



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Masterson Falcão de Moraes Costa

Existência e comportamento assintótico de soluções no modelo de Keller-Segel fracionário

Recife

2021

Masterson Falcão de Moraes Costa

Existência e comportamento assintótico de soluções no modelo de Keller-Segel fracionário

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Orientador (a): Dr. Claudio Cuezaz Henríquez.

Recife

2021

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

C837e Costa, Masterson Falcão de Moraes
Existência e comportamento assintótico de soluções no modelo de Keller-Segel fracionário / Masterson Falcão de Moraes Costa. – 2021.
102 f.: il., fig.

Orientador: Claudio Cuevaz Henríquez.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2021.
Inclui referências.

1. Análise. 2. Keller-Segel - Modelo I. Cuevaz Henríquez, Claudio (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2021 - 20

MASTERSON FALCÃO DE MORAIS COSTA

**EXISTÊNCIA E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SOLUÇÕES NO MODELO
KELLER-SEGEL FRACIONÁRIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 28/01/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Claudio Rodrigo Cuevas Henriquez (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dra. Joelma Azevedo de Moura Nascimento (Examinador Externo)
Universidade de Pernambuco

Prof. Dr. Clessius Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Dedico à minha amada esposa Lindiane e aos meus pais, por todo amor, incentivo, apoio e compreensão. Nada disso teria sentido se vocês não existissem na minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, que com o auxílio de vossa divina misericórdia, me concedeu resiliência para prosseguir nos estudos. A ele, toda honra e toda glória.

Agradeço ao meu orientador, professor Dr. Claudio Rodrigo Cuevas Henriquez, pela significativa contribuição na minha formação acadêmica, pela confiança, paciência, incentivo, amizade e excelente orientação. Agradeço a Sr^a. Gilca pelo auxílio. Também agradeço a Joelma Azevedo, pelas incontáveis contribuições, a qual, tenho certeza que terá uma carreira incrível como docente e pesquisadora. Sou grato a Clesius Silva por fazer parte da banca e também por sua contribuição.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFPE, em especial, aos professores: Eduardo S. G. Leandro, Roberto Capistrano, Silvia Sastre, César Castilho, Ricardo T. Bortolotti, os quais contribuíram diretamente para minha formação durante o mestrado.

Agradeço a toda minha família. Aos meus pais Normando e Nivalda pelos conselhos e apoio.

Aos meus amigos de curso: Mario Bezerra, Augusto, Joyce, Ana.

A minha amada esposa Lindiane, por entender minha ausência em diversos momentos, por pegar para si meus objetivos e não medir esforços para alcançá-los.

Um agradecimento especial ao CNPQ, pelo auxílio financeiro e ao Programa de Pós-graduação de Matemática da UFPE pela confiança na concessão de minha bolsa de estudos.

Masterson Falcão de Moraes Costa.

RESUMO

Neste trabalho, fazendo uso de ferramentas da Análise Funcional e Topologia, estudamos o modelo fracionário de Keller-Segel para quimiotaxia de ordem $\alpha \in (0, 1)$ que consiste em um sistema acoplado de Equações Diferenciais Parciais em \mathbb{R}^n , com $n \geq 2$. Considerando dados iniciais suficientemente pequenos e fazendo-se estimativas estruturais dos operadores de Mittag-Leffler via estimativas do semigrupo do calor, mostramos a existência e unicidade de soluções brandas, no sentido de Hadamard, construídas pelo princípio de Duhamel em espaços de Morrey e Besov-Morrey homogêneos para a classe de Fujita-Kato fazendo uso de um argumento topológico de ponto fixo de Banach. Com a hipótese, $\gamma = 0$, apresentamos soluções para o modelo que são invariantes por escala, ou seja, são auto-similares. E por fim, analisamos o comportamento assintótico das soluções, obtendo um resultado de estabilidade no tempo e como decorrência disso temos que cada solução auto-similar é um atrator global. A base da presente dissertação é o artigo de: Azevedo, J. et al., "Existence and asymptotic behaviour for the time-fractional Keller-Segel model for chemotaxis".

Palavras-chave: Modelo de Keller-Segel fracionário. Espaços de Besov-Morrey. Soluções Auto-Similares. Comportamento Assintótico.

ABSTRACT

In this work, using tools from Functional Analysis and Topology, we study the Keller-Segel fractional model for $\alpha \in (0,1)$ chemotaxis that consists of a coupled system of Partial Differential Equations in \mathbb{R}^n , with $n \geq 2$. Considering initial data small enough and making structural estimates of the Mittag-Leffler operators via estimates of the semigroup of heat, we show the existence and uniqueness of soft solutions, in the sense of Hadamard, constructed by the Duhamel principle in spaces of Morrey and Besov- Morrey homogeneous for the Fujita-Kato class using a Banach fixed-point topological argument. For the case $\gamma = 0$, we present solutions for the model that are invariant by scale, that is, they are self-similar. And finally, we analyze the asymptotic behavior of the solutions, obtaining a result of stability over time and as a result, we have that each self-similar solution is a global attractor. This dissertation is based on the article by: Azevedo, J. et al., "Existence and asymptotic behavior for the time-fractional Keller-Segel model for chemotaxis".

Keywords: Fractional Keller-Segel Model. Besov-Morrey Spaces. Self-Similar Solutions. Asymptotic Behavior.

SUMÁRIO

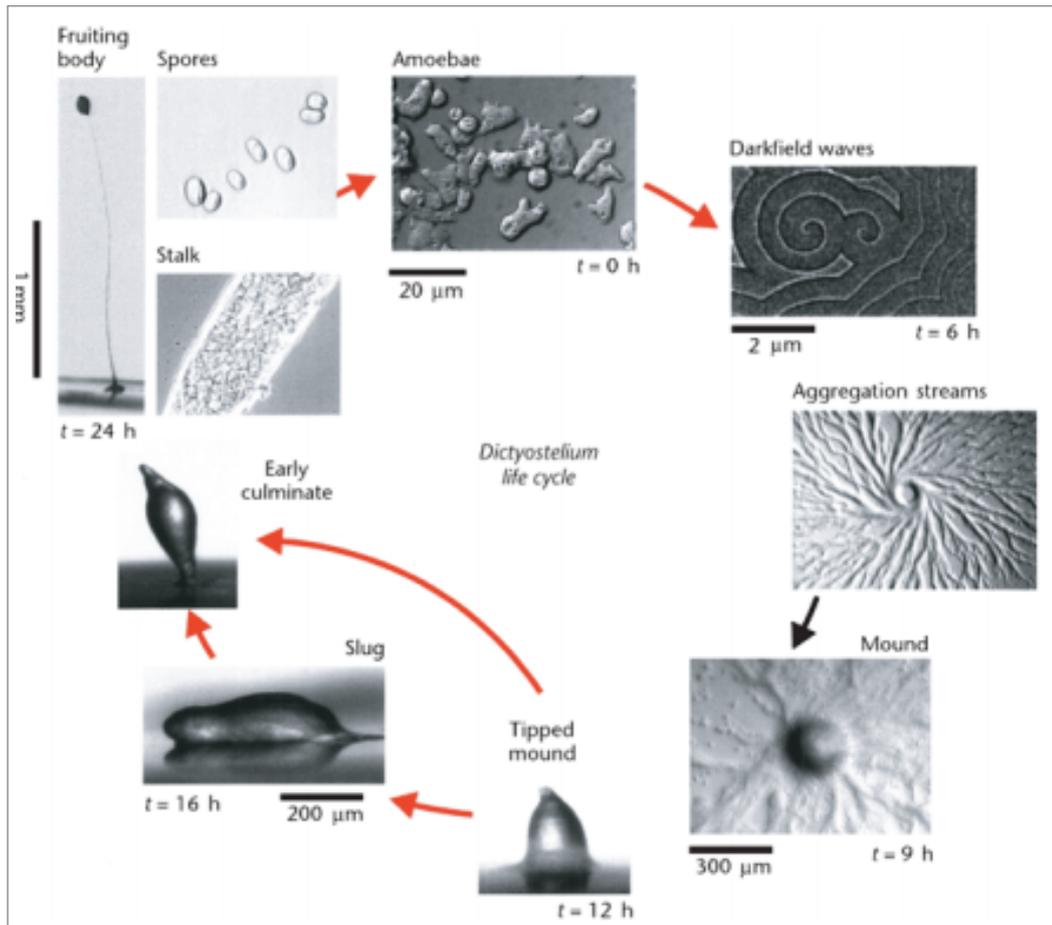
1	INTRODUÇÃO	9
2	PRELIMINARES	21
2.1	OPERADORES SETORIAIS	21
2.2	ESPAÇOS HOMOGÊNEOS	35
2.3	A FUNÇÃO DE MAINARDI	45
2.4	OS OPERADORES DE MITTAG-LEFFLER	50
2.5	MÉTODOS TOPOLÓGICOS	52
3	CONTEXTO FRACIONÁRIO DO MODELO DE KELLER-SEGEL	54
3.1	DERIVADAS FRACIONÁRIAS	54
3.2	ESPAÇO FUNCIONAL DE TIPO FUJITA-KATO	68
3.3	PRINCÍPIO DE DUHAMEL	74
3.4	ESTIMATIVAS ESTRUTURAIS PARA OS OPERADORES DE MITTAG-LEFFLER	76
4	BOA COLOCAÇÃO DO MODELO DE KELLER-SEGEL EM ESPAÇOS DE BESOV-MORREY	81
4.1	SOLUÇÃO GLOBAL DO MODELO DE KELLER-SEGEL	81
4.2	ESTIMATIVAS PARA O OPERADOR BILINEAR \mathcal{B}	82
4.3	ESTIMATIVAS PARA O OPERADOR LINEAR \mathcal{T}	84
4.4	DEMONSTRAÇÃO DA BOA COLOCAÇÃO DO MODELO DE KELLER-SEGEL FRACIONÁRIO	86
4.5	SOLUÇÕES AUTO-SIMILARES	87
4.6	COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO	90
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	96
	REFERÊNCIAS	98

1 INTRODUÇÃO

A espécie amebóide *Dictyostelium discoideum*, mais conhecida como ameba do lodo, é um microrganismo eucariota que vive em ambientes úmidos e que apresenta um ciclo de vida interessante para os biólogos. Esse organismo se alimenta de bactérias e sob condições nutricionais adequadas prolifera-se como uma ameba unicelular, forma na qual passa a maior parte de sua vida. Porém, quando as amebas são submetidas a carência de alimento, sua proliferação é interrompida e elas tendem a distribuir-se uniformemente, iniciando um processo de agregação, desencadeado por sinais químicos. Moléculas de cAMP (3'-5'-monofosfato cíclico de adenosina), liberadas pelas amebas que compõem as chamadas centrais emissoras, são o sinal químico mediador do recrutamento dessas células. Ao mesmo tempo em que é produzida por essas centrais, a cAMP é degradada por uma enzima (fosfodiesterase), também produzida pelas próprias amebas.

Após a agregação, as células começam a se diferenciar e, via migração e segregação dos distintos tipos celulares, se organizam como uma estrutura multicelular migratória, chamada lesma ("slug"), a qual se movimenta em direção à luz, umidade e calor. Decorrido um certo período de tempo, essa estrutura para de se movimentar, erguendo-se na forma de um corpo de frutificação, constituído por uma cabeça repleta de esporos (células termo-resistentes que têm a função de iniciar um novo ciclo de vida quando forem induzidos a germinar) e por um talo (formado por células mortas), cuja principal função é sustentar a cabeça, mantendo-a distante do solo, e assim permitir uma dispersão mais eficiente desses esporos. Veja figura a seguir.

Figura 1 – Ciclo de vida da *D. discoideum* no sentido horário com início no topo



Fonte: Encyclopedia of Life Sciences. Wiley & Sons, 2009.

A figura acima sintetiza bem o ciclo de vida da *D. discoideum*, mostrando cada uma das etapas descritas anteriormente. Podemos ver claramente as células se agregando e, a partir daí, dando início ao processo de desenvolvimento multicelular.

Esse tipo de agregação, que é condicionada pela presença de substâncias químicas, recebe na Biologia o nome de evento quimiotático. Em suma, a quimiotaxia é um movimento migratório de um organismo em direção a um estímulo químico, podendo ser positiva (quando se dá no mesmo sentido da substância química) ou negativa (quando ocorre no sentido oposto ao dessa substância).

Além do evento quimiotático descrito anteriormente, podemos citar ainda:

- O movimento dos espermatozoides em direção ao óvulo. Esse movimento é resultado da atração que determinadas substâncias químicas, emitidas pela camada externa do óvulo, exercem sobre tais células (ver (KAUPP; KASHIKAR; WEYAND, 2008)).

- A mobilidade e migração celular em vários processos fisiológicos e fisiopatológicos. Esses deslocamentos desempenham papéis essenciais no desenvolvimento e reparo de tecidos. As funções do cílio primário do fibroblasto via sinalização ciliar PDGFR α , por exemplo, são utilizadas para monitorar o movimento direcional das células durante a cicatrização de feridas (ver (SCHNEIDER et al., 2010)).
- A expansão de um câncer. Durante esse processo, substâncias químicas atuam de modo a estimularem células tumorais a invadirem o ambiente à sua volta, resultando assim no crescimento do tumor (ver (MARTINET et al., 1992)).
- O mapeamento das células do sistema nervoso. Durante o desenvolvimento embrionário, determinadas células, estimuladas por algumas substâncias químicas, migram para regiões específicas do embrião, para a partir daí dar início ao processo de formação do sistema nervoso (ver (HWANG et al., 2015)).

A compreensão de eventos quimiotáticos como os descritos até aqui tem sido algo muito desejado pela humanidade. O entendimento do processo de migração dos espermatozoides, por exemplo, poderia favorecer bastante o tratamento de infertilidade e a metodologia contraceptiva sem hormônios. Por outro lado, a compreensão da mobilidade das células do sistema imunológico seria capaz de contribuir fortemente com a prevenção e o combate de doenças. E não podemos deixar de mencionar que o entendimento do processo de mapeamento das células do sistema nervoso teria grande potencial para evitar defeitos congênitos, e até mesmo abortos espontâneos, durante o desenvolvimento embrionário.

Devido então ao seu importante papel para a compreensão de uma gama de fenômenos biológicos, a quimiotaxia atraiu o interesse de diversos pesquisadores ao longo dos últimos anos, sendo descrita pela primeira vez em bactérias por Theodor Wilhelm Engelmann (1843-1909) e Wilhelm Friedrich Philipp Pfeffer (1845-1920), e após isto, em protozoários ciliados em 1906 por Herbert Spencer Jennings (1868-1947). É importante mencionar que o significado da quimiotaxia na Biologia e na patologia clínica foi amplamente aceito na década de 1930. Os aspectos mais importantes no controle de qualidade de seus ensaios foram descritos por Sir Henry Harris (1925-2014) na

década de 1950 enquanto ele investigava o movimento das células na formação de tumores (ver (HARRIS et al., 2008)).

A modelagem matemática da quimiotaxia, por sua vez, data dos trabalhos de Clifford S. Patlak (1926-2014) em 1953. No entanto, o modelo matemático introduzido por Evelyn Fox Keller (1936) e Lee Aaron Segel (1932–2005), no início da década de 1970, é considerado um dos mais importantes para se entender agregação quimiotática (ver (KELLER; SEGEL, 1970)). Esse modelo descreve o movimento macroscópico (mais especificamente o início da agregação) da ameba *Dictyostelium Discoideum*¹ e tem sido utilizado amplamente ao longo dos últimos anos (ver (EL-SAYED; RIDA; ARAFA , 2009; AZEVEDO; CUEVAS; HENRIQUEZ , 2019; BLANCHET; CARRILLO; LAURENÇOT 2009; BLANCHET; CARRILLO, 2008; HERRERO; VELÁZQUEZ, 1996; HORSTMANN, 2002; HORSTMANN, 2003; HORSTMANN, 2004; HORSTMANN; WINKLER, 2005; WINKLER, 2010)).

O modelo clássico de Keller-Segel (modelo KS), consiste de um sistema de equações diferenciais, o qual pode ser obtido heurísticamente da seguinte forma:

Sejam u a quantidade de massa de um determinado material, V o volume ocupado por u , S a superfície de V e f a quantidade de material acrescido/retirado de u . De acordo com a equação geral de conservação de massa, a taxa de variação no tempo da quantidade de material u em V é igual a taxa do fluxo de u , através da superfície S , somada a quantidade de material f acrescido/retirado de u em V

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u \, dv = - \int_S \Phi \cdot n \, dS + \int_V f \, dv, \quad (1.0.1)$$

onde Φ é o fluxo do material u e n a componente normal da superfície S . Do Teorema da Divergência temos

$$\int_S \Phi \cdot n \, dS = \int_V \nabla \Phi \, dv,$$

e como a função u é contínua e o volume V é arbitrário, a equação (1.0.1) pode ser reescrita como

$$\int_V (u_t + \nabla \Phi - f) \, dv = 0,$$

onde u_t é a derivada parcial de u no tempo. Segue então da continuidade do integrando que

$$u_t = -\nabla \Phi + f. \quad (1.0.2)$$

¹ A agregação quimiotática da ameba *Dictyostelium Discoideum* foi descrita no início do presente capítulo.

Observamos que esta equação é válida para transporte de fluxo em geral Φ , seja por difusão ou por outros processos.

Uma vez que o fluxo em nosso modelo quimiotático contribui para dois termos diferentes: o fluxo de difusão celular (Φ_{dif}) e fluxo de quimiotaxia (Φ_{Quimio}), escrevemos

$$\Phi_{total} = \Phi_{dif} + \Phi_{Quimio}.$$

Considerando a lei de Fick (ver (KUZMIN, 2010)), obtemos o fluxo de difusão celular

$$\Phi_{dif} = -D_1 \nabla u$$

e o fluxo de quimiotaxia

$$\Phi_{Quimio} = \chi u \nabla v,$$

onde D_1 é o coeficiente de difusão celular, χ é o coeficiente de quimiotaxia e v é a quantidade de material do atraente químico. Substituindo agora Φ_{total} na equação (1.0.2), ficamos com

$$u_t = \nabla \cdot (D_1 \nabla u - \chi u \nabla v) + f(u, v) \quad (1.0.3)$$

e a equação (1.0.3) nos dá a representação da taxa de variação no tempo da função u .

Repetindo o mesmo processo para o atraente químico v , obtemos a taxa de variação no tempo das concentrações do atraente químico

$$v_t = \nabla \cdot (D_2 \nabla v) + g(u, v) \nabla v - h(u, v), \quad (1.0.4)$$

onde D_2 representa o coeficiente de difusão do atraente químico e as funções g e h regulam, respectivamente, as taxas de produção e de degradação desse mesmo atraente.

Buscando ainda obter a formulação mínima para o modelo KS, assim como uma facilidade razoável nos cálculos, assumiremos a partir de agora as seguintes hipóteses:

- As células individuais passam por uma combinação de movimento aleatório em direção a um atraente químico.
- A célula não morre nem se divide.

- O atraente químico é produzido a uma taxa constante.
- A taxa de degradação do atraente químico depende linearmente de sua concentração.
- O atraente se difunde passivamente pelo meio.

Admitindo essas condições, o termo de proliferação/morte celular $f(u, v)$ da equação (1.0.1) torna-se nulo, enquanto que as funções g e h em (1.0.4) passam a depender apenas de u , e v respectivamente. Considerando D_1 , D_2 e χ como constantes positivas, obtemos então a equação quase linear parabólica do modelo KS mínimo,

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (D_1 \nabla u - \chi u \nabla v), \\ v_t = D_2 \Delta v + g(u) - h(v), \end{cases} \quad (1.0.5)$$

onde u_t é a taxa de variação da densidade celular u em relação ao tempo, D_1 é o coeficiente de difusão da célula, χ é a sensibilidade quimiotática e v é a concentração de atraentes químicos. Na equação (1.0.5), D_2 representa o coeficiente de difusão do atraente químico e as funções g e h regulam as taxas de produção e de degradação, respectivamente, desse mesmo atraente.

Ainda sobre o modelo clássico KS, se assumirmos que a concentração do atraente químico independe do tempo, obtemos o modelo (padrão) parabólico-elíptico KS abaixo,

$$\begin{cases} \partial_t u = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ -\Delta v - \gamma v = u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0, \quad v(x, 0) = v_0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.0.6)$$

onde, u e v são os mesmos descritos acima para o modelo mínimo e γ é uma constante positiva.

O sistema (1.0.6), conforme afirmado anteriormente, foi utilizado amplamente ao longo dos últimos anos. Chamamos atenção aqui ao fato de que quando $\gamma = 0$, a validade do sistema (1.0.6) na estrutura da quimiotaxia é apoiada por alguns experimentos com a bactéria *Escherichia coli*. (ver (CORRIAS; PERTHAME; ZAAG, 2004) e referências do mesmo)).

Na literatura atual no modelo parabólico-elíptico KS em $2d$ para (1.0.6), denotamos por M a massa total das células: $M = \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) dx$. Enfatizamos aqui o fenômeno da

massa limite. Quando $\gamma = 0$ em (1.0.6), teremos $M = 8\pi$ sendo o limite para a existência versus explosão da solução. As soluções existem globalmente para $M < 8\pi$ (a difusão vence a competição), cuja explosão em tempo finito ocorre se $M > 8\pi$ (a agregação supera a difusão). No caso crítico $M = 8\pi$, as soluções são conhecidas como globais no tempo, mas sua norma em L^∞ cresce até o infinito no tempo. O mesmo é verdadeiro quando $\gamma > 0$ com uma condição de pequenez adicional no segundo momento de u_0 , para explosão apenas. Mencionamos aqui (DOLBEAULT; PERTHAME, 2004; BLANCHET; DOLBEAULT; PERTHAME, 2006; BILER; CORRIAS; DOLBEAULT, 2011; CALVEZ; CORRIAS; EBDE, 2012).

Em dimensão um, (1.0.6) admite soluções brandas com dados iniciais não necessariamente pequenos. Em dimensões mais altas, com dados iniciais suficientemente pequenos temos resultados de suavidade em tempo finito, porém as soluções explodem no tempo finito para grandes dados iniciais (ver (BURCZAK; GRANERO-BELINCHÓN, 2017)). O fenômeno de massa crítica foi derivado pela primeira vez em um domínio limitado com simetria radial por Jaer e Lackhaus (ver (JÄGER; LUCKHAUS, 1992) e Nagai (ver (NAGAI; SYUKUINN; UMESAKO, 2003))).

O caso duplamente parabólico é substancialmente mais difícil do que o parabólico-elíptico. Em duas dimensões espaciais, o sistema parabólico-parabólico de Keller-Segel compartilha muitas propriedades com o sistema parabólico-elíptico do mesmo modelo. Em particular, existem soluções globais em ambos os casos, desde que sua massa seja inferior a 8π , no entanto, este limiar não é tão claro no caso parabólico-parabólico como é no caso parabólico-elíptico, cujas soluções com massa acima de 8π nunca terão estabilidade. Em Biler et al. (ver (BILER; CORRIAS; DOLBEAULT, 2011)) os autores também estudaram soluções auto-similares do modelo KS duplamente parabólico com $\gamma = 0$ e provaram que, em alguns casos, tais soluções existem globalmente mesmo que sua massa total seja superior a 8π . Se $M = 8\pi$, há existência e unicidade, com estabilidade assintótica no tempo de soluções radialmente simétricas para um sistema de quimiotaxia no plano \mathbb{R}^2 (ver (BILER et al., 2006)). Calvez e Corrias em (ver (CALVEZ; CORRIAS, 2008)) construíram soluções globais positivas usando o método de energia e desigualdades funcionais ad hoc. é assumido que os dados iniciais são positivos $(u_0, v_0) \in L^1(\mathbb{R}^2) \times H^1(\mathbb{R}^2)$ com pequena massa.

Em (BURCZAK; CIEŚLAK; MORALES-RODRIGO, 2011) os autores mostraram que o mo-

delo KS unidimensional duplamente parabólico com difusão não linear possui soluções globais, desde que a difusão não linear seja igual a $(1 + u)^{-\beta}$, $\beta < 1$, independentemente do tamanho dos dados iniciais. Eles também provaram que no caso crítico $\beta = 1$, o mesmo resultado é válido para massas iniciais menores do que uma constante prescrita.

Considere a partir de agora $n \geq 3$. Para o modelo de Keller-Segel clássico, com $\gamma = 1$, Nagai et al., em (NAGAI; SYUKUINN; UMESAKO, 2003), estudaram o comportamento das soluções brandas limitadas com dados $u_0, v_0, \partial_j v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq j \leq n$), onde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach das funções limitadas e uniformemente contínuas em \mathbb{R}^n ; $\|u_0\|_{L^1}$, $\|\nabla v_0\|_{L^1}$ e $\|\nabla v_0\|_{L^\infty}$ são suficientemente pequenos, mas $\|u_0\|_{L^\infty}$ não é necessariamente pequeno. Corrias e Perthame (ver (CORRIAS; PERTHAME, 2006)), provaram a existência de soluções fracas positivas para o modelo de Keller-Segel com condição inicial $u_0 \in L^q$ e $\nabla v_0 \in L^n$, com $n/2 < q \leq n$. Em domínios limitados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ com fronteira suave, Winkler provou em (WINKLER, 2010) que para cada $q > n/2$ e $p > n$ pode-se encontrar $\epsilon_0 > 0$, de modo que a solução obtida seja global limitada sempre que o dado inicial (u_0, v_0) satisfaz $\|u_0\|_{L^q(\Omega)} < \epsilon_0$ e $\|\nabla v_0\|_{L^p(\Omega)} < \epsilon_0$. Por outro lado, para uma bola Ω e uma massa $m > 0$, arbitrariamente pequena, existe u_0 , com $\int_\Omega u_0 = m$, tal que (u, v) explode em tempo finito ou infinito. Soluções fracas em $(L^\infty(0, +\infty); L^\infty(\mathbb{R}^n))$ foram obtidas por Sugiyama e Kunii em (SUGIYAMA; KUNII, 2006) para um modelo de Keller-Segel degenerado, com um fator potência com termo aleatório e dado inicial não negativo $(u_0, v_0) \in L^1 \cap L^\infty \times L^1 \cap H^1 \cap W^{1,\infty}$. Usando o método de Kato, recentemente Kozono e Sugiyama em (KOZONO; SUGIYAMA obtiveram resultados em espaços de Sobolev. Especificamente, com $\max\{1, n/4\} < r < n/2$, foi provada a existência de uma única solução branda $(u, v) \in [C([0, +\infty); H^{\frac{n}{r}-2}) \cap C((0, +\infty), H^{2r})] \times [C([0, +\infty); H^{\frac{n}{r}}) \cap C^1((0, +\infty), L^r)]$, com condição inicial (u_0, v_0) pertencente a classe $H^{\frac{n}{r}-2,r} \times H^{\frac{n}{r},r}$. Em (KOZONO; SUGIYAMA, 2008), o resultado de (KOZONO; SUGIYAMA, 2009) foi melhorado considerando agora o dado em $L^{(\frac{n}{2}, \infty)} \times BMO$, onde BMO é o espaço das funções com oscilação média limitada e $L^{(\frac{n}{2}, \infty)}$ é um espaço de Marcinkiewicz. Considerando $n \neq 3$, os resultados de Biler (ver (BILER, 1998)) produzem soluções globais brandas com dados em uma certa classe de espaços de Morrey.

O interesse em equações diferenciais fracionárias (EDFs) está em alta entre pes-

quisadores e cientistas devido ao seu forte potencial de aplicações em vários problemas aplicados, como na corrosão eletroquímica, impedância elétrica em elementos botânicos, difusão anômala, comportamento reológico celular, agregação quimiotática em sistemas celulares, passeios aleatórios em tempo contínuo, estatística de Lévy, modelo de infecção por HIV. As (EDFs) estão naturalmente relacionados a sistemas com memória que existem na maioria dos sistemas biológicos. Também foi deduzido que as membranas das células têm condutância elétrica de ordem fracionária. Mais detalhes em (BOURNAVEAS; CALVEZ , 2010; ESCUDERO , 2006; GURUSAMY , 2017; PAZY , 2012; SCHNEIDER; WYSS , 1989; SCHNEIDER, 1990; WYSS, 1986; ZEID; YOUSEFI; KAMYAD , 2016).

Há um grande interesse matemático em desenvolver análise fracionária para o modelo de Keller-Segel. Escudero (ver (ESCUDERO, 2006)), por exemplo, introduziu e analisou um modelo fracionário, o qual fornecia uma descrição mais precisa da auto-interação quimiotática de uma população de células, cujos movimentos não se davam de modo aleatório. Uma investigação nessa direção se justifica não apenas pelo fato de o problema ser desafiador, mas é também motivada pelo desejo de se compreender certos fenômenos biológicos.

A difusão e a quimiotaxia são fundamentais para o movimento das bactérias. Apareceram evidências empíricas para substituir a difusão clássica por uma fracionária. Acredita-se que esta abordagem pode ser útil para modelar estratégias de alimentação de uma ampla classe de organismos. Em alguns deles, seu comportamento para alimentar-se é baseado em um processo de Lévy gerado pelo operador de difusão espacial fracionária $\Lambda^\beta = (\Delta)^{-\beta/2}$, $0 < \beta < 2$, (ver (BURCZAK; CIEŚLAK; MORALES-RODRIGO , 2011; BURCZAK; GRANERO-BELINCHÓN , 2016)). Em Langland e Henry (ver (LANGLANDS; HENRY , 2010)) são introduzidos modelos mesoscópicos e macroscópicos para o transporte em sistemas biológicos com quimiotaxia e subdifusão anômala.

