Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Aldi Nestor de Souza

Compactificação de Poincaré e Aplicações à Mecânica Celeste

Recife

2002

Aldi Nestor de Souza

Compactificação de Poincaré e Aplicações à Mecânica Celeste

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Pura

Orientador (a): Dr. José Claúdio Vidal Diaz

Recife

2002

Catalogação na fonte
Bibliotecária Mariana de Souza Alves CRB4-2105

S729c Souza, Aldi Nestor de
Compactificação de Poincaré e aplicações à Mecânica Celeste / Aldi Nestor de Souza – 2002.
52f.

Orientador: José Claúdio Vidal Diaz.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2002.
Inclui referências.

1. Matemática Pura. 2. Compactificação. 3. Poincaré. 4. Mecânica. I. Vidal Diaz, José Claúdio. (orientador) II. Título.

510 CDD (22. ed.) UFPE-CCEN 2021-75

ALDI NESTOR DE SOUZA

COMPACTIFICAÇÃO DE POINCARÉ E APLICAÇÕES À MECÂNICA CELESTE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 06/02/2002

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Cláudio Vidal Diaz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Hildeberto Eulálio Cabral (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dra. Márcia Pragana Dantas (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

RESUMO

Este trabalho consiste em descrever a técnica, conhecida na literatura como a Compactificação de Poincaré, que possibilita fazer um estudo qualitativo de certos campos vetoriais. Aplicaremos tal método em alguns problemas da Mecânica Celeste, particularmente em alguns casos do problema de n-corpos, como por exemplo o problema de Kepler Linear e Planar, o problema de três corpos colineares e também o problema de Hill. O problema de n-corpos busca descrever a dinâmica de n-corpos de massas pré determinadas, sujeitos a gravitação universal e a lei da gravidade. Tal problema, em sua mais ampla generalidade, segue em aberto, é um grande desafio da área de mecânica celeste e por conta disso, estudos de casos particulares, como os que abordaremos nesse trabalho, são as grandes fontes de pesquisa do problema. A compactificação de Poincaré, objeto central desse trabalho, se revelou de grande utilidade para a abordagem de tais problemas. Campos de vetores polinomiais e definidos por funções homogêneas comporão também os elementos centrais da dissertação.

Palavras-chaves: Compactificação.Poincaré. Mecânica. Celeste.

ABSTRACT

This work consists of describing the technique, known in the literature as the Poincaré's Compactification, which makes it possible to make a qualitative study of certain vector fields. We will apply this method to some problems of Celestial Mechanics, particularly in some cases of the n bodies problem, such as the Linear and Planar Kepler problem, the collinear three bodies problem and also the Hill problem. The n-body problem seeks to describe the dynamics of n -body of predetermined masses, subject to universal gravitation and the law of gravity. Such a problem, in its broadest generality, remains open, it is a great challenge in the area of celestial mechanics and because of that, particular case studies, such as the ones we will address in this work, are the great sources of research on the problem. Poincaré's compactification, the central object of this work, proved to be of great use in addressing such problems. Polynomial vector fields and defined by homogeneous functions will also compose the central elements of the dissertation.

Keywords: Compactification. Poincaré. Mechanics. Celestial.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste em descrever a técnica, conhecida na literatura como a Compactificação de Poincaré, que possibilita fazer um estudo qualitativo de certos campos vetoriais. Aplicaremos tal método em alguns problemas da Mecânica Celeste.

A *Compactificação de Poincaré* de um espaço topológico X é uma aplicação $\phi : X \longrightarrow Y$ tal que Y é compacto, $\phi(X)$ é denso em Y e ϕ é um homeomorfismo sobre $\phi(X)$.

O tipo de compactificação que discutiremos aqui foi introduzido por Henri Poincaré no início do século XX para compactificar certos campos vetoriais polinomiais. Desde então muitos autores , entre eles (LACOMBA; LLIBRE, 1993) e (DELGADO et al., 1995), usaram este método, entre outras coisas, para estudar o comportamento no infinito e o escape de sistemas de partículas cujas leis de movimento são dadas por campos de vetores polinomiais.

Dividiremos o trabalho em quatro capítulos, sendo o primeiro essa introdução. No segundo capítulo serão feitas algumas definições básicas tais como campos de vetores e sistemas Hamiltonianos. Apresentaremos ainda alguns exemplos de sistemas Hamiltonianos. No terceiro capítulo desenvolveremos o método da compactificação de Poincaré para campos definidos por funções homogêneas. No quarto e último capítulo do trabalho serão feitas algumas aplicações a problemas concretos da Mecânica Celeste.

Na mecânica Celeste, o problema Newtoniano de n-corpos, principal problema de pesquisa da área, é dado por um campo de vetores definido sobre uma variedade não compacta. A fronteira dessa variedade contém as singularidades devidas a colisões binárias e a escapes ou capturas no infinito. O campo de vetores do problema de n-corpos pode ser escrito em uma forma polinomial se usarmos as ideias de (HEGGIE, 1974), (BARROW-GREEN, 1997), (ABRAHAM; MARSDEN; MARSDEN, 1978) e outros autores. Essencialmente, este processo consiste em regularizar as colisões binárias.

Aplicaremos então o método a alguns casos particulares do problema dos n-corpos, como por exemplo o problema de Kepler linear e planar, o problema de três corpos colineares e também o problema de Hill.

Essencialmente, os resultados desta dissertação foram elaborados a partir das notas de curso do professor Ernesto Perez Chavela, ministradas num curso de verão no ano de

1999, na UFPE.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo daremos a definição de campos de vetores e de sistemas Hamiltonianos. Apresentaremos alguns exemplos particulares, tais como: campos de vetores polinomiais e campos de vetores polinomiais Hamiltonianos. Estes conceitos constituem o conteúdo básico a ser trabalhado nos capítulos posteriores.

2.1 CAMPO DE VETORES

Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Um campo de vetores em U é uma aplicação $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que associa a cada $P \in U$ um vetor em $\mathbb{R}^n$. O campo X é dito de classe C^k se cada função componente X_i é de classe C^k. Sobre uma variedade diferenciável V qualquer, um campo de vetores é uma aplicação $X : V \longrightarrow T_pV$ que associa a cada $P \in V$ um vetor no espaço tangente a V no ponto P. Como antes, o campo é dito de classe C^k se cada função componente X_i é de classe C^k.

2.2 CURVA INTEGRAL DE UM CAMPO DE VETORES

Ao campo de vetores $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ou $X : V \longrightarrow T_pV$ associamos a equação diferencial ordinária $\dot{x} = X(x)$, onde o $\dot{()}$ indica a derivada com respeito a t. As soluções desta equação, ou seja, as aplicações diferenciáveis $\phi : I \longrightarrow U$ ou $\phi : I \longrightarrow V$ (I intervalo da reta) tais que $\dot{\phi(t)} = X(\phi(t))$, para todo $t \in I$, são chamadas *curvas integrais* do campo X. Um campo de vetores é dito completo se toda curva integral tem como domínio o intervalo $I = \mathbb{R}$. Um ponto $x \in U$ ou $x \in V$ é dito singular se $X(x) = 0$ e regular se $X(x) \neq 0$.

2.3 CAMPOS DE VETORES POLINOMIAIS

Se $P_1, P_2, \cdots, P_n$ são polinômios em $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, a aplicação $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $X(p) = (P_1(p), \cdots, P_n(p))$, define um campo de vetores em $\mathbb{R}^n$ chamado de campo de vetores polinomial, ver (CIMA; LLIBRE, 1990) para mais sobre campos de vetores polinomiais. Veremos no capítulo seguinte que este campo de vetores induz um campo de vetores sobre a esfera S^n.

2.4 SISTEMAS HAMILTONIANOS

Um *Sistema Hamiltoniano* é um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias da forma

$$\dot{q} = H_p \quad \dot{p} = -H_q,$$

onde $H_x = (\frac{\partial H}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial H}{\partial x_n})$ e $H = H(t, q, p)$ é uma função real diferenciável definida para $(t, q, p) \in U$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{2n}$. Os vetores $\mathbf{q} = (q_1, \cdots, q_n)$ e $\mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_n)$ são tradicionalmente chamados vetores posição e momento, respectivamente. O inteiro n é o número de graus de liberdade do sistema. No caso particular em que H é independente do tempo, isto é, $H : U \longrightarrow \mathbb{R}$, onde U é algum aberto de $\mathbb{R}^{2n}$, o sistema é chamado de conservativo. Para mais detalhes sobre Sistemas Hamiltonianos, ver (MEYER; HALL, 1992). E Para os exemplos a seguir usaremos as formulações de (HAGIHARA, 1974).

Exemplo 1. *A equação diferencial ordinária de segunda ordem autônoma que modela a dinâmica do oscilador harmônico é dada por $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, onde ω é uma constante real positiva. Se introduzirmos a variável $u = \frac{\dot{x}}{\omega}$, esta equação torna-se equivalente ao sistema de duas equações de primeira ordem dado por*

$$\dot{u} = -\omega x, \;\; \dot{x} = \omega u,$$

onde $H(x, u) = \frac{\omega}{2}(x^2 + u^2)$. É fácil ver que $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial u}$ e $\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial x}$.

Exemplo 2. *Considere n partículas de massas $m_i > 0$, $(i = 1, \cdots, n)$ que se movem em um sistema referencial Newtoniano, $\mathbb{R}^3$, sujeitas unicamente a força mútua de atração gravitacional entre elas. Se a i-ésima partícula tem vetor posição $\mathbf{q_i}$, então aplicando a segunda lei de Newton e a lei da gravidade, obtemos as equações de movimento*

$$m_i \ddot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{G m_i m_j (q_j - q_i)}{\|q_i - q_j\|^3} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{2.1}$$

onde

$$U = \sum_{1 \leq i \leq J} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j|} \tag{2.2}$$

Nestas equações, G é a constante universal gravitacional e U é o potencial Newtoniano.

Seja $q = (q_1, \cdots, q_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ e $M = diag(m_1, m_1, m_1, \cdots, m_n . m_n, m_n)$. Assim, a equação 2.1 acima é equivalente a

$$M\ddot{q} - \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \tag{2.3}$$

Definindo $p = (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ *por* $p = M\ddot{q}$, *temos que* $p_i = M\ddot{q}_i$ *é o momento da i-ésima partícula. Com relação as variáveis* q *e* p *as equações do movimento tornam-se*

$$\ddot{q}_i = \frac{p_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \ \ddot{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{G m_i m_j (q_j - q_i)}{\|q_i - q_j\|^3} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{2.4}$$

Onde o Hamiltoniano H *é definido por*

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\|p_i\|^2}{2m_i} - U \tag{2.5}$$

Este exemplo é conhecido na literartura como o problema de n*-corpos e é o principal objeto de pesquisa da mecânica celeste.*

Exemplo 3. *Um caso especial do problema de* n*-corpos ocorre quando estudamos as órbitas de dois corpos e assumimos um deles fixo na origem. Neste caso as equações que descrevem o movimento do corpo não fixo tem a forma*

$$\ddot{q} = \frac{-\mu q}{\|q\|^3}, \tag{2.6}$$

Onde $q \in \mathbb{R}^3$ *é o vetor posição do corpo não fixo e* μ *é uma constante positiva. Fazendo* $p = \ddot{q}$ *a equação 2.6 ganha a formulação Hamiltoniana abaixo*

$$\ddot{q} = p = \frac{\partial H}{\partial p}, \ \ddot{p} = \frac{-\mu q}{\|q\|^3} \tag{2.7}$$

Cujo Hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{\|p\|^2}{2} - \frac{\mu}{\|q\|}. \tag{2.8}$$

Exemplo 4. *Um outro caso particular do problema de* n*-corpos é conhecido como o problema restrito de três corpos e consiste em estudar a dinâmica de uma partícula de massa infinitesimal sob a influência da força de atração gravitacional exercida por duas outras partículas de massas arbitrárias e que são, na mecânica celeste, denominadas de primárias.*

Um caso particular deste problema ocorre quando consideramos a partícula infinitesimal como sendo a Lua e as primárias como sendo a Terra e Sol, com massas, respectivamente, μ *e* $1 - \mu$.

