Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós Graduação em Matemática

Aldryn Oscar Aparcana Orellana

Existência local de soluções para um problema parabólico semilinear em espaços de Lebesgue

Recife

2020

Aldryn Oscar Aparcana Orellana

Existência local de soluções para um problema parabólico semilinear em espaços de Lebesgue

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: Miguel Fidencio Loayza Lozano

Recife

2020

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

O66e Orellana, Aldryn Oscar Aparcana
Existência local de soluções para um problema parabólico semilinear em espaços de Lebesgue / Aldryn Oscar Aparcana Orellana. – 2020.
37 f.

Orientador: Miguel Fidencio Loyaza Lozano.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2020.
Inclui referências.

1. Análise matemática. 2. Equação de calor semilinear. I. Lozano, Miguel Fidencio Loyaza (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2020 - 40

ALDRYN OSCAR APARCANA ORELLANA

EXISTÊNCIA LOCAL DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA PARABÓLICO SEMILINEAR EM ESPAÇOS DE LEBESGUE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 28/02/2020

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Miguel Fidencio Loayza Lozano (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof. Dr. Cilon Valdez Ferreira Perusato (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof. Dr. Clessius Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

RESUMO

Consideramos o estudo da equação de calor semilinear escalar $u_t - \Delta u = f(u)$, onde $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ é uma função contínua e não decrescente, mas não precisa ser convexo nem verifique qualquer condição do tipo lipschitz. Caracterizamos completamente as funções f para as quais a equação tem uma solução local limitada no espaç $L^q(\Omega)$ para toda condição inicial não negativa $u_0 \in L^q(\Omega)$, quando $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é um domínio limitado com condições de frontera de Dirichlet. Para $q \in (1, \infty)$ isso é verdadeiro se, e somente se, $\limsup_{s\to\infty} s^{-(1+2q/d)} f(s) < \infty$; e para $q = 1$ se e somente se $\int_1^\infty s^{-(1+2/d)} F(s) ds < \infty$, onde $F(s) = \sup\limits_{1\le t\le s} f(t)/t$. Isso mostra pela primeira vez a importância da não linearidade do modelo clasico $f(u) = u^{1+2q/d}$ é verdadeiramente o "caso limite" quando $q \in (1, \infty)$, mas não é verdade quando assumimos o valor $q = 1$. Os mesmos resultados de caracterização para o caso limitado são válidos para a equação colocada em todo o espaço $\mathbb{R}^d$, sem a condição de contorno de Dirichlet, assumindo a condição adicional $\limsup_{s\to 0} f(s)/s < \infty$.

Palavras-chave: Equação de calor semilinear. Problema com Dirichlet. Existência local. Não existencia. Explosão instantânea. Dirichlet kernel de calor.

ABSTRACT

We consider the semilinear scalar heat equation $u_t - \Delta u = f(u)$, where $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ is a continuous and non-decreasing function, but it does not need to be a convex function. We characterise completely those functions f for which the equation has a local bounded solution in the space $L^q(\Omega)$ for every non-negative initial data $u_0 \in L^q(\Omega)$, when $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is a bounded domain with Dirichlet boundary conditions. For $q \in (1, \infty)$ this holds if and only if $\limsup_{s\to\infty} s^{-(1+2q/d)} f(s) < \infty$; and for $q = 1$ if and only if $\int_1^\infty s^{-(1+2/d)} F(s) ds < \infty$, where $F(s) = \sup\limits_{1\le t\le s} f(t)/t$. This show for the first time that the nonlinearity model $f(u) = u^{1+2q/d}$ is truly the "boundary case" when $q \in (1, \infty)$, but that this is not true when we assume $q = 1$. The same characterisation results for the bounded case hold for the equation posed on the whole space $\mathbb{R}^d$, without the Dirichlet boundary conditions, assuming the additional condition $\lim_{s\to 0} f(s)/s < \infty$.

