



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADA  
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

Renan Oliveira Regis

**Precificação de Ativos: Uma Análise dos Cinco Fatores de Fama e French em  
Modelos GAMLSS**

Recife  
2021

RENAN OLIVEIRA REGIS

**PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS: UMA ANÁLISE DOS CINCO FATORES DE FAMA E  
FRENCH EM MODELOS GAMLSS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de doutor em Economia. Área de concentração: Teoria Econômica.

Orientador: Prof. Dr. Raydonal Ospina Martínez

Coorientador: Prof. Dr. Wilton Bernardino da Silva

Recife

2021

Catálogo na Fonte  
Bibliotecária Ângela de Fátima Correia Simões, CRB4-773

R337p

Regis, Renan Oliveira

Precificação de ativos: uma análise dos cinco fatores de Fama e French em modelos GAMLSS / Renan Oliveira Regis. - 2021.

93 folhas: il. 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Raydonal Ospina Martínez e Coorientador Prof. Dr. Wilton Bernardino da Silva.

Tese (Doutorado em Economia) – Universidade Federal de Pernambuco, CCSA, 2021.

Inclui referências e apêndices.

1. Precificação. 2. Mercado financeiro. 3. Preços. I. Ospina Martínez, Raydonal (Orientador). II. Silva, Wilton Bernardino da (Coorientador). III. Título.

336 CDD (22. ed.)

UFPE (CSA 2021 – 025)

RENAN OLIVEIRA REGIS

**PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS: UMA ANÁLISE DOS CINCO FATORES DE FAMA E  
FRENCH EM MODELOS GAMLSS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Economia.

Aprovado em: 26/02/2021.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof<sup>o</sup>. Dr. Raydonal Ospina Martínez (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof<sup>o</sup>. Dr. André Magalhães (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof<sup>o</sup>. Dr. Francisco Cribari Neto (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof<sup>o</sup>. Dr. Charles Ulises De Montreuil Carmona (Examinador Externo)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof<sup>o</sup>. Dr. Vinícius Quintas Souto Maior (Examinador Externo)  
Universidade Estadual de Campinas

# Agradecimentos

A Deus, que sempre me deu forças para nunca desistir. Ao meu orientador, Professor Dr. Raydonal Ospina Martínez, por sua dedicação, competência, e especial atenção nas revisões e sugestões, fatores fundamentais para a conclusão desse trabalho. Ao Professor Dr. Wilton Bernardino da Silva, por ter me instruindo quanto a abordagem teórica em finanças. Aos integrantes da banca Dr. André Magalhães, Dr. Francisco Cribari Neto, Dr. Charles Ulises De Montreuil Carmona, e Dr. Vinícius Quintas Souto Maior, agradeço pelas críticas e contribuições.

A todos os professores do doutorado que de alguma forma contribuíram para a minha formação. Aos familiares e amigos que sempre me incentivaram e apoiaram nessa Jornada. E a minha esposa Priscila pelo seu apoio nos momentos mais difíceis.

# Resumo

A teoria de precificação de ativos é utilizada em finanças tendo o objetivo principal em explicar as taxas de retornos dos ativos de renda variável. Nesse sentido, como uma extensão do modelo clássico CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), foi proposto na literatura o modelo de precificação em cinco fatores. Os cinco fatores utilizados são resumidos no prêmio de risco do mercado financeiro, tamanho das empresas, razão de valorização, lucratividade e investimento. Nessa conformidade, e com foco no mercado acionário brasileiro, a presente tese investiga a influência dos prêmios de riscos sobre os excessos de retornos das carteiras de ações com características particulares. Considerando que o comportamento distribucional dos modelos estimados podem apresentar características que divergem da distribuição normal, propõe-se a utilização da classe de modelos Aditivos Generalizados para Posição, Escala e Forma (GAMLSS), os quais permitem a flexibilização das distribuições de probabilidade associadas aos retornos das carteiras de ações. Em uma abordagem empírica, os modelos propostos são avaliados em termos do seu poder preditivo para a média dos excessos de retornos. Em termos de contribuição, a tese propõe uma alternativa de estimação para o modelo de cinco fatores de [Fama e French \(2015\)](#) através do uso dos modelos GAMLSS, visando sua aplicabilidade para estimar com maior precisão os retornos das carteiras formadas por ações presentes nos mercados financeiros. Os resultados empíricos mostram-se favoráveis à abordagem proposta.

**Palavras-chaves:** Precificação de Ativos. Cinco Fatores. GAMLSS. Fama e French.

# Abstract

The asset price theory is common applied in finance to explain stock returns in the stock market. In this sense, as an extension of the CAPM (Capital Asset Pricing Model), the five factors model was proposed in the literature. The five factors are summarized by the risk premium, the size of companies, the Book-to-Market ratio, profitability, and investment. In this way and focusing on the Brazilian stock market, this thesis aims to analyze the impact of the risk premium on the excess of returns from several portfolios under several specifications. Considering that the distributional behavior of the estimated models shows evidence against the Gaussian pattern, we proposed the usage of the GAMLSS (Generalized Additive Models for Location, Scale, and Shape), which allow exploring several random patterns to stock returns. The predictability of the estimated models was evaluated by considering the median of the excess returns. As the main contribution of the Thesis, we highlight the application of GAMLSS models to the five factors concept in the stock market. The empirical results show that the proposed approach seems to be a valuable tool for investors in the stock market.

**Keywords:** Asset Pricing. Five Factors. GAMLSS. Fama & French.

# Lista de Figuras

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Fluxograma das Distribuições Derivadas da Assimétrica $t$ . . . . .  | 34 |
| Figura 2 – Fluxograma das Distribuições Derivadas da GT . . . . .   | 35 |
| Figura 3 – Quantidade de ações por ano na amostra. . . . .  | 42 |
| Figura 4 – Gráficos de densidade para retornos das carteiras formadas por combinações entre tamanho e razão de valorização, tamanho e lucratividade e tamanho e investimento. . . . . | 45 |
| Figura 5 – Gráfico Q-Q plot com envelope simulado dos excesso de retornos para Carteiras de combinação tamanho-razão de valorização. . . . .  | 47 |
| Figura 6 – Gráfico Q-Q plot com envelope simulado dos excesso de retornos para Carteiras de combinação tamanho-lucratividade. . . . .   | 47 |
| Figura 7 – Gráfico Q-Q plot com envelope simulado dos excesso de retornos para Carteiras de combinação tamanho-investimento. . . . .  | 48 |
| Figura 8 – Gráfico dos valores observados versus os valores estimados para as carteiras de combinação tamanho-razão de valorização. . . . .   | 57 |
| Figura 9 – Gráfico dos valores observados versus os valores estimados para as carteiras de combinação tamanho-lucratividade. . . . .  | 58 |
| Figura 10 – Gráfico dos valores observados versus os valores estimados para as carteiras de combinação tamanho-investimento. . . . .  | 58 |
| Figura 11 – Gráfico <i>worm-plot</i> para as modelos das carteiras de combinações tamanho e razão de valorização, SL, SN, SH, BL, BN e BH respectivamente. . . . .                    | 59 |
| Figura 12 – Gráfico <i>worm-plot</i> para as modelos das carteiras de combinações tamanho elucratividade, SW, SN, SR, BW, BN e BR respectivamente. . . . .                            | 60 |
| Figura 13 – Gráfico <i>worm-plot</i> para as modelos das carteiras de combinações tamanho einvestimento, SC, SN, SA, BC, BN e BA respectivamente. . . . .                             | 60 |
| Figura 14 – Gráfico <i>worm-plot</i> para as modelos GAMLSS gaussiano das carteiras de combinações tamanho e razão de valorização, SL, SN, SH, BL, BN e BH respectivamente. . . . .   | 65 |
| Figura 15 – Gráfico <i>worm-plot</i> para as modelos GAMLSS gaussiano das carteiras de combinações tamanho e lucratividade, SW, SN, SR, BW, BN e BR respectivamente. . . . .          | 66 |
| Figura 16 – Gráfico <i>worm-plot</i> para as modelos GAMLSS gaussiano das carteiras de combinações tamanho e investimento, SC, SN, SA, BC, BN e BA respectivamente. . . . .           | 66 |
| Figura 17 – Gráfico dos valores observados versus os valores estimados para as carteiras de combinação tamanho-razão de valorização, em modelos GAMLSS de melhor ajuste. . . . .      | 70 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 18 – Gráfico dos valores observados versus os valores estimados para as carteiras de combinação tamanho-lucratividade, em modelos GAMLSS de melhor ajuste. . . . .                   | 71 |
| Figura 19 – Gráfico dos valores observados versus os valores estimados para as carteiras de combinação tamanho-investimento, em modelos GAMLSS de melhor ajuste. . . . .                    | 71 |
| Figura 20 – Gráfico <i>worm-plot</i> para as modelos GAMLSS de melhor ajuste das carteiras de combinações tamanho e razão de valorização, SL, SN, SH, BL, BN e BH respectivamente . . . . . | 72 |
| Figura 21 – Gráfico <i>worm-plot</i> para as modelos GAMLSS de melhor ajuste das carteiras de combinações tamanho e lucratividade, SW, SN, SR, BW, BN e BR respectivamente. . . . .         | 73 |
| Figura 22 – Gráfico <i>worm-plot</i> para as modelos GAMLSS de melhor ajuste das carteiras de combinações tamanho e investimento, SC, SN, SA, BC, BN e BA respectivamente. . . . .          | 74 |
| Figura 23 – Outliers Temporais para Carteiras de combinação Tamanho-Razão de valorização . . . . .  | 89 |
| Figura 24 – Outliers Temporais para Combinação Tamanho-Lucratividade . . . . .  | 90 |
| Figura 25 – Outliers Temporais para Carteiras de Combinação Tamanho-Investimento . . . . .  | 91 |

# Lista de Tabelas

|  |    |
|--|----|
| Tabela 1 – Medidas da distribuição família $t$ . . . . .   | 33 |
| Tabela 2 – Medidas da distribuição GT. . . . .   | 35 |
| Tabela 3 – Tabela explicativa dos portfólios $2 \times 3$ . . . . .  | 40 |
| Tabela 4 – Construção dos prêmios de riscos dos Fatores . . . . .  | 43 |
| Tabela 5 – Média do excesso de retorno mensal para portfólios ponderados pelo valor de mercado e com critérios de liquidez, formados por VM e VP/VM, VM e OP, VM e INV entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018. . . . . | 44 |
| Tabela 6 – Quantidades de Outliers evidenciado no Box-plot . . . . .   | 46 |
| Tabela 7 – Resultados das estatísticas descritivas e os p-valores dos testes Jarque-Bera e Dicker-Fuller para os excessos de retornos das carteiras. . . . .   | 49 |
| Tabela 8 – Resumo estatístico para os retornos mensais dos fatores entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018. . . . .   | 50 |
| Tabela 9 – Usando quatro fatores em regressões para explicar os retornos médios do quinto fator entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018. . . . .  | 52 |
| Tabela 10 – Resultados do p-valor para o teste de heterocedasticidade de Breusch-Pagan dos modelos em análise. . . . .   | 53 |
| Tabela 11 – Resultados do p-valor do teste de autocorrelação usando a estatística de Durbin-Watson dos modelos em análise. . . . .   | 54 |
| Tabela 12 – Regressão para 6 carteiras Tamanho-Razão de Valorização entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018. . . . .  | 55 |
| Tabela 13 – Regressão para 6 carteiras Tamanho-Lucratividade entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018. . . . .   | 56 |
| Tabela 14 – Regressão para 6 carteiras Tamanho-Investimento entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018. . . . .  | 57 |
| Tabela 15 – Estimação do parâmetro ( $\sigma$ ) do ajuste do modelo de dispersão via GAMLSS Gaussiano tamanho-razão de valorização. . . . .  | 61 |
| Tabela 16 – Estimação do parâmetro ( $\sigma$ ) do ajuste do modelo de dispersão via GAMLSS Gaussiano tamanho-lucratividade. . . . .   | 62 |
| Tabela 17 – Estimação do parâmetro ( $\sigma$ ) do ajuste do modelo de dispersão via GAMLSS Gaussiano tamanho-investimento. . . . .  | 62 |
| Tabela 18 – Estimação do parâmetro ( $\mu$ ) do ajuste do modelo de dispersão via GAMLSS Gaussiano tamanho-razão de valorização. . . . .   | 63 |
| Tabela 19 – Estimação do parâmetro ( $\mu$ ) do ajuste do modelo de dispersão via GAMLSS Gaussiano tamanho-lucratividade. . . . .  | 64 |
| Tabela 20 – Estimação do parâmetro ( $\mu$ ) do ajuste do modelo de dispersão via GAMLSS Gaussiano tamanho-investimento. . . . .   | 64 |

|   |    |
|---|----|
| Tabela 21 – Resultados das melhores distribuições utilizando os critérios de seleções desvio global (GD), AIC e SBC. . . . .  | 67 |
| Tabela 22 – Estimacão do parâmetro ( $\mu$ ) do ajuste do modelo GAMLSS de melhor ajuste para combinaes de tamanho-razão de valorizao. . . . .  | 68 |
| Tabela 23 – Estimacão do parâmetro ( $\mu$ ) do ajuste do modelo GAMLSS de melhor ajuste para combinaes de tamanho-lucratividade. . . . .  | 68 |
| Tabela 24 – Estimacão do parâmetro ( $\mu$ ) do ajuste do modelo GAMLSS de melhor ajuste para combinaes de tamanho-investimento. . . . .   | 69 |
| Tabela 25 – Avaliaco de performance . . . . .  | 70 |
| Tabela 26 – Avaliaco de performance . . . . .  | 75 |
| Tabela 27 – Usando quatro fatores em regressões para explicar os retornos médios do quinto fator, com o fator <i>HMLO</i> substituindo o fator <i>HML</i> , entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018. . . . . | 85 |
| Tabela 28 – Regressão para 6 carteiras Tamanho-razão de valorizao e com a variável <i>HML</i> entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018. . . . .  | 86 |
| Tabela 29 – Regressão para 6 carteiras tamanho-lucratividade e com a variável <i>HML</i> entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018. . . . .  | 87 |
| Tabela 30 – Regressão para 6 carteiras tamanho-investimento e com a variável <i>HML</i> entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018. . . . .   | 87 |
| Tabela 31 – Outliers Temporais para as carteiras de analises. . . . .   | 88 |

# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>  | <b>13</b> |
| <b>2</b> | <b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>   | <b>16</b> |
| <b>3</b> | <b>METODOLOGIA</b>   | <b>20</b> |
| 3.1      | Teoria de precificação de ativos   | 20        |
| 3.2      | Os cinco fatores de Fama e French  | 23        |
| 3.3      | Modelo de Regressão Linear Múltiplo  | 25        |
| 3.4      | Diagnósticos dos resíduos  | 26        |
| 3.4.1    | <b>Diagnóstico de normalidade</b>  | 26        |
| 3.4.2    | <b>Diagnóstico de homocedasticidade</b>  | 27        |
| 3.4.3    | <b>Diagnóstico de independência</b>  | 28        |
| 3.5      | Modelos Aditivos Generalizados para Posição, Escala e Forma (GAMLSS)                             | 29        |
| 3.5.1    | <b>Os Algoritmos</b>   | 31        |
| 3.5.2    | <b>Descrição das Distribuições ajustadas em GAMLSS</b>   | 31        |
| 3.5.2.1  | <i>Distribuição família t (TF)</i>   | 32        |
| 3.5.2.2  | <i>Distribuição assimétrica t tipo 1 (ST1)</i>   | 32        |
| 3.5.2.3  | <i>Distribuição generalizada t (GT)</i>  | 34        |
| 3.6      | Avaliação de performance dos modelos   | 35        |
| <b>4</b> | <b>APLICAÇÃO PARA O CASO BRASILEIRO</b>  | <b>38</b> |
| 4.1      | Amostra  | 38        |
| 4.2      | As carteiras de análise  | 38        |
| 4.2.1    | <b>Critério de seleção das empresas</b>  | 40        |
| 4.3      | Construção dos prêmios de riscos dos cinco fatores   | 41        |
| 4.4      | Resultados   | 43        |
| 4.4.1    | <b>Estatísticas resumidas para os retornos dos prêmios de riscos gerados pelos cinco fatores</b> | 49        |
| 4.4.2    | <b>HML: um fator redundante</b>  | 50        |
| 4.4.3    | <b>Modelo de cinco fatores modificado</b>  | 52        |
| 4.4.4    | <b>Modelo de regressão linear padrão de cinco fatores</b>  | 53        |
| 4.4.5    | <b>Modelando a dispersão com o modelo GAMLSS com Distribuição Normal</b>                         | 59        |
| 4.4.6    | <b>Modelos GAMLSS de melhor ajuste</b>   | 65        |
| 4.4.7    | <b>Avaliação das performances dos modelos</b>  | 70        |
| 4.5      | Avaliação de performance dos modelos de fatores em GAMLSS  | 75        |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSÃO</b>   | <b>77</b> |
|          | <b>Referências</b>   | <b>79</b> |
|          | <b>APÊNDICE A Teste de fator redundante com HMLO</b>   | <b>85</b> |

|                   |  |           |
|-------------------|--|-----------|
| <b>APÊNDICE B</b> | <b>Modelo de cinco fatores estimado por Mínimos Quadrados Ordinários com HML . . . . .</b> | <b>86</b> |
| <b>APÊNDICE C</b> | <b>Outliers Temporais . . . . .</b>  | <b>88</b> |
| <b>APÊNDICE D</b> | <b>Suporte Computacional . . . . .</b>   | <b>92</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

A teoria de precificação de ativos investiga a formação dos preços dos ativos do mercado financeiro, tentando descobrir quais são os fatores determinantes para a composição desses preços. Segundo [Cochrane \(2009\)](#) a teoria de precificação de ativos (*asset price theory*) tenta entender o comportamento dos preços dos ativos sob incerteza. Ainda conforme [Cochrane \(2009\)](#), grande parte do retorno real dos ativos é devido a um prêmio ganho pela manutenção do risco. Entende-se por prêmio de risco os retornos dos ativos requeridos pelos investidores para que eles possam incorrer no risco de carregar estes ativos em suas carteiras de investimentos, de outra maneira, o prêmio de risco mede o quanto um investimento arriscado rende a mais do que um investimento sem riscos. Portanto, a principal tarefa na precificação de ativos é descobrir e avaliar os fatores que dão origem aos prêmios de riscos exigidos pelos investidores e que influenciam na composição dos preços dos ativos, conseqüentemente nos retornos esperados.

Segundo [Argolo, Leal e Almeida \(2012\)](#), o CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) é o modelo de precificação mais utilizado no mercado financeiro mundial. Esse modelo estima qual é a taxa de retorno exigida considerando o risco sistemático<sup>1</sup> do mercado, através do  $\beta$  do CAPM ([SHARPE, 1964](#)). [Fama e French \(1993\)](#) apresentam uma série de diferenças em termos de exploração do preço do modelo CAPM e acrescentam ao modelo os prêmios de risco referentes aos fatores tamanho (valor de mercado) e razão de valorização (patrimônio líquido/valor de mercado). Por conseguinte, este novo modelo é conhecido na literatura como modelo de três fatores e apresenta uma melhor *performance* que o CAPM, segundo as análises de intercepto. Posteriormente, [Fama e French \(2015\)](#) acrescentam ao modelo de três fatores o prêmio de risco para os fatores lucratividade e investimento melhorando o poder explicativo, este modelo é chamado na literatura de modelo de cinco fatores.

Os parâmetros dos modelos de precificação de ativos sob certas condições distribucionais (por exemplo, normalidade dos erros) são geralmente estimados por mínimos quadrados ordinários (MQO), máxima verossimilhança ou estimadores robustos que fazem a correção da heterocedasticidade. Alguns trabalhos que estudam o comportamento das distribuições dos retornos das ações no mercado financeiro evidenciam que valores extremos dos retornos ocorrem com frequência maior do que seria esperado sob a suposição de normalidade. [Silva e Mendes \(2003\)](#), analisam os dados de dez mercados de ações asiáticos utilizando o arcabouço da teoria do valor extremo<sup>2</sup>, registrando qual distribuição

<sup>1</sup> Risco sistemático ou sistêmico é aquele que afeta toda a economia. A exemplos dos colapsos no sistema financeiro que acarreta queda de todos os preços dos ativos (Ver [Jorion \(1997\)](#)).

<sup>2</sup> A Teoria dos Valores Extremos (TVE) tem como ênfase o estudo probabilístico de eventos ditos ‘raros’ e baseia-se em resultados referentes à distribuição assintótica de máximos e mínimos padronizados obtidos por uma amostra aleatória de  $n \geq 2$  variáveis aleatórias i.i.d.. (ver [Pickands et al. \(1975\)](#)).

assintótica melhor se ajusta a cada série financeira nesses mercados. Os ajustes efetuados evidenciam que as distribuições dos retornos não se caracterizam por distribuição normal. Monteiro, Silva et al. (2002), tendo por objetivo analisar os riscos de perda no mercado financeiro português, admite a ocorrência de eventos que formam uma massa de probabilidade adicional na cauda esquerda da distribuição não captada pelos modelos que supõem normalidade da distribuição. Esta ausência de normalidade também foi exposta por Chernozhukov e Du (2006), Engle e Manganelli (2004), Rocco (2014) e Gilli et al. (2006).

Esta tese pretende flexibilizar a suposição distribucional da variável resposta (excesso de retorno<sup>3</sup>) de modo a acomodar de forma eficiente as ocorrências de retornos do mercado financeiro. Esta pesquisa tem por finalidade encontrar evidências empíricas sobre a possível influência dos prêmios de risco do modelo de cinco fatores sobre o excesso de retornos das carteiras compostas por ações. No primeiro momento é estimado o modelo linear padrão, usando como metodologia a estimação por mínimos quadrados ordinário, em seguida, os resultados das estimações para a modelagem GAMLSS Gaussiano adicionando a modelagem do parâmetro de dispersão e finalmente os modelos GAMLSS para a média com a flexibilização distribucional. Posteriormente, é realizada a comparação via avaliações de *performance* entre as modelagens. Por fim, a avaliação de *performance* é realizada com o intuito de comparar a modelagem GAMLSS no CAPM, três fatores e cinco fatores verificando quais desses modelos apresentam o melhor ajuste das estimativas. A escolha do GAMLSS na aplicação desta tese visa a melhoria do ajuste do modelo, pois, este modelo possibilita a escolha das distribuições mais adequadas de acordo com os critérios de seleções desvio global (GD), AIC e SBC para os dados do mercado financeiro.

Esta pesquisa trabalhará com agrupamento de ações em carteiras de investimentos. Conforme Cochrane (2009), os investidores do mercado financeiro se preocupam com o retorno das carteiras compostas por ativos, não com o comportamento de ativos individuais. O agrupamento de ações com base em características determinadas reduz a variância da carteira de investimento, tornando-se possível captar diferenças entre os retornos médios. Ao diversificar os ativos da carteira ocorrerá eventualmente em alguns ativos altos retornos, enquanto outros terão baixos retornos, porém, na média, uma carteira diversificada receberá um retorno intermediário mais consistente do que qualquer um dos ativos contidos nela. Esta pesquisa também avaliou se o melhor modelo encontrado oferece estimativas satisfatórias para a precificação de ativos agrupados em carteiras no mercado financeiro.

O restante desta tese é estruturado como segue. Na Seção 2, é apresentada uma breve revisão bibliográfica sobre a teoria de precificação de ativos, com os principais

<sup>3</sup> Entende-se por excesso de retorno a diferença entre o retorno do ativo arriscado e o retorno do ativo livre de risco.

---

modelos e autores. Na Seção 3 é descrita a metodologia exposta na tese, começando da teoria de precificação até os detalhes da modelagem GAMLSS. Na Seção 4 é reservada para as aplicações metodológicas no mercado financeiro brasileiro. Por fim, as considerações finais são apresentadas na Seção 5.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os modelos de precificação de ativos que usam funções lineares dos excessos de retornos em relação aos prêmios de riscos são os mais utilizados em trabalhos empíricos na área de finanças. O modelo de precificação de ativos de capital (CAPM) proposto por Sharpe (1964) e Lintner (1965) é a primeira modelagem de precificação de ativos baseada em linearidade e continua sendo ainda hoje a mais utilizada em finanças.

A forma funcional mais comumente usada para descrever o CAPM é a dos retornos esperados,  $E(R_i) = R_f + \beta_{im}[E(R_m) - R_f]$ , onde  $E(R_i)$  é o retorno esperado do ativo  $i$ ,  $R_f$  é o retorno do ativo  $f$  livre de risco,  $E(R_m)$  é o retorno esperado da carteira  $m$  que representa o mercado (risco sistemático) e o parâmetro  $\beta_{im}$  busca capturar a sensibilidade do ativo às oscilações da carteira de mercado. O  $\beta_{im}$  é estimado pela covariância do ativo e o mercado sobre a variância do retorno de mercado, ou seja, o  $\beta_{im}$  é proporcional ao risco com que cada unidade monetária investida no ativo  $i$  contribui para o risco da carteira  $m$  de mercado. Portanto, o retorno esperado do ativo  $i$  é o retorno do ativo livre de risco ( $R_f$ ) mais o prêmio pelo risco ( $\beta_{im}[E(R_m) - R_f]$ ). O modelo pode ser tanto incondicional como condicional, ou seja, o parâmetro  $\beta_{im}$  pode ser constante, ou variar ao longo do tempo a medida que as informações do condicionamento mudam. Porém, para o modelo ser incondicional não basta apenas que o  $\beta_{im}$  seja constante mas também que  $\text{cov}(R_i, R_m)$  e  $\text{var}(R_m)$  sejam constantes.

Miller e Scholes (1972) fazem duras críticas ao modelo CAPM ao afirmar que o estimador do parâmetro  $\beta_{im}$  possui viés de erro de medição, tendo em vista a dificuldade de encontrar uma variável que expresse o mercado financeiro em sua integralidade. Banz (1981) verificou que empresas que possuem pequeno valor de mercado obtiveram retornos mais altos ajustados aos riscos. Além disso, as estimativas do  $\beta_{im}$  do CAPM costuma ser um pouco menor em relação aos retornos dessas empresas de pequeno porte, o que levou a conclusão de que o CAPM está incorretamente especificado. Fama e MacBeth (1973) e Black et al. (1972) estimam os modelos de CAPM agrupando ações em carteiras. As carteiras formadas possuíam menor variância nos resíduos do modelo ajustado, sugerido que o  $\beta_{im}$  dos modelos CAPM com agrupamento de ações apresentam um melhor ajuste quando comparados com os modelos CAPM sem o agrupamento de ações. Adicionalmente, mostraram que o  $\beta_{im}$  dos modelos de CAPM para ações individuais variam ao longo do tempo a medida que os riscos do negócio mudam, por isso o  $\beta_{im}$  dos modelos para as carteiras são mais estáveis ao longo do tempo e é possível serem estimados com melhor precisão.

O modelo de precificação de ativos de capital intertemporal (ICAPM) proposto

por [Merton et al. \(1973\)](#) é um modelo de precificação linear com a variável de riqueza e variáveis de estado que tenta prever alterações na distribuição de retornos futuros. Este modelo supõe que as escolhas dos investidores são feitas ao longo do tempo e ao selecionar sua carteira de investimento considera o retorno presente e as expectativas de retornos futuros. O ICAPM não informa quais variáveis de estado devem ser usadas, fato pelo qual diferentes autores utilizam diferentes variáveis, no entanto, é preciso que essas variáveis sejam plausíveis para o problema de maximização do investidor de modo a não produzir estimativas espúrias.

O modelo da teoria da arbitragem (APT) proposto por [Ross et al. \(1976\)](#) é uma generalização do CAPM para admitir que as variações dos preços sejam explicadas por alterações inesperadas em fatores de riscos, que podem ser específicos de determinada empresa ou setor, ou de fatores mais gerais como variáveis macroeconômicas. O APT é uma caracterização estatística já que possui os componentes comuns dos retornos das ações, o qual é percebido através dos movimentos do mercado. Quando o mercado sobe a maiorias das ações individuais sobem sujeitas ao movimento do componente idiossincrático<sup>1</sup>. Conforme [Cochrane \(2009\)](#), os movimentos idiossincráticos nos retornos dos ativos não acarretam prêmios de riscos, visto que os investidores poderão reduzi-los mantendo carteiras diversificadas. Portanto, os retornos esperados dos ativos devem estar relacionados com os fatores comuns. Os modelos APT na forma  $E(R_{t+1}) = \alpha + \beta^T f_{t+1} + \varepsilon_i$ , em que  $\beta^T$  é o vetor de coeficientes,  $f_{t+1}$  é a matriz de fatores e  $\varepsilon_i$  é o termo idiossincrático, comumente exibem um alto coeficiente de determinação ( $R^2$ ). Conseqüentemente, pode-se afirmar que o modelo APT aparenta ser uma boa aproximação para modelos de fatores.

O pesquisador pode confundir o modelo APT e ICAPM. De fato, no modelo ICAPM não há suposição de que os fatores descrevem uma matriz de covariância dos retornos e os fatores não precisam ser ortogonais ou i.i.d. (independente e identicamente distribuídos). Conforme [Cochrane \(2009\)](#), a grande diferença entre os modelos APT e ICAPM é que enquanto o APT sugere uma análise estatística da matriz de covariância dos retornos para que se encontre movimentos comuns nas carteiras, o ICAPM propõe que primeiramente se procure as variáveis de estado que descrevem a distribuição dos retornos futuros e dos rendimentos não patrimoniais.

Segundo [Fama e French \(1993\)](#), existem três fatores de riscos que incidem sobre os retornos das ações. O primeiro é o fator geral do mercado que foi expresso como prêmio de mercado no modelo CAPM. Os outros dois fatores, expressos como tamanho (valor de mercado) e razão de valorização (patrimônio líquido dividido pelo valor de mercado), são inerentes as empresas. Os autores estimam os parâmetros do modelo de precificação utilizando como variável resposta o excesso de retorno de 25 carteiras de ações formadas

---

<sup>1</sup> O termo idiossincrático é o termo de resíduo que não é correlacionado com os demais componentes do modelo.

por combinações de tamanho e razão de valorização. As ações que são utilizadas no modelo de precificação estão listadas nas bolsas de valores de Nova York (NYSE), NASDAQ e *American Stock Exchange* (Amex) no período de julho de 1963 à dezembro de 1991. Fama e French (1993) Mostram que o prêmio de mercado isoladamente carrega pouca informação sobre os retornos dos ativos, que tamanho e razão de valorização capturam uma forte variação nos retornos dos ativos. Os autores evidenciaram que as ações de maior razão de valorização possuem maiores retornos médios e ações de empresas de tamanho pequeno apresentaram altos retornos em relação as de tamanho grande.

Também surgiram modelos fatoriais que utilizam variáveis macroeconômicas na precificação de ativos. Jagannathan e Wang (1996) e Reyfman (1998) utilizam como fator a renda do trabalho, Chen, Roll e Ross (1986) usam a produção industrial, inflação e outras variáveis macroeconômicas e Cochrane (1996) usa o crescimento do investimento.

Carhart (1997) propõe um modelo de quatro fatores acrescentando ao modelo de 3 fatores de Fama e French (1993) um fator que captura o momento. O fator de risco de momento é expresso pela diferença dos retornos de ações que obtiveram no último ano os maiores e menores retornos. Carhart (1997) utiliza as carteiras de fundos de ações presentes nas bolsas de valores de Nova York (NYSE), NASDAQ e *American Stock Exchange* (Amex) no período de 1963 a 1993 e apresentam evidências de que no curto-prazo há um excesso de retorno maior para as carteiras de ações formadas pelas empresas que obtiveram maior retorno no ano anterior, demonstrando assim que o fator de risco de momento explica parte das variações de excesso de retorno dos ativos. Além disso, aponta que o modelo de quatro fatores reduz o erro absoluto médio<sup>2</sup> em comparação com os CAPM e três fatores.

Fama e French (1996) investigam as anomalias<sup>3</sup> dos modelos de precificações CAPM e três fatores de Fama e French (1993). A amostra é composta por ações listadas na bolsa de valores de Nova York (NYSE) no período de julho de 1963 à dezembro de 1993. Descobrem que a maioria das anomalias que não são capturadas pelo modelo de CAPM desaparecem no modelo de três fatores. Mostram que o modelo de três fatores captura os retornos das carteiras formadas por ações com base em E/P (lucro sobre o preço), C/P (fluxo de caixa sobre o preço), crescimento das vendas passadas e reversão dos retornos de longo prazo. Ao classificarem as ações com base em despenhos passados relatam que ter ações perdedoras na bolsa é uma boa estratégia para alavancar os retornos a longo prazo, pois, há uma reversão dos retornos no longo prazo. Contudo, uma carteira composta por ações vencedoras na bolsa conduz a altos retornos no curto prazo, chamada de estratégia de momento. Conclui que o momento é um fator de análise de desempenho no curto prazo, por isso, o modelo de três fatores é incapaz de capturar a estratégia de momento.

<sup>2</sup> Erro absoluto médio é a média da diferença entre os valores reais e os estimados.

<sup>3</sup> Entende-se por anomalias aquilo que não é explicado pelos modelos de precificação mais comuns (NOVY-MARX; VELIKOV, 2016).

Fama e French (2015) introduzem o modelo de cinco fatores acrescentando ao modelo de três fatores de Fama e French (1993) os prêmios de riscos de lucratividade e investimento. A amostra é composta por ações listadas nas bolsas de valores de Nova York (NYSE), NASDAQ e *American Stock Exchange* (Amex) no período de julho de 1963 à dezembro de 2013. Demonstram que quando os prêmios de riscos para lucratividade e investimento são adicionados o prêmio de risco de razão de valorização torna-se redundante na explicação da média dos excessos de retornos. Fama e French (2015) contorna este problema de fator redundante realizando uma transformação do fator de razão de valorização e o denomina de fator ortogonalizado<sup>4</sup>. Revelam em suas avaliações de *performance* que o modelo de cinco fatores fornece melhores descrições sobre a média dos retornos que o modelo de três fatores.

Fama e French (2016) verificam a existência de anomalias não capturadas pelo modelo de cinco fatores de Fama e French (2015). As anomalias verificadas são os  $\beta$  de mercado, provisões<sup>5</sup>, emissões líquidas de ações, momento e volatilidade. Fama e French (2016) têm por objetivo examinar se o modelo de cinco fatores captura o excesso de retorno médio de carteiras formadas por ações com base nas combinações de tamanho e uma anomalia. A amostra é composta por ações listadas nas bolsas de valores de Nova York (NYSE), NASDAQ e *American Stock Exchange* (Amex) no período de julho de 1963 à dezembro de 2014. As anomalias de  $\beta$  de mercados, emissões líquidas e volatilidade não são capturadas pelo modelo de três fatores de Fama e French (1993), mas são explicadas pelo modelo de cinco fatores. Contudo, o modelo de cinco fatores não captura os retornos das carteiras formadas por provisões e momento.

Recentemente Leite et al. (2020), afirma que mudanças em variáveis relacionadas a oportunidades de investimento futuro afetam o excesso de retornos dos ativos e não estão relacionados com os cinco fatores de Fama e French (2015). Incluíram choques imprevistos em fatores macroeconômicos e concluíram que choques na inflação e na estrutura a termo de taxa de juros<sup>6</sup> explica melhor os retornos médios do que o modelo cinco fatores. Já Ragab et al. (2020), ao trabalhar com dados do Egito revela que o modelo de cinco fatores de Fama e French (2015) apresenta bons resultados de desempenho. Ao analisar um País Emergente o artigo de Ragab et al. (2020) aponta para evidências que o modelo de cinco fatores também pode ser utilizado em economias que estão em expansão do crescimento econômico.

<sup>4</sup> Ortogonalidade aqui é no sentido que as covariâncias da transformação do prêmio de risco da razão de valorização em relação aos demais prêmios de riscos são todas iguais a zero.

<sup>5</sup> Provisões são receitas e despesas incorridas que afetam o lucro da empresa. As provisões incluem contas a pagar, contas a receber, passivos fiscais acumulados e juros acumulados auferidos ou a pagar.

<sup>6</sup> A Estrutura a termo de taxa de juros é a relação entre taxas de juros de títulos de renda-fixa de mesma qualidade creditícia, mas com diferentes prazos de vencimento.

## 3 METODOLOGIA

O presente estudo investiga se o modelo de cinco fatores pode precificar com precisão as variações dos retornos de carteiras constituídas de ações negociadas no mercado financeiro brasileiro. O objetivo é aferir o poder explicativo dos prêmios de riscos (variáveis independentes) em relação ao excesso de retorno das carteiras (variável dependente) de forma univariada, ou seja, considera-se cada carteira como caso individual.