Se, além disso, considerarmos a partícula de massa infinitesimal localizada em um sistema de coordenadas rotativo girando com velocidade angular constante em relação a um sistema fixo, e um reescalamento das coordenadas de modo que a partícula de massa

$1-\mu$ esteja muito distante da partícula de massa μ, o modelo resultante é conhecido como o problema lunar de Hill.

Das equações do movimento da partícula infinitesimal, obtemos a equação

$$\ddot{x}^2+\ddot{y}^2=3x^2+\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}-C \tag{2.9}$$

Onde C é conhecida como a constante de Jacobi e (x,y) são as coordenadas da partícula de massa infinitesimal.

Fazendo a mudança de coordenadas

$$x_1=x,\;\; x_2=y,\;\; x_3=\ddot{x}-y,\;\; x_4=\ddot{y}+x$$

e substituindo-as na equação 2.9 acima obtemos a função Hamiltoniana

$$H=\frac{1}{2}(x_3^2+x_4^2)+x_2x_3-x_1x_4-x_1^2+\frac{x_2^2}{2}-\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \tag{2.10}$$

cujo sistema Hamiltoniano associado a H é

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_3+x_2, && (2.11)\\
x_2' &= x_4-x_1, && (2.12)\\
x_3' &= 2x_1+x_4-\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}^{\,3}}, && (2.13)\\
x_4' &= -x_2-x_3-\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}^{\,3}} && (2.14)
\end{aligned}$$

2.5 CAMPO DE VETORES POLINOMIAIS HAMILTONIANOS

Ao sistema $\ddot{q}_1=\frac{\partial H}{\partial p_1}, 1=n+1,\cdots,2n$ e $\ddot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial q_i}, i=1,\cdots,n$ de primeira ordem em $\mathbb{R}^{2n}$, associamos o campo de vetores $X:\mathbb{R}^{2n}\longrightarrow\mathbb{R}^{2n}$ definido por $X_H(q,p)=(\frac{\partial H(q,p)}{\partial p},-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q})$, onde $q=q_1,\cdots,q_n$ e $p=p_1,\cdots,p_n$. Este é um caso particular de campo de vetores polinomiais. A razão pela qual ele está sendo apresentado separadamente é que o mesmo será útil nas aplicações à mecânica celeste, capítulo final dessa dissertação.

2.6 CAMPO DE VETORES DEFINIDOS POR FUNÇÕES HOMOGÊNEAS

Sejam $f_1, \cdots, f_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, n funções homogêneas. Associaremos a estas n funções, de modo semelhante ao que foi feito com polinômios, o cmapo de vetores $X_f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definindo-o da seguinte forma

$$X_f = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n))$$

Uma razão pela qual introduzimos este campo de vetores é que o mesmo permitirá que façamos o estudo de problemas de mecânica celeste sem necessitarmos regularizar as singularidades presentes na função Hamiltoniana.

3 COMPACTIFICAÇÃO DE POINCARÉ

Nesta parte do trabalho discutiremos a compactificação de poincaré e enunciaremos alguns resultados básicos. Faremos isto para campos de vetores polinomiais quaisquer, campos de vetores polinomiais Hamiltonianos e campos de vetores definidos por funções homogêneas.

Estes campos de vetores são definidos a princípio sobre uma variedade não compacta ($\mathbb{R}^n$ por exemplo) e a compactificação consistirá em estendêlos analiticamente sobre uma variedade compacta.

3.1 COMPACTIFICAÇÃO DE POINCARÉ PARA CAMPOS DE VETORES POLINOMIAIS

Seja $X = (P_1, \cdots, P_n)$ um campo de votores poliomiais em $\mathbb{R}^n$. Identificamos $\mathbb{R}^n$ com o hiperplano

$$\pi = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}; y_{n+1} = 1\}$$

tangente à esfera de Poincaré

$$S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} y_1^2 = 1\}$$

no seu polo norte. Em seguida consideraremos a projeção central que associa a cada $p \in \pi$, dois pontos em S^n determinados de modo único pela interseção da reta r que passa por p e pela origem da esfera S^n. Estes dois pontos, assim obtidos, são chamados antípodas, um deles localizado no hemisférioo norte H^+ e o outro no hemisfério sul H^- de S^n. Mais acertadamente, esta construção define os dois seguintes difeomorfismos

$$\Phi^+ : \mathbb{R}^n \longrightarrow H^+ \text{ e } \Phi^- : \mathbb{R}^n \longrightarrow H^-$$

definidos por

$$\Phi^+(x) = \frac{1}{\Delta(x)}(x_1, \cdots, x_n, 1) \text{ e } \Phi^-(x) = \frac{1}{\Delta(x)}(x_1, \cdots, x_n, 1),$$

onde $\Delta(x) = (1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2)$. Desta forma X induz um campo de vetores $\hat{X}$ sobre $H^+ \cup H^-$ definido por

$$\hat{X} = \begin{cases} (D\Phi^+)_x X(x), & \text{se } y = \Phi^+(x) \\ (D\Phi^-)_x X(x), & \text{se } y = \Phi^-(x) \end{cases}$$

A expressão para $\hat{X}$ em $H^+ \cup H^-$ é:

$$\hat{X} = y_{n+1} \begin{pmatrix} 1-y_1^2 & -y_1y_2 & \cdots & -y_1y_n \\ -y_2y_1 & 1-y_2^2 & \cdots & -y_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_{n+1}y_1 & -y_{n+1}y_2 & \cdots & -y_{n+1}y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$$

Onde $\hat{P}_i = (y_1, \cdots, y_{n+1}) = p_i(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \cdots, \frac{y_n}{y_{n+1}})$.

Esta expressão para $\hat{X}(y)$ é obtida diretamente da correspondência

$$\Phi^+(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n, y_{n+1}) \text{ e } y_{n+1} = \frac{1}{\Delta(x).}$$

O equador $S^{n-1} = \{y \in S^n; y_{n+1} = 0\}$ da esfera de Poincaré corresponde ao infinito de $\mathbb{R}^n$ e o ponto principal da compactificação de Poincaré é a possibilidade de estender o fluxo dado por $\hat{X}$ sobre $S^n \setminus S^{n-1}$, para todo S^n. Deste modo, estaremos aptos a estudar as órbitas de X indo "para"ou vindo "do"infinito em $\mathbb{R}^n$. Esta expressão é possível devido a carcterística polinomial de X. Portanto, o campo de vetores

$$\bar{X} = y_{n+1}^{m-1} X(y) = \begin{pmatrix} 1-y_1^2 & -y_1y_2 & \cdots & -y_1y_n \\ -y_2y_1 & 1-y_2^2 & \cdots & -y_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_{n+1}y_1 & -y_{n+1}y_2 & \cdots & -y_{n+1}y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_n \end{pmatrix}$$

é analítico em toda S^n. Aqui, $m = max\{grau(P_1)m \cdots, grau(P_n)\}$ é o grau de X e

$$\bar{P}_k(y_1, \cdots, y_n, y_{n+1}) = y_{n+1}^m P_k \left(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \cdots, \frac{y_n}{y_{n+1}} \right).$$

Note que $\bar{P}_k$ são polinômios homogêneos de grau m. O campo de vetores $\bar{X}$ assim obtido é chamado de Compactificação de Poincaré de X. Em muitos casos é preferível fazer os cálculos usando cartas locais, por exemplo, para obter os pontos de equilíbrio do fluxo e suas respectivas linearizações. Assim, como S^n é uma variedade diferenciável, podemos considerar o atlas que a cobre composto de $2(n+1)$ cartas locais definidas por

$$F_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ e } G_i : V_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

onde

$$U_i = \{y \in S^n; y_i > 0\} \;\text{ e }\; V_i = \{y \in S^n; y_i < 0\}\,.$$

Para $i = 1, \cdots, n$, F_i é definida por

$$F_i(y_1, \cdots, y_{n+1} = \left(\frac{y_1}{y_i}, \cdots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \cdots, \frac{y_{n+1}}{y_i}\right) = (z_1, \cdots, z_n)$$

e G_i é definido pela mesma fórmula. Observa-se que as coordenadas locais são denotadas por $(z_1, \cdots, z_n)$ embora estas variáveis tenham significado diferente em cada carta. Devido a simetria que o campo de vetores tem sobre S^n, sua expressão nas cartas locais (V_i, G_i) é a mesma para (U_i, F_i) multiplicada pelo fator $(-1)^{m-1}$. Isto é, em V_i temos

$$y_{n+1}^{m-1} = \left[\frac{-z_n}{\Delta(z)}\right]^{m-1} = (-1)^{m-1}\left[\frac{z_n}{\Delta(z)}\right].$$

Em cada carta local, os pontos do infinito tem a coordenada z_n igual a zero. Notamos ainda que todas as cartas locais contem pontos do infinito exceto em (U_{n+1}, F_{n+1}) e (V_{n+1}, G_{n+1}). Encontraremos agora a expressão analítica do do campo $\bar{X}$ em cada carta local. Iniciaremos fazendo os cálculos para U_i. Seja $y \in U_i \cap H^+$. Desde que o diferencial $(DF_1)_y$ vai de $T_{F_1(y)}\mathbb{R}^n$, temos

$$(DF_1)_y(\bar{X})(y) = (DF_1)_y(y_{n+1}^{m-1}\bar{X}(y)) = y_{n+1}^{m-1}(DF_1)_y(D\Phi^+)xX(x) = y_{n+1}^{m-1}D(F_1 \circ \Phi^+)xX(x),$$

onde $y = \phi(x)$. Assim,

$$D(F_1 \circ \Phi^+)xX(x) = \frac{1}{x^2}(-x_2P_1 + x_1P_2, -x_3P_1 + x_1P_3, \cdots, -x_nP1 + x_1P_n, -P_1,$$

onde $P_i = P_i(x_1, \cdots, x_n)$.

Na carta local U_1, temos

$$(z_1, \cdots, z_n) = F_1(y_1, \cdots, y_{n+1} = \left(\frac{y_2}{y_1}, \cdots, \frac{y_{n+1}}{y_1}\right)$$

e obtemos

$$D(F_1 \circ \Phi^+)xX(x) = z_n(-z_1P_1 + P_2, -z_2P_1 + P_3, \cdots, -z_{n-1}P_1 + P_n, -z_nP_1),$$

onde

$$P_i = P_i\left(\frac{1}{z_n}, \frac{z_1}{z_n} \cdots, \frac{z_{n-1}}{z_n}\right).$$

Desde que

$$y_{n+1}^{m-1} = \left[\frac{z_n}{\Delta(z)}\right]^{m-1}$$

, o campo de vetores torna-se

$$\frac{z_n}{\Delta(z)^{m-1}}(-z_1P_1 + P_2, -z_2P_1 + P_3, \cdots, -z_{n-1}P_1 + P_n, -z_nP_1)$$

. Se $y \in U_i \cap H^+$, obtemos a mesma expressão como acima. Multiplicando a expressão de $\bar{X}$ por $\Delta(z)^{m-1} > 0$ em cada carta local e fazendo cálculos similares para as outras cartas, obtemos as seguintes expressões locais para $\bar{X}$.

Em U_1:

$$(-z_1\bar{P}_1 + \bar{P}_2, -z_2\bar{P}_1 + \bar{P}_3, \cdots, -z_{n-1}\bar{P}_1 + \bar{P}_n, -z_n\bar{P}_1),$$

onde $\bar{P}_i = \bar{P}_i(1, z_1, \cdots, z_{n-1})$;

Em U_2:

$$(-z_1\bar{P}_2 + \bar{P}_1, -z_2\bar{P}_2 + \bar{P}_3, \cdots, -z_{n-1}\bar{P}_2 + \bar{P}_n, -z_n\bar{P}_2),$$

onde $\bar{P}_i = \bar{P}_i(z_1, 1, \cdots, z_{n-1})$;

$\vdots$

Em U_n:

$$(-z_1\bar{P}_n + \bar{P}_1, -z_2\bar{P}_n + \bar{P}_2, \cdots, -z_{n-1}\bar{P}_n + \bar{P}_{n-1}, -z_n\bar{P}_n),$$

onde $\bar{P}_i = \bar{P}_i(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, 1)$;

Em U_{n+1}:

$$(P_1, \cdots, P_n)$$

onde $\bar{P}_i = \bar{P}_i(z_1, z_2, \cdots, z_n)$.

Das expressões de $\bar{X}$ nas cartas locais deduzimos que o infinito , isto é, $z_n = 0$ é invariante pelo fluxo de $\bar{X}$.

