



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

KATY WELLEN MENESES LEÃO

**ABORDAGEM DE VOLUME E CAPACIDADE EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS
DIDÁTICOS: Uma Análise À Luz Da Teoria Antropológica Do Didático**

RECIFE

2020

KATY WELLEN MENESES LEÃO

**ABORDAGEM DE VOLUME E CAPACIDADE EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS
DIDÁTICOS: Uma Análise À Luz Da Teoria Antropológica Do Didático**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC, da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos

Coorientadora: Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain

RECIFE
2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Natalia Nascimento, CRB-4/1543

- L437a Leão, Katy Wellen Meneses.
Abordagem de volume e capacidade em um coleção de livros didáticos: uma análise à luz da teoria antropológica do didático. / Katy Wellen Meneses Leão. – Recife, 2020.
170 f.
- Orientadora: Marilene Rosa dos Santos.
Coorientadora: Paula Moreira Baltar Bellemain.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE.
Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2020.
Inclui Referências e Apêndices
1. Ensino de Matemática – Grandezas e Medidas. 2. Livro didático – matemática. 3. Matemática – Ensino Fundamental. 4. Matemática – volume capacidade. 5. UFPE - Pós-graduação. I. Santos, Marilene Rosa dos. (Orientadora). II. Bellemain, Paula Moreira Baltar (Coorientadora). II. Título.
- 510 (23. ed.) UFPE (CE2021-021)

KATY WELLEN MENESES LEÃO

**ABORDAGEM DE VOLUME E CAPACIDADE EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS
DIDÁTICOS: Uma Análise A Luz Da Teoria Antropológica Do Didático**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC, da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 12/03/2020

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos (Orientadora e Presidente)
Universidade de Pernambuco

Profa. Dra. Lúcia de Fátima Durão Ferreira (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Marilena Bittar (Examinadora Externa)
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Nilda e Marcos, que me deram apoio incondicional em todas as minhas decisões e entenderam, em partes, minha ausência.

A Artur que segurou minha mão quando eu precisava, me deu cafuné e me fez rir nos piores e melhores momentos. A Wendel, Andreza, e Luana que foram meus apoios e confidentes, a Bernardo que sentiu muita falta da titia e Wayninho que não sabe nem o que é isso. A Wayne que me fez querer estudar mais e estar dentro da universidade por mais tempo. A Greg e Bia que me fazem rir diariamente. A Lemniscata, minha parceira, que esteve sempre comigo, e eu com ela. A Thamy e Treycki que entenderam minha ausência e não desistiram de mim, espero. A Valéria Silva que me acompanhou de pertinho em todas as fases do mestrado. Às feministas lindas do Liceu, Laís, Délvia e Aline, sempre na luta! Aos amigos que o EDUMATEC me deu, Valéria Aguiar, Alexandre, Almir, Cláudia, Luiz, Alan e Alissá.

Às minhas professoras de hoje e sempre, Paula Baltar e Verônica Gitirana, que me fizeram acreditar na educação, me apaixonar pela educação matemática desde a licenciatura e ainda são minhas referências na educação e como pessoas. À professora Marilene Rosa que me acolheu e me acompanhou de pertinho nesse processo. Aos meus amigos do EDUMATEC e Pró-Grandezas que estiveram comigo nos eventos, reuniões, aulas e nos divertidos lanches da tarde, por todas as reclamações e sucessos que conquistamos juntos.

Aos meus amigos do liceu e à coordenação maravilhosa que me ajudaram um monte nesse período agitado. Aos meus alunos que me fazem acreditar a cada dia que a educação é sim ferramenta para mudança social e que lutar vale a pena.

Por fim, àqueles que não desistiram da educação, que persistem e lutam, que não veem a educação como produto ou mercadoria. Nestes tempos sombrios de políticas públicas desfavoráveis à população, que possamos permanecer firmes e unidos na busca de uma sociedade mais igualitária.

“Me movo como educador, porque, primeiro, me movo como gente.”

Paulo Freire

RESUMO

Esta dissertação teve como objetivo analisar a proposta de ensino das grandezas volume e capacidade veiculada por coleções de livros didáticos do 1º ao 6º ano do ensino fundamental. Foram utilizadas duas coleções de Livros Didáticos além de documentos oficiais de orientação curricular, guias dos livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático dos anos de 2017 e 2019 para referência. As análises foram feitas sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard, na adaptação para volume da abordagem da área como grandeza, proveniente da hipótese didática formulada por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian e do ponto de vista da dimensionalidade do volume e capacidade. As categorias de análise foram definidas e foi realizada uma modelação praxeológica dos capítulos e seções sobre capacidade e volume dos livros. Como resultado, observou-se que as tarefas referentes à medida são maioria, seguidas pelas tarefas de resolução de operações básicas e resolução de problemas. Tarefas envolvendo comparação de volumes (ou de capacidades) e de produção de sólidos dado o volume (ou a capacidade) são escassas ou até mesmo inexistentes em alguns livros analisados. Constatou-se ambiguidades no tratamento dos conceitos de volume e capacidade, abordando inúmeras vezes capacidade como volume e volume como capacidade, o que pode ser danoso aos processos de ensino e de aprendizagem. As relações entre massa, volume e capacidade são pouco abordadas. Muitas tarefas dos livros analisados relacionam estas grandezas a outros campos do conhecimento e aos usos no dia a dia. Observou-se ainda uma evolução nos tipos de tarefas propostos, nas técnicas associadas e na complexidade crescente nas relações com outras grandezas. Os aspectos unidimensional e tridimensional das grandezas foram destacados nas análises e percebeu-se que o volume em sua forma unidimensional e a capacidade foram tratados nos primeiros livros enquanto a forma tridimensional foi deixada para os posteriores.

Palavras-chave: Grandezas e Medidas. Livro Didático. Ensino Fundamental. Volume e Capacidade.

ABSTRACT

This master thesis analyzes the teaching approach of volume and capacity greatnesses on textbook collections from the 1st to 6th year of elementary school. Two textbook collections' were used in addition to official curriculum guidance documents, and textbook guides from the Programa Nacional do Livro Didático for the years 2017 and 2019 (BRASIL, 2016, 2018) as reference. The analysis were based on the perspective of Yves Chevallard's (1998) Anthropological Theory of Didactics and on the adaptation of the area as greatness approach for the volume, provenient of the didactic hypothesis formulated by Régine Douady and Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989) and dimensionality concept of volume and capacity. The analysis categories were established and a praxeological modeling of the chapters and sections on capacity and volume was done. As a result, it was noted that the measurement tasks are the marjority, followed by the tasks of solving basic operations and problem solving. The cases involving comparison of volumes (or capacities) and the production of solids are rare or even non-existent in some books analyzed. It was observed ambiguities on the treatment of volume and capacity concepts, approaching capacity as volume and volume as capacity countless times, which can harm the student learning process. The relations between mass, volume and capacity are rarely addressed. Many tasks in the analyzed books relate these greatnesses to other areas of knowledge and to their daily uses. There was also an evolution in the types of tasks proposed, in the associated techniques and in the increasing complexity in relationships with other greatnesses. The one-dimensional and three-dimensional aspects of the greatnesses were highlighted in the analysis and it was noticed that the volume and capacity in its one-dimensional form was treated in the first books while the three-dimensional form was left to the later ones.

Keywords: Greatnesses and Measures. Textbook. Elementary School. Volume and Capacity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Transposição dos Saberes.....	27
Figura 2 -	Escala de Níveis de Co-Determinação.....	34
Figura 3 -	Representação do Modelo de um Gerador de Tarefas (GT).....	39
Figura 4 -	Esquema Funcional da Grandeza Volume.....	48
Figura 5 -	Quadro das Grandezas – Grandeza Volume.....	58
Figura 6 -	Quadro das Grandezas – Grandeza Capacidade.....	59
Figura 7 -	Atividade sobre Relação do Volume e Capacidade Retirada de Barros (2002).....	64
Figura 8 -	Interseção das Coleções de Livros Didáticos dos PNLD 2018 e 2019 (BRASIL, 2016, 2018b) por Autor.....	81
Figura 9 -	Organização dos Conteúdos da Coleção dos Anos Finais do Ensino Fundamental - Dante.....	100
Figura 10 -	Questão de Empilhamento de Cubos – 1º Ano.....	105
Figura 11 -	Atividade de Comparação e Vocabulário – 1º Ano.....	106
Figura 12 -	Atividade de Volume de Líquido Dentro do Estudo de Números e Medidas no Capítulo de Números Até 10 – 1º Ano.....	106
Figura 13 -	Atividade que Relaciona a Grandeza Capacidade a Unidade de Medida não Padronizada - 2º Ano.....	107
Figura 14 -	Atividade que Trata Operações Básicas com a Grandeza Capacidade - 2º Ano.....	108
Figura 15 -	Questão de Estimativa e Medição de Capacidade - 2º Ano.....	108
Figura 16 -	Tarefa Sobre Capacidade Usando Preenchimento com Sólidos unitários - 2º Ano.....	109
Figura 17 -	Relação Entre a Capacidade e um Recipiente de 1 cm ³ – 2º Ano.....	110
Figura 18 -	Questão Categorizada como Reconhecimento da Grandeza e Vocabulário.....	111
Figura 19 -	Atividade de Estimativa, Medição e Escolha de Recipientes Adequados - 3º Ano.....	111
Figura 20 -	Atividade de Volume Linear - 3º Ano.....	112

Figura 21 -	Questão de Proporcionalidade que Relaciona Volume ao Valor Monetário – 3º Ano.....	113
Figura 22 -	Atividade de Resolver Problemas de Volume com a Grandeza Tempo - 3º Ano.....	113
Figura 23 -	Atividade de Comparação de Capacidade - 4º Ano.....	115
Figura 24 -	Atividade que Introdz Volume e Trata Capacidade Trilinearmente – 4º Ano.....	116
Figura 25 -	Questão que Trata Volume, Probabilidade e Aritmética - 4º Ano.....	117
Figura 26 -	Atividade de Produção de Sólido dado Volume - 5º Ano.....	118
Figura 27 -	Introdução Formal ao Estudo de Volume - 5º Ano.....	118
Figura 28 -	Utilização de Métodos Distintos para o Cálculo da Medida do Volume de Blocos - 5º Ano.....	119
Figura 29 -	Atividade de Volume de Areia e Valor Monetário - 5º Ano.....	120
Figura 30 -	Atividade de Transformação de Unidade de Medida Utilizando Representação Fracionária e Decimal – 5º Ano.....	121
Figura 31 -	Atividade que Mescla Transformação de Unidades e Produção de Sólido dada a Capacidade ou Volume - 5º Ano.....	121
Figura 32 -	Transformação de Unidades de Medida de Capacidade e Escolha da Unidade de Medida Adequada - 6º Ano.....	122
Figura 33 -	Atividade que Relaciona a Massa de Água em 1 L - 6º Ano.....	123
Figura 34 -	Questão de Passo a Passo de Medida de Volume com Comprimento das Arestas Representados por Números Decimais - 6º Ano.....	124
Figura 35 -	Atividade que Relaciona Volume, Capacidade e Medidas Percentuais - 6º Ano.....	125
Figura 36 -	Atividade de Vazão - 6º Ano.....	126

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 -	Esboço do Modelo Praxeológico de Referência a Priori para os Conceitos de Volume e Capacidade.....	86
Quadro 2 -	Conteúdos a Serem Desenvolvidos de Acordo com o PCN-AI Referentes às Grandezas Geométricas Volume e Capacidade.....	89
Quadro 3 -	Conteúdos a Serem Desenvolvidos de Acordo com os PCN-AF Referentes às Grandezas Volume e Capacidade.....	91
Quadro 4 -	Habilidades a Serem Desenvolvidas em Relação às Grandezas Volume e Capacidade na BNCC dos Anos Iniciais.....	93
Quadro 5 -	Habilidades das Grandezas Volume e Capacidade na BNCC do EF-Anos Finais.....	95
Quadro 6 -	Comparação Entre o Modelo Praxeológico de Referência a Priori e o Modelado a Partir dos Livros Didáticos.....	128
Quadro 7 -	Modelagem dos Tipos de Tarefas e Variáveis Para os Objetos Volume e Capacidade nos Livros didáticos Analisados.....	129
Quadro 8 -	Quantitativo de Tarefas de Cada Tipo Modelado nos Livros Analisados do 1º ao 6º Ano do EF.....	130
Quadro 9 -	Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Comparar Volume ou Capacidade.....	133
Quadro 10 -	Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Medir Grandeza Volume ou Capacidade 1.....	135
Quadro 11 -	Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Medir Grandeza Volume ou Capacidade 2.....	136
Quadro 12 -	Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Produzir Recipiente ou Sólido...	138
Quadro 13 -	Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Transformar Unidades de Medida.....	140
Quadro 14 -	Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Realizar Operações Básicas com Volume ou Capacidade.....	143
Quadro 15 -	Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Resolver Problemas Referentes ao Volume ou a Capacidade 1.....	145

Quadro 16 -	Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Resolver Problemas Referentes ao Volume ou a Capacidade 2.....	146
Quadro 17 -	Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Validar Proposição Referentes ao Volume ou Capacidade.....	149
Quadro 18 -	Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Escolher Recipiente nos livros analisados.....	150
Quadro 19 -	Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Estimar a Medida de Capacidade de Recipiente.....	152
Quadro 20 -	Modelo Praxeológico de Referência Proposto.....	155

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Quantitativo de Tarefas do Tipo Comparar nos Livros De 1º ao 6º Ano..	132
Tabela 2 -	Quantitativo de Tarefas do Tipo Medir Grandeza Volume ou Capacidade nos Livros de 1º ao 6º Ano.....	134
Tabela 3 -	Quantitativo de Tarefas do Tipo Produzir Recipiente ou Sólido nos Livros de 1º ao 6º Ano.....	139
Tabela 4 -	Quantitativo de Tarefas do Tipo Transformar Unidades de Medida nos Livros de 1º ao 6º Ano.....	138
Tabela 5 -	Quantitativo de Tarefas do Tipo Resolver Operações Básicas nos Livros de 1º ao 6º Ano.....	142
Tabela 6 -	Quantitativo de Tarefas do Tipo Resolver Problemas nos Livros de 1º ao 6º Ano.....	145
Tabela 7 -	Quantitativo de Tarefas do Tipo Validar Proposição Referentes ao Volume ou Capacidade nos Livros de 1º ao 6º Ano.....	148
Tabela 8 -	Quantitativo de Tarefas do Tipo Escolher Recipiente nos Livros de 1º ao 6º Ano.....	150
Tabela 9 -	Quantitativo de Tarefas do Tipo Estimar a Medida de Capacidade de Recipiente nos Livros analisados de 1º ao 6º Ano.....	151
Tabela 10 -	Outras Questões Encontradas nos Livros de 1º ao 6º Ano.....	153

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio.
GT	Gerador de Tarefas.
LD	Livro Didático.
MEC	Ministério da Educação.
MED	Modelo Epistemológico Dominante.
MER	Modelo Epistemológico de Referência.
MPD	Modelo Praxeológico Dominante.
MPR	Modelo Praxeológico de Referência.
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais.
PCN-AI	Parâmetros Curriculares Nacionais - Anos Iniciais do Ensino Fundamental.
PCN-AF	Parâmetros Curriculares Nacionais - Anos Finais do ensino Fundamental.
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático.
RECNEI	Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil.
TAD	Teoria Antropológica do Didático.
TCC	Teoria dos Campos Conceituais.
TDe	Transposição Didática externa.
TDi	Transposição Didática interna.
TTD	Teoria da Transposição Didática.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	16
2	REFERENCIAL TEÓRICO.....	24
2.1	TRANSPosição DIDÁTICA.....	24
2.1.1	Relação Entre Os Saberes.....	26
2.2	TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO.....	28
2.2.1	Elementos Primitivos da Tad.....	28
2.2.2	Organização Praxeológica.....	31
2.2.3	Modelos Epistemológicos e Praxeológicos.....	35
2.2.4	Noção de Variáveis Dentro da Tad.....	37
2.3	VOLUME E CAPACIDADE COMO OBJETOS MATEMÁTICOS E DIDÁTICOS.....	40
2.3.1	Desenvolvimento Histórico do Conceito de Volume.....	42
2.3.2	Volume como Objeto Matemático.....	44
2.3.3	Volume e Capacidade em Seus Aspectos Didáticos.....	49
2.3.4	Questão da Dimensionalidade.....	51
2.3.5	Relações Entre Volume, Capacidade, Massa e Densidade.....	54
2.3.6	As Grandezas Volume e Capacidade e o Modelo Didático das Grandezas.....	56
3	REVISÃO DE LITERATURA SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DE VOLUME E CAPACIDADE.....	61
4	OBJETIVOS.....	74
4.1	GERAL.....	74
4.2	ESPECÍFICOS.....	74
5	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	75
5.1	PNLD E GUIAS DOS LIVROS DIDÁTICOS.....	76
5.2	ESCOLHA DOS LIVROS DIDÁTICOS E GUIAS DO PNLD REFERENTES..	79
5.3	ELEMENTOS ELENCADOS COMO IMPORTANTES NA COMPREENSÃO DAS GRANDEZAS VOLUME E CAPACIDADE.....	82
6	CAPACIDADE E VOLUME NOS DOCUMENTOS OFICIAIS DE ORIENTAÇÃO CURRICULAR.....	87
6.1	ABORDAGEM DE CAPACIDADE E VOLUME NOS PCN.....	87

6.2	ABORDAGEM DE CAPACIDADE E VOLUME NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR – BNCC.....	92
6.3	ANÁLISE COMPARATIVA DAS ABORDAGENS DE CAPACIDADE E VOLUME NOS PCN E NA BNCC.....	96
6.4	ANÁLISE DO GUIA DE LIVROS DIDÁTICOS DO PNLD: A COLEÇÃO ESCOLHIDA.....	98
6.5	MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERÊNCIA A PRIORI.....	101
7	ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS.....	103
7.1	ANÁLISE GERAL DOS LIVROS DIDÁTICOS.....	103
7.1.1	Análise Geral do Livro do 1º Ano.....	105
7.1.2	Análise Geral do Livro do 2º Ano.....	107
7.1.3	Análise Geral do Livro do 3º Ano.....	110
7.1.4	Análise Geral do Livro do 4º Ano.....	114
7.1.5	Análise Geral do Livro do 5º Ano.....	117
7.1.6	Análise Geral do Livro do 6º Ano.....	122
7.2	PRIMEIROS PASSOS DO MODELO PRAXEOLÓGICO DOMINANTE.....	126
7.3	ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA.....	131
7.3.1	Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Comparar Volume ou Capacidade.	132
7.3.2	Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Medir Grandeza Volume ou Capacidade.....	134
7.3.3	Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Produzir Recipiente ou Sólido.....	137
7.3.4	Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Transformar Unidades de Medida..	139
7.3.5	Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Realizar Operações Básicas com Volume ou Capacidade.....	141
7.3.6	Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Resolver Problemas Referentes ao Volume ou a Capacidade.....	144
7.3.7	Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Validar Proposição Referente ao Volume ou a Capacidade.....	148
7.3.8	Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Escolher Recipiente.....	149
7.3.9	Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Estimar Medida de Capacidade de Recipiente.....	151
7.3.10	Outras atividades.....	152

7.4	MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERÊNCIA PROPOSTO.....	154
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	156
	REFERÊNCIAS.....	163

1. INTRODUÇÃO

A utilização de conceitos referentes às grandezas e medidas tem sido essencial aos seres humanos desde os primórdios, em especial as medidas, que são utilizadas e estudadas há muitos séculos, seja na área da superfície da pele utilizada para a fabricação de vestimentas, na quantidade de alimento necessária para as tribos e aldeias, no período de mudança das estações, entre vários outros usos. Com o desenvolvimento da sociedade, os conceitos de medidas que o homem utilizava também se modificaram e evoluíram, houve as primeiras padronizações de medida, estimava-se o volume e formato adequado das pedras que compõem as pirâmides, a capacidade de recipientes para armazenamento de bebidas e alimentos, duração de intervalo de tempo de colheita, estabelecimento do sistema métrico, entre outros usos que são socialmente conhecidos.

Nos tempos atuais, as grandezas e medidas continuam sendo muito utilizadas, a exemplo da comparação do volume e preço na compra de dois produtos similares, na hora de transferir um arquivo para um *pendrive*, verifica-se o tamanho do arquivo e a capacidade de memória de um *pendrive* ou a relação entre quantidade de cada ingrediente na preparação de um bolo. Em certas profissões também se pode observar os seus usos, como um diagramador que precisa saber as dimensões exatas dos documentos e dos objetos contidos nele, um secretário que precisa organizar horários da agenda de compromissos, por exemplo, ou um marceneiro que precisa lidar com comprimentos, áreas e volumes para construir móveis.

O termo capacidade, especificamente, possui diversos significados na língua portuguesa que se distanciam da matemática, como as definições de um dicionário: “Poder, aptidão ou possibilidade de fazer ou produzir qualquer coisa; competência, habilidade” ou “Poder de receber impressões, assimilar ideias, analisar, raciocinar, julgar, arrostar problemas; aptidão, habilidade mental” (CAPACIDADE, 2020). Há também significados que fogem do campo físico, como a capacidade de armazenamento de memória, grandeza relacionada à informática, em quais as dimensões físicas do recipiente *pendrive*, a memória, não se estende com o aumento da sua capacidade de armazenamento de dados.

Estes conceitos foram modelados e formalizados, com o passar dos séculos, pelos matemáticos e também chegaram às escolas, como por exemplo, as grandezas e medidas, como a duração de intervalos de tempo, o valor monetário, as grandezas geométricas área, volume,

capacidade, grandezas relacionadas à informática, além das grandezas físicas, como a massa, a densidade e a temperatura.

No Brasil, há mais de 20 anos, as grandezas e medidas são consideradas como um dos grandes campos do conhecimento na matemática escolar, como os Números e Operações, a Geometria, a Álgebra e a Estatística. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de 1997, PCN referente aos anos iniciais, PCN-AI (BRASIL, 1997), já traziam as grandezas geométricas como pertencentes a tal campo do conhecimento, entendendo-as não mais como incluídas na geometria (caso da área, volume, perímetro, comprimento, capacidade e abertura de ângulo) nem como números e operações (caso da grandeza duração de intervalos de tempo e valor monetário).

Algumas pesquisas passaram a tratar estes objetos matemáticos como grandezas principalmente após a hipótese didática para área de figuras planas proposta por Douady e Perrin-Glorian (1989), e adaptada, posteriormente, para outras grandezas geométricas: comprimento e volume. Pode-se observar esta adaptação nos trabalhos de Barros (2002), Oliveira (2002, Id. 2007), Cavalcanti (2010) e Silva (2011), por exemplo. Esta hipótese didática propõe que a conceituação da área na escola apoie-se na distinção entre três quadros¹: o geométrico, o numérico e o das grandezas:

A área de uma superfície plana aparece como um objeto matemático distinto da superfície plana, pois superfícies diferentes podem possuir a mesma área. Também se distingue do número que está associado a essa superfície quando se escolhe uma superfície unitária para medi-la, pois mudar a superfície unitária altera a medida de área, mas a área permanece a mesma. (LIMA; BELLEMAIN, 2002, p. 29)

Apesar do longo tempo em que este tema vem sendo discutido, o desempenho dos alunos referente a este campo do conhecimento não é considerada satisfatória, de acordo com avaliações nacionais e pesquisas desenvolvidas sobre o tema, como afirmam Lima e Bellemain (2010, p. 167). Fato reiterado na pesquisa de Melo e Teles (2017), na qual se verificou que os alunos do final do ensino médio ainda confundem os conceitos de área, volume e capacidade,

¹ Os conceitos relacionados aos quadros se debruçam na ideia de que a área é grandeza e que se distingue da superfície assim como se distingue do número. A mobilização de concepções geométricas e numéricas correspondem, em certa medida, à não consideração desses três componentes (superfície, área e número) vinculados respectivamente aos quadros geométrico, das grandezas e numérico.

além da dificuldade em transformação de unidade de volume e erros na utilização da fórmula do volume do paralelepípedo reto retângulo.

Em relação às diferenças e convergências entre os conceitos de volume e capacidade, pode-se considerar que a capacidade é o volume interno de um recipiente, e nesse sentido, volume e capacidade seriam uma mesma grandeza, por um lado. Mas, por outro lado, do ponto de vista cognitivo, há frequentemente grandes diferenças entre resolver situações que envolvem capacidade e outras que envolvem volume propriamente dito. Essas questões serão aprofundadas posteriormente no item 2.3.3, onde são abordados aspectos didáticos do volume e da capacidade.

Este trabalho interessa-se pela abordagem das grandezas geométricas volume e capacidade nos seis primeiros anos do Ensino Fundamental, saberes presentes no currículo de matemática desde a educação infantil até o ensino médio. Pensando na construção destes conhecimentos, os anos iniciais poderia trazer muitos elementos para a análise, sendo o 6º ano a transição entre anos iniciais e finais do ensino fundamental.

No ano de 2017 foi homologada a nova Base Nacional Comum Curricular, BNCC (BRASIL, 2018a), pelo Ministério da Educação, MEC, a qual veio redefinir o currículo antes presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998a, 1998b, 2002). Na BNCC, reafirma-se a importância do estudo das grandezas e medidas referenciando sua relação com o mundo físico, no qual estas mensuram as grandezas no mundo real e auxiliam o entendimento do aluno a respeito da realidade (BRASIL, 2018a). A BNCC é um documento de uso obrigatório, diferente dos PCN, que são recomendações.

As grandezas geométricas estão inseridas dentro das competências gerais da BNCC, as quais os alunos devem ter desenvolvido ao final da educação básica. “Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.” (BRASIL, 2018a, p. 9). Sua extensa aplicação no cotidiano e sua importância cultural levam a que as grandezas e medidas se relacionem fortemente com a competência acima. Por exemplo, o volume que certo móvel irá ocupar na sala ao comprá-lo ou a capacidade de um recipiente utilizado na hora de lavar as verduras. Assim como descrito nas competências específicas da matemática, na qual a modelagem e resolução de problemas ligados à realidade do aluno propicie a utilização de ferramentas,

processos e tecnologias ligadas à matemática para a validação de procedimentos e resultados, (BRASIL, 2018a, p. 9)

Na BNCC, medir é indicar com um número a comparação entre a grandeza e a unidade de medida (BRASIL, 2018a), especificando o que seria medir uma grandeza. Já no primeiro ano do ensino fundamental a capacidade é tomada como objeto do saber, junto com as grandezas comprimento e massa, além do estudo da grandeza duração de intervalos de tempo e suas unidades e o sistema monetário. Os conteúdos capacidade, massa e comprimento devem ser abordados inicialmente sem a utilização de números, como comparação entre objetos, especificando qual é o mais pesado e o mais leve e o que cabe mais ou menos.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN (BRASIL, 1997, 1998a, 1998b, 2002), estes conteúdos, volume e capacidade, são vistos durante toda a educação básica, com exigências e aprofundamentos distintos, iniciando também o estudo da capacidade nos primeiros anos de escolaridade e o volume nos anos finais do ensino fundamental, sendo aprofundado até o ensino médio.

Apesar da importância destas grandezas no dia a dia e nas escolas como conteúdo de ensino, entre as pesquisas analisadas, poucas delas tratam destes objetos tomando-os como grandezas, como o fazem Oliveira (2002, 2007), Barros (2002), Anwandter-Cuellar (2008), Cavalcanti (2010), Figueiredo (2013), Moraes (2013), Melo (2018). Dentre as pesquisas citadas, que observam volume como grandeza, três preocupam-se com as grandezas físicas relacionadas, massa e densidade (BARROS, 2002; OLIVEIRA, 2002, 2007), uma apenas trata da grandeza capacidade nos anos iniciais (FIGUEIREDO, 2013). Todos os trabalhos que tratam de volume aqui discutidos abordam capacidade, mas sem dar muito enfoque a esta grandeza, tratando das suas conexões com o volume e pouco diferenciando-as.

Em sua maioria, estes trabalhos tratam do conceito de volume no ensino médio, como Oliveira (2007), Moraes (2013), Figueiredo (2013), Freitas (2015) e Melo e Teles (2017), nos quais o volume e capacidade são ampliados para outros sólidos além dos prismas e cilindros, como pirâmides, cones e esferas. Entre os poucos trabalhos analisados, alguns tratam o volume e a capacidade como a mesma grandeza ou não as diferenciam dentro do texto. Por isso, o foco deste trabalho são as relações entre as grandezas volume e capacidade, observando sua correlação, sua diferenciação e as atividades sobre elas e que mesclam estas duas grandezas do primeiro ao sexto ano do ensino fundamental.

Para esta análise, escolheu-se os livros didáticos, dada sua importância como recurso para o aluno e o professor além da obrigatoriedade do estudo das grandezas aqui estudadas em todo o ensino fundamental, de acordo com os documentos oficiais (BRASIL, 1997, 1998a, 2018a). No Brasil, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), vinculado ao Ministério da Educação (MEC), tem a finalidade de avaliar os livros a serem adquiridos para uso nas escolas públicas de todo país, preocupa-se em observar não só a validade e coerência dos conteúdos, mas também sua distribuição ao longo dos livros didáticos (LD) de uma coleção.

O Guia do PNLD chega aos professores como suporte para a escolha deste material com as avaliações das obras. No ano de 2002, pôde-se observar no guia do PNLD (BRASIL, 2001), que a preocupação com o ensino das grandezas e medidas foi desassociada de outros campos da matemática e categorizada como grande eixo nos livros. Algumas edições posteriores deste documento incluem em sua avaliação os livros que preconizam o estudo de outros conteúdos em detrimento das grandezas e medidas.

O guia do PNLD de 2017 reitera a importância destes conteúdos ao afirmar que “as grandezas e medidas estão presentes nas atividades humanas, desde as mais simples até as mais elaboradas das tecnologias e da ciência.” (BRASIL 2016, p, 10). Afirma também que o conceito de grandeza na matemática é fundamental na concessão de significado a outros conceitos importantes, como a noção de número. Além da ligação com a geometria e outros conteúdos escolares, uma vez que “Os estudos em Educação Matemática mostram que um conceito nunca é isolado, mas se integra a um conjunto de outros conceitos por meio de um feixe de relações.” (BRASIL, 2016, p, 24).

Este guia também retrata alguns erros comuns que os alunos costumam apresentar no estudo das grandezas volume e capacidade e que devem ser superados, como:

Definir a capacidade de um recipiente como ‘a quantidade de líquido que ele pode conter; em recipientes do mundo físico, confundir, sem alertar o estudante, o volume total com o volume do seu interior (capacidade); restringir o uso da unidade ‘litro’ à medição de capacidade e a unidade ‘metro cúbico’ à medição de volumes. (BRASIL, 2016, p. 45).

Entende-se, então, que dada a importância do estudo das grandezas e medidas e sua recorrente menção nos documentos oficiais, torna-se relevante compreender como os livros didáticos as abordam, dado que são notáveis recursos utilizados em sala de aula. De acordo com Carvalho e Lima (2010, p 16), este material pode: “favorecer a aquisição de saberes socialmente

relevantes; consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos; propiciar o desenvolvimento de competências e habilidades do aluno, que contribuam para aumentar sua autonomia;”, e ao professor: “auxiliar no planejamento didático-pedagógico anual e na gestão das aulas; favorecer a formação didático-pedagógica; auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno; favorecer a aquisição de saberes profissionais pertinentes, assumindo o papel de texto de referência”.

O desejo de realizar esta pesquisa deu-se durante a formação docente da autora na licenciatura em matemática, na qual aconteceu o primeiro contato com a educação matemática e o grupo de pesquisas Pró-grandezas da UFPE. A partir deles, pôde perceber as dificuldades que se enfrentam em sala de aula do ponto de vista dos alunos de graduação e conhecer alguns trabalhos que tinham como objeto de pesquisa as grandezas geométricas. Mais tarde, enquanto professora do ensino básico, as dificuldades dos alunos ficaram evidentes quanto ao entendimento das grandezas, as concepções errôneas que estes carregam desde cedo, os obstáculos que se criam muitas vezes ao ensinar e como se pode ultrapassar tais dificuldades.

Dentre os trabalhos observados e as discussões, pôde-se observar poucos que tratam do volume e da capacidade dentro do estudo da educação matemática em comparação com os que tratam de área e perímetro. Considerando os frequentes usos sociais da capacidade e do volume e sua importância como conteúdo nas avaliações nacionais (LEÃO, 2017), reiterou-se o interesse de investigar seu estudo para o atual cenário da educação matemática.

No trabalho de conclusão de curso da licenciatura (LEÃO, 2017), optou-se por analisar a grandeza volume em livros didáticos do ensino médio observando os exercícios de uma coleção e as questões do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), verificando se as tarefas cobradas no exame estavam presentes nos livros didáticos. A autora observou a pouca conexão que os livros didáticos analisados trazem com outros temas transversais, conexão essa muito cobrada no exame. Por esta razão, deu-se continuidade à pesquisa sobre a grandeza volume e os livros didáticos para que se possa contribuir, de algum modo, na compreensão sobre a forma em que esta grandeza é vista e entendida além de colocá-la em voga.

Para embasar esta pesquisa, recorreu-se à Teoria da Transposição Didática (TTD) e à Teoria Antropológica do Didático (TAD), ambas propostas por Yves Chevallard e seus colaboradores. A TTD e a TAD permitem compreender as transformações pelas quais passa o saber até que este chegue ao livro didático, observar as tarefas e técnicas propostas e as suas

razões de ser nos contextos observados. Estas teorias propiciam modelar de que maneira se propõe nos livros didáticos que sejam ensinados os conteúdos em foco na pesquisa.

Pretende-se aqui responder a seguinte pergunta: Como evolui a abordagem da capacidade e do volume em coleções de livros didáticos adotados na educação básica? A partir dela pretende-se responder também: A tendência de ênfase no aspecto numérico em detrimento dos outros aspectos que são importantes na compreensão desses assuntos, observada em pesquisas anteriores (FIGUEIREDO, 2013; MORAIS, 2013; FREITAS, 2015;) e em documentos de orientação curricular (CARVALHO; LIMA, 2010) permanece nos livros atuais? De que modo são trabalhadas as relações entre capacidade e volume? Como será discutido adiante, a ênfase exagerada nos aspectos numéricos leva a uma compreensão incompleta do volume e da capacidade.

O intuito deste trabalho é, então, analisar o modelo praxeológico dominante referente às grandezas volume e capacidade em livros didáticos do 1º ao 6º ano do ensino fundamental, para tal deseja-se analisar, por meio do modelo praxeológico de referência, em comparação com o modelo praxeológico dominante moldado, a evolução nos tipos de tarefas e técnicas propostas encontradas sequencialmente nos livros analisados. Para isso, será utilizada a teoria antropológica do didático de Yves Chevallard (1998) e tratar-se-á os objetos volume e capacidade como grandezas de acordo com a hipótese didática inspirada nos trabalhos de Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989).

Para tal, foi realizada a análise de uma coleção de livros didáticos do 1º ano dos anos iniciais do ensino fundamental ao 6º ano dos anos finais do ensino fundamental, que possuem o mesmo autor, entendendo que, desta forma, haja uma menor possibilidade de rupturas e saltos em relação aos conceitos matemáticos e didáticos propostos por um mesmo autor.

Entende-se aqui que no 6º ano do ensino fundamental ocorre uma retomada de conceitos estudados anteriormente, com um aprofundamento e ampliação do que foi visto do 1º ao 5º ano, assim como fez Ferreira (2018, p. 99), que compreende a retomada como a “a maneira pela qual esses objetos são atualizados durante novos encontros” em relação às grandezas volume e capacidade, neste caso.

No capítulo a seguir tem-se uma discussão a respeito da Transposição Didática e da Teoria Antropológica do Didático, sobre as grandezas volume e capacidade em seus aspectos matemáticos e didáticos, o 3º capítulo traz uma revisão de literatura sobre o ensino e a

aprendizagem de volume e de capacidade, observando o que as pesquisas têm realizado a respeito dessas grandezas.

Os objetivos vêm logo a seguir e no capítulo cinco a metodologia junto com a escolha dos livros didáticos e as categorias de análise criadas. No mesmo capítulo, os elementos para análise dos dados são descritos, fundamentado nas concepções da Teoria Antropológica do Didático e nos aspectos importantes na compreensão do volume e capacidade como grandezas. As análises dos documentos oficiais encontram-se no capítulo seis, no qual é descrito o modelo praxeológico de referência a priori, logo após segue o capítulo em que se encontram as análises dos livros didáticos, seguida da conclusão deste trabalho.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo discutir-se-ão elementos da Teoria da Transposição Didática, TTD, e da Teoria Antropológica do Didático, TAD, ambas idealizadas por Yves Chevallard (1991, 1998) e seus colaboradores (CHEVALLARD; BOSCH; GASCON, 2001; BOSCH; GASCÓN, 2007; GASCÓN, 2018, CHAACHOUA; BESSOT, 2018), as quais compõem o quadro teórico que fundamenta este trabalho. Tratar-se-á também o estudo do volume como objeto matemático e alguns aspectos da grandeza volume e da capacidade e suas conexões com massa e densidade. Outro aspecto a ser tratado é a diferenciação entre as grandezas, de um modo geral, os sólidos geométricos e os seus valores numéricos, estudadas a partir da adaptação da hipótese didática dos quadros de Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989), versada inicialmente sobre a grandeza área e adaptada à grandeza volume e a outras grandezas geométricas, com a finalidade de dissertar a respeito da importância do seu tratamento dentro das grandezas e medidas.

2.1. TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Um saber sofre diversas mutações desde a sua criação ou formalização, nos ambientes de pesquisa científica, até sua chegada ao aluno. Esta mutação é o processo de transformações pelos quais passa o saber para que ele se torne objeto de estudo nas escolas. Isto é, são as adaptações pelas quais passa o saber desde que foi produzido, seja entre cientistas ou outros, até que este chegue à sala de aula, depois de muitas pesquisas e muitas modificações para que seja compreensível ao aluno.

Entende-se aqui o saber como “forma de organização de conhecimentos, como fruto da ação humana institucional” (SANTOS, 2015 p. 25). Estas transformações são, então, adaptações de um conteúdo bruto, o saber construído na academia ou alguma outra instituição que o cria, a um conhecimento que é válido para o aluno, que este pode compreender de acordo com sua idade e desenvolvimento cognitivo (AGRANIONIH, 2001).

Convém aqui diferenciar os conceitos de saber e conhecimento, uma vez que estes são diferentes no olhar da TTD e da TAD. Os saberes, como descrito em Bosch e Gascón (2007, p. 90) são frutos de processos de despersonalização e descontextualização, por meio dos quais sua história e seus autores não são levados em consideração.

Já o conhecimento tem um caráter mais pessoal e ativo, é uma relação entre o sujeito e o saber, ele se forma pelo saber que o sujeito adquiriu juntamente com suas experiências que o modificam continuamente, formando assim a sua gama de conhecimentos. Pode-se então chamar o saber que o aluno aprende de fato de conhecimento, pois “o saber se torna compreensível pela transformação do saber em um contexto individual e subjetivo, gera um novo saber” (MENEZES 2010, p 25)

Dito isto, pode-se entender o conhecimento como produto do desenvolvimento do homem e sua aquisição como um processo complexo que se desenvolve entre este e o sujeito a quem o conhecimento é exposto. Santos situa o sujeito em seu meio, externando contextos importantes neste processo, quando afirma que “O sujeito é visto como um ser social, histórico e cultural capaz de se apoderar do conhecimento construído pela humanidade por meio da sua relação com outros sujeitos e com o objeto que pretende conhecer em uma determinada instituição” (SANTOS, 2015 p. 25).

A Teoria da Transposição Didática é alicerçada nas ideias de Verret² (1975) que estudava sociologia, e, diferente de Chevallard que estudava matemática, Verret preocupava-se com a lacuna existente entre o saber sábio e o saber a ensinar, observando a epistemologia destes em suas análises, como afirma Santos (2015). Chevallard preocupou-se então com os processos relativos aos saberes desde sua produção até o seu ensino, nas escolas.

Essas adaptações, transformações, passam por diversas fases, algumas dentro da escola e outras externas a ela, entendendo aqui que o intuito de certo saber é tornar-se conhecimento de quem aprende. Estas fases são descritas de acordo com as mudanças que ocorrem no saber nas quais estão envolvidas diversas pessoas em cada fase e estas com diferentes funções e expectativas para com aquele saber em voga.

Uma destas fases – a transposição didática externa (TDe) - ocorre nos órgãos reguladores da educação, nos quais os conteúdos são selecionados e organizados em anos ou em ciclos. As escolhas de transposição didática externa determinam o que se chama na TTD de saber a ensinar e chegam aos professores por meio de diretrizes curriculares, documentos de orientação curricular e/ou em forma de cartilhas ou cadernos de ensino. A análise e a aprovação dos livros didáticos que chegam aos alunos é um exemplo deste processo, assim como os

² VERRET, Michel. Le Temps d'Etude. Paris : Librairie Honoré Champion, 1975.

saberes que devem ser ensinados e que estão descritos nos parâmetros e bases curriculares, além dos livros didáticos.

Este processo é realizado em um espaço ao qual Chevallard denomina noosfera, “a esfera dos que pensam sobre o ensino” (BOSCH; GASCÓN, 2007 p. 1) local em que se determina quais são os saberes que serão/ deverão ser ensinados na escola, a transformação do saber sábio no saber a ser ensinado. Alguns dos sujeitos que atuam na TDe estão dentro da noosfera, como trabalhadores dos órgãos reguladores da educação (MEC), sujeitos que atuam na elaboração de manuais e cartilhas além dos livros didáticos.

A segunda fase da transposição didática, chamada de transposição didática interna (TDi), corresponde às modificações que transformam o saber a ser ensinado em saber ensinado. Essa fase é realizada essencialmente dentro da sala de aula, pelo professor que pode se apoiar em documentos de orientação curricular, livros didáticos, experiências vivenciadas e compartilhadas, para planejar e efetivar o ensino, faz chegar aos alunos os saberes, dando continuidade ao processo transpositivo.

2.1.1. Relação Entre os Saberes

Chevallard propõe, então, que a transposição didática estuda as mudanças que ocorrem nas formas de vida de certos saberes, tendo este que se adaptar às condições e restrições de cada instituição envolvida no processo. Estes saberes³ são nominados como o saber sábio, o saber a ensinar e o saber ensinado, estes são interligados, na maioria das vezes, e vivem em conjunto. Chevallard afirma sobre esses saberes, que:

Um conteúdo do conhecimento, designado como saber a ensinar, sofre, então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar, faz um objeto de ensino, é chamado de Transposição Didática.”⁴ (CHEVALLARD, 1991 p. 39, tradução livre)

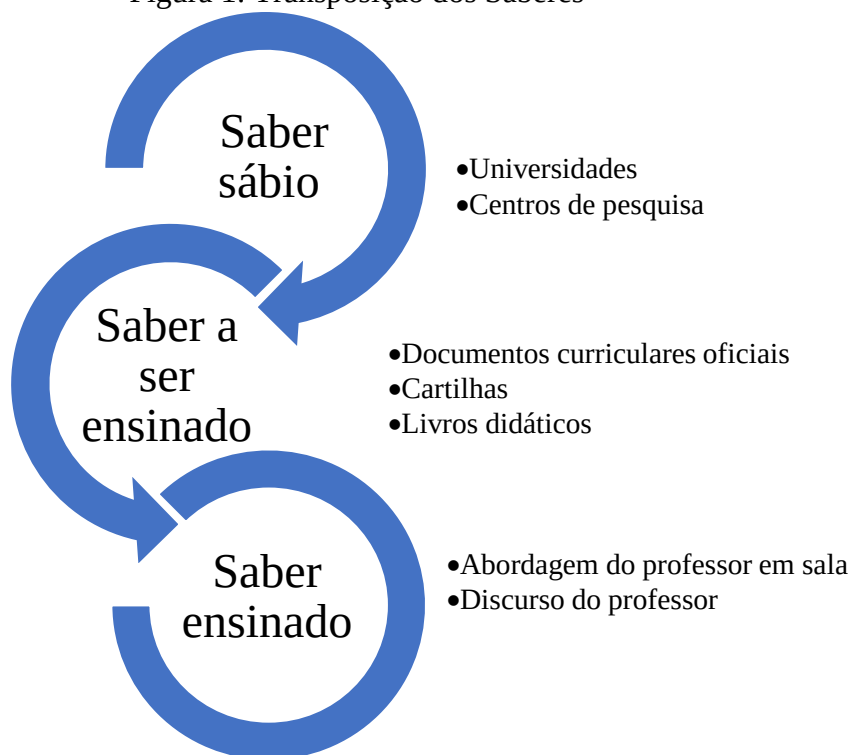
³Savoir savant, savoir à enseigner e savoir enseigné.

⁴Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d’enseignement. Le « travail » qui d’un objet de savoir à enseigner fait un objet d’enseignement est appelé la transposition didactique.