### 3.1 Teoria de precificação de ativos

Cabe ao indivíduo escolher quanto poupar e consumir, e quais ativos deve manter em sua carteira. O objetivo é maximizar o consumo ao longo do tempo, então, o indivíduo só poupará se acreditar que alcançará maior consumo no futuro. Partindo da suposição de que cada indivíduo pode comprar ou vender um pagamento futuro  $x_{t+1}$  gerado por um ativo financeiro, a um preço determinado  $p_t$ . É preciso determinar quantos ativos esse indivíduo vai comprar ou vender. Denote por  $D_t$  o nível de consumo original, quando o investidor ainda não possui ativo (ou dotação inicial de riqueza), e seja  $\xi$  o montante do ativo que ele escolhe comprar (formação da carteira de investimento). Então o problema de maximização do consumo se resume a,

$$\max_{\xi} u(c_t) + E_t \theta u(c_{t+1}) \quad (3.1)$$

*s.a*<sup>1</sup>

$$c_t = D_t - p_t \xi \quad (3.2)$$

$$c_{t+1} = D_{t+1} + x_{t+1} \xi. \quad (3.3)$$

Este é um problema de escolha intertemporal<sup>2</sup> que como hipótese simplificadora é considerado apenas dois períodos. O consumidor maximiza a utilidade do consumo sujeito as restrições do consumo. Na função de maximização a utilidade do consumo no período  $t+1$  é multiplicado pelo  $\theta$  que captura a impaciência dos investidores e sua aversão ao risco, sendo chamado de fator de desconto subjetivo. Na restrição observa-se que no período  $t$  o consumo é igual à dotação inicial de riqueza menos os gastos com os ativos financeiros. No período  $t+1$  o consumo é igual à dotação de riqueza no período mais o pagamento total

<sup>1</sup> Sujeito à restrição.

<sup>2</sup> Escolha intertemporal é o estudo na economia que investiga as escolhas de cada indivíduo e como elas podem afetar estes indivíduos em períodos futuros.

pelos ativos comprados no período anterior. O montante de ativos  $\xi$  adquiridos no período  $t$  é carregado com o indivíduo para o período  $t + 1$ .

Substituindo as restrições (3.2) e (3.3) no problema de maximização expressa em (3.1) e derivando em relação a  $\xi$  (variável que não depende de  $t$ ) e igualando a zero, obtém-se a condição de primeira ordem para o consumo ótimo e escolha da carteira,

$$p_t u'(c_t) = E_t[\theta u'(c_{t+1}) x_{t+1}].$$

Em que  $u'(c_t)$  e  $u'(c_{t+1})$  são as derivadas da função utilidade do problema de maximização da equação (3.1). A equação de precificação mais básica deriva dessa condição de maximização em que o preço dos ativos deve ser igual ao lucro esperado descontado pela utilidade marginal do investidor, i.e.,

$$p_t = E_t[\theta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1}], \quad (3.4)$$

em que o pagamento  $x_{t+1}$  no próximo período é o preço do ativo mais o dividendo,  $x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}$ . Aqui,  $x_{t+1}$  é uma variável aleatória, pois ao comprar o ativo no período  $t$  o indivíduo não tem conhecimento do quanto este ativo irá trazer de retorno no período  $t + 1$ , apenas as probabilidades de acontecimentos futuros.

O preço é igual ao lucro descontado esperado, o resto da teoria é apenas elaboração desse conceito, casos especiais para tornar a equação central útil para uma ou outra aplicação. É possível reorganizar a equação (3.4) da seguinte forma:

$$p_t = E_t(m_{t+1} x_{t+1}), \quad (3.5)$$

em que

$$m_{t+1} = \theta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \quad (3.6)$$

é o fator estocástico de desconto. A maior parte da teoria de precificação de ativos consiste apenas em manipulações algébricas da equação (3.6). De acordo com a equação (3.6) é possível incorporar todas as correções de risco definindo um fator de desconto estocástico único para cada ativo ou carteira. Os modelos de precificação de ativos, em geral, são modelos alternativos que acoplam o fator estocástico de desconto aos dados (COCHRANE, 2009).

Aqui, a variável  $m_{t+1}$  também é conhecida como taxa marginal de substituição que mede o aumento adicional da utilidade do consumo em  $t + 1$  gerada por uma diminuição do consumo em  $t$ . Na equação (3.6),  $m_{t+1}$  é a taxa na qual o investidor está disposto a substituir o seu consumo futuro por consumo presente (COCHRANE, 2009).

Normalmente é desejável trabalhar com os retornos dos ativos, então é preciso dividir a equação (3.5) por  $p_t$ , i.e.,

$$1 = E_t \frac{(m_{t+1} x_{t+1})}{p_t}.$$

Dado que

$$R_{t+1} \equiv \frac{x_{t+1}}{p_t},$$

então

$$1 = E_t(m_{t+1}R_{t+1}).$$

Os retornos serão utilizados nesse trabalho por serem geralmente estacionários temporalmente. Um processo é chamado de estacionário se sua média e variância forem constantes ao longo do tempo e o valor da covariância entre os dois períodos depender apenas da distância da defasagem entre os dois períodos (GUJARATI; PORTER, 2010).

O retorno do ativo livre de risco é imposto antecipadamente e é dado por

$$1 = E(mR_f) = E(m)R_f. \quad (3.7)$$

Em que  $R_f$  é o retorno do ativo livre de risco. Sem perda de generalidade o subscrito  $t + 1$  é ocultado das variáveis de retorno e fator estocástico de desconto. Se o ativo livre de risco for lançado no mercado financeiro com retorno  $R_f = \frac{1}{E(m)}$ , então o investidor é indiferente entre comprar ou vender esse ativo. Esse ativo é por vezes conhecido por taxa sombra ou taxa zero beta. Considere a seguinte equação de retorno do ativo sob incerteza:

$$1 = E(mR_i), \quad (3.8)$$

em que  $R_i$  é o retorno do ativo arriscado. Observa-se que o retorno do ativo arriscado é a variável aleatória. Sabe-se que  $cov(m, R_i) = E(mR_i) - E(m)E(R_i)$ , então substituindo na equação (3.8) é obtido

$$1 = E(m)E(R_i) + cov(mR_i)$$

e usando a equação (3.7) segue que

$$E(R_i) - R_f = -R_f cov(m, R_i).$$

Finalmente, substituindo  $m$  pela equação (3.6) e  $R_f$  pela equação (3.7) e colocando os subscritos temporais,

$$E(R_{i,t+1}) = R_{f,t+1} - \frac{cov(u'(c_{t+1}), R_{i,t+1})}{E(u'(c_{t+1}))}, \quad (3.9)$$

mais uma vez, o subscrito  $t + 1$  pode ser ocultado sem perda de generalidade. Conclui-se que a equação (3.9) pode ser expressa da seguinte maneira:

$$E(R_i) = R_f - \frac{cov(u'(c), R_i)}{E(u'(c))},$$

O retorno esperado do ativo arriscado é igual ao retorno do ativo livre de risco menos o termo de ajustamento do risco. Assim, ativos mais arriscados devem oferecer

retornos esperados mais elevados para fazerem com que o investidor os detenham, ou seja, ativos mais arriscados devem ser negociados a preços mais baixos para que os investidores os detenham.

Segundo [Cochrane \(2009\)](#), os modelos baseados em consumo, embora atendam de forma completa a compreensão das questões da teoria de precificação de ativos, não funcionam bem em análises empíricas. A dificuldade de estimação desses modelos surge da necessidade de se conhecer a função utilidade dos indivíduos, por se tratar de uma medida subjetiva.

Os modelos de fatores, que serão utilizados nesta tese, substituem a expressão fundamentada no consumo expressa na utilidade marginal para um modelo linear na forma

$$E(R_{t+1}) = \alpha + \beta^\top f_{t+1}, \quad (3.10)$$

onde  $\beta$  é um vetor dos coeficientes e  $f$  é a matriz de fatores. A equação (3.10) expressa a regressão múltipla dos fatores sobre os retornos. Portanto, os modelos de precificação de ativos por fatores são derivados de modelos baseados em consumo.

## 3.2 Os cinco fatores de Fama e French

Segundo [Fama e French \(2016\)](#), o modelo de cinco fatores é o que apresenta a menor lista de anomalias. As anomalias de mercados são fenômenos que não podem ser explicados pelos modelos de precificação ([COVA; SOUZA; NETO, 2011](#)). Alguns autores investigaram as diversas anomalias no mercado financeiro a exemplos de emissões líquidas de ações ([IKENBERRY; LAKONISHOK; VERMAELEN, 1995](#)), momento ([JEGADEESH; TITMAN, 1993](#)) e volatilidade ([ANG et al., 2005](#)). Portanto, esta tese destaca a abordagem de cinco fatores em modelagem GAMLSS.

As variáveis explicativas do modelo de cinco fatores de [Fama e French \(2015\)](#) são os prêmios de riscos destes fatores, então para uma melhor compreensão é preciso conhecer o que representa cada um destes fatores na construção do modelo. Além do fator de risco de mercado expresso no modelo CAPM, este modelo também considera os fatores de tamanho (VM), razão de valorização (PL/VM), lucratividade (OP) e investimento (INV).

A variável tamanho da empresa se refere ao valor de mercado (preço das ações vezes o total de ações em circulação), que expressa a capitalização da empresa no mercado financeiro. No mercado financeiro as ações de empresas que possuem menor valor de mercado são conhecidas como *small caps* e as ações com maior valor de mercado de *big caps*. Serão utilizados os dados de valor de mercado do fechamento de balanço em dezembro de cada ano anterior para a formação do prêmio de risco de tamanho. A razão de valorização, que do inglês é chamada de *book-to-market ration*, é a razão entre patrimônio

líquido e o valor de mercado (PL/VM). A razão de valorização é um indicador que revela se as ações das empresas estão supervalorizadas ou subvalorizadas, serve como um indicador de comparação entre o valor real de uma empresa e seu nível de especulação no mercado acionário. Uma empresa que possui um valor de mercado maior do que o valor do patrimônio líquido é uma empresa que está supervalorizada no mercado financeiro, por outro lado, uma empresa que expressa seu patrimônio líquido maior do que seu valor de mercado é uma empresa subvalorizada no mercado de ações. Em termos numéricos, se a proporção do PL/VM for acima de 1, então a ação está subvalorizada; se for menor que 1, o estoque está supervalorizado. Adicionalmente, se a razão está acima de 1 revela que o preço das ações de uma empresa está sendo negociado por um valor menor do que o valor de seus ativos. Será utilizado os dados de fechamento de balanço do ano anterior; ou seja, dados de dezembro, para calcular valor patrimonial e valor de mercado para a geração do prêmio de risco de razão de valorização. A lucratividade é extraída ao dividir o lucro da empresa antes de juros e imposto de renda (LAJIR, em inglês *Earnings before interest and taxes* ou EBIT.) no fechamento do ano anterior pelo patrimônio líquido da empresa no fechamento do ano anterior (LAJIR/PL), dessa forma é possível formar o prêmio de lucratividade. O fator investimento reflete a expansão dos ativos no balanço patrimonial,

$$\frac{\text{Ativo Total}_{t-1} - \text{Ativo Total}_{t-2}}{\text{Ativo Total}_{t-2}},$$

em que  $\text{Ativo Total}_{t-1}$  refere-se ao fechamento do balanço contábil ano anterior e a notação  $\text{Ativo Total}_{t-2}$  ao segundo ano anterior. Assim precisamos de duas defasagens anuais para a criação do prêmio de risco de investimento.

De acordo com Fama e French (2015), os prêmios de riscos dos fatores são SMB (*small minus big*), HML (*high minus low* PL/VM), RMW (*robust minus weak* OP) e CMA (*conservative minus aggressive* INV). O prêmio SMB representam os retornos médios da carteira composta por ações cujas empresas possuem menor valor de mercado (tamanho pequeno) menos os retornos médios da carteira composta por ações cujas empresas possuem maior valor de mercado (tamanho grande). O prêmio HML representa os retornos médios da carteira composta por ações cujas empresas possuem alto PL/VM (alta razão de valorização) menos os retornos médios da carteira composta por ações cujas empresas possuem baixo PL/VM (baixa razão de valorização). O prêmio RMW representam os retornos médios da carteira composta por ações cujas empresas possuem um lucro elevado (robusto) menos os retornos médios da carteira composta por ações cujas empresas possuem um baixo lucro (fraco). Por fim, o prêmio CMA representam os retornos médios da carteira composta por ações cujas empresas possuem baixo nível de investimento (conservador) menos os retornos médios da carteira composta por ações cujas empresas possuem um alto nível de investimento (agressivo). Os critérios que separam os valores dos prêmios estão expressos na seção 4.2.

A partir das carteiras montadas com base em retornos mensais são calculados os

prêmios de risco dos cinco fatores. O modelo de regressão linear é expresso a seguir:

$$R_{i,t} - R_{f,t} = a_i + b_i(R_{m,t} - R_{f,t}) + s_iSMB_t + h_iHML_t + r_iRMW_t + c_iCMA_t + e_{i,t}, \quad (3.11)$$

em que,  $R_{i,t}$  é o retorno da carteira  $i$  no período  $t$ ;  $R_{f,t}$  retorno do ativo livre de risco no período  $t$ ;  $R_{m,t}$  o retorno da carteira de mercado no período  $t$ ;  $SMB_t$  o prêmio de risco pelo fator tamanho no período  $t$ ;  $HML_t$  o prêmio de risco pelo fator PL/VM no período  $t$ ;  $RMW_t$  o prêmio de risco pelo fator lucratividade (OP) no período  $t$ ;  $CMA_t$  o prêmio de risco pelo fator investimento (INV) no período  $t$  e  $e_{i,t}$  é o termo de erro do modelo. Tratando os parâmetros em (3.11) como os verdadeiros valores, e se  $b_i$ ,  $s_i$ ,  $h_i$ ,  $r_i$  e  $c_i$  capturam toda a variação nos retornos esperados, então o intercepto  $a_i$  deve ser igual a zero para todas as carteiras de ações. Neste trabalho é apresentado um modelo marginal, isto é, esta sendo analisado o comportamento dos prêmios de risco para dada carteira fixada.

A construção dos prêmios de riscos dos fatores é de fundamental importância para a análise do modelo de precificação. O modelo tenta capturar as influências dos prêmios de riscos sobre os excessos de retornos médios das carteiras de ações. A construção dos prêmios de riscos está formalmente descrita na seção 4.3.

### 3.3 Modelo de Regressão Linear Múltiplo

O modelo de regressão linear clássico pode ser representado por

$$\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e},$$

sendo que  $y_{1 \times T}$  é o vetor de observações da variável resposta,  $X_{T \times k}$  é a matriz de observações das variáveis explicativas (matriz do modelo),  $\beta_{k \times 1}$  é o vetor de parâmetros do modelo com  $j = 1, \dots, k$  e  $e_{T \times 1}$  o vetor de erros aleatórios. Segundo Hoffmann e Vieira (2016), algumas suposições são feitas sobre o modelo de regressão linear clássico. Supõe-se que: (i) a relação entre  $X$  e  $y$  seja linear; (ii) os erros tem média zero, isto é,  $E(e) = 0$ ; (iii) A variância dos erros seja sempre  $\sigma^2$ , ou seja, os erros sejam homocedásticos; (iv) os erros devem ter distribuição Normal, ou seja,  $e \sim \mathcal{N}(0_T, \sigma^2 I_T)$ , em que  $I_T$  representa a matriz identidade de ordem  $T$ ; (v) o erro de uma observação seja não correlacionado com o erro de outra observação, isto é,  $E(e_i, e_j) = E(e_i)E(e_j)$ ,  $\exists i \neq j$ ; (vi) as colunas de  $X$  sejam linearmente independentes, isto é,  $posto(X) = k$ .

Se todas essas suposições forem satisfeitas, a estimativa dos coeficientes do modelo pode obtida ao minimizar a soma do quadrado dos resíduos, ou seja, minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre os valores estimados e os dados observados, conhecido na literatura como Estimador de Mínimos Quadrados Ordinários (EMQO). Entre as propriedades do EMQO estão: a linearidade de  $y$ ; é um estimador não viciado de  $\beta_k$  para

$k = 1, \dots, T$ ; a matriz de covariância é dada por  $\sigma^2(X^\top X)^{-1}$  (GUJARATI; PORTER, 2010).

## 3.4 Diagnósticos dos resíduos

A análise dos resíduos servirá para a sustentação das suposições da teoria clássica de regressão linear de que os resíduos têm distribuição normal, variância constante e ausência de autocorrelação. Essas hipóteses são a base para a utilização do Estimador de Mínimos Quadrados Ordinários (EMQO) e que serão testadas nessa tese. A descrição detalhada desses diagnósticos estão expressas nas seções 3.4.1, 3.4.2 e 3.4.3.

### 3.4.1 Diagnóstico de normalidade

A distribuição normal possui dois parâmetros de importante relevância que serão usados para análise dos resíduos. A média é o parâmetro de localização e é expresso por  $E(\mu)$ , e o desvio padrão o parâmetro de dispersão que é expresso por  $\sigma$ .

O teste de normalidade Jarque-Bera é utilizado para avaliar se os resíduos são normalmente distribuídos, esse teste é assintótico e quanto maior o tamanho da amostra mais confiável se torna. O objetivo desse teste é verificar se existe normalidade por meio das estimativas da assimetria e curtose dos resíduos que foram obtidos através do método de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) (GUJARATI; PORTER, 2010). A estatística do teste é dada por

$$JB = T \left[ \frac{S^2}{6} + \frac{(C - 3)^2}{24} \right],$$

onde  $T$  é o tamanho da amostra,  $S$  e  $C$  são os coeficientes de assimetria e curtose amostral, respectivamente.

Esse teste considera a hipótese conjunta de que os resíduos são pertencentes a uma distribuição normal cujos coeficientes  $S$  e  $C$  são iguais a 0 e 3 respectivamente. Portanto, para obter o resultado de que os resíduos possuem distribuição normal, a estatística de Jarque-Bera terá que ter valor igual a zero. A hipótese nula deste teste é de que os resíduos seguem a distribuição normal (GUJARATI; PORTER, 2010). Sob a hipótese nula:

$$JB \xrightarrow{d} \chi_2^2,$$

ou seja, a estatística de teste de normalidade Jarque-Bera converge em distribuição para uma distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade.

### 3.4.2 Diagnóstico de homocedasticidade

No modelo de regressão é importante que os erros sejam homocedásticos, ou seja, tenham variância constante. Porém, em dados de corte transversal<sup>3</sup> é comum encontrar resíduos cujas variâncias são afetadas pelos regressores, assim, na maioria desses casos a variância é heterocedástica. Este problema também ocorre quando há dados que se diferem muito das demais observações e em casos que o modelo não está bem especificado (GUJARATI; PORTER, 2010).

Nesta tese é utilizado o teste de Breusch-Pagan para verificar se os resíduos podem ser considerados heterocedásticos. Essa teste não necessita da suposição de normalidade para ser realizado, contudo, na ocorrência de normalidade o poder do teste é maior, ou seja, diminui a probabilidade de se cometer erro do tipo II<sup>4</sup>, e outra vantagem é que não necessita de reordenação das observações. A hipótese nula é a de que os resíduos são homocedásticos contra a hipótese alternativa de que há heterocedasticidade. A variância do teste de Breusch-Pagan é descrita como,

$$\sigma^2 = f(\alpha_1 + \alpha_2 z_{2i} + \dots + \alpha_m z_{mi})$$

onde a função  $f$  é contínua e duas vezes diferenciável. Algumas ou todas as variáveis independentes do modelo podem servir de  $z$ . A estatística de teste é dada por:

$$BP = \frac{SQE}{2}$$

onde  $SQE$  é a soma dos quadrados explicados<sup>5</sup>. A estatística de teste de Breusch-Pagan converge em distribuição para uma distribuição qui-quadrado com  $m - 1$  graus de liberdade,

$$BP \underset{d}{\sim} \chi_{m-1}^2.$$

Dado que os resíduos são heterocedásticos, não será mais viável utilizar a matriz de covariâncias e variâncias do estimador de mínimos quadrados ordinários, pois esta é viesada e pode influenciar as estimativas dos coeficientes, além de influenciar os testes que verificam a significância. Assim, na existência de heterocedasticidade o EMQO não apresenta variância mínima entre todos os estimadores lineares não tendenciosos, ou seja, o EMQO deixa de ser eficiente em relação a outros estimadores (GUJARATI; PORTER, 2010). A alternativa desta tese para contornar o problema de viés ao realizar o teste de hipótese é a utilização da estatística de teste Quasi-t do estimador HC2 de Horn, Horn

<sup>3</sup> Apesar da abordagem desta tese ser temporal, por não tratar da evolução do fenômeno temporalmente, caracteriza-se como modelo de corte transversal, visto que é considerado a independência dos resíduos ao longo do tempo.

<sup>4</sup> O erro tipo II ocorre quando a hipótese falsa não é rejeitada.

<sup>5</sup> Soma dos quadrados explicados é o somatório da diferença entre a variável explicativa estimada e observada elevada ao quadrado.

e [Duncan \(1975\)](#). Este utiliza o  $h_t$ , medida de alavancagem, na estimativa da matriz de covariância. Então

$$\hat{\psi} = (X^\top X)^{-1} \hat{\phi}_2 X (X^\top X)^{-1},$$

onde

$$\hat{\phi}_2 = \text{diag} \left\{ \frac{\hat{e}_1^2}{1 - h_1}, \dots, \frac{\hat{e}_T^2}{1 - h_T} \right\}$$

Este estimador foi criado com o intuito de reduzir a sub-estimação da variância.

### 3.4.3 Diagnóstico de independência

[Gujarati e Porter \(2010\)](#) descrevem a autocorrelação como correlação entre elementos de séries de observações que podem ser ordenadas no tempo ou no espaço. No modelo de regressão linear clássico é pressuposto ausência de autocorrelação entre os termos de erro ( $e$ ), ou seja, o termo de erro de uma determinada observação não pode estar correlacionado com o termo de erro de outra observação. Em outras palavras, autocorrelação significa uma dependência verificada entre uma defasagem da série com ela mesma e pode ser expressa como

$$E(e_t e_{t-j}) \neq 0 \quad j \neq 0.$$

O teste de detecção de autocorrelação utilizado nesta tese é o teste estatístico de Durbin-Watson, definido como:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{t=T} (\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{t=T} \hat{e}_t^2}, \quad (3.12)$$

em que o numerador da equação é a soma das diferenças elevada ao quadrado, enquanto o denominador é a soma do quadrado dos resíduos. Note que está estatística se baseia nos resíduos estimados. [Durbin e Watson \(1950\)](#) determinaram um limite inferior  $d_L$  e um limite superior  $d_U$ , tal que, se o valor de  $d$  estiver fora destes limites, então o modelo estimado possui correlação serial dos resíduos.

Após realizar procedimentos matemáticos visando a simplificação da equação (3.12) a estatística do teste de Durbin-Watson resume-se a:

$$d = 2(1 - \hat{\rho}). \quad (3.13)$$

Como o coeficiente de correlação estimado  $\hat{\rho}$  se encontra no intervalo  $-1 \leq \rho \leq 1$ , então implicará que o teste de Durbin-Watson estará no intervalo de  $0 \leq d \leq 4$ . No formato da equação (3.13) a hipótese testada, hipótese nula, é de  $\rho = 0$  e essa hipótese é rejeitada ao nível de  $2\alpha$  se  $d$  estiver fora do intervalo de  $d_U \leq d \leq 4 - d_U$ . Assim como no caso de heterocedasticidade, ao detectar presença de autocorrelação o EMQO não apresenta variância mínima e deixa de ser eficiente.

### 3.5 Modelos Aditivos Generalizados para Posição, Escala e Forma (GAMLSS)

Modelos Aditivos Generalizados para Localização, Escala e Forma (GAMLSS - *Generalized Additive Models for Location, Scale and Shape*) são modelos de regressão semi-paramétricos que requerem uma suposição de distribuição paramétrica para a variável resposta. Os modelos GAMLSS foram propostos por [Rigby e Stasinopoulos \(2001\)](#), [Akantziliotou, Rigby e Stasinopoulos \(2002\)](#) e [Rigby e Stasinopoulos \(2005\)](#) como melhoria e extensão aos Modelos Lineares Generalizados (GLM) ([NELDER; WEDDERBURN, 1972](#)) e Modelos Aditivos Generalizados (GAM) ([HASTIE; TIBSHIRANI, 1990](#)).

Nos modelos GAMLSS é possível suportar distribuições com formas bastante flexíveis, incluindo distribuições contínuas ou discretas com diferentes graus de assimetrias e curtoses. O regressor do modelo é expandido para permitir a modelagem de outros parâmetros da distribuição da variável resposta, além da média. Esta abordagem é bastante útil para modelar uma variável resposta que não segue uma distribuição da família exponencial<sup>6</sup>.

No modelo GAMLSS considera-se que as observações da variável  $y_t$  são independentes para  $t = 1, 2, \dots, T$  com função de densidade de probabilidade dada por  $f(y_t|\theta^t)$ , cuja implementação em *software* R, através do pacote “gamlss” é condicionada aos vetores de quatro parâmetros da distribuição  $\theta^t = (\theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}, \theta_{4t}) = (\mu_t, \sigma_t, \nu_t, \tau_t)$ , sendo que cada um pode ser uma função de algum preditor semi-paramétrico. Os parâmetros  $\mu_t$  e  $\sigma_t$  são geralmente parâmetros de localização e escala, enquanto os demais são parâmetros de forma, por exemplo, assimetria e curtose. Apesar do *software* R restringir o modelo a estimação de 4 parâmetros é possível a implementação de modelagens utilizando outros parâmetros fora desse escopo. Segundo [Stasinopoulos, Rigby e Akantziliotou \(2006\)](#), temos que  $y^\top = (y_1, y_2, \dots, y_T)$  é um vetor de observações da variável dependente de tamanho  $T$ ; nessa tese, esse vetor é composto pelos excessos de retornos de uma carteira em cada período considerado. Adicionalmente, para  $k = 1, 2, 3, 4$  temos que  $g_k(\cdot)$  é uma função de ligação conhecida que relaciona os parâmetros da distribuição para variáveis dependentes na forma sistemática

$$g_k(\theta_k) = \eta_k = X_k\beta_k + \sum_{j=1}^{j_k} Z_{jk}\gamma_{jk}, \quad (3.14)$$

ou seja,

$$g_1(\mu) = \eta_1 = X_1\beta_1 + \sum_{j=1}^{j_1} Z_{j1}\gamma_{j1}$$

$$g_2(\sigma) = \eta_2 = X_2\beta_2 + \sum_{j=1}^{j_2} Z_{j2}\gamma_{j2}$$

<sup>6</sup> Diversas distribuições conhecidas são pertencentes à família exponencial, como exemplos normais, gama, beta, Weibull e multinomial ([CASELLA; BERGER, 2002](#)).

$$g_3(\nu) = \eta_3 = X_3\beta_3 + \sum_{j=1}^{j_3} Z_{j3}\gamma_{j3}$$

$$g_4(\tau) = \eta_4 = X_4\beta_4 + \sum_{j=1}^{j_4} Z_{j4}\gamma_{j4}.$$

Aqui,  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\nu$  e  $\tau$  são vetores de tamanho  $T$ ,  $\beta_k^\top = (\beta_{1k}, \beta_{2k}, \dots, \beta_{j'_k k})$  é o vetor de parâmetros de tamanho  $j'_k$ ,  $X_k$  é a matriz desenho com variáveis conhecidas de ordem  $T \times j'_k$  (neste trabalho será composta pelos prêmios de riscos dos cinco fatores),  $Z_{jk}$  é uma matriz de desenho (matriz de covariáveis) conhecida de ordem  $T \times q_{jk}$  e  $\gamma_{jk}$  é uma variável aleatória  $q_{jk}$ -dimensional  $q_{jk}$  que assumisse ser distribuída como  $\gamma_{jk} \sim N_{q_{jk}}(0, G_{jk}^{-1})$ , em que,  $G_{jk}^{-1}$  é a inversa da matriz simétrica  $G_{jk} = G_{jk}(\lambda_{jk})$  de tamanho  $q_{jk} \times q_{jk}$  que depende de um vetor de hiperparâmetros  $\lambda_{jk}$ . Se  $G_{jk}$  é singular, então  $\gamma_{jk}$  tem uma função de densidade proporcional a  $\exp(-\frac{1}{2}\gamma_{jk}^t G_{jk} \gamma_{jk})$ .

A equação (3.14) é bastante flexível e permite a modelagem de todos os parâmetros da distribuição, como função linear, não linear, paramétrica, não paramétrica das variáveis independentes e/ou termos de efeitos aleatórios. Os parâmetros do termo aditivo podem ser modelados de forma não linear, a exemplo de suavizações (suavizadores kernel, splines, polinômios fracionários, etc). Pode-se expressar o modelo GAMLSS de outra forma, também muito comum em planejamentos experimentais, por exemplo, fazendo  $Z_{jk} = I_n$ , onde  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n \times n$ , e  $\gamma_{jk} = h_{jk} = h_{jk}(x_{jk})$  para todas as combinações de  $j$  e  $k$  expressa na equação (3.14), a formulação do modelo GAMLSS passa a ter um termo aditivo semi paramétrico:

$$g_k(\theta_k) = \eta_k = X_k\beta_k + \sum_{j=1}^{j_k} h_{jk}(x_{jk}),$$

em que a função  $h_{jk}$  é uma função desconhecida da variável independente  $x_{jk}$  e  $h_{jk}(x_{jk})$  é um vetor que avalia a função de  $h_{jk}$  em  $x_{jk}$ . Caso não existam termos aditivos não paramétricos no modelo, tem-se o modelo GAMLSS linear na forma paramétrica simples, que será o objeto de estudo desta pesquisa, i.e.,

$$g_k(\theta_k) = \eta_k = X_k\beta_k. \quad (3.15)$$

Substituindo na equação (3.15) as variáveis dos cinco fatores, temos que o submodelo da média será da forma

$$g_k(\mu) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5, \quad (3.16)$$

em que as variáveis explicativas são os prêmios de riscos dos cinco fatores de [Fama e French \(2015\)](#). O vetor  $\beta_j$  para  $j = 1..5$  determina o efeito dos prêmios de riscos sobre o excesso de retorno para cada carteira analisada.

O vetor de parâmetros  $\beta_k$  e os parâmetros de efeitos aleatórios  $\gamma_{jk}$ , modelo da equação (3.14), para  $j = 1, 2, \dots, j_k$  e  $k = 1, 2, 3, 4$  são estimados no arcabouço GAMLSS pela maximização da função  $l_p$  de log verossimilhança penalizada dada por

$$l_p = l - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^{j_k} \lambda_{jk} \gamma'_{jk} G_{jk} \gamma_{jk}, \quad (3.17)$$

em que  $l = \sum_{i=1}^n \log f(y_i/\theta^i)$  é a função de log-verossimilhança do modelo.

Portanto, os modelos GAMLSS possuem características desejáveis em aplicações no mercado financeiro, seja pela flexibilidade distribucional que permitem modelar através de distribuições não convencionais, como no caso de distribuições de cauda pesada, seja pela capacidade do modelo na estimação de um conjunto maior de parâmetros que incluem localização, escala e forma.

### 3.5.1 Os Algoritmos

Nos modelos GAMLSS é preciso utilizar um algoritmo para maximização da função de verossimilhança penalizada expressa na equação (3.17). Segundo [Stasinopoulos, Rigby et al. \(2007\)](#) existem dois algoritmos básicos que pode ser utilizados para essa tarefa, os algoritmos CG ([COLE; GREEN, 1992](#)) e o RS ([RIGBY; STASINOPOULOS, 1996](#)). O algoritmo CG utiliza a segunda derivada e as derivadas cruzadas da função de máxima verossimilhança penalizada em relação aos parâmetros da distribuição. Contudo, em muitas funções de densidade de probabilidade  $f(y_t|\theta^t)$ , os parâmetros são ortogonais, devido ao fato de suas derivadas cruzadas serem iguais a zero ([STASINOPOULOS; RIGBY et al., 2007](#)). Já o algoritmo RS, por se tratar de um algoritmo mais simples, não utiliza as derivadas cruzadas, porém, o RS pode demorar a convergir.

O algoritmo maximiza a equação (3.17) para os hiper-parâmetros  $\lambda$  que são fixos. O GAMLSS permite a utilização de uma combinação dos dois algoritmos. As vantagens desses algoritmos foram elencadas em [Stasinopoulos, Rigby et al. \(2007\)](#) como: i) procedimento de ajuste modular, permitindo diferentes diagnósticos para cada parâmetros da distribuição; ii) distribuições extras podem ser adicionados facilmente; iii) termos aditivos também podem ser adicionados facilmente; iv) o procedimento exige valores iniciais dos parâmetros  $\theta$  e não para os  $\beta$ . [Stasinopoulos, Rigby et al. \(2007\)](#) afirma que os algoritmos foram considerados estáveis e converge rapidamente utilizando valores iniciais simples para os parâmetros.

### 3.5.2 Descrição das Distribuições ajustadas em GAMLSS

Esta seção trará uma breve descrição das distribuições escolhidas para a modelagem dos cinco fatores de [Fama e French \(2015\)](#). As distribuições que melhor se ajustou aos

modelos baseado nos critérios de seleções desvio global (GD), AIC e SBC foram as, família  $t$  (TF), assimétricas  $t$  do tipo 1 (ST1) e generalizadas  $t$  (GT).

### 3.5.2.1 Distribuição família $t$ (TF)

A função de distribuição família  $t$  é definida como uma distribuição de três parâmetros formados pela localização ( $\mu$ ), escala ( $\sigma$ ) e a curtose ( $\tau$ ) como parâmetro de forma.

A distribuição família  $t$  ( $TF(\mu, \sigma, \tau)$ ) é definida ao assumir que  $Y = \mu + \sigma K$ , sendo  $K \sim t_\tau$  uma distribuição  $t$  padrão com  $\tau$  graus de liberdade. Denotando  $K = Z(\frac{W}{\tau})^{-\frac{1}{2}}$ , seja  $Z \sim N(0, 1)$  (normal padrão) e  $W \sim \chi_\tau^2 \equiv \text{Gamma}(\tau, [\frac{2}{\tau}]^{\frac{1}{2}})$ , sendo  $Z$  e  $W$  variáveis aleatórias independentes. Observa-se que  $W$  possui uma distribuição qui quadrado com  $\tau$  graus de liberdade, sendo  $\tau$  tratado como parâmetro de curtose contínuo (JOHNSON; KOTZ; BALAKRISHNAN, 1995).

A função de densidade da distribuição família  $t$  é definida por:

$$f(y|\mu, \sigma, \tau) = \frac{\Gamma(\frac{\tau+1}{2})}{\sigma\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\tau}{2})\tau^{0,5}} \left[ 1 + \frac{(y - \mu)^2}{\tau\sigma^2} \right]^{-\frac{(\tau+1)}{2}}$$

em que  $y, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  e  $\tau > 0$ . A distribuição  $TF(\mu, \sigma, \tau)$  é simétrica em torno de  $y = \mu$ . Assumindo  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$  obtemos a distribuição  $t$ -Student com  $\tau$  graus de liberdade, cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(y) = \frac{\Gamma(\frac{\tau+1}{2})}{\sqrt{\tau\pi}\Gamma(\frac{\tau}{2})} \left[ 1 + \frac{y^2}{\tau} \right]^{-\frac{(\tau+1)}{2}},$$

onde  $-\infty < y < \infty$ .

A distribuição TF também comporta modelo de dados leptocúrticos, ou seja, dados de curtose maior que a curtose da distribuição normal (RIGBY et al., 2019). As medidas da distribuição família  $t$  foram obtidas por Johnson, Kotz e Balakrishnan (1995) e estão inseridas na Tabela 1.

### 3.5.2.2 Distribuição assimétrica $t$ tipo 1 (ST1)

A distribuição assimétrica  $t$  do tipo 1 é uma generalização da distribuição assimétrica normal e é paramétrica flexível para o ajuste dos dados, por incluir parâmetros que permitem o ajuste da assimetria e curtose (ÁLVAREZ; GAMERO, 2012).

Azzalini (1985) propôs um método para introdução de assimetria em funções de probabilidade simétricas. Supondo que  $f_{Z_1}(z)$  é uma função de densidade de probabilidade simétrica de  $z$  em torno de 0 e  $F_{Z_2}(z)$  é uma função de distribuição acumulada contínua. Sendo que a derivada de  $F_{Z_2}(z)$  em relação a  $z$  é simétrica em torno de 0. Então, para

Tabela 1 – Medidas da distribuição família  $t$ .

| Medidas da Distribuição |   |
|-------------------------|---|
| Média                   | $\begin{cases} \mu, & \text{se } \tau > 1 \\ \text{indefinido}, & \text{se } \tau \leq 0 \end{cases}$                 |
| Mediana                 | $\mu$   |
| Moda                    | $\mu$   |
| Variança                | $\begin{cases} \frac{\sigma^2 \tau}{\tau - 2}, & \text{se } \tau > 2 \\ \infty, & \text{se } \tau \leq 2 \end{cases}$ |
| Assimetria              | $\begin{cases} 0, & \text{se } \tau > 3 \\ \text{indefinido}, & \text{se } \tau \leq 3 \end{cases}$                   |
| Excesso de Curtose      | $\begin{cases} \frac{6}{\tau - 4}, & \text{se } \tau > 4 \\ \infty, & \text{se } \tau \leq 4 \end{cases}$             |

qualquer valor real de  $\nu$  (coeficiente de assimetria), tem-se a função de densidade de probabilidade  $f_Z(z)$  dada por

$$f_Z(z) = 2f_{Z_1}(z)F_{Z_2}(\nu z).$$

Considere  $Y = \mu + \sigma Z$ , então:

$$f_Y(y) = \frac{2}{\sigma} f_{Z_1}(z) F_{Z_2}(\nu z),$$

onde  $z = \frac{(y-\mu)}{\sigma}$ . Este método permite a criação de famílias de distribuições assimétricas como é o caso das distribuições assimétrica normal e assimétrica  $t$  do tipo 1.