Definição 1. *Chamaremos pontos críticos finitos(respectivamente, infinitos) do campo X ou $\bar{X}$ os pontos críticos de $S^n \setminus S^{n-1}$, respectivamente, S^{n-1}.*

Note que, ver (SZEBEHELY; GREBENIKOV, 1969) as órbitas em S^n são simétricas com relação a origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, mas o campo de vetores $\bar{X}$ só é simétrico quando m é par.

Mais ainda, devido a esta simetria, se $y \in S^{n-1}$ é um ponto crítico, então $-y$ é um outro ponto crítico.

3.2 COMPACTIFICAÇÃO DE POINCARÉ PARA CAMPOS DE VETORES POLINOMIAIS HAMILTONIANOS

Como foi feito na seção anterior, uma função polinomial $H : U \longrightarrow \mathbb{R}$, com $U \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2d$, aberto, será chamada de polinômio Hamiltoniano e

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial y_{d+1}}, \cdots, \frac{\partial H}{\partial y_{2d}}, \frac{\partial H}{\partial y_1}. \cdots, \frac{\partial H}{\partial y_n}\right)$$

será o campo de vetores polinomiais Hamiltoniano associado a H. De modo semelhante ao que fizemos para campos de vetores polinomiais quaisquer, faremos a campactificação de Poincaré para campos de vetores polinomiais Hamiltonianos.

Na verdade, o campo X_H é um campo de vetores polinomiais e fazendo os cáclulos como em 2.1, obtemos:

$$\dot{y}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_{k+d}} + \lambda y_k;$$

$$\dot{y}_{k+d} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_k} + \lambda y_{k+d};$$

$$\dot{y}_{n+1} = \lambda y_{n+1},$$

onde $k = 1, \cdots, d$,

$$\lambda = \sum_{k=1}^{d}\left(y_{k+d}\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_k} - y_k\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_{k+d}}\right)$$

e o polinômio $\bar{H}$ é dito gerador do campo $\bar{X}$. O Hamiltoniano é uma função cuja principal propriedade é informar a energia total do sistema ao qual ela está relacionada. Faremos agora um estudo de como os níveis de energia $E_h = H_{-1}(h)$ são transformados na esfera de Poincaré S^n. Para fazer isto começamos por expressar o campo de vetores compactificado restrito ao infinito em termos da parte homogênea de maior grau de H.

Proposição 1. *Considere um Hamiltoniano polinomial H com $n = 2d$ variáveis $x_1, \cdots, x_{2d}$ e o escreva como $H = H_0 + H_1 + \cdots, H_{m+1}$, onde o termo H_k é um polinômio homogêneo de grau k. Então o fluso invariante no infinito $y_{n+1} = 0$ é dado pelo sistema de equações:*

$$\dot{y}_k = \frac{\partial \bar{H}_{m+1}}{\partial y_{k+d}} + \lambda y_k;$$

$$\dot{y}_{k+d} = -\frac{\partial \bar{H}_{m+1}}{\partial y_k} + \lambda y_{k+d};$$

com $k = 1, \cdots, d$ *e*

$$\lambda = \sum_{k=1}^{d} \left(y_{k+d} \frac{\partial \bar{H}_{m+1}}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial \bar{H}_{m+1}}{\partial y_{k+d}} \right).$$

Demonstração. Das equações para a compactificação de Poincaré de X_H segue que $y_{n+1} = 0$ é invariante. Por definição temos que

$$\bar{H} = Y_{n+1}^{m+1} \left(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \cdots, \frac{y_n}{Y_{n+1}} \right),$$

ou seja

$$\bar{H} = Y_{n+1}^{m+1} \left[H_0 \frac{y_1}{y_{n+1}}, \cdots, H_{m+1} \frac{y_1}{Y_{n+1}} \right].$$

Como cada termo H_k é homogêneo de grau k e $y_{n+1} = 0$ isso implica que cada termo de ordem $k \leq m$ se anula e para $k = m + 1$ temos

$$\bar{H}(y_1, \cdots, y_{n+1}) = H_{m+1}(y_1, \cdots, y_{n+1}).$$

□

3.2.1 Propriedades genéricas

Para fazer o estudo de algumas propriedades genéricas dos campos de vetores polinomiais Hamiltonianos, escrevemos o polinômio Hamiltoniano na forma

$$H = h + H_0 + H_1 + \cdots, +H_{m+1}$$

onde, como já vimos, H_k é a parte homogênea de H de grau $k, (k = 1, \cdots, m+1)$. Com esta forma de escrever o Hamiltoniano, basta analisarmos o nível de energia $H = 0$ para concluirmos o estudo sobre um nível de energia h qualquer do Hamiltoniano original. Vale lembrar também que, de acordo com a Proposição 1, o comportamento no infinito do cmapo de vetores comapctificado X_H é dado por H_{m+1}. Assumindo que a esfera de Poincaré é S^n, definimos

$$E^{\infty} = \{y \in S^{n-1}; H_{m+1}(y_1, \cdots, y_n) = 0\}$$

observe que

$$E^{\infty} = (H_{m+1}|_{S^{n-1}})^{-1}\{0\}$$

e que se 0 é um valor regular de $H_{m+1} \mid |_{S^{n-1}}$, então E^{∞} é uma variedade diferenciável. Nosso objetivo nesta seção é mostrar que, genericamente, $E^{\ infty}$ é uma variedade diferenciável, conforme (GUILLEMIN,) e que genericamente todos os pontos críticos, finitos e infinitos, de $X_{\bar{H}}$ são hiperbólicos. Chamaremos de $\mathcal{H}^{m+1}$ o conjunto de todos os polinômios Hamiltonianos cujo grau é exatamente $m+1$. Definiremos $\phi : \mathcal{H}^{m+1} :\longrightarrow \mathbb{R}^n$ como sendo a função que associa a cada polinômio Hamiltonianao H de grau $m+1$, seu vetor de coeficientes em uma ordem fixa. Observe que essa aplicação não é sobrejetiva em virtude de que cada polinômio Hamiltonmiano de grau $m+1$ tem pelo menos um dos coeficientes de grau $m+1$ diferente de zero. Muniremos de $\mathcal{H}^{m+1}$ com a topologia euclideana de $\mathbb{R}^n$ usualmente chamada de "topologia coeficiente". Seja $\mathcal{Y}^{m+1} = \{H \in \mathcal{H}; E^{\infty}$ é uma variedade diferencia´vel$\}$. Provaremos que o complemento do conjunto $\mathcal{Y}^{m+1}$ está contido numa hipersuperfície algébrica. Para fazer isso precisamos da definição de resultante de dois polinômios. Sobre resultante de dois polinômios seguimos (VAINSENCHER, 1996)

Definição 2. *Sejam P e Q dois polinômios na variável x e coeficientes em $\mathbb{R}$, com graus, respectivamente, n e m, isto é*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a_{n-1}x + a_0$$

e

$$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots b_{m-1}x + b_0.$$

Então, multiplicando o polinômio $P(x)$ por $x^{m-1}, x^{m-2}, \cdots, x^2, x$ e o polinômio $Q(x)$ por $x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ obtemos o sistema linear de equações

$$\begin{cases} a_0x^{n+m+1} & + & a_1x^{n+m-1} & + & \cdots & + & a_{n-1}x^m & + & a_nx^{m-1} & = & 0 \\ a_0x^{n+1} & + & a_1x^n & + & \cdots & + & a_{n-1}x^2 & + & a_nx & = & 0 \\ a_0x^n & + & a_1x^{n-1} & + & \cdots & + & a_{n-1}x & + & a_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & & \vdots \\ b_0x^m & + & b_1x^{n-1} & + & \cdots & + & b_{n-1}x^m & + & b_n & = & 0 \\ b_0x^{m+1} & + & b_1x^m & + & \cdots & + & b_{n-1}x^2 & + & b_nx & = & 0 \\ b_0x^{m+n-1} & + & b_1x^{m+n-1} & + & \cdots & + & b_nx^2 & + & b_nx^{n-1} & = & 0 \end{cases}$$

O determinante desse sistema é chamado de resultante de P e Q e donotaremos por $Res_x(P,Q)$.

Proposição 2. *Se P e Q tem uma raíz comum $\bar{x}$, então $Res_{\bar{x}}(P,Q) = 0$.*

Demonstração. Faremos aqui a demonstração de um caso aprticular. Mas o caso geral é feito de forma análoga, ver (VAINSENCHER, 1996).

Sejam $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $Q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$. Então, nesse caso,

$$Res_{\bar{x}}(P,Q) = det \begin{Bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{Bmatrix}.$$

Se P e Q tem uma raíz comum(isto é, tem um fator comum h) entaõ, pelo algoritmo da divisão euclideana existem f e g tais que

$$P = fh \text{ e } Q = gh.$$

Além disso

$$Qf = Pg,$$

onde $grau(f) \leq 2$ e $grau(g) \leq 1$.

Sejam

$$f(x) = n_2x^2 + n_1x + n_0$$

e

$$g(x) = m_1x + m_0.$$

Então, susbstituido na igualdade acima obtemos

$$a_3m_1x^4 + a_3m_0x^3 + a_2m_1x^3 + a_2m_0x^3 + a_1m_1x^2 + a_1m_0x + a_0m_1x + a_0m_0 =$$

$$= b_2n_2x^4 + b_2n_1x^3 + b_2n_0x^2 + b_1n_1x^2 + b_1n_0x + b_0n_2x^2 + b_0n_1x + b_0n_0$$

donde

$$a_3m_1 = b_2n_2$$

$$a_3m_0 + a_2m_1 = b_2n_1 + b_1n_2$$

$$a_2m_0 + a_1m_1 = b_2n_0 + b_1n_1 + b_0n_1$$

$$a_1m_0 + a_0m_1 = b_1m_0 + b_0n_1$$

$$a_0m_0 = b_0m_0$$

que é equivalente ao sistema linear nas variáveis m_1, m_0, n_2, n_1, n_0, dado por

$$\begin{cases} a_3m_1 & & - & b_2n_2 & & & & & & = & 0 \\ a_3m_1 & + & a_3m_0 & - & b_1n_2 & - & b_2n_1 & & & = & 0 \\ a_1m_1 & + & a_2m_0 & - & b_0n_2 & - & b_1n_1 & - & b_2n_0 & = & 0 \\ a_0m_1 & + & a_1m_0 & + & & - & b_0n_1 & - & b_1n_0 & = & 0 \\ & & a_0m_0 & & & & & - & b_0n_0 & = & 0 \end{cases}$$

Como este sistema tem solução diferente da trivial, segue-se que

$$det \left\{ \begin{matrix} a_3 & 0 & -b_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & -b_1 & -b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & -b_0 & -b_1 & -b_2 \\ a_2 & a_1 & 0 & -b_0 & -b_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & -b_0 \end{matrix} \right\} = 0.$$

Como $det(A) = det(A)^T$, para qualquer matriz quadrada A, segue o resultado. $\square$

Teorema 1. *Genericamente, E^∞ é uma variedade diferenciável.*

Demonstração. É suficiente provar que o complemento do conjunto $\mathcal{Y}^{m+1}$ está contido em uma hipersuperficie algébrica de $\mathbb{R}^n$, pois isso implica que $\mathcal{Y}^{m+1}$ contém um conjunto aberto denso em $\mathcal{H}^{m+1}$. Provaremos que existe uma função $\mathcal{X} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que se $H \in \mathcal{H}^{m+1}$, então $\mathcal{X}(\phi(H)) = 0$. Sabemos que se $H \notin \mathcal{H}^{m+1}$, então $(H_{m+1}|_{S^{n-1}})^{-1}\{0\}$ tem um ponto crítico que denotaremos por $(y_1^\star, \cdots, y_n^\star)$, pois caso contrário, pelo Teorema da Função Implícita E^∞ seria uma variedade diferenciável . Assim, o sistema de equações

$$\frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_i}(y_1^\star, \cdots, y_n^\star) + 2\mu y_i^\star = 0, \;\; i = 1, \cdots n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_1^\star) - 1 = 0$$

tem uma solução não trivial, onde μ é um multiplicador de lagrange. Se multiplicarmos a i-ésima equação do sistema acima por $y_i^\star$ e adicionarmos em seguida estas n equações , obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^\star \frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_i}(y_1^\star, \cdots, y_n^\star) + \mu \sum_{i=1}^{n}(y_1^\star)^2 = 0.$$