A respeito dos saberes descritos acima e tomando como base as concepções descritas em Santos (2015), a Teoria da Transposição Didática considera que:

- O saber sábio: é a teoria que dá partida àquele conhecimento e é produzido por cientistas, acadêmicos ou pessoas que produzem certo saber, dentro ou fora das instituições de ensino e pesquisa. É o conhecimento divulgado nos meios científicos, em congressos, periódicos científicos e revistas ou os conhecimentos da prática que chegam, de certa forma, ao sistema de ensino.
- O saber a ensinar: é o conhecimento que deve ser ensinado, de acordo com os órgãos reguladores. Tal conhecimento é exposto nos livros didáticos, cartilhas, guias e documentos curriculares. As pessoas envolvidas nesta fase são mais plurais, como especialistas no campo de conhecimento, autores, professores, técnicos governamentais e a população por meio de pressão social. O saber a ensinar é revisto e adaptado em várias fases até ser considerado adequado ao ensino e publicado.
- O saber ensinado: é o saber como chega ao aluno, o conteúdo visto na sala de aula. Seu ambiente natural é a sala de aula, no qual o professor insere no saber a ensinar suas características, suas ideologias e concepções.

Figura 1: Transposição dos Saberes



FONTE: Própria autora baseado em Santos (2015, p. 37)

Entretanto, a TTD não dá conta de entender a práxis das organizações didáticas e das organizações matemáticas em relação ao saber em jogo e suas nuances. Assim, Yves Chevallard (1998) propõe a Teoria Antropológica do Didático – TAD, uma complementação à TTD, fazendo emergir fundamentos para a análise dos conceitos, procedimentos e algoritmos utilizados no cumprimento de determinada tarefa, como comparar o volume de dois sólidos dadas suas arestas, por exemplo e que também dá subsídios para entender melhor as relações transpositivas.

2.2. TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Ainda dentro da Didática da Matemática, que se preocupa em “descrever e caracterizar os processos de estudo ou didáticos” da matemática, com o intuito de minimizar as dificuldades pelas quais passam os que participam de certa maneira do meio didático – ensino/aprendizagem (CHEVALLARD, BOSCH; GASCÓN 2001, p 59), a Teoria Antropológica do Didático lida com o didático, tudo que se refere aos processos didáticos, ao estudo. De acordo com os autores, o olhar antropológico vem do entendimento das situações de estudo da matemática dentro das atividades humanas. Sendo assim, a TAD oferece-nos um aparato teórico-metodológico para o estudo de diversas faces do processo didático que ocorre na sala de aula, como a relação entre sujeito-instituição-saber.

2.2.1. Elementos Primitivos da Tad

A TAD assume que nenhum saber existe descontextualizado, todo saber é saber dentro de alguma instituição, isto é, algum agrupamento social no qual este faça sentido, relacionando-o com algum indivíduo. Cabe então, aqui, explicitar quais são alguns das noções primitivas desta teoria, o sujeito, indivíduo, pessoa, instituição, relação e objeto. A partir destas noções Chevallard (2003) define onde vivem os saberes, o conhecimento e como se dá a relação entre as instituições e os sujeitos, sendo tais noções, então, necessárias para uma melhor compreensão desta teoria.

O indivíduo (X) é o ser imutável, é o que define cada ser humano, antes mesmo das suas relações. É o cerne do nosso ser, que sobrevive às mudanças. O que caracteriza e o define ser

humano. O indivíduo, de acordo com esta teoria, está submetido a diversas instituições, sendo uma instituição (I) uma organização, um agrupamento social que possui regras de convivência, modos de agir e pensar, além de objetos que façam sentido em seu cotidiano. Como afirma Chevallard (2003, p. 82), uma instituição “permite - e impõe - a seus sujeitos, isto é, indivíduos X que vêm ocupar as várias posições oferecidas em I, colocando em jogo formas de fazer e pensar próprias.”⁵ (tradução nossa). Pode-se exemplificar tal noção como sendo a escola uma instituição, à qual o sujeito está submetido, da mesma forma que os órgãos reguladores da educação também o são. Estabelecendo, assim, o sistema didático composto do saber, dos sujeitos, como professor ou aluno, e a instituição.

O indivíduo passa a ter um papel dentro da instituição, dado isto, ele torna-se um sujeito para aquela instituição, isto é, alguém que se submete às restrições e ao modo de pensar de certa instituição. Como exemplo se pode citar a instituição família, na qual cada indivíduo tem um papel, a mãe, os filhos etc., numa escola, têm-se os alunos, os professores, a coordenação, cada um desses indivíduos tem um papel a desempenhar dentro da instituição escola, isso os torna sujeitos dessa escola.

Toda instituição possui seus objetos e estes fazem sentido ao sujeito dentro daquela instituição à qual ele se submete, um objeto “é qualquer entidade, material ou imaterial, que existe para pelo menos um indivíduo. Tudo então é objeto, incluindo pessoas.”⁶ de acordo com Chevallard (2003, p 81). Isto é, são objetos com os quais o indivíduo tem contato, os quais fazem sentido para ele. Como no exemplo da escola, um pincel para quadro faz sentido dentro da instituição escola, dentro daquela instituição ele tem um sentido: recurso didático. Em uma outra instituição aquele mesmo objeto pode não fazer sentido, como numa oficina, num contexto em que ele não tem utilidade. Já numa instituição papelaria, um pincel para quadro é um produto para venda, os sujeitos daquela instituição veem este objeto de forma diferente, mesmo sendo o mesmo objeto.

Diz-se que esta relação que o sujeito tem com um certo objeto de uma instituição é uma relação pessoal (R), que se dá entre o indivíduo X que se torna sujeito de uma instituição I e relaciona-se com um objeto O, representa-se esta relação por $R_I(X, O)$. Esta relação entre o

⁵[...]permet – et impose – à ses sujets, c’est-à-dire aux personnes x qui viennent y occuper les différentes positions p offertes dans I, la mise en jeu de manières de faire et de penser propres.

⁶Est objet toute entité, matérielle ou immatérielle, qui existe pour au moins un individu. Tout est donc objet, y compris les personnes.

sujeito e o objeto é diferente de acordo com o entendimento da instituição para aquele objeto $R_i(O)$, podendo um objeto ser entendido de diversas maneiras para diferentes instituições que o observam, como a grandeza capacidade em uma aula de matemática e em uma fábrica de recipientes, embora se trate do mesmo objeto, a relação que cada sujeito tem com o objeto capacidade dentro de cada instituição pode ser diferente. (CHEVALLARD 2003, p 81)

Outro conceito importante aqui no entendimento da teoria é a noção de pessoa:

Pessoa é então o par formado por um indivíduo X e um sistema de suas relações pessoais $R(x, o)$, em algum momento da história do x . A palavra pessoa, como usada aqui, não deve ser mal-entendida: todo indivíduo é uma pessoa [...]. Claro, com o tempo, o sistema de relações pessoais de x evolui: objetos que não existiam para ele começam a existir; outros deixam de existir; por fim, o relacionamento pessoal de x se modifica. Nesta evolução, o invariante é o indivíduo; o que muda é a pessoa. (CHEVALLARD 2003, p. 81)⁷.

Dado um indivíduo, ser imutável, e as relações deste com as instituições e objetos, que são mutáveis, diz-se que uma pessoa é um conjunto do indivíduo com suas relações ligadas a certas instituições que fazem parte da vida deste indivíduo. A afirmação de que todo indivíduo é uma pessoa disserta a respeito das relações que os indivíduos criam desde que nascem. Um indivíduo não existe sozinho, ele sempre é vinculado a uma pessoa, pessoa essa que é mutável, uma vez que se transforma a cada nova relação e a cada nova instituição à qual ele se sujeita ou deixa de se sujeitar, ele vive em uma sociedade, vinculado a outras pessoas e instituições.

Dentro de um certo campo de conhecimento, pode-se assumir que um conteúdo didático é um objeto e que este objeto faz sentido dentro de uma instituição, seja ela a escola, a universidade ou até mesmo o livro didático, e este objeto é ensinado a um sujeito, alguém que aprende. Entender-se-á neste trabalho a instituição ‘Autor’ dos livros didáticos analisados, que se vincula a uma editora, mas perpassa as categorias de Ensino Fundamental Anos Iniciais e Ensino Fundamental Anos Finais, os livros didáticos são entendidos como um representante dessa instituição ‘Autor’ e os sujeitos dessa instituição são as pessoas que utilizam os livros didáticos produzidos pelo mesmo.

⁷Personne, est alors le couple formé par un individu x et le système de ses rapports personnels $R(x, o)$, à un moment donné de l’histoire de x . Le mot de personne, tel qu’on l’emploie ici, ne doit pas faire illusion : tout individu est une personne. Bien entendu, au cours du temps, le système des rapports personnels de x évolue: des objets qui n’existaient pas pour lui se mettent à exister ; d’autres cessent d’exister ; pour ’autres enfin le rapport personnel de x change. Dans cette évolution, l’invariant est l’individu ; ce qui change est la personne.

Entender-se-á neste trabalho o livro didático como um representante da instituição na qual os seus sujeitos são as pessoas que os produzem e os alunos hipotéticos que o utilizam, sendo a relação destes dois sujeitos perante o livro didático diferentes. Os objetos que fazem sentidos a esta instituição aqui utilizada são os saberes matemáticos neles contidos, como fez Freitas (2015) em sua dissertação.

2.2.2. Organização Praxeológica

Uma vez que a TAD situa a atividade humana dentro das atividades sociais, esta assume que os elementos práticos e teóricos que regem a ação humana podem ser descritos segundo uma organização, que envolve um tipo de tarefas, T , que é realizada por meio de uma técnica, τ , assim justificada por meio de uma tecnologia, θ , e então, tal tecnologia se justifica por uma teoria Θ . Este bloco, é o que se chama de organização praxeológica [T , τ , θ , Θ].

A palavra praxeologia vem do grego, *praxis* (ação) e *logos* (fundamento), entendendo que a ação humana pode ser descrita pela ação, o saber-fazer, caracterizado aqui pelo bloco [T , τ], e pelo saber, caracterizado pelo bloco [θ , Θ].

Não há práxis sem logos, mas também não há logos sem práxis. As duas estão unidas como dois lados da folha de um papel. Quando juntamos as palavras gregas *praxis* e *logos*, dá a praxeologia... Ela deve permitir que os alunos atuem com eficácia para resolver problemas e, ao mesmo tempo, entender o que fazem de maneira racional... Para responder a um determinado tipo de questão matemática é necessário elaborar uma praxeologia matemática constituída por um tipo de problema determinado por uma ou várias técnicas, sua tecnologia e a teoria correspondente (CHEVALLARD, BOSCH; GASCÓN 2001, p 251, 253).

O conceito de tarefa é, então, uma ação, algo que precisa ser realizado. Porém o termo tarefa é muito restrito, ele depende das circunstâncias em que deve e pode ser realizado, como por exemplo, lavar roupa é um tipo de tarefa, a tarefa lavar tal roupa na casa de João utilizando a máquina de lavar e com o sabão tal é uma tarefa, ela faz sentido num contexto específico. Um tipo de tarefas é mais geral e se incorpora diversas tarefas, no exemplo acima, lavar roupas seria um tipo de tarefa cuja tarefa descrita se enquadra. Yves Chevallard (1998, p 92) afirma sobre tarefa e tipos de tarefas, T :

Concretamente, um gênero de tarefas só existe sob a forma de diferentes tipos de tarefas, cujo conteúdo está bem especificado. Calcule ... é um gênero de tarefas; calcular o valor (exato) de uma expressão numérica contendo um radical é um tipo de

tarefas, bem como calcular o valor de uma expressão que contém a letra x quando é dado a x um determinado valor. (Tradução nossa)⁸

Ainda de acordo com Yves Chevallard (1998, p. 92), “uma praxeologia relativa à T especifica (em princípio) uma maneira de realizar, de executar as tarefas $t \in T$: à forma de fazer, τ , dá-se aqui o nome de técnica⁹”. Por exemplo, quando se pede ao aluno que calcule o volume de um cilindro dadas as medidas do raio de sua base e de sua altura, isto é um tipo de tarefa, geralmente expressa por um verbo e um complemento, calcular o volume de um cilindro de raio da base e altura dadas. Para a realização de tal tarefa, uma das possíveis técnicas é substituir o valor do raio e da altura na fórmula do volume do cilindro, esta é uma técnica ligada à tarefa proposta.

Outra técnica para essa mesma tarefa é calcular a área do círculo pela fórmula e multiplicar pela altura. Entende-se aqui que uma técnica é a junção de várias tarefas, secundárias no contexto de cada tipo de tarefas, que fazem sentido num contexto específico, ideia trazida no texto de Chaachoua e Bessot quando definem “o escopo de uma técnica τ é o conjunto de tarefas realizadas por τ ” (2018, p. 121). Cabe ressaltar aqui que as técnicas são dadas sempre por uma sequência de tipos de tarefas ou de tarefas, dependendo da especificidade delas.

O conjunto de tarefas e técnicas, denominado bloco prático-técnico $[T, \tau]$, o bloco do saber-fazer ou práxis, necessita de uma base teórica que a fundamente, um conjunto de elementos que justifiquem teoricamente tais técnicas. Um desses elementos é chamado de tecnologia, θ , no qual este se apresenta como um discurso racional sobre a técnica τ , uma justificativa das técnicas utilizadas, geralmente por meio de uma propriedade ou modo de fazer, a tecnologia é o que dá sentido à técnica. No caso exposto acima, a tecnologia utilizada é a fórmula do volume do cilindro.

⁸ Concrètement, un genre de tâches n'existe que sous la forme de différents types de tâches, dont le contenu est étroitement spécifié. Calculer... est un genre de tâches ; calculer la valeur (exacte) d'une expression numérique contenant un radical est un type de tâches, de même que calculer la valeur d'une expression contenant la lettre x quand on donne à x une valeur déterminée.

⁹ Une praxéologie relative à T précise (en principe) une manière d'accomplir, de réaliser les tâches $\in T$: à une telle manière de faire, τ , on donne ici le nom de technique

O outro elemento que fundamenta o bloco prático técnico é denominado teoria, Θ , que é o conceito matemático que ampara conceitualmente a tecnologia, seria uma justificativa mais formal do porquê daquela tecnologia.

O discurso tecnológico contém afirmações, mais ou menos explícitas, sobre as quais podemos buscar a razão. Em seguida, move-se para um nível mais elevado de justificação-explicação-produção, o da teoria Θ , o qual retoma, em relação à tecnologia, o papel que aquela tem no que diz respeito à técnica (CHEVALLARD, 1998, p 94).¹⁰

No caso descrito, a teoria utilizada é do campo das grandezas e medidas. O conjunto de tecnologia e teoria forma um bloco denominado bloco tecnológico-teórico, $[\theta, \Theta]$, o bloco do saber, o logos, o saber que fundamenta aquela teoria. Associa-se geralmente a teoria ao discurso que justifica a tecnologia. No exemplo anterior pode-se dizer que a teoria é o princípio de Cavalieri, associado à fórmula da área do círculo, que se insere dentro do campo das grandezas e medidas.

Ainda relacionado às praxeologias, Chevallard descreve quatro tipos: a pontual, local, regional e global.

Na verdade, encontramos raramente praxeologias pontuais. Geralmente, em uma determinada instituição, uma teoria Θ corresponde a várias tecnologias θ_j , cada uma das quais por sua vez justifica e torna inteligíveis várias técnicas τ_{ij} correspondentes a tantos tipos de tarefas. As organizações pontuais serão agregadas, inicialmente, em organizações locais, $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$, em seguida serão centradas em determinada tecnologia θ , em organizações regionais, $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$, formado por uma teoria Θ . (esta organização global será chamada de complexo praxeológico) $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k]$.¹¹ (CHEVALLARD 1998, p 95)

Entende-se então que as praxeologias pontuais, $[T, \tau, \theta, \Theta]$, agrupam-se pelos tipos de tarefas, enquanto a local, $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$, agrupam-se pelas tecnologias utilizadas. As praxeologias

¹⁰ À son tour, le discours technologique contient des assertions, plus ou moins explicites, dont on peut demander raison. On passe alors à un niveau supérieur de justification-explication-production, celui de la théorie, Θ , laquelle reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière tient par rapport à la technique.

¹¹ On ne rencontre en fait des praxéologies ponctuelles. Généralement, en une institution I donnée, une théorie Θ répond de plusieurs technologies θ_j , dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques τ_{ij} correspondant à autant de types de tâches T_{ij} . Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisations locales, $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$, centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisations régionales, $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$, formées autour d'une théorie Θ . (Au-delà, on nommera organisation globale le complexe praxéologique $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k]$ obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k .)

regionais, $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$, organizam-se segundo a teoria, girando em torno de um mesmo objeto de estudo, e a global, $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k]$, também chamada de complexo praxeológico, organiza-se de acordo com sua posição institucional, como a instituição enxerga aquele saber, sendo o agrupamento mais geral, no qual se pode observar como várias instituições compreendem certo saber, em uma esfera mais ampla que uma praxeologia local ou pontual.

Entende-se aqui que a amplitude da organização destas praxeologias depende do objetivo da pesquisa, uma vez que se pode escolher observar os dados pelas suas tarefas, pelas técnicas utilizadas, pelas tecnologias observadas ou pelas teorias indicadas, dependendo sempre do foco da análise.

Estas praxeologias, referentes a certo saber, podem ser localizadas dentro de uma escala hierárquica que determina em qual realidade se encontra este saber, especificando seu nicho e habitat, isto é, habitat é o local em que eles se encontram em relação ao objeto analisado e nicho é a sua função naquele local. Estes níveis hierárquicos são inter-relacionados e cada um tem as suas próprias restrições e condições. Estes níveis, chamados de Níveis de co-determinação didática, vão de um patamar muito geral, o da humanidade, até um bastante específico, o do assunto.

Figura 2: Escala de Níveis de Co-Determinação



FONTE: Própria autora baseado em Ferreira e Bellemain (2018 p.219).

A relação que pode ser dita entre a organização matemática e a escala de níveis de co-determinação é referente aos quatro tipos de praxeologias descritas anteriormente, a pontual, local, regional e global (CARVALHO, 2012). As diferenças entre os níveis podem ser observadas em um exemplo prático, no âmbito da humanidade seriam comportamentos inerentes ao ser humano, já no âmbito da civilização pode-se observar os comportamentos padrões de diversas sociedades, no âmbito da sociedade pode-se pensar num contexto mais restrito, como uma cidade, município ou país. Após este, tem-se a escola, ambiente em que se encontram não só o espaço físico, mas também os meios e formas de se pensar educacionalmente referentes ao âmbito escolar como um todo, tendo estas suas condições de existência e suas restrições, inclusive as políticas e ideológicas. A pedagogia refere-se às ações didáticas, referentes especificamente ao ensino (SANTOS, 2015).

Nos níveis mais baixos, tem-se agora uma caracterização de uma disciplina específica, sendo essa ainda sujeita aos níveis superiores. O nível do domínio é referente a uma praxeologia global, no qual se inserem diversas organizações regionais, como os blocos dos saberes, álgebra, números, grandezas e medidas. Este nível é ligado à instituição ao qual este saber é vinculado. O nível setor é referente às praxeologias regionais e que agrupam diversas organizações locais, isto é, elas podem ser descritas de acordo com uma mesma teoria, logo elas têm a mesma fundamentação teórica. (ibidem)

O tema é referente às organizações locais, que se agrupam pelas suas tecnologias, isto é, elas se justificam de acordo com os mesmos pressupostos. Já o último nível, o assunto, é reforçado por cada tipo de tarefas proposto, logo seu agrupamento é com as praxeologias pontuais.

2.2.3. Modelos Epistemológicos e Praxeológicos

Estudos mais recentes da TAD apontam a importância de um olhar crítico aos processos de transposição didática dentro das instituições, observando os modelos epistemológicos que são dominantes em certa instituição e questionando-os criticamente. A este processo dá-se o nome de emancipação epistemológica, de acordo com Gascón (2018). A emancipação institucional prega a dissociação dos sujeitos de seus papéis dentro de cada instituição, como forma de observar também de modo crítico o seu entorno.

A emancipação epistemológica constitui um aspecto particular, um primeiro passo essencial, da emancipação institucional que poderia ser definida, em geral, como libertação da sujeição à ideologia dominante nas instituições que fazem parte do seu objeto de estudo, ou seja, a emancipação não só do provincianismo epistemológico, mas também de todo o provincianismo didático, pedagógico e cultural. (GASCÓN, 2018, p. 53).

Este autor disserta inicialmente que um dos problemas iniciais que surgem nesse ramo da TAD é a “construção das ferramentas teóricas e metodológicas que são necessárias para tornar possível a emancipação didática da matemática como uma disciplina” (GASCÓN, 2018, p. 53), além de observar a divisão da matemática em setores e temas e analisar sua estrutura. A partir desta análise o pesquisador poderá questionar o modelo dominante naquela instituição e contribuir com o avanço da didática daquela subcampo de conhecimento em específico.

A importância do questionamento é tratada em relação a certo saber com a função de entender o porquê dele em certa instituição, o porquê de tal modo de ensinar, o porquê da importância do seu estudo, seja importância social ou interdisciplinar. Como pesquisador, o questionamento é essencial, questionar os métodos e práticas vigentes, apresentar novos modelos e novas práticas a partir da crítica a certo procedimento ou visão, questionando o mundo e suas nuances.

Em se analisando o saber matemático didaticamente, cabe ao pesquisador tomar seu ponto de vista a respeito deste e definir epistemologicamente quais aspectos deste saber devem ser tomados como importantes na análise do saber institucional. Com esta finalidade, são propostos modelos de referência “Específicos ou locais”, modelos estes baseados em pesquisas e que servirão de base para observar e questionar os modelos que se encontram em determinada instituição transpositiva. Estes modelos de referência ou alternativos são chamados de MER, os modelos epistemológicos de referência, enquanto o modelo epistemologicamente dominante ligado a certa instituição será chamado de MED. (ibidem).

O mesmo autor traz também reflexões sobre a influência deste modelo dentro de certa instituição, como as atividades realizadas propostas e possíveis de realização neste local, como a didática que se utiliza na abordagem de certo saber. Por isso a importância da emancipação epistemológica se faz presente e vem questionar também este modelo reforçando a criação de modelos de referências para questionar o modelo dominante naquela instituição. (GASCÓN 1994, 2001, *apud* GASCÓN 2018).

Para a criação dos modelos epistemológicos alternativos, pode-se utilizar a organização matemática para descrevê-lo, como cita Chevallard, o MER “No contexto da TAD, este modelo formula-se em termos de organizações ou praxeologias matemáticas” (1999, *apud* GASCÓN, 2018, p. 62). Este modelo alternativo, agora descrito por sua praxeologia, pode e deve ser questionado sempre, uma vez que é entendido como modelo alternativo e seu surgimento tem a finalidade de questionar o modelo dominante de certa instituição por meio de seu saber/fazer e saber. Como o MER é dado de acordo com o entendimento do pesquisador, à medida que as pesquisas avançam no saber em questão, este modelo tende a ser questionado e/ou aprimorado.

Um MER mais geral deve surgir no ensino de tal saber e este basear outros modelos alternativos, locais, mais específicos após uma certa quantidade de pesquisas em tal campo do conhecimento emergirem. Uma vez que um modelo de referência que possa se adaptar a várias instituições ou servir como base para diversos modelos locais deve ser entendido como um modelo mais amplo, mas não inquestionável. Os MER que surgem após este MER geral são baseados neste e revistos de acordo com a especificidade de cada instituição, com a finalidade de questionar o MED daquela.

Quando se dialoga sobre o MER, pode-se descrevê-lo com base em outras teorias e outros construtos didáticos, dada a abrangência do conceito deste modelo e a sua fundamentação baseada nos pressupostos da emancipação epistemológica. Quando se olha especificamente para a TAD, praxeologicamente, descreve-se este modelo como um modelo praxeológico de referência (MPR), em que se utiliza da praxeologia matemática para descrevê-lo. O modelo dominante, em se tratando da análise praxeológica do mesmo, será chamado de modelo praxeológico dominante, MPD. O MPR precisa distanciar-se da instituição alvo, uma vez que este servirá para questioná-la e colaborar com a melhoria do MPD.

2.2.4. Noção de Variáveis Dentro da TAD

Pesquisas recentes incluíram a noção de variável à análise praxeológica. Assim, os tipos de tarefas são descritos por meio de subtipos de tarefas e suas relações entre as técnicas, uma vez que para cada tipo de tarefas deve existir um certo número de técnicas associadas a esta e que são aceitas dentro da instituição em questão. Levando em consideração que uma técnica é descrita por uma sequência de tarefas, pode-se observar a relação entre as tarefas e as técnicas

como conjuntos e subconjuntos, ideia reafirmada por Chaachoua e Bessot (2018, p. 46) e trazida em modelos construídos por eles: “uma técnica τ é descrita por um conjunto de tipos de tarefas”.

As pesquisas de Chaachoua e Bessot (2018) levam a crer que: dado um conjunto de tipos de tarefas denotado por T , e $P(\tau)$ o conjunto de tarefas descritas em τ , existe ao menos uma técnica τ que realiza uma tarefa t em T e, se isto acontece, ou $P(\tau)$ é subconjunto de T ou T é subconjunto de $P(\tau)$. Denotar-se-á aqui um subtipo de tarefa T' um tipo de tarefas que é um subconjunto de T . Exemplificando o descrito acima, diga-se um tipo de tarefas

$T_{\text{calc.}}$ - Calcular o volume de um paralelepípedo.

Algumas técnicas possíveis para este tipo de tarefas podem ser:

$\tau_{\text{mul.ar}}$ - Multiplicar as medidas das três arestas perpendiculares entre si.

$\tau_{\text{cont.}}$ - Contar quantos cubos unitários cabem dentro do paralelepípedo.

As técnicas descritas também são tipos de tarefas que podem aparecer eventualmente em outro momento e contexto. Por exemplo, $\tau_{\text{mul.ar}}$ e $\tau_{\text{cont.}}$ pertencerem ao subconjunto de tipos de tarefas ou $T_{\text{calc.}}$ pertencer ao subconjunto de técnicas. Dentro deste tipo de tarefa $T_{\text{calc.}}$ pode-se agrupar diversos tipos de tarefas, que também podem vir a serem utilizadas como técnicas, como $T_{\text{calc.ares.}}$ - Calcular o volume de um paralelepípedo dadas arestas, ou $T_{\text{calc.prop.}}$ - Calcular o volume de um paralelepípedo dado volume de outro paralelepípedo com proporção dada, ou $T_{\text{calc.frac.}}$ - Calcular o volume de um paralelepípedo dadas frações das medidas das arestas. Então, entende-se que os subconjuntos de tipos de tarefas e técnicas são conectados por uma relação de pertencimento.

Pensando na organização de um modelo praxeológico que permita uma melhor visualização e análise de um objeto de conhecimento, ainda de acordo com Chaachoua e Bessot (2018) que possa ir de um tipo de tarefas mais específico a um mais geral, pensou-se nesta relação de pertinência. Um ponto chave nesta noção é a organização das tarefas em consonância com as técnicas, uma vez que estas se mesclam num cenário mais geral. De acordo com os autores (CHAACHOUA; BESSOT 2018, p. 123), dada uma tarefa T e uma técnica τ em $P(\tau)$.

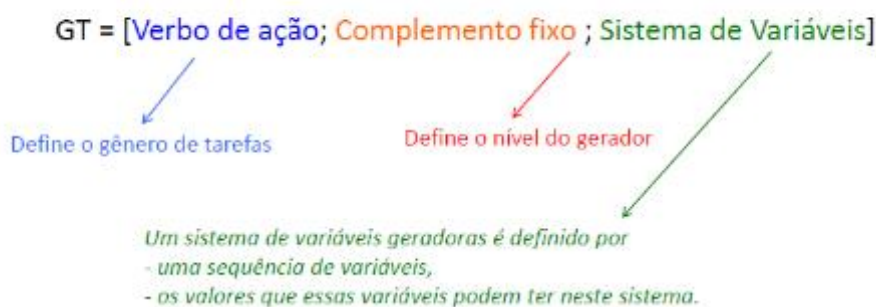
- 1 Se T pertence a $P(\tau)$, pode existir T' mais geral que T e que é uma técnica;
- 2 Se $P(\tau)$ pertence a T , pode existir uma T' mais específica que T e que é uma técnica.

Pensando nesta relação introduz-se a noção de variável, em que um tipo de tarefa pode ser descrito segundo alguns parâmetros e que satisfazem as relações de pertinência como

conjuntos. Os pesquisadores (ibidem) propuseram um gerador de tarefas (GT) seguindo as características descritas acima, em que um tipo de tarefa T mais geral é elencada com algumas variáveis que fazem sentido dentro da instituição em questão, um sistema de variáveis. Por exemplo, num tipo de tarefa “Calcular volume” pode ser descrito por um GT: [calcular o volume, V_1 , V_2 , V_3], no qual V_1 é o tipo de sólido geométrico, V_2 é a regularidade deste e V_3 é a natureza dos valores dados (N , Z , R). Observando sempre que cada variável acrescentada torna o subtipo de tarefa mais específico do que o subtipo sem esta variável, com a relação de pertinência.

Figura 3: Representação do Modelo de um Gerador de Tarefas (GT)

Gerador de Tipo de Tarefas



FONTE: Bessot e Chaachoua (2019, p. 6).

As funções destas variáveis são, inicialmente, gerar mais subtipos de tarefas, ainda de acordo com os pesquisadores (ibidem), em seguida caracterizar os $P(\tau)$, no qual pode-se descrever as técnicas utilizadas a partir deste sistema de variáveis, permitindo, assim, a condução de uma análise a priori e a construção de um MPR. Pode-se observar também as variáveis deste sistema sob as perspectivas epistemológicas, institucionais e didáticas, como tratam os autores Chaachoua e Bessot (2018, p. 124, 125):

- 1 Epistemológico: As variáveis se encontram no mesmo nível do MPR, no qual a movimentação de uma variável transforma o escopo de técnicas para aquele tipo de tarefa.
- 2 Institucional: As restrições impostas pela instituição permeiam a validade e as condições das variáveis utilizadas no sistema.
- 3 Didático: Os procedimentos didáticos que serão utilizados no ensino daquele saber também alteram o funcionamento das variáveis.

Como exemplo desse conceito de variável, pode-se pensar no tipo de tarefa comparar volume. Esse tipo de tarefa é bastante amplo e pode agrupar tipos de tarefas diversos, como comparar volume de líquidos dada marcação em recipiente, comparar volume de três paralelepípedos retângulos ou comparar volume de esfera e cilindro. As variáveis que se pode utilizar neste caso são diversas, como o tipo de sólido, se é sólido ou líquido, o tipo de técnica a ser utilizada, a quantidade de objetos a serem comparados. Dependendo da abordagem do pesquisador, as variáveis podem mudar para obter aspectos diferentes de análise.

Ao modelar o MPR a partir do sistema de variáveis, pode-se observá-lo dentro dos níveis de co-determinação didática, em que é possível observar não só em que local, no ensino, encaixa-se cada variável e permite também analisar a praxeologia de acordo com as praxeologias pontuais, locais, regionais e globais, observando um tipo de tarefa mais geral ou menos geral com mais ou menos variáveis.

Deixando claro aqui que “um gerador de tarefas não é um tipo de tarefa” (BESSOT; CHAACHOUA, 2019, p. 6), este possibilita gerar tarefas que podem ser vistas como uma ramificação de tipos de tarefas mais gerais. O quão geral será esta tarefa depende do pesquisador, uma vez que este decida qual tipo de praxeologia este quer estudar, pontual, local, regional ou global, ou ainda em que tipo de especificidade este quer observar, com quais condições quer lidar.

Dito isto, para a observação da progressão dos conteúdos e abordagens que se espera encontrar nos livros didáticos, realizou-se a construção de um modelo praxeológico de referência com os saberes volume e capacidade a partir do qual se questionará o modelo epistemológico dominante concretizado nos livros didáticos com a finalidade de desenvolvê-lo. Observando como este modelo se comporta em relação aos diferentes anos de ensino e em que nível de codeterminação estes se encontram com o auxílio do sistema de variáveis e investigar a diferença entre as variáveis adicionadas e retiradas nos livros analisados.

2.3. VOLUME E CAPACIDADE COMO OBJETOS MATEMÁTICOS E DIDÁTICOS

Os conceitos matemáticos foram surgindo junto com o desenvolvimento da sociedade, sejam por necessidade ou pelo avanço das pesquisas, como a noção de contagem, o sistema numérico, o zero, as frações e números decimais, as unidades de medida entre diversos outros conceitos que propiciaram certo avanço na sociedade e que nos trouxeram, de alguma forma,

aos tempos atuais. A necessidade da abstração na compreensão dos conceitos matemáticos auxilia tanto na criação de novos conceitos quanto na compreensão mais racional das circunstâncias postas no mundo real, porém nem sempre a aplicação da matemática no contexto real se dá de forma fácil.

Os estudos atuais da matemática necessitam de um nível de abstração muito alto em relação ao que se costuma estudar na educação básica. Pode-se observar isto ao tentar explicar para uma criança o que um matemático faz ou estuda pensando em termos da matemática pura, diferente de um engenheiro civil, que “calcula ‘coisas’ para construir prédios” ou um físico que “estuda os fenômenos que acontecem no universo”. A matemática pura está muito além do concreto, o que a torna um objeto de difícil descrição fora do abstrato. Há também a matemática aplicada que é estudada não só por matemáticos, mas engenheiros, físicos, químicos, entre outros, relacionando a matemática com outros campos do conhecimento.

Uma questão que é discutida quando se fala em matemática escolar em relação a sua história e permeando o ensino é se os conteúdos escolares seriam mais bem compreendidos pelos alunos se ensinados da forma como foram criados, como a criação dos números racionais pela necessidade social da época. Pensar no ensino baseado no avanço do conteúdo à medida em que os questionamentos foram surgindo e que muitas vezes são obstáculos na compreensão do aluno, ou com outra organização didática, que leve em consideração a dificuldade de compreensão e abstração dos conceitos e o nível de escolaridade.

Pensando na Teoria da Transposição Didática para analisar tal situação, o saber matemático passou por diversas transformações desde sua criação, nos tempos antigos, quando a matemática era estudada apenas para resolver problemas no mundo real. Diferente do estudo da matemática atual, onde essa resolve seus próprios problemas, este saber criado foi transposto e despersonalizado, findando em um saber que só faz sentido dentro da própria matemática, sendo essa a causa e a resolução de seus problemas. Transformando aquele saber que outrora era a solução de problemas cotidianos em uma linguagem rebuscada e de difícil compreensão. A utilização da história da matemática no ensino da mesma remete àquele saber contextualizado, no qual a matemática não existia por si só, que fazia sentido em alguma situação da sociedade em que foi criada, facilitando assim a compreensão destes conceitos.

De uma forma ou de outra, a matemática se desenvolve a partir de problemas e questionamentos, sejam eles do mundo real ou dentro da própria matemática. Dito isso, tratar-se-á da história da matemática no que concerne à evolução dos conceitos de volume e

capacidade até a chegada ao seu entendimento atual na sociedade, com o que se tem de registro e pesquisas sobre os tempos antigos e como essas criações puderam auxiliar de algum modo o desenvolvimento da sociedade.

2.3.1. Desenvolvimento Histórico do Conceito de Volume

Baseando-se nos livros de Roque e Carvalho (2012), Eves (2004) e Boyer (1974), tratar-se-á aqui do desenvolvimento dos conceitos de volume e capacidade e tópicos correlatos ao longo da história.

Roque e Carvalho (2012) afirmam que a civilização babilônica, que viveu entre os séc. XX a XIV a.E.C.¹², entendia de cálculos de volume de prismas retos com bases retangulares e triangulares e de cilindros de base circular reto também, os quais eram utilizados para fins agrícolas, civis e militares, como a construção de muros, barragens e a relação entre tais construções e a quantidade de trabalhadores necessários para a sua construção. O método utilizado por estes para o cálculo do volume do cilindro inicia-se com o cálculo do perímetro do círculo, com $\pi \approx 3$, calcula-se a área da base e então multiplica-se pela altura.

Os mesmos autores alegam que os egípcios sabiam calcular o volume de prismas de base retangular e cilindros retos também, porém nos estudos sobre as pirâmides foram bem mais à frente e sabe-se hoje em dia que eles podiam calcular a inclinação da base, o seu volume e o volume do seu tronco. Em relação ao cálculo com circunferências que utilizam o π , havia uma constante aproximada ao qual eles utilizavam para o cálculo do comprimento e da área, mas diferente do que se chama hoje de π .

Os gregos deram um grande salto no que concerne ao desenvolvimento da matemática no séc. V a.E.C. O estudo da geometria foi disseminado na Grécia e era estudado em Atenas, embora não se saiba como, a escola Pitagórica pode ter alguma influência, mas sem comprovação. Nesta época há indícios da descoberta das grandezas incomensuráveis, questão que só foi estudada sistematicamente muitos séculos depois, com a formalização dos números reais por Cantor e Dedekind no séc. XIX d.E.C. Este marco determinou a separação entre a

¹²“Era comum é o período que mede o tempo a partir do ano primeiro no calendário gregoriano.” (ERA COMUM, 2019), similar ao A.C e d.E.C. é similar ao D.C.

álgebra e a geometria na época e motivou a visão da geometria de forma similar à que se tem hoje em dia, com os Elementos de Euclides.

Roque e Carvalho (2012) atentam, neste momento, para a importância desse fato acima descrito para a diferenciação do universo dos números e das grandezas, em que ter duas grandezas incomensuráveis findou por criar a necessidade de uma certa formalização no estudo da geometria, saindo assim do campo dos sentidos, como sendo algo puramente visível e tátil, o que nos traz à matemática de hoje em dia. Euclides trouxe em seus Elementos uma formalização para a geometria que não era vista antes, em que os procedimentos de medida eram comuns ao invés da inferência lógica e não mais apenas pela observação.

Os Elementos de Euclides foram escritos em 13 capítulos, os capítulos XI ao XIII tratam de geometria espacial, que é assunto de interesse aqui. Nestes capítulos são estudadas as relações e propriedades de triângulos, retângulos, circunferências, suas áreas e o volume de esferas, cones, pirâmides e cilindros, nos quais ele define sólidos geométricos como “aquilo que tem altura, largura e espessura” (BOYER, 1974, p. 86). De acordo com o mesmo autor, estes manuscritos são a mais antiga obra grega da matemática ao qual se tem acesso, apesar de terem sofrido diversas alterações com o passar dos séculos, uma vez que foi escrito em 300 a.E.C. e republicado diversas vezes.

O último capítulo trata de sólidos geométricos, mais especificamente os sólidos platônicos. Ao final ele tenta compreender os sólidos platônicos dentro de uma esfera, associando uma razão às arestas dos sólidos e ao raio da circunferência circunscrita. Trata também da razão entre a aresta e o diâmetro de todos os sólidos regulares e, por fim, que não pode haver nenhum outro poliedro regular, fora os cinco descritos como platônicos. Em 1482 os manuscritos foram impressos pela primeira vez, acredita-se ser um dos primeiros livros de matemática feitos e, supõe-se que haja mais de mil edições, sendo, se não o, um dos livros mais célebres da matemática.

Outro matemático de grande importância foi Arquimedes. É amplamente conhecido pela descoberta de certas propriedades dos fluidos, como o princípio hidrostático de Arquimedes, que afirma que se colocado um certo sólido em um fluido mais leve, este tenderá a ficar totalmente imerso e o fluido será deslocado. A esta descoberta, de acordo com Boyer (1974, p. 91), diz-se que Arquimedes saiu correndo pela casa pelado gritando “EUREKA!” (eu consegui), frase pela qual é reconhecido até hoje. Pensando neste fato em termos de volume e capacidade, um certo sólido colocado em um recipiente com um líquido desloca o líquido do recipiente para

cima, isto é, o volume total do material dentro do recipiente será o volume do líquido adicionado ao volume do sólido submerso de acordo com a densidade do líquido.

O italiano Cavalieri, já no século XII d.E.C., deu um passo considerável também no avanço das ideias sobre volume de sólidos, segundo Eves (2004, p. 425). Em seu livro “Geometria dos indivisíveis”, descreve o princípio de Cavalieri, no qual afirma que dados dois sólidos de mesma altura, se estes têm cortes laterais formando áreas de mesma medida, estes dois sólidos possuem o mesmo volume. Como pode ser observado logo abaixo, esse princípio é de grande utilidade ao pensar em sólidos não regulares. Cavalieri demonstrou também que o volume do cone é $1/3$ do volume do cilindro circunscrito.

“1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante”. (EVES, 2004, p. 426).

“2 Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante” (ibidem)

Com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, por Leibniz e Newton, foi possível determinar a área de figuras planas diversas por meio de somas infinitesimais. O volume de sólidos diversos também pôde ser estudado baseando-se nessa mesma ideia, mas com soma infinitesimal de áreas paralelas, utilizando para isso a ideia de convergência entre limite inferior e limite superior de integrais para determinar o volume.

2.3.2. Volume como Objeto Matemático

Ao falar de volume de sólidos, no geral, pensa-se no volume de sólidos geométricos simples, isto é, prismas, pirâmides, cones, cilindros e esferas, que são uma pequena parte dos sólidos geométricos que podem ser estudados e geralmente o são na educação básica. Os conceitos matemáticos que são necessários para um estudo mais aprofundado que incluiria o volume de sólidos geométricos mais diversos não cabem aqui nesta discussão dado que ultrapassam o que se espera que seja estudado ao longo do ensino fundamental e médio. Porém, antes de definir o que seriam estes sólidos geométricos simples, é necessário definir o que seriam sólidos geométricos num contexto mais geral.

Entende-se aqui sólidos geométricos como um “subconjunto limitado do espaço Euclidiano tridimensional” (BARROS, 2002 p. 24). Chamar-se-á as medidas do comprimento de suas arestas e/ou segmentos importantes (diâmetro) de certo sólido neste espaço Euclidiano de altura, largura e profundidade, associando aos eixos perpendiculares deste espaço tridimensional.

Uma abordagem intuitiva do volume é de que este é o espaço que certo sólido ocupa, em que, no intuito de associar essa “quantidade de espaço” com um número, recorre-se a uma unidade de medida, o que se chamará de volume, segundo Elon Lages Lima et al. (2006), autores estes que tratam volume como função, não como grandeza. A noção intuitiva de capacidade é de quanto espaço há dentro de certo recipiente, seguindo a mesma lógica descrita para volume de acordo com os autores acima. A partir de algumas propriedades associadas a tais conceitos, pode-se calcular o volume, compará-lo, produzir sólidos com volume determinado e relacionar certo recipiente com sua capacidade, produzir recipiente com capacidade determinada, entre outros cenários que propiciam um entendimento mais amplo sobre estas grandezas e que também foram abordadas em outros trabalhos, como Oliveira (2002, 2007), Barros (2002), Figueiredo (2013), Morais (2012), entre outros.

Entender-se-á aqui os sólidos geométricos como subconjuntos limitados e mensuráveis no espaço, $\mathbb{R}^3$. As definições formais de limitado e mensurável exigiriam ideias e conceitos matemáticos que adentram na topologia e estão além deste trabalho, estes findariam por conduzir a vários outros conceitos que não cabem aqui¹³. Discutir-se-á essas ideias de modo relativamente informal, tratando do reconhecimento e caracterização de propriedades das figuras geométricas e em particular dos sólidos geométricos, assuntos que são estudados efetivamente no ensino básico, interesse deste trabalho.

Ser limitado implica na existência de um centro C e um raio R tais que a esfera de centro C e raio R contém totalmente o sólido em seu interior.

Dizer que os sólidos geométricos são mensuráveis é afirmar que existe uma função medida de volume, que respeita certas propriedades (que serão apresentadas a seguir), cujo domínio é um conjunto de subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ (os sólidos geométricos) e o contradomínio são os números reais positivos, $\mathbb{R}^+$.

¹³Vide Moise (1990)

Formalmente, define-se volume por uma função, esta é suportada em um subconjunto de pontos no espaço que são ditos mensuráveis, dir-se-á aqui $\mathcal{S}$, este é o conjunto que suporta as condições necessárias da função volume.

De acordo com Moise (1990), tomando $\mathcal{S}$ (conjunto dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, mensuráveis por uma função v), define-se a função v que leva um elemento A de $\mathcal{S}$ a um número real. Esta função satisfaz algumas condições¹⁴:

- I. **Positividade:** Se A tem interior não vazio, $v(A) > 0$, para todo A em $\mathcal{S}$.
- II. **Aditividade:** Se A e B pertencem a $\mathcal{S}$ e a interseção entre eles são apenas pontos das suas fronteiras¹⁵, então

$$v(A \cup B) = v(A) + v(B)$$

- III. **Invariância por Isometria:** Se um sólido A for transformado em um sólido B de modo que preserve distância, isto é, a distância entre dois pontos quaisquer em A seja a mesma para os pontos correspondentes em B , então $v(A) = v(B)$.