Considerando a assimétrica  $t$  tipo 1 ( $ST1(\mu, \sigma, \nu, \tau)$ ) assumindo que  $Z_1$  e  $Z_2$  são distribuições  $t$  de Student com  $\tau > 0$  graus de liberdade,  $\tau$  é tratado como parâmetro contínuo de curtose. Sendo  $f_{Z_1}$  uma função de densidade de probabilidade de  $Z \sim TF(0, 1, \tau)$  e  $F_{Z_2}$  uma função de distribuição acumulada de  $F_{Z_2} \sim TF(0, 1, \tau)$  (RIGBY et al., 2019). Então a função de densidade de probabilidade da ST1 pode ser expressa por:

$$f(y|\mu, \sigma, \nu, \tau) = \begin{cases} \frac{c}{\sigma_0} \left[1 + \frac{\nu^2 z^2}{\tau}\right]^{-\frac{(\tau+1)}{2}} & \text{se } y < \mu_0 \\ \frac{c}{\sigma_0} \left[1 + \frac{z^2}{\nu^2 \tau}\right]^{-\frac{(\tau+1)}{2}} & \text{se } y \geq \mu_0. \end{cases}$$

Em que  $-\infty < \mu < +\infty$ ,  $\sigma > 0$ ,  $-\infty < \nu < +\infty$  e  $\tau > 0$  para  $-\infty < y < +\infty$ . Esta distribuição tem a forma tipo 1 descrita por Azzalini (1986). Hansen, McDonald e Theodossiou (2007) após realizarem algumas restrições e padronizações descrevem o fluxograma da Figura 1. É importante ressaltar que a distribuição assimétrica  $t$  é a distribuição de densidade da  $t$  com a adição do parâmetro de assimetria.

Esta é uma distribuição de caudas pesada. A distribuição assimétrica  $t$  é aplicável em regressão linear, regressão múltipla e séries temporais, e útil em modelagens estatísticas robustas (JONES; FADDY, 2003).

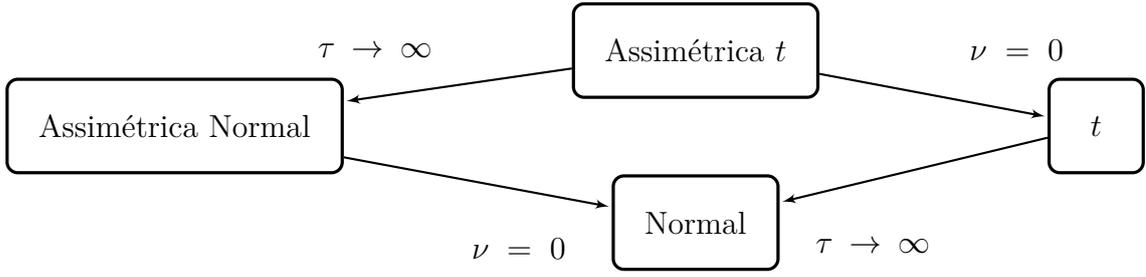


Figura 1 – Fluxograma das Distribuições Derivadas da Assimétrica  $t$

### 3.5.2.3 Distribuição generalizada $t$ (GT)

A distribuição  $t$  é utilizada para modelar dados com cauda pesada, porém os dados podem apresentar caudas muito mais pesadas ou mais leves do que a distribuição  $t$  pode acomodar. De acordo com [Verster e DJ \(2011\)](#) a distribuição generalizada  $t$  é mais adequada para dados que apresentam o comportamento das caudas mais pesadas ou mais leves do que as da distribuição  $t$  usual. A função de densidade de probabilidade da distribuição generalizada  $t$  é definida por:

$$f(y|\mu, \sigma, \tau, \vartheta) = \vartheta \left\{ 2\sigma\tau^{\frac{1}{\vartheta}} \mathcal{B}\left(\frac{1}{\vartheta}, \tau\right) \left[1 + \frac{z^{\vartheta}}{\tau}\right]^{\tau + \frac{1}{\vartheta}} \right\}^{-1},$$

em que  $-\infty < y < \infty$ ,  $z = \frac{(y-\mu)}{\sigma}$ ,  $\mu = (-\infty, +\infty)$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $\vartheta > 0$  e  $\mathcal{B}\left(\frac{1}{\vartheta}, \tau\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{\vartheta})\Gamma(\tau)}{\Gamma(\frac{1}{\vartheta} + \tau)}$ , sendo  $\tau$  o primeiro parâmetro de curtose e  $\vartheta$  o segundo parâmetro de curtose. A distribuição GT( $\mu, \sigma, \tau, \vartheta$ ) é simétrica em torno de  $y = \mu$  e unimodal ([RIGBY et al., 2019](#)).

A distribuição generalizada  $t$  define uma família muito geral de funções de densidade e é uma combinação de duas formas gerais de funções de densidade que incluem a maioria das especificações estocásticas considerados como casos especiais ou de limitações. [McDonald e Newey \(1988\)](#) desenvolve a função de distribuição da GT e da exponencial de potência fazendo a suposição de que  $\mu = 0$ . Então, extraindo o limite da equação GT em relação a  $\tau$ , temos que:

$$f(y|\sigma, \vartheta) = \frac{\vartheta e^{-(\frac{|y|}{\sigma})^{\vartheta}}}{2\sigma\Gamma(\frac{1}{\vartheta})} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(y/\sigma, \tau, \vartheta). \quad (3.18)$$

Então do limite da equação (3.18) surgiu a função de densidade exponencial de potência (*Exponential power PE2*( $\mu, \sigma, \vartheta$ )) dada por:

$$f(y|\sigma, \vartheta) = \frac{\vartheta e^{-(\frac{|y|}{\sigma})^{\vartheta}}}{2\sigma\Gamma(\frac{1}{\vartheta})}. \quad (3.19)$$

Ao atribuir  $\vartheta = 2$  e  $\sigma = \sqrt{2}\alpha$  na equação (3.19), obtemos:

$$f(y|\sigma) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{|y|}{\alpha})^2}}{\sqrt{2\pi\alpha^2}}, \quad (3.20)$$

ou seja, a equação (3.20) é uma função de densidade da distribuição normal  $N(0, \alpha^2)$ . Por outro lado, ao atribuir  $\vartheta = 2$  e  $\sigma = \sqrt{2}\alpha$  na função de densidade da GT com  $\mu = 0$  terá como resultado a distribuição  $t$  (com variância não unitária) e ao extrair o limite de  $\tau \rightarrow \infty$  chegará mais uma vez na distribuição normal  $N(0, \alpha^2)$  (MCDONALD; NEWEY, 1988). Hansen, McDonald e Theodossiou (2007) descrevem o fluxograma da distribuição GT conforme a Figura 2. A distribuição  $t$  é a função de densidade da GT ao fixar o parâmetro de curtose  $\vartheta = 2$ .

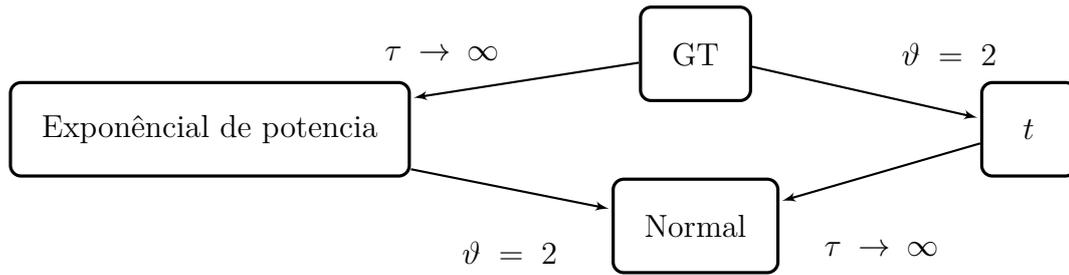


Figura 2 – Fluxograma das Distribuições Derivadas da GT

As medidas da distribuição GT foram obtidas por McDonald (1991) e estão inseridas na Tabela 2.

Tabela 2 – Medidas da distribuição GT.

| Medidas da Distribuição |   |
|-------------------------|---|
| Média                   | $\begin{cases} \mu, & \text{se } \tau\vartheta > 1 \\ \text{indefinido}, & \text{se } \tau\vartheta \leq 1 \end{cases}$   |
| Mediana                 | $\mu$   |
| Moda                    | $\mu$   |
| Variança                | $\begin{cases} \frac{\sigma^2 \tau^{\frac{2}{\vartheta}} B(3\vartheta^{-1}, \tau - 2\vartheta^{-1})}{B(\vartheta^{-1}, \tau)}, & \text{se } \tau\vartheta > 2 \\ \infty, & \text{se } \tau\vartheta \leq 2 \end{cases}$ |
| Assimetria              | $\begin{cases} 0, & \text{se } \tau\vartheta > 3 \\ \text{indefinido}, & \text{se } \tau\vartheta \leq 3 \end{cases}$   |
| Excesso de Curtose      | $\begin{cases} \frac{\sigma^2 \tau^{\frac{4}{\vartheta}} B(5\vartheta^{-1}, \tau - 4\vartheta^{-1})}{(\vartheta^{-1}, \tau)}, & \text{se } \tau\vartheta > 4 \\ \infty, & \text{se } \tau\vartheta \leq 4 \end{cases}$  |

### 3.6 Avaliação de performance dos modelos

Nesta tese será utilizado as avaliações de *performances* descritas em Fama e French (2016) que tem como objetivo a análise dos inteceptos dos modelos de cinco fatores. Também são incluídos a análise de diagnóstico através dos coeficientes de determinação (pseudo- $R^2$ ), Erro Médio Absoluto (MAE) e da Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE).

Segundo a teoria de precificação de ativos, se um modelo captura todos os retornos esperados, o intercepto é indistinguível de zero nas equações de excesso de retornos. A

maioria das avaliações de *performances* considera essa conclusão. A primeira avaliação de *performance* consiste em calcular a média do valor absoluto dos interceptos e será expressa pela notação:

$$A|a_i|,$$

em que o indicador  $A$  representa a média e  $a_i$  o intercepto do modelo  $i$  estimado. Em seguida é apresentada as avaliações de proporções cujo objetivo é medir a dispersão, isto é, o excesso de retorno médio inexplicado pelo modelo. As notações utilizadas para verificar essas proporções são:

$$\frac{A|a_i|}{A|\bar{r}_i|} \quad \text{e} \quad \frac{Aa_i^2}{A\bar{r}_i^2},$$

em que a variável  $\bar{r}_i$  expressa a diferença dos excessos de retornos médios das carteira e o excesso de retorno médio do mercado financeiro. Dessa forma é possível perceber que o denominador é o mesmo para os modelos avaliados. A segunda proporção está ajustada para os erros de medição.

A última avaliação de *performance* baseado no intercepto é expresso da seguinte forma:

$$\frac{As^2(a_i)}{Aa_i^2} \tag{3.21}$$

e revela as estimativas para a proporção das dispersões do intercepto atribuídas ao erro de amostragem. Assim, supondo que:

$$a_i = \alpha_i + \varepsilon_i.$$

em que  $\alpha_i$  é a constante para o verdadeiro valor do intercepto e  $\varepsilon_i$  é o termo do erro. Então a esperança de  $a_i^2$  é dada por:

$$E(a_i^2) = \alpha_i^2 + E(\varepsilon_i^2),$$

como a esperança do termo de erro é igual a zero, assim a  $E(\varepsilon_i^2)$  é a variância de  $a_i$  devido ao erro de estimação, portanto, estimamos como o desvio padrão ao quadrado de  $a_i$ , cuja notação escreve-se como  $s^2(a_i)$ . Neste teste quanto maior o valor da equação (3.21) melhor o modelo, porque ele informa que grande parte da dispersão do intercepto é devido ao erro de amostragem e não devido à dispersão do verdadeiro intercepto.

O coeficiente de determinação pseudo- $R^2$  é incluído na avaliação de *performance* dos modelos. O pseudo- $R^2$  é uma generalização do  $R^2$  para modelos mais gerais, para os quais o conceito de variação residual não é facilmente definida e tem como critério de ajuste a máxima verossimilhança (NAGELKERKE et al., 1991). Assim como no  $R^2$ , o pseudo- $R^2$  assume valores no intervalo  $(0, 1)$ , e valores mais altos estão associados a um maior melhor poder explicativo. A equação do pseudo- $R^2$  é definida a seguir:

$$\text{pseudo} - R^2 = 1 - \left[ \frac{L(0)}{L_{\text{completo}}} \right]^{\frac{2}{T}},$$

em que  $L_{completo}$  é a função máxima verossimilhança do modelo com todas as covariáveis e  $L(0)$  é a função de máxima verossimilhança do modelo que contém apenas o intercepto (ou interceptos, se mais de um parâmetro de distribuição estiver sendo modelado).

Segundo (NAGELKERKE et al., 1991) o pseudo- $R^2$  possui as seguintes propriedades: (i) é consistente com o  $R^2$  clássico; (ii) é consistente com as estimativas por meio do método de máxima verossimilhança; (iii) é assintoticamente independente do tamanho da amostra; (iv) possui a mesma interpretação do  $R^2$ .

A unificação das métricas de avaliação de performance é fundamental para comparar a modelagem de regressão linear padrão e a modelagem GAMLSS. Então para gerar valores de pseudo- $R^2$  para as estimações da regressão linear padrão foi realizado o ajuste por máxima verossimilhança para geração de pseudo- $R^2$ , visto que, sob normalidade os resultados de MQO e máximo verossimilhança são idênticos.

O Erro Médio Absoluto (MAE) é utilizado para verificar a precisão dos modelos estimados. O MAE mede a magnitude média dos erros e é expressa pela média do somatório das diferenças entre os valores observados e os preditos em valores absolutos, isto é

$$MAE = \frac{\sum_{t=1}^T |y_t - \hat{y}_t|}{T}.$$

O MAE atribui pesos iguais para todas as diferenças individuais.

Por último, a Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE) é uma medida dos desvios médios entre os valores observados e preditos, definida como

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2}{T}}.$$

No modelo de cinco fatores os valores da variável resposta, tanto observada como predita são os excessos de retornos das carteiras. O RMSE atribui um peso relativamente alto aos grandes erros.

O MAE e RMSE expressam o erro médio de predição do modelo em unidades da variável de interesse. Os valores de ambos variam entre 0 e  $\infty$  e não considera a direção dos erros. Na avaliação do MAE e RMSE quanto menor o valor mais assertivo são as estimativas do modelo.

# 4 APLICAÇÃO PARA O MERCADO BRASILEIRO

## 4.1 Amostra

Para a avaliação da metodologia proposta, foca-se a atenção ao mercado brasileiro. O Brasil é um país emergente<sup>1</sup> de grande visibilidade mundial que segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em 2018 obteve um Produto Interno Bruto (PIB) de 6,8 trilhões de reais em valores correntes. No mercado financeiro, o Brasil é um atrativo para investidores internacionais a procura de uma melhor rentabilidade de suas carteiras. A B3 (expressão em referência às letras iniciais de Brasil, Bolsa, Balcão) é a bolsa de valores oficial do Brasil com sede na cidade de São Paulo. Em 2017 a B3 possuía um patrimônio de 13 bilhões de dólares, sendo considerada a 5º maior bolsa de mercado de capitais e financeiro do mundo (MOREIRA, 2017).

Os dados foram selecionadas das cotações históricas de fechamento mensais, corrigidas por dividendos e proventos, das ações presentes na B3. A análise realizada compreende o período posterior a 1994, neste mesmo ano encerrou-se um período hiperinflacionário da economia brasileira, ou seja, descartamos as observações contaminadas pelo ambiente desestruturado que existia antes do plano Real e a amostra finda em dezembro de 2018. Os dados utilizados foram extraídos da base de dados da *Economática* (2020), *software* de dados do mercado financeiro. Os dados de retornos tem início em 1997, dado que é preciso de duas defasagens anuais devido ao fator de investimento como foi visto na seção 3.2.

## 4.2 As carteiras de análise

É preciso realizar algumas adaptações na formação das carteiras de análise propostas por Fama e French (2015) para a aplicação no Brasil, devido às especificidades do mercado financeiro brasileiro. Conforme Vieira et al. (2017), o tamanho do mercado financeiro brasileiro é uma limitação que dificulta a construção de carteiras diversificadas conforme proposto por Fama e French (2015), principalmente para períodos anteriores ao *boom* das IPO's<sup>2</sup> em 2008. O pequeno número de empresas listadas na B3, juntamente com o baixo volume de negociações corrobora com a impossibilidade de replicação das carteiras

<sup>1</sup> País emergente é um termo usado para descrever um país que possui uma base industrial em desenvolvimento e um Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) variando entre médio e elevado (ARTHUR; SHEFFRIN, 2003).

<sup>2</sup> IPO é a sigla para *Initial Public Offering*, ou Oferta Pública Inicial. Uma oferta pública inicial de ações é o momento em que a empresa abre seu capital e passa a ser listada na Bolsa de Valores.

formadas em Fama e French (2015).

Será utilizada para a aplicação dos cinco fatores no Brasil a metodologia de formação das carteiras proposta por Ruiz (2015). As variáveis dos fatores são ordenadas de forma crescente, de modo a dividi-las em grupos. O fator de risco de tamanho é o valor de mercado (VM) das empresas, sendo separada em dois grupos pela mediana do VM. Desta maneira, as empresas cujo VM ficou abaixo da mediana são consideradas empresas "*small*" ou pequena e nomeadas com a letra "S". Por outro lado, as empresas cujo VM ficou acima da mediana são consideradas empresas "*big*" ou grande e nomeadas com a letra "B". Portanto, foram criadas dois grupos de empresas para a variável VM. As outras variáveis são geradas do mesmo modo, mas sendo separadas em três grupos de acordo com os percentis 30% e 70%. Ao considerarmos o fator razão de valorização expressa pelo patrimônio líquido dividido pelo valor de mercado (PL/VM), as empresas cujo PL/VM estão abaixo do percentil 30% são consideradas "*low*" ou baixa e nomeadas com a letra "L". Por outro lado, as empresas cujo PL/VM estão acima do percentil 70% são consideradas "*high*" ou alta e nomeadas com a letra "H", caso o valor esteja entre os dois percentis a empresa é chamada de "*neutral*" ou neutra com a letra "N".

O processo de formação das carteiras é repetido para os demais fatores. O fator de lucratividade (OP) é dividida em três grupos de acordo com os percentis 30% e 70%. As empresas que possuem o OP abaixo do percentil de 30% são consideradas "*weak*" ou fracas e nomeadas pela letra "W", as empresas cujo OP estão acima do percentil 70% são consideradas "*robust*" ou robustas e nomeadas pela letra "R", caso esteja entre os percentis são consideradas "*neutral*" ou neutra e nomeadas com a letra "N". Por último, O fator investimento (INV), as empresas que estão abaixo do percentil 30% são consideradas "*conservative*" ou conservadoras e nomeadas pela letra "C", as empresas que estão acima do percentil 70% são consideradas "*aggressive*" ou agressivas e nomeadas com a letra "A". O caso em que as empresas estão entre os percentis são consideradas "*neutral*" ou neutras e nomeadas com a letra "N".

Após efetuar as estratificações das variáveis em grupos, construiremos as carteiras compostas pelas interseções desses grupos que foram formados. Serão feitas combinações dos dois grupos de VM com os três grupos das demais variáveis gerando carteiras do tipo  $2 \times 3$  que formaram seis carteiras de cada combinação entre VM e PL/VM, VM e OP e VM e INV, conforme expresso na Tabela 3. As carteiras serão compostas pelos excessos de retornos mensais, retorno médio das carteiras menos o retorno do ativo livre de risco. Como variável livre de risco para o Brasil será utilizado a taxa CDI<sup>3</sup> seguindo a proposta de Junior et al. (2011). Conforme Fama e French (2015), os retornos de cada carteira são ponderados pelo valor de mercado das empresas que compõem a carteira. O primeiro passo

<sup>3</sup> CDI (Certificados de Depósito Interbancário) são títulos emitidos por instituições financeiras. A finalidade destes títulos é a transferência de recursos entre Instituições que possuem reservas e Instituições que necessitam de capital para repor o seu caixa.

feito é o cálculo do preço da carteira em cada período da seguinte maneira:

$$P_{i,t} = \frac{\sum_{l=1}^N VM_{l,t} P_{l,t}}{\sum_{l=1}^N VM_{l,t}},$$

em que  $P_{i,t}$  é o preço da carteira  $i$  no período  $t$ ,  $VM_{l,t}$  é o valor de mercado da empresa  $l$  no mês  $t$  e  $P_{l,t}$  é o preço da empresa  $l$  no mês  $t$ . Posteriormente, os retornos da carteira é calculado como sendo a variação entre os instantes  $t$  e  $t - 1$ :

$$R_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}} \approx \log(P_{i,t}) - \log(P_{i,t-1}), \quad (4.1)$$

a expressão no lado direito da equação (4.1) é denotado por (log) retorno. O objetivo da ponderação feita pelo valor de mercado é fornecer um peso maior para as ações de empresas que possuem um porte maior em cada carteira.

Tabela 3 – Tabela explicativa dos portfólios  $2 \times 3$

| Carteiras $VM \times PL/VM$ |             | $PL/VM$   |            |          |
|-----------------------------|-------------|-----------|------------|----------|
|                             |             | Baixo (L) | Neutro (N) | Alto (H) |
| $VM$                        | Pequeno (S) | SL        | SN         | SH       |
|                             | Grande (B)  | BL        | BN         | BH       |

| Carteiras $VM \times OP$ |             | $OP$      |            |             |
|--------------------------|-------------|-----------|------------|-------------|
|                          |             | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) |
| $VM$                     | Pequeno (S) | SW        | SN         | SR          |
|                          | Grande (B)  | BW        | BN         | BR          |

| Carteiras $VM \times INV$ |             | $INV$           |            |               |
|---------------------------|-------------|-----------------|------------|---------------|
|                           |             | Conservador (C) | Neutro (N) | Agressivo (A) |
| $VM$                      | Pequeno (S) | SC              | SN         | SA            |
|                           | Grande (B)  | BC              | BN         | BA            |

Fonte: Ruiz (2015)

De acordo com Fama e French (2015), as carteiras serão rebalanceadas anualmente, permitindo que as ações de determinadas empresas possam mudar de carteira ao longo do período de estudo. A economia é muito dinâmica e empresas que possuem menor valor de mercado podem rapidamente se tornar empresas com maior valor de mercado e isso também acontecem com os outros fatores. Essa mobilidade das empresas de uma carteira para outra, a cada ano, permite capturar essa dinâmica de mercado. Os investidores do mercado financeiro costumam rebalancear suas carteiras conforme as mudanças do ambiente econômico das empresas. Portanto, a estratégia dessa aplicação é gerar análises que possam ser aplicadas por investidores na formação de suas carteiras.

#### 4.2.1 Critério de seleção das empresas

Uma forma de resolver o problema de baixa liquidez das empresas que estão inseridas na bolsa brasileira é utilizar o critério de índice de liquidez (IL). Seguindo Argolo, Leal e Almeida (2012), as empresas que obtiveram IL anual maior do que 0,001 entrarão na amostra, ou seja, empresas que obtiveram um volume de negociação de 0,001% em relação

ao volume de negociações totais. Serão excluídas da amostra as empresas com patrimônio líquido (PL) nulo ou negativo e sem informações sobre o PL, valor de mercado (VM), lucratividade, investimento e retorno. Além disso, serão excluídos bancos e seguradoras, pois, empresas desse segmento possuem características peculiares na composição do balanço patrimonial e do demonstrativo de resultados. Segundo [Vieira et al. \(2017\)](#) a inclusão de instituições financeiras pode enviesar o modelo, sobretudo com relação aos dados dos ativos disponibilizados no balanço. As empresas não poderão entrar mais de uma vez na mesma amostra, então optou-se pelas ações ordinárias<sup>4</sup> para empresas que possuem mais de um tipo de ações no mercado financeiro. Caso, opta-se por inserir todos os ativos da empresa na amostra teria-se um modelo enviesado, já que teríamos nas carteiras as diversas ações das mesmas empresas. Índice de liquidez representa a participação da empresa no mercado secundário<sup>5</sup> caso a empresa tenha participado do mercado financeiro durante todos os dias de negociações, i.e.,

$$IL_t = 100 \frac{d}{D} \sqrt{\frac{n}{N} \frac{v}{V}}, \quad (4.2)$$

em que  $d$  é o número de dias em que houve pelo menos uma negociação com a ação da empresa no período;  $D$  é o número total de dias no período;  $n$  é o número de negociações com a ação da referida empresa no período;  $N$  é o número de negociações com todas as ações das empresas na bolsa no período;  $v$  é o volume em dinheiro negociado da ação no período e  $V$  é o volume em dinheiro negociado com todas as ações das empresas da bolsa no período.

Na Figura 3 é representado o tamanho da amostra para cada ano utilizando como filtro o critério de liquidez e comparando com o tamanho da amostra sem o estabelecimento do critério de liquidez. O tamanho da amostra com critério de liquidez se refere-se as ações totais que foram utilizadas para compor as carteiras de análises. A média anual da amostra sem a utilização do filtro de liquidez é de 154 ações, enquanto para as ações que atendem o crivo de liquidez é de 126 que representa uma queda em média de 17% do total de ações.

### 4.3 Construção dos prêmios de riscos dos cinco fatores

O prêmio de risco de mercado  $R_{m,t} - R_{f,t}$  é construído utilizando os retornos do IBOVESPA como o retorno da carteira de mercado. O IBOVESPA é um índice formado por uma carteira teórica que representa o comportamento da bolsa brasileira. A composição dos

<sup>4</sup> Ações Ordinárias (ON) são ações que proporcionam aos investidores, participação nos lucros e resultados da empresa que a emitiu. Conferem a seu titular o direito de voto em assembleia-geral de acionistas, porém não dão direito preferencial a dividendos ([DOWNES; GOODMAN, 1993](#)).

<sup>5</sup> Mercado secundário é uma parte do mercado financeiro de capitais, dedicada à compra e venda de valores mobiliários, como exemplo as ações de empresas, lançados anteriormente em uma primeira oferta pública ou privada (mercado primário) ([DOWNES; GOODMAN, 1993](#)).

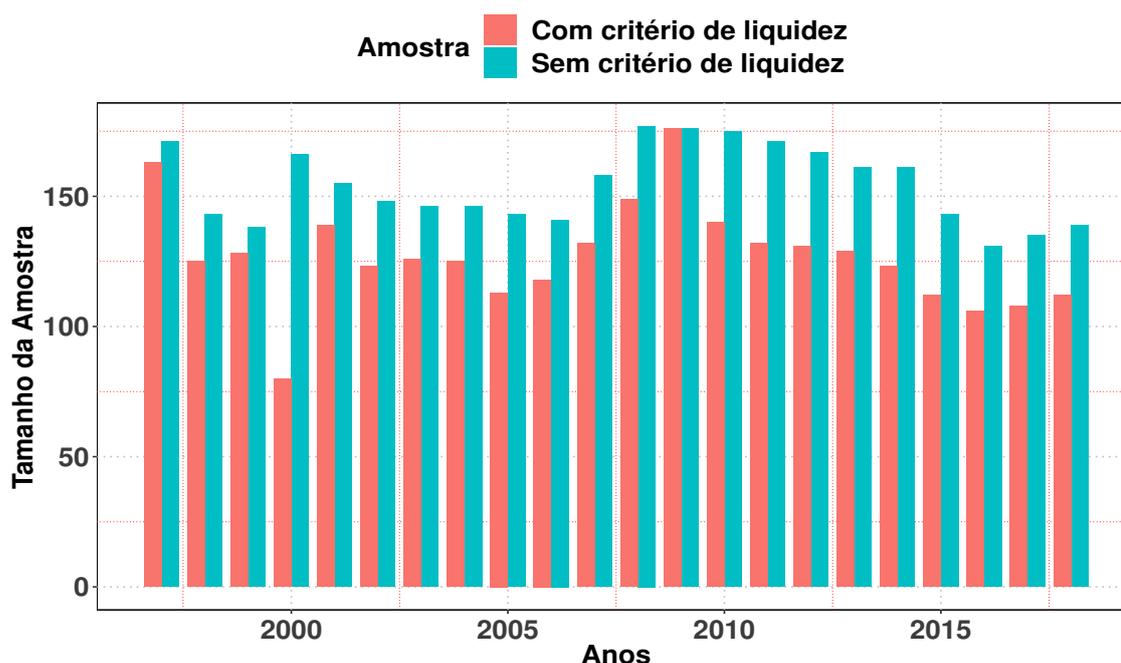


Figura 3 – Quantidade de ações por ano na amostra.

prêmios de riscos dos fatores de tamanho, razão de valorização, lucratividade e investimento são classificados em dois grupos de tamanho, três de razão de valorização, lucratividade e investimento e estão expressas na Tabela 4. As carteiras são definidas pela interseção dos grupos. Rotulamos essas carteiras com duas letras. A primeira letra descreve tamanho que expressa o valor de mercado, *small* (S) ou *big* (B) (pequeno ou grande) e a segunda letra descreve o grupo da razão de valorização (PL/VM), *high* (H), *neutral* (N) ou *low* (L) (alto, neutro ou baixo), o grupo de lucratividade (OP), *robust* (R), *neutral* (N) ou *weak* (W) (robusto, neutro ou fraco), ou o grupo de investimento (INV), *conservative* (C), *neutral* (N) ou *aggressive* (A) (conservador, neutro ou agressivo). Fama e French (2015) constrói cada fator utilizando os demais fatores como controles de modo a reduzir a correlação de cada fator com os demais fatores. Chama-se essa construção de carteira de  $2 \times 3$  porque as combinações são sempre entre o fator tamanho com os fatores de razão de valorização, lucratividade e investimento.

A divulgação do balanço contábil das empresas brasileiras inseridas na bolsa de valores é realizada no mês de dezembro de cada ano, por isso, utiliza-se esta informação para gerar os prêmios de risco. Fixa-se as carteiras e constroem-se os prêmios de risco de janeiro a dezembro, o procedimento é repetido para cada ano. Portanto, as carteiras são rebalanceadas a cada ano para a construção dos prêmios de risco.

Tabela 4 – Construção dos prêmios de riscos dos Fatores

|               |   |
|---------------|---|
| $SMB_{PL/VM}$ | $(SH + SN + SL)/3 - (BH + BN + BL)/3$                   |
| $SMB_{OP}$    | $(SR + SN + SW)/3 - (BR + BN + BW)/3$                   |
| $SMB_{INV}$   | $(SC + SN + SA)/3 - (BC + BN + BA)/3$                   |
| $SMB$         | $(SMB_{PL/VM} + SMB_{OP} + SMB_{INV})/3$                |
| $HML$         | $(SH + BH)/2 - (SL + BL)/2 = [(SH - SL) + (BH - BL)]/2$ |
| $RMW$         | $(SR + BR)/2 - (SW + BW)/2 = [(SR - SW) + (BR - BW)]/2$ |
| $CMA$         | $(SC + BC)/2 - (SA + BA)/2 = [(SC - SA) + (BC - BA)]/2$ |

Fonte: Fama e French (2015)

## 4.4 Resultados

A Tabela 5, expressa a média do excesso de retorno mensal para os portfólios ponderados pelo valor de mercado e com o critério de liquidez como filtro. No Painel A da Tabela 5, apresenta a média para o excesso de retorno de 6 carteiras formadas pelas combinações entre tamanho (VM) e razão de valorização (PL/VM). Carteiras que possuem alto PL/VM são carteiras que possuem maior média para o excesso de retorno em comparação as que possuem baixo PL/VM, independente do fator tamanho. Porém, a carteira que combina empresas com grande VM e neutro PL/VM possui 1,35% de excesso de retorno médio, sendo a combinação de maior valor no painel A. Nesse painel as carteiras com grande VM possui maior média para o excesso de retorno do que as empresas com pequeno VM, exceção para a carteira cujas empresas possuem pequeno VM e baixo PL/VM que apresentam 0,19% ante a 0,07% de média para o excesso de retorno de empresas com baixo PL/VM e grande VM. Portanto, há um efeito razão de valorização de modo que carteiras formadas por empresa com alto PL/VM possuem as maiores médias de excessos de retornos em comparação com baixo PL/VM, por outro lado, ao analisar as médias para os excessos de retornos das carteiras separadas por VM, ainda não é possível afirmar que existe efeito tamanho.

No Painel B da Tabela 5, apresenta a média para o excesso de retorno de 6 carteiras formadas pelas combinações entre valor de mercado (VM) e lucratividade (OP). Empresas que possuem OP robusto apresentam maior média para o excesso de retorno do que as empresas de OP fraco, independentemente do tamanho. Porém, o valor da combinação de OP neutro e VM pequeno é 0,14%, sendo maior que OP robusto e VM pequeno com -0,03%. Os resultados indicam que existem um possível efeito lucratividade, de modo que, as carteiras com as lucratividades robustas possuem as maiores médias para o excesso de retorno em comparação com as de lucratividade fraca. Do mesmo modo, empresas que possuem um grande VM apresentam maior média para o excesso de retorno do que as empresas que possuem um pequeno VM, independente da lucratividade, indicando um possível efeito de tamanho. Dentre as carteiras deste painel a que apresenta maior média para o excesso de retorno foi a que tem por combinação o grande VM e OP robusto com 1,09% de média para excesso de retorno.

No Painel C da Tabela 5, expressa a média para o excesso de retorno de 6 carteiras formadas por combinações entre valor de mercado (VM) e investimentos (INV). Dentre as empresas de pequeno VM, aquelas que possuem conservador nível de INV apresentaram uma maior média para o excesso de retorno. Considerando apenas as empresas de grande VM foi constatado que empresas que possuem neutro INV possuem maior média para o excesso de retorno. A carteira que tem por combinação um pequeno VM e conservador INV apresenta 0,36% ante a -0,08% de média para o excesso de retorno em relação à combinação de grande VM e conservador INV. Porém, a carteira que tem por combinação de grande VM e agressivo INV apresenta 0,94% ante 0,21% de média para o excesso de retorno em relação à carteira de pequeno VM e agressivo INV. Portanto, as carteiras do painel C não indicam possuir efeito de tamanho ou investimento.

Os resultados da Tabela 5, apesar de descritiva, ajudam a identificar quais combinações apresentam maiores médias de excesso de retornos. Estes resultados podem auxiliar os investidores em suas análises de formação de carteiras. Os efeitos encontrados ainda carecem de robustez estatística, mas possui um bom indicativo para uma melhor compreensão dos retornos de carteiras diversificadas.

Tabela 5 – Média do excesso de retorno mensal para portfólios ponderados pelo valor de mercado e com critérios de liquidez, formados por VM e VP/VM, VM e OP, VM e INV entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018.

| Painel A                    |             |           |            |          |
|-----------------------------|-------------|-----------|------------|----------|
| Carteiras $VM \times PL/VM$ |             | $PL/VM$   |            |          |
|                             |             | Baixo (L) | Neutro (N) | Alto (H) |
| VM                          | Pequeno (S) | 0,19%     | 0,02%      | 0,87%    |
|                             | Grande (B)  | 0,07%     | 1,37%      | 1,09%    |

| Painel B                 |             |           |            |             |
|--------------------------|-------------|-----------|------------|-------------|
| Carteiras $VM \times OP$ |             | OP        |            |             |
|                          |             | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) |
| VM                       | Pequeno (S) | -0,07%    | 0,14%      | -0,03%      |
|                          | Grande (B)  | 0,39%     | 0,42%      | 1,09%       |

| Painel C                  |             |                 |            |               |
|---------------------------|-------------|-----------------|------------|---------------|
| Carteiras $VM \times INV$ |             | INV             |            |               |
|                           |             | Conservador (C) | Neutro (N) | Agressivo (A) |
| VM                        | Pequeno (S) | 0,36%           | 0,06%      | 0,21%         |
|                           | Grande (B)  | -0,08%          | 1,17%      | 0,94%         |

Fonte: Elaboração Própria

A Figura 4 apresentam os gráficos de densidade dos excessos de retornos das carteiras formados pelas combinações entre tamanho e razão de valorização, tamanho e lucratividade, tamanho e investimento. Ao analisarmos os gráficos da Figura 4, pode-se observar que na maioria das carteiras os valores extremos ocorrem com grande frequência. Os destaques em valores atípicos são as carteiras SL para as combinações das carteiras no Painel (a); SW e BW para as combinações no Painel (b); e carteiras SA e BC para as combinações no Painel (c). As carteiras com menor ocorrência de valores atípicos foram BH no Painel (a), BR no Painel (b) e BN no Painel (c).