No nível macroscópico, a subdifusão anômala pode ser modelada como movimento browniano fracionário ou caminhos aleatórios, os chamados random walks na literatura, de tempo contínuo (CTRWs). Desta forma, podemos modificar a equação de difusão usando um operador fracionário temporal. No modelo CTRW com lei de tempo de espera em potência por exemplo, o operador fracionário de tempo é dado em termos da derivada fracionária de Riemann-Liouville (ver (LANGLANDS; HENRY, 2010)). Além

desses casos, a literatura recente investigou ainda a influência da heterogeneidade do substrato na dinâmica do modelo KS por meio do cálculo fracionário (ver (LANGLANDS; HENRY, 2010 ; NAGHIBOLHOSSEINI , 2015)).

Diante disto, somos levados a também voltar nosso olhar para um modelo fracionário, a saber, o modelo fracionário de Keller-Segel para a quimiotaxia, dado a seguir:

Considere o sistema acoplado de equações diferenciais parciais em \mathbb{R}^n , $n \geq 2$,

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ {}^c D_t^\alpha v = \Delta v - \gamma v + u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0, v(x, 0) = v_0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.0.7)$$

onde, ${}^c D_t^\alpha$ é a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1)$ (ver Definição 3.19), $u(x, t)$ representa a densidade celular, $v(x, t)$ descreve a concentração do atraente químico e o parâmetro $\gamma \geq 0$ denota a taxa de decaimento do atraente químico. Os termos na primeira equação abrangem a difusão das células e o movimento quimiotático, enquanto que os da segunda expressão descrevem a difusão e produção de atratores ao longo do tempo.

Quanto ao modelo KS com difusão fracionária, em \mathbb{R} , podemos considerar o problema

$$\begin{cases} \partial_t u = -\Lambda^\beta u - \chi \partial_x (u \partial_x v), \\ 0 = \partial_x^2 v + u. \end{cases} \quad (1.0.8)$$

Em Escudero (ver (ESCUDERO, 2006)) foi mostrado a regularidade global da solução no caso $\beta > 1$, para um dado inicial $u_0 \in H^1$. Bournaveas e Calvez (ver (BOURNAVEAS; CALVEZ, 2010)) melhoraram o resultado estabelecido por (ESCUDERO, 2006) ao enfraquecerem as hipóteses de regularidade sobre os dados iniciais. Eles fornecem uma classe de dados iniciais que dão origem à ausência de estabilidade assintótica em tempo finito para $\beta < 1$, bem como uma condição de pequenez para os dados iniciais em $L^{1/\beta}$ implicando na existência global para $\beta \leq 1$. Quando $\beta = 1$, temos o caso crítico. Burczak e Granero-Belinch'on (ver (BURCZAK; GRANERO-BELINCHÓN, 2016a)) provaram neste caso que as soluções permanecem suave para qualquer dado inicial e qualquer tempo positivo. Isto refuta a ausência de estabilidade assintótica de grandes dados conjecturada em (BOURNAVEAS; CALVEZ, 2010). Burczak et al. (ver (BURCZAK; GRANERO-BELINCHÓN, 2017)), consideraram uma equação KS parabólica-elíptica

bidimensional que combina o efeito de um termo logístico com difusão fracionária de ordem $\beta \in (0, 2)$ (o termo logístico permite capturar células adultas). Eles obtiveram existência de soluções regulares globais no tempo que emanam dos dados iniciais sem restrições de tamanho para $c < \beta < 2$, onde $c \in (0, 2)$ depende dos parâmetros da equação. Burczak e Granero-Belinch'on (ver (BURCZAK; GRANERO-BELINCHÓN, 2016b)), obtiveram uma série de resultados de regularidade para o modelo KS duplamente parabólico generalizado em uma dimensão espacial. Zhai (ver (ZHAI, 2010)) estudou o modelo KS com difusão fracionária e um termo não local. Ele estabeleceu a existência global, unicidade e estabilidade de soluções com dados iniciais (u_0, v_0) pequenos no espaço de Besov crítico $\dot{B}_{p,\infty}^{-(2-n/p)} \times \dot{B}_{p,\infty}^{n/p}$.

Para o modelo KS fracionário no tempo, Zayernouri e Matzavinos (ver (ZAYERNOURI; MATZAVINOS, 2016)) desenvolveram um esquema de divisão de tempo implícito-explícito (IMEX) para um modelo Keller-Segel fracionário no tempo com operador temporal fracionário dado em termos da derivada fracionária de Caputo. Em particular, experimentos numéricos exibem a eficiência do esquema IMEX proposto na solução do sistema KS fracionário (em tempo) para a quimiotaxia. Em (ATANGANA; ALKAHTANI, 2015) Atangana e Badr estudaram a existência de soluções para um modelo Keller-Segel de ordem fracionária de Caputo-Fabrizio. Este modelo considera o efeito da memória e também o movimento das bactérias dentro de diferentes camadas do meio através do qual o movimento global está ocorrendo. Em (EL-SAYED; RIDA; ARAFA, 2009) ARAFA et al. usaram o método de decomposição de Adomian para fornecer soluções na forma de séries de potência para um modelo de quimiotaxia bacteriana fracionária no tempo em uma câmara de gradiente de difusão. As derivadas fracionárias são descritas no sentido de Caputo. Em (KUMAR; KUMAR; ARGYROS, 2017) Kumar et al. desenvolveram um método de transformação de análise de homotopia modificado para resolver um modelo KS fracionário no tempo.

Em (FERREIRA; PRECIOSO, 2011), os autores obtiveram resultados de existência global e comportamento assintótico para o problema (1.0.7) com $\alpha = 1$, com condição inicial pequena no espaço $\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b} \times \dot{B}_{\infty,\infty}^0$, com $n \geq 2$, $0 \leq \lambda < n$ e $b = 2 - \frac{n-\lambda}{r}$, onde $\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s$ é um espaço homogêneo de Besov-Morrey (BM), de distribuições temperadas módulo polinômios (observe que $\dot{B}_{\infty,\infty}^0 = \mathcal{N}_{\infty,\lambda,\infty}^0$). Os espaços (BM) foram introduzidos por Kozono e Yamazaki em (KOZONO; YAMAZAKI, 1994) para analisar equações de

Navier-Stokes. Temos as seguintes inclusões:

$$H_r^{\frac{n}{r}-2,r} \subseteq L^{(\frac{n}{2},\infty)} \subseteq \mathcal{M}_{p,n-2p} \subseteq \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b};$$

$$H_r^{\frac{n}{r},r} \subseteq BMO \subseteq \mathcal{N}_{\infty,\lambda,\infty}^0;$$

$$\dot{B}_{p,\infty}^{-(2-\frac{n}{p})} \subseteq \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b};$$

$$\dot{B}_{p,\infty}^{\frac{n}{p}} \subseteq \mathcal{N}_{\infty,\lambda,\infty}^{-b}.$$

A presente dissertação encontra-se dividida em três capítulos. O capítulo 2, intitulado “Preliminares”, tem por objetivo tornar o texto o mais auto-suficiente possível. Nele algumas definições e propriedades dos elementos envolvidos neste trabalho serão lembrados. Especificamente, semigrupos, operadores setoriais, operadores de Mittag-Leffler, espaços homogêneos e estimativas do semigrupo do calor. Por fim, enunciaremos resultados topológicos, que trarão garantia dos resultados aqui apresentados.

Para o capítulo 3, denominado “O contexto fracionário para o modelo de Keller-Segel”, apresentamos o referencial fracionário do modelo KS, entre estes introduzimos o espaço ambiente de trabalho denominado espaço de Fujita-Kato, o princípio de Duhamel e as estimativas estruturais necessárias para controlar os operadores de Mittag-Leffler associados ao modelo.

No capítulo 4, chamado de “Boa colocação do modelo de Keller-Segel em espaços de Besov-Morrey”, mostramos a existência e unicidade das soluções. Também para o caso $\gamma = 0$, garantimos a existência de soluções auto-similares. Por fim, analisamos o comportamento assintótico das soluções, mostrando que quando $\gamma = 0$, cada solução auto-similar é um atrator global.

2 PRELIMINARES

Este capítulo contém os pré-requisitos para o bom desenvolvimento do presente trabalho.

Ao longo de todo o texto, $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ representam espaços de Banach. A notação $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o espaço de Banach formado pelos operadores lineares limitados de X em Y , munido com a norma $\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$. Quando $X = Y$, abreviamos a notação para $\mathcal{L}(X)$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$.

Seja A um operador linear com domínio $\mathcal{D}(A)$ e imagem $\mathcal{R}(A)$ em X , representamos por $\rho(A)$ o conjunto resolvente do operador $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$, isto é, o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que, o operador $(\lambda - A)^{-1}$ pertence a $\mathcal{L}(X)$ e considere $\sigma(A)$ seu espectro, isto é, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Para cada $\lambda \in \rho(A)$ escrevemos $R(\lambda; A) = (\lambda - A)^{-1}$ como sendo o operador resolvente de A .

A notação $BC((0, +\infty), X)$ representa o conjunto das funções contínuas e limitadas do intervalo $(0, +\infty)$ no espaço de Banach X .

2.1 OPERADORES SETORIAIS

Nesta seção faremos uma breve introdução à teoria dos semigrupos analíticos. Para apresentar-mos os operadores setoriais, faremos algumas considerações sobre semigrupos, semigrupos fortemente contínuos e geradores infinitesimais. Para mais detalhes sobre a teoria de semigrupos, (ver (PAZY, 2012)).

A seguir temos um resultado simples, mas de fundamental importância na teoria de semigrupos.

Definição 2.1.1. Dizemos que uma família de operadores lineares $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo, se

(i) $T(0) = I_X$; (operador identidade em X)

(ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$, $\forall t, s \geq 0$.

Definição 2.1.2. Um semigrupo fortemente contínuo (ou semigrupo de classe C_0 , ou C_0 -semigrupo) é um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, tal que, para cada $x \in X$,

$$\|T(t)x - x\|_X \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+. \quad (2.1.1)$$

Lema 2.1.1. Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo, então existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$, tais que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.1.2)$$

Demonstração. Mostraremos inicialmente que existe $\eta > 0$, tal que, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitado, para todo $t \in [0, \eta]$. Supondo por absurdo que exista uma sequência $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq \mathbb{R}_+$, tal que, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $\|T(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} \geq n$. Pelo Teorema da Limitação Uniforme, segue-se que, para algum $x \in X$, $\{\|T(t_n)x\|_{\mathcal{L}(X)}\}_{n=1}^{+\infty}$ é ilimitado, o que contraria (2.1.1). Portanto, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ para $t \in [0, \eta]$. Sendo $\|T(0)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$, então $M \geq 1$. Tome $w := \frac{1}{\eta} \ln M \geq 0$. Dado $t \geq 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, tal que, $t = n\eta + \delta$, onde $\delta \in [0, \eta]$ e além disso, usando a Definição 2.1.1, item (ii), temos

$$\begin{aligned} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|T(\eta)^n T(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|T(\eta)\|_{\mathcal{L}(X)}^n \|T(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq M^n M, \end{aligned}$$

uma vez que $n = \frac{t-\delta}{\eta} \leq \frac{t}{\eta}$, obtemos

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M^{t/\eta} M = Me^{wt}.$$

E portanto, concluímos que se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, então é de ordem exponencial. \square

Teorema 2.1.1. Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo em X . Então, para cada $x \in X$ a aplicação

$$\begin{aligned} T(\cdot)x : [0, +\infty) &\longrightarrow X \\ t &\longrightarrow T(t)x \end{aligned}$$

é contínua. Além disso

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo. Dado $x \in X$, a continuidade para $t = 0$ é uma consequência imediata da Definição 2.1.2. Considerando $h \geq 0$ e $t > 0$, temos então

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\|_X &= \|T(t)T(h)x - T(t)x\|_X \\ &\leq \|T(t)(T(h)x - x)\|_X \\ &\leq Me^{\omega t} \|T(h)x - x\|_X, \end{aligned}$$

Logo, $T(t+h)x \rightarrow T(t)x$ quando $h \rightarrow 0^+$. De forma análoga,

$$\begin{aligned} \|T(t-h)x - T(t)x\|_X &= \|T(t-h)x - T(t-h+h)x\|_X \\ &\leq \|T(t-h)(x - T(h)x)\|_X \\ &\leq Me^{\omega(t-h)} \|x - T(h)x\|_X, \end{aligned}$$

sempre que $0 \leq h \leq t$ e portanto, $T(t+h)x \rightarrow T(t)x$ quando $h \rightarrow 0^-$.

Concluimos assim que $T(t+h)x \rightarrow T(t)x$ quando $h \rightarrow 0$, ou seja, $T(\cdot)x$ é contínua. Consequentemente, fixado $t \geq 0$ e dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, $|s - t| < \delta \Rightarrow \|T(s)x - T(t)x\|_X \leq \epsilon$. Deste modo, se $0 \leq h \leq \delta$, então

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x) ds \right\|_X &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\|_X ds \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \epsilon ds = \frac{1}{h} (h\epsilon) = \epsilon, \end{aligned}$$

e com isso encerramos a demonstração do Teorema. □

Exemplo 2.1.1. Para $A \in \mathcal{L}(X)$ a família de operadores

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!}, \quad \forall t \geq 0.$$

é um C_0 -semigrupo.

Demonstração. Como por hipótese, $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$ e

$$\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t\|A\|_{\mathcal{L}(X)})^n}{n!} = e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

temos $e^{At} \in \mathcal{L}(X)$. Logo, a série converge absolutamente e uniformemente em subconjuntos compactos de $[0, +\infty)$.

Desta convergência uniforme e das propriedades da série, podemos verificar que a família $\{e^{At}; t \geq 0\}$ define um semigrupo, pois $\forall t, s > 0$ temos

$$\begin{aligned}
 e^{At}e^{As} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(As)^j}{j!} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(At)^k (As)^j}{k!j!} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(At)^l (As)^{k-l}}{l!(k-l)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} t^l s^{k-l} A^k \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t+s)^k A^k}{k!} \\
 &= e^{A(t+s)},
 \end{aligned}$$

e para $t = 0$, teremos o operador identidade I_X . A família $\{e^{At}; t \geq 0\}$, define ainda um semigrupo fortemente contínuo, uma vez que

$$\begin{aligned}
 \|e^{At} - I_X\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
 &\leq t \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n t^n}{(n+1)!} \\
 &\leq t \|A\|_{\mathcal{L}(X)} e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(X)}} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+.
 \end{aligned}$$

□

Definição 2.1.3. Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares. Chamamos de gerador infinitesimal ao operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ definido por

$$Ax := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ onde } \mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X; \exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}.$$

Teorema 2.1.2. Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em X , então A é linear, fechado e densamente definido, isto é, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

Demonstração. A demonstração pode ser vista em (PAZY, 2012, Corolário 2.5). □

Proposição 2.1.1. Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dois C_0 -semigrupos que possuem o mesmo gerador infinitesimal A . Então, para cada $x \in X$, teremos

$$T(t)x = S(t)x, \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Seja A o gerador infinitesimal comum dos semigrupos $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Dados $x \in \mathcal{D}(A)$ e $t > 0$, a aplicação

$$[0, t] \ni s \rightarrow T(t-s)S(s)x,$$

é diferenciável e

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= \frac{d}{ds}\{T(t-s)\}S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}\{S(s)\}x \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

onde em (2.1.3) usamos o fato de que o semigrupo $T(t)$ comuta com A . Portanto, $s \rightarrow T(t-s)S(s)x$ é constante e em particular

$$T(t)S(0)x = T(0)S(t)x.$$

Isto mostra que $T(t)x = S(t)x$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ e $t \geq 0$. Sendo $\mathcal{D}(A)$ denso em X e $T(t), S(t)$ limitados, então $T(t)x = S(t)x$, $\forall x \in X$. \square

Consideremos agora a possibilidade de estender o domínio do parâmetro de um semigrupo para certos setores no plano complexo que incluem o eixo real não negativo. E, a fim de preservar a estrutura de semigrupo, o domínio onde o parâmetro complexo variar deve ser um semigrupo aditivo de números complexos.

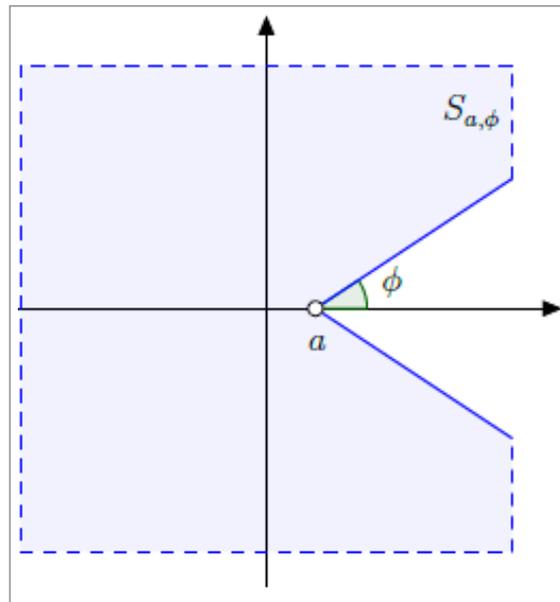
Definição 2.1.4. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador densamente definido e fechado. A é chamado operador setorial se existem constantes $a \in \mathbb{R}$, $C \geq 1$ e $\phi \in (0, \pi/2)$, tais que, o setor*

$$S_{a,\phi} := \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi \} \subset \rho(A),$$

e vale a estimativa

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda - a|}, \quad \forall \lambda \in S_{a,\phi} \setminus \{a\}.$$

Se $a = 0$ chamaremos A de operador setorial positivo, e para facilitar a notação, denotaremos $S_{0,\phi}$ apenas por S_ϕ .

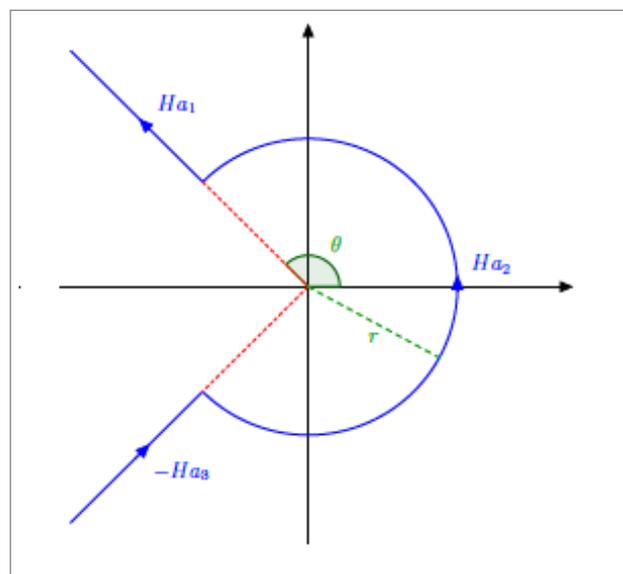
Figura 2 – Subconjunto do Plano Complexo $S_{a,\phi}$.

Fonte: Próprio autor.

Definição 2.1.5. Dizemos que H_a é um caminho de Hankel, se existem $r > 0$ e $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tais que $H_a = Ha_1 + Ha_2 - Ha_3$, onde:

$$\begin{aligned} Ha_1 &= \{te^{i\theta} ; t \in [r, +\infty)\}, \\ Ha_2 &= \{re^{it} ; t \in [-\theta, \theta)\}, \\ Ha_3 &= \{te^{-i\theta} ; t \in [r, +\infty)\}. \end{aligned}$$

Também escrevemos $H_a = H_a(r, \theta)$ para mostrar a dependência do ângulo e do raio.

Figura 3 – Caminho de Hankel $H_a = H_a(r, \theta)$.

Fonte: Próprio autor.

Definição 2.1.6. *Sejam $\phi_1 < 0 < \phi_2$ e defina o setor $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 < \arg(z) < \phi_2\}$. Para $z \in \Lambda$, seja $T(z)$ um operador linear limitado. A família $\{T(z) : z \in \Lambda\}$ é dita um semigrupo analítico em Λ se*

- (i) *a aplicação $\Lambda \ni z \rightarrow T(z)$ é analítica;*
- (ii) *$T(0) = I_X$, e $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Lambda} T(z)x = x \in \mathcal{L}(X)$, para cada $x \in X$;*
- (iii) *$T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para todos $z_1, z_2 \in \Lambda$.*

Um semigrupo $\{T(t) : t > 0\}$ é dito analítico se ele possui uma extensão a um semigrupo analítico em algum setor Λ , contendo o eixo real positivo. Claramente, a restrição de um semigrupo analítico ao eixo real é um C_0 -semigrupo.

Estaremos interessados então no problema oposto; isto é, dado um C_0 -semigrupo, encontrar condições sob as quais possamos garantir que este semigrupo possa ser estendido a um semigrupo analítico em algum setor Λ em torno do eixo real não-negativo. Para isto, precisamos primeiro encontrar uma maneira de expressar o semigrupo em termos do seu gerador infinitesimal, e tal relação é dada pela transformada inversa de Laplace.

Proposição 2.1.2. *Seja A o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $T(t)$, considerando o Lema 2.1.1, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re}(\lambda) > w$, teremos que $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt. \quad (2.1.4)$$

Demonstração. Sob as hipóteses do Lema 2.1.1 defina

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) dt.$$

Notemos que, para $\operatorname{Re}(\lambda) > w$, $F(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$, pois

$$\begin{aligned} \|F(\lambda)x\|_X &\leq \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}(\lambda)t} \|T(t)x\|_X dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}(\lambda)t} M e^{wt} \|x\|_X dt, \\ &\leq \frac{M}{\operatorname{Re}(\lambda) - w} \|x\|_X. \end{aligned}$$

Seja A o gerador infinitesimal de $T(t)$. Dado $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned} AF(\lambda)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I_X}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (T(h+t)x - T(t)x) dt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $h + t = s$, ficamos com

$$\frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(h+t)x dt = \frac{1}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda(s-h)} T(s)x ds,$$

e portanto

$$AF(\lambda)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right]. \quad (2.1.5)$$

Por fim, realizando algumas manipulações algébricas no segundo termo de (2.1.5) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} [e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t}] T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt, \end{aligned}$$

e passando o limite com $h \rightarrow 0^+$ encontramos a igualdade

$$AF(\lambda)x = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt - x = \lambda F(\lambda)x - x.$$

Portanto, temos $(\lambda - A)F(\lambda)x = x$, o que resulta em $F(\lambda)x = (\lambda - A)^{-1}x$, para cada $x \in X$. Tomando agora $x \in \mathcal{D}(A)$ notamos que

$$\begin{aligned} AF(\lambda)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I_X}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \left[\frac{T(t+h) - T(t)}{h} \right] x dt. \end{aligned}$$

Como $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo,

$$AF(\lambda)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) \left[\frac{T(h) - I_X}{h} \right] x dt,$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$AF(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) Ax dt = F(\lambda)Ax,$$

e portanto, para cada $\lambda \in \rho(A)$, segue que, $F(\lambda) = R(\lambda; A)$ com isso concluímos a demonstração da Proposição 2.1.2. \square

Apresentaremos agora o teorema principal desta seção, que nos diz que se A é setorial, então $-A$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. É possível ainda provar que a recíproca é verdadeira, isto pode ser visto em (FRIEDMAN, 2008).

Teorema 2.1.3. *Se $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial, então $-A$ gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ dado por*

$$T(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{a,\theta}} e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} d\lambda, \quad \forall t > 0. \quad (2.1.6)$$

Para $t = 0$, temos $T(0) = I_X$, onde I_X é o operador identidade, considere $S_{a,\theta}$ o contorno em $\rho(-A)$ para algum $a \in \mathbb{R}$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$.

Além disso, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é analítico no setor $\{t \neq 0 : |\arg(t)| < \epsilon\}$, para algum $\epsilon > 0$. Para todo $t > 0$, temos as estimativas

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-at} \quad \text{e} \quad \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M t^{-1} e^{-at},$$

para alguma constante $M > 0$. Por fim, para cada $x \in X$, vale

$$\frac{d}{dt} T(t)x = -AT(t)x, \quad \forall t > 0. \quad (2.1.7)$$

Demonstração. Assuma que $a = 0$. Pelo teorema de Cauchy, a integral fica inalterada quando o contorno S_θ é deslocado para a direita a uma pequena distância. Chamaremos este novo contorno de S'_θ . Então para $t > 0$ e $s > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} T(t)T(s) &= (2\pi i)^{-2} \int_{S_\theta} \int_{S'_\theta} e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} e^{\mu s} (\mu + A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= (2\pi i)^{-2} \int_{S_\theta} \int_{S'_\theta} \frac{e^{\lambda t + \mu s}}{\mu - \lambda} \{(\lambda + A)^{-1} - (\mu + A)^{-1}\} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{S'_\theta} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu \right] d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{S'_\theta} e^{\mu s} (\mu + A)^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} d\lambda \right] d\mu. \end{aligned}$$

Como $\lambda \in S_\theta$ e $\mu \in S'_\theta$, pelo Teorema de Cauchy

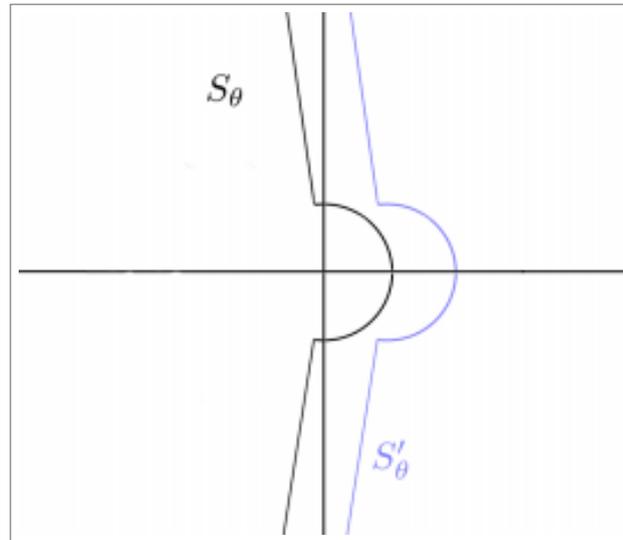
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S'_\theta} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} d\lambda = e^{\mu t},$$

o que nos garante

$$T(t)T(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S'_\theta} e^{\mu(t+s)} (\mu + A)^{-1} d\mu = T(t+s),$$

isto é, que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo. (Ver figura 4)

Figura 4 – Contorno original e deslocado



Fonte: Próprio Autor.

É fácil notar que, para valores pequenos de $\epsilon > 0$, as estimativas e convergências feitas no início desta seção continuam válidas no setor $\{t \neq 0 : |\arg(t)| < \epsilon\}$, portanto o semigrupo é analítico. Além disso, fazendo a mudança de variável $\mu = \lambda t$, para $t > 0$, obtemos

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{S'_\theta} e^\mu \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} \frac{d\mu}{t} \right\|_{\mathcal{L}(X)},$$

com S''_θ sendo um caminho deslocado a uma pequena distância do caminho original S_θ . Segue portanto, da analiticidade do integrando que

$$\begin{aligned} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} e^\mu \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} \frac{d\mu}{t} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \tilde{C}_1 \int_{S_\theta} \left| \frac{e^\mu}{\mu} \right| |d\mu| \leq M. \end{aligned}$$

Repetindo o processo acima, apenas com o adendo de que

$$\|A(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|I_X - \lambda(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 + C,$$

obtemos

$$\|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \int_{S_\theta} \frac{\tilde{C}_2}{t} \left| \frac{e^\mu}{\mu} \right| |d\mu| \leq \frac{M}{t}.$$

Provaremos agora que $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e $t > 0$. De fato,

$$T(t)x - x = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} e^{\lambda t} [(\lambda + A)^{-1} - \lambda^{-1}] x d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} \lambda^{-1} e^{\lambda t} A(\lambda + A)^{-1} x \, d\lambda,$$

e, portanto, fazendo a mudança de variável $\mu = \lambda t$, temos

$$\begin{aligned} \|T(t)x - x\|_X &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} \mu^{-1} e^{\lambda t} A\left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1} x \frac{d\mu}{t} \right\|_X \\ &\leq t \left(C_3 \int_{S_\theta} \left| \frac{e^\mu}{\mu} \right| |d\mu| \right) \|Ax\|_X. \end{aligned}$$

Em outras palavras, concluímos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$, para todo $x \in X$. Para cada $x \in X$, segue da densidade de $\mathcal{D}(A)$ em X , que existe $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}(A)$ com $x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow +\infty$. Como

$$\begin{aligned} \|T(t)x - x\|_X &\leq \|T(t)x - T(t)x_n\|_X + \|T(t)x_n - x_n\|_X + \|x_n - x\|_X \\ &\leq \|T(t)x_n - x_n\|_X + (M + 1)\|x_n - x\|_X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

temos

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\|_X \leq (M + 1)\|x_n - x\|_X \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, fazendo $n \rightarrow \infty$, deduzimos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0,$$

como queríamos.