Tomando $v(A)$ como um valor atribuído ao sólido A , $v(A)$ é dita aqui **medida de volume** de A , dir-se-á aqui também que todo sólido A em $\mathcal{S}$ é mensurável com respeito à função v , então chamar-se-á $\mathcal{S}$ de conjunto dos sólidos mensuráveis.

Portanto, a imagem dos sólidos pela função volume (na nossa modelização, a medida do volume dos sólidos) é sempre positiva. Se dois sólidos são disjuntos ou têm somente pontos de fronteira em comum, a medida do volume do sólido obtido pela união entre eles é igual à soma das medidas de volume de cada um. E, transformação de sólidos por meio de movimentos rígidos preservam o volume. Neste conjunto $\mathcal{S}$ estão presentes todos os sólidos que são estudados na matemática escolar, sendo ele suficientemente grande para o que este trabalho se propõe.

- IV. **Soma e Diferença de Sólidos Mensuráveis:** Se A e B são sólidos mensuráveis, $A \cup B$ e $A \setminus B$ são mensuráveis, isto é, estão em $\mathcal{S}$.
- V. **Existência de um Sólido Mensurável Básico:** Um cubo é mensurável, logo existe $v(A)$ se A é um cubo em $\mathcal{S}$.

Em se tratando da função medida de volume, o valor numérico desta será associado, inicialmente, a um cubo unitário, dado que um cubo que tenha suas arestas medindo um (uma

¹⁴Baseada nas propriedades descritas em Barros (2002, p. 37-41)

¹⁵ A e B são quase disjuntos.

unidade de medida de comprimento) possui volume, de acordo com a propriedade V. Este cubo de arestas um será chamado de U, define-se então uma função medida de volume que associa a este cubo U o volume 1, isto é,

$$v: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tal que } v_U(U) = 1.$$

Diz-se então que $v_U(A)$ é a medida de volume do sólido A em $\mathcal{S}$ na unidade de volume U, sendo o cubo U dito unitário. Esta função é mundialmente aceita como função medida de volume e comumente chamada de volume de A, associando o valor numérico dado como saída da função ao volume do sólido A, sendo esse número $v_U(A)$ a quantidade de cubos unitários U contidos em A. Torna-se então fácil ver que dado um paralelepípedo B com arestas medindo a, b e c unidades de medida, $a, b \text{ e } c \in \mathbb{R}_+$, então $v_U(B) = a \times b \times c$.

Se a função v_U satisfaz todas as condições acima, ela é definida para todos os prismas em $\mathcal{S}$, logo para todos os sólidos estudados até o 6º ano do ensino fundamental. Esta função v_U é única, isto é, qualquer outra função que satisfaça as mesmas propriedades é proporcional a v_U . A demonstração desta proposição pode ser encontrada nos trabalhos de Barros (2002, p. 26), Oliveira (2002, p. 40, 2007, p. 47) e Moraes (2013, p. 36).

Ao pensar em uma função volume que associa um sólido a um certo número, seu domínio é um conjunto de sólidos mensuráveis no espaço e a imagem de cada sólido é um número real não negativo. É importante ressaltar que sólidos diferentes podem ter mesmo volume e, portanto, essa função não é injetora, mas sim sobrejetora. Além disso, pode-se mostrar que se a unidade de volume é alterada, a função é alterada, mas os novos valores são proporcionais aos valores originais. Ou seja, sólidos geométricos mensuráveis que têm mesma medida por uma função volume terão mesma medida por outra função volume.

Reitera-se aqui que dois sólidos podem ter um mesmo valor numérico associado ao volume, mas um sólido não pode ter dois valores diferentes de volume ligados a uma mesma função e ao alterar a unidade de medida, o valor numérico do volume se altera, mas não o volume em seu aspecto geométrico, o volume do objeto em si.

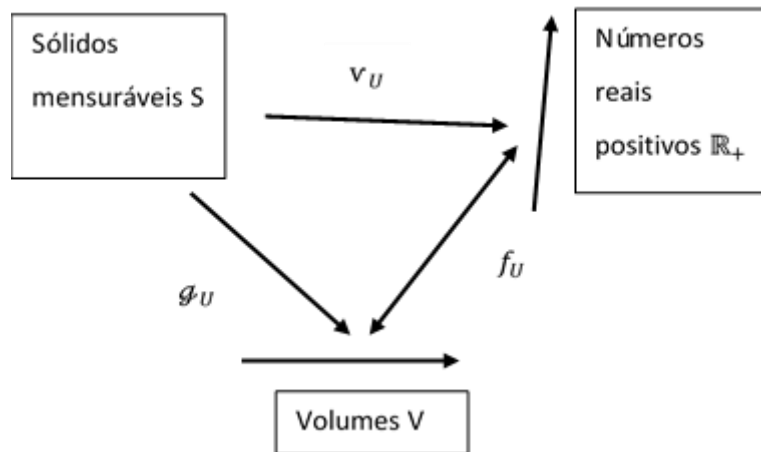
Desta forma pode-se formar uma classe de equivalência de sólidos que possuem o mesmo valor numérico associado pela função medida de volume dentro de $\mathcal{S}$. Pode-se definir então a relação de equivalência $\approx A \approx B \Leftrightarrow v_U(A) = v_U(B)$, esta relação é reflexiva ($A \approx A$), transitiva ($A \approx B \text{ e } B \approx C \Rightarrow A \approx C$) e simétrica ($A \approx B \Leftrightarrow B \approx A$), portanto é uma relação de

equivalência¹⁶. Tome por $\mathcal{V}$ o conjunto destas classes de equivalência dos sólidos que possuem o mesmo volume, denominado o conjunto dos volumes. Assim, dado um sólido A , a classe de equivalência à qual ele pertence é a classe de volume A , o conjunto de todos os sólidos geométricos mensuráveis em $\mathcal{S}$ que possuem volume igual a A de acordo com a função v_U ou qualquer outra função volume que atenda as proposições citadas anteriormente.

Como, por exemplo, o conjunto dos sólidos geométricos mensuráveis cujo volume seja 27 cm^3 , pode-se associar um cubo de arestas 3 cm , um paralelepípedo de dimensões 3 cm , 9 cm e 1 cm ou um cilindro de altura 3 cm e raio $3(\sqrt[2]{\pi})^{-1} \text{ cm}$.

Pode-se associar o volume A de certo sólido mensurável A em $\mathcal{S}$ ao valor da função medida de volume calculada em A por meio de uma função, que será aqui chamada de função f_U , definida em $\mathcal{S}$ com $f_U(A) = v_U(A)$. Então pode-se dizer que a função f_U é tida como a função volume na unidade de medida U e o seu valor numérico é igual ao valor da função medida de volume de A também na unidade de medida U . Outra função, aqui definida por $\mathcal{G}_U$, leva o sólido A na classe de equivalência em $\mathcal{V}$, formando o esquema abaixo.

Figura 4: Esquema Funcional da Grandeza Volume



FONTE: Própria autora baseado em Barros (2002, p. 28)

Dadas as proposições acima, pode-se compreender três aspectos ligados ao volume de certo sólido A , A como sólido geométrico, ligado à geometria, que possui volume β_U , sendo β o valor numérico que relaciona as classes de equivalência em $\mathcal{V}$ de acordo com a unidade de

¹⁶ Vide Barros (2002, p. 27) para demonstrações.

medida U , e este volume β_U e a relação entre o par medida a , saída da função medida de volume em A , $v_U(A) = a$, e a unidade de medida U .

As propriedades acima dizem respeito a sólidos quaisquer, mas serão importantes para o tratamento das tarefas relativas ao volume e o entendimento das técnicas de resolução delas, isto é, para a tecnologia e a teoria que serão associadas à práxis em torno do volume, utilizando aqui a linguagem da TAD.

O volume como função matemática, entendido aqui como um saber sábio, faz sentido, no contexto estudado aqui, dentro da matemática, entre seus teoremas e axiomas, mas para o ensino nos anos iniciais do ensino fundamental é necessário que seja transposto a um saber mais próximo ao aluno e que este seja capaz de compreender.

Este saber sábio chega na noosfera e é transposto no saber a ensinar, que está disposto, também, nos documentos oficiais, especificando o que deve ser estudado deste objeto matemático, quais as características importantes para o aluno e sugestões de ensino, como será visto posteriormente. Os saberes que chegam às escolas e, conseqüentemente, aos alunos passam muito longe da formalidade matemática descrita acima, a TTD questiona como chegam estes saberes na escola, quais das características ligadas ao saber são preconizadas no ensino, como ocorre esse processo transpositivo entre o saber sábio e o saber aprendido.

2.3.3. Volume e Capacidade em Seus Aspectos Didáticos

Uma das questões que pretendemos discutir nessa pesquisa é a relação entre capacidade e volume. O que aproxima essas noções? O que as distingue? De que maneira no ensino fundamental são e/ou devem ser tratadas as relações entre capacidade e volume?

Uma primeira visão é a de que a capacidade é o volume interno de um recipiente¹⁷ e, nesse caso, volume é um conceito mais geral, ou seja, capacidade é um caso particular de volume. Um sólido maciço tem volume, mas não tem capacidade, enquanto um sólido oco tem volume e capacidade.

¹⁷ A ideia de capacidade se afasta da de volume, em certos contextos, embora remeta em certo sentido à ocupação de um espaço: em um salão de festas, quando se fala de capacidade, trata-se muitas vezes da quantidade de mesas e cadeiras que se pode instalar em seu interior, ou em um espaço destinado a um show, a capacidade é a quantidade de pessoas que caberiam no espaço, de acordo com certa quantidade de pessoas por metro quadrado. Nesse trabalho, o sentido privilegiado é o que trata do volume interno de um recipiente.

O volume interno é tido como a quantidade de matéria que constitui um objeto no sentido físico. Consideramos dois sentidos, um primeiro sentido para objetos nos quais a matéria faz parte de sua estrutura, por exemplo, um pedaço de madeira. O segundo significado é a quantidade de matéria que pode ser colocada dentro de um objeto. Para uma caixa cheia de areia, o volume interno é considerado como a quantidade de areia; em uma caixa de suco, consideramos o volume interno como a quantidade de suco, para um balão, a quantidade de ar. Desse ponto de vista, volume como capacidade tem esse sentido físico.¹⁸ (ANWANDTER-CUELLAR, 2008, p.53).

A autora acima entende volume e capacidade como grandezas de mesma natureza, porém vê a capacidade como uma grandeza física, associada à matéria. Neste trabalho a capacidade é vista como uma grandeza matemática e em seus aspectos dentro da didática, entendendo as duas grandezas como de mesma natureza, porém diferentes em aspectos didáticos. Outro ponto a ser destacado é que as unidades de medida padrão para capacidade são o litro, seus múltiplos e submúltiplos, enquanto ao falar de volume, utilizam-se o metro cúbico, seus múltiplos e submúltiplos.

Este costume de utilizar apenas unidades padronizadas leva a crer que a capacidade é associada à quantidade de líquidos. Lima e Bellemain (2010) afirmam que a relação entre a capacidade e o volume de líquidos se dá devido às propriedades físicas dos líquidos, que se adequam ao recipiente que os contém, propiciando a conexão entre o espaço que o líquido ocupa e a capacidade do recipiente. Esses autores afirmam, entretanto, que essa conexão pode ser prejudicial à conceituação reforçando a tendência dos alunos a concepções errôneas como aquelas que levam a confundir as grandezas massa e capacidade. Um recipiente pode ser preenchido por matéria em qualquer estado (líquido, sólido ou gasoso). Por exemplo, nas feiras livres ou na culinária, utilizam-se xícaras e cuias para medir capacidade, tanto para líquidos (água, leite, suco etc.) como para sólidos (farinha, arroz etc.).

Oliveira (2002) evidencia em seus estudos que quando se trata de capacidade, os sólidos geométricos utilizados para tais fins são usualmente tomados como sólidos de borda nula, isto é, o recipiente que tem tal capacidade é oco não tem volume por si só, então a sua capacidade

¹⁸Le volume intérieur est considéré comme la quantité de matière au sens physique qui constitue un objet. Nous avons considéré deux sens, un premier sens pour les objets pour lesquels la matière fait partie de leur structure, par exemple un madrier. Le deuxième sens est la quantité de matière que l'on peut mettre dans un objet. Pour une boîte remplie de sable, on considère le volume intérieur comme la quantité de sable ; dans une boîte de jus, on considère le volume intérieur comme la quantité de jus, pour un ballon, la quantité d'air. De ce point de vue, le volume comme capacité fait partie de ce type de conception.

é diretamente relacionada ao volume do recipiente como se este não fosse oco, uma vez que as duas grandezas tem relação entre suas unidades de medidas, tornando a diferenciação desses dois conceitos uma tarefa bem mais árdua. Lima e Bellemain (2010) também reiteram essa compreensão ao afirmar que o volume de certo sólido é sempre maior que sua capacidade, mesmo que só um pouco, devido aos recipientes de borda nula que não existem na prática.

Segundo a pesquisa de Oliveira (2002, 2007) e Barros (2002), uma forma de observar esta diferenciação entre as grandezas volume e capacidade é através de seu aspecto dimensional, uma vez que são os mesmos como objetos matemáticos, diferenciação didática e de suma importância neste trabalho. Usualmente toma-se a capacidade como o volume interno de certo recipiente que é oco, isto é, não é maciço.

2.3.4. Questão da Dimensionalidade

A grandeza volume pode ser considerada tridimensional, quando é relativa às três dimensões do sólido, altura, largura e profundidade, mas é unidimensional se observada como um múltiplo escalar de outra unidade de volume, como afirma Barros (2002). Pode-se compreender essa ideia da tridimensionalidade quando se pensa nas unidades de medida de volume, m^3 , cm^3 , dm^3 . Já a capacidade é descrita como uma grandeza unidimensional, ela é associada por comparação a uma unidade de medida, por exemplo 1 ml.

Porém quando se trata do volume de líquidos, torna-se volume em um aspecto unidimensional, assim como ao tratar da capacidade de um recipiente, pode-se fazer de acordo com as medidas das suas arestas, tratando-a em cm^3 ou m^3 , sendo então tridimensional.

Oliveira (2002) discute a dimensionalidade inicialmente baseada em escritos de Poincaré¹⁹ de 1995²⁰, que relaciona dimensão com separação em duas partes, com a ideia de corte de retas, planos e espaço, tomando uma reta como um segmento contínuo e que é cortado por um ponto, separando-se em duas partes por um ponto, que é o menor objeto que pode separar uma reta em duas partes, tem-se que a reta tem duas dimensões e assim sucessivamente.

¹⁹ **Jules Henri Poincaré** (Nancy, 29 de abril de 1854 — Paris, 17 de julho de 1912) foi um matemático, físico e filósofo da ciência francês. (HENRI POINCARÉ, 2021)

²⁰ Publicação póstuma.

Se para dividir um contínuo C bastam cortes que formem um ou vários contínuos de uma dimensão, diremos que C é um contínuo de duas dimensões; se bastam cortes que formem um ou vários contínuos de duas dimensões no máximo, diremos que C é um contínuo de três dimensões; e assim por diante (POINCARÉ, 1995 p. 48).

Poincaré (1995, p. 48) ainda relaciona sua ideia de contínuo a superfícies e retas comparando o descrito acima com o que fazem os geômetras da época ao tratar de superfícies, retas e espaços, tomando o ponto como elemento de dimensão 0, a reta como dimensão 1, uma vez que é cortada por um elemento de dimensão 0, o plano tem dimensão dois pois é cortado por uma reta que tem dimensão um e, por fim, o espaço tem dimensão três pode ser cortado por um plano, cuja dimensão é 2, não podendo ser feito por um elemento de dimensão menor, um plano não pode ser cortado por um ponto, apenas por uma reta.

Para dividir o espaço, são precisos cortes que chamamos de superfícies; para dividir as superfícies, são precisos cortes que chamamos de linhas; para dividir as linhas, são precisos cortes que chamamos de pontos; não se pode ir mais longe, e o ponto não pode ser dividido, o ponto não é um contínuo; então as linhas, que podemos dividir com cortes que não são contínuos, serão contínuos de uma dimensão; as superfícies, que podemos dividir com cortes contínuos de uma dimensão, serão contínuos de duas dimensões; enfim, o espaço, que podemos dividir com cortes contínuos de duas dimensões, será um contínuo de três dimensões.(ibidem)

Oliveira (2002) também traz elementos da teoria do espaço vetorial para justificar a dimensionalidade. A dimensão é descrita pelo número mínimo de vetores necessários para a construção de uma base em certo espaço, vetores estes que podem formar todo o espaço por meio de operações definidas, como somas e produtos por escalares. Este modelo entende o espaço de dimensão um como sendo os números reais $\mathbb{R}$, o espaço formado por pelo menos dois vetores seria $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, o espaço que tem dimensão 2, analogamente, seria o produto cartesiano de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$, espaço de dimensão 3.

Uma outra abordagem possível para esta análise é baseada em escritos de Whitney (1968a, 1968b) e outros autores, que trazem uma relação entre a teoria dos espaços vetoriais e as grandezas chamada análise dimensional, em que se estrutura um espaço de domínio de quantidades que baseia-se nos descritos acima sobre as funções referentes a grandeza como a relação entre classes de equivalência, valor numérico e o objeto geométrico. Barros (2002, p. 31) traz algumas definições que podem auxiliar o entendimento desta teoria.

Este autor começa redefinindo as unidades de medida de volume e comprimento dadas anteriormente, sendo u uma unidade de medida de comprimento e U para unidade de medida de volume, um cubo V que tem arestas medindo $a = \alpha u$. Pensando agora no volume deste cubo e utilizando as definições trabalhadas acima, o volume de um cubo V é dado por um valor numérico.

$$\text{I. } V = \mu U$$

Sendo o volume um elemento de $\mathcal{V}$, este é tido como uma grandeza unidimensional, que relaciona o volume de V com a classe de equivalência dos volumes, que tem mesma dimensão.

Porém, tem-se também a relação do volume com o comprimento das arestas, sendo este dado pelo seu produto:

$$\text{II. } V = \alpha^3 U$$

Unindo as duas equações acima, pode-se afirmar que:

$$\text{III. } \mu = \alpha^3$$

A equação acima relaciona unidades de medidas diferentes, u é unidade de medida de comprimento, enquanto U é unidade de medida de volume, Barros (2002, p. 31) utiliza aqui para compreender esta relação a ideia de produto de comprimentos. Para isso utiliza a teoria dita acima, a qual traz mais algumas propriedades que elucidam melhor os conceitos aqui descritos.

$$\text{IV. } U = u \times u \times u = u^3$$

E, pela igualdade de (III) e (IV), tem-se

$$\text{V. } V = \alpha^3 u^3 = a^3$$

Diz-se que o volume é uma grandeza tridimensional, de acordo com esta teoria, uma vez que ele relaciona três domínios de quantidades. Mas observando as propriedades anteriores, o volume pode ser dito tridimensional se relacionado ao comprimento de suas arestas e unidimensional se relacionado diretamente à unidade de volume. Pode-se ver o volume ainda como objeto bidimensional ao tratá-lo como produto da área da base pela altura, sendo B a área de uma face de um cubo V , $B = \beta v$, sendo β um valor numérico ligado à área e v uma unidade de medida de área.

$$\text{VI. } V = B \times a$$

O volume é uma grandeza bidimensional quando tratada a partir da classe de equivalência da área. Da mesma forma pode-se entender o conceito de capacidade, porém esta não é calculada diretamente a partir de comprimentos, mas sim a partir da sua relação com o

volume. Entendendo-a desta forma, a capacidade é, na maioria dos casos uma grandeza unidimensional, pois a relação usualmente adotada é dada do volume para a capacidade, como $1\text{ m}^3 = 1000\text{ l}$, ou $1\text{ dm}^3 = 1\text{ l}$, mas pode-se entender a capacidade também como sendo relacionada às medidas de comprimento, $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} = 1\text{ ml}$, sendo ela, neste caso, tridimensional, observando que na igualdade anterior a relação do volume sempre aparece, $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} = 1\text{ cm}^3 = 1\text{ ml}$.

O fato de a grandeza capacidade não ser diretamente ligada às dimensões superficiais de algum sólido, mas sim ao espaço dentro dele, faz desta uma concepção mais fácil de entender, sendo ela ensinada desde cedo na escola com as unidades de medidas em litros e mililitros. Embora o volume seja uma função tridimensional por um lado e unidimensional por outro, a capacidade também pode ser vista tridimensionalmente ao tratar capacidade de certo sólido dadas arestas. A capacidade pode ser então calculada com unidades de medida de volume, uma vez que a capacidade é um tipo de volume.

2.3.5. Relações Entre Volume, Capacidade, Massa e Densidade

Outros conceitos que se entenderam aqui como importantes é a diferenciação entre volume, capacidade e massa, grandeza física associada à quantidade de matéria de certo objeto e que é conteúdo de ensino desde os anos iniciais do ensino fundamental, juntamente com a capacidade. No senso comum, utiliza-se o termo peso para fazer referência à massa, mas na física massa e peso são grandezas distintas. O peso é uma força (a força exercida pela gravidade sobre um corpo, que depende de sua massa) e, portanto, uma grandeza vetorial (que possui módulo, direção e sentido), enquanto a massa é uma grandeza escalar. Oliveira (2007), que estuda as relações entre o volume e os conceitos físicos chama atenção para a diferenciação entre estes conceitos, pontuando que os alunos costumam confundi-los, tanto nas suas definições quanto nas atividades de conservação de massa e volume.

A grandeza massa, embora pareça simples, associa conceitos físicos de alta complexidade, principalmente ligados à relatividade, como afirma Oliveira (2007, p. 87 - 88) “A massa passou a ser definida como independente da velocidade, como absoluta no tempo e no espaço, como base de um sistema de unidades absolutas. Depois passou a ser uma função da velocidade, relativa ao deslocamento do objeto”.

O estudo da grandeza massa inicia-se no 1º ano da educação básica, como traz a BNCC “Medidas de comprimento, massa e capacidade: comparações e unidades de medida não convencionais” (BRASIL, 2018a, p. 278) comparando objetos com massas distintas e conhecendo as unidades de medida padronizadas e vai aprofundando-se no ensino médio com os conceitos de matéria e energia.

Em relação ao ensino desta grandeza, Oliveira (ibidem) traz um dos pontos de confusão entre os conceitos de massa e volume, afirmando que “as pessoas passam utilizar o senso comum e consideram que, apenas objetos que tenham volumes suficientemente grandes tenha massa” (p. 87). Oliveira (2007) na p. 86 levanta questões sobre a epistemologia do conceito de massa a partir de Bachelard (1984) em seus diferentes níveis. No terceiro nível, a diferenciação entre estas duas grandezas se dá em forma de quociente da força de gravidade pela aceleração da gravidade. Observa-se que este conceito se torna mais abstrato, com a teoria de Newton, indo muito além do que vai a noção de volume. Esta não é a única definição apresentada pelo autor.

A densidade também tem papel importante aqui, uma vez que ela é uma grandeza intensiva, trata a concentração de matéria, e é dada pela relação entre a massa e o volume. Oliveira (2007) explica que uma grandeza intensiva é descrita pelo produto ou razão de duas ou mais, estas não podem ser somadas, como as grandezas não intensivas como o volume de dois sólidos unidos é a sua soma, a densidade de duas substâncias unidas não é a sua soma.

Também ocorre confusão entre a densidade no que concerne a capacidade de certo recipiente, uma vez que se utiliza a quantidade de líquido que cabe em certo recipiente para determinar sua capacidade, se esquece que a densidade deste tem influência no processo. Além da importância desta grandeza na diferenciação entre a massa e volume, uma vez que maior massa não implica em maior volume e vice e versa.

Um exemplo comum dessa importância da densidade ao se tratar do volume é o caso da areia. Ao cavar certo buraco na terra, retirando certa quantidade de areia, num geral, o volume de areia retirado da terra é diferente do volume que caberá de volta no buraco, uma vez que as partículas de terra retiradas foram separadas e não ocupam mais o mesmo espaço, embora sua massa permaneça a mesma, antes as partículas estavam comprimidas. Diz-se que a densidade da areia mudou, a quantidade de partículas em relação ao espaço ocupado por ela antes de ser retirada da terra e depois é diferente. Antes de ser retirada, a terra era um corpo rígido, deixou de ser ao ser retirada, alterando o espaço que esta ocupa, logo, seu volume.

2.3.6. As Grandezas Volume e Capacidade e o Modelo Didático das Grandezas

Pensando no volume como uma função, alguns aspectos acabam por serem menosprezados, como a unidade de medida utilizada. Em relação a grandeza área, Douady afirma que (1987, p. 6) “os manuais que só querem considerar as superfícies e os números dos dois polos definem a área como um número, mas usam a expressão "unidade de área". Se a área é um número, o que uma unidade de área pode significar?”²¹ Estes mesmos questionamentos podem ser trazidos às grandezas volume e capacidade.

O volume não é o sólido geométrico, mas o espaço que este ocupa e é relacionado a um valor numérico e uma unidade de medida, então pode-se ter dois objetos distintos com o mesmo volume, se a “quantidade de espaço” ocupada por eles for igual. Esta distinção entre objeto, volume e o valor numérico referente ao volume, é de suma importância na compreensão plena destes conceitos e suas relações com outras grandezas. A diferença entre o volume como número e como grandeza é bastante sutil, em contraponto à clara distinção entre o sólido e o volume e entre o sólido e o número associado ao volume. Em relação à grandeza capacidade, o pensamento é similar.

Esta concepção é diretamente relacionada com as funções descritas na Figura 4, na qual relaciona-se o objeto geométrico $\mathcal{S}$ a sua classe de equivalência $\mathcal{V}$ e a um número real $\mathbb{R}$. Relação tratada por Douady (1987, p. 4) em seus escritos sobre a grandeza área e adaptada posteriormente para volume, como pode-se observar nos trabalhos de Barros (2002), e Moraes (2013).

Ao observar a área como função, a compreensão retém-se em dois polos, a superfície e o número como invariantes, porém quando pensa-se em uma transformação de unidade, o número relativo àquela área muda, porém a área da superfície mantém-se, levando a crer que o número não pode ser um invariante neste processo, sobrando esta função para a superfície e acrescentando o aspecto que torna a transformação de unidade um processo ligado à superfície e a unidade de medida, mas não ao número, como afirma Douady (1987, p. 5) abaixo:

²¹Les manuels qui ne veulent considérer que les deux pôles surfaces et nombres définissent l'aire comme un nombre mais utilisent l'expression "unité d'aire". Si l'aire est un nombre, que peut bien signifier une unité d'aire? Tradução livre.

Essa é a visão geralmente adotada no ensino. Nestas condições, a área é uma invariante não da superfície, mas do par (superfície, unidade): para uma superfície fixa, a área, considerada como número depende da escolha da unidade. Isso é legítimo quando não pretendemos fazer uma mudança de unidade, mas é um ponto de vista difícil se você quiser lidar com superfícies físicas e se queremos que a área seja uma invariante da superfície por si só.²²

Estes três elementos são peças chaves na compreensão das grandezas geométricas, como comprimento, área, volume e capacidade. Estes elementos tornaram-se conhecidos a partir da hipótese didática proposta por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989), as quais propõem alguns quadros inter-relacionados que propiciam um melhor entendimento da grandeza área. Estas afirmam que um quadro é entendido como “objetos de um ramo da matemática, das relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que o sujeito associa num dado momento, a esses objetos e relações”²³, (ibidem p. 389).

Estas imagens mentais são importantes na diferenciação dos objetos, uma vez que o mesmo objeto pode estar em quadros distintos e sua imagem mental seja também distinta do problema a ser resolvido. Um quadro é uma estrutura dinâmica, uma vez que as imagens mentais sobre certo objeto podem ser modificadas para uma melhor adequação à proposta do problema ou ao conhecimento adquirido durante o processo, processo este que pode ser impulsionado pelo professor ou pela situação na qual o aluno é posto com relação ao saber em jogo.

A mudança de quadros permite visualizações diferentes de problemas, em que esta modifica o processo de resolução e concede uma melhor compreensão do objeto matemático com o qual se trabalha. O jogo de quadros é, então, esta mudança entre conceitos que é propiciada pelo professor; ou por alguém com intenções didáticas. Em relação à área, as autoras distinguem três aspectos: o quadro das grandezas, no qual estão as classes de equivalência das figuras com mesma área, as áreas em si; o geométrico, em que se inserem os objetos

²² C'est le point de vue généralement adopté dans l'enseignement. Dans ces conditions, l'aire est un invariant non pas de la surface mais du couple (surface, unité) : pour une surface fixée, l'aire, considérée comme nombre dépend du choix de l'unité. C'est légitime quand on n'a pas l'intention de changer d'unité, mais c'est un point de vue difficile à tenir si on veut s'occuper de surfaces matérielles et si on veut que l'aire soit un invariant de la surface et d'elle seule. Tradução livre.

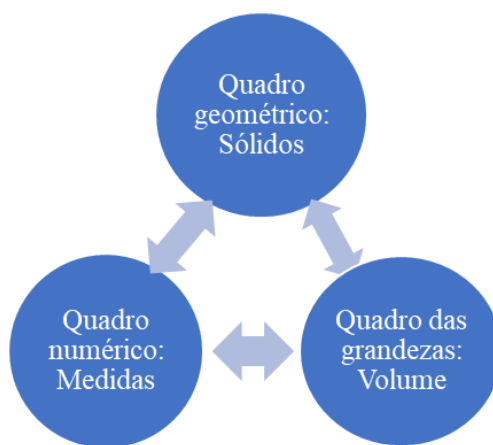
²³ Objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales que le sujet associe à un moment donné à ces objets et ces relations.

geométricos cuja área é descrita; e o numérico, no qual se encontram as medidas de área, como as autoras explicam:

A análise que fazemos nos leva a distinguir 3 polos: O polo geométrico com as superfícies consideradas como partes do plano; O polo grandeza, com as áreas; O polo numérico com as medidas. O conceito de área enquanto grandeza, constitui-se, a nosso ver, um elemento de ligação entre as superfícies e os números (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p 395)²⁴

Utilizar-se-á aqui uma adaptação desta hipótese didática dos quadros para a grandeza volume, sendo esta adaptação feita anteriormente em outros trabalhos (OLIVEIRA, 2002, 2007; BARROS, 2002; FIGUEIREDO, 2013; MORAIS, 2013; FREITAS, 2015; MELO, 2018), pesquisas que adotam essa compreensão da grandeza volume, como pode-se observar abaixo. Se compreende aqui que o aluno necessita relacionar conceitos referentes aos diferentes quadros para obter uma melhor compreensão a respeito da grandeza volume, fazer certa articulação entre eles.

Figura 5: Quadro das Grandezas – Grandeza Volume



FONTE: Própria autora inspirado em Morais (2013, p 32)

No quadro geométrico inserem-se os sólidos geométricos, os cubos, pirâmides, cilindros, esferas e outros sólidos, que representam objetos no mundo físico ou os modelam. O

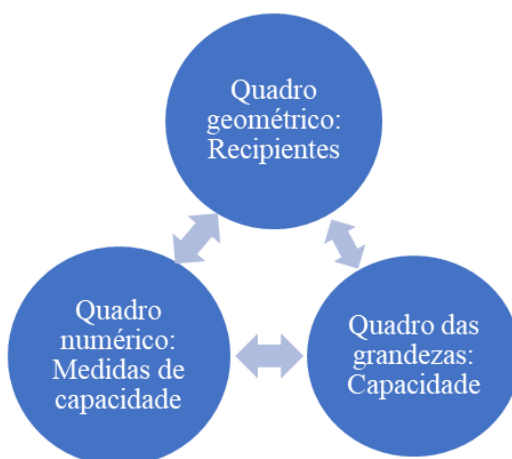
²⁴L'analyse que nous faisons nous amène à distinguer trois pôles : le pôle géométrique avec les surfaces considérées comme parties du plan, le pôle "grandeur" avec les aires et le pôle numérique avec les mesures. Le concept d'aire en tant que grandeur constitue à notre avis un relais entre les surfaces et les nombres.

quadro numérico trata dos números reais positivos. O quadro das grandezas é composto pelas classes de equivalências de sólidos geométricos que possuem mesmo volume e são representados pelo par número e unidade de medida, como 3 cm^3 , 40 m^3 .

Pode-se ver certa diferença entre os quadros ao pensar em dois sólidos distintos que possuem o mesmo volume, logo o volume de certo sólido é diferente do próprio sólido, uma vez que vários sólidos podem ser associados a um mesmo volume. Por outro lado, pode-se obter a medida do volume de certo sólido em diferentes unidades de medida, mas ainda assim o seu volume permanece o mesmo, então a medida do volume associada a certo sólido pode mudar de acordo com a unidade de medida que se utiliza, porém, o volume permanece inalterado. Observa-se então que os três quadros são distintos embora nem sempre essa distinção seja clara, as concepções parecem convergir em diversos momentos.

A respeito da diferenciação entre os quadros em relação à capacidade, dá-se de forma similar, o geométrico incorpora os recipientes que possuem volume interno, logo possuem capacidade. O quadro das grandezas trata da classe de equivalência dos recipientes cuja capacidade é a mesma. Já o numérico refere-se ao valor numérico pertencente ao conjunto dos reais positivos dado à capacidade de certo recipiente. Logo, o quadro das grandezas pode ser adaptado para a grandeza capacidade, como visto na Figura 5.

Figura 6: Quadro das Grandezas – Grandeza Capacidade



FONTE: Produzido pela autora inspirado em Moraes (2013, p 32)

Esta questão, embora possa ser esclarecida com um exemplo, necessita de cuidado ao colocá-la em prática e de uma conceitualização matemática e/ou didática que a justifique de fato, como feito anteriormente. Pretende-se esclarecer aqui que número é diferente da superfície

(ou sólido) e estes são diferentes da grandeza (classe de equivalência das superfícies com mesma área/sólidos com mesmo volume/ recipientes com mesma capacidade).

Temos então que apenas o sólido e o valor numérico associado à função volume não são capazes de conectar todos os aspectos referentes à tal grandeza sozinhos, um outro elemento é necessário para dar conta desta compreensão, referente as grandezas, sendo este o quadro das grandezas. Os documentos oficiais também reiteram a importância da diferenciação entre os quadros, como é o caso dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco:

É importante que as situações apresentadas pelo professor propiciem ao estudante construir a distinção entre os três elementos envolvidos no trabalho com as grandezas geométricas: a figura (quadrados, retângulos etc.), a grandeza associada à figura (comprimento de 2 m, perímetro de 12 m, 4 m² de área, capacidade de 30 l etc.) e o número associado à medição dessa grandeza numa dada unidade (2, 12, 4 etc.). (PERNAMBUCO 2012, p 69)

Entende-se que o aluno mobiliza conceitos de quadros distintos quando um só não é suficiente na atividade a ser resolvida, havendo assim uma mudança entre eles, uma articulação entre eles. A passagem entre esses quadros favorece um melhor entendimento sobre a grandeza e propicia ao aluno utilizar esta grandeza como ferramenta na resolução de problemas de forma mais eficaz.

A passagem do físico, perceptível e palpável, para o abstrato, é um dos objetivos centrais do ensino e da aprendizagem da geometria, e isso nunca deve ser perdido de vista. Convém observar que os objetos gráficos – desenhos, imagens, diagramas, ícones – constituem-se em um importante nível intermediário de abstração entre os objetos físicos e as entidades puramente matemáticas (LIMA; BELLEMAIN, 2010, p 139).

Esse é mais um aspecto importante, em relação à conceituação de volume e capacidade. Os objetos geométricos aos quais são conectadas as grandezas geométricas podem ser pensados sob diferentes pontos de vista. Uma caixa de chocolates, objeto físico tridimensional, pode ser modelada por um prisma reto retângulo (entidade matemática abstrata). O desenho da caixa é um objeto gráfico bidimensional (representação plana, elaborada a partir de normas da geometria gráfica). É preciso distinguir e articular os três tipos de objetos em foco (objeto físico, objeto gráfico e objeto geométrico). E em relação a cada um deles, podemos explorar diferentes aspectos relacionados às grandezas geométricas: comprimentos das arestas, áreas das faces, volume do sólido, capacidade da caixa.

3. REVISÃO DE LITERATURA SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DE VOLUME E CAPACIDADE

Discutir-se-á, neste capítulo, o que foi feito em algumas pesquisas científicas relacionadas pelo seu objeto de pesquisa, volume ou capacidade, com o intuito de justificar os objetivos do presente trabalho, observando o tratamento dado às grandezas volume e capacidade e sua abordagem nos livros didáticos e nas salas de aula, em documentos e *software*, entre outros aspectos proeminentes, descritos nas pesquisas discutidas. Foram trazidas um total de 17 pesquisas relacionadas ao tema em questão sob diferentes pontos de vista e com objetivos diversos.

Para fundamentar este trabalho, realizou-se uma revisão de literatura em alguns periódicos importantes no país, na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações - BDTD, banco de dados de teses e dissertações a nível nacional, além do repositório da UFPE e, a partir deles, foram selecionados alguns trabalhos que são relevantes para observar o tratamento dado à grandeza volume e o que já foi realizado enquanto pesquisa.

O BDTD foi escolhido pela vasta gama de produções científicas de todo o país, ao todo mais de 500.000 teses e dissertações de 114 instituições, sendo 84 destas universidades e, dentre elas, 52 federais e estaduais. O repositório da UFPE foi escolhido por conter trabalhos que poderiam não ter sido encontrados na BDTD, como a dissertação de Melo (2018) e algumas outras que foram adicionadas após o início desta revisão e que a autora sabia existir. Alguns outros trabalhos conhecidos não se encontravam em nenhum destes locais até o momento de escrita e foram coletados pessoalmente em bibliotecas e/ou com os autores, como Oliveira (2002), Barros (2002) e Freitas (2015).

Na pesquisa realizada nesta primeira plataforma, BDTD, buscou-se a palavra volume dentro do título, as palavras ensino ou aprendizagem no resumo e matemática como assunto, a fim de retirar das pesquisas trabalhos que fujam da matemática, utilizando a palavra volume em outros contextos e que tratem especificamente do ensino e aprendizagem. As palavras ensino e aprendizagem, aqui colocadas com OU, foram adicionadas ao pensar em trabalhos que tratem do volume como objeto de ensino e/ou aprendizagem, mantendo os resultados no campo educacional. Utilizando estes parâmetros, foram encontrados 58 trabalhos, entre teses e dissertações.

Dentre estes 58 trabalhos, quatro encontram-se também no repositório da UFPE, a tese de Oliveira (2007) e as dissertações de Morais (2013), Cavalcanti (2010) e Figueiredo (2013). Entre esses trabalhos encontrados, muitos tratam o volume em seus aspectos matemáticos, com demonstrações diversas e axiomatização dos conceitos, estes trabalhos não foram tomados aqui. Alguns se inserem nas ciências médicas, biológicas e nas engenharias, também não tomados nessa revisão. Foram analisados, então, apenas oito trabalhos que tratam sobre volume/capacidade em seu viés didático e não apenas como sequência didática, trazidos aqui.

Na pesquisa do repositório da UFPE, optou-se por pesquisar apenas a palavra volume contida no título dos trabalhos, uma vez que a pesquisa sobre ensino OU aprendizagem no resumo não resultou em trabalho algum. Deste modo foram encontrados 43 teses e dissertações defendidas na UFPE no período de 2002 a 2018, em sua maioria estas dissertam sobre ciências médicas, biológicas, geográficas e engenharias. Apenas cinco trabalhos tratavam de educação matemática, a tese de Oliveira (2007), as dissertações de Morais (2013), Figueiredo (2013) e Cavalcanti (2010) além da dissertação de Melo (2018), que não foi encontrada no BDTD.

A revisão tratando das grandezas e medidas traz trabalhos que utilizem a grandeza capacidade nos anos iniciais de escolaridade, nos quais o ensino das grandezas e medidas é bem delineado, diferente das séries posteriores nas quais é tratado dentro da geometria ou aritmética. A pesquisa apontou três trabalhos nas duas plataformas que tratam da grandeza capacidade especificamente em seus aspectos didáticos na educação infantil, um desses trabalhos foi encontrado também na pesquisa anterior, o trabalho de Cavalcanti (2010). Desses três trabalhos aqui encontrados, dois encontravam-se nas duas plataformas e apenas um encontrava-se apenas no BDTD.

Oliveira (2002), em sua dissertação, investigou os conceitos de volume, medida e figuras e como estes se inter-relacionam utilizando a Teoria dos Campos Conceituais e o jogo dos quadros como referencial teórico, além dos estudos de Piaget sobre volume. Inicialmente foram observados alguns livros didáticos do ensino fundamental, na busca pela definição de volume e capacidade que estes trazem. Alguns autores trazidos neste tópico relacionam o volume com a medição do espaço ocupado por certo objeto, relacionando-o a um número, alguns referem-se a líquidos para definir a capacidade de certo recipiente e outros resumem o volume e a capacidade ao mesmo conceito. Oliveira atenta para a preconização da medição em detrimento de outras situações que envolvem volume e capacidade, como a comparação destas grandezas sem a utilização de fórmulas ou medidas.

Após esta fase, foi realizada uma sondagem com 48 professores do ensino básico, para os quais foi questionado o que é volume e o que é capacidade, a maioria destes associou o volume ao espaço ocupado por certo objeto, mas alguns associaram à medida, outros ao próprio sólido e outros ao conceito de massa, já em relação à grandeza capacidade, alguns a trataram como volume, outros a associaram a um líquido.

Logo após foi posto em prática o estudo de caso com quatro duplas de alunos de 6º ano do ensino fundamental, no qual foram expostos a três fases de atividades que tratavam dos conceitos de volume e capacidade. Incluindo nestas fases a comparação de volume e capacidade de sólidos, separadamente e em conjunto, volumes de sólidos maciços e recipientes e unidades de medidas não padrão, observando as estratégias por estes utilizadas para responder os questionamentos. Na primeira fase, sobre conservação de volume, a maioria dos alunos acertou os questionamentos, na primeira parte ou na segunda, nos quais eles verificavam a variação de volume por imersão do sólido, levando a crer que compreendem a conservação de volume.

Na segunda fase deu-se a comparação da capacidade de recipientes, a maioria dos alunos respondeu corretamente a primeira parte, porém nenhuma dupla acertou a segunda completamente, um deles associou a capacidade de certo objeto a sua massa na primeira fase e na segunda o objetivo era observar a associação entre capacidade e volume que os alunos recorriam. A terceira fase, que consistia em utilizar unidades não padronizadas para o cálculo do volume e capacidade de objetos, os alunos conseguiram associar satisfatoriamente as unidades indicadas. Neste trabalho a discussão entre aspectos das grandezas volume e capacidade foram tomados como base para a construção do seu quadro teórico, utilizando conceitos de dimensionalidade e das grandezas, como também encontrado na dissertação de Barros (2002) e na tese de Oliveira (2007).

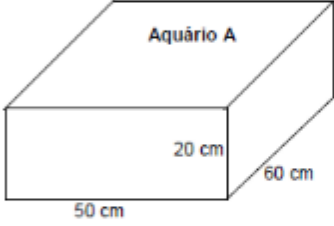
Barros (2002) investigou as concepções em relação à grandeza volume de 45 alunos de 8º ano do ensino fundamental. Estes responderam oito questões que traziam situações diversas sobre a grandeza, como situações de comparação e medição, analisando-as de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e verificando também como os alunos lidam com a dimensionalidade desta grandeza, a conservação do volume e a diferenciação entre volume e capacidade. Em seus resultados, verificou que cerca de 1/3 da turma não construiu o princípio de conservação de volume, a definição associada por eles a volume é bem variada e cerca de 30% associa volume a capacidade e 22% às grandezas físicas.

Uma das questões propostas (Figura 7) que trata da relação entre volume e capacidade, apenas 20% dos alunos responderam corretamente, seja comparando as arestas dos recipientes, utilizando o volume ou por métodos não identificados. Observou-se na pesquisa que 22% dos participantes somou as arestas, e, destes, apenas um havia realizado o mesmo procedimento em outra questão que solicitava o volume dadas as arestas, levando a crer que os alunos diferenciam os conceitos de volume e capacidade, mas não o relacionam corretamente. A ampla discussão sobre a grandeza volume em seus aspectos didáticos e matemáticos, além das classificações das atividades se mostrou de grande importância neste trabalho.

