu \in C^r, r \geq 2$, logo existe $M > 0$ tal que $||D_z^2\nu|| \leq M$. Escrevendo $A_n = \sup \|D^2S_n(x,\underline{a};\mathbf{t})\|$ e passando a norma na igualdade acima, chegamos em

$$A_n \leq M\left(\frac{\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}} + 1\right)^2 + \lambda_{max}A_{n-1} = \frac{M}{(1-\lambda_{max})^2} + \lambda_{max}A_{n-1}.$$

Usando a desigualdade finitas vezes e notando que $A_1 \leq M \leq \dfrac{M}{(1-\lambda_{max})^2}$, temos

$$A_n \leq \frac{M}{(1-\lambda_{max})^2} + \frac{M\lambda_{max}}{(1-\lambda_{max})^2} + ... + \frac{M(\lambda_{max})^{n-1}}{(1-\lambda_{max})^2}.$$

Logo,

$$A_n \leq \frac{M}{(1-\lambda_{max})^3}, \quad \forall n.$$

Assim, temos (4.7) e concluímos que

$$||D^2 g(\mathbf{t})|| \leq \frac{2M}{(1-\lambda_{max})^3}.$$

Desta forma, temos que

$$||g||_{C^2} \leq 2\left(2 + \frac{1}{(1-\lambda_{max})} + \frac{M}{(1-\lambda_{max})^3}\right) = 2\left(\frac{(3-2\lambda_{max})(1-\lambda_{max})^2 + M}{(1-\lambda_{max})^3}\right).$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(\mathbf{B}(0,\eta)) = 2\eta &< 2\left(\frac{(1-(1+2\sqrt{p})\lambda_{max})(1-\lambda_{max})^2}{8((3-2\lambda_{max})(1-\lambda_{max})^2 + M)}\right) \\ &= \frac{\left(\frac{1-(1+2\sqrt{p})\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}}\right)}{4\left(\frac{(3-2\lambda_{max})(1-\lambda_{max})^2 + M}{(1-\lambda_{max})^3}\right)}.\end{aligned}$$

Podemos então aplicar o Lema 3.3 para a aplicação g, com $U = \mathbf{B}(0,\eta)$,

$$\alpha_0 = \frac{(3-2\lambda_{max})(1-\lambda_{max})^2 + M}{(1-\lambda_{max})^3}$$

e $\delta = \left(\frac{1-(1+2\sqrt{p})\lambda_{max}}{1-\lambda_{max}}\right)$. Logo, existe $K > 0$ tal que para qualquer $r > 0$, temos

$$m_{sp}(g^{-1}(\mathbf{B}(0,r))) < Kr^p,$$

isto é,

$$m_{sp}(\{\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0,\eta); ||S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})|| < r\}) < Kr^p.$$

Portanto, $\{\tilde{T}_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}}$ é transversal.

□

Uma vez que existem famílias transversais $\{T_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}}$, estamos interessados agora em calcular a dimensão de Hausdorff do conjunto $\Delta_{T_{\mathbf{t}}}(x)$. Para isto, calcularemos antes a dimensão da projeção do atrator $\rho_2(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}(x))$. No que segue agora, provaremos alguns lemas que serão importantes neste sentido.

Lema 4.1. *Para todo $\boldsymbol{t} \in \mathbf{B}(\boldsymbol{0},\eta) \subset \mathbb{R}^k$, todo $\underline{a} \in I^\infty(x)$, com $x \in \mathbb{T}^l$, existe constante $K_1 > 0$ tal que para todo $n \geq 0$, vale*

$$e^{-nK_1||\boldsymbol{t}||} \leq \frac{||D_z\nu_{\boldsymbol{t}}^n([\underline{a}]_n(x),0)||}{||D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x),0)||} \leq e^{nK_1||\boldsymbol{t}||}. \tag{4.9}$$

Demonstração. Sendo $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_k)$ e ψ_k as funções dadas pelo Teorema 4.1, note que para todo $n \geq 0$, temos

$$||\nu_{\mathbf{t}}^n([\underline{a}]_n(x), 0) - \nu^n([\underline{a}]_n(x), 0)||$$

$$= ||\nu([\underline{a}]_1(x), \nu([\underline{a}]_2(x), ..., \nu([\underline{a}]_{n-1}(x), \nu([\underline{a}]_n(x), 0) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_n(x)))$$

$$+ \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_{n-1}(x))) + ...) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_2(x))) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_1(x))$$

$$-\nu([\underline{a}]_1(x), \nu([\underline{a}]_2(x), ..., \nu([\underline{a}]_n(x), 0)))||.$$

De modo que, pelo teorema do Valor médio, vale

$$||\nu_{\mathbf{t}}^n([\underline{a}]_n(x), 0) - \nu^n([\underline{a}]_n(x), 0)|| \leq \lambda_{max}||\nu_{\mathbf{t}}^{n-1}([\underline{a}]_n(x), 0) - \nu^{n-1}([\underline{a}]_n(x), 0)|| + \sum_{k=1}^{sp} |t_k|(||\psi_k([\underline{a}]_1(x))||)$$

$$\leq \lambda_{max}||\nu_{\mathbf{t}}^{n-1}([\underline{a}]_n(x), 0) - \nu^{n-1}([\underline{a}]_n(x), 0)|| + K_2||\mathbf{t}||$$

para alguma constante $K_2 > 0$. Assim, aplicando a desigualdade acima um número finito de vezes, chegamos em

$$||\nu_{\mathbf{t}}^n([\underline{a}]_n(x), 0) - \nu^n([\underline{a}]_n(x), 0)|| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_{max})^k\right) K_2||\mathbf{t}|| < \frac{K_2||\mathbf{t}||}{1 - \lambda_{max}}. \tag{4.10}$$

Para $k = 0, ..., n-1$, vale que

$$||D_z\nu_{\mathbf{t}}(\nu_{\mathbf{t}}^k([\underline{a}]_n(x), 0)) - D_z\nu(\nu^k([\underline{a}]_n(x), 0))|| \leq ||D_z\nu_{\mathbf{t}}(\nu_{\mathbf{t}}^k([\underline{a}]_n(x), 0)) - D_z\nu(\nu_{\mathbf{t}}^k([\underline{a}]_n(x), 0))||$$

$$+ \ ||D_z\nu(\nu_{\mathbf{t}}^k([\underline{a}]_n(x), 0)) - D_z\nu(\nu^k([\underline{a}]_n(x), 0))||$$

$$\leq ||\nu_{\mathbf{t}} - \nu||_{C^1} + \lambda_{max}||\nu_{\mathbf{t}}^k([\underline{a}]_n(x), 0) - \nu^k([\underline{a}]_n(x), 0)||.$$

Usando (4.10) e notando que $||\nu_{\mathbf{t}} - \nu||_{C^1} \leq K_3||\mathbf{t}||$, segue que

$$||D_z\nu_{\mathbf{t}}(\nu_{\mathbf{t}}^k([\underline{a}]_n(x), 0)) - D_z\nu(\nu^k([\underline{a}]_n(x), 0))|| \leq K_4||\mathbf{t}|| + \frac{K_4||\mathbf{t}||\lambda_{max}}{1 - \lambda_{max}}, \tag{4.11}$$

onde $K_4 = \max\{K_2, K_3\}$. Agora usando que $\log\left(\frac{||u||}{||v||}\right) \leq \frac{||u - v||}{||v||}$, temos

$$\log \frac{||D_z\nu_{\mathbf{t}}(\nu_{\mathbf{t}}^k([\underline{a}]_n(x), 0))||}{||D_z\nu(\nu^k([\underline{a}]_n(x), 0))||} \leq \frac{||D_z\nu_{\mathbf{t}}(\nu_{\mathbf{t}}^k([\underline{a}]_n(x), 0)) - D_z\nu(\nu^k([\underline{a}]_n(x), 0))||}{||D_z\nu(\nu^k([\underline{a}]_n(x), 0))||}$$

Por (4.11) e denotando $\inf ||D_z\nu(x, z)|_Z|| = \lambda_{min}$, temos então que

$$\log \frac{||D_z\nu_{\mathbf{t}}(\nu_{\mathbf{t}}^k([\underline{a}]_n(x), 0))||}{||D_z\nu(\nu^k([\underline{a}]_n(x), 0))||} \leq (\lambda_{min})^{-1}K_4\left(\frac{1}{1 - \lambda_{max}}\right)||\mathbf{t}||. \tag{4.12}$$

Portanto, usando a conformalidade e a Regra da Cadeia, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(\log\frac{||D_z\nu_{\mathbf{t}}^n([\underline{a}]_n(x),0)||}{||D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x),0)||}\right) &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{||D_z\nu_{\mathbf{t}}(\nu_{\mathbf{t}}^k([\underline{a}]_n(x),0))||}{||D_z\nu(\nu^k([\underline{a}]_n(x),0))||}\right)\\ &\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}((\lambda_{min})^{-1}K_4\left(\frac{1}{1-\lambda_{max}}\right)||\mathbf{t}||)\right)\\ &\leq (\lambda_{min})^{-1}K_4\left(\frac{1}{1-\lambda_{max}}\right)||\mathbf{t}||.\end{aligned}$$

Tomando $K_1 \geq (\lambda_{min})^{-1}K_4\left(\frac{1}{1-\lambda_{max}}\right)$ segue o resultado.

□

Lema 4.2. *Para $0 < \epsilon < \min\{p, s_0p\}$ e $a > 0$, se $\eta < \dfrac{-\epsilon\log\lambda_{max}}{K_1(2a+\epsilon)}$ em que K_1 é a constante no Lema 4.1, então para todo $\boldsymbol{t} \in \mathbf{B}(\boldsymbol{0},\eta)$ e $\underline{a} \in I^\infty(x)$, vale que*

$$||D_z\nu_{\boldsymbol{t}}^n([\underline{a}]_n(x),0)||^{-a} \leq ||D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x),0)||^{-a-\frac{\epsilon}{2}}.$$

Demonstração. Pelo Lema 4.1, temos

$$\begin{aligned}||D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x),0)||^{a+\frac{\epsilon}{2}} &\leq e^{nK_1||\mathbf{t}||(a+\frac{\epsilon}{2})}||D_z\nu_{\mathbf{t}}^n([\underline{a}]_n(x),0)||^{a+\frac{\epsilon}{2}}\\ &\leq e^{nK_1||\mathbf{t}||(a+\frac{\epsilon}{2})}(\lambda_{max})^{n\frac{\epsilon}{2}}||D_z\nu_{\mathbf{t}}^n([\underline{a}]_n(x),0)||^a.\end{aligned}$$

O resultado então segue do fato que $||\mathbf{t}|| < \dfrac{-\epsilon\log\lambda_{max}}{K_1(2a+\epsilon)}$. □

Usaremos para provar o próximo Lema um resultado de Teoria da Medida: Se μ uma medida positiva $\sigma-$finita em uma $\sigma-$álgebra de algum conjunto X, $f : X \to [0,+\infty]$ função mensurável então vale que

$$\int_X f\ d\mu = \int_0^{+\infty}\mu(\{x \in X : f(x) > t\})dt. \tag{4.13}$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada na referência (22), página 172.

Podemos agora enunciar e demonstrar o seguinte:

Lema 4.3. *Se $\{\tilde{T}_{\boldsymbol{t}}\}_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^k}$ é uma família transversal, então para todo $\beta \in (0,p)$ existe uma constante $K_0 > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{T}^l$ e para quaisquer $\underline{a},\underline{b} \in I^\infty(x)$, com $[\underline{a}]_1 \neq [\underline{b}]_1$, temos*

$$\int_{\mathbf{B}(0,\eta)}\frac{d\boldsymbol{t}}{||S(x,\underline{a};\boldsymbol{t}) - S(x,\underline{b};\boldsymbol{t})||^\beta} \leq K_0.$$

Prova: Fixe um x qualquer em $\mathbb{T}^l$ e sejam quaisquer $\underline{a}, \underline{b} \in I^\infty(x)$. Usando a equação (4.13), com $X = \mathbf{B}(0,\eta)$, $\mu = m_k$, $\phi(y) = y$ e $f(\mathbf{t}) = \dfrac{1}{||S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})||^\beta}$, podemos escrever

$$\int_{\mathbf{B}(0,\eta)} \frac{d\mathbf{t}}{||S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})||^\beta} = \int_0^\infty m_k(\{\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0,\eta) : \frac{1}{||S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})||^\beta} > y\})dy.$$

Para $r > 0$, escrevemos $y = r^{-\beta}$ e assim, por mudança de variável , temos

$$\int_0^\infty m_k(\{\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0,\eta) : \frac{1}{||S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})||^\beta} > y\})dy$$

$$= \beta \int_0^\infty m_k(\{\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0,\eta) : ||S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})|| < r\})(r^{-(\beta+1)})dr$$

$$= \beta \int_0^{r_0} m_k(\{\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0,\eta) : ||S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})|| < r\})(r^{-(\beta+1)})dr$$

$$+\beta \int_{r_0}^\infty m_k(\{\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0,\eta) : ||S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})|| < r\})(r^{-(\beta+1)})dr.$$

Usando o fato que $\{\tilde{T}_\mathbf{t}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^k}$ é uma família transversal, podemos estimar

$$\beta \int_0^{r_0} m_k(\{\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0,\eta) : ||S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})|| < r\})(r^{-(\beta+1)})dr$$

$$\leq \beta K \int_0^{r_0} r^{p-(\beta+1)}dr = \beta K(r_0^{p-\beta})(p-\beta)^{-1} < \infty.$$

Como $1 + \beta > 1$, temos que $\displaystyle\int_{r_0}^\infty r^{-(\beta+1)}dr < \infty$ e com isso temos também

$$\beta \int_{r_0}^\infty m_k(\{\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0,\eta) : ||S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})|| < r\})(r^{-(\beta+1)})dr$$

$$\leq \beta m_k(\mathbf{B}(0,\eta)) \int_{r_0}^\infty r^{-(\beta+1)}dr < \infty.$$

O que concluí a prova. ∎

4.2 Dimensão de $\rho(\Delta_{T_\mathbf{t}}(x))$

Considerando a dinâmica $T_\mathbf{t} : V \to V$, dada por $T_\mathbf{t}(x,y,z) = (\varphi(x), \psi(x,y), \nu_\mathbf{t}(x,z))$, com $\nu_\mathbf{t}(x,z) = \nu(x,z) + \displaystyle\sum_{i=1}^k t_i\psi_i(x)$ em que $\psi_1, ..., \psi_k \in C^\infty(\mathbb{T}^l, \mathbb{R}^p)$ são a aplicações como no Teorema 4.1 , $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_k) \in \mathbf{B}(0,\eta) \subset \mathbb{R}^k$ com $\eta > 0$ suficientemente pequeno tal que a família $\{\tilde{T}_\mathbf{t}\}_\mathbf{t}$ é transversal. Definimos para cada $x \in \mathbb{T}^l$ o seguinte conjunto

$$\Delta_{T_\mathbf{t}}(x) = \left(\bigcap_{n\geq 0} T_\mathbf{t}^n(V)\right) \cap \mathbb{D}(x).$$

Vamos mostrar que

$$\dim_H(\rho(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}(x))) = s_0 p$$

para quase todo $\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0,\eta)$, em que s_0 é o único valor tal que $P(\sigma, s_0\phi) = 0$. A desigualdade

$$\dim_H(\rho(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}(x))) \leq s_0 p, \quad \forall\ x \in \mathbb{T}^l\ e\ \ \forall\ \mathbf{t} \in \mathbf{B}(0,\eta)$$

foi obtida no Capítulo 3 na Seção 3.4.2.

4.2.1 Cálculo da cota inferior via potenciais

Usaremos os seguintes conjuntos no cálculo da cota inferior de $\dim_H(\rho(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}(x)))$:

$$A_n = \{(\underline{a},\underline{b}) \in I^\infty(x) \times I^\infty(x) : [\underline{a}]_n = [\underline{b}]_n \text{ e } [\underline{a}]_{n+1} \neq [\underline{b}]_{n+1}\}$$

$$A_\infty = \{(\underline{a},\underline{a}) \in I^\infty(x) \times I^\infty(x)\},$$

e, fazendo $[\underline{a}]_n(x) = x'$,

$$A_{n,x'} = \{(\underline{a},\underline{b}) \in A_n : [\underline{a}]_n(x) = x'\}.$$

Observação 3. *A importância dos conjuntos acima está no seguinte fato*

$$I^\infty(x) \times I^\infty(x) = \left(\dot{\bigcup_{n,x'}} A_{n,x'}\right) \dot{\cup}(A_\infty). \tag{4.14}$$

Observação 4. *Dado $x \in \mathbb{T}^l$, considere μ_x como na Seção 3.5. Note que para todo k vale que*

$$A_\infty \subset D_k = \dot{\bigcup_{a_1,\ldots a_k}} ([1; a_1, \ldots a_k] \times [1; a_1, \ldots a_k])$$

e

$$\begin{aligned}(\mu_x \times \mu_x)(D_k) &= \sum_{a_1,\ldots a_k} (\mu_x([1; a_1, \ldots a_k])(\mu_x([1; a_1, \ldots a_k])) \\ &\leq N^k C_3^2 ||D_z \nu^k([\underline{a}]_n(x), 0)||^{2s_0 p} \\ &\leq C_3^*(N\lambda_{max}^2)^k.\end{aligned}$$

Como estamos considerando $\lambda_{max} < N^{-\frac{1}{2}}$, temos $(N\lambda_{max}^2)^k < 1$. Logo, $(\mu_x \times \mu_x)(A_\infty) = 0$.

O próximo Lema relaciona os termos $S(x, \underline{a}; \mathbf{t})$ e $(S(x', \sigma^n(\underline{a}); \mathbf{t})$. Importante notar que se $(\underline{a},\underline{b}) \in A_n$, então $[\sigma^n(\underline{a})]_1 \neq [\sigma^n(\underline{b})]_1$.

Lema 4.4. *Se* $(\underline{a},\underline{b}) \in A_n$, *então vale*

$$\|S(x,\underline{a};\boldsymbol{t}) - S(x,\underline{b};\boldsymbol{t})\| \geq K_1^* \left(||D_z\nu_{\boldsymbol{t}}^n([\underline{a}]_n(x),0)||\right) ||(S(x',\sigma^n(\underline{a});\boldsymbol{t}) - S(x',\sigma^n(\underline{b});\boldsymbol{t})|| \tag{4.15}$$

para alguma constante $K_1^* > 0$.

Demonstração. Inicialmente note que, pela conformalidade de $D_z\nu$, para $x \in \mathbb{T}^l$ vale $||D_z\nu(x,z)||^{-1} = ||(D_z\nu(x,z))^{-1}||$ e assim

$$||\nu(x,z_1) - \nu(x,z_2)|| \geq (||D_z(x,z_0)||)||z_1 - z_2||$$

onde (x,z_0) é um ponto em que $||(D_z(x,z_0))^{-1}||$ é máxima . Note ainda que

$$S(x,\underline{a},\mathbf{t}) = \lim_{m\to\infty}(S_m(x,\underline{a};\mathbf{t})) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_1(x))$$

em que

$$S_m(x,\underline{a};\mathbf{t}) = \nu([\underline{a}]_1(x),\nu([\underline{a}]_2(x),...,\nu([\underline{a}]_{n-1}(x),\nu([\underline{a}]_n(x),0) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_n(x)))$$

$$+\sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_{n-1}(x))) + ...) + \sum_{k=1}^{sp} t_k\psi_k([\underline{a}]_2(x)))$$

$$= \nu_{\mathbf{t}}([\underline{a}]_1(x), S_{m-1}([\underline{a}]_1(x),\sigma(\underline{a});\mathbf{t})).$$

Uma vez que $(\underline{a},\underline{b}) \in A_n$, temos $[\underline{a}]_1(x) = [\underline{b}]_1(x),...,[\underline{a}]_n(x) = [\underline{b}]_n(x) = x'$. Como $D_z\nu_{\mathbf{t}}(x,z)$ não depende de $\mathbf{t}$ as considerações acima ainda são válidas. Assim, segue que tomando $m > n$, temos

$$\|S_m(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S_m(x,\underline{b};\mathbf{t})\| = ||\nu_{\mathbf{t}}([\underline{a}]_1(x), S_{m-1}([\underline{a}]_1(x),\sigma(\underline{a});\mathbf{t})) - \nu_{\mathbf{t}}([\underline{b}]_1(x), S_{m-1}([\underline{b}]_1(x),\sigma(\underline{b});\mathbf{t}))||$$

$$\geq (||D_z\nu_{\mathbf{t}}([\underline{a}]_1(x),z_1)||)||S_{m-1}([\underline{a}]_1(x),\sigma(\underline{a});\mathbf{t})) - S_{m-1}([\underline{b}]_1(x),\sigma(\underline{b});\mathbf{t}))||,$$

onde $([\underline{a}]_1(x),z_1)$ é o ponto em que $||(D_z\nu_{\mathbf{t}}([\underline{a}]_1(x),.))^{-1}||$ é máximo. Logo, procedendo desta forma n vezes, podemos concluir que

$$\|S_m(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S_m(x,\underline{b};\mathbf{t})\| \geq$$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} ||D_z\nu_{\mathbf{t}}([\underline{a}]_k(x),z_k)||\right) ||S_{m-n}([\underline{a}]_n(x),\sigma^n(\underline{a});\mathbf{t})) - S_{m-n}([\underline{b}]_n(x),\sigma^n(\underline{b});\mathbf{t}))||$$

$$\geq (||D_z\nu_{\mathbf{t}}^n([\underline{a}]_n(x),z_n)||) ||S_{m-n}([\underline{a}]_n(x),\sigma^n(\underline{a});\mathbf{t})) - S_{m-n}([\underline{b}]_n(x),\sigma^n(\underline{b});\mathbf{t}))||.$$

Fazendo $m \to \infty$, temos

$$\|S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})\| \geq (||D_z\nu_{\mathbf{t}}^n([\underline{a}]_n(x),z_n)||) ||(S(x',\sigma^n(\underline{a});\mathbf{t}) - S(x',\sigma^n(\underline{b});\mathbf{t})||.$$

Note agora que, usando o análogo do Lema 3.2 para $D_z\nu_{\mathbf{t}}$, existe constante $K_0 > 0$ tal que

$$K_0^{-1} \leq \frac{||D_z\nu_{\mathbf{t}}^n([\underline{a}]_n(x), 0)||^p}{||D_z\nu_{\mathbf{t}}^n([\underline{a}]_n(x), z_n)||^p} \leq K_0.$$

Portanto, existe $K_1^* > 0$ tal que

$$\|S(x, \underline{a}; \mathbf{t}) - S(x, \underline{b}; \mathbf{t})\| \geq K_1^* \left(||D_z\nu_{\mathbf{t}}^n([\underline{a}]_n(x), 0)||\right) ||(S(x', \sigma^n(\underline{a}); \mathbf{t}) - S(x', \sigma^n(\underline{b}); \mathbf{t})||$$

□

Para mostrar a outra desigualdade iremos usar um método que utiliza convergência de integrais envolvendo **potenciais**. Uma distribuição de massa é uma medida boreliana finita. Para $\beta \geq 0$, definimos o $\beta-$ **potencial** em um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ devido a uma distribuição de massa μ em $\mathbb{R}^n$ como

$$\phi_\beta(x) = \int \frac{d\mu(y)}{||x - y||^\beta}.$$

A $\beta-$**energia** de μ será dada por

$$I_\beta(\mu) = \int \phi_\beta(x) d\mu(x) = \int\int \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{||x - y||^\beta} \tag{4.16}$$

O próximo resultado relaciona a dimensão de Hausdorff com a integral em (4.16). Sua demonstração pode ser encontrada em Falconer (7), pp.71-72.

Teorema 4.2. *Seja F um subconjunto do $\mathbb{R}^n$. Se existe uma distribuição de massa μ em F com $I_\beta(\mu) < \infty$, então $\mathcal{H}^\beta(F) = \infty$ e $\dim_H(F) \geq \beta$.*

Observação 5. *Quando o conjunto $F = F(\theta)$ depende de uma parâmetro θ, se pudermos definir uma medida μ_θ de distribuição de massa em F_θ e se para algum β tivermos*

$$\int I_\beta(\mu_\theta) d\theta = \int\int\int \frac{d\mu_\theta(x)d\mu_\theta(y)d\theta}{||x - y||^\beta} < \infty,$$

então $I_\beta(\mu_\theta) < \infty$ para quase todo θ e assim $\dim_H F(\theta) \geq \beta$ para quase todo θ.

Vamos considerar a distribuição de massa em $I^\infty(x)$ para cada $x \in \mathbb{T}^l$ como sendo a medida definida na Seção 3.5.

Afirmamos agora que μ_x determina uma medida finita em $\rho_2(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}(x))$. De fato, para cada $x \in \mathbb{T}^l$ fixado, defina a aplicação $h_{x,\mathbf{t}} : I^\infty(x) \to \{x\} \times \mathbb{R}^p$ por

$$h_{x,\mathbf{t}}(\underline{a}) = (x, S(x, \underline{a}; \mathbf{t})). \tag{4.17}$$

Note que $h_{x,t}(I^\infty(x)) = \rho_2(\Delta_{T_\mathbf{t}}(x))$. Vamos identificar de modo natural $\{x\} \times \mathbb{R}^p$ com $\mathbb{R}^p$ e escreveremos apenas $h_{x,\mathbf{t}}(\underline{a}) = S(x, \underline{a}; \mathbf{t})$. Definimos a medida υ_x em $\rho_2(\Delta_{T_\mathbf{t}}(x))$ pelo "push-forward"

$$\upsilon_x(E) = (h_{x,\mathbf{t}})_*(\mu_x)(E) = \mu_x(h_{x,\mathbf{t}}^{-1}(E)).$$

Assim, se f é uma função mensurável limitada, então

$$\int f \,\mathrm{d}\,\upsilon_x = \int f \,\mathrm{d}((h_{x,\mathbf{t}})_*(\mu_x)) = \int (f \circ h_{x,\mathbf{t}}) \,\mathrm{d}\,\mu_x. \tag{4.18}$$

De posse das distribuições definidas acima , estamos aptos agora para calcular a cota inferior e o faremos usando o teorema a seguir:

Teorema 4.3. *Sejam $x \in \mathbb{T}^l$ e $\{\tilde{T}_t\}_{t\in\mathbf{B}(\mathbf{0},\eta)}$ família transversal . Então para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para quase todo $\boldsymbol{t} \in \mathbf{B}(0,\delta) \subset \mathbf{B}(0,\eta)$, temos $\dim_H(\rho(\Delta_{T_t}(x))) \geq s_0 p - \epsilon$ para todo $x \in \mathbb{T}^l$.*

Demonstração. Vamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ tal que $s_0 p - \epsilon \in (0, p)$, temos para algum $\delta > 0$ o seguinte

$$\int_{\mathbf{B}(0,\delta)} \int_{I^\infty(x)} \int_{I^\infty(x)} \left(\frac{1}{\|S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})\|^{s_0 p-\epsilon}} \right) \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a}) \,\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b}) \,\mathrm{d}\,\mathbf{t} < \infty. \tag{4.19}$$

Com isso, teremos

$$\int_{I^\infty(x)} \int_{I^\infty(x)} \left(\frac{1}{\|S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})\|^{s_0 p-\epsilon}} \right) \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a}) \,\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b}) < \infty$$

para quase todo $\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0,\delta)$. Daí, fazendo a mudança de variáveis $y' = h_{x,\mathbf{t}}(\underline{a})$ e $z' = h_{x,\mathbf{t}}(\underline{b})$ e usando (4.18), segue que

$$\int_{I^\infty(x)} \int_{I^\infty(x)} \left(\frac{1}{\|S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})\|^{s_0 p-\epsilon}} \right) \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a}) \,\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b})$$

$$= \int_{\rho_2(\Delta_{T_\mathbf{t}}(x))} \int_{\rho_2(\Delta_{T_\mathbf{t}}(x))} \left(\frac{1}{\|y' - z'\|^{s_0 p-\epsilon}} \right) \mathrm{d}\,\upsilon_x(y') \,\mathrm{d}\,\upsilon_x(z') < \infty,$$

para quase todo $\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0,\delta)$. Portanto, pelo Teorema 4.2, teremos $\dim_H(\rho(\Delta_{T_\mathbf{t}}(x))) \geq s_0 p - \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$.

Sendo assim, para cada $\epsilon > 0$ tomemos então $0 < \delta \leq \min\left\{\eta, \dfrac{-\epsilon \log(\lambda_{max})}{K_1(2s_0 p - \epsilon)}\right\}$, onde $K_1 > 0$ é dado pelo Lema 4.1.