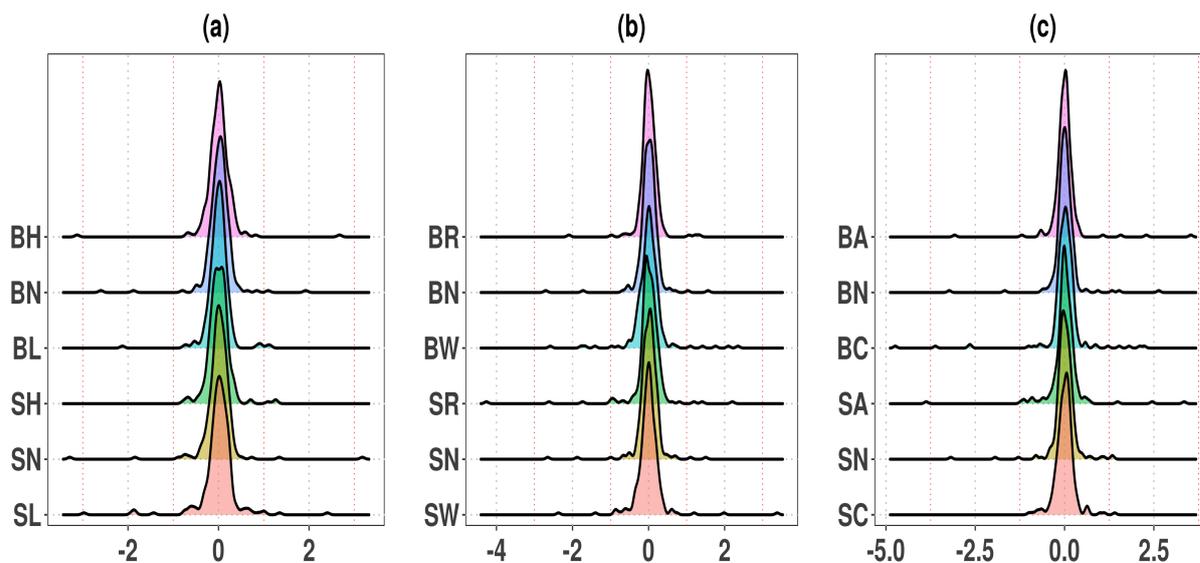


Figura 4 – Gráficos de densidade para retornos das carteiras formadas por combinações entre tamanho e razão de valorização, tamanho e lucratividade e tamanho e investimento.

Na Tabela 6 é expressa a quantidade de *outliers* evidenciado nos dados dos excessos de retornos nas carteiras de análise. Por padrão, um valor atípico (*outliers*) é definido como qualquer observação que esteja além da diferença entre o terceiro e o primeiro quartil multiplicado por 1,5 ( $(Q_3 - Q_1) \cdot 1,5$ ). As carteiras compostas por empresas de menor valor de mercado são as que possuem maiores quantidades de *outliers*. Também pode-se verificar que os *outliers* estão em maior números nos meses de janeiro e antes do ano de 2008. A média geral de *outliers* para as carteiras de análise apresentada foi de 15, para o mês de janeiro a média foi de 11 *outliers*. Já para o período anterior a 2008 em média têm-se 9 ocorrências. Por fim, ao considerar *outliers* dos meses de janeiro e, em simultâneo, anteriores a 2008 encontram-se 6 ocorrências em média.

Há duas principais causas para as ocorrências *outliers* das carteiras propostas nessa tese. A primeira causa são as ocorrências de *outliers* nos meses de janeiro devido ao fato das carteiras serem reavaliadas nesse período. Empresas podem entrar ou sair de determinadas carteiras no mês de janeiro de acordo com o apresentando em seus balanços financeiros no final do ano anterior. Por exemplo, uma empresa poderá sair da carteira de pequeno valor de mercado e entrar na carteira de maior valor de mercado se o balanço financeiro lançado do mês de dezembro apresentar esse comportamento. A segunda principal causa de *outliers* são nas amostrais anteriores ao ano de 2008, ano de ocorrência do *boom* das IPO's. Período em que as carteiras se apresentaram menos diversificadas e mais susceptíveis as oscilações de ações individuais. No entanto, a primeira causa é fator preponderante para as ocorrências de *outliers*. O Apêndice C encontram-se as análises de *outliers* ao supor

que os dados possuem autocorrelação serial.

Tabela 6 – Quantidades de Outliers evidenciado no Box-plot

| Carteiras  | Total | Janeiro | Antes de 2008 | Janeiro e Antes de 2008 |
|--|-------|---------|---------------|-------------------------|
| Carteiras de combinação Tamanho-Razão de valorização |       |         |               |                         |
| SL   | 26    | 17      | 15            | 7                       |
| SN   | 12    | 7       | 6             | 4                       |
| SH   | 11    | 8       | 4             | 2                       |
| BL   | 12    | 9       | 6             | 4                       |
| BN   | 12    | 9       | 10            | 7                       |
| BH   | 10    | 6       | 7             | 3                       |
| Média  | 14    | 9       | 8             | 5                       |
| Carteiras de Combinação Tamanho-Lucratividade        |       |         |               |                         |
| SW   | 18    | 12      | 9             | 6                       |
| SN   | 16    | 12      | 9             | 7                       |
| SR   | 15    | 13      | 8             | 6                       |
| BW   | 18    | 14      | 10            | 8                       |
| BN   | 13    | 10      | 7             | 4                       |
| BR   | 10    | 7       | 7             | 5                       |
| Média  | 15    | 11      | 8             | 6                       |
| Carteiras de Combinação Tamanho-Investimento         |       |         |               |                         |
| SC   | 16    | 13      | 12            | 9                       |
| SN   | 15    | 10      | 6             | 3                       |
| SA   | 23    | 16      | 12            | 8                       |
| BC   | 19    | 16      | 11            | 8                       |
| BN   | 13    | 10      | 8             | 5                       |
| BA   | 14    | 9       | 8             | 5                       |
| Média  | 17    | 12      | 10            | 6                       |
| Média Geral  | 15    | 11      | 9             | 6                       |

Fonte: Elaboração Própria

As Figuras 5, 6 e 7 apresentam os gráficos Quantil-Quantil (Q-Q) com envelope simulado em relação à distribuição normal. A simulação do envelope é realizada pelo método de reamostragem de bootstrap com 199 repetições em situações onde a suposição de distribuição normal é satisfeita. É traçado um envelope de simulação global com nível de confiança de 95% indicado pela região sombreada em vermelho. Se os dados de excesso de retorno possuem uma distribuição normal perfeita, os pontos estariam exatamente na linha diagonal vermelha. Esta linha diagonal representa a distribuição normal padrão. Muitos pontos estão sobre a linha diagonal, especialmente os dados que estão mais ao centro, porém, os pontos nas caudas esquerda e a direita está muito distante da reta diagonal na maioria das carteiras. Ao analisar o envelope composto pela região sombreada é possível verificar observações fora dessa região para as variáveis de excesso de retorno indicando que a suposição de normalidade dos dados são violadas para as variáveis expostas. Portanto, têm-se indícios de que os excessos de retornos das carteiras formadas por ações no mercado financeiro brasileiro possuem caldas pesadas, ou seja, há uma massa de probabilidade em relação aos valores extremos que não estão sendo capturadas pela distribuição normal.

Na Tabela 7 encontram-se os resultados das estatísticas descritivas e os p-valores dos testes Jarque-Bera e Dicker-Fuller para as carteiras analisadas. O desvio padrão no mercado financeiro é uma medida de volatilidade. Ativos mais voláteis podem ser uma oportunidade para agentes que pretendem obter um maior retorno em operações de curto-prazo (MACRET, 2018). No Painel A, a carteira com maior volatilidade é a que

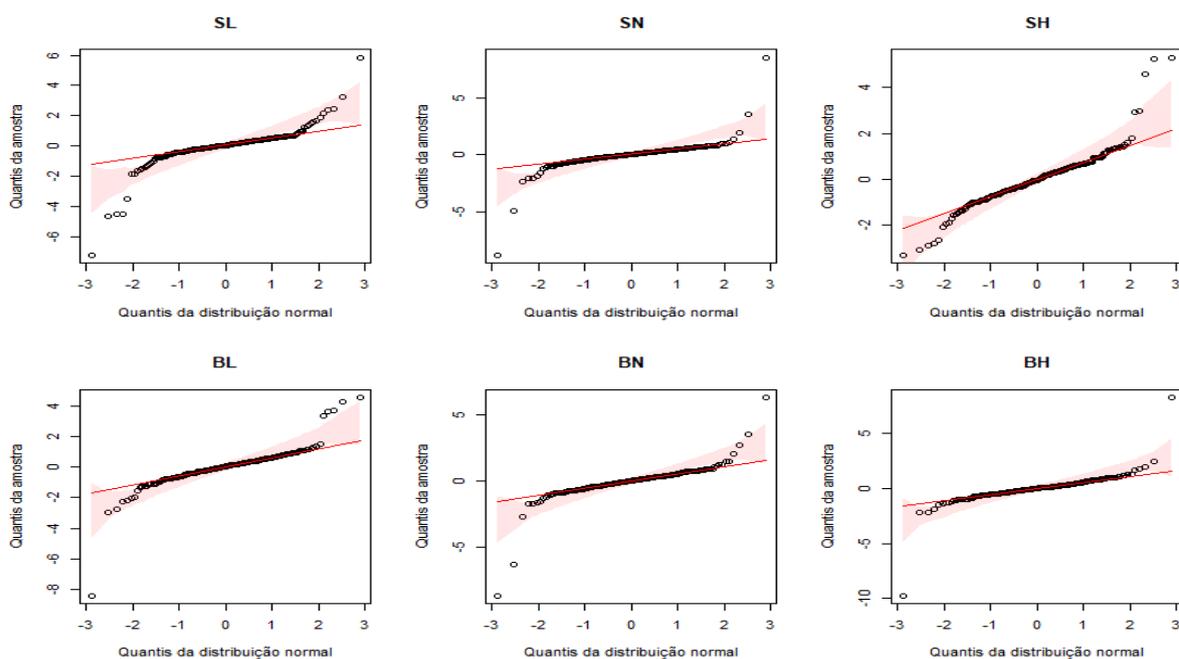


Figura 5 – Gráfico Q-Q plot com envelope simulado dos excesso de retornos para Carteiras de combinação tamanho-razão de valorização.

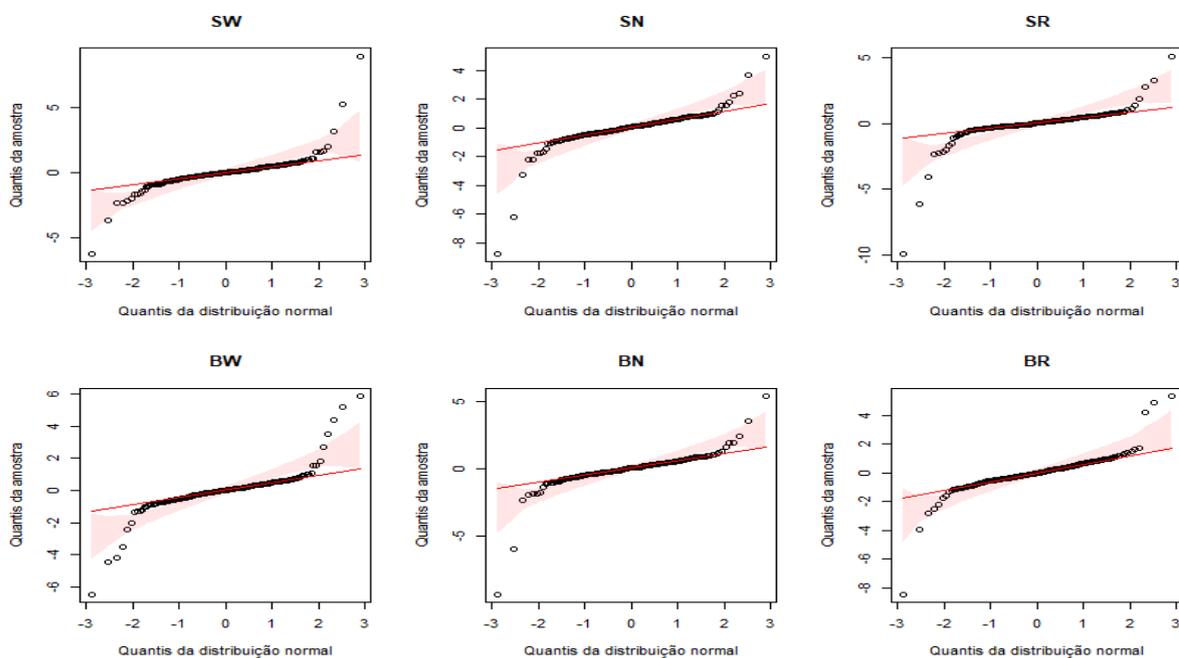


Figura 6 – Gráfico Q-Q plot com envelope simulado dos excesso de retornos para Carteiras de combinação tamanho-lucratividade.

foi formada pelas combinações de empresas com pequeno VM e baixa PL/VM, ou seja, empresas de pequeno porte e supervalorizadas na bolsa de valores. No Painel B, a carteira

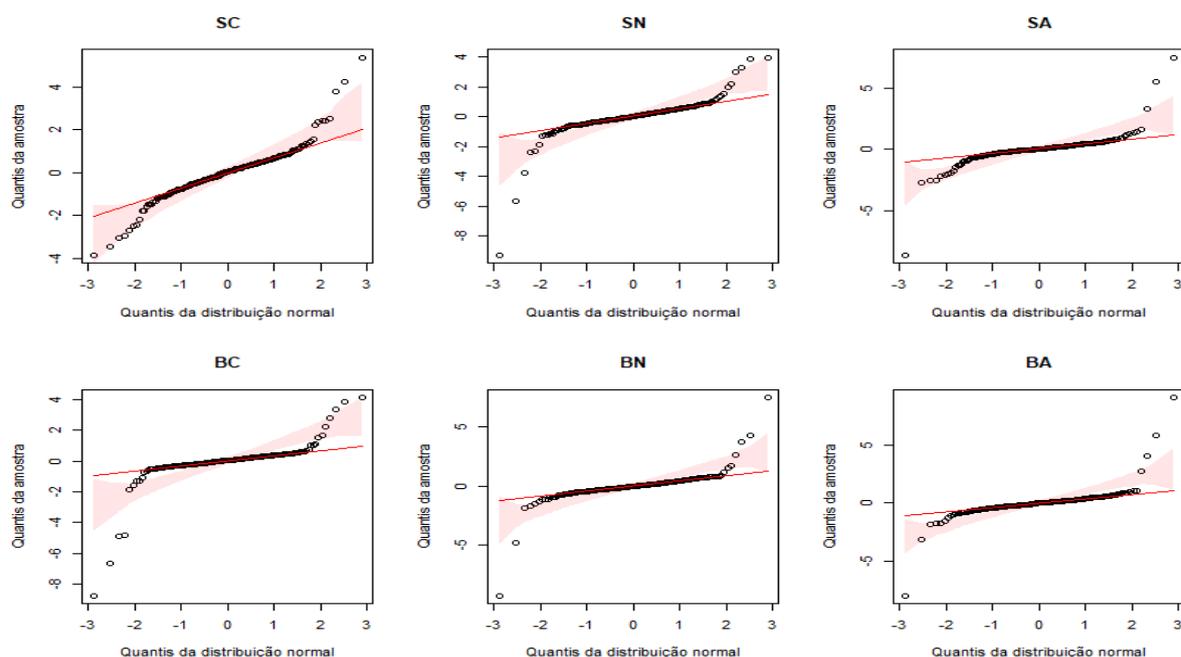


Figura 7 – Gráfico Q-Q plot com envelope simulado dos excessos de retornos para Carteiras de combinação tamanho-investimento.

que possui maior volatilidade é formada por empresas com pequeno VM e robusto OP. Já no Painel C, a combinação de empresa com grande VM e conservador INV fornece maior volatilidade. Em geral, as empresas com pequeno VM apresentaram um grande valor de desvio padrão, o que aponta para a razão das *small cap* serem as favoritas dos *traders*<sup>6</sup> do mercado financeiro brasileiro. Na coluna 3 e 4, encontram-se os coeficientes de assimetria e excesso de curtose. Um coeficiente de assimetria negativo significa que a cauda esquerda da função de distribuição de probabilidade é maior que a cauda direita e quando o coeficiente é positivo a cauda direita é maior que a esquerda. No Painel A, verifica-se apenas um caso de coeficiente de assimetria positivo expresso na carteira SH que é composta por pequeno VM e alto PL/VM. No painel B, as carteiras SW e BW apresentaram coeficiente positivo. Já no Painel C têm-se as carteiras SC e BA com o valor do coeficiente positivo. Na maioria das carteiras o coeficiente de assimetria se apresenta negativo, indicando que no mercado financeiro brasileiro a ocorrência de extremos negativos ocorrem com mais frequência do que extremos positivos. A curtose é uma medida que revela o achatamento da curva da função de distribuição de probabilidade. Na distribuição normal a medida de curtose é igual a 3, então o excesso de curtose é a medida de curtose menos 3. Em todas as carteiras da Tabela 7 estão evidenciados um excesso de curtose positivo, indicando que em todas as carteiras têm-se caudas pesadas. O grande valor do excesso de curtose também está relacionado com a entrada e saída de empresas nas carteiras que acaba por

<sup>6</sup> *Traders* são os profissionais que operam na compra e venda de ativos financeiros em um curto espaço de tempo, visando obter lucro com as variações de preço de curto prazo.

acarretar grandes variações de retornos nas carteiras ao longo do tempo. Na coluna 5, estão inseridas as estatísticas de  $p$ -valor do teste de normalidade de Jarque-Bera, cuja hipótese nula é de que os dados seguem uma distribuição normal (JARQUE; BERA, 1980). Em todas as carteiras o  $p$ -valor revela a rejeição da hipótese de nula ao nível de significância de 1%, ou seja, os dados não seguem uma distribuição normal. Por fim, a última coluna revela o  $p$ -valor do teste de Dicker-Fuller que tem por hipótese nula a não estacionariedade dos dados. O teste de Dicker-Fuller revela que para todas as carteiras a hipótese de não estacionariedade é rejeitada ao nível de significância de 1%, ou seja, as séries são estacionárias.

Tabela 7 – Resultados das estatísticas descritivas e os  $p$ -valores dos testes Jarque-Bera e Dicker-Fuller para os excessos de retornos das carteiras.

| Carteiras | Desvio Padrão | Assimetria | Excesso de Curtose | Teste Jarque-Bera<br>p-valor | Teste Dicker-Fuller<br>p-valor |
|-----------|---------------|------------|--------------------|------------------------------|--------------------------------|
| Painel A  |               |            |                    |                              |                                |
| SL        | 0,41          | -1,67      | 18,66              | 0,00***                      | 0,01***                        |
| SN        | 0,37          | -0,65      | 44,59              | 0,00***                      | 0,01***                        |
| SH        | 0,23          | 1,10       | 7,32               | 0,00***                      | 0,01***                        |
| BL        | 0,25          | -1,41      | 21,70              | 0,00***                      | 0,01***                        |
| BN        | 0,30          | -2,24      | 31,55              | 0,00***                      | 0,01***                        |
| BH        | 0,32          | -1,33      | 49,17              | 0,00***                      | 0,01***                        |
| Painel B  |               |            |                    |                              |                                |
| SW        | 0,37          | 2,14       | 32,61              | 0,00***                      | 0,01***                        |
| SN        | 0,30          | -2,97      | 29,69              | 0,00***                      | 0,01***                        |
| SR        | 0,43          | -4,20      | 43,81              | 0,00***                      | 0,01***                        |
| BW        | 0,40          | 0,01       | 16,86              | 0,00***                      | 0,01***                        |
| BN        | 0,28          | -3,18      | 35,73              | 0,00***                      | 0,01***                        |
| BR        | 0,25          | -1,35      | 24,22              | 0,00***                      | 0,01***                        |
| Painel C  |               |            |                    |                              |                                |
| SC        | 0,26          | 0,49       | 5,90               | 0,00***                      | 0,01***                        |
| SN        | 0,34          | -3,28      | 32,91              | 0,00***                      | 0,01***                        |
| SA        | 0,44          | -0,45      | 35,58              | 0,00***                      | 0,01***                        |
| BC        | 0,54          | -3,78      | 33,82              | 0,00***                      | 0,01***                        |
| BN        | 0,35          | -1,28      | 41,27              | 0,00***                      | 0,01***                        |
| BA        | 0,39          | 1,81       | 43,64              | 0,00***                      | 0,01***                        |

\*\*\*: nível de significância de 1% .

Fonte: Elaboração Própria

#### 4.4.1 Estatísticas resumidas para os retornos dos prêmios de riscos gerados pelos cinco fatores

Conforme a equação (3.11) os prêmios de riscos dos fatores são representados pelas variáveis  $R_m - R_f$ ,  $SMB$ ,  $HML$ ,  $RMW$  e  $CMA$ , que representam os prêmios de riscos para os fatores de mercado, tamanho, razão de valorização, lucratividade e investimento, respectivamente.

A Tabela 8 mostra um resumo estatístico para os retornos dos prêmios dos fatores. No Painel A, verificamos que o fator  $SMB$  e  $CMA$  apresentam médias de retornos negativas,  $-0,52\%$  e  $-0,23\%$  respectivamente. Enquanto os fatores  $R_m - R_f$ ,  $HML$  e  $RMW$  apresentam médias positivas,  $1,39\%$ ,  $0,84\%$  e  $0,37\%$  respectivamente. A variável que revela menor desvio padrão é a  $R_m - R_f$ , este resultado era esperando, tendo em vista

que o prêmio de risco de mercado é formado por uma carteira mais diversificada do que dos demais fatores, por outro lado, a variável que expressa maior volatilidade é a CMA com 0,34.

Ainda na Tabela 8, o Painel B revela os resultados para a matriz de coeficientes de correlação entre os prêmios dos fatores. Os maiores coeficientes de correlação foram dos pares HML com RML e HML com CMA, que apresentaram correlação de  $-0,42$  e  $0,36$  respectivamente. Os menores valores estão com as correlações feitas com a variável  $R_m - R_f$ . Os baixos valores da matriz de coeficiente de correlações indicam que os regressores não possuem grande problema de multicolinearidade de forma a diminuir a eficiência dos parâmetros e aumentar a variância das estimativas. Entende-se por multicolinearidade quando variáveis independentes apresentam relações lineares exatas ou aproximadamente exatas (GUJARATI; PORTER, 2010).

Tabela 8 – Resumo estatístico para os retornos mensais dos fatores entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018.

| Painel A: média e desvio padrão               |             |            |              |              |             |
|---|-------------|------------|--------------|--------------|-------------|
| Fatores                                       | $R_m - R_f$ | <i>SMB</i> | <i>HML</i>   | <i>RMW</i>   | <i>CMA</i>  |
| Média   | 1,39%       | -0,52%     | 0,84%        | 0,37%        | -0,43%      |
| Desvio padrão                                 | 0,14        | 0,21       | 0,30         | 0,26         | 0,34        |
| Painel B: correlação entre diferentes fatores |             |            |              |              |             |
|   | $R_m - R_f$ | <i>SMB</i> | <i>HML</i>   | <i>RMW</i>   | <i>CMA</i>  |
| $R_m - R_f$                                   | 1           | -0,02      | 0,003        | -0,04        | -0,002      |
| <i>SMB</i>                                    | -0,02       | 1          | -0,18        | 0,01         | -0,20       |
| <i>HML</i>                                    | 0,003       | -0,18      | 1            | <b>-0,42</b> | <b>0,36</b> |
| <i>RMW</i>                                    | -0,04       | 0,01       | <b>-0,42</b> | 1            | 0,06        |
| <i>CMA</i>                                    | -0,002      | -0,20      | <b>0,36</b>  | 0,06         | 1           |

Fonte: Elaboração Própria

#### 4.4.2 HML: um fator redundante

Fama e French (2015) em seu artigo analisam que o modelo de cinco fatores não apresentou um desempenho melhor que o modelo de quatro fatores que exclui o prêmio de risco para o fator de razão de valorização denotado na equação (3.11) por *HML*. A explicação dada por Fama e French (2015) é que o retorno médio da variável *HML* é capturado pela exposição da variável aos prêmios de riscos dos fatores de lucratividade e investimento (*RMW* e *CMA*, respectivamente). *HML* é redundante para os dados dos Estados Unidos entre 1963 à 2013. Então, com base nesta constatação empírica é realizado um teste para verificar se o mercado financeiro brasileiro apresenta o mesmo comportamento que o americano.

De acordo com o teste de redundância realizado em Fama e French (2015), a Tabela 9 mostra os resultados do teste para os dados brasileiros. Esses testes consistem em realizar as estimações de modelos via mínimos quadrados ordinários. Em cada modelo é utilizado um dos prêmios de riscos como variável dependente, enquanto, os demais prêmios de riscos como variáveis independente. Os resultados apresentados mostram evidências a

tese apresentada em [Fama e French \(2015\)](#) para o caso americano, também se aplica ao mercado financeiro brasileiro.

Na última coluna da Tabela 9 encontram-se os p-valores para o teste de Breusch-Pagan para verificar se os resíduos dos modelos possuem a característica de heterocedasticidade. A rejeição da hipótese nula de homocedasticidade ocorreu para as regressões que têm como variável resposta SMB, HML, RMW e CMA. O único modelo que se revelou homocedástico é o que tem como variável respostas  $R_m - R_f$ . Sendo assim, justifica-se o uso do estimador HC2 de [Horn, Horn e Duncan \(1975\)](#) para a geração das estatísticas de teste quasi-t. Vale salientar que a utilização de estimadores que possuem uma correção mais acentuada dos graus de alavancagem como é o caso dos estimadores HC3 ([DAVIDSON; MACKINNON et al., 1993](#)) e HC4 ([CRIBARI-NETO, 2004](#)) alteram a significância das estimativas expostas na Tabela 9.

No modelo em que a variável dependente é  $R_m - R_f$  da Tabela 9, as estimativas dos coeficientes revelam que as variáveis independentes são não significativas ao fixar o nível de p-valor em 0,05 (5%), ou seja, não é possível rejeitar a hipótese de que o verdadeiro valor do coeficiente seja igual a zero. Ainda no modelo anterior, o pseudo- $R^2$  é muito próximo de zero, ou seja, a variação da variável dependente não sofre influência da variação das variáveis independentes. Os resultados indicam que o prêmio para o mercado não é um fator redundante. Também não se encontram evidências suficientes de que a variável *SMB* seja redundante. No modelo de regressão que tem como variável dependente *HML*, no entanto, revela que as estimativas dos coeficientes de *RMW* e *CMA* são -0,52% (Quasi-t=-1,98 e p-valor=0,04) e 0,33% (Quasi-t=2,07 e p-valor=0,03) respectivamente e possuem um pseudo- $R^2$  de 0,34. Os modelos de regressões que tem como variáveis dependentes os prêmios de riscos para lucratividade e investimento (*RMW* e *CMA*) corrobora com a tese de que o prêmio de risco do fator *HML* é redundante. Conclui-se que para o mercado financeiro brasileiro o prêmio de risco para a razão de valorização expresso na variável *HML* é em parte explicada pelas variações dos prêmios de riscos para lucratividade e investimento, assim como verificado no mercado financeiro americano.

Ainda na Tabela 9, no modelo regressão que tem por variável dependente *HML* tem-se que a estimativa do coeficiente de *CMA* é grande e positiva, ou seja, empresas subvalorizadas (alto PL/VM) do mercado financeiro tendem a fazer pouco investimento. No entanto, a estimativa do coeficiente de *RMW* é fortemente negativa que implica que empresas subvalorizadas (alto PL/VM) terminam sendo menos lucrativas, mantendo os demais fatores constantes. Portanto, os resultados da Tabela 9 sugere que o modelo de cinco fatores possui problema de multicolinearidade, ou seja, existe uma relação linear entre variáveis independentes.

Tabela 9 – Usando quatro fatores em regressões para explicar os retornos médios do quinto fator entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018.

|             | <i>Intercepto</i> | $R_m - R_f$ | <i>SMB</i> | <i>HML</i>   | <i>RMW</i>   | <i>CMA</i>  | Pseudo $R^2$ | bp-teste |
|-------------|-------------------|-------------|------------|--------------|--------------|-------------|--------------|----------|
| $R_m - R_f$ |                   |             |            |              |              |             |              |          |
| Coef        | 0,01              |             | -0,01      | -0,01        | -0,02        | 0,00        | 0,002        |          |
| Quasi-t     | 1,51              |             | -0,54      | -0,43        | -0,56        | 0,05        |              |          |
| p-valor     | 0,50              |             | 0,58       | 0,66         | 0,57         | 0,95        |              | 0,93     |
| <i>SMB</i>  |                   |             |            |              |              |             |              |          |
| Coef        | -0,00             | -0,03       |            | -0,10        | -0,03        | -0,08       | 0,05         |          |
| Quasi-t     | -0,35             | -0,51       |            | -0,53        | -0,20        | -0,57       |              |          |
| p-valor     | 0,72              | 0,61        |            | 0,59         | 0,83         | 0,56        |              | 0,00     |
| <i>HML</i>  |                   |             |            |              |              |             |              |          |
| Coef        | 0,01              | -0,03       | -0,14      |              | <b>-0,52</b> | <b>0,33</b> | 0,34         |          |
| Quasi-t     | 0,66              | -0,41       | -0,54      |              | -1,98        | 2,07        |              |          |
| p-valor     | 0,50              | 0,67        | 0,58       |              | 0,04         | 0,03        |              | 0,00     |
| <i>RMW</i>  |                   |             |            |              |              |             |              |          |
| Coef        | 0,00              | -0,06       | -0,04      | <b>-0,44</b> |              | 0,19        | 0,23         |          |
| Quasi-t     | 0,61              | -0,65       | -0,19      | -2,21        |              | 0,8         |              |          |
| p-valor     | 0,54              | 0,51        | 0,84       | 0,02         |              | 0,41        |              | 0,00     |
| <i>CMA</i>  |                   |             |            |              |              |             |              |          |
| Coef        | -0,01             | 0,00        | -0,19      | <b>0,51</b>  | 0,35         |             | 0,21         |          |
| Quasi-t     | -0,47             | 0,06        | -0,39      | 2,02         | 0,79         |             |              |          |
| p-valor     | 0,63              | 0,94        | 0,69       | 0,04         | 0,42         |             |              | 0,00     |

Fonte: Elaboração Própria

#### 4.4.3 Modelo de cinco fatores modificado

Uma alternativa possível para resolver o problema de redundância seria descartar *HML* e utilizar um modelo de quatro fatores. Apesar dessa variável ser capturada pela exposição de outros fatores, há o entendimento em [Fama e French \(2015\)](#) e [Fama e French \(2016\)](#) de que o prêmio de risco para a razão de valorização é importante para a compreensão do comportamento do preço dos ativos. Assim, ao avaliar o comportamento dos ativos é necessário conhecer as exposições das carteiras aos prêmios de risco para o tamanho, razão de valorização, lucratividade e investimento.

A solução encontrada em [Fama e French \(2015\)](#) para contornar o problema da redundância de *HML* também será utilizada nesse trabalho. A variável *HML* será substituída pela variável *HML* ortogonal (*HMLO*). É definida a variável *HMLO* como a soma do intercepto e o resíduo da regressão de *HML* em  $R_M - R_f$ , *SMB*, *RMW* e *CMA*. O teste de fator redundante para a variável *HMLO* está exposto no Apêndice A. A substituição de *HML* por *HMLO* na equação (3.11) produz um modelo de cinco fatores modificado,

$$R_{i,t} - R_{f,t} = a_i + b_i(R_{m,t} - R_{f,t}) + s_iSMB_t + h_iHMLO_t + r_iRMW_t + c_iCMA_t + e_{i,t}. \quad (4.3)$$

Conforme afirma [Fama e French \(2015\)](#), o intercepto e o residual da equação (4.3) são aproximadamente os mesmos que na regressão de cinco fatores da equação (3.11), portanto, as duas regressões são equivalentes para a análise do desempenho do modelo. Esta tese dará prosseguimento utilizando o modelo de cinco fatores modificado nas estimativas da regressão linear padrão e nas modelagens GAMLSS.

#### 4.4.4 Modelo de regressão linear padrão de cinco fatores

A princípio é investigado a ocorrência de heterocedasticidades para os modelos de regressão linear. Na Tabela 10, encontram-se os resultados do teste de homocedasticidade de Breusch e Pagan (1979) para os modelos estimados pela metodologia de MQO. O teste de homocedasticidade está sendo exposto com o intuito de verificar se as variâncias são constantes. O teste de Breusch Pagan não necessita da hipótese de normalidade e é mais poderoso do que o teste de Koenker e Bassett (1978) sobre normalidade. Os valores das estatísticas do  $p$ -valor estão expostas na Tabela 10. É verificado que a rejeição da hipótese nula de homoscedasticidade acontece em 13 dos 18 modelos estimados, considerando o nível de significância de 5%. Como consequência da ausência de homocedasticidade tem-se que o estimador dos parâmetros de MQO é ineficiente. O teste  $t$ , que é rotineiramente usado para testar a significância dos regressores, não é adequado sob presença de heteroscedasticidade. A seguir, prosseguindo com os testes quasi- $t$  (também conhecidos como testes quasi- $z$ ) que são assintoticamente válidos sob heteroscedasticidade de forma desconhecida.

Tabela 10 – Resultados do  $p$ -valor para o teste de heterocedasticidade de Breusch-Pagan dos modelos em análise.

| Painel A                    |             |           |            |          |
|-----------------------------|-------------|-----------|------------|----------|
| Carteiras $VM \times PL/VM$ |             | $PL/VM$   |            |          |
|                             |             | Baixo (L) | Neutro (N) | Alto (H) |
| $VM$                        | Pequeno (S) | 0,1769    | 0,0000     | 0,4427   |
|                             | Grande (B)  | 0,0000    | 0,0000     | 0,8996   |

| Painel B                 |             |           |            |             |
|--------------------------|-------------|-----------|------------|-------------|
| Carteiras $VM \times OP$ |             | $OP$      |            |             |
|                          |             | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) |
| $VM$                     | Pequeno (S) | 0,0000    | 0,0000     | 0,515       |
|                          | Grande (B)  | 0,6326    | 0,0000     | 0,0026      |

| Painel C                  |             |                 |            |               |
|---------------------------|-------------|-----------------|------------|---------------|
| Carteiras $VM \times INV$ |             | $INV$           |            |               |
|                           |             | Conservador (C) | Neutro (N) | Agressivo (A) |
| $VM$                      | Pequeno (S) | 0,0025          | 0,0000     | 0,0005        |
|                           | Grande (B)  | 0,0000          | 0,0027     | 0,0007        |

A Tabela 11 apresenta valores referentes ao teste de Durbin-Watson feito para verificar se o modelo estimado é adequado, e não se rejeita a hipótese nula de que os resíduos são não correlacionados, ou seja, possuem a característica de um ruído branco. Assim, conclui-se utilizando o nível de significância de 5% que apenas 1 dos 18 modelos estimados apresenta autocorrelação diferente de zero.

Nas Tabelas 12, 13 e 14 encontram-se os resultados do modelo de cinco fatores, utilizando a metodologia de estimação de mínimos quadrados ordinários utilizada em Fama e MacBeth (1973). Uma vez que se tenha evidência de erros heteroscedásticos, para a realização de teste de hipóteses sobre os parâmetros, a estatística de teste utilizada é a quasi- $t$  com base no estimador HC2 de matriz de covariância heterocedástico de forma consistente. Os testes quasi- $t$  são realizados usando valores críticos da normal padrão. Assim, a hipótese nula é rejeitada nos níveis de significância de 10%, 5% e 1% se o valor absoluto

Tabela 11 – Resultados do p-valor do teste de autocorrelação usando a estatística de Durbin-Watson dos modelos em análise.

| Painel A                    |             |           |            |          |
|-----------------------------|-------------|-----------|------------|----------|
| Carteiras $VM \times PL/VM$ |             | $PL/VM$   |            |          |
|                             |             | Baixo (L) | Neutro (N) | Alto (H) |
| $VM$                        | Pequeno (S) | 0,64      | 0,49       | 0,91     |
|                             | Grande (B)  | 0,03      | 0,63       | 0,28     |

| Painel B                 |             |           |            |             |
|--------------------------|-------------|-----------|------------|-------------|
| Carteiras $VM \times OP$ |             | $OP$      |            |             |
|                          |             | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) |
| $VM$                     | Pequeno (S) | 0,28      | 0,67       | 0,58        |
|                          | Grande (B)  | 0,62      | 0,89       | 0,24        |

| Painel C                  |             |                 |            |               |
|---------------------------|-------------|-----------------|------------|---------------|
| Carteiras $VM \times INV$ |             | $INV$           |            |               |
|                           |             | Conservador (C) | Neutro (N) | Agressivo (A) |
| $VM$                      | Pequeno (S) | 0,67            | 0,42       | 0,36          |
|                           | Grande (B)  | 0,41            | 0,82       | 0,45          |

da estatística de teste for superior a 1,65, 1,96 e 2,58, respectivamente. As estimativas são obtidas com o modelo de cinco fatores modificado, porém, os resultados para o modelo descrito na equação (3.11) estão expostos no Apêndice B. As estimativas do modelo de cinco fatores foram geradas tendo como variáveis respostas as carteiras formadas pelas combinações entre tamanho e razão de valorização (Tabela 12), tamanho e lucratividade (Tabela 13) e tamanho e investimento (Tabela 14), ao todo são 18 modelos avaliados. Em todos os modelos as estimativas dos coeficientes dos interceptos são aproximadamente zero e o teste quasi-t não rejeita a hipótese nula. A hipótese de que os interceptos são não significativos é muito importante como evidência de que os modelos capturam de forma exata as variações dos retornos esperados. Além disso, as estimativas dos coeficientes do prêmio do mercado são todos próximos de 1 e as estimativas para a variável  $SMB$  são positivas para carteiras com pequeno valor de mercado e negativa para carteiras com grande valor de mercado, exceção para a carteira  $BC$  que é composta por empresas com grande valor de mercado e investimento conservador. Também é evidenciado que os sinais das estimativas dos coeficientes das regressões, expressas nas Tabelas 12, 13 e 14, sempre se alinham com as características usadas para a formação das carteiras, por exemplo, as estimativas de  $h$  na Tabela 12 tem um padrão negativo em carteira formada por baixa razão de valorização e positivo em carteira com alta razão de valorização. Esses resultados que foram encontrados para  $R_{m,t} - R_{f,t}$ ,  $SMB$  e alinhamento das carteiras estão de acordo com os resultados encontrados em Fama e French (2015) para os dados americanos, indicando que o mercado financeiro brasileiro se assemelha ao americano nessas características.

