



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MIRELLE DE MOURA SOUSA

**ANÁLISE TEÓRICA E NUMÉRICA DE ALGUMAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
PARCIAIS**

Recife
2020

MIRELLE DE MOURA SOUSA

**ANÁLISE TEÓRICA E NUMÉRICA DE ALGUMAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
PARCIAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise

Orientador (a): Diego Araújo de Souza

Recife

2020

Catalogação na fonte
Bibliotecário Cristiano Cosme S. dos Anjos, CRB4-2290

S725a Sousa, Mirelle de Moura
 Análise teórica e numérica de algumas equações diferenciais parciais /
 Mirelle de Moura Sousa. – 2020.
 132 f.: il., fig., tab.

 Orientador: Diego Araújo de Souza.
 Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
 Matemática, Recife, 2020.
 Inclui referências.

 1. Análise. 2. Método dos elementos finitos. 3. Diferenciais parciais. 4.
 Formulação variacional. I. Souza, Diego Araújo de (orientador). II. Título.

 515 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2021 - 66

MIRELLE DE MOURA SOUSA

ANÁLISE TEÓRICA E NUMÉRICA DE ALGUMAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 20/02/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Diego Araújo de Souza (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Jairo Rocha de Faria (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba

RESUMO

Esta dissertação é dedicada ao estudo de aproximações numéricas de soluções de alguns problemas de fronteira para equações diferenciais parciais estacionárias e não estacionárias através do Método dos Elementos Finitos (MEF). A teoria do método pode parecer bem complicada, porém o maior foco dessa dissertação está em entender as etapas existentes para se realizar a análise, como também as respostas obtidas para identificarmos as situações em que podemos utilizá-la. Aqui vamos nos aprofundar no estudo de problemas elípticos e parabólicos ambos lineares, usando teoremas como Lax-Milgram e Lions para garantir a existência e unicidade da solução. Faremos também um breve estudo de problemas fundamentais da Mecânica dos Fluidos, como a equação de Stokes e de Navier-Stokes. Utilizaremos o *software* FreeFem++ para calcular as aproximações, visualizar suas representações gráficas, verificar os erros e ordens de convergência dos métodos. Com os experimentos numéricos verificamos que os resultados estudados teoricamente acontecem de fato na prática.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos. Equações Diferenciais Parciais. Formulação Variacional. FreeFem++.

ABSTRACT

This dissertation is dedicated to the study of numerical approximations of solutions to some boundary problems for stationary and non-stationary partial differential equations through the Finite Element Method (FEM). The theory of the method may seem quite complicated, but the main focus of this dissertation is understanding the existing steps to carry out the analysis, as well as the answers obtained to identify the situations in which we can use it. Here we will delve deeper into the study of elliptical and parabolic problems, both linear, using theorems such as Lax-Milgram and Lions to guarantee the existence and uniqueness of the solution. We will also make a brief study of fundamental problems in Fluid Mechanics, such as the Stokes and Navier-Stokes equations. We will use the FreeFem ++ software to build the approximations, visualize their graphical representations, check the errors and rate of convergence of the methods. With the numerical experiments we verify that the results studied theoretically happen in practice.

Keywords: Finite Elements Methods. Partial Differential Equations. Variational Formulation. FreeFem++.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Deformação vertical de uma membrana	72
Figura 2 –	Decomposição do domínio	79
Figura 3 –	Numeração por linhas	81
Figura 4 –	Suporte das funções de base	82
Figura 5 –	Estrutura “banda” de uma matriz de rigidez	83
Figura 6 –	Representação gráfica dos dados de fronteira	84
Figura 7 –	Solução aproximada do problema da membrana	85
Figura 8 –	Probabilidade de atingir uma porta	87
Figura 9 –	Probabilidade de atingir uma das duas portas	87
Figura 10 –	Probabilidade de atingir uma das três portas (esquerda) ou uma das quatro portas (direita)	88
Figura 11 –	Representação gráfica do RHS	89
Figura 12 –	Solução aproximada com condição de Neumann	90
Figura 13 –	Solução aproximada com condição mista Dirichlet-Fourier	91
Figura 14 –	Aproximação obtida em problema cuja forma bilinear não é simétrica	93
Figura 15 –	A malha do domínio tridimensional	94
Figura 16 –	Solução do problema elíptico 3D	95
Figura 17 –	Método de Newton. Inicialização	98
Figura 18 –	Método de Newton. Primeira iteração	99
Figura 19 –	Método de Newton. Última iteração	99
Figura 20 –	Solução exata do problema (4.38)	101
Figura 21 –	Aplicações do refinamento uniforme	101
Figura 22 –	Aproximações obtidas e malha inicial	102
Figura 23 –	Resultados obtidos ao realizar o primeiro refinamento	103
Figura 24 –	Escoamento bidimensional em uma caixa com tampa deslizante	107
Figura 25 –	Condição de fronteira para o problema da caixa com tampa deslizante	108
Figura 26 –	Aproximação obtida da solução do problema da tampa deslizante	110
Figura 27 –	Visualização do dado inicial	117
Figura 28 –	Visualização do RHS	117

Figura 29 –	Método de Euler. Primeira iteração. Condição de Dirichlet	118
Figura 30 –	Método de Euler. Última iteração. Condição de Dirichlet	118
Figura 31 –	Método de Gear. Primeira iteração. Condição de Dirichlet	119
Figura 32 –	Método de Gear. Última iteração. Condição de Dirichlet	119
Figura 33 –	Método de Gear. Primeira iteração. Condição de Fourier	121
Figura 34 –	Método de Gear. Última iteração. Condição de Fourier	121
Figura 35 –	Representação gráfica da fronteira. Condição mista	122
Figura 36 –	Método de Gear. Primeira iteração. Condição mista	123
Figura 37 –	Método de Gear. Última iteração. Condição mista	123
Figura 38 –	Representação do perfil NACA airfoil	128
Figura 39 –	Método de Peaceman-Rachford. Primeira iteração	129
Figura 40 –	Método de Peaceman-Rachford. Última iteração	129

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Estimativa de erro. Método do ponto-fixo vs Método de Newton	100
Tabela 2 –	Dados obtidos na malha inicial e nos seis refinamentos	103

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	14
2.1	TEORIA DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS E ANÁLISE FUNCIONAL	14
2.1.1	Teoria das distribuições	14
2.1.2	Os espaços L^p	16
2.1.3	Os espaços de Sobolev $H^m(\Omega)$	19
2.1.4	Um teorema de traço e as fórmulas de Green	20
2.1.5	Espaços $C([0,T]; X)$, $L^p(0,T; X)$ e $W^{m,p}(0,T; X)$	21
2.1.6	O teorema de Lax-Milgram	23
2.1.7	Teoria espectral abstrata	24
2.2	ANÁLISE NUMÉRICA	25
2.2.1	Métodos numéricos para resolução de sistemas lineares	26
2.2.2	Método dos elementos finitos	31
2.3	O SOFTWARE FREEFEM++	39
2.3.1	Apresentação	39
2.3.2	Implementação	39
3	APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS DE PROBLEMAS DE FRONTEIRA E INICIAL	42
3.1	PROBLEMAS ESTACIONÁRIOS	42
3.1.1	Teoria abstrata	42
3.1.2	Análise do método dos elementos finitos em um caso particular	47
3.2	PROBLEMAS NÃO-ESTACIONÁRIOS	55
3.2.1	Teoria abstrata	55
3.2.2	Método de semi-discretização	60
3.2.3	Discretização total de problemas parabólicos	66
4	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO À EDPs ESTACIONÁRIAS	70
4.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS DE SEGUNDA ORDEM	70

4.1.1	Formulação variacional de problemas de fronteira elípticos	71
4.1.2	Aproximação de um problema de contorno bidimensional	78
4.1.3	Experimentos numéricos para EDPs elípticas	82
4.2	MODELOS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS	104
4.2.1	Formulação variacional para as equações de Stokes	105
4.2.2	Experimentos numéricos	107
5	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EDPs PARABÓLICAS	111
5.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS PARABÓLICAS DE SEGUNDA ORDEM	111
5.1.1	Formulação variacional de problemas parabólicos	111
5.1.2	Aproximação de um problema parabólico	114
5.1.3	Experimentos numéricos	115
5.2	MODELOS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS	122
5.2.1	Formulação variacional para as equações de Stokes	123
5.2.2	Experimentos numéricos	125
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	130
	REFERÊNCIAS	131

1 INTRODUÇÃO

O campo da análise numérica antecede a invenção do computador em séculos, por exemplo, a interpolação linear já era usada a mais de 2.000 anos atrás. Muitos dos grandes matemáticos do passado estavam interessados pela análise numérica, tanto que muitos importantes algoritmos levam seus nomes: Método de Newton ¹, Eliminação de Gauss ², Método de Euler ³, Polinômio de Lagrange ⁴, por exemplo.

Para facilitar os cálculos manuais, grandes livros foram produzidos com fórmulas e tabelas de dados tais como pontos de interpolação e coeficientes de funções. Utilizando estas tabelas, olhavam-se valores para inserí-los dentro de fórmulas dadas e encontrar boas estimativas numéricas de algumas funções. O trabalho mais célebre neste campo é “Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables” de Abramowitz e Stegun, publicado pela editora NIST em 1964, contendo um grande número de fórmulas e funções e seus valores em muitos pontos.

As calculadoras mecânicas também foram desenvolvidas como uma alternativa para cálculo a mão. Estas calculadoras evoluíram para computadores eletrônicos na década de 40, quando então percebeu-se que estes computadores eram também úteis para fins administrativos. Mas a invenção do computador também influenciou o campo da análise numérica, uma vez que cálculos maiores e mais complexos poderiam ser resolvidos.

¹Isaac Newton (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 4 de janeiro de 1643 — Kensington, 31 de março de 1727) foi um astrônomo, alquimista, filósofo natural, teólogo e cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático.

²Johann Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 30 de abril de 1777 — Gottingen, 23 de fevereiro de 1855) foi um matemático, astrônomo e físico alemão.

³Leonhard Paul Euler (Basileia, 15 de abril de 1707 – São Petersburgo, 18 de setembro de 1783) foi um matemático e físico suíço de língua alemã.

⁴Joseph Louis Lagrange, nascido como Giuseppe Lodovico Lagrangia (Turim, 25 de janeiro de 1736 — Paris, 10 de abril de 1813) foi um matemático italiano.

Em relação aos métodos de aproximação numérica, focamos nossa apresentação no método de elementos finitos, embora seja difícil citar uma data da invenção do método dos elementos finitos, ele originou-se da necessidade de resolver problemas complexos de elasticidade e análise estrutural em engenharia civil e aeroespacial. Seu desenvolvimento pode ser rastreado até o trabalho de A. Hrennikoff e R. Courant no início da década de 1940. Na Rússia, a introdução da aplicação prática do método é normalmente associada ao nome de Leonard Oganessian. Na China, no final da década de 1950 e início da década de 1960, com base nos cálculos de construções de represas, K. Feng propôs um método numérico sistemático para resolver equações diferenciais parciais. Embora as abordagens usadas por estes pioneiros sejam diferentes, elas compartilham uma característica essencial: a discretização da malha de um domínio contínuo em um conjunto de subdomínios discretos, geralmente chamados de elementos.

A maioria dos fenômenos mecânicos, físicos, biológicos ou econômicos são modelados usando equações diferenciais parciais lineares ou não-lineares e o desenvolvimento dessas ciências requer, em uma parte, uma melhor compreensão das propriedades das soluções dessas EDP's. Além disso, em muitos campos avançados (indústria aeronáutica, indústria de petróleo, previsão de tempo, etc.), o progresso técnico exige a resolução de numerosos sistemas de equações diferenciais parciais, às vezes muito complicados, afim de obter propriedades quantitativas das soluções. Com os avanços cada vez maiores no desempenho do computador, a simulação numérica de fenômenos está tornando-se mais flexível, mais fácil de executar e, acima de tudo, mais econômica que a simulação experimental.

O objetivo desta dissertação é, portanto, servir como uma introdução à teoria das equações diferenciais parciais envolvidas nas aplicações e aos métodos de aproximação numérica adaptados ao uso de computadores. Na estrutura necessariamente limitada desta dissertação, nos restringimos a problemas elípticos e parabólicos. Por outro lado, deixamos de lado o estudo teórico de aproximação de equações não lineares. Porém, por motivo de curiosidade, realizamos alguns experimentos numéricos.

O Capítulo 2 contém alguns resultados da análise funcional, da teoria das EDP's, da análise numérica e do software FreeFem++ visando tornar a leitura da dissertação o mais auto-suficiente possível.

O Capítulo 3 é dedicado às aproximações variacionais de problemas estacionários e de evolução,

onde é garantida a existência e unicidade das soluções, a convergência das aproximações e sua ordem de convergência. No caso dos problemas de evolução apresentamos alguns métodos de discretização no tempo que garantem uma boa aproximação da solução do problema.

O Capítulo 4 tem como objetivo o estudo do uso do Método dos Elementos Finitos para equações diferenciais elípticas, onde primeiramente apresentamos uma formulação variacional para essa classe de problemas e realizamos alguns experimentos numéricos com a ajuda do *software* FreeFem++. Depois estudamos as equações de Stokes e Navier-Stokes estacionárias.

O Capítulo 5 abrange o uso do Método dos Elementos Finitos só que desta vez para equações diferenciais parabólicas. Estudamos brevemente as equações de Stokes e Navier-Stokes não estacionárias e realizamos alguns experimentos numéricos.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos uma lista de resultados e conteúdos básicos e bem conhecidos da análise funcional e da análise numérica, relacionados às equações diferenciais parciais. Precisamente, introduziremos várias definições básicas bem como resultados conhecidos da análise funcional e resultados teóricos da análise numérica, os quais serão usados nos capítulos posteriores.

2.1 TEORIA DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS E ANÁLISE FUNCIONAL

2.1.1 Teoria das distribuições

Representaremos por Ω um subconjunto aberto e não vazio do espaço euclidiano N -dimensional $\mathbb{R}^N$, onde $N \in \mathbb{N}$. Será fixada em Ω a medida de Lebesgue dx .

Seja u uma função real mensurável definida em Ω e seja $(O_i)_{i \in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos $O_i \subset \Omega$, onde I é um conjunto de índices enumerável, tais que $u = 0$ quase sempre em O_i , isto é, $u = 0$ em $O_i \setminus \mathcal{N}_i$ onde $\mathcal{N}_i$ é um subconjunto de Ω que tem medida nula. Considerando o conjunto $O = \bigcup_{i \in I} O_i$, temos que $u = 0$ quase sempre em O . Como consequência deste fato, o *suporte de u* , o qual será denotado por $\text{supp } u$, é definido como sendo o subconjunto fechado de Ω ,

$$\text{supp } u = \Omega \setminus O.$$

Observação 2.1 Note que se u é contínua em Ω então $\text{supp } u$ coincide com o fecho do conjunto dos pontos de Ω onde u é não nula, isto é

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções reais que possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens, definidas em Ω , cujo suporte é compacto. Se φ é uma função de

$C_0^\infty(\Omega)$ e se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ é um multi-índice, definimos

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

cuja ordem é $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Para $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$, definimos $D^0 \varphi = \varphi$ e por D_i , para $i = 1, 2, \dots, N$, a derivação parcial $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados *funções testes* em Ω .

Exemplo 2.1 Seja $p : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$p(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \text{se } \|x\| < 1; \\ 0 & \text{se } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

sendo $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2$ a norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$. Temos que $p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\text{supp } p = \{x \in \mathbb{R}^N; \|x\| \leq 1\}.$$

Agora apresentaremos uma noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$:

Definição 2.1 Seja $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que φ_n converge a zero se as seguintes condições são satisfeitas:

- a) Existe um subconjunto compacto K de Ω tal que o suporte de φ_n está contido em K , para todo $n \in \mathbb{N}$;
- b) Para qualquer multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^m$, $m \in \mathbb{N}$, a sequência $(D^\alpha \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $D^\alpha \varphi$ uniformemente em K .

Observação 2.2 Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, diz-se que a sequência $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando a sequência $(\varphi_k - \varphi)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a zero no sentido acima.

Definição 2.2 Denominamos por *espaço das funções testes* em Ω o espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência da Definição 2.1 e será representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 2.3 Uma distribuição (ou função generalizada) sobre Ω é toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Temos que se sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge a zero no sentido da Definição 2.1, então a sequência $(\langle T, \varphi_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a zero em $\mathbb{R}$. Note que $\langle T, \varphi_n \rangle$ representa o valor de T em φ_n .

Definição 2.4 Diz-se que uma sequência de distribuições $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge a zero em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando para toda função $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a sequência $(\langle T_m, \varphi \rangle)_{m \in \mathbb{N}}$ converge a zero em $\mathbb{R}$. Neste caso, escreve-se: $\lim_{m \rightarrow \infty} T_m = 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Observação 2.3 Por outro lado, temos que $\lim_{m \rightarrow \infty} T_m = T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, se $\lim_{m \rightarrow \infty} (T_m - T) = 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição 2.5 Sejam T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. Define-se a derivada D^α (no sentido das distribuições) de ordem α da distribuição T como sendo o funcional definido por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 2.4

- i. A definição 2.5 nos diz que uma distribuição sobre Ω possui derivada de todas as ordens.
- ii. Se T é uma distribuição sobre Ω , então $D^\alpha T$ é também uma distribuição sobre Ω .
- iii. A aplicação $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que $T \mapsto D^\alpha T$, é linear e contínua.

2.1.2 Os espaços L^p

Nesta seção estudaremos uma importante classe de espaços de Banach (i.e., espaços vetoriais normados completos), os chamados *espaços de Lebesgue*.

Em toda esta dissertação, qualquer integração sobre qualquer aberto de um espaço Euclidiano será entendida como uma integração no sentido de Lebesgue, bem como a mensurabilidade das funções envolvidas.

Definição 2.6 Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Indicamos por $L^p(\Omega)$ o espaço das funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|f\|_{L^p} = \|f\|_p < +\infty$, onde

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \text{se } 1 \leq p < +\infty,$$

e

$$\|f\|_{\infty} = \inf \{ C > 0; |f(x)| \leq C, \text{ em quase todo ponto } x \in \Omega \}.$$

Fixemos a seguinte notação: seja $1 \leq p \leq +\infty$, dizemos que q é seu expoente conjugado se, $1/p + 1/q = 1$. Com isso, temos o seguinte resultado

Teorema 2.1 (Desigualdade de Hölder) ¹ Seja $1 \leq p \leq +\infty$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde q é o expoente conjugado de p , então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração: Ver p. 92 de [4]. ■

Observação 2.5

1. Os espaços $L^p(\Omega)$ são espaços de Banach;
2. Quando $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert (Espaço de Banach cuja norma provém de um produto interno), com o produto interno

$$(f, g)_{0, \Omega} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx, \quad f, g \in L^2(\Omega).$$

A norma associada denotaremos por

$$\|f\|_2 = \|f\|_{0, \Omega} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Outro importante resultado é o seguinte:

Teorema 2.2 O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para qualquer $1 \leq p < +\infty$.

Demonstração: Ver p. 110 de [4]. ■

Agora definiremos o espaço das funções mensuráveis localmente integráveis.

Definição 2.7 Seja $1 \leq p < +\infty$. Indicamos por $L_{loc}^p(\Omega)$ o espaço de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f\chi_K \in L^p(\Omega)$, para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$, onde χ_K representa a função característica de K (uma função que assume o valor 1 em pontos de K e 0 em pontos fora de K).

No seguinte exemplo vamos verificar que toda função de $L_{loc}^1(\Omega)$ define uma distribuição.

Exemplo 2.2 Seja $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Considere a forma linear T_u definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por:

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

¹Otto Ludwig Hölder (Estugarda, 22 de dezembro de 1859 – Leipzig, 29 de agosto de 1937) foi um matemático alemão.

Graças ao Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, pode-se provar que dada uma sequência $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ que converge a zero (no sentido da Definição 2.1) temos que a sequência $(\langle T_u, \varphi_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para zero. Então, T_u é uma distribuição sobre Ω .

Proposição 2.1 (Lema de Du Bois-Reymond) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração: Ver p. 10 de [12]. ■

Observação 2.6 A partir do Lema de Du Bois-Reymond conclui-se que para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, tem-se que T_u é univocamente determinada por u sobre Ω no seguinte sentido: se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω . Por esta razão, identifica-se as funções $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ com a distribuição associada T_u e diz-se a distribuição u ao invés de dizer a distribuição T_u .

É também oportuno observar que existem distribuições que não são definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como exemplo:

Exemplo 2.3 Sejam x_0 um ponto de Ω e δ_{x_0} a forma linear definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ do seguinte modo:

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Note que δ_{x_0} é uma distribuição sobre Ω , denominada distribuição de Dirac ou medida de Dirac concentrada em x_0 . Pode-se mostrar que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$, ou seja, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = \varphi(x_0) \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De fato, se existisse tal função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então

$$\int_{\Omega} u(x) \|x - x_0\|^2 \varphi(x) dx = [\|x - x_0\|^2 \varphi(x)]|_{x=x_0} = 0 \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pelo Lema de Du Bois-Reymond (Proposição 2.1) teríamos $\|x - x_0\|^2 u(x) = 0$ quase sempre em Ω , mostrando que $u(x) = 0$ quase sempre em Ω , isto é, $\delta_{x_0} \equiv 0$ o que é uma contradição.

¹Paul David Gustav du Bois-Reymond (Berlim, 2 de dezembro de 1831 — Freiburg im Breisgau, 7 de abril de 1889) foi um matemático alemão.

2.1.3 Os espaços de Sobolev $H^m(\Omega)$

Definição 2.8 Para todo número natural $m \geq 1$, chamamos de espaço de Sobolev de ordem m em Ω , o espaço

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

Equipamos $H^m(\Omega)$ com o produto interno

$$(u, v)_{m, \Omega} = \int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u D^\alpha v \right) dx,$$

e denotamos por

$$\|u\|_{m, \Omega} := (u, u)_{m, \Omega}^{1/2},$$

a norma correspondente.

Definição 2.9 Designamos por $H_0^1(\Omega)$ a aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$.

Finalmente, observemos o seguinte resultado, que terá uma importância prática considerável neste trabalho.

Teorema 2.3 (Desigualdade de Poincaré) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, não vazio e limitado. Então existe $C = C(\Omega, N) > 0$ tal que:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{0, \Omega} \leq C(\Omega, N) \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0, \Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

Além disso, a semi-norma

$$|v|_{1, \Omega} = \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0, \Omega}^2 \right)^{1/2},$$

é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ equivalente à norma induzida por $\|\cdot\|_{1, \Omega}$.

Demonstração: Ver p. 275 de [7]. ■

¹Jules Henri Poincaré (Nancy, 29 de abril de 1854 — Paris, 17 de julho de 1912) foi um matemático, físico e filósofo da ciência francês.

2.1.4 Um teorema de traço e as fórmulas de Green

Nos capítulos seguintes procuraremos as soluções de problemas de valor de fronteira Dirichlet e/ou Neumann no espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$. A cada uma das funções de $H^1(\Omega)$ precisamos atribuir algum valor sobre $\Gamma = \partial\Omega$. Este valor é conhecido como *traço* e o seguinte teorema garante sua existência e indica qual é o sentido do mesmo.

Teorema 2.4 (Traço) Seja Ω um aberto limitado e não-vazio de $\mathbb{R}^N$ cuja fronteira Γ é suficientemente regular (pelo menos de classe C^1). Então existe uma única transformação $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ linear e contínua tal que para cada $x \in \Gamma$ e cada $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$: $\gamma_0(u)(x) = u(x)$. Além disso, $Im(\gamma)$ é um subespaço próprio de $L^2(\Gamma)$ e o núcleo de γ coincide com $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Ver p. 208 de [15]. ■

Observação 2.7

1. A fronteira de um conjunto Ω é dita “suficientemente regular” quando pode ser localmente parametrizada por uma função Lipschitz contínua;
2. Da última consequência do Teorema do Traço temos que

$$H_0^1(\Omega) = Ker(\gamma_0) = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma} = 0\}.$$

Os próximos resultados são fórmulas bastante usadas para justificar as definições de soluções fracas para distintas EDPs.

Teorema 2.5 Seja Ω um aberto limitado cuja fronteira Γ é suficientemente regular. Então, se u e v são funções de $H^1(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} uv v_i d\sigma, \quad 1 \leq i \leq N,$$

onde $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$ é o vetor normal de Γ direcionado para o exterior de Ω .

Demonstração: Ver p. 27 de [14]. ■

¹George Green (Sneinton, condado de Nottinghamshire 14 de Julho de 1793 — Nottingham, 31 de Maio de 1841) foi um matemático e físico inglês.

Teorema 2.6 (Fórmula de Green) Seja Ω um aberto limitado cuja fronteira Γ é suficientemente regular. Para toda função $u \in H^2(\Omega)$ e toda função $v \in H^1(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)v \, dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\Gamma.$$

Demonstração: Ver p. 32 de [14]. ■

Teorema 2.7 Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ cuja fronteira $\partial\Omega$ é suficientemente regular. Então, se $m > \frac{N}{2}$, o espaço $H^m(\Omega)$ é um subespaço de $C^0(\overline{\Omega})$ e a injeção canônica de $H^m(\Omega)$ em $C^0(\overline{\Omega})$ é contínua.

Demonstração: Ver p. 33 de [14]. ■

2.1.5 Espaços $C([0, T]; X)$, $L^p(0, T; X)$ e $W^{m,p}(0, T; X)$

Dado um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ e m um inteiro não-negativo, denotaremos por $C^m([0, T]; X)$ o espaço de Banach das funções m vezes continuamente diferenciáveis $u : [0, T] \rightarrow X$. Definimos em tal espaço a norma

$$\|u\|_{C^m(0,T;X)} = \max_{0 \leq k \leq m} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{d^k u}{dt^k}(t) \right\|_X \right).$$

De forma análoga, denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < +\infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções $u : (0, T) \rightarrow X$ que são fortemente mensuráveis com $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^p(0, T)$. Neste espaço, a norma é dada por

$$\|u\|_{p,X} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representa-se o espaço de Banach de funções $u : (0, T) \rightarrow X$ mensuráveis e essencialmente limitadas em $(0, T)$, isto é,

$$\sup_{t \in (0,T)} \text{ess} \|u(t)\|_X < +\infty,$$

cuja norma é dada por

$$\|u\|_{\infty,X} = \sup_{t \in (0,T)} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Observação 2.8

1. Se X for reflexivo então $L^p(0, T; X)$, $1 < p < +\infty$, é reflexivo;
2. Se X é separável então podemos identificar

$$[L^p(0, T; X)]' \approx L^q(0, T; X'),$$

onde $1 \leq p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Agora, vamos apresentar alguns lemas de imersões entre esse espaços.

Lema 2.1 Sejam X e Y dois espaços de Banach e suponhamos que $X \hookrightarrow Y$. Se $1 \leq s \leq r \leq +\infty$, então

$$L^r(0, T; X) \hookrightarrow L^s(0, T; Y).$$

Demonstração: Ver p. 172 de [11]. ■

Lema 2.2 Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u \in L^p(0, T; X)$ e $v \in L^q(0, T; X')$, então a função real $t \mapsto \langle v(t), u(t) \rangle_{X', X}$ está em $L^1(0, T)$.

Demonstração: Ver p. 172 de [11]. ■

Teorema 2.8 Sejam X e Y espaços de Banach com $X \hookrightarrow Y$. Se $u \in L^p(0, T; X)$, com $u_t \in L^{p'}(0, T; Y)$, então $u \in C([0, T]; Y)$.

Demonstração: Ver p. 172 de [11]. ■

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, com o produto interno $((\cdot, \cdot))_X$, o espaço $L^2(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$((u, v)) = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt, \text{ com } u, v \in L^2(0, T; X).$$

Indica-se por $\mathcal{D}'(0, T; X)$ o espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores X , isto é, o espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X .

Se $u \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq +\infty$, então associa-se à u a distribuição vetorial T_u definida por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(t) \varphi(t) dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(0, T),$$

em que a integral é tomada no sentido de Bochner em X . Demonstra-se que T_u é univocamente definida por u , e então, identificando u com T_u , pode-se dizer que

$$L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'(0, T; X).$$

Definição 2.10 Dada $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, define-se a derivada de ordem n de S (no sentido das distribuições vetoriais) como sendo a distribuição vetorial dada por

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, podemos definir o seguinte espaço

$$W^{m,p}(0, T; X) = \left\{ u \in L^p(0, T; X); \frac{d^j u}{dt^j} \in L^p(0, T; X), j = 1, 2, \dots, m \right\},$$

cuja a norma é dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^m \left\| \frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L^p(0,T;X)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço $W^{m,p}(0, T; X)$, com a norma acima, é um espaço de Banach.

2.1.6 O teorema de Lax-Milgram

Nesta seção apresentaremos um importante resultado de análise funcional com várias aplicações na teoria das EDPs. Como estamos interessados em estudar problemas de valor de fronteira, o seguinte teorema é a chave para o estudo da existência e unicidade da solução, assim como a dependência contínua com respeito aos dados.

Definição 2.11 Sejam V um espaço de Hilbert e $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear, dizemos que

i) a é contínua, se existe $\alpha > 0$ tal que $|a(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V$.

ii) a é V -elíptica, se existe $\beta > 0$ tal que $a(u, u) \geq \beta \|u\|^2 \quad \forall u \in V$.

Teorema 2.9 (Lax Milgram) Sejam V um espaço de Hilbert e $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função bilinear, contínua e V -elíptica. Então para todo funcional linear e contínuo $L : V \rightarrow \mathbb{R}$, existe um único elemento $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

¹Peter David Lax (Budapeste, 1 de maio de 1926) é um matemático húngaro, com trabalho tanto em matemática aplicada como em matemática pura.

²Arthur Norton Milgram (Filadélfia, 3 de junho de 1912 — 30 de janeiro de 1961) foi um matemático estadunidense.

Além disso, se $a(\cdot, \cdot)$ é simétrica, então u é o único elemento que minimiza o funcional $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v), \quad \forall v \in V,$$

ou seja, existe um único $u \in V$ tal que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Demonstração: Ver p. 140 de [4]. ■

2.1.7 Teoria espectral abstrata

Sejam V e H dois espaços de Hilbert (sobre $\mathbb{R}$) de dimensão infinita, que satisfazem:

$$V \subset H \text{ com injeção contínua,} \quad (2.1)$$

$$V \text{ é denso em } H;$$

e uma forma bilinear $(u, v) \mapsto a(u, v)$ contínua sobre $V \times V$.

Iremos denotar por $(\cdot, \cdot)$ o produto escalar em H e $|\cdot|$ a norma correspondente. Também denotaremos por $\|\cdot\|$ a norma em V . Observamos de (2.1), que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\forall v \in V, |v| \leq c\|v\|.$$

Considere então o seguinte problema espectral: encontrar os valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais existe uma solução $u \in V$, $u \neq 0$, da equação

$$\forall v \in V, a(u, v) = \lambda(u, v). \quad (2.2)$$

Se tal elemento u existe, diremos que ele é um *autovetor* associado ao *autovalor* λ .

Teorema 2.10 Assuma que a injeção canônica de V em H é compacta e que a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é simétrica e V -elíptica. Então os autovalores do problema (2.2) formam uma sequência crescente tendendo ao infinito,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots, \quad (2.3)$$

e existe uma base hilbertiana ortonormal de H formada de autovetores w_m tais que:

$$\forall v \in V, a(w_m, v) = \lambda_m(w_m, v), m = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Além disso, a sequência $(\lambda_m^{-1/2} w_m)$ forma uma base hilbertiana ortonormal do espaço V para o produto escalar $a(\cdot, \cdot)$.

Demonstração: Ver p. 137 de [13]. ■

Observação 2.9 No teorema anterior, podemos realmente enfraquecer a hipótese de V -elipticidade. É suficiente supor que a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é coerciva no seguinte sentido: existem duas constantes $\alpha > 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\forall v \in V, a(v, v) + \mu|v|^2 \geq \alpha\|v\|^2.$$

Sob essas condições, a forma bilinear $u, v \mapsto a(u, v) + \mu(u, v)$ é simétrica e V -elíptica de modo que podemos aplicar o Teorema 2.10. Os autovalores de (2.2) verificam então

$$-\mu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots$$

e existe uma base hilbertiana ortonormal de H formada de autovetores w_m satisfazendo (2.4). Além disso, a sequência (w_m) forma uma base hilbertiana ortogonal de V .

2.2 ANÁLISE NUMÉRICA

Nesta seção apresentaremos alguns métodos numéricos para resolução de sistemas lineares e faremos uma análise do Método dos Elementos Finitos.

2.2.1 Métodos numéricos para resolução de sistemas lineares

Consideraremos um sistema de equações lineares de ordem N da forma:

$$Ax = b, \quad (2.5)$$

onde A é uma matriz dada $N \times N$ regular com coeficientes $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq N$, b é um vetor coluna dado com N componentes $b_j, 1 \leq j \leq N$ e x é um vetor coluna desconhecido com N componentes

2.2.1.0 Decomposição LU

A decomposição LU é uma forma de fatoração de uma matriz regular como o produto de uma matriz triangular inferior (“*Lower*”) e uma matriz triangular superior (“*Upper*”).