Voltando a integral em (4.19) e trocando a ordem de integração, temos

$$\int_{\mathbf{B}(0,\delta)} \int_{I^\infty(x)} \int_{I^\infty(x)} \left(\frac{1}{\|S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})\|^{s_0 p-\epsilon}} \right) \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a}) \,\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b}) \,\mathrm{d}\,\mathbf{t}$$

$$= \int_{I^\infty(x)} \int_{I^\infty(x)} \left(\int_{\mathbf{B}(0,\delta)} \frac{1}{\|S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})\|^{s_0 p-\epsilon}} \, \mathrm{d}\,\mathbf{t} \right) \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a}) \, \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b})$$

Usando (4.14) e depois o Lema 4.4, podemos rescrever a ultima integral tripla como

$$\sum_{n\geq 0} \int \int_{A_n} \left(\int_{\mathbf{B}(0,\delta)} \frac{1}{\|S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})\|^{s_0 p-\epsilon}} \, \mathrm{d}\,\mathbf{t} \right) \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a}) \, \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b})$$

$$= \sum_{n\geq 0} \sum_{x'\in\varphi^{-n}(x)} \int \int_{A_{n,x'}} \left(\int_{\mathbf{B}(0,\delta)} \frac{1}{\|S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})\|^{s_0 p-\epsilon}} \, \mathrm{d}\,\mathbf{t} \right) \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a}) \, \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b})$$

$$\leq \sum_{n\geq 0} \sum_{x'\in\varphi^{-n}(x)} (K_1^* ||D_z \nu_{\mathbf{t}}^n([\underline{a}]_n(x),0)||)^{-(s_0 p-\epsilon)}$$

$$\left(\int \int_{A_{n,x'}} \left(\int_{\mathbf{B}(0,\delta)} \frac{1}{\|S(x',\sigma^n(\underline{a});\mathbf{t}) - S(x',\sigma^n(\underline{b});\mathbf{t})\|^{s_0 p-\epsilon}} \, \mathrm{d}\,\mathbf{t} \right) \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a}) \, \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b}) \right).$$

Usando o Lema 4.2 para $a = s_0 p - \epsilon$, temos a ultima expressão acima é menor ou igual a

$$(K_1^*)^{\beta-\epsilon} \sum_{n\geq 0} \sum_{x'\in\varphi^{-n}(x)} (||D_z \nu^n([\underline{a}]_n(x),0)||)^{-s_0 p+\frac{\epsilon}{2}}$$

$$\left(\int \int_{A_{n,x'}} \left(\int_{\mathbf{B}(0,\delta)} \frac{1}{\|S(x',\sigma^n(\underline{a});\mathbf{t}) - S(x',\sigma^n(\underline{b});\mathbf{t})\|^{s_0 p-\epsilon}} \, \mathrm{d}\,\mathbf{t} \right) \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a}) \, \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b}) \right).$$

Note agora que $[\sigma^n(\underline{a})]_1 \neq [\sigma^n(\underline{b})]_1$ e assim, usando o Lema 4.3, existe $K_0 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbf{B}(0,\eta)} \frac{1}{\|S(x',\sigma^n(\underline{a});\mathbf{t}) - S(x',\sigma^n(\underline{b});\mathbf{t})\|^{s_0 p-\epsilon}} \, \mathrm{d}\,\mathbf{t} \leq K_0.$$

Logo,

$$(K_1^*)^{\beta-\epsilon} \sum_{n\geq 0} \sum_{x'\in\varphi^{-n}(x)} (||D_z \nu^n([\underline{a}]_n(x),0)||)^{-s_0 p+\frac{\epsilon}{2}}$$

$$\left(\int \int_{A_{n,x'}} \left(\int_{\mathbf{B}(0,\delta)} \frac{1}{\|S(x',\sigma^n(\underline{a});\mathbf{t}) - S(x',\sigma^n(\underline{b});\mathbf{t})\|^{s_0 p-\epsilon}} \, \mathrm{d}\,\mathbf{t} \right) \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a}) \, \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b}) \right)$$

$$\leq (K_1^*)^{s_0 p-\epsilon} K_0 \sum_{n\geq 0} \sum_{x'\in\varphi^{-n}(x)} (||D_z \nu^n([\underline{a}]_n(x),0)||)^{-s_0 p+\frac{\epsilon}{2}} \left(\int \int_{A_{n,x'}} \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a}) \, \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b}) \right)$$

$$\leq (K_1^*)^{s_0 p-\epsilon} K_0 \sum_{n\geq 0} \sum_{x'\in\varphi^{-n}(x)} (\lambda_{max})^{\frac{n\epsilon}{2}} (||D_z \nu^n([\underline{a}]_n(x),0)||)^{-s_0 p} \left(\int \int_{A_{n,x'}} \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a}) \, \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b}) \right)$$

$$= (K_1^*)^{s_0 p-\epsilon} K_0 \sum_{n\geq 0} \sum_{x'\in\varphi^{-n}(x)} (\lambda_{max})^{\frac{n\epsilon}{2}} \frac{1}{||D_z \nu^n([\underline{a}]_n(x),0)||^{s_0 p}} \left(\int \int_{A_{n,x'}} \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a}) \, \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b}) \right)$$

$$= (K_1^*)^{s_0p-\epsilon} K_0 \sum_{n\geq 0} (\lambda_{max})^{\frac{n\epsilon}{2}} \sum_{x'\in\varphi^{-n}(x)} \frac{1}{||D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x),0)||^{s_0p}} \left(\int\int_{A_{n,x'}} \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b}) \right).$$

Observe agora que para cada $x' \in \varphi^{-n}(x)$ o conjunto $A_{n,x'}$ está contido no conjunto

$$C_n(x') = [1, a_1, ..., a_n] \times [1, a_1, ..., a_n]$$

conforme o itinerário de x'. Note ainda que por (3.34), temos

$$\frac{1}{||D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x),0)||^{s_0p}} \leq C_3^*(\mu_x([1; a_1, ..., a_n]))^{-1}$$

para alguma constante $C_3^* > 0$. Assim,

$$(K_1^*)^{s_0p-\epsilon} K_0 \sum_{n\geq 0} (\lambda_{max})^{\frac{n\epsilon}{2}} \sum_{x'\in\varphi^{-n}(x)} \frac{1}{||D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x),0)||^{s_0p}} \left(\int\int_{A_{n,x'}} 1\,\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b}) \right)$$

$$\leq (K_1^*)^{s_0p-\epsilon} K_0 \sum_{n\geq 0} (\lambda_{max})^{\frac{n\epsilon}{2}} \sum_{x'\in\varphi^{-n}(x)} C_3^*(\mu_x([1; a_1, ..., a_n]))^{-1}(\mu_x \times \mu_x)(C_n(x'))$$

$$\leq C_3^*(K_1^*)^{s_0p-\epsilon} K_0 \sum_{n\geq 0} (\lambda_{max})^{\frac{n\epsilon}{2}} \sum_{x'\in\varphi^{-n}(x)} \mu_x([1; a_1, ..., a_n]).$$

Como para alguma constante $\tilde{K}_0$ temos

$$\sum_{x'\in\varphi^{-n}(x)} \mu_x([1; a_1, ..., a_n]) \leq \mu_x(I^\infty(x)) \leq \tilde{K}_0,$$

segue que escrevendo $\hat{K} = C_3^*(K_1^*)^{s_0p-\epsilon} K_0 \tilde{K}_0$ chegamos em

$$\int_{\mathbf{B}(0,\delta)} \int_{I^\infty(x)} \int_{I^\infty(x)} \left(\frac{1}{\|S(x,\underline{a};\mathbf{t}) - S(x,\underline{b};\mathbf{t})\|^{s_0p-\epsilon}} \right) \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b})\,\mathrm{d}\,\mathbf{t} \leq \hat{K} \sum_{n\geq 0} (\lambda_{max})^{\frac{n\epsilon}{2}} < \infty,$$

como queríamos demonstrar.

□

Teorema 4.4. *Sejam $x \in \mathbb{T}^l$ e $\{\tilde{T}_t\}_{t\in\mathbf{B}(\mathbf{0},\eta)}$ família transversal. Então*

$$\dim_H(\rho(\Delta_{T_t}(x))) \geq s_0p$$

para quase todo $\boldsymbol{t} \in \mathbf{B}(\mathbf{0},\eta)$.

Demonstração. Suponha por contradição que existam um $\epsilon > 0$ e um subconjunto $\mathbf{T}(\epsilon) = \{\mathbf{t} \in \mathbf{B}(\mathbf{0}, \eta) : \dim_H(\rho(\Delta_{\mathbf{t}}(x))) < s_0 p - \epsilon\}$, com $m_k(\mathbf{T}(\epsilon)) > 0$. Considere agora $\mathbf{t}_0$ ponto de densidade com respeito a medida de Lebesgue m_k em $\mathbf{T}(\epsilon)$. Existe então $\delta_0 > 0$ tal que

$$m_k(\mathbf{T}(\epsilon) \cap \mathbf{B}(\mathbf{t}_0, \delta)) > 0 \text{ para todo } \delta \in (0, \delta_0] \tag{4.20}$$

Note que todo $\mathbf{t}^* \in \mathbf{B}(\mathbf{t}_0, \delta)$ pode ser escrito como $\mathbf{t}^* = \mathbf{t} + \mathbf{t}_0$, em que $\mathbf{t} \in \mathbf{B}(\mathbf{0}, \delta)$. Concluímos por (4.20) que o conjunto de pontos em $\mathbf{B}(\mathbf{0}, \delta)$, $\delta \in (0, \delta_0]$, para os quais

$$\dim_H(\rho(\Delta_{\mathbf{t}_0+\mathbf{t}}(x))) < s_0 p - \epsilon$$

tem medida positiva. Mas o Teorema 4.3 fornece $0 < \delta_1 < \delta_0$ tal que

$$\dim_H(\rho(\Delta_{\mathbf{t}_0+\mathbf{t}}(x))) \geq s_0 p - \epsilon$$

para quase todo $\mathbf{t} \in \mathbf{B}(\mathbf{0}, \delta_1)$, o que fornece uma contradição. □

4.3 Demonstração do Teorema A

Demonstração do Teorema A . Seja

$$0 < \lambda_{max} < \min\left\{\frac{1}{1+2\sqrt{p}}, N^{-\frac{1}{\min\{p,2\}}}\right\}.$$

Considere $\{T_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbf{B}(0,\eta)}$ família transversal e note que $s_0 < 1$. Uma vez que aplicação $\rho : V \to A$ é Lipschtiz contínua, segue que

$$\dim_H(\rho(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}(x))) \leq \dim_H\left(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}(x)\right), \quad \forall\, x \in \mathbb{T}^l, \quad \forall\, \mathbf{t} \in \mathbf{B}(0, \eta).$$

Vimos que $\dim_H\left(\rho(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}(x))\right) \leq s_0 p$, $\forall\, x \in \mathbb{T}^l$, $\forall\, \mathbf{t} \in \mathbf{B}(0, \eta)$ e o Teorema 4.4 nos diz que

$$\dim_H(\rho(\Delta_{T_t}(x))) \geq s_0 p,$$

para todo $x \in \mathbb{T}^l$ e quase todo $\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0, \eta)$. Portanto,

$$\dim_H(\rho(\Delta_{T_t}(x))) = s_0 p \;\; e \;\; \dim_H(\Delta_{T_t}(x)) \geq s_0 p$$

para todo $x \in \mathbb{T}^l$ e quase todo $\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0, \eta)$. O Teorema 3.2 fornece

$$\dim_H(\Delta_{T_t}(x)) \leq s_0 p, \quad \forall\, x \in \mathbb{T}^l, \quad \forall\, \mathbf{t} \in \mathbf{B}(0, \eta).$$

Usando agora a desigualdade em (3.6) e o Teorema 3.5 segue que

$$\dim_B(\Delta_{T_t}(x)) = s_0 p$$

para todo $x \in \mathbb{T}^l$ e quase todo $\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0,\eta)$. Isso prova a primeira parte do Teorema A .

Podemos concluir do Teorema 3.3 que

$$\dim_H(\Delta_{T_t}) \leq l + s_0 p.$$

Considere agora

$$E_0 = \left\{(x,\mathbf{t}) \in \mathbb{T}^l \times \mathbf{B}(0,\eta) : \dim_H(\Delta_{T_t}(x)) = s_0 p\right\}.$$

Seja E_0^C o complementar de E_0 e $1_{E_0^C}$ a função indicadora em E_0^C. Denote

$$(E_0^C)_x = \{\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0,\eta) : (x,\mathbf{t}) \in E_0^C\}$$

$$(E_0^C)_{\mathbf{t}} = \{x \in \mathbb{T}^l : (x,\mathbf{t}) \in E_0^C\}.$$

Note que, usando Fubini, temos

$$\int_{\mathbf{B}(0,\eta)} \left(\int_{\mathbb{T}^l} 1_{(E_0^C)_{\mathbf{t}}} \,\mathrm{d}\, x \right) \mathrm{d}\, \mathbf{t} = \int_{\mathbb{T}^l} \left(\int_{\mathbf{B}(0,\eta)} 1_{(E_0^C)_x} \,\mathrm{d}\, \mathbf{t} \right) \mathrm{d}\, x$$

$$= \int_{\mathbb{T}^l} 0 \,\mathrm{d}\, x = 0.$$

Logo, $\int_{\mathbb{T}^l} 1_{(E_0^C)_{\mathbf{t}}} \,\mathrm{d}\, x = 0$ para quase todo $\mathbf{t} \in \mathbf{B}(0,\eta)$. Ou seja, existe $Y \subset \mathbf{B}(0,\eta)$ com medida total tal que para todo $\mathbf{t} \in Y$, quase todo $x \in \mathbb{T}^l$ tem a propriedade $(x,\mathbf{t}) \in E_0$.

Assim, dado $\mathbf{t} \in Y \subset \mathbf{B}(0,\eta)$, tome $x_0 \in X \subset \mathbb{T}^l$, com X tendo medida total em $\mathbb{T}^l$ e tal que $(x_0,\mathbf{t}) \in E_0$. Aplicando o Teorema 3.1 para $F = \Delta_{T_{\mathbf{t}}}$, $E = \mathbf{B}(x_0,r)$, com $r > 0$ pequeno, $L_{x_0} = \{x_0\} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ e como $\dim_H(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}(x_0)) = \dim_H(F \cap L_{x_0}) \geq s_0 p$, segue que

$$\dim_H(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}) \geq s_0 p + \dim_H(\mathbf{B}(x_0,r)),$$

isto é,

$$\dim_H(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}) \geq s_0 p + l.$$

Por fim, usando a desigualdade em (3.6) e o Teorema 3.6, segue que

$$\dim_B(\Delta_{T_{\mathbf{t}}}) = s_0 p + l.$$

□

Observação 6. *Acima, ao aplicar o Teorema 3.1, estamos considerando a identificação natural do toro $\mathbb{T}^l$ com $E = [0,1]^l \subset \mathbb{R}^l$. O atrator Δ_{T_t} é identificado com um subconjunto de $[0,1]^l \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$, que está contido em $\mathbb{R}^{l+d+p}$.*

5 DIMENSÃO DE HAUSDORFF DE ATRATORES Δ_T COM TRANSVERSALIDADE INTRÍNSECA

O resultado obtido no Capítulo 4, embora seja genérico, não fornece uma condição explícita sob a qual é válido o calculo da dimensão de Hausdorff para o atrator. Neste Capítulo forneceremos condições explicitas para termos a cota inferior para a dimensão de $\Delta_T(x)$, ou seja vale $\dim_H \Delta_T(x) \geq s_0 p$ para todo $x \in \mathbb{T}^l$, e com isso obtermos a igualdade para a dimensão do atrator.

Tal condição corresponde a uma condição geométrica de transversalidade entre as componentes do atrator. Também pediremos uma condição de λ_{max} ser suficientemente pequeno ($\mathcal{T}_2^{**}$) e outra de distorção limitada da expansora φ (E_2^*).

5.1 Condições suficientes para a cota inferior da dimensão de $\Delta_T(x)$

Neste Capítulo vamos considerar $T : V \to V$ de classe C^r,$r \geq 1$, com $V = \mathbb{T}^l \times E \times F$ e

$$T(x, y, z) = (\varphi(x), \psi(x, y), \nu(x, z))$$

definidos como na Seção 2.2 do Capítulo 2, mas exigiremos agora que T seja um mergulho e $l \geq p$.

Denotaremos por $\mathcal{T}$ o conjunto de todos os mergulhos $T : V \to V$ de classe C^r, $r \geq 1$ descrito como acima. Além destas condições, a condição principal é a de transversalidade entre as componentes do atrator que é dada a seguir. Pela Proposição 2.1, as componentes de Δ_T são variedades instáveis.

Definição 5.1. *Para $j = 1, 2$, defina o conjunto $\mathcal{T}_j^{\times}$ como o espaço de todas as $T \in \mathcal{T}$ tal que para qualquer bola B em $\mathbb{T}^l$ de raio menor que $\frac{1}{2}$ e quaisquer duas componentes distintas B_1, B_2 de $\Delta_T \cap \pi^{-1}(B)$, vale que as subvariedades $\rho_j(B_1)$ e $\rho_j(B_2)$ são transversais em cada ponto de $\rho_j(B_1) \cap \rho_j(B_2)$. Os conjuntos Δ_T, com $T \in \mathcal{T}_j^{\times}$, serão chamados de* ***atratores intrinsecamente transversais com respeito a*** *ρ_j.*

Observação 7. *Lembremos que duas variedades $X \subset Z$ e $Y \subset Z$ dizem-se transversais no espaço ambiente Z e num ponto $p \in Z$ se, e somente se $T_pX + T_pY = T_pZ$, sempre que $p \in X \cap Y$.*

Observação 8. *Abusaremos em alguns momentos da notação ao escrevermos $\rho(S(x, \underline{a}))$ e $\rho DS(x, \underline{a})$ para denotar a componente em $\mathbb{R}^p$.*

Note que $T : V \to V$ está em $\mathcal{T}_2^{\times}$ se, e somente se para qualquer bola $\mathbf{B}$ em $\mathbb{T}^l$, de raio menor que $\frac{1}{2}$, vale

$$\mathbf{m}(\rho DS(x, \underline{a}) - \rho DS(x, \underline{b})) > 0$$

para $x \in \mathbf{B}$, $\underline{a}, \underline{b} \in I^{\infty}(x)$, $\underline{a} \neq \underline{b}$, sempre que $\rho(S(x, \underline{a})) = \rho(S(x, \underline{b}))$.

Na continuação denotamos $\underline{\beta} = (\sup ||(D\varphi)^{-1}||)^{-1}$ e $\overline{\beta} = \sup(||D\varphi||)$. Considere os seguintes conjuntos

$$\mathcal{T}_2^* = \{T \in \mathcal{T} : \lambda_{max} < N^{-max\{l,2\}}\} \quad \text{e} \quad E_2^* = \{T \in \mathcal{T} : (\overline{\beta})^l < N^{\frac{1}{2}}(\underline{\beta})^p\}.$$

Temos $E_2^* \neq \emptyset$, pois endomorfismos lineares expansores cujas matrizes são múltiplas da identidade satisfazem a condição dada em E_2^* quando $l \geq p$. Definimos o conjunto

$$\mathcal{T}_2^{**} = \left\{ T \in E_2^* \cap T_2^* : \lambda_{max} < \left((\overline{\beta})^l (\underline{\beta}) \left(\frac{2\log(N)}{\log(\underline{\beta}(\lambda_{max})^{-1})}^{-p}\right)\right) \left(\frac{2\log(\lambda_{min})}{\log(N)}\right) \right\}. \quad (5.1)$$

Se $T \in \mathcal{T}_2^*$, então $N^2 \left(\underline{\beta}\right)^{-p} (\lambda_{max})^p < 1$ e isto implica em

$$\log(N^2(\underline{\beta})^{-p}(\lambda_{max})^p < 0.$$

Alem disso, é válido o seguinte:

$$\lambda_{max} < \left((\overline{\beta})^l (\underline{\beta}) \left(\frac{2\log(N)}{\log(\underline{\beta}(\lambda_{max})^{-1})}^{-p}\right) \right)^{\left(\frac{2\log(\lambda_{min})}{\log(N)}\right)}$$

$$\implies \log(\lambda_{max}) < \left(\frac{2\log(\lambda_{min})}{\log(N)}\right) \log\left((\overline{\beta})^l (\underline{\beta}) \left(\frac{2\log(N)}{\log(\underline{\beta}(\lambda_{max})^{-1})}^{-p}\right) \right)$$

$$\implies \frac{\log(\lambda_{max})}{2\log(\lambda_{min})} > \frac{1}{\log(N)} \left(\log(\overline{\beta})^l + \left(\frac{2\log(N) - p\log(\underline{\beta}(\lambda_{max})^{-1})}{\log(\underline{\beta}(\lambda_{max})^{-1})}\right) \log(\underline{\beta}) \right)$$

$$= \frac{1}{\log(N)} \left(\log(\overline{\beta})^l + \left(\frac{\log(N^2\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p)}{\log(\underline{\beta}(\lambda_{max})^{-1})}\right) \log(\underline{\beta}) \right)$$

$$= \frac{1}{\log(N)} \left(\frac{\log(\overline{\beta})^l (\log(\underline{\beta}(\lambda_{max})^{-1})) + \log(N^2\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p) \log(\underline{\beta})}{\log(\underline{\beta}(\lambda_{max})^{-1})} \right)$$

$$= \frac{1}{\log(N)} \left(\frac{\log(\overline{\beta})^l (\log(\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p)) + \log(N^2\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p) \log(\underline{\beta})^{-p}}{\log(\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p)} \right)$$

$$= \frac{1}{\log(N)}\left(\frac{(\log(\overline{\beta})^l - \log(\underline{\beta})^{-p})(\log(N^2\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p) - 2\log(N)\log(\overline{\beta})^l}{\log(\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p N^2) - 2\log(N)}\right)$$

$$= \frac{2\log(N)\log(\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p N^2)}{\log(N)}\left(\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{l\log(\overline{\beta}) - p\log(\underline{\beta})}{2\log(N)} - \dfrac{l\log(\overline{\beta})}{\log(\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p N^2)}}{\log(\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p N^2) - 2\log(N)}\\ \\ \end{array}\right)$$

$$= \frac{\left(\dfrac{l\log(\overline{\beta}) - p\log(\underline{\beta})}{2\log(N)}\right) - \left(\dfrac{l\log(\overline{\beta})}{\log(\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p N^2)}\right)}{\left(\dfrac{\log(\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p N^2) - 2\log(N)}{2\log(\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p N^2)}\right)}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{l\log(\overline{\beta}) - p\log(\underline{\beta})}{2\log(N)}\right) - \left(\dfrac{l\log(\overline{\beta})}{\log(\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p N^2)}\right)}{\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{2\log(N)}{2\log(\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p N^2)}\right)}.$$

Portanto, se $T \in \mathcal{T}_2^{**}$, então vale que

$$\frac{\left(\dfrac{l\log(\overline{\beta}) - p\log(\underline{\beta})}{2\log(N)}\right) - \left(\dfrac{l\log(\overline{\beta})}{\log(\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p N^2)}\right)}{\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{2\log(N)}{2\log(\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p N^2)}\right)} < \frac{\log(\lambda_{max})}{2\log(\lambda_{min})}. \tag{5.2}$$

Considere então o seguinte número positivo

$$\mu_0 = \frac{\left(\dfrac{l\log\overline{\beta} - p\log\underline{\beta}}{2\log N}\right) - \left(\dfrac{l\log\overline{\beta}}{\log(N^2\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p)}\right)}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\log N}{\log(N^2\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p)}}. \tag{5.3}$$

e defina o intervalo

$$\mathcal{G} = \left(\mu_0, \frac{\log(\lambda_{max})}{2\log(\lambda_{min})}\right). \tag{5.4}$$

Note ainda que $\mu_0 > \left(\dfrac{l\log\overline{\beta} - p\log\underline{\beta}}{2\log N}\right)$ e que se $\mu > \mu_0$, então vale que

$$\frac{\mu\log N - l\log\overline{\beta}}{\log(N^2\underline{\beta}^{-p}(\lambda_{max})^p)} + \frac{l\log\overline{\beta} - p\log\underline{\beta}}{2\log N} < \frac{\mu}{2}. \tag{5.5}$$

Os conjuntos definidos acima nos dão condições para que tenhamos as desigualdades contrárias expostas nos Teoremas 3.2 e 3.3, obtendo assim as dimensões de $\rho(\Delta_T(x))$ e $\Delta_T(x)$. Sendo assim, para estes conjuntos, provaremos os seguintes resultados:

Teorema 5.1. *Tome $T \in \mathcal{T}_2^{\times} \cap \mathcal{T}_2^{**}$. Então para qualquer $x \in \mathbb{T}^l$ teremos*

$$\dim_H \rho(\Delta_T(x)) = s_0 p.$$

Teorema B. *Seja $T \in \mathcal{T}_2^{\times} \cap \mathcal{T}_2^{**}$. Então para cada $x \in \mathbb{T}^l$, vale que*

$$\dim_B(\Delta_T(x)) = \dim_H(\Delta_T(x)) = s_0 p.$$

Isto implica que

$$\dim_B(\Delta_T) = \dim_H(\Delta_T) = \dim_H(\rho(\Delta_T)) = l + s_0 p.$$

Observação 9. *A suposição de que T é um mergulho é apenas para evitar dificuldades técnicas na Seção 5.4.1. Se T não é injetiva, podemos considerar uma aplicação $F : \mathbb{T}^l \times E \times F \times D \to \mathbb{T}^l \times E \times F \times D$ de classe C^r, da forma $F(x, y, z, w) = (T(x, y, z), \lambda w + f(x))$ que seja um mergulho. Neste caso, a Seção 5.4.1 é válida para F e seguem os resultados deste Capítulo para T.*

5.2 Sobreposições em $T^m(V)$

Definição 5.2. *(ρ-**Sobreposições**) Dado $\underline{c} \in \mathcal{E}_q, q \geq 1$, considere $\mathbf{T}_{\underline{c}}$ e para algum $m > 1$ considere duas componentes de $T^m(V) \cap \pi^{-1}(\mathbf{T}_{\overline{c}})$, isto é, duas palavras $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{E}_m$, com $a_1 \neq b_1$. Chame de $Z_{\underline{a}}$ e $Z_{\underline{b}}$ tais componentes. Diremos que o par $(Z_{\underline{a}}, Z_{\underline{b}})$ é uma ρ_j-**sobreposição** de $T^m(V)$ sobre $\mathbf{T}_{\underline{c}}$ quando $\rho_j(Z_{\underline{a}}) \cap \rho_j(Z_{\underline{b}}) \neq \emptyset$ e*

$$\boldsymbol{m}(\rho_j D(S(x, \underline{a})) - \rho_j D(S(x, \underline{b}))) > 0$$

para todo $x \in \mathbf{T}_{\underline{c}}$.

*O conjunto $B = B_{\underline{a},\underline{b},\underline{c}} \subset \mathbb{T}^l$ tal que $\pi(\rho_j(Z_{\underline{a}}) \cap \rho_j(Z_{\underline{b}})) = B$ será chamado de $\pi-$**projeção da** ρ_j-**sobreposição do par** $(Z_{\underline{a}}, Z_{\underline{b}})$.*

Daqui por diante vamos considerar $T \in \mathcal{T}_2^{\times}$ e Δ_T o atrator que é intrinsecamente transversal com respeito a ρ.

Antes de seguirmos, note que com demonstração semelhante ao Lema 2.1, temos que vale :

Lema 5.1. *Sejam $(x,y,z) \in \Delta_T$ e $\underline{a} \in \mathcal{E}_m$ tal que $(x,y,z) \in Z_{\underline{a}}$, onde $Z_{\underline{a}}$ é a componente descrita por $\underline{a}$. Então existe $a_\infty \in \mathcal{E}_\infty$, com $\pi_m(a_\infty) = \underline{a}$ e $E^u(x,y,z) = \text{graf}(DS(x,a_\infty))$.*

Ou seja, os gráficos de $DS(x,a_\infty)$, $a_\infty \in I^\infty(x)$, fornecem as direções instáveis em cada ponto $(x,y,z) \in \Delta_T$. Pela unicidade da variedade instável, concluímos que os gráficos de $DS(x,a_\infty)$ fornecem as variedades instáveis. Além disso, pela Proposição 2.1 segue que o atrator é a união dos gráficos de $DS(x,a_\infty)$, $a_\infty \in \mathcal{E}_\infty$.

Iremos fazer algumas observações importantes a respeito da condição de transversalidade que serão utilizadas nos resultados sobre sobreposições mais adiante. São elas:

Observação 10. *Sejam E, F subespaços transversais. Denotamos*

$$\measuredangle(E,F) = \inf\{\measuredangle(u,v) : u \in E \cap (E\cap F)^\perp,\ v \in F \cap (E\cap F)^\perp \ \ e\ \ ||u|| = ||v|| = 1\} \in (0, \frac{\pi}{2}].$$

Se $t_1 = (x,y_1,z_1)$, $t_2 = (x,y_2,z_2)$ estão em Δ_T e em diferentes componentes de $T(V) \cap \mathbb{D}(x)$, então $d(t_1,t_2) \geq d_0$. Considere

$$\tilde{\Delta}_T = \{(t_1,t_2) \in \Delta_T \times \Delta_T : d(t_1,t_2) \geq d_0 \ \ e\ \ \rho(t_1) = \rho(t_2)\}.$$

Como Δ_T é compacto, segue que $\tilde{\Delta}_T$ também é compacto. Defina a aplicação:

$$(t_1,t_2) \in \tilde{\Delta}_T \longmapsto \measuredangle(\rho(E^u(t_1)), \rho(E^u(t_2)))$$

Note que esta aplicação é contínua, pois é a composição de aplicações contínuas. Segue então da transversalidade intrínseca de Δ_T que existe $r_0 > 0$ tal que $\measuredangle(\rho(E^u(t_1)), \rho(E^u(t_2))) > r_0$.

Observação 11. *Para u, v, com $||u|| = ||v|| = 1$ e $0 < \measuredangle(u,v) \leq \frac{\pi}{2}$, vale que*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\measuredangle(u,v)\right) \leq ||u-v|| \leq \sqrt{2}\left(\measuredangle(u,v)\right).$$

De fato, escreva $\theta = \measuredangle(u,v)$. Temos $\cos(\theta) = \langle u,v\rangle$ e $\text{sen}^2(\theta) = 1 - (\langle u,v\rangle)^2 \leq \theta^2$. Daí,

$$||u-v||^2 = 2(1-\langle u,v\rangle) = \frac{2\left(1-(\langle u,v\rangle)^2\right)}{1+\langle u,v\rangle} \leq \frac{2\theta^2}{1+\langle u,v\rangle} \Longrightarrow ||u-v|| \leq \sqrt{2}\theta.$$

Agora, note que

$$\text{sen}^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{1-\cos(\theta)}{2} = \frac{2(1-\langle u,v\rangle)}{4} = \frac{||u-v||^2}{4} \Longrightarrow \text{sen}\,(\frac{\theta}{2}) = \frac{||u-v||}{2}.$$

Como, $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$*, segue que*

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}}.$$

Assim,

$$\frac{\theta}{2\sqrt{2}} \leq \frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1+\langle u,v\rangle}{2}} = \frac{\theta}{2}\cos(\frac{\theta}{2}) \leq \text{sen}\,(\frac{\theta}{2}) = \frac{||u-v||}{2}.$$

De posse destas observações e do Lema 5.1, passaremos agora a demonstrar uma série de resultados que nos levarão ao que chamamos de **Lema geométrico** na próxima Seção. A importância do Lema geométrico reside em permitir a construção de um subconjunto de $\mathbb{T}^l$ em que para cada x teremos um conjunto $\Delta'_T(x)$ no qual poderemos obter a cota inferior da dimensão de Hausdorff.