Na Tabela 12, na carteira de pequeno valor de mercado e baixa razão de valorização, as estimativas dos coeficientes de  $HMLO$  é  $-0,96$  (quasi- $t = -6,25$ ),  $RMW$  é  $0,40$  (quasi- $t = 2,46$ ) e  $CMA$  é  $-0,23$  (quasi- $t = -2,35$ ), essas estimativas dizem que os retornos assemelham-se aos de empresas lucrativas e de alto nível de investimento. Já a carteira composta por empresas de pequeno valor de mercado e alta razão de valorização, apresenta estimativas de  $0,22$  (quasi- $t = 1,92$ ) para  $HMLO$ ,  $-0,19$  (quasi- $t = -2,03$ ) para  $RMW$

e 0,13 (quasi- $t = 1,69$ ) para  $CMA$ , ou seja, os retornos assemelham-se aos de empresas não lucrativas e com baixo nível de investimento. O prêmio de risco para investimento, expresso na variável  $CMA$ , estimativa expressivamente negativa para ações de baixa razão de valorização e inclinação positiva para ações de alta razão de valorização, indicando que ações de empresas valorizadas (baixo (PL/VM)) no mercado financeiro reduz o excedente de retorno quando aumentam o nível de investimento. Por outro lado, o excedente de retorno para lucratividade é maior para carteira de baixa razão de valorização do que para carteira de alta razão de valorização.

Tabela 12 – Regressão para 6 carteiras Tamanho-Razão de Valorização entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018.

$$R_t - R_{f,t} = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHMLO_t + rRMW_t + cCMA_t + e_t$$

| $PL/VM \rightarrow$<br>$VM$ | $a$       |            |          | $Quasi-t(a)$ |            |          |
|-----------------------------|-----------|------------|----------|--------------|------------|----------|
|                             | Baixo (L) | Neutro (N) | Alto (H) | Baixo (L)    | Neutro (N) | Alto (H) |
| Pequeno (S)                 | 0,00      | 0,00       | 0,00     | -0,04        | -0,43      | -0,72    |
| Grande (B)                  | 0,00      | 0,00       | 0,00     | -0,84        | 0,14       | -0,32    |
|                             | $b$       |            |          | $Quasi-t(b)$ |            |          |
| Pequeno (S)                 | 1,05*     | 0,82*      | 0,92*    | 18,34        | 6,91       | 13,81    |
| Grande (B)                  | 0,95*     | 0,89*      | 1,03*    | 15,74        | 9,84       | 15,09    |
|                             | $s$       |            |          | $Quasi-t(s)$ |            |          |
| Pequeno (S)                 | 0,65*     | 0,79       | 0,27     | 3,51         | 1,28       | 1,32     |
| Grande (B)                  | -0,14     | -0,59*     | -0,05    | -0,80        | -2,33      | -0,25    |
|                             | $h$       |            |          | $Quasi-t(h)$ |            |          |
| Pequeno (S)                 | -0,96*    | 0,07       | 0,22     | -6,25        | 1,37       | 1,92     |
| Grande (B)                  | -0,50*    | -0,34      | 0,30     | -3,40        | -1,32      | 1,33     |
|                             | $r$       |            |          | $Quasi-t(r)$ |            |          |
| Pequeno (S)                 | 0,40*     | -0,30      | -0,19*   | 2,46         | -1,13      | -2,03    |
| Grande (B)                  | 0,10      | -0,11      | -0,34    | 0,52         | -0,47      | -1,29    |
|                             | $c$       |            |          | $Quasi-t(c)$ |            |          |
| Pequeno (S)                 | -0,23*    | -0,30      | 0,13     | -2,35        | -1,18      | 1,69     |
| Grande (B)                  | -0,21     | -0,02      | 0,08     | -1,75        | -0,16      | 0,52     |

Quasi- $|t| > 1,65$  indica significância ao nível de 10%, Quasi- $|t| > 1,96$  indica significância ao nível de 5% e Quasi- $t > 2,58$  indica significância ao nível de 10%.

“\*” indica que a estimativa do coeficiente é significativa ao nível de 5%.

Fonte: Elaboração Própria

Na Tabela 13, a carteira formada por empresas com pequeno valor de mercado e fraca lucratividade tem uma forte exposição negativa ao prêmio de risco  $RMW$  com estimativa de  $-0,63$  (quasi- $t = -2,94$ ), porém, uma moderada exposição negativa a  $CMA$  de estimativa  $-0,28$  (quasi- $t = -1,73$ ), ou seja, os retornos dessa carteira assemelham-se aos de empresas não lucrativas e que possuem grande nível de investimento. Em contraste, a carteira formada por empresas de grande valor de mercado e uma lucratividade robusta apresenta estimativa positiva em  $RMW$  de  $0,31$  (quasi- $t = 2,78$ ) e em  $CMA$  de  $-0,26$  (quasi- $t = -2,92$ ), logo, os retornos assemelham-se aos de empresas com grandes lucratividade e alto nível de investimento. Destaque para a alta magnitude positiva da estimativa do coeficiente da variável  $SMB$  na carteira SR com o valor de  $1,21$  e estatisticamente significativa com quasi- $t = 2,90$ , indicando um prêmio elevado para empresas com pequeno valor de mercado (excedente de retorno elevado).

Na Tabela 14, destaque para as estimativas da carteira de pequeno valor de mercado e investimento conservador, cujas inclinações para  $RMW$  e  $CMA$  são positivas, mas a

Tabela 13 – Regressão para 6 carteiras Tamanho-Lucratividade entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018.

$$R_t - R_{f,t} = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHMLO_t + rRMW_t + cCMA_t + e_t$$

| OP →<br>VM  | $a$       |            |             | $b$           |            |             | $s$       |            |             | $h$       |            |             | $r$       |            |             | $c$       |            |             |
|-------------|-----------|------------|-------------|---------------|------------|-------------|-----------|------------|-------------|-----------|------------|-------------|-----------|------------|-------------|-----------|------------|-------------|
|             | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) | Fraco (W)     | Neutro (N) | Robusto (R) | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) |
|             | $a$       |            |             | Quasi- $t(a)$ |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
| Pequeno (S) | 0,00      | 0,00       | 0,00        | -0,21         | -0,42      | -0,32       |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
| Grande (B)  | 0,00      | 0,00       | 0,00        | -0,27         | -0,53      | -0,26       |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
|             | $b$       |            |             | Quasi- $t(b)$ |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
| Pequeno (S) | 0,91*     | 0,90*      | 1,04*       | 10,95         | 11,18      | 13,07       |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
| Grande (B)  | 1,11*     | 0,75*      | 0,98*       | 13,64         | 7,17       | 14,73       |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
|             | $s$       |            |             | Quasi- $t(s)$ |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
| Pequeno (S) | 0,89*     | 0,64       | 1,21*       | 7,91          | 1,55       | 2,90        |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
| Grande (B)  | 0,00      | -0,36      | -0,31*      | 0,01          | -1,48      | -2,70       |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
|             | $h$       |            |             | Quasi- $t(h)$ |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
| Pequeno (S) | -0,44*    | -0,03      | -0,25       | -2,66         | -0,15      | -1,22       |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
| Grande (B)  | -0,20     | -0,07      | -0,39*      | -0,79         | -0,4       | -3,92       |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
|             | $r$       |            |             | Quasi- $t(r)$ |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
| Pequeno (S) | -0,63*    | 0,09       | 0,40        | -2,94         | -0,41      | 1,93        |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
| Grande (B)  | -0,64*    | 0,30       | 0,31*       | -2,47         | 1,07       | 2,78        |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
|             | $c$       |            |             | Quasi- $t(c)$ |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
| Pequeno (S) | -0,28     | 0,08       | 0,22        | -1,73         | 0,6        | 1,33        |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |
| Grande (B)  | 0,24      | -0,26      | -0,26*      | 1,47          | -1,36      | -2,92       |           |            |             |           |            |             |           |            |             |           |            |             |

Quasi- $|t| > 1,65$  indica significância ao nível de 10%, Quasi- $|t| > 1,96$  indica significância ao nível de 5% e Quasi- $t > 2,58$  indica significância ao nível de 10%.

“\*” indica que a estimativa do coeficiente é significativa ao nível de 5%.

Fonte: Elaboração Própria

estatística de teste não rejeita a hipótese de que o coeficiente estimado seja diferente de zero. Ainda nesse modelo a variável  $HMLO$  tem estimativa negativa de  $-0,29$  (quasi- $t = -2,16$ ), revelando que os retornos se comportam como ações de empresas supervalorizadas no mercado financeiro. Já para a carteira com pequeno valor de mercado e nível de investimento agressivo a estimativa do coeficiente de  $RMW$  é  $-0,37$  (quasi- $t = -1,74$ ) e  $CMA$  de  $-0,38$  (quasi- $t = -1,85$ ), de forma que os retornos se comportam como ações de empresas não lucrativas e alto nível de investimento. Ainda é possível verificar a magnitude elevada das estimativas dos coeficientes de  $SMB$  para carteiras compostas por empresas de pequeno valor de mercado, indicando que há um excedente de retorno para essas carteiras.

Os gráficos seguintes (Figuras 8, 9 e 10) apresentam no eixo das abcissas os valores observados dos excessos de retornos das carteiras de análise, e no eixo das ordenadas os valores estimados pelos modelos utilizando mínimos quadrados ordinários (MQO). A linha vermelha encontra-se a reta  $y = x$ . Se o modelo de regressão linear padrão fosse adequado aos dados, a nuvem de pontos (preto) estaria sobreposta à reta vermelha. No entanto, observam-se muitos pontos distantes da linha vermelha, ou seja, o estimador MQO fornece muitos valores de excesso de retornos diferentes dos valores observados. Esses gráficos corroboram com a tese de que dados do mercado financeiro não tem um ajuste adequado com os estimadores que necessitam da hipótese de normalidade dos dados.

Buuren e Fredriks (2001), introduziu o conceito de *Worm plots* dos resíduos, com o objetivo de identificar a regiões em que o modelo não está bem ajustado aos dados. Os pontos azuis do gráfico indicam o quanto afastados estão os resíduos do valor esperado nulo representado pelo valor 0 do eixo vertical. O modelo bem ajustado tem todos os pontos

Tabela 14 – Regressão para 6 carteiras Tamanho-Investimento entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018.

$$R_t - R_{f,t} = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHML_t + rRMW_t + cCMA_t + e_t$$

| INV →<br>VM | $R_t - R_{f,t} = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHML_t + rRMW_t + cCMA_t + e_t$ |            |               | $R_t - R_{f,t} = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHML_t + rRMW_t + cCMA_t + e_t$ |            |               |
|-------------|--|------------|---------------|--|------------|---------------|
|             | Conservador (C)  | Neutro (N) | Agressivo (A) | Conservador (C)  | Neutro (N) | Agressivo (A) |
|             | <i>a</i>   |            |               | Quasi- <i>t(a)</i>   |            |               |
| Pequeno (S) | 0,00   | 0,00       | 0,00          | -0,47  | -0,28      | -0,04         |
| Grande (B)  | 0,00   | 0,00       | 0,00          | -0,07  | -0,10      | -0,55         |
|             | <i>b</i>   |            |               | Quasi- <i>t(b)</i>   |            |               |
| Pequeno (S) | 1,08*  | 0,84*      | 0,98*         | 16,49  | 8,92       | 8,96          |
| Grande (B)  | 0,97*  | 0,78*      | 1,06*         | 4,74   | 4,59       | 7,30          |
|             | <i>s</i>   |            |               | Quasi- <i>t(s)</i>   |            |               |
| Pequeno (S) | 0,42*  | 1,12*      | 0,91          | 1,98   | 6,16       | 1,43          |
| Grande (B)  | 0,28   | -0,66      | -0,20         | 0,26   | -1,89      | -0,79         |
|             | <i>h</i>   |            |               | Quasi- <i>t(h)</i>   |            |               |
| Pequeno (S) | -0,29*   | 0,03       | -0,53*        | -2,16  | 0,26       | -2,02         |
| Grande (B)  | -0,61  | 0,02       | -0,37*        | -1,68  | 0,11       | -2,47         |
|             | <i>r</i>   |            |               | Quasi- <i>t(r)</i>   |            |               |
| Pequeno (S) | 0,04   | 0,02       | -0,37         | 0,29   | 0,09       | -1,74         |
| Grande (B)  | -0,08  | -0,41      | 0,33          | -0,21  | -1,61      | 1,39          |
|             | <i>c</i>   |            |               | Quasi- <i>t(c)</i>   |            |               |
| Pequeno (S) | 0,06   | 0,24       | -0,38         | 0,53   | 1,29       | -1,85         |
| Grande (B)  | 0,78   | -0,03      | -0,76*        | 1,94   | -0,19      | -5,24         |

Quasi- $|t| > 1,65$  indica significância ao nível de 10%, Quasi- $|t| > 1,96$  indica significância ao nível de 5% e Quasi- $t > 2,58$  indica significância ao nível de 10%.

“\*” indica que a estimativa do coeficiente é significativa ao nível de 5%.

Fonte: Elaboração Própria

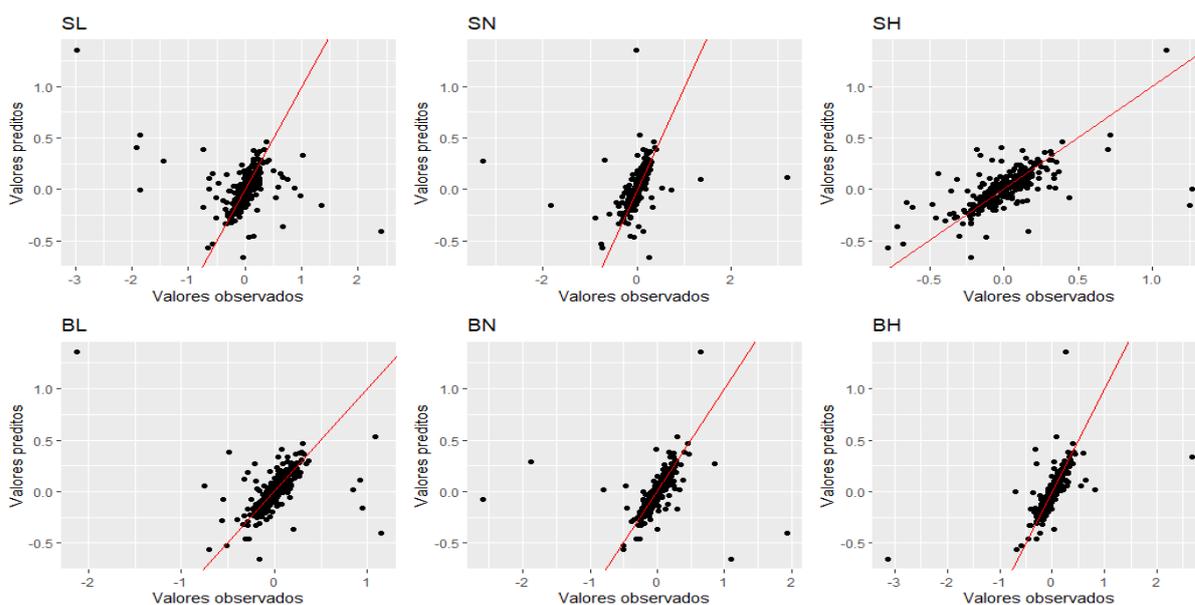


Figura 8 – Gráfico dos valores observados versus os valores estimados para as carteiras de combinação tamanho-razão de valorização.

ou a maioria deles entre os dois semi-círculos desenhados e tracejados. Normalmente, os artigos entendem que, se 95% dos pontos estiverem entre os semi-círculos o modelo está bem ajustado (MENDONÇA, 2016).

As Figuras 11, 12 e 13, mostram os gráficos de *worm plots* para os 18 modelos estimados. Quando o modelo de localização (média) está mal ajustado os resíduos se encontram acima ou abaixo do valor esperado de zero do eixo vertical, como os gráficos

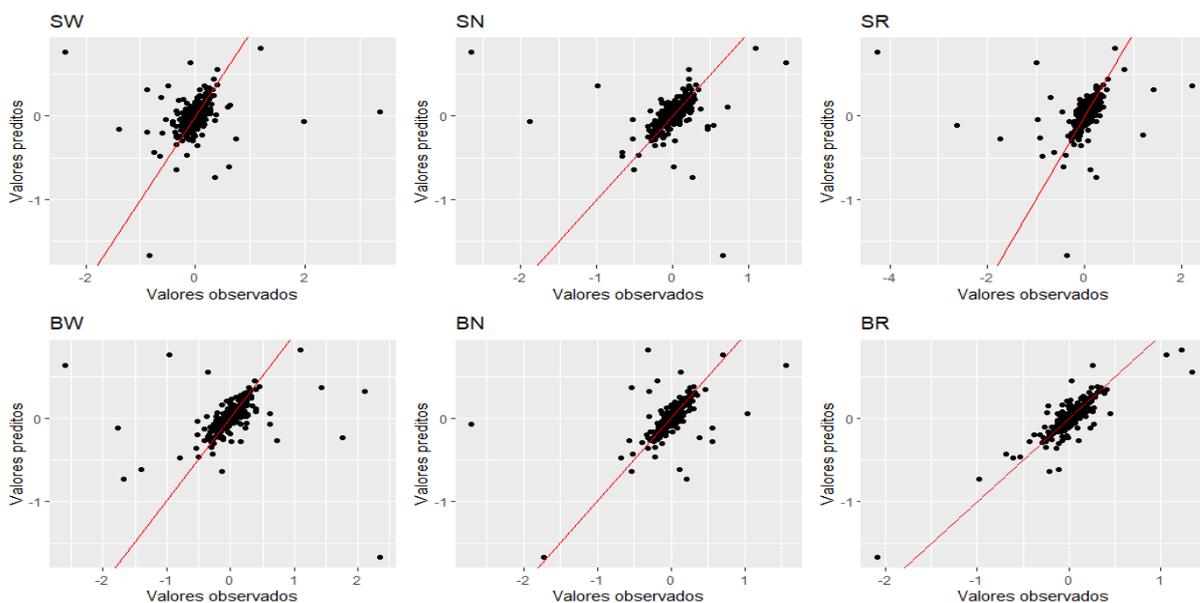


Figura 9 – Gráfico dos valores observados versus os valores estimados para as carteiras de combinação tamanho-lucratividade.

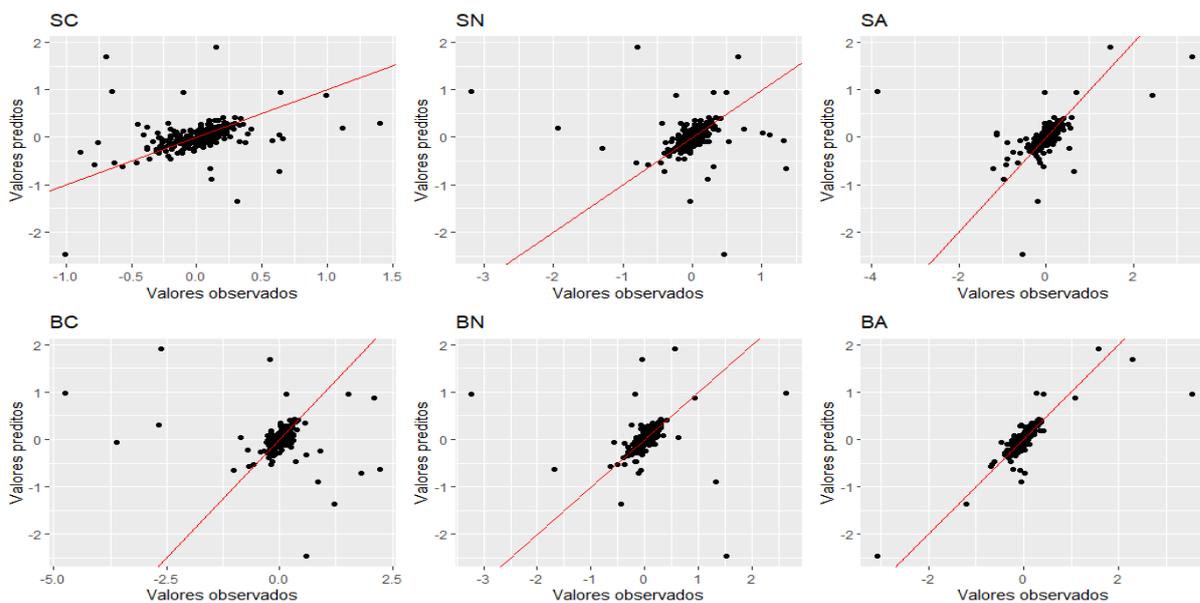


Figura 10 – Gráfico dos valores observados versus os valores estimados para as carteiras de combinação tamanho-investimento.

não evidenciam esse comportamento nos modelos estimados, conclui-se que os modelos de localização estimados são adequados aos dados. Quando os resíduos dos gráficos apresentam inclinação positiva é evidência de variância elevada que indica que a variável dependente tem um parâmetro de escala muito baixo, já quando a inclinação é negativa é evidência de variância baixa indicando que a variável dependente possui um parâmetro de escala muito

elevado. Portanto, é possível constatar a ocorrência de inclinações dos resíduos nos 18 gráficos expostos nas figuras demonstrando que o modelo de regressão linear padrão está mal ajustado para o parâmetro de escala da variável dependente. Ao analisar a assimetria dos resíduos deve-se verificar a forma dos pontos azuis, se for verificada a forma de "U" tem-se assimetria positiva e quando for "U" invertido o comportamento dos dados revelam assimetria negativa. O comportamento dos resíduos não apresentam comportamentos assimétricos para os 18 modelos. Modelos com curtose elevada apresentam resíduos na forma "S" com *left bent up* e com baixa curtose possuem forma "S" com *left bent down*. Pode-se verificar indícios de curtose extremamente elevadas nos 18 modelos expostos. Para mais detalhes sobre o comportamento dos resíduos e suas possíveis formas em *worm plots* ver [Mendonça \(2016\)](#).

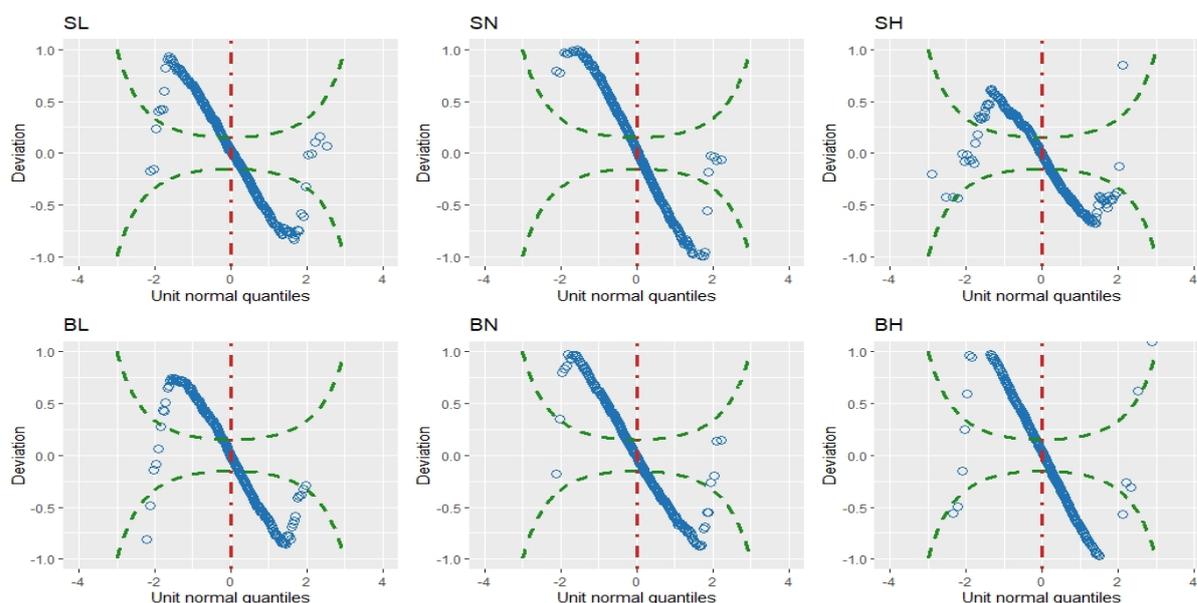


Figura 11 – Gráfico *worm-plot* para as modelos das carteiras de combinações tamanho e razão de valorização, SL, SN, SH, BL, BN e BH respectivamente.

#### 4.4.5 Modelando a dispersão com o modelo GAMLSS com Distribuição Normal

Havendo encontrado evidência de heteroscedasticidade na modelagem de dados presente na seção anterior, procede-se ajustando os modelos GAMLSS gaussianos nos quais média e dispersão são modeladas em conjunto. Nesta etapa a distribuição escolhida continua sendo a Gaussiana (distribuição normal) para verificar se o acréscimo do parâmetro é suficiente para se ter um ajuste robusto, sem a necessidade de mudança na distribuição.

A seleção das variáveis que compõem as estimações da dispersão são feitas através do método *stepGAIC* do pacote GAMLSS ([STASINOPOULOS et al., 2019](#)) inserido em

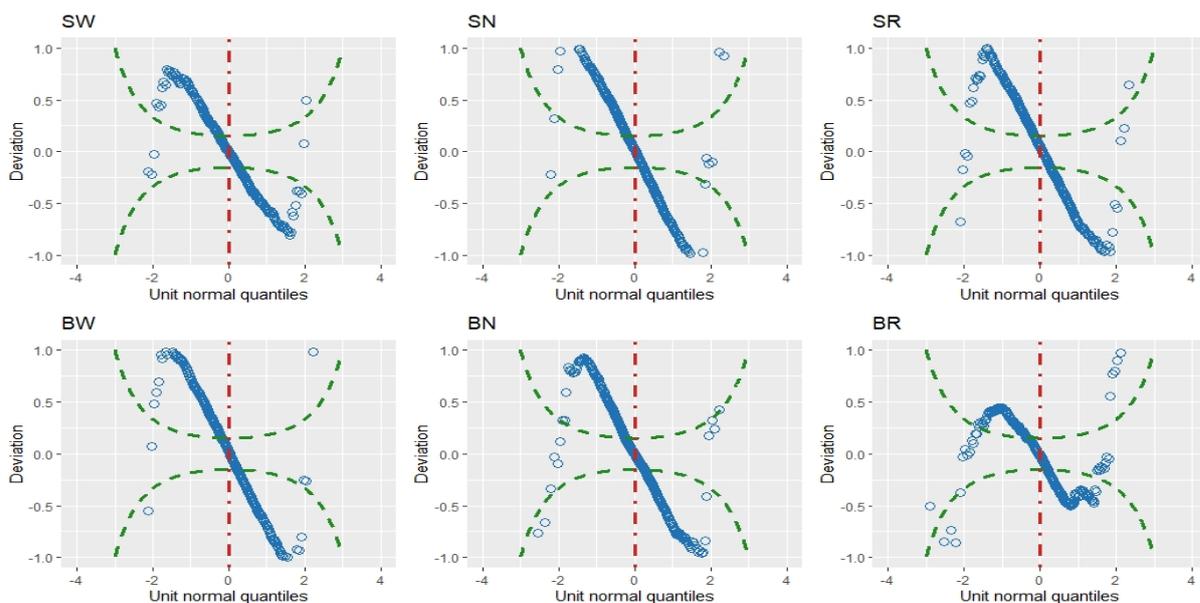


Figura 12 – Gráfico *worm-plot* para as modelos das carteiras de combinações tamanho elucratividade, SW, SN, SR, BW, BN e BR respectivamente.

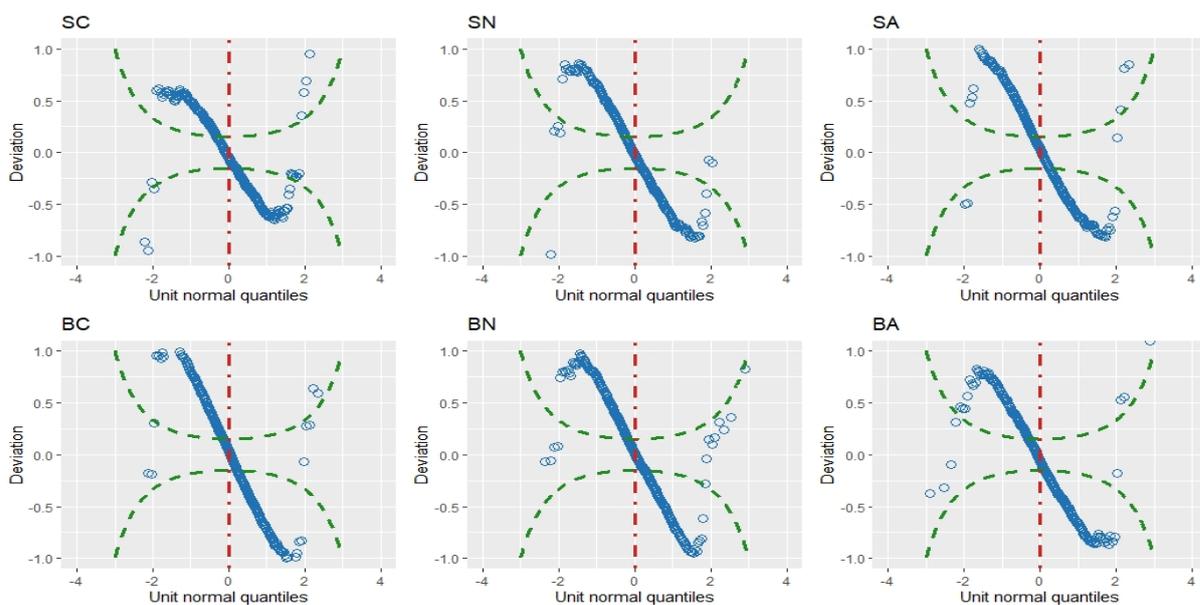


Figura 13 – Gráfico *worm-plot* para as modelos das carteiras de combinações tamanho investimento, SC, SN, SA, BC, BN e BA respectivamente.

software R (suporte computacional no Apêndice D). A função *stepGAIC()* utiliza uma generalização do critério de informação de Akaike (AIC). Os resultados dos modelos para  $\sigma$  estão inseridos nas Tabelas 15, 16 e 17.

Na Tabela 15, expressa os resultados das estimações para os modelos cuja as variáveis respostas são a dispersão dos excessos de retornos de carteiras formadas por

combinações de empresas pelos tamanhos e razão de valorizações. É possível verificar que os interceptos possuem magnitude e significância elevada em relação aos prêmios dos fatores de risco. A composição das variáveis do modelo muda de acordo com a carteira analisada, mas destaque para a carteira SL que evidencia que os cinco prêmios de risco afetam sua dispersão.

Tabela 15 – Estimação do parâmetro ( $\sigma$ ) do ajuste do modelo de dispersão via GAMLSS Gaussiano tamanho-razão de valorização.

| $g(\sigma_{(R_t - R_{f,t})}) = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHMLO_t + rRMW_t + cCMA_t$ |           |            |          |           |            |          |
|---|-----------|------------|----------|-----------|------------|----------|
| $PL/VM \rightarrow$   | Baixo (L) | Neutro (N) | Alto (H) | Baixo (L) | Neutro (N) | Alto (H) |
| $VM$  | a         |            |          | z(a)      |            |          |
| Pequeno (S)   | -1,70*    | -1,47*     | -1,80*   | -38,76    | -33,93     | -40,91   |
| Grande (B)  | -2,03*    | -1,70*     | -1,57*   | -46,44    | -39,21     | -36,16   |
|   | b         |            |          | z(b)      |            |          |
| Pequeno (S)   | 1,33*     | -          | -0,87*   | 3,60      | -          | -2,04    |
| Grande (B)  | 1,19*     | -          | -        | 3,65      | -          | -        |
|   | s         |            |          | z(s)      |            |          |
| Pequeno (S)   | -0,85*    | -          | -0,19    | -3,42     | -          | -1,89    |
| Grande (B)  | -0,26*    | -          | 1,62*    | -2,54     | -          | 8,66     |
|   | h         |            |          | z(h)      |            |          |
| Pequeno (S)   | -0,59*    | -0,27*     | -0,33*   | -5,92     | -3,08      | -3,42    |
| Grande (B)  | -         | -          | -        | -         | -          | -        |
|   | r         |            |          | z(r)      |            |          |
| Pequeno (S)   | 0,62*     | -          | -        | 6,16      | -          | -        |
| Grande (B)  | -0,48*    | -0,40*     | 0,80*    | -6,83     | -5,35      | 9,94     |
|   | c         |            |          | z(c)      |            |          |
| Pequeno (S)   | 0,63*     | -0,50*     | -        | 3,83      | -6,90      | -        |
| Grande (B)  | -0,07     | -0,95*     | 1,70*    | -1,34     | -10,70     | 10,74    |

$|z| > 1,64$  indica significância ao nível de 10% e  $|z| > 1,96$  indica significância ao nível de 5%.

“-” indica que aquela variável não foi selecionada pelo método *stepGAIC*.

“\*” indica que a estimativa do coeficiente é significativa ao nível de 5%.

Fonte: Elaboração Própria

Na Tabela 16, encontram-se os resultados das carteiras tamanho-lucratividade. Os interceptos possuem magnitude elevada se comparados aos prêmios de riscos. A variável que representa o prêmio do mercado apresentou as maiores magnitudes entre os prêmios de riscos, ou seja, quanto maior o excesso de retorno do mercado financeiro maior a dispersão dos excessos de retornos das carteiras. Os demais prêmios de riscos apresentaram influência sobre a dispersão de algumas carteiras, mas com magnitude menor que as demonstradas pelos intercepto e prêmios do mercado financeiro.

Na Tabela 17, expressa os resultados para as carteiras Tamanho-investimento. As magnitudes das estimativas do intercepto e prêmio do mercado são elevadas. A dispersão da carteira SN revela ser afetada por todos os cinco prêmios de riscos.

Os resultados das estimativas dos prêmios de riscos evidência uma relação significativa dos prêmios sobre o  $\sigma$  e essa relação de fato acarreta variação da variância ao longo do tempo e causa a característica heterocedástica no estimador MQO.

As modelagens dos regressores em relação à média dos excessos de retornos das carteiras só é realizada após a modelagem da dispersão. As estimativas do parâmetro de  $\mu$  carrega a informação da modelagem da dispersão. Os resultados das estimativas

Tabela 16 – Estimação do parâmetro ( $\sigma$ ) do ajuste do modelo de dispersão via GAMLSS Gaussiano tamanho-lucratividade.

$$g(\sigma_{(R_t - R_{f,t})}) = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHMLO_t + rRMW_t + cCMA_t$$

| OP →<br>VM  | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) |
|-------------|-----------|------------|-------------|-----------|------------|-------------|
|             | a         |            |             | z(a)      |            |             |
| Pequeno (S) | -1,97*    | -1,60*     | -1,28*      | -45,05    | -36,25     | -29,08      |
| Grande (B)  | -1,30*    | -1,62*     | -2,12*      | -29,56    | -36,96     | -48,66      |
| b           |           |            | z(b)        |           |            |             |
| Pequeno (S) | 1,25*     | 1,68*      | 1,26*       | 5,14      | 3,20       | 2,74        |
| Grande (B)  | 0,77      | 2,36*      | –           | 1,70      | 6,39       | –           |
| s           |           |            | z(s)        |           |            |             |
| Pequeno (S) | 0,75*     | –          | –           | 4,97      | –          | –           |
| Grande (B)  | -0,88*    | –          | 0,91*       | -7,03     | –          | 3,67        |
| h           |           |            | z(h)        |           |            |             |
| Pequeno (S) | –         | –          | –           | –         | –          | –           |
| Grande (B)  | -0,38*    | -0,44*     | –           | -4,51     | -4,49      | –           |
| r           |           |            | z(r)        |           |            |             |
| Pequeno (S) | -0,49*    | -0,13      | 0,15*       | -8,75     | -1,83      | 1,96        |
| Grande (B)  | –         | –          | -0,20*      | –         | –          | -2,49       |
| c           |           |            | z(c)        |           |            |             |
| Pequeno (S) | –         | -0,52*     | –           | –         | -4,73      | –           |
| Grande (B)  | –         | –          | -0,12       | –         | –          | -1,68       |

$|z| > 1,64$  indica significância ao nível de 10% e  $|z| > 1,96$  indica significância ao nível de 5%.

“–” indica que aquela variável não foi selecionada pelo método *stepGAIC*.

“\*” indica que a estimativa do coeficiente é significativa ao nível de 5%.