Definição 2.13 A_k é uma submatriz principal de ordem k de A se A_k é a matriz $k \times k$ de coeficientes a_{ij} , $1 \leq i, j \leq k$, $1 \leq k \leq N$.

Seja A uma matriz $N \times N$ onde todas as suas submatrizes principais são regulares, então existe uma única decomposição (conhecida como decomposição LU)

$$A = LU,$$

onde L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior com valores 1 na sua diagonal (obtida pelo método de eliminação de Gauss). Então, se queremos resolver o sistema (2.5), é suficiente resolver os sistemas

$$Ly = b, \tag{2.7}$$

e

$$Ux = y. \tag{2.8}$$

O sistema (2.7) é um sistema triangular inferior enquanto que (2.8) é um sistema triangular superior. Resolver os sistemas (2.7) e (2.8) são, portanto, duas operações “baratas”.

2.2.1.0 Decomposição de Cholesky

A decomposição de Cholesky é uma decomposição de uma matriz simétrica e definida positiva como o produto de uma matriz triangular inferior e sua matriz transposta.

Definição 2.14 Uma matriz quadrática A de ordem N é dita ser simétrica se $A = A^T$.

Definição 2.15 Uma matriz quadrática A de ordem N é dita ser definida positiva se:

i) $y^T A y \geq 0$ para todo vetor $y \in \mathbb{R}^N$;

ii) $y^T A y = 0$ se, e somente se, $y = 0$.

Se A é uma matriz simétrica definida positiva, então existe uma única matriz triangular inferior com coeficientes positivos na diagonal denotada por S tal que

$$A = SS^T \quad (\text{decomposição de Cholesky})$$

Observação 2.10 A matriz triangular inferior S obtida na decomposição de Cholesky não é necessariamente a mesma matriz obtida na decomposição LU .

Quando queremos resolver um sistema linear do tipo (2.5) onde a matriz A é simétrica e definida positiva, fazemos uma decomposição de Cholesky $A = SS^T$ e resolvemos sucessivamente

$$Sy = b,$$

e

$$S^T x = y.$$

2.2.1.0 Método do gradiente conjugado

O método do gradiente conjugado é um algoritmo para resolver sistemas de equações lineares cuja matriz de coeficientes é simétrica e definida positiva. Por ser um método iterativo, este método pode ser aplicado a sistemas esparsos (sistemas cuja matriz de coeficientes possui uma grande quantidade de coeficientes que valem zero) que são grandes demais para ser tratados por métodos diretos como a decomposição de Cholesky.

Seja A uma matriz simétrica e definida positiva, estudaremos um tipo clássico de *método iterativo* para resolver numericamente o sistema (2.5). Ele constitui na construção de uma sequência de vetores em $\mathbb{R}^N$ $(x_k)_{k \geq 1}$, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_* - x_k\| = 0,$$

onde x_* é a única solução de (2.5).

Começamos por introduzir o funcional $\mathcal{L} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{2}y^T A y - b^T y, \quad y \in \mathbb{R}^N. \quad (2.9)$$

Observação 2.11 Notemos que a hessiana de $\mathcal{L}$ é dada por

$$H_{\mathcal{L}}(y) = \nabla^2 \mathcal{L}(y) = A,$$

e o jacobiano de $\mathcal{L}$ é dado por

$$J_{\mathcal{L}}(y) = \nabla \mathcal{L}(y) = Ay - b.$$

Daí, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.11 Se A é uma matriz simétrica e definida positiva e se x_* é a única solução de $Ax_* = b$ então x_* minimiza $\mathcal{L}$, i.e., para todo vetor $y \in \mathbb{R}^N$ diferente de x_* , temos que

$$\mathcal{L}(y) > \mathcal{L}(x_*).$$

Demonstração: Ver p. 92 de [13]. ■

Como a solução x_* de (2.5) alcança o mínimo de $\mathcal{L}$, construímos um método iterativo que encontra o mínimo de $\mathcal{L}$ em um número de etapas inferior a N .

Suponha que obtivemos uma aproximação $x_k \in \mathbb{R}^N$ de x_* e queremos calcular $x_{k+1} \in \mathbb{R}^N$ de modo que $\mathcal{L}(x_{k+1}) < \mathcal{L}(x_k)$. Uma idéia legítima para obter tal aproximação consiste em escolher um vetor $w_{k+1} \in \mathbb{R}^N$ não-nulo e definir:

$$x_{k+1} := x_k + \alpha_{k+1} w_{k+1},$$

onde α_{k+1} é um número real que minimiza $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(\alpha) := \mathcal{L}(x_k + \alpha w_{k+1}). \quad (2.10)$$

Observação 2.12 Este método de calcular x_{k+1} a partir de x_k é chamado de *método de descida*; o vetor w_{k+1} é chamado de *direção de descida*.

Agora explicitaremos como calcular o valor α_{k+1} . Para encontrar o número α_{k+1} tal que $f(\alpha_{k+1}) \leq f(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$, buscaremos os pontos críticos de f , encontrando os zeros da derivada $f'(\alpha)$. Utilizando (2.9) temos

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} y^i y^j - \sum_{i=1}^N b_i y^i, \quad y = (y^1, \dots, y^N)$$

e, conseqüentemente, levando em consideração a simetria de A

$$\frac{\partial}{\partial y^i} \mathcal{L}(y) = \sum_{j=1}^N a_{ij} y^j - b_i.$$

Basta usar a definição (2.10) para mostrar que

$$\begin{aligned}
 f'(\alpha) &= \sum_{i=1}^N w_{k+1}^i \frac{\partial}{\partial y^i} \mathcal{L}(x_k + \alpha w_{k+1}) \\
 &= \sum_{i=1}^N w_{k+1}^i \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} (x_k^j + \alpha w_{k+1}^j) - b_i \right) \\
 &= w_{k+1}^T [A(x_k + \alpha w_{k+1}) - b].
 \end{aligned}$$

Claramente, se queremos α_{k+1} seja tal que $f'(\alpha_{k+1}) = 0$, temos que

$$\alpha_{k+1} = \frac{w_{k+1}^T (b - Ax_k)}{w_{k+1}^T Aw_{k+1}}.$$

Definindo $r_k := b - Ax_k$, chamado de *resíduo* na k -ésima etapa, o método da descida pode ser resumido assim quando se quer calcular x_{k+1} a partir de x_k :

i) escolhemos uma direção de descida w_{k+1} ;

ii) calculamos

$$\alpha_{k+1} = \frac{w_{k+1}^T (b - Ax_k)}{w_{k+1}^T Aw_{k+1}} = \frac{w_{k+1}^T r_k}{w_{k+1}^T Aw_{k+1}}; \quad (2.11)$$

iii) calculamos $x_{k+1} = x_k + \alpha_{k+1} w_{k+1}$.

Agora o desafio é escolher a direção de descida w_{k+1} de tal modo que o método convirja.

Observação 2.13 O resíduo na $(k+1)$ -ésima etapa é ortogonal à direção de descida w_{k+1} , pois

$$0 = f'(\alpha_{k+1}) = -w_{k+1}^T r_{k+1}.$$

A escolha mais natural para minimizar $\mathcal{L}$ consiste em escolher a direção de maior inclinação como direção de descida. Como a direção de maior inclinação no ponto x_k é ortogonal à curva de nível de $\mathcal{L}$, temos $w_{k+1} = \nabla \mathcal{L}(x_k)$. Daí, obtemos

$$w_{k+1} = Ax_k - b = -r_k.$$

Suponha que obtivemos x_k e utilizamos o método de descida (2.11) para calcular x_{k+1} a partir de x_k . A principal ideia do método do gradiente conjugado é corrigir a direção $-r_k$, tomada anteriormente, pela direção antiga w_k , de modo que o erro entre x_k e x_{k+1} seja o menor possível na norma $\|\cdot\|_A$ definida por $\|y\|_A = (y^T Ay)^{1/2}$, para todo $y \in \mathbb{R}^N$. Mais precisamente, escolhemos em (2.11):

$$w_{k+1} = -r_k + \beta_k w_k, \quad (2.12)$$

onde β_k é um número calculado de modo que $\|x_k - x_{k+1}\|_A$ seja o menor possível. Assim, temos a seguinte expressão para β_k :

$$\beta_k = \frac{(r_k)^T A w_k}{(w_k)^T A w_k}. \quad (2.13)$$

Introduzimos o vetor intermediário z_k definido por $z_k = A w_k$. Daí, verifiquemos que:

$$r_k = b - A x_k = b - A(x_{k-1} + \alpha_k w_k) = r_{k-1} - \alpha_k z_k.$$

Finalmente, o algoritmo de descida (2.11) com as escolhas (2.12) e (2.13), torna-se:

- i) escolhemos um vetor de partida x_0 ;
- ii) executamos os seguintes cálculos

$$\begin{aligned} r_0 &= b - A x_0; \\ w_1 &= -r_0; \\ z_1 &= A w_1; \\ \alpha_1 &= \frac{r_0^T w_1}{w_1^T z_1}; \\ x_1 &= x_0 + \alpha_1 w_1; \end{aligned}$$

- iii) para $k = 1, 2, \dots$, calculamos r_k , β_k , w_{k+1} , z_{k+1} , α_{k+1} e x_{k+1} , pelas seguintes relações

$$\begin{aligned} r_k &= r_{k-1} - \alpha_k z_k; \\ \beta_k &= \frac{r_k^T z_k}{w_k^T z_k}; \\ w_{k+1} &= -r_k + \beta_k w_k; \\ z_{k+1} &= A w_{k+1}; \\ \alpha_{k+1} &= \frac{r_k^T w_{k+1}}{w_{k+1}^T z_{k+1}}; \\ x_{k+1} &= x_k + \alpha_{k+1} w_{k+1}. \end{aligned}$$

Este algoritmo é chamado *método do gradiente conjugado*. Esse método fornece a solução x em no máximo N iterações. Assim, existe $k \leq N$ tal que $r_k = 0$.

2.2.2 Método dos elementos finitos

Nesta seção apresentaremos o método numérico mais utilizado para resolver EDPs complexas, muitas delas originárias de problemas do mundo real.

2.2.2.0 Elementos Finitos de Lagrange

Introduziremos a noção geral de elemento finito de Lagrange. Faremos uma descrição detalhada de exemplos simples em que o domínio geométrico do elemento finito é um N -simplex. Ao final, é feita a análise do erro de interpolação de um elemento finito.

Sejam K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$, conexo e de interior não-vazio, $\Sigma = (a_j)_{1 \leq j \leq m}$ um conjunto finito de m pontos distintos de K e um espaço vetorial P de dimensão finita composto de funções $p : K \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 2.16 Dizemos que o conjunto Σ é P -unisolvente se, e somente se, dados m reais quaisquer α_j , $1 \leq j \leq m$, existe uma única função $p \in P$ tal que:

$$p(a_j) = \alpha_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Definição 2.17 Quando o conjunto Σ é P -unisolvente, a tripla (K, P, Σ) é chamada elemento finito de Lagrange.

Dado um elemento finito (K, P, Σ) , existe uma única função $p_i \in P$, $1 \leq i \leq m$, tal que:

$$p_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (2.14)$$

Em outras palavras, para todo $v : K \rightarrow \mathbb{R}$, existe um único $p \in P$ que interpola v em Σ , isto é, que satisfaz

$$p(a_j) = v(a_j), \quad 1 \leq j \leq m.$$

Definição 2.18 Dado um elemento finito de Lagrange (K, P, Σ) , chamamos função de base as m funções p_i , $1 \leq i \leq m$ tais que a identidade (2.14) é válida. Chamamos de operador de P -interpolação de Lagrange sobre Σ ao operador que para toda função v definida sobre K associa uma nova função Πv definida por

$$\Pi v = \sum_{i=1}^m v(a_i) p_i,$$

e Πv é chamado de P -interpolado de Lagrange de v sobre Σ .

Vamos agora dar um método sistemático para gerar a partir de um elemento finito (K, P, Σ) toda uma família de elementos finitos. Sejam $\widehat{K}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ compacto e conexo cujo interior é não-vazio e uma aplicação $F : \widehat{K} \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Assumimos também que

$$K = F(\widehat{K}), \quad (2.15)$$

é um subconjunto compacto e conexo cujo interior é não vazio (se F é um homeomorfismo de $\widehat{K}$ em K , as hipóteses sobre K resultam daquelas assumidas sobre $\widehat{K}$).

Teorema 2.12 Assuma que a aplicação F seja injetiva. Então, se $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ é um elemento de Lagrange, o triplex (K, P, Σ) , com K definido em (2.15),

$$P = \{p : K \rightarrow \mathbb{R}; p \circ F \in \widehat{P}\} \quad (2.16)$$

e

$$\Sigma = F(\widehat{\Sigma}), \quad (2.17)$$

é um elemento finito de Lagrange.

Demonstração: Ver p. 81 de [13]. ■

Definição 2.19 Dois elementos finitos de Lagrange $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ e (K, P, Σ) são ditos equivalentes se existe uma bijeção $F : \widehat{K} \rightarrow K$ verificando (2.15), (2.16) e (2.17). Além disso, quando for possível escolher tal bijeção F como uma aplicação afim, os elementos finitos são ditos afim-equivalentes.

Agora, construiremos uma classe de elementos finitos de Lagrange (K, P, Σ) chamada de *Elementos Finitos Simples*, onde o domínio geométrico K é um N -simplex qualquer de $\mathbb{R}^N$. Antes vamos lembrar a definição de um N -simplex: Consideremos $N + 1$ pontos $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{Nj}) \in \mathbb{R}^N$, com $1 \leq j \leq N + 1$, não pertencentes a um mesmo hiperplano de $\mathbb{R}^N$, isto é, tais que a matriz de ordem $N + 1$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(N+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{N(N+1)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

seja invertível. Chamaremos N -simplex K de vértices a_j , com $1 \leq j \leq N + 1$, o fecho convexo dos pontos a_j . Para $N = 2$ e $N = 3$, o N -simplex K receberá a denominação usual de triângulo e tetraedro, respectivamente.

Todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$, de coordenadas cartesianas x_i , $1 \leq i \leq N$, é caracterizado pelos $(N+1)$ escalares $\lambda_j = \lambda_j(x)$, $1 \leq j \leq N+1$, definidos como solução do sistema linear:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N+1} a_{ij} \lambda_j(x) = x_i & 1 \leq i \leq N \\ \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j(x) = 1, \end{cases} \quad (2.18)$$

onde a matriz de coeficientes é precisamente a matriz invertível A . Os escalares $\lambda_j(x)$ são chamados *coordenadas baricêntricas* do ponto x com relação aos $(N+1)$ pontos a_j , com $1 \leq j \leq N+1$.

As funções $x \in \mathbb{R}^N \mapsto \lambda_j(x)$, $1 \leq j \leq N+1$ são as *funções coordenadas baricêntricas* com relação aos pontos a_j . De (2.18), cada uma dessas funções é uma função afim de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$ e para todo x em $\mathbb{R}^N$, $x = \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j(x) a_j$.

Usando essas coordenadas baricêntricas com relação aos pontos a_j , o N -simplex K de vértices a_j , $1 \leq j \leq N+1$, é caracterizado por

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \lambda_j(x) \leq 1, 1 \leq j \leq N+1\}.$$

Por outro lado, para todo inteiro $k \geq 0$, designamos por P_k o espaço das funções polinomiais de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$ de grau menor ou igual a k , isto é, da forma

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad p(x) = \sum_{\substack{i_1 \geq 0, \dots, i_N \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_N \leq k}} \alpha_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N},$$

onde os $\alpha_{i_1, \dots, i_N}$ são os escalares reais.

A dimensão do espaço P_k é:

$$\dim(P_k) = \binom{N+k}{k}.$$

Finalmente, definamos, para todo inteiro $k \geq 1$, a *treliça principal* de ordem k do N -simplex K como sendo o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^N$ definido a partir das coordenadas baricêntricas relacionadas aos vértices a_j da forma

$$\Sigma_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \lambda_j(x) \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\}, \quad 1 \leq j \leq N+1 \right\}.$$

Para $k = 0$, tomamos

$$\Sigma_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \lambda_j(x) = \frac{1}{N+1}, \quad 1 \leq j \leq N+1 \right\}.$$

Em outras palavras, Σ_0 reduz-se a um ponto, o baricentro de K .

Levando em consideração a seguinte relação

$$\lambda_{N+1} = 1 - \sum_{j=1}^N \lambda_j,$$

pode-se verificar que a cardinalidade do conjunto Σ_k é

$$\#(\Sigma_k) = \binom{N+k}{k}.$$

Teorema 2.13 Para todo $k \geq 0$ o conjunto Σ_k é P_k -unisolvante.

Demonstração: Ver p. 84 de [13]. ■

Definição 2.20 Para todo N -simplex K de $\mathbb{R}^N$ e para todo inteiro $k \geq 0$, o elemento finito (K, P_k, Σ_k) , onde Σ_k é a treliça principal de ordem k em K , é chamado N -simplex do tipo (k) .

Vamos considerar alguns casos particulares, os mais usados na prática, de elementos finitos (K, P_k, Σ_k) N -simplex do tipo (k) . Precisamente:

i) Quando $N = 1$, K é o segmento de reta de extremos a_1 e a_2 .

a) Caso $k = 0$. O N -simplex do tipo (0) corresponde a

$$P_0 = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : p \equiv \text{cte}\} \quad \text{e} \quad \Sigma_0 = \left\{a_0 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)\right\}.$$

Neste caso, a função de base $p \in P_0$ é identicamente 1, i.e. $p \equiv 1$.

b) Caso $k = 1$. O N -simplex do tipo (1) corresponde a

$$P_1 = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ é polinômio de grau } \leq 1\} \quad \text{e} \quad \Sigma = \Sigma_1 = \{a_1, a_2\}.$$

Daí, obtemos que as funções de base são dadas por

$$p_i(x) = \lambda_i(x), \quad i = 1, 2.$$

ii) Quando $n = 2$, K é o triângulo de vértices a_1, a_2 e a_3 .

Tomemos os seguintes pontos:

$$a_0 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3),$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j), \quad 1 \leq i < j \leq 3,$$

e

$$a_{iij} = \frac{1}{3}(2a_i + a_j), \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad i \neq j.$$

a) Caso $k = 0$. O triângulo do tipo (0) corresponde a

$$P_0 = \{p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; p \equiv \text{cte}\} \quad \text{e} \quad \Sigma_0 = \{a_0\}.$$

Como no caso anterior, a função de base $p \in P_0$ é identicamente 1.

b) Caso $k = 1$. O triângulo do tipo (1) corresponde a

$$P_1 = \{p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; p \text{ é um polinômio de grau } \leq 1\} \quad \text{e} \quad \Sigma_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$$

Notemos que $\#(\Sigma_1) = \dim(P_1) = 3$ e que as funções de base são as funções coordenadas baricêntricas com relação a (a_1, a_2, a_3) , isto é:

$$p_i = \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

c) Caso $k = 2$. O triângulo do tipo (2) corresponde a

$$P_2 = \{p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ é um polinômio de grau } \leq 2\}$$

e

$$\Sigma_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}\}.$$

Notemos que $\#(\Sigma_2) = \dim(P_2) = 6$ e que as funções de base são dadas por

$$p_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

e

$$p_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j, \quad 1 \leq i < j \leq 3.$$

d) Caso $k = 3$. O triângulo do tipo (3) corresponde a

$$P_3 = \{p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; p \text{ é um polinômio de grau } \leq 3\}$$

e

$$\Sigma_3 = \{a_j\}_{j=1}^3 \cup \{a_{iij}\}_{\substack{1 \leq i, j \leq 3 \\ i \neq j}} \cup \{a_0\}.$$

Notemos que $\#(\Sigma_3) = \dim(P_3) = 10$ e que as funções de base são dadas por

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{1}{2} \lambda_i (3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2), \quad 1 \leq i \leq 3, \\ p_{ij} &= \frac{9}{2} \lambda_i \lambda_j (3\lambda_i - 1), \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad i \neq j, \\ p_0 &= 27\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned}$$

2.2.2.0 Aproximação dos espaços de Sobolev

Se (K, P, Σ) é um elemento finito de Lagrange, para toda função v definida em K podemos associar a função Πv , o P -interpolante de Lagrange de v em Σ . Nesta seção, vamos analisar o erro de interpolação $v - \Pi v$.

Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$, conexo com interior não-vazio. Por razões de simplificação, denotaremos por $H^m(K)$ o espaço de Sobolev $H^m(\mathring{K})$, onde $\mathring{K}$ é o interior de K . Se E é um subespaço de $H^m(K)$, o espaço quociente $H^m(K)/E$ é o conjunto das classes de equivalência $\dot{v}$ das funções de $H^m(K)$. A relação de equivalência $\mathfrak{R}$ considerada é a seguinte:

$$v_1 \mathfrak{R} v_2 \iff v_1 - v_2 \in E.$$

Quando E é um subespaço fechado de $H^m(K)$, o espaço $H^m(K)/E$, munido com a seguinte norma quociente

$$\|\dot{v}\|_{H^m(K)/E} = \inf_{v \in \dot{v}} \|v\|_{m,K},$$

é um espaço de Hilbert.

Em particular, para todo inteiro $k \geq 0$, o espaço P_k é um espaço de dimensão finita de H^{k+1} , de modo que podemos introduzir o espaço quociente H^{k+1}/P_k . Vamos munir esse espaço de uma norma mais manejável que a norma quociente. Para isso, será necessário supor, além disso, que a injeção canônica de $H^1(K)$ em $L^2(K)$ é compacta (esta propriedade é verificada pois K é um limitado de $\mathbb{R}^N$ e a fronteira ∂K é suficientemente regular).

Teorema 2.14 Seja K um subconjunto compacto e conexo de $\mathbb{R}^N$ cujo interior é não-vazio e a fronteira é suficientemente regular. Então, para todo $k \geq 0$, a aplicação

$$\dot{v} \longmapsto |\dot{v}|_{k+1,K} = |v|_{k+1,K},$$

onde v é um representante qualquer de $\bar{v}$ em $H^{k+1}(K)$, é uma norma sobre $H^{k+1}(K)/P_k$ equivalente a norma quociente.

Demonstração: Ver p. 96 de [13]. ■

A partir do teorema acima, deduzimos um resultado geral de aproximação em espaços de Sobolev.

Teorema 2.15 Seja K um subconjunto compacto e conexo de $\mathbb{R}^N$ cujo interior é não-vazio e a fronteira é suficientemente regular e seja Π um operador linear contínuo de $H^{k+1}(K)$ em $H^m(K)$, $0 \leq m \leq k+1$, tal que

$$\Pi p = p, \quad \forall p \in P_k. \quad (2.19)$$

Então, existe uma constante $C = C(K, \Pi)$ tal que

$$\|v - \Pi v\|_{m,K} \leq C |v|_{k+1,K}, \quad \forall v \in H^{k+1}(K).$$

Demonstração: Ver p. 98 de [13]. ■

Dado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, podemos definir as seguintes grandezas geométricas:

$$h_K = \text{diâmetro de } K \quad \text{e} \quad \rho_K = \text{circularidade de } K,$$

onde o diâmetro de K é o máximo das distâncias euclidianas entre dois pontos de K e a circularidade de K é o máximo dos diâmetros das esferas (círculos quando $N = 2$) contidas em K .

Daí, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.16 Sejam (K, P, Σ) e $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ dois elementos finitos afim-equivalentes. Se K é um subconjunto (compacto e conexo cujo interior é não-vazio) de $\mathbb{R}^N$, $N \leq 3$, com fronteira suficientemente regular e existe um inteiro $k \geq 1$ tal que

$$P_k \subset P \subset H^{k+1}(K).$$

Então, existe uma constante C , que não depende do elemento finito $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ tal que para todo inteiro m , $0 \leq m \leq k+1$, temos

$$|v - \Pi v|_{m,K} \leq C \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,K}, \quad \forall v \in H^{k+1}(K),$$

onde Π designa o operador de P -interpolação sobre Σ .

Demonstração: Ver p. 102 de [13]. ■

2.3 O SOFTWARE FREEFEM++

Esta seção tem como objetivo realizar uma breve apresentação do *software* FreeFem++ utilizado para obter as aproximações apresentadas neste trabalho, de modo que o leitor seja capaz de compreender os códigos utilizados nas simulações numéricas.

2.3.1 Apresentação

O FreeFem++ é um *software* livre utilizado para resolver EDPs utilizando o Método dos Elementos Finitos com o uso de diversos tipos de elementos e malhas para problemas bidimensionais ou tridimensionais.

Podemos destacar como principais características do programa a simplicidade do gerador de malhas incluída no programa, a facilidade na construção do espaço de funções (é feita com apenas um comando), a grande variedade de espaços de funções disponíveis (como polinômios lineares, quadráticos, etc) e a maneira eficiente e direta com que são feitas a implementação da formulação variacional associada ao MEF e a resolução do sistema linear associado. Além disso, o programa dispõe de um visualizador gráfico bastante simples, que auxilia na visualização dos resultados obtidos.

A escolha do FreeFem++ para a implementação das simulações contidas neste trabalho ocorreu devido a facilidade na construção e obtenção das aproximações por elementos finitos para os problemas aqui apresentados. No entanto, o programa mostrou-se capaz de analisar problemas bastante complexos.

A referência [9] apresenta a descrição de todas as funcionalidades do programa de maneira muito mais completa, inclusive contendo diversos códigos modelos que serviram como base para os resultados deste trabalho.

2.3.2 Implementação

Dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ou $N = 3$) e uma EDP em sua formulação variacional, o esquema geral para o funcionamento do programa utiliza as seguintes componentes:

- a) *Descrição da(s) fronteira(s) do domínio Ω*

O comando `border` *fronteira* $(t=a,b)\{x=x(t); y=y(t);\}$ define a curva (x,y) parametrizada pelo parâmetro t variando de a até b , com $a,b \in \mathbb{R}$. Por exemplo, considerando Ω como sendo o círculo unitário temos que a fronteira do círculo é obtida por

```
border circunferencia (t=0, 2*pi){x= cos(t); y=sen(t);}
```

b) *Discretização do domínio Ω em um conjunto de elementos triangulares $\mathcal{T}$*

O comando `mesh` cria uma variável que armazena as informações de uma determinada discretização do domínio por elementos finitos. A construção da discretização é feita pelo comando `buildmesh`(*fronteira*(n)), onde n indica a quantidade de nós que estarão na fronteira. Por exemplo para construirmos uma malha $\mathcal{T}_h$ contendo 20 pontos na fronteira utilizamos o comando

```
mesh Th = buildmesh (circunferencia(20));
```

c) *Geração do espaço de funções definidas sobre os elementos triangulares*

Para a geração do espaço de funções é utilizado o comando `fespace`($\mathcal{T}_h$, *Tipo*), onde $\mathcal{T}_h$ é a discretização do domínio em elementos triangulares e *Tipo* indica o tipo de elemento que será utilizado. Por exemplo, para aproximações lineares (polinômios de grau menor ou igual a um), utilizamos o comando

```
fespace Vh = (Th,P1);
```

d) *Definição das funções do problema*

No FreeFem++ funções são definidas utilizando o comando `func`. Por exemplo, para definirmos a função $f(x,y) = xy$ utilizamos o comando

```
func f = x*y;
```

e) *Implementação da formulação variacional e dos respectivos valores de contorno*

Neste ponto serão necessárias três etapas:

- **Integração numérica.** A integração bidimensional sobre cada um dos elementos da discretização $\mathcal{T}_h$ é feita utiliza-se o comando `int2d`($\mathcal{T}_h$). As derivadas de u em relação a x e em relação a y são descritas por $dx(u)$ e $dy(u)$, respectivamente.

- **Atribuição das condições de contorno.** As condições de contorno são impostas por meio do comando `on(fronteira,u=valor)`.
- **Resolução do sistema linear.** é obtida por meio do comando `solve`.

Tomando como exemplo o problema de Poisson com $f(x,y) = xy$ e condições de fronteiras nulas, utilizando a formulação variacional clássica para este problema, a resolução do problema é obtida com o comando

```
solve Poisson (u,v) = int2d(Th) (dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))
      -int2d(Th) (f*v) + on(F, u=0);
```

f) *Visualização dos resultados obtidos*

As aproximações obtidas são visualizadas por meio do comando `plot(wait=1)`. O parâmetro `wait=1` é utilizado para que a aproximação se mantenha na tela até que seja pressionada alguma tecla.

3 APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS DE PROBLEMAS DE FRONTEIRA E INICIAL

Neste capítulo apresentaremos o método de elementos finitos aplicado à problemas variacionais abstratos, estacionários e evolutivos, a fim de obter aproximações numéricas das soluções de tais problemas. A teoria é apresentada de maneira bem geral a fim de cobrir o maior número possível de problemas envolvendo operadores diferenciais.

3.1 PROBLEMAS ESTACIONÁRIOS

3.1.1 Teoria abstrata

Sejam V um espaço de Hilbert, uma aplicação bilinear $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e V -elíptica e L um funcional linear, contínuo em V . Sabemos que, pelo teorema de Lax-Milgram (veja Teorema 2.9), o *problema abstrato* $(\mathcal{P})$: encontrar $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \quad (3.1)$$

admite uma única solução.

Observação 3.1 O teorema de Lax-Milgram, no caso em que $a(\cdot, \cdot)$ é simétrica, garante que a solução u de $(\mathcal{P})$ é caracterizada como solução do seguinte *problema de minimização*: encontrar $u \in V$ solução de

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v),$$

onde J é o funcional quadrático definido em V por

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - f(v), \quad \forall v \in V.$$

Os exemplos onde o método dos elementos finitos torna-se interessante são problemas do tipo $(\mathcal{P})$ onde o espaço V é de dimensão infinita. A fim de obter uma *aproximação numérica* da solução u , vamos substituir o problema $(\mathcal{P})$ por um “*problema aproximado*” em um subespaço de dimensão finita. Obviamente faz-se necessário verificar se o problema aproximado tem uma única solução e que sua solução converge para solução u de $(\mathcal{P})$.

3.1.1.0 Existência e unicidade das soluções aproximadas

O objetivo desta seção é provar o seguinte teorema de existência e unicidade:

Teorema 3.1 Sejam V um espaço de Hilbert, uma aplicação bilinear $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e V -elíptica e L um funcional linear, contínuo em V e seja $V_h \subset V$ um subespaço vetorial de dimensão finita. O “problema aproximado” $(\mathcal{P}_h)$ de $(\mathcal{P})$ consiste em encontrar $u_h \in V_h$ solução de

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h). \quad (3.2)$$

O problema aproximado $(\mathcal{P}_h)$ admite uma única solução $u_h \in V_h$.

Demonstração: Denotamos por I_h a dimensão do espaço V_h , onde h é um parâmetro $h > 0$, destinado a tender à zero. Na prática V_h representa uma aproximação do espaço V , de dimensão infinita, e teremos

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_h = +\infty.$$

Provaremos o resultado de duas maneiras diferentes:

- **Primeira forma.** Notemos que V_h é um espaço de Hilbert com o mesmo produto interno de V . Como as hipóteses sobre a e L continuam válidas em V_h , temos, usando o teorema de Lax-Milgram em dimensão finita, que existe um único elemento $u_h \in V_h$ tal que

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h).$$

- **Segunda forma.** Seja $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{I_h})$ uma base do espaço vetorial V_h ; reescrevemos a solução u_h da forma

$$u_h = \sum_{j=1}^{I_h} \xi_j \varphi_j, \quad \text{com } \xi_j \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq I_h. \quad (3.3)$$

O problema $(\mathcal{P}_h)$ equivale a resolução do sistema linear

$$\sum_{j=1}^{I_h} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad 1 \leq i \leq I_h.$$

A matriz de coeficientes $(a(\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq I_h}$ deste sistema linear é invertível. De fato, como a é contínua e V —elíptica temos:

$$\beta \left\| \sum_{j=1}^{I_h} \xi_j \varphi_j \right\|^2 \leq a \left(\sum_{j=1}^{I_h} \xi_j \varphi_j, \sum_{i=1}^{I_h} \xi_i \varphi_i \right) = \sum_{i,j=1}^{I_h} \xi_j \xi_i a(\varphi_j, \varphi_i), \quad \forall \xi_j \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq I_h.$$

Logo, $(a(\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq I_h}$ é invertível.

Assim, (3.3) define univocamente as coordenadas da solução u_h na base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{I_h})$ de V_h .

■

Observação 3.2 Notemos que se a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é simétrica, o teorema de Lax-Milgram garante que a solução u_h de $(\mathcal{P}_h)$ é caracterizada como solução do seguinte *problema de minimização*: encontrar $u_h \in V_h$ solução de

$$J(u_h) = \min_{v \in V_h} J(v),$$

onde J é um funcional quadrático definido em V_h por

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - f(v), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Observação 3.3 Se a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é simétrica, a resolução do problema $(\mathcal{P}_h)$ reduz-se à resolução de um sistema linear onde a matriz é simétrica e definida positiva. A resolução de um sistema linear pode, portanto, ser realizada usando métodos diretos, como o método de Gauss e o método de Cholesky, ou de métodos iterativos, como o método de Gauss-Seidel, o método SOR (Sucessive Over Relaxation) e o método do Gradiente Conjugado.

3.1.1.0 Convergência das aproximações

Nesta seção, vamos examinar o erro cometido ao aproximarmos a solução u do problema $(\mathcal{P})$ pela solução u_h do problema $(\mathcal{P}_h)$. A simplicidade do resultado fundamental a seguir é uma justificativa do interesse do método de aproximação variacional.