Lema 5.2. *Existe uma constante* $c_0 > 0$ *e* $m > 1$ *suficientemente grande para o qual vale o seguinte: Dados* $\underline{a}, \underline{b} \in I^m(x)$*, com* $x \in \pi(\Delta_T)$*, tais que* $a_1 \neq b_1$ *e* $\rho(S(x,\underline{a})) = \rho(S(x,\underline{b}))$*, vale*

$$\boldsymbol{m}\left(\rho DS(x,\underline{a}) - \rho DS(x,\underline{b})\right) \geq \frac{c_0}{2}.$$

Demonstração. Note inicialmente que $a_1 \neq b_1$ indica que $(x, S(x,\underline{a}))$ e $(x, S(x,\underline{b}))$ estão em diferentes componentes de $T(V) \cap \mathbb{D}(x)$. Como $\rho(S(x,\underline{a})) = \rho(S(x,\underline{b}))$, segue da Observação 10 que existe $c_0 > 0$ tal que

$$\measuredangle(\rho E^u((x, S(x,\underline{a}))), \rho E^u((x, S(x,\underline{b})))) > c_0.$$

Sejam $a_\infty, b_\infty \in I^\infty(x)$, dados pelo Lema 5.1. Assim, vale que $E^u((x, S(x,\underline{a}))) = \text{graf}\, DS(x, a_\infty)$ e $E^u((x, S(x,\underline{b}))) = \text{graf}\, DS(x, b_\infty)$. Para cada $v \in \mathbb{R}^l$, com $||v|| = 1$, temos

$$\begin{aligned} ||\left(\rho DS(x,\underline{a}) - \rho DS(x,\underline{b})\right)v|| = ||&\left(\rho DS(x,\underline{a})\right)v - \left(\rho DS(x,a_\infty)\right)v \\ &+ \left(\rho DS(x,a_\infty) - \rho DS(x,b_\infty)\right)v \\ &+ \left(\rho DS(x,b_\infty) - \rho DS(x,\underline{b})\right)v|| \\ \geq \|&\left(\rho DS(x,a_\infty) - \rho DS(x,b_\infty)\right)v\| \end{aligned}$$

$$-||\left(\rho DS(x,\underline{a})-\rho DS(x,a_\infty)\right)v||$$
$$-||\left(\rho DS(x,b_\infty)-\rho DS(x,\underline{b})\right)v||.$$

Usando a Observação 10 e o fato geométrico da Observação 11, podemos escrever

$$\frac{c_0}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}\measuredangle(\rho E^u((x,S(x,\underline{a}))),\rho E^u((x,S(x,\underline{b}))) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\measuredangle(\rho DS(x,a_\infty)v,\rho DS(x,b_\infty)v)\right)$$
$$\leq ||\left(\rho DS(x,a_\infty)-\rho DS(x,b_\infty)\right)v||. \tag{5.6}$$

Tomando m suficientemente grande poderemos ter

$$||\left(\rho DS(x,b_\infty)-\rho DS(x,\underline{b})\right)v|| \leq \frac{(\sqrt{2}-1)c_0}{4}$$

e

$$||\left(\rho DS(x,a_\infty)-\rho DS(x,\underline{a})\right)v|| \leq \frac{(\sqrt{2}-1)c_0}{4}.$$

Daí, para quaisquer $a_{infty}, b_\infty \in I^\infty(x)$ e $\underline{a},\underline{b} \in I^m(x)$, segue que

$$||\left(\rho DS(x,\underline{a})-\rho DS(x,\underline{b})\right)v|| > \frac{c_0}{\sqrt{2}} - 2\frac{(\sqrt{2}-1)c_0}{4} = \frac{c_0}{2}.$$

Tomando agora o ínfimo sobre todos os $v \in W$, e depois o supremo sobre todos os subespaços $W \subset \mathbb{R}^l$, com $dim\ W = p$, teremos

$$\boldsymbol{m}\left(\rho DS(x,\underline{a})-\rho DS(x,\underline{b})\right) \geq \frac{c_0}{2}.$$

□

Corolário 5.1. *Se $T \in \mathcal{T}_2^\times$, então existem $\delta > 0$ e $c_0 > 0$ tais que para quaisquer duas palavras $\underline{a},\underline{b} \in I^\infty(x)$, com $[\underline{a}]_1 \neq [\underline{b}]_1$, temos que se $||\rho(S(x,\underline{a})) - \rho(S(x,\underline{b}))|| \leq \delta$, então*

$$\boldsymbol{m}(\rho DS(x,\underline{a}) - \rho DS(x,\underline{b})) \geq c_0.$$

Demonstração. Suponha por absurdo que o corolário seja falso. Assim, para quaisquer $\delta_k = \frac{1}{k}$ e $c_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, existem palavras $\underline{a_k},\underline{b_k} \in I^\infty(x)$, com $[\underline{a_k}]_1 \neq [\underline{b_k}]_1$ para os quais vale

$$||\rho(S(x,\underline{a_k})) - \rho(S(x,\underline{b_k}))|| \leq \delta_k \ \ e \ \ \mathbf{m}(\rho DS(x,\underline{a_k}) - \rho DS(x,\underline{b_k})) < c_k.$$

Por compacidade, existe uma subsequencia de k's (que iremos, por simplicidade, denotar apenas por k) tal que $\lim_k \underline{a_k} = \underline{a_0}$ e $\lim_k \underline{b_k} = \underline{b_0}$. Temos então que $\rho(S(x,\underline{a_0})) = \rho(S(x,\underline{b_0}))$, com $[\underline{a_0}]_1 \neq [\underline{b_0}]_1$ e

$$\mathbf{m}(\rho DS(x,\underline{a_0}) - \rho DS(x,\underline{b_0})) = 0,$$

o que contradiz o Lema 5.2. □

Proposição 5.1. *Existem um inteiro $k_0 \geq 1$ e um inteiro q tais que para todo $k \geq k_0$ vale o seguinte: Se D_1 e D_2 são componentes de $T^k(V) \cap \mathbb{D}(x_0)$ que estão em diferentes componentes de $T(V) \cap \mathbb{D}(x_0)$ e para as quais $\rho(D_1) \cap \rho(D_2) \neq \emptyset$, então existe uma ρ-sobreposição (Z_1, Z_2) em $T^K(V)$ sobre algum $\mathbf{T}_{\underline{c}}$, com $\underline{c} \in \mathcal{E}_q$, $D_1 \subset Z_1$ e $D_2 \subset Z_2$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que para todo $k_0 \geq 1$, existam infinitos $k' \geq k_0$ para os quais existem D'_1 e D'_2 componentes de $T^{k'}(V) \cap \mathbb{D}(x_0)$ com $\rho(D'_1) \cap \rho(D'_2) \neq \emptyset$ e que D'_1 e D'_2 não estejam contidas em alguma ρ-sobreposição (Z_1, Z_2) em $T^{k'}(V)$. Tome $t_{k'} \in \rho(D'_1) \cap \rho(D'_2)$ e considere $\underline{a}', \underline{b}' \in I^{k'}(x_0)$, com $[\underline{a}']_1 \neq [\underline{b}']_1$, que descrevem as componentes D'_1 e D'_2, respectivamente. Por compacidade, podemos tomar uma sequência de $(t_{k'})'_k$ tal que existe o limite $t_0 = \lim_{k' \to \infty} t_{k'}$ e existem palavras $\underline{a}, \underline{b} \in I^\infty(x_0)$ com $[\underline{a}]_1 \neq [\underline{b}]_1$, $\pi_{k'}(\underline{a}) = \underline{a}'$ e $\pi_{k'}(\underline{b}) = \underline{b}'$ para todo k'. Segue então que $\rho(S(x_0, \underline{a})) = \rho(S(x_0, \underline{b})) = t_0 \in \rho(\Delta_T(x_0))$. Usando 5.6, existe $c_0 > 0$ tal que

$$\boldsymbol{m}\left(\rho DS(x_0, \underline{a}) - \rho DS(x_0, \underline{b})\right) \geq \frac{c_0}{2}$$

e isto implica que

$$\boldsymbol{m}\left(\rho DS(x_0, \underline{a}') - \rho DS(x_0, \underline{b}')\right) \geq \frac{c_0}{3}$$

para k' suficientemente grande. Observe agora que temos

$$\rho DS(x, \underline{a}') := D_x\nu(x_1, z_1^x) D\varphi^{-1}(x_1) + \sum_{i=2}^{k} \left(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(x_j, z_j^x)\right)\left(D_x\nu(x_i, z_i^x)\right)\left(D\varphi^i(x_i)\right)^{-1}$$

em que $x_i = [\underline{a}']_i(x)$ e $z_i^x = \nu_{[\underline{a}']_{i+1}(x)} \circ \ldots \circ \nu_{\underline{a}'(x)}(0)$ *e* $z_k^x = 0$. Vamos escrever, abusando da notação, apenas

$$\rho DS(x, \underline{a}') = \sum_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(x_j, z_j^x)\right)\left(D_x\nu(x_i, z_i^x)\right)\left(D\varphi^i(x_i)\right)^{-1}$$

no sentido de que para $i = 1$ teremos $D_x\nu(x_1, z_1^x) D\varphi^{-1}(x_1)$. Agora, para $v \in \mathbb{R}^l$ com $||v|| = 1$, note que

$$\begin{aligned} ||\left(\rho DS(x, \underline{a}') - \rho DS(t, \underline{a}')\right) v|| = ||\sum_{i=1}^{k} \Bigg(&\left(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(x_j, z_j^x)\right)\left(D_x\nu(x_i, z_i^x)\right)\left(D\varphi^i(x_i)\right)^{-1} \\ &- \left(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(t_j, z_j^t)\right)\left(D_x\nu(t_i, z_i^t)\right)\left(D\varphi^i(t_i)\right)^{-1} \Bigg) v|| \\ \leq \sum_{j=1}^{k} ||\Big(&\left(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(x_j, z_j^x)\right)\left(D_x\nu(x_i, z_i^x)\right)\left(D\varphi^i(x_i)\right)^{-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(t_j,z_j^t))(D_x\nu(x_i,z_i^x))(D\varphi^i(x_i))^{-1}\\
&+(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(t_j,z_j^t))(D_x\nu(x_i,z_i^x))(D\varphi^i(x_i))^{-1}\\
&-(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(t_j,z_j^t))(D_x\nu(t_i,z_i^t))(D\varphi^i(t_i))^{-1})v||
\end{aligned}
$$

$$
\leq \sum_{j=1}^{k} || \left(\prod_{j=1}^{i-1}(D_z\nu(x_j,z_j^x)) - \prod_{j=1}^{i-1}(D_z\nu(t_j,z_j^t)) \right) (D_x\nu(x_i,z_i^x))(D\varphi^i(x_i))^{-1}v||
$$

$$
+ \sum_{i=1}^{k} ||(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(t_j,z_j^t)) \left((D_x\nu(x_i,z_i^x))(D\varphi^i(x_i))^{-1} - (D_x\nu(t_i,z_i^t))(D\varphi^i(t_i))^{-1} \right) v||
$$

$$
\leq \sum_{j=1}^{k} || \left(\prod_{j=1}^{i-1}(D_z\nu(x_j,z_j^x)) - \prod_{j=1}^{i-1}(D_z\nu(t_j,z_j^t)) \right) || \, ||(D_x\nu(x_i,z_i^x))|| \, ||(D\varphi^i(x_i))^{-1}|| \, ||v||
$$

$$
+ \sum_{i=1}^{k} ||(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(t_j,z_j^t))|| \, || \left((D_x\nu(x_i,z_i^x))(D\varphi^i(x_i))^{-1} - (D_x\nu(t_i,z_i^t))(D\varphi^i(t_i))^{-1} \right) || \, ||v||
$$

Temos que existem $L_1, L_2 > 0$ tais que

$$||D_x\nu(x_j,z_j^x) - D_x\nu(t_j,z_j^t)|| \leq L_1||(x_j,z_j^x) - (t_j,z_j^t)||$$

e

$$||D_z\nu(x_j,z_j^x) - D_z\nu(t_j,z_j^t)|| \leq L_2||(x_j,z_j^x) - (t_j,z_j^t)||.$$

Assim, vale que

$$
\begin{aligned}
||(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(x_j,z_j^x)) - (\prod_{j=1}^{i-1} D_z\psi(t_j,z_j^t))|| \leq\\
|| \left(D_z\nu(x_1,z_1^x) - D_z\nu(t_1,z_1^t) \right) D_z\nu(x_2,z_2^x) D_z\nu(x_3,z_3^x) ... D_z\nu(x_{i-1},z_{i-1}^t)||+\\
||D_z\nu(x_1,z_1^x) \left(D_z\nu(x_2,z_2^x) - D_z\nu(t_2,z_2^t) \right) D_z\nu(x_3,z_3^x) ... D_z\nu(x_{i-1},z_{i-1}^x)||+\\
... + ||D_z\nu(x_1,z_1^x) D_z\nu(x_2,z_2^x) D_z\nu(x_3,z_3^x) ... \left(D_z\nu(x_{i-1},z_{i-1}^x) - D_z\nu(t_{i-1},z_{i-1}^t) \right) ||.
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$||(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(x_j,z_j^x)) - (\prod_{j=1}^{i-1} D_z\psi(t_j,z_j^t))|| \leq \sum_{j=1}^{i-1} L_2(\lambda_{max})^{i-2}||(x_j,z_j^x) - (t_j,z_j^t)||.$$

Temos ainda que $||(D\varphi^i(x_i))^{-1}|| \leq \underline{\beta}^{-i}$. Portanto, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
|| \left(\rho DS(x,\underline{a}') - \rho DS(t,\underline{a}')\right) v|| &\leq \sum_{i=1}^{k} L_2(\lambda_{max})^{i-2} L_1 \underline{\beta}^{-i} \left(\sum_{j=1}^{i-1} ||(x_j, z_j^x) - (t_j, z_j^t)|| \right) \\
&+ \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{max})^{i-1} \ || \left((D_x\nu(x_i, z_i^x))(D\varphi^i(x_i))^{-1} - (D_x\nu(t_i, z_i^t))(D\varphi^i(t_i))^{-1} \right) || \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} L_2(\lambda_{max})^{i-2} L_1 \underline{\beta}^{-i} \left(\sum_{j=1}^{i-1} ||(x_j, z_j^x) - (t_j, z_j^t)|| \right) \\
&+ \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{max})^{i-1} \ ||(D_x\nu(x_i, z_i^x))(D\varphi^i(x_i))^{-1} - (D_x\nu(x_i, z_i^x))(D\varphi^i(t_i))^{-1}|| \\
&+ \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{max})^{i-1} \ ||(D_x\nu(x_i, z_i^x))(D\varphi^i(t_i))^{-1} - (D_x\nu(t_i, z_i^t))(D\varphi^i(t_i))^{-1}|| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} L_2(\lambda_{max})^{i-2} L_1 \underline{\beta}^{-i} \left(\sum_{j=1}^{i-1} ||(x_j, z_j^x) - (t_j, z_j^t)|| \right) \\
&+ \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{max})^{i-1} L_1 \underline{\beta}^{-i} ||x_i - t_i|| + \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{max})^{i-1} L_1 ||(x_i, z_i^x) - (t_i, z_i^t)|| \underline{\beta}^{-i}.
\end{aligned}
$$

Pelo mesmo ramo contrativo, temos $x_j = [\underline{a}]_j(x) = \varphi^{-j}(x)$ e $t_j = [\underline{a}]_j(t) = \varphi^{-j}(t)$. De modo que

$$||x_j - t_j|| \leq \underline{\beta}^{-j} ||x - t||.$$

Vale também que

$$
\begin{aligned}
||z_i^x - z_i^t|| &= ||\nu_{[\underline{a}']_{i+1}(x)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}'(x)}(0) - \nu_{[\underline{a}']_{i+1}(t)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}'(t)}(0)|| \\
&\leq (\lambda_{max}) ||[\underline{a}']_{i+1}(x) - [\underline{a}']_{i+1}(t)|| \\
&+ (\lambda_{max}) ||\nu_{[\underline{a}']_{i+2}(x)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}'(x)}(0) - \nu_{[\underline{a}']_{i+2}(t)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}'(t)}(0)|| \\
&\leq (\lambda_{max}) \underline{\beta}^{-(i+1)} ||x - t|| \\
&+ (\lambda_{max}) ||\nu_{[\underline{a}']_{i+2}(x)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}'(x)}(0) - \nu_{[\underline{a}']_{i+2}(t)} \circ ... \circ \nu_{\underline{a}'(t)}(0)||.
\end{aligned}
$$

De onde, continuando o processo, podemos concluir que

$$||z_i^x - z_i^t|| \leq \sum_{j'=1}^{k-i-1} (\lambda_{max})^{j'} \underline{\beta}^{-(i+j')} ||x - t|| < \left(\frac{\lambda_{max} \underline{\beta}^{-(i+1)}}{1 - \lambda_{max} \underline{\beta}^{-1}} \right) ||x - t||.$$

Daí,

$$||(x_j, z_j^x) - (t_j, z_j^t)|| \leq \underline{\beta}^{-j} ||x - t|| + \left(\frac{\lambda_{max} \underline{\beta}^{-(j+1)}}{1 - \lambda_{max} \underline{\beta}^{-1}} \right) ||x - t||.$$

E com isso , temos

$$\begin{aligned}
&|| \left(\rho DS(x,\underline{a}') - \rho DS(t,\underline{a}')\right) v|| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} L_2(\lambda_{max})^{i-2} L_1 \underline{\beta}^{-i} \left(\sum_{j=1}^{i-1} (\underline{\beta}^{-j} + \left(\frac{\lambda_{max}\underline{\beta}^{-(j+1)}}{1-\lambda_{max}\underline{\beta}^{-1}} \right)) ||x-t|| \right) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_{max}\right)^{i-1} L_1 \underline{\beta}^{-2i} ||x-t|| \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_{max}\right)^{i-1} L_1 \underline{\beta}^{-i} \left((\underline{\beta}^{-i} + \left(\frac{\lambda_{max}\underline{\beta}^{-(i+1)}}{1-\lambda_{max}\underline{\beta}^{-1}} \right)) ||x-t|| \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} L_2(\lambda_{max})^{i-2} L_1 \underline{\beta}^{-i} \left(\left(\frac{\underline{\beta}^{-1}}{1-\underline{\beta}^{-1}} \right) (1 + \left(\frac{\lambda_{max}\underline{\beta}^{-1}}{1-\lambda_{max}\underline{\beta}^{-1}} \right)) ||x-t|| \right) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_{max}\right)^{i-1} L_1 \underline{\beta}^{-2i} ||x-t|| \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_{max}\right)^{i-1} L_1 \underline{\beta}^{-2i} \left((1 + \left(\frac{\lambda_{max}\underline{\beta}^{-1}}{1-\lambda_{max}\underline{\beta}^{-1}} \right)) ||x-t|| \right).
\end{aligned}$$

Como $\lambda_{max}\underline{\beta}^{-1} < 1$, segue que existe $\tilde{L} > 0$ tal que

$$|| \left(\rho DS(x,\underline{a}') - \rho DS(t,\underline{a}')\right) v|| \leq \tilde{L}||x-t|| \text{ para } x,t \in \mathbb{T}^l \text{ e } \underline{a}' \in I^k(x) \cap I^k(t).$$

Escreva agora $g(x) = \rho DS(x,\underline{a}') - \rho DS(x,\underline{b}')$. Assim,

$$\begin{aligned}
|| \left(g(x) - g(t)\right) v|| &= || \left(\rho DS(x,\underline{a}') - \rho DS(x,\underline{b}') - (\rho DS(t,\underline{a}') - \rho DS(t,\underline{b}'))\right) v|| \\
&\leq || \left(\rho DS(x,\underline{a}') - \rho DS(t,\underline{a}')\right) v|| + || \left(\rho DS(x,\underline{b}') - \rho DS(t,\underline{b}')\right) v|| \\
&\leq 2\tilde{L}||x-t||.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$||g(x)v|| \geq ||g(x_0)v|| - || \left(g(x) - g(x_0)\right) v|| \geq ||g(x_0)v|| - 2\tilde{L}||x-x_0||.$$

Tomando o ínfimo sobre todos os $v \in W$, com $||v|| = 1$, onde $W \subset \mathbb{R}^l$ é um subespaço com dim $W = p$, depois tomando o supremo sobre todos os W, teremos

$$\boldsymbol{m}(g(x)) \geq \boldsymbol{m}(g(x_0)) - 2\tilde{L}||x-x_0|| \geq \frac{c_0}{3} - 2\tilde{L}||x-x_0||.$$

Note agora que

$$\frac{c_0}{3} - 2\tilde{L}||x-x_0|| > \frac{c_0}{4} \Longleftrightarrow ||x-x_0|| < \frac{c_0}{12\tilde{L}}.$$

Considere então $\underline{c} \in \mathcal{E}_q,\ 1 \leq q$, com $x_0 \in \mathbf{T}_{\underline{c}}$. Tome q grande de modo que $\operatorname{diam} \mathbf{T}_{\underline{c}} < \frac{c_0}{12\tilde{L}}$. Desta forma, teremos

$$\boldsymbol{m}\left(\rho DS(x, \underline{a}') - \rho DS(x, \underline{b}')\right) > \frac{c_0}{4} > 0, \quad \forall\ x \in \mathbf{T}_{\underline{c}}$$

e $D_1 \subset Z_{\underline{a}'}$ e $D_2 \subset Z_{\underline{b}'}$, em que $Z_{\underline{a}'}$ e $Z_{\underline{b}'}$ são componentes de $T^{k'}(V) \cap \pi^{-1}(\mathbf{T}_{\underline{c}})$, isto é, $(Z_{\underline{a}'}, Z_{\underline{b}'})$ é uma sobreposição em $T^{k'}(V)$, o que é uma contradição.

□

Na demonstração da Proposição 5.1 acima, percebemos que é possível tomar uma $\rho-$sobreposição $(Z_{\underline{a}}, Z_{\underline{b}})$ em $T^k(V)$ sobre algum $\mathbf{T}_{\underline{c}}$ para k, q suficientemente grandes de modo a termos

$$\boldsymbol{m}\left(\rho DS(x, \underline{a}) - \rho DS(x, \underline{b})\right) > \frac{c_0}{4} > 0, \quad \forall\ x \in \mathbf{T}_{\underline{c}},$$

ou seja, vale que

Proposição 5.2. *Existem um inteiro $k_0 \geq 1$, uma constante $c_0 > 0$ e um inteiro q tais que para todo $k \geq k_0$ vale o seguinte: Se D_1 e D_2 são componentes de $T^k(V) \cap \mathbb{D}(x_0)$ que estão em diferentes componentes de $T(V) \cap \mathbb{D}(x_0)$, com $x_0 \in \mathbb{T}^l$, $D_1 \subset Z_1$, $D_2 \subset Z_2$, (Z_1, Z_2) componentes de $T^k(V)$, e para as quais $\rho(D_1) \cap \rho(D_2) \neq \emptyset$, então (Z_1, Z_2) é uma ρ-sobreposição em $T^K(V)$ sobre algum $\mathbf{T}_{\underline{c}}$ tal que*

$$\boldsymbol{m}\left(\rho DS(x, \underline{a}) - \rho DS(x, \underline{b})\right) > \frac{c_0}{4}, \quad \forall\ x \in \mathbf{T}_{\underline{c}}.$$

A demonstração da Proposição anterior é idêntica à Proposição 5.1.

Observação 12. *No que vem a seguir vamos considerar $0 < r_0 < \frac{c_0}{32\tilde{L}}$, em que c_0 e $\tilde{L}$ são como na demonstração da Proposição 5.1 e consideramos $q > 1$ grande de modo que $\mathbf{T}_{\underline{c}} \subset \mathbf{B}(x_0, r_0)$ para todo $x_0 \in \mathbf{T}_{\underline{c}}$. As ρ-sobreposições serão sobre os $\mathbf{T}_{\underline{c}}$ com estas propriedades.*

Proposição 5.3. *Dado $1 > \omega > \lambda_{max}$, existe inteiro k_0 tal que para todo $k \geq k_0$, a π- projeção de qualquer $\rho-$sobreposição em $T^k(V)$ está contida na vizinhança tubular de uma subvariedade $S \subset \mathbb{T}^l$, de codimensão p, e de raio limitado por $A_0\omega^{k-k_0}$, onde A_0 é uma constante .*

Demonstração. Seja $(Z_{\underline{a}}, Z_{\underline{b}})$ uma sobreposição de $T^k(V)$ sobre algum $\mathbf{T}_{\underline{c}},\ \underline{c} \in I^q,\ q > 1$.

Note que

$$\rho(Z_{\underline{a}}) \subset \{(x, z) \in \mathbb{T}^l \times [-1, 1]^p : ||z - \rho S(x, \underline{a})|| \leq (\lambda_{max})^k\}$$

e

$$\rho(Z_{\underline{b}}) \subset \{(x,z) \in \mathbb{T}^l \times [-1,1]^p : ||z - \rho S(x,\underline{b})|| \leq (\lambda_{max})^k\}.$$

De modo que, se $x \in \pi(\rho(Z_{\underline{a}}) \cap \rho(Z_{\underline{b}}))$, então vale que $||\rho S(x,\underline{a}) - \rho S(x,\underline{b})|| \leq 2(\lambda_{max})^k$.

Fixe $x_0 \in \pi(\rho(Z_{\underline{a}}) \cap \rho(Z_{\underline{b}}))$ e considere a seguinte função:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{g} : \mathbf{B}(x_0, r_0) & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & \tilde{g}(x) = \rho S(x,\underline{a}) - \rho S(x,\underline{b}) \end{array} .$$

Onde $\tilde{g}$ é definida considerando as extensões de $S(x,\underline{a})$ e $S(x,\underline{b})$ sobre $\mathbf{B}(x_0,r_0)$. Note que $\pi(\rho(Z_{\underline{a}}) \cap \rho(Z_{\underline{b}})) \subset \tilde{g}^{-1}(\mathbf{B}(0, 2(\lambda_{max})^k))$. Considere então o seguinte conjunto

$$S = \{x \in \mathbf{T}_{\underline{c}} : \tilde{g}(x) = \tilde{g}(x_0)\} = \tilde{g}^{-1}(\tilde{g}(x_0)).$$

Afirmação: $\tilde{g}(x_0)$ é uma valor regular de $\tilde{g}$.

Usando a Proposição 5.2 e a Observação 12, temos que $(Z_{\underline{a}}, Z_{\underline{b}})$ é $\rho-$sobreposição tal que $\boldsymbol{m}(D\tilde{g}(x)) > \dfrac{c_0}{4} > 0$, para todo $x \in S$. Assim, para cada $x \in S$, existe um subespaço $W \subset \mathbb{T}^l$, com dim $W = p$, onde vale

$$||D\tilde{g}(x)v|| \geq \frac{c_0}{4}, \quad \forall v \in W.$$

Ou seja, $D\tilde{g}|_W$ é injetora, logo sobrejetora. Portanto, $D\tilde{g}(x)$ é sobrejetora para todo $x \in S = \tilde{g}^{-1}(\tilde{g}(x_0))$ como queríamos mostrar.

Uma vez que $\tilde{g}(x_0)$ é valor regular e S é não vazio, concluímos que $S = \tilde{g}^{-1}(\tilde{g}(x_0))$ é uma subvariedade de dimensão $l - p$.

Observe agora que vale $2\tilde{L} \geq Lip(D\tilde{g})$. Assim, $||D\tilde{g}||$ e $\mathbf{m}(D\tilde{g})$ são uniformemente limitadas por cima e por baixo para todos $(\underline{a},\underline{b})$ correspondendo à $\rho-$sobreposições de $T^k(V)$, para todo $k \geq k_0$ suficientemente grande. Logo, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\mathbf{B}(x_0,r_0) \subset V_{\epsilon_0}^{\perp}(S)$ (vizinhança tubular de S com raio ϵ_0), para todo $x_0 \in S$ e para todo S como acima. Podemos tomar ϵ_0 independente de S.

Agora vamos concluir que a π-projeção de qualquer $\rho-$sobreposição em $T^k(V)$ está contida em uma vizinhança tubular de S com raio limitado como no enunciado da Proposição. Inicialmente considere o caso $l = p$. Usando a fórmula de Taylor para $x \neq y$ em $\mathbf{B}(x_0,r_0)$, teremos

$$\tilde{g}(x) = \tilde{g}(y) + D\tilde{g}(x)(y-x) + R(y-x),$$

onde $||R(y-x)|| \leq 2\tilde{L}||y-x||^2$. Daí,

$$||g(x) - g(y)|| \geq \frac{c_0}{4}||y-x|| - 2\tilde{L}||y-x||^2 = \left(\frac{c_0}{4} - 2\tilde{L}||y-x||\right)||y-x|| > 0.$$

Portanto, $\tilde{g}$ é injetora e um difeomorfismo sobre sua imagem.

Considere agora o caso em que $l > p$. Como $dim\ S = l - p$, para cada $t_0 \in S$, defina o seguinte espaço $p-$dimensional:

$$\mathbf{B}^{\perp}(t_0, \epsilon_0) = \{t = t_0 + v \in \mathbb{T}^l : ||v|| \leq \epsilon_0,\ v \in (T_{t_0}S)^{\perp}\}$$

que é a bola normal em t_0. Considere $U_{t_0} = \mathbf{B}^{\perp}(t_0, \epsilon_0) \cap \mathbf{T}_{\underline{c}} \cap \tilde{g}^{-1}(\mathbf{B}(0, 2(\lambda_{max})^k))$ e defina $\tilde{g}_{t_0} := \tilde{g}|_{U_{t_0}}$. Note que vale $\mathbf{m}(D\tilde{g}_{t_0}(x)) \geq \dfrac{c_0}{4},\ \forall\ x \in U_{t_0}$ e $||D\tilde{g}_{t_0}^{-1}(y)|| \leq \dfrac{4}{c_0},\ \forall\ y \in \tilde{g}_{t_0}(U_{t_0})$. Assim, se $x \in U_{t_0}$, então

$$\begin{aligned} ||x - t_0|| = ||\tilde{g}_{t_0}^{-1}(\tilde{g}_{t_0}(x)) - \tilde{g}_{t_0}^{-1}(\tilde{g}_{t_0}(t_0))|| &\leq \frac{4}{c_0}||\tilde{g}_{t_0}(x) - \tilde{g}_{t_0}(t_0)|| \\ &= \frac{4}{c_0}||\tilde{g}_{t_0}(x)|| \leq \frac{4}{c_0}(2\lambda_{max})^k) = A_0(\lambda_{max})^k. \end{aligned}$$

Ou seja, $U_{t_0} \subset \mathbf{B}^{\perp}(t_0, A_0(\lambda_{max})^k)$. Daí,

$$S \subset \bigcup_{t_0 \in S} U_{t_0} \subset \bigcup_{t_0 \in S} \mathbf{B}^{\perp}(t_0, A_0(\lambda_{max})^k) = V^{\perp}_{A_0(\lambda_{max})^k}(S).$$

Sendo $1 > \omega > \lambda_{max}$ e $k > k_0$, segue que $A_0(\lambda_{max})^k < A_0(\omega^k) < A_0(\omega^{k-k_0})$ e portanto temos o resultado.