Keywords: Semilinear heat equation. Dirichlet problem. Local existence. Non-existence. Instantaneous blow-up. Dirichlet heat kernel.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho trata da existência local de soluções da equação de calor semilinear escalar

$$u_t - \Delta u = f(u), \qquad u(0) = u_0 \geq 0, \tag{1.1}$$

em todo o espaço $\mathbb{R}^d$ e em domínios limitados suaves $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com condições de contorno de Dirichlet, quando $u_0 \in L^q(\Omega), 1 \leq q < \infty$. Durante e sem perda de generalidade, assumimos que Ω contém a origem. Fornecemos uma solução completa para o problema clássico de caracterizar as funções f para as quais (1.1) possui uma solução local limitada em $L^q(\Omega)$ para todos os dados iniciais não negativos em $L^q(\Omega)$. Talvez seja surpreendente que esses resultados ainda não estejam disponíveis na literatura, mas não estão; nem nossas caracterizações seguem o que foi provado anteriormente sobre (1.1). De fato, a maioria dos resultados anteriores se concentra na não linearidade específica $f(u) = u^p$,com tratamentos mais gerais assumindo que f é convexo. Não impomos restrições nesse artigo, exigindo apenas que $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ seja contínuo e não-decrescente.

A principal contribuição deste trabalho é identificar a caracterização correta para o caso $q > 1$ e $q = 1$. Dadas as premissas "corretas" sobre f, os métodos de prova de existência/não-existência não são difíceis, mas ainda requerem algum cuidado. Os resultados da inexistência dependem de limites inferiores no núcleo de calor e, em particular em limites inferiores para a ação do semigrupo de calor em condições iniciais iguais à função característica de uma bola. De uma maneira muito imprecisa, eles mostram que, para $q > 1$, a equação do modelo com $f(u) = u^p$ "conta toda a história", mas esse não é decididamente o caso quando $q = 1$.

A localização local de (1.1) para dados suaves se enquadra no escopo da teoria padrão de equações parabólicas que remonta a meio século (LADYZENSKAJA; SOLONNIKOV; URAL'CEVA, 1968). No início dos anos 80, a teoria da boa postura foi estendida por (WEISSLER, 1979; WEISSLER, 1980a; WEISSLER, 1981) incluir dados iniciais em espaços de Lebesgue, com um termo de origem local de Lipschitz f satisfying a Lipschitz bound of the form

$$|f(u) - f(v)| \leq C|u - v|(1 + |u|^{p-1} + |v|^{p-1}) \tag{1.2}$$

fornecendo condições suficientes para a existência local (e singularidade).

Em particular, nesses trabalhos e em muitos trabalhos subsequentes, a atenção foi quase exclusivamente focada no modelo canônico com $f(u) = |u|^{p-1}u$ introduzido por Fujita (1966). Por essa não linearidade específica, dada a $q \in (1, \infty)$, os resultados pioneiros de (WEISSLER, 1979; WEISSLER, 1980a; WEISSLER, 1981), juntamente com os de Giga (1986) e Brezis e Cazenave (1996), identificam um expoente crítico $p* = 1 + \frac{2q}{d}$

de tal modo que (1.1) com f satisfatório (1.2) está localmente bem posicionado em L^q se e apenas se $p \leq p*$; para $p > p*$ pode-se encontrar dados iniciais em L^q para o qual não há solução local. Enquanto por $q > 1$ a equação é bem comportada quando $p = p*$, para o caso $q = 1$ Celik e Zhou (2003) mostraram que, para o expoente crítico $p* = 1 + \frac{2}{d}$ tem L^1 dados iniciais para os quais não há solução (resolução de um problema apresentado em (BREZIS; CAZENAVE, 1996)).

Essa teoria foi estendida de várias maneiras. Uma direção natural era estender a teoria para classes de dados mais fracas (por exemplo, condições iniciais com valor de medida), ver Brézis e Friedman (1981), por exemplo. Nesse sentido, Baras e Pierre (1985) obtiveram uma condição necessária e suficiente na condição inicial para a existência local de soluções quando f é convexo.

Uma segunda direção se concentra na explosão de tempo finito versus a existência global. Na maioria dessas análises, a forma particular da não linearidade Fujita $f(u) = |u|^{p-1}u$ ou uma suposição de convexidade relacionada desempenha um papel crucial, veja por exemplo [1, 4, 7, 8, 9, 12, 17]. Por exemplo, a homogeneidade de u^p facilita o uso de soluções de similaridade - essa invariância em escala também torna transparente o papel do expoente crítico, enquanto que para um processo convexo geral f pode-se usar a desigualdade de Jensen. Observe que não consideramos a explosão em tempo finito aqui, mas a inexistência local, ou seja, "explosão imediata" em algum sentido.