Neste ponto provamos a igualdade (2.1.7). Considere $x \in X$ e $t > 0$. Da analiticidade do integrando, observamos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T(t)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} e^{\lambda t} \lambda (\lambda + A)^{-1} x \, d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} e^{\lambda t} A(\lambda + A)^{-1} x \, d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} e^{\lambda t} x \, d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{S_\theta} e^{\lambda t} A(\lambda + A)^{-1} x \, d\lambda \\ &= -AT(t)x. \end{aligned}$$

Encerramos a demonstração, notando que se $a \neq 0$, então basta escolhermos o operador setorial positivo A_a dado por $A_a := A - a$. Neste caso, como demonstrado acima, $-A_a$ gera um semigrupo analítico $\{T_a(t) : t \geq 0\}$. Defina então a família de operadores $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ por

$$T(t) = e^{-at} T_a(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Claramente $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo analítico que tem $-A$ como gerador infinitesimal, já que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-at}T_a(t)x - x}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^{-at} - 1}{t} \right] T_a(t)x + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T_a(t)x - x}{t} \\ &= -Ax, \end{aligned}$$

e satisfaz, para todo $t > 0$, as estimativas

$$\begin{aligned} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|e^{-at}T_a(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq Me^{-at}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|Ae^{-at}T_a(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq Mt^{-1}e^{-at}, \end{aligned}$$

para alguma constante $M > 0$. Mais ainda, para cada $x \in X$ temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(t)x &= \frac{d}{dt}[e^{-at}T_a(t)x] \\ &= -ae^{-at}T_a(t)x - A_ae^{-at}T_a(t)x \\ &= -ae^{-at}T_a(t)x - (A - a)e^{-at}T_a(t)x \\ &= -Ae^{-at}T_a(t)x \\ &= -AT(t)x, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

□

Observação 2.1.1. *Daremos duas sentenças simples que serão úteis ao longo deste texto (ver (RENARDY; ROGERS, 2006)).*

- Se $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial positivo, então existem $\delta > 0$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$ tais que $S_{\delta, \theta} \subset \rho(-A)$ e ainda

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\delta e^{-\delta t}, \quad \forall t > 0,$$

para alguma constante $M_\delta > 0$.

- Se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo analítico e o operador linear $-A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é seu gerador infinitesimal, então A é setorial.

Proposição 2.1.3. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, tal que, $\rho(A)$ está contido no semi-plano $\{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\lambda) \geq w\}$ e*

$$\|\lambda R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad (2.1.8)$$

com $w \geq 0, M \geq 1$. Então A é setorial.

Demonstração. Para demonstração (ver (LORENZI et al., 2004, Capítulo 1, Seção 1.3, Proposição 1.3.12). \square

Provaremos a seguir, que o operador Laplaciano Δ em \mathbb{R}^n é setorial, ou seja, dado $\nu_0 \in (\pi/2, \pi)$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(\lambda - \Delta)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|}, \quad (2.1.9)$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{\nu_0}$, onde $\Sigma_{\nu_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; |\arg(\lambda)| < \nu_0\}$.

Antes disso, vamos considerar a equação do calor

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.1.10)$$

com a condição inicial u_0 tomada em $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Aplicando formalmente a transformada de Fourier em relação à variável espacial x , obtemos para $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixo, uma equação diferencial ordinária, dada por

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi, t) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t), & \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.1.11)$$

cuja única solução é dada por:

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) \hat{g}(\xi, t), \quad (2.1.12)$$

onde $\hat{g}(\xi, t) = e^{-|\xi|^2 t}$.

Tomando agora a transformação de Fourier inversa em (2.1.12), obtemos que a solução do problema linear (2.1.11), pode ser expressa via convolução como segue

$$u(x, t) = g(\cdot, t) * u_0(x), \quad \text{com} \quad g(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}. \quad (2.1.13)$$

A solução (2.1.13) gera um semigrupo $\{G(t)\}_{t \geq 0}$, chamado semigrupo do calor, via convolução com o núcleo de Gauss-Weierstrass (2.1.13) (ver (LORENZI et al., 2004)), isto é,

$$(G(t)u_0)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} u_0(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (2.1.14)$$

com dado inicial $(G(0)u_0)(x) = u_0(x)$.

Proposição 2.1.4. *O operador Laplaciano Δ é um operador setorial em \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$, com $Re(z) > 0$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Definimos

$$G(z)f = g_z * f, \quad (2.1.15)$$

com $g_z(x) = \frac{1}{(4\pi z)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4z}}$, então $\int_{\mathbb{R}^n} |g_z(x)| dx = \left(\frac{|z|}{Re(z)} \right)^{n/2}$. Pela desigualdade de Young, se $z \in S_\theta$ e $\theta < \pi/2$, temos

$$\|G(z)u_0\|_{L^p} \leq \frac{1}{(\cos \theta)^{n/2}} \|u_0\|_{L^p}.$$

Para quaisquer $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, com $1/p + 1/p' = 1$, tem-se

$$\langle G(z)u_0, g \rangle = \frac{1}{(4\pi z)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2/4z} \langle u_0(\cdot - y), g \rangle dy,$$

Provaremos agora a estimativa para o resolvente de Δ no semi-plano complexo $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$. Considere $\lambda = a + bi$, com $a > 0$, $b \geq 0$. Do Teorema Integral de Cauchy temos

$$R(\lambda; \Delta)u_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)u_0 dt = \int_\gamma e^{-\lambda z} G(z)u_0 dz,$$

com $\gamma = \{z \in \mathbb{C}, z = x - ix; x \geq 0\}$, então $\cos \theta < 1/2$, e obtemos

$$\begin{aligned} \|R(\lambda; \Delta)u_0\|_{L^p} &\leq 2^{n/4} \|u_0\|_{L^p} \int_0^{+\infty} e^{-(a+b)x} dx \\ &\leq \frac{(\sqrt{2})^{n/2}}{a+b} \|u_0\|_{L^p} \\ &\leq \frac{2^{n/4}}{|\lambda|} \|u_0\|_{L^p}. \end{aligned}$$

e segue da Proposição 2.1.3 que Δ é setorial em \mathbb{R}^n . Se $b \leq 0$, obtemos o resultado desejado de maneira análoga, considerando $\tilde{\gamma} = \{x + xi : x \geq 0\}$. \square

2.2 ESPAÇOS HOMOGÊNEOS

Nesta seção, definimos os espaços homogêneos de Morrey, Sobolev-Morrey e Besov-Morrey, mostrando algumas de suas propriedades, por fim, faremos estimativas para o semigrupo do calor. O termo "homogêneo" é justificado por uma propriedade de homogeneidade da norma destes espaços. Tal propriedade é útil para o estudo de equações diferenciais parciais via técnicas de escala. Estes espaços norteiam todo o trabalho para a boa colocação, no sentido de Hadamard, para o problema (1.0.7).

Definição 2.2.1. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq \lambda < n$. O espaço de Morrey homogêneo $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ é definido por*

$$\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{p,\lambda} < \infty\},$$

com a norma dada por

$$\|f\|_{p,\lambda} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n; R > 0} R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p,x_0;R}, \quad (2.2.1)$$

onde $\|f\|_{p,x_0;R}$ denota a norma em $L^p(B_R(x_0))$ de f , isto é,

$$\|f\|_{p,x_0;R} = \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq R\}.$$

Observação 2.2.1. *Se $p \in [1, \infty)$ então $\mathcal{M}_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$. Outro espaço considerado na literatura é o espaço de medida do tipo Morrey $\mathcal{M}_\lambda(\mathbb{R}^n)$, com $0 \leq \lambda < n$, introduzido por (GIGA; MIYAKAWA, 1989). Esse espaço define o conjunto das medidas de Radon μ sobre \mathbb{R}^n , tais que*

$$\|\mu\|_\lambda = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n; R > 0} R^{-\lambda} |\mu|_{B_R(x_0)} < \infty,$$

onde $|\mu|$ denota a variação total de medida μ . Em particular, tomando $\lambda = 0$, o espaço $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ coincide com o espaço das medidas de Radon sobre \mathbb{R}^n de variação total finita.

Proposição 2.2.1. *Sejam $p \in [1, \infty)$ e $0 \leq \lambda < n$. O espaço de Morrey homogêneo é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Em particular $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(B_R(x_0))$, como $p \in [1, \infty)$ a completude

de $L^p(B_R(x_0))$ assegura que existe $f \in L^p(B_R(x_0))$, tal que,

$$\|f_k - f\|_{L^p(B_R(x_0))} \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow +\infty. \quad (2.2.2)$$

Queremos mostrar que $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ e $\|f - f_k\|_{p,\lambda} \rightarrow 0$. Para isso, notamos que

$$\begin{aligned} |f(x)|^p &= |f(x) - f_k(x) + f_k(x)|^p \\ &\leq 2^p(|f(x) - f_k(x)|^p + |f_k(x)|^p). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^\lambda} \int_{B_R(x_0)} |f(x)|^p dx &\leq 2^p \left(\frac{1}{R^\lambda} \int_{B_R(x_0)} |f(x) - f_k(x)|^p dx + \frac{1}{R^\lambda} \int_{B_R(x_0)} |f_k(x)|^p dx \right) \\ &\leq 2^p \left(\frac{1}{R^\lambda} \int_{B_R(x_0)} |f(x) - f_k(x)|^p dx + \|f_k(x)\|_{p,\lambda}^p \right). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Como a sequência $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, então existe uma constante $C > 0$, tal que, $\|f_k\|_{p,\lambda} \leq C$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, de (2.2.2) e (2.2.3), obtemos

$$\frac{1}{R^\lambda} \int_{B_R(x_0)} |f(x)|^p dx \leq 2^p C^p,$$

e segue daí que $f \in M_{p,\lambda}$. Resta-nos mostrar que $\|f - f_k\|_{p,\lambda} \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow +\infty$.

Para isso, observamos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^\lambda} \int_{B_R(x_0)} |f(x) - f_k(x)|^p dx &\leq 2^p \left(\frac{1}{R^\lambda} \int_{B_R(x_0)} |f_m(x) - f_k(x)|^p dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R^\lambda} \int_{B_R(x_0)} |f(x) - f_m(x)|^p dx \right) \\ &\leq 2^p \left(\|f_m - f_k\|_{p,\lambda}^p \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R^\lambda} \int_{B_R(x_0)} |f(x) - f_m(x)|^p dx \right). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Novamente usando o fato de que a sequência $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que,

$$\|f_m - f_k\|_{p,\lambda} \leq \epsilon, \quad (2.2.5)$$

para todo $k, m \geq n_0$. Daí, por (2.2.4) e (2.2.5), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^\lambda} \int_{B_R(x_0)} |f(x) - f_m(x)|^p dx &\leq 2^p \|f_m - f_k\|_{p,\lambda}^p + \frac{2^p}{R^\lambda} \int_{B_R(x_0)} |f(x) - f_m(x)|^p dx \\ &\leq 2^p \epsilon^p + C\epsilon, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

para todo $k, m \geq n_0$. Como ϵ é arbitrário, segue então de (2.2.6) que $f_k \rightarrow f$ em $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, e a Proposição 2.2.1 está provada. \square

Proposição 2.2.2. *Sejam $p, q, r \in [1, \infty]$, tais que, $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Assuma que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, então $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q},$$

onde o símbolo “ $*$ ” denota o operador de convolução

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy.$$

Demonstração. Para demonstração (ver (FOLLAND, 1999, Proposição 8.9.)). \square

Lema 2.2.1. *As seguintes afirmações para o espaço de Morrey homogêneo, são verdadeiras:*

(i) *Sejam $r, q \in [1, \infty)$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, n)$. Se $\frac{n-\lambda_1}{r} = \frac{n-\lambda_2}{q}$, e $r \leq q$ então a seguinte inclusão é contínua*

$$\mathcal{M}_{q,\lambda_2}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}_{r,\lambda_1}(\mathbb{R}^n). \quad (2.2.7)$$

(ii) *Sejam $r, q, p_3 \in [1, \infty)$ e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, n)$. Se $f \in \mathcal{M}_{r,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{M}_{q,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p_3} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$ e $\frac{\lambda_3}{p_3} = \frac{\lambda_1}{r} + \frac{\lambda_2}{q}$, então $fg \in \mathcal{M}_{p_3,\lambda_3}(\mathbb{R}^n)$ e vale a desigualdade*

$$\|fg\|_{p_3,\lambda_3} \leq \|f\|_{r,\lambda_1} \|g\|_{q,\lambda_2}. \quad (2.2.8)$$

(iii) *Para $1 \leq p \leq \infty$ e $0 \leq \lambda < n$, temos*

$$\|g * f\|_{p,\lambda} \leq \|g\|_{L^1} \|f\|_{p,\lambda}, \quad (2.2.9)$$

para toda $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Para mostrar inicialmente (i), tomemos $f \in \mathcal{M}_{q,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)$. Da Definição 2.2.1, segue que $f \in L^q(B_R(x_0))$, para todo $R > 0$ e todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sendo $r \leq q$, existe $p_3 \geq 1$, tal que, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p_3}$ e então, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_R(x_0)} |1|^{p_3} dx \right)^{\frac{1}{p_3}} \\ &= \tilde{C}^{\frac{1}{r}} R^{\frac{n}{p_3}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= CR^{\frac{n}{r} - \frac{n}{q}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

onde $\tilde{C}R^n$ é o volume de $B_R(x_0)$. Assim,

$$\begin{aligned} R^{-\frac{\lambda_1}{r}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} &\leq CR^{\frac{n-\lambda_1}{r}-\frac{n}{q}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq CR^{-\frac{\lambda_2}{q}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Tomando o supremo em (2.2.11) quando variamos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$, concluímos que

$$\|f\|_{r,\lambda_1} \leq C \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} R^{-\frac{\lambda_2}{q}} \|f\|_{L^q(B_R(x_0))} = C \|f\|_{q,\lambda_2}.$$

Portanto, $f \in \mathcal{M}_{r,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ e a inclusão $\mathcal{M}_{q,\lambda_2}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_{r,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ é contínua.

Para demonstrar o item (ii), usando a Desigualdade de Holder em L^p , obtemos

$$\begin{aligned} \|fg\|_{p_3,\lambda_3} &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \{R^{-\frac{\lambda_3}{p_3}} \|fg\|_{p_3,x_0,R}\} \\ &\leq \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \{R^{-\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{q}} \|f\|_{r,x_0,R} \|g\|_{q,x_0,R}\} \\ &\leq \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \{R^{-\frac{\lambda_1}{r}} \|f\|_{r,x_0,R}\} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \{R^{-\frac{\lambda_2}{q}} \|g\|_{q,x_0,R}\} \\ &= \|f\|_{r,\lambda_1} \|g\|_{q,\lambda_2}. \end{aligned}$$

Como, $f \in \mathcal{M}_{r,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{M}_{q,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\|fg\|_{p_3,\lambda_3} \leq \|f\|_{r,\lambda_1} \|g\|_{q,\lambda_2} < \infty.$$

E portanto $fg \in \mathcal{M}_{p_3,\lambda_3}(\mathbb{R}^n)$.

Sejam $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Da Proposição 2.2.2, temos

$$\|g * f\|_{L^p(B_R(x_0))} \leq \|g\|_{L^1(B_R(x_0))} \|f\|_{L^p(B_R(x_0))} \leq \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^p(B_R(x_0))}. \quad (2.2.12)$$

Multiplicando a desigualdade (2.2.12) por $R^{-\frac{\lambda}{p}}$ e tomando o supremo para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e todo $R > 0$, ficamos com

$$\|g * f\|_{p,\lambda} \leq \|g\|_{L^1} \|f\|_{p,\lambda}. \quad (2.2.13)$$

e o item (iii) está provado. \square

Proposição 2.2.3. *A norma do espaço de Morrey homogêneo satisfaz a seguinte propriedade de escala*

$$\|f(\sigma \cdot)\|_{p,\lambda} = \sigma^{-\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda}, \quad \forall \sigma > 0. \quad (2.2.14)$$

Demonstração. Expandindo o termo $\|f(\sigma \cdot)\|_{p,\lambda}$ encontramos

$$\begin{aligned} \|f(\sigma \cdot)\|_{p,\lambda} &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(\sigma x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\ &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \left\{ \left(\frac{\sigma R}{\sigma} \right)^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\sigma^{-n} \int_{B_{\sigma R}(\sigma x_0)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\ &= \sigma^{-\frac{n}{p}} \sigma^{\frac{\lambda}{p}} \sup_{\sigma x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \left\{ (\sigma R)^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\int_{B_{\sigma R}(\sigma x_0)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\ &= \sigma^{-\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda}, \end{aligned}$$

com isto, mostramos que a igualdade (2.2.14) é verdadeira. \square

Vamos introduzir agora o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, isto é, o espaço das funções cujas derivadas decrescem no infinito mais rapidamente que qualquer potência negativa de $|x|$. Denotamos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}'$ o dual topológico de \mathcal{S} , ou seja, \mathcal{S}' é formado pelos funcionais em \mathcal{S} . \mathcal{S}' é dito conjunto das distribuições temperadas. Sejam U um aberto do \mathbb{R}^n e uma função $u : U \rightarrow \mathbb{K}$ (\mathbb{K} sendo um corpo igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C}). Chamamos o conjunto $\mathcal{C}_c^\infty(U) = \{u \in \mathcal{C}^\infty : \text{supp}(u) \text{ é compacto}\}$, onde $\text{supp}(u) = \overline{\{x \in U : u(x) \neq 0\}}$, de conjunto das funções teste.

Definição 2.2.2. Dizemos que uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções de $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ converge para zero quando as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) Existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, tal que, $\text{supp}(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Para cada multi-índice β , a sequência $(D^\beta u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero uniformemente em K .

Se $u \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$, dizemos que a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ converge para u em $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ quando a sequência $(u_n - u)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero no sentido dado acima. O espaço vetorial $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ com esta noção de convergência é representado por $D(U)$ e é denominado espaço das funções testes em U .

Definição 2.2.3. Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos a transformada de Fourier de u , denotada por $\mathcal{F}(u)$, como sendo a função $\mathcal{F}(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi x} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 2.2.4. Para cada função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier inversa de u , denotada por $\tilde{\mathcal{F}}(u)$ como sendo a função $\tilde{\mathcal{F}}(u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$\tilde{\mathcal{F}}(u)(x) = \mathcal{F}(u)(-x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Observação 2.2.2. Uma vez que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, para cada $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, as funções $\mathcal{F}(u)$ e $\tilde{\mathcal{F}}(u)$ estão bem definidas e, além disso, pode-se mostrar que elas são rapidamente decrescentes no infinito. Mais ainda, $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são isomorfismos contínuos e $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$.

Definição 2.2.5. Seja $z \in \mathbb{C}$. O operador Laplaciano fracionário é definido por

$$(-\Delta)^{-\frac{z}{2}}u(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^z \mathcal{F}(u))(x), \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Definição 2.2.6. Denotemos por $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todos os polinômios com n variáveis. Seja $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \varphi(\xi) \leq 1$, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, tal que, $\text{supp}(\varphi) \subseteq D_0 = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n; 2^{-1} < |\xi| < 2 \right\}$ e

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k(\xi) = 1, \quad \forall \xi \neq 0,$$

onde $\varphi_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi)$, para $\xi \in \mathbb{R}^n$, e $k \in \mathbb{Z}$. Defina $\phi(x) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x)$ e $\phi_k(x) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_k)(x) = 2^{kn} \phi(2^k x)$, $k \in \mathbb{Z}$. Além disso, para $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \lambda < n$ e $s \in \mathbb{R}$, dada f no espaço quociente $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k \mathcal{F}(f)) \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, defina o número real $\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s}$ por

$$\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} := \begin{cases} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(2^{ks} \|\phi_k * f\|_{p,\lambda} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2^{ks} \|\phi_k * f\|_{p,\lambda} \right), & q = \infty. \end{cases}$$

Definição 2.2.7. O espaço de Besov-Morrey homogêneo em \mathbb{R}^n , $\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n)$, é o conjunto das classes de equivalência, denotadas por f , em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, tal que, $\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} < \infty$.

Observação 2.2.3. Em particular, quando $\lambda = 0$ na definição acima, temos o espaço de Besov homogêneo $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $\mathcal{N}_{\infty,\lambda,\infty}^s(\mathbb{R}^n) = \dot{B}_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$, visto que $\mathcal{M}_{\infty,\lambda}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.2.4. Os pares $(\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s, \|\cdot\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s})$ e $(\dot{B}_{p,q}^s, \|\cdot\|_{\dot{B}_{p,q}^s})$ são espaços de Banach.

Demonstração. O espaço de Besov é um caso particular do espaço de Besov-Morrey. A demonstração de que $(\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s, \|\cdot\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s})$ é um espaço de Banach, pode ser vista em (KOZONO; YAMAZAKI, 1994, Corolário 2.6). \square

Definição 2.2.8. *Sejam $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ e $s \in \mathbb{R}^n$. O espaço de Sobolev-Morrey homogêneo $\mathcal{M}_{p,\lambda}^s(\mathbb{R}^n)$ é definido por*

$$\mathcal{M}_{p,\lambda}^s(\mathbb{R}^n) = (-\Delta)^{-\frac{s}{2}} \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

e sua norma é dada por

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s} = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{p,\lambda}.$$

O espaço de Sobolev-Morrey $(\mathcal{M}_{p,\lambda}^s(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s})$ é um espaço de Banach.

Proposição 2.2.5. *O espaço de Sobolev-Morrey homogêneo satisfaz a seguinte relação de escala*

$$\|f(\sigma \cdot)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s} = \sigma^{s - \frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s}, \quad \forall \sigma > 0. \quad (2.2.15)$$

Demonstração. Para justificar a igualdade (2.2.15), mostraremos primeiramente que, dados $\sigma > 0$ e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f(\sigma x) = \sigma^s ((-\Delta)^{\frac{s}{2}} f)(\sigma x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2.16)$$

Com efeito, uma vez que a transformada de Fourier de uma distribuição $f \in \mathcal{S}'$ satisfaz a propriedade

$$\mathcal{F}[f(\sigma \cdot)](\xi) = \sigma^{-n} \mathcal{F}[f](\sigma^{-1} \xi), \quad (2.2.17)$$

segue da Definição 2.2.7 e de (2.2.17) que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f(\sigma \cdot)](\xi) &= |\xi|^s \mathcal{F}[f(\sigma \cdot)](\xi) \\ &= |\xi|^s \sigma^{-n} \mathcal{F}[f](\sigma^{-1} \xi) \\ &= \sigma^{-n} \sigma^s |\sigma^{-1} \xi|^s \mathcal{F}[f](\sigma^{-1} \xi) \\ &= \sigma^{-n} \sigma^s \mathcal{F}[(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f](\sigma^{-1} \xi). \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Agora, usando (2.2.17) em (2.2.18), com $(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f$ no lugar de f e, aplicando a transformada inversa, obtemos (2.2.16).

Logo, utilizando (2.2.16) e a Proposição 2.2.3, segue que

$$\begin{aligned}
\|f(\sigma \cdot)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s} &= \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f(\sigma \cdot)\|_{p,\lambda} \\
&= \|\sigma^s (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f(\sigma \cdot)\|_{p,\lambda} \\
&= \sigma^s \sigma^{-\frac{n-\lambda}{p}} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{p,\lambda} \\
&= \sigma^{s-\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s}.
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

□

Observação 2.2.4. *É possível fazer a seguinte identificação nos espaços de Besov-Morrey*

$$\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n) = (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \mathcal{N}_{p,\lambda,q}^0(\mathbb{R}^n), \tag{2.2.20}$$

com a norma correspondente igual a

$$\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^0}.$$

Lema 2.2.2. *Sejam $1 \leq p \leq r \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s, \nu \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \lambda < n$. Então, a inclusão*

$$\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}_{r,\lambda,q}^\nu(\mathbb{R}^n) \tag{2.2.21}$$

é contínua se $s - \frac{n-\lambda}{p} = \nu - \frac{n-\lambda}{r}$.

Demonstração. Para a demonstração (ver (MAZZUCATO, 2003)). □

Proposição 2.2.6. *(Propriedade de escala) Suponha que $1 \leq p, q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in [0, n)$. A norma do espaço de Besov-Morrey homogêneo satisfaz a seguinte propriedade de escala*

$$\|f(\sigma \cdot)\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} = \sigma^{s-\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s}, \quad \forall \sigma > 0. \tag{2.2.22}$$

Demonstração. A demonstração será feita apenas para o caso $q = \infty$, visto que, se $1 \leq q < \infty$, a prova é análoga. Pela Observação 2.2.4 e da relação de escala em $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned}
\|f(\sigma \cdot)\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^s} &= \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} [f(\sigma \cdot)]\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^0} \\
&= \|\sigma^s [(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f](\sigma \cdot)\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^0} \\
&= \sigma^s \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|\phi_k * [(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f(\sigma \cdot)]\|_{p,\lambda} \\
&= \sigma^s \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sigma^{-\frac{n-\lambda}{p}} \|\phi_k * [(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f]\|_{p,\lambda} \\
&= \sigma^{s-\frac{n-\lambda}{p}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|\phi_k * [(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f]\|_{p,\lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^{s-\frac{n-\lambda}{p}} \| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f \|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^0} \\
&= \sigma^{s-\frac{n-\lambda}{p}} \| f \|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^s}.
\end{aligned}$$

□

Através dos estudos feitos acima, para os espaços homogêneos, a partir de agora, faremos uso destes resultados para estimar o semigrupo do calor $\{G(t)\}_{t \geq 0}$, aplicado a $f \in S'$ em espaços de Sobolev-Morrey e Besov-Morrey.

Lema 2.2.3. *Sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \leq s_2$, $1 \leq r \leq q \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$ e $\lambda \in [0, n)$. Então existe uma constante $C > 0$, tal que,*

$$\|G(t)f\|_{\mathcal{M}_{q,\lambda}^{s_2}} \leq Ct^{-\frac{s_2-s_1}{2}-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{\mathcal{M}_{r,\lambda}^{s_1}}, \quad (2.2.23)$$

$$\|G(t)f\|_{\mathcal{N}_{q,\lambda,p}^{s_2}} \leq Ct^{-\frac{s_2-s_1}{2}-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,p}^{s_1}}, \quad (2.2.24)$$

para todo $f \in S'$ e todo $t > 0$.

Demonstração. Para a demonstração ver (FERREIRA, 2012, Lema 2.2). □

Lema 2.2.4. *Sejam $1 \leq r \leq q \leq \infty$ e $\lambda \in [0, n)$. Então, para cada desigualdade abaixo, existe uma constante positiva C , tal que,*

$$\|\nabla_x G(t)f\|_{r,\lambda} \leq Ct^{-1/2} \|f\|_{r,\lambda}, \quad (2.2.25)$$

$$\|\nabla_x G(t)f\|_{q,\lambda} \leq Ct^{-1/2} \|f\|_{q,\lambda}, \quad (2.2.26)$$

$$\|\nabla_x G(t)f\|_{q,\lambda} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{r,\lambda}, \quad (2.2.27)$$

$$\|\nabla_x G(t)f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \leq Ct^{-1/2} \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \quad (2.2.28)$$

$$\|G(t)f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \leq C \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \quad (2.2.29)$$

$$\|G(t)f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}, \quad (2.2.30)$$

$$\|G(t)f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda}, \quad (2.2.31)$$

$$\|\nabla_x G(t)f\|_{L^\infty} \leq C \min \left\{ t^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r})} \|f\|_{r,\lambda}, t^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda} \right\}, \quad (2.2.32)$$

$$\|\nabla_x G(t)f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}. \quad (2.2.33)$$

Demonstração. Iniciamos a demonstração da desigualdade (2.2.25), notando que $g(x, 2t)$

$= e^{\frac{|x|^2}{8t}} 2^{-\frac{n}{2}} g(x, t)$ e $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x, t) = -\frac{x_i}{2t} g(x, t)$, para $i = 1, \dots, n$, onde $g(x, t)$ é dado em

(2.1.13). Então,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_i}(x, t) \frac{1}{g(x, 2t)} \right| = t^{-\frac{1}{2}} |x_i| 2^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\|x\|^2}{8t}}.$$

Uma vez que a expressão do lado direito é limitada superiormente, segue que, existe uma constante $C > 0$, tal que,

$$t^{\frac{1}{2}} \nabla g(x, t) \leq t^{\frac{1}{2}} |\nabla g(x, t)| \leq Cg(x, 2t). \quad (2.2.34)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|t^{\frac{1}{2}}(\nabla G(t)f)(x)\|_{L^r(B_R(x_0))}^r &= \int_{B_R(x_0)} |t^{\frac{1}{2}}(\nabla G(t)f)(x)|^r dx \\ &\leq C \int_{B_R(x_0)} |(G(2t)|f|)(x)|^r dx \\ &\leq C \int_{B_R(x_0)} \int_{\mathbb{R}^n} g(y, 2t) |f(x-y)|^r dy dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} g(y, 2t) \int_{B_R(x_0)} |f(x-y)|^r dx dy \\ &\leq CR^\lambda \|f\|_{r,\lambda}^r. \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

Por fim, elevando ambos os lados de (2.2.35) a $\frac{1}{r}$, multiplicando por $R^{-\frac{\lambda}{r}}$ e tomando o supremo quando variamos x_0 em \mathbb{R}^n e R em $(0, +\infty)$, obtemos a desigualdade desejada.