□

Proposição 5.4. *Existe inteiro k_0 tal que para $k \geq k_0$ vale que $(Z_{\underline{a}_0}, Z_{\underline{b}_0})$ é uma sobreposição de $T^{k_0}(V)$ se, e somente se $(Z_{\underline{a}\underline{a}_0}, Z_{\underline{b}\underline{b}_0})$ é uma sobreposição de $T^k(V)$, para quaisquer $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{E}_{k-k_0}$.*

Demonstração. Seja $(Z_{\underline{a}_0}, Z_{\underline{b}_0})$ uma $\rho-$sobreposição de $T^{k_0}(V)$ sobre algum $\mathbf{T}_{\underline{c}}$. Assim, pela Proposição 5.1, existe $c_0 > 0$ tal que

$$\mathbf{m}(\rho DS(x, \underline{a}_0) - \rho DS(x, \underline{b}_0)) \geq \frac{c_0}{4} > 0, \quad \forall\ x \in \mathbf{T}_{\underline{c}}.$$

Tome $k \geq k_0$ e k_0 grande o suficiente tal que para $v \in \mathbb{R}^l$ e quaisquer $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{E}_{k-k_0}$, vale

$$||(\rho DS(x, \underline{a}_0) - \rho DS(x, \underline{a}\underline{a}_0))v|| \leq \frac{c_0}{16} \quad \text{e} \quad ||(\rho DS(x, \underline{b}_0) - \rho DS(x, \underline{b}\underline{b}_0))v|| \leq \frac{c_0}{16}.$$

Como

$$\begin{aligned} ||(\rho DS(x, \underline{a}\underline{a}_0) - \rho DS(x, \underline{b}\underline{b}_0))v|| &= ||(\rho DS(x, \underline{a}\underline{a}_0) - \rho DS(x, \underline{a}_0) \\ &\quad + \rho DS(x, \underline{a}_0) - \rho DS(x, \underline{b}_0) \\ &\quad + \rho DS(x, \underline{b}_0) - \rho DS(x, \underline{b}\underline{b}_0))v|| \\ &\geq ||(\rho DS(x, \underline{a}_0) - \rho DS(x, \underline{b}_0))v|| \end{aligned}$$

$$-||(\rho DS(x, \underline{a}\underline{a_0}) - \rho DS(x, \underline{a_0}))v||$$
$$-||(\rho DS(x, \underline{b}\underline{b_0}) - \rho DS(x, \underline{b_0}))v||,$$

segue que

$$||(\rho DS(x, \underline{a}\underline{a_0}) - \rho DS(x, \underline{b}\underline{b_0}))v|| \geq \frac{c_0}{4} - \frac{c_0}{8} = \frac{c_0}{8} > 0.$$

Daí, tomando o ínfimo sobre todos os $v \in W$, com $||v|| = 1$ e W subespaço de dimensão p, e em seguida tomando o supremo sobre todos os $W \subset \mathbb{T}^l$, concluímos que

$$\mathbf{m}(\rho DS(x, \underline{a}\underline{a_0}) - \rho DS(x, \underline{b}\underline{b_0})) > 0, \quad \forall x \in \mathbf{T}_{\underline{c}}.$$

Portanto $(Z_{\underline{a}\underline{a_0}}, Z_{\underline{b}\underline{b_0}})$ é uma $\rho-$sobreposição de $T^k(V)$. De forma análoga mostra-se que se $(Z_{\underline{a}\underline{a_0}}, Z_{\underline{b}\underline{b_0}})$ é sobreposição de $T^k(V)$, $k \geq k_0$, então $(Z_{\underline{a_0}}, Z_{\underline{b_0}})$ é uma sobreposição de $T^{k_0}(V)$, com $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{E}_{k-k_0}$ e $\underline{a_0}, \underline{b_0} \in \mathcal{E}_{k_0}$.

□

Corolário 5.2. *Se $k \geq k_0$, então o número de sobreposições de $T^k(V)$ é exatamente $C_{k_0} N^{2(k-k_0)}$, onde C_{k_0} é o número de sobreposições de $T^{k_0}(V)$.*

Demonstração. De fato, seja C_{k_0} o número de sobreposições de $T^{k_0}(V)$. Se $(Z_{\underline{a_0}}, Z_{\underline{b_0}})$ é uma sobreposição de $T^{k_0}(V)$, então pelo Proposição 5.4, temos $(Z_{\underline{a}\underline{a_0}}, Z_{\underline{b}\underline{b_0}})$ sobreposição de $T^k(V)$, onde cada palavra $\underline{a} \in \mathcal{E}_{k-k_0}$ e $\underline{b} \in \mathcal{E}_{k-k_0}$ pode ser escolhida de $N^{(k-k_0)}$ maneiras, de modo que $\underline{a}a_0$ e $\underline{b}b_0$ sejam admissíveis. Logo, uma sobreposição de $T^{k_0}(V)$ determina $N^{2(k-k_0)}$ sobreposições de $T^k(V)$ e portanto o número total de sobreposições de $T^k(V)$ é $C_{k_0} N^{2(k-k_0)}$. □

5.3 Lema Geométrico

Demonstraremos agora um resultado que será de grande importância para obtermos a cota inferior da dimensão de Hausdorff do atrator $\Delta_T(x)$ para cada $x \in \mathbb{T}^l$. Tal resultado vai nos permitir construir sub-atratores onde saberemos calcular a cota inferior da dimensão de Hausdorff e através da construção de uma holonomia instável poderemos relacionar estes conjuntos com o atrator. Tais construções ficarão mais claras no decorrer das próximas Seções. Apresentamos então o Lema geométrico:

Teorema 5.2. *(Lema geométrico) Seja $T \in \mathcal{T}_2^{\times} \cap \mathcal{T}_2^{**}$. Existe $0 < \mu_0 < \frac{1}{2}$ tal que para qualquer $\mu \in \left(\mu_0, \frac{1}{2}\right)$ e para cada inteiro n suficientemente grande, podemos encontrar um inteiro k, com $1 < k < \frac{n}{2}$, e um subconjunto compacto próprio $\mathbf{F}$ em $\mathbb{T}^l$ que seja a união de no mínimo $sN^{n-1} - N^{\mu n}$ conjuntos em $\mathcal{T}_n$ tais que para quaisquer dois pontos $x_1, x_2 \in \mathbf{F}$ que satisfazem $\varphi^{k-1}(x_1) \neq \varphi^{k-1}(x_2)$, $\varphi^k(x_1) = \varphi^k(x_2)$, temos*

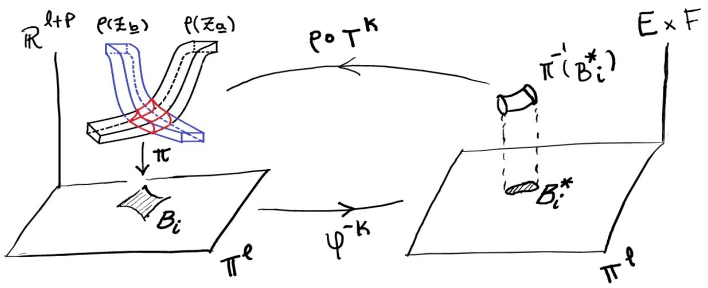
$$\rho(T^k(\mathbb{D}(x_1))) \cap \rho(T^k(\mathbb{D}(x_2))) = \emptyset.$$

Demonstração. Uma vez que $T \in \mathcal{T}_2^{**}$, tome μ_0 como em (5.3) e considere $\mu \in \left(\mu_0, \frac{1}{2}\right)$. Note então que vale a desigualdade

$$\frac{\mu \log N - l \log \overline{\beta}}{\log(N^2 \underline{\beta}^{-p} (\lambda_{max})^p)} + \frac{l \log \overline{\beta} - p \log \underline{\beta}}{2 \log N} < \frac{\mu}{2}. \tag{5.7}$$

Seja $\omega \in (\lambda_{max}, 1)$, mas ainda suficientemente próximo de λ_{max} e fixe um inteiro k_0 tal que valem as Proposições 5.1, 5.3 e 5.4. Para qualquer inteiro $k \geq k_0$, considere $B_1, B_2, ..., B_{s^*}$ as $\pi-$projeções das $\rho-$sobreposições de $T^k(V)$, onde $s^* = C_{k_0} N^{2(k-k_0)}$. Denotaremos $k' = k - k_0$. Para cada B_i, $i = 1, ..., s^*$, tome B_i^* tal que $B_i^* = \varphi^{-k}(B_i)$, onde φ^{-k} é um dos ramos inversos de φ^k correspondentes a $\rho-$sobreposição de $T^k(V)$ associada a B_i.

Figura 5 – Conjuntos B_i^* e B_i.



Fonte: O autor (2021)

Seja $B^* = \bigcup_{i=1}^{s^*} B_i^*$. Note que cada B_i está contido numa vizinhança tubular V_i de uma subvariedade S_i de dimensão $l-p$ e com raio limitado por $A_i \omega^{k'}$, A_i constante.

Assim, teremos que cada B_i^* estará contido numa vizinhança tubular V_i^* de uma subvariedade S_i^* de dimensão também $l-p$ e com raio limitado por $A_i \underline{\beta}^{-k} \omega^{k'}$. Lembremos que se $\mathcal{R} \in \mathcal{T}_n$, então

$$K_0 \overline{\beta}^{-n} \leq \operatorname{diam} \mathcal{R} \leq K_1 \underline{\beta}^{-n},$$

onde K_0, K_1 são constantes. Considere então uma vizinhança V_i^{**} de V_i^* de raio $K_1 \underline{\beta}^{-n}$.

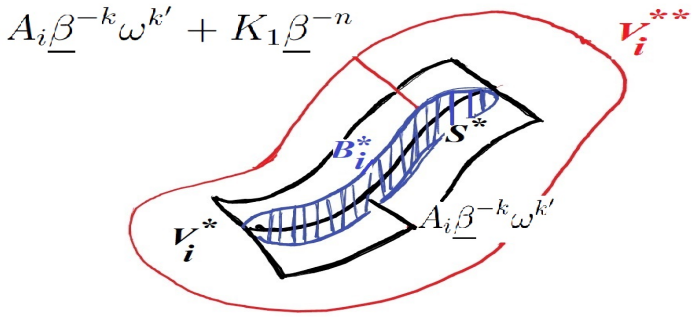
Sejam $\mathcal{R}_{1i}, \mathcal{R}_{2i}, ..., \mathcal{R}_{mi}$ retângulos de $\mathcal{T}_n$ tais que $\mathcal{R}_{ji} \cap B_i^* \neq \emptyset$, para todo $j = 1, 2..., m$. Note que vale o seguinte

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname{vol}(\mathcal{R}_{ji}) \leq \operatorname{vol}(V_i^{**}) \leq Q_0 (A_i \underline{\beta}^{-k} \omega^{k'} + K_1 \underline{\beta}^{-n})^p (Q_1 + K_1 \underline{\beta}^{-n})^{l-p},$$

onde Q_0, Q_1 são constantes adequadas. Como cada $\mathcal{R} \in \mathcal{T}_n$ tem diâmetro limitado inferiormente por $K_0 \overline{\beta}^{-n}$, vale que

$$m K_0 \overline{\beta}^{-ln} \leq m \{ \min_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_n} \operatorname{vol}(R) \} \leq \sum_{j=1}^{m} \operatorname{vol}(\mathcal{R}_{ji}).$$

Figura 6 – Vizinhança V_i^{**}



Fonte: O autor (2021)

Daí,

$$m \leq K_0^{-1}(\overline{\beta})^{ln} Q_0 (A_i\underline{\beta}^{-k}\omega^{k'} + K_1\underline{\beta}^{-n})^p (Q_1 + K_1\underline{\beta}^{-n})^{l-p}.$$

Uma vez que $K_1\underline{\beta}^{-n} < 1$, segue que $(Q_1 + K_1\underline{\beta}^{-n})^{l-p} < (Q_1 + 1)^{l-p} = Q_2$. Assim,

$$m \leq K_0^{-1}(\overline{\beta})^{ln} Q_0 Q_2 (A_i\underline{\beta}^{-k}\omega^{k'} + K_1\underline{\beta}^{-n})^p.$$

Dessa forma concluímos que o número $N(R)$ de retângulos em $\mathcal{T}_n$ que intersectam B^* é limitado por

$$N(R) \leq \left(K_0^{-1}(\overline{\beta})^{ln} Q_0 Q_2 (A_i\underline{\beta}^{-k}\omega^{k'} + K_1\underline{\beta}^{-n})^p \right) s^*,$$

isto é,

$$N(R) \leq \left(K_0^{-1}(\overline{\beta})^{ln} Q_0 Q_2 (A_i\underline{\beta}^{-k}\omega^{k'} + K_1\underline{\beta}^{-n})^p \right) C_{k_0} N^{2k'}.$$

Note agora que

$$(A_i\underline{\beta}^{-k}\omega^{k'} + K_1\underline{\beta}^{-n})^p \leq 2^p ((A_i\underline{\beta}^{-k}\omega^{k'})^p + (K_1\underline{\beta}^{-n})^p).$$

Assim, rescrevendo $C^* = K_0^{-1} Q_0 Q_2 2^p A_i^p C_{k_0}$ e $C_* = K_0^{-1} Q_0 Q_2 2^p K_1^p C_{k_0}$, teremos

$$N(R) \leq C^* (\overline{\beta})^{ln} \underline{\beta}^{-pk} \omega^{pk'} N^{2k'} + C_* (\overline{\beta})^{ln} \underline{\beta}^{-pn} N^{2k'}.$$

Logo, o número de retângulos em $\mathcal{T}_n$ que não intersectam B^* é no mínimo

$$sN^{n-1} - \left(C^* (\overline{\beta})^{ln} \underline{\beta}^{-pk} \omega^{pk'} N^{2k'} + C_* (\overline{\beta})^{ln} \underline{\beta}^{-pn} N^{2k'} \right).$$

Seja $\mathbf{F}$ o fecho da união dos retângulos em $\mathcal{T}_n$ que não intersectam B^*. Temos claramente que $\mathbf{F}$ é compacto e que para qualquer $x_1, x_2 \in F$ vale que se $\varphi^{k-1}(x_1) \neq$

$\varphi^{k-1}(x_2)$e $\varphi^k(x_1) = \varphi^k(x_2)$, temos $\rho(T^k(D(x_1))) \cap \rho(T^k(D(x_2))) = \emptyset$, pois do contrário teríamos $\varphi^k(x_1)$ em algum B_i. Agora para concluir o Lema, precisamos mostrar que para n suficientemente grande podemos encontrar inteiro $k = k_0 + k' \geq k_0$ com $k < \frac{n}{2}$ e para o qual vale

$$C^*(\overline{\beta})^{ln}\underline{\beta}^{-pk}\omega^{pk'}N^{2k'} + C_*(\overline{\beta})^{ln}\underline{\beta}^{-pn}N^{2k'} < N^{n\mu}, \quad \text{para } \mu \in (\mu_0, \frac{1}{2}). \tag{5.8}$$

A desigualdade acima vale se

$$C^*(\overline{\beta})^{ln}\underline{\beta}^{-pk}\omega^{pk'}N^{2k'} < \frac{N^{n\mu}}{2} \quad \text{e} \quad C_*(\overline{\beta})^{ln}\underline{\beta}^{-pn}N^{2k'} < \frac{N^{n\mu}}{2}.$$

Escolhendo ω pequeno, próximo de λ_{max}, temos $N^2\underline{\beta}^{-p}\omega^p < 1$. Assim,

$$C^*(\overline{\beta})^{ln}\underline{\beta}^{-pk}\omega^{pk'}N^{2k'} < \frac{N^{n\mu}}{2} \Longrightarrow C^*(\overline{\beta})^{ln}\underline{\beta}^{-pk_0}(N^2\underline{\beta}^{-p}\omega^p)^{k'} < \frac{N^{n\mu}}{2}$$

$$\Longrightarrow (N^2\underline{\beta}^{-p}\omega^p)^{k'} < \frac{N^{n\mu}(\overline{\beta})^{-ln}}{2C^*\underline{\beta}^{-pk_0}} \Longrightarrow k'\log(N^2\underline{\beta}^{-p}\omega^p) < n(\mu\log N - l\log\overline{\beta}) - \log(2C^*\underline{\beta}^{-pk_0})$$

$$\Longrightarrow k' > n\frac{(\mu\log N - l\log\overline{\beta})}{\log(N^2\underline{\beta}^{-p}\omega^p)} - \frac{\log(2C^*)\underline{\beta}^{-pk_0}}{\log(N^2\underline{\beta}^{-p}\omega^p)}.$$

Usando a outra desigualdade, temos

$$C_*(\overline{\beta})^{ln}\underline{\beta}^{-pn}N^{2k'} < \frac{N^{n\mu}}{2} \Longrightarrow N^{2k'} < \frac{N^{n\mu}(\overline{\beta})^{-ln}\underline{\beta}^{pn}}{2C_*}$$

$$\Longrightarrow 2k'\log N < n(\mu\log N - l\log\overline{\beta} + p\log\underline{\beta}) - log(2C_*)$$

$$\Longrightarrow k' < n\left(\frac{\mu}{2} - \frac{(l\log\overline{\beta} - p\log\underline{\beta})}{2\log N}\right) - \frac{\log(2C_*)}{2\log N}.$$

Portanto

$$n\frac{(\mu\log N - l\log\overline{\beta})}{\log(N^2\underline{\beta}^{-p}\omega^p)} - \frac{\log(2C^*)\underline{\beta}^{-pk_0}}{\log(N^2\underline{\beta}^{-p}\omega^p)} < k' < n\left(\frac{\mu}{2} - \frac{(l\log\overline{\beta} - p\log\underline{\beta})}{2\log N}\right) - \frac{\log(2C_*)}{2\log N}. \tag{5.9}$$

Como

$$\frac{1}{2} > \mu > \mu_0 > \frac{l\log\overline{\beta} - p\log\underline{\beta}}{\log N},$$

segue então que

$$\frac{\mu}{2} - \frac{(l\log\overline{\beta} - p\log\underline{\beta})}{2\log N} > 0$$

e escolhendo ω suficientemente próximo de λ_{max}, juntamente com o μ tomado, teremos

$$\frac{\mu \log N - l \log \overline{\beta}}{\log(N^2 \underline{\beta}^{-p} \omega^p)} + \frac{l \log \overline{\beta} - p \log \underline{\beta}}{2 \log N} < \frac{\mu}{2}.$$

Ou seja,

$$\frac{(\mu \log N - l \log \overline{\beta})}{\log(N^2 \underline{\beta}^{-p} \omega^p)} < \frac{\mu}{2} - \frac{(l \log \overline{\beta} - p \log \underline{\beta})}{2 \log N}.$$

Assim, tomando n grande o suficiente, podemos deixar a diferença entre a expressão do lado direito e a expressão do lado esquerdo na desigualdade 5.9 maior que 1 . Logo, existe inteiro k' satisfazendo 5.9 e portanto também 5.8. Para $k = k' + k_0$, no lado direito da desigualdade em (2), teremos

$$k = k' + k_0 < \frac{n}{2} - \frac{(1-\mu)n}{2} - \frac{n(l \log \overline{\beta} - p \log \underline{\beta})}{2 \log N} - \frac{\log(2C_*)}{2 \log N} + k_0,$$

como $\mu < 1$ e $l \log \overline{\beta} - p \log \underline{\beta} > 0$, segue que $k < \frac{n}{2}$ para n suficientemente grande.

□

Os dois resultados seguintes são consequências imediatas de Teorema 5.2.

Corolário 5.3. *Sejam k e $\mathbf{F}$ como no Teorema 5.2. Então para cada $x \in \mathbb{T}^l$ e quaisquer duas componentes D_1,D_2 de $T(V) \cap \mathbb{D}(x)$ temos*

$$\rho(D_1 \cap T^k(\pi^{-1}(\mathbf{F}))) \cap \rho(D_2 \cap T^k(\pi^{-1}(\mathbf{F}))) = \emptyset.$$

Demonstração. Se existem $x_0 \in \mathbb{T}^l$ e D_1, D_2 componentes de $T(V) \cap \mathbb{D}(x_0)$ tais que

$$\rho(D_1 \cap T^k(\pi^{-1}(\mathbf{F}))) \cap \rho(D_2 \cap T^k(\pi^{-1}(\mathbf{F}))) \neq \emptyset,$$

então $\rho(D_1) \cap \rho(D_2) \neq \emptyset$ e existe uma sobreposição contendo D_1 e D_2, em particular, contendo $D_1 \cap T^k(\pi^{-1}(\mathbf{F}))$ e $D_2 \cap T^k(\pi^{-1}(\mathbf{F}))$, e isso contradiz a definição de $\mathbf{F}$. □

Usando o corolário anterior, temos:

Corolário 5.4. *Sejam k e $\mathbf{F}$ como no Teorema 5.2 , $x_1, x_2 \in \mathbf{F}$ tais que $\varphi^{k-1}(x_1) \neq \varphi^{k-1}(x_2)$, e $\varphi^k(x_1) = \varphi^k(x_2)$ e D_1, D_2 quaisquer duas componentes de $T(V) \cap \mathbb{D}(x)$, $x \in \mathbb{T}^l$. Então existe $\delta > 0$ (dependendo apenas de k e $\mathbf{F}$, mas não de x_1 e x_2) tal que*

$$d(\rho(T^K(\mathbb{D}(x_1))), \rho(T^K(\mathbb{D}(x_2)))) \geq \delta \quad e$$

$$d(\rho(D_1 \cap T^k(\pi^{-1}(\mathbf{F}))), \rho(D_1 \cap T^k(\pi^{-1}(\mathbf{F})))) \geq \delta$$

Demonstração. Como $\mathbf{F}$ é compacto, segue que os conjuntos $\rho(D_1 \cap T^k(\pi^{-1}(\mathbf{F}))$ e $\rho(D_2 \cap T^k(\pi^{-1}(\mathbf{F}))$ são compactos também e , como são disjuntos pelo Corolário 5.3, existe $\delta > 0$ com a propriedade buscada. Agora note que $\rho(T^K(\mathbb{D}(x_1))) \subset \rho(D_1 \cap T^k(\pi^{-1}(\mathbf{F}))$ e $\rho(T^K(\mathbb{D}(x_2))) \subset \rho(D_2 \cap T^k(\pi^{-1}(\mathbf{F}))$, onde D_1 é uma componente de $T(V) \cap \mathbb{D}(x_1)$ e D_2 é uma componente de $T(V) \cap \mathbb{D}(x_2)$. Assim,

$$d(\rho(T^K(\mathbb{D}(x_1))), \rho(T^K(\mathbb{D}(x_2)))) \geq d(\rho(D_1 \cap T^k(\pi^{-1}(\mathbf{F}))), \rho(D_1 \cap T^k(\pi^{-1}(\mathbf{F})))) \geq \delta$$

□

5.4 Os conjuntos $\mathcal{E}'_{um}$, $C'(m)$ e $\Delta'_T(m)$

Ainda como consequência do Lema Geométrico 5.2, iremos construir sub-atratores para os quais estabeleceremos uma cota superior para a dimensão da seção transversal.

Considere m um inteiro grande de modo que o Teorema 5.2 vale para um valor fixo $\mu \in (\mu_0, \frac{1}{2})$ e $n = 2m$. Existe assim inteiro $k = k(m) < m$, um conjunto compacto $F = F(m) \subset \mathbb{T}^l$ e usando então o Corolário 5.4 existe também um $\delta = \delta(m) > 0$. Sejam $\underline{a}_1, \underline{a}_2, ..., \underline{a}_t$ palavras em $\mathcal{E}_n$ para as quais $\mathbf{T}_{\underline{a}_1}, \mathbf{T}_{\underline{a}_2}, ..., \mathbf{T}_{\underline{a}_t}$ em $\mathcal{T}_n$ não estão em $\mathbf{F}$. Uma vez que $\mathbf{F}$ é a união de no mínimo $sN^{n-1} - N^{\mu n}$ conjuntos em $\mathcal{T}_n$, segue que o número t é limitado por

$$1 \leq t \leq N^{\mu n} = N^{2\mu m}.$$

Definimos

$$\mathcal{E}'_m = \{\underline{a} \in \mathcal{E}_m : \underline{a} \text{ não aparece em } \ \underline{a}_j, \ j = 1, 2, ..., t.\}.$$

Note que para cada $\underline{a}_j, \ j = 1, 2, ..., t$, não podemos ter $\pi_m(\underline{a}_j), \ \pi_m(\sigma(\underline{a}_j)), ..., \ \pi_m(\sigma^m(\underline{a}_j))$ em $\mathcal{E}'_m$. Assim, o número $r = r(m)$ de elementos em $\mathcal{E}'_m$ é limitado por

$$sN^{m-1} - (m+1)t \leq r < sN^{m-1}.$$

De onde podemos escrever

$$sN^{m-1} - (m+1)N^{2\mu m} \leq r < sN^{m-1}.$$

Seja $\mu_0 < \mu' < \mu$, para m grande o suficiente, teremos $m + 1 < N^{2(\mu - \mu')m}$, isto é,

$$(m+1)N^{2\mu' m} < N^{2\mu m}.$$

Daí, aplicando o Lema Geométrico para μ', teremos

$$sN^{m-1} - (m+1)N^{2\mu' m} < r(m) < sN^{m-1}.$$

Portanto,

$$sN^{m-1} - N^{2\mu m} < r < sN^{m-1}.$$

Agora, considere para cada $u = 1, 2, ...$, o conjunto $\mathcal{E}_{um} \subset \mathcal{E}_m \times \mathcal{E}_m \times ... \times \mathcal{E}_m$ (u fatores) das palavras de tamanho um tais que quaisquer palavras em $\mathcal{E}_{um}$ de tamanho menor ou igual a um é admissível . Definimos o seguinte subconjunto de $\mathcal{E}_{um}$:

$$\mathcal{E}'_{um} \subset \mathcal{E}'_m \times \mathcal{E}'_m \times ... \times \mathcal{E}'_m.$$

Proposição 5.5. *Se $\underline{a} \in \mathcal{E}'_m$, então existe $\underline{b} \in \mathcal{E}'_m$ tal que $\underline{ba} \in \mathcal{E}'_{2m}$.*

Demonstração. Seja $\underline{a} \in \mathcal{E}'_m$. Defina o seguinte conjunto

$$A_{\underline{a}} = \{\underline{b} \in \mathcal{E}_m : \underline{ba} \in \mathcal{E}_{2m}\}.$$

Note que a cardinalidade de $A_{\underline{a}}$ é N^m.

Afirmamos que $A_{\underline{a}} \cap \mathcal{E}'_m \neq \emptyset$. De fato, caso fosse $A_{\underline{a}} \cap \mathcal{E}'_m = \emptyset$, então valeria para a cardinalidade de $\mathcal{E}_m$, denotada aqui por $\#(\mathcal{E}_m)$, o seguinte

$$sN^{m-1} = \#(\mathcal{E}_m) \geq \#(\mathcal{E}'_m) + \#(A_{\underline{a}}) = r + N^m \geq sN^{m-1} - N^{2\mu m} + N^m.$$

Daí, $N^{2\mu m} \geq N^m$. O que é contradição, pois $\mu < \frac{1}{2}$.

Basta agora tomar $\underline{b} \in A_{\underline{a}} \cap \mathcal{E}'_m$ e, por construção, tem-se $\underline{ba} \in \mathcal{E}'_{2m}$.

□

Note que para a cardinalidade de $A_{\underline{a}} \cap \mathcal{E}'_m$, vale o seguinte

$$\#(A_{\underline{a}} \cap \mathcal{E}'_m) \geq \#(A_{\underline{a}}) + \#(\mathcal{E}'_m) - \#(\mathcal{E}_m) = N^m + sN^{m-1} - N^{2\mu m} - sN^{m-1} = N^m - N^{2\mu m}.$$

Assim, podemos estimar uma cota inferior para a cardinalidade de $\mathcal{E}'_{2m}$. Um vez que para cada $\underline{a} \in \mathcal{E}'_m$ podemos encontrar um $\underline{b} \in A_{\underline{a}} \cap \mathcal{E}'_m$, podemos escrever

$$\#\mathcal{E}'_{2m} \geq \sum_{\underline{a} \in \mathcal{E}'_m} \#(A_{\underline{a}} \cap \mathcal{E}'_m) \geq (N^m - N^{2\mu m})^2.$$

Agora, por indução em $u = 1, 2, ...$, para m fixo, podemos estimar uma cota inferior para $\mathcal{E}'_{um}$,

$$\#\mathcal{E}'_{um} \geq \sum_{\underline{a} \in \mathcal{E}'_{(u-1)m}} \#(A_{\underline{a}} \cap \mathcal{E}'_m) \geq (N^m - N^{2\mu m})\#(\mathcal{E}'_{(u-1)m}) \geq (N^m - N^{2\mu m})^{(u-1)}(sN^{m-1} - N^{2\mu m}).$$

Como $s > N$, temos $\#\mathcal{E}'_{um} \geq (N^m - N^{2\mu m})^u$.

Considere ainda o conjunto $\mathcal{E}'_{\infty m}$, definido naturalmente como

$$\mathcal{E}'_{\infty m} := \{\underline{a} \in \mathcal{E}_\infty : \pi_{um}(\underline{a}) \in \mathcal{E}'_{um}, \quad u = 1, 2, ...\}.$$

No que **se $\underline{a} \in \mathcal{E}'_{\infty m}$, então nenhuma das palavras $\underline{a}_1, \underline{a}_2, ..., \underline{a}_t$ aparecem em $\underline{a}$.** De fato, caso algum $\underline{a}_j,\ j = 1, 2, ..., t$, apareça em $\underline{a} \in \mathcal{E}'_{\infty m}$, então existe algum $u = 1, 2...$ tal que $\underline{a}_j$ aparece em $\pi_{um}(\underline{a}) \in \mathcal{E}'_{um}$, o que seria uma contradição.

Agora definimos o seguinte subconjunto de $\mathbb{T}^l$

$$C' = C'(m) = \bigcap_{u=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\underline{a} \in \mathcal{E}'_{um}} \mathbf{T}_{\underline{a}} \right).$$

O conjunto C' tem as seguintes propriedades:

1. $\varphi^m(C') = C'$.
   De fato, vamos mostrar primeiro que $\varphi^m(C') \subset C'$. Note se $\underline{a} \in \mathcal{E}'_{um}$, $u = 1, 2, ...$, então $\varphi^m(\mathbf{T}_{\underline{a}}) \subset \mathbf{T}_{\sigma^m(\underline{a})}$. Daí,

$$\varphi^m(C') = \bigcap_{u=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\underline{a} \in \mathcal{E}'_{um}} \mathbf{T}_{\underline{a}} \right) \subset \bigcap_{u=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\underline{a} \in \mathcal{E}'_{um}} \varphi^m(\mathbf{T}_{\underline{a}}) \right)$$
$$\subset \bigcap_{u=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\underline{a} \in \mathcal{E}'_{um}} \mathbf{T}_{\sigma^m(\underline{a})} \right) \subset \bigcap_{u=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\underline{a} \in \mathcal{E}'_{(u-1)m}} \mathbf{T}_{\underline{a}} \right) \subset C'.$$

   Agora mostraremos que $C' \subset \varphi^m(C')$. Tome $x \in C'$. Para cada $u \geq 1$,existe $\underline{a} \in \mathcal{E}'_{um}$ tal que $x \in \mathbf{T}_{\underline{a}}$. Assim, existe $\underline{a_\infty} = (\underline{a_1}, \underline{a_2}, ...) \in \mathcal{E}'_\infty$ tal que $x \in \mathbf{T}_{\pi_{um}(\underline{a_\infty})}$, para todo $u \geq 1$. Usando a Proposição 5.5, existe $\underline{b} \in \mathcal{E}'_m$ tal que $\underline{b}\underline{a_1} \in \mathcal{E}'_{2m}$. Portanto, $\underline{b}\ \underline{a_1}\ \underline{a_2}... \in \sigma^{-m}(\underline{a_\infty})$ e com isso x tem um pré-iterado em cada $\mathbf{T}_{\underline{b},\underline{a_1},\underline{a_2},...,\underline{a_u}}$, para cada $u \geq 1$. Isto é, $x \in \varphi^m(C')$.