Da homogeneidade de H_{m+1} e usando que o ponto crítico está em $S^{n-1} \cap H_{m+1}^{-1}(0)$ segue que o lado esquerdo da igualdade acima é igual a zero. Mas isso implica que $\mu = 0$. Dessa forma, obtemos um conjunto de equações homogêneas

$$\frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_i}(y_1^\star, \cdots, y_n^\star) = 0$$

que, para $i = 1, \cdots, n$ tem uma solução não trivial $(y_1^\star, \cdots, y_n^\star) \in S^{n-1.}$ seja

$$L_k = \frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_i}$$

e defina

$$R_k(y_3, \cdots, y_n) = Res_{y_2}(L_1(1, y_2, \cdots, y_n), L_k(1, y_2, \cdots, y_n), i = 1, \cdots, n$$

$$R_{2k}(y_4, \cdots, y_n) = Res_{y_3}(R_2(y_3, \cdots, y_n), R_k(y_3, \cdots, y_n), i = 3, \cdots, n$$

$$R_{23k}(y_5, \cdots, y_n) = Res_{y_4}(R_{23}(y_4, \cdots, y_n), R_{2k}(y_4, \cdots, y_n), i = 4, \cdots, n$$

$\vdots$

$$R_{23\cdots n} = Res_{y_n}(R_{23\cdots(n-1)}(y_n), R_{23\cdots(n-2)n}(y_n)),$$

onde Res_{y_i} é a resultante dos polinômios com respeito a variável y_1. Vamos mostrar que existe uma função polinomial $\mathcal{X} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que se os polinômios L_k tem uma raíz comum, então $\mathcal{X} = 0$. Note que o último passo $R_{23\cdots n}$ é uma composição de resultantes, isto é após alguns cálculos obtemos

$$R_{23\cdots n} = Res_{y_n}(Res_{y_{n_1}}(Res_{y_{n_2}} \cdots Res_{y_1})))$$

o que torna $R_{23\cdots n}$ exatamente um número que depende apenas dos coeficientes do polinômio H_{m+1}. Afirmamos que se a solução $(y_1^\star, \cdots, y_n^\star)$ tiver $y^\star \neq 0$, então $R_{23\cdots n} = 0$, pois se $y^\star \neq 0$, pela homegeneidade de L_k segue que se $\bar{y_k} = \frac{y_k^\star}{y_1^\star}$, para $k = 2, \cdots n$, então os sistemas $L_1(1, \xi, \bar{y_3}, \cdots, \bar{y_n}) = 0$ e $L_k(1, \psi, \bar{y_3}, \cdots, \bar{y_n}) = 0$ para $k = 2, \cdots n$, tem solução comum $\xi = \frac{y_2^\star}{y_1^\star}$. Portanto $R_k(y_3, \cdots, y_n) = 0$ para $k = 2, 3, \cdots n$. Dessa forma, considerando os polinômios $R_k(\xi, \bar{y_3}, \cdots, \bar{y_n})$ vemos que eles tem a raíz comum $\xi = \bar{y_3}$ e portanto $R_{23k}(\bar{y_4}, \cdots, \bar{y_n}) = 0$. Deste modo obtemos que $R_{23\cdots n} = 0$ e chamaremos $R_{23\cdots n}$ de $\mathcal{X}_1$ que não necessariamente é zero se $y_1^\star = 0$.

Se a solução $(y_1^\star, \cdots, y_n^\star)$ tiver $y_1^\star$ 0, nós apenas trocamos $L_k(1, y_2, \cdots, y_n)$ por $L_k(y_1, \cdots, 1, \cdots, y_n)$ onde o 1 aparece na k-ésima posição na definição de R_k. Então, procedendo como antes, obtemos $\mathcal{X}_j$. Finalmente definimos $\mathcal{X} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\mathcal{X} = \prod_{j=1}^n \mathcal{X}_j$ que é igual a zero para uma uma solução não trivial do sistema de equações polinomiais homogêneas original.

Agora, esta função polinomial $\mathcal{X}$ depende apenas dos coeficientes do termo de maior grau do polinómio H. Mas, podemos definí-la com respeito a todos os coeficientes através do produto dela pelos demais coeficientes e assim concluimos a demonstração. $\square$

Faremos agora o estudo dos pontos críticos finitos e infinitos do Hamiltoniano polinomial. Para isso necessitamos do seguinte resultado.

Proposição 3. *Dado um polinômio real $q(x)$, definimos os polinômios $q_1(x)$ e $q_2(x)$ por $q(ix) = q_1(x) + iq_2(x)$, onde $i = \sqrt{-1}$. Se $q(x)$ tem uma raíz que é um número imaginário puro ib, então a resultante $Res(q_1, q_2) = 0$*

Demonstração. É suficiente provar que os polinômios q_1 e q_2 tem a mesma raíz comum. Mas como $q(ib) = 0$ isso implica que $q_1(b) + q_2(b) = 0$ logo $q_1(b) = 0$ e $q_2(b) = 0$ e assim b é raís de q_1 e de q_2, o que conclui a demosntração. $\square$

Seja $\Delta^{m+1} \subseteq \mathcal{H}^{m+1}$, o subconjunto dos $H \in \mathcal{H}^{m+1}$ tais que os pontos críticos do fluxo hamiltoniano compactificado, associado a H ,são hiperbólicos. Como no teorema anterior , mostraremos que $\mathcal{H}^{m+1} \setminus \Delta^{m+1}$ está contido em uma hipersuperfície algébrica. Com este resultado provaremos o seguinte:

Teorema 2. *Genereicamente a compactificação de Hamiltonianos polinomiais tem todos os seus pontos críticos, finitos e infinitos, hiperbólicos.*

Demonstração. Como no teorema 1, provaremos que se $H \in H^{m+1} \setminus \Delta^{m+1}$, então existe uma função polinomial $\mathcal{P} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{P}(\Phi^{-1}(H)) = 0$. Para isso, consideramos primeiro as equações que definem os pontos críticos do fluxo Hamiltoniano compactificado associado a H na carta local (U_1, F_1) com coordenadas $(z_1, \cdots, z_n)$. Seja $q(xi)$ o polinômio característico em um ponto crítico e $q_1(xi)$, $q_2(xi)$ como na proposição anterior. Então se $H \in H^{m+1} \setminus \Delta^{m+1}$, o conjunto de equações

$$
\begin{gathered}
z_1' = P_1'(z_1, \cdots, z_n, 0) = 0 \\
z_2' = P_2'(z_1, \cdots, z_n, 0) = 0 \\
\vdots \\
z_n' = P_n'(z_1, \cdots, z_n, 0) = 0 \\
q_1(z_1, \cdots, z_n, \xi) = 0 \\
q_2(z_1, \cdots, z_n, \xi) = 0
\end{gathered}
$$

Tem uma solução real comum.Este conjunto de equações são polinómios nos coeficientes do Hamiltoniano original H. Usando um argumento similar ao do teorema 1, segue-se que existe uma função polinomial $\mathcal{X}_1$, tal que $\mathcal{P}_1 = 0$. Procedendo similarmente com o restante das cartas, obtemos $\mathcal{P}_j$, para $j = l, 2, \cdots, n + l$. Assim, definindo$\mathcal{P} = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{P}_j$ temos que se $H \in H^{m+1} \setminus \Delta^{m+1}$ então $\mathcal{P} = 0$, completando a demonstração. □

3.2.2 Comportamento no Inifinito no Caso Monomial

Agora faremos a análise do caso em que a parte homogénea de maior grau do Hamiltoniano polinomial tem um único termo. Neste caso podemos dar uma completa descrição do campo de vetores perto ou no infinito. Dado um Hamiltoniano polinomial H, suponha que sua parte homogênea de maior grau tem a forma

$$H_{m+1}(y_1, \cdots, y_n) = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n}$$

Onde $\alpha_i \leq 0$, para $i = l, \cdots, n$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m + 1$. Seja

$$S_j^{n-2} = \Big\{(y_1, \cdots, y_n) \in S^{n-1}; y_j = 0\Big\}.$$

O Teorema abaixo reúne todos os resultados obtidos sobre o comportamento no infinito neste caso.

Teorema 3. *Suponha que H_{m+1} é um único polinômio. Então,*

- *a) Se $\alpha_i \geq 1$, então $E^{\infty = \cup_{j=1}^{n}} S_j^{n-2}$;*
- *b) Se $\alpha_1 \geq 2$, Então S_j^{n-2} consite inteiramente de pontos críticos;*
- *c) Se $\alpha_i, \alpha_k \geq 1$, para $i \neq k$, então $S_j^{n-2} \cap S_k^{n-2}$ é uma $(n - 3$ esfera de pontos críticos;*
- *d) Se $\alpha_i = 1$, então sobre S_i^{n-2} não há pontos críticos distintods dos descritos no item c). se $\alpha_{i+d} \geq 1$, , então qualquer solução começa em alguma esfera de pontos críticos $S_j^{n-2} \cap S_k^{n-2}$ e termina em $S_j^{n-2} \cup S_k^{n-2}$. Se $\alpha_{i+d} = 0$, então qualquer solução começa e termina em alguma esfera de pontos críticos $S_j^{n-2} \cap S_k^{n-2}$.*

Demonstração. Observe que o conjunto E^{∞} é definido pelas equações

$$H_{m+1}(y_1, \cdots, y_n) = 0$$

com

$$y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 1.$$

Assim, desde que o polinómio H_{m+1} não contenha fatores y_i, com $\alpha_i = 0$, a parte a) segue facilmente pois com isso estamos eliminando a possibilidade de aparecer indeterminações do tipo 0^0. Agora suponha que $\alpha_i \geq 2$,. Então no cálculo de $\frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_k}$ existe alguma potência positiva de y_i e, de acordo com a proposição 1 as equações do campo compactificado são

$$\begin{array}{rcrcl} y_i' &=& \frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_i} &+& \lambda y_i \\ y_{i+d}' &=& -\frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_{i+d}} &+& \lambda y_{i+d} \end{array}$$

Para $i = 1, \cdots, d$. E como $y_i = 0$ todas as equações do sistema acima se anulam. Isso significa que S_j^{n-2} consiste de pontos críticos e consequentemente b) está provado.

Para provar c), usamos um argumento similar. Agora suponha que $\alpha_i = 1$ e sem perda de generalidades que $1 \geq i \geq d$. Então é fácil ver que S_i^{n-2} é invariante e as equações globais restritas a S_i^{n-2} se reduzem a

Para qualquer condição inicial não contida na esfera de pontos críticos $S_i^{n-2} \cap S_k^{n-2}$, nós podemos reparametrizar as soluções multiplicando as equações do campo por um fator comum $(\frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_i})^{-1}$ e assim o sistema anterior torna-se

Onde o $(\dot{})$, como antes, significa a derivada com respeito ao tempo. Das primeiras equações acima , temos que y_{j+c} decresce monotonicamente de $y_{i+d} = 1$ para $y_{i+d} = -1$, passando por $y_{i+d} = 0$. No intervalo de valores $-1 < y_{i+d} < 0$ nenhuma outra coordenada y_k se anula e portanto as soluções terminam em $y_{i+d} = 0$ se o expoente $\alpha_{i+d} \geq 1$, ou passam e terminam em $y_n = 0$ se $\alpha_{i+d} = 0$. isso prova d) e termina a demonstração. $\square$

3.3 COMPACTIFICAÇÃO DE POINCARÉ PARA CAMPOS DE VETORES DEFINIDOS POR FUNÇÕES HOMOGÊNEAS

Já temos a noção de compactificação de Poincaré definida para campos de vetores polinomiais. Faremos agora uma generalização para campos de vetores definidos por soma de funções homogéneas.