A demonstração de (2.2.26) segue os mesmos passos da demonstração (2.2.25), substituindo r por q . Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$, de (2.2.36) temos que

$$\begin{aligned} \|t^{\frac{1}{2}}(\nabla G(t)f)(x)\|_{L^q(B_R(x_0))}^q &\leq C \|(G(2t)|f|)(x)\|_{L^q(B_R(x_0))}^q \\ &\leq C \|(G(2t)|f|)(x)\|_{L^\infty}^{q-r} \|(G(2t)|f|)(x)\|_{r,\lambda}^r R^\lambda. \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

Multiplicando (2.2.36) por $R^{-\lambda}$ e em seguida elevando a $1/q$, encontramos

$$R^{-\frac{\lambda}{q}} \|t^{\frac{1}{2}}(\nabla G(t)|f|)(x)\|_{L^q(B_R(x_0))} \leq C \|G(2t)|f|(x)\|_{L^\infty}^{\frac{q-r}{q}} \|(G(2t)|f|)(x)\|_{r,\lambda}^{\frac{r}{q}}.$$

Multiplicando agora a última desigualdade por $t^{-\frac{1}{2}}$ e tomando o supremo para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$, vemos que

$$\begin{aligned} \|(\nabla_x G(t)f)(x)\|_{q,\lambda} &\leq Ct^{-\frac{1}{2}} \left(\|(G(2t)f)(x)\|_{L^\infty} \right)^{\frac{q-r}{q}} \|(G(2t)f)(x)\|_{r,\lambda}^{\frac{r}{q}} \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{2}} \left(t^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{r})} \|(G(2t)f)(x)\|_{r,\lambda} \right)^{\frac{q-r}{q}} \|(G(2t)f)(x)\|_{r,\lambda}^{\frac{r}{q}} \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{2}} \left(t^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{r})} \|f\|_{r,\lambda} \right)^{\frac{q-r}{q}} \|f\|_{r,\lambda}^{\frac{r}{q}} \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{r,\lambda}, \end{aligned}$$

e assim, obtemos (2.2.29). Como consequência direta da desigualdade (2.2.34), temos que

$$\|t^{1/2}(\nabla_x G(t)f)(x)\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^s} \leq C \|(G(2t)f)(x)\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^s},$$

onde, C é uma constante positiva, e da desigualdade (2.2.26), obtemos

$$\|\nabla_x(G(t)f)(x)\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^s} \leq Ct^{-1/2}\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^s}.$$

A demonstração de (2.2.31) segue diretamente de (2.2.26). Observando que $\dot{B}_{\infty,\infty}^s = \mathcal{N}_{\infty,\lambda,\infty}^s$, temos que (2.2.32) é caso particular de (2.2.31). Para demonstrar (2.2.33), por (2.2.25) temos

$$\|G(t)f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{r})}\|f\|_{r,\lambda}.$$

e o resultado segue, pois $\mathcal{M}_{r,\lambda} \subseteq \mathcal{M}_{q,\lambda}$, através do Lema 2.2.1. Considerando $r, q \in [1, \infty)$ temos que (2.2.33) é válido para os dois casos, tomando então o mínimo entre ambos os resultados, obtemos (2.2.34).

Por fim, temos que (2.2.35) é resultado da desigualdade (2.2.30) e do fato de termos $L^\infty \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,\infty}^0$. \square

Observação 2.2.5. *Dados $1 \leq p < \infty$ e $s > 0$ temos então a seguinte equivalência (ver (MAZZUCATO, 2003))*

$$\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^{-s}} \cong \sup_{t>0} t^{s/2} \|e^{\Delta t} f\|_{p,\lambda}, \quad (2.2.37)$$

onde $e^{\Delta t}$ denota o semigrupo do calor $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ dado na Proposição 2.1.4. Para uma discussão mais profunda sobre os espaços Besov-Morrey, veja (KOZONO; YAMAZAKI, 1994; MAZZUCATO, 2003).

2.3 A FUNÇÃO DE MAINARDI

Definição 2.3.1. *A função de Wright, é assim chamada em homenagem a E. Maitland Wright, que introduziu e investigou essa função em uma série de notas a partir de 1933, no âmbito da teoria das partições. A função é definida pela representação em série, convergente em todo o plano complexo,*

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\lambda n + \mu)}, \quad \lambda > -1, z \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C}, \quad (2.3.1)$$

sendo então $W_{\lambda,\mu}(z)$ uma função inteira.

A representação integral da função de Wright é dada por

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\sigma+z\sigma^{-\lambda}} \frac{d\sigma}{\sigma^\mu}, \quad \lambda > -1, z \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C},$$

onde Ha é qualquer contorno de Hankel. A equivalência entre as representações em série e integral é facilmente comprovada usando a fórmula de Hankel para a recíproca da função Gama. De fato, temos para qualquer $\zeta \in \mathbb{C}$, com $Re(\zeta) > 0$,

$$\frac{1}{\Gamma(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} u^{-\zeta} e^u du. \quad (2.3.2)$$

A troca entre série e integral é verdadeira pela convergência uniforme da série, e sendo $W_{\lambda,\mu}(z)$ uma função inteira, segue-se

$$\begin{aligned} W_{\lambda,\mu}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\sigma+z\sigma^{-\lambda}} \frac{d\sigma}{\sigma^\mu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^\sigma \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \sigma^{-\lambda n} \right] \frac{d\sigma}{\sigma^\mu} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^\sigma \sigma^{-\lambda n - \mu} d\sigma \right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\lambda n + \mu)}, \end{aligned}$$

como desejávamos.

Em virtude de seu papel nas aplicações do cálculo fracionário, definiremos agora uma função de Wright, chamada função de Mainardi, que foi apresentada pelo Italiano Francesco Mainardi em seu livro em que estuda o conceito de viscoelasticidade para o contexto fracionário (ver (MAINARDI, 2010)).

Definição 2.3.2. *Seja $\alpha \in (0, 1)$. A função de Mainardi $M_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $M_\alpha(z) = W_{-\alpha, 1-\alpha}(-z)$. Logo,*

$$M_\alpha(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(1 - \alpha(n + 1))} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^{n-1}}{(n-1)!} \Gamma(\alpha n) \sin(\pi \alpha n).$$

Já a representação integral para $M_\alpha(z)$ é dada por

$$M_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\sigma - z\sigma^\alpha} \frac{d\sigma}{\sigma^{1-\alpha}}.$$

Definição 2.3.3. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ estritamente positivos. Então, $E_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é a função de Mittag-Leffler, dada por*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (2.3.3)$$

onde se $\beta = 1$, a denotamos por $E_\alpha(z)$.

Proposição 2.3.1. *Seja $\alpha, \beta > 0$, $z \in \mathbb{C}$, escolhamos $Ha_z = Ha(\epsilon_z, \theta)$ com $\epsilon_z > |z|^{1/\alpha}$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$ então*

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_z} \frac{\mu^{\alpha-\beta} e^\mu}{\mu^\alpha - z} d\mu.$$

Demonstração. Fixe $z \in \mathbb{C}$. Observe que se Ha é um caminho de Hankel, por (2.3.2) temos que

$$\begin{aligned} E_{\alpha, \beta}(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \mu^{-\alpha k - \beta} e^\mu d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\mu^{\alpha k}} \mu^{-\beta} e^\mu d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \mu^{-\beta} e^\mu \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{z}{\mu^\alpha} \right]^k d\mu. \end{aligned}$$

Como $|z|^{1/\alpha} < \epsilon_z$ podemos afirmar que $|z| < |\mu|^\alpha$, então

$$\left| \frac{z}{\mu^\alpha} \right| < 1,$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E_{\alpha, \beta}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \mu^{-\beta} e^\mu \left[\frac{\mu^\alpha}{\mu^\alpha - z} \right] d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{\mu^{\alpha-\beta} e^\mu}{\mu^\alpha - z} d\mu. \end{aligned}$$

□

Definição 2.3.4. *Tomando f como na Proposição 3.1.1, podemos considerar uma função $\hat{f} : \mathcal{D}(\hat{f}) \subset \mathbb{C} \rightarrow X$, dada por:*

$$\hat{f}(\lambda) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt,$$

onde $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) > \gamma\} \subset \mathcal{D}(\hat{f})$, e γ é dado pela Proposição 3.1.1. Dizemos que $\hat{f}(\lambda)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$. Em outras palavras, podemos definir o mapa linear $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}, X)$, onde $\mathcal{D}(\mathcal{L}) := \{f \in L^1_{loc}([0, +\infty), X); f \text{ é de tipo exponencial}\}$ e $\mathcal{F}(\mathbb{C}, X)$ é o conjunto das funções definidas no subconjunto dos números complexos, com imagem contida em X . Denotamos por $\mathcal{L}\{f(t)\}(\lambda) := \hat{f}(\lambda)$ o operador de transformada de Laplace.

Proposição 2.3.2. *Seja $\alpha \in (0, 1)$, $-1 < r < \infty$, $\lambda > 0$ e $z \in \mathbb{C}$. A função de Mainardi M_α satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $M_\alpha(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$;
- (ii) $\int_0^{+\infty} t^r M_\alpha(t) dt = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r+1)}$;
- (iii) $\mathcal{L}\{\alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(t^{-\alpha})\}(\lambda) = e^{-\lambda^\alpha}$;
- (iv) $\mathcal{L}\{\alpha t M_\alpha(t)\}(z) = E_{\alpha,\alpha}(-z)$;
- (v) $\mathcal{L}\{M_\alpha(t)\}(z) = E_\alpha(-z)$;

onde $E_{\alpha,\alpha}$ e E_α são dados pela Definição 2.3.3.

Demonstração. (i) A demonstração pode ser vista em (MAINARDI, 2010).

(ii) Note que, para $r > -1$ e $\alpha \in (0, 1)$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^r M_\alpha(t) dt &= \int_0^{+\infty} t^r \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^{\mu-t\mu^\alpha}}{\mu^{1-\alpha}} d\mu \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^\mu \left[\int_0^{+\infty} t^r e^{-t\mu^\alpha} dt \right] \frac{d\mu}{\mu^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Tomando $w = t\mu^\alpha$, temos $dw = \mu^\alpha dt$, e

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^r M_\alpha(t) dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^\mu \left[\int_0^{+\infty} \left(\frac{w}{\mu^\alpha}\right)^r e^{-w} \frac{dw}{\mu^\alpha} \right] \frac{d\mu}{\mu^{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^\mu \left[\int_0^{+\infty} w^r e^{-w} dw \right] \frac{1}{\mu^{\alpha r + \alpha}} \frac{d\mu}{\mu^{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^\mu \Gamma(r+1) \frac{d\mu}{\mu^{\alpha r + 1}} \\ &= \Gamma(r+1) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^\mu}{\mu^{\alpha r + 1}} d\mu \right] \\ &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r + 1)}, \end{aligned}$$

conforme desejado.

Para provar o item (iii), temos que, para $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\lambda^\alpha}\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathcal{L}^{-1}\{\lambda^{\alpha n}\}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{-\alpha n - 1}}{n! \Gamma(-\alpha n)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{-\alpha(n+1)-1}}{(n+1)! \Gamma(-\alpha(n+1))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(-1)^n}{-\alpha(n+1)n!} \frac{t^{-\alpha(n+1)-1}}{\Gamma(-\alpha(n+1))} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(-1)^n t^{-\alpha n}}{n!} \frac{t^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(1-\alpha(n+1))} \\
&= \alpha t^{-(\alpha+1)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^{-\alpha})^n}{n! \Gamma(1-\alpha(n+1))} \\
&= \alpha t^{-(\alpha+1)} M_{\alpha}(t^{-\alpha}).
\end{aligned}$$

Para provar o item (iv)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\alpha t M_{\alpha}(t)\}(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} \alpha t M_{\alpha}(t) dt \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-zt)^n}{n!} \alpha t M_{\alpha}(t) dt \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!} t^{n+1} \alpha M_{\alpha}(t) dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \alpha \int_0^{+\infty} t^{n+1} M_{\alpha}(t) dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \alpha \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(\alpha(n+1)+1)} dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n \alpha(n+1)}{\Gamma(\alpha(n+1)+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha)} \\
&= E_{\alpha, \alpha}(-z), \tag{2.3.4}
\end{aligned}$$

visto que (2.3.4) vem de (2.3.3).

Para provar o item (v)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{M_{\alpha}(t)\}(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^{\mu-t\mu^{\alpha}}}{\mu^{1-\alpha}} d\mu \right] dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^{\mu}}{\mu^{1-\alpha}} \left[\int_0^{+\infty} e^{-t(z+\mu^{\alpha})} dt \right] d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^{\mu}}{\mu^{1-\alpha}} \left[\frac{-1}{z+\mu} (0-1) \right] d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^{\mu} \mu^{\alpha-1}}{\mu^{\alpha} + z} d\mu \\
&= E_{\alpha}(-z), \tag{2.3.5}
\end{aligned}$$

onde (2.3.5) é dada pela Proposição 2.3.1. □

2.4 OS OPERADORES DE MITTAG-LEFFLER

Definição 2.4.1. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$ e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial positivo.*

Então, as funções fortemente contínuas

$$E_\alpha(-t^\alpha A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha + A)^{-1} d\lambda, \quad t \geq 0$$

e

$$E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A) := \frac{t^{1-\alpha}}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\lambda t} (\lambda^\alpha + A)^{-1} d\lambda, \quad t \geq 0,$$

com $Ha \subset \rho(-A)$ dado pelo caminho de Hankel, (ver Definição 2.1.5) são chamados de operadores de Mittag-Leffler.

Teorema 2.4.1. *Sejam X um espaço de Banach e $-A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Para cada $\alpha \in (0, 1)$ podemos reescrever as famílias de Mittag-Leffler $\{E_\alpha(-t^\alpha A)\}_{t \geq 0}$ e $\{E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)\}_{t \geq 0}$ por*

$$E_\alpha(-t^\alpha A) = \int_0^{+\infty} M_\alpha(s) T(st^\alpha) ds \quad (2.4.1)$$

e

$$E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A) = \int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) T(st^\alpha) ds, \quad (2.4.2)$$

onde $\{T(t) : t \geq 0\}$ é o C_0 -semigrupo analítico gerado por $-A$.

Demonstração. Se $-A$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $0 \in \rho(A)$, então

$$T_\alpha(t) = \alpha \int_0^{+\infty} s \phi_\alpha(s) t^{\alpha-1} T(st^\alpha) ds, \quad (2.4.3)$$

e

$$S_\alpha(t) = \int_0^{+\infty} \phi_\alpha(s) T(st^\alpha) ds, \quad (2.4.4)$$

onde $\phi_\alpha(s)$ é a função densidade de probabilidade definida em $(0, +\infty)$, cuja Transformada de Laplace é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi_\alpha)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} \phi_\alpha(s) ds \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-x)^j}{\Gamma(1 + \alpha j)}, \quad x > 0, \end{aligned}$$

e satisfaz

$$\int_0^{+\infty} \phi_\alpha(s) ds = 1, \quad (2.4.5)$$

e

$$\int_0^{+\infty} s^\eta \phi_\alpha(s) ds \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (2.4.6)$$

De fato, $\forall x \in \mathcal{D}(A) \subset X$, temos pela Proposição 2.1.2 que

$$(\lambda + A)^{-1}x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} T(s)x ds.$$

Seja

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \psi_\alpha(s) ds = e^{-\lambda^\alpha},$$

com $\psi_\alpha(s) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n s^{-\alpha n - 1} \frac{\Gamma(n\alpha + 1)}{n!} \sin(n\pi\alpha)$, e $s \in (0, +\infty)$, para consulta, deixamos ao leitor (MAINARDI; PARADISI; GORENFLO, 2007). Portanto, obtemos que

$$\begin{aligned} (\lambda^\alpha + A)^{-1}x &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^\alpha \tau} T(\tau)x d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \alpha t^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha} T(t^\alpha)x ds dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t s} \psi_\alpha T(t^\alpha)x ds dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \alpha \psi_\alpha(s) e^{-\lambda t} T\left(\frac{t^\alpha}{s^\alpha}\right) \frac{t^{\alpha-1}}{s^\alpha} x ds dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \left(\alpha \int_0^{+\infty} s \phi_\alpha(s) t^{\alpha-1} T(t^\alpha s)x ds \right) dt, \quad (2.4.7) \end{aligned}$$

onde $\phi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} s^{1-\frac{1}{\alpha}} \psi_\alpha(s^{-\frac{1}{\alpha}})$ é a função densidade de probabilidade definida em $(0, +\infty)$, a qual satisfaz (2.4.5) e (2.4.6). Segue então, de (2.4.7), que

$$\begin{aligned} T_\alpha(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^\lambda (\lambda^\alpha + A)^{-1} d\lambda \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} s \phi_\alpha(s) t^{\alpha-1} T(t^\alpha s) ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, para todo $x \in \mathcal{D}(A) \subset X$, temos que

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha + A)^{-1}x &= \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda^\alpha s} T(s)x ds \\ &= \int_0^{+\infty} \alpha (\lambda t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha} T(t^\alpha)x ds \\ &= \int_0^{+\infty} -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dt} [e^{-(\lambda t)^\alpha}] T(t^\alpha)x ds \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} s \psi_\alpha(s) e^{-\lambda t s} T(t^\alpha)x ds dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \int_0^{+\infty} \phi_\alpha(s) T(t^\alpha s)x ds dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_\alpha(t) = \int_0^{+\infty} \phi_\alpha(s) T(t^\alpha s) ds$$

Como são verdadeiras as identificações $T_\alpha(t) \equiv t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)$ e $S_\alpha(t) \equiv E_\alpha(At^\alpha)$ (ver (SHU; XU , 2013)), segue o resultado desejado. \square

Observação 2.4.1. *É essencial assumirmos $\alpha < 1$, caso contrário a função de Mainardi será divergente. Temos também que para $\alpha \rightarrow 1^-$, a função $M_\alpha(t)$, para $t \in \mathbb{R}_+$, tende a função Delta de Dirac $\delta(t - 1)$ (ver (MAINARDI , 2010, pág. 242)).*

Observação 2.4.2. *Os operadores de Mittag-Leffler não apresentam a propriedade abeliana, a qual, desempenha papel crucial na teoria de semigrupos, uma vez que, para qualquer $\alpha \in (0, 1)$, existem $t, s \in [0, +\infty)$, tal que, $E_\alpha((t + s)^\alpha) \neq E_\alpha(t^\alpha)E_\alpha(s^\alpha)$.*

Teorema 2.4.2. *Os operadores $E_\alpha(-t^\alpha A)$ e $E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)$ estão bem definidos de X em X . Mais ainda, para $x \in X$ seguem as afirmações:*

- (i) $E_\alpha(-t^\alpha A)x \Big|_{t=0} = x$ e $E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x \Big|_{t=0} = x$;
- (ii) *As funções vetoriais $t \rightarrow E_\alpha(-t^\alpha A)x$ e $t \rightarrow E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x$, são analíticas em $[0, +\infty)$.*

Demonstração. Para demonstração ver (NETO , 2013, Teorema 2.41). \square

2.5 MÉTODOS TOPOLÓGICOS

Definição 2.5.1. *Seja $(X; d)$ um espaço métrico. O mapa $F : X \rightarrow X$ é dito de contração se existe $k \in [0; 1)$, tal que,*

$$d(F(x); F(y)) \leq kd(x; y); \quad \forall x, y \in X.$$

Teorema 2.5.1. (SAHNI , 2003, Princípio de contração de Banach). *Sejam $(M; d)$ um espaço métrico completo não-vazio e $F : M \rightarrow M$ uma contração. Então F possui um único ponto fixo.*

Enunciaremos o resultado topológico que traz a garantia de boa colocação, no sentido de Hadamard, para as soluções do modelo de Keller-Segel (1.0.7). Um argumento de ponto fixo é apresentado no teorema abaixo.

Teorema 2.5.2. *Seja $T : X \rightarrow Y$ um mapa linear contínuo com norma τ . Suponha que $\mathcal{B} : X \times Y \rightarrow X$ é um mapa bilinear contínuo, isto é, existe $C > 0$, tal que,*

$$\|\mathcal{B}(x_1, y_1)\|_X \leq C\|x_1\|_X\|y_1\|_Y, \quad \forall (x_1, y_1) \in X \times Y.$$

Seja $0 < \epsilon < \frac{1}{2C(1+2\tau)}$ e $B_{2\epsilon} = \{x \in X; \|x\|_X \leq 2\epsilon\}$. Se $\|\tilde{x}\|_X \leq \epsilon$ e $\|\tilde{y}\|_Y \leq \epsilon$, então existe uma única solução $x \in B_{2\epsilon}$ para a equação $x = \tilde{x} + \mathcal{B}(x, V(x))$, onde $V(x) = \tilde{y} + T(x)$.

Demonstração. Considere o mapa $G : X \rightarrow X$ dado por $G(x) = \tilde{x} + \mathcal{B}(x, V(x))$. Para $x \in B_{2\epsilon}$, temos que

$$\begin{aligned}
\|G(x)\|_X &\leq \|\tilde{x}\|_X + \|\mathcal{B}(x, V(x))\|_X \\
&\leq \|\tilde{x}\|_X + C\|x\|_X\|V(x)\|_Y \\
&\leq \|\tilde{x}\|_X + C\|x\|_X(\|\tilde{y}\|_Y + \|T(x)\|_Y) \\
&\leq \|\tilde{x}\|_X + C\|x\|_X(\epsilon + \tau\|x\|_X) \\
&\leq \epsilon + 2C\epsilon(\epsilon + 2\tau\epsilon) \\
&< 2\epsilon,
\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

onde usamos em (2.5.1), que

$$2C\epsilon(\epsilon + 2\tau\epsilon) < \epsilon,$$

logo

$$\epsilon < \frac{1}{2C(1+2\tau)}, \tag{2.5.2}$$

pela escolha de ϵ , temos $G(B_{2\epsilon}) \subset B_{2\epsilon}$. Em seguida, tomamos $x, z \in B_{2\epsilon}$ e estimamos

$$\begin{aligned}
\|G(x) - G(z)\|_X &= \|\mathcal{B}(x, V(x)) - \mathcal{B}(z, V(z))\|_X \\
&= \|\mathcal{B}((x-z), V(x)) + \mathcal{B}(z, V(x) - V(z))\|_X \\
&\leq \|\mathcal{B}((x-z), V(x))\|_X + \|\mathcal{B}(z, V(x) - V(z))\|_X \\
&\leq C\|x-z\|_X\|V(x)\|_Y + C\|z\|_X\|V(x) - V(z)\|_Y \\
&\leq C\|x-z\|_X(\|\tilde{y}\|_Y + \tau\|x\|_X) + C\|z\|_X(\tau\|x-z\|_X) \\
&\leq C(\|\tilde{y}\|_Y + \tau\|x\|_X + \tau\|z\|_X)\|x-z\|_X \\
&\leq C(\epsilon + 4\tau\epsilon)\|x-z\|_X,
\end{aligned}$$

e segue de (2.5.2) que $C(\epsilon + 4\tau\epsilon) < 2C(1+2\tau)\epsilon < 1$, então, pela Definição 2.5.1, G é uma contração em $B_{2\epsilon}$, logo, pelo Teorema do ponto fixo de Banach, dado pelo Teorema 2.5.1, concluímos a demonstração. \square

3 CONTEXTO FRACIONÁRIO DO MODELO DE KELLER-SEGEL

Neste Capítulo, definimos a derivada fracionária de Caputo, através da derivada fracionária de Riemann-Liouville, faremos a construção do espaço funcional de tipo Fujita-Kato e através do princípio de Duhamel, mostraremos como obter soluções para o modelo fracionário de Keller-Segel (1.0.7). Por fim, estimaremos via semigrupo do calor, os operadores de Mittag-Leffler em espaços de Morrey e Besov-Morrey. Tais resultados serão essenciais à obtenção dos resultados estabelecidos e provados no Capítulo 4.

3.1 DERIVADAS FRACIONÁRIAS

Definição 3.1.1. *Considere a função $f : [0, +\infty) \rightarrow X$. Dizemos que f é de tipo exponencial, se existem constantes positivas t_0, M e $\gamma \in \mathbb{R}$, tais que*

$$\|f(t)\|_X \leq Me^{\gamma t}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Proposição 3.1.1. *Seja $f : [0, +\infty) \rightarrow X$, uma função localmente integrável e de tipo exponencial. Então existe $\gamma > 0$, tal que,*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt,$$

é convergente se $Re(\lambda) > \gamma$.

Demonstração. Como por hipótese f é de tipo exponencial, existem $t_0, M > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|f(t)\|_X \leq Me^{\gamma t}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt \right\|_X &\leq \left\| \int_0^{t_0} e^{-\lambda t} f(t) dt \right\|_X + \left\| \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt \right\|_X \\
&\leq \int_0^{t_0} e^{-\operatorname{Re}(\lambda)t} \|f(t)\|_X dt + M \int_{t_0}^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re}(\lambda)-\gamma)t} dt \\
&\leq e^{|\operatorname{Re}(\lambda)t_0|} \int_0^{t_0} \|f(t)\|_X dt + M \frac{e^{-(\operatorname{Re}(\lambda)-\gamma)t_0}}{\operatorname{Re}(\lambda) - \gamma} < \infty.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.1.1. *Se $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ são funções de tipo exponencial, então $f * g : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ é de tipo exponencial.*

Demonstração. Por hipótese f e g são funções de tipo exponencial, portanto, existem constantes $t_1, t_2, M_1, M_2 > 0$ e $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\gamma_1 t}, \quad \forall t \geq t_1 \quad \text{e} \quad \|g(t)\|_X \leq M_2 e^{\gamma_2 t}, \quad \forall t \geq t_2. \quad (3.1.1)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\tilde{t} := t_1 = t_2$ e que $\gamma_2 \geq \gamma_1$. Com isso, observamos que se $t \geq 2\tilde{t}$, então

$$\int_0^t f(t-s)g(s) ds = \underbrace{\int_0^{\tilde{t}} f(t-s)g(s) ds}_{\zeta_1(t)} + \underbrace{\int_{\tilde{t}}^{t-\tilde{t}} f(t-s)g(s) ds}_{\zeta_2(t)} + \underbrace{\int_{t-\tilde{t}}^t f(t-s)g(s) ds}_{\zeta_3(t)}$$

Estimando agora as parcelas ζ_1 , ζ_2 e ζ_3 da última igualdade, notamos inicialmente que $0 \leq s \leq \tilde{t}$ implica em $\tilde{t} \leq t-s \leq t$, e temos

$$\begin{aligned}
\|\zeta_1(t)\|_X &\leq M_1 \int_0^{\tilde{t}} e^{\gamma_1(t-s)} \|g(s)\|_X ds \\
&\leq M_1 \left(\sup_{s \in [0, \tilde{t}]} e^{-\gamma_1 s} \right) \|g\|_{L^1([0, \tilde{t}]; X)} e^{\gamma_1 t} \\
&\leq \tilde{M}_1 e^{\gamma_1 t} \\
&\leq \tilde{M}_1 e^{\gamma_2 t}.
\end{aligned}$$

Quando $\tilde{t} \leq s \leq t - \tilde{t}$, então $\tilde{t} \leq (t-s) \leq t - \tilde{t}$ segue daí que

$$\begin{aligned}
\|\zeta_2(t)\|_X &\leq M_1 M_2 \int_{\tilde{t}}^{t-\tilde{t}} e^{\gamma_1(t-s)} e^{\gamma_2 s} ds \\
&\leq \frac{M_1 M_2 e^{(\gamma_1 - \gamma_2)\tilde{t}}}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{\gamma_2 t} = \tilde{M}_2 e^{\gamma_2 t}.
\end{aligned}$$

Por fim, se $t - \tilde{t} \leq s \leq t$, então $0 \leq (t-s) \leq \tilde{t}$ e

$$\begin{aligned}
\|\zeta_3(t)\|_X &\leq M_2 \int_{t-\tilde{t}}^t f(t-s) e^{\gamma_2 s} ds \\
&= M_2 (\max\{1, e^{-\gamma_2 \tilde{t}}\}) \|f\|_{L^1([0, \tilde{t}]; X)} e^{\gamma_2 t} = \tilde{M}_3 e^{\gamma_2 t}.
\end{aligned}$$

Tomando $\tilde{M} = \max\{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3\}$, obtemos

$$\|f * g(t)\|_X \leq \tilde{M}e^{\gamma_2 t}, \quad \forall t \geq 2\tilde{t}, \quad (3.1.2)$$

e com isto concluímos a demonstração do Lema 3.2.1. \square

Proposição 3.1.2. *Seja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : [0, +\infty) \rightarrow X$, funções localmente integráveis e de tipo exponencial, suponha que \mathcal{L} é o operador transformada de Laplace. Então a função $f * g : [0, +\infty) \rightarrow X$ é localmente integrável, de tipo exponencial e*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(\lambda) = \mathcal{L}\{f(t)\}(\lambda)\mathcal{L}\{g(t)\}(\lambda), \quad (3.1.3)$$

onde λ está na região de convergência adequada de ambas as funções.

Demonstração. Uma função ϕ em \mathbb{C} é dita localmente integrável se $\operatorname{Re}\phi$ e $\operatorname{Im}\phi$ o forem. Por definição ϕ é localmente integrável se for integrável em cada subconjunto compacto de seu domínio de definição. Mostraremos que se $g \in \mathcal{C}_c^\infty$ e f é localmente integrável, então $f * g$ é localmente integrável, para o caso real.