2. C' é um conjunto de Cantor;

3. Como cada $\underline{a}_j,\ j = 1, 2, ..., t$, não aparece em qualquer $\underline{a} \in \mathcal{E}'_{\infty m}$, segue que $\varphi^i(C') \subset \mathbf{F}$, para todo $i \geq 0$.

Denote $V' = V'(m) = C'(m) \times E \times F = \pi^{-1}(C'(m))$. Como $\varphi^m(C') = C'$, temos $T^m(V') \subset V'$. Seja então

$$\Delta'_T = \Delta'_T(m) = \bigcap_{u=1}^{\infty} T^{um}(V')$$

Temos $\Delta'_T \subset \Delta_T \cap V'$ e, para $x \in C'$, consideramos conjunto

$$\Delta'_T(x) = \Delta'_T(m, x) = \Delta'_T(m) \cap \mathbb{D}(x).$$

Proposição 5.6. *Existe $\delta' = \delta'(m) > 0$, tal que se x_1, x_2 estão em C' com $\varphi^m(x_1) \neq \varphi^m(x_2)$ e $\varphi^{2m}(x_1) = \varphi^{2m}(x_2)$, então os subconjuntos $\rho(T^{2m}(\mathbb{D}(x_1)))$ e $\rho(T^{2m}(\mathbb{D}(x_2)))$ de $\rho(\mathbb{D}(\varphi^{2m}(x_1))) = \rho(\mathbb{D}(\varphi^{2m}(x_2)))$ são disjuntos e sua distância é no mínimo δ'.*

Demonstração. Seja j o menor expoente tal que $\varphi^j(x_1) = \varphi^j(x_2)$. Assim, $m < j \leq 2m$. Como $k = k(m) < m$, temos bem definidos os pontos $x_1^* = \varphi^{j-k}(x_1)$ e $x_2^* = \varphi^{j-k}(x_2)$. Sendo $\varphi^j(C') \subset \mathbf{F}$, $\forall j \geq 0$, segue que x_1^* e x_2^* estão em $\mathbf{F}$. Aplicando o Corolário 5.4, existe $\delta = \delta(m) > 0$ tal que

$$d(\rho(T^k(\mathbb{D}(x_1^*))), \rho(T^k(\mathbb{D}(x_2^*)))) \geq \delta$$

$$d(\rho(T^k(\mathbb{D}(\varphi^{j-k}(x_1)))), \rho(T^k(\mathbb{D}(\varphi^{j-k}(x_2))))) \geq \delta.$$

Uma vez que vale

$$\rho(T^j(\mathbb{D}(x))) = \rho(T^k(T^{j-k}(\mathbb{D}(x)))) \subset \rho(T^k(\mathbb{D}(\varphi^{j-k}(x)))),$$

podemos escrever

$$d(\rho(T^j(\mathbb{D}(x_1))), \rho(T^j(\mathbb{D}(x_2)))) \geq \delta.$$

Note agora que pela conformalidade $D_z\nu$ numa mesma vertical, temos

$$d(\rho(T^j(\mathbb{D}(x_1))), \rho(T^j(\mathbb{D}(x_2)))) \leq (\lambda_{min})^{-(2m-j)} d(\rho(T^{2m}(\mathbb{D}(x_1))), \rho(T^{2m}(\mathbb{D}(x_2)))).$$

Daí,

$$d(\rho(T^{2m}(\mathbb{D}(x_1))), \rho(T^{2m}(\mathbb{D}(x_2)))) \geq \delta(\lambda_{min})^{2m}(\lambda_{min})^{-j} > \delta(\lambda_{min})^{2m}(\lambda_{min})^{-m} = \delta(\lambda_{min})^m.$$

Tome então $\delta' = \delta(\lambda_{min})^m$.

□

Proposição 5.7. *Se $x_1 \neq x_2$ estão em C' e $\varphi^m(x_1) = \varphi^m(x_2)$, então a distância entre $\rho(T^m(\Delta'_T(x_1)))$ e $\rho(T^m(\Delta'_T(x_2)))$ é no mínimo δ' e se $x \in C'$, então $\rho|_{\Delta'_T(x)}$ é injetora.*

Demonstração. Como $\varphi^m(C') = C'$, existem $y_1, y_2 \in C'$ tais que $\varphi^m(y_1) = x_1$ e $\varphi^m(y_2) = x_2$. Assim, teremos $\varphi^{2m}(y_1) = \varphi^{2m}(y_2)$ e usando a Proposição 5.6, existe $\delta' > 0$ tal que

$$d(\rho(T^{2m}(\mathbb{D}(y_1))), \rho(T^{2m}(\mathbb{D}(y_2)))) \geq \delta'.$$

Como $\rho(T^m(\Delta'_T(\varphi^m(y_1)))) \subset \rho(T^{2m}(\mathbb{D}(y_1)))$ e $\rho(T^m(\Delta'_T(\varphi^m(y_2)))) \subset \rho(T^{2m}(\mathbb{D}(y_2)))$, segue que

$$d(\rho(T^m(\Delta'_T(x_1))), \rho(T^m(\Delta'_T(x_2)))) \geq \delta'.$$

Agora sejam $u_1 \neq u_2$ em $\Delta'(x)$, com $x \in C'$. Considere j_0 o menor valor inteiro tal que $x_1 = \pi(T^{-j_0 m}(u_1)) \neq \pi(T^{-j_0 m}(u_2)) = x_2$. Dessa forma, temos

$$\varphi^m(x_1) = \pi(T^{-(j_0-1)m}(u_1)) = \pi(T^{-(j_0-1)m}(u_2)) = \varphi^m(x_2).$$

Logo, aplicando o que já foi mostrado, podemos escrever que

$$d(\rho(T^{-(j_0-1)m}(u_1)), \rho(T^{-(j_0-1)m}(u_2))) \geq \delta',$$

e com isso,

$$\rho(T^{-(j_0-1)m}(u_1) \neq \rho(T^{-(j_0-1)m}(u_2)).$$

Defina $\hat{T}^{(j_0-1)m} : \rho(\Delta'_T(\varphi^m(x_1))) \to \rho(\Delta'_T(x))$, dada por

$$\hat{T}^{(j_0-1)m}(\rho(u)) = \rho(T^{(j_0-1)m}(u)),$$

em que $u \in \Delta'_T(\varphi^m(x_1))$. Note que $\hat{T}^{(j_0-1)m}$ é uma bijeção conforme e assim, vale que

$$\begin{aligned}
&\rho(T^{-(j_0-1)m}(u_1) \neq \rho(T^{-(j_0-1)m}(u_2)) \\
\implies &\hat{T}^{(j_0-1)m}(\rho(T^{-(j_0-1)m}(u_1)) \neq \hat{T}^{(j_0-1)m}(\rho(T^{-(j_0-1)m}(u_2))) \\
\implies &\rho(T^{(j_0-1)m}(T^{-(j_0-1)m}(u_1)) \neq \rho(T^{(j_0-1)m}(T^{-(j_0-1)m}(u_2)) \\
\implies &\rho(u_1) \neq \rho(u_2)
\end{aligned}$$

□

Seja $x' = \tau(\underline{a}') \in C'(m)$, com $\underline{a}' \in \mathcal{E}'_{\infty m}$ fixado. Definimos os conjuntos

$$A_{\underline{a}',um} = \{\underline{a} \in \mathcal{E}_{um} : \underline{a}, \underline{a}' \in \mathcal{E}_{\infty m}\}$$

$$A^*_{\underline{a}',um} = \{\underline{a} \in \mathcal{E}'_{um} : \underline{a}, \underline{a}' \in \mathcal{E}'_{\infty m}\}.$$

Temos $A^*_{\underline{a}',um} = A_{\underline{a}',um} \cap \mathcal{E}'_{um}$. Assim, vale que

$$\#(\mathcal{E}_{um}) \geq \#(A_{\underline{a}',um}) + \#(\mathcal{E}'_{um}) - \#(A^*_{\underline{a}',um}),$$

daí,

$$sN^{um-1} \geq N^{um} + (sN^{m-1} - N^{2\mu m})(N^m - N^{2\mu m})^{u-1} - \#(A^*_{\underline{a}',um}).$$

Ou seja,

$$\#(A^*_{\underline{a}',um}) \geq N^{um} + (sN^{m-1} - N^{2\mu m})(N^m - N^{2\mu m})^{u-1} - sN^{um-1}.$$

Para cada $\underline{a} \in A^*_{\underline{a}',um}$, associamos um subconjunto de $\rho(\mathbb{D}(x'))$ dado por

$$I_{\underline{a}} = \rho(T^{um}(\mathbb{D}(\tau(\underline{a}, \underline{a}')))).$$

Note que

$$\rho(\Delta'_T(x')) = \bigcap_{u=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\underline{a} \in A^*_{\underline{a}',um}} I_{\underline{a}} \right).$$

Proposição 5.8. *Se $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$ estão em $A^*_{\underline{a}',um}$, com $u \geq 2$, e vale que $\sigma^{(j-1)m}(\underline{a}_1) \neq \sigma^{(j-1)m}(\underline{a}_2)$, $\sigma^{jm}(\underline{a}_1) = \sigma^{jm}(\underline{a}_2)$ para algum $j \in \{2, ..., u\}$, então*

$$d(I_{\underline{a}_1}, I_{\underline{a}_2}) \geq \left(\frac{\hat{K}_1^{-1}\delta'}{2}\right) \operatorname{diam}(I_{\sigma^{jm}(\underline{a}_1)})$$

para algum inteiro $\hat{K}_1 > 1$.

Demonstração. Temos $I_{\sigma^{jm}(\underline{a}_1)} = I_{\sigma^{jm}(\underline{a}_2)} = \rho(T^{(u-j)m}(\mathbb{D}(\tau(\sigma^{jm}(\underline{a}_1), \underline{a}'))))$. Considere $u_1, u_2 \in \mathbb{D}(\tau(\sigma^{jm}(\underline{a}_1), \underline{a}')))$ tais que $\operatorname{diam}(I_{\sigma^{jm}(\underline{a}_1)}) = d(\rho(T^{(u-j)m}(u_1), \rho(T^{(u-j)m}(u_2)))$. Assim, pela desigualdade do valor médio, podemos escrever

$$\operatorname{diam}(I_{\sigma^{jm}(\underline{a}_1)}) \leq \left(\prod_{k=1}^{(u-j)m-1} \lambda_2(t_k)\right) d(u_1, u_2),$$

em que $t_k \in \rho(T^{(u-j)m-k}(\mathbb{D}(\tau(\sigma^{jm}(\underline{a}_1), \underline{a}'))))$. Como $d(u_1, u_2) \leq 2$, segue que

$$\operatorname{diam}(I_{\sigma^{jm}(\underline{a}_1)}) \leq 2\left(\prod_{k=1}^{(u-j)m-1} \lambda_2(t_k)\right),$$

ou seja,

$$\left(\prod_{k=1}^{(u-j)m-1} \lambda_2(t_k)\right) \geq \left(\frac{1}{2}\right) \operatorname{diam}(I_{\sigma^{jm}(\underline{a}_1)}). \tag{5.10}$$

Sejam agora $x_1 = \pi(\mathbb{D}(\tau(\sigma^{(j-1)m}(\underline{a}_1), \underline{a}')))$ e $x_2 = \pi(\mathbb{D}(\tau(\sigma^{(j-1)m}(\underline{a}_2), \underline{a}')))$. Como $\sigma^{(j-1)m}(\underline{a}_1) \neq \sigma^{(j-1)m}(\underline{a}_2)$, temos $x_1 \neq x_2$ e como $\sigma^{jm}(\underline{a}_1) = \sigma^{jm}(\underline{a}_2)$, temos $\varphi^m(x_1) = \varphi^m(x_2)$. Assim, aplicando a Proposição 5.6, podemos concluir que

$$d(\rho(T^m(\mathbb{D}(\tau(\sigma^{(j-1)m}(\underline{a}_1), \underline{a}')))), \rho(T^m(\mathbb{D}(\tau(\sigma^{(j-1)m}(\underline{a}_2), \underline{a}'))))) \geq \delta',$$

e com isso teremos

$$d(\rho(T^{jm}(\mathbb{D}(\tau(\underline{a}_1, \underline{a}')))), \rho(T^{jm}(\mathbb{D}(\tau(\underline{a}_2, \underline{a}'))))) \geq \delta'.$$

Usando novamente a desigualdade do valor médio e a conformalidade de $D_z\nu$, temos

$$d(I_{\underline{a}_1}, I_{\underline{a}_2}) \geq \left(\prod_{k=1}^{(u-j)m-1} \lambda_2(w_k)\right) d(\rho(T^{jm}(\mathbb{D}(\tau(\underline{a}_1, \underline{a}')))), \rho(T^{jm}(\mathbb{D}(\tau(\underline{a}_2, \underline{a}'))))),$$

em que $w_k \in \rho(T^{(u-j)m-k}(\mathbb{D}(\tau(\sigma^{jm}(\underline{a}_1), \underline{a}'))))$. Então, vale que

$$d(I_{\underline{a}_1}, I_{\underline{a}_2}) \geq \left(\prod_{k=1}^{(u-j)m-1} \lambda_2(w_k)\right) \delta', \tag{5.11}$$

e observando (5.10) e (5.11), temos

$$\frac{d(I_{\underline{a}_1}, I_{\underline{a}_2})}{\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{diam}(I_{\sigma^{jm}(\underline{a}_1)})} \geq \prod_{k=1}^{(u-j)m-1}\left(\frac{\lambda_2(w_k)}{\lambda_2(t_k)}\right)\delta'.$$

Aplicando o Corolário 3.1, existe $\hat{K}_1 > 1$ tal que

$$\prod_{k=1}^{(u-j)m-1}\left(\frac{\lambda_2(w_k)}{\lambda_2(t_k)}\right) \geq \hat{K}_1^{-1}.$$

Portanto,

$$\frac{d(I_{\underline{a}_1}, I_{\underline{a}_2})}{\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{diam}(I_{\sigma^{jm}(\underline{a}_1)})} \geq \hat{K}_1^{-1}\delta',$$

isto é,

$$d(I_{\underline{a}_1}, I_{\underline{a}_2}) \geq \delta'\left(\frac{\hat{K}_1^{-1}}{2}\right)\operatorname{diam}(I_{\sigma^{jm}(\underline{a}_1)}).$$

□

Teorema 5.3. *Para cada inteiro m suficientemente grande existe um conjunto de Cantor $C' = C'(m)$ em $\mathbb{T}^l$ e um subconjunto $\Delta'_T = \Delta'_T(m)$ de $\pi^{-1}(C'(m)) \cap \Delta_T$ tal que*

$$\liminf_{m\to\infty}(\inf_{x'\in C'(m)}(\dim_H \rho(\Delta'_T(x')))) \geq s_0 p,$$

onde $\Delta'_T(x') = \Delta'_T(m) \cap \mathbb{D}(x')$. Além disso, a restrição $\rho|_{\Delta'_T(x')}$ é injetora.

Demonstração. Considere m grande o suficiente para que nas construções dos conjuntos $\mathcal{E}'_{um}$, $u = 1, ..., \infty$, $C'(m)$ e $\Delta'_T(m)$ sejam válidas as Proposições 5.6, 5.7 e 5.8. Fixemos em $C'(m)$ um x'_m arbitrário e considere a sequencia correspondente $\underline{a}'_m$ em $\mathcal{E}'_{\infty m}$ tal que $x'_m = \tau(\underline{a}'_m)$. Note que falta apenas demonstrar a desigualdade

$$\liminf_{m\to\infty}(\inf_{x'\in C'(m)}(\dim_H \rho(\Delta'_T(x')))) \geq s_0 p.$$

Uma vez que x'_m é escolhido de maneira arbitrária em $C'(m)$, basta verificar que

$$\liminf_{m\to\infty}(\dim_H \rho(\Delta'_T(x'_m))) \geq s_0 p.$$

Para isto, provaremos alguns lemas a seguir.

Denotaremos, para $x \in C'(m)$, o seguinte conjunto

$$I_{x,\underline{a}} := \tilde{T}^{um}_{[\underline{a}\underline{a}']_{um}(x)}(\rho_2(\mathbb{D}([\underline{a}\underline{a}']_{um}(x)))),$$

com $\underline{a}' \in \mathcal{E}'_{\infty m}$ e $\tau(\underline{a}') = x$ e $\underline{a} \in A_{\underline{a}',um}$. Defina os números reais positivos $\mathbf{d}(x,m)$, $\mathbf{d}^*(x,m)$ e $\tilde{\mathbf{d}}(x,m)$ por

$$\sum_{\underline{a}\in A_{\underline{a}',m}} (\mathrm{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{\mathbf{d}(x,m)} = 1 \tag{5.12}$$

$$\sum_{\underline{a}\in A^*_{\underline{a}',m}} (\mathrm{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{\mathbf{d}^*(x,m)} = 1 \tag{5.13}$$

Temos que $\mathbf{d}(x,m) \geq \mathbf{d}^*(x,m)$ e que neste caso $I_{x,\underline{a}} := \tilde{T}^m_{[\underline{a}\underline{a}']_m(x)}(\rho_2(\mathbb{D}([\underline{a}\underline{a}']_m(x))))$. Uma vez que estamos fixando $x \in C'(m)$, vamos denotar apenas por $\mathbf{d}(m)$ e $\mathbf{d}^*(m)$.

Lema 5.3. *Sejam $\gamma_{m,j}$ $(m = 1, 2, ...;\ j = 1, ..., j(m))$ números reais positivos tais que*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{1\leq j\leq j(m)} \gamma_{m,j} = 0.$$

Se os números $p^*(m)$ são determinados por

$$\sum_{j=1}^{j(m)} \gamma_{m,j}^{p^*(m)} = 1$$

e se $p^{**}(m)$ são números tais que

$$c_1 < \sum_{j=1}^{j(m)} \gamma_{m,j}^{p^*(m)} < c_2,$$

onde $0 < c_1 < c_2$ e c_1, c_2 não dependem de m, então

$$\lim_{m\to\infty} (p^*(m) - p^{**}(m)) = 0.$$

Demonstração do Lema 5.3. Suponha, sem perda de generalidade, que

$$\limsup_{m\to\infty}(p^*(m) - p^{**}(m)) > 0 \ \ (\text{o caso } \liminf < 0 \text{ é análogo}).$$

Assim, para m suficientemente grande, $p^*(m) - p^{**}(m) > d_0$ para algum $d_0 > 0$. Podemos considerar ainda m grande o suficiente de modo que tenhamos $\gamma_{m,j} < 1$. Logo, $\gamma_{m,j}^{p^*(m)} < \gamma_{m,j}^{p^{**}(m)+d_0}$ e com isso, temos

$$1 = \sum_{j=1}^{j(m)} \gamma_{m,j}^{p^*(m)} < \sum_{j=1}^{j(m)} \gamma_{m,j}^{p^{**}(m)} \gamma_{m,j}^{d_0} \leq \left(\sup_{1\leq j\leq j(m)} \gamma_{m,j}\right)^{d_0} \left(\sum_{j=1}^{j(m)} \gamma_{m,j}^{p^{**}(m)}\right) < \left(\sup_{1\leq j\leq j(m)} \gamma_{m,j}\right)^{d_0} c_2.$$

O que é uma contradição, pois

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{1\leq j\leq j(m)} \gamma_{m,j} = 0.$$

□

Lema 5.4. $\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{d}(m) = s_0 p$. *Onde s_0 é dado pela Proposição 3.3.*

Demonstração do Lema 5.4. Suponha, por contradição, que $\limsup_{m\to\infty} \mathbf{d}(m) > s_0 p$. Isto significa que existem $d_0 > 0$ e infinitos valores de m tais que $\mathbf{d}(m) - s_0 p > d_0 > 0$, isto é, $s_0 p < \mathbf{d}(m) - d_0$. Uma vez que $\operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}}) < 1$, temos

$$(\operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{s_0 p} > (\operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{\mathbf{d}(m)-d_0}.$$

Logo,

$$\sum_{\underline{a}\in A_{\underline{a}',m}} (\operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{s_0 p} > \sum_{\underline{a}\in A_{\underline{a}',m}} (\operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{\mathbf{d}(m)} (\operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{-d_0}.$$

Note agora que $(\operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{-d_0} \geq (\lambda_{max})^{-d_0 m}$. Assim,

$$\sum_{\underline{a}\in A_{\underline{a}',m}} (\operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{s_0 p} > \left(\sum_{\underline{a}\in A_{\underline{a}',m}} (\operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{\mathbf{d}(m)} \right) (\lambda_{max})^{-d_0 m} = (\lambda_{max})^{-d_0 m}.$$

Portanto, vale que

$$\frac{1}{m} \log \left(\sum_{\underline{a}\in A_{\underline{a}',m}} (\operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{s_0 p} \right) > -d_0 \log(\lambda_{max}).$$

Devido ao fato da pressão $P(\sigma, s_0\phi) = 0$ (ver 3.4), podemos concluir que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \left(\sum_{\underline{a}\in A_{\underline{a}',m}} (\operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{s_0 p} \right) = 0.$$

Segue então que $-d_0 \log(\lambda_{max}) < 0$, o que é absurdo. Logo, devemos ter

$$\limsup_{m\to\infty} \mathbf{d}(m) \leq s_0 p.$$

De modo análogo, concluímos também que $\liminf_{m\to\infty} \mathbf{d}(m) \geq s_0 p$.

□

Lema 5.5. *Para cada $u = 1, 2, ...,$ vale que* $\lim_{m\to\infty} (\boldsymbol{d}(m) - \boldsymbol{d}^*(m)) = 0$

Demonstração do Lema 5.5. Como $\mathbf{d}(m) \geq \mathbf{d}^*(m)$, vamos supor apenas que

$$\limsup_{m\to\infty} (\mathbf{d}(m) - \mathbf{d}^*(m)) > 0$$

e mostraremos que isso gera uma contradição. Usando o Lema 5.3 e a suposição acima, concluímos que

$$\liminf_{m\to\infty} \sum_{\underline{a}\in A^*_{\underline{a}',m}} (\operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{(\mathbf{d}(m))} = 0. \tag{5.14}$$

Usando então (5.12), temos

$$\limsup_{m\to\infty} \sum_{\underline{a}\in A_{\underline{a}',m}\setminus A^*_{\underline{a}',m}} (\mathrm{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{(\mathbf{d}(m))} = 1. \tag{5.15}$$

Note que $\#(A_{\underline{a}',m}\setminus A^*_{\underline{a}',m}) = \#(A_{\underline{a}',m}) - \#(A^*_{\underline{a}',m})$ e como $\#(A_{\underline{a}',m}) \leq N^m$ e

$$\#(A^*_{\underline{a}',m}) \geq N^m + (sN^{m-1} - N^{2\mu m}) - sN^{m-1}, \tag{5.16}$$

segue que

$$\#(A_{\underline{a}',m}\setminus A^*_{\underline{a}',m}) \leq N^m - N^m - (sN^{m-1} - N^{2\mu m}) + sN^{m-1} = N^{2\mu m}$$

Assim, usando (5.16) e notando que $(\mathrm{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{(\mathbf{d}(m))} \leq (\lambda_{max})^{m(\mathbf{d}(m))}$, temos

$$1 \leq \limsup_{m\to\infty} \left(N^{2\mu m}(\lambda_{max})^{m(\mathbf{d}(m))}\right).$$

Logo, para m grande, temos

$$0 \leq (2\mu m)\log(N) + (m\mathbf{d}(m))\log(\lambda_{max}).$$

Com isso, chegamos em

$$\mathbf{d}(m) \leq \frac{2\mu\log(N)}{-\log(\lambda_{max})}.$$

Como $\mu \in \left(\mu_0, \dfrac{\log\lambda_{max}}{2\log\lambda_{min}}\right)$, temos:

$$\liminf_{m\to\infty} \mathbf{d}(m) < \frac{\log(N)}{-\log(\lambda_{min})}. \tag{5.17}$$

Agora, usando 5.13 , 5.16 e notando que $\mathrm{diam}(I_{x,\underline{a}}))^{(\mathbf{d}^*(m))} \geq (\lambda_{min})^{um(\mathbf{d}^*(m))}$, temos

$$\begin{aligned} 1 &\geq \left(N^m + (sN^{m-1} - N^{2\mu m}) - sN^{m-1}\right)(\lambda_{min})^{m(\mathbf{d}^*(m))} \\ &= N^m\left(1 - N^{(2\mu-1)m}\right)(\lambda_{min})^{m(\mathbf{d}^*(m))}. \end{aligned}$$

Logo,

$$0 \geq (m)\log(N) + \log\left(1 - N^{(2\mu-1)m}\right) + (m(\mathbf{d}^*(m)))\log(\lambda_{min})$$

e com isso,

$$\mathbf{d}^*(m) \geq \frac{\log(N)}{-\log(\lambda_{min})} + \frac{\log\left(1 - N^{(2\mu-1)m}\right)}{-(m)\log(\lambda_{min})}.$$

Portanto,

$$\liminf_{m\to\infty} \mathbf{d}^*(m) \geq \frac{\log(N)}{-\log(\lambda_{min})}. \tag{5.18}$$

Ou seja,

$$\frac{\log(N)}{-\log(\lambda_{min})} \leq \liminf_{m\to\infty} \mathbf{d}^*(m) \leq \liminf_{m\to\infty} \mathbf{d}(m) < \frac{\log(N)}{-\log(\lambda_{min})},$$

o que é absurdo.

□

Lema 5.6. *Para cada $\underline{a} \in A^*_{\underline{a}',um}$ e $x \in C'(m)$ considere o subconjunto fechado $I_{x,\underline{a}}$ de $\rho_2(\mathbb{D}(x))$ tal que vale o seguinte:*

1. $I_{x,\underline{a},\tilde{\underline{a}}} \subset I_{x,\underline{a}}$, $\forall\ \underline{a}, \tilde{\underline{a}} \in A^*_{\underline{a}',(u+1)m}$;
2. $\operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}})$ *satisfaz* $\left(\prod_{k=1}^{um} \lambda_2(t_k)\right) \operatorname{diam}(\rho_2(\mathbb{D}([\underline{aa}']_{um}(x)))) \leq \operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}}) \leq \left(\prod_{k=0}^{um} \lambda_2(w_k)\right) diam(\rho_2(\mathbb{D}([\underline{aa}']_{um}(x))))$ *em que* $t_k, w_k \in \rho_2(\tilde{T}^{um-k}(\mathbb{D}([\underline{aa}']_{um}(x))))$.;
3. *Existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer $\underline{a} = (\underline{a_1}, ..., \underline{a_u})$, $\underline{b} = (\underline{b_1}, ..., \underline{b_u}) \in A^*_{\underline{a}',um}$, com $u \geq 2$, se o maior índice j tal que $(\underline{a_1}, ..., \underline{a_j}) = (\underline{b_1}, ..., \underline{b_j})$ é menor ou igual a $u-2$, então vale que $I_{x,\underline{a}} \cap I_{x,\underline{b}} = \emptyset$ e*

$$d(I_{x,\underline{a}}, I_{x,\underline{b}}) \geq \delta(\operatorname{diam}(I_{x,\pi_{jm}(\underline{a})})).$$

Sob as condições acima, temos que para o conjunto $C_*(x) = \bigcap_{u\geq 1} \left(\bigcup_{\underline{a} \in A^*_{\underline{a}'_m,um}} I_{x,\underline{a}} \right)$ vale

$$\dim_H (C_*(x)) \geq \boldsymbol{d}^*(m).$$

Demonstração do Lema 5.6. Considere $\#(A^*_{\underline{a}'_m,m})$ subconjuntos fechados e disjuntos $J^*_{\underline{a}_i}$, com $\underline{a}_i \in A^*_{\underline{a}'_m,m}$, em $\rho_2(\mathbb{D}(x))$ tais que

$$\operatorname{diam}(J^*_{\underline{a}_i}) = \operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}_i}).$$

Obtemos os conjuntos $J^*_{\underline{a}_i}$ por uma translação dos $I_{x,\underline{a}_i}$ de modo que eles sejam disjuntos. Definimos recursivamente em u os conjuntos $J^*_{\underline{a}}$ por uma translação dos conjuntos $I_{x,\underline{a}_i}$. Na etapa $u+1$, para cada $\underline{a} = (\underline{a}_1, ..., \underline{a}_u) \in A^*_{\underline{a}'_m,um}$, definimos o conjunto $J^*_{\underline{a},\underline{b}} := J^*_{\underline{a}_1\underline{a}_2\cdots\underline{a}_u,\underline{b}}$ fazendo uma translação do conjunto $I_{x,\underline{a},\underline{b}}$ de modo que $J^*_{\underline{a},\underline{b}} \subset J^*_{\underline{a}}$ e $J^*_{\underline{a},\underline{b}_1} \cap J^*_{\underline{a},\underline{b}_2} = \emptyset$. Por ser uma translação, temos que $J^*_{\underline{a}}$ é fechado e

$$\operatorname{diam}(J^*_{\underline{a}}) = \operatorname{diam}(I_{x,\underline{a}}), \quad \underline{a} \in A_{\underline{a}',um}.$$

Seja então

$$C^*(x) = \bigcap_{u\geq 1} \left(\bigcup_{\underline{a} \in A^*_{\underline{a}'_m,um}} J^*_{\underline{a}} \right).$$

Afirmação 5.1. $\dim_H (C^*(x)) \geq \boldsymbol{d}^*(m)$, *para todo m suficientemente grande.*

Suponha que $\dim_H(C^*(x)) < \mathbf{d}^*(m)$ e tome $d_0 > 0$ tal que $\dim_H(C^*(x)) < d_0 < \mathbf{d}^*(m))$ para infinitos valores de m. Tome m_0 e $\kappa > 0$ tais que

$$\sum_{\underline{a}\in A^*_{\underline{a}',m}} \left(\prod_{k=1}^{m} \lambda_2(w_k)\right)^{d_0} > \frac{1}{K} e^{\kappa m} > 1 \tag{5.19}$$

para infinitos valores $m \geq m_0$, onde K é uma constante dada pelo Corolário 3.1 e w_k são pontos em $\rho_2(\tilde{T}^{m-k}(\mathbb{D}([\underline{aa}']_m(x))))$. Existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de $C^*(x)$ tal que, para $\epsilon > 0$, vale que

$$\sum_{U\in\ \mathcal{U}} [diam(U)]^{d_0} < \epsilon^{d_0} = \epsilon_0.$$

Considere $\epsilon > 0$ pequeno de modo que cada $U\ \in \mathcal{U}$ intersecte no máximo um $J^*_{\underline{a}_i}$. Por compacidade, podemos supor ainda que $\mathcal{U}$ é uma cobertura finita. Defina

$$\mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}_i}} = \{U\ \in \mathcal{U} : U \cap J^*_{\underline{a}_i} \neq \emptyset\}.$$

Note que $\mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}_i}}$ é uma cobertura de $J^*_{\underline{a}_i}$ e que $\mathcal{U}$ é a união disjunta desses conjuntos $\mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}}}$. Seja agora

$$F^{-m}(\mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}_i}}) := \{F^{-m}(V) : V \in \mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}_i}}\}$$

em que F^{-m} denota a composição de $(\tilde{T}^m|_{\rho_2(\mathbb{D}([\underline{a}_i](x))})^{-1}$ com a inversa da translação usada para definir $J^*_{\underline{a}_i}$ e com a identificação natural de $\rho_2(\mathbb{D}([\underline{a}_i(x)]))$ com $\rho_2(\mathbb{D}(x))$. Observe que cada $F^{-m}(\mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}_i}})$ é uma cobertura de $C^*(x)$. Note agora que

$$\sum_{V\in\ F^{-m}(\mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}_i}})} [\mathrm{diam}(V)]^{d_0} = \sum_{U\in\ \mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}_i}}} [\mathrm{diam}(F^{-m}(U))]^{d_0}$$

$$\leq \sum_{U\in\ \mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}_i}}} (\prod_{k=1}^{m} \lambda_2(w_k(\underline{a}_i, U)))^{-d_0} [\mathrm{diam}(U)]^{d_0}.$$

Pelo Corolário 3.1, podemos tomar w_k independente de $\underline{a}_i$ e U, de forma que

$$(\prod_{k=1}^{m} \lambda_2(w_k(\underline{a}_i, U))) \geq K^{-1}(\prod_{k=1}^{m} \lambda_2(w_k)).$$

Assim,

$$\sum_{U\in\mathcal{U}} [\mathrm{diam}(U)]^{d_0} = \sum_{J^*_{\underline{a}_i}} \sum_{U\in\ \mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}_i}}} [\mathrm{diam}(U)]^{d_0} \geq \sum_{J^*_{\underline{a}_i}} K \left(\prod_{k=1}^{m} \lambda_2(w_k)\right)^{d_0} \sum_{V\in\ F^{-m}(\mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}_i}})} [\mathrm{diam}(V)]^{d_0}.$$

Se supormos que

$$\sum_{V\in\ F^{-m}(\mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}_i}})} [\mathrm{diam}(V)]^{d_0} \geq \sum_{U\in\mathcal{U}} [\mathrm{diam}(U)]^{d_0},\ \forall\ J^*_{\underline{a}_i},$$

então vale que

$$\sum_{U\in\mathcal{U}}[\mathrm{diam}(U)]^{d_0} \geq K\sum_{J^*_{\underline{a}_i}}\left(\prod_{k=1}^{m}\lambda_2(w_k)\right)^{d_0}\sum_{U\in\mathcal{U}}[\mathrm{diam}(U)]^{d_0}.$$

De onde podemos concluir que

$$\sum_{U\in\mathcal{U}}[\mathrm{diam}(U)]^{d_0} \geq K\sum_{\underline{a}\in A^*_{\underline{a}',m}}\left(\prod_{k=1}^{m}\lambda_2(w_k)\right)^{d_0}\sum_{U\in\mathcal{U}}[\mathrm{diam}(U)]^{d_0}. \tag{5.20}$$

Segue, por (5.19), que

$$K\sum_{\underline{a}\in A^*_{\underline{a}',m}}\left(\prod_{k=1}^{m}\lambda_2(w_k)\right)^{d_0} > K\frac{1}{K}e^{\kappa m} > 1,$$

o que é uma contradição . Portanto, existe $J^*_{\underline{a}_i}$ tal que

$$\sum_{V\in\ F^{-m}(\mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}_i}})}[\mathrm{diam}(V)]^{d_0} < \sum_{U\in\mathcal{U}}[\mathrm{diam}(U)]^{d_0} < \epsilon_0.$$

Observe que temos $\#(F^{-m}(\mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}_i}})) = \#(\mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}_i}}) < \#(\mathcal{U})$. Repetindo o processo anterior, agora para a cobertura $\tilde{\mathcal{U}} = F^{-um}(\mathcal{U}_{J^*_{\underline{a}_i}})$, obteremos uma cobertura $\tilde{\tilde{\mathcal{U}}}$ de $C^*(x)$ com $\#(\tilde{\tilde{\mathcal{U}}}) < \#(\tilde{\mathcal{U}})$ onde ainda vale

$$\sum_{U\in\ \tilde{\tilde{\mathcal{U}}}}[\mathrm{diam}(U)]^{d_0} < \epsilon_0.$$

Continuando este processo um número finito de vezes chegaremos a uma cobertura com 0 elementos de algum $C^*(x)$, o que é um absurdo. Portanto concluímos a Afirmação 5.1 .