Para isso, seja

$$X = (f_1, \cdots, f_n)$$

um campo em $\mathbb{R}^n$, onde cada f_i é uma soma de funções homogêneas, isto é

$$f^i = (x_1, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{k_i} f_j^i = (x_1, \cdots, f_n)$$

onde f_j^i é uma função homogênea com grau de homogeneidade m_{ij}. Da mesma forma como fizemos na seção 3.1, identificaremos $\mathbb{R}^n$ com o hiperplano

$$\pi = \{y \in \mathbb{R}^n; y_{n+1} = 1\}.$$

tangente a esfera de Poincaré no seu polo norte e tomamos a projeção central. H^+ e H^- denotarão, respectivamente, o hemisfério norte e sul da esfera de Poincaré S^n. Como na seção 3.1, X induz um campo de vetores $\hat{X}$ sobre $H^+ \cup H^-$ definido por

$$\hat{X} = \begin{cases} (D\Phi^+)_x X(x), & \text{se } y = \Phi^+(x) \\ (D\Phi^-)_x X(x), & \text{se } y = \Phi^-(x) \end{cases}$$

A expressão para $\hat{X}$ em $H^+ \cup H^-$ é como na seção 3.1 e podemos extender o fluxo dado por $\hat{X}$ sobre $S^n \setminus S^{n-1}$ para S^n. Essa extensão é chamada de comapctificação de Poincaré do campo $\hat{X}$ e é definida por

$$\Lambda(y) = y_{n+1}^{m-1} \hat{X}(y).$$

A expressão para $\Lambda(y)$ sobre S^n é dada por

$$\Lambda(y) = \begin{pmatrix} 1 - y_1^2 & -y_1 y_2 & \cdots & -y_1 y_n \\ -y_2 y_1 & 1 - y_2^2 & \cdots & -y_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_{n+1} y_1 & -y_{n+1} y_2 & \cdots & -y_{n+1} y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n+1}^m \hat{f}_1 \\ y_{n+1}^m \hat{f}_2 \\ \vdots \\ y_{n+1}^m \hat{f}_n \end{pmatrix}$$

Onde

$$\hat{f}(y_1, \cdots, y_n) = \sum_{j=1}^{k_1} f_j^i \left(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \cdots, \frac{y_n}{y_{n+1}}\right)$$

e $m = max(m_{ij})$.

Note que no caso particular em que as funções f_i são polinômios, para $i = 1, \cdots, n$, então ambas as definições 2.1 e 2.3 coincidem. Observamos ainda que o infinito é invariante pelo fluxo dado por Λ. Como fizemos na seção 2.1, daremos a expressão analítica de $\Lambda(Y)$ em cada carta local, isto é, aqui, como no caso polinomial, consideraremos S^n como uma variedade diferenciável coberta por $2(n+1)$ cartas locais. Fazendo cálculos semelhantes ao que fizemos na seção 2.1 e lembrando que em cada carta local devemos multiplicar a expressão obtida pelo fator $\Lambda(z)^{m+1} > 1$, segue que

Em U_1, temos

$$z_n^m(-z_1\hat{f}^1 + \hat{f}^2, -z_2\hat{f}^1 + \hat{f}^3, \cdots, -z_{n-1}\hat{f}^1 + \hat{f}^n, -z_n\hat{f}^1)$$

onde $\hat{f}^i = \sum_{j=1}^{k_i} z_n^{-m_{ij}} f_j^i(1, z_1, \cdots, z_{n-1})$;

Em U_2, temos

$$z_n^m(-z_1\hat{f}^2 + \hat{f}^1, -z_2\hat{f}^2 + \hat{f}^3, \cdots, -z_{n-1}\hat{f}^2 + \hat{f}^n, -z_n\hat{f}^2)$$

onde $\hat{f}^i = \sum_{j=1}^{k_i} z_n^{-m_{ij}} f_j^i(z-1, 1, z_3, \cdots, z_{n-1})$;

$\vdots$

Em U_n, temos

$$z_n^m(-z_1\hat{f}^n + \hat{f}^1, -z_2\hat{f}^n + \hat{f}^2, \cdots, -z_{n-1}\hat{f}^n + \hat{f}^{n-1}, -z_n\hat{f}^n)$$

onde $\hat{f}^i = \sum_{j=1}^{k_i} z_n^{-m_{ij}} f_j^i(z-1, \cdots, z_{n-1}, 1)$;

Em U_{n+1}, temos

$$(f^1, \cdots, f^n),$$

onde $f\hat{\imath} = f^1(z^1, \cdots, z^n)$.

4 APLICAÇÕES À MECÂNICA CELESTE

Faremos agora algumas aplicações da compactificação de Poincaré a problemas concretos de mecânica celeste. O problema de Kepler, por exemplo, será abordado de duas formas diferentes. Numa delas, usando as transformações de Levi-Civita, regularizamos as singularidades do Hamiltoniano. Na outra, resolveremos diretamente com o Hamiltoniano original fazendo uso da teoria desenvolvida para campos de vetores definidos por funções homogéneas. Em seguida usaremos a compactificação de Poincaré para estudarmos o comportamento no infinito do problema de três corpos colineares e também do problema lunar de Hill.

4.1 O PROBLEMA DE KEPLER NA RETA

Neste caso a função Hamiltoniana é dada por

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2}$$

com $q \geq 0$ e $p \in \mathbb{R}$. Como esta função não é polinomial, devemos fazer uma mudança de coordenadas para que a compactificação de Poincaré possa ser aplicada. Usando as transformações de Levi-civita, juntamente com um reescalamento apropriado do tempo, nós obtemos, para cada nível de energia $H = h$ fixo, a mudança de variáveis

$$q = Q^2, p = \frac{P}{2Q}, \frac{dt}{d\xi = 4q^2}$$

e o novo Hamiltonianao torna-se

$$\hat{H} = \frac{P^2}{2} - 4hQ^2 - 4.$$

Sobre este novo Hamiltoniano estamos interessados em seu fluxo no nível de energia $H = 0$.

Aqui a esfera de Poincaré é

$$S^2 = \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3; y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\right\}$$

O grau do campo de vetores polinomiais Hamiltoniano associado é $m = 1$ e $d = 1$ é o número de graus de liberdade com $n = 2d$. Para estudarmos 0 campo de vetores sobre

S^2, fazemos a substituição de variáveis

$$Q = \frac{y_1}{y_3}, \;\; P = \frac{y_2}{y_3}$$

no polinómio $\bar{H}$ o multiplicamos pelo fator y_3^2 para obtermos a função $\hat{H}$ que gera o campo de vetores $\hat{X}$ definido sobre toda a esfera de Poincaré. A função $\hat{H}$ sendo então dada por $\hat{H}(y_1, y_2, y_3) = \frac{y_2^2}{2} - 4hy_1^2 - 4y_3^2$

O campo de vetores sobre S^2 é dado por

$$y_1' = y_2(1 - y_1^2(8h+1))$$

$$y_2' = (8h - y_2^2(8h+1))$$

$$y_3' = -(8h+1)y_1y_2y_3$$

E fácil ver que os únicos pontos críticos $y \in S^2$ que também satisfazem a relação de energia $\hat{H} = 0$ estão localizados no infinito e são dados por

$$y_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{8}h+1}, y_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{8}h+1}, y_3 = 0,$$

com $h \geq 0$.

Se $h > 0$, obtemos quatro pontos no equador e se $h = 0$ obtemos apenas dois. Vale lembrar que o caso$h < 0$ impede que tenhamos o fluxo numa vizinhança do infinito, pois do Hamiltoniano original

$$h = H(q,p) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2}$$

temos que

$$h + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow q \leq -\frac{1}{h}$$

e assim a variável q fica contida em uma região limitada que também é conhecida como região de Hill.

Para o caso $h > 0$, se $(y_1(t), y_2(t), y_3)t))$ é uma solução, com nível de energia h, indo para um ponto crítico temos

$$Q = \frac{y_1}{y_3} \longrightarrow \infty \quad \text{e} \quad P = \frac{y_2}{y_3} \longrightarrow \infty$$

Mas, nas coordenadas originais, isto significa que

$$q \longrightarrow \infty \quad \text{e } p = \frac{P}{2Q} = \frac{y_2}{2y_1} \longrightarrow \infty$$

que corresponde ao movimento hiperbólico.

Para $h = 0$, temos

$$q \longrightarrow \infty \quad \text{e } p \longrightarrow \infty$$

que corresponde ao movimento parabólico.

4.2 O PROBLEMA DE KEPLER NO PLANO

A função Hamiltoniana neste caso é dada por

$$H(q,p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|}$$

Com $q, p \in \mathbb{R}^2$ e $q \neq (0,0)$. Como no caso linear, regularizamos as singularidades por Levi-Civita considerando (q,p) e (Q,P) como variáveis complexas, isto é , fazendo

$$q = Q^2, p = \frac{P}{2Q}, \frac{dt}{d\xi = 4q^2},$$

o Hamiltoniano regualrizado é

$$\hat{H} = \frac{|P|^2}{2} - 4h|Q|^2 - 4.$$

Neste caso nós temos um sistema com dois graus de liberdade, isto é $d = 2$ e $n = 2d = 4$ é o número de variáveis. Assim a compactificação de Poincaré nos dará um campo de vetores sobre S^4. O grau do campo de vetores polinomial é $m = 1$. Fazendo a substituição de variáveis

$$Q_1 = \frac{y_1}{y_5}, P_1 = \frac{y_3}{y_5}$$

$$Q_2 = \frac{y_2}{y_5}, P_1 = \frac{y_4}{y_5}$$

e multiplicando pelo fator y_5^2, obtemos a função $\hat{H}$ que gera o campo de vetores sobre S^4

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(y_3^2 + y_4^2) - 4h(y_1^2 + y_2^2) - 4y_5^2.$$

As equações do campo de vetores compactificado são

$$y_1' = y_3 + \lambda y_1 y_3' = 8hy_1 + \lambda y_3$$

$$y_2' = y_4 + \lambda y_3 y_4' = 8hy_2 + \lambda y_4$$

$$y_5' = \lambda y_5,$$

Onde $\lambda = -(8h+1)(y_1y_3 + y_2y_4)$.

Das equações do campo de vetores compactificado segue-se que o infinito é invariante, e como no problema de Kepler linear temos que se $h > 0$, podemos extender a relação de energia $\hat{H} = 0$ para a esfera no infinito

$$S^3_\infty = \Big\{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4;\ \ y_5 = 0;\ \ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1\Big\}$$

Considerando primeiro o caso $h > 0$, temos que a relação de energia no infinito será

$$S^3_\infty = \Big\{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S^3_\infty;\ y_3^2 + y_4^2 - 8h(y_1^2 + y_2^2) = 0\Big\}$$

que em virtude de

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1$$

se reduz a

$$E_h^\infty = \left\{(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in S^3_\infty;\ \ y_1^2 + y_2^2 = \frac{1}{8h+1};\ \ y_3^2 + y_4^2 = \frac{8h}{8h+1}\right\},$$

isto é, E_h^∞ é um $2-toro$.

Das equações do campo compactificado temos que os únicos pontos críticos satisfazendo a relação de energia $\hat{H} = 0$ estão no infinito e são dadas pelas equações

$$y_3 = -\lambda y_1, y_1 = -(\frac{\lambda}{8h})y_3;$$

$$y_4 = -\lambda y_2, y_2 = -(\frac{\lambda}{8h})y_4;$$

Destas últimas equações obtemos $\lambda^2 = 8h$, e portanto

$$y_3 = \pm\sqrt{8h}y_1$$

$$y_4 = \pm\sqrt{8h}y_2.$$

E assim concluimos que os pontos críticos são dois círculos que denotaremos por $C_h^{\pm}$ no 2—toro E_h^{∞}, que podem ser parametrizados por um ângulo γ, isto é

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{\sqrt{8h+1}}(cos\gamma, sin\gamma, \epsilon\sqrt{8h}cos\gamma, \epsilon\sqrt{8h}sen\gamma),$$

onde a escolha $\epsilon = \pm 1$, fornece os círculos de equilíbrio.