Fonte: Elaboração Própria

Tabela 17 – Estimação do parâmetro ( $\sigma$ ) do ajuste do modelo de dispersão via GAMLSS Gaussiano tamanho-investimento.

$$g(\sigma_{(R_t - R_{f,t})}) = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHMLO_t + rRMW_t + cCMA_t$$

| INV →<br>VM | Conservador (C) | Neutro (N) | Agressivo (A) | Conservador (C) | Neutro (N) | Agressivo (A) |
|-------------|-----------------|------------|---------------|-----------------|------------|---------------|
|             | a               |            |               | z(a)            |            |               |
| Pequeno (S) | -1,96*          | -1,75*     | -1,31*        | -44,63          | -39,91     | -30,25        |
| Grande (B)  | -1,09*          | -1,70*     | -1,76*        | -24,89          | -39,08     | -40,35        |
| b           |                 |            | z(b)          |                 |            |               |
| Pequeno (S) | 1,31*           | -0,72      | –             | 3,79            | -1,87      | –             |
| Grande (B)  | 1,40*           | 3,64*      | 2,49*         | 3,89            | 16,15      | 9,44          |
| s           |                 |            | z(s)          |                 |            |               |
| Pequeno (S) | -0,94*          | 0,78*      | –             | -5,85           | 2,95       | –             |
| Grande (B)  | –               | -0,66*     | –             | –               | -5,73      | –             |
| h           |                 |            | z(h)          |                 |            |               |
| Pequeno (S) | -0,27*          | -0,86*     | -0,11         | -3,29           | -5,37      | -1,52         |
| Grande (B)  | -0,17           | 0,23*      | –             | -1,95           | 3,48       | –             |
| r           |                 |            | z(r)          |                 |            |               |
| Pequeno (S) | -0,60*          | -1,46*     | -0,33*        | -8,37           | -7,66      | -2,93         |
| Grande (B)  | –               | –          | -0,15*        | –               | –          | -2,15         |
| c           |                 |            | z(c)          |                 |            |               |
| Pequeno (S) | –               | 0,64*      | -0,25*        | –               | 4,52       | -3,46         |
| Grande (B)  | -0,61*          | 0,29*      | -0,24*        | -8,56           | 4,73       | -3,96         |

$|z| > 1,64$  indica significância ao nível de 10% e  $|z| > 1,96$  indica significância ao nível de 5%.

“–” indica que aquela variável não foi selecionada pelo método *stepGAIC*.

“\*” indica que a estimativa do coeficiente é significativa ao nível de 5%.

Fonte: Elaboração Própria

encontram-se nas Tabelas 18, 19 e 20 e evidência mudanças em relação aos resultados com o estimador MQO. As estimativas dos interceptos são não significativas ao nível de significância de 5% para 15 dos 16 modelos estimados, exceção para a carteira SN da Tabela 20. As estimativas para os prêmios de risco do mercado continuam próximas de 1 para todas as 18 carteiras. Ao analisar o prêmio de risco para o fator tamanho, que representa o valor de mercado das empresas, é possível identificar que há um excedente

de retorno para os investidores que optam por carregar ativos de empresas com menor valor de mercado e está representado pelo sinal positivo das estimativas dos coeficientes da variável *SMB*.

A Tabela 18, revela um excedente de retorno para investidores que carregam ações com alta razão de valorização expressa no sinal positivo de *HMLO*, ou seja, ações de empresas que estão subvalorizadas no mercado tendem a fornecer um maior excesso de retornos aos investidores de carregam esses ativos em suas carteiras.

Tabela 18 – Estimação do parâmetro ( $\mu$ ) do ajuste do modelo de dispersão via GAMLSS Gaussiano tamanho-razão de valorização.

| $g(\mu_{(R_t - R_{f,t})} = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHMLO_t + rRMW_t + cCMA_t$ |           |            |          |             |            |          |
|---|-----------|------------|----------|-------------|------------|----------|
| $PL/VM \rightarrow$   | Baixo (L) | Neutro (N) | Alto (H) | Baixo (L)   | Neutro (N) | Alto (H) |
| <i>VM</i>   | <i>a</i>  |            |          | <i>z(a)</i> |            |          |
| Pequeno (S)   | -0,02     | -0,01      | 0,00     | -1,69       | -1,32      | -0,45    |
| Grande (B)  | -0,01     | 0,01       | -0,01    | -1,23       | 1,55       | -1,06    |
|   | <i>b</i>  |            |          | <i>z(b)</i> |            |          |
| Pequeno (S)   | 0,85*     | 0,92*      | 0,87*    | 9,08        | 9,77       | 12,98    |
| Grande (B)  | 1,02*     | 0,89*      | 0,83*    | 20,07       | 12,21      | 9,83     |
|   | <i>s</i>  |            |          | <i>z(s)</i> |            |          |
| Pequeno (S)   | 0,50*     | 0,53*      | 0,33*    | 13,70       | 6,05       | 5,15     |
| Grande (B)  | -0,20*    | -0,24*     | 0,16*    | -4,10       | -3,11      | 20,53    |
|   | <i>h</i>  |            |          | <i>z(h)</i> |            |          |
| Pequeno (S)   | -0,86*    | 0,09       | 0,29*    | -27,93      | 1,81       | 7,19     |
| Grande (B)  | -0,21*    | -0,14*     | 0,17*    | -4,84       | -3,12      | 3,82     |
|   | <i>r</i>  |            |          | <i>t(r)</i> |            |          |
| Pequeno (S)   | 0,47*     | 0,04       | -0,13*   | 35,51       | 0,82       | -3,42    |
| Grande (B)  | 0,09*     | -0,33*     | -0,41*   | 2,24        | -7,84      | -14,91   |
|   | <i>c</i>  |            |          | <i>z(c)</i> |            |          |
| Pequeno (S)   | -0,38*    | -0,01      | 0,17*    | -39,54      | -0,29      | 5,40     |
| Grande (B)  | -0,18*    | -0,09*     | 0,02     | -4,84       | -3,35      | 1,68     |

$|z| > 1,64$  indica significância ao nível de 10% e  $|z| > 1,96$  indica significância ao nível de 5%.  
 “\*” indica que a estimativa do coeficiente é significativa ao nível de 5%.

Fonte: Elaboração Própria

Na Tabela 19, expressa os resultados das carteiras tamanho-lucratividade. Ao analisar as estimativas para estas 6 carteiras é possível identificar que há um prêmio para os investidores que carregam ações de empresas com uma lucratividade robusta, ou seja, ao deter ações de empresas lucrativas os investidores obtêm um excedente de retorno. Por outro lado, ao analisar a Tabela 20, é possível verificar um excedente positivo para carteiras compostas por empresas que investem de forma conservadora.

Portanto, ao realizar a comparação das estimativas de  $\mu$  utilizando a regressão linear padrão com as estimativas que utilizam o GAMLSS gaussiana com modelagem de dispersão, é possível verificar que as mudanças das estimativas ocorreram de forma marginais e em apenas alguns casos se verifica a mudança nos sinais das estimativas. Porém, as maiores mudanças estão nas estatísticas-t para os coeficientes analisados, cujas magnitudes se elevaram na maioria das estimativas dos coeficientes.

As Figuras 14, 15 e 16, mostram os gráficos de *worm plots* para os 18 modelos estimados pelo GAMLSS gaussiano. Os gráficos não evidenciam comportamento de mau ajustamento para o modelo de média, conclui-se que os modelos de localização estimados

Tabela 19 – Estimação do parâmetro ( $\mu$ ) do ajuste do modelo de dispersão via GAMLSS Gaussiano tamanho-lucratividade.

| $g(\mu_{(R_t - R_{f,t})} = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHMLO_t + rRMW_t + cCMA_t$ |           |            |             |           |            |             |
|---|-----------|------------|-------------|-----------|------------|-------------|
| $OP \rightarrow$  | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) |
| $VM$  | a         |            |             | z(a)      |            |             |
| Pequeno (S)   | 0,00      | 0,00       | 0,00        | 0,07      | 0,55       | -0,39       |
| Grande (B)  | 0,00      | 0,00       | -0,01       | 0,20      | -0,04      | -1,57       |
|   | b         |            |             | z(b)      |            |             |
| Pequeno (S)   | 1,01*     | 1,00*      | 1,02*       | 19,22     | 12,91      | 9,70        |
| Grande (B)  | 1,19*     | 0,91*      | 1,03*       | 11,08     | 12,52      | 20,70       |
|   | s         |            |             | z(s)      |            |             |
| Pequeno (S)   | 1,00*     | 0,57*      | 1,18*       | 53,20     | 7,50       | 13,52       |
| Grande (B)  | -0,84*    | -0,07      | -0,42*      | -11,04    | -1,55      | -26,53      |
|   | h         |            |             | z(h)      |            |             |
| Pequeno (S)   | -0,21*    | 0,06       | -0,26*      | -5,69     | 1,15       | -3,76       |
| Grande (B)  | 0,06      | -0,13*     | -0,31*      | 0,92      | -3,20      | -9,03       |
|   | r         |            |             | z(r)      |            |             |
| Pequeno (S)   | -0,69*    | -0,17*     | 0,32*       | -15,18    | -2,31      | 5,47        |
| Grande (B)  | -0,88*    | 0,30*      | 0,42*       | -16,99    | 6,23       | 12,13       |
|   | c         |            |             | z(c)      |            |             |
| Pequeno (S)   | -0,13*    | -0,12*     | 0,17*       | -3,91     | -2,33      | 3,73        |
| Grande (B)  | 0,06      | -0,37*     | -0,23*      | 1,35      | -11,84     | -6,79       |

$|z| > 1,64$  indica significância ao nível de 10% e  $|z| > 1,96$  indica significância ao nível de 5%.  
 “\*” indica que a estimativa do coeficiente é significativa ao nível de 5%.

Fonte: Elaboração Própria

Tabela 20 – Estimação do parâmetro ( $\mu$ ) do ajuste do modelo de dispersão via GAMLSS Gaussiano tamanho-investimento.

| $g(\mu_{(R_t - R_{f,t})} = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHMLO_t + rRMW_t + cCMA_t$ |                 |            |               |                 |            |               |
|---|-----------------|------------|---------------|-----------------|------------|---------------|
| $INV \rightarrow$   | Conservador (C) | Neutro (N) | Agressivo (A) | Conservador (C) | Neutro (N) | Agressivo (A) |
| $VM$  | a               |            |               | z(a)            |            |               |
| Pequeno (S)   | 0,00            | -0,02*     | 0,00          | -0,86           | -2,30      | -0,42         |
| Grande (B)  | -0,01           | 0,00       | 0,00          | -0,70           | 0,76       | -0,26         |
|   | b               |            |               | z(b)            |            |               |
| Pequeno (S)   | 1,11*           | 0,91*      | 1,05*         | 21,26           | 15,60      | 9,51          |
| Grande (B)  | 1,09*           | 1,08*      | 1,15*         | 8,74            | 23,35      | 21,20         |
|   | s               |            |               | z(s)            |            |               |
| Pequeno (S)   | 0,70*           | 1,23*      | 0,86*         | 19,67           | 172,00     | 9,45          |
| Grande (B)  | -0,13           | -0,26*     | -0,17*        | -1,04           | -5,22      | -3,18         |
|   | h               |            |               | z(h)            |            |               |
| Pequeno (S)   | -0,08*          | 0,19*      | -0,39*        | -2,03           | 6,50       | -5,09         |
| Grande (B)  | -0,50*          | -0,07      | -0,30*        | -6,39           | -1,60      | -5,54         |
|   | r               |            |               | z(r)            |            |               |
| Pequeno (S)   | -0,08           | 0,43*      | -0,34*        | -1,61           | 18,68      | -3,39         |
| Grande (B)  | 0,14*           | 0,02       | 0,28*         | 2,06            | 0,66       | 5,61          |
|   | c               |            |               | z(c)            |            |               |
| Pequeno (S)   | 0,14*           | 0,52*      | -0,20*        | 4,60            | 43,14      | -2,68         |
| Grande (B)  | 1,08*           | -0,08*     | -0,65*        | 16,85           | -2,84      | -16,26        |

$|z| > 1,64$  indica significância ao nível de 10% e  $|z| > 1,96$  indica significância ao nível de 5%.  
 “\*” indica que a estimativa do coeficiente é significativa ao nível de 5%.

Fonte: Elaboração Própria

são adequados aos dados. Os resíduos apresentam inclinação negativa que é evidência de variância baixa que indica que as variáveis dependente possuem o parâmetro de escala muito elevado e que o modelo GAMLSS gaussiano não se ajusta a esse comportamento. Ao analisar a assimetria dos resíduos não se verifica comportamentos assimétricos nos 18 modelos estimados. Ao analisar a curtose pode-se verificar indícios de curtose extremamente elevadas nos 18 modelos expostos.

As Figuras 14, 15 e 16 de *worm-plot* servem como uma análise exploratória dos

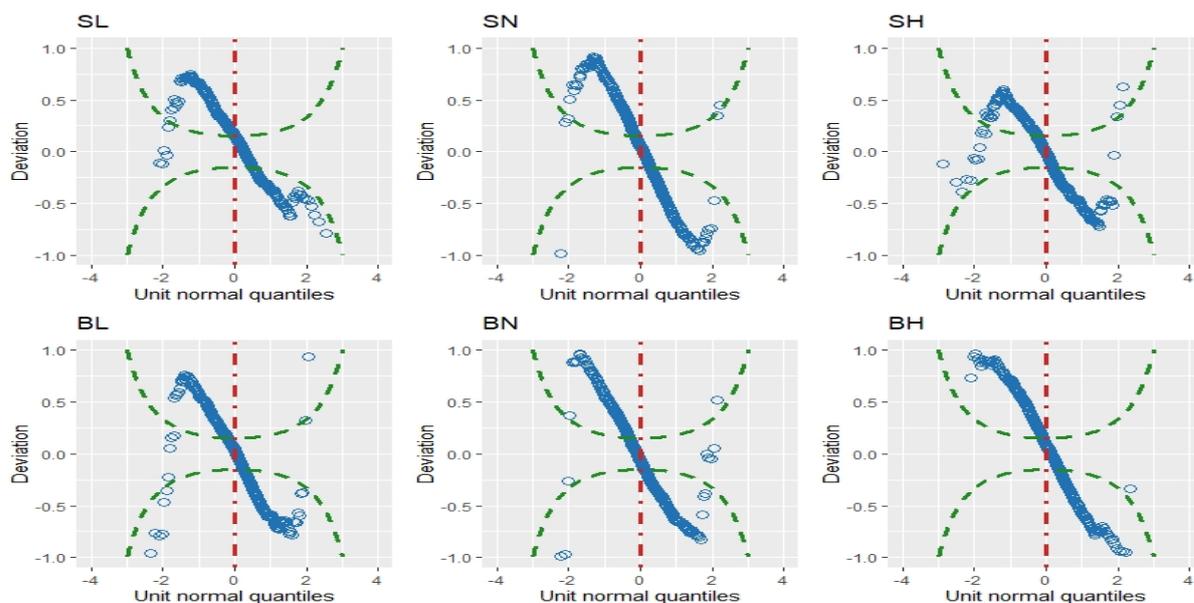


Figura 14 – Gráfico *worm-plot* para as modelos GAMLSS gaussiano das carteiras de combinações tamanho e razão de valorização, SL, SN, SH, BL, BN e BH respectivamente.

modelos estimados e através delas pode-se chegar a duas conclusões. A primeira conclusão é de que o modelo GAMLSS de modelagem de localização e dispersão de distribuição Gaussiana não resolveu o problema da variância dos resíduos. A segunda conclusão é de que a distribuição normal é incapaz de modelar com precisão o comportamento do modelo de cinco fatores, devido à existência de elevada curtose. Portanto, é preciso encontrar uma distribuição que se ajuste ao comportamento do mercado financeiro brasileiro de modo a comportar as ocorrências excessivas de valores extremos.

#### 4.4.6 Modelos GAMLSS de melhor ajuste

Nessa seção é relaxada a premissa de que a variável resposta pertence à família exponencial, então será identificadas as distribuições plausíveis para as variáveis respostas utilizadas nos modelos de precificação. A seleção da distribuição dos modelos de precificação são feitas a partir de comparações entre os modelos GAMLSS com diferentes distribuições através dos critérios de seleção desvio global (GD), AIC e SBC. O critério GD é realizado pela comparação dos desvios globais ajustados, por outro lado, o AIC e SBC é utilizado para penalizar sobreajustes. Foram testadas todas as distribuições presentes no pacote *gamlss.dist* do *software* R (detalhes no Apêndice D) e escolhidas as distribuições que apresentam os menores valores dos critérios de seleção para os modelos testados, em casos em que ocorreram divergência de distribuições entre os critérios de seleção, foi selecionado o modelo que apresenta o menor valor de AIC. Na Tabela 21 é mostradas as distribuições que foram selecionadas segundo os critérios de seleções. As distribuições que melhor se ajustaram

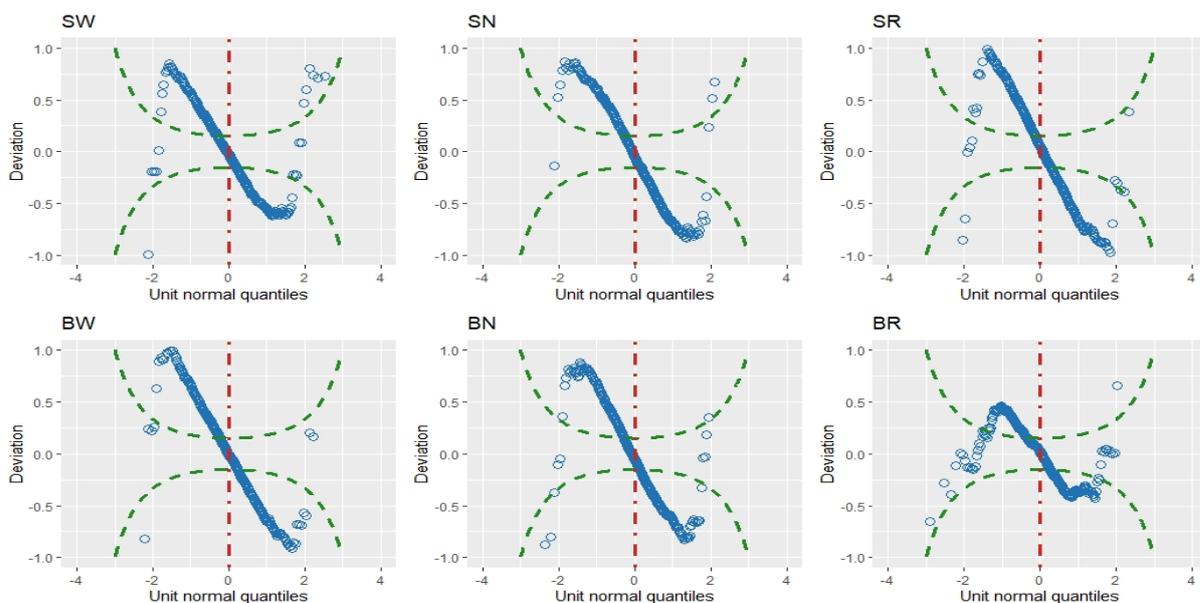


Figura 15 – Gráfico *worm-plot* para as modelos GAMLSS gaussiano das carteiras de combinações tamanho e lucratividade, SW, SN, SR, BW, BN e BR respectivamente.

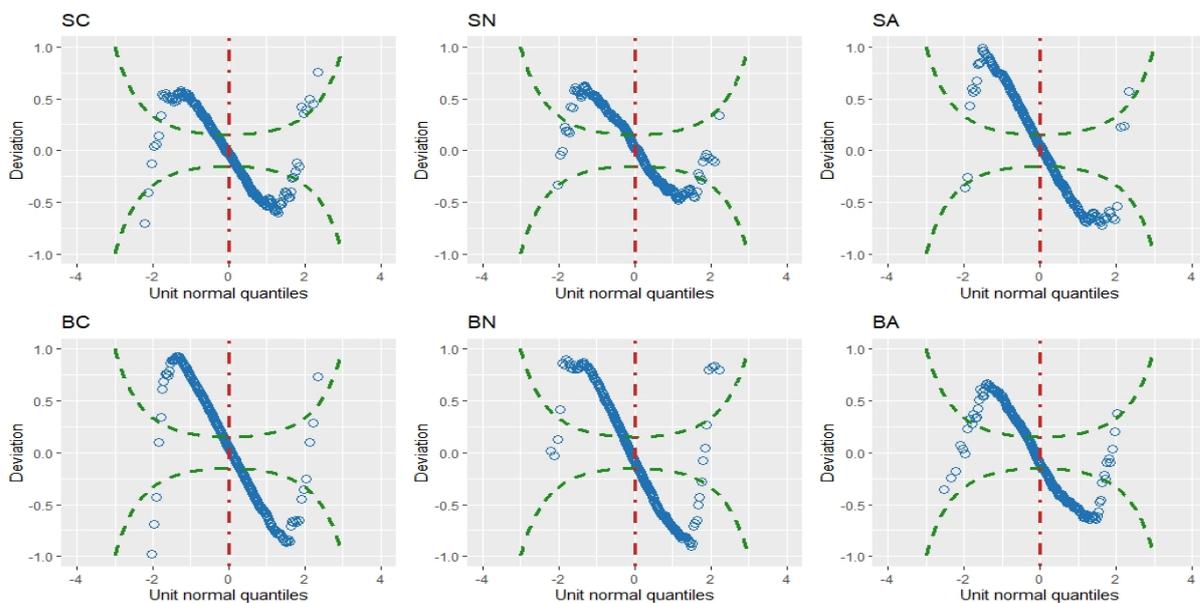


Figura 16 – Gráfico *worm-plot* para as modelos GAMLSS gaussiano das carteiras de combinações tamanho e investimento, SC, SN, SA, BC, BN e BA respectivamente.

aos modelos foram a *Generalized t* (GT), *Assimétrica t tipo 1* (ST1) e *t Family* (TF), todas são generalizações da distribuição *t*, porém com predominância da GT que foi a escolhida em 13 modelos dos 18 estimados. Portanto, a modelagem GAMLSS dos melhores ajustes dos modelos de que expõem os prêmios de riscos dos cinco fatores são efetuadas com as distribuições que melhor se adequaram aos modelos.

Tabela 21 – Resultados das melhores distribuições utilizando os critérios de seleções desvio global (GD), AIC e SBC.

$$g(\mu(R_t - R_{f,t})) = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHML_t + rRMW_t + cCMA_t$$

| Painel A               |                            |                    |                    |
|------------------------|----------------------------|--------------------|--------------------|
| $PL/VM \rightarrow VM$ | Baixo (L)                  | Neutro (N)         | Alto (H)           |
| Pequeno (S)            | Generalized t (GT)         | Generalized t (GT) | Generalized t (GT) |
| Grande (B)             | Assimétrica t tipo 1 (ST1) | t Family (TF)      | Generalized t (GT) |
| Painel B               |                            |                    |                    |
| $OP \rightarrow VM$    | Fraco (W)                  | Neutro (N)         | Robusto (R)        |
| Pequeno (S)            | Generalized t (GT)         | Generalized t (GT) | Generalized t (GT) |
| Grande (B)             | Generalized t (GT)         | Generalized t (GT) | t Family (TF)      |
| Painel C               |                            |                    |                    |
| $INV \rightarrow VM$   | Conservador (C)            | Neutro (N)         | Agressivo (A)      |
| Pequeno (S)            | Generalized t (GT)         | Generalized t (GT) | t Family (TF)      |
| Grande (B)             | t Family (TF)              | Generalized t (GT) | Generalized t (GT) |

Fonte: Elaboração Própria

Na Tabela 22 encontram-se as estimativas dos modelos para carteira cujo excesso de retornos advém das combinações de carteiras compostas por empresas divididas pelo valor de mercado (tamanho) e razão de valorização. Pode-se observar que os interceptos dos modelos são todas aproximadamente 0, porém para as carteiras SN e BL não podemos afirmar serem iguais a zero porque as estatísticas-t são  $-2, 14$  e  $-3, 18$ , respectivamente. As estimativas do prêmio de risco do mercado ( $R_{m,t} - R_{f,t}$ ) são aproximadamente 1. As estimativas dos coeficientes do prêmio pelo fator tamanho ( $SMB$ ) são positivas para carteiras compostas por empresas com pequeno valor de mercado e negativas para carteiras de empresas com grande valor de mercado, isto é, há um prêmio de riscos para investidores que resolvem carregar ações de empresas de pequeno valor de mercado. Já os prêmios de razão de valorização ( $HML$ ) e investimento ( $CMA$ ) são negativos em carteiras de empresas com baixa razão de valorização e positivos em carteiras de empresas com alta razão de valorização. Já o prêmio de lucratividade ( $RMW$ ) é positivo em carteiras de baixa razão de valorização e negativa em carteiras de alta razão de valorização. Os excessos de retornos das ações de carteiras compostas por empresas com baixa razão de valorização assemelham-se aos de empresas com alta lucratividade e nível de investimento agressivo. Por outro lado, as carteiras de empresas com alta razão de valorização possuem um excesso de retornos que assemelham-se aos de empresas com baixa lucratividade e nível de investimento conservador.

Na Tabela 23 é apresentada as estimativas para as carteiras cujas combinações são entre tamanho e lucratividade. Alguns comportamentos observados na Tabela 22 continuam a ser observados nesta tabela, como o caso do intercepto e a estimativa do risco de mercado serem aproximadamente 0 e 1, respectivamente. As estimativas para o prêmio do fator tamanho também continua semelhante exceto para a combinação entre as empresas com grande valor de mercado e nível de lucratividade robusta que se apresentou positiva. As estimativas do prêmio para lucratividade mostram que para empresas de lucratividade

Tabela 22 – Estimação do parâmetro ( $\mu$ ) do ajuste do modelo GAMLSS de melhor ajuste para combinações de tamanho-razão de valorização.

$$g(\mu_{(R_t - R_{f,t})} = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHMLO_t + rRMW_t + cCMA_t$$

| $PL/VM \rightarrow$<br>$VM$ | Baixo (L) | Neutro (N) | Alto (H) | Baixo (L) | Neutro (N) | Alto (H) |
|-----------------------------|-----------|------------|----------|-----------|------------|----------|
|                             | a         |            |          | z(a)      |            |          |
| Pequeno (S)                 | 0,00      | 0,00*      | 0,00     | 1,34      | -2,14      | -1,60    |
| Grande (B)                  | 0,00*     | 0,00       | 0,00     | -3,18     | 0,99       | -0,08    |
|                             | b         |            |          | z(b)      |            |          |
| Pequeno (S)                 | 1,00*     | 0,93*      | 0,89*    | 35,76     | 30,00      | 38,95    |
| Grande (B)                  | 0,94*     | 0,93*      | 0,96*    | 44,22     | 37,34      | 47,91    |
|                             | s         |            |          | z(s)      |            |          |
| Pequeno (S)                 | 1,24*     | 0,61*      | 0,81*    | 17,92     | 12,31      | 23,01    |
| Grande (B)                  | -0,15*    | -0,09*     | -0,08*   | -4,57     | -2,46      | -4,36    |
|                             | h         |            |          | z(h)      |            |          |
| Pequeno (S)                 | -0,89*    | 0,07       | 0,43*    | -12,60    | 1,67       | 11,51    |
| Grande (B)                  | -0,28*    | -0,02      | 0,45*    | -9,22     | -0,84      | 17,49    |
|                             | r         |            |          | z(r)      |            |          |
| Pequeno (S)                 | 0,32*     | 0,09*      | -0,13*   | 6,11      | 2,64       | -7,06    |
| Grande (B)                  | 0,12*     | -0,15*     | -0,27*   | 5,09      | -7,65      | -10,48   |
|                             | c         |            |          | z(c)      |            |          |
| Pequeno (S)                 | -0,17*    | 0,01       | 0,07*    | -3,89     | 0,75       | 3,91     |
| Grande (B)                  | -0,17*    | -0,07*     | 0,07*    | -6,19     | -4,67      | 6,29     |

$|z| > 1,64$  indica significância ao nível de 10% e  $|z| > 1,96$  indica significância ao nível de 5%.

“\*” indica que a estimativa do coeficiente é significativa ao nível de 5%.

Fonte: Elaboração Própria

fraca o prêmio é negativo, no entanto, para empresas com nível de lucratividade robusta o prêmio de risco é positivo. Ao analisar o prêmio de risco de razão de valorização e investimento não é possível detectar um padrão nas estimativas.

Tabela 23 – Estimação do parâmetro ( $\mu$ ) do ajuste do modelo GAMLSS de melhor ajuste para combinações de tamanho-lucratividade.

$$g(\mu_{(R_t - R_{f,t})} = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHMLO_t + rRMW_t + cCMA_t$$

| $OP \rightarrow$<br>$VM$ | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) |
|--------------------------|-----------|------------|-------------|-----------|------------|-------------|
|                          | a         |            |             | z(a)      |            |             |
| Pequeno (S)              | 0,00      | 0,00       | 0,00        | -1,91     | -0,81      | 1,51        |
| Grande (B)               | 0,00      | 0,00       | 0,00*       | -0,09     | 0,00       | -1,98       |
|                          | b         |            |             | z(b)      |            |             |
| Pequeno (S)              | 0,90*     | 0,91*      | 0,95*       | 54,24     | 32,16      | 38,47       |
| Grande (B)               | 0,95*     | 0,85*      | 0,93*       | 36,57     | 27,97      | 45,92       |
|                          | s         |            |             | z(s)      |            |             |
| Pequeno (S)              | 0,96*     | 0,70*      | 0,68*       | 45,77     | 10,65      | 8,86        |
| Grande (B)               | -0,23*    | -0,13*     | 0,06        | -5,62     | -8,02      | 1,16        |
|                          | h         |            |             | z(h)      |            |             |
| Pequeno (S)              | -0,14*    | -0,01      | 0,14*       | -5,72     | -0,45      | 9,05        |
| Grande (B)               | 0,08*     | 0,04       | -0,11*      | 2,22      | 0,96       | -4,43       |
|                          | r         |            |             | z(r)      |            |             |
| Pequeno (S)              | -0,66*    | 0,00       | 0,34*       | -26,83    | 0,01       | 30,89       |
| Grande (B)               | -0,60*    | -0,07*     | 0,20*       | -17,82    | -2,83      | 8,92        |
|                          | c         |            |             | z(c)      |            |             |
| Pequeno (S)              | 0,03*     | 0,03       | -0,02*      | 4,39      | 1,45       | -2,21       |
| Grande (B)               | 0,07*     | -0,32*     | 0,01        | 4,17      | -19,53     | 0,67        |

$|z| > 1,64$  indica significância ao nível de 10% e  $|z| > 1,96$  indica significância ao nível de 5%.

“\*” indica que a estimativa do coeficiente é significativa ao nível de 5%.

Fonte: Elaboração Própria

Na Tabela 24 também é possível detectar o mesmo padrão para o intercepto e prêmio de risco do mercado com estimativas que se aproximam de 0 e 1, respectivamente. Porém, ao analisar a carteira BN é possível rejeitar a hipótese nula do intercepto ser igual a zero ao nível de significância de 5%, o excesso de retorno dessa carteira problemática se

comporta como ações de empresas lucrativas e de investimento agressivo. As estimativas para o prêmio de risco do fator tamanho são positivas com exceção para a carteira com grande valor de mercado e investimento conservador, porém, essa estimativa se verificou estatisticamente não significante. Empresas com grande valor de mercado evidenciaram estimativas de prêmio de risco para razão de valorização negativa. Empresas com pequeno valor de mercado apresentaram estimativas de prêmio de risco de lucratividade negativa, indicando um prêmio negativo para investidores que carregam ações de empresas com lucratividade fraca nesta composição. Ao analisar as estimativas de prêmio de risco para investimento é possível evidenciar que elas são positivas para empresas de investimento conservador e negativas para empresas que possuem um volume de investimentos agressivo, ou seja, há um excesso de retorno positivo para investidores que carregam ações de empresas conservadoras.

Tabela 24 – Estimação do parâmetro ( $\mu$ ) do ajuste do modelo GAMLSS de melhor ajuste para combinações de tamanho-investimento.

| $g(\mu_{(R_t - R_{f,t})}) = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHML_t + rRMW_t + cCMA_t$ |                 |            |               |                 |            |               |
|---|-----------------|------------|---------------|-----------------|------------|---------------|
| INV →<br>VM   | Conservador (C) | Neutro (N) | Agressivo (A) | Conservador (C) | Neutro (N) | Agressivo (A) |
|   |                 | a          |               |                 | z(a)       |               |
| Pequeno (S)   | 0,00            | 0,00       | 0,00          | -1,91           | -1,92      | -0,09         |
| Grande (B)  | 0,00            | 0,00*      | 0,00          | 1,10            | -2,32      | -1,35         |
|   | b               |            |               | z(b)            |            |               |
| Pequeno (S)   | 0,96*           | 0,91*      | 0,93*         | 38,77           | 38,19      | 33,31         |
| Grande (B)  | 0,89*           | 0,95*      | 0,92*         | 29,84           | 78,59      | 33,92         |
|   | s               |            |               | z(s)            |            |               |
| Pequeno (S)   | 0,89*           | 0,77*      | 0,84*         | 30,47           | 18,77      | 15,85         |
| Grande (B)  | -0,03           | 0,05*      | 0,02          | -0,59           | 2,45       | 1,69          |
|   | h               |            |               | z(h)            |            |               |
| Pequeno (S)   | -0,12*          | 0,20*      | 0,06          | -3,55           | 7,97       | 1,35          |
| Grande (B)  | -0,07*          | -0,07*     | -0,32*        | -2,77           | -3,94      | -12,21        |
|   | r               |            |               | z(r)            |            |               |
| Pequeno (S)   | -0,19*          | -0,08*     | -0,05         | -7,95           | -4,33      | -1,30         |
| Grande (B)  | -0,05*          | 0,10*      | -0,15*        | -2,12           | 5,28       | -9,23         |
|   | c               |            |               | z(c)            |            |               |
| Pequeno (S)   | 0,41*           | -0,09*     | -0,49*        | 23,55           | -6,75      | -11,72        |
| Grande (B)  | 0,34*           | -0,08*     | -0,60*        | 7,69            | -5,87      | -62,71        |

$|z| > 1,64$  indica significância ao nível de 10% e  $|z| > 1,96$  indica significância ao nível de 5%.

“\*” indica que a estimativa do coeficiente é significativa ao nível de 5%.

Fonte: Elaboração Própria

Os gráficos da Figuras 17, 18 e 19, apresentam os valores observados dos excessos de retornos das carteiras de análise contra os valores estimados pelos modelos utilizando o GAMLSS para os modelos de combinação tamanho-razão de valorização, tamanho-lucratividade e tamanho-investimento. Apesar da modelagem GAMLSS utilizar as distribuições que melhor se adequaram aos modelos, ainda é possível verificar gráficos semelhante aqueles expressos nas Figuras 8, 9 e 10, pois, ainda se encontram muitos pontos destoantes.

As Figuras 20, 21 e 22, mostram os gráficos de *worm plots* para os 18 modelos estimados. Nos 18 modelos estimados a maioria dos resíduos se encontram sobre o valor de zero do eixo vertical, indicando que o modelo de localização (média) se encontra bem ajustado. Também, não é possível identificar inclinação nos resíduos para todos os

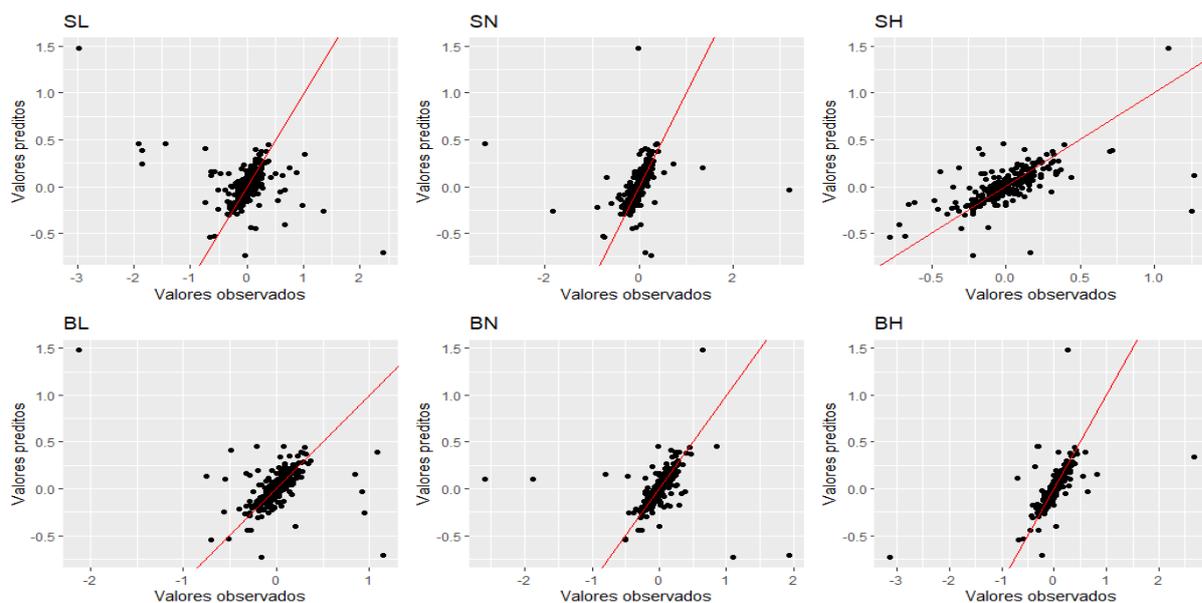


Figura 17 – Gráfico dos valores observados versus os valores estimados para as carteiras de combinação tamanho-razão de valorização, em modelos GAMLSS de melhor ajuste.

modelos, ou seja, os modelos não apresentam ocorrência de variância elevada ou baixa. Adicionalmente, os modelos continuam sem apresentar características assimétricas dos resíduos. Apesar de ocorrerem alguns valores dos resíduos destoantes, não é possível identificar características de curtose elevada ou baixa.