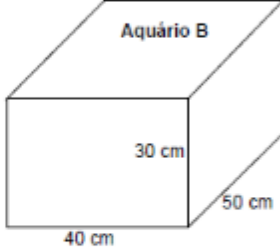
Figura 7: Atividade sobre Relação do Volume e Capacidade Retirada de Barros (2002)

FICHA DO ALUNO
ATIVIDADE 8

Na Secretaria de uma escola existe um aquário A e na sala da Direção existe um aquário B (Veja as figuras abaixo):



Aquário A
50 cm, 20 cm, 60 cm



Aquário B
40 cm, 30 cm, 50 cm

Marque a resposta certa :

☐ os aquários A e B possuem a mesma capacidade

☐ o aquário A tem capacidade maior do que o aquário B

☐ o aquário A tem capacidade menor do que o aquário B

Escreva uma justificativa para a sua resposta

FONTE: Barros (2002, p. 97)

A tese de Oliveira (2007), cujo objetivo foi observar a influência das grandezas físicas na construção do conceito de volume, utilizou, para tal, a Teoria dos Campos Conceituais, a

teoria dos construtos pessoais de Kelly (1963)²⁵ e o jogo dos quadros. A pesquisa deu-se com 65 alunos de duas turmas de 1º ano do ensino médio e 25 alunos de licenciatura de duas instituições de ensino. No primeiro momento foram aplicados questionários sobre a relação entre o volume e as grandezas físicas. Na primeira fase da pesquisa, os alunos observaram bolas de massas e volumes distintos e tinham que diferenciá-los.

Num segundo momento 16 alunos foram selecionados, quatro de cada instituição de ensino, para os quais foi proposta uma oficina com atividades que envolviam estas grandezas, na qual estes tinham que comparar objetos com formatos iguais e diferentes, cujas massas e volumes eram ora distintos ora iguais. O autor buscava observar quais os conceitos que os alunos utilizavam para justificar as suas respostas - volume, massa, peso ou densidade - reafirmando a importância da relação entre estes conceitos. Neste trabalho, foram tratadas não só a relação entre volume e capacidade, mas a relação entre massa, peso e densidade também, aspectos essenciais nas discussões aqui realizadas.

Cavalcanti (2010) observou a relação institucional e a relação institucional na posição do professor da matemática e do campo das grandezas e medidas na rede municipal do Recife-PE com professoras da educação infantil, verificando a importância que dão à matemática e às grandezas e medidas bem como as escolhas didáticas destas professoras em relação a estes saberes. Para esta finalidade, foram realizadas quatro entrevistas, a primeira sobre a prática docente das professoras, em específico sobre a matemática e as grandezas e medidas, em seguida aplicado um questionário no qual foram analisadas sequências de atividades propostas. Dentre estas atividades, quatro tratavam da grandeza capacidade. A segunda entrevista deu-se a respeito das atividades, situando-as em seus planejamentos, a terceira sobre as dificuldades enfrentadas no ensino dos saberes observados e a última em relação ao planejamento e às formações continuadas.

Como resultados, Cavalcanti pontua a priorização do estudo das linguagens em detrimento da matemática e, dentro desta, os números e operações se destacam como os mais estudados. Em relação ao domínio das grandezas e medidas, as professoras privilegiam o estudo das grandezas comprimento e duração de intervalos de tempo. A autora destaca que apenas uma das participantes referiu-se às grandezas e medidas em seu planejamento, levando a crer que

²⁵ KELLY, G. A. A Theory of Personality: The psychology of personal constructs. New York: Norton, 1963.

estas não entendem o estudo das grandezas e medidas como um campo da matemática. A grandeza capacidade, também objeto de conhecimento neste estudo, não teve destaque na pesquisa, embora as professoras afirmassem tratá-la com os alunos, o foco deu-se em outras grandezas. Cabe ressaltar também que esta grandeza não foi descrita nos documentos curriculares do município, embora retratado nos documentos nacionais. A importância deste trabalho aqui se dá pela observação das relações institucionais abordadas dentro do tema desse estudo.

Jesus (2011) realizou um estudo de caso com alunos do 9º ano do ensino fundamental de Belo Horizonte – MG com o auxílio de materiais manipulativos observando se esta prática aliada à aplicação prática do conteúdo área de figuras planas e volume de prismas motivou os alunos na atividade proposta. Para a análise da motivação, a autora traz uma abordagem cognitivista e sócio-cognitivista elencando várias teorias e seus usos dentro da matemática. O estudo de área e volume são pautados nas concepções grandezas e traz extratos do livro didático adotado na escola referentes a estas duas grandezas.

O estudo foi realizado em duas etapas, na primeira 18 alunos participaram de duas oficinas em que o conteúdo matemático foi estudado com o apoio de materiais manipulativos, construindo objetos e observando o entendimento dos mesmos durante o processo enquanto resolviam coletivamente problemas que envolviam os conteúdos em questão, foram aplicados pré e pós teste. Na segunda etapa, os alunos que participaram da primeira fase atuaram como monitores de turma e auxiliaram os alunos que não haviam participado da primeira fase, quando eles estudaram conceito e aplicações de área e volume fazendo relatos do momento.

Como resultados, a pesquisadora trouxe a importância da variação do nível de dificuldade das questões, o estímulo à cooperação, exposição da utilidade do conhecimento em aprendizagem, respeito ao ritmo de cada aluno, estabelecimento de metas e a diversificação nos materiais. Para uma análise da motivação dos alunos, foram escolhidos quatro que tinham perfis de motivação distintos, todos eles afirmaram que o projeto os auxiliou no aprendizado e que era mais fácil aprender com o auxílio de materiais e que era mais divertido.

Rodrigues (2011) investigou os cadernos do professor e do aluno distribuídos em 2008 e 2009 pelo estado de São Paulo aos professores e alunos do ensino médio da rede focado ao ensino de volume utilizando como base teórica a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. O autor traz extratos dos cadernos referentes a cada um dos sólidos comuns, prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas, observando que os cadernos propiciam

uma abordagem conceitual do volume, porém ele acredita que alguns aspectos poderiam ser mais bem aproveitados com a utilização de outras atividades que pesquisas mostraram eficazes. Sendo assim, ele oferece sugestões para o ensino de volume que complementam as trazidas pelos documentos observados, como a sensibilização, exploração, utilização de recursos computacionais e de vídeos, produção investigativa.

Silva (2011) discute o processo de ensino aprendizagem das grandezas e medidas e a formação desses conceitos, faz uma reflexão sobre a prática docente, questionando se as tarefas propostas em sala de aula favorecem o desenvolvimento conceitual das grandezas comprimento, massa e capacidade. A Teoria dos campos conceituais e a abordagem histórico-cultural de Vigotsky são utilizadas para observar uma sala de aula do 4º ano do ensino fundamental do Distrito Federal. A discussão sobre a grandeza capacidade não se dá no campo das grandezas, mas sim da sua importância no cotidiano do aluno.

A autora se propõe a observar quais conceitos precisam de fato ser construídos pelos professores, assegurando se as tarefas propostas propiciam o desenvolvimento do aluno e quais recursos favorecem esse processo. Neste trabalho são propostos 20 princípios que podem auxiliar na formação de conceitos das grandezas comprimento, massa e capacidade como uma nova abordagem. Um ponto importante trazido nesta dissertação foi a necessidade da utilização de novas estratégias pedagógicas e do rompimento da ordem histórica dos currículos com os livros didáticos.

Possani (2012) investigou a influência do CABRI 3D utilizado em uma sequência didática na aprendizagem do volume do icosaedro regular. Para isso apoiou-se na Teoria das Situações Didáticas, Engenharia Didática e Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A pesquisa foi realizada com quatro alunos da 3ª série do ensino médio de uma escola privada da cidade de São Paulo – SP. Em se tratando do volume, em específico, o autor limita-se a demonstrar a fórmula do volume do icosaedro.

A aplicação do projeto deu-se em quatro encontros e foram realizadas 9 atividades espaçadas nestes encontros, nos quais foram trabalhadas noções iniciais do programa, os sólidos regulares, propriedades dos sólidos platônicos e das figuras planas que os compõem, planificações e as medidas dos segmentos necessários para a obtenção da fórmula do volume do icosaedro regular, que era o ponto de chegada das atividades.

Os alunos chegaram à resposta correta ao final, observando o icosaedro regular como composição de 20 tetraedros cujo volume eles haviam calculado durante as atividades. Os

estudantes pontuaram a facilidade de visualização fornecida pelo *software* e o melhor entendimento de suas características em detrimento ao estudo de poliedros em livros, cadernos e apostilas. O pesquisador observou certa dificuldade na passagem dos registros figural para o algébrico além de algumas dificuldades na visualização e no entendimento de certas propriedades geométricas.

Morais (2013) utiliza a Teoria dos Campos Conceituais, TCC, para analisar a grandeza volume. Ele analisa 7 coleções de livros didáticos do ensino médio aprovados pelo PNLD de 2012, caracterizando as questões contidas nestes livros como situações de medição, comparação e produção, situações adaptadas à grandeza volume do trabalho de Baltar (1996). Além de caracterizar as questões pela classificação descrita acima, o autor também observou como os livros abordam o conceito de volume, sua definição e a utilização do princípio de Cavalieri.

Em sua análise, verificou que o estudo de volume é deixado para os livros do 2º ano, em sua maioria e ao final do livro. As definições dadas à grandeza volume tinham relação com medição, algumas tratavam especificamente do número e outras a medida do espaço. O princípio de Cavalieri foi utilizado para justificar as fórmulas de volume em todas as coleções. As situações de medição se sobrepõem às outras e o uso de fórmulas é enfatizado mesmo nas situações de comparação e produção.

Morais também observou questões que tratam do volume e capacidade em conjunto, aqui o autor entende as grandezas volume e capacidade como iguais, mas em contextos distintos e, de acordo com esta concepção, Moraes afirma que os livros didáticos favorecem esta compreensão, mesmo que implicitamente. Alguns livros trazem atividades nas quais são solicitados o volume do espaço interno de certo sólido em unidades de medidas cúbicas, de volume ou quando pedem o volume de certo sólido pela quantidade de líquido deslocado. As classificações utilizadas nesta dissertação podem ser tomadas como base para a observação do volume e capacidade e análise dos livros escolhidos, além da abordagem dimensional também tratada na fundamentação teórica.

Figueiredo (2013) traz em sua pesquisa a grandeza volume sob o olhar da Teoria dos Campos Conceituais utilizando a resolução de problemas para observar como alunos da 3ª série do ensino médio de três instituições de ensino do estado de Pernambuco, uma privada, uma pública estadual e uma pública federal lidam com situações que envolvem a grandeza volume. Foi aplicado um teste de sondagem e a partir deste teste selecionados dez alunos das três escolas escolhidas para a realização de uma entrevista, com a finalidade de confrontar os alunos a

respeito do teste de sondagem realizado. A pesquisadora afirma que alguns trabalhos fazem a diferenciação entre volume e capacidade, embora não a faça em sua pesquisa.

O teste de sondagem continha 12 questões e envolviam situações de comparação, transformação de unidade, medida de volume, produção, reconhecimento e estrutura dos sólidos e utilização da fórmula de volume. Algumas questões relacionavam os conceitos de volume e capacidade, por transformação de unidade. Os alunos que realizaram a segunda fase da pesquisa foram escolhidos por terem apresentado respostas incompletas ou que apresentaram dificuldades nas situações em que a passagem ou distinção dos quadros era necessária, além daqueles que não justificaram sua resposta.

As análises realizadas verificaram os acertos pelas situações de cada questão, medida, comparação e produção, sendo as questões com maior índice de acertos aquelas de medição. Também foi verificada a compreensão do aluno sobre o volume como número, sólido, medida, grandeza, volume ocupado e volume área, entre estes, a compreensão do volume como número e grandeza foram predominantes. Concluindo, então, que o aspecto numérico é o que os alunos mais compreendem e quando mesclado com outras situações aparecem dificuldades. Eles também utilizaram outros conhecimentos para a realização das atividades, como o conhecimento de massa e densidade.

Na dissertação de Medeiros (2013), intitulada o ensino de área e volumes com o uso de objetos manipulativos, teve o objetivo de analisar as evoluções metodológicas propostas no ensino de geometria nas escolas públicas de São Paulo e propor uma sequência didática com o auxílio de materiais manipulativos, para isso ele realizou uma análise dos documentos oficiais do estado de São Paulo e relação a geometria e medidas, eixo no qual se encontram conteúdos da geometria tratados no trabalho e as grandezas volume e área. Propôs um teste de sondagem com os alunos da 2ª série do ensino médio em uma escola estadual de São Paulo, 11 atividades foram propostas com o apoio de materiais manipulativos e que envolviam temas de geometria e grandezas e medidas, como posições relativas entre retas, altura de prismas, volume de prismas, medidas irracionais das circunferências e círculos, entre outros conteúdos. Foi proposto ao professor e aos alunos que realizassem relatos de cada atividade, mostrando o envolvimento dos alunos e professor nas atividades e o entendimento dos conceitos utilizados nas atividades.

Freitas (2015) teve como objetivo caracterizar o ensino de volume de sólidos geométricos em quatro coleções de livros didáticos do ensino médio aprovados no PNLD de

2012 utilizando a Teoria Antropológica do Didático, caracterizando tanto as tarefas, técnicas e teorias envolvidas nas questões propostas pelos livros, quanto as escolhas didáticas feitas pelo livro na abordagem do conteúdo, a organização didática. O autor deixa claro que seu estudo não se concentra apenas nas grandezas e medidas, mas também na geometria por entender que os conceitos mobilizados se estendem nos dois campos, grandezas e medidas e geometria. Os conceitos de volume e capacidade são tratados como o mesmo objeto nesta dissertação, utilizando para isso um viés matemático em que volume é uma função e não uma grandeza, como utilizado aqui. Esta não diferenciação entre volume e capacidade pode levar a certa confusão entre os conceitos e as análises em relação aos pressupostos aqui tomados.

Nas quatro coleções analisadas foram encontrados seis tipos distintos de tarefas e 15 subtipos associados a estes. Dentre os tipos de tarefas descritos, um relaciona-se com a grandeza massa, porém nenhum incorpora a grandeza capacidade. Foram delineadas 12 técnicas referentes aos tipos de tarefas propostos. A organização didática foi modelada em apenas uma das coleções, na qual a abordagem dada pelo livro ao saber volume é analisada por tipos de sólidos. Como resultados, o autor evidencia que a maior parte das tarefas propostas eram referentes ao cálculo do volume de sólidos conhecidos, cerca de 74% das questões. A técnica preconizada foi a de utilização direta da fórmula, com ou sem a utilização de outras. A abordagem das questões com o avançar do conteúdo privilegia algumas tarefas em detrimento de outras, como a utilização da fórmula e calcular o comprimento de determinada aresta dado volume, esta segunda em número muito menor que a primeira, cerca de 11% das atividades encontradas. A análise realizada nessa dissertação auxiliará a criação do modelo de referência que será proposto.

Bertoli (2015), em sua dissertação procura entender e conhecer as dificuldades dos alunos em relação à área e ao volume utilizando as ilhas interdisciplinares de racionalidade, IIR, proposto por Fourez²⁶. A autora propõe uma IIR no ensino fundamental em uma escola municipal de Pouso Redondo - SC com alunos do 8º ano e envolve as disciplinas de matemática, educação física, artes, língua portuguesa e história. A aplicação das IIR dá-se em oito fases: 0- estruturar o projeto; 1- apresentá-lo aos alunos; 2- observar e reajustar o panorama da pesquisa; 3- buscar informações com especialistas; 4- definir os pontos importantes na pesquisa dado o

²⁶ FOUREZ, G., et al. Alfabetización científica y tecnológica: acerca de las finalidades de la enseñanza de las ciencias. Buenos Aires: Colihue, 1994.

objetivo principal e pesquisa junto com os alunos; 5- solução guiada de questionamentos; 6- solução não guiada de questionamentos; 7- esquematização de resultados; 8- elaboração de um produto final.

A duração do projeto foi 31 aulas e utilizou-se como situação problema a produção de tijolos e a relação entre seu tamanho e quantidade de material utilizada em sua fabricação. Os conteúdos matemáticos abordados foram área e volume, porém os alunos não associaram a fabricação do tijolo ao conteúdo em questão, após a fase da solução não guiada a professora trabalhou com os alunos os conceitos de área e perímetro construindo com eles as unidades de medida. Ao final os alunos apresentaram suas concepções de área e volume elencando com o aprendido durante o projeto.

Santos (2016) em sua tese tem o objetivo de analisar a construção de poliedros regulares no CABRI 3D refazendo o que fez Euclides há 300 anos A.E.C. em seu livro Elementos XIII, observando, a partir dessa nova construção, se o cálculo do volume e a composição e decomposição do icosaedro é propícia. Utiliza para este fim a Teoria da Transposição Didática, a problemática ecológica e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, TRRS, em que o autor transforma o saber descrito por Euclides em saberes realizáveis no *software*, observa as conversões de registros e classifica as atividades em quatro tipos de apreensões descritas pela TRRS. O autor utiliza a concepção de volume como grandezas, baseada nas adaptações feitas da hipótese didática de Douady e Perrin-Glorian (1989), que definem volume em seus aspectos numéricos, como medida e como grandeza.

O autor realiza as construções dos sólidos platônicos no *software*, deixando claro que muitas vezes houve a necessidade da mudança de registro, como do figural ao algébrico. O volume dos sólidos a partir da construção é tomado algebricamente, verificando que é possível realizar a construção dos sólidos platônicos no CABRI 3D, é possível decompô-los em pirâmides iguais e seu volume também pode ser calculado, seja pela decomposição, caso do icosaedro, dodecaedro e octaedro, ou não.

Ignácio (2016) teve como objetivo identificar quais os conhecimentos sobre as grandezas massa e capacidade os orientadores de estudo no Pacto Nacional pela Alfabetização da Idade Certa do estado de Pernambuco evidenciam. A primeira fase da pesquisa deu-se por meio de um questionário para avaliar a formação dos formadores e a segunda fase dois relatos de experiência com questões abertas nos quais o professor deveria identificar os conhecimentos utilizados. Como resultados, a autora afirma que os conhecimentos de cunho pedagógicos eram

mais superficiais em relação ao conhecimento específico do conteúdo e que a formação inicial não é um fator diferencial nos conhecimentos demonstrados pela pesquisa

Na dissertação de Melo (2018), que se propõe a analisar o conhecimento mobilizado por alunos na resolução de problemas envolvendo paralelepípedos retângulos, utilizando como referencial teórico as imbricações dos campos conceituais com alunos do 2º e 3º ano do ensino médio de três escolas públicas do Agreste Meridional de PE. Foram realizados testes diagnósticos com 107 alunos, com cinco problemas em cada teste, e em seguida foram realizadas entrevistas com alguns alunos. A autora utiliza as concepções de volume de Vergnaud (1983) em seus estudos das situações que dão sentido ao conceito, medição, comparação e produção, como também seus estudos sobre dimensionalidade, similarmente ao realizado nesta pesquisa, diferenciando o volume e capacidade em seus aspectos unidimensionais e tridimensionais.

Melo também observou os teoremas em ação corretos e errôneos descritos pelos alunos nos testes realizados e como representações os alunos utilizaram fórmulas, figuras, unidades de medidas e números para resolver as questões. As questões que mobilizavam mais de um campo conceitual foram as que tiveram um maior índice de ausência de resposta. A pesquisadora observou além da presença de figuras, quais as operações envolvidas e os valores numéricos. Os estudos sobre a dimensionalidade baseados nos descritos de Vergnaud e as análises das situações trazidas nesse trabalho foram importantes na criação das categorias de análises e no entendimento do volume e capacidade aqui contidos.

Sampaio (2018) fez sua pesquisa com alunos do 7º ano de uma escola pública integral do município de São José dos Campos – SP, na qual pôde observar como o *GeoGebra* pode potencializar a visualização de objetos geométricos, reiterando a importância do movimento para uma boa compreensão geométrica, para as investigações geométricas e compreensão do volume. A autora utiliza uma abordagem fenomenológica para tratar os conceitos geométricos, na qual são levadas em conta as percepções sobre os fenômenos, entendendo a percepção visual importante na aprendizagem.

A coleta dos dados deu-se em sete encontros, nos quais eles puderam conhecer o *GeoGebra*, observar e comparar planificações, medição do volume por blocos unitários dentro do *software*, associação das medidas de comprimento dos prismas de base retangular ao seu volume e, por fim, a generalização para prismas de base qualquer. Nas falas dos alunos, a pesquisadora extraiu elementos que indicassem a compreensão das propriedades relativas aos

sólidos, visualização dos prismas por meio do movimento proporcionado pelo *software* e a formação da ideia de volume. A autora afirma que a aprendizagem geométrica é potencializada pelo uso do *software* por haver intenção por parte do aluno, a investigação propicia esta intenção.

Pôde-se observar nas pesquisas aqui tratadas que questões relacionadas ao estudo do volume de sólidos foram investigadas em diferentes âmbitos: livros didáticos, cadernos de referência, documentos oficiais, escolas, com a utilização de materiais de apoio como o CABRI ou GeoGebra, alguns materiais manipulativos, como conhecimento de alunos, professores e formadores e com intuítos diversos. A forma como o volume é tratado também varia bastante, algumas pesquisas o situam dentro da geometria, outros dentro das grandezas e medidas e em alguns o tratamento dimensional para o volume e capacidade é exposto, o que foi de grande importância no entendimento dessas grandezas e para o tratamento aqui tomado.

Alguns trabalhos foram tomados como base para a formação dos conceitos aqui delineados, como Barros (2002), Oliveira (2002, 2007), Moraes (2013) e Melo (2018), outros trouxeram a grandeza capacidade como objeto de estudo nos anos iniciais, como Cavalcanti (2011) e outros utilizaram como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático e/ou a Teoria da Transposição Didática, como Santos (2016) e Freitas (2015) que deram base as análises aqui realizadas.

Dentre os trabalhos observados, nenhum propõe-se a realizar o que foi proposto nesse trabalho, embora alguns tratem de análise de livros didáticos, não foram encontradas pesquisas que analisassem exemplares dos anos iniciais do ensino fundamental ao sexto ano observando a dimensionalidade como ponto chave e nenhuma proposta de modelo praxeológico de referência.

4. OBJETIVOS

4.1. GERAL

- Analisar o modelo praxeológico dominante referente às grandezas volume e capacidade em livros didáticos do 1º ao 6º ano do ensino fundamental.

4.2. ESPECÍFICOS

- Propor um modelo praxeológico de referência relativo às grandezas volume e capacidade.
- Modelar as praxeologias matemáticas referentes às grandezas volume e capacidade observadas em coleções de livros didáticos do 1º ao 6º ano do ensino fundamental.
- Analisar a evolução nos tipos de tarefas e técnicas encontradas, sequencialmente, nos livros analisados por meio do modelo praxeológico de referência em comparação com o modelo praxeológico dominante moldado a partir dos livros didáticos analisados.

5. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O primeiro procedimento metodológico desta dissertação foi a análise dos documentos oficiais, Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997, 1998a), a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018a) e os guias digitais do Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2016, 2018b) correspondentes às coleções analisadas neste trabalho.

As escolhas basearam-se nos documentos cujos guias do PNLD haviam sido fundamentados, o PCN nos anos finais do ensino fundamental e a BNCC nos anos iniciais, diferença esta devido ao processo de produção da Base que estava em estado de finalização durante a análise dos livros pelo PNLD, (BRASIL, 2018b).

Quando foram lançados os PCN dos anos iniciais do ensino fundamental, em 1997, estava previsto que a etapa do ensino fundamental fosse realizada em oito anos. Nesse documento, os anos de escolaridade dessa etapa são organizados em quatro ciclos de aprendizagem, sendo que os dois primeiros são conhecidos como anos iniciais do ensino fundamental e os dois últimos compõem os anos finais do ensino fundamental.

O primeiro ciclo correspondia, no sistema atual ao 2º e 3º anos de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018a) (crianças de sete e oito anos). O segundo ciclo, era composto do 4º e 5º anos (crianças de nove e dez anos). No terceiro ciclo estavam o 6º e 7º anos (alunos de 11 e 12 anos) e o quarto ciclo era referente ao 8º e 9º anos (alunos de 13 e 14 anos). Os PCN dos anos iniciais do ensino fundamental - PCN-AI (BRASIL, 1997), são destinados ao 1º e 2º ciclos e os PCN dos anos finais do ensino fundamental - PCN-AF (BRASIL, 1998a) dizem respeito ao 3º e 4º ciclos. Com a implementação do ensino fundamental de nove anos, a entrada das crianças no ensino fundamental foi antecipada em um ano, ou seja, as crianças cursam o 1º ano do ensino fundamental aos seis anos.

Observaram-se inicialmente as habilidades e os objetos de estudo que eram preconizados no que concerne às grandezas volume e capacidade nos PCN e na BNCC, verificando as orientações metodológicas e avaliativas referentes a estas grandezas e comparando as diferentes abordagens encontradas nestes dois documentos.

Com base nos extratos dos documentos oficiais e levando em consideração os resultados obtidos nas pesquisas anteriores a essa, foi esboçado um modelo praxeológico de referência a priori. Foram elencados alguns tipos de tarefas, variáveis e seus respectivos valores, o que permite construir ramificações nos tipos de tarefas, gerando subtipos. Tratou-se de buscar

modelar um gerador de tarefas, GT, proposto por Chaachoua e Bessot (2018), a ser utilizado na análise das coleções no que tange às diferenças encontradas entre os livros didáticos, com o passar dos anos de ensino.

Esse modelo praxeológico de referência a priori serviu de base para a análise dos livros didáticos do 1º ao 6º ano do ensino fundamental. Escolhemos analisar livros que foram escritos pelo mesmo autor, entendendo que desta forma poderíamos observar certa continuidade em relação à abordagem dos conteúdos em foco, retomando o que foi visto nos livros anteriores e aprofundando. Assim, sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático, modelou-se as praxeologias matemáticas referentes às grandezas capacidade e volume. Procurou-se verificar as proximidades e os distanciamentos entre Modelo Praxeológico Dominante, expresso nos livros didáticos e o Modelo Praxeológico de Referência a Priori, esboçado. Além disso, foi averiguada a evolução das tarefas propostas nestes livros.

Outra escolha metodológica realizada foi restringir as análises aos capítulos dos livros didáticos especificamente destinados ao estudo das grandezas e medidas ou aos sólidos geométricos. Ou seja, nossas análises tiveram como foco as grandezas capacidade e volume quando tomadas como objetos de estudo próprios (e são desconsiderados os usos desses objetos matemáticos como contexto ou instrumento para o estudo de outros conteúdos). Seguem-se os critérios de escolha para os livros didáticos aqui analisados.

5.1. PNLD E GUIAS DOS LIVROS DIDÁTICOS

O Instituto Nacional do Livro criado pelo governo federal, em 1937, com a finalidade de distribuir livros didáticos (LD) para as escolas das redes públicas do país sofreu várias reestruturações até chegar ao que se chama hoje de PNLD (Programa Nacional do Livro Didático), gerido pelo Ministério da Educação (MEC). Durante esses mais de 80 anos, as políticas públicas relativas ao livro didático foram reformuladas e ampliadas. Atualmente, contempla a avaliação, seleção e distribuição de livros para todas as escolas públicas do país, que aderem ao Programa, desde a educação infantil até o ensino médio incluindo políticas específicas para a educação de jovens e adultos e para a educação do campo.

Um dos produtos do PNLD a cada edição do programa desde 1996 é o guia do livro didático, cujo intuito principal é auxiliar a escolha dos livros a serem adotados nas escolas. O Guia do PNLD contém, entre outros elementos, as resenhas dos livros aprovados na etapa de

avaliação. A partir do ano de 2002 (BRASIL, 2001), o guia do livro didático de matemática incorporou em suas análises o campo das grandezas e medidas, recomendando aos livros didáticos incluírem as Grandezas e Medidas como tal e verificando sua presença e periodicidade, inclusive enfatizando o estudo das grandezas geométricas não mais como subcampo da geometria.

A escolha dos livros que são aprovados pelo guia do PNLD é precedida de muitos critérios, sejam eles eliminatórios, como “apresentar de modo errado conceitos, imagens e informações fundamentais das disciplinas científicas em que se baseia” (BRASIL, 2009, p. 27), ou podem ser recomendações, erros com os quais o livro ainda pode ser aprovado, como “Em matemática, um mesmo fato ou conceito pode ser descrito e representado em diferentes quadros (numérico, algébrico, geométrico, gráfico). Assim é importante favorecer o entendimento dos conceitos e permitir maior flexibilidade em seu uso.” (BRASIL, 2001, p. 146).

Então, faz parte do que é preconizado pela instituição PNLD que nos livros didáticos de matemática haja diversidade de tipos de tarefas ao trabalhar com grandezas e medidas (inclusive volume e capacidade). Por outro lado, o que se observa nos LD é que certos tipos de tarefas apontados nas pesquisas como importantes para dar sentido às grandezas não são contemplados ou o são de maneira superficial, como afirma Carvalho e Lima (2010, p. 179) em relação às grandezas e medidas, não há uma preocupação em trazer as situações de comparação sem precisar medir.

Desde o ano de 2010, a partir do guia do PNLD 2011 para os anos finais do ensino fundamental, conter o estudo do domínio das Grandezas e Medidas tornou-se critério de eliminação: “deixar de incluir um dos campos da Matemática escolar, a saber, números e operações, álgebra, geometria, grandezas e medidas e tratamento da informação;” (BRASIL, 2010, p. 26). Na relação institucional do PNLD com os conteúdos estudados aqui, pode-se dizer que são cinco domínios que compõem a matemática: Álgebra, Números e Operações, Geometria, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação, que a partir do PNLD 2017 (BRASIL, 2016), esse último, passou a se chamar Estatística e Probabilidade.

O guia de matemática do PNLD 2019 (BRASIL, 2018b) traz uma análise geral do que as coleções aprovadas propõem para os anos iniciais do ensino fundamental, como as propostas didáticas e pedagógicas dos livros, as metodologias que este aborda, a adequação das imagens e estrutura do livro, entre outros tópicos que concernem à matemática e tópicos que são de análise geral, para livros de todas as disciplinas.

O documento traz os conteúdos metodológicos e conceituais sobre os temas, deixando claro que o aluno precisa dissociar os três elementos referentes às grandezas, o objeto geométrico, a grandeza e a medida, aspectos convergentes com a hipótese didática de Douady e Perrin-Glorian (1989), como no trecho:

É importante que o(a) professor(a) fique atento(a) a três componentes distintos, embora articulados, quais sejam: o objeto geométrico, a grandeza a ele associada e a medida dessa grandeza obtida por meio de medições. A um mesmo objeto geométrico é possível associar várias grandezas. A cada grandeza, associamos uma medida que pode ser representada por diferentes unidades. (BRASIL, 2018b, p. 31).

O guia de matemática do PNLD 2017 (BRASIL, 2016) é relativo às coleções de livros didáticos para os anos finais do ensino fundamental. Assim como o guia dos anos iniciais, traz um patamar geral das coleções por eixos. No eixo das grandezas e medidas, discorre sobre a importância do estudo das grandezas por suas aplicações no mundo real e recomenda também que a abordagem das grandezas geométricas e suas medidas leve os alunos a distinguir o objeto geométrico, as grandezas e os números (medidas das grandezas, tendo sido escolhida uma unidade). Essa recomendação converge com nosso MPR a priori, o qual se apoia nas pesquisas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989 OLIVEIRA, 2002, 2007; BARROS, 2002; ANWANDTER-CUELLAR, 2008; CAVALCANTI, 2010; FIGUEIREDO, 2013; MORAIS, 2013; MELO, 2018; entre outras).

Especificamente sobre as grandezas volume e capacidade, afirma-se no PNLD 2017 (BRASIL, 2016, p. 45) que: “as noções intuitivas de ‘espaço tridimensional ocupado por um objeto geométrico’ ou para ‘o espaço tridimensional interior de um recipiente’ é o mesmo: a grandeza volume.” A primeira proposição refere-se ao volume e a segunda à capacidade quando estudados no ensino fundamental. Como já descrito aqui anteriormente, na matemática não há a distinção entre estes conceitos, sendo sua distinção cognitiva e didática.

A capacidade é objeto de estudo logo nos primeiros anos do ensino fundamental e o volume ao final dos anos iniciais e nos anos finais. O motivo desta distinção já foi visto antes também, a dimensionalidade das duas grandezas, que provoca a facilidade em aprender a unidimensional e uma menor facilidade em compreender a tridimensional.

Este mesmo guia (BRASIL, 2016) também aponta para a importância da diferenciação entre os dois conceitos para os alunos, afirmando que as obras dos anos finais do ensino

fundamental não diferenciam tão bem estas grandezas provocando inconsistências na aprendizagem como:

Definir a capacidade de um recipiente como “a quantidade de líquido que ele pode conter”; Em recipientes do mundo físico, confundir, sem alertar o estudante, o volume total com o volume do seu interior (capacidade); Restringir o uso da unidade ‘litro’ à medição de capacidade e a unidade ‘metro cúbico’ à medição de volumes. (BRASIL, 2016, p. 45).

O guia traz um ponto importante sobre as fórmulas de volume, introduzidas nos anos finais do ensino fundamental, em relação ao princípio de Cavalieri, local em que este é inserido nos livros didáticos e como forma de justificar certa fórmula, acaba-se utilizando argumentos circulares. O documento aconselha a não utilização do princípio para justificar as fórmulas nestes anos de escolaridade, deixando a justificativa para as séries posteriores, nas quais o aluno pode compreender melhor a álgebra necessária para tal. Além de dissertar sobre os eixos e os conteúdos específicos, este guia preocupa-se em trazer aspectos metodológicos do ensino da matemática (Ibidem).

5.2. ESCOLHA DOS LIVROS DIDÁTICOS E GUIAS DO PNLD REFERENTES

Para a escolha dos livros didáticos, foram observados os guias dos PNLD dos anos de 2017 e 2019 (BRASIL, 2016, 2018b), nos quais se observou quais coleções de matemática foram aprovadas e entre elas, quais foram escritas pelo mesmo autor. No PNLD 2017 (BRASIL, 2016), anos finais do ensino fundamental, foram aprovadas 11 coleções de livros didáticos, enquanto no PNLD 2019, dos anos iniciais do ensino fundamental, foram 16 coleções. Quatro coleções de livros didáticos satisfizeram esta condição imposta e para decidir qual deles escolher observou-se o PNLD do Ensino Médio, uma vez que anteriormente planejava-se analisar uma coleção de livros do 1º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio, o critério de desempate foi a coleção que também estava presente no Ensino Médio de acordo com o PNLD 2018 (BRASIL, 2017b). Nos três documentos, apenas uma coleção satisfaz o critério

A escolha das coleções que possuem o mesmo autor baseou-se na ideia de menor ruptura entre a abordagem dada ao conteúdo aqui observado, entendendo assim que o mesmo autor retomaria a mesma abordagem utilizada no livro anterior, aprofundando-a, e com menor chance

de ruptura. Tomando como base essa compreensão, entender-se-á o autor/editora como uma instituição ao qual o livro didático produzido por ele é um elemento, um representante desta instituição, e quem utiliza esse material é considerado sujeito, uma vez que se submete a abordagem contida no livro que foi idealizado pelo Autor.

Comparando as coleções aprovadas nos anos iniciais e finais do ensino fundamental, foram encontradas quatro coleções que possuem os mesmos autores, com ou sem colaboração de outros: *Ápis/Projeto Teláris*, *Burity Mais/Projeto Araribá*, *Ar – Aprender, Relacionar/Matemática compreensão e prática* e *A Aventura do Saber/ Matemática – Ideias e Desafios*. Destas quatro coleções foi escolhida a coleção *Ápis/Projeto Teláris* (DANTE, 2018a, 2017b, 2017c, 2015a, 2015b, 2016) pois o mesmo autor possui uma coleção aprovada no PNLD do ensino médio (BRASIL, 2017b) que seria também utilizada para análise em discussões anteriores deste trabalho.

Como essa pesquisa se propõe a analisar a evolução da abordagem dos conteúdos capacidade e volume, o fato de serem coleções do mesmo autor para as duas etapas consideradas (1º ao 5º ano e 6º ano do ensino fundamental) deve permitir levar em consideração uma continuidade de projetos de ensino, com menor possibilidade de rupturas, como dito anteriormente.

A escolha dos livros didáticos do 1º ao 6º ano para análise, além da adequação da pesquisa ao tempo de duração do mestrado, baseou-se na justificativa dada por Ferreira (2018), na qual o livro do 6º ano traz um aprofundamento e ampliação dos conceitos previamente estudados do 1º ao 5º ano e ocorre a retomada destes conceitos a partir da ideia de que estes objetos são atualizados a cada novo encontro e a abordagem da capacidade é mais enfática nos anos iniciais do ensino fundamental do que nos anos finais e o 6º ano é onde se opera a transição entre a primeira e a segunda etapa do ensino fundamental.

Figura 8: Interseção das Coleções de Livros Didáticos dos PNLD 2018 e 2019 (BRASIL, 2016, 2018b) por Autor

PNLD 2019 - Anos iniciais	PNLD 2017 - Anos Finais
Liga Mundo	Convergências – Matemática
Odisseia	Descobrimos e Aplicando a Matemática
Aprender Juntos	Matemática - Bianchini
Burity Mais - Matemática	Matemática – Compreensão e Prática
A Conquista da Matemática	Matemática – ideias e Desafios
Nosso Livro de Matemática	Matemática do Cotidiano
Novo Bem-Me-Quer-Matemática	Matemática nos dias de hoje – Na Medida Certa
Vem Voar - Matemática	Praticando Matemática
Ápis – Matemática	Projeto Araribá – Matemática
Ar - Aprender e Relacionar: Matemática	Projeto Teláris – Matemática
Aquarela - Matemática	Vontade de Saber - Matemática
Matemática com Saladim	
A Aventura do Saber - Matemática	
Eu Gosto - Matemática	
Meu Livro de Matemática	
Novo Pitangua – Matemática	

FONTE: Produzido pela autora baseado nos guias do PLND de 2017 e 2019.

Os guias serão dispostos aqui de acordo com a ordem das coleções, iniciar-se-á pelo guia do PNLD 2019 (BRASIL, 2018b), referente aos anos iniciais do EF e após o guia do PNLD 2017 (BRASIL, 2016), relativo aos anos finais do ensino fundamental.

Sobre a coleção Ápis – Matemática (DANTE, 2017a, 2017b, 2017c, 2015a, 2015b), em específico, no guia do PNLD 2019 (BRASIL, 2018b), afirma-se que a coleção escolhida trata os conteúdos matemáticos de forma dinâmica e contextualizada, explora a metodologia de resolução de problemas, trata os conteúdos de forma progressiva de acordo com as habilidades e competências descritas na BNCC e o manual do professor apresenta possíveis abordagens metodológicas para os conteúdos (BRASIL, 2018a).

Estes guias foram observados em suas considerações sobre os livros que aqui foram adotados para análise a respeito dos objetos de pesquisa aqui tratados na análise de resultados.

5.3. ELEMENTOS ELENCADOS COMO IMPORTANTES NA COMPREENSÃO DAS GRANDEZAS VOLUME E CAPACIDADE

A partir dos estudos realizados e descritos anteriormente, uma série de elementos foram selecionados como importantes no ensino destas grandezas descritos abaixo. Entende-se que estes dados listados devem ser construídos em algum momento da escolaridade, uma vez que o aluno tem contato com estas grandezas desde cedo e já pode observar seus usos no dia a dia, enquanto outros aspectos necessitam de uma compreensão maior do mundo ou da própria matemática, o que ocorre nas séries posteriores. Alguns trechos que referenciam a discussão acerca dos elementos abaixo foram grifados neste trabalho.

a. Dois sólidos distintos podem ter o mesmo volume.

Dada a função volume como uma função sobrejetora, esta associa uma mesma medida de desta grandeza a mais de um sólido, justificativa que o aluno apenas tem conhecimento no estudo das funções, dada nos anos finais da escolaridade. É importante que o aluno possa observar a conservação do volume de sólidos diversos, situação que propicia a mudança do quadro geométrico ao quadro das grandezas, como uma classe de equivalência.

Relacionada a esta situação, pode-se enquadrar a construção de sólidos com um volume dado e a comparação entre esta grandeza de sólidos distintos. O mesmo se aplica à grandeza

capacidade, em que a verificação concreta de recipientes diferentes e que possuem a mesma capacidade pode ser trabalhada desde os anos iniciais de aprendizagem.

b. Volume e capacidade podem ser grandezas tridimensionais e unidimensionais.

O tratamento da grandeza volume pode ser tridimensional, quando referente às três dimensões de certo objeto, como pode ser unidimensional ao tratar de líquidos ou de contagem linear. A capacidade pode ser vista linearmente também ao ser associada ao produto das arestas e unidimensional quando trata das unidades de medida lineares.

Esta diferenciação de volume e capacidade dimensionalmente facilita a compreensão de que nem tudo que é medido em litro é capacidade, sendo a medida de algum líquido o volume que este ocupa no espaço, como por exemplo o volume de água dentro de um balde. Entende-se também que a capacidade de certo recipiente pode ser dada em cm^3 , se esta for o volume interno do recipiente ou dado em relação a outros objetos, como uma caixa de dominó que tem a capacidade para 28 peças.

A diferença entre o volume e a capacidade em seus aspectos dimensionais pode ser de difícil compreensão, já que a capacidade também é volume em certa circunstância, mas é importante que o aluno saiba que nem tudo que se mede em litros é capacidade.

c. Unidades de medida distintas associam valores numéricos diferentes a volumes iguais.

Uma vez que se muda a unidade de medida, o valor numérico associado ao volume altera-se e embora seu volume permaneça o mesmo, a transição entre os quadros das grandezas e numérico é perceptível. Ao definir uma função volume, escolhe-se uma unidade de medida U , sendo essa proporcional a qualquer outra função de volume adotada com uma unidade de medida diferente. Logo, as funções que associam unidades de medidas diferentes a sólidos iguais são equivalentes a menos de um escalar, como por exemplo um mesmo sólido pode ter como medida de volume 1m^3 , 1.000dm^3 ou $1.000.000\text{cm}^3$, pois embora as unidades de medida sejam diferentes, o sólido é o mesmo e ocupa o mesmo lugar no espaço.

Reiterando com o dito anteriormente de forma mais clara, que mudar a unidade de medida não altera o volume, apenas o valor numérico relacionado. Neste tópico pode-se citar a transformação de unidade de medidas como circunstâncias que propiciam um entendimento desta característica.

d. Unidades de medida não padronizadas

Além das unidades de medida padrão, m^3 , cm^3 , mm^3 , L, ml é importante utilizar unidades de medidas diversas para medir a grandeza volume, sendo estas medidas não padronizadas de comprimento ou de capacidade, como palmos, passos em relação ao comprimento ou cubos ou peças como volume, objetos que podem preencher outros, ou relacionar o volume de sólidos a outros sólidos distintos. A grandeza capacidade também pode ser medida com unidades não padronizadas, como copos, xícaras, garrafas, entre outros materiais. Estas situações relacionam os três quadros das grandezas geométricas: o geométrico, o das grandezas e o numérico. A BNCC (BRASIL, 2018a) traz como habilidade a ser desenvolvida a mudança de unidade de capacidade desde o 2º ano do ensino fundamental.

e. Volume é diferente de massa

Uma confusão bastante comum, como observado nas pesquisas de Oliveira (2002) e Barros (2002), é associação da grandeza massa, quantidade de matéria de um corpo, ao volume, espaço que este ocupa. É interessante que os alunos experimentem situações em que possam observar sólidos com massas e volumes iguais e distintos para vivenciar na prática a diferença entre estas duas grandezas. As circunstâncias que se podem elencar aqui incluem a comparação de sólidos com massas distintas e volumes iguais e de sólidos com massas iguais e volumes distintos. Como por exemplo 1kg de algodão e de ferro possuem mesma massa, mas volumes distintos, o algodão ocupa um lugar maior no espaço, ou um cubo de mesmas dimensões feito de plástico ou de papel, ambos ocupam o mesmo espaço mas tem massas distintas.

f. Volume e capacidade são grandezas correlacionadas e de mesma natureza.

Embora distintas, estas grandezas são correlacionadas, sendo equivalentes no olhar da matemática, quando vistas como grandezas unidimensionais ou até tridimensionais. Esta correlação pode ser incentivada a partir de tarefas que transformem capacidade em volume ou volume em capacidade sem diferenciar de fato os casos em que as duas fazem sentido. Como por exemplo questões em que os dois conceitos são utilizados, como questões de vazão, nas quais despeja-se água (volume de água) em certo recipiente (capacidade).

g. Associar volume ao produto das arestas de um paralelepípedo.