Considerando cartas locais para calcular o campo de vetores linearizado, temos que na carta local (U_1, F_1) o campo de vetores é dado por

$$z_1' = -Z_1Z_2 + Z_3, z_3' = -z_2z_3 + 8hz_1,$$

$$Z_2' = -Z_2^2 + 8h, z_4' = {}^{-}z_2z_4.$$

Calculando os pontos críticos do campo linearizado temos que os círculos de equilíbrio são dados localmente pelas equações

$$z_2 = a, z_3 = az_1, z_4 = 0,$$

onde $a = \epsilon\sqrt{8h}$, e o polinômio característico do campo de vetores linearizado em um ponto de equlíbrio é

$$p(\lambda) = \lambda(2a+\lambda)^2(a+\lambda).$$

Desde que este polinômio tem um único autovalor nulo e E_h^{∞} é uma variedade invariante, segue-se que os círculos C_h^{ϵ} são normalmente hiperbólicos: C_h^{+}é um atrator C_h^{-} é um repulsor. De fato, o fluxo sobre a variedade invariante $E_h^{\infty} = S^1 \times S^1$, em termos de variáveis angulares, onde

$$y_1 = r_1cos\gamma, y_3 = r_2cos\phi$$

$$y_2 = r_1sin\gamma, y_4 = r_2sin\phi$$

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{8h+1}}, r_2 = \sqrt{\frac{8h}{8h+1}},$$

é dado por

$$\gamma' = \sqrt{8h} sen(\phi - \gamma)$$

$$\phi' = -\sqrt{8h} sen(\phi - \gamma),$$

donde concluimos que no plano de (γ, ϕ) as trajetórias são linhas retas de inclinação -1 e os pontos críticos correspondem aos pontos $\phi = \gamma$ e $\phi = \gamma + \pi$.

No retrato de fases no plano (γ, ϕ), $\phi = \gamma$ e $\phi = \gamma + \pi$ são, respectivamente, atratores e repulsores e isto significa que C_h^+ é um atrator C_h^- é um repulsor.

4.3 O PROBLEMA DE KEPLER SEM REGULARIZAR

A compactificação de Poincaré para campos de vetores definidos por funções homogêneas pode ser usado para estudar o comportamento no infinito de uma grande quantidade de campos de vetores. Faremos agora uma dessas aplicações para o caso do problema de Kepler tanto linear quanto planar.

4.3.1 O problema de Kepler na reta

A função Hamiltoniana , como vimos anteriormente , é

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2}$$

com $q \geq 0$ e $p \in \mathbb{R}$.

O campo de vetores Hamiltonianos é dado por

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{1}{q^2}.$$

Neste caso, $f_1(q,p) = p$ com $m_1 = 1$ e $f_2(q,p) = -\frac{1}{q^2}$ com $m_2 = -2$, portanto $m = max(m_1, m_2) = 1$. O sistema na esfera de Poincaré tem a forma

$$y_1' = (1 - y_1^2)y_2 + \frac{y_2 y_3^2}{y_1}$$

$$y_2' = -y_1 y_2^2 - \frac{(1 - y_2^2)y_3^3}{y_1^2}$$

$$y_3' = -y_3\left(y_1 y_2 - \frac{y_2 y_3^3}{y_1^2}\right).$$

Observa-se que o sistema acima apresenta uma singularidade quando $y_1 = 0$, que corresponde a singularidade $q = 0$ no sistema original. Desde que o espaço de configuração é $\mathbb{R}^+$ isto implica que na esfera de Poincaré, $y_1 > 0$. Por outro lado, como o sistema na esfera de Poincaré apresenta expressões complicadas, optamos por estudar tal campo fazendo uso de cartas locais. Assim,

na carta local (U_1, F_1), o sistema é expresso como

$$z_1' = -(z_1^2 + z_2^2)$$

$$z_2' = -z_2 z_1$$

O sistema acima tem um único ponto de equilíbrio dado por $(z_1, z_2) = (0, 0)$. Este ponto de equilíbrio não é hiperbólico.

Na carta local (U_2, F_2), temos

$$z_1' = \frac{z_2^3}{z_1} + 1$$

$$z_2' = \frac{z_2^4}{z_1^2}$$

e aqui não temos ponto de equilíbrio.

Na carta U_s, F_3 temos o sistema original, que não tem nenhum ponto de equilíbrio. Portanto, o sistema tem um único ponto de equilíbrio na carta (U_1, F_1) e que na esfera de Poincaré corresponde ao ponto $(\pm 1, 0, 0)$. Fixando um nível de energia h, temos

$$h = H(q,p) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Assim,

- (i) se $h > 0$ temos da relação na carta (U_1, F_1)

$$z_1 = \frac{y_2}{y_1} = \frac{p}{q} = 0,$$

$$z_2 = \frac{y_3}{y_1} = \frac{1}{q} = 0$$

e usando a relação de energia acima concluimos que

$$q \longrightarrow \infty \quad \text{e} \quad p \longrightarrow \pm\sqrt{2h}$$

que corresponde ao movimento hiperbólico.

- (ii) Para $h = 0$, temos a mesma conclusão, mas aqui

$$q \longrightarrow \infty \quad \text{e} \quad p \longrightarrow 0$$

que corresponde ao movimento parabólico.

- (iii) Se $h < 0$, então $h + \frac{1}{h} \geq 0$ que implica que $q \leq -\frac{1}{h}$. Isto significa que o sistema é limitado e portanto o escape para o infinito se dá apenas na variável momento. Na variável original temos que, quando a partícula tende a colisão, $q \longrightarrow 0$ e $|p| \longrightarrow \infty$. Na esfera de Poincaré isto significa que as órbitas terminam nos pontos da forma $(0, \pm 1, 0)$que foram excluidos anteriormente.

4.3.2 O problema de Kepler na plano

Aqui a função Hamiltoniana é dada por

$$H(q,p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|}$$

Com $q, p \in \mathbb{R}^2$ e $q \neq (0,0)$.

O campo Hamiltoniano tem a forma

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1, \ \ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{q_1}{\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)^3}},$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2, \ \ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -\frac{q_2}{\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)^3}},$$

onde $p = (p_1, p_2)$ e $q = (q_1, q_2)$. Aqui as funções homogêneas são dadas por

$$f_1 = p_1, f_2 = p_2, f_3 = -\frac{q_1}{\sqrt{(q_1^2+q_2^2)^3}}, -\frac{q_2}{\sqrt{(q_1^2+q_2^2)^3}}.$$

O grau de homogeneidade de f_1 e f_2 é 1 e o de f_3 e f_4 é -2 e com isso $m = 1$.

O campo de vetores sobre S^4 é dado por

$$\begin{aligned}
y_1' &= (1-y_1^2) - y_1y_2y_3 + \tfrac{y_1y_5^3}{\Delta}(y_1y_3 + y_2y_4) \\
y_2' &= -y_1y_2y_3 + (1-y_2)^2y_4 + \tfrac{y_2y_5^3}{\Delta}(y_1y_3 + y_2y_4) \\
y_3' &= -y_1y_3^2 - y_1y_3y_4 - \tfrac{y_5^3}{\Delta}(y_1(1-y_5^3) - y_2y_3y_4) \\
y_4' &= -y_1y_3y_4 - y_2y_4^2 - \tfrac{y_5^3}{\Delta}(-y_1y_3y_4 + y_2(1-y_4^2), \\
y_5' &= y_5(-y_1y_3 - y_2y_4) - \tfrac{y_5^3}{\Delta}(y_1y_3 + y_2y_4).
\end{aligned}$$

onde $\Delta = \sqrt{(y_1^2+y_2^2)^3}$. Observamos que este campo de vetores não está definido quando $y_1 = y_2 = 0$, que corresponde , na esfera de Poincaré, a esfera

$$S^2 = \left\{ y \in S^4; y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 = 1 \right\}.$$

Isto ocorre porque o sistema original não está definido em que $q_1 = q_2 = 0$, que correspondem a singularidades devidas a colisões. O equador de S^4 dado por $y_5 = 0$ é, como podemos ver pelas equações acima, invariante. Para encontrarmos os pontos críticos, estudaremos o campo de vetores compactificado nas cinco cartas locais (U_i, F_i), $i = 1, \cdots, 5$.

Na carta local (U_1, F_1), o sistema tem a forma:

$$\begin{aligned}
z_1' &= -z_1z_2 + z_3, \\
z_2' &= -z_2^2 - \tfrac{z_4^3}{\sqrt{(1+z_1^2)^3}} \\
z_3' &= -z_3z_2 - \tfrac{z_4^3}{\sqrt{(1+z_1^2)^3}} \\
z_4' &= -z_2z_4.
\end{aligned}$$

Os pontos críticos são dados por $(z_1, 0, 0, 0)$, que na esfera de Poincaré S^4 corresponde ao conjunto

$$\{y \in S^4; y_1^2 + y_2^2 = 1\}.$$

Isto é, temos uma circunferência menos dois pontos $(0, \pm 1)$, (que corresponde a $y_1 = 0$).

Na carta local (U_2, F_2), o sistema é dado por:

$$\begin{aligned}
z_1' &= -z_1z_3 + z_2,\\
z_2' &= -z_2^2 - \tfrac{z_1z_4^3}{\sqrt{(1+z_1^2)^3}}\\
z_3' &= -z_3z_2 - \tfrac{z_4^3}{\sqrt{(1+z_1^2)^3}}\\
z_4' &= -z_4z_3.
\end{aligned}$$

Os pontos críticos nesta carta são os mesmos da carta (U_1, F_1).

Na carta local (U_3, F_3), temos:

$$\begin{aligned}
z_1' &= \tfrac{z_1^2z_4^3}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^3}} + 1,\\
z_2' &= \tfrac{z_1z_2z_4^3}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^3}} + z_3\\
z_3' &= -\tfrac{z_1z_3z_4^3}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^3}} - \tfrac{z_2z_4^3}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^3}}\\
z_4' &= -\tfrac{z_1z_4^4}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^3}}.
\end{aligned}$$

Nesta carta não temos pontos críticos, o mesmo ocorrendo nas cartas (U_4, F_4) e (U_5, F_5).

Portanto, existe somente uma circunferência de pontos críticos, todos localizados no infinito, isto é , pertencentes ao equador $y_5 = 0$ da esfera de Poincaré S^4.

Se analizarmos a linearização do campo de vetores compactificado nas cartas locais, verificaremos que os pontos críticos são muito degenerados no sentido que todos os autovalores são iguais a zero.Contudo, anlisando o conjunto de pontos críticos juntamente com a relação de energia, poderemos dar uma interpretação física dos pontos críticos. Para qualquer nível fixo de energia $H = h$, temos:

- Se $h > 0$, da caracterização do conjunto de pontos críticos na carta local (U_1, F_1), temos

$$z_2 = \frac{y_3}{y_1} = \frac{p_1}{q_1} = 0$$
$$z_3 = \frac{y_4}{y_1} = \frac{p_2}{q_1} = 0$$
$$z_4 = \frac{y_5}{y_1} = 0$$

Da relação de enrgia $\frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|} = h$, temos que $(p_1, q_1) \neq (0,0)$ e dessa forma $|q| \longrightarrow \infty$ e $|p| \longrightarrow \ pm\sqrt{2h}$ que corresponde ao movimento parabólico. No caso $h = 0$ temos que $|q| \longrightarrow \infty$ e $|p| \longrightarrow 0$, que corresponde ao movimento parabólico.

- Se $h < 0$, da relaçao de energia $\frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|} = h$,

  temos que $|q| \leq -\frac{1}{h}$, que significa que o espaço de configuração é limitado. Como no problema de Kepler na reta, o escapr para o infinito se dá apenas na variável momento. Lembrando que neste caso o espaço de configuração é $\{q \in \mathbb{R}^2; q \neq (0,0)\}$, e isto implica que sobre a esfera de Poincaré devemos remover o conjunto

$$\left\{(y_1, \cdots, y_5); y_1 = y_2 = 0; y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 = 1\right\}.$$

  Assim, quando $q \longrightarrow \infty$, $|p| \longrightarrow \infty$. Em outras palavras, o escape para o infinito na variável momento é assintótico ao conjunto $\{(y_1 = y_2 = y_5 = 0, y_3^2 + y_4^2 = 1.\}$

4.4 O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS COLINEARES

Considere 3 partículas na reta, onde $m_i, i = 1,2,3$ são suas massas e $q_i, i = 1,2,3$ são suas posições que suporemos na seguinte ordem: $q_3' < q_1' < q_2'$. A função Hamiltoniana associada a estas três partículas é dada por

$$H' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{p_i^2}{m_i} - \frac{m_2 m_3}{q_2' - q_3'} + \frac{m_3 m_1}{q_3' - q_1'} + \frac{m_1 m_2}{q_1' - q_2'}.$$

Se introduzirmos a mudança de coordenadas

$$q_1 = q_2' - q_3' > 0,$$

$$q_2 = q_3' - q_1' < 0,$$

$$q_3 = q_1' - q_2' < 0,$$

$$\langle q \rangle = \frac{m_1}{M}q_1' + \frac{m_2}{M}q_2' + \frac{m_3}{M}q_3',$$

onde $M = m_1 + m_2 + m_3$. Então, nessas coordenadas, $q_1 + q_2 + q_3 = 0$.