As análises de *worm-plot* expostas nas Figuras 20, 21 e 22 revelam que os cinco fatores na modelagem GAMLSS com uma distribuição adequada se ajusta muito bem aos dados. Portanto, há indícios de que a modelagem GAMLSS corrige os problemas de ajuste dos modelos expostos no estimador de mínimos quadrados ordinários. Na próxima seção é realizado a avaliação de *performance* dos modelos GAMLSS.

#### 4.4.7 Avaliação das performances dos modelos

Na Tabela 25, encontram-se as avaliações de *performances*, as avaliações expressas na coluna 2 à 6 também poderá ser encontrado no artigo de Fama e French (2016).

Tabela 25 – Avaliação de performance

| Modelos                 | $A a_i $    | $\frac{A a_i }{A \bar{r}_i }$ | $\frac{A a_i^2 }{A \bar{r}_i^2 }$ | $\frac{As^2 a_i}{A a_i^2 }$ | $A(R^2)$ | $A(MAE)$ | $A(RMSE)$ |
|-------------------------|-------------|-------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|----------|----------|-----------|
| Regressão Linear Padrão | 0,004716376 | 0,5054696                     | 0,2686262                         | 0,01944491                  | 0,54     | 0,10     | 0,22      |
| GAMLSS Gaussiano        | 0,01039953  | 1,114552                      | 1,423964                          | 0,0450230                   | 0,66     | 0,10     | 0,26      |
| GAMLSS Melhor Ajuste    | 0,004681776 | 0,5017615                     | 0,2713134                         | 0,04753324                  | 0,81     | 0,09     | 0,27      |

A avaliação  $A|a_i|$  é a média do valor absoluto dos interceptos. Essa avaliação é aplicada tanto para a regressão linear padrão, tanto para a modelagem GAMLSS. É

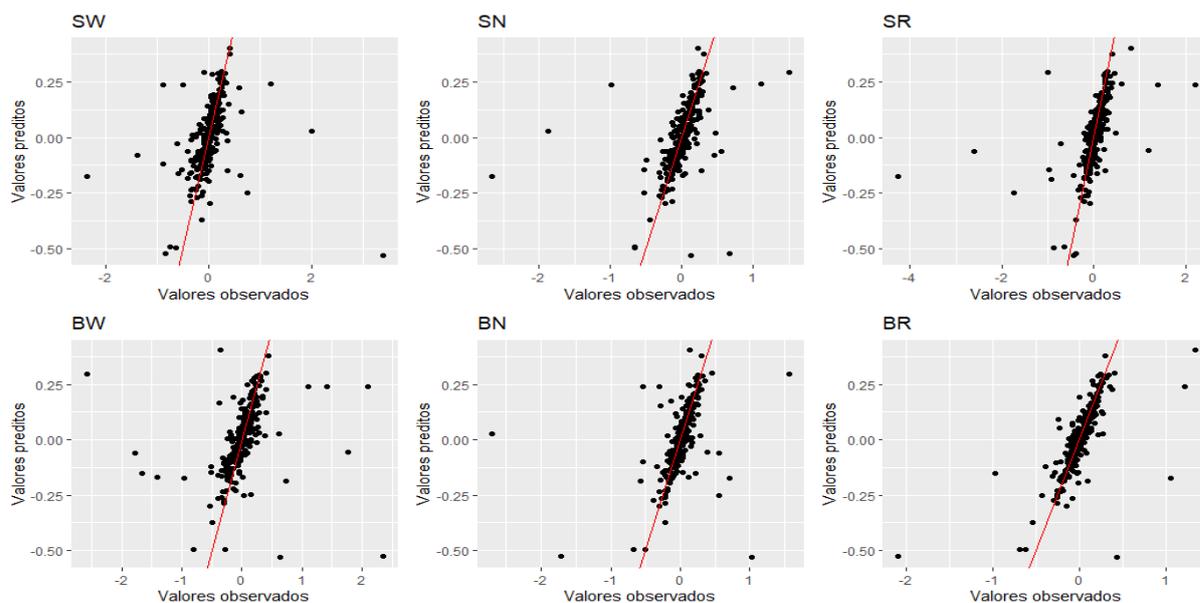


Figura 18 – Gráfico dos valores observados versus os valores estimados para as carteiras de combinação tamanho-lucratividade, em modelos GAMLSS de melhor ajuste.

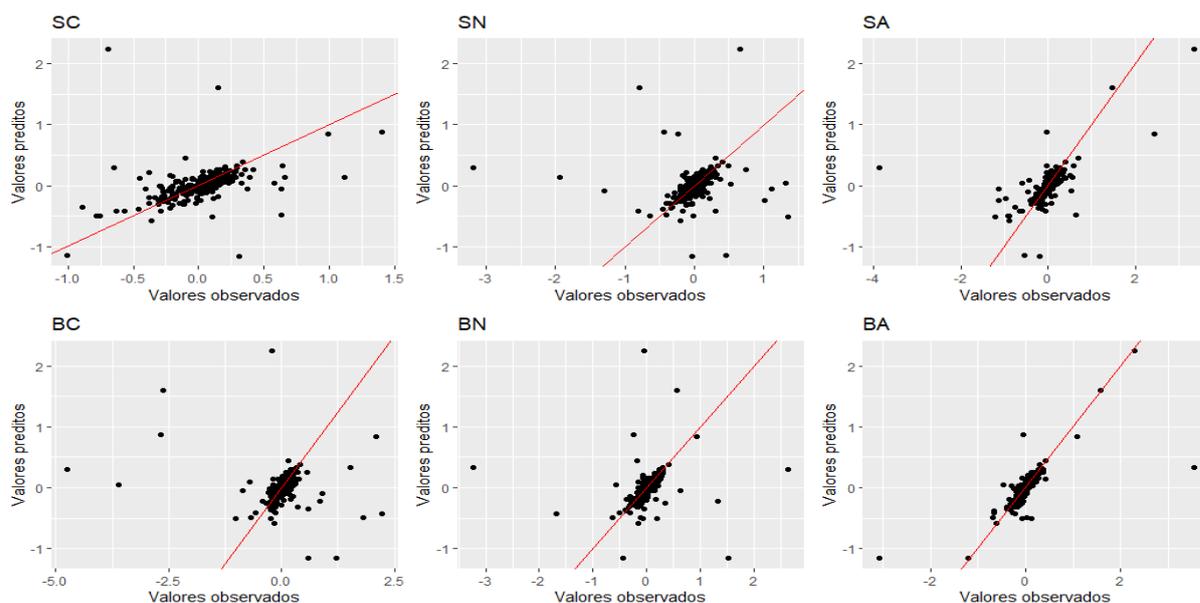


Figura 19 – Gráfico dos valores observados versus os valores estimados para as carteiras de combinação tamanho-investimento, em modelos GAMLSS de melhor ajuste.

possível verificar que em todas as modelagens têm-se uma descrição incompleta para os excessos de retornos, porém este resultado já foram confirmados em outros artigos como em [Fama e French \(2015\)](#) e [Fama e French \(2016\)](#). Contudo, se verifica valores muito próximos de zero para às três modelagens propostas, tendo o GAMLSS de melhor ajuste, com a distribuição adequada a cada modelo, apresentado uma leve melhora em comparação

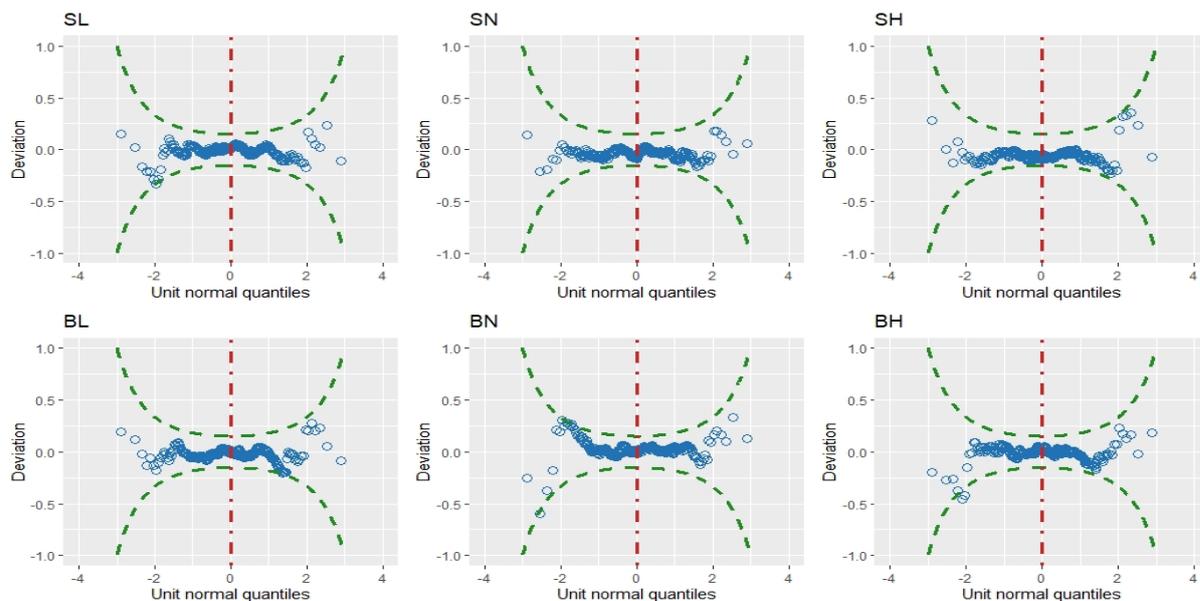


Figura 20 – Gráfico *worm-plot* para as modelos GAMLSS de melhor ajuste das carteiras de combinações tamanho e razão de valorização, SL, SN, SH, BL, BN e BH respectivamente .

ao modelo linear padrão. No entanto, o resultado do GAMLSS Gaussiano apresentou uma média do valor absoluto dos interceptos, elevada se comparado as outras modelagens.

Os resultados da avaliação  $\frac{A|a_i|}{A|\bar{r}_i|}$  são de 0,505 e 0,501 para as modelagens linear padrão e GAMLSS de melhor ajuste, ou seja, na modelagem padrão as dispersões da média dos retornos excedentes não explicados é 50,5% maior do que as dispersões das médias do retorno excedentes, por outro lado, para a modelagem GAMLSS é de 50,1%. Contudo, ao realizar a análise em unidades de retornos ao quadrado  $\frac{A|a_i^2|}{A|\bar{r}_i^2|}$  são obtidos 0,26 e 0,27 para linear padrão e GAMLSS de melhor ajuste respectivamente, ou seja, a modelagem GAMLSS apresenta ser levemente maior com 27% de dispersão média dos retornos excedente inexplicável maior que a dispersão da média dos retornos excedentes. Os resultados para o GAMLSS Gaussiano revela ser extremamente elevada com 1,11 para  $\frac{A|a_i|}{A|\bar{r}_i|}$  e 1,42 para  $\frac{A|a_i^2|}{A|\bar{r}_i^2|}$ .

A avaliação  $\frac{As^2a_i}{A|a_i^2|}$  mensura o quanto que a dispersão do intercepto é devido ao erro de amostragem e não devido à dispersão do verdadeiro intercepto. Nas estimações para o modelo linear padrão apenas 1,9% das dispersões do intercepto é devido ao erro de amostragem, já nos modelos GAMLSS Gaussiano essas dispersões são de 4,5%. O GAMLSS de melhor ajuste apresenta o melhor resultado com 4,7%, ou seja, o modelo GAMLSS com a distribuição adequada tem uma maior dispersão do intercepto devido ao erro de amostragem o que apresenta uma melhora em relação ao modelo linear padrão e GAMLSS Gaussiano.

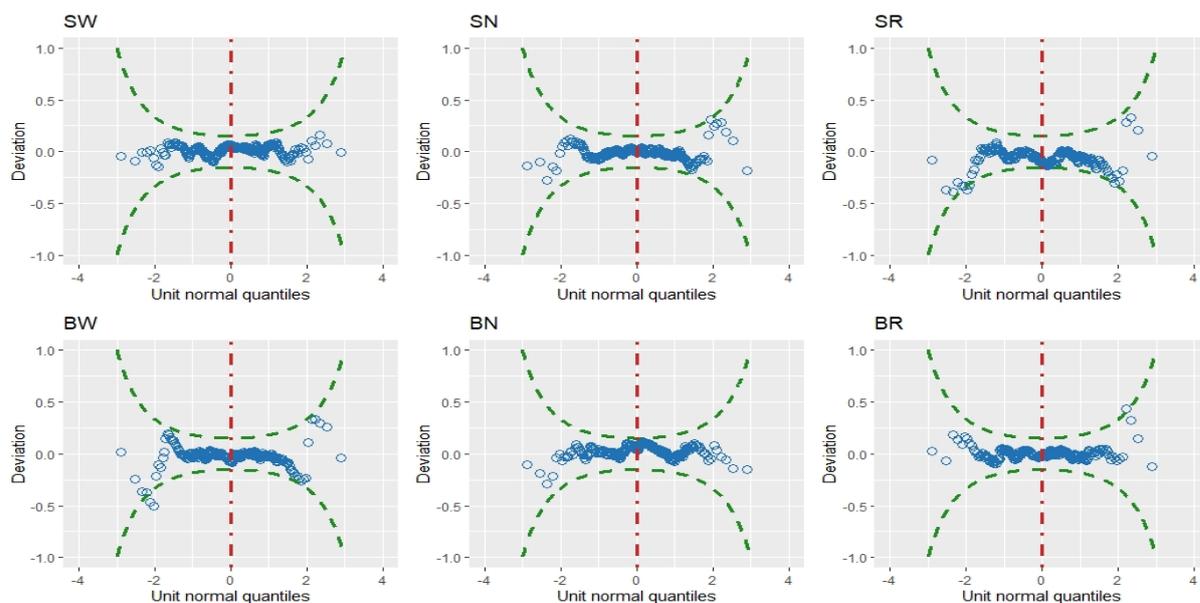


Figura 21 – Gráfico *worm-plot* para as modelos GAMLSS de melhor ajuste das carteiras de combinações tamanho e lucratividade, SW, SN, SR, BW, BN e BR respectivamente.

Ao realizar a análise das estimativas do pseudo- $R^2$  para a modelagem padrão, verifica-se que o seu valor máximo é de 0,81 na estimação dos excessos de retorno da carteira SW, ou seja, 81% das variações do excesso de retorno desta carteira é explicado pelas variações dos prêmios de riscos. A carteira que apresenta o menor pseudo- $R^2$  é a carteira BH de 0,37. Ao considerar a média dos pseudo- $R^2$ , que está expressa na Tabela 25, as estimações obtidas apresentam média do pseudo- $R^2 = 0,54$ , ou seja, em média as variações das variáveis respostas são explicadas em 54% pelos prêmios de riscos. Os resultados do pseudo- $R^2$  em modelos GAMLSS Gaussiano é possível verificar uma pequena melhoria na comparação das estimativas da regressão linear padrão. O menor pseudo- $R^2$  é de 0,50 no modelo cuja variável resposta é o excesso de retorno da carteira BN da combinação entre valor de mercado e lucratividade. Já os maiores pseudo- $R^2$  fica com as carteiras SL e BA. A média ficou em 0,66, que indica que em média as variações das variáveis respostas são explicadas em 66% pelos prêmios de riscos. Ao analisar os resultados do pseudo- $R^2$  em modelos GAMLSS de melhor ajuste é possível verificar uma melhoria na comparação das estimativas da regressão linear padrão e GAMLSS Gaussiano. O maior valor do pseudo- $R^2$  é verificado na carteira SW de 0,88, ou seja, as variações do excesso de retorno da carteira SW é explicada em 88% pelas variações dos cinco fatores. Já o menor valor é verificado na carteira BC de 0,76. Ao considerar a média dos pseudo- $R^2$  de todas as estimações obtidas pelo modelo GAMLSS têm-se o pseudo- $R^2 = 0,81$ , ou seja, em média as variações das variáveis respostas são explicadas em 81% pelos prêmios de riscos.

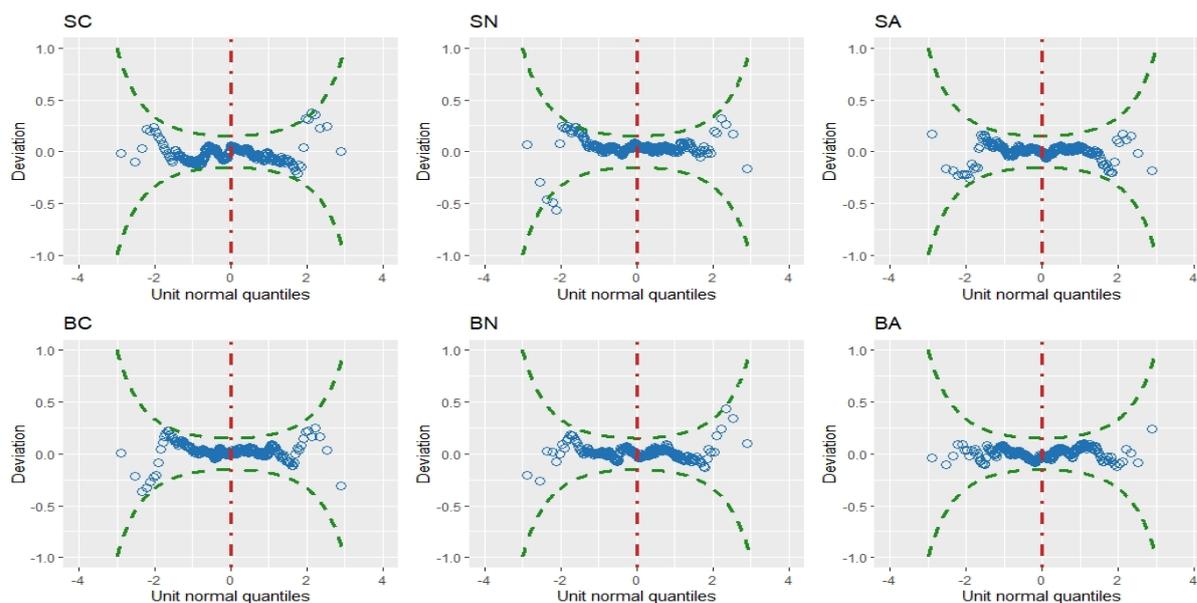


Figura 22 – Gráfico *worm-plot* para as modelos GAMLSS de melhor ajuste das carteiras de combinações tamanho e investimento, SC, SN, SA, BC, BN e BA respectivamente.

O erro médio absoluto (MAE) revela a precisão dos modelos estimados. As carteiras que apresentam o menor valor de MAE na modelagem linear padrão são BL e BR com 0,07 cada. Já a que apresenta o maior valor de MAE é a carteira BC com 0,16. Em média temos 0,10 de erro médio absoluto para os modelos padrão. O Gamlss gaussiano apresenta seu menor valor em BL de 0,07 e seu maior valor em BC 0,17 e a média dos modelos GAMLSS gaussiano de 0,10. Contudo, o modelo gamlss de melhor ajuste apresenta os menores valores de MAE com média geral de 0,09, tendo seu menor valor em BN para combinação de tamanho e razão de valorização e BR ambos com 0,07. O maior valor de MAE para GAMLSS de melhor ajuste foi em BC com 0,15. O modelo GAMLSS de melhor ajuste mostra-se superior aos demais pela métrica de erro médio absoluto.

A raiz do erro quadrático médio (RMSE) é utilizada para expressar a precisão dos resultados numéricos com a vantagem de que ela apresenta os valores do erro nas mesmas dimensões da variável analisada. A carteira estimada na modelagem linear padrão cuja estimativa apresentou o menor erro quadrático médio (0,12) é composta por empresas de maior valor de mercado e alta lucratividade (BR), ou seja, esse modelo estimado apresentou a melhor precisão. Já o modelo estimado que apresentou o pior RMSE é representado pela carteira BC, cujo RMSE foi de 0,42. Contudo, ao analisar a média de todos os modelos ajustados tem-se RMSE de 0,22. A carteira estimada por GAMLSS Gaussiano que apresenta estimativa de menor erro quadrático médio de (0,13) é a carteira BR. Já o modelo estimado que apresenta o pior RMSE é representado pela carteira BC, cujo RMSE é de 0,45. Contudo, ao analisar a média de todos os modelos ajustados na modelagem

GAMLSS Gaussiano tem-se RMSE de 0,26. Nas modelagens GAMLSS de melhor ajuste o maior valor de RMSE é verificado na carteira BC de 0,47. Já o menor valor é verificado na carteira BL de 0,15. Ao considerar a média da raiz do erro quadrático médio de todas as estimações obtidas pelo modelo GAMLSS têm-se 0,27. Ao analisar os resultados da raiz do erro quadrático dos modelos GAMLSS melhor ajuste é possível verificar uma piora na comparação das estimativas com o modelo padrão e GAMLSS Gaussiano no que se refere a raiz do erro quadrático médio.

Portanto, é possível concluir que os modelos GAMLSS de melhor ajuste ao modelar de acordo com a distribuição específica de cada modelo apresentam uma melhoria na avaliação de *performance*, exceto em  $\frac{A|a_i^2|}{A|\bar{r}_i^2|}$  e RMSE. Ocorreu uma melhora de grande magnitude no poder explicativo da influência dos cinco fatores sobre os excessos de retornos das carteiras reveladas pelo pseudo- $R^2$ . Contudo, apesar da superioridade na precisão em relação ao erro médio absoluto (MAE) ao atribuir um peso maior para os grandes erros no RMSE os modelos GAMLSS de melhor ajuste apresentam uma perda de precisão das estimativas dos parâmetros em relação aos outros modelos expostos.

## 4.5 Avaliação de performance dos modelos de fatores em GAMLSS

A Tabela 26 representam os valores das avaliações de *performances* dos principais modelos de fatores em GAMLSS utilizando as distribuições escolhidas na seção 4.4.6. Os três modelos expostos apresentam descrições incompletas para os excessos de retornos, pois, apresentam valores para a média do valor absoluto dos interceptos diferentes de zero, tendo o modelo de cinco fatores com o menor valor.

Tabela 26 – Avaliação de performance

| Modelos                 | $A a_i $    | $\frac{A a_i }{A \bar{r}_i }$ | $\frac{A a_i^2 }{A \bar{r}_i^2 }$ | $\frac{As^2a_i}{A a_i^2 }$ | $A(R^2)$ | $A(MAE)$ | $A(RMSE)$ |
|-------------------------|-------------|-------------------------------|-----------------------------------|----------------------------|----------|----------|-----------|
| Modelo CAPM             | 0,006441011 | 0,6903045                     | 0,7286181                         | 0,04121489                 | 0,71     | 0,12     | 0,31      |
| Modelo de três fatores  | 0,007460000 | 0,7995129                     | 0,8116085                         | 0,04969921                 | 0,78     | 0,10     | 0,28      |
| Modelo de cinco fatores | 0,004681776 | 0,5017615                     | 0,2713134                         | 0,04753324                 | 0,81     | 0,09     | 0,27      |

O melhor resultado para a avaliação das dispersões  $\frac{A|a_i|}{A|\bar{r}_i|}$  e  $\frac{A|a_i^2|}{A|\bar{r}_i^2|}$  é do modelo de cinco fatores. Este apresenta 50,1% de dispersões da média dos retornos excedentes não explicados maior do que as dispersões das médias do retorno excedentes. Quando ajustado ao erro de medição passa a 27,1% de dispersão média dos retornos excedentes inexplicáveis maiores que a dispersão da média dos retornos excedentes. O modelo de três fatores apresenta o pior resultado com 79,9% e 81,1% para  $\frac{A|a_i|}{A|\bar{r}_i|}$  e  $\frac{A|a_i^2|}{A|\bar{r}_i^2|}$ , respectivamente.

Ao analisar  $\frac{As^2a_i}{A|a_i^2|}$ , medida que indica o quanto que a dispersão do intercepto é devido ao erro de amostragem, o modelo que apresenta melhor resultado é do de três fatores com 4,9%, ou seja, 4,9% das dispersões do intercepto é devido ao erro de amostragem. O

modelo de cinco fatores apresenta 4,7% das dispersões do intercepto devido ao erro de amostragem, no entanto, o modelo CAPM apresentou o pior resultado com 4,1%.

Ao analisar a média dos coeficientes de determinação pseudo- $R^2$  o modelo de cinco fatores apresenta o melhor resultado com 0,81, ou seja, em média as variações das variáveis respostas são explicadas em 81% pelos prêmios de riscos. O modelo de três fatores aparece em seguida com a média de 0,78 e por último o CAPM em média de 0,71.

Ao analisar o valor do erro médio absoluto pode-se observar que o modelo de cinco fatores obtêm a melhor precisão de 0,09 seguindo do modelo de três fatores com 0,10. O modelo que apresentou a pior precisão de acordo com o MAE foi o modelo CAPM com 0,12. O resultado da média da raiz do erro quadrático médio para as carteiras estimadas apresentou o menor valor (0,27) para o modelo de cinco fatores, evidenciando assim a melhor precisão entre os modelos estimados. O resultado para o modelo de três fatores é de 0,28 muito próximo do modelo de cinco fatores, no entanto, o resultado do CAPM é o pior entre os modelos analisados com a média do RMSE de 0,31.

Os resultados expressos na Tabela 26 revela a superioridade do modelo de cinco fatores em GAMLSS em relação aos demais modelos de fatores avaliados. O modelo de cinco fatores só não apresenta melhor resultado na avaliação de dispersão do intercepto devido ao erro de amostragem ( $\frac{As^2a_i}{A|a_i^2|}$ ). A superioridade do modelo de cinco fatores também foi demonstrada nos artigos de Fama e French (2015) e Fama e French (2016).

## 5 CONCLUSÃO

Ao analisar os dados de maneira exploratória foi verificado que nos dados das carteiras de análise as ocorrências de valores extremos ocorrem com frequências elevadas, corroborando com a tese de que em mercados financeiros os dados não possuem distribuição normal. Esta tese propõe a utilização da modelagem GAMLSS, de modo a melhorar o ajuste do modelo, através da flexibilização distribucional.

Conforme [Fama e French \(2015\)](#), também se verifica que o prêmio de risco do fator de razão de valorização é redundante para os dados brasileiros e é capturado pela exposição dos prêmios de riscos dos fatores de lucratividade e investimento. Contorna-se este problema substituído a variável *HML* pela *HML0* ortogonal que representa uma transformação da primeira.

Ao realizar o teste de homoscedasticidade de [Breusch e Pagan \(1979\)](#), foi revelado a rejeição da hipótese de homoscedasticidade em 13 modelos estimados. A metodologia MQO não é eficiente para o mercado financeiro brasileiro. Objetivando gerar estatística de teste consistente foi realizado o teste quasi-t do estimador HC2. Ao utilizar a regressão linear padrão encontram-se estimativas muito próximas às encontradas em [Fama e French \(2015\)](#), indicando que o mercado financeiro brasileiro possui comportamento similar ao mercado financeiro americano. Os gráficos de worm-plot para o modelo de regressão linear padrão revelam que os modelos estimados apresentam curtose elevadas e inclinação dos resíduos. Posteriormente, foi estimado um parâmetro adicional de dispersão na modelagem GAMLSS com distribuição normal, tendo como objetivo contornar as distorções geradas pelos efeitos dos prêmios de riscos sobre as dispersões. Contudo, este foi incapaz de melhorar o ajuste como revelado no worm-plot. Portanto, a distribuição normal não consegue captar as frequências dos dados do mercado financeiro brasileiro. Por fim, a hipótese de que os modelos ajustados possuem características distribucional de normalidade foi flexibilizado a fim de acomodar o comportamento do mercado financeiro brasileiro. Através dos critérios de seleção GD, AIC e SBC foi selecionada a distribuição de melhor ajuste nos dados. Ao realizar as estimações com o modelo GAMLSS utilizando a distribuição que melhor se ajustam aos dados são encontrados indícios de que esta modelagem corrige os problemas encontrados ao se estimar com a distribuição normal.

As avaliações de *performance* revelam que todos os modelos estimados são descrições incompletas para os excessos de retornos das carteiras. A modelagem GAMLSS ao utilizar a distribuição adequada apresenta uma melhoria na análise do intercepto em relação às modelagens que utilizam a distribuição normal. A modelagem GAMLSS de melhor ajuste também mostrou um maior poder explicativo demonstrado nos resultados do coeficiente

de determinação pseudo- $R^2$  e também demonstrou ser superior quanto a métrica do erro médio absoluto, contudo, ao utilizar o RMSE que colocar um peso maior nas observações atípicas o modelo acaba perdendo na precisão das estimativas.

Por fim, esta tese realizou uma avaliação de *performance* entre os modelos CAPM, três fatores e cinco fatores. Os resultados corroboram com os encontrados em [Fama e French \(2015\)](#) e [Fama e French \(2016\)](#) que mostram a superioridade do modelo de cinco fatores em relação aos demais.

Portanto, conclui-se que a modelagem GAMLSS de melhor ajuste apresentam resultados satisfatórios para a precificação de ativos no mercado financeiro brasileiro. A modelagem GAMLSS mostra-se uma boa metodologia para aplicações em precificação de ativos devido suas características de flexibilização distribucional e de modelagens de submodelos de parâmetros como dispersão e escala. Esta tese não pretende exaurir todo o potencial da modelagem GAMLSS em aplicação na precificação de ativos e há muito espaço para avançar nesta área em pesquisas futuras.

## Referências

- AKANTZILIOTOU, K.; RIGBY, R.; STASINOPOULOS, D. The R implementation of generalized additive models for location, scale and shape. In: STATISTICAL MODELLING SOCIETY. *Statistical modelling in Society: Proceedings of the 17th International Workshop on statistical modelling*. [S.l.], 2002. p. 75–83. Citado na página 29.
- ÁLVAREZ, B. L.; GAMERO, M. J. A note on bias reduction of maximum likelihood estimates for the scalar skew t distribution. *Journal of statistical planning and inference*, Elsevier, v. 142, n. 2, p. 608–612, 2012. Citado na página 32.
- ANG, A. et al. The cross-section of volatility and expected returns. *Journal of Finance, forthcoming*, Elsevier, 2005. Citado na página 23.
- ARGOLO, E.; LEAL, R. P. C.; ALMEIDA, V. d. S. O modelo de fama e french é aplicável no brasil. *Relatórios Coppead*, Universidade Federal do Rio de Janeiro, p. 0–27, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 40.
- ARTHUR, S.; SHEFFRIN, S. M. Economics: Principles in action. *Upper Saddle River, New Jersey*, v. 7458, p. 173, 2003. Citado na página 38.
- AZZALINI, A. A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian journal of statistics*, JSTOR, v. 12, n. 2, p. 171–178, 1985. Citado na página 32.
- AZZALINI, A. Further results on a class of distributions which includes the normal ones. *Statistica*, v. 46, n. 2, p. 199–208, 1986. Citado na página 33.
- BANZ, R. W. The relationship between return and market value of common stocks. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 9, n. 1, p. 3–18, 1981. Citado na página 16.
- BLACK, F. et al. The capital asset pricing model: Some empirical tests. *Studies in the theory of capital markets*, Praeger, New York, v. 81, n. 3, p. 79–121, 1972. Citado na página 16.
- BREUSCH, T. S.; PAGAN, A. R. A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, v. 47, n. 5, p. 1287–1294, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 77.
- BUUREN, S. v.; FREDRIKS, M. Worm plot: a simple diagnostic device for modelling growth reference curves. *Statistics in medicine*, Wiley Online Library, v. 20, n. 8, p. 1259–1277, 2001. Citado na página 56.
- CARHART, M. M. On persistence in mutual fund performance. *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 52, n. 1, p. 57–82, 1997. Citado na página 18.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. *Statistical inference*. [S.l.]: Duxbury Pacific Grove, CA, 2002. v. 2. Citado na página 29.
- CHEN, N.-F.; ROLL, R.; ROSS, S. A. Economic forces and the stock market. *Journal of business*, JSTOR, v. 59, n. 3, p. 383–403, 1986. Citado na página 18.

- CHERNOZHUKOV, V.; DU, S. Extremal quantiles and value-at-risk. *mit Department of economics working Paper*, 2006. Citado na página 14.
- COCHRANE, J. H. A cross-sectional test of an investment-based asset pricing model. *Journal of Political Economy*, The University of Chicago Press, v. 104, n. 3, p. 572–621, 1996. Citado na página 18.
- COCHRANE, J. H. *Asset pricing: Revised edition*. [S.l.]: Princeton university press, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 13, 14, 17, 21 e 23.
- COLE, T. J.; GREEN, P. J. Smoothing reference centile curves: the lms method and penalized likelihood. *Statistics in medicine*, Wiley Online Library, v. 11, n. 10, p. 1305–1319, 1992. Citado na página 31.
- COVA, C.; SOUZA, M. d.; NETO, G. S. A violação da hipótese dos mercados eficientes com o uso de indicador de análise técnica. *COVA, Carlos José Guimarães. Finanças e mercados de capitais: mercados fractais: a nova fronteira das finanças. São Paulo: Cengage Learning*, 2011. Citado na página 23.
- CRIBARI-NETO, F. Asymptotic inference under heteroskedasticity of unknown form. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 45, n. 2, p. 215–233, 2004. Citado na página 51.
- DAVIDSON, R.; MACKINNON, J. G. et al. Estimation and inference in econometrics. *OUP Catalogue*, Oxford University Press, 1993. Citado na página 51.
- DOWNES, J.; GOODMAN, J. E. *Dicionário de termos financeiros e de investimento*. [S.l.]: NBL Editora, 1993. Citado na página 41.
- DURBIN, J.; WATSON, G. S. Testing for serial correlation in least squares regression: I. *Biometrika*, JSTOR, v. 37, n. 3/4, p. 409–428, 1950. Citado na página 28.
- ECONOMÁTICA. *Banco de Dados*. [S.l.]: Economática São Paulo, 2020. Citado na página 38.
- ENGLE, R. F.; MANGANELLI, S. Caviar: Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 22, n. 4, p. 367–381, 2004. Citado na página 14.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 3–56, 1993. Citado 4 vezes nas páginas 13, 17, 18 e 19.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Multifactor explanations of asset pricing anomalies. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 51, n. 1, p. 55–84, 1996. Citado na página 18.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. A five-factor asset pricing model. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 116, n. 1, p. 1–22, 2015. Citado 20 vezes nas páginas 5, 13, 19, 23, 24, 30, 31, 38, 39, 40, 42, 43, 50, 51, 52, 54, 71, 76, 77 e 78.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Dissecting anomalies with a five-factor model. *The Review of Financial Studies*, Oxford University Press, v. 29, n. 1, p. 69–103, 2016. Citado 8 vezes nas páginas 19, 23, 35, 52, 70, 71, 76 e 78.

- FAMA, E. F.; MACBETH, J. D. Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. *Journal of political economy*, The University of Chicago Press, v. 81, n. 3, p. 607–636, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 53.
- GILLI, M. et al. An application of extreme value theory for measuring financial risk. *Computational Economics*, Springer, v. 27, n. 2-3, p. 207–228, 2006. Citado na página 14.
- GUJARATI, D. N.; PORTER, D. C. *Econometria Básica*. [S.l.]: McGraw-Hill Interamericana, 2010. Citado 5 vezes nas páginas 22, 26, 27, 28 e 50.
- HANSEN, C.; MCDONALD, J.; THEODOSSIOU, P. Some flexible parametric models for partially adaptive estimators of econometric models. *Economics: The Open-Access, Open-Assessment E-Journal*, v. 1, p. 7, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.
- HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R. *Generalized additive models*. New York: Chapman & Hall, 1990. Citado na página 29.
- HOFFMANN, R.; VIEIRA, S. *Análise de regressão: uma introdução à econometria*. São Paulo: [s.n.], 2016. Citado na página 25.
- HORN, S. D.; HORN, R. A.; DUNCAN, D. B. Estimating heteroscedastic variances in linear models. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 70, n. 350, p. 380–385, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 51.
- IKENBERRY, D.; LAKONISHOK, J.; VERMAELEN, T. Market underreaction to open market share repurchases. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 39, n. 2-3, p. 181–208, 1995. Citado na página 23.
- JAGANNATHAN, R.; WANG, Z. The conditional capm and the cross-section of expected returns. *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 51, n. 1, p. 3–53, 1996. Citado na página 18.
- JARQUE, C. M.; BERA, A. K. Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics letters*, Elsevier, v. 6, n. 3, p. 255–259, 1980. Citado na página 49.
- JEGADEESH, N.; TITMAN, S. Returns to buying winners and selling losers: Implications for stock market efficiency. *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 48, n. 1, p. 65–91, 1993. Citado na página 23.
- JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. *Continuous univariate distributions, volume 2*. [S.l.]: John wiley & sons, 1995. v. 289. Citado na página 32.
- JONES, M.; FADDY, M. A skew extension of the t-distribution, with applications. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, Wiley Online Library, v. 65, n. 1, p. 159–174, 2003. Citado na página 33.
- JORION, P. *Value at risk: the new benchmark for controlling market risk*. [S.l.]: Irwin Professional Pub., 1997. Citado na página 13.
- JUNIOR, W. G. et al. Estimando o prêmio de mercado brasileiro. *RAC-Revista de Administração Contemporânea*, Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração, v. 15, n. 5, p. 931–954, 2011. Citado na página 39.