Teorema 3.2 (Céa, 1964) Sejam u a solução de $(\mathcal{P})$ e u_h a solução de $(\mathcal{P}_h)$. Então, existe uma constante $C > 0$, independente de h tal que

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

Demonstração: Seja v_h um elemento qualquer de V_h , tomamos $w_h = v_h - u_h$. Como V_h é um subespaço de V , temos que o elemento w_h pertence a V_h e portanto a V . De (3.1) e (3.2), temos

$$\begin{aligned} a(u - u_h, w_h) &= a(u - u_h, v_h - u_h) \\ &= a(u, v_h) - a(u, u_h) - a(u_h, v_h) + a(u_h, u_h) \\ &= L(v_h) - L(u_h) - L(v_h) + L(u_h) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daí, segue que $a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h)$.

Como a forma bilinear a é contínua e V-elíptica, temos

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) \\ &\leq \beta \|u - u_h\| \|u - v_h\|. \end{aligned}$$

Tomando $C = \frac{\beta}{\alpha}$, temos que $\|u - u_h\| \leq C \|u - v_h\| \quad \forall v_h \in V_h$. ■

O Teorema de Céa assegura que o problema de avaliação do erro $\|u - u_h\|$ pode ser reduzido a um problema da teoria da aproximação, isto é, avaliar a quantidade $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$ (a distância em V entre a solução u de $(\mathcal{P})$ e o subespaço $V_h \subset V$).

A primeira consequência do Teorema de Céa é o seguinte *resultado geral de convergência*:

Corolário 3.1 Sejam u a solução de $(\mathcal{P})$ e u_h a solução de $(\mathcal{P}_h)$. Suponha que exista um subespaço $\mathcal{V}$ de V , denso em V tal que para todo h existe $r_h : \mathcal{V} \rightarrow V_h$ com

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h v\| = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (3.4)$$

Então, o método de aproximação variacional converge, isto é,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0.$$

Demonstração: Sejam C a constante garantida pelo Lema de Céa e $\varepsilon > 0$. Como $\mathcal{V}$ é denso em V , existe um elemento $v_\varepsilon \in \mathcal{V}$ tal que

$$\|u - v_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Para este elemento $v_\varepsilon \in \mathcal{V}$, graças à (3.4), existe $h_\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall h \leq h_\varepsilon, \quad \|v_\varepsilon - r_h v_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Pelo teorema de Céa, obtemos para $h \leq h_\varepsilon$

$$\|u - u_h\| \leq C(\|u - v_\varepsilon\| + \|v_\varepsilon - r_h v_\varepsilon\|) \leq \varepsilon.$$

■

3.1.1.0 Ordem de convergência

Quando o método de aproximação variacional converge, ou seja, quando $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0$, resta estudar a ordem de convergência do método quando $h \rightarrow 0$. Dito isto, procuraremos uma estimativa de erro do tipo

$$\|u - u_h\| = \varphi(h),$$

onde φ é uma função não-negativa contínua tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$.

Na prática, buscaremos funções φ da forma

$$\varphi(h) = Ch^k,$$

onde C é uma constante que independente de k mas que depende da solução u e k é uma constante maior que 0. Diremos então que o *método de aproximação* é de *ordem* k e escrevemos

$$\|u - u_h\| = O(h^k).$$

3.1.1.0 Escolha dos subespaços de aproximação

Depois de obter esses resultados gerais sobre o método de aproximação variacional, é possível analisar quais critérios devem governar a escolha dos subespaços V_h de V :

- 1°) O espaço V_h deve ter uma base $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{I_h}$ facilmente acessível tais que as seguintes propriedades sejam consideradas:

- (i) Os coeficientes $a(\phi_i, \phi_j)$ e $L(\phi_i)$ do sistema linear (3.2) sejam fáceis de calcular;
- (ii) O sistema linear obtido em (3.2) possua propriedades tais que algoritmos numéricos eficientes estejam disponíveis para resolvê-lo.

2°) O espaço V_h deve ser escolhido da forma a garantir não apenas a convergência do método de aproximação, mas também uma boa precisão.

3.1.2 Análise do método dos elementos finitos em um caso particular

Com a ajuda dos elementos finitos de Lagrange construídos na Seção 2.2.2, vamos explicitar a construção de um elemento finito de Lagrange em alguns casos particulares importantes nas aplicações.

Seja Ω um aberto poliédrico de $\mathbb{R}^N$ (poligonal se $N = 2$), isto é, $\overline{\Omega}$ é a união finita de poliedros de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Lembramos que um poliedro K de $\mathbb{R}^N$ é a interseção finita de semi-espacos fechados de $\mathbb{R}^N$. Uma parte K' da fronteira ∂K de K é chamada *face* (lado se $N = 2$) se, e somente se, existe um único hiperplano $[f = \alpha]$ tal que $K' = \partial K \cap [f = \alpha]$.

Nesta seção vamos considerar os seguintes casos: $V = H_0^1(\Omega)$ ou $V = H^1(\Omega)$. O estudo detalhado dessas duas situações parece suficientemente significativo.

Consideremos então uma decomposição finita do domínio:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

tal que:

- (i) cada elemento K de $\mathcal{T}_h$ é um poliedro de $\mathbb{R}^N$, de interior não-vazio;
- (ii) os interiores de dois poliedros de $\mathcal{T}_h$ distintos são disjuntos;
- (iii) toda face de um poliedro $K_1 \in \mathcal{T}_h$ ou é face de um outro poliedro $K_2 \in \mathcal{T}_h$, neste caso K_1 e K_2 são ditos adjacentes, ou é parte da fronteira $\partial\Omega$ de Ω .

Definição 3.1 Toda decomposição de $\overline{\Omega}$ verificando as propriedades (i), (ii) e (iii) é chamada triangularização de $\overline{\Omega}$.

Por convenção de escrita, $\mathcal{T}_h$ designará uma triangularização de $\overline{\Omega}$ tal que

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K,$$

onde h_K é o diâmetro do poliedro K .

Assumimos então que a cada poliedro $K \in \mathcal{T}_h$ está associado um elemento finito de Lagrange (K, P_K, Σ_K) tal que

$$P_K \subset H^1(K),$$

e definimos os espaços de dimensão finita

$$X_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) : \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in P_K\} \subset H^1(\Omega), \quad (3.5)$$

e

$$X_{0h} = \{v \in X_h : v|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H_0^1(\Omega). \quad (3.6)$$

Considerando $V_h = X_h$ se $V = H^1(\Omega)$ ou $V_h = X_{0h}$ se $V = H_0^1(\Omega)$, a teoria de aproximação variacional (estudada na seção 3.2.1) conduz à procura de uma solução u_h em V_h do problema $(\mathcal{P}_h)$:

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h). \quad (3.7)$$

Notemos que, sem hipóteses adicionais sobre os elementos finitos (K, P_K, Σ_K) , determinar uma base de V_h não parece uma tarefa óbvia, tornando a resolução numérica de (3.7) bastante difícil.

Além disso, para estimar quantidade $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega}$, que intervém na estimativa de $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ (veja o Teorema de Céa), é natural introduzir o operador Π_h tal que para toda função $v \in C^0(\overline{\Omega})$ associa uma função $\Pi_h v \in L^2(\Omega)$ definida por

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \forall x \in \overset{\circ}{K}, \quad \Pi_h v(x) = \Pi_K v(x), \quad (3.8)$$

onde Π_K é o operador de P_K -interpolação sobre Σ_K . Logo, sem hipóteses adicionais sobre os elementos finitos, a função $\Pi_h v$ geralmente não é contínua sobre $\overline{\Omega}$ e, portanto, não pertence a V_h . Desse modo, não podemos escolher $v_h = \Pi_h u$.

Tais dificuldades práticas e teóricas serão contornadas assumindo que o espaço X_h coincida com a imagem de $C^0(\overline{\Omega})$ por Π_h . Para isso, entre outras coisas, é necessário assumir a seguinte *hipótese de compatibilidade* entre dois elementos finitos: para todo par $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ de poliedros adjacentes, de face comum $K' = K_1 \cap K_2$, temos que:

$$P_{K_1}|_{K'} = P_{K_2}|_{K'} \quad (3.9)$$

e

$$\Sigma_{K_1} \cap K' = \Sigma_{K_2} \cap K'. \quad (3.10)$$

Além disso, precisamos da seguinte definição:

Definição 3.2 Seja K um poliedro de $\mathbb{R}^N$. Um elemento finito (K, P, Σ) é dito de classe C^0 se as seguintes condições são satisfeitas

(i) $P \subset C^0(K)$;

(ii) Para toda face K' de K , o conjunto $\Sigma' = \Sigma \cap K'$ é P' -unisolvante, onde

$$P' = \{p|_{K'} : p \in P\}.$$

Temos o seguinte teorema que garante a identidade $X_h = \Pi_h(C^0(\overline{\Omega}))$:

Teorema 3.3 Seja $\mathcal{T}_h$ uma triangularização de $\overline{\Omega}$ e seja $(K, P_K, \Sigma_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ uma família de elementos finitos associados. Assumimos que as condições de compatibilidade (3.9) e (3.10) são satisfeitas e que, para todo $K \in \mathcal{T}_h$, (K, P_K, Σ_K) é um elemento finito de classe C^0 e P_K um subespaço de $H^1(K)$. Então, o operador de interpolação $\Pi_h : C^0(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ definido em (3.8), tem valores em $C^0(\overline{\Omega})$. Mais precisamente,

$$X_h = \{\Pi_h v; v \in C^0(\overline{\Omega})\}, \quad (3.11)$$

e

$$X_{0h} = \{\Pi_h v; v \in C^0(\overline{\Omega}), v|_{\Gamma} = 0\} \quad (3.12)$$

onde X_h e X_{0h} são os subespaços de $C^0(\overline{\Omega})$ introduzidos em (3.5) e (3.6).

Demonstração: Seja v uma função contínua sobre $\overline{\Omega}$. A restrição em qualquer elemento $K \in \mathcal{T}_h$ da função $\Pi_h v$ pertence ao espaço $P_K \subset C^0(K)$. Para mostrar que $\Pi_h v$ pertence ao espaço X_h definido em (3.5), é suficiente verificar que $\Pi_h v$ é contínua em qualquer face K' comum a dois elementos adjacentes K_1 e K_2 de $\mathcal{T}_h$, isto é,

$$(\Pi_{K_1} v)|_{K'} = (\Pi_{K_2} v)|_{K'}.$$

Primeiramente, introduzamos a função $w = (\Pi_{K_1} v)|_{K'} - (\Pi_{K_2} v)|_{K'}$. Notemos que w é uma função de $P = P_{K_1}|_{K'} = P_{K_2}|_{K'}$ e que $w(a) = 0, \forall a \in \Sigma' = \Sigma_{K_1} \cap K' = \Sigma_{K_2} \cap K'$.

Como os elementos finitos são de classe C^0 e Σ' é P' -unisolvante, deduzimos que $w = 0$. Consequentemente, $\Pi_h v$ é contínua sobre $\overline{\Omega}$ e, portanto

$$\{\Pi_h v : v \in C^0(\overline{\Omega})\} \subset X_h.$$

Reciprocamente, seja $v \in X_h$. A restrição de v a todo $K \in \mathcal{T}_h$ pertence a P_K . Então, temos $v|_K = \Pi_K v$, para todo $K \in \mathcal{T}_h$. Logo, $v = \Pi_h v$ com $v \in C^0(\overline{\Omega})$, por definição de X_h .

Desse modo, demonstramos (3.11). Analogamente, obtemos (3.12). ■

Agora vamos introduzir o conjunto dos *nós* dos elementos finitos

$$\Sigma_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \Sigma_K.$$

A esse conjunto finito, deve-se associar uma enumeração tal que os “últimos” elementos pertencem à fronteira $\partial\Omega$ de daí escrevemos:

$$\Sigma_h = \{a_i\}_{1 \leq i \leq I} \text{ com } \#(\Sigma_h) = I,$$

e

$$\Sigma_{0h} := \Sigma_h \cap \Omega = \{a_i\}_{1 \leq i \leq I_0} \text{ com } \#(\Sigma_{0h}) = I_0 < I.$$

Para todo inteiro $i, 1 \leq i \leq I$, denotamos por φ_i a função de X_h tal que

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq I. \quad (3.13)$$

Se v é uma função contínua sobre $\overline{\Omega}$, evidentemente temos

$$\Pi_h v = \sum_{i=1}^I v(a_i) \varphi_i.$$

Corolário 3.2 Sob as hipóteses do Teorema 3.3, o conjunto das funções $\varphi_i, 1 \leq i \leq I$ definidas em (3.13), constitui uma base do espaço X_h e, portanto, toda função $v \in X_h$ é escrita

$$v = \sum_{i=1}^I v(a_i) \varphi_i.$$

Da mesma forma, o conjunto das funções $\varphi_i, 1 \leq i \leq I_0$, constituem uma base do espaço X_{0h} e, portanto, toda função $v \in X_{0h}$ é escrita

$$v = \sum_{i=1}^{I_0} v(a_i) \varphi_i.$$

Definição 3.3 Os escalares $v(a_i)$, $1 \leq i \leq I$ (resp. $1 \leq i \leq I_0$), são chamados de graus de liberdade de uma função $v \in X_h$ (resp. X_{0h}).

Observação 3.4 Deve-se notar que as funções φ_i tem a vantagem prática de ter um suporte “pequeno”. Mais precisamente, o suporte de φ_i é o conjunto dos elementos $K \in \mathcal{T}_h$ ao qual o nó a_i pertence. Além disso, a restrição de φ_i para cada um desses elementos K é uma função de base do elemento finito (K, P_K, Σ_K) .

Definição 3.4 Dizemos que $(\mathcal{T}_h)$ é uma família regular de triangularizações de $\overline{\Omega}$ se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) todos os elementos finitos (K, P_K, Σ_K) de todas as triangularizações são afim-equivalentes a um mesmo elemento finito de referência $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ de classe C^0 ;

(ii) Para todo par $(\hat{K}'_1, \hat{K}'_2)$ de faces de $\hat{K}$ e para toda aplicação afim invertível $\hat{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $\hat{K}'_2 = \hat{F}(\hat{K}'_1)$, temos que $\hat{\Sigma} \cap \hat{K}'_2 = \hat{F}(\hat{\Sigma} \cap \hat{K}'_1)$ e

$$\{p|_{\hat{K}'_2} ; p \in \hat{P}\} = \{p \circ \hat{F}|_{\hat{K}'_1} ; p \in \hat{P}\}.$$

(iii) Temos a seguinte convergência: $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \rightarrow 0$.

(iv) Existe uma constante $\sigma \geq 1$ tal que

$$\forall h, \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma. \quad (3.14)$$

onde h_K e ρ_K são, respectivamente, o diâmetro e a circularidade de K .

Teorema 3.4 (Erro global e convergência) Seja Ω um aberto poliédrico de $\mathbb{R}^N$, $N \leq 3$. Seja $(\mathcal{T}_h)$ uma família regular de triangularizações de $\overline{\Omega}$ associada a um elemento finito de referência $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ de classe C^0 . Assuma que existe um inteiro $k \geq 1$ para o qual temos

$$P_k \subset \hat{P} \subset H^1(\hat{K}).$$

Então o método dos elementos finitos é convergente, isto é, a solução u_h do problema $(\mathcal{P}_h)$ converge para a solução u de $(\mathcal{P})$ em $H^1(\Omega)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0.$$

Além disso, se a solução u pertence a $H^{k+1}(\Omega)$ então o método é de ordem (pelo menos) k , isto é, existe uma constante C independente de h tal que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1,\Omega}. \quad (3.15)$$

Demonstração: Suponha que a solução $u \in H^{k+1}(\Omega)$. Pelo Teorema 2.7, temos que u é contínua sobre $\overline{\Omega}$ e daí podemos construir a função $\Pi_h u$. Logo, graças ao teorema 3.3, $\Pi_h u$ pertence ao subespaço V_h de V (com $V_h = X_h$ se $V = H^1(\Omega)$ ou $V_h = X_{0h}$ se $V = H_0^1(\Omega)$). O Teorema de Céa conduz então à seguinte estimativa

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C_1 \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega},$$

com $C_1 = \frac{\beta}{\alpha}$.

Desde que a restrição de $\Pi_h u$ a todo $K \in \mathcal{T}_h$ é por definição o P_K -interpolante $\Pi_K u$ de u em Σ_K , claramente temos

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \Pi_K u\|_{1,K}^{1/2} \right)^{1/2}.$$

Portanto, pelo Teorema 2.16, existem duas constantes positivas C_2 e C_3 , dependendo apenas do elemento finito de referência $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, tais que

$$|u - \Pi_K u|_{1,K} \leq C_2 \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K} |u|_{k+1,K} \quad \text{e} \quad |u - \Pi_K u|_{0,K} \leq C_3 h_K^{k+1} |u|_{k+1,K}.$$

Como a família de triangularizações $\mathcal{T}_h$ é regular, resulta

$$\|u - \Pi_K u\|_{1,K} \leq C_4 h^k |u|_{k+1,K}$$

com $C_4 = \sigma[C_2^2 + (C_3 \text{diam}(\overline{\Omega}))^2]^{1/2}$, onde σ é a constante que aparece em (3.14).

Assim, uma estimativa de erro de interpolação em $\overline{\Omega}$ é

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} \leq C_4 h^k |u|_{k+1,\Omega}.$$

A estimativa (3.15) do teorema resulta em tomar $C = C_1 C_4$.

Para mostrar a convergência do método, aplicamos o Corolário 3.1 com $\mathcal{V} = \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ se $V = H^1(\Omega)$ ou $\mathcal{V} = \mathcal{D}(\Omega)$ se $V = H_0^1(\Omega)$ e $r_h = \Pi_h$. Assim, para toda função $v \in \mathcal{V}$, temos

$$\|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq C_4 h^k \|v\|_{k+1,\Omega},$$

e então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} = 0.$$

Logo, o resultado segue da conclusão do Corolário 3.1. ■

Com as hipóteses do teorema anterior, obtivemos um erro de interpolação

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} = O(h^k) \quad \text{e} \quad \|u - \Pi_h u\|_{0,\Omega} = O(h^{k+1}),$$

e obtivemos por erro no método dos elementos finitos $\|u - u_h\|_{1,\Omega} = O(h^k)$.

A seguir, mostraremos que, sob algumas hipóteses adicionais, temos

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} = O(h^{k+1}).$$

Considere o problema $(\mathcal{P}^*)$: dada uma função $g \in L^2(\Omega)$, encontrar $\varphi \in V$ solução de

$$\forall v \in V, \quad a(v, \varphi) = \int_{\Omega} g v dx. \quad (3.16)$$

Graças ao teorema de Lax-Milgram, o problema $(\mathcal{P}^*)$ possui uma única solução.

Definição 3.5 O problema $(\mathcal{P}^*)$ é dito regular se a aplicação $g \mapsto \varphi$ é linear e contínua de $L^2(\Omega)$ em $H^2(\Omega)$. Mais precisamente, se para todo $g \in L^2(\Omega)$, a solução φ de (3.16) pertence a $H^2(\Omega) \cap V$ e existe uma constante $C^* > 0$ tal que

$$\|\varphi\|_{2,\Omega} \leq C^* \|g\|_{0,\Omega}. \quad (3.17)$$

Teorema 3.5 Considere as mesmas hipóteses do Teorema 3.4 e assuma que o problema $(\mathcal{P}^*)$ é regular. Então, existe uma constante positiva C , independente de h , tal que, se a solução u de $(\mathcal{P})$ pertença a $H^{k+1}(\Omega)$, temos

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq C h^{k+1} |u|_{k+1,\Omega}.$$

Demonstração: Sabemos que

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} = \sup_{\substack{f \in L^2(\Omega) \\ f \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} f(u - u_h) dx}{\|f\|_{0,\Omega}}.$$

Dada $g \in L^2(\Omega)$, definimos φ como a solução em V de (3.16). Como o problema $(\mathcal{P}^*)$ é regular, temos que a estimativa (3.17) é válida.

Desde que $u - u_h \in V$, pela construção de φ , temos a seguinte identidade

$$\int_{\Omega} g(u - u_h) dx = a(u - u_h, \varphi).$$

Por outro lado, como u e u_h são respectivamente solução de $(\mathcal{P})$ e de $(\mathcal{P}_h)$, temos que para toda $\varphi_h \in V_h$,

$$a(u - u_h, \varphi_h) = a(u, \varphi_h) - a(u_h, \varphi_h) = L(\varphi_h) - L(\varphi_h) = 0.$$

Então, podemos deduzir a seguinte identidade:

$$\int_{\Omega} g(u - u_h) dx = a(u - u_h, \varphi - \varphi_h), \quad \forall \varphi_h \in V_h.$$

Como a é contínua, segue

$$\int_{\Omega} g(u - u_h) dx \leq \alpha \|u - u_h\|_{1,\Omega} \inf_{\varphi_h \in V_h} \|\varphi - \varphi_h\|_{1,\Omega}.$$

O fato de $\varphi \in H^2(\Omega)$ e $N \leq 3$, podemos escolher $\varphi_h = \Pi_h \varphi$ e aplicar os resultados da teoria de interpolação para garantir a existência de uma constante C_1^* , dependendo apenas do elemento finito de referência e de σ , tal que

$$\inf_{\varphi_h \in V_h} \|\varphi - \varphi_h\|_{1,\Omega} \leq \|\varphi - \Pi_h \varphi\|_{1,\Omega} \leq C_1^* h |\varphi|_{2,\Omega}$$

e de (3.17), temos

$$\inf_{\varphi_h \in V_h} \|\varphi - \varphi_h\|_{1,\Omega} \leq C_2^* h \|g\|_{0,\Omega},$$

com $C_2^* = C_1^* C^*$.

Logo, obtemos

$$\int_{\Omega} g(u - u_h) dx \leq C_3^* h \|u - u_h\|_{1,\Omega} \|g\|_{0,\Omega},$$

com $C_3^* = \alpha C_2^*$. Portanto, deduzimos

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq C_3^* h \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C_3^* h^{k+1} |u|_{k+1,\Omega},$$

onde a última desigualdade é devido ao Teorema 3.4. ■

A questão de saber sob que condições o problema $(\mathcal{P}^*)$ é regular, não é trivial. A seguir listamos algumas hipóteses para as quais isso ocorre:

- (i) o conjunto poliédrico Ω é conexo;
- (ii) $V = H^1(\Omega)$ ou $V = H_0^1(\Omega)$.

Para mais detalhes, veja [8].

Observação 3.5 Existem problemas onde o $(\mathcal{P}^*)$ não é regular, por exemplo o problema misto de Dirichlet-Neumann que será estudado no próximo capítulo.

3.2 PROBLEMAS NÃO-ESTACIONÁRIOS

3.2.1 Teoria abstrata

Sejam V e H (sobre $\mathbb{R}$) espaços de Hilbert tais que $V \subset H$, com injeção contínua, e V é denso em H . Considere uma forma bilinear $(u, v) \mapsto a(u, v)$ contínua em $V \times V$. Denotamos por $(\cdot, \cdot)$ o produto escalar em H , $|\cdot|$ a norma correspondente e $\|\cdot\|$ a norma em V .

Assim, podemos formular de maneira precisa o problema parabólico abstrato: dadas $u_0 \in H$ e $f \in L^2(0, T; H)$, encontrar uma função u tal que

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C^0(0, T; H), \quad (3.18)$$

e que satisfaça a seguinte identidade no sentido das distribuições:

$$\forall v \in V, \quad \frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) \quad \text{para quase todo } t \in (0, T), \quad (3.19)$$

$$u(0) = u_0. \quad (3.20)$$

Afim de resolver o problema (3.18)–(3.20), teremos que impor hipóteses adicionais. Primeiro, assumiremos uma hipótese de *coercividade*: existem duas constantes $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$ tais que

$$\forall v \in V, \quad a(v, v) + \lambda \|v\|^2 \geq \alpha \|v\|^2. \quad (3.21)$$

Por outro lado, será conveniente, embora não essencial, fazer as seguintes hipóteses sobre os espaços e a forma bilinear:

$$\text{a injeção canônica de } V \text{ em } H \text{ é compacta;} \quad (3.22)$$

$$\text{a forma bilinear } a(\cdot, \cdot) \text{ é simétrica.} \quad (3.23)$$

Nestas condições, graças ao Teorema 2.10 e a observação 2.9: existe uma sequência crescente de valores próprios $-\lambda < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots$ e uma base hilbertiana ortonormal em H de vetores próprios (w_i) tais que

$$\forall v \in V, \quad a(w_i, v) = \lambda_i(w_i, v). \quad (3.24)$$

Lema 3.1 Assuma que as hipóteses (3.21)–(3.23) valem. Então, se u é solução do problema (3.18)–(3.20), temos o seguinte desenvolvimento em série

$$u(t) = \sum_{i \geq 1} \left\{ (u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right\} w_i. \quad (3.25)$$

Demonstração: Seja u solução de (3.18)–(3.20). Como u pertence a $C^0(0, T; H)$ e (w_i) é uma base hilbertiana ortonormal em H , temos:

$$u(t) = \sum_{i \geq 1} (u(t), w_i) w_i, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.26)$$

Desde que $u(t) \in V$ (para quase todo $t \in [0, T]$), obtemos

$$a(u(t), w_i) = \lambda_i(u(t), w_i), \quad \text{para quase todo } t \in [0, T].$$

Assim, substituindo v por w_i em (3.19) e usando (3.20), temos que $\alpha_i(t) := (u(t), w_i)$ é solução da equação diferencial ordinária com coeficientes constantes

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \alpha_i(t) + \lambda_i \alpha_i(t) = (f(t), w_i), \\ \alpha_i(0) = (u_0, w_i). \end{cases}$$

Portanto, a solução do problema anterior é dada explicitamente por

$$\alpha_i(t) = (u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds$$

e substituindo em (3.26), temos o resultado. ■

Teorema 3.6 (Lions) Sob as hipóteses (3.21)–(3.23), o problema (3.18)–(3.20) admite uma única solução.

¹Jacques-Louis Lions (Grasse, 3 de maio de 1928 – Paris, 17 de maio de 2001) foi um matemático francês.

Demonstração: Devido à caracterização do lema anterior, resta apenas mostrar a existência de solução. Esta solução será obtida verificando que a série em (3.25) converge para todo $u_0 \in H$ e todo $f \in L^2(0, T; H)$ e que sua soma $u(t)$ é uma solução do problema (3.18)–(3.20). A demonstração está dividida em etapas.

- *Etapa 1.* Sem perda de generalidade, podemos supor que a hipótese (3.21) ocorre com $\lambda = 0$, ou seja, que a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é coerciva. Com efeito, fazendo a mudança de variáveis $u = e^{\lambda t} w$ deduzimos que o problema (3.18)–(3.20) é equivalente à encontrar uma função $w \in C^0(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ solução de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(w(t), v) + a(w(t), v) + \lambda(w(t), v) = (e^{-\lambda t} f(t), v), & \forall v \in V, \\ w(0) = u_0, \end{cases}$$

para quase todo $t \in [0, T]$.

Portanto, encontramos um problema do mesmo tipo que o problema inicial, com $a(\cdot, \cdot)$ substituído por $a(\cdot, \cdot) + \lambda(\cdot, \cdot)$.

- *Etapa 2.* Construíremos uma solução aproximada do problema. Primeiramente, introduzimos o subespaço V_m de V gerado pelos m primeiros vetores próprios $w_1, w_2, \dots, w_m$ e substituímos o problema dado pelo seguinte problema aproximado: encontrar uma função u_m definida em $[0, T]$ que assume valores em V_m , solução do sistema diferencial ordinário

$$\begin{cases} \forall v \in V_m, \frac{d}{dt}(u_m(t), v) + a(u_m(t), v) = (f(t), v), \\ u_m(0) = u_{0,m}, \end{cases} \quad (3.27)$$

com

$$u_{0,m} = \sum_{i=1}^m (u_0, w_i) w_i.$$

Então, tomamos

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) w_i,$$

onde $\alpha_i(t) = (u_m(t), w_i)$ e verificamos, exatamente como na demonstração do Lema 3.1, que a função α_i é solução do problema diferencial (3.27). Assim, a solução de (3.27) é dado por

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m \left\{ (u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right\} w_i.$$

Em outras palavras, $u_m(t)$ é a soma parcial de ordem m da série (3.25).

- *Etapa 3.* Agora mostraremos que (u_m) é uma sequência de Cauchy nos espaços $C^0(0, T; H)$ e $L^2(0, T; V)$. Para isto, sejam m e p dois inteiros tais que $p > m \geq 1$. Como (w_i) é uma base hilbertiana ortonormal em H , temos

$$|u_p(t) - u_m(t)| = \left\{ \sum_{i=m+1}^p \left[(u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Pela desigualdade de Minkowski, segue

$$|u_p(t) - u_m(t)| \leq \left\{ \sum_{i=m+1}^p (u_0, w_i)^2 e^{-2\lambda_i t} \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{i=m+1}^p \left[\int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2 &\leq \left(\int_0^t (f(s), w_i)^2 ds \right) \left(\int_0^t e^{-2\lambda_i(t-s)} ds \right) \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_i} \int_0^t (f(s), w_i)^2 ds. \end{aligned}$$

Daí, deduzimos que

$$\sup_{t \in [0, T]} |u_p(t) - u_m(t)| \leq \left\{ \sum_{i=m+1}^p (u_0, w_i)^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{i=m+1}^p \frac{1}{2\lambda_i} \int_0^T (f(s), w_i)^2 ds \right\}^{1/2}. \quad (3.28)$$

Por outro lado, em virtude de (3.24) e (3.27), segue

$$\begin{aligned} a(u_p(t) - u_m(t), u_p(t) - u_m(t)) &= \sum_{i=m+1}^p \lambda_i (u_p(t) - u_m(t), w_i)^2 \\ &= \sum_{i=m+1}^p \lambda_i \left((u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2. \end{aligned}$$

Utilizando a coercividade de $a(\cdot, \cdot)$ e a desigualdade $(b + c)^2 \leq 2(b^2 + c^2)$, obtemos

$$\|u_p(t) - u_m(t)\|^2 \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{i=m+1}^p \lambda_i \left[(u_0, w_i)^2 e^{-2\lambda_i t} + \left(\int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2 \right].$$

Desde que $\lambda_i \int_0^T e^{-2\lambda_i t} dt < \frac{1}{2}$, temos

$$\int_0^T \|u_p(t) - u_m(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=m+1}^p \left\{ (u_0, w_i)^2 + T \int_0^T (f(t), w_i)^2 dt \right\}. \quad (3.29)$$

Sabemos que as séries $\sum_{i \geq 1} (u_0, w_i)^2 = |u_0|^2$ e $\sum_{i \geq 1} \int_0^T (f(t), w_i)^2 dt = \|f\|_{L^2(0,T;H)}^2$ são convergentes e, portanto, as somas parciais são de Cauchy. Logo,

$$\lim_{m,p \rightarrow +\infty} \sum_{i=m+1}^p (u_0, w_i)^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{m,p \rightarrow +\infty} \sum_{i=m+1}^p \int_0^T (f(t), w_i)^2 dt = 0.$$

Deduzimos, por (3.28) e (3.29) e pelas convergências acima, que

$$\lim_{m,p \rightarrow +\infty} \|u_p(t) - u_m(t)\|_{C^0(0,T;H)} = \lim_{m,p \rightarrow +\infty} \|u_p(t) - u_m(t)\|_{L^2(0,T;V)} = 0.$$

Portanto, a sequência (u_m) é então uma sequência de Cauchy em $L^2(0,T;V) \cap C^0(0,T;H)$.

- *Etapa 4.* Como $L^2(0,T;V)$ e $C^0(0,T;H)$ são espaços de Banach, a sequência (u_m) converge em cada um desses espaços. Desde que as injeções canônicas de $L^2(0,T;V)$ em $L^2(0,T;H)$ e de $C^0(0,T;H)$ em $L^2(0,T;H)$ são contínuas, então o limite de (u_m) é o mesmo nos dois espaços. Então, temos

$$u_m \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^2(0,T;V) \cap C^0(0,T;H), \quad \text{quando } m \rightarrow +\infty. \quad (3.30)$$

Resta verificar que u é a solução de problema (3.18)–(3.20). Para isto, considere $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e seja μ um inteiro arbitrário maior ou igual a 1, deduzimos de (3.27) que, para todo $m \geq \mu$ e para todo $v \in V_\mu$, temos:

$$-\int_0^T (u_m(t), v) \frac{d\psi}{dt}(t) dt + \int_0^T a(u_m(t), v) \psi(t) dt = \int_0^T (f(t), v) \psi(t) dt.$$

Daí, graças à (3.30), encontra-se

$$-\int_0^T (u(t), v) \frac{d\psi}{dt}(t) dt + \int_0^T a(u(t), v) \psi(t) dt = \int_0^T (f(t), v) \psi(t) dt, \quad \forall v \in V_\mu.$$

Como $\bigcup_{m \geq 1} V_m$ é denso em V e (w_i) é uma base de V , a identidade anterior ocorre para todo $v \in V$. Em outras palavras, temos que função u verifica a equação (3.19) no sentido das distribuições em $(0,T)$. Finalmente, por (3.30), temos

$$u_m(0) \rightarrow u(0) \text{ em } H,$$

e pelo fato de

$$u_m(0) = \sum_{i=1}^m (u_0, w_i) w_i \rightarrow u_0 \text{ em } H,$$

segue que $u(0) = u_0$.