A mudança de coordenadas acima pode ser escrita como:

$$q = Aq'$$

, onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{m_1}{M} & \frac{m_2}{M} & \frac{m_3}{M} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \langle q \rangle \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad q' = \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{pmatrix}$$

Além disso, as variáveis q'_1 podem ser escritas em termos das variáveis q_i e $\langle q \rangle$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} q'_1 &= \frac{1}{M}(m_2 q_3 - m_3 q_2) + \langle q \rangle \\ q'_2 &= \frac{1}{M}(m_3 q_1 - m_1 q_3) + \langle q \rangle \\ q'_3 &= \frac{1}{M}(m_1 q_2 - m_2 q_1) + \langle q \rangle. \end{aligned}$$

Dessa forma, o Hamiltoniano pode ser escrito como uma nova função $H''(q, p')$ da seguinte maneira

$$H'(q, p') = H''(Aq', p'),$$

Onde

$$H'' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \frac{(p'_i)^2}{m_i} - \frac{m_2 m_3}{q_1} + \frac{m_3 m_1}{q_2} + \frac{m_1 m_2}{q_3}.$$

Definiremos agora uma nova variável momento dada por

$$p' = A^T p$$

com

$$p' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \langle q \rangle \end{pmatrix}$$

Considerando então o novo Hamiltoniano

$$H(q,p) = H''(q, A^T p),$$

que se escreve da seguite forma

$$H = \frac{1}{2\mu_{23}}p_1^2 + \frac{1}{2\mu_{31}}p_2^2 + \frac{1}{2\mu_{12}}p_3^2 + \frac{1}{2M} - (\frac{p_2 p_3}{m_1} +)\frac{p_3 p_1}{m_2} + \frac{p_1 p_2}{m_3} - \frac{m_2 m_3}{q_1} + \frac{m_3 m_1}{q_2} + \frac{m_1 m_2}{q_3},$$

Onde, $\mu_{ij} = m_i^{-1} + m_j^{-1.}$

Após essa série de transformações feitas no Hamiltoniano original, introduzimos agora novas coordenadas para obtermos um Hamiltoniano polinomial.

Seja então

$$q_1 = Q_1^2, p_1 = \frac{P_1}{2Q_1}$$
$$q_2 = -Q_2^2, p_2 = \frac{-P_2}{2Q_2}$$
$$q_1 = -Q_3^2, p_3 = \frac{-P_3}{2Q_3}$$

Usando o fato que o Hamiltoniano é uma integral primeira, nos restringiremos ao nível de energia $H = h$. Dessa forma, se definirmos

$$\bar{H} = Q_1^2 Q_2^2 Q_3^2 (H - h)$$

e um novo tempo

$$\frac{dt}{d\xi} = Q_1^2 Q_2^2 Q_3^2.$$

As equações do movimento do problema dos três corpos colineares em $H = h$, correspondem as equações Hamiltonianas definidas pelo Hamiltoniano

$$\begin{aligned}
\bar{H} &= \frac{1}{8}\left(\frac{Q_2^2 Q_3^2 P_1^2}{\mu_{23}} + \frac{Q_3^2 Q_1^2 P_2^2}{\mu_{31}} + \frac{Q_1^2 Q_2^2 P_3^2}{\mu_{12}}\right) - \\
&- \frac{1}{4}\left(\frac{Q_1^2 Q_2 Q_3 P_2 P_3}{m_1} + \frac{Q_2^2 Q_3 Q_1 P_3 P_1}{m_2} + \frac{Q_3^2 Q_1 Q_2 P_1 P_2}{m_3}\right) - \\
&- (m_2 m_3 Q_2^2 Q_3^2 + m_3 m_1 Q_3^2 Q_1^2 + m_1 m_2 Q_1^2 Q_2^2 + h Q_1^2 Q_2^2 Q_3^2)
\end{aligned}$$

no nível de energia $h = 0$ Para aplicarmos a compactificação de Poincaré, renomearemos as variáveis acima da seguinte forma

$$x_1 = Q_1, x_2 = Q_2, x_3 = Q_3$$

$$x_4 = P_1, x_5 = P_2, x_6 = P_3.$$

Neste caso a compactificação está definida sobre a esfera

$$S^6 = \left\{(y_1, \cdots, y_7); y_1^2 + \cdots + y_7^2 = 1\right\}$$

e o grau do campo de vetores polinomiais Hamiltoniano é $m = 5$.

Em virtude das equações do campo de vetores compactificado serem muito complicadas , optaremos por fazer um estudo de suas expressões nas cartas locais

$$\{(U_i, F_i), (V_i, G_i)\}, i = 1 \cdots, 7.$$

Além disso, devido a simetria em relação a origem que o campo de vetores compactificado tem, sua expressão na carta local (U_i, F_i) é a mesma em (V_i, G_i) multiplicada pelo fator $(^-1)^{m-1}$.

Encontraremos os pontos críticos do campo compactificado nas sete cartas locais $(U_i, F_i), i = 1, \cdots, 7$. Omitiremos aqui as equações que representam o campo de vetores compactificado nas sete cartas locais, (CIMA; LLIBRE, 1990) para isso, mas acrescentamos que tais equações na carta U_7 são as equações originais e portanto os únicos pontos críticos em U_7 correspondem a tripla colisão. Os pontos críticos que não dependem da massa das partículas são fáceis para calcular. Já os dependentes da massa envolvem cálculos muito tediosos.

Dividiremos o conjunto dos pontos críticos em S^6 nos subconjuntos abaixo e, em seguida, daremos a interpretação física das soluções que se aproximam deles. Note que da relação entre as coordenadas x_i e y_i, segue-se que se $y_7 \neq 0$ então $y_i \longrightarrow 0$ é equivalente a $x_i \longrightarrow 0$. Em particular para $i = 1, 2, 3$, a última afirmação acima significa uma colisão binária ou tripla, pois $x_i \longrightarrow 0$. é equivalente a $q_i \longrightarrow 0$, $i = 1, 2, 3$. O teorema seguinte sumariza todos os resultados obtidos sobre o conjunto dos pontos críticos.

Teorema 4. *O conjunto de todos os pontos críticos do problema compactificado dos três corpos colineares é conexo, compacto e pode ser dividido nos cinco seguintes conjuntos disjuntos.*

- *1- Conjunto de tripla colisão (TC), é o conjunto dos pontos $y \in S^6$ tais que:*

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0,$$

$$y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 + y_7^2 = 1$$

Sua topologia é a de uma esfera S^3.

- *2- Conjunto Binário à Esquerda* (LB), *é o conjunto dos pontosy* $\in S^6$ *tais que:*

$$y_1 = \pm y_3 \neq 0$$

$$y_2 = y_5 = y_7 = 0,$$

$$2y_3^2 + y_4^2 + y_6^2 = 1.$$

Sua topologia é a de duas esferas que se intersectam, menos o círculo de interseção.

- *3- Conjunto Binário à Direita* (RB), *é o conjunto dos pontos* $y \in S^6$ *tais que:*

$$y_1 = \pm y_2 \neq 0$$

$$y_3 = y_6 = y_7 = 0,$$

$$2y_2^2 + y_3^2 + y_5^2 = 1.$$

Sua topologia é a de duas esferas que se iutersectam menos o círculo de interseção.

- *4- Conjunto de energia zero* (ZE), *que existe somente para* $h = 0$, *é o conjunto dos pontos* $y \in S^6$ *tais que:*

$$y_1y_5 + y_2y_4 = 0,$$

$$y_3y_5 - y_2y_6 = 0,$$

$$y_1y_6 + y_3y_4 = 0,$$

$$y_1^2 = y_2^2 + y_3^2, y_7 = 0,,$$

$$2y_2^2 + 2y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 1$$

$$y_1y_2y_3 \neq 0.$$

Sua topologia é a de oito discos abertos e disjuntos.

- *5- Conjunto de energia positiva* (PE)*, que existe somente para* $h > 0$*, é o conjunto dos pontos* $y \in S^6$ *tais que:*

$$y_1^2 = y_2^2 + y_3^2,$$

$$y_6y_2 - y_3y_5 = \frac{y_3}{y_1}F(y_4y_2 + y_1y_5),$$

$$\left(\frac{1}{m_1}F^2 + \frac{(F+1)^2}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)(y_4y_2 + y_1y_5)^2 = 8hy_1^2y_2^2,$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^3 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 1, y_7 = 0,$$

$$y_1y_2y_3 \neq 0.$$

Onde $F = \left(\frac{m_1}{m_3}\right)(m_2y^3 - m_3y^2)(m_2y_1^2 + m_1y_2^2)$*. Mais ainda, a topologia de* (PE)*, é independente de* h*.*

Demonstração. Faremos primeiro a demonstração referente a topologia dos cinco conjuntos. Como as afirmações 1, 2 e 3 seguem facilmente, omitiremos aqui os cálculos. Não é difícil verificar que, em cada carta local, os conjuntos de energia positiva e de energia nula são formados por pontos críticos. Pelo fato de $y_1y_2y_3 \neq 0$, segue-se que as três primeiras equações do conjunto (ZE) são dependentes no sentido que uma delas pode ser obtida em função das outras duas.

Resolvendo a primeira e a terceira equações que definem (ZE) com relação a y_5 e y_6, respectivamente, e substituindo o resultado na sexta equação, obtemos:

$$2y_2^2 + 2y_3^2 + y_4(1 + \frac{y_2^2 + y_3^2}{y_1^2}) = 1.$$

Assim, as equações que definem (ZE) são equivalentes a

$$y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = \frac{1}{2},$$

$$y_1^2 = y_2^2 + y_3^2,$$

$$y_1y_2y_3 \neq 0$$

Devido ao fato que $y_1y_2y_3 \neq 0$, nós devemos omitir os pontos contidos em $y_2 = 0$ e $y_3 = 0$. Em cada caso obtemos dois círculos que se intersectam nos polos $(0, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ da esfera definida pela primeira equação; isto dá origem a quatro regiões que topologicamente são discos. Desde que temos dois valores de y_1 para y_2 e y_3 dados, obtemos oito discos no total e isto prova a afirmação 4. Observamos que existem outros pontos críticos com energia zero que não pertencem a (ZE), pois os conjuntos (TC), (LB) e (RB) ocorrem para qualquer valor de energia. Provaremos agora que a topologia de (PE) é independente de h. Note que (PE) é o único dos cinco conjuntos acima citados que depende da massa. Este fato torna difícil o cálculo direto de sua topologia. Mas podemos provar , usando teoria das bifurcações, a independência em relação a h. Considere as três primeiras equações que definem (PE) escritas como segue:

$$J_1(y_1, \cdots y_6) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 0,$$

$$J_2(y_1, \cdots y_6) = y_1(y_6y_2 - y_3y_5) - Fy_3(y_2y_4 + y_1y_5) = 0,$$

$$J_3(y_1, \cdots y_6, h) = G^{\frac{1}{2}}(y_2y_4 + y_1y_5) - \epsilon\sqrt{8h}y_1y_2 = 0,$$

e também a função projeção

$$J_4(y_1, \cdots y_6, h) = h,$$

onde

$$G = \frac{1}{m_1}F^2 + \frac{1}{m_2}(F+1)^2 + \frac{1}{m_3}$$

e $\epsilon = \pm 1$. Definamos a função

$$J = (J_1, J_2, J_3, J_4) : S^5 \times [0, h^+] :\longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R},$$

onde h^+ é um valor positivo arbitrário. A matriz jacobiana

$$B = \frac{\partial(J_1, J_2, J_3, J_4)}{\partial(y_1, \cdots, J_6, h)}$$

pode ser escrita como $B = (B_1, B_2)$

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix},$$

sendo

$b_{1j} = 2y_j, j = 1,2,3;$

$b_{4j} = 0, j = 1,2,3;$

$b_{21} = y_6y_2 - y_3y_5 - y_3y_5F - y_3(y_4y_2 + y_1y_5)\frac{\partial F}{\partial y_1};$

$b_{22} = y_1y_6 - y_3y_4F - y_3(y_4y_2 + y_1y_5)\frac{\partial F}{\partial y_2};$