No entanto, a maioria desses resultados se decompõe se considerarmos apenas que f é monotônico. Nesse caso, para descrever completamente as condições de f garantindo que uma condição inicial em L^q se surgir uma solução local, precisamos entender melhor o delicado equilíbrio entre a ação de suavização do fluxo de calor e o efeito inverso da fonte crescente. Neste artigo, fornecemos, para cada $q \in [1, \infty)$, uma caracterização precisa daqueles f para o qual a equação (1.1) tem soluções locais delimitadas em $L^q(\Omega)$ para todos os dados iniciais não negativos $u_0 \in L^q(\Omega)$. Observe que isso inclui o estojo delicado $q = 1$.

Primeiro, mostramos que para $q \in [1, \infty)$, e se

$$\limsup_{s\to\infty} s^{-\left(1+\frac{2q}{d}\right)} f(s) = \infty \tag{1.3}$$

então existe um não negativo $u_0 \in L^q(\Omega)$ para qual equação (1.1) não possui uma solução local delimitada em $L^q(\Omega)$. Desde a existência de um limite finito em (1.3) implica que $f(s) \leq C\left(1 + s^{1+\frac{2q}{d}}\right)$ por alguma constante C, monotonicidade de soluções juntamente com resultados clássicos para (1.4) yields local produz existência local neste caso para $q \in (1, \infty)$. Segue (ver Teorema (3.2) essa equação (1.1) tem pelo menos um local L^q solução vinculada a todos os aspectos não negativos $u_0 \in L^q(\Omega)$ se e apenas se

$$\limsup_{s\to\infty} s^{-\left(1+\frac{2q}{d}\right)} < \infty.$$

A “moral” disso é que, para $q \in (1, \infty)$, o problema do modelo com $f(s) = s^p$ em certo sentido, conta toda a história, uma vez que o caso crítico reside precisamente na fronteira entre existência / não existência local. (Essa ideia talvez sempre tenha sido implícita nas discussões da literatura, mas não teve uma prova rigorosa até agora.)

O caso $q = 1$ é mais delicado e é conhecido por ser significativamente mais desafiador. Como observado acima, Celik e Zhou [6] mostraram que para a equação canônica

$$u_t - \Delta u = u^p \tag{1.4}$$

com $p = p* = 1 + \frac{2}{d}$ existem dados iniciais não negativos em $L^1(\mathbb{R}^d)$ e $L^1(\Omega)$ para o qual não há solução local. Pode-se, portanto, supor que, para $q = 1$ a condição em (1.3) can ser enfraquecido para

$$\lim_{s\to\infty} \sup s^{-\left(1+\frac{2q}{d}\right)} f(s) > 0$$

(ou seja, o limite é finito, mas estritamente positivo) e ainda garante a inexistência de alguns dados não negativos $u_0 \in L^1(\Omega)$. De fato, significativamente mais é verdade: mostramos que a condição

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k^{-\left(1+\frac{2}{d}\right)} f(s_k) = \infty$$

para alguma sequência tal que $s_{k+1} \geq \theta s_k (\theta > 1)$ é suficiente para um resultado inexistente. Em particular, se f satisfaça esta condição, existem dados não negativos em $L^1(\Omega)$ para o qual não há solução com $u(t) \in L^1(\Omega)$ para qualquer $t > 0$.

Para qualquer particular f essa condição de série divergente parece difícil de verificar na prática, então mostramos que é equivalente à condição integral

$$\int_1^{\infty} s^{-\left(1+\frac{2}{d}\right)} F(s) ds = \infty, \quad \text{onde} \quad F(s) = \sup_{1\leq t\leq s} \frac{f(t)}{t}. \tag{1.5}$$

Notavelmente, se a integral em (1.5) é finito, então uma versão de um argumento devido a Sierzega [20] garante a existência local de um L^1 solução vinculada a todos os aspectos não negativos $u_0 \in L^1(\Omega)$ (de fato, a solução está em $L^\infty(\Omega)$ para cada $t > 0$). Como conseqüência, obtemos nosso segundo resultado principal (Corolário (3.3)), ou seja, essa equação ((1.1) tem pelo menos um local L^1 solução vinculada a todos os aspectos não negativos $u_0 \in L^1(\Omega)$ se e apenas se

$$\int_1^{\infty} s^{-\left(1+\frac{2}{d}\right)} F(s) ds < \infty, \quad \text{onde} \quad F(s) = \sup_{1\leq t\leq s} \frac{f(t)}{t}.$$

Aqui a “moral” é que o problema do modelo *não* conte a história toda.