3.2.2 Método de semi-discretização

Nesta seção, vamos generalizar o método de aproximação usado na demonstração do Teorema de Lions, isto é escolheremos um subespaço V_m de V de dimensão finita para construir uma solução aproximada $u_m : [0, T] \rightarrow V_m$ do problema (3.18) – (3.20).

Seja V_h um subespaço de V de dimensão finita igual a $I = I(h)$. Consideramos o seguinte problema aproximado: dada $u_{0,h} \in V_h$, encontrar uma função $u_h : [0, T] \rightarrow V_h$ solução do sistema diferencial ordinário

$$\begin{cases} \forall v_h \in V_h, \frac{d}{dt}(u_h(t), v_h) + a(u_h(t), v_h) = (f(t), v_h), \\ u_h(0) = u_{0,h}. \end{cases} \quad (3.31)$$

Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.7 O problema (3.31) admite uma única solução u_h dada por

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^I \left\{ (u_{0,h}, w_{i,h}) e^{-\lambda_{i,h}t} + \int_0^t (f(s), w_{i,h}) e^{-\lambda_{i,h}(t-s)} ds \right\} w_{i,h},$$

onde $-\lambda < \lambda_{1,h} \leq \lambda_{2,h} \leq \dots \leq \lambda_{I,h}$ é uma sequência decrescente de auto-valores e $(w_{i,h})$ é uma base ortonormal de V_h formada de autovetores $w_{i,h}$ tais que

$$\forall v_h \in V_h, a(w_{i,h}, v_h) = \lambda_{i,h}(w_{i,h}, v_h).$$

A demonstração deste resultado é análoga à do Lema 3.1.

De maneira prática, introduzimos uma base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq I}$ do espaço V_h e procuramos a função u_h da forma

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^I \xi_j(t) \varphi_j.$$

Então, tomando

$$u_{0,h} = \sum_{j=1}^I \xi_{0,j} \varphi_j,$$

o problema (3.31) pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^I (\varphi_j, \varphi_i) \frac{d\xi_j}{dt}(t) + \sum_{j=1}^I a(\varphi_j, \varphi_i) \xi_j(t) = (f(t), \varphi_i), & 1 \leq i \leq I, \\ \xi_i(0) = \xi_{0,i}, & 1 \leq i \leq I. \end{cases}$$

Introduzimos as matrizes

$$R = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq I} \quad \text{e} \quad M = ((\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq I}$$

chamadas *matriz de rigidez* e *matriz de massa*, respectivamente. Essas matrizes R e M são simétricas e definidas positivas.

Denotemos

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_I(t))^T, \quad \beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_I(t))^T, \quad \text{com} \quad \beta_i(t) = (f(t), \varphi_i), \quad 1 \leq i \leq I,$$

o problema aproximado toma a seguinte forma

$$\begin{cases} M \frac{d\xi}{dt} + R\xi(t) = \beta(t), \\ \xi(0) = \xi_0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Assim, o problema reduz-se a resolver numericamente esse sistema diferencial (3.32) de dimensão I .

Vamos analisar o erro cometido ao substituir o problema (3.18)–(3.20) pelo problema aproximado (3.31). Para simplificar um pouco a apresentação dos resultados, vamos supor que a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ seja V -elíptica. Definimos o *operador de projeção elíptico* $\Pi_h \in \mathcal{L}(V; V_h)$ dado por

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(\Pi_h u - u, v_h) = 0. \quad (3.33)$$

Nessas condições, temos o seguinte resultado de estimativa de erro.

Teorema 3.8 Assuma que as hipóteses (3.21) (com $\lambda = 0$) – (3.23) são satisfeitas. Então, se a solução u do problema (3.18) – (3.20) pertence a $C^1(0, T; V)$, temos

$$|u_h(t) - u(t)| \leq |u_{0,h} - \Pi_h u_0| e^{-\lambda_{1,h} t} + |(I_d - \Pi_h) u(t)| + \int_0^t |(I_d - \Pi_h) u_s(s)| e^{-\lambda_{1,h}(t-s)} ds, \quad (3.34)$$

para todo $t \in (0, T)$.

Demonstração:

Deduzimos de (3.19), (3.31) e (3.33) que para todo $v_h \in V_h$

$$\frac{d}{dt} (u_h(t) - \Pi_h u(t), v_h) + a(u_h(t) - \Pi_h u(t), v_h) = \frac{d}{dt} (u(t) - \Pi_h u(t), v_h).$$

Como a solução u do problema (3.18) – (3.20) pertence a $C^1(0, T; V)$ e $\Pi_h \in \mathcal{L}(V; V_h)$, então $\Pi_h u \in C^1(0, T; V)$ e temos

$$\frac{d}{dt}(\Pi_h u) = \Pi_h \left(\frac{du}{dt} \right).$$

Daí,

$$\frac{d}{dt}(u(t) - \Pi_h u(t), v_h) = \left(\frac{du}{dt}(t) - \Pi_h \left(\frac{du}{dt}(t) \right), v_h \right).$$

Assim, escrevendo como combinação linear dos vetores próprios da base $(w_{i,h})$ e graças ao Teorema 3.7, encontramos

$$u_h(t) - \Pi_h u(t) = \sum_{i=1}^I \left\{ (u_{0,h} - \Pi_h u_0, w_{i,h}) e^{-\lambda_{i,h} t} + \int_0^t \left((I_d - \Pi_h) \frac{du}{ds}(s), w_{i,h} \right) e^{-\lambda_{i,h}(t-s)} ds \right\}.$$

Finalmente, conclui-se a prova do resultado com as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^I (u_{0,h} - \Pi_h u_0, w_{i,h}) e^{-\lambda_{i,h} t} \right| &= \left\{ \sum_{i=1}^I (u_{0,h} - \Pi_h u_0, w_{i,h})^2 e^{-2\lambda_{i,h} t} \right\}^{1/2} \\ &\leq |u_{0,h} - \Pi_h u_0| e^{-\lambda_{1,h} t}, \end{aligned}$$

e para $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^I \left((I_d - \Pi_h) \frac{du}{ds}(s), w_{i,h} \right) e^{-\lambda_{i,h}(t-s)} \right| &= \left\{ \sum_{i=1}^I \left((I_d - \Pi_h) \frac{du}{ds}(s), w_{i,h} \right)^2 e^{-2\lambda_{i,h}(t-s)} \right\}^{1/2} \\ &\leq \left| (I_d - \Pi_h) \frac{du}{ds}(s) \right| e^{-\lambda_{1,h}(t-s)}. \end{aligned}$$

■

Corolário 3.3 Assuma as mesmas hipóteses do Teorema 3.8 e que

$$\forall v \in V, \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\| = 0, \quad (3.35)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} |u_{0,h} - u_0| = 0. \quad (3.36)$$

Então, temos

$$\forall t \in [0, T], \lim_{h \rightarrow 0} |u_h(t) - u(t)| = 0. \quad (3.37)$$

Demonstração: Se v é uma função contínua de $[0, T]$ em V então a família de funções $(I - \Pi_h)v$ é equicontínua de $[0, T]$ em V . Então, como $a(\cdot, \cdot)$ é V -elíptica e contínua e (3.33) vale, temos

$$\begin{aligned} \alpha \|v - \Pi_h v\|^2 &\leq a(v - \Pi_h v, v - \Pi_h v) \\ &= a(v - \Pi_h v, v - v_h) \\ &\leq \beta \|v - \Pi_h v\| \|v - v_h\|, \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos

$$\|v - \Pi_h v\| \leq \frac{\beta}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|,$$

e por (3.35), deduzimos:

$$\forall t \in [0, T], \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|(I - \Pi_h)v(t)\| = 0.$$

Pelo Teorema de Arzelà–Ascoli, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} \|(I - \Pi_h)v\| = 0. \quad (3.38)$$

Então (3.37) é uma consequência imediata de (3.34), (3.36) e (3.38). ■

Observação 3.6 A estimativa de erro (3.34) coloca em evidência uma propriedade numérica importante: a contribuição do erro total no tempo t de um erro cometido no tempo $s < t$ decresce exponencialmente com $t - s$. Em outras palavras, é possível integrar o sistema diferencial (3.31) em grandes intervalos de tempo sem deteriorar a qualidade da aproximação obtida.

Consideremos agora Ω um subconjunto aberto, limitado e não-vazio de $\mathbb{R}^N$ com fronteira Γ suficientemente regular. Dado $T > 0$ sejam $Q_T = \Omega \times (0, T)$ e $\Sigma_T = \Gamma \times (0, T)$ e V um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$ tal que $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$, onde $H = L^2(\Omega)$.

Em seguida, consideremos as funções $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $1 \leq i, j \leq N$ e $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, tais que

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq N, \\ \exists \alpha > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \text{em q.t.p. } x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.39)$$

e definimos

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u \right\} dx. \quad (3.40)$$

Como V é um subconjunto denso de $L^2(\Omega)$ com injeção contínua e as hipóteses (3.21), (3.22) e (3.23) são satisfeitas então podemos aplicar o Teorema de Lions: dadas duas funções $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(Q_T)$, existe única função $u \in L^2(0, T; V) \cap C^0(0, T; L^2(\Omega))$ solução da equação

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v), & \forall v \in V, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases} \quad (3.41)$$

Seja agora V_h um subespaço de V de dimensão finita verificando a seguinte propriedade de aproximação: existe um inteiro l com $1 \leq l \leq k$ e toda função $v \in H^{l+1}(\Omega)$, temos

$$\inf_{v_h \in V_h} \{ \|v - v_h\|_{0,\Omega} + h \|v - v_h\|_{1,\Omega} \} \leq Ch^{l+1} \|v\|_{l+1,\Omega}, \quad (3.42)$$

onde C é uma constante positiva independente de V_h . Começamos então por estudar o problema semi-discretizado (3.31). Novamente por simplicidade, sempre assumiremos, sem mencionar ainda mais, que a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é V -elíptica e que assim, o operador de projeção elíptico $\Pi_h \in \mathcal{L}(V; V_h)$ está bem definido de maneira única por (3.33).

Teorema 3.9 Se os espaços V , H e a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ satisfazem as condições mencionadas acima, o problema (3.31) admite uma única solução $u_h \in C^0([0, T]; V_h)$. Se $u \in C^1(0, T; V)$ e se as hipóteses adicionais (3.42) e

$$H^2(\Omega) \cap V \text{ é denso em } V, \quad (3.43)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_{0,h} - u_0\|_{0,\Omega} = 0, \quad (3.44)$$

são satisfeitas, temos

$$\forall t \in [0, T], \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u_h(t) - u(t)\|_{0,\Omega} = 0. \quad (3.45)$$

Se por outro lado, $u \in C^1(0, T; H^{l+1}(\Omega))$ para um inteiro l com $1 \leq l \leq k$ obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} \|u_h(t) - u(t)\|_{0,\Omega} &\leq \|u_{0,h} - u_0\|_{0,\Omega} e^{-\lambda_1 t} + Ch^{\phi(l)} \left(\|u_0\|_{l+1,\Omega} e^{-\lambda_1 t} + \|u(t)\|_{l+1,\Omega} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \left\| \frac{du}{dt}(s) \right\|_{l+1,\Omega} e^{-\lambda_1(t-s)} ds \right), \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde $\phi(l) = l + 1$ quando o problema $(\mathcal{P})$ associado à forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é regular no sentido da Definição 3.5 e $\phi(l) = l$, caso contrário.

Demonstração: A existência e a unicidade da solução u_h são asseguradas pelo Teorema 3.7. Além disso, a hipótese de densidade (3.43) e a hipótese de aproximação (3.42) utilizadas com $l = 1$ implicam a propriedade (3.35). O resultado de convergência (3.45) resulta do Corolário 3.3.

Por definição do operador Π_h , temos:

$$\forall w_h \in V_h, \quad a(v - \Pi_h v, w_h) = 0,$$

daí, seguindo o mesmo raciocínio da demonstração do Teorema de Céa, obtemos

$$\|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq C \inf_{w_h \in V_h} \|v - w_h\|_{1,\Omega}.$$

Pela hipótese (3.42),

$$\|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq Ch^l \|v\|_{l+1,\Omega}. \quad (3.47)$$

Se além disso, o problema $(\mathcal{P})$ é regular no sentido da Definição 3.5; podemos usar o raciocínio da dualidade usado na prova do Teorema 3.5. Usando a hipótese (3.42) com $l = 1$, obtemos

$$\|v - \Pi_h v\|_{0,\Omega} \leq Ch \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq Ch^{l+1} \|v\|_{l+1,\Omega}. \quad (3.48)$$

Se $u \in C^1(0, T; H^{l+1}(\Omega))$, temos de (3.47) e (3.48) que

$$\begin{aligned} \|(I - \Pi_h)u(t)\|_{0,\Omega} &\leq Ch^{\phi(l)} \|u(t)\|_{l+1,\Omega} \\ \left\| (I - \Pi_h) \frac{du}{dt}(t) \right\|_{0,\Omega} &\leq Ch^{\phi(l)} \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_{l+1,\Omega} \end{aligned}$$

com

$$\phi(l) = \begin{cases} l+1, & \text{se } (\mathcal{P}) \text{ é regular} \\ l, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é suficiente então aplicar a majoração (3.34) para obter a estimativa (3.46). ■

Exemplo 3.1 A propriedade de densidade (3.43) é sempre verificada na prática. Além disso, podemos demonstrar que, sem assumir regularidade de u , temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h = u, \text{ em } C^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Por fim, observe que no caso mais favorável onde $u \in C^1(0, T; H^{k+1}(\Omega))$ e onde o problema $(\mathcal{P})$ é regular, temos

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{0,\Omega} = O(\|u_{0,h} - u_0\|_{0,\Omega} + h^{k+1}).$$

Resta agora escolher o dado inicial $u_{0,h}$. A escolha que pode parecer matematicamente mais natural seria tomar $u_{0,h} = \Pi_h u_0$. De fato, isso é desnecessariamente complicado na prática. Vamos nos colocar no caso em que Ω é um aberto poliédrico limitado de $\mathbb{R}^N$ ($N \leq 3$), onde $(\mathcal{T}_h)$ é uma família regular de triangulações de $\overline{\Omega}$ formada de N -simplexes K de diâmetro menor ou igual a h e onde

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \cap V; \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in P_k\}.$$

Desde que $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$, podemos escolher para $u_{0,h}$ o V_h -interpolante de u_0 em Σ_h onde

$$\Sigma_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \Sigma_k(K).$$

Nessas condições e em virtude dos resultados do Parágrafo 3.1.2, temos se $u_0 \in H^{l+1}(\Omega)$, $1 \leq l \leq k$

$$\|u_{0,h} - u_0\|_{0,\Omega} \leq Ch^{l+1} \|u_0\|_{l+1,\Omega}.$$

Nesse caso, obtemos então se $u \in C^1(0, T; H^{l+1}(\Omega))$ com $1 \leq l \leq k$ e se o problema $(\mathcal{P})$ é regular

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{0,\Omega} = O(h^{l+1}).$$

3.2.3 Discretização total de problemas parabólicos

Antes de tratarmos a resolução numérica do sistema diferencial (3.31), recordaremos alguns conceitos básicos sobre resolução aproximada para o problema de Cauchy para uma equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)), & 0 \leq t \leq T, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.49)$$

onde φ é uma função contínua de $[0, T] \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Começamos introduzindo uma partição do intervalo $[0, T]$ (consideremos uma partição uniforme por simplicidade). Para isto, definimos $\Delta t = \frac{T}{N}$ associado a um inteiro $N \geq 1$ e tomamos

$$t_n = n\Delta t, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Procuramos calcular, para todo $n = 1, \dots, N$, uma aproximação y_n de $y(t_n)$. O método mais simples, ao qual nos limitaremos, é o chamado θ -método onde $\theta \in [0, 1]$ é um parâmetro. O método consiste em substituir a equação diferencial (3.49) por um *esquema de diferenças finitas*

$$\frac{1}{\Delta t}(y_{n+1} - y_n) = \theta \varphi(t_{n+1}, y_{n+1}) + (1 - \theta) \varphi(t_n, y_n), \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (3.50)$$

Assim, conhecendo y_n , aproximação de $y(t_n)$, a equação (3.50) permite calcular y_{n+1} , aproximação de $y(t_{n+1})$.

Observemos que a resolução da equação (3.50) é imediata quando $\theta = 0$, pois temos explicitamente y_{n+1} em função de y_n . Por outro lado, quando $\theta \in (0, 1]$, y_{n+1} é obtido implicitamente como solução de uma equação, em geral, não-linear. O método é então dito *explícito* para $\theta = 0$ e *implícito* para $\theta \in (0, 1]$.

Agora analisaremos a precisão do θ -método. Observemos que, se a solução y da EDO (3.49) é suficientemente regular (por exemplo, três vezes continuamente diferenciável), utilizando um desenvolvimento de Taylor no ponto t_n temos:

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \Delta t y'(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} y''(t_n) + O(\Delta t^3),$$

e

$$\begin{aligned} \theta \varphi(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + (1 - \theta) \varphi(t_n, y(t_n)) &= \theta y'(t_{n+1}) + (1 - \theta) y'(t_n) \\ &= y'(t_n) + \theta \Delta t y''(t_n) + O(\Delta t^2), \end{aligned}$$

quando $\Delta t \rightarrow 0$.

Então, a solução exata verifica *aproximadamente* o esquema para diferenças finitas (3.50) no seguinte sentido:

$$\frac{1}{\Delta t} (y(t_{n+1}) - y(t_n)) = \theta \varphi(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + (1 - \theta) \varphi(t_n, y(t_n)) + \varepsilon_n$$

onde

$$\varepsilon_n = \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \Delta t y''(t_n) + O(\Delta t^2) = \begin{cases} O(\Delta t), & \text{se } \theta \neq 1/2 \\ O(\Delta t^2), & \text{se } \theta = 1/2. \end{cases}$$

Diremos então que o θ -método é de ordem 1 se $\theta \neq 1/2$ e de ordem 2 se $\theta = 1/2$.

Vamos agora estudar a estabilidade do θ -método. Para isso, considere a equação diferencial simplificada:

$$\begin{cases} y' = -\lambda y, & t \geq 0 \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.51)$$

onde λ é um número real positivo. Aplicando θ -método em (3.51), temos

$$y_{n+1} = \frac{1 - (1 - \theta)\lambda\Delta t}{1 + \theta\lambda\Delta t} y_n, \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Tomando $r(x) = \frac{1 - (1 - \theta)x}{1 + \theta x}$, obtemos

$$y_n = r^n(\lambda \Delta t) y_0. \quad (3.52)$$

Daí, notamos que a solução $y(t) = e^{-\lambda t}$ de (3.51) é limitada em $[0, +\infty)$.

Parece muito desejável que a solução aproximada (y_n) fornecida pelo θ -método verifique uma propriedade análoga: que a sequência $(y_n)_{n \geq 0}$ seja limitada. De acordo com (3.52), a sequência $(y_n)_{n \geq 0}$ é limitada, e somente se, tivermos

$$|r(\lambda \Delta t)| \leq 1. \quad (3.53)$$

O estudo da função r , mostra que para $\theta \geq 1/2$, a condição (3.53) é satisfeita para todo $\Delta t > 0$. Por outro lado, para $0 \leq \theta < 1/2$, (3.53) só é satisfeita se

$$\lambda \Delta t \leq \frac{2}{1 - 2\theta}. \quad (3.54)$$

Então (3.54) introduz uma restrição em Δt , conhecida como *condição de estabilidade*.

Assim, temos

$$\begin{cases} \text{para } 0 \leq \theta < \frac{1}{2}, \text{ o esquema (3.50) é } \textit{estável} \text{ sob a condição (3.54);} \\ \text{para } \theta \geq \frac{1}{2}, \text{ o esquema (3.50) é } \textit{incondicionalmente estável}. \end{cases}$$

Aplicaremos agora o θ -método para resolver numericamente o sistema diferencial (3.32). Para isso, assumimos que $f \in C^0([0, T]; H)$ de modo que cada função $\beta_i : t \in [0, T] \mapsto \beta_i(t) := (f(t), \varphi_i)$ seja contínua sobre $[0, T]$. Denotamos por ξ^n o valor aproximado de $\xi(t_n)$. Daí, para cada $0 \leq n \leq N - 1$, obtemos

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} M(\xi^{n+1} - \xi^n) + R(\theta \xi^{n+1} + (1 - \theta) \xi^n) = \theta \beta(t_{n+1}) + (1 - \theta) \beta(t_n), \\ \xi^0 = \xi_0. \end{cases} \quad (3.55)$$

Equivalentemente, procuramos $\{u_h^n \in V_h; 0 \leq n \leq N\}$ que, para todo $v_h \in V_h$ e $0 \leq n \leq N - 1$, seja solução de

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (u_h^{n+1} - u_h^n, v_h) + a(\theta u_h^{n+1} + (1 - \theta) u_h^n, v_h) = (\theta f(t_{n+1}) + (1 - \theta) f(t_n), v_h), \\ u_h^0 = u_{0,h}. \end{cases} \quad (3.56)$$

Observe que a cada passo de tempo é necessário resolver um sistema linear da forma

$$(M + \theta \Delta t R) \xi^{n+1} = \eta^n$$

onde η^n é um vetor de $\mathbb{R}^I$ conhecido. Como θ é não-negativo, a matriz $M + \theta \Delta t R$ é simétrica e definida positiva. Logo, podemos utilizar o método de Cholesky para resolver o sistema linear em questão. Como a matriz $M + \theta \Delta t R$ não depende de n , é suficiente efetuar a fatorização de Cholesky uma única vez, e, para cada $n = 0, 1, \dots, N - 1$, resolver dois sistemas lineares triangulares.

Por fim, observe que as escolhas mais frequentes do parâmetro θ são os seguintes:

- $\theta = 0$: método de *Euler progressivo*;
- $\theta = \frac{1}{2}$: método de *Crank-Nicholson*;
- $\theta = 1$: método de *Euler regressivo*.

4 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO À EDPs ESTACIONÁRIAS

Este capítulo está dedicado ao estudo teórico e numérico de algumas equações diferenciais parciais do tipo elíptico por meio do método de elementos finitos e à sua implementação numérica através de alguns experimentos numéricos motivados por problemas do mundo real.

4.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS DE SEGUNDA ORDEM

Em matemática, um problema de valor de fronteira elíptico é um tipo especial de problema de valor de fronteira que pode ser pensado como o estado de equilíbrio de um problema de evolução. Por exemplo, a resolução do problema de *Poisson-Dirichlet* fornece a eventual distribuição de calor em uma sala várias horas após a refrigeração ter sido ligada.

Problemas de valor de fronteira e equações diferenciais parciais especificam relações entre duas ou mais quantidades. Os problemas de valor de fronteira podem envolver espaço, tempo e outras quantidades, como temperatura, velocidade, pressão, campo magnético, etc. Os problemas de fronteira elípticos ocorrem ao modelar problemas físicos, como os problemas de deformação de uma membrana, fluxo de fluidos, etc.

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $u \in C^2(\Omega)$. O **laplaciano** de u é definido por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

A equação homogênea

$$\Delta u = 0$$

é chamada **equação de Laplace**. A equação de Laplace aparece em uma variedade enorme de situações físicas. Usualmente, u denota a densidade de alguma quantidade (por exemplo, densidade

de energia térmica (temperatura), concentração química, etc.) em equilíbrio ou estado estacionário em alguma região do espaço. Assim, se $\mathbf{F}$ é o fluxo de u em uma região Ω , então o fluxo total de u através da fronteira ∂V de qualquer aberto $V \subset\subset \Omega$ é nulo, ou seja,

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Segue do Teorema da Divergência que

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

para todo $V \subset\subset \Omega$. Daí, conclui-se que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \text{ em } \Omega.$$

Em várias situações é razoável assumir que o fluxo $\mathbf{F}$ é proporcional ao negativo do gradiente ∇u (em processos de difusão, a direção do fluxo é das regiões de maior concentração para as regiões de menor concentração, e quanto maior a diferença de concentração, maior é o fluxo). Substituindo esta expressão para o fluxo, obtemos a equação de Laplace

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \Delta u = 0 \text{ em } \Omega.$$

Vamos agora descrever matematicamente, através de um exemplo típico, um problema de valor de fronteira do tipo elíptico. Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, não-vazio, aberto e limitado e seja $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua dada. Queremos encontrar $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

O problema (4.1) é chamado *Problema de Poisson*.

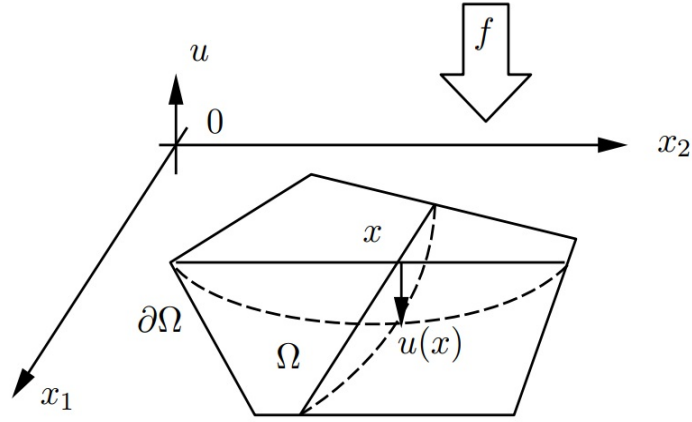
Uma interpretação física para esse problema é que a solução desse problema modela o deslocamento vertical $u(x)$ no ponto x de uma membrana Ω elástica. Esta membrana está fixada em $\partial\Omega$ e está submetida a uma densidade de força vertical e proporcional à f (Figura 1).

4.1.1 Formulação variacional de problemas de fronteira elípticos

Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$. Tomamos como V , um subespaço de $H^1(\Omega)$ tal que

$$H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega). \quad (4.2)$$

Figura 1 – Deformação vertical de uma membrana



Fonte: A autora (2020)

Assim, V é um espaço de Hilbert pela norma induzida pela de $H^1(\Omega)$.

Em seguida, consideremos as funções $a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega)$, for $1 \leq i, j \leq N$ e tomemos

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \right) dx.$$

Então, a forma $a(\cdot, \cdot)$ é bilinear e contínua sobre $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Ela é simétrica se, e somente se, $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq N$. Suponhamos ainda que as funções a_{ij} e a_0 satisfazem as *hipóteses de elipticidade*:

i) existe um número $\alpha > 0$ tal que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_j \xi_i \geq \alpha |\xi|^2 \text{ q.t.p. } x \in \Omega; \quad (4.3)$$

ii) existe um número α_0 tal que

$$a_0(x) \geq \alpha_0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \quad (4.4)$$

Deduzimos então das hipóteses de elipticidade (4.3) e (4.4) que

$$\forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha |v|_{1,\Omega}^2 + \alpha_0 \|v\|_{0,\Omega}^2,$$

de modo que a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é V -elíptica desde que $\alpha_0 > 0$. Quando $V = H^1(\Omega)$, a condição $\alpha_0 > 0$ é uma condição necessária e suficiente para que a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ seja V -elíptica. Por

outro lado, quando $V = H_0^1(\Omega)$, a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é V -elíptica se $\alpha_0 > -\frac{\alpha}{C^2(\Omega)}$, onde $C(\Omega)$ é a constante de Poincaré (consulte o Teorema 2.3).

Finalmente, considere a função $f \in L^2(\Omega)$ e tomamos

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

A forma linear $L(\cdot)$ é contínua sobre $L^2(\Omega)$, assim como em V .

Se a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é V -elíptica, então podemos usar o Teorema de Lax-Milgram, logo existe uma única função $u \in V$ solução de

$$\forall v \in V, a(u, v) = L(v). \quad (4.5)$$

Agora vamos interpretar o problema resolvido:

i) Escolhemos em (4.5) uma função teste $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, o que é permitido em virtude de (4.2).

Utilizando as regras de derivação no sentido das distribuições em Ω , temos

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), a(u, v) = \langle Au, v \rangle,$$

onde A é o operador diferencial elíptico de segunda ordem com coeficientes variáveis definido por:

$$Au = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u.$$

Por outro lado, temos

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), L(v) = \langle f, v \rangle.$$

Daí, deduzimos que a função u solução de (4.5) verifica

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle,$$

isto é, verifica a EDP elíptica de segunda ordem

$$Au = f,$$

no sentido das distribuições em Ω .

Como f é uma função de $L^2(\Omega)$, isso demonstra que a distribuição Au é uma função de $L^2(\Omega)$ e a igualdade anterior é verdade em $L^2(\Omega)$ e, portanto, $Au(x) = f(x)$ em quase todo ponto x de Ω . Logo, escrevemos simplesmente

$$Au = f \text{ em } \Omega.$$

ii) Considerando que $Au = f$, deduzimos de (4.5) que a solução u é tal que

$$\forall v \in V \quad a(u, v) = \int_{\Omega} Au \, v \, dx.$$

Assim, a solução u de (4.5) verifica as três condições:

$$\begin{cases} u \in V, \\ Au = f \text{ em } \Omega, \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} Au \, v \, dx. \end{cases} \quad (4.6)$$

Reciprocamente, é imediato ver que se uma função u satisfaz as condições em (4.6), então u é a solução de (4.5). Assim, a solução u em V de (4.5) é então caracterizada pelas condições em (4.6).

Resta apenas deduzir a condição de fronteira a partir da relação (4.6)₃. Para isso, assumiremos que a fronteira Γ de Ω é suficientemente regular e que as funções a_{ij} , $1 \leq i, j \leq N$, pertencem ao espaço $C^1(\overline{\Omega})$. Se u é uma função de $H^2(\Omega)$, a regularidade dos coeficientes a_{ij} implicam que as funções $\sum_{j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $1 \leq i \leq N$, pertencem ao espaço $H^1(\Omega)$. Então, aplicando o Teorema 2.5, temos a seguinte fórmula de Green que generaliza a usual:

$$\forall u \in H^2(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} Au \, v \, dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_A} v \, d\sigma, \quad (4.7)$$

com

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_A} = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \mathbf{v}_i.$$

O operador fronteira $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_A}$ é chamado *derivada conormal* associada ao operador A . No caso particular onde $a_{ij} = \delta_{ij}$, temos que $A = -\Delta$ e $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_A}$ coincide com a derivada normal $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$.

Resulta dessa formula de Green que a relação (4.6)₃ se torna quando u pertence ao espaço $H^2(\Omega)$:

$$\forall v \in V, \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_A} v \, d\sigma = 0. \quad (4.8)$$

Observação 4.1 Quando as hipóteses de regularidade anteriores não são satisfeitas, a derivada conormal $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_A}$ pode não estar bem definida e muito menos as integrais $\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_A} v \, d\sigma$, para $v \in V$. No entanto, é mais sugestivo substituir (4.8) por (4.6)₃, entendendo-se que, sem hipóteses de regularidade, (4.8) tem apenas um *sentido formal*.

Consideremos agora várias opções de espaço V e analisaremos os problemas de fronteira correspondentes. A seguir, apresentaremos alguns exemplos conhecidos de problemas de valor de fronteira elípticos e veremos como é possível definir uma formulação fraca desse tipo de problema, denominada *formulação variacional*, permitindo-nos uma demonstração fácil da existência e unicidade das soluções e, além disso, uma boa adaptação à uma aproximação numérica, apresentada na seção 3.1.

4.1.1.0 Problema de fronteira elíptico do tipo Dirichlet

A condição fronteira do tipo Dirichlet fixa o valor que a solução necessita tomar ao longo da fronteira do domínio. Na dinâmica dos fluidos, a condição Dirichlet homogênea é interpretada como uma condição antiderrapante para fluidos viscosos afirmando que, na fronteira do domínio físico, o fluido terá velocidade zero.

• *Problema de Dirichlet homogêneo.*

Primeiramente, escolhemos $V = H_0^1(\Omega)$ e assumimos que $\alpha_0 > -\frac{\alpha}{C^2(\Omega)}$ na desigualdade (4.4) de modo que a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ seja V -elíptica. Então, existe uma única função u de $H_0^1(\Omega)$ solução de

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), a(u, v) = \int_{\Omega} f v dx. \quad (4.9)$$

Se Au pertence a $L^2(\Omega)$ temos por definição do operador diferencial A ,

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), a(u, v) = \langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} Au v dx$$

daí como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ temos (4.6)₃. A solução u de (4.9) é então caracterizada por

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ Au = f \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Quando a fronteira Γ é suficientemente regular, u pertence a $H_0^1(\Omega)$ se, e somente se, u é uma função de $H^1(\Omega)$ tal que se anule em Γ . Em consequência, existe uma única função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que,

$$Au = f \text{ em } \Omega,$$

$$u = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Resolvemos assim, o problema homogêneo de Dirichlet para o operador elíptico de segunda ordem A .

• *Problema de Dirichlet não homogêneo.*

Seja u^0 uma função de $H^1(\Omega)$. Assumindo que $\alpha_0 \geq 0$, então existe uma única função $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} u - u^0 \in H_0^1(\Omega) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), a(u, v) = \int_{\Omega} f v dx. \end{cases} \quad (4.10)$$

Com efeito, como a forma linear $v \mapsto a(u^0, v)$ é contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, existe uma única função $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), a(w, v) = \int_{\Omega} f v dx - a(u^0, v)$$

e, portanto, a função $u = w + u^0$ é a única solução de (4.10).