A produção de sólidos dado o seu volume ou a sua capacidade é um tipo de tarefa que deve ser abordada. Identificar um sólido dada medida do seu volume ou da sua capacidade é a operação inversa do cálculo da medida do volume, propiciando ao aluno o entendimento que aquele volume representa algum sólido e que este não necessariamente é único, havendo sólidos diversos com o mesmo volume. Aqui a especificação do paralelepípedo parte dos estudos sobre volume até o 6º ano do ensino fundamental onde apenas paralelepípedos regulares são descritos nos documentos oficiais, tanto na BNCC (BRASIL, 2018a), quanto no PCN (BRASIL, 1998a).

h. Comparar volume e capacidade

Nos anos iniciais do ensino fundamental, comparar é uma tarefa proposta pelos documentos oficiais (BRASIL, 2018a) em que o aluno não precisa utilizar valores numéricos, podendo ele discernir qual objeto cabe mais ou menos, ou qual é maior ou menor pela observação, a partir de observação, associação com a sua realidade ou até mesmo com objetos concretos. A comparação nos anos posteriores pode incluir valores numéricos e técnicas de resolução mais elaboradas. Esta situação é proposta em vários estudos anteriores e baseia-se no trabalho de Vergnaud (1983).

i. Problemas que envolvem outras grandezas e/ou outros campos da matemática

A conexão entre a grandeza volume e outras grandezas deve ocorrer desde cedo, seja calculando o valor monetário de algum produto ou associação da área com volume. Além da conexão com outros campos da matemática como álgebra, números e operações, geometria. Dar significado ao estudo das grandezas é papel da escola, com a conexão destas grandezas com o mundo ou com outros conteúdos dentro da matemática que as justifique, que a deem razão de ser.

j. Formas diversas de medir volume e capacidade

É de fundamental importância que o aluno se aproprie de várias maneiras de medir as grandezas, seja por contagem, estimativa, proporção, operações básicas, multiplicação das arestas, transvasamento, imersão, entre outras. As diferentes técnicas na medição de certa grandeza ampliam o olhar do aluno, principalmente após o uso da fórmula.

Estes tópicos elencados acima serviram como base para a criação das categorias de análise a serem observadas neste trabalho, uma vez que os mesmos são características fundamentais para uma boa compreensão e diferenciação entre as grandezas estudadas aqui.

Estes tópicos serviram para esboçar o modelo praxeológico de referência a priori, nos quais foram descritos tipos de tarefas que tratariam cada um dos casos descritos acima e algumas variáveis que seriam encontradas no caminho, são importantes para um ensino sequencial e se alteram de acordo com o ano escolar, como a utilização dos números naturais, passando para os decimais, frações e irracionais ou o tipo de sólido geométrico estudado. As categorias aqui propostas poderão ser modificadas de acordo com as necessidades durante as análises, podendo ser ampliadas ou reduzidas, caso necessário.

Quadro 1: Esboço do Modelo Praxeológico de Referência a Priori para os Conceitos de Volume e Capacidade

E	Elementos Importantes para a Compreensão dos Conceitos de Volume e Capacidade
E₁	Dois sólidos distintos podem ter o mesmo volume;
E₂	Volume e capacidade podem ser grandezas trilineares e lineares;
E₃	Unidades de medidas distintas associam valores numéricos diferentes a volumes iguais
E₄	Unidades de medida não padronizadas
E₅	Volume é diferente de massa
E₆	Capacidade e volume são grandezas correlacionadas e de mesma natureza
E₇	Associar volume ao produto das arestas de um paralelepípedo.
E₈	Comparar volume e capacidade
E₉	Problemas que envolvem outras grandezas e/ou outros campos da matemática
E₁₀	Formas diversas de medir volume e capacidade

FONTE: Própria autora

A partir dos elementos do *Quadro 1* será criado o modelo de referência, em que serão descritos tipos de tarefas que poderão ser encontrados durante as análises e as variáveis que cada tipo de tarefa pode incluir.

6. CAPACIDADE E VOLUME NOS DOCUMENTOS OFICIAIS DE ORIENTAÇÃO CURRICULAR

Neste capítulo são apresentadas as análises da abordagem das grandezas volume e capacidade nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997, 1998a), na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018a) e nos guias de livros didáticos do PNLD (BRASIL, 2016; 2018b).

Deseja-se aqui expor o que os documentos oficiais dissertam a respeito dos objetos de estudo analisados nesta pesquisa, as grandezas volume e capacidade, observando o porquê da importância do estudo de tais conteúdos e quais os conceitos e procedimentos que o aluno deve apropriar-se após cada ano escolar.

Haverá aqui então uma análise comparativa entre o descrito na BNCC e PCN no que concerne aos objetivos de aprendizagem. Tendo em vista a diferença entre os dois documentos, no que se refere à forma como são descritos os objetivos de aprendizagem, a comparação se dará de forma sucinta.

6.1. ABORDAGEM DE CAPACIDADE E VOLUME NOS PCN

Um desafio posto nos documentos é destacar quando e como os conteúdos matemáticos podem ser úteis de modo que a matemática escolar permita ao aluno tomar proveito do que estuda para compreender melhor o mundo.

No PCN de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental - PCN-AI (BRASIL, 1997) a preocupação por parte da escola com os usos da matemática está explícita, como se pode observar no trecho do documento em questão “Quais conhecimentos, competências, hábitos e valores são socialmente relevantes” (BRASIL, 1997, p. 38). Mas no texto fica claro também que o aspecto utilitário não é suficiente para discutir a razão de ser dos conteúdos matemáticos a serem estudados:

Em que medida contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, na construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos. (BRASIL, 1997 p. 38).

Alguns dos aspectos que este documento traz como sendo relevantes para a formação do aluno como cidadão são “fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático.” (BRASIL, 1997, p 37). Assim, espera-se que o aluno seja capaz de observar a matemática no seu cotidiano e relacioná-la com outros campos, vendo não só a matemática ao seu redor, mas o seu cotidiano dentro da matemática. Outro ponto é “identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática” (ibidem, p. 37)

Nos PCN dos anos finais do ensino fundamental -PCN-AF (BRASIL, 1998a), referente ao 3º e 4º ciclos retrata-se a importância das grandezas e medidas: “A Matemática se faz presente na quantificação do real” (BRASIL, 1998a p. 25), colocando as grandezas como um conhecimento fundamental para o entendimento do mundo. Vai ainda mais além ao citar utilizações da matemática e suas relações com o universo, afirmando que o conhecimento das grandezas “vai muito além, criando sistemas abstratos, ideais, que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados quase sempre a fenômenos do mundo físico.” (ibidem, p. 25), além de colocar as grandezas e medidas como um dos elos entre outros campos da matemática, como a álgebra, aritmética e a geometria, além de outros campos de conhecimento externos à matemática.

Desde a educação infantil as grandezas são tidas como objeto de estudo, como pode ser observado no RECNEI (BRASIL, 1998b), Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil, no qual afirma-se que desde cedo as crianças devem fazer comparações entre as medidas e estabelecer relações entre elas, inclusive fazendo uso de unidades de medidas não padronizadas.

A comparação de comprimentos, pesos e **capacidades**, a marcação de tempo e a noção de temperatura são experimentadas desde cedo pelas crianças pequenas, permitindo-lhes pensar, num primeiro momento, essencialmente sobre características opostas das grandezas e objetos. [...] O desenvolvimento dessas capacidades comparativas não garante, porém, a compreensão de todos os aspectos implicados na noção de medida. (BRASIL, 1998b p. 226, grifo nosso)

A capacidade comparativa não deve ser a única a ser trabalhada em relação as grandezas e medidas, outras capacidades também são de suma importância, como a experimentação

concreta, a medição e a produção, capacidades estas reiteradas por pesquisas anteriores sobre o volume de Vergnaud (1983).

A grandeza capacidade aparece nos PCN-AI como objetivo de aprendizagem para a matemática no primeiro ciclo: “Reconhecer grandezas mensuráveis, como comprimento, massa, **capacidade** e elaborar estratégias pessoais de medida.” (BRASIL, 1997 p 47, grifo nosso). Para ter um conhecimento consistente sobre capacidade e volume, o sujeito precisa também construir conhecimentos robustos sobre a dimensionalidade dos objetos: “Perceber semelhanças e diferenças entre objetos no espaço, identificando formas tridimensionais ou bidimensionais, em situações que envolvam descrições orais, construções e representações.” (BRASIL, 1997 p 47).

No PCN-AI (ibidem) são expostas os objetivos de aprendizagem que devem ser desenvolvidas nos anos iniciais do ensino fundamental (1º ciclo e 2º ciclos). Nos PCN-AF, discutem-se os objetivos de aprendizagem a serem trabalhadas nos anos finais do ensino fundamental (3º e 4º ciclos referentes aos 6º e 7º anos e aos 8º e 9º anos, respectivamente).

Quadro 2: Conteúdos a Serem Desenvolvidos de Acordo com o PCN-AI Referentes às Grandezas Geométricas Volume e Capacidade²⁷

Ciclo de Aprendizagem	Objetivos de Aprendizagem	Conteúdos Conceituais e Procedimentais
1º ciclo (2º e 3º ano)	Reconhecer grandezas mensuráveis, como comprimento, massa, capacidade e elaborar estratégias pessoais de medida.	Comparação de grandezas de mesma natureza, por meio de estratégias pessoais e uso de instrumentos de medida conhecidos — fita métrica, balança, recipientes de um litro etc.
	Utilizar instrumentos de medida, usuais ou não, estimar resultados e expressá-los por meio de representações não necessariamente convencionais.	
2º ciclo (4º e 5º ano)	Utilizar procedimentos e instrumentos de medida usuais ou não, selecionando o mais adequado em função da situação-problema e do grau de precisão do resultado.	Estabelecimento das relações entre unidades usuais de medida de uma mesma grandeza.
	Representar resultados de medições, utilizando a terminologia convencional para	Utilização de procedimentos e instrumentos de medida, em função do problema e da precisão do resultado.
		Comparação de grandezas de mesma natureza, com escolha de uma unidade de medida da mesma espécie do atributo a ser mensurado.

²⁷ Conteúdo dos quadros compostos por citações literais do documento analisado.

	as unidades mais usuais dos sistemas de medida, comparar com estimativas prévias e estabelecer relações entre diferentes unidades de medida.	Identificação de grandezas mensuráveis no contexto diário: comprimento, massa, capacidade , superfície etc.
		Reconhecimento e utilização de unidades usuais de medida como metro, centímetro, quilômetro, grama, miligrama, quilograma, litro , mililitro , metro quadrado, alqueire etc.
		Reconhecimento dos sistemas de medida que são decimais e conversões usuais, utilizando-as nas regras desse sistema.

FONTE: Recortes do PCN-AI (BRASIL, 1997 *passim*, grifo nosso)

Vê-se no quadro acima que desde o primeiro ciclo, a grandeza capacidade já é estudada com comparações, operações e identificação, as medições e comparações ficam mais algébricas aqui, uma vez que o aluno aprende as operações básicas e as relações entre as unidades de medida aparecem.

Como conteúdos atitudinais referentes ao 1º ciclo, o PCN propõe “Valorização da importância das medidas e estimativas para resolver problemas cotidianos.” (BRASIL, 1997, p. 53), conteúdo coerente com os objetivos de aprendizagem que devem ser desenvolvidos em relação às grandezas: “Comparação de grandezas de mesma natureza, por meio de estratégias pessoais e uso de instrumentos de medida conhecidos” (Ibidem, p.52). Como avaliação, espera-se, de acordo com o mesmo documento, que este consiga medir com objetos não convencionais e que lhe são familiares, além de desenvolver a habilidade de realizar estimativas.

No segundo ciclo, entre as atitudes que os alunos devem desenvolver está a “Confiança na própria capacidade para elaborar estratégias pessoais de cálculo, interesse em conhecer e utilizar diferentes estratégias para calcular e os procedimentos de cálculo que permitem generalizações e precisão” (Ibidem, p. 62). Nesta fase da escolaridade os alunos têm como objetivos de aprendizagem entrar em contato com as unidades de medida mais comuns, iniciam os procedimentos de transformação de unidades e de escolha de unidades mais adequadas com o contexto, além de “ler, interpretar e produzir registros utilizando a notação convencional das medidas.” (Ibidem, p. 63). Ressalta-se que o documento não faz menção ao estudo da grandeza volume.

Nas orientações didáticas contidas no PCN, observa-se a importância atribuída ao contexto histórico na compreensão inicial das grandezas, uma vez que a comparação entre grandezas era comum nos tempos antigos, com a utilização de pés, mãos, antebraços etc. Entender intuitivamente as unidades de medida padrão também é importante e a associação

deste conhecimento com o cotidiano do aluno é uma das particularidades das grandezas e medidas o que reforça a hipótese de que é pertinente tomá-las como objeto de estudo desde cedo (Ibidem).

O documento em questão não trata a grandeza volume em sua diferenciação com a capacidade no 1º e 2º ciclos de aprendizagem, deixando este objeto no encargo do 3º e 4º ciclo de aprendizagem, o que se chama atualmente de anos finais do ensino fundamental. Para este ciclo, o PCN-AF, Parâmetros curriculares para o 3º e 4º ciclo, (BRASIL, 1998a), orientam que sejam trabalhadas diferentes grandezas e suas utilizações na sociedade juntamente com seus contextos históricos e incorporar novas noções de medidas, além de resolver problemas que as contenha. O *Quadro 3* abaixo mostra os objetivos de aprendizagem para o 3º e 4º ciclo, referentes aos anos finais do ensino fundamental.

Quadro 3: Conteúdos a Serem Desenvolvidos de Acordo com os PCN-AF Referentes às Grandezas Volume e Capacidade

Ciclo de Aprendizagem	Objetivos de Aprendizagem	Conteúdos Conceituais e Procedimentais
3º ciclo (6º e 7º ano)	Ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns dos problemas históricos que motivaram sua construção;	Reconhecimento de grandezas como comprimento, massa, capacidade , superfície, volume , ângulo, tempo, temperatura, velocidade e identificação de unidades adequadas (padronizadas ou não) para medidas, fazendo uso de terminologia própria. Indicar o volume de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo pela contagem de cubos utilizados para preencher seu interior.
	Resolver problemas que envolvam diferentes grandezas, selecionando unidades de medida e instrumentos adequados à precisão requerida.	Estabelecimento de conversões entre algumas unidades de medida mais usuais (para comprimento, massa, capacidade , tempo) em resolução de situações-problema Obtenção de medidas por meio de estimativas e aproximações e decisão quanto a resultados razoáveis dependendo da situação-problema.
4º ciclo (8º e 9º ano)	Ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, utilizando dígitos significativos para representar as medidas, efetuar cálculos e aproximar resultados de acordo com o grau de precisão desejável;	Resolução de situações-problema envolvendo grandezas (capacidade , tempo, massa, temperatura) e as respectivas unidades de medida, fazendo conversões adequadas para efetuar cálculos e expressar resultados.
	Obter e utilizar fórmulas para cálculo da área de superfícies planas e para cálculo de volumes de sólidos geométricos (prismas retos e composições desses prismas).	Cálculo do volume de alguns prismas retos e composições destes.

FONTE: Recortes do PCN-AF (BRASIL, 1998a, passim, grifo nosso)

Neste quadro observa-se além do estudo da capacidade, o estudo do volume propriamente dito, utilizando as arestas de sólidos geométricos como base e problemas que envolvem as duas grandezas. No 3º ciclo as transformações de unidades e os cálculos numéricos são incentivados, além da utilização de unidades de medida não convencionais.

No 4º ciclo a ideia de medir também tem bastante força. Neste ciclo o aluno deve compreender a resolução de situações-problema utilizando as grandezas no processo, além de conseguir utilizar diversas unidades de medidas padronizadas, escolhendo seus instrumentos de medição e o grau de precisão necessários (BRASIL, 1998a, *passim*).

Nas orientações didáticas para o 4º ciclo, o documento cita a importância de retomar experiências que lidem com o conceito de medida, como comparação e contagem, atentando ao fato de que algumas grandezas não são unidimensionais, o que torna menos intuitiva a relação entre as grandezas, pois “para calcular áreas e volumes o aluno terá contato com uma dimensão da medida que não é obtida por uma comparação direta, e sim pelo produto de medidas lineares (lados, arestas etc.)”(BRASIL, 1998a p.129).

6.2. ABORDAGEM DE CAPACIDADE E VOLUME NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR – BNCC

Embora a BNCC trate de maneira diferente os objetivos de aprendizagem, pode-se observar que eles se aproximam no que tange às competências que devem ser desenvolvidas com o passar dos anos escolares. A BNCC traz como expectativas para os anos iniciais do ensino fundamental:

No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a expectativa é que os alunos reconheçam que medir é comparar uma grandeza com uma unidade e expressar o resultado da comparação por meio de um número. Além disso, devem resolver problemas oriundos de situações cotidianas que envolvem grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área (de triângulos e retângulos) e **capacidade e volume** (de sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, recorrendo, quando necessário, a transformações entre unidades de medida padronizadas mais usuais (BRASIL, 2018a, p. 271, grifo nosso)

Já nos anos finais, a preocupação em utilizar fórmulas e associar unidades de medidas distintas é descrita:

Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos reconheçam comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas e que consigam resolver problemas envolvendo essas grandezas com o uso de unidades de medida padronizadas mais usuais. Além disso, espera-se que estabeleçam e utilizem relações entre essas grandezas e entre elas e grandezas não geométricas, para estudar grandezas derivadas como densidade, velocidade, energia, potência, entre outras. Nessa fase da escolaridade, os alunos devem determinar expressões de cálculo de áreas de quadriláteros, triângulos e círculos, e as **de volumes de prismas e de cilindros**. (BRASIL, 2018a, p. 271, grifo nosso).

Pode-se observar no Quadro 4 abaixo as habilidades referentes às grandezas volume e capacidade e seus objetos de conhecimento de acordo com cada ano escolar.

Quadro 4: Habilidades a Serem Desenvolvidas em Relação às Grandezas Volume e Capacidade na BNCC dos Anos Iniciais

Ano Escolar	Objetos de Conhecimento	Habilidades a Serem Desenvolvidas
1º ano	Medidas de comprimento, massa e capacidade: comparações e unidades de medida não convencionais	(EF01MA15) Comparar comprimentos, capacidades ou massas, utilizando termos como mais alto, mais baixo, mais comprido, mais curto, mais grosso, mais fino, mais largo, mais pesado, mais leve, cabe mais, cabe menos , entre outros, para ordenar objetos de uso cotidiano.
2º ano	Medida de capacidade e de massa: unidades de medida não convencionais e convencionais (litro, mililitro, cm ³ , grama e quilograma)	(EF02MA17) Estimar, medir e comparar capacidade e massa, utilizando estratégias pessoais e unidades de medida não padronizadas ou padronizadas (litro, mililitro, grama e quilograma).
3º ano	Significado de medida e de unidade de medida	(EF03MA17) Reconhecer que o resultado de uma medida depende da unidade de medida utilizada. (EF03MA18) Escolher a unidade de medida e o instrumento mais apropriado para medições de comprimento, tempo e capacidade .
	Medidas de capacidade e de massa (unidades não convencionais e convencionais): registro, estimativas e comparações	(EF03MA20) Estimar e medir capacidade e massa, utilizando unidades de medida não padronizadas e padronizadas mais usuais (litro, mililitro, quilograma, grama e miligrama), reconhecendo-as em leitura de rótulos e embalagens, entre outros.
4º ano	Medidas de comprimento, massa e capacidade: estimativas, utilização de instrumentos de medida e de unidades de medida convencionais mais usuais	(EF04MA20) Medir e estimar comprimentos (incluindo perímetros), massas e capacidades , utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local.
5º ano	Medidas de comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade: utilização de unidades convencionais e relações entre as unidades de medida mais usuais	(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade , recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.
	Noção de volume	(EF05MA21) Reconhecer volume como grandeza associada a sólidos geométricos e medir volumes por meio de empilhamento de cubos, utilizando, preferencialmente, objetos concretos.

FONTE: Recorte da BNCC (BRASIL, 2018a p. 276-295. *passim*, grifo nosso)

Pode-se observar no quadro acima que as situações propostas para o ensino das grandezas foram diversificadas, a preocupação em comparar, observar e estimar as grandezas se faz mais presente e o estudo da grandeza volume dá-se no último ano dos anos iniciais.

A proposta da BNCC (BRASIL, 2018a) para o primeiro ano do ensino fundamental inclui o estudo das grandezas e medidas e entre as habilidades a serem desenvolvidas, traz comparar capacidades e ordenar objetos de uso cotidiano, utilizando expressões como cabe mais e cabe menos (BRASIL, 2018a, p. 279). No primeiro ano, a proposta do documento parece apontar para uma abordagem intuitiva das ideias iniciais no estudo das grandezas, em especial da grandeza capacidade.

No segundo ano, como se pode observar no Quadro 4, além da habilidade de comparar capacidades, espera-se que os alunos sejam capazes de estimar e medir capacidade utilizando estratégias pessoais e **unidades de medida não padronizadas ou padronizadas** (litro e mililitro). No terceiro ano, a habilidade de estimar e medir é desejada, juntamente com a escolha de unidades de medidas adequadas.

No quarto ano, a habilidade de comparar capacidades não está mais presente e a ênfase recai sobre medir e estimar capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas. O documento já trata as grandezas com suas unidades de medidas usuais: “Medir e estimar comprimentos (incluindo perímetros), massas e capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local.” (BRASIL 2018a, p 291). Observa-se aqui certa sistematização do conhecimento antes trabalhados intuitivamente.

No quinto ano, a transformação de unidades já deve ser trabalhada, com as unidades usuais e insere-se a noção de volume, em que a associação do volume com a quantidade de blocos unitários deve ser realizada, observando-a como grandeza. Como já descrito anteriormente, por ser uma grandeza multiplicativa, referente ao produto de outra(s) grandeza(s), a grandeza volume é trabalhada tardiamente, diferente da grandeza capacidade, que, por ser uma grandeza aditiva, é trabalhada logo nos primeiros anos de escolarização.

Com o Quadro 5 pode-se perceber que entre as habilidades a serem desenvolvidas nos anos finais do ensino fundamental segundo a BNCC, estão medir e estimar capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local.

Quadro 5: Habilidades das Grandezas Volume e Capacidade na BNCC do EF-Anos Finais

Ano Escolar	Objetos de Conhecimento	Habilidades
6º ano	Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares) , sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas [campos] do conhecimento.
7º ano	Problemas envolvendo medições	(EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.
	Cálculo de volume de blocos retangulares, utilizando unidades de medida convencionais mais usuais	(EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares , envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).
8º ano	Medidas de capacidade	(EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico , para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.
	Volume de paralelogramo reto	(EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.
9º ano	Volume de prismas e cilindros	(EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos , inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.

FONTE: Recortes da BNCC (BRASIL, 2018a, p.298-316, *passim*, grifo nosso)

No início dos anos finais do ensino fundamental, a utilização de fórmulas para a medição das grandezas surge, como se pode observar no *Quadro 5*, e daí em diante, a grandeza capacidade é pouco estudada. A transformação de unidades de medida de volume para unidades de medida de capacidade é trabalhada no 8º ano do ensino fundamental, de acordo com a BNCC. A possibilidade de medir sem unidades de medida padronizadas, o estudo de volume e de capacidade de sólidos geométricos que não sejam paralelepípedos e a relação entre volume e capacidade também estão presentes na BNCC.

Vale a pena atentar para o trecho “cálculo do **volume de recipiente** cujo formato é o de um bloco retangular.” o recipiente aqui não é dito se vazio ou cheio, dando a entender que seria um cálculo tanto de capacidade quanto de volume, ressaltando que a capacidade também é volume, sendo a diferenciação destes objetos nem sempre de fácil verificação, mas ao trata-los igualmente perde-se algumas nuances características que podem ser observadas quando pensamos como objetos distintos. A capacidade sempre é volume, mas nem sempre volume é capacidade, esta relação de pertinência retrata muito mais do que apenas estas grandezas como objetos matemáticos, mas como objetos didáticos e que podem ser diferenciados didaticamente.

Nesse documento, também é feita uma crítica à visão da geometria, na qual cálculos sobre grandezas geométricas e fórmulas em geral são vistas como o principal ou quase único objeto de estudo: a “geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras” (BRASIL 2018a, p 270).

6.3. ANÁLISE COMPARATIVA DAS ABORDAGENS DE CAPACIDADE E VOLUME NOS PCN E NA BNCC

As grandezas geométricas volume e/ou capacidade são tomadas como objeto de estudo em todos os anos e ciclos da educação básica, desde a educação infantil até o ensino médio. No primeiro ciclo (1ª e 2ª séries/ 2º e 3º anos) de aprendizagem do PCN (BRASIL, 1997), o aluno deve comparar capacidades utilizando estratégias pessoais. Quanto à BNCC (BRASIL, 2018a), no primeiro ano do ensino fundamental, espera-se que o aluno reconheça o que é capacidade, utilizando termos do seu cotidiano; no 2º ano, que compare capacidades mediante estratégias pessoais e no 3º ano, que saiba escolher unidades de medidas de capacidade adequadas e utilizar unidades de medida não padronizadas.

No segundo ciclo (3ª e 4ª séries), de acordo com o PCN (BRASIL, 1997), o aluno deve utilizar a capacidade em situações diárias além de reconhecer a grandeza capacidade e suas unidades de medida, utilizando-as adequadamente. A BNCC traz para o 4º e 5º anos do ensino fundamental (correspondentes ao 2º ciclo), a utilização de unidades de medida padronizadas e o incentivo à resolução de problemas com a grandeza capacidade, além da introdução ao ensino de volumes por contagem de cubos, tomados como sólidos unitários.

No terceiro ciclo do PCN dos anos finais do ensino fundamental (BRASIL, 1998a), o aluno deve resolver problemas que envolvam capacidade e suas unidades de medida além de calcular o volume de paralelepípedos além de estudar a transformação de unidades de capacidade. Na BNCC se diz que o aluno deve saber elaborar e resolver problemas com capacidade, igualmente ao PCN, além de calcular volume de paralelepípedos com unidades usuais de medida.

Os dois documentos se parecem bastante em se tratando das habilidades por ciclo/ano de escolaridade, embora a descrição dos conteúdos e das habilidades na BNCC seja muito mais

detalhada e inicie mais cedo o ensino de certos conteúdos, como o volume. A contextualização aparece sempre e há alguns prováveis erros em relação ao estudo de volume nos primeiros anos de escolaridade por parte do PCN e o volume de um recipiente sem especificações na BNCC. Não é incentivada a produção de sólidos e a comparação da capacidade e recipientes situa-se apenas nas primeiras séries.

Alguns dos elementos escolhidos como critérios de análise são pontuados nos documentos, como: E4 - Unidades de medida não padronizadas, os dois documentos prezam pela utilização de unidades de medidas não padronizadas nos anos iniciais do ensino fundamental, antes da introdução das unidades de medida mais comuns. A BNCC traz como objetivos de ensino a relação entre litro e metro cúbico, como a relação do decímetro com o milímetro, relação esta retratada nos critérios de análise no E6 - Capacidade e volume são grandezas correlacionadas e de mesma natureza.

O volume como o produto das arestas de um paralelepípedo reto não é citado nas habilidades dos documentos, mas outras formas de cálculo de volume são abordadas, como a contagem de blocos e estimativas. No sétimo ano do ensino fundamental, a BNCC traz “cálculo de medida do volume de blocos retangulares” (BRASIL, 2018a), sem especificação do método de cálculo, já no sexto ano o cálculo de volume por contagem de blocos e sem uso da fórmula é explícito. O PCN traz como habilidade no terceiro ciclo (sexto e sétimo ano do ensino fundamental) o cálculo de volume também por contagem de blocos, deixando a cargo do quarto ciclo (oitavo e nono ano do ensino fundamental) o volume de prismas retos.

No segundo ciclo do PCN é objetivo de ensino a “Comparação de grandezas de mesma natureza, com escolha de uma unidade de medida da mesma espécie do atributo a ser mensurado”, dando margem ao entendimento que as grandezas volume e capacidade estejam incluídas, sendo estas grandezas de mesma natureza.

Em relação aos dois documentos, eles se diferem em alguns aspectos. A BNCC é bem mais específica do que o PCN no que concerne as habilidades e os tipos de situações a serem apresentadas, como descrito nas habilidades a serem desenvolvidas no 2º e 3º ano que diferem do PCN trazendo a ideia de medir, estimar e escolher a unidade de medida, quando o PCN traz apenas a comparação. No 5º ano a BNCC incita o reconhecimento da grandeza volume, enquanto o PCN só trata no 3º ciclo, referente ao 6º e 7º ano. A resolução de problemas é incentivada em diversos momentos pela Base enquanto nos parâmetros aparece como objetivo de aprendizagem apenas no 4º ciclo.

Percebe-se então que a BNCC avança em relação as habilidades a serem desenvolvidas em relação a idade em que deve ser ensinado, detalhando-as de forma que o PCN não faz, porém cabe aqui questionar se o detalhamento excessivo não poda e delimita o trabalho do professor em sala de aula ou se o adiantamento de procedimentos e habilidades de fato é interessante nesta fase de aprendizagem.

6.4. ANÁLISE DO GUIA DE LIVROS DIDÁTICOS DO PNLD: A COLEÇÃO ESCOLHIDA

Nos guias de matemática do PNLD 2017 e PNLD 2019 (BRASIL, 2016, 2018b), dos anos finais e dos anos iniciais respectivamente, nos quais encontram-se resenhas dos livros aqui selecionados, foram pontuados alguns elementos julgados importantes sobre as grandezas aqui estudadas e a organização dos livros didáticos.

Os livros desta coleção, Ápis e Projeto Teláris, trazem diversas seções com conteúdos diversos, como a seção “O mundo da Matemática (explora saberes cotidianos do aluno no primeiro volume e, nos demais volumes, resgata os saberes do ano anterior); Eu e a Matemática (ressalta a importância da presença da Matemática no cotidiano);” (BRASIL, 2018b p.49), o que é importante na compreensão do porquê de estudar matemática, as razões de ser institucionais da TAD. Outras seções que podem possibilitar ao aluno uma melhor compreensão dos objetos aqui tratados são: “Explorar e descobrir (propõe atividades concretas e de experimentação...; tecendo saberes (mobiliza para um trabalho interdisciplinar e discute aspectos de cidadania e sociedade); brincando também aprendo (propõe atividades lúdicas e trabalho cooperativo);” (Ibidem).

No que tange ao estudo das grandezas e medidas, o guia discorre que

No primeiro volume é proposto trabalho com comprimento, massa, **capacidade** e tempo; no segundo volume, massa, **capacidade** e tempo; no terceiro volume, comprimento, massa, **capacidade**, tempo e base monetária; no quarto volume, comprimento, massa, **capacidade**, tempo e temperatura; e no quinto volume, massa, área, **volume** e **capacidade**. (BRASIL, 2018b, p.51, grifo nosso).

Diferente dos outros guias, este não traz graficamente a organização dos conteúdos, com a proporção de cada campo da matemática por livro, em que se pode comparar o quanto de cada um dos cinco domínios considerados (números e operações, grandezas e medidas, estatística e probabilidades, álgebra e geometria) cada livro aborda. Os guias, de um modo geral, apresentam

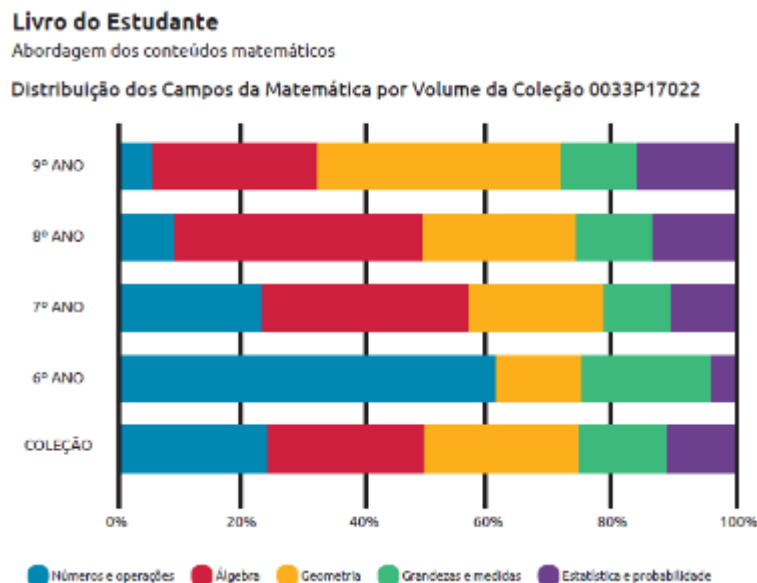
as obras com uma visão geral, o livro do aluno, o manual do professor e o manual do professor digital; uma análise quanto à metodologia de ensino e de aprendizagem, abordagem dos conteúdos matemáticos e adequação da estrutura editorial, do projeto gráfico e da linguagem, aos objetivos didático-pedagógicos da obra; e apresenta a seção sala de aula com elementos que podem ajudar ao professor no seu planejamento.

No guia do PNLD 2017 (BRASIL, 2016), referente a coleção de livros dos anos finais do ensino fundamental, a avaliação da coleção Projeto Teláris (DANTE, 2016; 2015c; 2015d; 2015e) indica que nesta coleção há boas articulações entre a matemática e os contextos sociais e dos conteúdos matemáticos entre si. Entretanto, aponta que apesar de conter atividades que auxiliem a construção cognitiva dos objetos matemáticos abordados, a aplicação direta de procedimentos é predominante em relação a outros tipos de abordagens.

A resenha do Projeto Teláris indica ainda que as grandezas volume e capacidade podem ser observadas em quase todos os livros, a menos do livro do 7º ano, nos quais as grandezas e medidas são pouco estudadas e, geralmente, ligadas à álgebra. No livro do 6º ano, no finalzinho do livro, um capítulo sobre grandezas e medidas traz as grandezas volume e capacidade como objetos de estudo “Massa, **capacidade**, **volume**, medida de tempo; unidades – gráficos” (BRASIL, 2016 p. 86, grifo nosso). No livro do 8º ano, também nos últimos capítulos, o estudo das grandezas e medidas, contempla a grandeza volume “Figuras geométricas planas: perímetro, área; **volume de prisma e pirâmide** – gráficos de linhas” (ibidem. p. 87, grifo nosso), conteúdo visto antes apenas de estatística, que vem no último capítulo.

Os guias anteriores ao PNLD 2019 traziam um gráfico de distribuição dos campos da matemática por livro nas coleções analisadas e este gráfico auxiliava o professor em sua escolha dada a abordagem demasiada ou insatisfatória de algum campo. O guia do PNLD 2017 dos anos finais do EF (BRASIL, 2016) afirma que a distribuição dos conteúdos é equilibrada como um todo, mas em se tratando de cada um dos livros pode-se notar o privilegiamento de uns campos da matemática em detrimento de outros, como o estudo dos números e operações no 6º ano e de geometria no 9º ano, como pode ser observado na Figura 9.

Figura 9: Organização dos Conteúdos da Coleção dos Anos Finais do Ensino Fundamental - Dante



FONTE: Guia do PNLD 2017 (BRASIL, 2016 p. 88)

Afirma-se na resenha que os livros trazem o estudo de grandezas diversas, mais especificamente no livro do 6º ano, prevalecendo nos outros o estudo das grandezas geométricas, mas chama a atenção quanto às grandezas volume e capacidade quando afirma que “as relações entre os conceitos de volume e de capacidade não são suficientemente esclarecidas.” (p. 89).

Sobre o domínio das grandezas e medidas, com rebatimento sobre capacidade e volume, consta mais uma observação crítica: “Nota-se, também, uma valorização excessiva das conversões entre unidades, em detrimento da compreensão das relações entre as unidades.” (p. 89). Essas características da coleção, sinalizadas no guia do livro didático do PNLD 2017 podem prejudicar a compreensão do aluno a respeito das grandezas capacidade e volume, em uma etapa da escolarização em que a diferenciação entre elas é muito importante, como afirmado pelo mesmo documento anteriormente.

De um modo geral, os guias além de indicarem quais os livros foram aprovados após passarem por rigorosa avaliação, dissertam a respeito da quantidade de páginas destinadas aos diversos campos da matemática, especificamente sobre as grandezas e medidas, enfatizando quando a abordagem de certo conteúdo é insatisfatória ou desejável.

6.5. MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERÊNCIA A PRIORI

O modelo a priori, a seguir, foi baseado nas situações que dão sentido aos conceitos de volume e capacidade e que as diferenciam de outras grandezas, nas circunstâncias especificadas sobre as orientações curriculares e em pesquisas anteriores tais como Oliveira (2002, 2007), Barros (2002), Moraes (2013) e Freitas (2015).

Trata-se de um modelo praxeológico de referência - MPR a priori, que chamar-se-á aqui de MPR a priori, produzido pela autora para nortear suas análises sobre o ensino proposto das grandezas capacidade e volume em livros didáticos dos seis primeiros anos do ensino fundamental. Essa construção se apoia no modelo descrito por Chaachoua ²⁸(2019). Com esboço do modelo praxeológico de referência proposto previamente, desenvolveu-se o MPR a priori de acordo com a noção de gerador de tarefas, ramificando o modelo com base nas variáveis escolhidas.

- Comparar grandeza (volume/capacidade) de material (líquido, sólido, recipiente) em seu aspecto dimensionalidade (linear/ trilinear);
- Medir grandeza (volume/capacidade) de material (líquido, sólido, recipiente) em seu aspecto dimensionalidade (linear/ trilinear) por método (contar blocos, operações básicas, transvasamento, vazão, imersão, estimativa, proporção, multiplicação das arestas, fórmula);
- Produzir material (sólido, recipiente) com grandeza (volume/capacidade) dada em seu aspecto dimensionalidade (linear/ trilinear);
- Transformar unidades de medida de grandeza (volume/capacidade) em grandeza (volume/capacidade);
- Relacionar unidade de medida de volume com unidade de medida de capacidade;
- Relacionar grandeza (volume/capacidade) com grandeza (valor monetário, tempo, massa, área, perímetro, comprimento, geometria);
- Diferenciar grandeza (volume, capacidade, massa, área) de grandeza (volume, capacidade, massa, área);

²⁸ Ver Figura 3: Representação do Modelo de um Gerador de Tarefas (GT)

A análise dos livros didáticos deverá levar a questionar o MPR a priori provocando incremento ou decremento de tipos de tarefas ou variáveis, uma vez que o modelo de referência pode ser sempre revisto e enriquecido por meio da confrontação com o modelo dominante e com as pesquisas no campo de conhecimento em foco.

Com o modelo a priori preparado, far-se-á uma análise preliminar dos livros didáticos do 1º ao 6º ano do ensino fundamental escolhidos, com a finalidade de testar o MPR a priori, observando se este modelo se adéqua ao que será encontrado nos livros e para dar início às análises, observando os tipos de tarefas encontrados e as variáveis que podem ser utilizadas para observar o avanço dos tipos de tarefas no que concerne ao incremento de novos elementos e dificuldade das atividades e propor um modelo de referência.

7. ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Segue neste capítulo a análise dos livros didáticos selecionados de acordo com o modelo proposto inicialmente e observando as variações das abordagens das grandezas volume e capacidade. As análises ocorreram em diversas etapas e fases, modificando-se com o passar do tempo e chegando ao modelo proposto aqui, como um conjunto de tipos de tarefas que foram julgadas importantes para os fins deste trabalho, que é observar a evolução da abordagem do volume e capacidade. A especificidade descrita nos tipos de tarefas é pequena em comparação com o modelo a priori, pois julgou-se importante reduzir a especificidade das variáveis dos tipos de tarefas para obter uma análise mais geral de cada livro e das atividades que estes propõem.

A questão da linearidade das grandezas foi um ponto central da análise, pois foi observado que muitas questões transitavam entre as grandezas em seus aspectos linear e trilinear. Pôde-se perceber elementos de um estudo da capacidade em seu aspecto trilinear nos livros do 5º e 6º ano, assim como o estudo do volume em seu aspecto linear desde o primeiro ano, sendo este um importante aspecto no tratamento das duas grandezas.

Reiterando aqui a visão deste trabalho sobre volume e capacidade, em que as duas grandezas são de mesma natureza e a capacidade é um subconjunto do volume, sendo relacionada a recipientes ociosos, por outro lado o volume pode ser tanto observado em recipientes ociosos, como a capacidade, como em sólidos maciços, sendo a importância da sua diferenciação no contexto didático. Em muitos momentos da análise distingui-las foi um papel difícil, mas entendendo a capacidade como um subconjunto do volume, a ambiguidade de entendimento é esperada.

7.1. ANÁLISE GERAL DOS LIVROS DIDÁTICOS

Como já foi dito, apenas os capítulos e/ou seções referentes ao estudo das grandezas e medidas foram analisados, uma vez que interessa aqui neste trabalho o estudo das grandezas capacidade e/ou volume como objetos de estudo. Então, embora tenhamos observado muitas questões nos capítulos referentes a outros conteúdos da matemática, o uso das grandezas capacidade e volume como contexto ou como ferramenta, as tarefas nas quais essas grandezas não são tomadas como parte principal do problema, foram descartadas.

As análises foram inicialmente quantitativas. Buscou-se observar quantas tarefas referentes a capacidade e/ou volume foram encontradas nos livros selecionados. A partir daí deu-se início à análise das tarefas e técnicas propostas em cada um dos livros.

Para esta análise, foram considerados os livros dos seis primeiros anos do ensino fundamental: (DANTE, 2015a; 2015b; 2016; 2017a; 2017b; 2017c). Em todos os livros, há um capítulo específico para o estudo das grandezas e medidas e a capacidade é abordada em todos eles. A grandeza volume aparece como conteúdo apenas nos livros do 5º e 6º ano, embora nos livros do 2º e 4º ano alguns indícios do estudo do volume e/ou capacidade em seu aspecto trilinear tenham sido observados.

Dito isto, no livro do 1º ano, antes do capítulo das grandezas e medidas, há uma unidade chamada vocabulário fundamental, na qual exploram-se de maneira intuitiva aspectos sobre grandezas, localização, símbolos etc. Esta unidade também foi observada, mais especificamente o capítulo chamado: “Termos relacionados a medidas”, no qual se notou uma questão que introduz o conceito de capacidade, que será vista logo mais.

Nos livros do 1º, 2º e 3º ano, a unidade voltada para o estudo das grandezas e medidas é a 7ª, de um total de oito. No livro do 4º ano, os capítulos que tratam de medidas de comprimento e área estão na 7ª unidade e a 3ª unidade se debruça ao estudo das grandezas massa, capacidade, tempo e temperatura. No livro do 5º ano, a unidade referente às grandezas e medidas é a última, a 8ª unidade, que traz pela primeira vez a grandeza volume descrita como tal, uma vez que no livro do 4º ano pôde ser observada uma questão que trata, implicitamente, de volume, associando a capacidade. A grandeza tempo foi observada nos livros do 1º ao 4º ano.

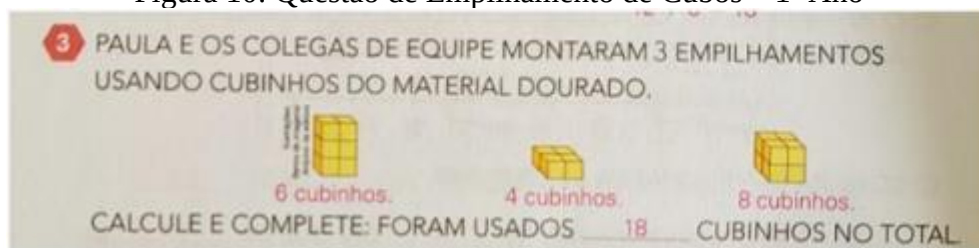
No livro do 6º ano as grandezas aqui observadas aparecem no 9º capítulo e último denominado outras grandezas, que estuda as grandezas massa, volume e capacidade, além de tratar rapidamente a grandeza tempo, intensidade sonora e grandezas utilizadas na informática, com pouco enfoque nestas três últimas. O capítulo destinado às grandezas comprimento e área vem imediatamente antes ao estudo das grandezas citadas acima, o 8º capítulo.

Segue análise dos livros didáticos aqui adotados em seus aspectos mais gerais, como tratam as grandezas, quantas questões, que tipos de tarefas se pode encontrar e alguns pontos que chamaram a atenção durante a modelagem.

7.1.1. Análise Geral do Livro do 1º Ano

No LD do 1º ano foram encontradas vinte questões referentes à grandeza capacidade e uma questão de empilhamento de blocos na sessão de revisão, que pode ter mais sentido na construção da perspectiva geométrica e numérica do que no conceito de volume, no qual o aluno precisava contar os blocos (*Figura 10*). Cada questão pode gerar mais ou menos tipos de tarefas. Dentre as questões observadas, uma delas encontrava-se em um dos capítulos iniciais, denominado Vocabulário fundamental, no qual foram introduzidos alguns conceitos matemáticos. Outra unidade observada foi a de Números até 10, a unidade 2, em que havia um capítulo intitulado Números e medidas.