Observamos aqui que não tratamos a questão da singularidade neste papel, mas concentre-se apenas na existência local. Por esse motivo, não exigimos nenhuma suposição do tipo Lipschitz em f (tal como (1.2)).

O artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, provamos alguns limites inferiores preliminares em soluções da equação do calor para uma condição inicial que é a função característica de uma bola; essas são as principais estimativas que usamos em nossas provas. A seção 3 contém os resultados para $q > 1$, com a Seção 4 tratando $q = 1$. Na Seção 5, discutimos o problema colocado em todo o espaço e em um domínio limitado com as condições de contorno de Neumann, e terminamos com uma breve recapitulação e discussão de problemas em aberto.

2 PRELIMINARES

2.1 Espaços L^p

Definição 2.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$. Definimos o seguinte conjunto,*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } |f|^p \text{ é integrável }\}.$$

Este espaço equipado com seguinte norma

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right]^{1/p}.$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = \infty$, definimos o seguinte conjunto

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e essencialmente limitadas em } \Omega\}.$$

Este espaço munido com a seguinte norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \sup ess_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

é um espaço de Banach.

Teorema 2.1 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^1(\Omega)$ tal que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ em quase todo ponto de Ω e $\sup_n \int_\Omega f_n < \infty$, então $f_n(x)$ converge para $f(x)$ para quase todo ponto em Ω. Aém disso, $f \in L^1(\Omega)$ e $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_(x) - f(x)|dx = 0$.*

Teorema 2.2 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^1(\Omega)$ tal que $f_n(x) \to f(x)$, quando $n \to \infty$, em quase todo ponto em Ω, e existe uma função g que pertence a $L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ em quase todo ponto de Ω e para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f \in L^1(\Omega)$ e $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_(x) - f(x)|dx = 0$.*

Definição 2.2. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $u|_K \in L^p(K)$ para todo compacto $K \subset \Omega$.*

Sejam I um intervalo na reta e X um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_X$.

Definição 2.3. *Seja $p \in [1, \infty]$ e I um intervalo da reta. Definimos por $L^p(I, X)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : I \to X$ tais que a função $t \to \|f(t)\|_X$ pertence a $L^p(I)$.*

Para $f \in L^p(I,X)$, definimos no caso $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \left\{ \int_I \|f(t)\|_X^p \right\}^{1/p}.$$

No caso $p = \infty$ definimos

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \sup_{t \in I} ess \|f(t)\|_X.$$

Denotamos por:

(i) $C^k(I,X)$, o espaço formado pelas funções que são k vezes continuamente diferenciáveis sobre I com valores em X.

(ii) $\mathcal{D}(I,X)$, o conjunto de todas as funções $f: I \to X$ com suporte compacto em I, equipado com a topologia da convergência uniforme de todas as derivadas sobre subintervalos compactos de I.

(iii) $L^p_{loc}(I,X)$, o espaço das funções mensuráveis $f: I \to X$ tais que $f|_J \in L^p(J,X)$ para qualquer subintervalo limitado J de I.

(iv) $C_0(I,X)$, o fecho do conjunto $\mathcal{D}(I,X)$ em $L^\infty(I,X)$.

2.2 Semigrupos

Seja X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$.

Definição 2.4. *Um operador $A: D(A) \subset X \to X$, diz-se dissipativo se*

$$\|u - \lambda A u\| \geq \|u\|$$

para todo $u \in D(A)$ e $\lambda > 0$.