Ao raciocinar como no caso homogêneo, podemos ver facilmente que a solução u de (4.10) é caracterizada por

$$\begin{cases} u - u^0 \in H_0^1(\Omega), \\ Au = f \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Como a fronteira Γ é suficientemente regular, a condição $u - u^0 \in H_0^1(\Omega)$ é equivalente à função $u \in H^1(\Omega)$ satisfazer $u|_{\Gamma} = u^0|_{\Gamma}$. Existe então uma única função $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} Au = f \text{ em } \Omega, \\ u = u^0 \text{ sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Assim, resolvemos o problema de Dirichlet não-homogêneo para o operador A .

Observação 4.2 Como a aplicação traço de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ não é sobrejetiva, se g é uma função dada em $L^2(\Gamma)$, o problema de Dirichlet não-homogêneo

$$\begin{aligned} Au &= f \text{ em } \Omega, \\ u &= g \text{ em } \Gamma. \end{aligned}$$

não admite solução em $H^1(\Omega)$, em geral.

4.1.1.0 Problema de fronteira elíptico do tipo Neumann

A condição fronteira do tipo Neumann fixa o valor do fluxo (ou derivada) de uma solução aplicado na fronteira do domínio.

- *Problema de Neumann homogêneo*

Escolhemos desta vez $V = H^1(\Omega)$ e assumimos $\alpha_0 > 0$ na desigualdade (4.4) a fim de que a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ seja V -elíptica. Existe então uma única função u em $H^1(\Omega)$ solução de

$$\forall v \in H^1(\Omega), a(u, v) = \int_{\Omega} f v dx$$

Se a fronteira de Γ é suficientemente regular, se os coeficientes a_{ij} são $C^1(\overline{\Omega})$ e se a solução u pertence ao espaço $H^2(\Omega)$, então a derivada conormal $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_A}$ da solução u está bem definida como elemento do espaço $L^2(\Gamma)$ (na verdade, do espaço $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$) e, por outro lado, o espaço dos traços sobre Γ das funções $H^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Gamma)$. Então, deduzimos que o problema

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_A} v d\sigma = 0$$

é equivalente à

$$\forall v \in L^2(\Gamma), \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_A} v d\sigma = 0.$$

Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_A} = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Resumindo, existe uma única função $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} Au = f & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_A} = 0 & \text{em } \Gamma. \end{cases}$$

- *Problema de Neumann não-homogêneo*

Considere o seguinte problema: dada uma função $f \in L^2(\Omega)$ e $h \in L^2(\Gamma)$, encontrar uma função u definida em Ω e solução de:

$$\begin{cases} Au = f & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_A} = h & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (4.11)$$

A formulação variacional associada ao problema acima consiste em encontrar $u \in V$ solução de

$$\forall v \in V, a(u, v) = \int_{\Gamma} h v d\sigma + \int_{\Omega} f v dx.$$

Como a forma linear $v \mapsto \int_{\Gamma} h v d\sigma + \int_{\Omega} f v dx$ é contínua sobre V , a existência e unicidade de solução está garantida pelo Teorema de Lax-Milgram.

4.1.1.0 Problema de fronteira elíptico do tipo Fourier

A condição fronteira do tipo Fourier (também conhecida como do tipo Robin) fixa uma combinação linear dos valores do fluxo (ou derivada) e da própria solução sobre fronteira do domínio. Na termodinâmica, a condição de Fourier tem a seguinte interpretação: o fluxo normal de calor na fronteira, direcionado para o interior, é uma função linear da temperatura exterior domínio físico.

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira Γ suficientemente regular. Dadas $f \in L^2(\Omega)$, $\alpha \in L^\infty(\Omega)$, com $\alpha > \alpha_0 > 0$ e $h \in L^2(\Gamma)$, queremos encontrar uma função u definida em Ω solução de:

$$-\Delta u = f \text{ em } \Omega; \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = h \text{ em } \Gamma. \quad (4.13)$$

Suponha que a solução de (4.12)-(4.13) seja suficientemente regular. Então multiplicando (4.12) por $v \in H^1(\Omega)$, integrando sobre Ω e utilizando a fórmula de Green, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx$$

Considerando a condição de fronteira (4.13), temos

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} (h - \alpha u) v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx.$$

O que nos dá o seguinte problema:

Proposição 4.1 (Problema de Poisson-Fourier) Dado um subconjunto Ω aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suficientemente regular. Existe uma única solução $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma} \alpha u v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} h v d\sigma, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

4.1.2 Aproximação de um problema de contorno bidimensional

Seja $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ o quadrado unitário de $\mathbb{R}^2$. Então, dada uma função $f \in C^0(\overline{\Omega})$, trataremos de construir uma aproximação da solução u do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma \end{cases} \quad (4.14)$$

Vamos subdividir o método de aproximação variacional em etapas.

• **Formulação Variacional do Problema.** Vimos na Seção 4.1.1 que a formulação variacional desse problema consiste em procurar $u \in V = H_0^1(\Omega)$ solução de

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), a(u, v) = \int_{\Omega} f v dx,$$

onde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx.$$

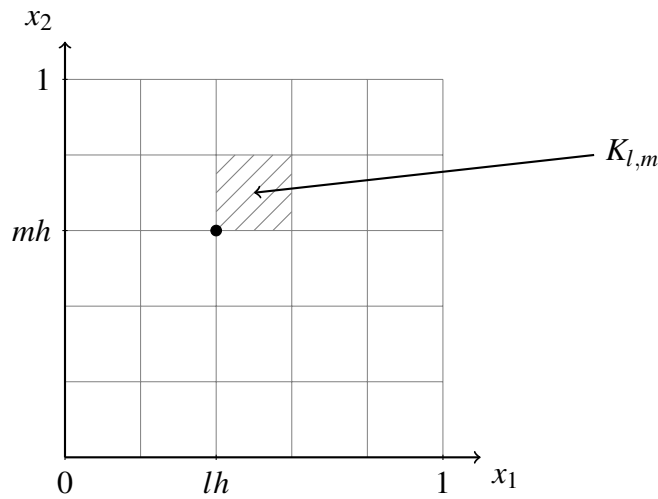
Como a forma bilinear é contínua e V -elíptica, então o problema admite uma única solução.

• **Construção de um subespaço V_h de V de dimensão finita.** Considere a malha retangular cujos nós são os pontos $a_{l,m} = (lh, mh)$, $0 \leq l, m \leq M+1$ e $h = \frac{1}{M+1}$. Denotamos por $K_{l,m}$ o quadrado com lados paralelos aos eixos e de comprimento h que tem como vértices os pontos $a_{l,m}, a_{l+1,m}, a_{l+1,m+1}$ e $a_{l,m+1}$. Então, temos a seguinte decomposição do domínio $\bar{\Omega}$ (veja a figura 2):

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{0 \leq l, m \leq M} K_{l,m},$$

tal que se $(l_1, m_1) \neq (l_2, m_2)$ então $\mathring{K}_{l_1, m_1} \cap \mathring{K}_{l_2, m_2} = \emptyset$.

Figura 2 – Decomposição do domínio



Fonte: A autora (2020)

Por outro lado, designamos por P_1 o espaço dos polinômios com duas variáveis de grau menor ou igual a 1 em relação a cada variável. Em outras palavras, P_1 é o espaço de dimensão 4 gerado pelos polinômios $1, x_1, x_2$ e x_1x_2 .

Escolhemos então o seguinte espaço de dimensão finita:

$$V_h = \left\{ v \in C^0(\overline{\Omega}) : v|_{\Gamma} = 0, v|_{K_{l,m}} \in P_1, 0 \leq l, m \leq M \right\}. \quad (4.15)$$

• **Encontrar uma base para V_h .** Como estamos trabalhando em um domínio bidimensional, precisamos determinar algumas propriedades para encontrar uma base de V_h .

- i) **Determinar a dimensão de V_h .** Verificamos facilmente que uma função de P_1 é determinada de maneira única pelos valores dos vértices de um quadrado $K_{l,m}$. Por outro lado, Se v é uma função definida em $\overline{\Omega}$ e cuja a restrição em cada quadrado $K_{l,m}$ coincide com um polinômio de P_1 . Então, a restrição de v à um lado do quadrado $K_{l,m}$ é uma função afim e, portanto, é suficiente garantir a continuidade de v nas extremidades do lado para que a função v seja continua nesse lado. Assim, a função v é contínua em $\overline{\Omega}$ se, e somente se, é contínua nos $(M+2)^2$ pontos $a_{l,m}$, $0 \leq l, m \leq M+1$. Além disso, a função v é nula sobre Γ se, e somente se, ela se anula nos $4(M+1)$ pontos $a_{l,m}$ situados em Γ .

Em resumo, uma função do espaço V_h é determinada de maneira única pelos valores que ela assume nos pontos $a_{l,m}$, $1 \leq l, m \leq M$. Então, a dimensão I do espaço V_h é $I = M^2$.

- ii) **Numeração dos pontos.** A fim de determinar uma base de V_h , numeramos de 1 a I os pontos $a_{l,m}$, $1 \leq l, m \leq M$, o que equivale a escolher uma bijeção $\mathcal{N}$ do conjunto finito $\{(l, m) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq l, m \leq M\}$ no conjunto finito $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq I\}$. Tomemos então

$$a_i = a_{\mathcal{N}^{-1}(i)}, \quad 1 \leq i \leq I. \quad (4.16)$$

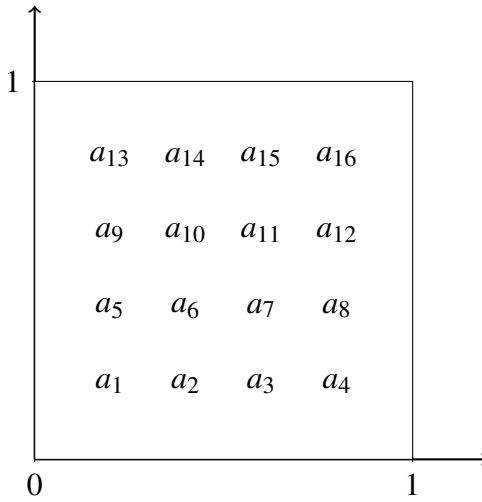
Uma “numeração por linhas” como está descrita pela Figura 3 corresponde em escolher uma bijeção $\mathcal{N}$:

$$(l, m) \longmapsto i = l + M(m-1). \quad (4.17)$$

Sendo assim, seja φ_i , $1 \leq i \leq I$, a função de V_h definida por

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq I. \quad (4.18)$$

Figura 3 – Numeração por linhas



Fonte: A autora (2020)

Está claro que o conjunto de funções φ_i , $1 \leq i \leq I$, forma uma base de V_h e as componentes nessa base de uma função $v \in V_h$ são os números $v(a_i)$, $1 \leq i \leq I$. Observemos que o suporte da função φ_i é o quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados, de comprimento $2h$ e tendo como centro o ponto a_i , veja a figura 4.

• **Problema Aproximado.** Com as escolhas (4.16) e (4.18), para uma base do espaço V_h , o método de aproximação variacional do problema de fronteira (4.14) consiste em procurar a função $u_h = \sum_{j=1}^I u_j \varphi_j \in V_h$, onde os números

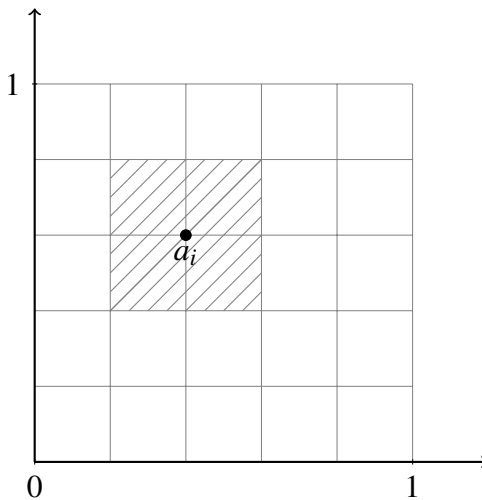
$$u_j = u_h(a_j), \quad 1 \leq j \leq I, \quad (4.19)$$

são obtidos resolvendo o sistema linear

$$\sum_{j=1}^I a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = \int_{\Omega} f \varphi_i dx, \quad 1 \leq i \leq I. \quad (4.20)$$

• **Resolver o Problema Aproximado.** A matriz $a(\varphi_j, \varphi_i)_{1 \leq i, j \leq I}$ é simétrica, definida positiva e é esparsa pois $a(\varphi_j, \varphi_i) = 0$, a menos que os pontos a_j e a_i sejam vértices de um mesmo quadrado $K_{l,m}$. Com uma numeração adequada dos vértices, essa matriz terá uma *estrutura de banda*, isto é, $a(\varphi_j, \varphi_i) = 0$, para $|i - j| > d_{max}$, onde o comprimento de banda d_{max} é “pequeno” com relação a I (notemos que d_{max} é o máximo, em valor absoluto, da diferença entre os índices de dois vértices vizinhos).

Figura 4 – Suporte das funções de base



Fonte: A autora (2020)

Assim, para a escolha da numeração (4.17), temos $d_{max} = M + 1$. Com essa numeração específica, obtemos uma matriz triangular por blocos, sendo os próprios blocos tri-diagonais. Será possível resolver com eficiência o sistema associado usando um método direto, como o método de Cholesky, que preserva a estrutura da banda ou usando o método iterativo SOR (successive over-relaxation) por blocos.

4.1.3 Experimentos Numéricos para EDPs elípticas

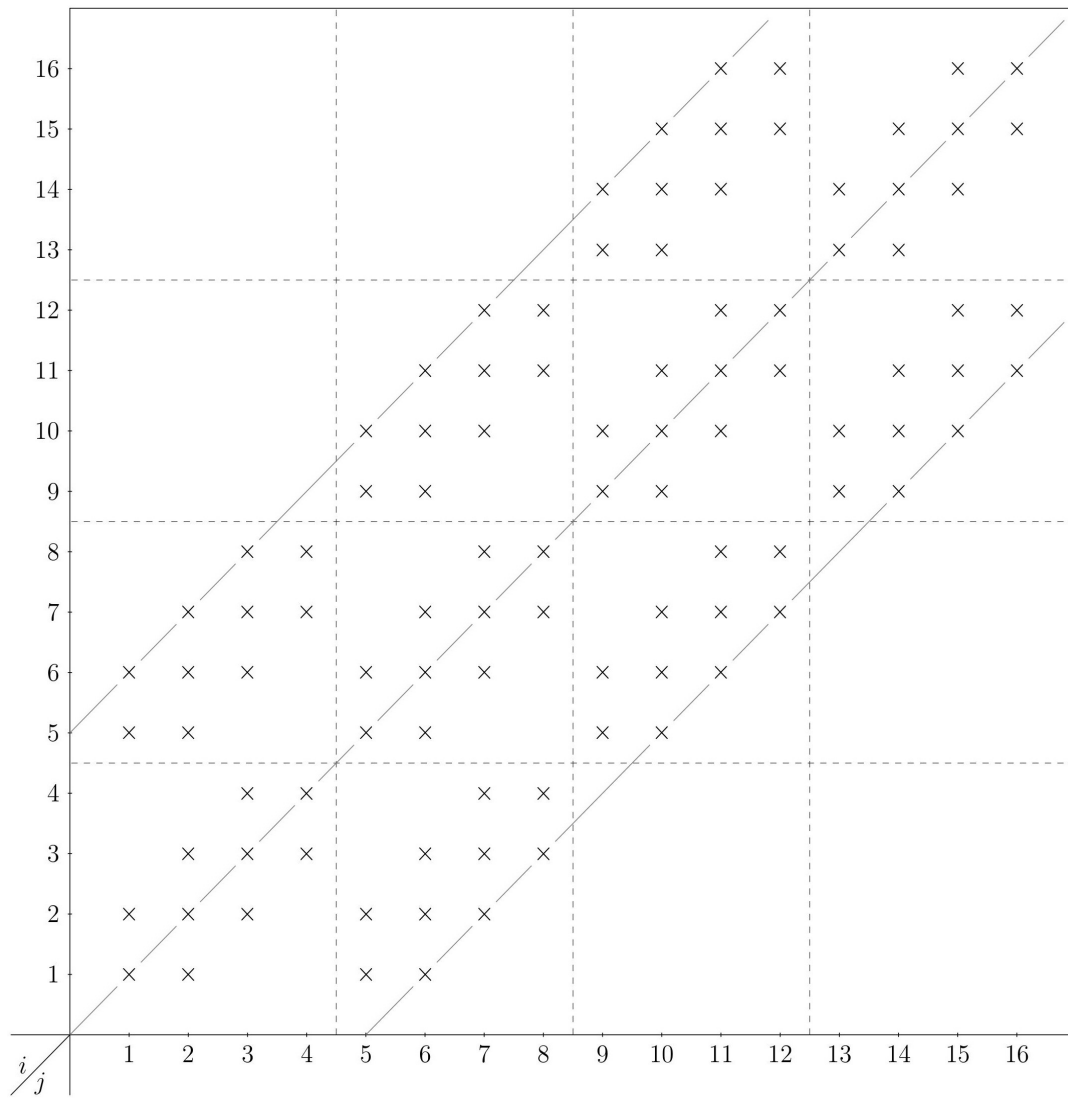
4.1.3.0 1º Experimento: posição de uma membrana

Sejam Ω o quadrado unitário e uma função $u^0 \in C^\infty(\Omega)$ dada. Queremos encontrar $u \in H^1(\Omega)$ solução do seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = u^0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (4.21)$$

A solução deste problema corresponde ao deslocamento vertical $u(x)$ no ponto x de uma membrana Ω elástica. Esta membrana cujas extremidades estão fixadas na posição u_0 e não está submetida a força alguma.

Figura 5 – Estrutura “banda” de uma matriz de rigidez



Fonte: A autora (2020)

Tomando $w = u - u^0$, convertemos o problema anterior no problema de encontrar $w \in H_0^1(\Omega)$ solução de:

$$\begin{cases} -\Delta w = \Delta u^0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (4.22)$$

A solução deste problema corresponde ao deslocamento vertical $w(x)$ no ponto x de uma membrana Ω elástica está fixada em $\partial\Omega$ e que está submetida a uma força vertical de intensidade Δu_0 .

Considere a forma bilinear $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e a forma linear $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w \nabla v dx, \quad L(v) = \int_{\Omega} \Delta u_0 v dx.$$

Como u^0 é infinitamente diferenciável, o Teorema de Lax-Milgram garante que existe uma única $w \in V := H_0^1(\Omega)$ solução do problema 4.22, logo $u = w + u_0$ é a única solução do problema 4.21.

A aproximação variacional do problema (4.21) baseia-se em encontrar $u_h \in V_h$ tal que para todo $v_h \in V_h$ tenhamos

$$a(u_h, v_h) = L(v_h),$$

onde $V_h = \{v \in H^1(\Omega) : v|_K \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$ e $\mathcal{T}_h$ é uma triangularização (ou malha) regular de Ω .

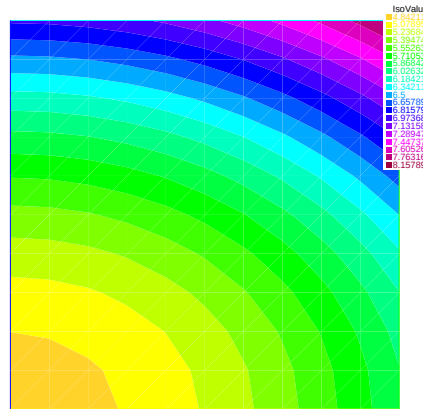
Usamos o comando **square** para gerar uma triangularização 10×10 de Ω . A condição de fronteira é inserida usando o comando **on**.

No experimento a seguir, consideramos a função $u^0 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$u^0(x, y) = x^2 + y^2 + 5.$$

Sua representação gráfica encontra-se na Figura 6.

Figura 6 – Representação gráfica do dado de fronteira

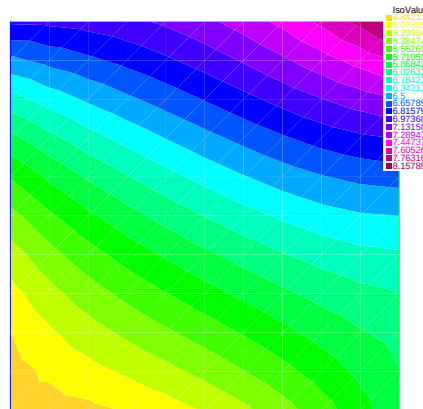


Fonte: A autora (2020)

Resolvendo o problema aproximado (4.21), obtemos uma solução aproximada cuja representação gráfica encontra-se na Figura 7.

Analisando a Figura 7, observamos que, próximo à fronteira $\partial\Omega$, a aproximação da solução tende a coincidir com a função u^0 .

Figura 7 – Solução aproximada do problema da membrana



Fonte: A autora (2020)

4.1.3.0 2º Experimento: probabilidade de encontrar portas

Seja Ω um quarto com quatro portas, uma em cada lado do quarto, assumiremos que sua fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ é decomposta em duas partes, Γ_1 que representa as paredes do quarto e Γ_2 que representa as portas. Temos que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Uma partícula está localizada em um ponto $(x, y) \in \Omega$ e começa a se mover ou “andar” de maneira aleatória. O “pisso” Ω é plano e homogêneo e a partícula não privilegia nenhuma direção em especial. Além disso, a partícula se move independentemente de seu movimento anterior.

Queremos calcular a probabilidade, $u(x, y)$, de uma partícula localizada em (x, y) , atingir uma porta.

Uma maneira inteligente e simples de resolver o problema é a seguinte. Aproximamos o movimento por incrementos aleatórios de passo h , com $h > 0$ pequeno. De (x, y) a partícula pode se mover para $(x + h, y)$, $(x - h, y)$, $(x, y + h)$ ou $(x, y - h)$, cada uma com uma probabilidade $1/4$. Começando em (x, y) , seja $u_h(x, y)$ a probabilidade correspondente de atingir Γ_2 quando a partícula se move na grade de lado h . É natural esperar que $u = \lim u_h$ quando $h \rightarrow 0$.

A fórmula das probabilidades condicionais fornece imediatamente que

$$u_h(x, y) = \frac{1}{4} \left(u_h(x + h, y) + u_h(x - h, y) + u_h(x, y + h) + u_h(x, y - h) \right)$$

e então

$$\left\{ u_h(x+h, y) + u_h(x-h, y) - 2u_h(x, y) \right\} + \left\{ u_h(x, y+h) + u_h(x, y-h) - 2u_h(x, y) \right\} = 0.$$

Dividindo por h^2 e assumindo uma convergência boa o suficiente de u_h a u , obtemos

$$\Delta u(x, y) := u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0.$$

Além disso, também esperamos que seus valores de fronteira sejam dados pelo seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ u = 1 & \text{sobre } \Gamma_2. \end{cases} \quad (4.23)$$

Note que o princípio do máximo para EDPs elípticas garante que a probabilidade u está entre 0 e 1, respectivamente valores mínimo e máximo dos dados do problema.

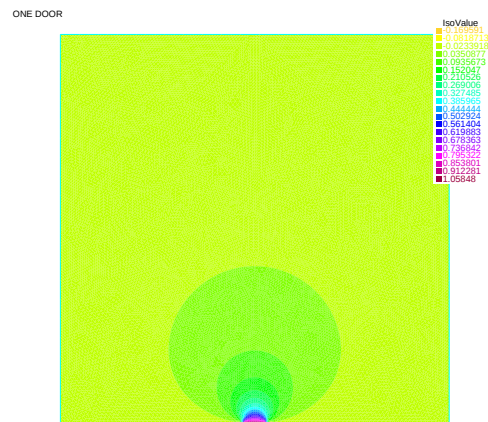
Seja $V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$. Daí, obtemos a seguinte formulação variacional: encontrar $u \in V$ tal que $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0$, para todo $v \in V$.

Observação 4.3 Note que a forma bilinear acima é coerciva em V pois a desigualdade de Poincaré pode ser estendida ao espaço de funções de $H^1(\Omega)$ que somente se anulam em um conjunto de medida positiva da fronteira.

Observação 4.4 A solução da formulação variacional acima não verifica a condição de fronteira $u|_{\Gamma_2} = 1$ e sim $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_2} = 0$. A dificuldade surge pelo fato de a condição de fronteira ser pouco regular e, portanto, não ser o traço de uma função de $H^1(\Omega)$. Como veremos abaixo, o problema aproximado é resolvido impondo *a posteriori* a condição de fronteira. Por outro lado, existe uma maneira de provar existência e unicidade de solução para esse problema através do chamado *método de transposição*.

Portanto, a aproximação variacional do problema (4.23) baseia-se em encontrar $u_h \in V_h$ tal que para todo $v_h \in V_h$ tenhamos: $\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = 0$, onde $V_h = \{v \in H^1(\Omega); v|_K \in P_2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$ e $\mathcal{T}_h$ é uma triangularização regular de Ω . A condição de fronteira $u|_{\Gamma_1} = 0$ e $u|_{\Gamma_2} = 1$ é imposta a solução através do comando **on**. Além disso, usaremos elementos triangulares e funções quadráticas (polinômios de grau menor ou igual a 2) sobre cada um dos elementos.

Figura 8 – Probabilidade de atingir uma porta



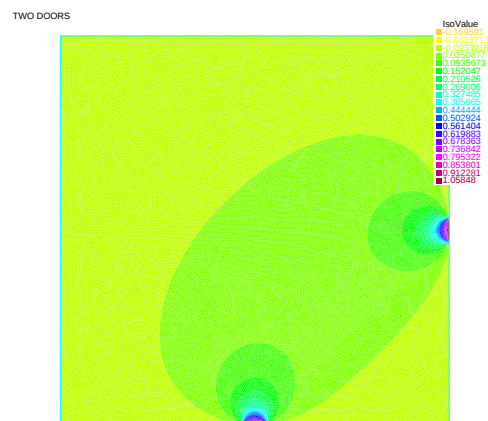
Fonte: A autora (2020)

Vamos assumir que o quarto possui somente uma porta. Daí obtemos a aproximação exibida na Figura 8.

Observamos que quanto mais próximo da porta, maior é a probabilidade de alcançá-la.

Agora, vamos assumir que o quarto possui duas portas, cada uma em um lado diferente do quarto. Daí, obtemos a seguinte aproximação exibida na Figura 9.

Figura 9 – Probabilidade de atingir uma das duas portas



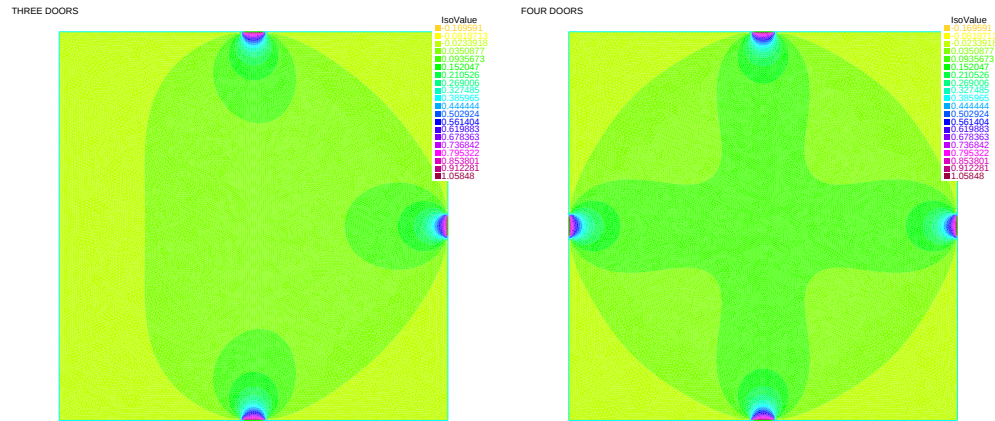
Fonte: A autora (2020)

Nesse caso, note que a parte do quarto em que temos uma boa probabilidade de encontrar uma porta é maior do que no caso anterior. Além disso, a probabilidade vai aumentando assim que nos

aproximamos a uma das duas portas.

Por fim, vamos assumir que o quarto possui três ou quatro portas cada uma em um lado diferente do quarto. Daí, temos as aproximações exibidas nas Figuras 10.

Figura 10 – Probabilidade de atingir uma das três portas (esquerda) ou uma das quatro portas (direita)



Fonte: A autora (2020)

Com isso concluímos que quanto mais portas tivermos no quarto maior será a região do quarto na qual teremos uma probabilidade alta de alcançarmos alguma porta e, além disso, a probabilidade vai aumentando assim que nos aproximamos de alguma das portas.

4.1.3.0 3º Experimento: problemas com condições de fronteira do tipo Neumann e Fourier

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um quadrado e f uma função definida em Ω que em uma vizinhança U de um ponto dado no interior de Ω assume o valor de uma constante $f_0 \neq 0$ e fora dessa vizinhança f seja nula. Queremos encontrar u solução da equação:

$$-D\Delta u + cu = f, \quad (4.24)$$

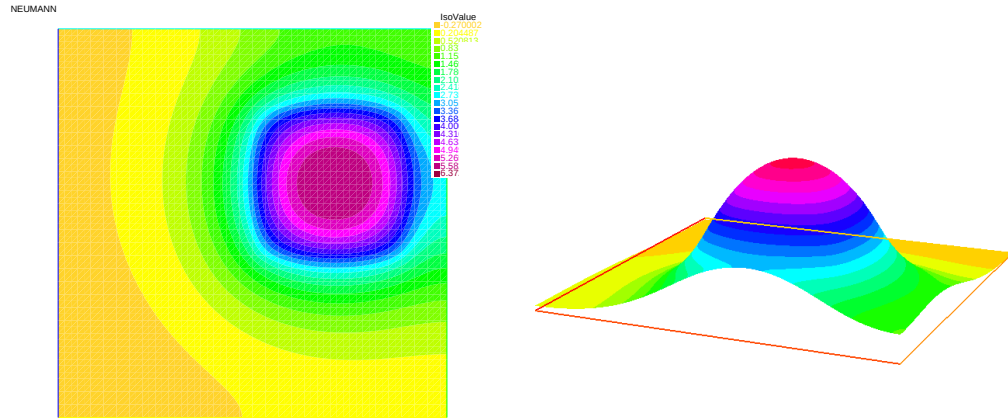
onde D e c são constantes positivas.

Vamos resolver numericamente diferentes tipos de condições de fronteira associadas à equação (4.24). Em todos os casos consideraremos $D = 0.5$, $c = 1$, $\alpha = 1$, $f_0 = 10$, $\Omega = [0, 5] \times [-2.5, 2.5]$

onde $V_h := \{v_h \in H^1(\Omega); v_h|_K \in P_2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$.

Resolvendo o problema aproximado acima, obtemos uma solução aproximada representada em Figura 12.

Figura 12 – Solução aproximada com condição de Neumann



Fonte: A autora (2020)

- b) **Condição de Dirichlet-Fourier.** Sejam Γ_1 uma parte aberta e não-vazia da fronteira Γ e $\Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1$. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -D\Delta u + cu = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0 & \text{sobre } \Gamma_2. \end{cases} \quad (4.26)$$

Tomando $V = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma_1} = 0\}$, temos que a formulação variacional do problema (4.26) é dada por encontrar $u \in V$ tal que para todo $v \in V$, temos que

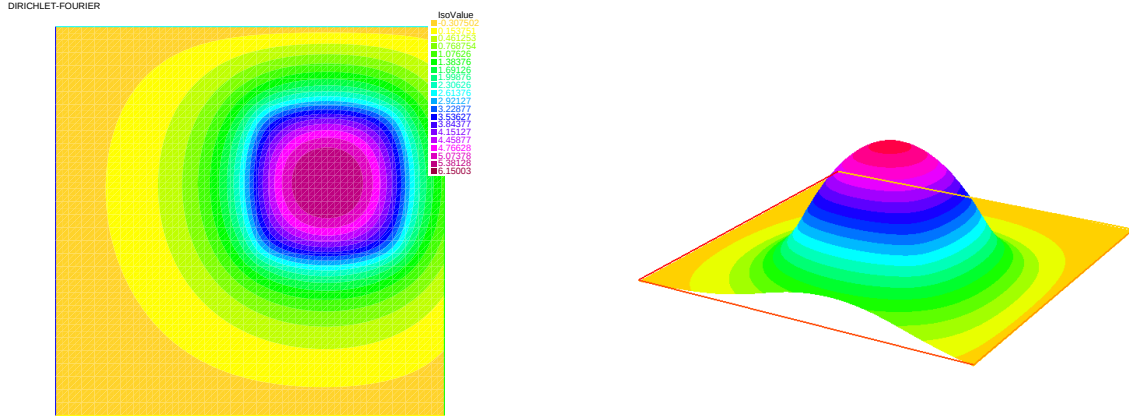
$$\int_{\Omega} (D \nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx + \int_{\Gamma_2} \alpha uv d\sigma = \int_{\Omega} f v dx.$$

A desigualdade de Poincaré generalizada e o teorema de Traço garantem a aplicabilidade do teorema de Lax-Milgram e, portanto, a existência e unicidade de solução. Daí, aproximação variacional do problema (4.26) usando funções quadráticas baseia-se em procurar $u_h \in V_h$, tal que para todo $v_h \in V_h$,

$$\int_{\Omega} (D \nabla u_h \cdot \nabla v_h + c u_h v_h) dx + \int_{\Gamma_2} \alpha u_h v_h d\sigma = \int_{\Omega} f v_h dx$$

onde $V_h := \{v_h \in H^1(\Omega); v_h|_K \in P_2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$. Resolvendo o problema aproximado, obtemos uma solução aproximada representada em Figura 13.