$b_{23} = -y_1y_5 - F(y_4y_2 + y_1y_5) - y_3(y_4y_2 + y_1y_5)\frac{\partial F}{\partial y_5};$

$b_{31} = \frac{1}{2}G^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial G}{\partial y_2}(Y_4Y_2 + Y_1Y_5) + G^{\frac{1}{2}}y_5 - \epsilon\sqrt{8h}y_2$

$b_{32} = \frac{1}{2}G^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial G}{\partial y_3}(y_4y_2 + y_1y_5) + G^{\frac{1}{2}}y_4 - \epsilon\sqrt{8h}y_1$

$b_{33} = 0$

e

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_2y_3F & y_1y_3(1-F) & y_1y_2 & 0 \\ G^{\frac{1}{2}}y_2 & G^{\frac{1}{2}}y_1 & 0 & -\frac{4\epsilon y_1y_2}{\sqrt{8h}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo fato das três primeiras equações que definem (PE) serem homegêneas, seus gradientes são ortogonais a direção radial, isto é, ao gradiente da quarta equação. Esta é a razão pela qual não consideramos a quarta equação que define (PE) nos cálculos acima. O posto de B é 4 para todo valor de$h > 0$, desde que as colunas $1,4,6,7$ são linearmente independentes ,pois $y_1y_2y_3 \neq 0$. Assim o conjunto de pontos críticos da função J é vazio. Desde que $J^{-1}(0,0,0,h)$ é compacto, segue-se que o conjunto de bifurcação é vazio conforme [9]. Consequentemente, $J^{-1}(0,0,0,h)$ tem a mesma topologia para todo $h \in \mathbb{R}^+$, isto é a topologia de (PE) é independente de h. Para terminar a prova do teorema devemos mostrar que o conjunto dos pontos críticos é compacto e conexo. Ele é compacto pois S^6 é compacto e os zeros de qualquer campo de vetores contínuo é compacto. Para verificar a conexidade , analizaremos as relações entre as diferentes partes. Sejam

$$C_{LB} = \left\{y \in S^6; y_4^2 + y_6^2 = 1 \text{ e } y_i = 0 \text{ para } i \neq 4,6\right\}$$

$$C_{RB} = \left\{y \in S^6; y_4^2 + y_5^2 = 1 \text{ e } y_i = 0 \text{ para } i \neq 4,5\right\}$$

$$S_\infty^2 = \left\{y \in S^6; y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 1 \text{ e } y_i = 0 \text{ para } i \neq 1,2,3,7\right\}$$

Então C_{LB} é o círculo de interseção que devemos omitir em (LB). O mesmo vale para C_{RB} e (RB). Finalmente, é o equador da esfera S^3 definida por (TC).

É fácil ver que $Cl(LB) \cap (TC) = C_{LB}$ e $Cl(RB) \cap (TC) = C_{RB}$ (aqui Cl denota o fecho). Portanto, desde que os círculos C_{LB} e C_{RB} estão contidos em S^2_∞, o conjunto $(TC) \cup (LB) \cup (RB)$ é conexo.

Para (ZE) ou (PE) vemos que quando $y_1 = 0$, devemos ter $y_2 = 0$ e $y_3 = 0$ e assim a equação que resta é exatamente $y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 1$, que descreve S^2_∞. Isto significa que o fecho de qualquer um dos conjuntos intersecta S^2_∞.. Portanto, todo o conjunto de pontos críticos $(TC) \cup (LB) \cup (RB) \cup (ZE) \cup (PE)$ é conexo e isso conclui a demonstração. $\square$

4.5 O PROBLEMA LUNAR DE HILL

Conforme vimos no segundo capítulo, seção 2.4, exemplo 4 e equação 2.10, a função Hamiltoniana neste caso é dada por

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}(x_3^2 + x_4^2) + x_2x_3 - x_1x_4 - x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

que com a mudança de coordenadas

$$x_1 = x \;\; x_2 = y \;\; x_3 = \dot{x} - y \;\; x_4 = \dot{y} + x$$

associa-se ao campo de vetores Hamiltoniano abaixo

onde (x_1, x_2) são as variáveis coordenadas e (x_3, x_4) são seus momentos associados. Faremos um estudo do problema para um nível de energia fixo $H = h$, onde $h = -\frac{C}{2}$.

Não exibiremos as equações do campo acima na esfera de Poincaré, uma vez que é possivel encontrarmos diretamente suas equações em coordenadas locais.

Em U_1, o sistema tem a forma

$$\begin{cases} \dot{z}_1' &= -z_1(z_1 + z_2) + z_3 - 1 \\ \dot{z}_2' &= -z_2(z_1 + z_2) + 2 + z_3 - \frac{z_4^3}{\sqrt{(1+z_1^2)^3}} \\ \dot{z}_3' &= -z_3(z_1 + z_2) - z_1 - z_2 - \frac{z_1 z_4^3}{\sqrt{(1+z_1^2)^3}} \\ \dot{z}_4' &= -z_4(z_1 + z_2) \end{cases}$$

e nesta carta, como é fácil ver, não há pontos de equilíbrio restrito ao infinito.

Em U_2, o sistema tem a forma

$$\begin{cases} \dot{z_1'} &= -z_1(z_3 - z_1) + z_2 + 1 \\ \dot{z_2'} &= -z_2(z_3 - z_1) + 2z_1 + z_3 - \frac{z_4^3}{\sqrt{(1+z_1^2)^3}} \\ \dot{z_3'} &= -z_3(z_3 - z_1) - 1 - z_2 - \frac{z_1 z_4^3}{\sqrt{(1+z_1^2)^3}} \\ \dot{z_4'} &= -z_4(z_3 - z_1) \end{cases}$$

e aqui há apenas um ponto de equilíbrio no infinito que é dado por $(0, -1, 0, 0)$. Sobre a esfera de Poincaré, restrita a esta carta ($y_2 > 0$), este ponto corresponde ao ponto de equilíbrio

$$A_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0).$$

Se encontrarmos o polinómio característico do campo linearizado nesta carta,restrito a este ponto, veremos que o mesmo apresentará dois autovalores nulos e dois au-tovalores imaginários puros e, com isto, o ponto A_2 acima não é hiperbólico.

Em U_3, o sistema tem a forma

$$\begin{cases} \dot{z_1'} &= -z_1\left(2z_1 + z_3 - \frac{z_1 z_4^3}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^3}}\right) + z_2 + 1 \\ \dot{z_2'} &= -z_2\left(2z_1 + z_3 - \frac{z_1 z_4^3}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^3}}\right) + z_3 - z_1 \\ \dot{z_3'} &= -z_3\left(2z_1 + z_3 - \frac{z_1 z_4^3}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^3}}\right) - z_2 - 1 - \frac{z_2 z_4^3}{\sqrt{(z_1^2+Z_2^2)^3}} \\ \dot{z_4'} &= -z_4\left(2z_1 + z_3 - \frac{z_1 z_4^3}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^3}}\right) \end{cases}$$

e nesta carta, temos novamente apenas um ponto de equilíbrio no infinito que é dado por $(0, ^-1, 0, 0)$. Sobre a esfera de poincaré isto corresponde ao ponto $A_3 = {}^-A_2$, que também não é hiperbólico.

Na carta U_4, o sistema tem a forma

$$\begin{cases} \dot{z_1'} &= -z_1\left(-z_2 - z_3 - \frac{z_2 z_4^3}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^3}}\right) + z_2 + z_3 \\ \dot{z_2'} &= -z_2\left(-z_2 - z_3 - \frac{z_2 z_4^3}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^3}}\right) + 1 - Z_1 \\ \dot{z_3'} &= -z_3\left(-z_2 - z_3 - \frac{z_2 z_4^3}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^3}}\right) + 2z_1 + 1 - \frac{z_1 z_4^3}{\sqrt{(z_1^2+Z_2^2)^3}} \\ \dot{z_4'} &= -z_4\left(-z_2 - z_3 - \frac{z_2 z_4^3}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^3}}\right) \end{cases}$$

e nesta carta não há pontos de equilíbrio no infinito.

Agora usaremos o estudo sobre as cartas locais para descrever a evolução final do escape das órbitas na região de Hill ilimitada. Nesta região, nos restringiremos somente aos pontos que apresentam $x_1 > 0$, que corresponde a $y_1 > 0$ na esfera de Poincaré. Portanto, os únicos pontos de equilíbrio possíveis são A_2 e A_3.

Se uma órbita na esfera de Poincaré, termina em A_2, então ela tem o ponto $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$ como seu ω-limite(para 0 outro ponto a análise é análoga trocando o sentido do tempo e estudando o α-limite.

Usando o fato que

$$y_1 = \frac{x_1}{\Delta x}, y_1 = \frac{x_2}{\Delta x}, y_1 = \frac{x_3}{\Delta x}, y_1 = \frac{x_4}{\Delta x}, y_1 = \frac{x_5}{\Delta x},$$

onde

$$\Delta x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 1}$$

e que

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = \dot{x} - y e x_4 = \dot{y} + x,$$

obtemos

$$y_1 = \frac{x}{\Delta x}, y_2 = \frac{y}{\Delta x}, y_3 = \frac{\dot{x} - y}{\Delta x}, y_1 = \frac{\dot{y} + x}{\Delta x}.$$

Desde que estamos analisando o infinito, $y_5 = 0$, que implica $\Delta x \longrightarrow \infty$ e $y_1 = \frac{y}{\Delta x} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$, obtemos que $y \longrightarrow \infty$.

Usando ainda as últimas equações acima, temos

$$y_1 = \frac{y}{\Delta x} \longrightarrow 0$$

Portanto, a coordenada x pode ser limitada ou ilimitada.

- i) Se x é limitada, da equação

  $$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 3x^2 + \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C,$$

  obtemos que tanto $\dot{x}$ quanto $\dot{y}$ são limitadas. Em particular, quando

  $$\dot{x} \longrightarrow 0 \text{ e } \dot{y} \longrightarrow 0$$

os escapes são do tipo parabólicos. Se pelo menos um dos limites acima é diferente de zero, os escapes são do tipo hiperbólico. Finalmente, usando o fato que

$$y_4 = \frac{x_4}{\Delta x} = \frac{\dot{y} + x}{\Delta x} \longrightarrow 0$$

temos que, assintoticamente, $\dot{y} = -x$, e portanto, para escapes parabólicos, $x(t) \longrightarrow 0$ e os escapes são assintóticos as retas verticais no plano xy. Se a reta vertical coincide com o eixo y, os escapes são do tipo parabólicos.

- ii) O caso x "ilimitado” não é interessante do ponto de vista da mecânica celeste, pois representa escapes para o infinito (em ambas as coordenadas) com velocidade limite infinita.

REFERÊNCIAS

ABRAHAM, R.; MARSDEN, J. E.; MARSDEN, J. E. *Foundations of mechanics*. [S.l.]: Benjamin/Cummings Publishing Company Reading, Massachusetts, 1978. v. 36.

BARROW-GREEN, J. *Poincaré and the three body problem*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1997.

CIMA, A.; LLIBRE, J. Bounded polynomial vector fields. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 318, n. 2, p. 557–579, 1990.

DELGADO, J.; LACOMBA, E.; LLIBRE, J.; PÉREZ, E. Poincaré compactification of hamiltonian polynomial vector fields. In: *Hamiltonian dynamical systems*. [S.l.]: Springer, 1995. p. 99–114.

GUILLEMIN, V. *Pollack, A.(1974) Differential Topology*. [S.l.]: Prentice-Hall, lne., USA.

HAGIHARA, Y. Celestial mechanics. volume 3-differential equations in celestial mechanics. part 1. *Japan Society of Promotion Science*, 1974.

HEGGIE, D. C. A global regularization of the n-body problem. *Celestial mechanics*, Springer, v. 10, n. 4, p. 516–516, 1974.

LACOMBA, E. A.; LLIBRE, J. *Hamiltonian systems and celestial mechanics*. [S.l.]: World Scientific, 1993. v. 4.

MEYER, K. R.; HALL, G. R. Linear hamiltonian systems. In: *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. [S.l.]: Springer, 1992. p. 33–71.

SZEBEHELY, V.; GREBENIKOV, E. Theory of orbits-the restricted problem of three bodies. *Soviet Astronomy*, v. 13, p. 364, 1969.

VAINSENCHER, I. *Introdução às curvas algébricas planas*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1996.