De fato, fixe $g \in \mathcal{C}_c^\infty$ e escolha $R > 0$, tal que, o suporte da g esteja contido em $[R, -R]$. Para cada $y \in \mathbb{R}$ o suporte da função $t \rightarrow g(y-t)$ está contido em $[y-R, y+R]$. Faremos agora a verificação de que a convolução está bem definida em \mathbb{R} . Para cada $y \in \mathbb{R}$ fixado, temos

$$\begin{aligned} \|f * g(y)\|_X &= \left\| \int_{\mathbb{R}} f(t)g(y-t) dt \right\|_X \\ &= \left\| \int_{y-R}^{y+R} f(t)g(y-t) dt \right\|_X \\ &\leq \int_{y-R}^{y+R} |f(t)| \|g(y-t)\|_X dt \\ &\leq \max_{x \in \mathbb{R}} \|g(x)\|_X \int_{y-R}^{y+R} |f(t)| dt \\ &< \infty, \end{aligned}$$

e o resultado segue. O Lema 3.1.1, por sua vez, nos garante que $f * g$ é de tipo exponencial. Para obter a igualdade (3.1.3), notamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{ \int_0^t (f * g)(t) ds \right\}(\lambda) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \int_0^t f(t-s)g(s) ds dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t-s)g(s) dt ds \\ &= \int_0^{+\infty} g(s) \int_s^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t-s) dt ds, \end{aligned}$$

fazendo a mudança de variáveis $t - s = \tau$, ficamos com

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^t (f * g)(t) ds\right\}(\lambda) &= \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(s+\tau)} f(\tau) d\tau ds \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} g(s) ds\right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda \tau} f(\tau) d\tau\right) \\ &= \mathcal{L}\{f(t)\}(\lambda) \mathcal{L}\{g(t)\}(\lambda),\end{aligned}$$

conforme desejado. \square

Pode-se mostrar que a transformada de Laplace \mathcal{L} é um operador bijetivo e contínuo (ver (PODLUBNY, 1999; WIDDER, 1946)). Dessa forma, podemos definir a transformada de Laplace inversa e concluir que a mesma está definida de maneira única. Em geral, o cálculo da transformada de Laplace inversa requer técnicas de análise complexa. A fórmula de inversão mais simples é dada pela chamada integral de Bromwich.

Definição 3.1.2. *Seja $\hat{f} : \mathcal{D}(\hat{f}) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, uma função integrável. Então*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(\lambda)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-\lambda t} \hat{f}(\lambda) d\lambda, \quad \text{onde } c > c_0, \quad (3.1.4)$$

com c_0 no semi-plano direito da convergência absoluta da integral da transformada de Laplace. Para denotar a Transformada de Laplace inversa escrevemos \mathcal{L}^{-1} . A integração é realizada ao longo da reta vertical $Re(\lambda) = c > c_0$ no plano complexo de modo que c fique à direita de todas as singularidades da função \hat{f} .

Observação 3.1.1. *Usando as mesmas notações da Proposição 3.1.2, podemos reescrever a igualdade (3.1.3) de outra maneira. Suponha que $\mathcal{L}\{f(t)\}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$ e $\mathcal{L}\{g(t)\}(\lambda) = \hat{g}(\lambda)$, então*

$$\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(\lambda)\}(t-s) \mathcal{L}^{-1}\{\hat{g}(\lambda)\}(s) ds = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)\}(t).$$

Definição 3.1.3. *A função gama, definida em $\mathcal{D}(\Gamma) := \{\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}\}$, com $Re(z) > 0$, é dada por*

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} s^{z-1} e^{-s} ds.$$

Afirmamos que a função gama é convergente. Com efeito, escrevendo $\Gamma(z)$ como

$$\Gamma(z) := \int_0^1 s^{z-1} e^{-s} ds + \int_1^{+\infty} s^{z-1} e^{-s} ds,$$

e analisando cada integral, vemos que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s^{z-1}}{e^s} = 0$ implica na convergência de $\int_1^{+\infty} s^{z-1} e^{-s} ds$. Por outro lado, para $0 \leq s \leq 1$, temos $0 \leq e^{-s} \leq 1$, então a convergência de $\int_0^1 s^{z-1} e^{-s} ds$ depende apenas do fator s^{z-1} . Analisaremos três casos:

$$(i) \operatorname{Re}(z) > 0 \Rightarrow \int_0^1 s^{z-1} ds = \frac{1}{z} < \infty;$$

$$(ii) \operatorname{Re}(z) = 0 \Rightarrow \int_0^1 s^{z-1} ds = +\infty;$$

$$(iii) \operatorname{Re}(z) < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(z-1) < -1 \Rightarrow \int_0^1 s^{\operatorname{Re}(z-1)} ds \geq \int_0^1 s^{-1} ds = +\infty,$$

temos a convergência da função gama, apenas no caso $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Exemplo 3.1.1. Seja $\gamma \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re}(\gamma) > -1$ e $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(t) = t^\gamma$. Então, para $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, temos

$$\mathcal{L}\{t^\gamma\}(\lambda) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\lambda^{\gamma+1}}.$$

De fato, utilizando a Definição 3.1.2, para $f(t) = t^\gamma$, segue que

$$\mathcal{L}\{t^\gamma\}(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^\gamma dt. \quad (3.1.5)$$

Fazendo $\lambda t = u$, em (3.1.5), temos

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^\gamma \frac{du}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^{\gamma+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{(\gamma+1)-1} du = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\lambda^{\gamma+1}}.$$

Definição 3.1.4. Considere $\mathcal{D}(B) := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2; \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \text{ e } \operatorname{Re}(\beta) > 0\}$. A função definida por

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 s^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1} ds,$$

é chamada de função Beta.

Proposição 3.1.3. A função Beta está bem definida.

Demonstração. Para $\alpha, \beta \in \mathcal{D}(B)$ considere $0 < \delta < 1$, temos que

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \int_0^\delta s^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1} ds + \int_\delta^1 s^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1} ds \\ &\leq \max\{1, (1-\delta)^{\beta-1}\} \int_0^\delta s^{\alpha-1} ds + \max\{1, \delta^{\alpha-1}\} \int_\delta^1 (1-s)^{\beta-1} ds \\ &= \max\{1, (1-\delta)^{\beta-1}\} \frac{\delta^\alpha}{\alpha} + \max\{1, \delta^{\alpha-1}\} \frac{(1-\delta)^\beta}{\beta} < \infty. \end{aligned}$$

□

Lema 3.1.2. Podemos relacionar as funções gama e beta, da seguinte maneira

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tais que, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ e $\operatorname{Re}(\beta) > 0$.

Demonstração. Note que

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1} dt \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\beta-1} du.$$

Tomando $t = x^2$ e $u = y^2$, segue-se

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2(\alpha-1)} 2x dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} y^{2(\beta-1)} 2y dy \right) \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} x^{2\alpha-1} y^{2\beta-1} dx dy. \end{aligned}$$

Sejam $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; r \geq 0, 0 \leq x \leq r, 0 \leq y \leq r\}$, considere B_1 e B_2 os primeiros quadrantes dos círculos inscritos e circunscritos, respectivamente, ao quadrado $0 \leq x \leq r$ e $0 \leq y \leq r$. Seja $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} x^{2\alpha-1} y^{2\beta-1}$, então

$$\iint_{B_1} f(x, y) dx dy \leq \iint_R f(x, y) dx dy \leq \iint_{B_2} f(x, y) dx dy. \quad (3.1.6)$$

Fazendo a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Desta forma, $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} \right| = \rho$ e $dx dy = \rho d\rho d\theta$. Então

$$\begin{aligned} \iint_{B_1} f(x, y) dx dy &= 4 \int_0^r \int_0^{\pi/2} e^{-(\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta)} (\rho \cos \theta)^{2\alpha-1} (\rho \sin \theta)^{2\beta-1} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^r e^{-\rho^2} \rho^{2(\alpha+\beta)-1} d\rho \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2\alpha-1} (\sin \theta)^{2\beta-1} d\theta. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\iint_{B_2} f(x, y) dx dy = 4 \int_0^{r\sqrt{2}} e^{-\rho^2} \rho^{2(\alpha+\beta)-1} \rho \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2\alpha-1} (\sin \theta)^{2\beta-1} d\theta.$$

Sendo

$$A = \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2\alpha-1} (\sin \theta)^{2\beta-1} d\theta,$$

e tomando $w = (\cos \theta)^2$, temos $dw = -2 \cos \theta \sin \theta d\theta$. E mais, $(\sin \theta)^2 = 1 - w$. Então

$$A = - \int_1^0 \frac{w^{\alpha-1} (1-w)^{\beta-1}}{2} dw = \frac{1}{2} \int_0^1 w^{\alpha-1} (1-w)^{\beta-1} dw = \frac{1}{2} B(\alpha, \beta).$$

Agora, seja

$$C_1 = \int_0^r e^{-\rho^2} \rho^{2(\alpha+\beta)-1} d\rho = \int_0^r e^{-\rho^2} \rho^{2(\alpha+\beta-1)} \frac{2\rho}{2} d\rho,$$

e analogamente,

$$C_2 = \int_0^{r\sqrt{2}} e^{-\rho^2} \rho^{2(\alpha+\beta-1)} \frac{2\rho}{2} d\rho.$$

Podemos observar que

$$\iint_{B_1} f(x, y) dx dy = 4C_1A,$$

e

$$\iint_{B_2} f(x, y) dx dy = 4C_2A.$$

Tomando $v = \rho^2$, temos $dv = 2\rho d\rho$. Assim,

$$C_1 = \frac{1}{2} \int_0^{r^2} e^{-v} v^{(\alpha+\beta)-1} dv$$

e

$$C_2 = \frac{1}{2} \int_0^{2r^2} e^{-v} v^{(\alpha+\beta)-1} dv.$$

Quando $r \rightarrow +\infty$,

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-v} v^{(\alpha+\beta)-1} dv = \frac{1}{2} \Gamma(\alpha + \beta).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \iint_{B_1} f(x, y) dx dy &= 4 \lim_{r \rightarrow +\infty} C_1 A \\ &= 4 \frac{1}{2} B(\alpha, \beta) \frac{1}{2} \Gamma(\alpha + \beta) \\ &= B(\alpha, \beta) \Gamma(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

E, analogamente,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \iint_{B_2} f(x, y) dx dy = B(\alpha, \beta) \Gamma(\alpha + \beta).$$

Como

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) &= 4 \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r \int_0^r e^{-(x^2+y^2)} x^{2\alpha-1} y^{2\beta-1} dx dy \\ &= 4 \lim_{r \rightarrow +\infty} \iint_R e^{-(x^2+y^2)} x^{2\alpha-1} y^{2\beta-1} dx dy, \end{aligned}$$

por (3.1.6) temos

$$B(\alpha, \beta) \Gamma(\alpha + \beta) \leq \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \leq B(\alpha, \beta) \Gamma(\alpha + \beta).$$

Portanto,

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

com $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $\operatorname{Re}(\beta) > 0$.

□

Definição 3.1.5. Seja $\alpha > 0$. A função $g_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, & t > 0, \\ 0 & , t \leq 0, \end{cases}$$

é chamada função de Gel'fand-Shilov.

Lema 3.1.3. Dados $\alpha, \beta > 0$, então $g_\alpha * g_\beta(t) = g_{\alpha+\beta}(t)$ para $t > 0$.

Demonstração. Segue direto da Definição 3.1.6 que, se $t \leq 0$, então

$$g_\alpha * g_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t 0 \cdot 0 \, ds = 0 = g_{\alpha+\beta}(t).$$

Se $t > 0$, então

$$g_\alpha * g_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} \, ds.$$

Tomando $u = \frac{s}{t}$, temos $ds = t \, du$, e então

$$\begin{aligned} g_\alpha * g_\beta(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (t-ut)^{\alpha-1} (ut)^{\beta-1} t \, dt \\ &= \int_0^1 t^{\alpha+\beta-1} (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} t \, dt \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} \, ds \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= g_{\alpha+\beta}(t), \end{aligned}$$

como desejávamos. □

Definição 3.1.6. Sejam $\alpha \in (0, 1)$ e $f \in L^1(0, b; X)$. O operador $J_t^\alpha f$, definido por

$$J_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) \, ds = g_\alpha * f(t), \quad (3.1.7)$$

para $t \in [0, b]$, é chamado de integral de ordem α de Riemann-Liouville de f .

Exemplo 3.1.2. A transformada de Laplace da integral de ordem α de f , dada pela Definição 3.1.7, tem valor igual a

$$\mathcal{L}\{J^\alpha f(t)\}(\lambda) = \lambda^{-\alpha} \hat{f}(\lambda).$$

Demonstração. Tomemos a função g_α , da Definição 3.1.6.. Então

$$\mathcal{L}\{g_\alpha(t)\}(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt,$$

fazendo a substituição $u = \lambda t$, temos $du = \lambda dt$, e segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g_\alpha(t)\}(\lambda) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^\alpha} \Gamma(\alpha) \\ &= \lambda^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Agora, da Definição 3.1.7 e pela Proposição 3.1.2, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{J^\alpha f(t)\}(\lambda) &= \mathcal{L}\{g_\alpha * f(t)\}(\lambda) \\ &= \mathcal{L}\{g_\alpha(t)\}(\lambda) \mathcal{L}\{f(t)\}(\lambda) \\ &= \lambda^{-\alpha} \hat{f}(\lambda), \end{aligned}$$

conforme desejado. □

Lema 3.1.4. *Seja $f \in L^1(0, b; X)$. Então para todo $t \in [0, b]$*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} J_t^\alpha f(t) = f(t).$$

Demonstração. Calculando diretamente o limite de $J_t^\alpha f(t)$, quando $\alpha \rightarrow 0^+$, encontramos

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} J_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \right) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(-\frac{(t-s)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} f(s) \Big|_0^t + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\alpha \Gamma(\alpha)} f'(s) ds \right) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} -\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(0) + \int_0^t \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) f'(s) ds \\ &= f(0) + \int_0^t f'(s) ds = f(t), \end{aligned}$$

e o lema está provado. □

Observação 3.1.2. *Através do Lema 3.1.4 podemos estender a Definição 3.1.7 para $\alpha = 0$. Nesta caso J_α^0 passa a ser: $J_t^0 f(t) := f(t)$, isto é, o operador identidade.*

Definição 3.1.7. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $b > 0$ e $f \in L^1(0, b; X)$, com $f * g_{1-\alpha} \in \mathcal{W}^{1,1}(0, b; X)$. Definimos a derivada de Riemann-Liouville de ordem α , $D_t^\alpha f(t)$, por*

$$D_t^\alpha f(t) := D_t^1 J_t^{1-\alpha} f(t) = D_t^1 (g_{1-\alpha} * f)(t), \quad \text{q.t.p. em } [0, b],$$

onde $D_t^1 = \left(\frac{d}{dt}\right)$. *Explicitamente, obtemos*

$$D_t^\alpha f(t) = D_t^1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \right\}, \quad \text{q.t.p. em } [0, b].$$

Exemplo 3.1.3. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (-1, \infty)$ e a função $p(t) = ct^\beta$. Então*

$$D_t^\alpha p(t) = c \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1-\alpha+\beta)} t^{\beta-\alpha}. \quad (3.1.8)$$

Demonstração. De fato,

$$D_t^\alpha p(t) = D_t^1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} c s^\beta ds \right\}. \quad (3.1.9)$$

Tomando $u = s/t$, temos $ds = tdu$, e

$$\begin{aligned} D_t^\alpha p(t) &= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-tu)^{-\alpha} c (tu)^\beta t du \right\} \\ &= D_t^1 \left\{ \frac{ct^{1+\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{-\alpha} u^\beta du \right\} \\ &= D_t^1 \left\{ \frac{ct^{1+\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} B(1-\alpha, \beta+1) \right\} \\ &= (1+\beta-\alpha)t^{\beta-\alpha} \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} B(1-\alpha, \beta+1) \\ &= (1+\beta-\alpha)t^{\beta-\alpha} \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2-\alpha+\beta)} \\ &= (1+\beta-\alpha)t^{\beta-\alpha} \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{(1-\alpha+\beta)\Gamma(1-\alpha+\beta)} \\ &= ct^{\beta-\alpha} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1-\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

□

Observação 3.1.3. *Pelo exemplo anterior, tomando $\beta = 0$, a derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma função constante é dada por*

$$D_t^\alpha c = c \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Portanto, a derivada de Riemann-Liouville de uma função constante é diferente de zero.

Definição 3.1.8. Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $b > 0$ e $f \in L^1(0, b; X)$, com $f * g_{1-\alpha} \in \mathcal{W}^{1,1}(0, b; X)$, onde $\mathcal{W}^{1,1}(0, b; X)$ denota o espaço de funções $L^1(0, b; X)$ que possuem as derivadas fracas de ordem menor ou igual que 1 em $L^1(0, b; X)$. A derivada de Caputo de ordem α , denotada por ${}^c D_t^\alpha f(t)$, é definida da seguinte forma

$${}^c D_t^\alpha f(t) := D_t^\alpha (f(t) - f(0)), \quad \text{q.t.p. em } [0, b],$$

onde, D_t^α é a derivada de Riemann-Liouville.

Proposição 3.1.4. As seguintes propriedades são válidas em relação à integrais e derivadas fracionárias: Dados $\alpha_1, \alpha_2, b \geq 0$ com $f \in L^1(0, b; X)$ e $h \in C(0, b; X)$.

(i) $J_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_2} f(t) = J_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t);$

(ii) $D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} f(t) = f(t);$

(iii) Se $g_{1-\alpha_1} * f \in W^{1,1}(0, b; X)$, então;

$$J_t^{\alpha_1} {}^c D_t^\alpha f(t) = f(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1 - 1} \{J_s^{1-\alpha_1} f(s)\} \Big|_{s=0}.$$

Além disso, se existe uma função integrável ϕ , tal que, $f = J_t^{\alpha_1} \phi(t)$, então

$$J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) = f(t);$$

(iv) ${}^c D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} h(t) = h(t);$

(v) Se $g_{1-\alpha_1} * h \in W^{1,1}(0, b; X)$, então $J_t^{\alpha_1} {}^c D_t^{\alpha_1} h(t) = h(t) - h(0)$.

Demonstração. Expandindo o termo $J_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_2} f(t)$ encontramos a expressão

$$\begin{aligned} J_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_2} f(t) &= g_{\alpha_1} * (g_{\alpha_2} * f)(t) \\ &= (g_{\alpha_1} * g_{\alpha_2}) * f(t) \\ &= (g_{\alpha_1 + \alpha_2} * f)(t) \\ &= J_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t). \end{aligned}$$

Para o item (ii) usando o item (i) $D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} f(t) = D_t J_t^{1-\alpha_1} J_t^{\alpha_1} f(t) = D_t J_t^1 f(t)$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$D_t J_t^1 f(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^t f(s) ds \right) = f(t).$$

(iii) Observe que $D_t^{\alpha_1} f(t) \in L^1(0, b; X)$, além disso

$$\begin{aligned} J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} D_s^{\alpha_1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} \int_0^t D_t^1 (t-s)^{\alpha_1} D_s^{\alpha_1} f(s) ds. \end{aligned}$$

Então, pela regra de Leibniz

$$\begin{aligned} J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) &= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1} D_s^{\alpha_1} f(s) ds \right\} \\ &= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1} D_t^1 J_s^{1-\alpha_1} f(s) ds \right\}, \end{aligned}$$

e finalmente, integrando por partes

$$\begin{aligned} J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) &= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} \{(t-s)^{\alpha_1} D_s^{\alpha_1} f(s)\} \Big|_0^t \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1} \{J_s^{1-\alpha_1} f(s)\} \Big|_{s=0} \right\} \\ &= D_t^1 \left\{ - \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1} \{J_s^{1-\alpha_1} f(s)\} \Big|_{s=0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} J_t^{1-\alpha_1} f(s) ds \right\} \\ &= - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1-1} \{J_s^{1-\alpha_1} f(s)\} \Big|_{s=0} + D_t^1 J_t^{\alpha_1} J_s^{1-\alpha_1} f(s) \\ &= f(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1-1} \{J_s^{1-\alpha_1} f(s)\} \Big|_{s=0}. \end{aligned}$$

Agora, se $f(t) = J_t^{\alpha_1} \phi(t)$, então pelo item (ii), concluímos que

$$J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) = J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} \phi(t) = J_t^{\alpha_1} \phi(t) = f(t).$$

(iv) Usando o último item e o fato de que

$$\|J_s^{\alpha_1} h(s)\Big|_{s=0}\| \leq \|h\|_{C(0,b;X)} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s (s-\sigma)^{\alpha_1-1} d\sigma \Big|_{s=0} = 0,$$

concluímos que

$${}^c D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} h(t) = D_t^{\alpha_1} (J_t^{\alpha_1} h(t) - J_t^{\alpha_1} h(s)\Big|_{s=0}) = D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} h(t) = h(t).$$

(v) Finalmente, observe que se $H(t) = h(t) - h(0)$, pelo item (iii) e do fato observado no item (iv), obtemos

$$J_t^{\alpha_1} {}^c D_t^{\alpha_1} h(t) = J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} H(t) = H(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1-1} \{J_s^{1-\alpha_1} H(s)\} \Big|_{s=0} = h(t) - h(0).$$

□

Lema 3.1.5. *Suponha que $\alpha \in (0, 1)$ e $f \in C^1(0, b; X)$. Então*

$${}^c D_t^\alpha f(t) = J_t^{1-\alpha} f'(t), \quad q.t.p. \text{ em } [0, b].$$

Demonstração. Temos da Definição 3.1.9, que

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha f(t) &:= D_t^\alpha (f(t) - f(0)) \\ &= D_t^\alpha f(t) - D_t^\alpha f(0) \\ &= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \right\} - D_t^\alpha f(0) \\ &= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t -\frac{D_s^1 (t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(s) ds \right\} - D_t^\alpha f(0) \\ &= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(-\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(s) \Big|_0^t + \int_0^t \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} f'(s) ds \right) \right\} - D_t^\alpha f(0) \\ &= D_t^1 \left\{ \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} f(0) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} f'(s) ds \right\} \\ &\quad - D_t^\alpha f(0) \\ &= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0) + D_t^1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} f'(s) ds \right\} - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0) \\ &= D_t^1 [J_t^{2-\alpha} f'(t)] \\ &= D_t^1 J_t^1 [J_t^{1-\alpha} f'(t)] \\ &= J_t^{1-\alpha} f'(t), \end{aligned}$$

e assim, concluímos que ${}^c D_t^\alpha f(t) = J_t^{1-\alpha} f'(t)$, *q.t.p. em* $[0, b]$. □

Proposição 3.1.5. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$, e $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ um operador setorial positivo. Então para $x \in X$, temos:*

$$\mathcal{L}\{E_\alpha(-t^\alpha A)x\}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x \quad (3.1.10)$$

e

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x\}(\lambda) = (\lambda^\alpha + A)^{-1}x. \quad (3.1.11)$$

Demonstração. Dados $x \in X$, $\alpha \in (0, 1)$ e $\lambda^\alpha \in \rho(-A)$ por (2.1.4), temos que

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x = \lambda^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^\alpha t} T(t)x dt.$$

Fazendo $t = w^\alpha$, segue-se

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x &= \int_0^{+\infty} \alpha(\lambda w)^{\alpha-1} e^{-(\lambda w)^\alpha} T(w^\alpha)x dw \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{1}{w} \left(\frac{d}{d\lambda} e^{-(\lambda w)^\alpha} \right) T(w^\alpha)x dw. \end{aligned}$$

Do item (iii) da Proposição 2.3.2. e da Regra de Leibniz para integrais temos

$$\begin{aligned}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x &= - \int_0^{+\infty} \frac{1}{w} \left(\frac{d}{d\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda wt} \alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(t^{-\alpha}) dt \right) T(w^\alpha)x dw \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda wt} \alpha t^{-\alpha} M_\alpha(t^{-\alpha}) T(w^\alpha)x dt dw.\end{aligned}$$

Fazendo agora a mudança de variável $s = wt$, concluímos que

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(t^{-\alpha}) T\left(\frac{s^\alpha}{t^\alpha}\right) x dt ds.$$

Finalmente, tomando $t^{-\alpha} = \mu$, e usando o Teorema 2.4.1 encontramos

$$\begin{aligned}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha + A)^{-1}x &= - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \left(\int_{+\infty}^0 M_\alpha(\mu) T(\mu s^\alpha) x d\mu \right) ds, \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(\mu) T(s^\alpha \mu) x d\mu \right) ds, \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} E_\alpha(-t^\alpha A) x dt \\ &= \mathcal{L}\{E_\alpha(-t^\alpha A)x\}(\lambda),\end{aligned}$$

como desejado.

Tomando novamente $x \in X$ e usando o Teorema 2.4.1, notemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x\}(\lambda) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} \left(\int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) T(st^\alpha) x ds \right) dt.\end{aligned}$$

Para $s = \omega t^{-\alpha}$, segue do teorema de Fubini, que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x\}(\lambda) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} \left(\int_0^{+\infty} \alpha \omega t^{-\alpha} M_\alpha(\omega t^{-\alpha}) T(\omega) x t^{-\alpha} d\omega \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \omega \left(\int_0^{+\infty} \alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(\omega t^{-\alpha}) e^{-\lambda t} dt \right) T(\omega) x d\omega. \quad (3.1.12)\end{aligned}$$

Tomando agora $t = \xi \omega^{1/\alpha}$ ficamos com

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(\omega t^{-\alpha}) e^{-\lambda t} dt &= \int_0^{+\infty} \alpha (\xi \omega^{1/\alpha})^{-(1+\alpha)} M_\alpha(\omega (\xi \omega^{1/\alpha})^{-\alpha}) e^{-\lambda (\xi \omega^{1/\alpha})} \omega^{1/\alpha} d\xi \\ &= \omega^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda \omega^{1/\alpha}) \xi} (\alpha \xi^{-(1+\alpha)} M_\alpha(\xi^{-\alpha})) d\xi \\ &= \omega^{-1} \mathcal{L}\{\alpha \xi^{-(1+\alpha)} M_\alpha(\xi^{-\alpha})\}(\lambda \omega^{1/\alpha}) \\ &= \omega^{-1} e^{-\lambda \omega},\end{aligned} \quad (3.1.13)$$

onde (3.1.13) é resultado da Proposição 2.3.2, item (iii). Substituindo agora a igualdade (3.1.13) em (3.1.12), teremos

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)x\}(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^\alpha \omega} T(\omega)x d\omega \quad (3.1.14)$$

$$= (\lambda^\alpha + A)^{-1}x, \quad (3.1.15)$$

onde a igualdade (3.1.15) é resultado da Proposição 2.1.2. \square

3.2 ESPAÇO FUNCIONAL DE TIPO FUJITA-KATO

A fim de garantirmos a existência de soluções para o problema (1.0.7), apresentaremos nesta seção o espaço funcional de tipo Fujita-Kato. O qual, atuará como base dos resultados.

Lema 3.2.1. *Assuma que $[u, v]$ é uma solução suficientemente regular, para o problema (1.0.7) com $\gamma = 0$. Então*

$$u_\sigma(x, t) := \sigma^2 u(\sigma x, \sigma^{2/\alpha} t), \quad (3.2.1)$$

e

$$v_\sigma(x, t) := v(\sigma x, \sigma^{2/\alpha} t), \quad (3.2.2)$$

satisfazem também (1.0.7).