Figura 13 – Solução aproximada com condição mista Dirichlet-Fourier



Fonte: A autora (2020)

4.1.3.0 4º Experimento: problema cuja forma bilinear não é simétrica

Seja $\Omega = B \setminus R \subset \mathbb{R}^2$, onde B é uma bola e R é um retângulo. Dadas as funções $f \in L^2(\Omega)$ e $u^0 \in C^\infty(\Omega)$, queremos encontrar $u \in H^1(\Omega)$ solução do problema

$$\begin{cases} -a \Delta u + b \frac{\partial u}{\partial x_1} + cu = f & \text{em } \Omega, \\ u = u^0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (4.27)$$

onde a, b e c são constantes positivas.

Tomamos $w = u - u^0$, convertemos o problema anterior no problema de encontrar $w \in V = H_0^1(\Omega)$ solução de

$$\begin{cases} -a \Delta w + b \frac{\partial w}{\partial x_1} + cw = f + a \Delta u_0 - b \frac{\partial u_0}{\partial x_1} - cu_0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (4.28)$$

Assim, definimos a forma bilinear $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e a forma linear $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \left(a \nabla w \cdot \nabla v + b \frac{\partial w}{\partial x_1} v + cwv \right) dx \quad \text{e} \quad L(v) = \int_{\Omega} \left(f + a \Delta u_0 - b \frac{\partial u_0}{\partial x_1} - cu_0 \right) v dx.$$

Não é difícil verificar que a forma linear $L(\cdot)$ é contínua. Resta apenas mostrar que a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é contínua e V -elíptica.

a) $a(\cdot, \cdot)$ é contínua. Dados $w, v \in V$ temos que

$$\begin{aligned} a(w, v) &= a \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx + b \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_1} v + c \int_{\Omega} w v dx \\ &\leq a \|w\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} + b \left\| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + c \|w\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \\ &\leq a \|w\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} + b \|w\|_{1,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + c \|w\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Poincaré, segue

$$a(w, v) \leq (a + b C + c C^2) \|w\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega},$$

onde $C = C(\Omega)$ é a constante de Poincaré.

b) $a(\cdot, \cdot)$ é V -elíptica. Dado $v \in V$ temos que

$$\begin{aligned} a(v, v) &= a \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + b \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_1} v dx + c \int_{\Omega} |v|^2 dx \\ &\geq \frac{a}{1+C^2} \|v\|_{1,\Omega}^2 + b \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_1} v dx + c \|v\|_{0,\Omega}^2, \end{aligned}$$

onde C é a constante positiva obtida na desigualdade de Poincaré. Note que para mostrar que $a(\cdot, \cdot)$ é V -elíptica é suficiente provar que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_1} v dx \geq 0.$$

Com efeito, sabendo que $v \in V$ é tal que $v|_{\Gamma} = 0$ e daí obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_1} v dx = - \int_{\Omega} v \frac{\partial v}{\partial x_1} dx \implies \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_1} v dx = 0.$$

Observação 4.5 A forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ não é simétrica. De fato, dados $w, v \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} a(w, v) &= \int_{\Omega} (a \nabla w \cdot \nabla v + b \frac{\partial w}{\partial x_1} v + c w v) dx \\ &= a \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w dx - b \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_1} w dx + c \int_{\Omega} v w dx. \end{aligned}$$

Logo, para $a(\cdot, \cdot)$ ser simétrica teríamos que ter $b = 0$. O que não acontece, já que b é uma constante positiva.

Pelo Teorema de Lax-Milgram, temos que existe uma única $w \in H_0^1(\Omega)$, solução do problema (4.28). Portanto, como u_0 é fixa e w existe e é única, temos que existe uma única solução u do problema (4.27).

Então, a formulação variacional do problema (4.27) é dada por encontrar $u \in V_0 = \{u_0 + w : w \in H_0^1(\Omega)\}$ tal que para todo $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} (a \nabla u \cdot \nabla v + b \frac{\partial u}{\partial x_1} v + cuv) dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Para o experimento a seguir, consideramos B como sendo a bola de centro na origem e raio 5 e R o retângulo de vértices $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(1, -3)$, $(2, -3)$. Tomamos $a = 0.1$, $b = 5$, $c = 10$ e as funções

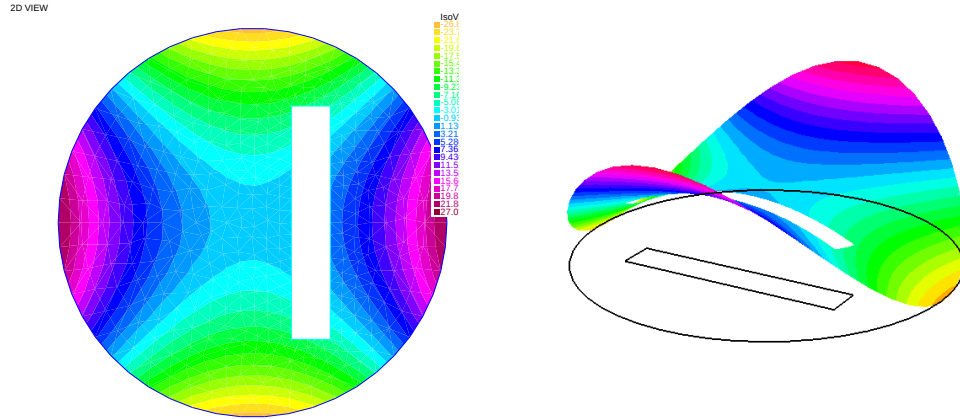
$$f(x_1, x_2) = cx_1^2 + 2bx_1 - cx_2^2 \quad \text{and} \quad u_0(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2.$$

A aproximação variacional do problema (4.27) usando funções lineares baseia-se em procurar $u_h \in V_h := V_h := \{v_h \in H^1(\Omega); v_h|_K \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$, tal que para todo $v_h \in V_h$, temos

$$\int_{\Omega} (a \nabla u_h \cdot \nabla v_h + b \frac{\partial u_h}{\partial x_1} v_h + cu_h v_h) dx = \int_{\Omega} f v_h dx.$$

Resolvendo o problema aproximado, obtemos uma solução aproximada representada na Figura 14.

Figura 14 – Aproximação obtida em problema cuja forma bilinear não é simétrica



Fonte: A autora (2020)

4.1.3.0 4º Experimento: problema elíptico tridimensional

Seja $\Omega = (x_0, x_1) \times (y_0, y_1) \times (z_0, z_1)$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$. Seja Γ_1 a parte da fronteira Γ de Ω que representa as faces superior e inferior e Γ_2 a parte que representa as faces laterais.

Dadas as constantes não-negativas $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3$ e c_0 , onde $a_{ij} = a_{ji}$ e uma função $f \in L^2(\Omega)$, queremos encontrar $u \in H^1(\Omega)$, solução do seguinte problema

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + c_0 u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i = 0 & \text{sobre } \Gamma_2. \end{cases} \quad (4.29)$$

Tomamos $V = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma_1} = 0\}$. Assim, temos a formulação variacional do problema: encontrar $u \in V$ tal que, para todo $v \in V$, temos

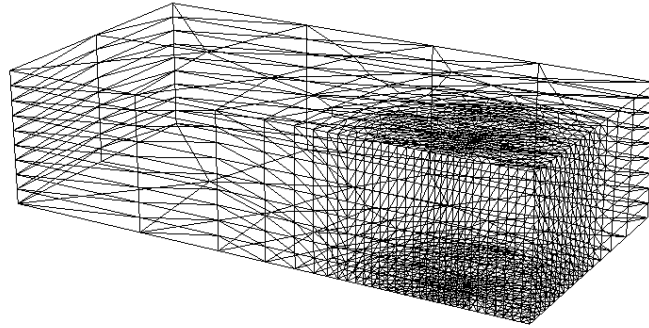
$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + c_0 \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Vamos resolver o problema (4.29) com os seguintes dados: $\Omega = (0, 1) \times (0, 2) \times (0, 5)$, $a_{ij} = a_{ji} = 0$ se $i \neq j$, $a_{ii} = 10$, $1 \leq i \leq 3$, $c_0 = 5$ e

$$f(x_1, x_2, x_3) = \exp(-20(x_1 - 0.25)^2 + (x_2 - 1.7)^2 + (x_3 - 2.5)^2).$$

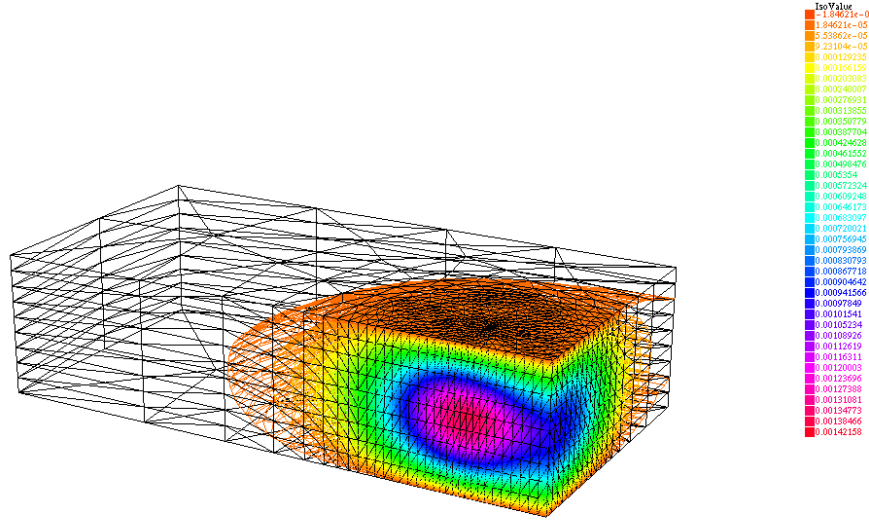
Usando funções quadráticas e calculando uma solução aproximada a formulação variacional associada, obtemos uma solução aproximada representada em Figura 16.

Figura 15 – A malha do domínio tridimensional



Fonte: A autora (2020)

Figura 16 – Solução do problema elíptico 3D



Fonte: A autora (2020)

4.1.3.0 5º Experimento: problema elíptico não-linear

Seja $\Omega = B \setminus R \subset \mathbb{R}^2$, onde B é uma bola e R é um retângulo. Sejam $F : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ um funcional C^∞ e $f_0, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funções no espaço $C^\infty(\overline{\Omega})$. Queremos encontrar $u \in H^1(\Omega)$ solução do problema

$$\begin{cases} -a\Delta u + b\frac{\partial u}{\partial x_1} + cu = F(u) + f_0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \Gamma, \end{cases} \quad (4.30)$$

onde a, b e c são constantes positivas.

Apresentaremos alguns métodos numéricos iterativos para o cálculo da solução do problema (4.30). Para isto, introduzamos a variedade afim

$$Y = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma} = g\} = \{g + w : w \in H_0^1(\Omega)\},$$

e o mapa $G : Y \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ dado por: $G(u) = -a\Delta u + b\frac{\partial u}{\partial x_1} + cu - F(u) - f_0$.

Obviamente, qualquer solução da equação não-linear:

$$G(u) = 0, u \in Y \quad (4.31)$$

resolve o problema (4.30).

Observe que G está bem definida e é de classe C^1 . De fato, para quaisquer $u \in Y$, $v \in H_0^1(\Omega)$ e qualquer $t \in \mathbb{R}^*$, temos:

$$\frac{1}{t} [G(u+tv) - G(u)] = -a\Delta v + b \frac{\partial v}{\partial x_1} + cv - \frac{F(u+tv) - F(u)}{t}.$$

Então, mostramos que:

$$G'(u) \cdot v = -a\Delta v + b \frac{\partial v}{\partial x_1} + cv - F'(u) \cdot v.$$

Desse modo, para resolver (4.31), faz sentido aplicar o *Método de Newton* (Ver p. 124 de [13]).

ALG 1 (Newton).

(i) Escolher $u^0 \in Y$;

(ii) Então, para qualquer $n \geq 0$ e $u^n \in Y$, resolver o problema linear:

$$G'(u^n) \cdot (u^{n+1} - u^n) = -G(u^n),$$

isto é, encontrar $u^{n+1} \in Y$ tal que

$$\begin{cases} -a\Delta u^{n+1} + b \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} + (c - F'(u^n))u^{n+1} = F(u^n) - F'(u^n)u^n + f_0 & \text{em } \Omega, \\ u^{n+1} = g & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (4.32)$$

Como podemos ver, no método de Newton o termo não linear $F(u^{n+1})$ é substituído por sua aproximação de Taylor $F(u^n) + F'(u^n) \cdot (u^{n+1} - u^n)$.

Seja $\bar{u} \in Y$ a solução do problema linear

$$\begin{cases} -a\Delta \bar{u} + b \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + c\bar{u} = f_0 & \text{em } \Omega, \\ \bar{u} = g & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (4.33)$$

Então, tomando $w^{n+1} = u^{n+1} - \bar{u}$, convertemos o problema anterior no problema de encontrar $w^{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ solução de:

$$\begin{cases} -a\Delta w^{n+1} + b \frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_1} + (c - F'(u^n))w^{n+1} = F(u^n) - F'(u^n)w^n & \text{em } \Omega, \\ w^{n+1} = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (4.34)$$

Daí, obtemos a formulação variacional do problema (4.34): encontrar $w \in V := H_0^1(\Omega)$ tal que para todo $v \in V$

$$\int_{\Omega} (a \nabla w^{n+1} \cdot \nabla v + b \frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_1} v + (c - F'(u^n)) w^{n+1} v) dx = \int_{\Omega} (F(u^n) - F'(u^n) w^n) v dx.$$

Pelo teorema de Lax-Milgram temos que, para cada $n \geq 0$, existe um único $w^{n+1} \in V$ solução de (4.34). Então, para todo $n \geq 0$, temos que existe uma única solução de (4.32).

Assim, pelo método de Newton temos que a solução u de (4.30) é dada por

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u^{n+1} = u.$$

Consideremos os seguintes dados: $a = 1$, $b = 2$, $c = 10$, $f_0 \equiv 0$ e

$$u_0(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2, \quad F(s) = e^{(1-s^2)} \sin(s).$$

Iniciamos o **ALG 1** com $u^0 = \bar{u}$, onde $\bar{u}$ é a solução de (4.33). Para obter uma boa aproximação da solução do problema estabelecemos um critério de parada que é dado por

$$\varepsilon^n = \|u_h^{n+1} - u_h^n\|_{L^2(\Omega)} < 10^{-15}, \quad (4.35)$$

ou seja, quando a desigualdade acima é satisfeita paramos as iterações. O Método de Newton satisfaz a desigualdade (4.35) após 76 iterações (veja a Tabela 1). A representação gráfica de $\bar{u}$, da primeira e última iteração do método de Newton encontra-se nas Figuras 17, 19 e 20, respectivamente.

Outra estratégia possível para encontrar uma solução da equação não-linear (4.31) é reformular o problema como uma equação de ponto-fixo. Para isto, introduzimos a aplicação $T : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ tal que para cada $w \in H^1(\Omega)$, $u = T(w)$ é a única solução do seguinte problema linear:

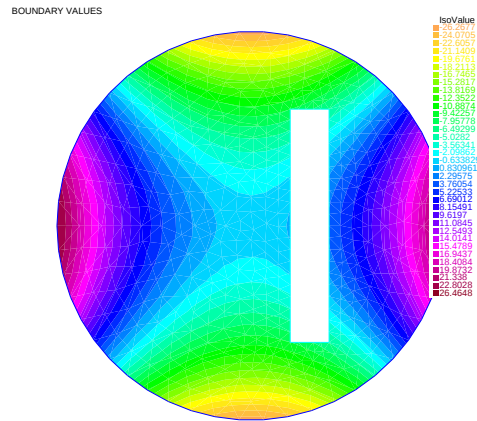
$$\begin{cases} -a\Delta u + b \frac{\partial u}{\partial x_1} + cu = F(w) + f_0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (4.36)$$

Assim, encontrar uma solução do problema (4.30) equivale a encontrar um ponto fixo de T , isto é, $T(u) = u$.

Então o método do ponto-fixo consiste em construir um algoritmo tal que a sequência construída convirja a um ponto fixo de T . Precisamente:

ALG 2 (Ponto-Fixo)

Figura 17 – Método de Newton. Inicialização



Fonte: A autora (2020)

Figura 18 – Método de Newton. Primeira iteração

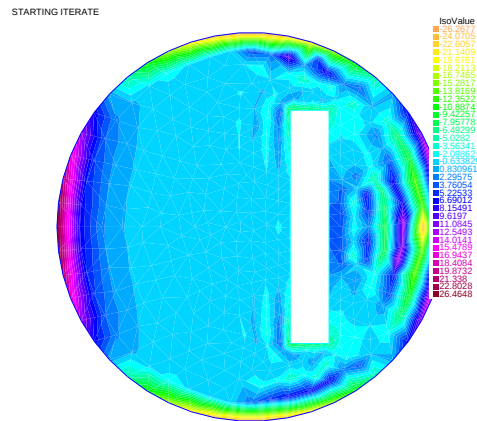


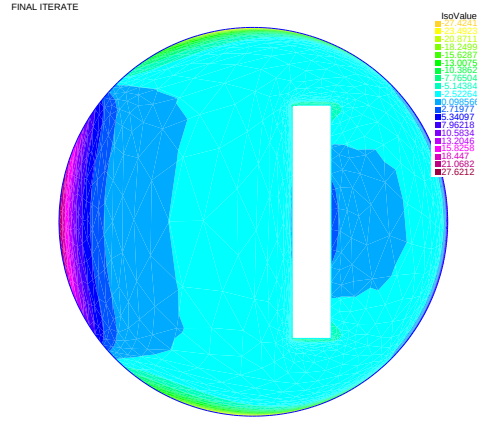
Figura 19 – Método de Newton. Primeira iteração

Fonte: A autora (2020)

- i) Encontrar uma aproximação inicial u^0 do ponto fixo de T ;
- ii) Então, para qualquer $n \geq 0$ e $u^n \in Y$ calcular

$$u^{n+1} = T(u^n),$$

Figura 20 – Método de Newton. Última iteração



Fonte: A autora (2020)

isto é, para cada $n \geq 0$ encontrar u^{n+1} solução do problema linear:

$$\begin{cases} -a\Delta u^{n+1} + b\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} + cu^{n+1} = F(u^n) + f_0 & \text{em } \Omega \\ u^{n+1} = g & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (4.37)$$

Consideremos os mesmos dados do método de Newton e iniciamos o **ALG 2** com a mesma escolha de u^0 . O critério de parada considerado é o mesmo, isto é, iterações pararão de ocorrer quando a desigualdade (4.35) for satisfeita.

Realizamos um total de 100 iterações e não foi possível para as soluções aproximadas, calculadas com o método de ponto fixo, satisfazer a desigualdade (4.35). Nem sempre tem-se a convergência do método. Uma condição necessária para ter a convergência do método é que o operador T seja uma contração ou que alguma iterada de T seja uma contração, o que não é o caso. Além disso, pode-se pensar em uma outra formulação do problema como um problema de ponto fixo de modo que a convergência esteja garantida.

Agora vamos comparar a eficiência dos métodos de Newton e do Ponto Fixo. Para isso, vamos definir o erro na norma L^2 dado por:

$$\|u_h^{n+1} - u_h^n\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} (u_h^{n+1} - u_h^n)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Observando os dados da Tabela 1, temos que o método de Newton é mais eficaz que o método

Tabela 1 – Estimativa de erro. Método do ponto-fixo vs Método de Newton

Iteração	$\ u_h^{n+1} - u_h^n\ _{0,\Omega}$	Iteração	$\ u_h^{n+1} - u_h^n\ _{0,\Omega}$
$n = 0$	3.32×10^{-1}	$n = 0$	2.58×10^{-1}
$n = 10$	2.23×10^{-8}	$n = 10$	3.69×10^{-5}
$n = 30$	9.30×10^{-7}	$n = 30$	1.15×10^{-7}
$n = 60$	3.20×10^{-3}	$n = 60$	5.81×10^{-10}
$n = 70$	3.94×10^{-3}	$n = 70$	8.28×10^{-11}
$n = 75$	2.03×10^{-3}	$n = 75$	4.32×10^{-16}

Fonte: A autora (2020)

do ponto fixo. Note que a partir da iteração 60 a ordem do erro obtido pelo método do ponto fixo não varia, por isso o método não satisfaz a condição (4.35) em até 100 iterações.

4.1.3.0 6° Experimento: problema com solução conhecida

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o quadrado unitário e uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. Então, $u_e(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ é solução exata do seguinte problema de Poisson (ver Figura 21)

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (4.38)$$

Multiplicando a primeira equação de (4.38) por uma função $v \in V = H_0^1(\Omega)$ e integrando sobre Ω , temos

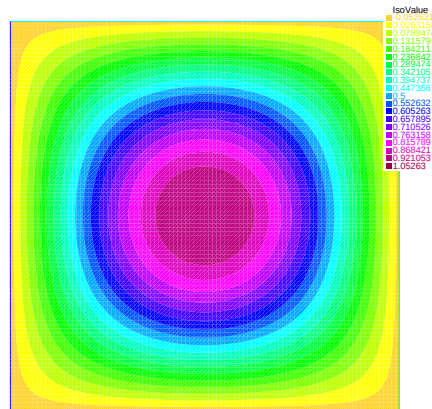
$$\int_{\Omega} (-\Delta u) v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Usando a Fórmula de Green e levando em conta que v se anula em Γ , temos que a formulação variacional do problema (4.38) é dada por encontrar $u \in V$ tal que para todo $v \in V$

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Nosso objetivo aqui, será analisar o comportamento das aproximações obtidas cada vez que refinamos uniformemente a malha.

Figura 21 – Solução exata do problema (4.38)

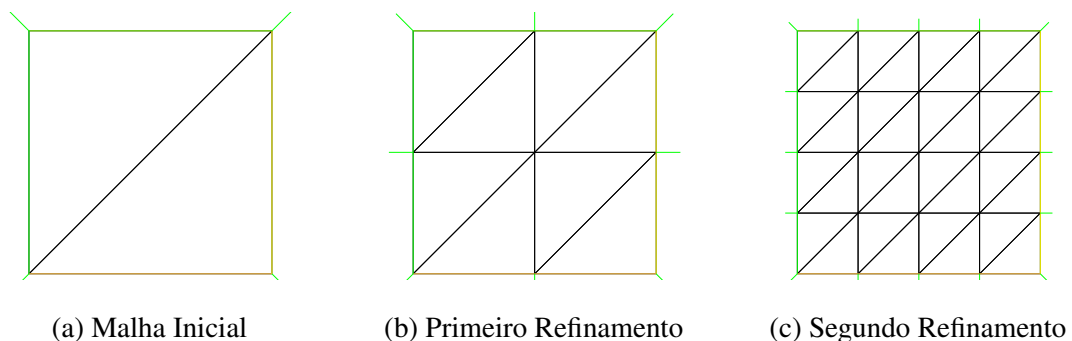


Fonte: A autora (2020)

O refinamento uniforme (ou refinamento por *splitting*) é feito por meio da subdivisão de cada um dos elementos triangulares ¹ que compõe o domínio, de modo a gerar elementos menores com as mesmas propriedades geométricas do elemento inicial.

A principal vantagem deste refinamento é a simplicidade, cada triângulo pode ser dividido em outros quatro com a inserção de um nó no ponto médio de cada aresta que compõe o elemento (Figura 22). Desta forma, todos os elementos serão admissíveis e as aproximações podem ser obtidas sobre a nova malha de elementos.

Figura 22 – Aplicações do refinamento uniforme

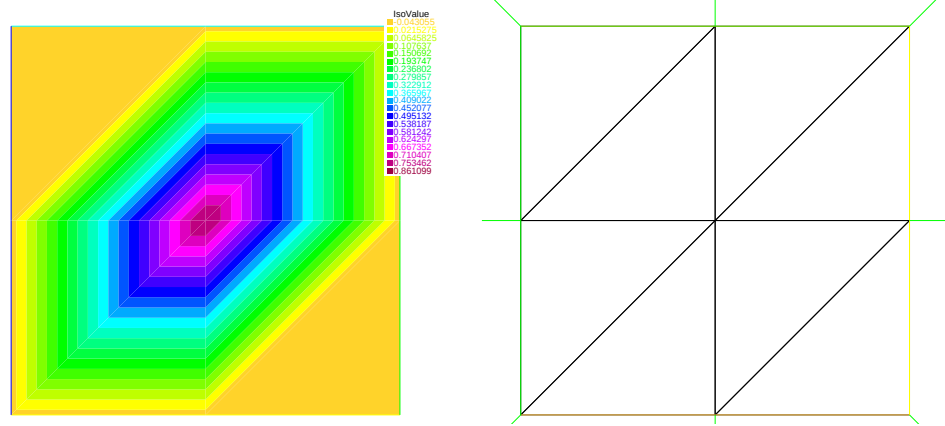


Fonte: A autora (2020)

¹A ideia é análoga para elementos quadriláteros ou, no caso do $\mathbb{R}^3$, prismas e tetraedros.

Utilizando funções de forma lineares (polinômios de grau menor ou igual a 1) sobre cada um dos elementos triangulares, obtivemos a aproximação e triangularização representados na Figura 23.

Figura 23 – Aproximação obtida e malha inicial



Fonte: A autora (2020)

Vamos considerar essa primeira triangularização como sendo a malha inicial e vamos refina-la, ou seja, vamos dobrar a quantidade de pontos em cada parte da fronteira de Ω . Usando novamente elementos triangulares e funções lineares, a nova aproximação obtida e a malha refinada estão inseridas na Figura 24.

Cada vez que refinarmos a malha vamos calcular o erro obtido pela norma $\|u_e - u_h\|_{L^2(\mathcal{T}_h)}$ e encontrar a ordem de convergência do método, ou seja, queremos encontrar k tal que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\mathcal{T}_h)} = Ch^k + O(h^k), \quad (4.39)$$

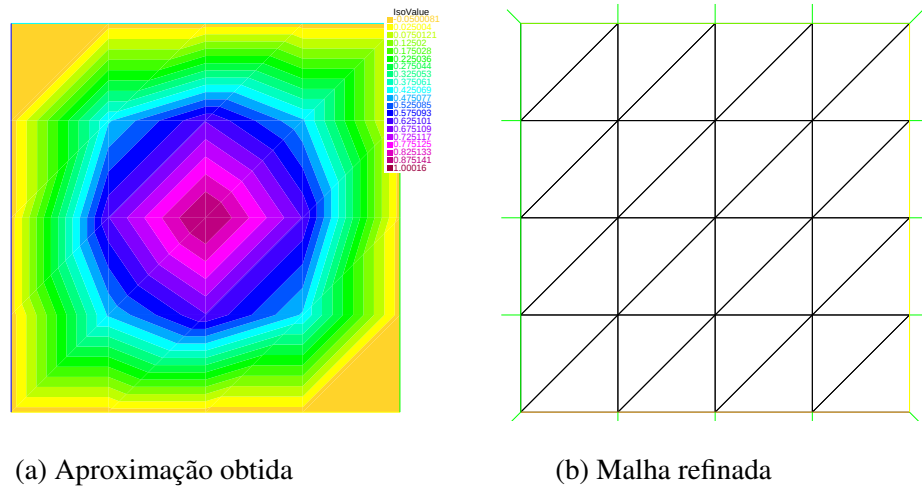
onde C é uma constante positiva independente de h e $O(h)$ tende a zero quando h tende a zero. Sabemos que ao refinarmos a malha, as arestas de cada triângulo são divididas ao meio, então seguindo o mesmo raciocínio de (4.39), temos que

$$\|u - u_{h/2}\|_{L^2(\mathcal{T}_h)} = C \frac{h^k}{2^k} + O(h^k).$$

Então,

$$k = \frac{\log \left(\frac{\|u - u_h\|_{L^2(\mathcal{T}_h)}}{\|u - u_{h/2}\|_{L^2(\mathcal{T}_h)}} \right)}{\log(2)}.$$

Figura 24 – Resultados obtidos ao realizar o primeiro refinamento



Fonte: A autora (2020)

Realizando um total de seis refinamentos na malha inicial, conseguimos os dados inseridos na Tabela 2.

Tabela 2 – Dados obtidos na malha inicial e nos seis refinamentos

	h	$\ u_e - u_h\ _{L^2(\mathcal{T}_h)}$	k
Malha inicial	0.707	2.5×10^{-1}	
1º Refinamento	0.353	7.9×10^{-2}	1.659
2º Refinamento	0.176	2.1×10^{-2}	1.904
3º Refinamento	0.088	5.3×10^{-3}	1.974
4º Refinamento	0.044	1.3×10^{-3}	1.993
5º Refinamento	0.022	3.4×10^{-4}	1.998
6º Refinamento	0.011	8.5×10^{-5}	1.999

Fonte: A autora (2020)

De acordo com dados inseridos na Tabela 2 vemos que, quanto mais refinamos a malha melhor é a aproximação obtida e maior é a ordem de convergência do método, ou seja, temos uma melhor precisão.

Como escolhemos o espaço P_1 para calcular as aproximações e o nosso problema é regular no sentido da Definição 3.5, temos pelo Teorema 3.5 que a ordem de convergência do método é 2. Pela Tabela 2 vimos que a ordem de convência está tendendo para 2 quando fazemos h tender para zero, o que comprova que os resultados estudados são verificados na prática.

4.2 MODELOS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS

Nesta seção apresentaremos um problema do tipo elíptico que é fundamental devido às suas aplicações na Mecânica dos fluidos, são chamadas *Equações de Navier-Stokes* (caso não-linear) e as *Equações de Stokes* (caso linear).

4.2.1 Formulação variacional para as equações de Stokes

Seja Ω um subconjunto aberto limitado e conexo de $\mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ou $N = 3$ nas aplicações) com fronteira Γ suficientemente regular. Consideramos o seguinte problema: dada uma função $\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)$ em $(L^2(\Omega))^N$ e uma constante $\mu > 0$, encontrar um campo vetorial $\vec{u} = (u_1, \dots, u_N)$ e uma função p , definidas em Ω , tais que

$$\begin{cases} -\mu\Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i & \text{em } \Omega, 1 \leq i \leq N, \\ \operatorname{div} \vec{u} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 & \text{em } \Omega, \\ u_i = 0 & \text{sobre } \Gamma, 1 \leq i \leq N. \end{cases} \quad (4.40)$$

As equações (4.40) descrevem o escoamento permanente de um *fluido incompressível viscoso* (isto é, um fluido que preserva volume e para o qual há fricção entre suas partículas) confinado em Ω e submetido a uma densidade volumétrica f de forças externas. Em (4.40), $\vec{u}$ é a velocidade do fluido, p a pressão e μ a viscosidade.

Uma formulação variacional do problema (4.40) não é obtida de maneira imediata. Se u_i , $1 \leq i \leq N$, e p são distribuições em Ω verificando as relações

$$-\mu\Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i, \quad 1 \leq i \leq N,$$

temos

$$\mu \sum_{i,j=1}^N \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle p, \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\rangle = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i v_i dx, \quad \forall \vec{v} \in (\mathcal{D}(\Omega))^N.$$

Dáí, para toda função $\vec{v}$ de $(\mathcal{D}(\Omega))^N$, que verifica $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ em Ω , temos

$$\mu \sum_{i,j=1}^N \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i v_i dx.$$

Então é natural introduzir o espaço $V = \{\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^N : \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ em } \Omega\}$, subespaço fechado de $(H_0^1(\Omega))^N$. Em virtude da desigualdade de Poincaré, V é um espaço de Hilbert pela norma $\vec{v} \mapsto |\vec{v}|_{1,\Omega}$, dada por

$$|\vec{v}|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i,j=1}^N \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

Finalmente, introduzindo a forma bilinear contínua sobre $V \times V$ dada por

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \mu \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx.$$

Como para todo $\vec{v} \in V$ a forma bilinear é tal que $a(\vec{v}, \vec{v}) = \mu |\vec{v}|_{1,\Omega}^2$, temos que $a(\cdot, \cdot)$ é também V -elíptica.

Além disso, $\vec{v} \mapsto \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i v_i dx$ é uma forma linear e contínua em V . Graças ao Teorema de Lax-Milgram, deduzimos

Teorema 4.1 Existe uma única função $\vec{u} \in V$ tal que

$$\forall \vec{v} \in V, a(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i v_i dx. \quad (4.41)$$

Uma vez que $(\mathcal{D}(\Omega))^n$ não está contido em V , não é possível interpretar diretamente o problema resolvido. Portanto, fornecemos uma forma equivalente que provará ser mais adequada à interpretação. Para isso, vamos precisar do seguinte resultado importante, o qual não demonstraremos nesta dissertação:

Teorema 4.2 (De Rham) Seja Ω um subconjunto aberto limitado e conexo de $\mathbb{R}^N$ de fronteira suficientemente regular, e seja L uma forma linear contínua sobre $(H_0^1(\Omega))^N$. Então a forma linear L se anula em V se, e somente se, existe uma função ϕ em $L^2(\Omega)$ tal que

$$\forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^N, L(\vec{v}) = \int_{\Omega} \phi \operatorname{div} \vec{v} dx. \quad (4.42)$$

Além disso, (4.42) determina ϕ de maneira única a menos de uma constante aditiva.