Figura 10: Questão de Empilhamento de Cubos – 1º Ano



FONTE: Dante (2017a, p. 202)

No geral, entre as 20 questões, seis tratavam da comparação da capacidade em seu aspecto linear (*Figura 11*), três questões pediam que o aluno realizasse estimativas baseadas em experimentos concretos, como a quantidade de colheres de sopa necessárias para encher uma xícara de chá. Sete questões tratavam de operações com as grandezas capacidade e volume, todas linearmente, contando a capacidade de recipientes ou o líquido dentro deles por meio de recipientes com marcações ou somando/subtraindo a capacidade de recipientes dados. Algumas questões também tratam do vocabulário referente às grandezas, como as questões que identificam qual a grandeza envolvida, ou qual a unidade de medida utilizada em certa situação, como se pode observar na letra d da *Figura 11*.

Figura 11: Atividade de Comparação e Vocabulário – 1º Ano

• CONVERSE COM OS COLEGAS SOBRE MAIS ESTAS QUESTÕES.

A) VOCÊ VAI À ESCOLA NO PERÍODO DA MANHÃ, DA TARDE OU DA NOITE? QUAL É O HORÁRIO DO INÍCIO DAS AULAS?
Respostas pessoais.

B) AS PERGUNTAS DO ITEM A ENVOLVEM QUE TIPO DE GRANDEZA? *Tempo.*

C) EM QUAL RECIPIENTE CABE MAIS ÁGUA: EM UMA PANELA OU EM UM COPO?
Em uma panela.

D) A PERGUNTA DO ITEM C ENVOLVE QUE TIPO DE GRANDEZA? *Capacidade.*



FONTE: Dante (2017a, p. 140)

Apenas uma questão trata a medição de capacidade. Nela, o aluno precisa contar quantos copos de suco cabem na jarra. Muitas técnicas são baseadas na realização de experimentos concretos e referência a estes experimentos. Na sugestão de atividades, trecho destinado ao professor, o autor sugere a realização de experimentos entre recipientes distintos que possuem a mesma capacidade, mas nenhuma das questões encontradas faz referência a este tipo de situação. Uma questão trata especificamente de volume em seu aspecto unidimensional pode ser observada na Figura 12, em que o aluno precisa realizar operações de adição e subtração com números de um a dez para dizer quanto de água de coco sobrou na garrafa.

Figura 12: Atividade de Volume de Líquido Dentro do Estudo de Números e Medidas no Capítulo de Números Até 10 – 1º Ano

4 MEDIDA DE CAPACIDADE

ATIVIDADE ORAL EM GRUPO A ÁGUA DE COCO QUE CABE EM 1 GARRAFA DÁ PARA ENCHER EXATAMENTE 4 COPOS QUE ANA TEM NA CASA ONDE MORA. PENSE, CONVERSE COM OS COLEGAS E RESOLVA O PROBLEMA A SEGUIR.

ANA COMPROU 2 DESSAS GARRAFAS DE ÁGUA DE COCO. ELA E SUAS AMIGAS TOMARAM 5 COPOS. ENTÃO, O QUE SOBROU DE ÁGUA DE COCO DÁ PARA ENCHER QUANTOS COPOS? 3 COPOS.



FONTE: Dante (2017a, p. 57)

7.1.2. Análise Geral do Livro do 2º Ano

Neste livro didático o capítulo referente às grandezas e medidas também se situa no final, sendo o 7º capítulo em oito. Dentro deste dá-se o estudo da grandeza capacidade trazendo a unidade de medida litro, que é introduzida na página inicial do capítulo com uma situação cotidiana na qual a criança ajuda o pai a preparar um bolo.

Algumas cenas ajudam a criança a reconhecer situações nas quais a grandeza capacidade é utilizada, como na *Figura 13* que relaciona uma unidade de medida não padrão à grandeza em questão, fixando o vocabulário referente a grandeza em si.

Figura 13: Atividade que Relaciona a Grandeza Capacidade a Unidade de Medida não Padronizada - 2º Ano



FONTE: Dante (2017b, p. 165)

Neste capítulo as situações de comparação nas quais não são utilizadas unidades de medida são menos comuns que no livro do 1º ano e situações de medição envolvendo números aparecem com mais frequência, como na *Figura 14*, em que o aluno pode visualizar a marcação na jarra e associar cada nível da jarra a dois copos com água, chegando à resposta esperada.

Figura 14: Atividade que Trata Operações Básicas com a Grandeza Capacidade - 2º Ano

1 Observe a imagem ao lado. Maurício vai usar copos com água para encher a jarra. Ele já colocou 2 copos com água. Veja até onde ele conseguiu encher.

As imagens não estão representadas em proporção.



a) Quantos copos de água ele ainda deve colocar para encher a jarra? 4 copos.

b) Quantos copos de água cabem nessa jarra? 6 copos.

FONTE: Dante (2017b, p. 186)

Nesta questão é difícil dissociar os conceitos de volume e capacidade, pois na letra a o livro pergunta quantos copos de água faltam para preencher a jarra, tratando do volume de água a ser posto na jarra, e a letra b questiona a capacidade da jarra, resultado obtido com a contagem de copos utilizados.

Algumas questões pedem que o aluno faça estimativas e depois realize experimentos para determinar a capacidade de certos recipientes a partir de outros, como na *Figura 15*, na qual o aluno é incitado estimar a capacidade e pode validar sua resposta com experimentações concretas. O manual do professor incentiva o professor a levar recipientes diversos para sala de aula e testar as estimativas dos alunos, servindo de base para a estimativa pedida na questão.

Figura 15: Questão de Estimativa e Medição de Capacidade - 2º Ano

Explorar e Descobrir

Para fazer esta experiência você vai precisar de 1 copo, 1 colher de sopa e 1 vasilhame com água.

Respostas pessoais.

- Quantas colheres de sopa você acha que são necessárias para encher 1 copo com água?

- Agora, encha o copo usando a colher e confira sua estimativa.

Quantas colheres foram necessárias? _____



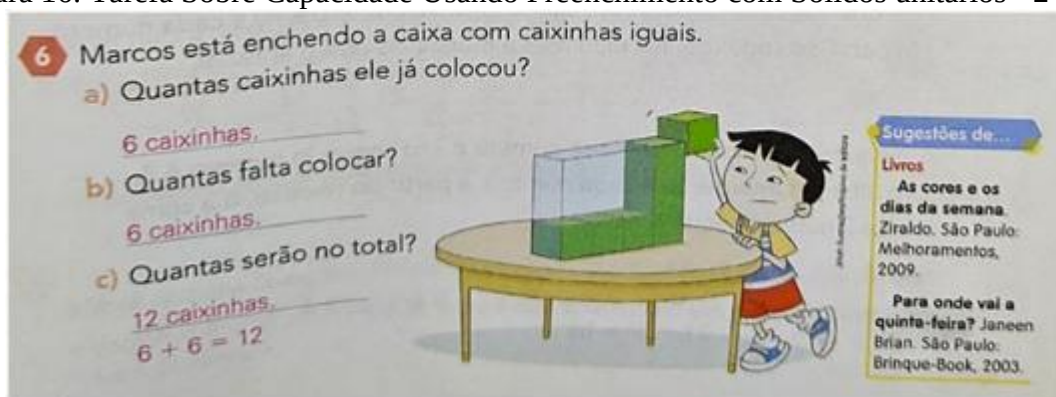
FONTE: Dante (2017b, p. 186)

Pôde-se observar que, dentre as vinte questões que tratavam as grandezas volume e capacidade, apenas duas eram de comparação, uma comparando volume de líquidos e a outra a

capacidade de recipientes. Na questão de capacidade não há indicações explícitas de técnicas, trata-se de uma comparação intuitiva baseada nas vivências do aluno, cuja técnica não foi identificada. As questões de estimativas, também duas, o aluno é incentivado a estimar baseado nas experimentações propostas no manual do professor. Cinco questões foram classificadas como resolver operações básicas com a grandeza capacidade, sendo três delas lineares e duas trilineares, em que o aluno conta bloquinhos.

A questão descrita na *Figura 16* trata da capacidade de uma caixa de material transparente sem tampo utilizando uma unidade de medida definida por caixinhas todas idênticas e tem por foco operações básicas (adição e subtração).

Figura 16: Tarefa Sobre Capacidade Usando Preenchimento com Sólidos unitários - 2º Ano



FONTE: Dante (2017b, p. 193)

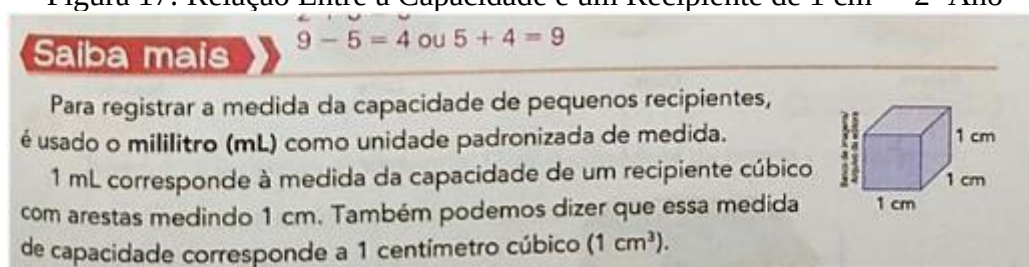
Contrariamente ao que se costuma utilizar para discutir aproximações e distanciamentos entre capacidade e volume, considera-se aqui que a grandeza trabalhada é capacidade, pois se trata do volume interno de um recipiente, embora não haja nenhuma alusão na tarefa a líquidos e a unidade de medida seja tridimensional. Esta questão pode propiciar ao aluno o entendimento de que a capacidade não é relacionada a líquidos, mas sim ao espaço interno de certo objeto. O manual do professor afirma que é uma atividade que trabalha informalmente a ideia de volume, o que é verídico ao se pensar em capacidade como um tipo específico de volume.

Este livro traz poucas questões relacionadas à grandeza capacidade, mas explora aspectos importantes no que se trata da compreensão do conceito, como a associação a unidades de medidas não padrão, a exploração e a utilização de unidades de medida diversas, não focando apenas em líquidos. Pôde-se observar também um aumento considerável na quantidade de

questões que utilizam operações básicas em sua resolução, conectando o estudo das grandezas e medidas com números e operações.

Neste mesmo livro, antes da atividade das caixinhas, em uma seção denominada *Saiba Mais*, o autor traz a grandeza capacidade em seu aspecto trilinear e relaciona esta grandeza com a quantidade de água que cabe em uma caixa cúbica de 1 cm de aresta, como pode ser observado na *Figura 17* abaixo. No manual do professor é explicitado que esta é uma pequena introdução ao estudo do volume, que só ocorrerá formalmente no livro do 5º ano.

Figura 17: Relação Entre a Capacidade e um Recipiente de 1 cm³ – 2º Ano



FONTE: Dante (2017b, p 187)

Neste livro, os conceitos de volume e capacidade já se mesclam, as atividades que tratam de volume de líquidos são tratadas como questões de capacidade e o volume em si não é citado. Nesta série talvez uma diferenciação entre volume e capacidade acabe confundindo os alunos, motivo este ao qual, acredita-se aqui neste trabalho, o volume e a capacidade são tratados como uma única grandeza. As questões de volume de líquidos são comumente taxadas como questões de capacidade devido à unidade de medida ser o litro e seus submúltiplos, situação também observada neste livro.

7.1.3. Análise Geral do Livro do 3º Ano

Neste livro encontram-se dois capítulos que tratam das grandezas e medidas, o 4º capítulo traz as grandezas tempo e valor monetário, e no 7º capítulo são trabalhadas as grandezas massa, capacidade e comprimento. A grandeza área não consta no sumário deste livro.

Foram encontradas 38 questões que tratam das grandezas capacidade e/ou volume, no livro do 3º ano. Destas, dez foram categorizadas como questões de vocabulário e respostas

peçoais, nas quais o aluno relaciona o conteúdo com seu dia a dia, pesquisas e reconhece a grandeza em certa situação proposta, como pode-se observar na *Figura 18*.

Figura 18: Questão Categorizada como Reconhecimento da Grandeza e Vocabulário



FONTE: Dante (2017c, p. 170)

Foram observadas também seis questões em que o aluno precisa escolher uma unidade de medida adequada à situação, seja o litro ou mililitro, ou escolher recipientes adequados, como mostra a *Figura 19*.

Figura 19: Atividade de Estimativa, Medição e Escolha de Recipientes Adequados - 3º Ano

1 ESTIMATIVAS

ATIVIDADE EM DUPLA Registre no quadro suas estimativas. Depois, com um colega, verifiquem concretamente as medidas da capacidade. Na última linha, vocês escolhem a capacidade a ser usada como unidade e o recipiente que terá a capacidade medida. Respostas pessoais.

Capacidade a ser usada como unidade	Recipiente a ser medido	Estimativa	Medida
Colher de sopa	Copo comum		
Colher de café	Xícara de café		
Xícara de café	Xícara de chá		
Copo comum	Jarra		

FONTE: Dante (2017c, p. 184)

O aluno infere uma estimativa da capacidade baseado nas experimentações que o livro propõe ao professor e depois ele descobre experimentalmente a medida de capacidade dos recipientes. Na última linha o aluno deve escolher os recipientes nos quais ele deve medir a capacidade, tanto o que será medido quanto a unidade de medida, salientando que ele precisa escolher recipientes adequados para a experimentação em sala de aula.

Algumas questões trazem operações aritméticas com volume de líquidos que o livro assume como cálculo da medida da capacidade. Estas relações entre volume e capacidade se entrelaçam, sendo difícil discernir quando deixa de ser volume e passa a ser capacidade (*Figura 20*), em outras questões a grandeza volume é utilizada, mas é expressa como capacidade pela unidade de medida ser litro.

Figura 20: Atividade de Volume Linear - 3º Ano

2 Observe a medida da capacidade das jarras A, B e C.
Há 2 maneiras de despejar toda a água de uma das jarras (A ou B) e uma parte da água da outra para encher a jarra C.
Complete as frases para descrever essas 2 maneiras.

- Despejar toda a água da jarra A e 5 copos de B.
Sobrarão 3 copos de água na jarra B.
- Despejar toda a água da jarra B e 2 copos de A.
Sobrarão 3 copos de água na jarra A.

As imagens não estão representadas em proporção.

Jarra A: 5 copos.

Jarra B: 8 copos.

Jarra C: 10 copos.

FONTE: Dante (2017c, p. 184)

Dentro deste mesmo capítulo, o autor evoca conhecimentos prévios dos alunos, como a questão mostrada na *Figura 21*, na qual o aluno utiliza a proporcionalidade para resolver a questão de volume de combustível. Esse tipo de tarefa pode ser ilustrado por questões similares contidas no capítulo de divisão, nas quais o valor monetário de certo objeto é calculado com a ideia de proporção, sem formalizar o conceito.

Pôde-se observar uma maior quantidade de questões envolvendo operações aritméticas e o volume de líquidos, assim como questões de estimativa e experimentações concretas. O manual do professor também sugere que sejam feitas atividades práticas nas quais recipientes de formatos diferentes e mesma capacidade sejam comparados pelos alunos, porém não há nenhuma atividade deste tipo no livro do aluno.

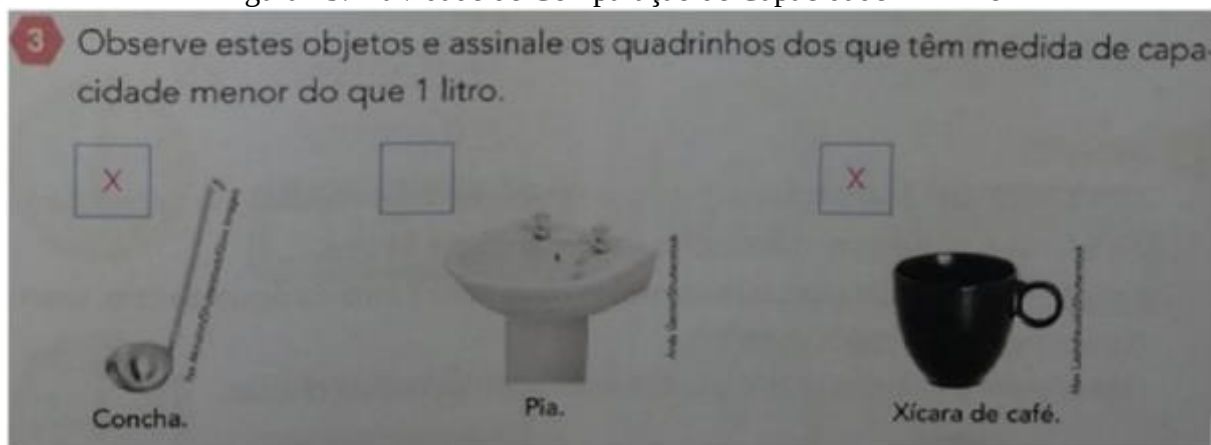
7.1.4. Análise Geral do Livro do 4º Ano

Neste livro, o capítulo destinado à grandeza capacidade é o 3º, no início do livro, juntamente com as grandezas massa, tempo e temperatura. As grandezas comprimento e área são abordadas no 7º capítulo, antes apenas de frações e decimais. Foram encontradas apenas 14 questões que tratam de volume e capacidade neste capítulo, dentre as quais seis são de vocabulário e respostas pessoais. As demais questões dividem-se entre transformação de unidades de capacidade, comparação de capacidade, medida de capacidade trilinear e problemas com a grandeza volume que envolve outros conteúdos aritméticos.

Na seção que trata da grandeza massa, o manual do professor propõe que o professor pergunte aos alunos “o que pesa mais: um quilograma de algodão ou um quilograma de ferro?” (DANTE, 2015a, p. 384), depois de explicar que a massa é a mesma, incentiva o professor a perguntar qual dos dois materiais ocupa mais espaço, indicando uma abordagem não formal de volume.

As unidades de medida não padronizadas são trazidas para iniciar o estudo da capacidade e em seguida as unidades padronizadas são inseridas, litro e mililitro, expondo a relação entre estas duas unidades de medida. Nas atividades que seguem são exploradas a transformação de unidades de medida com a relação exibida anteriormente e, depois, a comparação da capacidade de recipientes.

Figura 23: Atividade de Comparação de Capacidade - 4º Ano



FONTE: Dante (2015a, p. 75)

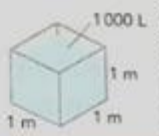
Na *Figura 23*, o aluno precisa comparar os recipientes com um recipiente que cabe um litro, assinalando quais cabem menos que essa quantidade.

O conceito de volume de um sólido também é apresentado não formalmente (*Figura 24*), em uma explicação na qual afirma-se que em um reservatório cúbico de 1 m de aresta cabem 1000 L. A partir disso, o aluno é incentivado a montar com material dourado sólidos com tamanhos dados e contar a quantidade de cubinhos utilizados, depois associar cada um destes cubinhos a um reservatório de 1000 L de água, multiplicando a quantidade de blocos por 1000 para determinar a capacidade do reservatório representado. Esta atividade foi modelada como medição da capacidade de recipiente em sua forma trilinear, pois o aluno conta os sólidos unitários e usa seus comprimentos para representá-los, associando a capacidade a objetos sólidos.

Figura 24: Atividade que Introduz Volume e Trata Capacidade Trilinearmente – 4º Ano

Saiba mais

Em um reservatório cúbico com arestas de 1 metro de medida de comprimento, cabem 1 000 litros de água.



Explorar e Descobrir

Você vai representar reservatórios usando os cubinhos do material dourado. Cada cubinho vai representar um reservatório com medida de capacidade de 1 000 litros. Em cada item, construa os reservatórios descritos e responda às perguntas.

- Um reservatório com a forma de paralelepípedo e dimensões medindo 2 metros, 1 metro e 1 metro.

Exemplo de resposta: 

a) Quantos cubinhos você usou? 2 cubinhos.

b) Quantos litros de água cabem nesse reservatório? 2 000 L
 $2 \times 1\,000 = 2\,000$
- Um reservatório com a forma de um cubo com arestas de 2 metros de medida de comprimento.



a) Quantos cubinhos você usou? 8 cubinhos.

b) Quantos litros de água cabem nesse reservatório? 8 000 L
 $8 \times 1\,000 = 8\,000$

As imagens não estão representadas em proporção.

FONTE: Dante (2015a, p. 76)

Na seção mais atividades e problemas, ainda dentro do capítulo de grandezas e medidas, uma questão traz conceitos de probabilidade. O aluno precisa descrever as possibilidades de comprar 2 L de sabonete líquido vendidos em embalagens distintas. Nesta questão (Figura 25) além de registrar as alternativas de compra, o aluno calcula o valor de cada uma delas e precisa determinar qual é a mais econômica, envolvendo a discussão sobre consumo consciente e economia. No manual do professor, é orientado que o professor incite os alunos a montarem uma tabela com as possibilidades para facilitar a visualização e os cálculos posteriores, relacionando o volume do sabão líquido com o estudo de probabilidade e operações aritméticas.

Figura 25: Questão que Trata Volume, Probabilidade e Aritmética - 4º Ano

7 POSSIBILIDADES As imagens não estão representadas em proporção.

Antônio vai comprar 2 litros de sabonete líquido. Veja os 2 tipos de embalagem que ele pode comprar e o preço deles. Descubra e registre.



1 L
R\$ 10,00



500 mL
R\$ 6,00

a) Todas as possibilidades de escolha das embalagens.

4 embalagens de 500 mL; 2 embalagens de 500 mL e 1 embalagem de 1 L;
ou 2 embalagens de 1 L.

b) O preço total de cada possibilidade. R\$ 24,00; R\$ 22,00; R\$ 20,00,
respectivamente.

$4 \times 6 = 24$
 $2 \times 6 = 12 \quad 12 + 10 = 22$
 $2 \times 10 = 20$

c) A possibilidade mais econômica. 2 embalagens de 1 L.

FONTE: Dante (2015a, p. 93)

Foram observadas neste livro poucas questões de experimentação concreta e muitas questões de reconhecimento das grandezas, unidades de medida e questões pessoais, que relacionam o cotidiano do aluno à grandeza. As operações aritméticas e a conexão com outros campos do conhecimento também estão presentes, embora tenham sido encontradas poucas questões com esse foco. A introdução do estudo do volume ao tratar da capacidade trilinearmente é um prelúdio ao estudo do volume que se inicia formalmente no 5º ano, além de tratar a capacidade com unidades de medida não padronizadas. Embora a distinção entre volume e capacidade também seja inexistente, formalizar conceitos que se relacionam de maneira tão próxima pode confundir o aluno.

7.1.5. Análise Geral do Livro do 5º Ano

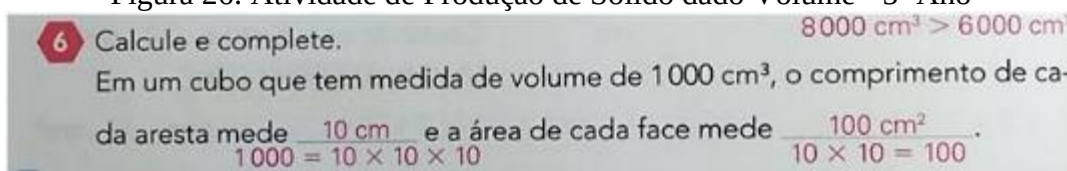
O capítulo destinado às grandezas e medidas, o último do livro, traz como objeto de estudo as grandezas massa, temperatura, volume, capacidade, comprimento e área. Neste capítulo o aluno utiliza muitos conceitos abordados anteriormente, como frações, números decimais, proporcionalidade e propriedades aritméticas.

No total foram contabilizadas 34 questões que tratam de volume e capacidade nas seções referentes, um aumento considerável em relação aos demais livros já analisados. Os tipos de tarefas também foram ampliados: medir grandeza, comparar grandeza, produzir material,

realizar operações básicas, resolver problemas, transformar unidades de medida e validar proposição. As grandezas volume e capacidade se apresentam em seus aspectos linear e trilinear e os conceitos de volume e capacidade se mesclam.

Metade das questões encontradas referem-se a medir, seja o volume ou a capacidade, em seu aspecto trilinear, sendo o tipo de tarefa medir volume mais abundante, com 12 exemplares. Cinco questões são categorizadas como resolver problemas com a grandeza volume, tanto com enfoque linear como trilinear, e três questões de produção de sólido ou recipiente com o volume ou a capacidade dada, nas quais o aluno precisa determinar a medida das arestas de certo sólido dado seu volume ou capacidade, como pode ser visto na *Figura 26*.

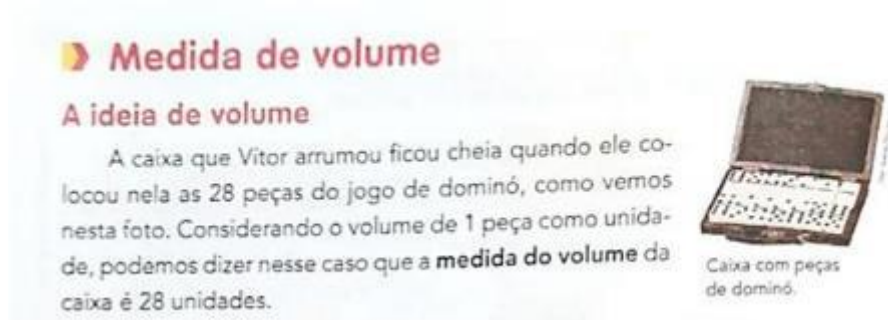
Figura 26: Atividade de Produção de Sólido dado Volume - 5º Ano



FONTE: Dante (2015b, p. 222)

Na introdução ao volume, o livro traz o exemplo de uma caixa de dominó na qual cabem 28 peças de dominó dentro, sendo esse o seu volume (*Figura 27*). Esta definição aproxima-se mais do conceito de capacidade, como volume interno, e não o volume da caixa inteira, mas novamente pode-se observar a capacidade como um caso particular do volume, sendo assim, esta seria sim uma medida de volume interno.

Figura 27: Introdução Formal ao Estudo de Volume - 5º Ano



FONTE: Dante (2015b, p. 220)

As atividades que seguem esta definição pedem para os alunos utilizarem o material dourado e montar os sólidos descritos, contar a quantidade de cubinhos utilizados e especifica que a medida do volume é a quantidade de cubinhos contados seguido da unidade de volume.

Logo após, ele introduz a noção de 1 cm^3 utilizando um cubinho como referência, levando o aluno a associar ao material dourado. As questões que seguem incentivam os alunos a representar concretamente os sólidos e contá-los, tomando cuidado ao contar os cubinhos que não podem ser vistos na figura. Insere também cubinhos pela metade e o aluno precisa visualizar duas metades como equivalentes a um cubinho inteiro, operação também incentivada na representação concreta.

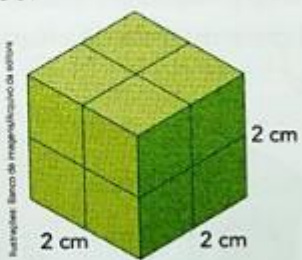
O livro inicia o cálculo do volume pela multiplicação das arestas de forma progressiva, depois de contar os cubinhos o aluno é incitado a realizar uma multiplicação cujos valores são as medidas das arestas, vinculando a operação de multiplicação ao cálculo do volume, como pode ser observado na *Figura 28*. Na atividade seguinte também é solicitado que o aluno realize as duas operações, contagem e a multiplicação das arestas, fazendo-o verificar que os resultados numéricos são os mesmos.

Figura 28: Utilização de Métodos Distintos para o Cálculo da Medida do Volume de Blocos - 5º Ano

Medida do volume do cubo e do paralelepípedo

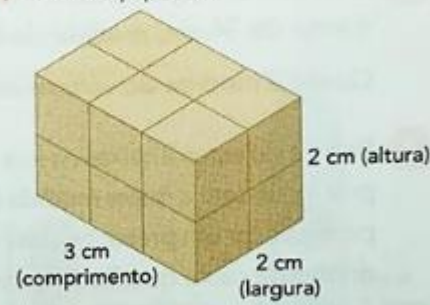
1 Vamos considerar o centímetro cúbico (cm^3) como unidade de medida de volume. Observe que podemos descobrir a medida do volume do cubo e do paralelepípedo abaixo de 2 modos: contando os cubinhos ou pela multiplicação. Complete.

a) Cubo.



Contando os cubinhos: 8 cm^3
 Usando a multiplicação:
 $2 \times 2 \times 2 = \underline{8}$, ou seja, 8 cm^3

b) Paralelepípedo.

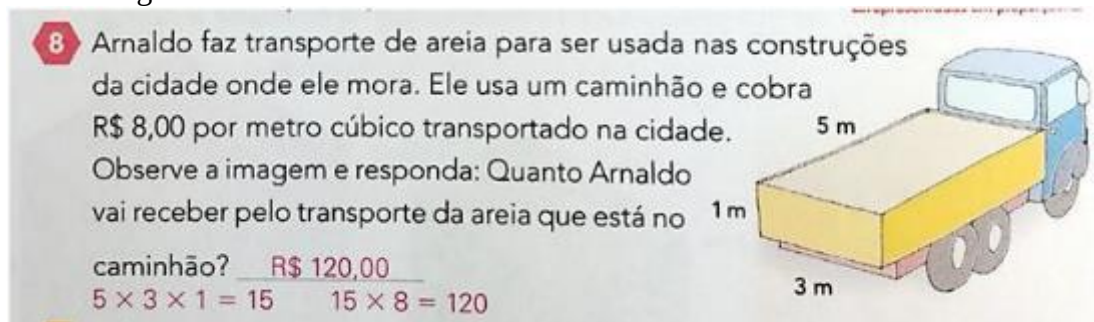


Contando os cubinhos: 12 cm^3
 Usando a multiplicação:
 $3 \times 2 \times 2 = \underline{12}$, ou seja, 12 cm^3

FONTE: Dante (2015b, p. 221)

O aluno também precisa validar os métodos utilizados, descrevendo a conclusão de como calcular a medida de volume de um paralelepípedo sabendo as medidas de comprimento de suas arestas. As questões seguintes são de medição e comparação de volume em seu aspecto trilinear. Uma questão de volume que se confunde com capacidade é trazida e esta relaciona a quantidade de areia transportada por um caminhão e o valor do m^3 deste material (*Figura 29*).

Figura 29: Atividade de Volume de Areia e Valor Monetário - 5º Ano



8 Arnaldo faz transporte de areia para ser usada nas construções da cidade onde ele mora. Ele usa um caminhão e cobra R\$ 8,00 por metro cúbico transportado na cidade. Observe a imagem e responda: Quanto Arnaldo vai receber pelo transporte da areia que está no caminhão? R\$ 120,00

$5 \times 3 \times 1 = 15$ $15 \times 8 = 120$

FONTE: Dante (2015b, p. 222)

Esta atividade foi categorizada como problema de volume em seu aspecto trilinear envolvendo valor monetário, onde o aluno utiliza conhecimentos prévios para associar $1 m^3$ ao seu valor de venda e o volume transportado pelo caminhão ao valor total de venda. Observe que em momento algum a questão especifica que o caminhão estará com sua capacidade máxima preenchida de areia e a figura traz a cor da caçamba similar à cor da areia, tornando difícil entender que o caminhão está completamente carregado e sem passar areia acima da altura da caçamba.

Uma das atividades encontradas relaciona a transformação de unidades de medida de capacidade com frações e números decimais (*Figura 30*). Esta questão é baseada em questões anteriores com as grandezas comprimento e massa, entendendo que questões similares foram realizadas pelo aluno. Pôde-se encontrar no livro referência ao termo milésimo tanto no capítulo de frações quanto de números decimais. Logo após esta, pôde-se observar uma questão que trata de volume de combustível e seu valor numérico, questão que trata do volume de gasolina relacionando o seu valor numérico por meio de proporcionalidade.

Figura 30: Atividade de Transformação de Unidade de Medida Utilizando Representação Fracionária e Decimal – 5º Ano

2 O mililitro (mL) é a milésima parte do litro. Complete.

a) $1 \text{ L} = \underline{1000} \text{ mL}$

Usando fração $\rightarrow 1 \text{ mL} = \underline{\frac{1}{1000}} \text{ L}$

Usando decimal $\rightarrow 1 \text{ mL} = \underline{0,001} \text{ L}$

FONTE: Dante (2015b, p. 223)

Na seção em que os conceitos de volume e capacidade são elencados, o aluno é incitado a realizar a correspondência de 1 dm^3 com 1 L , sendo as questões seguintes de medida de capacidade de recipientes em formato de paralelepípedos, nas quais o aluno precisa medir o volume do recipiente pelas suas arestas e então expressar o volume obtido em litros. Uma dessas questões traz a ideia de operação inversa conectando os conceitos de volume, capacidade e a operação de cálculo pela multiplicação das arestas (Figura 31). O aluno inicialmente calcula o volume pelo produto das arestas e transforma a unidade de medida em litro, depois o aluno precisa transformar de litro para cm^3 e então inferir as medidas das arestas dos recipientes, cúbicos desta vez, realizando a operação inversa, atividade já proposta anteriormente, como pode ser visto na Figura 26 (pág. 222). Por último o aluno determina as medidas das arestas dado o volume e o transforma em litro.

Figura 31: Atividade que Mescla Transformação de Unidades e Produção de Sólido dada a Capacidade ou Volume - 5º Ano

2 Uma fábrica produz vasilhas de diferentes formas. Complete as informações da tabela que um funcionário elaborou.

Vasilhas produzidas na fábrica

Forma da vasilha	Medida do comprimento das dimensões	Medida do volume	Medida da capacidade
Paralelepípedo	20 cm, 30 cm e 10 cm	6000 cm^3 $20 \times 30 \times 10 = 6000$	6 L
Paralelepípedo	45 cm, 20 cm e 20 cm	18000 cm^3 $45 \times 20 \times 20 = 18000$	18 L
Cubo	20 cm, 20 cm e 20 cm	8000 cm^3 $20 \times 20 \times 20 = 8000$	8 L
Cubo	30 cm, 30 cm e 30 cm	27000 cm^3 $30 \times 30 \times 30 = 27000$	27 L

1 m = 100 cm

Tabela elaborada para fins didáticos.

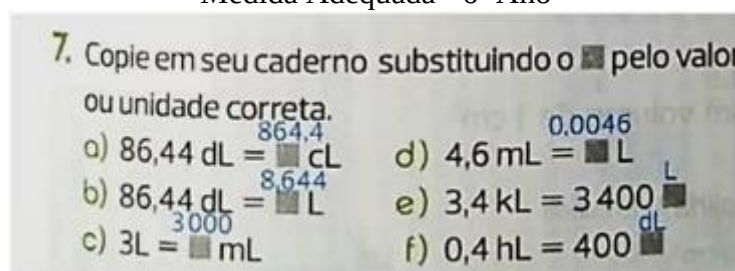
FONTE: Dante (2015b, p. 224)

Num geral, as atividades de medição são maioria neste livro, apenas uma atividade de comparação foi encontrada, algumas questões que ligam outros campos da matemática também, como proporção, fração, números decimais, valor monetário, massa e operações aritméticas. Os problemas de produção de sólidos trazem a operação inversa da medida do volume ou capacidade e questões similares em outras seções. A abordagem de volume e capacidade mesclam-se, sendo a capacidade definida no lugar do volume, mas observando a capacidade como um caso particular do volume, a proposta não estaria incorreta. Sempre que o livro traz medidas em cm^3 ou m^3 é associado a questões de volume, mesmo que a grandeza relacionada seja capacidade, acontece o mesmo com as medidas de L e ml, tomadas como atividades de capacidade, mesmo que o conceito utilizado seja volume.

7.1.6. Análise Geral do Livro do 6º Ano

No livro do 6º ano foi encontrado o maior número de questões, 63 no total. As questões de medição são proeminentes, vinte e oito, seguida pelas de transformação de unidades com 11 questões, oito de realização de operações básicas e sete de resolver problemas. Foram observadas também questões de escolha de unidade de medida adequada, na qual é dada uma transformação de unidades e o aluno precisa determinar em qual unidade de medida aquele valor numérico foi transformado, como pode ser observado na *Figura 32*, letras e e f.

Figura 32: Transformação de Unidades de Medida de Capacidade e Escolha da Unidade de Medida Adequada - 6º Ano



FONTE: Dante (2016, p. 261)

Uma questão que relaciona a massa de água com seu volume também é proposta nesta seção (*Figura 33*), a imagem induz o aluno a compreender que 1 L de água tem a massa de 1 kg, fato reiterado na própria questão, que não considera a massa da garrafa. Nesta questão o aluno compara as massas de duas jarras, uma cheia de água e uma vazia, utilizando a

transformação de unidades de massa e operações aritméticas para determinar a massa de água contida na jarra, a seguir o aluno relaciona a massa de água com seu volume, em litros, descobrindo que a jarra cheia possui 1,2 L de água.

Figura 33: Atividade que Relaciona a Massa de Água em 1 L - 6º Ano



FONTE: Dante (2016, p. 261)

A contagem de cubinhos na medida de volume é incentivada nas primeiras atividades após sua formalização, que desta vez trata de uma pilha de tijolos que ocupa o espaço de 54 unidades, sendo este seu volume. A passagem da contagem de cubinhos para a unidade de medida 1 cm^3 é feita de forma rápida, em uma questão de passo a passo, logo depois o aluno conta os cubinhos e responde já na unidade de medida correta. As transformações de unidades de medida seguem um mesmo padrão durante todo o livro, separando as técnicas utilizadas para tal fim em duas, quando a unidade de medida de fim fica à direita ou esquerda da unidade de medida de início.

Na seção de medida do volume de um paralelepípedo, uma questão de passo a passo mostra ao aluno que a contagem dos cubinhos e a multiplicação das medidas das arestas levam a um mesmo resultado, com a pergunta seguinte sobre se o que foi descoberto na questão anterior vale para outros paralelepípedos. Uma pergunta que chama atenção vem logo após,

com um passo a passo a questão incentiva o aluno a medir o volume de um sólido cuja altura é um número decimal (Figura 34), observando que dentro deste sólido não pode ser colocado somente cubinhos inteiros para medir o seu volume.

Figura 34: Questão de Passo a Passo de Medida de Volume com Comprimento das Arestas Representados por Números Decimais - 6º Ano

16. Examine a caixa representada abaixo. O formato dela lembra um paralelepípedo, e ela possui uma tampa na parte de cima. Responda:



2,5 cm altura
4 cm comprimento
2 cm largura

a) É possível preencher esta caixa com cubinhos inteiros de 1 cm^3 ? Não
b) Você pode colocar uma camada de cubinhos inteiros no fundo da caixa? Sim
c) Você pode colocar uma segunda camada de cubinhos inteiros sobre a primeira? Sim
d) E uma terceira camada? Não
e) No caso do item d, o que você precisaria fazer com os cubinhos para poder preencher a caixa? Cortar cubinhos pela metade.
f) De quantas metades de cubinho você precisaria? 8 metades
g) De quantos cubinhos você precisaria para providenciar essas metades? 4 cubinhos
h) Então, de quantos cubinhos você precisaria para preencher esta caixa? 20 cubinhos
i) Qual é a medida do volume da caixa preenchida? 20 cm^3
j) Você concorda que pode encontrar o número de cubinhos necessários para preencher a caixa pela multiplicação $(4 \times 2) \times 2,5$? Sim, pois $4 \times 2 \times 2,5 = 20$.
k) O resultado dessa multiplicação é igual ao número da resposta que você deu no item h? Sim

FONTE: Dante (2016, p. 265)

Na questão acima, o aluno deve compreender que precisará cortar cubinhos ao meio para chegar à altura correta e contar quantas metades de cubo deve utilizar, chegando à medida de volume. Após a contagem a questão pede que o aluno verifique se a operação de multiplicação da medida de comprimento das arestas resulta num mesmo valor numérico para o volume. A formalização da fórmula de volume vem em seguida, a multiplicação das medidas das arestas de um paralelepípedo é dada pelo produto das suas medidas. Em seguida muitas questões de medição de volume são propostas.

A atividade apresentada na Figura 34 introduz os números racionais ao rol de valores numéricos do volume e capacidade, reiterando a importância da conexão entre conteúdos da própria matemática e que são objetos de estudo anteriores. A utilização da fórmula do volume

também é incitada, dando ao aluno meios diversos para chegar ao valor numérico associado ao volume.

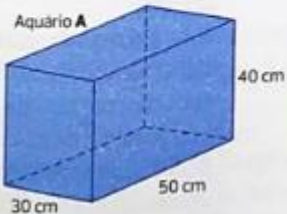
A relação entre volume e capacidade é validada com uma experimentação concreta, na qual o aluno deve construir um recipiente cúbico de arestas 10 cm e nele colocar 1 L de água, percebendo que dentro deste recipiente cabe exatamente 1 L de água. As relações entre volume e capacidade não são dadas como igualdade, mas sim correspondência, insinuando assim que volume e capacidade não são equivalentes, mas que existe uma relação biunívoca entre as duas grandezas, as quais em situações específicas são diferenciáveis, em outras não.

As questões que vem logo após a formalização da relação entre estas grandezas são bem mais elaboradas do que as vistas até aqui, como exemplo a questão 21 (Figura 35), na qual o aluno precisa calcular o volume de dois recipientes dada uma porcentagem do volume do recipiente anterior, descobre as medidas das arestas de um recipiente cúbico, depois associa o volume de dois sólidos em uma relação percentual e por fim determina a capacidade dos recipientes.

Figura 35: Atividade que Relaciona Volume, Capacidade e Medidas Percentuais - 6º Ano

21. Sônia é decoradora e resolveu comprar alguns aquários de vidro para decorar a casa de três clientes. Observe as representações dos três modelos que ela comprou e as informações em cada um.

Aquário A



30 cm 50 cm 40 cm

Aquário B



Volume: 75% do volume de A.

Aquário C



Volume: 60% do volume de B.

a) Calcule a medida do volume de cada aquário. A: 60 000 cm³; B: 45 000 cm³; C: 27 000 cm³

b) Determine a medida do comprimento de cada aresta do aquário C. 30 cm

c) O volume de C corresponde a quantos por cento do volume de A? 45%

d) Determine quantos litros de água cabem em cada um desses aquários. A: 60 L; B: 45 L; C: 27 L

FONTE: Dante (2016, p. 267)

A questão abaixo encontra-se na última página da seção analisada, após esta são estudadas outras grandezas como tempo, medidas da informática e intensidade sonora, em seguida uma seção intitulada “Trabalhando com os vários tipos de grandeza” traz questões que envolvem as grandezas já trabalhadas e outros campos da matemática, como proporcionalidade, consumo, também revisa vocabulário referente às grandezas e algumas questões para revisão do conteúdo.

Questões de vazão também são trazidas pelo autor, nas quais a transformação de unidades de medida, relação entre unidades de medida de volume e capacidade e proporcionalidade entre tempo e quantidade de água despejada por uma torneira são necessárias em sua resolução, como pode ser observado na *Figura 36*.

Figura 36: Atividade de Vazão - 6º Ano



FONTE: Dante (2016, p. 268)

Ao final do livro, na seção “Ponto de chegada”, o livro traz como curiosidade a descoberta de Arquimedes relativa ao volume e empuxo, incitando o aluno a validar a proposição de que o volume de certo sólido é igual ao volume de água deslocado.

7.2. PRIMEIROS PASSOS DO MODELO PRAXEOLÓGICO DOMINANTE

O modelo proposto inicialmente foi revisitado durante as análises para adequar-se ao que foi proposto aqui como objetivo, agrupando mais tipos de tarefas e especificando a dimensionalidade da grandeza abordada em mais situações. O modelo de referência a priori continha sete tipos de tarefas, comparar grandeza, medir grandeza, produzir material, transformar unidades de medida, relacionar unidade de medida, relacionar grandeza e diferenciar grandeza. Estes tipos de tarefa foram propostos inicialmente baseados nas pesquisas anteriores nas quais as situações de medir, comparar, produzir e transformar foram analisadas e a diferenciação e a relação entre grandezas e unidades de medida surgiu a partir da abordagem tomada perante o volume e capacidade. Os tipos de tarefa descritos inicialmente foram os seguintes:

- Comparar grandeza (volume/capacidade) de material (líquido, sólido, recipiente) em seu aspecto dimensionalidade (linear/ trilinear);
- Medir grandeza (volume/capacidade) de material (líquido, sólido, recipiente) em seu aspecto dimensionalidade (linear/ trilinear) por método (contar blocos, operações básicas, transvasamento, vazão, imersão, estimativa, proporção, multiplicação das arestas, fórmula);
- Produzir material (sólido, recipiente) com grandeza (volume/capacidade) dada em seu aspecto dimensionalidade (linear/ trilinear);
- Transformar unidades de medida de grandeza (volume/capacidade) em grandeza (volume/capacidade);
- Relacionar unidade de medida de volume com unidade de medida de capacidade;
- Relacionar grandeza (volume/capacidade) com grandeza (valor monetário, tempo, massa, área, perímetro, comprimento, geometria);
- Diferenciar grandeza (volume, capacidade, massa, área) de grandeza (volume, capacidade, massa, área);

Ao analisar as tarefas nos livros didáticos alguns tipos de tarefas foram excluídos e alguns acrescidos devido ao tipo de análise a realizar e a diferente natureza dos tipos de tarefa previamente proposto. Os tipos de tarefa relacionar e diferenciar unidades de medidas e grandezas necessitam de uma análise diferente da realizada ao observar os tipos de tarefa medir, comparar, produzir e transformar, decidindo então focar nesses últimos e acrescentando mais alguns que se mostraram necessários durante as análises. Os nove tipos de tarefas que foram categorizados nos seis livros analisados foram comparar, medir, produzir, transformar, assim como o modelo a priori e acrescido dos tipos de tarefa realizar operações básicas, resolver problemas, validar proposição, escolher instrumento e estimar medida.