Vamos agora encontrar uma transformação $h^* : C_* \to C^*$ que seja Lipschitz contínua e com isso teremos

$$\dim_H(C_*) \geq \dim_H(h^*(C_*)) = \dim_H(C^*) \geq \mathbf{d}^*(m).$$

Considere $c_* \in C_*$. Então para todo $u = 1, 2, ...,$ existe $\underline{a} \in A_{\underline{a}'_m,um}$ tal que $c_* \in I_{x,\underline{a}}$. Definiremos $h^*(c_*) = \bigcap_{u=1}^{\infty} J^*_{\underline{a}}$. Como, para cada $u = 1, 2..., J^*_{\underline{a}}$ é uma sequencia encaixada de compactos e $\lim_{u\to\infty}\mathrm{diam}(J^*_{\underline{a}}) = 0$, temos que $h^*(c_*)$ está bem definido como um único ponto. Note que h^*, assim definida, é uma bijeção entre C_* e C^*. Tome $c_* \neq c^*$ em C_* e considere u_0 o maior índice tal que $h^*(c_*)$ e $h^*(c^*)$ estão no mesmo $J^*_{\underline{a}_1,\underline{a}_2,...,\underline{a}_{u_0}}$. Então,

$$dist(h^*(c_*), h^*(c^*)) \leq \mathrm{diam}(J^*_{\underline{a}_1,\underline{a}_2,...,\underline{a}_{u_0}}).$$

Mas, pela hipótese (3) do enunciado do Lema 5.6, temos

$$d(c_*, c^*) \geq \delta(\operatorname{diam}(I_{x,\pi_{u_0 m}(\underline{a})})) = \delta \operatorname{diam}(J^*_{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_{u_0}}).$$

Portanto

$$d(h^*(c_*), h^*(c^*)) \leq (\delta)^{-1} d(c_*, c^*),$$

o que concluí o Lema 5.6.

□

Agora, para concluir a prova do Teorema 5.3, considere para cada $\underline{a} \in A^*_{\underline{a'_m},um}$, os conjuntos

$$I_{\underline{a}} = \rho(T^{um}(\mathbb{D}(\tau(\underline{a}, \underline{a}'_m)))) \quad e \quad \rho(\Delta'_T(x'_m)) = \bigcap_{u=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\underline{a} \in A^*_{\underline{a}'_m, um}} I_{\underline{a}} \right).$$

Observe que os $I_{\underline{a}}$ tem as propriedades 1 e 2 do Lema 5.6 e, pela Proposição 5.8, também vale a propriedade 3. Assim, usando o Lema 5.6, obtemos

$$\dim_H(\rho(\Delta'_T(x'_m))) \geq \mathbf{d}^*(m), \quad \text{para m suficientemente grande.}$$

Passando ao limite,

$$\liminf_{m\to\infty} (\dim_H(\rho(\Delta'_T(x'_m)))) \geq \liminf_{m\to\infty} (\mathbf{d}^*(m)).$$

Como

$$\liminf_{m\to\infty} (\mathbf{d}^*(m)) \geq \liminf_{m\to\infty} (\mathbf{d}^*(m) - \mathbf{d}(m)) + \liminf_{m\to\infty} (\mathbf{d}(m)),$$

e usando os Lemas 5.4 e 5.5, segue que

$$\liminf_{m\to\infty} (\dim_H(\rho(\Delta'_T(x'_m)))) \geq s_0 p.$$

Como queríamos demonstrar.

□

5.4.1 Holonomia instável

Necessitamos considerar uma aplicação $\tilde{h} : \Delta'_T(x') \to \Delta_T(x)$ tal que $\tilde{h}(t') \in W^u_{\text{loc}}(t') \cap \Delta_T(x)$, tal aplicação é a holonomia instável. Vamos fazer algumas considerações para que está bem definida. Considere m inteiro, grande o suficiente para que tenhamos os conjuntos e os resultados do Teorema 5.3. Sejam $x' \in C'(m)$ e $x \in \mathbb{T}^l$. Denote por $\mathrm{d} = d(x', x)$ e seja $x_c = x_c(x', x)$ o ponto médio do segmento que liga x' a x. Para cada

$t' \in \Delta'_T(x')$, tome $t_c \in \Delta_T(x_c) \cap W^u(t')$ tal que $t_c = t_c(x_c, t')$ é o ponto mais próximo de t' em $W^u(t')$. Defina, para $t^* \in V$ e $L \geq 0$, o seguinte conjunto

$$W^u_L(t^*) := \{t \in W^u(t^*) : d(\pi(T^{-n}(t)), \pi(T^{-n}(t^*))) \leq L, \ \forall\ n \geq 0\}.$$

Afirmação 5.2. $t' \in W^u_{\frac{d}{2}}(t_c)$.

Seja S^* um caminho em $W^u(t_c)$ ligando t' a t_c. Denote $x_0 = x_c$ e $t_0 = t_c$ e considere $T^{-n}(t_0)$ e $x^n_0 = \pi(T^{-n}(t_0))$. Tome agora o ramo inverso h^n_1 de φ^n definido na bola $\mathbf{B}(x_0, \gamma)$ tal que $h^n_1(x_0) = x^n_0$. Sejam então $x_1 \in \pi(S^*) \cap \mathbf{B}(x_0, \gamma)$ o ponto mais próximo de x', $d_1 = d(x_1, x_0)$ e t_1 ponto de $\mathbb{D}(x_1) \cap W^u(t_c)$ mais próximo de t_0 em $W^u(t_c)$. Denotando $t^n_1 = T^{-n}(t_1)$ e $x^n_1 = h^n_1 = \pi(t^n_1)$, note que $d(x^n_1, x^n_0) \leq \underline{\beta}^{-n} d_1$. De forma semelhante, tome o ponto $x_2 \in \pi(S^*) \cap \mathbf{B}(x_1, \gamma)$ mais próximo de x' e $t_2 \in \mathbb{D}(x_2) \cap W^u(t_c)$ o ponto mais próximo de t_0 em $W^u(t_c)$. Sejam $d_2 = d(x_2, x_1)$, $t^n_2 = T^{-n}(t_2)$, $x^n_2 = h^n_2(x_2) = \pi(t^n_2)$, onde h^n_2 é o ramo inverso de φ^n definido em $\mathbf{B}(x_1, \gamma)$. Logo, $d(x^n_2, x^n_1) \leq \underline{\beta}^{-n} d_2$. Repetindo este processo um número finito M de vezes, encontraremos $t' = t^n_M$ e $x^n_M = x' = h^n_M(x_M) = \pi(T^{-n}(t^n_M))$, com $d(x^n_M, x^n_{M-1}) \leq \underline{\beta}^{-n} d_M$, onde x_M, x_{M-1} e d_M são descritos como antes. Assim, teremos que

$$d(\pi(T^{-n}(t')), \pi(T^{-n}(t_c)) = d(x^n_M, x^n_0) \leq \sum_{j=1}^{M} \underline{\beta}^{-n} d_j.$$

Como $\displaystyle\sum_{j=1}^{M} d_j \leq \frac{d}{2}$ e $\underline{\beta}^{-n} < 1$, temos

$$d(\pi(T^{-n}(t')), \pi(T^{-n}(t_c)) \leq \frac{d}{2}.$$

Portanto, de fato, vale que $t' \in W^u_{\frac{d}{2}}(t_c)$.

Denote $\mathbf{B}(x_c, \frac{d}{2}) = \mathbf{B}$. Segue a seguinte afirmação:

Afirmação 5.3. $\pi(W^u_{\frac{d}{2}}(t_c)) = \mathbf{B}$.

De fato, seja $x \in \pi(W^u_{\frac{d}{2}}(t_c))$, então vale $d(\pi(T^{-n}(t^*)), \pi(T^{-n}(t_c))) \leq \dfrac{d}{2}$, para todo $n \geq 0$, em que $t^* \in \pi^{-1}(x) \cap W^{t_c}$. Em particular, para $n = 0$, temos $d(x_c, x) \leq \dfrac{d}{2}$. Por outro lado, tome $\tilde{x} \in \mathbf{B}(x_c, \frac{d}{2})$ e seja $\tilde{t} \in \Delta_T(\tilde{x}) \cap W^u(t_c)$ o ponto mais próximo de t_c em $W^u(t_c)$. Repetindo o argumento da Afirmação anterior com $\tilde{x}$ no lugar de x' e $\tilde{t}$ no lugar de t', teremos

$$d(\pi(T^{-n}(\tilde{t})), \pi(T^{-n}(t_c)) \leq \frac{d}{2},$$

isto é, $\tilde{t} \in W^u_{\frac{d}{2}}(t_c)$.

Note que x' e x formam um diâmetro de $\mathbf{B}$.

Observação 13. *O Teorema da Variedade Instável implica que existe um $\epsilon_* > 0$, pequeno o suficiente, tal que $W^u_{\epsilon_*}(t)$ é conexo e $W^u_{\epsilon_*}(t) \cap \mathbb{D}(x)$ é um único ponto, para todo $t \in \Delta_T$.*

Denote agora $\mathbf{B}_{t'} = W^u_{\frac{d}{2}}(t_c)$.

Proposição 5.9. *O conjunto $\mathbf{B}_{t'}$ é conexo por caminhos.*

Demonstração. Considere $t_0 \in \mathbf{B}_{t'}$ e tome $x_0 = \pi(t_0) \in \mathbf{B}$. Seja S o segmento de reta ligando x_0 a x_c e denote por $h^N(S)$ a componente conexa dos pontos que são imagens de $\mathbf{B}(x, \gamma) \cap S$, com $x \in S$, pelos ramos inversos de φ^N de modo que tenhamos $h^N(x_c) = \pi(T^{-N}(t_c)) \in h^N(S)$. Temos $h^N(S)$ conexo. Tome N grande o suficiente para que

$$d(h^N(x_0), h^N(x_c)) \leq \epsilon_*$$

Seja J o levantamento de $h^N(S)$, começando em $T^{-N}(t_c)$. Note que o ponto final de J está em $W^u_{\epsilon_*}(T^{-N}(t_c)) \cap \mathbb{D}(h^N(x_0))$. Pela Observação 13, podemos concluir que este ponto é $T^{-N}(t_0)$. Por fim, considere então $T^N(J)$. Por construção, teremos $T^N(J)$ conexo e $\pi(T^N(J)) = S \subset \mathbf{B}$. Portanto, $T^N(J) \subset W^u_{\frac{d}{2}}(t_c)$. Ou seja, $T^N(J)$ é um caminho conexo ligando t_0 a t_c. Assim, dados t_0, t_1 em $\mathbf{B}_{t'}$, conseguimos um caminho conexo ligando t_0 a t_1 (passando por t_c) em $\mathbf{B}_{\mathbf{t'}}$.

□

Observação 14. *Note que $\pi|_{W^u(t_c)}$ é um difeomorfismo local. Assim, a restrição $\pi : W^u(t_c) \to \mathbb{T}^l$ é uma aplicação de recobrimento.*

Proposição 5.10. *Em $\mathbf{B}_{t'}$, apenas t_c tem a propriedade $\pi(t_c) = x_c$.*

Demonstração. Seja $t_0 \in \mathbf{B}_{t'}$ tal que $\pi(t_0) = x_c$. Seja $L : [a, b] \to \mathbf{B}_{t'}$ um caminho ligando t_c a t_0, com $L(a) = t_c$ e $L(b) = t_0$. Como $\mathbf{B}$ é simplesmente conexo, temos $\pi(L)$ é um caminho fechado homotópico a constante x_c. Isto é, existe $H : [0, 1] \times [a, b] \to \mathbf{B}$ contínua, com $H(0, y) = \pi(L(y))$, $H(1, y) = x_c$, e $H(q, .)$ é um caminho fechado com $H(q, a) = H(q, b) = x_c$. Assim, existe um único levantamento $G : [0, 1] \times [a, b] \to \mathbf{B}_{t'}$ tal que $\pi(G(q, y)) = H(q, y)$, $G(0, y) = L(y)$ e $G(1, a) = G(1, b)$. Como $G(1, a) = t_c$ e $G(1, b) = t_0$, segue que $t_c = t_0$. □

Corolário 5.5. *A restrição de π a $\mathbf{B}_{t'}$ é injetiva.*

Demonstração. De fato, se $\pi(t_1) = \pi(t_2) = x$, com $t_1, t_2 \in \mathbf{B}_{t'}$, tomemos o segmento de reta S ligando x a x_c, L_1 o levantamento de S começando em t_1, L_2 o levantamento de S começando em t_2. A projeção do caminho justaposto $\pi(L_1 \vee L_2^{-1})$ é fechado em $\mathbf{B}$, logo é homotópico a constante x. O levantamento dessa homotopia garante $t_1 = t_2$. □

Portanto, para cada $t' \in \Delta'(x')$ podemos associar um único $t \in \mathbf{B}_{t'} \cap \Delta(x)$. Isto é, podemos definir a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{h} : \Delta'_T(x') &\longrightarrow \quad \Delta_T(x) \\ t' &\longmapsto \quad \tilde{h}(t') = t \in \mathbf{B}_{t'} \cap \Delta_T(x). \end{aligned} \quad .$$

A aplicação $\tilde{h}$ é a holonomia instável de $\Delta'_T(x')$ para $\Delta_T(x)$.

Pelo Teorema 5.3, temos $\rho|_{\Delta'_T(t')}$ injetora para cada $t' \in C'(m)$. Assim, a seguinte aplicação está bem definida

$$h := \rho\tilde{h}\rho^{-1} : \rho(\Delta'_T(x')) \to \rho(\Delta_T(x)).$$

Observação 15. *A hipótese de que T seja um mergulho foi usada apenas para considerar tal $\tilde{h}$ bem definida. Se T não é injetora, podemos considerar um F que seja um mergulho e um levantamento de T e definir h da mesma maneira.*

De posse desta aplicação h, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.4. *Para cada $x' \in C'(m)$, com m grande o suficiente, existe uma partição finita de $\rho(\Delta'_T(x'))$ em subconjuntos compactos disjuntos $E_1, E_2, ..., E_q$ tais que $h|_{E_i}$, $i = 1, 2, ..., q$, é injetora e tem inversa Lipschitz contínua.*

Demonstração. Considere m, $x' \in C'(m), x \in \mathbb{T}^l$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x_c, \frac{d}{2})$ definidos como acima. Observe que, como $\varphi^m(C'(m)) = C'(m)$, e usando a Proposição 5.7, existe $\delta_1 > 0$ tal que para quaisquer $x^* \in C'(m)$ e $t_1, t_2 \in \Delta'_T(x^*)$, com $\pi(T^{-m}(t_1)) \neq \pi(T^{-m}(t_2))$, vale que

$$d(\rho(W^u_{\delta_1}(t_1)), \rho(W^u_{\delta_1}(t_2)) \geq \delta_1,$$

pois $W^u_{\delta_1}(t_1) \subset T^m\left(\Delta'_T(\pi(T^{-m}(t_1)))\right)$ e $W^u_{\delta_1}(t_2) \subset T^m(\Delta'_T(\pi(T^{-m}(t_2))))$. Tome k_1 inteiro positivo, grande o suficiente, para termos que o diâmetro de cada uma das $N^{k_1 m}$ componentes de $\varphi^{-k_1 m}(\mathbf{B})$ seja no máximo δ_1. Sejam $x_1, x_2, ..., x_q$ pontos em $\varphi^{-k_1 m}(x') \cap C'(m)$. Defina então

$$E_j = \rho(T^{k_1 m}(\Delta'_T(x_j))), \quad j = 1, ..., q.$$

Do modo como foram construídos os E_j, temos $\rho(\Delta'_T(x')) = \bigcup_{j=1}^{q} E_j$ e como para cada $x^* \in C'(m)$, $\rho|_{\Delta'_T(x^*)}$ é injetiva, vale que os conjuntos E_j, $j = 1, ..., q$ são disjuntos dois a dois.

Mostremos agora que $h|_{E_j}$, $j = 1, ..., q$, é injetiva e que a inversa de h, restrita acada E_j, é Lipschitz contínua. Considere $t', e' \in \rho(\Delta'_T(x'))$ tais que t', e' estejam num mesmo

E_j, para algum $j = 1, 2, ..., q$, com $t' \neq e'$. Existem únicos $\tilde{t'}$ e $\tilde{e'}$ em $\Delta'_T(x')$ com $\rho(\tilde{t'}) = t'$ e $\rho(\tilde{e'}) = e'$. Denote

$$\tilde{t} = \tilde{h}(\tilde{t'}),\ t = \rho(\tilde{t}) = \rho(\tilde{h}(\tilde{t'})) = h(t'),\ \tilde{t'}_i = T^{-im}(\tilde{t'}),\ \tilde{t}_i = T^{-im}(\tilde{t}) \text{ e } \pi(\tilde{t'}_i) = \pi(\tilde{e'}_i) = x'_i,$$

com $i = 0, 1, 2...$ e de modo semelhante,

$$\tilde{e} = \tilde{h}(\tilde{e'}),\ e = \rho(\tilde{e}) = \rho(\tilde{h}(\tilde{e'})) = h(e'),\ \tilde{e'}_i = T^{-im}(\tilde{e'}),\ \tilde{e}_i = T^{-im}(\tilde{e}) \text{ e } \pi(\tilde{t}_i) = \pi(\tilde{e}_i) = x_i.$$

Seja k_0 o maior inteiro tal que vale $\pi(T^{-k_0 m}(\tilde{t'})) = \pi(T^{-k_0 m}(\tilde{e'}))$. Como t', e' estão num mesmo E_j, segue que $k_0 \geq k_1$. Assim, por uma desigualdade triangular, vale que

$$d(\pi(T^{-k_0 m}(\tilde{t'})), \pi(T^{-k_0 m}(\tilde{e})) = d(x'_{k_0}, x_{k_0}) \leq \delta_1,$$

isto é, $\tilde{t_{k_0}} \in W^u_{\delta_1}(\tilde{t'}_{k_0})$ e $\tilde{e_{k_0}} \in W^u_{\delta_1}(\tilde{e'}_{k_0})$. Concluímos então que

$$d(\rho(\tilde{t_{k_0}}), \rho(\tilde{e_{k_0}})) \geq \delta_1,$$

ou seja,

$$d(\rho(T^{-k_0 m}(\tilde{t})), \rho(T^{-k_0 m}(\tilde{e}))) \geq \delta_1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(t, e) = d(\rho(\tilde{t}), \rho(\tilde{e})) &\geq \left(\prod_{w=1}^{k_0 m} \lambda_2(t_w) \right) d(\rho(T^{-k_0 m}(\tilde{t})), \rho(T^{-k_0 m}(\tilde{e}))) \\ &\geq \left(\prod_{w=1}^{k_0 m} \lambda_2(t_w) \right) \delta_1 > 0, \end{aligned}$$

em que $t_w = (x_w, z_w) \in \rho(T^w(\mathbb{D}(x)))$. Logo, $h(t') \neq h(e')$, o que nos permite concluir que $h|_{E_j}$ é injetiva.

Por outro lado, temos que $d(\rho(T^{-k_0 m}(\tilde{t'})), \rho(T^{-k_0 m}(\tilde{e'}))) \leq 2$. Assim,

$$\begin{aligned} d(t', e') = d(\rho(\tilde{t'}), \rho(\tilde{e'})) &\leq \left(\prod_{w=1}^{k_0 m} \lambda_2(t^*_w) \right) d(\rho(T^{-k_0 m}(\tilde{t'})), \rho(T^{-k_0 m}(\tilde{e'}))) \\ &\leq 2 \left(\prod_{w=1}^{k_0 m} \lambda_2(t^*_w) \right), \end{aligned}$$

em que $t^*_w = (x^*_w, z^*_w) \in \rho(T^w(\mathbb{D}(x')))$. Chegamos então que

$$d(t', e') \leq \frac{2}{\delta_1} \left(\frac{\prod_{w=1}^{k_0 m} \lambda_2(t^*_w)}{\prod_{w=1}^{k_0 m} \lambda_2(t_w)} \right) d(t, e). \tag{5.21}$$

Notemos agora que $d(x_w, x_w^*) \leq \underline{\beta}^{-w}$ e $d(z_w, z_w^*) \leq M_0(\lambda_{max})^w$ para algum $M_0 > 0$. Assim,

$$d(t_w, t_w^*) \leq \underline{\beta}^{-w} + M_0(\lambda_{max})^w.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\lambda_2(t_w^*) &\leq (\lambda_{max})d(t_w, t_w^*) + \lambda_2(t_w) \\ &\leq (\lambda_{max})(\underline{\beta}^{-w} + M_0(\lambda_{max})^w) + \lambda_2(t_w).\end{aligned}$$

Aplicando em (5.21), temos

$$\begin{aligned}d(t', e') &\leq \frac{2}{\delta_1}\prod_{w=1}^{k_0 m}\left((\lambda_{max})(\underline{\beta}^{-w} + M_0(\lambda_{max})^w)(\lambda_2(t_w))^{-1} + 1\right) d(t, e) \\ &\leq \frac{2}{\delta_1}\prod_{w=1}^{k_0 m}\left((\lambda_{max})(\underline{\beta}^{-w} + M_0(\lambda_{max})^w)(\lambda_{min})^{-1} + 1\right) d(t, e) \\ &\leq \frac{2}{\delta_1}\prod_{w=1}^{\infty}\left((\lambda_{max})(\underline{\beta}^{-w} + M_0(\lambda_{max})^w)(\lambda_{min})^{-1} + 1\right) d(t, e),\end{aligned}$$

onde

$$\prod_{w=1}^{\infty}\left((\lambda_{max})(\underline{\beta}^{-w} + M_0(\lambda_{max})^w)(\lambda_{min})^{-1} + 1\right) = M_1 < \infty,$$

pois $\underline{\beta} > 1$ e $\lambda_{max} < 1$. Assim,

$$d(t', e') \leq M_1 d(t, e).$$

□

5.5 Demonstração do Teorema B

Considere m inteiro suficientemente grande para que estejam bem definidos os conjuntos $C'(m) \subset \mathbb{T}^l$, $\Delta'_T(m) \subset \pi^{-1}(C'(m)) \cap \Delta_T$ e $\Delta'_T(x')$, com $x' \in C'(m)$, para os quais vale o Teorema 5.3. Sejam ainda $x' \in C'(m)$ e $x \in \mathbb{T}^l$ de modo que estejam bem definidas as aplicações

$$\tilde{h} : \Delta'_T(x') \longrightarrow \Delta_T(x) \quad e \quad h := \rho\tilde{h}\rho^{-1} : \rho(\Delta'_T(x')) \to \rho(\Delta_T(x))$$

e que vale o Teorema 5.4.

5.5.1 Demonstração do Teorema 5.1

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Usando o Teorema 5.3, podemos considerar m grande tal que

$$\dim_H \rho(\Delta'_T(x')) \geq s_0 p - \epsilon.$$

Seja $\rho(\Delta'_T(x')) = \bigcup_{j=1}^{q} E_j$ a partição finita de $\rho(\Delta'_T(x'))$ dada pelo Teorema 5.4. Como $\dim_H \rho(\Delta'_T(x')) = \sup_j(\dim_H E_j)$, segue que pelo menos um dos E_j é tal que $\dim_H E_j \geq s_0 p - \epsilon$. Ou seja,

$$\dim_H(h^{-1}(h(E_j))) \geq s_0 p - \epsilon.$$

Uma vez que $(h|_{E_j})^{-1}$ é uma mapa Lipschitz, vale que $\dim_H(h^{-1}(h(E_j))) \leq \dim_H(h(E_j))$ e portanto

$$\dim_H(h(E_j)) \geq s_0 p - \epsilon.$$

Como $h(E_j) \subset \rho(\Delta_T(x))$, segue então que

$$\dim_H \rho(\Delta_T(x)) \geq s_0 p - \epsilon.$$

E sendo ϵ arbitrário, podemos fazer $\epsilon \to 0$, isto é, teremos

$$\dim_H(\rho(\Delta_T(x))) \geq s_0 p$$

□

5.5.2 Demonstração do Teorema B

Demonstração. O Teorema 3.2 nos fornece que $\dim_H(\Delta_T(x)) \leq s_0 p$. Como a aplicação $\rho : V \to A_2$ é Lipschtiz contínua, temos

$$\dim_H \rho(\Delta_T(x)) \leq \dim_H (\Delta_T(x)) .$$

Usando o Teorema 5.1 , vale que

$$\dim_H(\Delta_T(x)) \geq \dim_H \rho_2(\Delta_T(x)) \geq s_0 p.$$

Portanto,

$$\dim_H(\Delta_T(x)) = s_0 p.$$

Agora iremos mostrar que $\dim_H(\Delta_T) = l + s_0 p$. Usando o Teorema 3.3, já temos $\dim_H(\Delta_T) \leq l + s_0 p$. Falta mostrar que

$$\dim_H(\Delta_T) \geq l + s_0 p.$$

Seja $x_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}) \in \mathbb{T}^l$ e considere a bola $\mathbf{B}(x_0, \frac{1}{10}) \subset \mathbb{T}^l$. Considere ainda a identificação natural do toro $\mathbb{T}^l$ com $E = [0,1]^l \subset \mathbb{R}^l$. O atrator Δ_T é identificado com um subconjunto de $[0,1]^l \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$, que está contido em $\mathbb{R}^{l+d+p}$. Observe que identificação restrita a bola $\mathbf{B}(x_0, \frac{1}{10})$ é dada por

$$\begin{aligned} i : \mathbf{B}(x_0, \tfrac{1}{10}) \subset \mathbb{T}^l &\longrightarrow \quad \mathbf{B}(x_0, \tfrac{1}{10}) \subset \mathbb{R}^l \\ x &\longmapsto \qquad i(x) = x. \end{aligned}$$

Escrevendo $n = l + d + p$, $k = l$, $F = \Delta_T$, $E = \mathbf{B}(x_0, \frac{1}{10})$ e, para cada $x \in E$, $L_x = \{x\} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p = (x + \{0\}) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$(subespaço afim de dimensão $d + p = n - k$). Note que $F \cap L_x = \Delta_T(x)$ e portanto

$$\dim_H(F \cap L_x) = \dim_H(\Delta_T(x)) \geq s_0 p, \quad \forall\ x \in E.$$

Assim, usando o Teorema 3.1, segue que

$$\dim_H(\Delta_T) = \dim_H(F) \geq s_0 p + \dim_H(E) = s_0 p + \dim_H(\mathbf{B}(x_0, \frac{1}{10})) = s_0 p + l.$$

Argumentos similares aos de cima permitem concluir também que $\dim_H(\rho(\Delta_T)) = l + s_0 p$. Ou seja, vale

$$\dim_H(\Delta_T) = \dim_H(\rho(\Delta_T)) = l + s_0 p.$$

Usando a desigualdade em (3.6) e os Teoremas 3.5 e 3.6, segue que

$$\dim_B(\Delta_T(x)) = s_0 p$$

para todo $x \in \mathbb{T}^l$ e que

$$\dim_B(\Delta_T) = l + s_0 p.$$

□

6 DIMENSÃO DE HAUSDORFF COM TRANSVERSALIDADE INTRÍNSECA VIA POTENCIAIS

Neste Capítulo apresentaremos o cálculo da dimensão de Hausdorff usando a técnica de potenciais tal como fizemos no Capítulo 4. No entanto, aqui acrescentaremos a hipótese de transversalidade intrínseca apresentada no Capítulo 5. A união dessas duas técnicas vai nos permitir o mesmo resultado, porém de forma mais analítica.