Demonstração: Ver p. 243 de [2]. ■

Assim, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 4.3 Existe uma única função $\vec{u} \in V$, e uma única função $p \in L^2(\Omega)$, determinada de maneira única exceto por uma constante aditiva, tais que

$$\forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^N, \quad a(\vec{u}, \vec{v}) - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i v_i dx. \quad (4.43)$$

Além disso, a função $\vec{u}$ é solução de (4.41).

Demonstração: Seja $(\vec{u}, p) \in V \times L^2(\Omega)$ solução de (4.43). $\vec{u}$ é evidentemente solução de (4.41), logo é única. Reciprocamente, seja $\vec{u}$ solução em V de (4.41). Considere a forma linear

$$\vec{v} \mapsto L(\vec{v}) := a(\vec{u}, \vec{v}) - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i v_i dx.$$

A forma L é contínua sobre $(H_0^1(\Omega))^N$ e, de (4.41), anula-se sobre V . Em virtude do Teorema 4.2, existe então uma função p em $L^2(\Omega)$, única exceto por uma constante aditiva, tal que

$$\forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^N, \quad L(\vec{v}) = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} dx.$$

Assim, $(\vec{u}, p)$ é solução de (4.43). ■

Vamos mostrar que resolvemos o problema inicial (4.40). Como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, a solução $(\vec{u}, p)$ de (4.43) está caracterizada por

$$\begin{cases} (\vec{u}, p) \in V \times L^2(\Omega), \\ \forall \vec{v} \in (\mathcal{D}(\Omega))^N, \quad a(\vec{u}, \vec{v}) - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i v_i dx \end{cases}$$

isto é, por

$$\begin{cases} \vec{u} \in (H_0^1(\Omega))^N, \quad p \in L^2(\Omega), \\ -\mu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f} \text{ sobre } \Omega, \quad 1 \leq i \leq N, \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

onde as igualdade verificam-se no sentido das distribuições.

Se supormos que a solução $\vec{u}$ pertença a $(H^2(\Omega))^N$, então p pertence a $H^1(\Omega)$ e a relação $-\mu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f}$ é uma igualdade entre as funções $\Delta \vec{u}$, ∇p e $\vec{f}$ em $(L^2(\Omega))^n$. Assim, teríamos a igualdade

$$-\mu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f}$$

verificada para quase todo ponto de Ω .

4.2.2 Experimentos numéricos

No caso de um fluxo independente da terceira coordenada (fluxo bidimensional), os fluxos com baixo número de Reynolds ¹ (este número é inversamente proporcional à viscosidade do fluido) satisfazem:

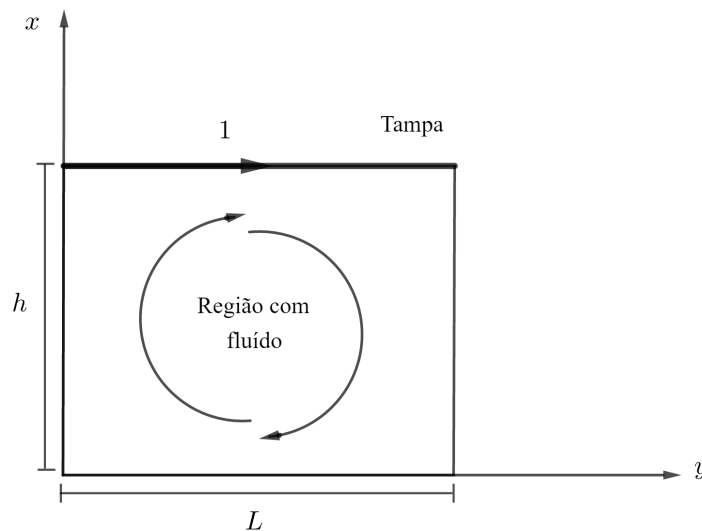
$$\begin{cases} -\Delta \vec{z} + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \vec{z} = 0, \end{cases} \quad (4.44)$$

onde $\vec{z} = (u, v)$ é a velocidade do fluxo e p a sua pressão.

Nesta seção apresentaremos apenas um experimento numérico, o problema da tampa deslizante. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma caixa cheia de líquido com tampa se movendo horizontalmente com velocidade 1.

Na Figura 25 abaixo, vemos o modelo matemático do problema a ser estudado. Onde h representa a altura da caixa e L representa a largura.

Figura 25 – Escoamento bidimensional em uma caixa com tampa deslizante



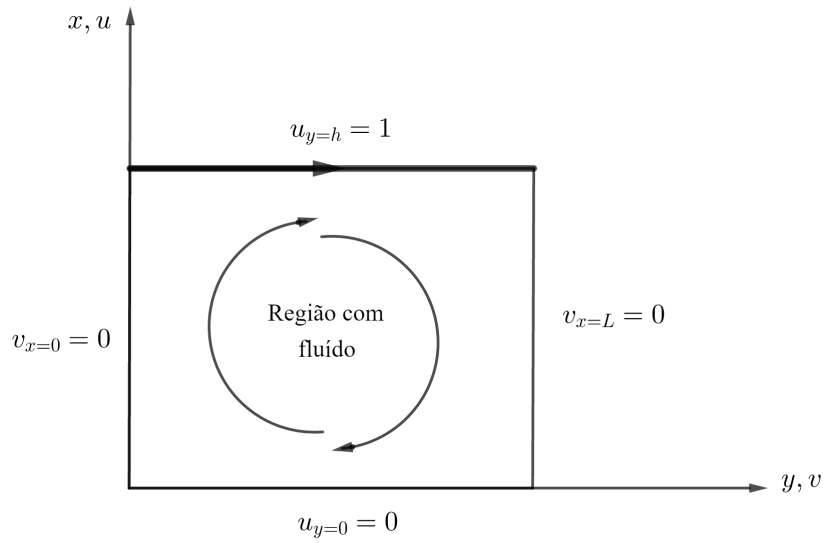
Fonte: A autora (2020)

O modelo matemático deste problema assume a mesma forma de (4.44). As condições de

¹Descoberto por Osborne Reynolds em 1883, o número de Reynolds (Re) é um número adimensional usado em mecânica dos fluidos para o cálculo do regime de escoamento de um determinado fluido, podendo ser esse escoamento dentro de uma tubulação ou sobre uma superfície. O número de Reynolds é geralmente usado em projetos de tubulações industriais e asas de aviões.

fronteira, por sua vez, definem o domínio físico que pode ser composto por paredes sólidas, entrada de fluidos, etc. No caso do problema da caixa com tampa deslizante, considera-se que as paredes laterais e a parede inferior são sólidas. Neste sentido, a velocidade nessas paredes deve ser nula. Na parede superior, por sua vez, considera-se uma velocidade igual a 1. As condições de contorno são apresentadas na Figura 26 onde u é a componente horizontal do campo velocidade e v é componente vertical do campo velocidade.

Figura 26 – Condição de fronteira para o problema da caixa com tampa deslizante



Fonte: A autora (2020)

Portanto, temos que nosso problema nesse caso é dado por

$$\begin{cases} -\Delta \vec{z} + \nabla p = 0, & \text{em } \Omega, \\ \nabla \cdot \vec{z} = 0, & \text{em } \Omega, \\ \vec{z} = (0,0), & \text{em } \Gamma_1, \\ \vec{z} = (1,0), & \text{em } \Gamma_2, \end{cases} \quad (4.45)$$

onde Γ_1 é a parte da fronteira de Ω que representa as paredes sólidas e Γ_2 é a parte que representa a parte superior (tampa).

Agora, vamos encontrar a formulação variacional do nosso problema.

Seja $V = \{\vec{w} \in H^1(\Omega) : \text{div } \vec{w} = 0, \vec{w}|_{\Gamma_1} = (0,0), \vec{w}|_{\Gamma_2} = (1,0)\}$, munido da norma $\vec{w} \mapsto \|\vec{w}\|_{1,\Omega}$

dada por

$$\|\vec{w}\|_{1,\Omega} = (\|\vec{w}\|_{0,\Omega}^2 + |\vec{w}|_{1,\Omega}^2)^{1/2}.$$

Multiplicando a primeira e a segunda equação de (4.45) por $\vec{w} \in V$ e $q \in H^1(\Omega)$ respectivamente e integrando sobre Ω , temos:

$$-\int_{\Omega} (\Delta \vec{z} \cdot \vec{w} + \nabla p \cdot \vec{w}) dx dy = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{z} dx dy = 0 \quad (4.46)$$

Usando a fórmula de Green em (4.46), obtemos:

$$\int_{\Omega} \nabla \vec{z} \cdot \nabla \vec{w} dx dy - \int_{\Gamma} \frac{\partial \vec{z}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \vec{w} d\sigma + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{w} dx dy = 0.$$

Como $\vec{w} = 0$ em Γ_1 , podemos considerar a seguinte formulação variacional

$$\int_{\Omega} \nabla \vec{z} \cdot \nabla \vec{w} dx dy + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{w} dx dy = 0.$$

Considere agora o espaço de Hilbert $W = V \times H^1(\Omega)$, com isso defina a forma bilinear $a(\cdot, \cdot) : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$a((\vec{z}, p), (\vec{w}, q)) = \int_{\Omega} (\nabla \vec{z} \cdot \nabla \vec{w} + \nabla p \cdot \vec{w} + q \operatorname{div} \vec{z}) dx dy.$$

Sabemos, pelo Teorema 4.3, que a pressão não é única, então adicionamos um termo estabilizador $-\varepsilon p q$, onde ε é uma constante positiva, para fixar a parte constante da pressão. Assim, nossa forma bilinear se torna:

$$a_{\varepsilon}((\vec{z}, p), (\vec{w}, q)) = \int_{\Omega} (\nabla \vec{z} \cdot \nabla \vec{w} + \nabla p \cdot \vec{w} + q \operatorname{div} \vec{z} - \varepsilon p q) dx dy.$$

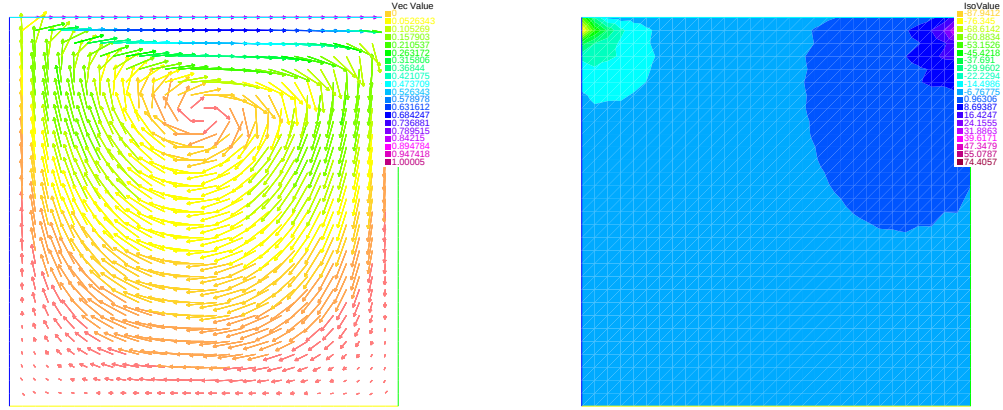
Então, queremos encontrar $(\vec{z}, p) \in W$ tal que para todo $(\vec{w}, q) \in W$:

$$a_{\varepsilon}((\vec{z}, p), (\vec{w}, q)) = 0.$$

Notemos que a observação 4.4 pode também dar uma explicação para a formulação variacional acima e sua relação com a parte não homogênea da fronteira.

Consideramos nesse caso os seguintes dados: $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ e $\varepsilon = 10^{-10}$. Usamos elementos triangulares e funções afins e obtivemos a aproximação de $(\vec{z}, p)$ contidos na Figura 27.

Figura 27 – Aproximação obtida da solução do problema da tampa deslizante



(a) Aproximação do campo velocidade $\vec{z}$

(b) Aproximação da pressão p

Fonte: A autora (2020)

Observação 4.6 Agora vamos apresentar uma justificativa matemática da presença de um vórtice no interior do recipiente quando deslizamos a tampa com velocidade $\vec{z} = (1, 0)$. De fato, suponha que a vorticidade do campo velocidade $\vec{z}$, solução do problema (4.45), é nula, ou seja, $\nabla \times \vec{z} = 0$. Como o campo velocidade $\vec{z}$ satisfaz a condição $\text{div } \vec{z} = 0$, podemos garantir a existência de uma função escalar $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\vec{z} = \nabla \times \psi.$$

Com isso e o fato de $\vec{z}$ ser um campo vetorial tangente à fronteira, temos que ψ é solução do seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta \psi = 0 & \text{em } \Omega \\ \psi = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (4.47)$$

Logo, $\psi \equiv 0$ pela unicidade de solução do problema (4.47). Portanto, temos que

$$\vec{z} = \nabla \times \psi = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Mas isso não pode acontecer, já que $u \neq 0$ em Γ_2 . Então, temos que a vorticidade do campo velocidade $\vec{z}$ é não nula, o que justifica a existência do vórtice mostrado na simulação.

5 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EDPs PARABÓLICAS

Passamos agora ao estudo de problemas de evolução, isto é, problemas onde há mudanças no fenômeno ao longo do tempo. O objetivo desse capítulo é fornecer uma formulação matemática precisa de problemas parabólicos e introduzir as noções essenciais para a sua aproximação.

5.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS PARABÓLICAS DE SEGUNDA ORDEM

5.1.1 Formulação variacional de problemas parabólicos

Seja Ω um aberto, limitado e não-vazio de $\mathbb{R}^N$, de fronteira Γ suficientemente regular, tomamos:

$$\begin{cases} V = \text{subespaço fechado de } H^1(\Omega) \text{ com } H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega) \\ H = L^2(\Omega) \end{cases} \quad (5.1)$$

Em seguida, consideremos as funções $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $1 \leq i, j \leq N$ e $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, tais que

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq N, \\ \exists \alpha > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \text{em q.t.p. } x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.2)$$

e definimos

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \right\} dx. \quad (5.3)$$

Como V é um subconjunto denso de $L^2(\Omega)$ com injeção contínua e as hipóteses (3.21), (3.22) e (3.23) são satisfeitas. Então podemos aplicar o Teorema de Lions: dadas duas funções $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(Q_T)$, existe única função $u \in L^2(0, T; V) \cap C^0(0, T; L^2(\Omega))$ solução da equação

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v), \quad \forall v \in V, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Vamos interpretar o problema resolvido. Dadas duas funções $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, introduzimos a função

$$\begin{aligned} v \otimes \psi : Q_T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto v(x)\psi(t) \end{aligned}$$

Um resultado clássico da teoria das distribuições é que o produto direto dos espaços $\mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathcal{D}((0, T))$, isto é, o espaço das combinações lineares finitas de funções da forma $v \otimes \psi$ com $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\psi \in \mathcal{D}((0, T))$ é denso em $\mathcal{D}(Q_T)$.

Sejam $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\psi \in \mathcal{D}((0, T))$, então deduzimos de (5.4) que

$$-\int_0^T (u(t), v) \frac{d\psi}{dt}(t) dt + \int_0^T a(u(t), v) \psi(t) dt = \int_0^T (f(t), v) \psi(t) dt$$

isto é,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} + Au, v \otimes \psi \right\rangle = \langle f, v \otimes \psi \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ designa a dualidade entre $\mathcal{D}'(Q_T)$ e $\mathcal{D}(Q_T)$ e onde A é o operador diferencial elíptico de segunda ordem dado por

$$Au = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u.$$

Pela densidade mencionada acima, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f \text{ no sentido das distribuições sobre } Q_T. \quad (5.5)$$

Então, se $v \in V$, deduzimos de (5.4) e (5.5)

$$\frac{d}{dt} (u(t), v) + a(u(t), v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au \right) v dx, \quad (5.6)$$

isto é, (o seguinte resultado justifica-se quando sabemos *a priori* que $\partial u / \partial t$ ou Au são funções de $L^2(Q_T)$, pois (5.5) fornece apenas informações sobre a soma $\partial u / \partial t + Au$)

$$\forall v \in V, a(u(t), v) = \int_{\Omega} Au v dx$$

e, aplicando a fórmula de Green (4.7), encontramos

$$\forall v \in V, \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v d\sigma = 0,$$

onde

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A}(t) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i.$$

Em resumo, a solução de (5.4) é caracterizada por

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(0, T; V) \cap C^0(0, T; L^2(\Omega)), \\ \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f \text{ em } Q_T, \\ \forall v \in V, \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_A}(t) v d\sigma = 0 \text{ in } (0, T), \\ u(\cdot, 0) = u_0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right.$$

Consideremos a seguir dois exemplos associados à duas escolhas clássicas de espaços V .

5.1.1.0 Problema de Cauchy-Dirichlet

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e não-vazio. Dado $T > 0$ sejam $Q_T = \Omega \times (0, T)$ e $\Sigma_T = \Gamma \times (0, T)$. Encontrar $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(0, T; L^2(\Omega))$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{em } Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma_T, \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (5.7)$$

onde $f \in L^2(Q_T)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$ são funções dadas.

Tomamos $V = H_0^1(\Omega)$. Note que,

$$-\Delta u = Au$$

onde $a_0 = 0$ e $a_{ij} = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq N$. Então, deduzimos de (5.5) que para todo $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ e todo $\psi \in \mathcal{D}((0, T))$, temos

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u, v \otimes \psi \right\rangle = \langle f, v \otimes \psi \rangle,$$

isto é,

$$\int_0^T (u(t), v) \frac{d\psi}{dt}(t) dt + \int_0^T a(u(t), v) \psi(t) dt = \int_0^T (f(t), v) \psi(t) dt.$$

Como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, a igualdade anterior é válida para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ e todo $\psi \in \mathcal{D}((0, T))$, o que significa que a função u satisfaz a equação (5.4) no sentido das distribuições sobre $(0, T)$. Então, pelo Teorema de Lions temos que existe uma única $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ solução do Problema (5.7). Portanto, resolvemos o problema de Cauchy-Dirichlet para o operador parabólico $\partial/\partial t - \Delta$.

5.1.1.0 Problema de Cauchy-Neumann

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e não-vazio. Dado $T > 0$ sejam $Q_T = \Omega \times (0, T)$ e $\Sigma_T = \Gamma \times (0, T)$. Encontrar $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{em } Q_T, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} = 0 & \text{sobre } \Sigma_T, \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (5.8)$$

onde $f \in L^2(Q_T)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$ são funções dadas.

Desta vez escolhemos $V = H^1(\Omega)$, novamente temos

$$-\Delta u = Au,$$

onde $a_0 = 0$ e $a_{ij} = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq N$. Então,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_A} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}},$$

onde $\partial/\partial \mathbf{v}$ é a derivada normal. Logo, de (5.6), temos que

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} = 0 \text{ sobre } \Sigma_T.$$

Pelo Teorema de Lions existe uma única função $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ que é solução do problema (5.8). Assim, resolvemos o problema de Cauchy-Neumann para o operador parabólico $\partial/\partial t - \Delta$.

5.1.2 Aproximação de um problema parabólico

Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^2$ com fronteira Γ suficientemente regular e dado $T > 0$. Vamos estudar para o mesmo problema (5.4) diferentes tipos de condição de fronteira.

Para realizar uma discretização do tempo em cada caso, definimos $\Delta t = \frac{T}{N}$, onde N é um inteiro maior ou igual a 1 e tomamos

$$t_n = n\Delta t, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Utilizaremos dois métodos para realizar tal discretização, o primeiro é o método de Euler Retrogrado e o segundo é o método de Gear Implícito (*Implicit Gear*), seus respectivos algoritmos são dados por:

ALG 1 (Euler Retrogrado)

(i) Escolhemos $u_h^0 \approx u_0, u_h^0 \in V_h$;

(ii) Para $n \geq 0$, $u_h^{n+1} \approx u(t_{n+1})$ é solução em V_h do problema

$$\frac{1}{\Delta t} (u_h^{n+1} - u_h^n, v_h) + a(u_h^{n+1}, v_h) = (f(t^{n+1}), v_h), \forall v_h \in V_h.$$

ALG 2 (Gear Implícito) ¹

(i) Escolhemos $u_h^0 \approx u_0, u_h^0 \in V_h$;

(ii) Obtemos $u_h^1 \approx u(t_1)$ através do método de Euler Retrogrado;

(iii) Para $n \geq 1$, $u_h^{n+1} \approx u(t_{n+1})$ é solução em V_h do problema

$$\frac{1}{2\Delta t} (3u_h^{n+1} - 4u_h^n + u_h^{n-1}, v_h) + a(u_h^{n+1}, v_h) = (f(t^{n+1}), v_h), \forall v_h \in V_h,$$

onde, V_h é um subespaço de V de dimensão finita.

5.1.3 Experimentos numéricos

Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f & \text{em } Q_T, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (5.9)$$

Seja V um espaço de Hilbert próprio dependendo da condição de fronteira. Então a formulação variacional do problema (5.9) é dada por: encontrar $u \in L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ tal que para todo $v \in V$,

$$\frac{d}{dt} (u, v) + a(u(t), v) = (f(t), v) \quad (5.10)$$

no sentido das distribuições sobre $(0, T)$ e a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é dada por (5.3).

¹Também conhecido como formula de diferenciação retrógrada (FDR). Este método foi introduzido por Charles Curtiss e Joseph Hirschfelder em 1952. C. William Gear popularizou a FDR como um método implícito para resolver sistemas rígidos de EDO's. O algoritmo apresentado é uma FDR de segunda ordem já o Euler Retrogrado é uma FDR de primeira ordem.

Com isso, consideramos o seguinte problema aproximado: dado $u_{0,h} \in V_h$, encontrar $u_h \in V_h$ tal que para todo $v_h \in V_h$ temos

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u_h, v_h) + a(u_h(t), v_h) = (f(t), v_h) \\ u_h(0) = u_{0,h} \end{cases} \quad (5.11)$$

onde V_h é um subespaço de dimensão finita de V .

a) Condição de fronteira do tipo Dirichlet.

Neste caso, nosso problema é dado por (5.9) juntamente com a condição de fronteira:

$$u = 0 \text{ em } \Sigma_T.$$

Utilizaremos primeiro o método de Euler regressivo para realizar uma discretização do tempo no sistema diferencial (5.11).

Procuramos então $u_h^n \in V_h$ uma aproximação de $u_h(t_n)$, tal que para todo $v_h \in V_h$ seja solução de

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u_h^{n+1} - u_h^n, v_h) + a(u_h^{n+1}, v_h) = (f(t_{n+1}), v_h), \quad 0 \leq n \leq N \\ u_h^0 = u_{0,h} \text{ dado em } V_h. \end{cases}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u_h^{n+1} v_h dx + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0 u_h^{n+1} v_h dx = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\Delta t} u_h^n + f \right) v_h dx. \quad (5.12)$$

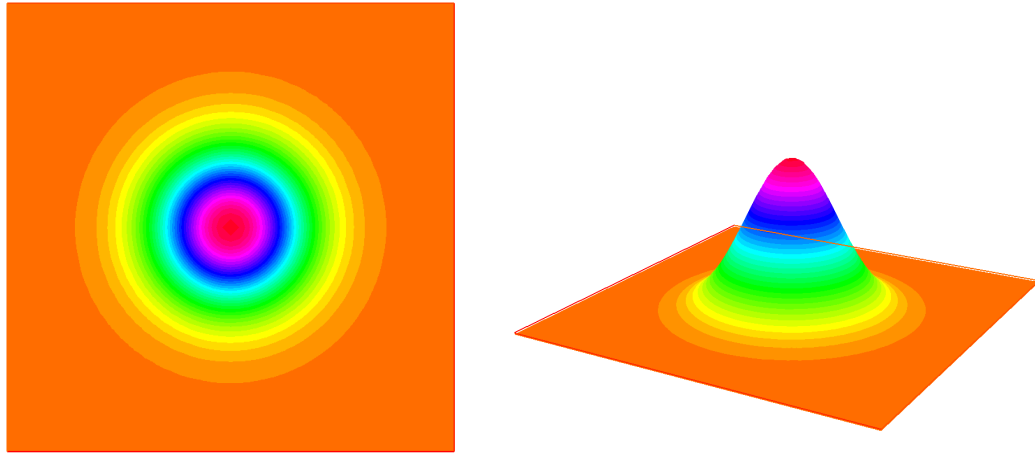
Consideremos os dados: $T = 5$, $N = 50$, $\Omega = (-3, 3) \times (-3, 3)$, $a_0(x_1, x_2) \equiv 0$, $a_{11}(x_1, x_2) = 1 + x_1^2$, $a_{22}(x_1, x_2) = 1 + x_2^2$, $a_{12}(x_1, x_2) = a_{21}(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $u_0(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2 + x_2^2)}$ e

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2, & \text{se } (x_1, x_2) \in (0.5, 1.5) \times (0.2, 0.7) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A representação gráfica das funções u_0 e f estão inseridas nas Figura 28 e Figura 29, respectivamente.

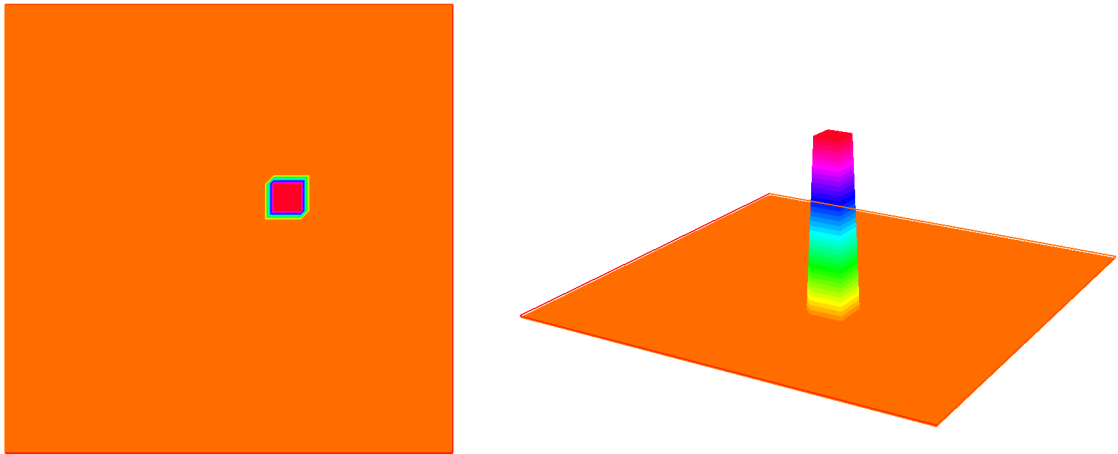
Iniciando o **ALG 1** com $u_h^0 = u_0$, e para $n \geq 0$ calculamos u_h^{n+1} através da igualdade (5.12). Usando elementos triangulares e funções afins (polinômios de grau menor ou igual a 1), obtemos primeiramente uma aproximação de $u(t_1)$ (ou seja u_h^1) e por fim, uma aproximação

Figura 28 – Visualização do dado inicial



Fonte: A autora (2020)

Figura 29 – Visualização do RHS



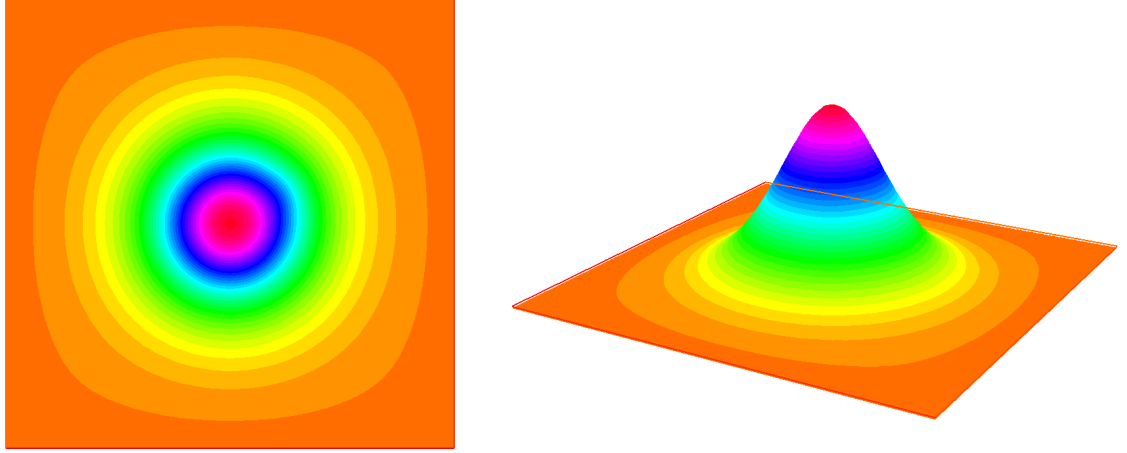
Fonte: A autora (2020)

de $u(T)$ (ou seja, u_h^{50}) cujas representações gráficas estão inseridas nas Figura 30 e Figura 31, respectivamente.

Agora Utilizaremos o método de Gear Implícito para a discretização do tempo do problema (5.11).

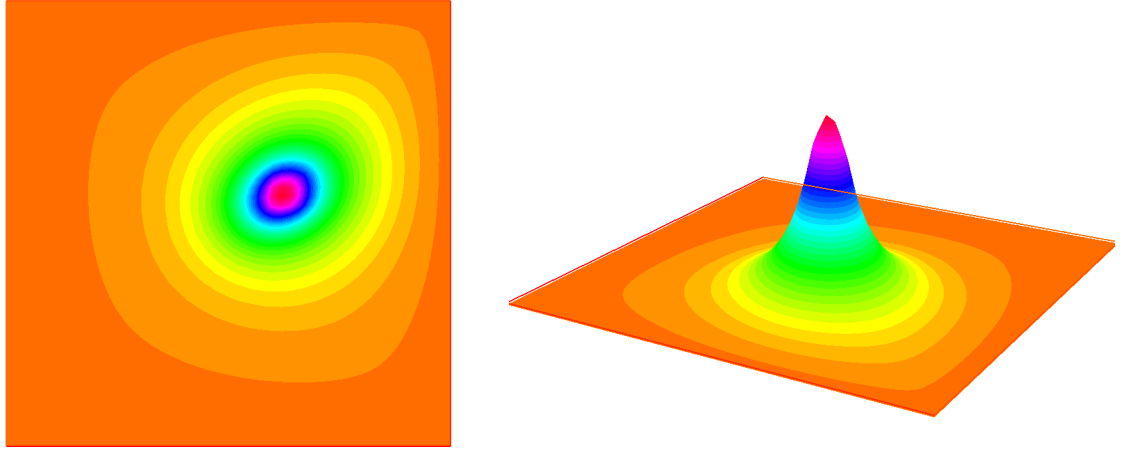
Conhecendo $u_h^0 \in V_h$, temos que u_h^1 é solução em V_h de (5.12) com $n = 0$. Procuramos então

Figura 30 – Método de Euler. Primeira iteração. Condição de Dirichlet



Fonte: A autora (2020)

Figura 31 – Método de Euler. Última iteração. Condição de Dirichlet



Fonte: A autora (2020)

$u_h^{n+1} \in V_h$, $m \geq 1$, uma aproximação de $u_h(t_{n+1})$, tal que para todo $v_h \in V_h$ seja solução de

$$\frac{1}{2\Delta t} \left(3u_h^{n+1} - 4u_h^n + u_h^{n-1}, v_h \right) + a(u_h^{n+1}, v_h) = \left(f(t^{n+1}), v_h \right), \quad \forall v_h \in V_h$$

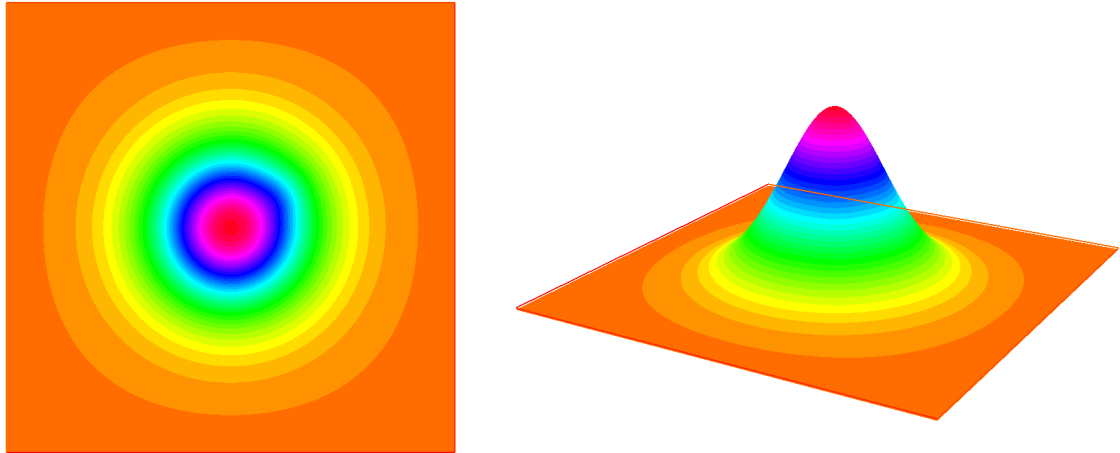
Ou seja,

$$\frac{1}{2\Delta t} \int_{\Omega} (3u_h^{n+1} - 4u_h^n + u_h^{n-1}) v_h dx + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0 u_h^{n+1} v_h dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Consideramos os mesmos dados anteriores e iniciamos o **ALG 2** escolhendo $u_h^0 = u_0$. Usando

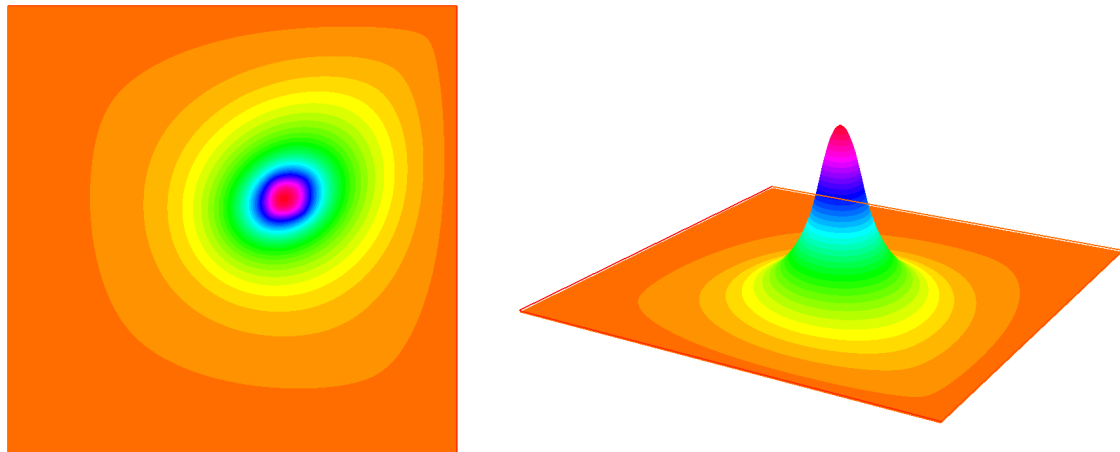
elementos triangulares e funções afins (polinômios de grau menor ou igual a 1), obtemos primeiramente uma aproximação de $u(t_1)$ (ou seja u_h^1) e por fim, uma aproximação de $u(T)$ (ou seja, u_h^{50}) cujas representações gráficas estão inseridas nas Figura 32 e Figura 33 respectivamente.