- KOENKER, R.; BASSETT, G. Regression quantiles. *econometrika. Mathematical Reviews (MathSciNet): MR474644 Digital Object Identifier: doi*, v. 46, p. 33–50, 1978. Citado na página 53.
- LEITE, A. L. et al. The fama-french's five-factor model relation with interest rates and macro variables. *The North American Journal of Economics and Finance*, Elsevier, v. 53, p. 101197, 2020. Citado na página 19.
- LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, JSTOR, v. 47, n. 1, p. 13–37, 1965. Citado na página 16.
- MACRET, D. Z. *Relação entre volume e volatilidade no mercado acionário brasileiro*. Tese (Doutorado) — Fundação Getulio Vargas, 2018. Citado na página 46.
- MCDONALD, J. B. Parametric models for partially adaptive estimation with skewed and leptokurtic residuals. *Economics Letters*, Elsevier, v. 37, n. 3, p. 273–278, 1991. Citado na página 35.
- MCDONALD, J. B.; NEWEY, W. K. Partially adaptive estimation of regression models via the generalized t distribution. *Econometric theory*, JSTOR, v. 4, n. 3, p. 428–457, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.
- MENDONÇA, I. R. *Estimação da creatinina sérica basal através de modelos GAMLSS*. Tese (Doutorado) — Universidade de Lisboa, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 59.
- MERTON, R. C. et al. An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica*, JSTOR, v. 41, n. 5, p. 867–887, 1973. Citado na página 17.
- MILLER, M. H.; SCHOLLES, M. Rates of return in relation to risk: A reexamination of some recent findings. *Studies in the theory of capital markets*, New York: Praeger, v. 23, 1972. Citado na página 16.
- MONTEIRO, J. D.; SILVA, P. M. et al. Risco de perda adicional, teoria dos valores extremos e gestão do risco: aplicação ao mercado financeiro português. *Covilhã: Universidade da Beira Interior*, 2002. Citado na página 14.
- MOREIRA, M. *Fusão entre BMFBovespa e Cetip cria a B3, 5ª maior bolsa de valores do mundo*. 2017. Disponível em: <<http://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2017-03/fusao-entre-bmfbovespa-e-cetip-cria-b3-5a-maior-bolsa-de-valores-do-mundo>>. Citado na página 38.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. Análise de séries temporais. In: *Análise de séries temporais*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 538–538. Citado na página 88.
- NAGELKERKE, N. J. et al. A note on a general definition of the coefficient of determination. *Biometrika*, Oxford University Press, v. 78, n. 3, p. 691–692, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- NELDER, J. A.; WEDDERBURN, R. W. Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (General)*, Wiley Online Library, v. 135, n. 3, p. 370–384, 1972. Citado na página 29.

- NOVY-MARX, R.; VELIKOV, M. A taxonomy of anomalies and their trading costs. *The Review of Financial Studies*, Oxford University Press, v. 29, n. 1, p. 104–147, 2016. Citado na página 18.
- PALMA, J. *Outliers em Séries Temporais-Uma Abordagem no Domínio dos Modelos ARMA*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado, apresentada na Universidade de Lisboa-FCUL. Lisboa, 1998. Citado na página 88.
- PICKANDS, J. et al. Statistical inference using extreme order statistics. *the Annals of Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 3, n. 1, p. 119–131, 1975. Citado na página 13.
- RAGAB, N. S. et al. A comparative study between the fama and french three-factor model and the fama and french five-factor model: Evidence from the egyptian stock market. *International Journal of Economics and Finance*, Canadian Center of Science and Education, v. 12, n. 1, p. 1–52, 2020. Citado na página 19.
- REYFMAN, A. *Labor market risk and expected asset returns*. Tese (Doutorado) — University of Chicago, Chicago, 1998. Citado na página 18.
- RIGBY, R.; STASINOPOULOS, D. A semi-parametric additive model for variance heterogeneity. *Statistics and Computing*, Springer, v. 6, n. 1, p. 57–65, 1996. Citado na página 31.
- RIGBY, R.; STASINOPOULOS, D. The gamlss project: a flexible approach to statistical modelling. In: UNIVERSITY OF SOUTHERN DENMARK. *New trends in statistical modelling: Proceedings of the 16th international workshop on statistical modelling*. [S.l.], 2001. v. 337, p. 345. Citado na página 29.
- RIGBY, R. A.; STASINOPOULOS, D. M. Generalized additive models for location, scale and shape. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, Wiley Online Library, v. 54, n. 3, p. 507–554, 2005. Citado na página 29.
- RIGBY, R. A. et al. *Distributions for modeling location, scale, and shape: Using GAMLSS in R*. [S.l.]: CRC press, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 34.
- ROCCO, M. Extreme value theory in finance: A survey. *Journal of Economic Surveys*, Wiley Online Library, v. 28, n. 1, p. 82–108, 2014. Citado na página 14.
- ROSS, S. A. et al. The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, Elsevier, v. 13, n. 3, p. 341–360, 1976. Citado na página 17.
- RUIZ, R. H. Modelo de cinco fatores de fama e french: o caso do mercado brasileiro. *São Paulo: Dissertação de Mestrado*, Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 16.
- SILVA, A. L. da; MENDES, B. V. de M. Value-at-risk and extreme returns in asian stock markets. *International Journal of Business*, Premier Publishing, Inc., v. 8, n. 1, p. 17, 2003. Citado na página 13.

STASINOPOULOS, D.; RIGBY, R.; AKANTZILIOTOU, C. *Instructions on how to use the GAMLSS package in R*. 2006. Disponível em: <<http://www.gamlss.org/>>. Citado na página 29.

STASINOPOULOS, D. M.; RIGBY, R. A. et al. Generalized additive models for location scale and shape (gamlss) in r. *Journal of Statistical Software*, v. 23, n. 7, p. 1–46, 2007. Citado na página 31.

STASINOPOULOS, M. et al. *Package ‘gamlss’*. 2019. Disponível em: <<http://www.gamlss.org/>>. Citado na página 59.

VERSTER, A.; DJ, d. W. *Investigating the Generalized t-distribution*. University of the Free State, South Africa, 2011. Citado na página 34.

VIEIRA, M. D. V. et al. Modelo de cinco fatores de risco: precificando carteiras setoriais no mercado acionário brasileiro. *Revista Catarinense da Ciência Contábil*, Conselho Regional de Contabilidade de Santa Catarina, v. 16, n. 48, p. 86–104, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 41.

# APÊNDICE A – Teste de fator redundante com HMLO

Na Tabela 27 é descrito o teste de fator redundante substituindo a variável *HML* por *HMLO*. É possível observar que o problema de fator redundante que existia com a variável *HML* é resolvida ao substituirmos pela variável ortogonal. Quando é regredido a variável *HMLO* em relação as demais variáveis é possível ver que as estimativas dos coeficientes são iguais a zero. Portanto, o modelo de cinco fatores alternativo é uma solução viável na correção do fator redundante.

Tabela 27 – Usando quatro fatores em regressões para explicar os retornos médios do quinto fator, com o fator *HMLO* substituindo o fator *HML*, entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018.

|                                      | <i>Int</i> | $R_m - R_f$ | <i>SMB</i> | <i>HMLO</i> | <i>RMW</i> | <i>CMA</i> | Pseudo $R^2$ | bp-teste |
|--------------------------------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|------------|--------------|----------|
| <i>R<sub>m</sub> - R<sub>f</sub></i> |            |             |            |             |            |            |              |          |
| Coef                                 | 0,01       |             | -0,01      | 0,00        | -0,02      | 0,00       | 0,00         |          |
| Quasi-t                              | 1,50       |             | -0,48      | 0,00        | -0,53      | -0,04      |              |          |
| p-valor                              | 0,13       |             | 0,62       | 1           | 0,59       | 0,96       |              | 0,93     |
| <i>SMB</i>                           |            |             |            |             |            |            |              |          |
| Coef                                 | 0,00       | -0,02       |            | 0,00        | 0,02       | -0,12      | 0,04         |          |
| Quasi-t                              | -0,45      | -0,47       |            | 0,00        | 0,21       | -1,31      |              |          |
| p-valor                              | 0,64       | 0,63        |            | 1           | 0,83       | 0,18       |              | 0,00     |
| <i>HMLO</i>                          |            |             |            |             |            |            |              |          |
| Coef                                 | 0,01       | 0,00        | 0,00       |             | 0,00       | 0,00       | 0,00         |          |
| Quasi-t                              | 0,66       | 0,00        | 0,00       |             | 0,00       | 0,00       |              |          |
| p-valor                              | 0,50       | 1           | 1          |             | 1          | 1          |              | 0,00     |
| <i>RMW</i>                           |            |             |            |             |            |            |              |          |
| Coef                                 | 0,00       | -0,07       | 0,03       | 0,00        |            | 0,05       | 0,00         |          |
| Quasi-t                              | 0,3        | -0,65       | 0,21       | 0,00        |            | 0,20       |              |          |
| p-valor                              | 0,76       | 0,51        | 0,83       | 1           |            | 0,83       |              | 0,01     |
| <i>CMA</i>                           |            |             |            |             |            |            |              |          |
| Coef                                 | 0,00       | 0,00        | -0,33      | 0,00        | 0,09       |            | 0,04         |          |
| Quasi-t                              | -0,25      | -0,05       | -0,66      | 0,00        | 0,19       |            |              |          |
| p-valor                              | 0,79       | 0,95        | 0,5        | 1           | 0,84       |            |              | 0,00     |

Fonte: Elaboração Própria

# APÊNDICE B – Modelo de cinco fatores estimado por Mínimos Quadrados Ordinários com HML

Na Tabela 28, 29 e 30 estão as estimativas para o modelo de cinco fatores, utilizando a variável redundante *HML*. Essas estimativas revelam que algumas variáveis perdem a significância quando comparado com as estimativas do modelo de cinco fatores alternativos.

Na tabela 28, o modelo estimado pela combinação entre grande valor de mercado e baixa razão de valorização revela que a estimativa do coeficiente da variável prêmio de risco de investimento é  $-0,05$  ( $t = -1,67$ ), ou seja, o investimento é não significativo nesse modelo. Já para a combinação entre pequeno valor de mercado e baixa razão de valorização demonstra que a estimativa do coeficiente do prêmio de risco para lucratividade é não significativa com  $-0,09$  ( $t = -1,62$ ).

Tabela 28 – Regressão para 6 carteiras Tamanho-razão de valorização e com a variável *HML* entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018.

| $R_t - R_{f,t} = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHML_t + rRMW_t + cCMA_t + e_t$ |           |            |          |                    |            |          |
|--|-----------|------------|----------|--------------------|------------|----------|
| $PL/VM \rightarrow$  | Baixo (L) | Neutro (N) | Alto (H) | Baixo (L)          | Neutro (N) | Alto (H) |
| <i>VM</i>  | <i>a</i>  |            |          | Quasi- <i>t(a)</i> |            |          |
| Pequeno (S)  | -0,00     | -0,00      | -0,00    | -0,04              | -0,43      | -0,34    |
| Grande (B)   | -0,00     | 0,00       | -0,00    | -0,84              | 0,14       | -0,32    |
|  | <i>b</i>  |            |          | Quasi- <i>t(b)</i> |            |          |
| Pequeno (S)  | 1,02      | 0,82       | 0,92     | 17,86              | 7,03       | 14,24    |
| Grande (B)   | 0,93      | 0,88       | 1,04     | 15,42              | 10,03      | 15,11    |
|  | <i>s</i>  |            |          | Quasi- <i>t(s)</i> |            |          |
| Pequeno (S)  | 0,50      | 0,80       | 0,30     | 2,85               | 1,34       | 1,50     |
| Grande (B)   | -0,21     | -0,64      | -0,01    | -1,23              | -2,47      | -0,05    |
|  | <i>h</i>  |            |          | Quasi- <i>t(h)</i> |            |          |
| Pequeno (S)  | -0,96     | 0,07       | 0,22     | -6,25              | 0,37       | 1,92     |
| Grande (B)   | -0,50     | -0,34      | 0,30     | -3,40              | -1,32      | 1,33     |
|  | <i>r</i>  |            |          | Quasi- <i>t(r)</i> |            |          |
| Pequeno (S)  | -0,09     | -0,26      | -0,07    | -0,56              | -0,79      | -0,68    |
| Grande (B)   | -0,16     | -0,29      | -0,18    | -0,87              | -1,14      | -0,97    |
|  | <i>c</i>  |            |          | Quasi- <i>t(c)</i> |            |          |
| Pequeno (S)  | 0,09      | -0,32      | 0,05     | 0,84               | -1,18      | 0,60     |
| Grande (B)   | -0,05     | 0,09       | -0,01    | -0,41              | 0,72       | -0,15    |

$|t| > 1,64$  indica significância ao nível de 10% e  $|t| > 1,96$  indica significância ao nível de 5%

Fonte: Elaboração Própria

Na Tabela 29, O fator HML possui estimativas não significativas para as combinações de pequeno e grande valor de mercado com lucratividade neutra  $0,03$  ( $t = -0,62$ ) e  $0,07$  ( $t = -1,26$ ) respectivamente. A estimativa do coeficiente RMW é não significativa com  $0,08$  ( $t = 1,24$ ) na combinação entre pequeno valor de mercado e lucratividade neutra.

Na Tabela 30, as estimativas dos coeficientes do fator de prêmio de risco para investimento não é significativa para a combinação entre grande valor de mercado e

Tabela 29 – Regressão para 6 carteiras tamanho-lucratividade e com a variável *HML* entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018.

| $R_t - R_{f,t} = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHML_t + rRMW_t + cCMA_t + e_t$ |           |            |             |                    |            |             |  |
|--|-----------|------------|-------------|--------------------|------------|-------------|--|
| <i>OP</i> →  | Fraco (W) | Neutro (N) | Robusto (R) | Fraco (W)          | Neutro (N) | Robusto (R) |  |
| <i>VM</i>  | <i>a</i>  |            |             | Quasi- <i>t(a)</i> |            |             |  |
| Pequeno (S)  | -0,00     | -0,00      | -0,00       | -0,21              | -0,42      | -0,32       |  |
| Grande (B)   | -0,00     | -0,00      | -0,00       | -0,27              | -0,53      | -0,26       |  |
|  | <i>b</i>  |            |             | Quasi- <i>t(b)</i> |            |             |  |
| Pequeno (S)  | 0,90      | 0,89       | 1,03        | 10,72              | 11,66      | 13,10       |  |
| Grande (B)   | 1,10      | 0,75       | 0,97        | 13,83              | 7,23       | 14,46       |  |
|  | <i>s</i>  |            |             | Quasi- <i>t(s)</i> |            |             |  |
| Pequeno (S)  | 0,83      | 0,63       | 1,17        | 6,69               | 1,59       | 2,87        |  |
| Grande (B)   | -0,02     | -0,37      | -0,37       | -0,09              | -1,57      | -3,20       |  |
|  | <i>h</i>  |            |             | Quasi- <i>t(h)</i> |            |             |  |
| Pequeno (S)  | -0,44     | -0,03      | -0,25       | -2,66              | -0,15      | -1,22       |  |
| Grande (B)   | -0,20     | -0,07      | -0,39       | -0,79              | -0,40      | -3,92       |  |
|  | <i>r</i>  |            |             | Quasi- <i>t(r)</i> |            |             |  |
| Pequeno (S)  | -0,87     | 0,08       | 0,27        | -4,62              | 0,29       | 1,40        |  |
| Grande (B)   | -0,74     | 0,26       | 0,10        | -3,44              | 0,83       | 0,91        |  |
|  | <i>c</i>  |            |             | Quasi- <i>t(c)</i> |            |             |  |
| Pequeno (S)  | -0,13     | 0,09       | 0,31        | -0,88              | 0,63       | 1,62        |  |
| Grande (B)   | 0,31      | -0,23      | -0,13       | 1,73               | -1,25      | -1,44       |  |

$|t| > 1,64$  indica significância ao nível de 10% e  $|t| > 1,96$  indica significância ao nível de 5%

Fonte: Elaboração Própria

investimento neutro com 0,04 ( $t = -0,77$ ), enquanto a estimativa de lucratividade não é significativa para a combinação de pequeno valor de mercado e investimento neutro com 0,03 ( $t = 0,65$ ). Já para a variável *HML* as estimativas dos coeficientes não são significativas para as combinações entre investimento neutro e valor de mercado pequeno e grande com 0,03 ( $t = 0,59$ ) e 0,02 ( $t = 0,34$ ) respectivamente.

Tabela 30 – Regressão para 6 carteiras tamanho-investimento e com a variável *HML* entre janeiro de 1997 e dezembro de 2018.

| $R_t - R_{f,t} = a + b(R_{m,t} - R_{f,t}) + sSMB_t + hHML_t + rRMW_t + cCMA_t + e_t$ |                 |            |               |                    |            |               |
|--|-----------------|------------|---------------|--------------------|------------|---------------|
| <i>INV</i> →   | Conservador (C) | Neutro (N) | Agressivo (A) | Conservador (C)    | Neutro (N) | Agressivo (A) |
| <i>VM</i>  | <i>a</i>        |            |               | <i>t(a)</i>        |            |               |
| Pequeno (S)  | -0,00           | -0,00      | -0,00         | -0,47              | -0,28      | -0,04         |
| Grande (B)   | -0,00           | -0,00      | -0,00         | -0,07              | -0,1       | -0,55         |
|  | <i>b</i>        |            |               | Quasi- <i>t(b)</i> |            |               |
| Pequeno (S)  | 1,07            | 0,84       | 0,97          | 16,37              | 8,92       | 9,11          |
| Grande (B)   | 0,96            | 0,78       | 1,05          | 4,69               | 4,52       | 7,10          |
|  | <i>s</i>        |            |               | Quasi- <i>t(s)</i> |            |               |
| Pequeno (S)  | 0,38            | 1,13       | 0,83          | 1,78               | 6,29       | 1,32          |
| Grande (B)   | 0,19            | -0,66      | -0,25         | 0,18               | -1,91      | -1,03         |
|  | <i>h</i>        |            |               | Quasi- <i>t(h)</i> |            |               |
| Pequeno (S)  | -0,29           | 0,03       | -0,53         | -2,16              | 0,26       | -2,02         |
| Grande (B)   | -0,61           | 0,02       | -0,37         | -1,68              | 0,11       | -2,47         |
|  | <i>r</i>        |            |               | Quasi- <i>t(r)</i> |            |               |
| Pequeno (S)  | -0,10           | 0,03       | -0,65         | -0,70              | 0,15       | -2,21         |
| Grande (B)   | -0,41           | -0,39      | 0,13          | -0,76              | -1,32      | 0,50          |
|  | <i>c</i>        |            |               | Quasi- <i>t(c)</i> |            |               |
| Pequeno (S)  | 0,15            | 0,23       | -0,21         | 1,41               | 1,23       | -0,84         |
| Grande (B)   | 0,99            | -0,04      | -0,64         | 2,17               | -0,2       | -3,97         |

$|t| > 1,64$  indica significância ao nível de 10% e  $|t| > 1,96$  indica significância ao nível de 5%

Fonte: Elaboração Própria

## APÊNDICE C – Outliers Temporais

Na Tabela 31 encontram-se os resultados para análise de *outliers* temporais, ou seja, assumindo que os dados possuem uma estrutura de autocorrelação serial. A escolha do modelo de séries temporais que se encontra na coluna 2 foi com base na função *auto.arima* do *software* R. A função *auto.arima* escolhe o melhor modelo com base no critério de seleção AIC e BIC. Os *outliers* encontrados foram os *outliers* de inovação (IO), *outliers* aditivos (AO) e o *outliers* de mudanças temporárias (TC). Segundo Morettin e Tolo (2006) As observações atípicas AO afeta apenas o nível da T-ésima observação, enquanto as observações atípicas IO afeta as observações posteriores de acordo com a memória do modelo. Palma (1998) demonstra que as observações atípicas TC possui um efeito sobre as observações posteriores que declina exponencialmente até seu desaparecimento. Na coluna de 3 a 5 da Tabela 31 revela a quantidade de *outliers* IO, AO e TC e, como exposto, as observações atípicas do tipo AO são as mais frequentes na amostra, seguida das observações IO.

Tabela 31 – Outliers Temporais para as carteiras de análises.

| Carteiras  | Modelo                         | Quantidades de IO | Quantidades de AO | Quantidades de TC |
|--|--------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Carteiras de combinação Tamanho-Razão de valorização |                                |                   |                   |                   |
| SL   | $ARIMA(1, 0, 0)(2, 0, 2)_{12}$ | 1                 | 3                 | 0                 |
| SN   | $ARIMA(1, 0, 2)(2, 0, 0)_{12}$ | 3                 | 3                 | 2                 |
| SH   | $ARIMA(0, 0, 0)(2, 0, 0)_{12}$ | 2                 | 5                 | 0                 |
| BL   | $ARIMA(0, 0, 0)(2, 0, 0)_{12}$ | 0                 | 9                 | 0                 |
| BN   | $ARIMA(1, 0, 0)(2, 0, 0)_{12}$ | 3                 | 6                 | 0                 |
| BH   | $ARIMA(0, 0, 0)(2, 0, 0)_{12}$ | 3                 | 4                 | 0                 |
| Média  | -                              | 2                 | 5                 | 0,3               |
| Carteiras de Combinação Tamanho-Lucratividade        |                                |                   |                   |                   |
| SW   | $ARIMA(0, 0, 0)$               | 3                 | 2                 | 0                 |
| SN   | $ARIMA(0, 0, 0)(2, 0, 0)_{12}$ | 5                 | 5                 | 0                 |
| SR   | $ARIMA(0, 0, 2)(2, 0, 1)_{12}$ | 7                 | 5                 | 0                 |
| BW   | $ARIMA(0, 0, 0)(2, 0, 0)_{12}$ | 10                | 4                 | 0                 |
| BN   | $ARIMA(0, 0, 1)(2, 0, 0)_{12}$ | 0                 | 12                | 0                 |
| BR   | $ARIMA(2, 0, 3)(2, 0, 0)_{12}$ | 4                 | 5                 | 0                 |
| Média  | -                              | 4,8               | 5,5               | 0                 |
| Carteiras de Combinação Tamanho-Investimento         |                                |                   |                   |                   |
| SC   | $ARIMA(2, 0, 0)(2, 0, 0)_{12}$ | 7                 | 6                 | 3                 |
| SN   | $ARIMA(0, 0, 0)$               | 4                 | 3                 | 1                 |
| SA   | $ARIMA(0, 0, 0)(2, 0, 0)_{12}$ | 4                 | 2                 | 0                 |
| BC   | $ARIMA(0, 0, 0)(2, 0, 2)_{12}$ | 6                 | 2                 | 0                 |
| BN   | $ARIMA(0, 0, 2)(2, 0, 2)_{12}$ | 4                 | 3                 | 0                 |
| BA   | $ARIMA(0, 0, 0)$               | 3                 | 2                 | 1                 |
| Média  | -                              | 4,7               | 3                 | 0,8               |
| Média Total  | -                              | 3,8               | 4,5               | 0,4               |

Fonte: Elaboração Própria

As figuras 23, 24 e 25 revelam os gráficos das carteiras em dois painéis. O painel superior mostra o comportamento da série original e da série ajustada e no painel inferior os efeitos dos *outliers* nas séries. É possível ver que a maioria dos *outliers* são do tipo AO, ou seja, o efeito da observação atípica não afeta as observações posteriores.

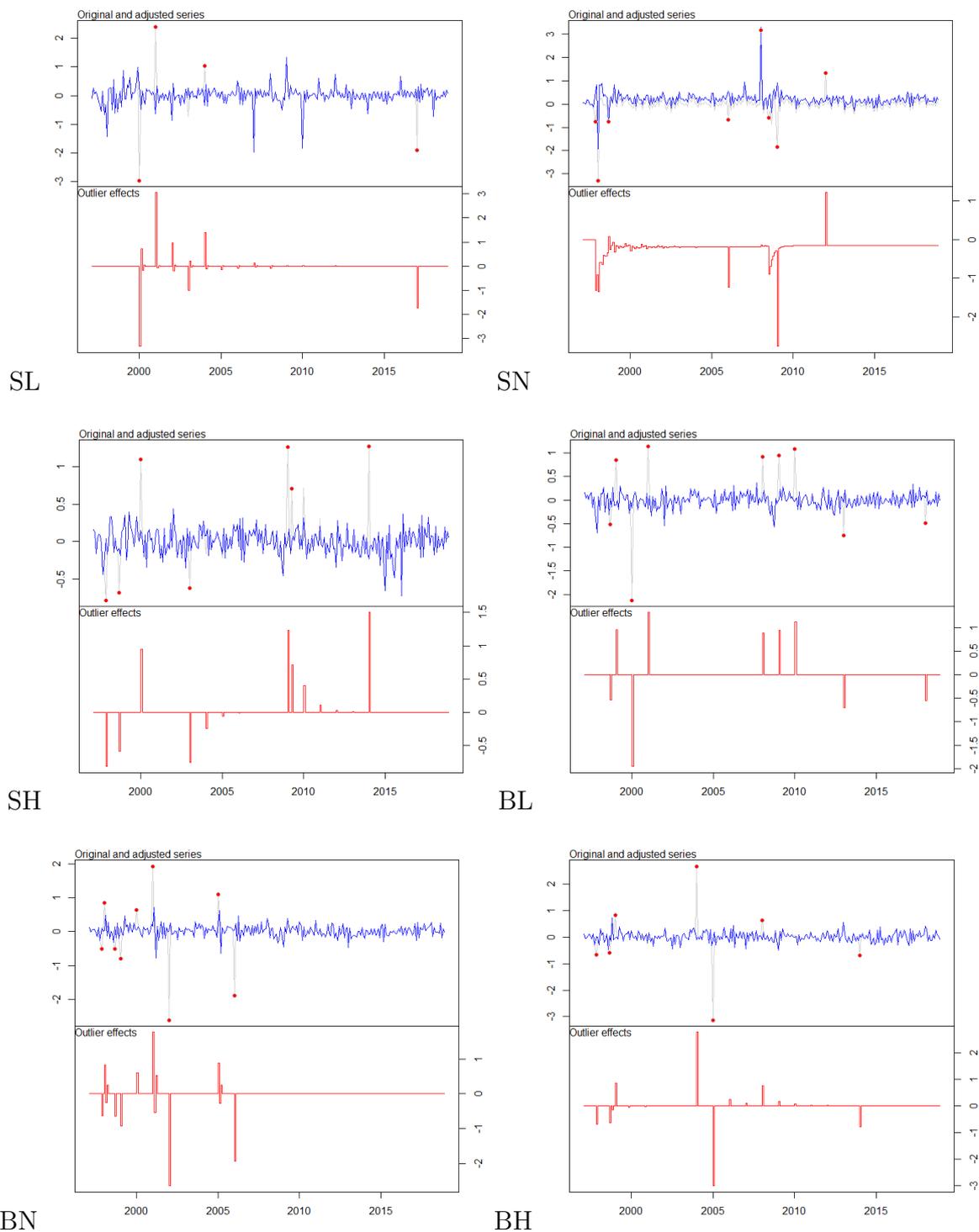


Figura 23 – Outliers Temporais para Carteiras de combinação Tamanho-Razão de valorização

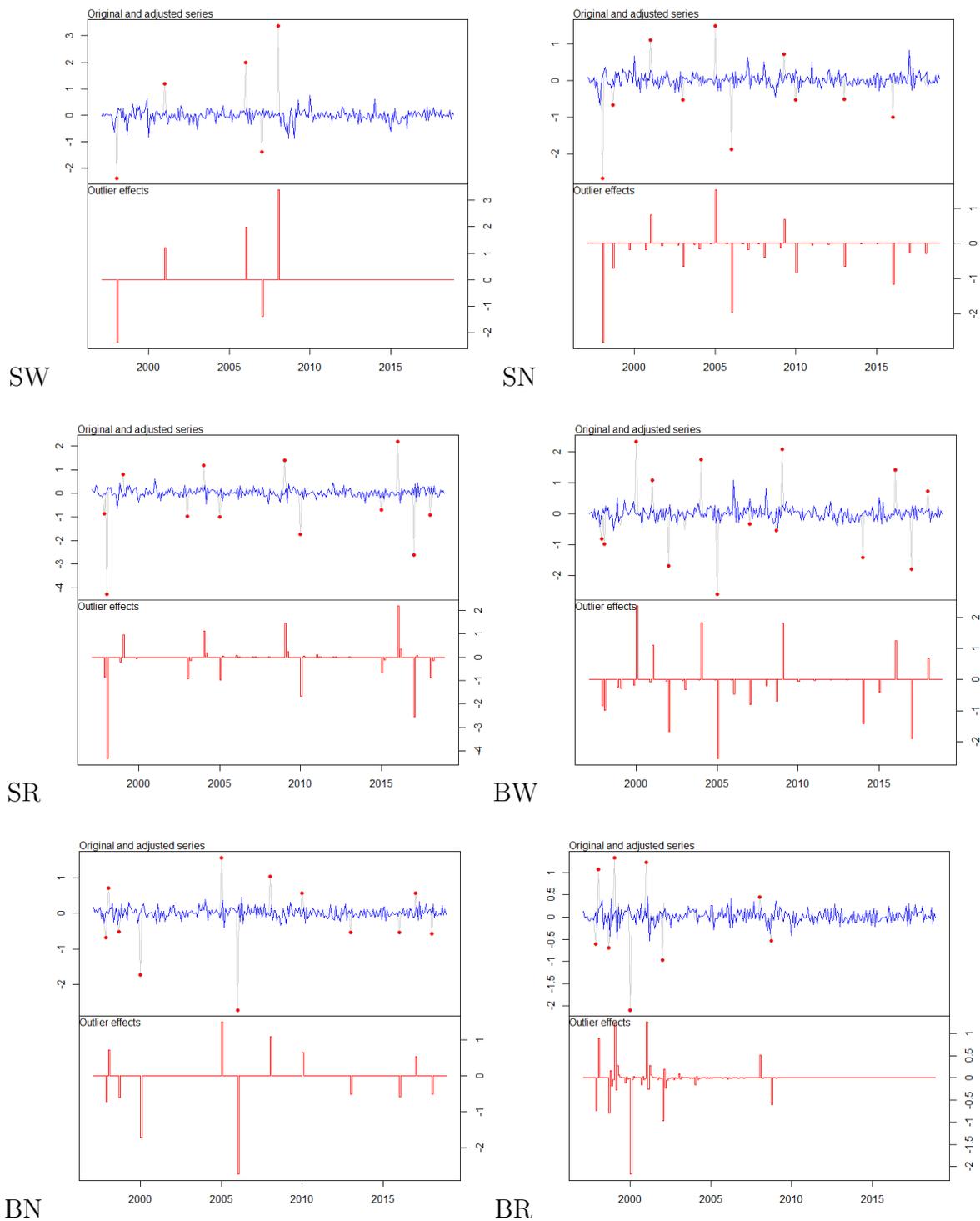


Figura 24 – Outliers Temporais para Combinação Tamanho-Lucratividade

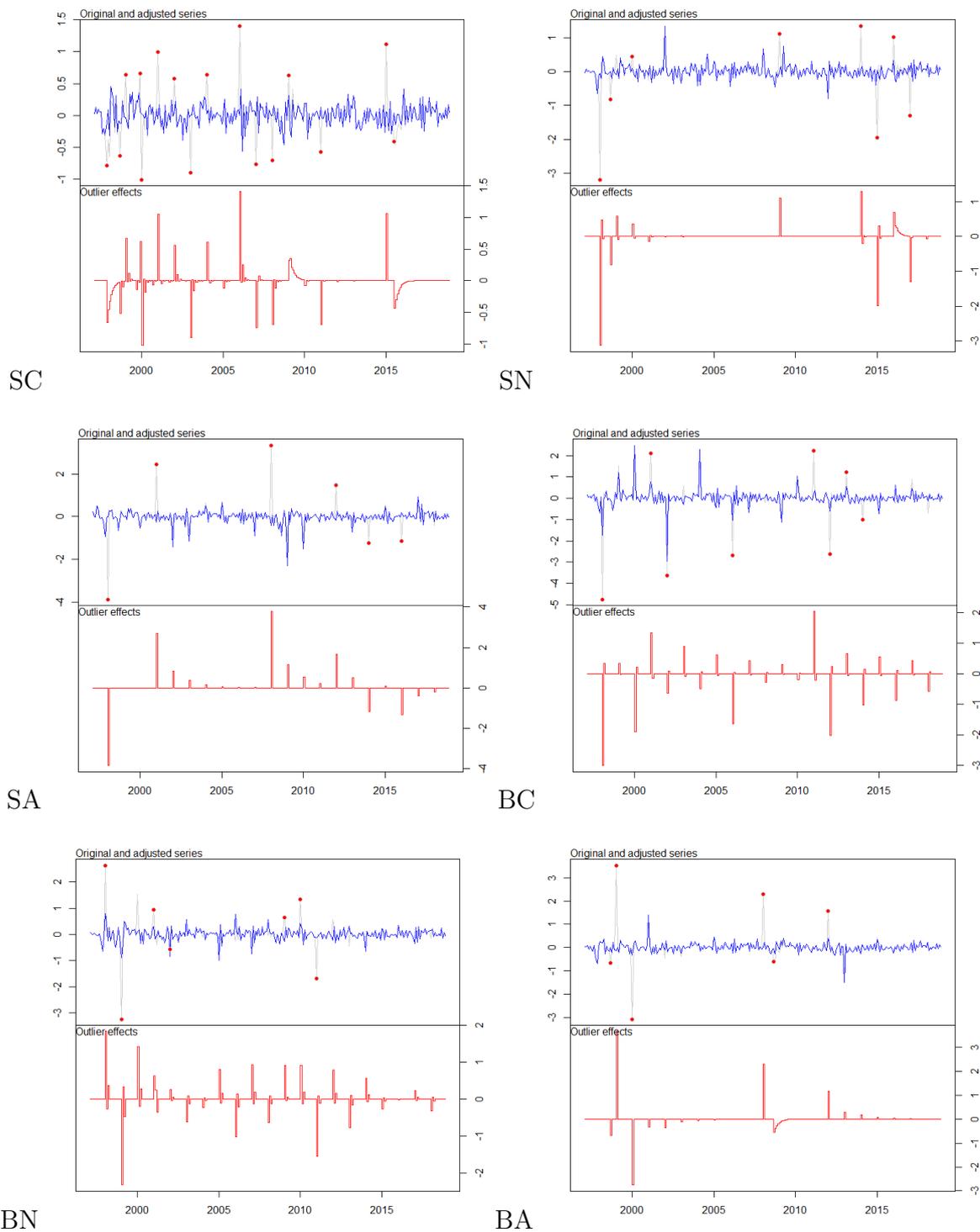


Figura 25 – Outliers Temporais para Carteiras de Combinação Tamanho-Investimento

## APÊNDICE D – Suporte Computacional

Esta seção trará os códigos construídos e todas as funções necessários para a modelagem GAMLSS. Todos os resultados apresentados nesta tese originaram-se de análises efetuadas através do software R.

```

library(gamlss)
library(gamlss.dist)

A seguir os comandos do GAMLSS gaussiano com o submodelo de dispersão.

#Carteira SL#
gamjuste01 <- gamlss(formula = ERSL CAPM + SMB + HMLO + RMW +
CMA, family = NO,method = mixed(100,100))

#Seleção para as variáveis do submodelo de dispersão#
stepgamjuste1 <- stepGAIC(gamjuste01,scope=list(lower= 1,upper= CAPM +
SMB + HMLO + RMW + CMA),what='sigma')

#Estimação do modelo GAMLSS gaussiano#
gamjuste1 <- gamlss(formula = ERSL CAPM + SMB + HMLO + RMW +
CMA, family = NO,sigma.formula= CAPM + SMB + HMLO + RMW + CMA, method
= mixed(100,100))

summary(gamjuste1)

#Worm plot dos resíduos #
wp(gamjuste1, ylim.all = TRUE)

# raiz do erro quadrático médio (RMSE) #
RMSE = function(m, o){sqrt(mean((m - o)^2))}

predictions1 <- predict(gamjuste1)
RMSE(ERSL, predictions1)

# erro médio absoluto (MAE) #
library(Metrics)
mae(ERSL, predictions1)

# pseudo-R2 #
Rsq(gamjuste1)

```

Foi repetido essa operação para cada carteiras de análise. A seguir os comandos do software R para o GAMLSS de melhor ajuste.

```
#SL #  
# estimação do modelo com a distribuição que melhor se ajustou#  
gamjuste1.1 <- gamlss(formula = ERSL CAPM + SMB + HMLO + RMW +  
CMA, family =GT, method = mixed(100,100) )  
summary(gamjuste1.1)  
#RMSE e MAE#  
predictions1.2 <- predict(gamjuste1.1)  
RMSE(ERSL, predictions1.2)  
mae(ERSL, predictions1.2)  
# pseudo- $R^2$  #  
Rsq(gamjuste1.1)  
#Worm plot dos resíduos #  
wp(gamjuste1.1)
```

A operação é repetida para cada carteira de análise.

—