Demonstração. Suponha que $[u_\sigma, v_\sigma]$ como definido abaixo é solução de (1.0.7) para $\gamma = 0$. Procuremos os valores de a, μ, c e b , tais que

$$u_\sigma(x, t) := \sigma^a u(\sigma x, \sigma^\mu t) \quad \text{e} \quad v_\sigma(x, t) := \sigma^c v(\sigma x, \sigma^b t).$$

Calculando a derivada de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1)$ da função u_σ , obtemos

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha u_\sigma(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial_s u_\sigma(x, s)}{(t-s)^\alpha} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial_s [\sigma^a u(\sigma x, \sigma^\mu s)]}{(t-s)^\alpha} ds \\ &= \frac{\sigma^a}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\sigma^\mu \partial_s u(\sigma x, \sigma^\mu s)}{(t-s)^\alpha} ds. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Fazendo a mudança de variável $\theta = \sigma^\mu s$ em (3.2.3), obtemos

$$\begin{aligned}
{}^c D_t^\alpha u_\sigma(x, t) &= \frac{\sigma^{a+\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\sigma^\mu t} \frac{\partial_\theta u(\sigma x, \theta)}{(t - \theta \sigma^{-\mu})^\alpha} \sigma^{-\mu} d\theta \\
&= \frac{\sigma^a}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\sigma^\mu t} \frac{\partial_s u(\sigma x, s)}{(t - \sigma^{-\mu} s)^\alpha} ds \\
&= \frac{\sigma^a}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\sigma^\mu t} \frac{\partial_s u(\sigma x, s)}{\sigma^{-\mu\alpha} (\sigma^\mu t - s)^\alpha} ds \\
&= \frac{\sigma^{a+\mu\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\sigma^\mu t} \frac{\partial_s u(\sigma x, s)}{(\sigma^\mu t - s)^\alpha} ds \\
&= \sigma^{a+\mu\alpha} ({}^c D_t^\alpha u(\sigma x, \sigma^\mu t)).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta u_\sigma(x, t) - \nabla(u_\sigma \nabla v_\sigma)(x, t) = \sigma^{a+\mu\alpha} \left\{ \Delta u(\sigma x, \sigma^\mu t) - \nabla(u(\sigma x, \sigma^\mu t) \nabla v(\sigma x, \sigma^\mu t)) \right\}. \quad (3.2.4)$$

Além disso, como $u_\sigma(x, t) = \sigma^a u(\sigma x, \sigma^\mu t)$, então

$$\frac{\partial^2 u_\sigma}{\partial x_i^2}(x, t) = \sigma^{a+2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\sigma x, \sigma^\mu t) \Rightarrow \Delta u_\sigma(x, t) = \sigma^{a+2} \Delta u(\sigma x, \sigma^\mu t).$$

De forma análoga, para $v_\sigma(x, t) = \sigma^c v(\sigma x, \sigma^b t)$, temos

$$\frac{\partial^2 v_\sigma}{\partial x_i^2}(x, t) = \sigma^{c+2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(\sigma x, \sigma^b t) \Rightarrow \Delta v_\sigma(x, t) = \sigma^{c+2} \Delta v(\sigma x, \sigma^b t).$$

Observando agora que

- (i) $\nabla u_\sigma(x, t) = \sigma^{a+1} \nabla u(\sigma x, \sigma^\mu t)$;
- (ii) $\nabla v_\sigma(x, t) = \sigma^{c+1} \nabla v(\sigma x, \sigma^b t)$;
- (iii) $(\nabla u_\sigma \nabla v_\sigma)(x, t) = \sigma^{a+c+2} \nabla u(\sigma x, \sigma^\mu t) \nabla v(\sigma x, \sigma^b t)$;
- (iv) $\nabla(u_\sigma \nabla v_\sigma)(x, t) = \sigma^{a+c+2} (\nabla u(\sigma x, \sigma^\mu t) \nabla v(\sigma x, \sigma^b t) + u(\sigma x, \sigma^\mu t) \Delta v(\sigma x, \sigma^b t))$;

temos

$$\begin{aligned}
\Delta u_\sigma(x, t) - \nabla(u_\sigma \nabla v_\sigma)(x, t) &= \sigma^{a+2} \Delta u(\sigma x, \sigma^\mu t) - \sigma^{a+c+2} (\nabla u(\sigma x, \sigma^\mu t) \nabla v(\sigma x, \sigma^b t) \\
&\quad + u(\sigma x, \sigma^\mu t) \Delta v(\sigma x, \sigma^b t)) \\
&= \sigma^{a+2} \left\{ \Delta u(\sigma x, \sigma^\mu t) - \sigma^c (\nabla u(\sigma x, \sigma^\mu t) \nabla v(\sigma x, \sigma^b t) \right. \\
&\quad \left. + u(\sigma x, \sigma^\mu t) \Delta v(\sigma x, \sigma^b t)) \right\}.
\end{aligned}$$

Tomando $c = 0$, na igualdade acima ficamos com

$$\begin{aligned} \Delta u_\sigma(x, t) - \nabla(u_\sigma \nabla v_\sigma)(x, t) &= \sigma^{a+2} \left\{ \Delta u(\sigma x, \sigma^\mu t) - \left(\nabla u(\sigma x, \sigma^\mu t) \nabla v(\sigma x, \sigma^b t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + u(\sigma x, \sigma^\mu t) \Delta v(\sigma x, \sigma^b t) \right) \right\} \\ &= \sigma^{a+2} \left\{ \Delta u(\sigma x, \sigma^\mu t) - \nabla \left(u(\sigma x, \sigma^\mu t) \Delta v(\sigma x, \sigma^b t) \right) \right\}, \end{aligned}$$

e segue daí que

$$\Delta u_\sigma(x, t) - \nabla(u_\sigma \nabla v_\sigma)(x, t) = \sigma^{a+2} \left\{ \Delta u(\sigma x, \sigma^\mu t) - \nabla \left(u(\sigma x, \sigma^\mu t) \Delta v(\sigma x, \sigma^b t) \right) \right\}. \quad (3.2.5)$$

Logo, através de (3.2.4) e (3.2.5) obtemos o seguinte resultado

$$\mu\alpha = 2 \Rightarrow \mu = \frac{2}{\alpha},$$

e portanto $c = 0$ e $\mu = \frac{2}{\alpha}$.

Tomando $\gamma = 0$ na segunda equação de (1.0.7), ficamos com

$${}^c D_t^\alpha v(x, t) = \Delta v(x, t) + u(x, t).$$

De maneira análoga a anterior, calculamos a derivada de Caputo de ordem α da função v_σ e encontramos

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha v_\sigma(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial_s v_\sigma(x, s)}{(t-s)^\alpha} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial_s [v(\sigma x, \sigma^b s)]}{(t-s)^\alpha} ds \\ &= \frac{\sigma^b}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial_s v(\sigma x, \sigma^b s)}{(t-s)^\alpha} ds. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Tomando $\zeta = \sigma^b s$ em (3.2.6), obtemos

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha v_\sigma(x, t) &= \frac{\sigma^b}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\sigma^b t} \frac{\partial_\zeta v(\sigma x, \zeta)}{(t-\zeta\sigma^{-b})^\alpha} \sigma^{-b} d\zeta \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\sigma^b t} \frac{\partial_s v(\sigma x, s)}{(t-\sigma^{-b}s)^\alpha} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\sigma^b t} \frac{\partial_s v(\sigma x, s)}{\sigma^{-b\alpha}(\sigma^b t - s)^\alpha} ds \\ &= \frac{\sigma^{b\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\sigma^b t} \frac{\partial_s v(\sigma x, s)}{(\sigma^b t - s)^\alpha} ds \\ &= \sigma^{b\alpha} ({}^c D_t^\alpha v(\sigma x, \sigma^b t)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta v_\sigma(x, t) + u_\sigma(x, t) = \sigma^{b\alpha} \left\{ \Delta v(\sigma x, \sigma^b t) + u(\sigma x, \sigma^{2/\alpha} t) \right\}. \quad (3.2.7)$$

Além disso, como $v_\sigma(x, t) = v(\sigma x, \sigma^b t)$, então

$$\Delta v_\sigma(x, t) = \sigma^2 \Delta v(\sigma x, \sigma^b t),$$

e

$$u_\sigma(x, t) = \sigma^a u(\sigma x, \sigma^{2/\alpha} t).$$

Para $a = 2$, segue-se

$$\Delta v_\sigma(x, t) + u_\sigma(x, t) = \sigma^2 \{ \Delta v(\sigma x, \sigma^b t) + u(\sigma x, \sigma^{2/\alpha} t) \}. \quad (3.2.8)$$

e temos de (3.2.7) e (3.2.8) que

$$b\alpha = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{\alpha}.$$

e com isso concluímos a demonstração do Lema 3.3.2. □

Definição 3.2.1. Consideremos $\gamma = 0$ em (1.0.7). O mapa

$$[u, v] \rightarrow [u_\sigma, v_\sigma], \quad (3.2.9)$$

é chamado *escala de* (1.0.7). As soluções invariantes por (3.2.9) são chamadas *soluções auto-similares*, isto é, $u(x, t) = \sigma^2 u(\sigma x, \sigma^{2/\alpha} t)$ e $v(x, t) = v(\sigma x, \sigma^{2/\alpha} t)$. Notemos que quando $t \rightarrow 0^+$

$$u_0(x) = \sigma^2 u_0(\sigma x) \quad \text{e} \quad v_0(x) = v_0(\sigma x), \quad (3.2.10)$$

e segue daí que no estudo de soluções auto-similares, os candidatos naturais a dado inicial são funções homogêneas

$$u_0(\sigma x) = \sigma^{-2} u_0(x) \quad \text{e} \quad v_0(\sigma x) = v_0(x), \quad (3.2.11)$$

ou seja, os dados u_0, v_0 são funções homogêneas de graus -2 e 0 , respectivamente. Diante disso, somos motivados então a tomar os dados iniciais do problema (1.0.7) no espaço $\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b} \times \dot{B}_{\infty,\infty}^0$, o qual é invariante por escala.

Sejam $n \geq 2$, $0 \leq \lambda < n$, $a = 2 - \frac{n-\lambda}{q}$ e $b = 2 - \frac{n-\lambda}{r}$ com $q \neq r$. A partir de agora, olharemos para as soluções $[u(x, t), v(x, t)]$ do problema (1.0.7) na seguinte classe de tipo Fujita-Kato $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$:

$$\mathcal{X}_1 = \left\{ u \in BC((0, +\infty), \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}); \quad t^{\alpha b/2} u \in BC((0, +\infty), \mathcal{M}_{r,\lambda}), \right. \\ \left. t^{\alpha a/2} u \in BC((0, +\infty), \mathcal{M}_{q,\lambda}) \right\}$$

e

$$\mathcal{X}_2 = \left\{ v \in BC((0, +\infty), \dot{B}_{\infty,\infty}^0); \quad t^{\alpha/2} \nabla_x v \in BC((0, +\infty), L^\infty) \right\}.$$

Definindo as normas dos espaços \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 , por

$$\|u\|_{\mathcal{X}_1} = \sup_{0 < t} \|u(t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} + \sup_{0 < t} t^{\alpha b/2} \|u(t)\|_{r,\lambda} + \sup_{0 < t} t^{\alpha a/2} \|u(t)\|_{q,\lambda} \quad (3.2.12)$$

e

$$\|v\|_{\mathcal{X}_2} = \sup_{0 < t} \|v(t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} + \sup_{0 < t} t^{\alpha/2} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}, \quad (3.2.13)$$

temos que $(\mathcal{X}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{X}_1})$ e $(\mathcal{X}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{X}_2})$ são espaços de Banach.

Lema 3.2.2. *A norma $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2}$ é invariante por escala, isto é,*

$$\|u\|_{\mathcal{X}_1} = \|u_\sigma\|_{\mathcal{X}_1} \quad \text{e} \quad \|v\|_{\mathcal{X}_2} = \|v_\sigma\|_{\mathcal{X}_2}, \quad (3.2.14)$$

onde u_σ e v_σ são dados pelo Lema 3.2.1.

Demonstração. Usando agora a equivalência dada em (2.2.39), segue que

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \|u_\sigma(\cdot, t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} &= \sup_{t>0} \|\sigma^2 u(\sigma \cdot, \sigma^{2/\alpha} t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \\ &= \sup_{t>0} \sigma^2 \|u(\sigma \cdot, \sigma^{2/\alpha} t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \\ &= \sup_{t>0} \sup_{\xi>0} \sigma^2 \xi^{b/2} \|e^{\xi \Delta} u(\sigma \cdot, \sigma^{2/\alpha} t)\|_{r,\lambda}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} e^{\xi \Delta} u(\sigma \cdot, \sigma^{2/\alpha} t) &:= g(\cdot, \xi) * u(\sigma \cdot, \sigma^{2/\alpha} t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y, \xi) u(\sigma y, \sigma^{2/\alpha} t) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi\xi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y, \xi) u(\sigma y, \sigma^{2/\alpha} t) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi\xi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\xi}} u(\sigma y, \sigma^{2/\alpha} t) dy, \end{aligned}$$

fazendo a mudança de variável, $y = \sigma^{-1}\tilde{y}$, obtemos

$$\begin{aligned} e^{\xi\Delta}u(\sigma\cdot, \sigma^{2/\alpha}t) &= \frac{\sigma^{-n}}{(4\pi\xi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x-\sigma^{-1}y|^2}{4\xi}} u(y, \sigma^{2/\alpha}t) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi\sigma^2\xi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|\sigma x-y|^2}{4\sigma^2\xi}} u(y, \sigma^{2/\alpha}t) dy \\ &= e^{\sigma^2\xi\Delta}u(\sigma\cdot, \sigma^{2/\alpha}t). \end{aligned}$$

Da Proposição 2.2.3 teremos

$$\|e^{\xi\Delta}u(\sigma\cdot, \sigma^{2/\alpha}t)\|_{r,\lambda} = \sigma^{-\frac{n-\lambda}{r}} \|e^{\sigma^2\xi\Delta}u(\cdot, \sigma^{2/\alpha}t)\|_{r,\lambda}, \quad (3.2.15)$$

e segue daí que

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \|u_\sigma(\cdot, t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} &= \sup_{t>0} \sup_{\xi>0} \xi^{b/2} \sigma^{2-(n-\lambda)/r} \|e^{\sigma^2\xi\Delta}u(\cdot, \sigma^{2/\alpha}t)\|_{r,\lambda} \\ &= \sup_{t>0} \sup_{\xi>0} \xi^{b/2} \sigma^b \|e^{\sigma^2\xi\Delta}u(\cdot, \sigma^{2/\alpha}t)\|_{r,\lambda} \\ &= \sup_{t>0} \sup_{\xi>0} (\sigma^2\xi)^{b/2} \|e^{\sigma^2\xi\Delta}u(\cdot, \sigma^{2/\alpha}t)\|_{r,\lambda} \\ &= \sup_{t>0} \|u(\cdot, \sigma^{2/\alpha}t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Note que,

$$\|u(\cdot, \sigma^{2/\alpha}t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \leq \sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}},$$

temos de (3.2.16) que

$$\sup_{t>0} \|u_\sigma(\cdot, t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \leq \sup_{t>0} \|u(\cdot, \sigma^{2/\alpha}t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} &= \|u(\cdot, \sigma^{2/\alpha}(\sigma^{-2/\alpha}t))\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \\ &\leq \sup_{t>0} \|u(\cdot, \sigma^{2/\alpha}t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \end{aligned}$$

e tomando o supremo de $\|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}$, para $t > 0$, obtemos a igualdade desejada.

Analisando agora a segunda parcela da soma de (3.2.12), segue de (3.2.1) e da Proposição 2.2.3 que

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\alpha b/2} \|u_\sigma(\cdot, t)\|_{r,\lambda} &= \sup_{t>0} t^{\alpha b/2} \|\sigma^2 u(\sigma\cdot, \sigma^{2/\alpha}t)\|_{r,\lambda} \\ &= \sup_{t>0} t^{\alpha b/2} \sigma^2 \|u(\sigma\cdot, \sigma^{2/\alpha}t)\|_{r,\lambda} \\ &= \sup_{t>0} t^{\alpha b/2} \sigma^2 \sigma^{-\frac{n-\lambda}{r}} \|u(\cdot, \sigma^{2/\alpha}t)\|_{r,\lambda} \\ &= \sup_{t>0} t^{\alpha b/2} \sigma^{2-\frac{n-\lambda}{r}} \|u(\cdot, \sigma^{2/\alpha}t)\|_{r,\lambda} \\ &= \sup_{t>0} t^{\alpha b/2} \sigma^b \|u(\cdot, \sigma^{2/\alpha}t)\|_{r,\lambda}. \end{aligned}$$

Fazendo $\tilde{t} = \sigma^2 t$ obtemos

$$\sup_{t>0} t^{\alpha b/2} \|u_\sigma(\cdot, t)\|_{r,\lambda} = \sup_{\tilde{t}>0} (\tilde{t})^{\alpha b/2} \|u(\cdot, \tilde{t})\|_{r,\lambda}.$$

Finalmente, procedendo de modo análogo para a terceira parcela da soma de (3.2.12), $t^{\alpha a/2} \|u_\sigma(\cdot, t)\|_{q,\lambda}$, encontramos

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\alpha a/2} \|u_\sigma(\cdot, t)\|_{q,\lambda} &= \sup_{t>0} t^{\alpha a/2} \|\sigma^2 u(\cdot, \sigma^{\alpha/2} t)\|_{q,\lambda} \\ &= \sup_{t>0} t^{\alpha a/2} \sigma^2 \sigma^{-\frac{n-\lambda}{q}} \|u(\cdot, \sigma^{\alpha/2} t)\|_{q,\lambda} \\ &= \sup_{t>0} t^{\alpha a/2} \sigma^{2-\frac{n-\lambda}{q}} \|u(\cdot, \sigma^{\alpha/2} t)\|_{q,\lambda} \\ &= \sup_{t>0} t^{\alpha a/2} \sigma^a \|u(\cdot, \sigma^{\alpha/2} t)\|_{q,\lambda}, \end{aligned}$$

e tomando $\tilde{t} = \sigma^{2/\alpha} t$, segue-se

$$\sup_{t>0} t^{\alpha a/2} \|u_\sigma(\cdot, t)\|_{q,\lambda} = \sup_{\tilde{t}>0} (\tilde{t})^{\alpha a/2} \|u(\cdot, \tilde{t})\|_{q,\lambda}.$$

Analisando agora a expressão (3.2.13) vemos que

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \|v_\sigma(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} &= \sup_{t>0} \|v(\sigma \cdot, \sigma^{2/\alpha} t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \\ &= \sup_{t>0} \|v(\cdot, \sigma^{2/\alpha} t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

$$= \sup_{t>0} \|v(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}, \quad (3.2.18)$$

onde (3.2.17), segue diretamente da Proposição 2.2.6. Note que (3.2.18) é obtido com mesmo raciocínio de (3.2.16).

Com relação a segunda parcela de (3.2.13), notamos que

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\alpha/2} \|\nabla_x v_\sigma(\cdot, t)\|_{L^\infty} &= \sup_{s>0} (s\sigma^{-2/\alpha})^{\alpha/2} \|\sigma \nabla_x v(\sigma \cdot, s)\|_{L^\infty} \\ &= \sup_{s>0} s^{\alpha/2} \sigma^{-1} \sigma \|\nabla_x v(\sigma \cdot, s)\|_{L^\infty} \\ &= \sup_{s>0} s^{\alpha/2} \|\nabla_x v(\sigma \cdot, s)\|_{L^\infty} \\ &= \sup_{s>0} s^{\alpha/2} \|\nabla_x v(\cdot, s)\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

e com isto, concluímos a demonstração do Lema 3.2.2. \square

3.3 PRINCÍPIO DE DUHAMEL

Nesta seção, construiremos as soluções brandas do modelo de Keller-Segel fracionário de ordem $\alpha \in (0, 1)$ através do princípio de Duhamel. Este conceito é baseado em uma construção formal. Suponha por um momento, que o par $[u, v]$ satisfaça

(1.0.7). Aplicando J_t^α , da Definição 3.1.7, em ambos os lados da primeira equação diferencial de (1.0.7), e usando a Proposição 3.1.4, item (v), obtemos

$$\begin{aligned} J_t^\alpha \left({}^c D_t^\alpha u(t) \right) &= J_t^\alpha \left(\Delta u - \nabla(u \nabla v) \right)(t) \\ J_t^\alpha D_t^\alpha (u(t) - u(0)) &= J_t^\alpha \left(\Delta u - \nabla(u \nabla v) \right)(t) \\ u(t) &= u_0 + \Delta J_t^\alpha u(t) - J_t^\alpha \nabla(u \nabla v)(t) \\ u(t) &= u_0 + \Delta(g_\alpha * u(t)) - g_\alpha * \nabla(u \nabla v)(t). \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Assumindo agora que o par $[u, v]$ é de tipo exponencial e localmente integrável, aplicamos a transformada de Laplace a ambos os lados de (3.3.1), e ficamos com

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} u_0 + \Delta \mathcal{L}\{(g_\alpha * u)(t)\}(\lambda) - \mathcal{L}\{g_\alpha * \nabla(u \nabla v)(t)\}(\lambda) \\ &= \lambda^{-1} u_0 + \lambda^{-\alpha} \Delta \widehat{u}(\lambda) - \lambda^{-\alpha} \widehat{\nabla(u \nabla v)}(\lambda), \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

onde em (3.3.2), usamos o Exemplo 3.1.2. Segue então desta última igualdade que,

$$(I - \lambda^{-\alpha} \Delta) \widehat{u}(\lambda) = \lambda^{-1} u_0 - \lambda^{-\alpha} \widehat{\nabla(u \nabla v)}(\lambda).$$

Tomando $\lambda^\alpha \in \rho(\Delta)$ encontramos

$$\widehat{u}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - \Delta)^{-1} u_0 - (\lambda^\alpha - \Delta)^{-1} \widehat{\nabla(u \nabla v)}(\lambda). \quad (3.3.3)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, em (3.3.3), temos

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - \Delta)^{-1} u_0 \right\}(t) - \mathcal{L}^{-1} \left\{ (\lambda^\alpha - \Delta)^{-1} \widehat{\nabla(u \nabla v)} \right\}(t) \\ &= E_\alpha(t^\alpha \Delta) u_0 - \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left\{ \nabla (\lambda^\alpha - \Delta)^{-1} \right\}(t-s) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \widehat{\nabla(u \nabla v)} \right\}(s) ds \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

$$= E_\alpha(t^\alpha \Delta) u_0 - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta) (u \nabla v)(s) ds, \quad (3.3.5)$$

onde (3.3.4), segue de (3.1.10), e da Observação 3.1.1. Note que (3.3.5) vem de (3.1.11).

Procedendo agora para a segunda equação de (1.0.7) de forma analoga à primeira, aplicamos o operador J_t^α e obtemos

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + J_t^\alpha (\Delta - \gamma)v(t) + J_t^\alpha u(t) \\ &= v_0 + (\Delta - \gamma)J_t^\alpha v(t) + J_t^\alpha u(t) \\ &= v_0 + (\Delta - \gamma)(g_\alpha * v)(t) + g_\alpha * u(t). \end{aligned}$$

Tomando a transformada de Laplace de $v(t)$, passamos a ter

$$\hat{v}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}v_0 + (\Delta - \gamma)\lambda^{-\alpha}\hat{v}(\lambda) + \lambda^{-\alpha}\hat{u}(\lambda). \quad (3.3.6)$$

Multiplicando ambos os lados de (3.3.6) por λ^α , obtemos

$$\lambda^\alpha\hat{v}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}v_0 + (\Delta - \gamma)\hat{v}(\lambda) + \hat{u}(\lambda),$$

e segue daí, para $\lambda^\alpha \in \rho(\Delta - \gamma)$, que

$$\hat{v}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - (\Delta - \gamma))^{-1}v_0 + (\lambda^\alpha - (\Delta - \gamma))^{-1}\hat{u}(\lambda).$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na igualdade acima temos

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - (\Delta - \gamma))^{-1}v_0\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\{(\lambda^\alpha - (\Delta - \gamma))^{-1}\hat{u}(\lambda)\}(t) \\ &= E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0 + \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{(\lambda^\alpha - (\Delta - \gamma))^{-1}\}(t-s)\mathcal{L}^{-1}\{\hat{u}(\lambda)\}(s) ds \quad (3.3.7) \end{aligned}$$

$$= E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))u(s) ds. \quad (3.3.8)$$

A igualdade (3.3.7) vem da Observação 3.1.1 e de (3.1.10). Para (3.3.8) basta usar (3.1.11). As expressões obtidas em (3.3.5) e (3.3.8) nos dão uma formulação integral para modelo de Keller-Segel fracionário (1.0.7). Com base nisso, adotamos o seguinte conceito para solução do problema (1.0.7).

Definição 3.3.1. *Um par $[u, v]$ satisfazendo*

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha\Delta)u_0 - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha\Delta)(u\nabla v)(s) ds \quad (3.3.9)$$

$$v(t) = E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))u(s) ds, \quad (3.3.10)$$

é chamado *solução branda do problema de valor inicial* (1.0.7), onde $E_\alpha(t^\alpha\Delta)$, $E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha\Delta)$, $E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))$, $E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))$ são os operadores de Mittag-Leffler, associados aos operadores Δ e $\Delta - \gamma$, respectivamente.

3.4 ESTIMATIVAS ESTRUTURAIS PARA OS OPERADORES DE MITTAG-LEFFLER

Sejam X um espaço de Banach e $(-A) := \Delta : \mathcal{D}(-\Delta) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal do semigrupo analítico do calor $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ (ver (LORENZI et al., 2005)). Segue do Teorema 2.4.1, que

$$E_\alpha(t^\alpha\Delta) = \int_0^{+\infty} M_\alpha(s)G(st^\alpha) ds, \quad (3.4.1)$$

e

$$E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta) = \int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) G(st^\alpha) ds, \quad (3.4.2)$$

onde $M_\alpha(s)$ é a função de Mainardi. A seguir estimamos os Operadores de Mittag-Leffler, fazendo uso desta escrita.

Lema 3.4.1. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $n \geq 2$, $0 \leq \lambda \leq n - 2$, $\frac{n-\lambda}{2} < r < n - \lambda < q < \infty$, $b = 2 - \frac{n-\lambda}{r}$ e $a = 2 - \frac{n-\lambda}{q}$. Então existe uma constante positiva C , para cada desigualdade abaixo, tal que,*

$$\|\nabla_x E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta) f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \leq Ct^{-\alpha/2} \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \quad (3.4.3)$$

$$\|\nabla_x E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta) f\|_{r,\lambda} \leq Ct^{-\alpha/2} \|f\|_{r,\lambda}, \quad (3.4.4)$$

$$\|\nabla_x E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta) f\|_{q,\lambda} \leq Ct^{-\alpha/2} \|f\|_{q,\lambda}, \quad (3.4.5)$$

$$\|\nabla_x E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta) f\|_{q,\lambda} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{r,\lambda}, \quad (3.4.6)$$

$$\|E_\alpha(t^\alpha \Delta) f\|_{q,\lambda} \leq Ct^{-\frac{\alpha a}{2}} \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \quad (3.4.7)$$

$$\|E_\alpha(t^\alpha \Delta) f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \leq C \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \quad (3.4.8)$$

$$\|E_\alpha(t^\alpha \Delta) f\|_{r,\lambda} \leq Ct^{-\frac{\alpha b}{2}} \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \quad (3.4.9)$$

$$\|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma)) f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}, \quad (3.4.10)$$

$$\|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma)) f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda}, \quad (3.4.11)$$

$$\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma)) f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r})} \|f\|_{r,\lambda}, \quad (3.4.12)$$

$$\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma)) f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda}, \quad (3.4.13)$$

$$\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma)) f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}, \quad (3.4.14)$$

para todo $f \in \mathcal{S}'$.

Demonstração. Para demonstrar (3.4.3) notamos que

$$\begin{aligned} \|\nabla_x E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta) f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} &\leq \int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) \|\nabla G(st^\alpha)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} ds \\ &\leq \int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) C(st^\alpha)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} ds \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

$$\leq Ct^{-\alpha/2} \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(s) s^{1/2} ds \right) \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \quad (3.4.16)$$

$$\leq Ct^{-\alpha/2} \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \quad (3.4.17)$$

onde em (3.4.15), usamos a desigualdade (2.2.30) e em (3.4.16) o fato de termos

$\int_0^{+\infty} M_\alpha(s) s^{1/2} ds < \infty$, pela Propriedade 2.3.2, item (ii), e o resultado segue.

Para demonstrar (3.4.4) usamos um raciocínio análogo ao anterior.

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)f\|_{r,\lambda} &\leq \int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) \|\nabla G(st^\alpha)\|_{r,\lambda} ds \\
&\leq Ct^{-\alpha/2} \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(s) s^{1/2} ds \right) \|f\|_{r,\lambda} \\
&\leq Ct^{-\alpha/2} \|f\|_{r,\lambda},
\end{aligned} \tag{3.4.18}$$

note que em (3.4.18) usamos a desigualdade (2.2.25). A prova da estimativa (3.4.5) é análoga a anterior, trocando r por q .

Para obter (3.4.6) notamos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)f\|_{q,\lambda} &\leq \int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) \|\nabla G(st^\alpha)\|_{q,\lambda} ds \\
&\leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(s) s^{\frac{1}{2}(1-(\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q}))} ds \right) \|f\|_{r,\lambda},
\end{aligned}$$

uma vez que $\frac{1}{2}(1 - (\frac{n-\lambda}{r} - \frac{n-\lambda}{q})) > -1$, segue da Proposição 2.3.2, item (ii), que

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)f\|_{q,\lambda} &\leq C \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{r} - \frac{n-\lambda}{q}))}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}(1 - (\frac{n-\lambda}{r} - \frac{n-\lambda}{q})))} t^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{r,\lambda} \\
&\leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{r,\lambda}.
\end{aligned}$$

Como desejavamos.

Levando em consideração a inclusão $\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b} \subset \mathcal{N}_{q,\lambda,\infty}^{-a}$, do Lema 2.2.2, obtemos

$$\begin{aligned}
t^{\frac{\alpha a}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)f\|_{q,\lambda} &\leq t^{\frac{\alpha a}{2}} \int_0^{+\infty} M_\alpha(s) \|G(st^\alpha)\|_{q,\lambda} ds \\
&\leq C \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(s) s^{-\frac{\alpha}{2}} ds \right) \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-a}} \\
&\leq C \frac{\Gamma(-\frac{\alpha}{2} + 1)}{\Gamma(-\frac{\alpha^2}{2} + 1)} \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \\
&\leq C \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}},
\end{aligned}$$

e com isso, mostramos a desigualdade (3.4.7).

Utilizando (2.2.26) mostraremos a seguir que (3.4.8) é verdadeira.

$$\begin{aligned}
\|E_\alpha(t^\alpha \Delta)f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} &\leq \int_0^{+\infty} M_\alpha(s) \|G(st^\alpha)f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} ds \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(s) ds \right) C \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \\
&\leq C \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}.
\end{aligned}$$

Expandindo os termos de $t^{\frac{\alpha b}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta) f\|_{r,\lambda}$ e $\|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma)) f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}$ encontramos

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta) f\|_{r,\lambda} &\leq t^{\frac{\alpha b}{2}} \int_0^{+\infty} M_\alpha(s) \|G(st^\alpha) f\|_{r,\lambda} ds \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(s) s^{-\frac{b}{2}} ds \right) C \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \\ &\leq \frac{\Gamma(1 - \frac{b}{2})}{\Gamma(1 - \frac{\alpha b}{2})} C \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \\ &\leq C \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma)) f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} &\leq \int_0^{+\infty} M_\alpha(s) e^{st^\alpha \gamma} \|G(st^\alpha) f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} ds \\ &\leq C \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}, \end{aligned}$$

provando assim as estimativas (3.4.9) e (3.4.10).