Figura 32 – Método de Gear. Primeira iteração. Condição de Dirichlet



Fonte: A autora (2020)

Figura 33 – Método de Gear. Última iteração. Condição de Dirichlet



Fonte: A autora (2020)

Observação 5.1 É bem conhecido que o método de Gear implícito é mais eficiente do que o método de Euler Retrógrado, devido a isso nos próximos exemplos nos reduziremos somente ao estudo do método de Gear.

b) Condição de fronteira do tipo Fourier.

Neste caso, o nosso problema é dado por (5.9) juntamente com a condição de fronteira:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \alpha u = 0 \text{ em } \Sigma_T.$$

onde α é uma constante não negativa.

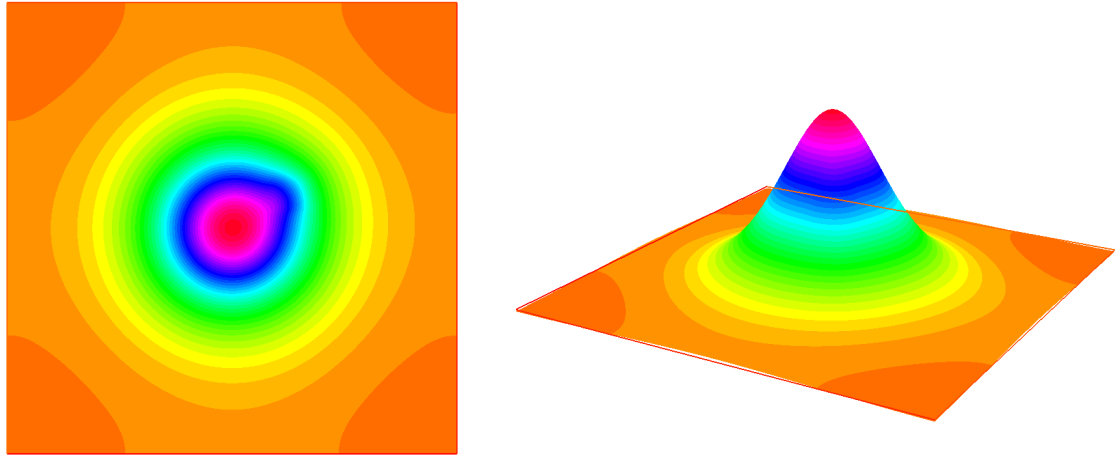
Seja $V = \{v \in H^1(\Omega); \frac{\partial v}{\partial \nu_A} = -\alpha v \text{ em } \Sigma_T\}$. A formulação variacional do nosso problema é dada por: encontrar $u \in L^2(0, T; V) \cap C^0(0, T; L^2(\Omega))$ tal que para todo $v \in V$, é solução de (5.10), onde desta vez a forma bilinear $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_{\Gamma} \alpha uv d\sigma.$$

Com isso, consideramos o problema aproximado (5.11).

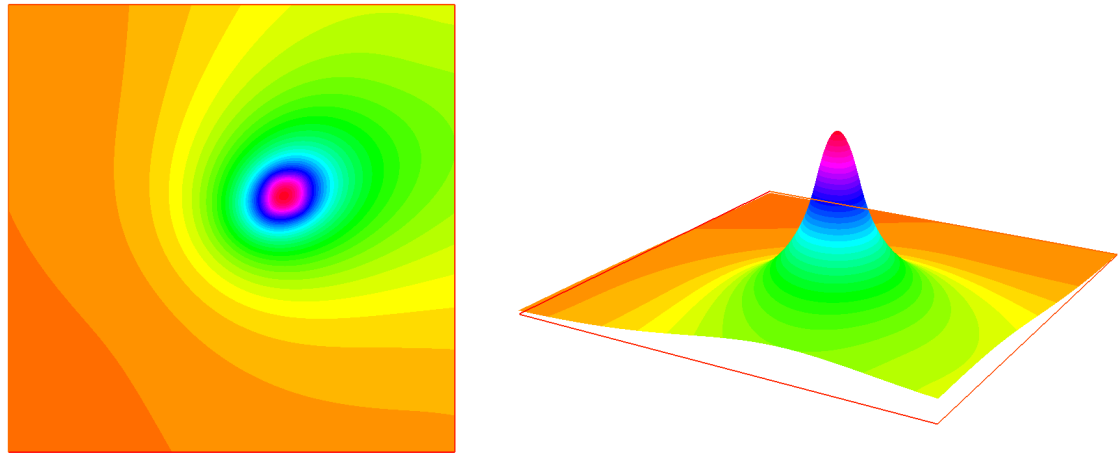
Usando os mesmos dados do caso a) (condição de fronteira de tipo Dirichlet), com $\alpha = 5$ e iniciando o **ALG 2** com a mesma escolha de u_h^0 , obtemos primeiramente uma aproximação de $u(t_1)$ (ou seja u_h^1) e por fim, uma aproximação de $u(T)$ (ou seja, u_h^{50}) cujas representações gráficas estão inseridas nas Figura 34 e Figura 35, respectivamente.

Figura 34 – Método de Gear. Primeira iteração. Condição de Fourier



Fonte: A autora (2020)

Figura 35 – Método de Gear. Última iteração. Condição de Fourier



Fonte: A autora (2020)

c) Condição de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann.

Neste último caso o nosso problema é dado por (5.9) juntamente com as condições de fronteira:

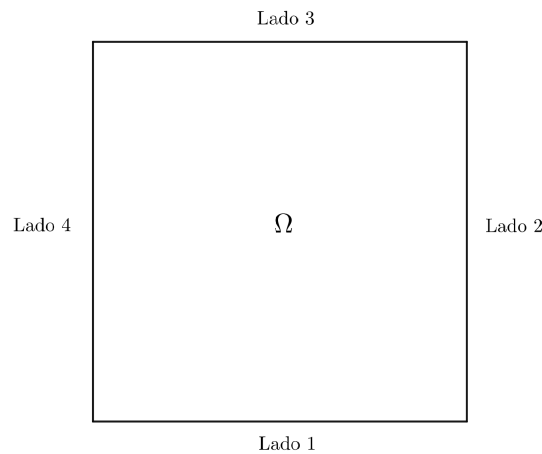
$$u = 0 \text{ em } \Sigma_T^1, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \text{ em } \Sigma_T^2,$$

onde $\Sigma_T^i = (0, T) \times \Gamma_i$, $i = 1, 2$ e Γ_1, Γ_2 são partes não vazias de Γ tais que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Seja $V = \left\{ v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \Sigma_T^1, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}_A} = 0 \text{ em } \Sigma_T^2 \right\}$. A formulação variacional do nosso problema é dada por: encontrar $u \in L^2(0, T; V) \cap C^0(0, T; L^2(\Omega))$ tal que para todo $v \in V$, é solução de (5.4).

Consideramos o problema aproximado (5.11).

Figura 36 – Representação gráfica da fronteira. Condição mista



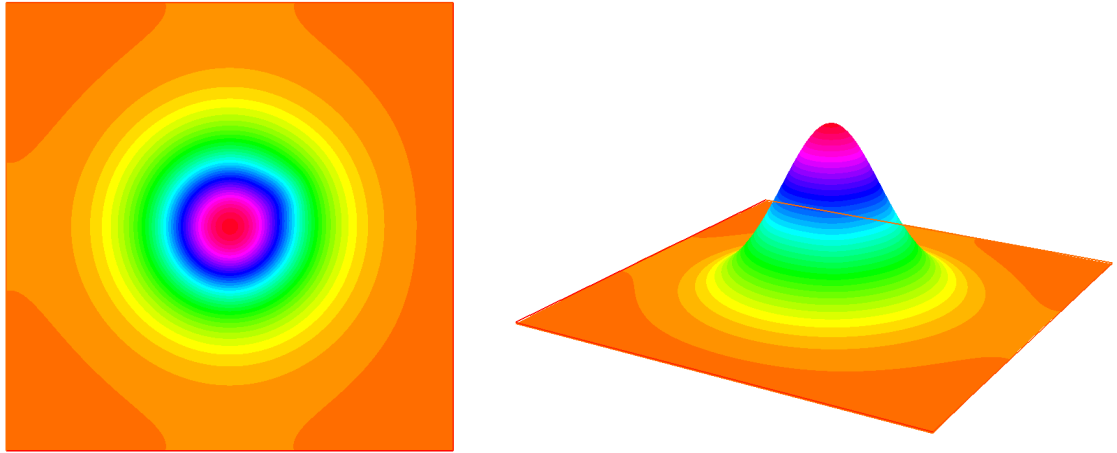
Fonte: A autora (2020)

Por fim, considerando os mesmos dados do caso a) (condição de fronteira de tipo Dirichlet) com Γ_1 sendo o lado 2 da fronteira Γ e Γ_2 como sendo os lados 1, 3 e 4 (como mostra a Figura 36) e iniciando o **ALG 2** com a mesma escolha de u_h^0 , obtemos primeiramente uma aproximação de $u(t_1)$ (ou seja u_h^1) e por fim, uma aproximação de $u(T)$ (ou seja, u_h^{50}) cujas representações gráficas estão inseridas nas Figura 37 e Figura 38, respectivamente.

5.2 MODELOS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS

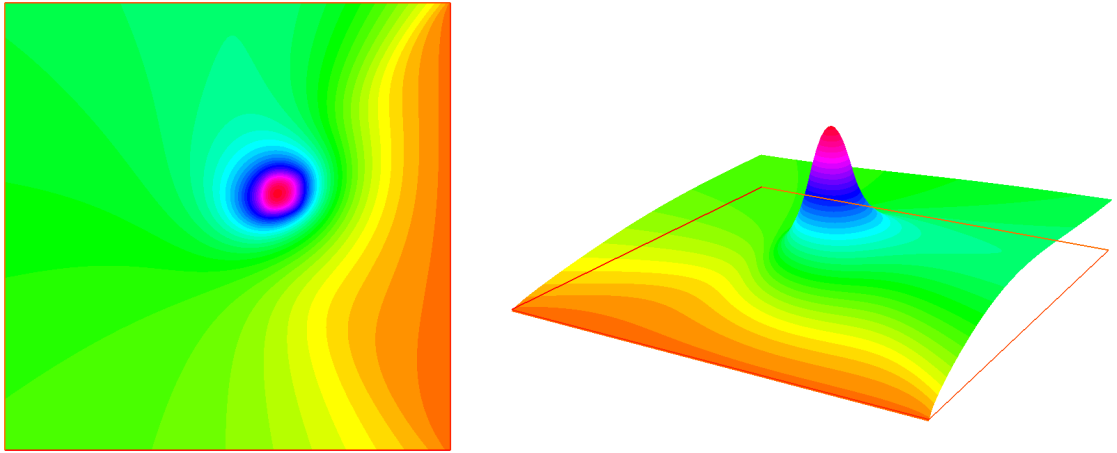
Nesta seção apresentaremos um breve estudo das Equações de Stokes e de Navier-Stokes não estacionárias e realizaremos um experimento numérico para equações de Navier-Stokes (não-linear) por possuir aplicações mais interessantes.

Figura 37 – Método de Gear. Primeira iteração. Condição mista



Fonte: A autora (2020)

Figura 38 – Método de Gear. Última iteração. Condição mista



Fonte: A autora (2020)

5.2.1 Formulação variacional para as equações de Stokes

Seja Ω um aberto limitado e conexo de $\mathbb{R}^N$ de fronteira Γ suficientemente regular; consideramos o seguinte problema: dadas as funções $\vec{u}_0 = (u_{0,1}, \dots, u_{0,N})$ e $\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)$ definidas em Ω e Q_T respectivamente, buscamos as funções $\vec{u} = (u_1, \dots, u_N)$ e p definidas em Q_T e soluções das equações

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \mu \Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i, & \text{em } Q_T, 1 \leq i \leq N, \\ \operatorname{div} \vec{u} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, & \text{em } Q_T, \\ u_i = 0, & \text{sobre } \Sigma_T, 1 \leq i \leq N, \\ u_i(\cdot, 0) = u_{0,i}, & \text{em } \Omega, 1 \leq i \leq N. \end{array} \right. \quad (5.13)$$

O sistema de equações (5.13) descreve a evolução ao longo do tempo do movimento de um fluido incompressível confinado em Ω e submetido a uma densidade volumétrica $\vec{f}$ de forças externas, sendo a velocidade inicial igual a $\vec{u}_0$. Na primeira equação de (5.13), $\vec{u}$ é a velocidade do fluido, p sua pressão, ρ sua densidade e μ sua viscosidade.

Para dar uma formulação fraca do problema de Stokes, introduzimos os espaços V e H dados por

$$V = \{\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^N; \operatorname{div} \vec{v} = 0\}$$

$$H = \{\vec{u} \in (L^2(\Omega))^N; \nabla \cdot \vec{u} = 0 \text{ em } \Omega, \vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma\}.$$

Tomamos para todo u e v em V :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u_i v_i dx,$$

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \mu \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx.$$

Se V é um subconjunto denso de H com injeção contínua e as hipóteses (3.21), (3.22), (3.23), são satisfeitas, podemos enunciar o teorema:

Teorema 5.1 Dadas as funções $\vec{u}_0 \in H$ e $\vec{f} \in (L^2(Q_T))^N$, existe uma única função $\vec{u} \in L^2(0, T; V) \cap C^0(0, T; H)$ tal que para todo $\vec{v} \in V$,

$$\rho \frac{d}{dt} (\vec{u}(t), \vec{v}) + a(\vec{u}(t), \vec{v}) = (\vec{f}(t), \vec{v}), \quad (5.14)$$

$$\vec{u}(0) = \vec{u}_0. \quad (5.15)$$

Demonstração: Para a função $\vec{f} \in L^2(Q_T)^N$, associamos sua projeção $\vec{g}$ sobre o espaço $L^2(0, T; H)$ definida por

$$\forall \vec{\phi} \in L^2(0, T; H), \int_0^T (\vec{f}(t) - \vec{g}(t), \vec{\phi}(t)) dt = 0.$$

Como para toda $\vec{v} \in V$ e toda $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$

$$\int_0^T (\vec{f}(t) - \vec{g}(t), \vec{v}) \psi(t) dt = 0.$$

É equivalente procurar $\vec{u} \in L^2(0, T; V) \cap C^0(0, t; H)$ solução de (5.14) e (5.15) ou solução de

$$\forall \vec{v} \in V, \rho \frac{d}{dt} (\vec{u}(t), \vec{v}) + a(\vec{u}(t), \vec{v}) = (\vec{g}(t), \vec{v}),$$

$$\vec{u}(0) = u_0.$$

Onde esse último problema admite uma única solução em virtude do Teorema de Lions. ■

Agora resta interpretar o problema assim resolvido. A dificuldade já encontrada na Seção 4.2.1 deve-se ao fato de que $(\mathcal{D}(\Omega))^N$ não está contido em V . Vamos considerar a distribuição

$$\vec{S} = \vec{f} - \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \mu \Delta \vec{u} \in (\mathcal{D}'(Q_T))^N.$$

Deduzimos de (5.14) que para todo $\vec{v} \in (\mathcal{D}(\Omega))^N$ com $\text{div } \vec{v} = 0$ e toda $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$, temos

$$\langle \vec{S}, \vec{v} \otimes \psi \rangle = 0.$$

Pelo Teorema de De Rham, se $\vec{S} \in (\mathcal{D}'(Q_T))^N$ satisfaz a condição anterior, existe uma distribuição $p \in \mathcal{D}'(Q_T)$ única exceto por uma constante aditiva, de modo que

$$\vec{S} = \nabla p.$$

Daqui resulta que a solução $\vec{u}$ de (5.14) e (5.15) é caracterizada por:

$$\begin{cases} \vec{u} \in L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T] : H), \\ \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \mu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f} \text{ em } (\mathcal{D}'(Q_T))^N, \\ \vec{u}(\cdot, 0) = \vec{u}_0, \end{cases}$$

de modo que o par $(\vec{u}, p)$ é solução do problema de Stokes (5.13).

5.2.2 Experimentos numéricos

Seja Ω um aberto, limitado de $\mathbb{R}^2$ com fronteira Γ suficientemente regular, dado um inteiro $T > 0$, definimos:

$$\Sigma_T^1 = \Gamma_1 \times (0, T), \quad \Sigma_T^2 = \Gamma_2 \times (0, T)$$

onde Γ_1 e Γ_2 são partes de Γ , tais que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Dada a função $\vec{u}_0 \in (L^2(\Omega))^2$, encontrar $\vec{z} = (u, v)$ e p definidas em Q_T , soluções do problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \vec{z}}{\partial t} + (\vec{z} \cdot \Delta) \vec{z} - \mu \Delta \vec{z} + \nabla p = 0 & \text{em } Q_T, \\ \nabla \cdot \vec{z} = 0 & \text{em } Q_T, \\ \vec{z} = \vec{c} & \text{sobre } \Sigma_T^1, \\ \vec{z} = 0 & \text{sobre } \Sigma_T^2, \\ \vec{z}(\cdot, 0) = \vec{z}_0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (5.16)$$

onde μ é uma constante positiva e $\vec{c} = (c_1, c_2)$ é um vetor constante tal que, suas coordenadas c_1 e c_2 são constantes positivas.

Para resolver o problema (5.16) utilizaremos o método de *Peaceman-Rachford*², vamos descrevê-lo brevemente (para mais detalhes consulte p. 52 de [5]) abaixo:

1º) Dado um inteiro $N > 1$, tomamos $\Delta t = \frac{T}{N}$. Então realizamos uma decomposição do intervalo $[0, T]$ dada por:

$$t_n = n\Delta t, \quad 0 \leq n \leq N.$$

2º) Tomando inicialmente $\vec{z}^0 = \vec{u}_0$ e $p^0 = 0$, queremos encontrar $\vec{z}^{n+1/2}$, $n \geq 1$, solução de um problema de *Burgers* em $[t_n, t_{n+1/2}]$ dado por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{\Delta t} (\vec{z}^{n+1/2} - \vec{z}^n \circ X^n) - \mu \Delta \vec{z}^{n+1/2} + \nabla p^n = 0 & \text{em } Q_T, \\ \vec{z}^{n+1/2} = \vec{c} & \text{sobre } \Sigma_T^1, \\ \vec{z}^{n+1/2} = 0 & \text{sobre } \Sigma_T^2, \end{array} \right. \quad (5.17)$$

onde $X^n(x)$ é a posição de uma partícula que está em x e em t_n .

3º) Depois de encontrar $\vec{z}^{n+1/2}$ resolvemos um problema de Stokes em $[t_{n+1/2}, t_{n+1}]$ dado por:

²Em 1955 Peaceman e Rachford propuseram um método numérico que consiste em duas equações de diferenças finitas, a primeira implícita na direção x e a segunda na direção y , que são utilizadas alternadamente. É bem conhecido que o esquema Peaceman-Rachford possui excelentes propriedades de estabilidade e é de segunda ordem tanto no tempo quanto no espaço.

encontrar $\bar{z}^{n+1} \in V$, $n \geq 1$ solução de

$$\begin{cases} \frac{2}{\Delta t}(\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^{n+1/2}) - \mu \Delta \bar{z}^{n+1} + \nabla q^{n+1} = 0 & \text{em } Q_T, \\ \nabla \cdot \bar{z}^{n+1} = 0 & \text{em } Q_T, \\ \bar{z}^{n+1} = \bar{c} & \text{sobre } \Sigma_T^1, \\ \bar{z}^{n+1} = 0 & \text{sobre } \Sigma_T^2, \end{cases} \quad (5.18)$$

onde $q^{n+1} \in L^2(Q_T)$, $0 \leq n \leq N$

4º) A solução de (5.16) no tempo t_{n+1} é dada por $(\bar{z}^{n+1}, p^{n+1})$, onde

$$p^{n+1} = \frac{1}{2}(p^n + q^{n+1}).$$

Primeiramente vamos encontrar a formulação variacional do problema (5.17). Seja $V = \{\vec{w} \in (H^1(\Omega))^2; \vec{w} = \bar{c} \text{ em } \Sigma_T^1 \text{ e } \vec{w} = 0 \text{ em } \Sigma_T^2\}$, multiplicando a primeira equação de (5.19) por $\vec{w} \in V$ e integrando sobre Ω , obtemos:

$$\frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} (\bar{z}^{n+1/2} - \bar{z}^n \circ X^n) \vec{w} dx - \mu \int_{\Omega} \Delta \bar{z}^{n+1/2} \vec{w} dx + \int_{\Omega} \nabla p^n \vec{w} dx = 0. \quad (5.19)$$

Usando a Fórmula de Green na segunda integral de (5.19), temos que a formulação variacional do nosso problema (5.17) é dada por: encontrar $\bar{z}^{n+1/2} \in L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T]; (L^2(\Omega))^2)$ tal que para todo $\vec{w} \in V$ é solução de:

$$\int_{\Omega} (\bar{z}^{n+1/2} \vec{w} + \mu \nabla \bar{z}^{n+1/2} \nabla \vec{w} + \nabla p^n \vec{w}) = 0. \quad (5.20)$$

Agora vamos encontrar a formulação variacional do problema de Stokes (5.18). Seja $Y = \{\vec{y} \in V; \nabla \cdot \vec{y} = 0\}$, multiplicando a primeira equação de (5.18) por $\vec{y} \in Y$, a segunda equação por $\bar{p} \in L^2(Q_T)$ e integrando sobre Ω , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} (\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^{n+1/2}) \vec{y} dx - \mu \int_{\Omega} \Delta \bar{z}^{n+1} \vec{y} dx + \int_{\Omega} \nabla q^{n+1} \vec{y} dx &= 0 \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \bar{z}^{n+1} \bar{p} dx &= 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Usando a formula de Green na segunda integral de (5.21), temos que a formulação variacional do problema (5.18) é dado por: encontrar $\bar{z}^{n+1} \in L^2(0, T; Y) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega)^2)$ tal que para todo $\vec{y} \in Y$ é solução de

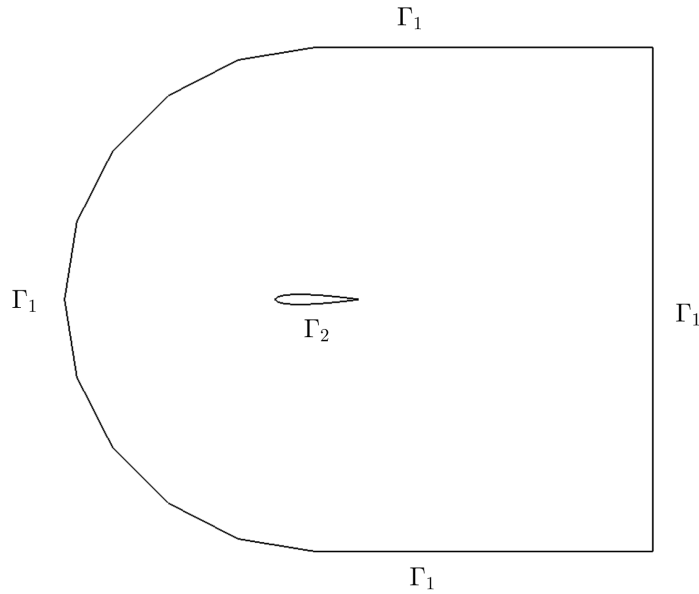
$$\begin{cases} \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} ((\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^{n+1/2}) \vec{y} + \mu \nabla \bar{z}^{n+1} \nabla \vec{y} + \nabla q^{n+1} \vec{y} + \nabla \cdot \bar{z}^{n+1} \bar{p} - \varepsilon p \bar{p}) dx = 0 & \text{em } Q_T, \\ \nabla \cdot \bar{z}^{n+1} = 0 & \text{em } Q_T, \end{cases}$$

onde ε é uma constante positiva e $-\varepsilon p \bar{p}$ é um termo estabilizador que fixa a parte constante da pressão.

A Observação 4.4 pode dar uma explicação para as formulações variacionais acima e suas relações com a parte não homogênea da fronteira.

Para o experimento numérico consideramos Ω como sendo o ar em torno da asa de um avião com o perfil NACA airfoil ³(ver Figura 39), $T = 1$, $N = 100$, $\mu = 25 \times 10^{-3}$, $\vec{c} = \left(\cos \frac{\pi}{9}, \sin \frac{\pi}{9} \right)$ e o dado inicial $\vec{z}_0 = \vec{c}$.

Figura 39 – Representação do perfil NACA airfoil



Fonte: A autora (2020)

Seja $\mathcal{T}_h$ uma triangularização regular de Ω , tal que $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$. Então consideramos os seguintes espaços de dimensão finita:

$$M_h = \{w_h \in (C^0(\bar{\Omega}_T)); w_h|_K \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

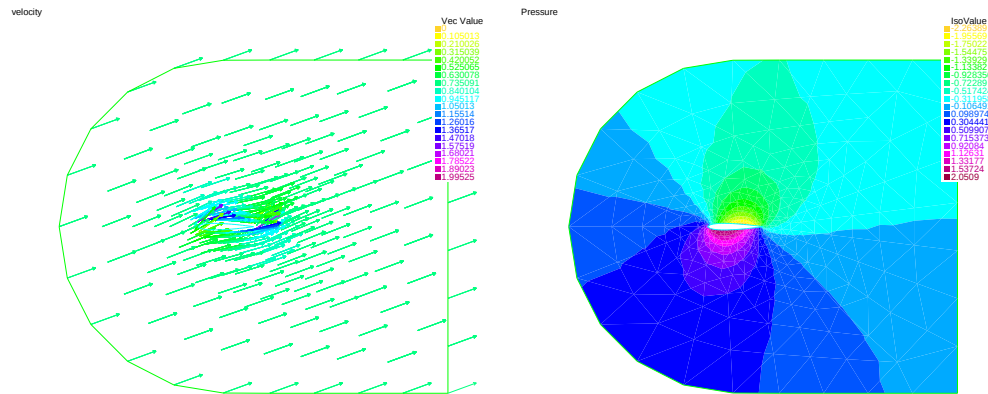
$$R_h = \{\vec{y}_h \in (C^0(\bar{\Omega}_T))^2; \vec{y}_h|_K \in P_1 \oplus \text{Span}\{\lambda_0^K, \lambda_1^K, \lambda_2^K\}, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

³Os perfis aerodinâmicos da NACA (*NACA airfoil*) são formas aerodinâmicas para asas de aeronaves, desenvolvidos pelo Comitê Consultivo Nacional de Aeronáutica (NACA).

onde λ_i^K , $i = 0, 1, 2$, são as funções coordenadas baricêntricas do elemento K (triângulo).

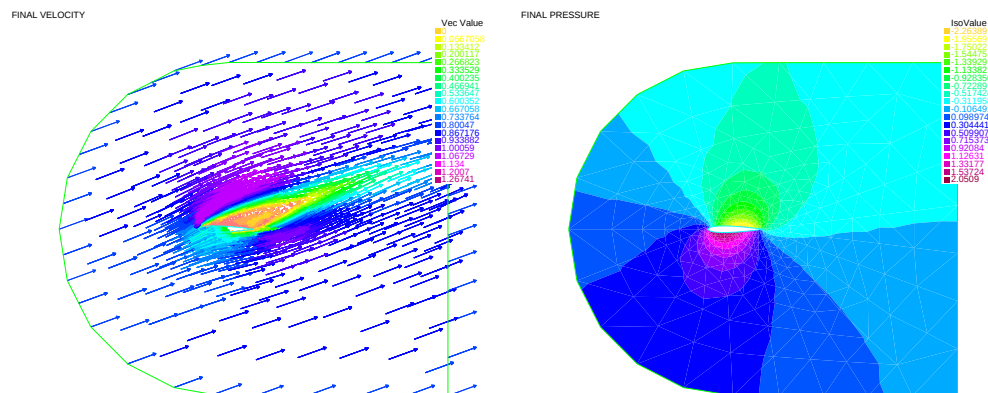
Aproximando o vetor velocidade $\vec{z}$ por funções em R_h e a pressão p por funções em M_h , obtemos primeiramente $\vec{z}_h^1 \approx \vec{z}^1$ e $p_h^1 \approx p^1$ cujas representações gráficas estão inseridas na Figura 40. Depois de realizarmos as N iterações do método de Peaceman-Rachford, encontramos as aproximações $\vec{z}_h^N \approx \vec{z}^N$ e $p_h^N \approx p^N$ cujas representações gráficas estão inseridas na Figura 41.

Figura 40 – Método Peaceman-Rachford. Primeira iteração



Fonte: A autora (2020)

Figura 41 – Método Peaceman-Rachford. Última iteração



Fonte: A autora (2020)

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação tem como objetivo apresentar e analisar os diferentes tipos de métodos para resolver numericamente equações lineares e não lineares do tipo estacionárias e de evolução. Os experimentos numéricos foram realizadas utilizando o software FreeFem++ devido à sua potência, facilidade na descrição do problema por meio da formulação variacional, entrada geométrica fácil graças à descrição analítica da fronteira, uma grande variedade de elementos finitos triangulares e de “solvers”(LU, Cholesky, Gradiente Conjugado (CG),...) e uma excelente visualização dos resultados.

Para trabalhos futuros, propõe-se o uso do método de elementos finitos para outros tipos de EDPs e outros problemas desafiadores, tais como: equações hiperbólicas, problemas semilineares, problemas de controle, problemas inversos, modelos de turbulência, etc.

REFERÊNCIAS

- ALLAIRE, G. *Numerical Analysis and Optimization*. Oxford: Oxford University Press, 2007.
- BOYER, F.; FABRIE, P. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*. Nova York: Springer, 2013.
- BRENNER S.C.; SCOTT L.R. *The mathematical theory of finite element methods. 2nd edition. Texts in Applied Mathematics*. New York: Springer-Verlag, 2002.
- BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext. Berlin: Springer, 2010.
- CIARLET, P. G.; LIONS, J., L. *Numerical Methods for Fluids (PART 3)*, volume 9. Amsterdã: Elsevier Science, , 2003.
- CIARLET, P.G. *The finite element method for elliptic problems*. Classics in Applied Mathematics, 40. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) 2002.
- EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19. American Mathematical Society, 1997.
- GRISVARD, P. *Behavior of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyedral domain*. In: Numerical solution of partial - III p. 207. New York: Academic Press, 1976.
- HECHT, F. *FreeFem++*, Version 3.58-1, 3^a edição, 2014.
- LEMOINE, J.; MUNCH, A. *Resolution of implicit time schemes for the Navier-Stokes system through a least-squares method*, artigo submetido (2019).

MATOS, M. P. *Integral de Bochner e Espaços $L^p(0, T; X)$* , Notas de Aulas do Curso de Verão, UFPB, João Pessoa, 1998.

MEDEIROS, L. A.; MILLA MIRANDA, M. *Espaços de Sobolev*. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2000.

RAPPAZ, J.; PICASSO, M. *Introduction à L'Analyse Numérique*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR), 1997.

RAVIART, P.A; THOMAS, J.-M. *Introduction à L'Analyse Numérique des Équations Aux Dérivées Partielles*, Masson, Paris, 1983.

RENTERÍA, E. C. *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Santander: Universidad de Cantabria, 1992.