Os resultados apresentados no Capítulo 5 exigem uma condição bastante forte λ_{max} e de distorção limitada da expansora na Seção 5.1. Estamos interessados agora, unindo as técnicas do Capítulo 4 e a definição de transversalidade intrínseca, em provar que podemos ter a dimensão de Hausdorff do Atrator exigindo menos do número λ_{max} e não exigindo condições sobre as constantes de expansão.

Os resultados abaixo se assemelham aos do Capítulo 4. A diferença crucial é que a ideia de transversalidade estava ligada ao parâmetro, agora está relacionada com o ponto $x \in \mathbb{T}^l$.

Então considere $T : V \to V$ definida como antes e tal que $T \in T_2^{\times}$. Denotaremos ainda $\rho = \rho_2$. Lembremos que pelo Corolário 5.1, a condição de transversalidade intrínseca implica na seguinte condição sobre as componentes do atrator: existem $\delta_0 > 0$ e $c_0 > 0$ tais que quaisquer duas palavras $\underline{a}, \underline{b} \in I^{\infty}(x)$, com $[\underline{a}]_1 \neq [\underline{b}]_1$, temos que se

$$||\rho(S(x,\underline{a})) - \rho(S(x,\underline{b}))|| \leq \delta_0, \text{ então } \mathbf{m}(\rho DS(x,\underline{a}) - \rho DS(x,\underline{b})) \geq c_0. \tag{6.1}$$

Observação 16. *Mais uma vez estamos escrevendo $\rho(S(x,\underline{a}))$ e $\rho(DS(x,\underline{a}))$ para denotar a componente em $\mathbb{R}^p$ de $S(x,\underline{a})$ e $DS(x,\underline{a})$.*

Vamos provar então o seguinte resultado:

Teorema C. *Se $T \in \mathcal{T}_2^{\times}$ e $\lambda_{max} < N^{-\frac{1}{\min\{p,2\}}}$, então $\dim_B(\Delta_T(x)) = \dim_H(\Delta_T(x)) = s_0 p$ para quase todo $x \in \mathbb{T}^l$. Isto implica que*

$$\dim_B(\Delta_T) = \dim_H(\Delta_T) = l + s_0 p.$$

Antes, precisaremos provar alguns Lemas a seguir.

6.1 Resultados auxiliares

Consideraremos nesta Seção os números $\delta_0 > 0$ e $c_0 > 0$ como em (6.1) e denotamos m_l a medida de Lebesgue $l-$dimensional.

Lema 6.1. *Se $T \in \mathcal{T}_2^{\times}$, então existem constante $K > 0$ e inteiro $q \geq 1$ tais que para quaisquer $\underline{a}, \underline{b} \in I^{\infty}(\underline{c})$ (ver 2.6), com $[\underline{a}]_1 \neq [\underline{b}]_1$ e $\underline{c} \in \mathcal{E}_q$, vale*

$$m_l(\{x \in \mathbf{T}_{\underline{c}} : ||\rho(S(x, \underline{a})) - \rho(S(x, \underline{b}))|| < r\}) \leq Kr^p \tag{6.2}$$

para todo $0 < r \leq \delta_0$.

Demonstração. Dado $0 < r \leq \delta_0$, considere $x_0 \in \mathbb{T}^l$ tal que $||\rho(S(x_0, \underline{a})) - \rho(S(x_0, \underline{b}))|| < r \leq \delta_0$ para $\underline{a}, \underline{b} \in I^{\infty}(x_0)$, com $[\underline{a}]_1 \neq [\underline{b}]_1$. Por 6.1, temos

$$\mathbf{m}(\rho DS(x_0, \underline{a}) - \rho DS(x_0, \underline{b})) \geq c_0.$$

Usando os cálculos envolvidos na demonstração da Proposição 5.1, é possível mostrar que existe $\tilde{L} > 0$ tal que

$$||\rho DS(x, \underline{a}) - \rho DS(x_0, \underline{a})|| \leq \tilde{L}||x - x_0||, \quad x \in \mathbb{T}^l, \quad \underline{a} \in I^{\infty}(x) \cap I^{\infty}(x_0).$$

Por uma desigualdade triangular, podemos mostrar também que

$$||\rho DS(x, \underline{a}) - \rho DS(x_0, \underline{a}) - (\rho DS(x, \underline{b}) - \rho DS(x_0, \underline{b}))|| \leq 2\tilde{L}||x - x_0||. \tag{6.3}$$

Desta forma, usando estas estimativas chegamos em

$$\mathbf{m}(\rho DS(x, \underline{a}) - \rho DS(x, \underline{b})) \geq c_0 - 2\tilde{L}||x - x_0||.$$

Assim, para que tenhamos

$$c_0 - 2\tilde{L}||x - x_0|| > \frac{c_0}{2}$$

devemos ter $||x - x_0|| < \dfrac{c_0}{4\tilde{L}}$. Logo, se tomamos $q \geq 1$ grande o suficiente tal que $diam(\mathbf{T}_{\underline{c}}) < \dfrac{c_0}{4\tilde{L}}$, com $\underline{c} \in \mathcal{E}_q$, então vale

$$\mathbf{m}(\rho DS(x, \underline{a}) - \rho DS(x, \underline{b})) \geq \frac{c_0}{2}, \ \forall x \in \mathbf{T}_{\underline{c}}.$$

Consideramos q grande o suficiente para que $\mathbf{T}_{\underline{c}} \subset \mathbf{B}(x_0, r_0)$, onde

$$0 < r_0 < \frac{c_0}{4\big(1 + \dfrac{L_1 \underline{\beta}^{-1}}{1 - (\lambda_{max})\underline{\beta}^{-1}} + \tilde{L}\big)} < \frac{c_0}{4\tilde{L}}$$

em que $\underline{\beta} > 1$ e $L_1 > 0$ são tais que $||D_x \nu|| \leq L_1$ e $||(D\varphi(x))^{-1}||^{-1} \leq \underline{\beta}$. Definimos agora uma aplicação $g : \mathbf{B}(x_0, r_0) \supset \mathbf{T}_{\underline{c}} \to \mathbb{R}^p$ dada pela extensão de

$$g(x) = \rho(S(x, \underline{a})) - \rho(S(x, \underline{b})).$$

Estendemos os ramos inversos, o que permite estender $S(x,\underline{a})$ e portanto g. Temos $\mathbf{m}(g(x)) \geq \frac{c_0}{2}$. Além disso, $||g(x)|| \leq 2$ e

$$||Dg(x)|| \leq ||\rho DS(x,\underline{a})|| + ||\rho DS(x,\underline{b})||$$

. Como

$$\rho DS(x,\underline{a}) := D_x\nu(x_1, z_i^{\underline{a}})D\varphi^{-1}(x_1) + \sum_{i=2}^{\infty}(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(x_j, z_j^{\underline{a}}))(D_x\nu(x_i, z_i^{\underline{a}}))(D\varphi^i(x_i))^{-1} \quad (6.4)$$

em que $x_i = [\underline{a}]_i(x)$ e $z_i^{\underline{a}} := \lim_{n\to\infty} z_i^{[\underline{a}]_n} = \lim_{n\to\infty} \nu_{[\underline{a}]_{i+1}(x)} \circ ... \circ \nu_{[\underline{a}]_n(x)}(0)$, segue que

$$\begin{aligned} ||\rho DS(x,\underline{a})|| &\leq ||D_x\nu(x_1, z_i^{\underline{a}})||\ ||D\varphi^{-1}(x_1)|| \\ &\quad + \sum_{i=2}^{\infty} ||(\prod_{j=1}^{i-1} D_z\nu(x_j, z_j^{\underline{a}}))||\ ||(D_x\nu(x_i, z_i^{\underline{a}}))||\ ||(D\varphi^i(x_i))^{-1}|| \\ &\leq L_1\underline{\beta}^{-1} + \sum_{i=2}^{\infty}(\lambda_{max})^{i-1}L_1\underline{\beta}^{-i} = L_1\big(\frac{\sigma^{-1}}{1-(\lambda_{max})\underline{\beta}^{-1}}\big). \end{aligned}$$

Assim,

$$||Dg(x)|| \leq 2L_1\big(\frac{\underline{\beta}^{-1}}{1-(\lambda_{max})\underline{\beta}^{-1}}\big).$$

Notando agora que, por 6.3 , devemos ter $||D^2g(x)|| \leq 2\tilde{L}$. Logo,

$$||g||_{C^2} \leq 2\left(1 + \frac{L_1\underline{\beta}^{-1}}{1-(\lambda_{max})\underline{\beta}^{-1}} + \tilde{L}\right)$$

Aplicando então o Lema 3.3 para g, $U = \mathbf{B}(x_0, r_0)$, $\delta = \frac{c_0}{2}$ e

$$\alpha_0 = 1 + \frac{L_1\underline{\beta}^{-1}}{1-(\lambda_{max})\underline{\beta}^{-1}} + \tilde{L},$$

existe um $K > 0$ tal que

$$m_l(g^{-1}(\mathbf{B}(0,r))) < Kr^p$$

e isto implica que

$$m_l(\{x \in \mathbf{T}_{\underline{c}} : ||\rho(S(x,\underline{a})) - \rho(S(x,\underline{b}))|| < r\}) \leq Kr^p$$

□

Lema 6.2. *Se $T \in \mathcal{T}_2^{\times}$, então para todo $\beta \in (0,p)$ existem uma constante $K_0 > 0$ e um inteiro $q \geq 1$ tal que para $x \in \mathbf{T}_{\underline{c}}$, com $\underline{c} \in \mathcal{E}_q$, $q \geq 1$, e para quaisquer $\underline{a}, \underline{b} \in I^{\infty}(\underline{c})$, com $[\underline{a}]_1 \neq [\underline{b}]_1$, temos*

$$\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}} \frac{\mathrm{d}\,x}{||\rho S(x,\underline{a}) - \rho S(x,\underline{b})||^{\beta}} \leq K_0.$$

Demonstração. Considere $q \geq 1$ grande tal que vale o Lema 6.1 para $\mathbf{T}_{\underline{c}}$, com $\underline{c} \in \mathcal{E}_q$. Sejam quaisquer $\underline{a}, \underline{b} \in I^{\infty}(\underline{c})$ tais que $[\underline{a}]_1 \neq [\underline{b}]_1$. Usando a equação 4.13, com $X = \mathbf{T}_{\underline{c}}$, $\mu = m_l$, $\phi(t) = t$ e $f(x) = \dfrac{1}{||\rho S(x, \underline{a}) - \rho S(x, \underline{b})||^{\beta}}$, podemos escrever

$$\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}} \frac{\mathrm{d}\, x}{||\rho S(x, \underline{a}) - \rho S(x, \underline{b})||^{\beta}} = \int_0^{\infty} m_l(\{x \in \mathbf{T}_{\underline{c}} : \frac{1}{||\rho S(x, \underline{a}) - \rho S(x, \underline{b})||^{\beta}} > t\})\, \mathrm{d}\, t.$$

Para $r > 0$, escrevemos $t = r^{-\beta}$ e assim, por mudança de variável , temos

$$\int_0^{\infty} m_l(\{x \in \mathbf{T}_{\underline{c}} : \frac{1}{||\rho S(x, \underline{a}) - \rho S(x, \underline{b})||^{\beta}} > t\}) dt$$

$$= \beta \int_0^{\infty} m_l(\{x \in \mathbf{T}_{\underline{c}} : ||\rho S(x, \underline{a}) - \rho S(x, \underline{b})|| < r\}) r^{-(\beta+1)} dr$$

$$= \beta \int_0^{\delta_0} m_l(\{x \in \mathbf{T}_{\underline{c}} : ||\rho S(x, \underline{a}) - \rho S(x, \underline{b})|| < r\}) r^{-(\beta+1)} dr$$

$$+\beta \int_{\delta_0}^{\infty} m_l(\{x \in \mathbf{T}_{\underline{c}} : ||\rho S(x, \underline{a}) - \rho S(x, \underline{b})|| < r\}) r^{-(\beta+1)} dr.$$

Usando o Lema 6.1, podemos estimar

$$\beta \int_0^{\delta_0} m_l(\{x \in \mathbf{T}_{\underline{c}} : ||\rho S(x, \underline{a}) - \rho S(x, \underline{b})|| < r\}) r^{-(\beta+1)} dr$$

$$\leq \beta K \int_0^{\delta_0} r^{p-(\beta+1)} dr = \beta K (\delta_0^{p-\beta})(p-\beta)^{-1} < \infty.$$

Como $1 + \beta > 1$, temos que $\displaystyle\int_{\delta_0}^{\infty} r^{-(\beta+1)} dr < \infty$ e com isso temos também

$$\beta \int_{\delta_0}^{\infty} m_l(\{x \in \mathbf{T}_{\underline{c}} : ||\rho S(x, \underline{a}) - \rho S(x, \underline{b})|| < r\}) r^{-(\beta+1)} dr \leq \beta m_l(\mathbf{T}_{\underline{c}}) \int_{\delta_0}^{\infty} r^{-(\beta+1)} dr < \infty.$$

O que conclui a prova. □

Lema 6.3. *Fixado $x_0 \in \mathbf{T}_{\underline{c}}$, $\underline{c} \in \mathcal{E}_q$, $q \geq 1$, temos que existe constante $K_1 > 0$ tal que para todo $x \in \mathbf{T}_{\underline{c}}$ e todo $\underline{a} \in I^{\infty}(\underline{c})$, vale*

$$e^{-K_1} \leq \frac{||D_z \nu^n([\underline{a}]_n(x), 0)||}{||D_z \nu^n([\underline{a}]_n(x_0), 0)||} \leq e^{K_1}. \tag{6.5}$$

para todo $n \geq 0$.

Demonstração. Usando a conformalidade e a Regra da Cadeia, temos

$$\log \frac{||D_z \nu^n([\underline{a}]_n(x), 0)||}{||D_z \nu^n([\underline{a}]_n(x_0), 0)||} = \log \left(\frac{|\det D_z \nu^n([\underline{a}]_n(x), 0)|^{\frac{1}{p}}}{|\det D_z \nu^n([\underline{a}]_n(x_0), 0)|^{\frac{1}{p}}} \right)$$

$$= \frac{1}{p}\log\left(\frac{|\det D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x),0)|}{|\det D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x_0),0)|}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\log\left(\frac{\prod_{k=0}^{n-1}|\det D_z\nu(\nu^k([\underline{a}]_n(x),0))|}{\prod_{k=0}^{n-1}|\det D_z\nu(\nu^k([\underline{a}]_n(x_0),0))|}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1}(\log|\det D_z\nu(\nu^k([\underline{a}]_n(x),0))| - \log|\det D_z\nu(\nu^k([\underline{a}]_n(x_0),0))|).$$

Como $\nu \in C^r, r \geq 2$, segue que o logaritmo do jacobiano de ν é Lipschitz. Assim, existe $C_0 > 0$ tal que

$$\log\frac{||D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x),0)||}{||D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x_0),0)||} \leq \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1} C_0||\nu^k([\underline{a}]_n(x),0) - \nu^k([\underline{a}]_n(x_0),0)||.$$

Usando o Teorema da desigualdade do Valor Médio, segue que

$$\begin{aligned}|\nu^k([\underline{a}]_n(x),0) - \nu^k([\underline{a}]_n(x_0),0)|| &\leq \sup||D_z\nu^k(x,z)||\ ||[\underline{a}]_n(x) - [\underline{a}]_n(x_0)||\\ &\leq C_1(\lambda_{max})^k\underline{\beta}^{-n}||x - x_0||\\ &\leq C_1(\lambda_{max})^k\underline{\beta}^{-n}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\log\frac{||D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x),0)||}{||D_z\nu^n([\underline{a}]_n(x_0),0)||} \leq \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1} C_0C_1(\lambda_{max})^k\underline{\beta}^{-n} < \frac{1}{p}C_0C_1\big(\frac{\underline{\beta}^{-1}}{1-\lambda_{max}}\big).$$

Tome então $K_1 > \frac{1}{p}C_0C_1\big(\frac{\underline{\beta}^{-1}}{1-\lambda_{max}}\big)$.

□

Considere agora μ_x a medida finita em $I^\infty(x)$ definida na Seção 3.5. De maneira análoga ao Capitulo 4 , temos que μ_x determina uma medida em $\rho_2(\Delta_T(x))$. Pois para cada $x \in \mathbb{T}^l$, definimos a aplicação $h_x : I^\infty(x) \to \{x\} \times \mathbb{R}^p$ por

$$h_x(\underline{a}) = (x, \rho S(x, \underline{a})). \tag{6.6}$$

Note que $h_x(I^\infty(x)) = \rho_2(\Delta_T(x))$. Identificamos naturalmente $\{x\} \times \mathbb{R}^p$ com $\mathbb{R}^p$. Definimos a medida υ_x em $\rho_2(\Delta_T(x))$ pelo "push-forward"

$$\upsilon_x(E) = (h_x)_*(\mu_x)(E) = \mu_x(h_x^{-1}(E)).$$

Assim, se f é uma função mensurável limitada, então

$$\int f\,\mathrm{d}\,\upsilon_x = \int f\,\mathrm{d}((h_x)_*(\mu_x)) = \int (f\circ h_x)\,\mathrm{d}\,\mu_x \tag{6.7}$$

Observação 17. *Se $\underline{a} \in I^\infty(x)$, então temos*

$$\mu_x(\underline{a}) = \mu((\pi^+)^{-1}(s(x)\underline{a})).$$

Como $s(x)$ é constante para todo $x \in \mathbf{T}_{\underline{c}}$, $\underline{c} \in \mathcal{E}_q, q \geq 1$, segue que $x \mapsto \mu_x$ é constante em $\mathbf{T}_{\underline{c}}$. Note ainda que $I^\infty(x) = I^\infty(\underline{c})$, para todo $x \in \mathbf{T}_{\underline{c}}$.

Para cada $\underline{c}$ fixado, $\underline{c} \in \mathcal{E}_q, q \geq 1$, usaremos ainda os conjuntos,

$$A_n = \{(\underline{a}, \underline{b}) \in I^\infty(\underline{c}) \times I^\infty(\underline{c}) : [\underline{a}]_n = [\underline{b}]_n \text{ e } [\underline{a}]_{n+1} \neq [\underline{b}]_{n+1}\}$$

$$A_\infty = \{(\underline{a}, \underline{a}) \in I^\infty(\underline{c}) \times I^\infty(\underline{c})\},$$

e, para $\underline{a}' \in I^n(\underline{c})$, escreva

$$A_{n,\underline{a}'} = \{(\underline{a}, \underline{b}) \in A_n : [\underline{a}]_n = \underline{a}'\}.$$

Note então que

$$I^\infty(\underline{c}) \times I^\infty(\underline{c}) = \left(\dot{\bigcup_{n,\underline{a}'}} A_{n,\underline{a}'}\right) \dot{\cup}(A_\infty). \tag{6.8}$$

Temos também $\mu_x(A_\infty) = 0$.

Usando as notações da Observação acima, temos:

Lema 6.4. *Se $(\underline{a}, \underline{b}) \in A_n$ e escrevendo $[\underline{a}]_n(x) = x'$, então vale*

$$\|\rho S(x, \underline{a}) - \rho S(x, \underline{b};)\| \geq K_1^* \left(||D_z \nu^n([\underline{a}]_n(x), 0)||\right) ||(\rho S(x', \sigma^n(\underline{a})) - \rho S(x', \sigma^n(\underline{b}))|| \tag{6.9}$$

para alguma constante $K_1^* > 0$.

Demonstração. A demonstração é análoga à do Lema 4.4.

□

6.2 Prova do Teorema C

Teorema 6.1. *Seja $T \in \mathcal{T}_2^\times$. Então para qualquer $\epsilon > 0$, existe inteiro $q \geq 1$ tal que para quase todo $x \in \mathbf{T}_{\underline{c}}$, $\underline{c} \in \mathcal{E}_q$, temos*

$$\dim_H(\rho(\Delta_T(x))) \geq s_0 p - \epsilon.$$

Demonstração. Vamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ tal que $s_0 p - \epsilon \in (0, p)$, temos o seguinte

$$\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}} \int_{I^\infty(x)} \int_{I^\infty(x)} \left(\frac{1}{\|\rho S(x, \underline{a}) - \rho S(x, \underline{b})\|^{s_0 p - \epsilon}}\right) \mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b})\,\mathrm{d}\,x < \infty. \tag{6.10}$$

Com isso, teremos

$$\int_{I^\infty(x)}\int_{I^\infty(x)}\left(\frac{1}{\|\rho S(x,\underline{a})-\rho S(x,\underline{b})\|^{s_0p-\epsilon}}\right)\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b})<\infty$$

para quase todo $x\in\mathbf{T}_{\underline{c}}$. Daí, fazendo uma mudança de variáveis $y'=h_x(\underline{a})$ e $z'=h_x(\underline{b})$ e usando 6.7, segue que

$$\int_{I^\infty(x)}\int_{I^\infty(x)}\left(\frac{1}{\|\rho S(x,\underline{a})-\rho S(x,\underline{b})\|^{s_0p-\epsilon}}\right)\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b})$$

$$=\int_{\rho_2(\Delta_T(x))}\int_{\rho_2(\Delta_T(x))}\left(\frac{1}{\|y'-z'\|^{s_0p-\epsilon}}\right)\mathrm{d}\,\upsilon_x(y')\,\mathrm{d}\,\upsilon_x(z')<\infty,$$

para quase todo $x\in\mathbf{T}_{\underline{c}}$. E, usando o Teorema 4.2, teremos

$$\dim_H(\rho_2(\Delta_T(x)))\geq s_0p-\epsilon$$

para todo $\epsilon>0$ e para quase todo $x\in\mathbf{T}_{\underline{c}}$.

Uma vez que $T\in\mathcal{T}_2^{\times}$, tome $q\geq 1$ grande tal que vale o Lema 6.1 para $\underline{c}\in\mathcal{E}_q$. Usando Observação 17, temos que a medida μ_x é constante em $\mathbf{T}_{\underline{c}}$. Assim, fixe $x_{\underline{c}}\in\mathbf{T}_c$ e escreva $\mu_{x_{\underline{c}}}:=\mu_x|_{I^\infty(\underline{c})}$. Podemos escrever então

$$\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}}\int_{I^\infty(x)}\int_{I^\infty(x)}\left(\frac{1}{\|\rho S(x,\underline{a})-\rho S(x,\underline{b})\|^{s_0p-\epsilon}}\right)\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b})\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}}\int_{I^\infty(\underline{c})}\int_{I^\infty(\underline{c})}\left(\frac{1}{\|\rho S(x,\underline{a})-\rho S(x,\underline{b})\|^{s_0p-\epsilon}}\right)\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{b})\,\mathrm{d}\,x$$

Trocando a ordem de integração, usando a Observação 17 e em seguida o Lema 6.4, temos

$$\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}}\int_{I^\infty(\underline{c})}\int_{I^\infty(\underline{c})}\left(\frac{1}{\|\rho S(x,\underline{a})-\rho S(x,\underline{b})\|^{s_0p-\epsilon}}\right)\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{b})\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\int_{I^\infty(\underline{c})}\int_{I^\infty(\underline{c})}\left(\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}}\frac{\mathrm{d}\,x}{\|\rho S(x,\underline{a})-\rho S(x,\underline{b})\|^{s_0p-\epsilon}}\right)\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{b})$$

$$=\sum_{n\geq 0}\int\int_{A_n}\left(\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}}\frac{\mathrm{d}\,x}{\|\rho S(x,\underline{a})-\rho S(x,\underline{b})\|^{s_0p-\epsilon}}\right)\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{b})$$

$$=\sum_{n\geq 0}\sum_{\underline{a}'\in I^n(\underline{c})}\int\int_{A_{n,\underline{a}'}}\left(\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}}\frac{\mathrm{d}\,x}{\|\rho S(x,\underline{a})-\rho S(x,\underline{b})\|^{s_0p-\epsilon}}\right)\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{b})$$

$$\leq\sum_{n\geq 0}\sum_{\underline{a}'\in I^n(\underline{c})}\int\int_{A_{n,\underline{a}'}}\left(\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}}\frac{(K_1^*||D_z\nu^n(\underline{a}'(x),0)||)^{-(s_0p-\epsilon)}\,\mathrm{d}\,x}{\|\rho S(x',\sigma^n(\underline{a}))-\rho S(x',\sigma^n(\underline{b}))\|^{s_0p-\epsilon}}\right)\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{b})$$

$$= (K_1^*)^{-s_0p+\epsilon}$$

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{\underline{a}'\in I^n(\underline{c})}\int\int_{A_{n,\underline{a}'}}\left(\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}}\frac{(||D_z\nu^n(\underline{a}'(x),0)||)^{-(s_0p-\epsilon)}\,\mathrm{d}\,x}{\|\rho S(x',\sigma^n(\underline{a}))-\rho S(x',\sigma^n(\underline{b}))\|^{s_0p-\epsilon}}\right)\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{b}).$$

Usando o Lema 6.3, existe $K_1>0$ tal que

$$||D_z\nu^n(\underline{a}'(x),0)||^{-(s_0p-\epsilon)}\leq e^{K_1(s_0p-\epsilon)}(||D_z\nu^n(\underline{a}'(x_{\underline{c}}),0)||)^{-(s_0p-\epsilon)}.$$

Logo,

$$(K_1^*)^{-s_0p+\epsilon}\sum_{n\geq 0}\sum_{\underline{a}'\in I^n(\underline{c})}\int\int_{A_{n,\underline{a}'}}\left(\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}}\frac{(||D_z\nu^n(\underline{a}'(x),0)||)^{-(s_0p-\epsilon)}\,\mathrm{d}\,x}{\|\rho S(x',\sigma^n(\underline{a}))-\rho S(x',\sigma^n(\underline{b}))\|^{s_0p-\epsilon}}\right)\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{b})$$

$$\leq (K_1^*)^{-s_0p+\epsilon}e^{K_1(s_0p-\epsilon)}\sum_{n\geq 0}\sum_{\underline{a}'\in I^n(\underline{c})}\left((||D_z\nu^n(\underline{a}'(x_{\underline{c}}),0)||)^{-(s_0p-\epsilon)}\right)$$

$$\int\int_{A_{n,\underline{a}'}}\left(\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}}\frac{\mathrm{d}\,x}{\|\rho S(x',\sigma^n(\underline{a}))-\rho S(x',\sigma^n(\underline{b}))\|^{s_0p-\epsilon}}\right)\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{b})$$

Note agora que $[\sigma^n(\underline{a})]_1\neq[\sigma^n(\underline{b})]_1$, usando então o Lema 6.2, existe $K_0>0$ tal que

$$\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}}\frac{\mathrm{d}\,x}{\|\rho S(x',\sigma^n(\underline{a}))-\rho S(x',\sigma^n(\underline{b}))\|^{s_0p-\epsilon}}\leq K_0.$$

Assim,

$$(K_1^*)^{-s_0p+\epsilon}e^{K_1(s_0p-\epsilon)}\sum_{n\geq 0}\sum_{\underline{a}'\in I^n(\underline{c})}\left((||D_z\nu^n(\underline{a}'(x_{\underline{c}}),0)||)^{-(s_0p-\epsilon)}\right)$$

$$\int\int_{A_{n,\underline{a}'}}\left(\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}}\frac{\mathrm{d}\,x}{\|\rho S(x',\sigma^n(\underline{a}))-\rho S(x',\sigma^n(\underline{b}))\|^{s_0p-\epsilon}}\right)\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{b})$$

$$\leq K_0(K_1^*)^{-s_0p+\epsilon}e^{K_1(s_0p-\epsilon)}$$

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{\underline{a}'\in I^n(\underline{c})}\left((||D_z\nu^n(\underline{a}'(x_{\underline{c}}),0)||)^{-(s_0p-\epsilon)}\right)\left(\int\int_{A_{n,\underline{a}'}}\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{b})\right)$$

$$\leq K_0(K_1^*)^{-s_0p+\epsilon}e^{K_1(s_0p-\epsilon)}$$

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{\underline{a}'\in I^n(\underline{c})}\left((\lambda_{max})^{n\epsilon}(||D_z\nu^n(\underline{a}'(x_{\underline{c}}),0)||)^{-s_0p}\right)\left(\int\int_{A_{n,\underline{a}'}}\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{b})\right)$$

$$= K_0(K_1^*)^{-s_0p+\epsilon}e^{K_1(s_0p-\epsilon)}$$

$$\sum_{n\geq 0}(\lambda_{max})^{n\epsilon}\sum_{\underline{a}'\in I^n(\underline{c})}\left((||D_z\nu^n(\underline{a}'(x_{\underline{c}}),0)||)^{-s_0p}\right)\left(\int\int_{A_{n,\underline{a}'}}\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{b})\right).$$

Observe agora que para cada $\underline{a}' \in I^n(\underline{c})$ o conjunto $A_{n,\underline{a}'}$ está contido no conjunto

$$C_n(\underline{a}') = [1, a_1', ..., a_n'] \times [1, a_1', ..., a_n'].$$

Note ainda que por 3.34, temos

$$\frac{1}{||D_z\nu^n(\underline{a}'(x_{\underline{c}}), 0)||^{s_0p}} \leq C_3^*(\mu_{x_{\underline{c}}}([1; a_1', ..., a_n']))^{-1}$$

para alguma constante $C_3^* > 0$. Assim,

$$K_0(K_1^*)^{-s_0p+\epsilon}e^{K_1(s_0p-\epsilon)}$$

$$\sum_{n\geq 0}(\lambda_{max})^{n\epsilon}\sum_{\underline{a}'\in I^n(\underline{c})}\left((||D_z\nu^n(\underline{a}'(x_{\underline{c}}), 0)||)^{-s_0p}\right)\left(\int\int_{A_{n,\underline{a}'}} \mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_{x_{\underline{c}}}(\underline{b})\right)$$

$$\leq K_0(K_1^*)^{-s_0p+\epsilon}e^{K_1(s_0p-\epsilon)}\sum_{n\geq 0}(\lambda_{max})^{n\epsilon}\sum_{\underline{a}'\in I^n(\underline{c})} C_3^*(\mu_{x_{\underline{c}}}([1; a_1', ..., a_n']))^{-1}(\mu_{x_{\underline{c}}}\times\mu_{x_{\underline{c}}})(C_n(\underline{a}'))$$

$$\leq C_3^*K_0(K_1^*)^{-s_0p+\epsilon}e^{K_1(s_0p-\epsilon)}\sum_{n\geq 0}(\lambda_{max})^{n\epsilon}\sum_{\underline{a}'\in I^n(\underline{c})}\mu_{x_{\underline{c}}}([1; a_1', ..., a_n']).$$

Como para alguma constante $\tilde{K}_0$ temos

$$\sum_{x'\in\varphi^{-n}(x)}\mu_x([1; a_1', ..., a_n']) \leq \mu_x(I^\infty(\underline{c})) \leq \tilde{K}_0,$$

segue que escrevendo $\hat{K} = C_3^*K_0(K_1^*)^{-s_0p+\epsilon}e^{K_1(s_0p-\epsilon)}\tilde{K}_0$, chegamos em

$$\int_{\mathbf{T}_{\underline{c}}}\int_{I^\infty(x)}\int_{I^\infty(x)}\left(\frac{1}{\|\rho S(x,\underline{a}) - \rho S(x,\underline{b})\|^{s_0p-\epsilon}}\right)\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{a})\,\mathrm{d}\,\mu_x(\underline{b})\,\mathrm{d}\,x \leq \hat{K}\sum_{n\geq 0}(\lambda_{max})^{n\epsilon} < \infty,$$

como queríamos demonstrar.