A estimativa abaixo

$$\begin{aligned} \|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma)) f\|_{L^\infty} &\leq \int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) e^{-st^\alpha \gamma} \|G(st^\alpha) f\|_{L^\infty} ds \\ &\leq C t^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{q})} \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(s) s^{1-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{q})} ds \right) \|f\|_{q,\lambda} \\ &\leq C \frac{\Gamma(2 - \frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{q}))}{\Gamma(1 + \alpha - \frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{q}))} t^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda} \\ &\leq C t^{\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda}, \end{aligned}$$

mostra que (3.4.11) é válida. Já para demonstrar (3.4.12) notamos inicialmente que

$$\begin{aligned} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma)) f\|_{L^\infty} &\leq \int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) \|G(st^\alpha) f\|_{L^\infty} ds \\ &\leq C t^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{r})} \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(s) s^{\frac{1}{2}(1-\frac{n-\lambda}{r})} ds \right) \|f\|_{r,\lambda} \end{aligned}$$

Sendo $r > \frac{n-\lambda}{2}$, temos $b = 2 - \frac{n-\lambda}{q} > 0$, $\frac{1}{2}(1 - \frac{n-\lambda}{r}) + 1 = \frac{1}{2}(b+1) > 0$ e $1 + \frac{\alpha}{2}(b-1) > 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma)) f\|_{L^\infty} &\leq C \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(b+1))}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}(b-1))} t^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r})} \|f\|_{r,\lambda} \\ &\leq C t^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r})} \|f\|_{r,\lambda}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo procedemos com o termo $\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma)) f\|_{L^\infty}$ onde obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma)) f\|_{L^\infty} &\leq \int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) \|G(st^\alpha) f\|_{L^\infty} ds \\ &\leq C t^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{q})} \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(s) s^{\frac{1}{2}(1-\frac{n-\lambda}{q})} ds \right) \|f\|_{q,\lambda}, \quad (3.4.19) \end{aligned}$$

como $a = 2 - \frac{n-\lambda}{q} > 1$, segue da Proposição 2.3.2., item (ii) que

$$\begin{aligned} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))f\|_{L^\infty} &\leq C \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(a+1))}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}(a-1))} t^{-\frac{\alpha}{2}(1 + \frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda} \\ &\leq C t^{-\frac{\alpha}{2}(1 + \frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda}, \end{aligned}$$

e provamos (3.4.13).

Finalizando nossa demonstração, usando (2.2.35) temos

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))f\|_{L^\infty} &\leq t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{+\infty} M_\alpha(s) \|\nabla G(st^\alpha)f\|_{L^\infty} ds \\ &\leq t^{\frac{\alpha}{2}} \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(s) C(st^\alpha)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} ds \right) \\ &\leq C \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(s) s^{-\frac{1}{2}} ds \right) \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \\ &\leq C \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2})} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \\ &\leq C \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}, \end{aligned}$$

e fica demonstrado (3.4.14). Com isto encerramos a demonstração do Lema 3.4.1. \square

4 BOA COLOCAÇÃO DO MODELO DE KELLER-SEGEL EM ESPAÇOS DE BESOV-MORREY

Neste Capítulo estudamos a existência e unicidade de soluções globais (em tempo), pertencentes a classe de Fujita-Kato. Também analisamos o comportamento assintótico das soluções do problema de valor inicial (1.0.7), com dados iniciais pequenos, pertencente ao espaço de Besov-Morrey $\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b} \times \dot{B}_{\infty,\infty}^0$, com $n \geq 2$, $0 \leq \lambda < n$ e $b = 2 - \frac{n-\lambda}{r}$.

4.1 SOLUÇÃO GLOBAL DO MODELO DE KELLER-SEGEL

Apresentamos a seguir o teorema que garante a existência e unicidade das soluções globais $[u, v] \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, no sentido de Hadamard, pertencentes a classe de Fujita-Kato do problema (1.0.7). Soluções estas construídas pelo princípio de Duhamel, na Seção 3.3.

Teorema 4.1.1. *Assuma que $n \geq 2$, $0 \leq \lambda \leq n-2$, $\frac{n-\lambda}{2} < r < n-\lambda < q < \infty$ e suponha que $u_0 \in \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}$ e $v_0 \in \dot{B}_{\infty,\infty}^0$. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem $\delta_1 = \delta_1(\epsilon)$ e $\delta_2 = \delta_2(\epsilon)$ tais que o problema (1.0.7) tem uma solução global branda $[u, v]$ pertencente a classe de Fujita-Kato $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, desde que $\|u_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \leq \delta_1$ e $\|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \leq \delta_2$. Além disso, a solução é única satisfazendo $\|u\|_{\mathcal{X}_1} \leq 2\epsilon$ e $\|v\|_{\mathcal{X}_2} \leq (1 + 2(T_4 + T_5))\epsilon$, onde T_4 e T_5 são dadas no Lema 4.3.1.*

A seguir, definiremos nas próximas seções os operadores \mathcal{B} e \mathcal{T} , e por fim, faremos a demonstração do Teorema 4.1.1, usando um argumento de ponto fixo.

4.2 ESTIMATIVAS PARA O OPERADOR BILINEAR \mathcal{B}

Nesta seção, definimos o operador bilinear \mathcal{B} como parte integrante da solução do problema (1.0.7), e demonstramos sua continuidade. Além disso apresentamos um lema, bastante útil à demonstração do resultado de existência de solução para o modelo fracionário de Keller-Segel.

Definição 4.2.1. Para $t \in (0, +\infty)$, definimos o operador bilinear \mathcal{B} como

$$\mathcal{B}(u, v)(t) = - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s) ds, \quad (4.2.1)$$

onde $E_{\alpha, \alpha}$ é o operador de Mittag-Leffler é dado pela Proposição 3.1.5.

Lema 4.2.1. Sob as hipóteses do Teorema 4.1.1 existem constantes T_1, T_2 e T_3 , tais que, para todo par $[u, v] \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$,

$$\sup_{t>0} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{-b}} \leq T_1 \sup_{t>0} \|u(t)\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{-b}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}, \quad (4.2.2)$$

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{r, \lambda} \leq T_2 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r, \lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}, \quad (4.2.3)$$

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{q, \lambda} &\leq T_3 \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r, \lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q, \lambda} \right) \\ &\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Demonstração. Utilizando a desigualdade (3.4.3) do Lema 3.4.1, segue

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{-b}} \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s)\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{-b}} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|(u \nabla v)(s)\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{-b}} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|u(s)\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{-b}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\leq C \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} ds \right) \sup_{t>0} \|u(t)\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{-b}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\leq C \left(\int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}} dz \right) \sup_{t>0} \|u(t)\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{-b}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &= CB(\alpha/2, 1 - \alpha/2) \sup_{t>0} \|u(t)\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{-b}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &= T_1 \sup_{t>0} \|u(t)\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{-b}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}, \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

onde em (4.2.5) usamos a inclusão contínua $L^\infty \hookrightarrow \mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{-b}$. Em (4.2.6) usamos a igualdade $\int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}} dz = B(\alpha/2, 1 - \alpha/2)$, e o fato dessa integral ser finita, nos dá a constante positiva T_4 e assim obtemos a estimativa (4.2.2).

Como $t^{\frac{\alpha b}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{r, \lambda} \leq t^{\frac{\alpha b}{2}} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s)\|_{r, \lambda} ds$, segue da desigualdade (3.4.4) que,

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{r, \lambda} &\leq Ct^{\frac{\alpha b}{2}} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (t-s)^{-\frac{\alpha}{2}} \|(u \nabla v)(s)\|_{r, \lambda} ds \\ &\leq Ct^{\frac{\alpha b}{2}} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|u(s)\|_{r, \lambda} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\leq Ct^{\frac{\alpha b}{2}} \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha b}{2}} ds \right) \\ &\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r, \lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Fazendo a mudança de variáveis $w = s/t$ em (4.2.7), obtemos

$$\begin{aligned} &t^{\frac{\alpha b}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{r, \lambda} \\ &\leq C \left(\int_0^1 (1-w)^{\frac{\alpha}{2}-1} w^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} dw \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r, \lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\leq C \left(\int_0^1 s^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r, \lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}, \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

em (4.2.8) $\int_0^1 s^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} ds < \infty$, e tem resultado positivo, pois $\frac{n-\lambda}{2} < r < n - \lambda$, implica em, $b = 2 - \frac{n-\lambda}{r} < 1$, portanto, $1 - \frac{\alpha}{2}(1+b) > 0$. Com isto concluímos que

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{r, \lambda} \leq T_2 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r, \lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty},$$

como desejavamos.

Por fim, faremos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} &t^{\frac{\alpha a}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{q, \lambda} \\ &\leq t^{\frac{\alpha a}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s)\|_{q, \lambda} ds \\ &\quad + t^{\frac{\alpha a}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s)\|_{q, \lambda} ds \\ &\leq Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} (t-s)^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \|u \nabla v(s)\|_{r, \lambda} ds \\ &\quad + Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} (t-s)^{-\frac{\alpha}{2}} \|u \nabla v(s)\|_{q, \lambda} ds \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} &\leq Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})-1} \|u(s)\|_{r, \lambda} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\quad + Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|u(s)\|_{q, \lambda} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

$$\begin{aligned} &\leq C \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(b-a+1)-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r, \lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\quad + C \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(1+a)} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q, \lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\leq C \left(\int_0^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r, \lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

$$\begin{aligned}
& +C\left(\int_0^{\frac{1}{2}} s^{\frac{\alpha}{2}-1} ds\right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha\alpha}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
& = T_3\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha\alpha}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda}\right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty},
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

em (4.2.9) usamos as desigualdades (3.4.5) e (3.4.6) do Lema 3.4.1. Para (4.2.10) segue de $L^\infty \hookrightarrow \mathcal{M}_{r,\lambda}$ e $L^\infty \hookrightarrow \mathcal{M}_{q,\lambda}$. Em (4.2.11) usamos um raciocínio análogo ao de (4.2.2) e finalizamos, observando que em (4.2.12) as integrais são finitas e positivas. Com isto encerramos a demonstração do Lema 4.2.1. \square

Observação 4.2.1. *Com as estimativas estabelecidas no Lema 4.2.1, vemos que para $[u, v] \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$,*

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}(u, v)\|_{\mathcal{X}_1} & = \sup_{t>0} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{r,\lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha\alpha}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{q,\lambda} \\
& \leq T_1 \sup_{t>0} \|u(t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
& \quad + T_2 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
& \quad + T_3 \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha\alpha}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda}\right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Usando então (3.2.12) e (3.2.13), obtemos as seguintes desigualdades

$$T_1 \sup_{t>0} \|u(t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leq T_1 \|u\|_{\mathcal{X}_1} \|v\|_{\mathcal{X}_2}, \tag{4.2.13}$$

$$T_2 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leq T_2 \|u\|_{\mathcal{X}_1} \|v\|_{\mathcal{X}_2}, \tag{4.2.14}$$

$$\begin{aligned}
T_3 \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha\alpha}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda}\right) \\
\times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leq T_3 \|u\|_{\mathcal{X}_1} \|v\|_{\mathcal{X}_2},
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

somando (4.2.13), (4.2.14) e (4.2.15) e observando que $T_i \leq (T_1 + T_2 + T_3)$, com $i \in \{1, 2, 3\}$, obtemos a continuidade do operador bilinear \mathcal{B} no espaço \mathcal{X}_1 .

$$\|\mathcal{B}(u, v)\|_{\mathcal{X}_1} \leq (T_1 + T_2 + T_3) \|u\|_{\mathcal{X}_1} \|v\|_{\mathcal{X}_2}. \tag{4.2.16}$$

4.3 ESTIMATIVAS PARA O OPERADOR LINEAR \mathcal{T}

De maneira análoga ao que foi feito com o operador \mathcal{B} , definimos aqui o operador linear \mathcal{T} como parte integrante da solução do problema (1.0.7) e demonstramos sua continuidade.

Definição 4.3.1. Definimos o operador linear \mathcal{T} como

$$\mathcal{T}(u)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))u(s) ds, \quad t \in (0, +\infty). \quad (4.3.1)$$

Lema 4.3.1. Sob as hipóteses do Teorema 4.1.1, existem constantes T_4 e T_5 tais que,

$$\sup_{t>0} \|\mathcal{T}(u)(t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \leq T_4 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda}, \quad (4.3.2)$$

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla \mathcal{T}(u)(t)\|_{L^\infty} \leq T_5 (\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda}), \quad (4.3.3)$$

para toda função $u \in \mathcal{X}_1$.

Demonstração. Para demonstrar (4.3.2), utilizamos a inclusão contínua $L^\infty \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,\infty}^0$ e a estimativa (3.4.11) do Lema 3.4.1, e teremos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(u)(t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} &\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))u(s)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))u(s)\|_{L^\infty} ds \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

$$\begin{aligned} &\leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (t-s)^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{q})} \|u(s)\|_{q,\lambda} ds \\ &\leq C \left(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{q})-1} s^{-\frac{\alpha a}{2}} ds \right) \sup_{t>0} t^{-\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda}, \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

uma vez que $1 - \frac{\alpha a}{2} > 0$ e $n - \lambda < q$, através de (4.3.5), segue que

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \|\mathcal{T}(u)(t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} &\leq C \left(\int_0^1 s^{-\frac{\alpha a}{2}} ds \right) \sup_{t>0} t^{-\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda} \\ &= T_4 \sup_{t>0} t^{-\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda}, \end{aligned}$$

levando em conta que $\int_0^1 s^{-\frac{\alpha a}{2}} ds < \infty$, obtemos a constante positiva T_4 . Por fim, das estimativas (3.4.12) e (3.4.13) segue-se

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla \mathcal{T}(u)(t)\|_{L^\infty} &\leq t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))u(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\quad + t^{\frac{\alpha}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))u(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\leq Ct^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(b-1)-1} \|u(s)\|_{r,\lambda} ds \\ &\quad + Ct^{\frac{\alpha}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(a-1)-1} \|u(s)\|_{q,\lambda} ds \\ &\leq Ct^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(b-1)-1} s^{-\frac{\alpha b}{2}} ds \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} \\ &\quad + Ct^{\frac{\alpha}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(a-1)-1} s^{-\frac{\alpha b}{2}} ds \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(b-1)-1} s^{-\frac{\alpha b}{2}} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} \\
&\quad + C \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(b-1)-1} s^{-\frac{\alpha a}{2}} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda} \\
&\leq T_5 \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda} \right),
\end{aligned}$$

e com isto completamos a demonstração do Lema 4.3.1. \square

Observação 4.3.1. Para $u \in \mathcal{X}_1$, segue então do Lema 4.3.1 que,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}(u)\|_{\mathcal{X}_2} &= \sup_{t>0} \|\mathcal{T}(u)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla \mathcal{T}(u)\|_{L^\infty} \\
&\leq T_4 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda} + T_5 \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda} \right) \\
&\leq T_4 \|u(t)\|_{\mathcal{X}_1} + T_5 \|u(t)\|_{\mathcal{X}_1} \tag{4.3.6} \\
&\leq (T_4 + T_5) \|u(t)\|_{\mathcal{X}_1}. \tag{4.3.7}
\end{aligned}$$

onde (4.3.6) segue de (3.2.12) e em (4.3.7) é válido, pois $T_i \leq (T_4 + T_5)$ onde $i \in \{4, 5\}$, e segue a continuidade do operador \mathcal{T} no espaço \mathcal{X}_2 .

4.4 DEMONSTRAÇÃO DA BOA COLOCAÇÃO DO MODELO DE KELLER-SEGEL FRA- CIONÁRIO

Faremos agora a demonstração do Teorema 4.1.1 utilizando a continuidade dos operadores \mathcal{B} e \mathcal{T} . Usaremos agora um argumento de ponto fixo, a saber, o Teorema 2.5.2.

Demonstração. Consideremos as funções \tilde{u} e \tilde{v} dadas pelas expressões

$$\tilde{u} = E_\alpha(t^\alpha \Delta) u_0 \quad \text{e} \quad \tilde{v} = E_\alpha(t^\alpha (\Delta - \gamma)) v_0, \quad t \in (0, +\infty),$$

e tomemos ϵ , tal que,

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2(T_1 + T_2 + T_3)(1 + 2(T_4 + T_5))}, \tag{4.4.1}$$

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_1} \leq 3C \|u_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}},$$

e das desigualdades (3.4.10) e (3.4.14), segue-se

$$\|\tilde{v}\|_{\mathcal{X}_2} \leq 2C \|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}.$$

Escolhendo então $\|u_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \leq \delta_1 = \frac{\epsilon}{3C}$ e $\|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \leq \delta_2 = \frac{\epsilon}{2C}$, teremos

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_1} \leq \epsilon \quad \text{e} \quad \|\tilde{v}\|_{\mathcal{X}_2} \leq \epsilon.$$

Aplicando o Teorema 2.5.2, concluímos que existe uma única solução $u \in \mathcal{X}_1$, com $\|u\|_{\mathcal{X}_1} \leq 2\epsilon$, para a equação

$$u(t) = \tilde{u} + \mathcal{B}(u, v)(t),$$

onde $v = \tilde{v} + \mathcal{T}(u) \in \mathcal{X}_2$, e $\mathcal{B}(u, v)$ e $\mathcal{T}(u)$ são dados pelas Definições 4.2.1 e 4.3.1, respectivamente. Além disso,

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathcal{X}_2} &\leq \|\tilde{v}\|_{\mathcal{X}_2} + \|\mathcal{T}(u)\|_{\mathcal{X}_2} \\ &\leq \epsilon + (T_4 + T_5)\|u\|_{\mathcal{X}_1} \\ &\leq (1 + 2(T_4 + T_5))\epsilon, \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

onde em (4.4.2), usamos a Observação 4.3.1 e por fim, pela escolha do ϵ temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{X}_1} &\leq \|\bar{u}\|_{\mathcal{X}_1} + \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{\mathcal{X}_1} \\ &\leq \epsilon + (T_1 + T_2 + T_3)\|u\|_{\mathcal{X}_1}\|v\|_{\mathcal{X}_2} \\ &\leq \epsilon + (T_1 + T_2 + T_3)(2\epsilon)(\|\tilde{v}\|_{\mathcal{X}_2} + \|\mathcal{T}(u)\|_{\mathcal{X}_2}) \\ &\leq \epsilon + (T_1 + T_2 + T_3)(2\epsilon)(\epsilon + (T_4 + T_5)\|u\|_{\mathcal{X}_1}) \\ &\leq \epsilon + (T_1 + T_2 + T_3)(2\epsilon)(\epsilon + (T_4 + T_5)(2\epsilon)) \\ &< 2\epsilon, \end{aligned}$$

isto implica que $(T_1 + T_2 + T_3)(2\epsilon)(\epsilon + (T_4 + T_5)(2\epsilon)) < \epsilon$, e portanto

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2(T_1 + T_2 + T_3)(1 + 2(T_4 + T_5))},$$

e completamos assim a demonstração do Teorema 4.1.1. \square

4.5 SOLUÇÕES AUTO-SIMILARES

Nesta seção, mostraremos que para o caso $\gamma = 0$, a existência de soluções auto-similares para o problema (1.0.7) segue do Teorema 4.1.1.

Corolário 4.5.1. *Considerando as hipóteses do Teorema 4.1.1, com $u_0 \in \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}$ e $v_0 \in \dot{B}_{\infty,\infty}^0$ funções homogêneas de grau -2 e 0 , respectivamente. Então a solução $[u, v]$, obtida no Teorema 4.1.1, é auto-similar, isto é, satisfaz (1.0.7).*

Demonstração. Tome u_0 e v_0 funções homogêneas de grau -2 e 0 , respectivamente. Segue de (FERREIRA; PRECIOSO, 2011), Observação 4.2, que a solução $[u, v]$, dada pelo Teorema 4.1.1, é o limite da seguinte sequência de Picard:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0, \\ u_{n+1}(t) &= E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0 - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u_n \nabla v_n)(s) ds, \\ v_n(t) &= E_\alpha(t^\alpha \Delta)v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)u_n(s) ds, \end{aligned}$$

com $n \in \mathbb{N}$. Além disso, as identidades

$$\sigma^2(G(\sigma^2 t)u_0)(\sigma x) = (G(t)u_0)(x) \quad (4.5.1)$$

e

$$(G(\sigma^2 t)v_0)(\sigma x) = (G(t)v_0)(x), \quad (4.5.2)$$

são verdadeiras. De fato, expandindo $\sigma^2(G(\sigma^2 t)u_0)(\sigma x)$ obtemos

$$\begin{aligned} \sigma^2(G(\sigma^2 t)u_0)(\sigma x) &= \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^n} g(y - \sigma x, \sigma^2 t)u_0(y) dy \\ &= \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi\sigma^2 t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y-\sigma x|^2}{4\sigma^2 t}} u_0(y) dy \\ &= \sigma^2(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\frac{y}{\sigma}-x|^2}{4t}} u_0(y) dy \\ &= \sigma^2 \sigma^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\frac{y}{\sigma}-x|^2}{4t}} u_0(y) dy. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = \sigma z \Rightarrow dy = \sigma^n dz$, temos

$$\begin{aligned} \sigma^2(G(\sigma^2 t)u_0)(\sigma x) &= \sigma^2 \sigma^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|z-x|^2}{4t}} u_0(\sigma z) \sigma^n dz \\ &= \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|z-x|^2}{4t}} \sigma^{-2} u_0(z) dz \\ &= (G(t)u_0)(x). \end{aligned}$$

Analisando agora o termo $(G(\sigma^2 t)v_0)(\sigma x)$ encontramos de maneira análoga

$$(G(\sigma^2 t)v_0)(\sigma x) = (G(t)v_0)(x). \quad (4.5.3)$$

Aplicando as igualdades (4.5.1) e (2.4.1) obtemos

$$\begin{aligned}\sigma^2 u_1(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) &= \sigma^2 \int_0^{+\infty} M_\alpha(s) (G(\sigma^2 s t^\alpha) u_0)(\sigma x) ds \\ &= \int_0^{+\infty} M_\alpha(s) (G(\sigma^2 t^\alpha) u_0)(x) ds \\ &= u_1(x, t),\end{aligned}$$

e daí concluimos que u_1 é auto-similar. Por outro lado, da igualdade (4.5.2) vemos que

$$\begin{aligned}(E_\alpha(\sigma^2 t^\alpha \Delta) v_0)(\sigma x) &= \int_0^{+\infty} M_\alpha(s) (G(\sigma^2 s t^\alpha) v_0)(\sigma x) ds \\ &= \int_0^{+\infty} M_\alpha(s) (G(s t^\alpha) v_0)(x) ds \\ &= (E_\alpha(t^\alpha \Delta) v_0)(x),\end{aligned}\tag{4.5.4}$$

e levando em conta que u_1 é auto-similar, segue a identidade

$$\begin{aligned}&\sigma^2 (E_{\alpha, \alpha}(\sigma^2 (t-s)^\alpha \Delta) u_1(\sigma^{\frac{2}{\alpha}} s))(\sigma x) \\ &= \sigma^2 \int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) (G(\sigma^2 s (t-s)^\alpha) u_1(\sigma^{\frac{2}{\alpha}} s))(\sigma x) ds \\ &= \sigma^2 \int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) \left(\int_{\mathbb{R}^n} (4\pi \sigma^2 s (t-s)^\alpha)^{-n/2} e^{-\frac{|y-\sigma x|^2}{4\sigma^2 s (t-s)^\alpha}} u_1(y, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s) dy \right) ds \\ &= \int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) \left(\int_{\mathbb{R}^n} (4\pi \sigma^2 s (t-s)^\alpha)^{-n/2} e^{-\frac{|z-x|^2}{4s(t-s)^\alpha}} \sigma^2 u_1(\sigma z, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s) dz \right) ds \\ &= \int_0^{+\infty} \alpha s M_\alpha(s) \left(\int_{\mathbb{R}^n} (4\pi \sigma^2 s (t-s)^\alpha)^{-n/2} e^{-\frac{|z-x|^2}{4s(t-s)^\alpha}} u_1(z, s) dz \right) ds \\ &= (E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha \Delta) u_1(s))(x).\end{aligned}\tag{4.5.5}$$

Das identidades (4.5.4), (4.5.5) podemos afirmar que v_1 também é auto-similar.

De fato,

$$\begin{aligned}v_1(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) &= (E_\alpha(\sigma^2 t^\alpha \Delta) v_0)(\sigma x) + \sigma^2 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (E_{\alpha, \alpha}(\sigma^2 (t-s)^\alpha \Delta) u_1(\sigma^{\frac{2}{\alpha}} s))(\sigma x) ds \\ &= (E_\alpha(t^\alpha \Delta) v_0)(x) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha \Delta) u_1(s))(x) ds \\ &= v_1(x, t),\end{aligned}$$

e com isto vemos que v_1 também é auto-similar.

Através de um processo indutivo podemos verificar que $[u_n, v_n]$ satisfaz a propriedade de escala

$$u_n(x, t) = \sigma^2 u_n(\sigma x, \sigma^{\frac{\alpha}{2}} t) \quad \text{e} \quad v_n(x, t) = v_n(\sigma x, \sigma^{\frac{\alpha}{2}} t),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como a solução $[u, v]$ é o limite da sequência $\{[u_n, v_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, e a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2}$ é invariante pela escala, segue-se que $[u, v]$ satisfaz (1.0.7), sendo portanto, uma solução auto-similar. \square

4.6 COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

Nesta seção apresentamos um resultado de estabilidade assintótica para a solução do problema (1.0.7) e mostramos que para o caso particular, $\gamma = 0$, cada solução auto-similar é um atrator para soluções perturbadas, com dados iniciais homogêneos de grau -2 e 0 , em espaços de Besov-Morrey.