- Comparar grandeza (volume/capacidade) de material (líquido, sólido, recipiente) em seu aspecto dimensionalidade (linear/ trilinear)
- Medir grandeza (volume/capacidade) de material (líquido, sólido, recipiente) em seu aspecto dimensionalidade (linear/ trilinear)
- Produzir material (sólido, recipiente) com grandeza (volume/capacidade) dada em seu aspecto dimensionalidade (linear/ trilinear)
- Transformar unidades de medida de grandeza (volume/capacidade) em grandeza (volume/capacidade)

- Realizar operações básicas com grandeza (volume/capacidade) em seu aspecto dimensionalidade (linear/ trilinear)
- Resolver problemas com a grandeza (volume/capacidade) em seu aspecto dimensionalidade (linear/ trilinear)
- Validar proposição referente a grandeza (volume/capacidade) em seu aspecto dimensionalidade (linear/ trilinear)
- Escolher instrumento (recipiente/ unidade de medida) adequado à situação dada.
- Estimar medida de grandeza (volume/capacidade) em seu aspecto dimensionalidade (linear/ trilinear)

Após as análises realizadas nos livros didáticos, o modelo a priori foi revisto e pode-se observar a relação entre os tipos de tarefa do MPD e do MPR a priori no *Quadro 6*. As variáveis também foram revistas e muitas foram excluídas dado objetivo do trabalho e a revisita as questões de dimensionalidade, nas quais o tratamento do volume e capacidade de forma linear e trilinear é agregado de maneira natural, em questões que dificilmente pode-se definir claramente como questão de volume ou capacidade, as quais pode-se recorrer a relação biunívoca entre estas grandezas, que se tratam de uma grandeza em diferentes situações.

Quadro 6: Comparação Entre o Modelo Praxeológico de Referência a Priori e o Modelado a Partir dos Livros Didáticos

Tipos de Tarefas Modeladas a Partir dos Livros Didáticos	Tipos de Tarefas do Modelo Praxeológico de Referência a Priori
T – Comparar Volume ou Capacidade	Comparar grandezas;
T - Medir Volume ou Capacidade	Medir grandeza;
T – Produzir Material Recipiente ou Sólido	Produzir material;
T – Transformar Unidades de Medida	Transformar unidades de medida; Relacionar unidade de medida de volume com unidade de medida de capacidade;
T – Realizar operações básicas com Volume ou Capacidade	
T – Resolver problemas Referentes ao Volume ou Capacidade	Relacionar grandezas;
T – Validar proposições Referentes ao Volume ou Capacidade	
T – Escolher Recipiente	
T – Estimar Capacidade de Recipiente	
Outros	
	Diferenciar grandezas;

FONTE: Produzido pela autora

No *Quadro 7* abaixo segue o MPD modelado a partir dos livros com a nomenclatura utilizada para cada um dos tipos de tarefas e as variáveis relacionadas para as grandezas volume e capacidade, nos livros didáticos analisados do 1º ao 6º ano do ensino fundamental.

Quadro 7: Modelagem dos Tipos de Tarefas e Variáveis Para os Objetos Volume e Capacidade nos Livros didáticos Analisados

Tipo de Tarefa	Variável 1	Variável 2	Variável 3
T – Comparar - $T_{comp.}$ $\left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} liq. \\ rec. \\ sol. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	• Líquido • Recipiente • Sólido	• Unidimensional • Tridimensional
T – Medir - $T_{med.}$ $\left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} liq. \\ rec. \\ sol. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	• Líquido • Recipiente • Sólido	• Unidimensional • Tridimensional
T – Produzir - $T_{prod.}$ $\left\{ \begin{matrix} rec. \\ sol. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\}$	• Recipiente • Sólido	• Volume • Capacidade	• Unidimensional • Tridimensional
T – Transformar - $T_{tranf.}$ $\left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	• Volume • Capacidade	-
T – Realizar operações básicas - $T_{op. bas.}$ $\left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	• Unidimensional • Tridimensional	-
T – Resolver problemas - $T_{prob.}$ $\left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	• Unidimensional • Tridimensional	-
T – Validar proposições - $T_{val.}$ $\left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	• Unidimensional • Tridimensional	-
T – Escolher - $T_{esc.}$ $\left\{ \begin{matrix} inst. \\ uni. med. \end{matrix} \right\}$	• Instrumento • Un. de medida	-	-
T – Estimar - $T_{est.}$ $\left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	-	-

FONTE: Produzido pela autora

Alguns tipos de tarefas propostos inicialmente podem ser agrupados dentro de certo tipo de tarefa modelado a partir dos livros analisados, como o tipo de tarefa medir grandeza que associava o método, como contagem, proporção, operações básicas, estimativa, multiplicação das arestas, que foi simplificada dentro do modelo dominante, por não se adequar à análise que se deseja realizar. Os tipos de tarefas validar proposições não foram descritos no modelo a priori, mas foram encontradas nos livros, questões importantes para a abstração de conceitos e procedimentos realizados de forma intuitiva ou guiados.

As formas distintas de calcular o volume e capacidade não foram delimitadas no modelo dominante também, não sendo esta de fundamental importância no cumprimento dos objetivos aqui almejados, mas importante para estudos posteriores.

Os tipos de tarefas modelados nos livros analisados foram agrupados da seguinte maneira: um quadro descreve os tipos de tarefas mais gerais, sem especificar as variáveis (Quadro 8). As modelagens de cada tipo de tarefa com suas variáveis específicas são feitas separadamente, nas quais cada tipo de tarefa é expandido e a quantidade de questões encontradas em cada livro é exposta, e será objeto do item 7.3, a análise da organização praxeológica.

Quadro 8: Quantitativo de Tarefas de Cada Tipo Modelado nos Livros Analisados do 1º ao 6º

Tipos de Tarefas	Ano do EF						Total	%
	1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano	5º Ano	6º Ano		
T – Comparar volume ou capacidade	6	3	-	2	1	-	12	6%
T – Medir grandeza volume ou capacidade	1	2	6	2	17	28	56	30%
T - Produzir recipiente ou sólido	-	-	-	-	3	2	5	3%
T – Transformar unidades de medida	-	-	-	2	1	11	14	7%
T – Realizar operações básicas com volume ou capacidade	7	5	6	-	2	8	28	15%
T – Resolver problemas referentes ao volume ou capacidade	-	-	5	2	5	7	19	10%
T – Validar proposições referentes ao volume ou capacidade	-	-	-	-	2	1	3	1%
T – Escolher recipiente	-	2	4	-	-	5	11	6%
T – Estimar medida de capacidade de recipiente	3	2	6	-	-	-	11	6%
Outros	3	6	11	6	3	1	30	16%
TOTAL	20	20	38	14	34	63	189	100%

FONTE: Produzido pela autora

No *Quadro 8*, pode-se ter uma primeira visão sobre como os tipos de tarefas priorizados mudam com o avançar das séries, como o tipo de tarefa estimar medida de recipiente que é encontrada apenas nos três primeiros anos, as atividades de comparação de volume ou

capacidade também tornam-se escassas e as de medir grandeza crescem demasiadamente. Alguns tipos de tarefas só são encontrados nos últimos livros devido à complexidade de pensamento ou às propriedades estudadas, como é o caso da transformação de unidades de medida de capacidade ou volume, que inicia no 4º ano e no 6º ano tem um aumento significativo.

As questões de validação de proposição referentes às grandezas volume ou capacidade necessitam de um pensamento mais abstrato, o que vai se desenvolvendo nas séries posteriores. Observa-se que este tipo de tarefa aparece a partir do 3º ano, as quais o aluno já pode resolver problemas relativos a valor monetário e medidas de tempo.

As atividades modeladas como resolver problemas foram aquelas em que o raciocínio empregado em sua resolução é mais elaborado do que uma soma ou subtração direta, como problemas de proporcionalidade, porcentagem, razão, que incluem valor monetário ou relacionam outras grandezas, como a grandeza massa.

Ao todo foram encontradas, nos capítulos analisados, 189 atividades relacionadas às grandezas volume e capacidade. As tarefas do tipo medir grandeza capacidade ou volume foram as mais abundantes, com 56 questões (quase 30%), seguida das questões que requerem a realização de operações básicas com 28 (aproximadamente 15% do total de tarefas analisadas). Os problemas são numerosos em relação aos outros tipos de tarefas, com 19.

As questões que não foram modeladas como tipo de tarefa, que não possuem técnica associada ou são de cunho pessoal contabilizaram trinta questões, entre pesquisas, perguntas relacionadas ao dia-a-dia do aluno, vocabulário das grandezas, como a associação de certa unidade de medida a grandeza e vice e versa, ou a escolha de uma unidade de medida em uma situação em que a resposta não é única e pode ser uma unidade de medida não padronizada. Estas questões não geraram tipos de tarefas, por isso não serão revistas nas análises praxeológicas.

7.3. ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA

As análises a seguir serão separadas por tipos de tarefas e dentro destas por suas variáveis, descrevendo as técnicas e tecnologias baseadas em cada tipo específico de tarefa e elencando mais de um tipo de tarefa quando extratos dos livros indicarem técnicas diferentes para um mesmo tipo de tarefa.

7.3.1. Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Comparar Volume ou Capacidade

As tarefas classificadas como comparativas nos seis livros analisados foram apenas doze, dessas seis no livro do 1º ano, três no do 2º ano, duas no de 4º ano e finalmente uma no do 5º ano. A *Tabela 1* mostra a distribuição destes tipos de tarefas separadas pelas variáveis elencadas no processo.

Tabela 1: Quantitativo de Tarefas do Tipo Comparar nos Livros De 1º ao 6º Ano

Tipo de Tarefa	Variável 1	Variável 2	Variável 3	1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano	5º Ano	6º Ano
Comparar	Volume	Líquido	Linear	-	2	-	-	-	-
		Sólido	Trilinear	-	-	-	-	1	-
	Capacidade	Recipiente	Linear	6	1	-	2	-	-

FONTE: Produzido pela autora

Na *Tabela 1* pode-se perceber a evolução no tipo de tarefa comparar, no 1º ano a comparação é apenas de capacidade, com os termos cabe mais e cabe menos, no 2º ano a comparação de líquidos aparece com a contagem de marcações em um recipiente, no 4º ano as atividades de comparar retornam com a grandeza capacidade, mas sem indicação de técnica associada, na qual o aluno compara três recipientes a 1 L, determinando quais recipientes cabem menos do que um litro, logo após introduzir o litro como unidade de medida de capacidade. No 5º ano na comparação de volume trilinear o aluno precisa calcular o volume pela medida dos comprimentos das arestas de dois sólidos (paralelepípedos) e então comparar qual o sólido de maior volume.

Seguem as técnicas e bloco tecnológico-teórico associados a este tipo de tarefa, nas quais as técnicas similares serão agrupadas de acordo com as variáveis e para os tipos de tarefas que indicarem técnicas distintas, estas foram agrupadas. Os tipos de tarefas cujas técnicas não foram identificadas foram marcadas no *Quadro 9*, sendo estas de suposição das pesquisadoras baseado na observação das atividades anteriores e na leitura do material.

Quadro 9: Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Comparar Volume ou Capacidade

Tipo de Tarefa	Técnicas, Tecnologias e Teorias Associadas
T_{comp.cap.rec.uni.}	$\tau_{\text{transv.}}$ – Transvasar o líquido de um recipiente ao outro concretamente; $\tau_{\text{comp.exper.}}$ – Observar figuras e inferir qual tem maior ou menor capacidade de acordo com experimentos; $\theta_{\text{tranv.}}$ – “[...] comparação de medidas de capacidade sem a necessidade de realizar medição.” (DANTE, 2017a, p. 150); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.
	$\tau_{\text{comp.exper.}}$ – Observar figuras e inferir qual tem maior ou menor capacidade; $\tau_{\text{ord.}}$ – Ordenar recipientes de acordo com sua capacidade; $\theta_{\text{tranv.}}$ – “[...] fazem a comparação intuitiva por meio da observação das imagens.” (DANTE, 2017a, p. 143); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.
T_{comp.vol.liq.uni.}	$\tau_{\text{cont.}}$ – Não há indícios; observação e contagem das marcações; $\theta_{\text{comp.med.}}$ – Comparação de medidas; $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.
T_{comp.vol.sol.tri.}	$\tau_{\text{mult.arestas}}$ – Multiplicar as medidas das dimensões dos sólidos; $\tau_{\text{mult.arestas}}$ – Comparar qual sólido possui maior valor numérico de seu volume; $\theta_{\text{comp.num.}}$ – Comparação numérica; $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.

FONTE: Produzido pela autora

O Quadro 9 anterior mostra quais as técnicas propostas na resolução das tarefas modeladas como comparação. A comparação concreta é bastante explorada no 1º ano, no qual mais questões sobre comparação aparecem, sem valores numéricos, por inferência das dimensões das figuras e associação com experimentações concretas realizadas anteriormente em sala de aula as quais o manual do professor incentiva. As tarefas de comparação de líquidos são de contagem da marcação no recipiente ou dado o volume de um líquido, o aluno precisa determinar se aquele recipiente cabe mais ou menos do que aquele volume de líquido.

A tarefa de comparação no livro do 5º ano trata de comparação numérica, o aluno calcula a capacidade de duas caixas pelo produto de suas arestas e depois compara qual delas tem maior volume. Neste livro muitas questões de medição foram modeladas, mas as de comparação

apenas uma e no livro do 6º ano não aparecem questões cujo objetivo principal é a comparação, apenas como mais uma tarefa a ser cumprida no meio de outras.

A evolução nos tipos de tarefas pode ser vista neste tópico quando se observa a comparação de recipientes, a observação das imagens e inferência aparece seguido das experimentações concretas. A comparação entre volumes se dá inicialmente por meio de contagem, na qual as marcações em recipientes indicam volume de líquido dentro dele. Por fim, a multiplicação dos comprimentos das arestas no cálculo do volume e a comparação numérica destes valores surge no 5º ano, quando a validação do método de cálculo de volume por produto dos comprimentos das arestas é iniciada. Pode-se perceber uma certa diminuição da quantidade do tipo de tarefa comparar, sendo ela quase inexistente nos últimos livros, dando lugar às tarefas do tipo medição, que se tornam mais frequentes.

7.3.2. Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Medir Grandeza Volume ou Capacidade

O tipo de tarefa medir grandeza capacidade ou volume, o mais numeroso de todos os tipos, conta com 56 questões extraídas dos seis livros analisados. A frequência relativa das tarefas desse tipo foi mais elevada livros do 5º e 6º anos, nos quais cerca da metade das tarefas sobre capacidade e/ou volume foram classificadas, mas com valores diversos para as variáveis escolhidas, como pode ser visualizado na *Tabela 2*.

A medição do volume em seu aspecto trilinear é maioria tanto no livro do 6º ano quanto no 5º ano, não aparecendo antes disso, uma vez que o volume de sólidos é visto a partir desses livros, mas a medição a capacidade em seu aspecto trilinear foi observada no livro do 2º ano, no qual o aluno coloca cubinhos dentro de uma caixa de material transparente sem tampo, para verificar quantos cubinhos cabem lá dentro.

Tabela 2: Quantitativo de Tarefas do Tipo Medir Grandeza Volume ou Capacidade nos Livros de 1º ao 6º Ano

Tipo de Tarefa	Variável 1	Variável 2	Variável 3	1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano	5º Ano	6º Ano
Medir Grandeza	Volume	Sólido	Trilinear	-	-	-	-	12	24
		Recipiente	Linear	-	-	-	-	-	1
	Capacidade	Recipiente	Linear	1	1	6	-	-	1
			Trilinear	-	1	-	2	5	2

FONTE: Produzido pela autora

As técnicas utilizadas neste tipo de tarefa são diversas: no livro do 6º ano foram observadas seis técnicas diferentes e no livro do 5º ano, três foram encontradas. Algumas destas técnicas são as mesmas entre um livro e outro, estas serão especificadas apenas uma vez. As técnicas serão separadas pelos tipos de tarefas específicos e dentro delas serão descritas mais de uma técnica, caso haja.

Quadro 10: Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Medir Grandeza Volume ou Capacidade 1

Tipo de Tarefa	Técnicas, Tecnologias e Teorias Associadas
T_{med.cap.rec.uni.}	$\tau_{\text{obs.imag.}}$ – Observar a imagem representada na questão; $\tau_{\text{cont.}}$ – Contar quantos copos foram preenchidos; $\theta_{\text{comp.int.}}$ – “Esta atividade aborda a comparação de medidas de [...] capacidade de forma intuitiva, usando ideias como [...] cabe mais” (DANTE, 2017b, p. 165); $\theta_{\text{comp.imag.}}$ – “[...] pela observação das imagens, que a medida de capacidade da jarra corresponde à medida de capacidade de cinco copos” (DANTE, 2017a, p. 149); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas. $\tau_{\text{exp.concr.}}$ – Medir a capacidade do recipiente por meio de experimentações concretas; - Transvazar água de um recipiente para o outro; $\theta_{\text{exp.conc.}}$ – “[...] verifiquem concretamente as medidas de capacidade.”; (DANTE, 2017c, p. 184); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas. $\tau_{\text{qts.cabem}}$ – Contar quantas partes de duas xícaras são necessárias para encher 1 L; $\theta_{\text{divis.}}$ – “Estabelecer relações entre unidades de medida de capacidade” (DANTE, 2016, p. 416); $\Theta_{\text{arit.}}$ – Propriedades aritméticas, Números e operações.
T_{med.cap.rec.tri.}	$\tau_{\text{cont.}}$ – Contar a quantidade de bloquinhos; $\theta_{\text{cont.bloc.}}$ – “Essa atividade trabalha, informalmente, com a ideia de medida de volume [...]”; (DANTE 2017b, p. 193); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas. $\tau_{\text{rep.conc.}}$ – Representar a situação com material dourado; $\tau_{\text{cont.}}$ – Contar a quantidade de bloquinhos; $\tau_{\text{transf.}}$ – Multiplicar a quantidade de bloquinhos por 1000; $\theta_{\text{cont.bloc.}}$ – “Cada cubinho vai representar um reservatório com medida de 1000 litros.” (DANTE, 2015a, p. 76); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas. $\tau_{\text{trans.comp.}}$ – Transformar unidades de medida de comprimento; $\tau_{\text{arred.comp.}}$ – Arredondar unidades de medida de comprimento; $\tau_{\text{mul.arest.}}$ – Multiplicar as arestas para calcular o volume; $\tau_{\text{transf.}}$ – Transformar unidade de medida de volume em capacidade;

	$\Theta_{\text{relaç.vol.cap.}}$ – “Os alunos devem calcular a medida da capacidade. [...] Para isso, precisam calcular a medida do volume dela, em metros cúbicos”; (DANTE, 2015b, p. 224); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.
--	---

FONTE: Produzido pela autora

Quadro 11: Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Medir Grandeza Volume ou Capacidade 2

Tipo de Tarefa	Técnicas, Tecnologias e Teorias Associadas
T_{med.vol.sol.tri.}	$\tau_{\text{rep.conc.}}$ – Representar a situação com material dourado; $\tau_{\text{cont.}}$ – Contar a quantidade de bloquinhos; $\tau_{\text{ass.unid.}}$ – Associar a unidade de medida de volume; $\tau_{\text{cont.}}$ – Associar quantidade de cubos a multiplicação das medidas das arestas; $\Theta_{\text{vol.uni.}}$ – “Considerando o volume de 1 cubinho como unidade de medida. [...] A medida do volume desse cubo é de 1 centímetro cúbico.” (DANTE, 2015b, p. 220); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.
	$\tau_{\text{cont.}}$ – Contar a quantidade de bloquinhos; $\tau_{\text{mult.arestas}}$ – Multiplicar as medidas das dimensões dos sólidos; $\tau_{\text{cont.}}$ – Associar quantidade de cubos a multiplicação das medidas das arestas; $\Theta_{\text{comp.num.}}$ – “Observem as medidas das três dimensões dele e, depois, contem os cubinhos. [...] O resultado da contagem é o mesmo ao fazer a multiplicação das medidas das três dimensões”, (DANTE, 2015b, p. 221); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.
	$\tau_{\text{trans.comp.}}$ – Transformar unidades de medida de comprimento; $\tau_{\text{mult.arestas}}$ – Multiplicar as medidas das arestas; $\Theta_{\text{comp.num.}}$ – “[...] a fórmula do volume de um paralelepípedo de dimensões a, b e c: $V=a.b.c.$ ”, (DANTE, 2016, p. 266); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.
T_{med.vol.rec.uni.}	$\tau_{\text{trans.unid.}}$ – Transformar unidades de medida de capacidade em volume; $\Theta_{\text{relaç.vol.cap.}}$ – Sem indicação/ relação entre volume e capacidade; $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.

FONTE: Produzido pela autora

No total foram modeladas dez técnicas distintas, com convergência entre elas, três relacionadas a medida da capacidade de forma linear, com experimentações concretas, transvasamento, observação da imagem e relacionando duas unidades de medida de capacidade.

As técnicas foram extraídas dos livros analisados, especificando os passos necessários para a resolução das atividades, seja na descrição das próprias atividades, como um passo-a-passo, no manual do professor, como uma indicação de resolução, ou na resposta do livro do professor, com as operações a realizar descritas.

Pode-se perceber a evolução nas tarefas no que concerne à dificuldade das questões e as técnicas mais elaboradas que vão surgindo. Inicialmente as técnicas dizem respeito a observação e experimentações, logo depois surgem as operações de contagem, depois as contagens e a relação entre unidades de medida e, por fim, a forma trilinear, com a multiplicação dos comprimentos das arestas, técnica esta que também começa aos poucos, com a verificação de que a contagem de blocos e a multiplicação dos comprimentos das arestas resultam num mesmo valor numérico. Após este trabalho, a fórmula do volume é utilizada como técnica padrão, incluindo nas atividades transformação de unidades, relação entre medidas, entre outros aspectos.

7.3.3. Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Produzir Recipiente ou Sólido

Em relação ao tipo de tarefa produzir, o aluno relaciona certa medida de volume ou capacidade às medidas do comprimento de suas arestas. Este tipo de tarefa só foi encontrado nos livros do 5º e 6º ano, uma vez que o aluno precisa associar o valor numérico do volume ao produto da medida do comprimento das arestas do sólido ou recipiente, realizando a operação inversa da medição do volume por meio do produto do comprimento das arestas.

Tabela 3: Quantitativo de Tarefas do Tipo Produzir Recipiente ou Sólido nos Livros de 1º ao 6º Ano

Tipo de Tarefa	Variável 1	Variável 2	Variável 3	1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano	5º Ano	6º Ano
Produzir material	Recipiente	Capacidade dada	Trilinear	-	-	-	-	2	1
		Volume dado	Trilinear	-	-	-	-	-	1
	Sólido	Volume dado	Trilinear	-	-	-	-	1	-

FONTE: Produzido pela autora

As questões encontradas são fundamentadas em atividades anteriores no próprio livro, como as questões de multiplicação, nas quais procura-se um número que multiplicado por ele

mesmo resulte em um valor tal, ou nas questões de área em que dada esta medida o aluno determina as dimensões de um objeto. As transformações de unidades de medida também são utilizadas aqui como técnicas secundárias, encontradas em alguns tipos de tarefas específicas que tratam da capacidade.

Quando a capacidade é dada e pedem-se as dimensões do recipiente, o aluno transforma a unidade de medida de capacidade em unidade de medida de volume e então descobre os números que multiplicados resultam no mesmo valor numérico da capacidade daquele recipiente. Apenas uma questão entre as cinco observadas aqui trata de um paralelepípedo não cúbico, na qual o aluno precisa descobrir as medidas das arestas do recipiente cujos valores numéricos são números naturais consecutivos, sendo a capacidade de 120.000 L, relacionando-o com a unidade de medida em metro cúbico, sua capacidade é de 120 m³, e as medidas dos comprimentos das suas arestas cujo produto é referente à um recipiente com esta capacidade é 4 m, 5 m e 6 m.

As técnicas desta seção serão agrupadas em uma única com algumas técnicas secundárias que diferenciam um tipo de questão de outra, como a primeira técnica associada que é utilizada quando é dada a capacidade e pedem-se as medidas das arestas.

Quadro 12: Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Produzir Recipiente ou Sólido

Tipo de Tarefa	Técnicas, Tecnologias e Teorias Associadas
T_{prod.rec.cap.tri.} T_{prod.rec.vol.tri.} T_{prod.sol.vol.tri.}	$\tau_{\text{transf.cap.vol.}}$ — Relacionar unidade de medida de capacidade a unidade de medida de volume (cm ³ ou m ³); $\tau_{\text{enc.num.}}$ — Encontrar três números naturais cujo produto é o valor numérico do volume; técnica similar: “Pense em um número que multiplicado por ele mesmo resulta [...]” (DANTE, 2015b, p. 218); $\theta_{\text{enc.num.}}$ — “[...] calcular essa medida de comprimento sabendo a medida da área.” (DANTE, 2015b, p. 218); $\Theta_{\text{rel.vol.cap.}}$ — Operações aritméticas; números e operações.

FONTE: Produzido pela autora

Embora poucas atividades de produção de sólido ou recipiente tenham sido encontradas, este tipo de tarefa tem uma importante função no entendimento destas grandezas, uma vez que liga os três quadros de compreensão da hipótese didática das grandezas, o numérico, o sólido e

o das grandezas, uma vez que o sólido geométrico é invocado para a visualização e adequação dos valores numéricos do volume, referindo-se ao quadro numérico e por fim ao quadro das grandezas ao escolher o sólido ao qual se trata e associar a unidade de medida adequada. A produção de sólido como operação inversa de medida do volume também deve ser incentivada.

7.3.4. Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Transformar Unidades de Medida

As atividades do tipo transformar foram categorizadas em três subtipos, as transformações entre unidades de medida de capacidade, as transformações entre unidades de medida de volume e as transformações de unidades de volume em capacidade e de capacidade em volume, sendo estas últimas baseadas na correspondência entre as unidades de volume e capacidade. Ao total catorze questões foram elencadas nesta categoria, sendo a maioria delas no livro do 6º ano, com 11 questões que tratam dos três tipos de transformações aqui categorizados.

Tabela 4: Quantitativo de Tarefas do Tipo Transformar Unidades de Medida nos Livros de 1º ao 6º Ano

Tipo de Tarefa	Variável 1	Variável 2	1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano	5º Ano	6º Ano
Transformar	Capacidade	Capacidade	-	-	-	2	1	5
		Volume	-	-	-	-	-	2
	Volume	Volume	-	-	-	-	-	4

FONTE: Produzido pela autora

As técnicas associadas a este tipo de tarefa variam bastante, num total de cinco técnicas distintas. Nos livros do 4º e 5º ano a transformação de unidades de medida ainda não foi formalizada, então a relação trazida é de correspondência entre uma unidade e outra, multiplicando ou dividindo por 1000. No livro do 6º ano, quando ocorre a formalização, a técnica de transformação é mais explícita.

Quadro 13: Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Transformar Unidades de Medida

Tipo de Tarefa	Técnicas, Tecnologias e Teorias Associadas
T_{tranf.cap.cap}	τ_{tranf1}. — Relacionar 1 L a 1000 ml; θ_{tranv}. — “[...] relação entre o litro e o mililitro para que os alunos façam algumas conversões. 1 litro=1000 mililitros ou 1 L=1000 ml” (DANTE, 2015a, p. 75); Θ_{tranf}. — Relações entre unidades de medida de volume; Grandezas e medidas. Sistema de numeração decimal; Números e operações τ_{miles}. — Relacionar o termo milésimo com 1000; τ_{frac}. — Representar um milésimo em fração; τ_{dec}. — Representar um milésimo em número decimal; θ_{tranf}. — “[...] relação entre o litro e o mililitro e vice e versa, usando fração e decimal.” (DANTE, 2015b, p. 223); Θ_{tranf}. — Relações entre unidades de medida de volume; Grandezas e medidas. Sistema de numeração decimal e representações fracionárias; Números e operações τ_{posiq}. — Observar se a unidade de medida final se encontra em posição a direita ou esquerda da unidade de medida atual; τ_{esq}. — Se está na posição a esquerda divida por dez a cada posição distante; τ_{dir}. — Se está na posição a direita multiplique por dez a cada posição distante; θ_{tranf}. — “[...] cada unidade de capacidade é igual a dez vezes a unidade imediatamente anterior.” (DANTE, 2016, p. 258). Adaptado; Θ_{tranf}. — Relações entre unidades de medida de volume; Grandezas e medidas; Sistema de numeração decimal; Números e operações.
T_{tranf.cap.vol}	$\tau_{\text{cm.l}}$. — Relacionar 1 cm³ a 1 L; relacionar 1 m³ a 1.000 L; $\theta_{\text{cm.l}}$. — “[...] uma caixa cúbica cuja aresta mede 1dm, ou seja, que tem volume de 1 dm³, tem capacidade para conter 1 L de um líquido. [...] Como 1 dm³=1000 cm³, podemos também relacionar: 1000 cm³ ↔ 1 L”, (DANTE, 2016, p. 267); Θ_{tranf}. — Relações entre unidades de medida de volume; Grandezas e medidas Sistema de numeração decimal; Números e operações.
T_{tranf.vol.vol}	τ_{posiq}. — Observar se a unidade de medida final se encontra em posição a direita ou esquerda da unidade de medida atual; τ_{esq}. — Se está na posição a esquerda divida por 1000 a cada posição distante; τ_{dir}. — Se está na posição a direita multiplique por 1000 a cada posição distante; θ_{tranf}. — “[...] cada unidade de volume é igual a 1000 vezes a unidade imediatamente anterior.” (DANTE, 2016, p. 263); Θ_{tranf}. — Relações entre unidades de medida de volume; Grandezas e medidas. Sistema de numeração decimal; Números e operações.

FONTE: Produzido pela autora

Nas técnicas e tecnologias observadas no Quadro 13, pode-se perceber que a formalização da transformação para todas os múltiplos e submúltiplos das unidades padronizadas só é dada no 6º ano, em que o aluno multiplica ou divide por dez ou 1000 a cada posição a esquerda ou à direita da unidade a ser transformada estiver. A evolução neste tipo de tarefa é clara também, o aluno começa associando unidades de medida de capacidade, $1\text{ L}=1000\text{ ml}$, e só depois formaliza a transformação de unidades para os múltiplos e submúltiplos do litro. A transformação de unidades de medida de volume segue o mesmo padrão, em questões anteriores, nas quais o foco não é a transformação em si, a transformação de $1\text{ dm}^3=1000\text{ cm}^3$ já aparecia, tratando de caixinhas cúbicas de 1 dm de aresta.

As relações entre formas de representação numérica também se apresentam, com a indicação do termo milésimo para representar a transformação de unidades de capacidade, a representação de um milésimo em número decimal e em fração, atividades estas já estudadas nos capítulos anteriores do livro do 5º ano, no estudo de frações e números decimais, além de atividade similar nas seções de estudo de comprimento e massa, com o mesmo exemplo adaptado para as grandezas em questão. Acredita-se que o aluno já compreende a atividade dadas as atividades similares que aparecem anteriormente servindo como revisão de frações e números decimais.

No livro do 6º ano, a correspondência entre volume e capacidade é mais explícita e o livro traz a correspondência direta entre unidades de medidas, não associando a um recipiente com volume tal que tem capacidade para tantos litros, a relação dada entre essas unidades não é de igualdade, mas sim de correspondência, $1.000\text{ cm}^3 \leftrightarrow 1\text{ L}$, $1\text{ m}^3 \leftrightarrow 1000\text{ L}$, $1\text{ dm}^3 \leftrightarrow 1\text{ L}$. O que reitera a diferença entre o volume e a capacidade, sendo estas uma mesma grandeza de naturezas distintas, a relação de correspondência reafirma tal fato.

7.3.5. Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Realizar Operações Básicas com Volume ou Capacidade

Em relação ao tipo de tarefa realizar operações básicas, foram modeladas questões que envolviam as grandezas volume e capacidade em sua maioria em seus aspectos lineares. Apenas duas questões de capacidade envolviam a trilinearidade, na contagem de blocos realizada no livro do 2º ano, atividade essa que afirma introduzir conceitos de volume, trazendo uma caixa

de material transparente sem tampo que será preenchido por caixinhas cúbicas, sendo as caixinhas a unidade de medida da capacidade do aquário.

As operações básicas foram escolhidas como operações simples que os alunos fariam diretamente, como adições, subtrações e no avançar das séries a transformação de medida, divisão e multiplicação também foram consideradas operações básicas, entendendo que o aluno não teria dificuldade com estas questões, diferente da categoria resolver problemas, que envolvem técnicas mais robustas ou em maior quantidade.

Tabela 5: Quantitativo de Tarefas do Tipo Resolver Operações Básicas nos Livros de 1º ao 6º Ano

Tipo de Tarefa	Variável 1	Variável 2	Ano					
			1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano	5º Ano	6º Ano
Realizar Operações Básicas	Capacidade	Linear	4	3	-	-	1	-
		Trilinear	-	2	-	-	-	1
	Volume	Linear	3	-	6	-	1	8

FONTE: Produzido pela autora

Ao total foram contabilizadas 28 questões de resolução de operações básicas, metade da quantidade de questões de medir grandeza, grupo com maior quantidade de questões, sendo então o segundo grupo mais numeroso de análise. Estas questões dividem-se em questões que tratam a o volume e a capacidade, com dezoito questões que tratam da grandeza volume, sendo estas operações básicas utilizando volume de líquidos, unidades de medida de volume ou contar marcação de líquido em recipiente.

As operações relacionadas à grandeza capacidade, oito que tratam dessa linearmente, as operações como soma e subtração aparecem nos primeiros livros, as operações de transformação de unidades e divisão surgem depois. As duas atividades relativas à capacidade em seu aspecto trilinear são de contagem de blocos apoiado na visualização.

Quadro 14: Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Realizar Operações Básicas com Volume ou Capacidade

Tipo de Tarefa	Técnicas, Tecnologias e Teorias Associadas
T_{op.bas.cap.uni.}	$\tau_{\text{obs.rep.}}$ – Observar as imagens e representar a capacidade de cada figura; $\tau_{\text{som.}}$ – Somar a capacidade dos recipientes representados; $\theta_{\text{som.}}$ – “[...] envolve situações de adição ao juntar medidas de capacidade”, (DANTE, 2017a, p. 150); $\Theta_{\text{rel.cap.}}$ – Relações entre unidades de medida de capacidade; Grandezas e medidas.
T_{op.bas.vol.uni.}	$\tau_{\text{op.bas.}}$ – Adicionar/ subtrair/ multiplicar/ dividir valores; $\tau_{\text{tranf.}}$ – Transformar unidades de medida; $\theta_{\text{som.sub}}$ – “[...] envolvem ideias da subtração e adição”, (DANTE, 2017a, p. 149); $\theta_{\text{mult.div}}$ – “[...] situações de multiplicação e divisão de medidas de capacidade em mililitros”, (DANTE, 2015b, p. 223); $\Theta_{\text{rel.vol.}}$ – Relações entre a grandeza capacidade; Grandezas e medidas.
T_{op.bas.vol.tri.}	$\tau_{\text{som.sub.}}$ – “[...] os alunos devem perceber que os dois recipientes são iguais (têm a mesma forma e o mesmo tamanho) e que cada um deles está dividido em sete partes iguais”, (DANTE, 2017a, p. 157); $\tau_{\text{som.sub.}}$ – “[...] juntando as 2 partes de água que estão cheias em um recipiente com três partes de água do outro recipiente, este ficará com cinco partes de água”, (DANTE, 2017a, p. 157); $\theta_{\text{som.sub}}$ – Observação e contagem; $\Theta_{\text{rel.vol.}}$ – Relações entre a grandeza volume; Grandezas e medidas.
T_{op.bas.vol.tri.}	$\tau_{\text{part.todo.}}$ – Representar os volumes como fração – parte todo; $\tau_{\text{den.100}}$ – realizar multiplicações e/ou divisões para tornar o denominador 100; $\tau_{\text{porc.}}$ – Relacionar fração centesimal a porcentagem; $\theta_{\text{tranf.}}$ – “[...] podemos usar a equivalência de frações e procurar frações decimais” (DANTE, 2015b, p. 203); $\Theta_{\text{rel.vol.}}$ – Frações – números e operações.

FONTE: Produzido pela autora

As técnicas deste tipo de tarefa são bem variadas, mas a maioria consta de problemas com as quatro operações básicas, que não se relacionam com outras grandezas. As tarefas propostas nos livros iniciais analisados são referentes as adições e subtrações, questões de *quanto falta, quanto sobra, juntar, contar marcação*; nos livros posteriores as atividades incluem outras operações, como a transformação de unidades.

Apenas uma questão sai do padrão de operações básicas, mas, por não envolver outra grandeza, foi categorizada como tal. A atividade pede ao aluno que determine a fração que um recipiente representa em relação a outro, sendo esta questão resolvida com operações entre frações, transformando a razão dos números em uma fração decimal e associando esta fração à porcentagem. Neste mesmo livro, do 5º ano, o estudo de frações, porcentagem e números decimais tratam atividades similares, levando a crer que o aluno conseguirá resolver a atividade.

Houve também uma evolução nas tarefas e técnicas ligadas a este bloco, as operações, inicialmente ligadas a visualização tornam-se mais complexas, os contextos mudam e outras técnicas secundárias são envolvidas.

7.3.6. Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Resolver Problemas Referentes ao Volume ou a Capacidade

As tarefas do tipo resolver problemas também são variadas, com diversas técnicas e tratamento linear e trilinear. As questões dessa seção envolvem outras grandezas além do volume e capacidade, como valor monetário, massa, razão entre volume e preço, entre outras. Entendeu-se que estas questões demandavam um esforço maior do aluno do que as questões de resolução de operações básicas, seja nas técnicas utilizadas nos livros iniciais, seja em relações aritméticas mais complexas nos livros finais.

Ao todo foram categorizadas 19 questões neste tipo de tarefa, que aparecem a partir do livro do 3º ano, quando o aluno já tem certo domínio das operações básicas e é capaz de relacionar grandezas distintas com operações simples, como tarefas que utilizam o valor monetário associado e outras que lidam com tempo, realizando operações básicas, como a multiplicação direta.

No livro do 4º ano uma questão envolve estatística, na qual o aluno deve descrever as possibilidades de compra de certo produto com embalagens diversas, o uso da tabela é indicado nesta resolução e o intuito é determinar a melhor relação custo/ benefício na compra deste

produto, mostrando ao aluno como escolher produtos conscientemente. As questões de capacidade trilineares são referentes a problemas de vazão e ao valor monetário associado ao produto das arestas.

Tabela 6: Quantitativo de Tarefas do Tipo Resolver Problemas nos Livros de 1º ao 6º Ano

Tipo de Tarefa	Variável 1	Variável 2	1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano	5º Ano	6º Ano
Resolver problemas	Volume	Linear	-	-	5	2	4	1
		Trilinear	-	-	-	-	1	2
	Capacidade	Linear	-	-	-	-	-	1
		Trilinear	-	-	-	-	-	3

FONTE: Produzido pela autora

Algumas tarefas tratam da grandeza massa juntamente com capacidade e volume, no livro do 5º ano uma atividade de proporção de volume trilinear em que o aluno calcula o volume de areia em um caminhão e associa esse volume ao valor monetário. Três questões de capacidade trilineares foram categorizadas também no livro do 6º ano, uma delas pede ao aluno que calcule a capacidade de um recipiente dadas suas arestas e depois associa esta medida a dois outros recipientes por meio de porcentagem. O aluno utiliza conhecimentos prévios estudados no próprio livro para resolver.

Outras questões também de capacidade trilinear são de vazão, nas quais o aluno calcula a capacidade do recipiente dadas as arestas, associa à vazão a quantidade de líquido que cabe no recipiente ou determina o tempo de acordo com a capacidade do recipiente, estas questões envolvem diversas técnicas secundárias, como transformação de unidades de volume e/ou capacidade, relação entre m^3 e L, mudança de unidade de tempo, além da proporção realizada no cálculo da vazão.

Quadro 15: Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Resolver Problemas Referentes ao Volume ou a Capacidade 1

Tipo de Tarefa	Técnicas, Tecnologias e Teorias Associadas
$T_{\text{prob.vol.uni.}}$	$\tau_{\text{tranf.temp.}}$ — Transformar unidades de medida de tempo; $\tau_{\text{mult.}}$ — Multiplicar valores; $\theta_{\text{prop.}}$ — “[...] trabalha informalmente com a ideia de proporcionalidade.” (DANTE, 2017c, p. 139); $\Theta_{\text{proporcao.}}$ — Propriedades aritméticas; Números e operações.

	$\tau_{org.tab.}$ – [...] organizar um esquema ou uma tabela para determinar todas as possibilidades.” (DANTE, 2015a, p. 93); $\tau_{calc.preç.}$ – “[...] calcular o preço de cada possibilidade.” (DANTE, 2015a, p. 93); $\tau_{id.econ.}$ – “[...] identificar qual é a mais econômica.” (DANTE, 2015a, p. 93); $\theta_{possib.}$ – “[...] trabalha a importante ideia de possibilidades, em um contexto relacionado às medidas de capacidade em litros e mililitros.” (DANTE, 2017a, p. 143); $\Theta_{possib.}$ – Conceitos de possibilidade – Probabilidade e estatística.
	$\tau_{tranv.}$ – Sem indicação de técnica – <i>transvasar líquido de um recipiente a outro mentalmente</i> ; $\tau_{som.sub.}$ – <i>Somar/ subtrair volume de líquido em recipiente</i> ; $\theta_{tranv.}$ – Sem indicações; $\Theta_{prop.}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.
	$\tau_{val.unit.}$ – Determinar o valor unitário do volume (1 L ou 1 ml); $\tau_{term.prop.}$ – Associar termos da proporção; $\tau_{cal.prop.}$ – Calcular proporção; $\tau_{som.sub.}$ – Efetuar soma/ subtração; $\tau_{comp.}$ – Comparar valor/volume; $\theta_{proporçao.}$ – “[...] ideia relacionada a multiplicação: proporcionalidade.” (DANTE, 2015b, p. 81); $\Theta_{proporçao.}$ – Propriedades algébricas; Números e operações.

FONTE: Produzido pela autora

Quadro 16: Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Resolver Problemas Referentes ao Volume ou a Capacidade 2

Tipo de Tarefa	Técnicas, Tecnologias e Teorias Associadas
$T_{prob.vol.tri.}$	$\tau_{mul.arest.}$ – Calcular volume por multiplicação das arestas; $\tau_{prop.rs.}$ – Calcular valor monetário por proporção; $\theta_{proporçao.}$ – “[...] ideia relacionada a multiplicação: proporcionalidade.” (DANTE, 2015b, p. 81); $\Theta_{proporçao.}$ – Propriedades algébricas; Números e operações.
	$\tau_{tranf.}$ – Transformar unidades de medida; $\tau_{razao.}$ – Calcular razão; $\tau_{rel.vol.cap.}$ – Relacionar L a cm^3 ; $\tau_{mul.arest.}$ – Calcular volume por multiplicação das arestas; $\tau_{prod.sol.}$ – Determinar as medidas das arestas do cubo com volume dado; $\theta_{tranv.}$ – “[...] queremos saber quanto é 1/3 de 12.” (DANTE, 2016, p. 167), <i>Tecnologia adaptada de outro capítulo</i> ; $\Theta_{proporçao.}$ – Propriedades algébricas; Números e operações.