□

Como, para cada $q \geq 1$, a família $\mathcal{T}_q$ dos conjuntos $\mathbf{T}_{\underline{c}}$, com $\underline{c} \in \mathcal{E}_q$, é uma partição de Markov de $\mathbb{T}^l$, em particular a união desses conjuntos tem medida total em $\mathbb{T}^l$. Segue do Teorema 6.1 que:

Corolário 6.1. *Se $T \in \mathcal{T}_2^\times$, então para quase todo $x \in \mathbb{T}^l$, temos*

$$\dim_H(\rho(\Delta_T(x))) \geq s_0p.$$

Demonstração do ***Teorema C*** *.* Usando o Corolário 3.2 e o Corolário 6.1, segue que

$$\dim_H(\rho(\Delta_T(x))) = s_0 p$$

para quase todo $x \in \mathbb{T}^l$. Usando o Teorema 3.2 e o fato da projeção ρ ser Lipschitz contínua, temos

$$\dim_H(\Delta_T(x)) = s_0 p$$

para quase todo $x \in \mathbb{T}^l$. Agora, usando o Teorema 3.5 e a desigualdade (3.6) segue a primeira parte do **Teorema C**.

O Teorema 3.3 fornece a cota superior para Δ_T. Para a cota inferior, tome $x_0 \in X \subset \mathbb{T}^l$, com X tendo medida total em $\mathbb{T}^l$ e tal que $\dim_H(\Delta_T(x_0)) = s_0 p$. Aplicando o Teorema 3.1 para $F = \Delta_T$, $E = \mathbf{B}(x_0, r)$, com $r > 0$ suficientemente pequeno, $L_{x_0} = \{x_0\} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ e notando que $\dim_H(\Delta_T(x_0)) = \dim_H(F \cap L_{x_0}) \geq s_0 p$, segue que

$$\dim_H(\Delta_T) \geq s_0 p + dim_H(\mathbf{B}(x_0, r)),$$

isto é,

$$\dim_H(\Delta_T) \geq s_0 p + l.$$

Por fim, usando o Teorema 3.6 e a desigualdade (3.6) segue o resultado

$$\dim_B(\Delta_T) = l + s_0 p.$$

□

7 EXEMPLOS E COMENTÁRIOS FINAIS

Neste Capítulo apresentaremos um caso particular das aplicações tratadas nos capítulos anteriores. Trataremos da situação em que ψ e ν são contrações lineares transladadas por aplicações C^2 no toro $\mathbb{T}^l$. Tal caso denominaremos como **"caso linear"**. Em seguida, dentro do caso linear, descreveremos um exemplo não genérico em que a dimensão não é a esperada para $\rho(\Delta_T)$.

Por fim, mostraremos que a propriedade de transversalidade intrínseca é mantida para o produto de duas aplicações com a propriedade de transversalidade intrínseca. Convém antes mostrar o seguinte:

Proposição 7.1. *O conjunto $\mathcal{T}_2^{\times}$, definido na Seção 5.1 é um aberto na topologia C^r, $r \geq 1$.*

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{T}_2^{\times}$ e tome G numa vizinhança $U(T)$. O Corolário 5.1 fornece a existência de $\delta > 0$ e $c_0 > 0$ tais que para quaisquer duas palavras $\underline{a}, \underline{b} \in I^{\infty}(x)$, com $[\underline{a}]_1 \neq [\underline{b}]_1$ vale que se $||\rho(S(x,\underline{a})) - \rho(S(x,\underline{b}))|| \leq \delta$, então

$$\mathbf{m}(\rho DS(x,\underline{a}) - \rho DS(x,\underline{b})) \geq c_0.$$

Podemos, sem perda de generalidade e considerando $U(T)$ com diâmetro pequeno, supor que a codificação da base expansora de G é a mesma usada em T, pois expansoras são estruturalmente estáveis (a partição de Markov do perturbado pode ser indexada com o mesmo alfabeto). Denote por $S(x,\underline{a};T)$ a aplicação $\rho(S(x,\underline{a}))$ em relação à dinâmica T. Se G está C^r-próxima de T, então $DS(x,\underline{a};G)$ está $C^{r-1}-$ próxima de $DS(x,\underline{a};T)$. Assim, se $DS(x,\underline{a};G) = DS(x,\underline{b};G)$ e o diâmetro de $U(T)$ é suficientemente pequeno, então por uma desigualdade triangular teremos

$$||(S(x,\underline{a};T)) - (S(x,\underline{b};T))|| \leq \delta \Longrightarrow \mathbf{m}(DS(x,\underline{a}:T) - DS(x,\underline{b};T)) \geq c_0$$

$$\Longrightarrow \mathbf{m}(DS(x,\underline{a}:G) - DS(x,\underline{b};G)) \geq \frac{c_0}{2} > 0.$$

□

Assim, segue que quaisquer pertubações de qualquer exemplo mencionado também serão exemplos de aplicações com transversalidade intrínseca.

7.1 Caso linear

Considere o toro l-dimensional $\mathbb{T}^l = \mathbb{R}^l/\mathbb{Z}^l$. Seja $V = \mathbb{T}^l \times \mathbb{D}^d \times \mathbb{D}^p$ em que $\mathbb{D}^d$ e $\mathbb{D}^p$ são bolas unitárias em $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{R}^p$, respectivamente. Iremos considerar um mergulho de classe $C^r, r \geq 1$, $T : V \to V$, dado por

$$T(x, y, z) = (\varphi(x), C_1(y) + f_1(x), C_2(z) + f_2(x)),$$

com $x \in \mathbb{T}^l$, $y \in \mathbb{D}^d$ e $z \in \mathbb{D}^p$, onde teremos :

1. $l \geq \max\{d, p\}$.
2. $\varphi : \mathbb{T}^l \to \mathbb{T}^l$ é expansora de grau $N \geq 2$, isto é, existe $\sigma > 1$ tal que

$$||D\varphi_x(v)|| \geq \sigma||v||, \quad \forall\ x \in \mathbb{T}^l\ , \quad \forall\ v \in T_x\mathbb{T}^l;$$

3. $C_1 : \mathbb{D}^d \to \mathbb{D}^d$ e $C_2 : \mathbb{D}^p \to \mathbb{D}^p$ são contrações lineares invertíveis e vamos supor que C_2 é conforme. Denotaremos por

$$\lambda_1^- = ||C_1^{-1}||^{-1},\ \lambda_1^+ = ||C_1|| \quad \text{e} \quad \lambda_2 = ||C_2^{-1}||^{-1} = ||C_2||$$

   e suporemos ainda que $\lambda_1^+ < \lambda_2$.

4. $\lambda_2 < \dfrac{1}{N^{\max\{l,2\}}}$;
5. Consideramos $f_1 \in C^r(\mathbb{T}^l, \mathbb{D}^d)$ e $f_2 \in C^r(\mathbb{T}^l, \mathbb{D}^p)$, com $r \geq 2$.

Note que, para este caso, temos $\nu(x, z) = C_2(z) + f_2(x)$ e com isso vale que $D_z\nu(x, z) = C_2(z)$. Usando a notação dos capítulos anteriores, temos

$$\lambda_{max} = \lambda_{min} = \lambda_2.$$

Nas condições dadas acima, teremos que o potencial definido em (3.11) será dado apenas por $\phi = \log(\lambda_{max})^p$ e teremos $\phi_n = \log(\lambda_{max})^{np}$. E assim,

$$P(\sigma, s_0\phi) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\underline{a} \in \mathcal{E}_n} \exp(s_0\phi_n) \right) = 0$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\underline{a} \in \mathcal{E}_n} (\lambda_2)^{s_0 np} \right) = 0$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(sN^{n-1}(\lambda_2)^{s_0 np} \right) = 0$$

$$\iff \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log(s)+\left(\frac{n-1}{n}\right)\log(N)+s_0p\log(\lambda_2)\right)=0$$
$$\iff \log(N)+s_0p\log(\lambda_2)=0.$$

Portanto, devemos ter

$$s_0p=-\frac{\log(N)}{\log(\lambda_2)}.$$

Logo, nas condições do Capítulo 5, Seção 5.1 , teremos os seguintes resultados:

Teorema 7.1. *Tome $T\in\mathcal{T}_2^{\times}\cap\mathcal{T}_2^{**}$. Então para qualquer $x\in\mathbb{T}^l$ teremos*

$$\dim_H\rho(\Delta_T(x))=\frac{\log N}{-\log\lambda_2}.$$

Teorema 7.2. *Seja $T\in\mathcal{T}_2^{\times}\cap\mathcal{T}_2^{**}$. Então para cada $x\in\mathbb{T}^l$, vale que*

$$\dim_B(\Delta_T(x))=\dim_H(\Delta_T(x))=\frac{\log N}{-\log\lambda_2}.$$

Isto implica que

$$\dim_B(\Delta_T)=\dim_H(\Delta_T)=\ \dim_H(\rho(\Delta_T))=l+\frac{\log N}{-\log\lambda_2}.$$

E usando os resultados do Capítulo 4, podemos achar uma aplicação $T_{\mathbf{t}}:V\to V$, C^r-próxima de T para a qual o atrator $\Delta_{T\mathbf{t}}$ satisfaz

$$\dim_B(\Delta_{T_{\mathbf{t}}})=\dim_H(\Delta_{T_{\mathbf{t}}})=l+\frac{\log N}{-\log\lambda_2}.$$

Mais especificamente, teremos

Teorema 7.3. *Se $0<\lambda_2<\min\{\frac{1}{1+2\sqrt{p}},N^{-\frac{1}{\min\{p,2\}}}\}$, então existe uma família de dinâmicas $\{T_t\}$, $\boldsymbol{t}\in\mathbf{B}(\boldsymbol{0},\eta)\subset\mathbb{R}^k$, com $T_{\boldsymbol{0}}=T$ tal que*

$$\dim_B(\Delta_{T_t}(x))=\dim_H(\Delta_{T_t}(x))=\frac{\log N}{-\log(\lambda_2)},$$

para todo $x\in\mathbb{T}^l$ fixado e para quase todo $\boldsymbol{t}$. Em particular, existe uma aplicação $T_{\boldsymbol{t}}$ arbitrariamente C^r-próxima de T tal que

$$\dim_B(\Delta_{T_t}(x))=\dim_H(\Delta_{T_t}(x))=\frac{\log N}{-\log(\lambda_2)}\quad e\quad \dim_B(\Delta_{T_t})=\dim_H(\Delta_{T_t})=l+\frac{\log N}{-\log(\lambda_2)}.$$

7.2 Um exemplo não genérico para $\dim_H \rho_2(\Delta_T)$

Mostraremos agora um exemplo em que se f_2 for uma aplicação conveniente, então poderemos calcular diretamente a dimensão de Hausdorff de $\rho_2(\Delta_T)$. Considere $T : V \to V$ dada por

$$T(x, y, z) = (\varphi(x), C_1(y) + f_1(x), C_2(z) + f(\varphi(x)) - C_2(f(x)),$$

ou seja $f_2(x) = f(\varphi(x)) - C_2(f(x))$, em que $f : \mathbb{T}^l \to \mathbb{D}^p$ é uma aplicação Lipschitz. Considere ainda o gráfico de f como o conjunto

$$\mathrm{gra}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{T}^l\} \subset \mathbb{T}^l \times \mathbb{D}^p.$$

Seja $T^* : \mathbb{T}^l \times \mathbb{D}^p \to \mathbb{T}^l \times \mathbb{D}^p$ dada por $T^*(x, z) = (\varphi(x), C_2(z) + f(\varphi(x)) - C_2(f(x)))$. Note que $\rho_2(T(x, y, z)) = T^*(x, z)$. Temos as seguintes conclusões:

Afirmação 7.1. $\mathrm{gra}(f)$ *é um conjunto* T^*-*invariante.*

De fato, temos

$$\begin{aligned} T^*(x, f(x)) &= (\varphi(x), C_2(f(x)) + f(\varphi(x)) - C_2(f(x))) \\ &= (\varphi(x), C_2(f(x)) + f(\varphi(x)) - C_2(f(x))) \\ &= (\varphi(x), f(\varphi(x)) \in gra(f). \end{aligned}$$

Ou seja, temos $T^*(\mathrm{gra}(f)) \subset \mathrm{gra}(f)$. Por outro lado, como φ é sobrejetora em $\mathbb{T}^l$, dado $(x, f(x)) \in \mathrm{gra}(f)$, existe $x^* \in \mathbb{T}^l$ tal que $\varphi(x^*) = x$ e assim

$$(x, f(x)) = (\varphi(x^*), f(\varphi(x^*)) = (\varphi(x^*), C_2(f(x^*)) + f(\varphi(x^*)) - C_2(f(x^*))) = T^*(x^*, f(x^*)).$$

Logo, $\mathrm{gra}(f) \subset T^*(\mathrm{gra}(f))$.

Afirmação 7.2. $\mathrm{gra}(f) = \rho_2(\Delta_T)$.

Note que $\mathrm{gra}(f) = (T^*)^n(\mathrm{gra}(f)) \subset \rho_2(T^n(\mathbb{T}^l \times \mathbb{D}^d \times \mathbb{D}^p))$ para todo $n \geq 0$. Assim,

$$\mathrm{gra}(f) \subset \rho_2(\Delta_T).$$

Tome agora $(x, z) \in \rho_2(\Delta_T)$. Para cada $n \geq 0$, existe $(x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{T}^l \times \mathbb{D}^d \times \mathbb{D}^p$ tal que $\rho_2(T^n(x_n, y_n, z_n)) = (x, z)$. Deste modo, temos $\varphi^n(x_n) = x$ e com isso

$$\rho_2(T^n(x_n, y_n, f(x_n)) = (T^*)^n(x_n, f(x_n)) = (x, f(x)).$$

Além disso, temos

$$||\rho_2(T^n(x_n,y_n,z_n))-\rho_2(T^n(x_n,y_n,f(x_n))|| = ||(0,0,C_2^n(z_n-f(x_n))+f(\varphi^n(x_n)-f(\varphi^n(x_n)))||$$

$$= (\lambda_{max})^n||(0,0,z_n-f(x_n))||.$$

Uma vez que $\lambda_{max}<1$ e $z_n, f(x_n)\in\mathbb{D}^p$ para todo n, vale que

$$||\rho_2(T^n(x_n,y_n,z_n))-\rho_2(T^n(x_n,y_n,f(x_n))||\to 0$$

quando $n\to\infty$. Assim,

$$(x,z)=\lim_{n\to\infty}\rho_2(T^n(x_n,y_n,z_n))=\lim_{n\to\infty}\rho_2(T^n(x_n,y_n,f(x_n)))=(x,f(x)).$$

Portanto, $z=f(x)$ e $\rho_2(\Delta_T)\subset gra(f)$.

Proposição 7.2. $\dim_H(\mathrm{gra}(f))=l$.

Demonstração. Como f é Lipschitz contínua, existe $L>0$ tal que

$$||f(x)-f(y)||\le L||x-y||,\ \forall\ x,y\in\mathbb{T}^l.$$

Seja $\mathcal{P}$ uma partição de $\mathbb{T}^l$ em cubos $l-$ dimensionais $\mathcal{P}_i$ de aresta $\delta>0$, em que $1\le i\le M\le(\delta^{-1}+1)^l$. Temos que para i fixado vale que $\sup_{x,y\in\mathcal{P}_i}||f(x)-f(y)||\le L\delta\sqrt{l}$. Assim, a porção do conjunto $\mathrm{gra}(f)$ que está acima de $\mathcal{P}_i$ pode ser coberta por $((L\delta\sqrt{l})\delta^{-1}+1)^p=((L\sqrt{l})+1)^p$ $p-$cubos de aresta δ. Seja então $\{\mathcal{C}_i\}_{1\le i\le K}$ uma cobertura de $\mathrm{gra}(f)$ por $p-$cubos de aresta δ em que $K\le((L\sqrt{l})+1)^p(\delta^{-1}+1)^l\le((L\sqrt{l})+1)^p(2\delta^{-1})^l$, para δ pequeno. Note que

$$\sum_{1\le i\le K}(\mathrm{diam}(\mathcal{C}_i))^l\le((L\sqrt{l})+1)^p(2\delta^{-1})^l(\delta\sqrt{p})^l=(L\sqrt{l}+1)^p(2\sqrt{p})^l.$$

fazendo $\delta\to 0$, concluímos que $\mathcal{H}^l(\mathrm{gra}(f))<+\infty$, ou seja, $\dim_H(\mathrm{gra}(f))\le l$.

Uma vez que f é contínua em $\mathbb{T}^l$, temos que a projeção $\mathrm{proj}_{\mathbb{T}^l}(\mathrm{gra}(f))$ do gráfico de f sobre $\mathbb{T}^l$ é sobrejetiva e como a projeção é uma aplicação Lipschitz, temos

$$\dim_H(\mathrm{proj}_{\mathbb{T}^l}(gra(f)))\le\min\{\dim_H(\mathrm{gra}(f)),l\}.$$

Como $\dim_H(\mathrm{gra}(f))\le l$ e $\mathrm{proj}_{\mathbb{T}^l}(\mathrm{gra}(f))=\mathbb{T}^l$, segue $\dim_H(\mathrm{gra}(f))\ge l$. □

Assim, usando as Afirmações 7.1, 7.2 e a Proposição 7.2 , concluímos que $\dim_H(\rho_2(\Delta_T))=l$.

7.3 Produto de aplicações com transversalidade intrínseca

Sejam as aplicações $T_1, T_2 : V \to V$ dadas por

$$T_1(x_1, y_1, z_1) = (\varphi_1(x_1), \psi_1(x_1, y_1), \nu_1(x_1, z_1)) \text{ e } T_2(x_2, y_2, z_2) = (\varphi_2(x_2), \psi_2(x_2, y_2), \nu_2(x_2, z_2))$$

satisfazendo as condições da Seção 5.1 e com os respectivos atratores intrinsecamente transversais com respeito a ρ_2.

Afirmação 7.3. *A aplicação* $T : (\mathbb{T}^l)^2 \times E^2 \times F^2 \to (\mathbb{T}^l)^2 \times E^2 \times F^2$ *dada por*

$$T((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \psi_1(x_1, y_1), \psi_2(x_2, y_2), \nu_1(x_1, z_1), \nu_2(x_2, z_2))$$

satisfaz a condição de transversalidade intrínseca.

De fato, considere $S_1(x_1, \underline{a}_1)$ para $\rho_2(T_1)$ e $S_2(x_2, \underline{a}_2)$ para $\rho_2(T_2)$ (ver 2.3). Codificando a dinâmica T o produto das partições de Markov e o alfabeto produto, teremos que

$$S((x_1, x_2), (\underline{a}_1, \underline{a}_2)) = (S_1(x_1, \underline{a}_1), S_2(x_2, \underline{a}_2)).$$

Para cada T_i, $i = 1, 2$, a condição de transversalidade intrínseca, implica que existem $\epsilon > 0$ e $c_0 > 0$ tais que para quaisquer duas palavras $\underline{a}_i, \underline{b}_i \in I^\infty(x_i)$, com $[\underline{a}_i]_1 \neq [\underline{b}_i]_1$, se

$$||S_i(x_i, \underline{a}_i) - S(x_i, \underline{b}_i)|| \leq \epsilon, \text{ então } \mathbf{m}(DS_i(x_i, \underline{a}_i) - DS_i(x_i, \underline{a}_i)) \geq c_0.$$

Assim, para T , se $[\underline{a}_1, \underline{a}_2]_1 \neq [\underline{b}_1, \underline{b}_2]_1$ e

$$S((x_1, x_2), (\underline{a}_1, \underline{a}_2)) = S((x_1, x_2), (\underline{b}_1, \underline{b}_2)),$$

então vale

$$S_i(x_i, \underline{a}_i) = S(x_i, \underline{b}_i), \forall\ i = 1, 2.$$

E dessa forma,

$$\mathbf{m}(DS_i(x_i, \underline{a}_i) - DS_i(x_i, \underline{a}_i)) \geq c_0, \forall\ i = 1, 2.$$

Como $DS((x_1, x_2), (\underline{a}_1, \underline{a}_2))$ é da forma

$$\begin{bmatrix} DS_1(x_1, \underline{a}_1) & 0 \\ 0 & DS_2(x_2, \underline{a}_2) \end{bmatrix},$$

segue que o menor valor singular de $DS((x_1, x_2), (\underline{a}_1, \underline{a}_2)) - DS((x_1, x_2), (\underline{b}_1, \underline{b}_2))$ é o mínimo dos menores valores singulares dos elementos da diagonal, e assim devemos ter

$$\mathbf{m}(DS((x_1, x_2), (\underline{a}_1, \underline{a}_2)) - DS((x_1, x_2), (\underline{b}_1, \underline{b}_2))) \geq c_0.$$

Exemplo 7.1. *O* ***Solenoide de Smale-Williams*** *é um importante exemplo de atrator com transversalidade intrínseca. Inclusive foi este exemplo um dos motivadores do desenvolvimento deste trabalho, com o propósito de estudar a dimensão de atratores em dimensões mais altas. O atrator é definido por meio da aplicação* $f : S^1 \times \mathbf{D} \to S^1 \times \mathbf{D}$ *dada por*

$$f(\theta, x, y) = (2\theta \ mod \ 1, \lambda_1 x + \epsilon \cos(2\pi\theta), \lambda_2 y + \epsilon \text{sen}\,(2\pi\theta)) \tag{7.1}$$

para constantes $0 < \lambda_1, \lambda_2 < \min\{\epsilon, \frac{1}{2}\}$. *Foi mostrado no trabalho de Simon em (25) que a aplicação acima satisfaz a condição de transversalidade intrínseca. Assim, um produto de aplicações desta forma satisfaz a condição de transversalidade intrínseca. Se além disso as taxas de contração satisfizerem as condições da Seção 5.1, então poderemos calcular a dimensão do atrator com os resultados já demonstrados.*

7.4 Comentários finais

Vimos no começo deste capítulo que a condição de transversalidade intrínseca é uma condição aberta na topologia C^r, $r \geq 1$. No trabalho de Bothe (3) foi provado que a condição de transversalidade intrínseca é C^1-genérica. Em tal trabalho, Bothe questiona ainda se tal condição é C^r- genérica. Tanto em seu trabalho como neste aqui apresentado, condição de transversalidade intrínseca implica no cálculo da dimensão do atrator.

No Capítulo 4, mostramos que definida uma aplicação T sob certas condições, existe uma outra que está C^r-próxima e que tem a dimensão do atrator esperada. No entanto, não garantimos que esta aplicação tenha a condição de transversalidade intrínseca. Portanto, embora tenhamos respondido que ter a dimensão esperada é C^r-genérica, não respondemos o seguinte:

Questão 1. *A condição de transversalidade intrínseca em 5.1 é* C^r-*genérica? É* C^1-*genérica?*

Um possível caminho para responder esta pergunta seria provar que o conjunto de aplicações que não tem a condição de transversalidade intrínseca tem medida de Lebesgue nula para alguma família de perturbações a finitos parâmetros. Foi essa a ideia utilizada por Bothe. Entretanto a construção realizada por ele apenas funciona quando a dimensão p é igual a 1. A C^r-genericidade de uma condição de transversalidade similar (porém mais fraca) foi feita também no trabalho de Bocker-Bortolotti (6) e nos trabalhos de Tsujii (28) e Avila-Gouezel-Tsujii (1). A diferença é que nestes ultimos a condição da transversalidade permitia algumas tangências.

Por fim, escolhemos neste trabalho a estrutura de "skew product"para a aplicação T. Uma generalização esperada seria considerar $T : V \to V$ de classe C^r tal que Δ_T é atrator

hiperbólico do tipo $E^{ss} \oplus E^{ws} \oplus E^u$, em que E^{ss} denota contração mais forte, com $DT|_{E^{ws}}$ conforme e $\|DT|_{E^{ws}}\|$ pequena.

Questão 2. *Nas condições anteriores, será que* $\dim_H(W^{ws}_\epsilon(x) \cap \Delta_T) = s_0 p$ *genericamente, com* $\dim(E^s) = p$, $P(s_0\phi) = 0$ *e* $\phi = \log|\det DT|_{E^s}|$*? Além disso, será que* $\dim_H(\Delta_T) = \dim_H E^u + s_0 p$*?*

No nosso caso a folheação $x \longmapsto W^{ws}(x)$ era sempre a mesma, a vertical $\{0\} \times \{0\} \times F$. Esperamos que as mesmas técnicas deste trabalho permitem responder positivamente a Questão 2 no caso em que a folheação estável seja regular.

REFERÊNCIAS

[1] AVILA, A.; GOUEZEL, S.; TSUJII, M. **Smoothness of solenoidal attractors** . Discrete Continuous Dynam. Syst. 15 21-35, 2006.

[2] BOWEN, R. - **Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms** - Lectures Notes in Mathematics 470 (1975).

[3] BOTHE, H. G. **The Hausdorff dimension of certain solenoids**. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 15, pp 449-474, 1995.

[4] BONATTI, C. ; DÍAZ, L.J.; VIANA, M. **Discontinuity of the Hausdorff dimension of hyperbolic sets**, C.R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 320, 713-718, 1995.

[5] BARREIRA, L. **Ergodic Theory, Hyperbolic Dynamics and Dimension Theory**, Universitext, Springer, (2012).

[6] BOCKER, Carlos; BORTOLOTTI, R. T. **Higher-dimensional attractors with absolutely continuous invariant probability**. Nonlinearity. volume 31. n^{o}5. 2057-2082, 2018.

[7] FALCONER, K. **Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications**, Segunda Edição, WILEY, (2003).

[8] HUETER, I.; LALLEY, S. P. **Falconer's formula for the Hausdorff dimension of a self-affine set in** $\mathbb{R}^2$. Ergodic Theory and Dynamical Systems 15 , 77-97, 1995.

[9] HASSELBLATT, B. ; SCHMELING, J. **Dimension product structure of hyperbolic sets**. In Modern Dynamical Systems and Applications, B. Hasselblatt, M. Brin, Y. Pesin, eds., Cambridge University Press, New York, pp. 331-345, 2004.

[10] KATOK, A. ; HASSELBLATT, B., **Introduction to Modern Theory of Dynamical Systems**, Cambridge University Press, (1995).

[11] MISIUREWICZ, M.; PRZYTYCKI, F. **Topological entropy and degree of smooth mappings.** Bull. Pol. Acad. Sci. Math., 25:573-574, 1977.

[12] MAÑÉ, R. **Teoria Ergódica**, Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, (1983).

[13] MCCLUSKEY, H. ; MANNING, A. **Hausdorff dimension for horseshoes**, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 3, 231-260, 1983.

[14] MAÑÉ, R. **The Hausdorff dimension of horseshoes of diffeomorphisms of surfaces**, Bull. Braz.Math. Soc. 20, 1-24, 1990.

[15] MIHAILESCU, E.; URBAŃSKI, M. **Transversal families of hyperbolic skew-products**. Discrete & Continuous Dynamical Systems - A, , 21: 907-928, 2008.

[16] PRZYTYCKI, Feliks. **Anosov endomorphisms**. In: Studia mathematica 3 , Nr. 58, S. 249-285, 1976.

[17] PESIN, Y.; WEISS, H. **On the dimension of deterministic and random cantor-like sets, symbolic dynamics, and the Eckmann-Ruelle conjecture**. Communications In Mathematical Physics, 182(1), 105-153, 1996.

[18] PESIN, Y. **Dimension Theory in Dimensional Systems: Contemporary Views and Applications**, Chicago: University of Chicago Press,(1997).

[19] PESIN, Y.; CLIMENHAGA, V.. **Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems**, STUDENT MATHEMATICAL LIBRARY, Volume 52, (2009).

[20] POLLICOTT, M. **Analyticity of dimension for hyperbolic surface diffeomorphisms** Proc. Am. Math. Soc., 143,3465-3474, 2015.

[21] QIAN, M. ; XIE, J. ; ZHU, S. **Smooth ergodic theory for endomorphisms.** Springer, (2009).

[22] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, (1987).

[23] SHUB, M. **Global Stability of Dynamical Systems**, Springer-Verlag, (1987).

[24] SIMON, K. **Hausdorff Dimension for non-Invertible Maps**. Ergodic Theory and Dynamical Systems 13 , 199-212, 1993.

[25] SIMON, K. **The Hausdorff Dimension of the Smale-Williams Solenoid with Different Contraction Coefficients.** Proceedings of the American Mathematical Society, 125(4), 1221-1228, 1997.

[26] SIMON, K.; SOLOMYAK, B. **Hausdorff dimension for horseshoes in** $\mathbb{R}^3$. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 19(5), 1343-1363, 1999.

[27] SAMBARINO, M. **Hiperbolicidad y Estabilidad**, XXII Escuela Venezoelana de Matematicas, 2009. http://evm.ivic.gob.ve/LibroSambarino.pdf. Data do acesso: 10/12/2020.

[28] TSUJII, M. **Fat solenoidal attractors**. Nonlinearity. volume 14. no 5. 1011- 1027, 2001.

[29] VIANA, M. ; OLIVEIRA, K. **Fundamentos da Teoria Ergódica**. Rio de Janeiro. SBM, volume 90, (2014).

[30] WEN,Lan. **Differentiable dynamical systems : an introduction to structural stability and hyperbolicity**, Graduate Studies in Mathematics, 173. American Mathematical Society, Rhode Island, (2016).