Teorema 4.6.1. *Considerando as hipóteses do Teorema 4.1.1, com $[u, v]$ e $[\bar{u}, \bar{v}]$ duas soluções dadas pelo Teorema 4.1.1, e dados iniciais $[u_0, v_0], [\bar{u}_0, \bar{v}_0]$, respectivamente. Sejam $E_\alpha(t^\alpha \Delta)$ e $E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))$ os operadores de Mittag-Leffler associados aos operadores Δ e $\Delta - \gamma$, respectivamente. Então*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^{\frac{\alpha b}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{r,\lambda} + t^{\frac{\alpha a}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q,\lambda} + t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{L^\infty} \right) = 0, \quad (4.6.1)$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|(u - \bar{u})(\cdot, t)\|_{r,\lambda} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|(u - \bar{u})(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(\cdot, t)\|_{L^\infty} = 0. \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que a condição (4.6.1) se verifica. Sejam $[u, v]$ e $[\bar{u}, \bar{v}]$ duas soluções brandas dadas pelo Teorema 4.1.1. Então

$$t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{r,\lambda} \leq t^{\frac{\alpha b}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{r,\lambda} + U(t), \quad (4.6.3)$$

onde

$$U(t) = t^{\frac{\alpha b}{2}} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v - \bar{u} \nabla \bar{v})(s)\|_{r,\lambda} ds. \quad (4.6.4)$$

Inferimos a seguinte estimativa a priori para $U(t)$:

$$\begin{aligned}
U(t) &\leq Ct^{\frac{\alpha b}{2}} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|(u\nabla v - \bar{u}\nabla\bar{v})(s)\|_{r,\lambda} ds \\
&\leq Ct^{\frac{\alpha b}{2}} \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \left(\|(u-\bar{u})(s)\|_{r,\lambda} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} + \|\nabla(v-\bar{v})(s)\|_{L^\infty} \|\bar{u}\|_{r,\lambda} \right) ds \right) \\
&\leq Ct^{\frac{\alpha b}{2}} \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{\frac{\alpha}{2}(1+b)} s^{\frac{\alpha b}{2}} \|(u-\bar{u})(s)\|_{r,\lambda} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
&\quad + Ct^{\frac{\alpha b}{2}} \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{\frac{\alpha}{2}(1+b)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|(v-\bar{v})(s)\|_{L^\infty} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|\bar{u}(t)\|_{r,\lambda}. \quad (4.6.5)
\end{aligned}$$

Tomando $\sigma_1 = 1 + 2(T_4 + T_5)$, $\sigma_2 = T_1 + T_2 + T_3$ e $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 + 2T_5$ (notemos que $\bar{\sigma}_1 \leq 2\sigma_2$), podemos escolher $\epsilon > 0$ na demonstração do Teorema 4.1.1 de modo que $2\sigma_2\sigma_1\epsilon < \frac{1}{2}$. Como

$$\|u\|_{\mathcal{X}_1}, \|\bar{u}\|_{\mathcal{X}_1} \leq 2\epsilon \quad e \quad \|v\|_{\mathcal{X}_2}, \|\bar{v}\|_{\mathcal{X}_2} \leq \epsilon\sigma_1, \quad (4.6.6)$$

temos

$$\begin{aligned}
U(t) &\leq C\epsilon\sigma_1 \int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{\frac{\alpha}{2}(1+b)} (tz)^{\frac{\alpha b}{2}} \|(u-\bar{u})(tz)\|_{r,\lambda} dz \\
&\quad + 2C\epsilon \int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{\frac{\alpha}{2}(1+b)} (tz)^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v-\bar{v})(tz)\|_{L^\infty} dz. \quad (4.6.7)
\end{aligned}$$

Na sequência estimamos a norma do termo $\nabla(v-\bar{v})$ em L^∞ . Notando inicialmente que

$$t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v-\bar{v})(t)\|_{L^\infty} \leq t^{\frac{\alpha}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha(\Delta-\gamma))(v_0-\bar{v}_0)\|_{L^\infty} + V(t), \quad (4.6.8)$$

onde

$$V(t) = t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta-\gamma))(u(s)-\bar{u}(s))\|_{L^\infty} ds. \quad (4.6.9)$$

Obtemos a seguinte estimativa para $V(t)$,

$$\begin{aligned}
V(t) &= t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta-\gamma))(u(s)-\bar{u}(s))\|_{L^\infty} ds \\
&\quad + t^{\frac{\alpha}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta-\gamma))(u(s)-\bar{u}(s))\|_{L^\infty} ds \\
&\leq Ct^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{n-\lambda}{r})-1} \|(u(s)-\bar{u}(s))\|_{r,\lambda} ds \\
&\quad + Ct^{\frac{\alpha}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{n-\lambda}{q})-1} \|(u(s)-\bar{u}(s))\|_{q,\lambda} ds \\
&\leq C \int_0^{\frac{1}{2}} (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(b-1)-1} s^{-\frac{\alpha a}{2}} (ts)^{\frac{\alpha b}{2}} \|(u(ts)-\bar{u}(ts))\|_{r,\lambda} ds \\
&\quad + C \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(a-1)-1} s^{-\frac{\alpha a}{2}} (ts)^{\frac{\alpha a}{2}} \|(u(ts)-\bar{u}(ts))\|_{q,\lambda} ds. \quad (4.6.10)
\end{aligned}$$

Faremos agora a estimativa para $\|\cdot\|_{q,\lambda}$ de $t^{\alpha a/2}(u - \bar{u})$ usando as estimativas (3.4.5) e (3.4.6) temos

$$t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u - \bar{u}\|_{q,\lambda} \leq t^{\frac{\alpha a}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q,\lambda} + S_1(t) + S_2(t), \quad (4.6.11)$$

onde $S_1(t)$ e $S_2(t)$ são dados por

$$\begin{aligned} S_1(t) &= Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(b-a+1)-1} \|(u - \bar{u})(s)\|_{r,\lambda} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\quad + Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(b-a+1)-1} \|\nabla(v - \bar{v})(s)\|_{L^\infty} \|\bar{u}(s)\|_{r,\lambda} ds, \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

e

$$\begin{aligned} S_2(t) &= Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|(u - \bar{u})(s)\|_{q,\lambda} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\quad + Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|\nabla(v - \bar{v})(s)\|_{L^\infty} \|\bar{u}(s)\|_{q,\lambda} ds. \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

Temos as seguintes estimativas a priori para os termos $S_1(t)$ e $S_2(t)$:

$$\begin{aligned} S_1(t) &\leq \left(C \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(b-a+1)-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} (tz)^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(tz) - \bar{u}(tz)\|_{r,\lambda} dz \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} \\ &\quad + \left(C \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(b-a+1)-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} (tz)^{\frac{\alpha b}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(tz)\|_{L^\infty} dz \right) \\ &\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|\bar{u}(t)\|_{r,\lambda} \end{aligned} \quad (4.6.14)$$

e

$$\begin{aligned} S_2(t) &\leq \left(C \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+a)} (tz)^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(tz) - \bar{u}(tz)\|_{q,\lambda} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} \\ &\quad + \left(C \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+a)} (tz)^{\frac{\alpha a}{2}} \|\bar{u}(tz)\|_{q,\lambda} ds \right) \\ &\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(t)\|_{L^\infty}. \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

Consideremos agora a seguinte notação:

$$\begin{aligned} B_1 &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{r,\lambda}, \\ B_2 &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(t)\|_{L^\infty}, \\ B_3 &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{q,\lambda}. \end{aligned}$$

Notemos que (4.6.6) implica em $B_1, B_2, B_3 < \infty$. Em seguida, calculamos o limite superior em (4.6.3), (4.6.8) e (4.6.11), e então usar (4.6.7), (4.6.10) e (4.6.14), (4.6.15), respectivamente, com o propósito de obter

$$\begin{aligned} B_1 &\leq (\epsilon \sigma_1 B_1 + 2\epsilon B_2) C \int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} dz \\ &\leq (\epsilon \sigma_1 B_1 + 2\epsilon B_2) T_2, \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

$$\begin{aligned}
B_2 &\leq C \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(b-1)-1} z^{-\frac{\alpha b}{2}} dz + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(a-1)-1} z^{-\frac{\alpha a}{2}} dz \right) (B_1 + B_3) \\
&\leq T_5(B_1 + B_3),
\end{aligned} \tag{4.6.17}$$

e

$$\begin{aligned}
B_3 &\leq (\epsilon\sigma_1 B_1 + 2\epsilon B_2) C \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(b-a+1)-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} dz \\
&\quad + (\epsilon\sigma_1 B_1 + 2\epsilon B_2) C \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+a)} dz \\
&\leq (\epsilon\sigma_1(B_1 + B_3) + 4\epsilon B_2) T_3.
\end{aligned} \tag{4.6.18}$$

Somando as desigualdades (4.6.16) e (4.6.18) e levando em conta a estimativa (4.6.17) vemos que

$$\begin{aligned}
B_1 + B_3 &\leq (\epsilon\sigma_1 B_1 + 2\epsilon B_2) T_2 + (\epsilon\sigma_1(B_1 + B_3) + 4\epsilon B_2) T_3 \\
&\leq (T_2 + T_3) \sigma_1 \epsilon (B_1 + B_3) + 2\epsilon (T_2 + 2T_3) B_2 \\
&\leq 2(T_2 + T_3) \sigma_1 \epsilon (B_1 + B_3) + 4(T_2 + T_3) \epsilon T_5 (B_1 + B_3) \\
&\leq 2(T_2 + T_3) \epsilon \bar{\sigma}_1 (B_1 + B_3) \\
&\leq 4\sigma_2 \sigma_1 \epsilon (B_1 + B_3).
\end{aligned} \tag{4.6.19}$$

Como $4\sigma_2 \sigma_1 < 1$, temos $B_1 = B_3 = 0$ e ainda $0 \leq B_2 \leq T_5(B_1 + B_3) = 0$. Com isto provamos os limites em (4.6.2).

Mostraremos agora, que os limites em (4.6.2) implicam em (4.6.1). Assumindo que $B_1 = B_2 = B_3 = 0$ e procedemos de modo análogo à demonstração das desigualdades (4.6.3), (4.6.8) e (4.6.11), obtemos

$$t^{\frac{\alpha b}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{r,\lambda} \leq t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{r,\lambda} + U(t), \tag{4.6.20}$$

$$\begin{aligned}
&t^{\frac{\alpha a}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q,\lambda} \\
&\leq t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{q,\lambda} \\
&\quad + t^{\frac{\alpha a}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)((u\nabla v)(s) - \bar{u}\nabla\bar{v}(s))\|_{q,\lambda} ds \\
&\quad + t^{\frac{\alpha a}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)((u\nabla v)(s) - \bar{u}\nabla\bar{v}(s))\|_{q,\lambda} ds \\
&\leq t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u - \bar{u}\|_{q,\lambda} + S_1(t) + S_2(t)
\end{aligned} \tag{4.6.21}$$

e

$$t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{L^\infty} \leq t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v_0 - \bar{v}_0)(t)\|_{L^\infty} + V(t), \tag{4.6.22}$$

com $U(t)$, $V(t)$, $S_1(t)$ e $S_2(t)$ dados em (4.6.7), (4.6.9), (4.6.12) e (4.6.13), respectivamente. Tomando o limite superior nas estimativas anteriores temos que

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{r,\lambda} &\leq B_1 + (\epsilon \sigma_1 B_1 + 2\epsilon B_2) T_2 = 0, \\ \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q,\lambda} &\leq B_3 + (\epsilon \sigma_1 (B_1 + B_3) + 4\epsilon B_2) T_3 = 0, \end{aligned}$$

e finalmente,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha (\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{L^\infty} \leq B_2 + T_5(B_1 + B_3) = 0.$$

Com isto encerramos a demonstração do Teorema 4.6.1. \square

Como uma consequência do caso $\gamma = 0$, o Teorema 4.6.1 fornece um atrator em torno de cada solução auto-similar.

Corolário 4.6.1. *Sob as hipóteses do Teorema 4.1.1 assuma que $u_0 \in \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}$ e $v \in \dot{B}_{\infty,\infty}^0$ são funções homogêneas de grau -2 e 0 , respectivamente. Seja $[\phi, \psi] \in \mathcal{C}_0^\infty \times \mathcal{C}_0^\infty$ e sejam $[u, v]$ e $[\theta, \varphi]$ soluções brandas, dadas pelo Teorema 4.1.1, com dados iniciais $[u_0, v_0]$ e $[u_0 + \phi, v_0 + \psi]$, respectivamente. Então, para o caso $\gamma = 0$, a solução perturbada $[\theta, \varphi]$ é atraída pela solução auto-similar $[u, v]$, no sentido de (4.6.2).*

Demonstração. A demonstração do Corolário 4.6.1 consiste em mostrarmos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)\phi\|_{r,\lambda} = 0, \quad (4.6.23)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)\phi\|_{q,\lambda} = 0, \quad (4.6.24)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha \Delta)\psi\|_{L^\infty} = 0. \quad (4.6.25)$$

Lembremos que por hipótese $n \geq 2$, $0 \leq \lambda \leq n - 2$ e $\frac{n-\lambda}{2} < r < n - \lambda < q < \infty$. Tomamos inicialmente $\frac{n-\lambda}{4-b} < p_1 < \frac{n-\lambda}{2}$, e isto implica em $p_1 < r$, logo pelo Lema 2.2.3 temos que

$$\|G(t)\phi\|_{r,\lambda} \leq Ct^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p_1}-2+b\right)} \|\phi\|_{p_1,\lambda}. \quad (4.6.26)$$

Observe que aplicando ϕ em (3.4.1) passando a norma $\|\cdot\|_{r,\lambda}$ e após isto, multiplicar ambos os lados por $t^{\frac{\alpha b}{2}}$, obtemos

$$t^{\frac{\alpha b}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)\phi\|_{r,\lambda} \leq t^{\frac{\alpha b}{2}} \int_0^{+\infty} M_\alpha(s) \|G(st^\alpha)\phi\|_{r,\lambda} ds$$

Desta última desigualdade usando (4.6.26) inferimos que

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)\phi\|_{r,\lambda} &\leq Ct^{-\alpha\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p_1}\right)-1\right)} \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(s) s^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p_1}-2+b\right)} ds\right) \|\phi\|_{p_1,\lambda} \\ &\leq Ct^{-\alpha\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p_1}\right)-1\right)} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p_1} - 2 + b\right)\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p_1} - 2 + b\right)\right)} \|\phi\|_{p_1,\lambda}, \end{aligned} \quad (4.6.27)$$

onde em (4.6.27) usamos o fato de que inicialmente como $\frac{n-\lambda}{4-b} < p_1$, então $\frac{n-\lambda}{p_1} < 4-b \Rightarrow \frac{n-\lambda}{p_1} - 2 + b < 2$, portanto, $-\frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p_1} - 2 + b\right) > -1$, e então podemos usar a Proposição 2.3.2, item (ii) logo a propriedade (4.6.23) é verdadeira.

Para provar a propriedade (4.6.24) tome $\frac{n-\lambda}{4-a} < p < \frac{n-\lambda}{2}$ e utilizando novamente o Lema 2.2.3, temos a estimativa

$$\|G(t)\phi\|_{q,\lambda} \leq Ct^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p}-2+a\right)} \|\phi\|_{p,\lambda}. \quad (4.6.28)$$

De maneira análoga ao obtido da propriedade (4.6.23), teremos

$$t^{\frac{\alpha a}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)\phi\|_{q,\lambda} \leq t^{\frac{\alpha a}{2}} \int_0^{+\infty} M_\alpha(s) \|G(st^\alpha)\phi\|_{q,\lambda} ds,$$

a qual, por (4.6.28), implica em

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)\phi\|_{q,\lambda} &\leq Ct^{\frac{\alpha a}{2}} t^{-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p}-2+a\right)} \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(s) s^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p}-2+a\right)} ds\right) \|\phi\|_{p,\lambda} \\ &\leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p}-2\right)} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p} - 2 + a\right)\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p} - 2 + a\right)\right)} \|\phi\|_{p,\lambda}, \end{aligned}$$

com $-\frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p} - 2 + a\right) > -1$ e, $1 - \frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p} - 2 + a\right) > 0$, isto concluí o limite em (4.6.24). Por fim, para provarmos a propriedade (4.6.25) tomamos $p' > n - \lambda$, e usando (2.2.36), aplicando o Lema 2.2.3, ficamos com

$$\|\nabla_x G(t)\phi\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{n-\lambda}{p'}\right)} \|\phi\|_{p',\lambda}. \quad (4.6.29)$$

Utilizando então a estimativa (4.6.29) segue-se

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha \Delta)\phi\|_{L^\infty} &\leq Ct^{-\frac{n-\lambda}{p'}} \left(\int_0^{+\infty} M_\alpha(s) s^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{n-\lambda}{p'}\right)} ds\right) \|\phi\|_{p',\lambda} \\ &\leq Ct^{-\frac{n-\lambda}{p'}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n-\lambda}{p'}\right)\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{n-\lambda}{p'}\right)\right)} \|\phi\|_{p',\lambda}, \end{aligned}$$

como $p' > n - \lambda$, então $\frac{n-\lambda}{p'} < 1 \Rightarrow 1 + \frac{n-\lambda}{p'} < 2$, e portanto, $-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{n-\lambda}{p'}\right) > -1$, segue-se que $1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n-\lambda}{p'}\right) > 0$, dessa forma encerramos a demonstração do Corolário 4.6.1. \square

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscou-se por meio de ferramentas da Análise Funcional e do Cálculo fracionário, o estudo do sistema acoplado de equações do Modelo de Keller-Segel fracionário no tempo para a quimiotaxia, de ordem $\alpha \in (0, 1)$, em \mathbb{R}^n , com $n \geq 2$, dado em (1.0.7). Disso, concluímos a existência de solução global branda para o sistema (1.0.7), assim como a existência de soluções auto-similares quando $\gamma = 0$. Analisamos também o comportamento assintótico das soluções e obtivemos resultado de estabilidade no tempo para estas soluções.

No entanto, se pensarmos em outras investigações para o sistema (1.0.7) alguns problemas em aberto podem ser considerados. São eles:

- (a) É possível encontrarmos soluções para o sistema acoplado de equações diferenciais parciais em \mathbb{R}^n , $n \geq 2$,

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ {}^c D_t^\beta v = \Delta v - \gamma v + u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0, \quad v(x, 0) = v_0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (5.0.1)$$

onde, ${}^c D_t^\alpha$ e ${}^c D_t^\beta$ são derivadas fracionárias de Caputo de ordem $\alpha, \beta \in (0, 1)$, respectivamente, com $\alpha \neq \beta$? Se sim, também conseguimos concluir resultados semelhantes aos vistos nesta dissertação? Ressaltamos que γ , $u(x, t)$ e $v(x, t)$ em (5.0.1) possuem as mesmas representações como no problema (1.0.7).

- (b) Consideremos o problema (1.0.7). Assuma que $q > n > r > \frac{n}{2}$, $u_0 \in \mathcal{X}_1$ e $v_0 \in \mathcal{X}_2$, onde

$$\mathcal{X}_1 = \left\{ u \in BC((0, +\infty); L^{(\frac{n}{2}, \infty)}); \quad t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{n}{q})} u \in BC((0, +\infty), L^{(q, \infty)}) \right. \\ \left. e \quad t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{n}{r})} u \in BC((0, +\infty); L^{(r, \infty)}) \right\}$$

e

$$\mathcal{X}_2 = \left\{ v \in BC((0, +\infty), \dot{B}_{\infty, \infty}^0); \quad t^{\alpha/2} \nabla_x v \in BC((0, +\infty), L^\infty) \right\},$$

com $L^{(p, \infty)}$ sendo o espaço de Marcinkiewicz (denominado L^p -fraco). Definindo as normas dos espaços \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 , por

$$\|u\|_{\mathcal{X}_1} = \sup_{0 < t} \|u(t)\|_{(\frac{n}{2}, \infty)} + \sup_{0 < t} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{n}{q})} \|u(t)\|_{(q, \infty)} + \sup_{0 < t} t^{\frac{\alpha}{2}(2-\frac{n}{r})} \|u(t)\|_{(r, \infty)} \quad (5.0.2)$$

e

$$\|v\|_{\mathcal{X}_2} = \sup_{0 < t} \|v(t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^0} + \sup_{0 < t} t^{\alpha/2} \|\nabla v(t)\|_{\infty}, \quad (5.0.3)$$

é possível obter soluções brandas globais em tempo $[u, v]$ de (1.0.7) pertencentes a classe $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$? E o que dizer do comportamento assintótico das soluções, caso estas existam?

REFERÊNCIAS

- ATANGANA, A.; ALKAHTANI, B. S. T. Analysis of the keller–segel model with a fractional derivative without singular kernel. Entropy, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 17, n. 6, p. 4439–4453, 2015.
- AZEVEDO, J.; CUEVAS, C.; HENRIQUEZ, E. Existence and asymptotic behaviour for the time-fractional keller–segel model for chemotaxis. Mathematische Nachrichten, Wiley Online Library, v. 292, n. 3, p. 462–480, 2019.
- BILER, P. Local and global solvability of some parabolic systems modelling chemotaxis. Advances in Mathematical Sciences and Applications, Gakkotosho., LTD., v. 8, p. 715–743, 1998.
- BILER, P.; CORRIAS, L.; DOLBEAULT, J. Large mass self-similar solutions of the parabolic–parabolic keller–segel model of chemotaxis. Journal of mathematical biology, Springer, v. 63, n. 1, p. 1–32, 2011.
- BILER, P.; KARCH, G.; LAURENÇOT, P.; NADZIEJA, T. The 8π -problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in the plane. Mathematical methods in the applied sciences, Wiley Online Library, v. 29, n. 13, p. 1563–1583, 2006.
- BLANCHET, A.; CARRILLO, J. A.; LAURENÇOT, P. Critical mass for a patlak–keller–segel model with degenerate diffusion in higher dimensions. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, Springer, v. 35, n. 2, p. 133–168, 2009.
- BLANCHET, A.; CARRILLO, N. Infinite time aggregation for the critical patlak-keller-segel model in \mathbb{R}^2 . Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences, Wiley Online Library, v. 61, n. 10, p. 1449–1481, 2008.
- BLANCHET, A.; DOLBEAULT, J.; PERTHAME, B. Two-dimensional keller-segel model: Optimal critical mass and qualitative properties of the solutions. Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only], Southwest Texas State University, Department of Mathematics, San Marcos, TX . . . , v. 2006, p. Paper–No, 2006.
- BOURNAVEAS, N.; CALVEZ, V. The one-dimensional keller–segel model with fractional diffusion of cells. Nonlinearity, IOP Publishing, v. 23, n. 4, p. 923, 2010.
- BURCZAK, J.; CIEŚLAK, T.; MORALES-RODRIGO, C. Does the fully parabolic quasilinear 1d keller-segel system enjoy long-time asymptotics analogous to its parabolic-elliptic simplification? arXiv preprint arXiv:1111.1580, 2011.
- BURCZAK, J.; GRANERO-BELINCHÓN, R. Critical keller–segel meets burgers on: large-time smooth solutions. Nonlinearity, IOP Publishing, v. 29, n. 12, p. 3810, 2016.
- BURCZAK, J.; GRANERO-BELINCHÓN, R. On a generalized doubly parabolic keller–segel system in one spatial dimension. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, World Scientific, v. 26, n. 01, p. 111–160, 2016.

BURCZAK, J.; GRANERO-BELINCHÓN, R. Suppression of blow up by a logistic source in 2d keller–segel system with fractional dissipation. Journal of Differential Equations, Elsevier, v. 263, n. 9, p. 6115–6142, 2017.

CALVEZ, V.; CORRIAS. The parabolic-parabolic keller-segel model in \mathbb{R}^2 . Communications in Mathematical Sciences, Elsevier, v. 6, n. 2, p. 417–447, 2008.

CALVEZ, V.; CORRIAS, L.; EBDE, M. A. Blow-up, concentration phenomenon and global existence for the keller–segel model in high dimension. Communications in Partial Differential Equations, Taylor & Francis, v. 37, n. 4, p. 561–584, 2012.

CORRIAS, L.; PERTHAME, B. Critical space for the parabolic-parabolic keller–segel model in rd. Comptes Rendus Mathematique, Elsevier, v. 342, n. 10, p. 745–750, 2006.

CORRIAS, L.; PERTHAME, B.; ZAAG, H. Global solutions of some chemotaxis and angiogenesis systems in high space dimensions. Milan Journal of Mathematics, Springer, v. 72, n. 1, p. 1–28, 2004.

DOLBEAULT, J.; PERTHAME, B. Optimal critical mass in the two dimensional keller–segel model in \mathbb{R}^2 . Comptes Rendus Mathematique, Elsevier, v. 339, n. 9, p. 611–616, 2004.

EL-SAYED, A.; RIDA, S.; ARAFA, A. On the solutions of time-fractional bacterial chemotaxis in a diffusion gradient chamber. International Journal of Nonlinear Science, v. 7, n. 4, p. 485–492, 2009.

ESCUADERO, C. The fractional keller–segel model. Nonlinearity, IOP Publishing, v. 19, n. 12, p. 2909, 2006.

FERREIRA, L. C. A family of dissipative active scalar equations with singular velocity and measure initial data. Computers & Mathematics with Applications, Elsevier, v. 64, n. 10, p. 3292–3301, 2012.

FERREIRA, L. C.; PRECIOSO, J. C. Existence and asymptotic behaviour for the parabolic–parabolic keller–segel system with singular data. Nonlinearity, IOP Publishing, v. 24, n. 5, p. 1433, 2011.

FOLLAND, G. B. Real analysis: modern techniques and their applications. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999. v. 40.

FRIEDMAN, A. Partial differential equations of parabolic type. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2008.

GIGA, Y.; MIYAKAWA, T. Navier-stokes flow in \mathbb{R}^3 with measures as initial vorticity and morrey spaces. Communications in partial differential equations, Taylor & Francis, v. 14, n. 5, p. 577–618, 1989.

GURUSAMY, A. Finite element method for time fractional keller–segel chemotaxis system. In: Theory and Applications of Non-integer Order Systems. [S.l.]: Springer, 2017. p. 441–448.

- HARRIS, M. A.; YANG, H.; LOW, B. E.; MUKHERJE, J.; GUHA, A.; BRONSON, R. T.; SHULTZ, L. D.; ISRAEL, M. A.; YUN, K. Cancer stem cells are enriched in the side population cells in a mouse model of glioma. Cancer research, AACR, v. 68, n. 24, p. 10051–10059, 2008.
- HERRERO, M. A.; VELÁZQUEZ, J. J. Chemotactic collapse for the keller-segel model. Journal of Mathematical Biology, Springer, v. 35, n. 2, p. 177–194, 1996.
- HORSTMANN, D. On the existence of radially symmetric blow-up solutions for the keller-segel model. Journal of mathematical biology, Springer Nature BV, v. 44, n. 5, p. 463, 2002.
- HORSTMANN, D. From 1970 until present: the keller-segel model in chemotaxis and its consequences. 2003.
- HORSTMANN, D. From 1970 until present: the keller-segel model in chemotaxis and its consequences. ii, jahresber. Deutsch. Math.-Verein., v. 106, p. 51–69, 2004.
- HORSTMANN, D.; WINKLER, M. Boundedness vs. blow-up in a chemotaxis system. Journal of Differential Equations, Academic Press, v. 215, n. 1, p. 52–107, 2005.
- HWANG, B.; LEE, S.-H.; KIM, J.-S.; MOON, J. H.; JEUNG, I. C.; LEE, N. G.; PARK, J.; HONG, H. J.; CHO, Y.-L.; JUNG, H. et al. Stimulation of angiogenesis and survival of endothelial cells by human monoclonal tie2 receptor antibody. Biomaterials, Elsevier, v. 51, p. 119–128, 2015.
- JÄGER, W.; LUCKHAUS, S. On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis. Transactions of the american mathematical society, v. 329, n. 2, p. 819–824, 1992.
- KAUPP, U. B.; KASHIKAR, N. D.; WEYAND, I. Mechanisms of sperm chemotaxis. Annu. Rev. Physiol., Annual Reviews, v. 70, p. 93–117, 2008.
- KELLER, E. F.; SEGEL, L. A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. Journal of theoretical biology, Academic Press, v. 26, n. 3, p. 399–415, 1970.
- KOZONO, H.; SUGIYAMA, Y. The keller-segel system of parabolic-parabolic type with initial data in weak $L^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ and its application to self-similar solutions. Indiana University mathematics journal, JSTOR, p. 1467–1500, 2008.
- KOZONO, H.; SUGIYAMA, Y. Global strong solution to the semi-linear keller–segel system of parabolic–parabolic type with small data in scale invariant spaces. Journal of Differential Equations, Elsevier, v. 247, n. 1, p. 1–32, 2009.
- KOZONO, H.; YAMAZAKI, M. Semilinear heat equations and the navier-stokes equation with distributions in new function spaces as initial data. Communications in Partial Differential Equations, Taylor & Francis, v. 19, n. 5-6, p. 959–1014, 1994.
- KUMAR, S.; KUMAR, A.; ARGYROS, I. K. A new analysis for the keller-segel model of fractional order. Numerical Algorithms, Springer, v. 75, n. 1, p. 213–228, 2017.
- KUZMIN, D. A guide to numerical methods for transport equations. University Erlangen-Nuremberg, p. 24, 2010.

LANGLANDS, T.; HENRY, B. Fractional chemotaxis diffusion equations. Physical Review E, APS, v. 81, n. 5, p. 051102, 2010.

LORENZI, L.; LUNARDI, A.; METAFUNE, G.; PALLARA, D. Analytic semigroups and reaction-diffusion problems. In: Internet Seminar. [S.l.: s.n.], 2004. v. 2005, p. 127.

MAINARDI, F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models. [S.l.]: World Scientific, 2010.

MAINARDI, F.; PARADISI, P.; GORENFLO, R. Probability distributions generated by fractional diffusion equations. arXiv preprint arXiv:0704.0320, 2007.

MARTINET, N.; BECK, G.; BERNARD, V.; PLENAT, F.; VAILLANT, P.; SCHOONEMAN, F.; VIGNAUD, J.-M.; MARTINET, Y. Mechanism for the recruitment of macrophages to cancer site. in vivo concentration gradient of monocyte chemotactic activity. Cancer, Wiley Online Library, v. 70, n. 4, p. 854–860, 1992.

MAZZUCATO, A. Besov-morrey spaces: function space theory and applications to non-linear pde. Transactions of the American Mathematical Society, v. 355, n. 4, p. 1297–1364, 2003.

NAGAI, T.; SYUKUINN, R.; UMESAKO, M. Decay properties and asymptotic profiles of bounded solutions to a parabolic system of chemotaxis in \mathbb{R}^n . Funkcialaj Ekvacioj, Division of Functional Equations, The Mathematical Society of Japan, v. 46, n. 3, p. 383–407, 2003.

NAGHIBOLHOSSEINI, M. Estimation of outer-middle ear transmission using dpoaes and fractional-order modeling of human middle ear. 2015.

NETO, P. M. d. C. Fractional differential equations: a novel study of local and global solutions in Banach spaces. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013.

PAZY, A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 44.

PODLUBNY, I. Fractional differential equations, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering. [S.l.]: Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999.

RENARDY, M.; ROGERS, R. C. An introduction to partial differential equations. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 13.

SAHNI, R. Some applications of fixed point theorems. Citeseer, 2012.

SCHNEIDER, L.; CAMMER, M.; LEHMAN, J.; NIELSEN, S. K.; GUERRA, C. F.; VELAND, I. R.; STOCK, C.; HOFFMANN, E. K.; YODER, B. K.; SCHWAB, A. et al. Directional cell migration and chemotaxis in wound healing response to pdgf-aa are coordinated by the primary cilium in fibroblasts. Cellular physiology and Biochemistry, Karger Publishers, v. 25, n. 2-3, p. 279–292, 2010.

SCHNEIDER, W. Fractional diffusion. In: Dynamics and Stochastic Processes Theory and Applications. [S.l.]: Springer, 1990. p. 276–286.

SCHNEIDER, W. R.; WYSS, W. Fractional diffusion and wave equations. Journal of Mathematical Physics, American Institute of Physics, v. 30, n. 1, p. 134–144, 1989.

SHU, X.-B.; XU, F. The existence of solutions for impulsive fractional partial neutral differential equations. Journal of Mathematics, Hindawi, v. 2013, 2013.

SUGIYAMA, Y.; KUNII, H. Global existence and decay properties for a degenerate keller–segel model with a power factor in drift term. Journal of Differential Equations, Elsevier, v. 227, n. 1, p. 333–364, 2006.

WIDDER, D. The laplace transform princeton university press. New York, p. 61–63, 1946.

WINKLER, M. Aggregation vs. global diffusive behavior in the higher-dimensional keller–segel model. Journal of Differential Equations, Elsevier, v. 248, n. 12, p. 2889–2905, 2010.

WYSS, W. The fractional diffusion equation. Journal of Mathematical Physics, v. 27, n. 11, p. 2782–2785, 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.527251>>.

ZAYERNOURI, M.; MATZAVINOS, A. Fractional adams–bashforth/moulton methods: an application to the fractional keller–segel chemotaxis system. Journal of Computational Physics, Elsevier, v. 317, p. 1–14, 2016.

ZEID, S. S.; YOUSEFI, M.; KAMYAD, A. V. Approximate solutions for a class of fractional-order model of hiv infection via linear programming problem. American Journal of Computational Mathematics, Scientific Research Publishing, v. 6, n. 2, p. 141–152, 2016.

ZHAI, Z. Global well-posedness for nonlocal fractional keller–segel systems in critical besov spaces. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Elsevier, v. 72, n. 6, p. 3173–3189, 2010.