T_{prob.cap.uni.}	$\tau_{\text{tranf.massa}}$ – Transformar unidades de medida de massa; $\tau_{\text{som.sub.}}$ - Efetuar subtração; $\tau_{\text{rel.vol.cap.}}$ – Relacionar massa a Litro; $\tau_{\text{tranf.}}$ – Transformar unidades de medida; $\theta_{\text{rel.massa.vol.}}$ – “[...] a massa de 1 L de água equivale a 1 kg.” (DANTE, 2016, p. 261); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades das grandezas; Grandezas e medidas.
T_{prob.cap.tri.}	$\tau_{\text{mult.arestas}}$ – Calcular capacidade do recipiente – multiplicação das arestas; $\tau_{\text{mult.arestas}}$ - Calcular percentual da capacidade; $\theta_{\text{porc.}}$ – “As porcentagens correspondem a frações com denominador 100 ou frações equivalentes a elas” (DANTE, 2016, p. 186); $\Theta_{\text{proporcao.}}$ – Propriedades algébricas; Números e operações.
	$\tau_{\text{mult.arestas}}$ – Calcular capacidade por multiplicação das arestas; $\tau_{\text{tranf.tempo.}}$ – Transformar unidades de tempo; $\tau_{\text{prop.vazao}}$ – Calcular vazão – proporcionalidade entre tempo e volume; $\tau_{\text{ord.}}$ – Relacionar L e m ³ ; $\tau_{\text{comp.rec}}$ - Comparar capacidade de dois recipientes; $\theta_{\text{proporcao.}}$ – “[...] ideia relacionada a multiplicação: proporcionalidade.” (DANTE, 2015b, p. 81); $\Theta_{\text{proporcao.}}$ – Propriedades algébricas; Números e operações.

FONTE: Produzido pela autora

No livro do 6º ano, as questões referentes ao tratamento trilinear das grandezas aqui tratadas encontram-se na seção volume e capacidade, na qual seu objetivo didático, de acordo com o manual do professor, é a resolução de situações problemas com tais objetos matemáticos não havendo qualquer indicação de técnica e tecnologia associados, a menos da resolução do livro do professor, o qual não justifica as técnicas. Nestas atividades as técnicas foram inferidas de acordo com a resolução do livro e as tecnologias foram indicadas em outros capítulos do livro que tratam as grandezas associadas ou as operações matemáticas que se relacionam nas questões.

Como exemplo as questões de proporcionalidade, nas quais não há indicação de técnicas, estas foram inferidas pelas resoluções trazidas no livro do professor, e as justificativas foram encontradas em outros capítulos e/ou em outros livros, entendendo que o aluno já teria domínio sobre tais elementos.

A evolução deste tipo de tarefa é bastante evidente também, o aluno começa realizando operações básicas entre grandezas, como o valor monetário, depois as operações ficam mais elaboradas, como proporção simples, e chega nos problemas de vazão, porcentagem e razão,

nas quais a quantidade de técnicas associadas é numerosa e necessita de uma visão geral da questão, para saber que sequências de passo seguir, desafiando o aluno.

7.3.7. Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Validar Proposição Referente ao Volume ou a Capacidade

O tipo de tarefa validar proposição foi encontrado apenas nos livros do 5º e 6º ano, quando o aluno teria maturidade suficiente para abstrair as situações propostas para os paralelepípedos estudados. Apenas três questões enquadraram-se nesta categoria, sendo duas delas encontradas no livro do 5º ano e uma no livro do 6º ano, duas referentes ao volume em seu aspecto trilinear e uma referente a capacidade também em seu aspecto trilinear, respectivamente.

Tabela 7: Quantitativo de Tarefas do Tipo Validar Proposição Referentes ao Volume ou Capacidade nos Livros de 1º ao 6º Ano

Tipo de Tarefa	Variável 1	Variável 2	1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano	5º Ano	6º Ano
Validar proposição	Volume	Trilinear	-	-	-	-	2	-
	Capacidade	Trilinear	-	-	-	-	-	1

FONTE: Produzido pela autora

Uma questão do livro do 5º ano questiona o aluno como determinar o volume de um paralelepípedo sabendo a medida de comprimento das suas arestas, almejando como resposta a multiplicação das arestas, caso que o aluno verificou nas questões anteriores com o método da contagem de blocos e da multiplicação das arestas concomitantemente. A segunda questão é sobre o significado de 1 m^3 e é esperado que o aluno pense num recipiente cúbico que tem como medidas das suas arestas 1 m.

Quadro 17: Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Validar Proposição Referentes ao Volume ou Capacidade

Tipo de Tarefa	Técnicas, Tecnologias e Teorias Associadas
T_{val.vol.tri.}	$\tau_{\text{exp.mult.arest}}$ – Explicar a multiplicação das arestas com a unidade de medida de volume; $\Theta_{\text{met.vol.}}$ – “Observe que podemos obter a medida do volume do cubo e do paralelepípedo abaixo de dois modos: contando os cubinhos ou pela multiplicação.” (DANTE, 2015b, p. 221); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.
	$\tau_{\text{rel.cubo.}}$ – Relacionar unidade de medida a sólido unitário; $\theta_{\text{cubo.unit.}}$ – “Imagine um cubo cuja medida do comprimento das arestas é de 1 cm. A medida do volume desse cubo é de 1 centímetro cúbico (1 cm ³)” (DANTE, 2015b, p. 220); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.
T_{val.cap.tri.}	$\tau_{\text{const.rec.}}$ – “Construam uma caixa cúbica com arestas de 1 dm”, (DANTE, 2016, p. 267); $\tau_{\text{enc.água}}$ – Encham de água um vasilhame com capacidade de 1 litro e despejem na caixa, (DANTE, 2016, p. 267); $\theta_{\text{rel.vol.cap.}}$ – “Assim, uma caixa cúbica cuja aresta mede 1 dm, ou seja, que tem volume 1 dm ³ , tem capacidade para conter 1 litro de um líquido.” (DANTE, 2016, p. 267); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.

FONTE: Produzido pela autora

As questões de validação têm o intuito de forçar o aluno a verificar propriedades e relações entre as grandezas, explicitando com palavras algo que ele fez e/ou observou acontecer, como a verificação que em um recipiente cúbico de 1 dm de aresta cabe 1 L. O aluno verifica concretamente e descreve com palavras o que aconteceu no experimento. A questão do produto das arestas do volume, o aluno resolveu algumas atividades nas quais ele precisava contar os blocos e verificar se a multiplicação das arestas resultava num mesmo valor numérico, após fazer esta operação algumas vezes, espera-se que o aluno tenha compreendido que as duas formas de cálculo são válidas para as situações propostas.

7.3.8. Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Escolher Recipiente

As tarefas do tipo escolher recipiente foram separadas em dois subtipos, escolher instrumento de medida e escolher unidade de medida. As questões categorizadas na primeira são em sua maioria de ordem pessoal, nestas o aluno decide qual instrumento de medida é

adequado a situação proposta pelo livro, como o volume de leite utilizado para fazer um bolo, que pode ser uma xícara, um copo, 1 L, 200 ml, entre outras unidades.

As questões do tipo escolher unidade de medida relacionam-se com a transformação de unidades de medida, o aluno realiza a operação inversa da conversão de unidades, verificando quantas casas decimais a vírgula deslocou-se e então observando na *Tabela 8* de unidades de medida qual a unidade referente àquela transformação.

Tabela 8: Quantitativo de Tarefas do Tipo Escolher Recipiente nos Livros de 1º ao 6º Ano

Tipo de Tarefa	Variável 1	1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano	5º Ano	6º Ano
Escolher Recipiente	Instrumento de medida	-	2	4	-	-	1
	Unidade de medida	-	-	-	-	-	4

FONTE: Produzido pela autora

Ao total foram contabilizadas 11 tarefas do tipo escolher recipiente, presentes apenas em três dos seis livros analisados. Destas 11, sete são de escolha de instrumento de medida, ao qual a resposta é pessoal, apenas quatro que se referem a escolha de unidades de medida tem sua técnica descrita com exatidão, encontrada em outra seção, o de Mudanças de unidades de medida, do capítulo de números decimais, no qual se verifica quantas casa a vírgula deslocou-se, podendo então, desta forma, descobrir qual a unidade de medida referente ao valor numérico dado.

Quadro 18: Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Escolher Recipiente nos livros analisados.

Tipo de Tarefa	Técnicas, Tecnologias e Teorias Associadas
T_{esc.inst.}	$\tau_{\text{esc.inst.}}$ — <i>Sem indicações.</i> - Escolher instrumento de medida baseado em experiências pessoais e conhecimentos anteriores; $\tau_{\text{esc.inst.rec.}}$ — Escolher recipiente e instrumento de medida que possam ter sua capacidade comparada em experimento concreto. $\theta_{\text{esc.inst.}}$ — “[...] escolhas de unidades de instrumentos de medida mais apropriados”, (DANTE, 2017c, p. 170); $\Theta_{\text{prop.}}$ — Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.
T_{esc.unid.}	$\tau_{\text{esc.unid.}}$ — Comparar os valores numéricos das medidas; $\tau_{\text{verif.mult.}}$ — Contar quantas casas a vírgula foi deslocada para direita ou esquerda; $\tau_{\text{cont.uni.med.}}$ — Contar as posições das unidades de medida baseado no número encontrado;

	$\Theta_{\text{esc.unid.}}$ – “Quando multiplicamos um número decimal por 10/1000 – a vírgula avança uma/ casa para a direita.” (DANTE, 2016, p. 217); $\Theta_{\text{esc.unid.}}$ – “Quando dividimos um número decimal por 10/1000 – a vírgula avança uma/ casa para a esquerda.” (DANTE, 2016, p. 217); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades aritméticas; Números e operações.
--	---

FONTE: Produzido pela autora

As questões de escolha de instrumento de medida não evoluíram com o adiantar dos anos escolares nos livros, a situação permaneceu a mesma em todos os três livros analisados. As questões de escolha de unidades de medida, que necessita de técnicas mais elaboradas para sua resolução, surgem apenas no livro do 6º ano.

7.3.9. Análise Praxeológica do Tipo de Tarefa Estimar Medida de Capacidade de Recipiente

As 11 atividades categorizadas neste tipo de tarefa são, em sua maioria, estimativas de capacidade, no qual o aluno tenta dar uma resposta correta para a quantidade de vezes que precisa despejar o líquido de um recipiente no outro para enchê-lo. Os livros sempre propõem aos professores que levem materiais concretos e incitem os alunos a verificarem se suas estimativas estão corretas, como uma forma de validar as respostas dadas e melhorar as próximas estimativas.

Tabela 9: Quantitativo de Tarefas do Tipo Estimar a Medida de Capacidade de Recipiente nos Livros analisados de 1º ao 6º Ano

Tipo de Tarefa	Variável 1	Variável 2	1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano	5º Ano	6º Ano
Estimar a medida de	Volume	Linear	-	1	1	-	-	-
	Capacidade	Linear	3	1	5	-	-	-

FONTE: Produzido pela autora

As técnicas utilizadas para as estimativas de capacidade não são descritas explicitamente, mas indicadas na própria questão, estas pedem que o aluno estime quantas colheres de chá de água são necessárias para encher uma xícara, e situações similares. O tipo de tarefa estimar a medida de volume são indicações de trabalho com a unidade litro, nestas o aluno deve pensar em quantos copos um litro pode encher, baseando esta decisão em experiências próprias ou dimensões de recipientes de capacidade 1 L.

Quadro 19: Praxeologia Relativa ao Tipo de Tarefa Estimar a Medida de Capacidade de Recipiente

Tipo de Tarefa	Técnicas, Tecnologias e Teorias Associadas
T_{est.vol.uni.}	$\tau_{\text{med.copo}}$ – “[...] pensar na medida de capacidade do copo”, (DANTE, 2017b, p. 187); $\tau_{\text{est.vol.}}$ – Somar capacidade dos copos e verificar se há mais ou menos do que 1 L; $\theta_{\text{est.}}$ – “[...] estimativas envolvendo a unidade de medida litro.” (DANTE, 2017b, p. 187); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.
T_{est.cap.uni.}	$\tau_{\text{est.cap.}}$ – Estimar quantas vezes é necessário encher um recipiente e despejar no outro para completá-lo; $\theta_{\text{est.}}$ – “[...] estimativas utilizando unidades não padronizadas de medida de capacidade.” (DANTE, 2017a, p. 148); $\Theta_{\text{prop.}}$ – Propriedades da grandeza volume; Grandezas e medidas.

FONTE: Produzido pela autora

Este tipo de tarefa não sofreu muitas modificações nos livros observados, sendo as situações sempre semelhantes umas às outras e sem a necessidade de técnicas mais elaboradas para a sua resolução. Nos livros do 4º, 5º e 6º ano não apareceram nenhuma tarefa deste tipo.

7.3.10. Outras atividades

As atividades que não geram técnicas e tecnologias foram agrupadas como outras atividades, aqui encontram-se questões de vocabulário em que o aluno associa um instrumento ou unidade de medida a grandeza ao qual este mede, questões pessoais, nas quais o aluno descreve como utiliza a grandeza no dia a dia, formula questões que utilizem a grandeza e tarefas de pesquisa em que o aluno procura em casa instrumentos de medida ou encontra o volume de certo líquido e apresenta os resultados em sala. Estas questões somaram trinta nos seis livros analisados, como pode-se observar na *Tabela 10* abaixo, sendo as questões de vocabulário mais comuns nos anos iniciais e as de respostas pessoais mais comuns nas séries posteriores.

Tabela 10: Outras Questões Encontradas nos Livros de 1º ao 6º Ano

Tipo de Tarefa	1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano	5º Ano	6º Ano
Outras	3	6	11	6	3	1

FONTE: Produzido pela autora

De acordo com a BNCC (2018a), estas atividades categorizadas como outras são indicadas como o reconhecimento da capacidade em embalagens e rótulos ou relacionando-os em contextos socioculturais que são descritos nas habilidades a serem desenvolvidas no 3º ao 5º ano do EF-Anos Iniciais, orientações essas que são seguidas inclusive em anos precedentes mas que não foram compreendidos como tipos de tarefas nesse trabalho.

7.4. MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERÊNCIA PROPOSTO

O modelo proposto aqui é uma mistura do que já havia sido realizado com o modelo de referência a priori e a modelagem praxeológica realizada com os livros didáticos. Como já foi discutido, o modelo de referência agrupa variáveis que não foram alvo de observação na modelagem praxeológica dos livros analisados. Aqui consta a nova roupagem dada ao MPR a priori de acordo com o que foi modelado nos livros didáticos.

As variáveis que não constam no MPD e que foram aqui propostas refletem a preocupação desta pesquisa em relação a situações que foram abordadas nos livros observados e que deveriam ter sido, como as diversas técnicas que podem ser utilizadas na resolução de uma questão, como o transvasamento, contagem, experimentações concretas e que não foram observadas neste trabalho por serem tipos de tarefas mais específicas que o desejado. Assim como as demais grandezas que são relacionadas ao volume e capacidade nas tarefas propostas, como valor monetário, tempos, área, comprimento, massa, estas relações com outras grandezas compõem a gama de situações em que estas grandezas são utilizadas na vida real e, por isso, importantes para observação.

Como exemplo destas variáveis adicionadas têm-se as relações entre as grandezas e medidas e números e operações que podem ser observadas, a diferenciação entre grandezas, que pode vir em uma questão aberta, em atividades que meçam várias grandezas relativas à um mesmo objeto. Este último tipo de tarefa foi encontrado no livro, mas não foi de interesse categorizá-la como questão de diferenciação entre grandezas devido ao tempo restrito.

A diferenciação entre o volume e capacidade em seus aspectos lineares e trilineares ajudaram na categorização uma vez que os livros analisados tratam o volume linear, nas situações em que se trata de líquidos, como capacidade, sem especificar que se trata do volume de líquidos. A capacidade trilinear é associada a medida de volume quando é dada em m^3 ou cm^3 , até mesmo nas situações em que o quanto cabe em certo recipiente é pedido.

No mais, os tipos de tarefas propostos no MPR a priori foram em sua maioria contemplados nos livros observados, a menos de variáveis adicionadas no MPR que podem ter relevância na análise de tipos de tarefas ao observar mais detalhadamente as técnicas e/ou as tecnologias, como pode ser observado no QUADRO 20 logo abaixo.

Quadro 20: Modelo Praxeológico de Referência Proposto

Tipo de Tarefa	Variável 1	Variável 2	Variável 3	Variável 4
T – Comparar Grandeza- $T_{comp.} \left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} liq. \\ rec. \\ sol. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	• Líquido • Recipiente • Sólido	• Linear • Trilinear	• Observação • Transvasamento • Contagem • Experimentações concretas • Cálculo
T – Medir Grandeza - $T_{med.} \left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} liq. \\ rec. \\ sol. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	• Líquido • Recipiente • Sólido	• Linear • Trilinear	• Contagem • Operações básicas • Multiplicação das arestas • Imersão • Vazão
T – Produzir material- $T_{prod.} \left\{ \begin{matrix} rec. \\ sol. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1r \\ +1r \end{matrix} \right\}$	• Recipiente • Sólido	• Volume • Capacidade	• Linear • Trilinear	• Resposta única • Mais de uma resposta
T – Transformar Unidades de medida- $T_{tranf.} \left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	• Volume • Capacidade	-	
T – Realizar operações básicas - $T_{op. bas.} \left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	• Linear • Trilinear	-	
T – Resolver problemas - $T_{prob.} \left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} prop. \\ raz. \\ eq. \\ vaz. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} rs. \\ temp. \\ mas. \\ comp. \\ area \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	• Linear • Trilinear	• Proporção • Razão • Equação • Vazão	• Valor monetário • Tempo • Massa • Comprimento • Área
T – Validar proposições - $T_{val.} \left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} conc. \\ obs. \\ calc. \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	• Linear • Trilinear	• Concretamente • Observação • Cálculo	
T – Escolher Recipiente- $T_{esc.} \left\{ \begin{matrix} inst. \\ uni. med. \end{matrix} \right\}$	• Instrumento • Unidade de medida	-	-	
T – Estimar Grandeza- $T_{est.} \left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	• Linear • Trilinear	-	
T – Diferenciar Grandeza- $T_{dif.} \left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} massa \\ área \\ perímetro \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	• Linear • Trilinear	• Massa • Área • Perímetro	
T – Relacionar Grandeza- $T_{rel.} \left\{ \begin{matrix} vol. \\ cap. \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uni. \\ tri. \end{matrix} \right\}$	• Volume • Capacidade	• Linear • Trilinear		

FONTE: Produzido pela autora

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo analisar o modelo praxeológico dominante referente às grandezas volume e capacidade em livros didáticos do 1º ao 6º ano do ensino fundamental e propor um modelo praxeológico de referência, MPR, baseado na literatura, nos documentos oficiais, nas análises realizadas nos livros didáticos escolhidos e no modelo praxeológico dominante, MPD, modelado a partir dos livros didáticos escolhidos. Para isso foi criado um modelo praxeológico de referência a priori baseado nas pesquisas e nos documentos oficiais e foram modeladas praxeologias de seis livros, dos anos iniciais do ensino fundamental até o 6º ano, observando os aspectos descritos no MPR quando conveniente e observada a evolução nos tipos de tarefas modelados no MPD.

O intuito foi responder a seguinte questão: Como evolui a abordagem da capacidade e do volume em coleções de livros didáticos adotados na educação básica? A partir dessa pergunta surgiram outras, como: A tendência de ênfase no aspecto numérico em detrimento dos outros aspectos que são importantes na compreensão desses assuntos, observada em pesquisas anteriores (FIGUEIREDO, 2013; MORAIS, 2013; FREITAS, 2015;) e em documentos de orientação curricular (CARVALHO; LIMA, 2010) permanece nos livros atuais? De que modo são trabalhadas as relações entre capacidade e volume?

Para responder as questões acima, escolheu-se como base para fundamentar as análises e construção dos modelos a Teoria Antropológica do Didático, a Teoria da Transposição Didática no que se refere à praxeologia, modelos praxeológicos, gerador de tarefas e a relação entre os saberes. Para tratar do volume e capacidade utilizou-se o modelo didático das grandezas e os aspectos dimensionais destes objetos no que concerne ao entendimento do volume e capacidade como grandezas, as diferenciações e aproximações entre o volume e capacidade e a dimensionalidade no tratamento destas.

A revisão de literatura trouxe algumas dissertações e teses que tratam do volume e capacidade em diversos aspectos, como grandeza ou dentro da geometria, no ensino fundamental e médio, em livros didáticos, documentos oficiais, nos saberes dos alunos e professores. Os trabalhos de Barros (2002), Oliveira (2002, 2007), Moraes (2013), Figueiredo (2013), Freitas (2015), Melo (2018) foram de fundamental importância no entendimento do volume e capacidade e na definição das categorias de análise pois se aproximam do que aqui

foi proposto, seja na abordagem dimensional do volume, nos tipos de situação estudadas ou na análise praxeológica realizada.

Após a revisão de literatura seguiu-se uma análise dos documentos oficiais vigentes, no caso a BNCC (BRASIL, 2018a), que permeou a construção dos livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental aprovados pelo PNLD 2019 (BRASIL, 2018b), porém o livro do 6º ano do ensino fundamental foi produzido ainda de acordo com o PCN (BRASIL, 1998a) e então deu-se início a uma análise comparativa dos dois documentos no que concerne as grandezas volume e capacidade.

Nesta análise dos documentos oficiais percebeu-se que a BNCC traz os elementos principais do PCN de forma mais detalhada, especificando que tipo de situação e as habilidades a serem desenvolvidas de forma objetiva, trazendo situações variadas mais cedo do que o proposto no PCN, como as situações de medir grandeza e estimar a medida. A resolução de problemas sobre volume e capacidade é descrita como habilidade a partir dos anos iniciais na Base quando nos Parâmetros aparecem nos anos finais. De um modo geral, a base avança no sentido de propor aos alunos situações mais variadas previamente, mas a especificidade desses elementos pode podar o trabalho do professor em sala de aula.

O modelo de referência a priori foi proposto logo a seguir e consiste nas contribuições retiradas dos documentos oficiais, das pesquisas realizadas para a fundamentação teórica, nas teses e dissertações observadas e o olhar das pesquisadoras para os elementos que foram classificados como importantes na compreensão do volume e capacidade. Os tipos de tarefa propostos neste modelo a priori foram: comparar grandeza, medir grandeza, produzir recipiente ou sólido, transformar unidades de medida, relacionar unidade de medida de volume com unidade de medida de capacidade, relacionar com outras grandezas, diferenciar grandezas.

Estes tipos de tarefas propostos surgiram a partir de dez elementos que foram destacados como importantes para entender e diferenciar o volume da capacidade e de outras grandezas comumente confundidas: dois sólidos distintos podem ter o mesmo volume; volume e capacidade podem ser grandezas tridimensionais e unidimensionais; unidades de medida distintas associam valores numéricos diferentes a volumes iguais; utilização de unidades de medida não padronizadas; volume é diferente de massa; volume e capacidade são grandezas correlacionadas e de mesma natureza; associar volume ao produto das arestas de um paralelepípedo; comparar volume e capacidade; problemas que envolvem outras grandezas e/ou outros campos da matemática; formas diversas de medir volume e capacidade. Estes elementos

foram discutidos durante o texto e justificados pela revisão de literatura, documentos oficiais e estudos sobre o volume e capacidade.

Os tipos de tarefa descritos nesse modelo a priori seguiram as atribuições de um gerador de tarefas e incluem diversas variáveis, como a grandeza de que se trata, volume ou capacidade, o aspecto dimensional desta, se unidimensional ou tridimensional, as técnicas utilizadas para a realização das tarefas, como o transvasamento, experimentações concretas ou uso de fórmula, quais as grandezas relacionadas, como a grandeza tempo, massa, valor monetário, entre outras variáveis.

Logo após a construção desse modelo, os livros didáticos foram observados, nos quais deu-se uma análise geral sobre os capítulos referentes as grandezas volume e capacidade e a abordagem dada a estas. Os capítulos, em sua maioria, encontravam-se ao final do livro, reiterando o pouco destaque dado ao seu estudo, como já havia observado Morais (2013). Observou-se também que o volume de líquidos é tratado como capacidade (Figura 12) diversas ocasiões. Os conceitos de volume e capacidade não são devidamente diferenciados e as vezes confundidos (Figura 27).

Ao observar as questões propostas pelos livros, percebeu-se que as relações entre o volume e capacidade se confundem em diversos momentos, ao tratar o volume como capacidade sempre que se trata de líquidos, em seu aspecto unidimensional e a diferenciação destes conceitos ocorre principalmente pela unidade de medida utilizada, tratando volume por m^3 e seus múltiplos e submúltiplos e capacidade por litro e seus múltiplos e seus submúltiplos.

A respeito dessa diferenciação, entendeu-se aqui o volume e a capacidade como uma mesma grandeza em diferentes aspectos, a capacidade como o volume interno de certo recipiente, mas didaticamente essas grandezas se distinguem e principalmente em seu papel dimensional. A capacidade é geralmente tratada unidimensionalmente e o volume tridimensionalmente. Acredita-se aqui que nos anos iniciais a diferenciação entre volume e capacidade não seja adequada uma vez que pode confundir o aluno ao apresentar estas duas grandezas tão intimamente relacionadas e de difícil separação, sendo adequada a sua diferenciação apenas nas séries posteriores, o que não ocorre nos livros analisados.

A análise praxeológica tomou sua vez e as variáveis definidas no modelo de referência a priori foram revistas dadas as suas características muito específicas, alguns tipos de tarefa foram adicionados e outros retirados por divergir da linha de análise, como as questões de diferenciação entre volume e capacidade, cuja análise toma um ponto de vista diferente do

utilizado aqui. Nesse modelo dominante produzido, os nove tipos de tarefa foram: comparar grandeza, medir grandeza, produzir recipiente ou sólido, transformar unidades, realizar operações básicas, resolver problemas, validar proposição, escolher instrumento, estimar medida. As variáveis utilizadas foram a grandeza em questão, se volume ou capacidade, a dimensionalidade, se unidimensional ou tridimensional, o material, se líquido, sólido ou recipiente.

Algumas questões foram classificadas na categoria outros, uma vez que elas tratavam de nomenclatura, reconhecimento das grandezas e pesquisa. Esses tipos de tarefa não podem ser descritos por meio de uma praxeologia, uma vez que não tem uma técnica associada, então foram agrupados nessa categoria outros.

Durante a análise praxeológica observou-se que o tipo de tarefa medir grandeza (30%) é de fato mais numeroso que os tipos: produzir recipiente ou sólido (3%) e comparar grandeza (6%) do total de 189 questões observadas. As tarefas do tipo realizar operações básicas (15%), que consistem em efetuar operações sem utilizar outras grandezas, foram as mais numerosas após a tarefa do tipo medir, seguido por resolver problemas (10%), que foi categorizada desta forma por envolver outras grandezas em sua resolução.

Em se tratando dos tipos de tarefas por ano, medir grandeza foi o único tipo de tarefa que foi encontrada em todos os livros, embora com pouca frequência nos primeiros livros. O que segue de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018a), que estabelece situações de comparar e estimar medida capacidade nos primeiros anos dos anos iniciais e apenas medir e resolver problemas nas séries posteriores. O tipo de tarefa estimar medida aparece apenas até o 3º ano, embora o documento de referência traga como habilidade até o 4º ano. A comparação também some e/ou fica escassa com o adiantar dos anos.

As questões classificadas como medir volume ou capacidade serem a maioria entre as observadas mostram a preocupação do autor em relacionar um valor numérico a essas grandezas, embora as técnicas fossem diversificadas, no livro do 6º ano metade das questões foram classificadas neste grupo. Os problemas que envolvem outras grandezas também aumentam nas séries posteriores, nas quais o aluno já tem conhecimento de uma de operações para relacioná-las.

Os tipos de tarefas observados nos primeiros livros e nos últimos evoluíram em relação as técnicas utilizadas e diversidade de contextos, respondendo uma das questões levantadas na pesquisa, embora alguns tipos de tarefas se extinguem com o avançar dos anos de escolaridade,

como a experimentação concreta, contagem de blocos e a comparação por meio de marcações, sem a utilização de valores numéricos. O tipo de tarefa resolver operações básicas evoluiu consideravelmente com o adiantar dos anos de escolaridade, passando de operações de soma e subtração simples a porcentagens e proporções com uso de fração. As atividades de medição também evoluem copiosamente, partindo de questões de experimentações concretas com capacidade, passeando pela contagem, contagem de bloquinhos até o produto do comprimento das arestas de paralelepípedos retos.

As tarefas do tipo resolver problemas também evoluem com o avançar das séries, passando de relações diretas com valor monetário e tempo a problemas de vazão que incluem transformação de unidade, porcentagem e razão entre medidas de comprimento. Os tipos de tarefas classificados nesta categoria num geral incluem muitas técnicas, como as questões de transformação de unidades no livro do 6º ano, que incita o aluno a contar as posições distantes do número e deslocar a vírgula, atividades estas que são justificadas em capítulos anteriores, no estudo de medidas com números decimais. Os documentos oficiais enfatizam a resolução e produção de problemas com o volume e capacidade, o que indicam uma evolução nas técnicas utilizadas e relação com outras grandezas.

As técnicas descritas foram diversas, num total de quarenta e duas para os nove tipos de tarefas agrupados. As tarefas do tipo medir apresentaram mais técnicas diversas, contabilizando dez, tanto para volume linear e trilinear quanto para capacidade linear e trilinear. A resolução de problemas também relacionou muitas técnicas, nove ao total, também relacionando as duas grandezas linearmente e trilinearmente. A produção de recipiente e sólidos com volume ou capacidade dada modelou uma técnica apenas, na qual se agrupou técnicas secundárias concatenando-as em uma única.

O tipo de tarefa validar proposições contou com três técnicas distintas, uma para cada problema, uma vez que as validações são específicas para cada uma das questões propostas, sendo uma delas experimental e as demais reafirmação de procedimentos já realizados. A resolução de operações básicas foi modelada agrupando seis técnicas distintas, sendo as técnicas associadas ao volume em sua forma trilinear o tipo de tarefa com mais técnicas no grupo.

As tarefas que tratam o volume e capacidade trilinearmente são vistas, em sua maioria, nos livros do 5º e 6º ano, com algumas poucas atividades no livro do 2º ano, no qual o manual do professor especifica que é uma introdução ao estudo do volume, mesmo tratando da

capacidade uma vez que é associação da quantidade de bloquinhos que cabem dentro de uma caixa de material transparente sem tampo, e, no livro do 4º, é solicitado que o aluno represente um recipiente com material dourado. As questões que envolvem medidas de volume com multiplicação das arestas surgem no 5º ano e são maioria das questões do 6º ano, nas quais o aluno conta os blocos e associa o resultado numérico com a multiplicação das arestas do sólido.

Num geral as análises aqui realizadas mostraram que as tarefas propostas pelos livros analisados tendem a um mesmo tipo de tarefa, as do tipo medir e de realizar operações básicas, com pouca variação entre os outros tipos e uma quantidade reduzida em comparação as duas citadas anteriormente, como previsto no trabalho de Moraes (2013) e Melo (2018).

Ao final do 6º ano do ensino fundamental é esperado que o aluno saiba relacionar os termos referentes a capacidade e volume a suas grandezas, com ressalvas as trocas entre volume e capacidade, saiba medir volume e capacidade por meio técnicas variadas, saiba relacionar o volume e capacidade as medidas das arestas de certo sólido ou recipiente, saiba resolver problemas e operações básicas com volume e capacidade incluindo outras grandezas e conteúdos já estudados, como fração, número decimal e porcentagem. Entende-se que o aluno pode concluir proposições a partir de experimentações concretas ou verificação numérica além de estimar capacidade de objetos dadas unidades de medida não padronizadas, de acordo com o PCN (BRASIL, 1998a, p.65). De fato, os livros observados trazem tarefas que propiciam estas habilidades descritas acima, mas não em mesma quantidade ou importância.

Por fim, o modelo de referência proposto difere um pouco do modelo dominante produzido, com 11 tipos de tarefas e acrescido de algumas variáveis que não foram observadas aqui, mas que podem trazer um olhar diferente para os tipos de tarefas aqui descritos. No tipo de tarefa comparar e medir, a técnica utilizada foi adicionada, no tipo de tarefa produzir recipiente ou sólido foi considerado se o sólido é único ou se existe mais de um sólido que pode ser produzido com as informações dadas. ao tipo de tarefa resolver problemas foram adicionadas como variáveis as grandezas que se relacionam e a forma com que se relacionam, como razão, proporção, equação e a tarefa do tipo validar proposições foi acrescido da variável método, como observação, medir concretamente e cálculo.

Os tipos de tarefa adicionados foram diferenciar e relacionar as grandezas, que podem dar um olhar diferenciado as relações entre volume e capacidade, quais os tipos de questão que podem reafirmar as diferenças e as similaridades entre estas duas grandezas? Este

questionamento poderá ser respondido futuramente dando uma abordagem diferente ao problema aqui proposto.

Esta pesquisa reforça pesquisas anteriores em relação a predominância das questões de medição e traz novos elementos nas análises das grandezas aqui estudadas em seus aspectos dimensionais e pontua a complexidade da relação entre volume e capacidade. A ênfase no aspecto numérico pode incitar a defasagem no desenvolvimento de outras noções importantes em relação aos conceitos aqui avaliados, como as questões de produção com respostas variadas ou a comparação sem a utilização de fórmulas. O volume e a capacidade são confundidos em diversos momentos nos livros observados e sua diferenciação não é tão clara, mas a relação entre as unidades de medida é tratada como correspondência e não igualdade.

Como outras sugestões de trabalhos futuros, a continuidade da análise praxeológica das atividades referentes a volume e capacidade nos anos finais do ensino fundamental e ensino médio especificando as técnicas propostas, investigar como os alunos compreendem o volume e a capacidade pontuando possíveis erros esperados cometidos pelos alunos em sua diferenciação, investigar como os alunos da licenciatura em matemática ou pedagogia veem o volume e a capacidade, construir modelos de referência em outros campos da matemática ou rever o modelo aqui proposto

REFERÊNCIAS

AGRANIONIH, N. T. "A Teoria da Transposição Didática e o Processo e Didatização dos Conteúdos Matemáticos." **Educere**-Revista da Educação da UNIPAR 1, no. 1 (2001).

ANWANDTER-CUELLAR, N. **Etude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume**. Dissertação (mestrado), Université Montpellier 2. Montpellier-France, 2008.

BACHELARD, G. **A filosofia do não; O novo espírito científico; A poética do espaço**. São Paulo: Abril Cultural, 1984. (Coleção Os Pensadores).

BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège**. 1996. Tese (doutorado). Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BARROS, J. S. de. **Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório**. Dissertação (mestrado), UFPE. Recife, 2002.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. Um estudo da noção de Grandeza e Implicações no ensino fundamental e médio. Séries Textos da História da Matemática, vol. 8. Natal: **SBHMAT**, 2002.

BESSOT, A. CHAACHOUA, H. Cours 3: **Como podemos estruturar essas praxeologias? Quais ferramentas teóricas introduzir?** 14-22 de fev. de 2019. 13 p. Notas de Aula. Campo Grande-MG

BERTOLI, V. **Ilhas interdisciplinares de racionalidade de Fourez aplicado ao ensino de área e volume no ensino fundamental**. Dissertação (mestrado), FURB. Blumenau, 2015.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. 25 años de transposición didáctica. In: **Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico**. Servicio de Publicaciones, 2007. p. 385-406.

BOYER, C. B. **História da matemática**; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Ensino de Primeira à Quarta Série**. Brasília. MEC, 1997.

_____. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental**. Brasília. MEC, 1998a. Disponível em <<http://www.mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 11 nov. 2018.

_____. Ministério da Educação. **Referencial Curricular Nacional para Educação Infantil**. Brasília. MEC, 1998b. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/volume3.pdf>>. Acesso em 06/05/2019.

_____. Ministério da Educação. **PCN+ Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília. MEC, 2002.

_____. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. MEC, 2018a. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/download-da-bncc>>. Acesso em: 13nov. 2018.

_____. PNLD 2002: Matemática. **Guia de livros didáticos**, 5ª a 8ª série. Brasília. MEC, 2001.

_____. PNLD 2010: Matemática. **Guia de livros didáticos**, Alfabetização Matemática e Matemática, Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Brasília. MEC, 2009.

_____. PNLD 2011: Matemática. **Guia de livros didáticos**, Anos finais do Ensino Fundamental. Brasília. MEC, 2010.

_____. PNLD 2017: Matemática. **Guia de livros didáticos**, Ensino Fundamental II. Brasília. MEC, 2016.

_____. PNLD 2018: Matemática. **Guia de livros didáticos**, Ensino Médio. Brasília. MEC, 2017.

_____. PNLD 2019: Matemática. **Guia de livros didáticos**, Ensino Fundamental I. Brasília. MEC, 2018b.

CAPACIDADE. In: MICHAELIS, Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa, 07 mar. 2020. Disponível em < <http://michaelis.uol.com.br/busca?r=0&f=0&t=0&palavra=capacidade>>. Acesso em 07 mar. 2020.

CARVALHO, D. G. **Uma Análise da Abordagem da Área de Figuras Planas no Guia de Estudo do Projovem Urbano sob a Ótica da Teoria Antropológica do Didático**. Dissertação (mestrado), UFPE. Recife, 2012.

CARVALHO, J. B. P., LIMA, P. F. (2010). **Escolha e uso do livro didático**. In: Matemática: Ensino Fundamental (Coleção Explorando o Ensino). 1 ed. Brasília: Ministério da Educação: Secretaria da Educação Básica, 2010, v.17, p. 167-200.

CAVALCANTI, R. F. G. **Grandezas e medidas na educação infantil**. Dissertação (mestrado), UFPE. Recife, 2010.

CHAACHOUA, H., BESSOT, A. A noção de variável no modelo praxeológico. In: ALMOLOUD, S.A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (Org.). **A Teoria Antropológica do Didático: Princípios e fundamentos**, 1 ed. Curitiba-PR: CRV, 2018. P. 119-133.

CHAACHOUA, H. Desenvolvimento do modelo praxeológico: T4TEL. 14-22 de fev. de 2019. 61 p. Notas de Aula. Campo Grande-MG

CHEVALLARD, Y. **La Transposition Didactique: Du Savoir Savant au Savoir Ensigné**. Grenoble, La pensée Sauvage, 1991.

_____. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. **Actes de l'UE de la Rochelle**, p. 91-118, 1998.

_____. Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Communication aux **3es Journées d'étude franco-québécoises** (Université René-Descartes Paris 5, 17-18 juin 2002). Paru dans S. Maury S. & M. Caillot (éds), **Rapport au savoir et didactiques**, Éditions Fabert, Paris, 2003, p. 81-104. Disponible em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Approche_anthropologique_rapport_au_savoir.pdf> Acesso em: 26Mai. 2019.

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

DANTE, L. R. **Ápis: Alfabetização Matemática - 1º ano**. 3 ed, São Paulo, editora ática, 2017a.

_____. **Ápis: Alfabetização Matemática - 2º ano**. 3 ed, São Paulo, editora ática, 2017b.

_____. **Ápis: Alfabetização Matemática - 3º ano**. 3 ed, São Paulo, editora ática, 2017c.

_____. **Ápis: Matemática - 4º ano**. 2 ed, São Paulo, editora ática, 2015a.

_____. **Ápis: Matemática - 5º ano**. 2 ed, São Paulo, editora ática, 2015b.

_____. **Projeto Teláris - 6º ano**. 2 ed, São Paulo, editora ática, 2016.

_____. **Projeto Teláris - 7º ano**. 2 ed, São Paulo, editora ática, 2015c.

_____. **Projeto Teláris - 8º ano**. 2 ed, São Paulo, editora ática, 2015d.

_____. **Projeto Teláris - 9º ano**. 2 ed, São Paulo, editora ática, 2015e.

DOUADY, R. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Publications mathématiques et informatique de Rennes**, n. 5, p. 1-50, 1987.

DOUADY, R. ; PERRIN-GLORIAN, M.J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. In: **Educational Studies in Mathematics**. v. 20, n.4, 1989.

ERA COMUM. In: **WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre**. Flórida: Wikimedia Foundation, 2019. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Era_comum&oldid=52343231>. Acesso em: 15 abr. 2019.

EVES, H. Introdução à história da matemática/Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: **Editora da UNICAMP**, v. 844, 2004

FERREIRA, L. de F. D. **Um estudo sobre a transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental: o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro**. Dissertação (mestrado), UFPE. Recife, 2018.

FERREIRA, L. de F. D.; BELLEMAIN, P. M. B. Conflito de paradigmas na transição entre os anos iniciais e finais do ensino fundamental: o caso do perímetro e da área. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 20, n. 3, 2018.

FIGUEIREDO, A. P. N. B. **Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais**. Dissertação (mestrado), UFPE. Recife, 2013.

FREITAS, M. V. C. de. **Um estudo sobre volume de sólidos geométricos em quatro coleções de livros didáticos do ensino médio**. Dissertação (mestrado), UFMS. Campo Grande, 2015.

GASCÓN, J. Os modelos epistemológicos de referência como instrumentos da emancipação didática e da história da matemática. In: ALMOLOUD, S.A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES,

A. (Org.). **A Teoria Antropológica do Didático: Princípios e fundamentos**, 1 ed. Curitiba-PR: CRV, 2018. P. 51-76.

HENRI POINCARÉ. In: **WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre**. Flórida: Wikimedia Foundation, 2021. Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincar%C3%A9>. Acesso em: 25 fev. 2021.

IGNÁCIO, C. de A. N. **Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização: conhecimentos de profissionais da educação em processo de formação continuada**. Dissertação (mestrado). UFPE. Recife, 2016

JESUS, A. G. de. **A motivação para aprender matemática no 9 ano do ensino fundamental: Um estudo do potencial dos materiais manipulativos e da construção de objetos na aprendizagem de área de polígonos e volume de prismas**. Dissertação (mestrado), UFOP. Ouro preto, 2011.

LEÃO, K. W. M. **Abordagem do conceito de volume de sólidos nos livros didáticos: Contribuições para o sucesso dos estudantes do ensino médio no ENEM**. Trabalho de Conclusão de Curso (monografia), UFPE, 2017. Disponível em: <<https://goo.gl/Ktp3VS>>. Acesso em: 03 jun. 2018.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**, vol. 2. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2006.

LIMA, P. F., BELLEMAIN, P. M. B. **Grandezas e Medidas** In: Matemática: Ensino Fundamental (Coleção Explorando o Ensino). 1 ed. Brasília: Ministério da Educação: Secretaria da Educação Básica, 2010, v.17, p. 167-200.

MEDEIROS, M. R. D. **O ensino de áreas e volumes com o uso de objetos manipulativos**. Dissertação (mestrado), UFSCAR. Sorocaba, 2013.

MELO, L. V de.; TELES, R. A. de. Volume do Paralelepípedo Retângulo: um Estudo Sobre Conhecimentos Mobilizados por Alunos do Ensino Médio na Resolução de Situações de Medição. In: **VII EPEM**– UPE, Pernambuco, 2017

MELO, L. V de. **Conhecimentos mobilizados por estudantes do ensino médio em situações que envolvem volume do paralelepípedo retângulo: um estudo sob a ótica das imbricações entre campos conceituais**. Dissertação (mestrado) - UFPE. Recife, 2018.

MENEZES, M. B. D. **Praxeologia do professor e do aluno: uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau**. Tese (doutorado) - UFPE. Recife, 2010.

MOISE, E. E. Elementary geometry from an advanced standpoint. **Addison-Wesley**, 1990.

MORAIS, L. B. de. **Análise da Abordagem de Volume em Livros Didáticos de Matemática para o Ensino Médio**. Dissertação (mestrado) - UFPE. Recife, 2013

OLIVEIRA, G. R. F. **Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental: um estudo de caso**. 2002, 135 F. Dissertação (mestrado) UFPE, Recife, 2002.

_____. **Investigação do Papel das Grandezas Físicas na Construção do Conceito de Volume**. Tese (doutorado) UFPE, Recife, 2007.

PERNAMBUCO. **Parâmetros curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**, 2012.

POINCARÉ, H. O valor da ciência. Rio de Janeiro: **Contraponto**, 1995.

POSSANI, J. F. **Uma sequência didática para a aprendizagem de volume do icosaedro regular**. Dissertação (mestrado), PUC/SP. São Paulo, 2012.

RODRIGUES, W. P. **Uma abordagem conceitual de volumes de sólidos no ensino médio**. Dissertação (mestrado), PUC/SP. São Paulo, 2011.

ROQUE, T. CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de história da matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SAMPAIO, R. S. **Geometria e visualização: ensinando volume com o software GEOGEBRA**. Dissertação (mestrado), UNESP. Rio Claro, 2018.

SANTOS, A. A. D. **Construção e medida de volume dos poliedros regulares convexos com o CABRI 3D: uma possível transposição didática**. Tese (doutorado), PUC/SP. São Paulo, 2016.

SANTOS, M. R. D. **A transposição didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6º ano do ensino fundamental: um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático**. Tese (doutorado), UFRPE. Recife, 2015

SILVA, J. V. G. **Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático**. Dissertação (mestrado), UFPE. Recife, 2011.

VERGNAUD, G. et al. Didactique et acquisition du concept de volume. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 4, n. 1, p. 5-25, 1983.

WHITNEY, H. The mathematics of physical quantities, Part I, **American Mathematical Monthly**, v. 75, 1968a, p. 115-138.

_____. The mathematics of physical quantities, Part II, **American Mathematical Monthly**, v. 75, 1968b, p. 227-256.