Definição 2.5. *Um operador $A: D(A) \subset \to X$, diz-se m-dissipativo se*

- *A é dissipativo;*
- *para todo $\lambda > 0$ e $f \in X$, existe $u \in D(A)$ tal que $u - \lambda A u = f$.*

Definição 2.6. *Um semigrupo de operadores lineares em X é uma família $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ tal que*

1. *$S(0) = I_X$, onde I_X é a identidade definida em X;*
2. *$S(s+t) = S(s)S(t)$, para todo $t, s \geq 0$.*

Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, além de cumprir as propriedades (i) e (ii), satisfaz

$$\lim_{t\to 0}\|S(t)x - x\| = 0,$$

para cada $x \in X$, então é chamado de semigrupo fortemente contínuo ou que é um C_0-semigrupo.

Definição 2.7. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares. Seu gerador infinintesimal é o operador $A : D(A) \subset X \to X$, onde*

$$D(A) = \left\{x \in X : \lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)x - x}{t}\ \exists\right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)x - x}{t} = \frac{dS(t)x}{dt}|_{t=0},$$

para $x \in D(A)$.

A teoría de semigrupo está associada ao estudo do seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \\ \qquad u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um gerador de C_0-semigrupo. Esta associação é dada da seguinte forma: para cada $u_0 \in X$, temos uma solução $u(t) = S(t)u_0$ para o problema (2.1).

Definição 2.8. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ semigrupo fortemente contínuo. Se $\|S(t)| \ \leq M$, para algum $M \geq 1$, então é chamado de uniformentemente limitado.*

Se $M = 1$, então $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é dito um semigrupo de contrações.

Teorema 2.3 (Hille-Yosida-Philips)**.** *Suponhamos que $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- *A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contração $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.*
- *A é m-dissipativo e $\overline{D(A)} = X$.*

2.3 Equação do Calor

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. Consideremos o seguinte problema

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = 0,\ \ (x,t) \in \Omega \times [0,\infty), \tag{2.2}$$

onde $\Delta = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é o operador Laplaciano.

A equação (2.2) é chamada de equação do calor homogênea.

Os seguintes resultados são conhecidos para o problema (2.2) :

- Quando a condição inicial $u_0 \in H^{-1}(\Omega)$, então o problema (2.2) possui uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$.

- Quando a condição inicial $u_0 \in L^p(\Omega)$, então temos os seguintes resultados

  - No caso $p = 2$, o problema (2.2) tem uma solução $u \in D(\Delta) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$.
  - No caso $1 < p < \infty$, o problema (2.2) tem uma solução $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.
  - No caso $p = 1$, o problema (2.2) tem uma solução $u \in \{u \in W_0^{1,1}(\Omega); \Delta u \in L^1(\Omega)\}$.
  - No caso $p = \infty$, o problema (2.2) tem uma solução $u \in \{u \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^\infty(\Omega)\}$.

A solução do problema linear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \geq 0, \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

pode ser expressado da seguinte forma

$$[S(t)u_0](x) = \int_\Omega K_\Omega(x,y;t)u_0(y)dy, \tag{2.3}$$

onde $u_0 \in L^1(\Omega)$ e K_Ω é o núcleo de calor de Dirichlet em Ω. Do Teorema 2 e dos Lemas 8 e 9 de (BERG, 1990a), sabemos também que

$$K_\Omega(x,y;t) \geq \exp(-N^2\pi^2 t/4\delta^2)(4\pi t)^{-N/2}\exp(-|x-y|^2/4t), \tag{2.4}$$

para $t > 0$, se o segmento de linha que une x e y estiver a uma distância de pelo menos δ de $\partial\Omega$.

3 RESULTADOS

3.1 Estimativas por abaixo em soluções da equação de calor

Um ingrediente importante dos nossos argumentos é o seguinte, simples, que limita inferior a ação de equação da função de calor na função Característica de uma bola euclidiana. Nós escrevemos $B_r(x)$ para a bola $\mathbb{R}^d$ de raio r centrado em x, denotado por X_r a função característica de $B_r := B_r(0)$, e use ω_d para o volume da bola unitária $\mathbb{R}^d$.
A solução da equação do calor em Ω com condições de contorno de Dirichlet,

$$u_t - \Delta u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \in L^1(\Omega) \tag{3.1}$$

pode ser dada em termos do Kernel de calor Dirichlet K_Ω pela expressão

$$u(x,t) = [S(t)u_0](x) := \int_\Omega K_\Omega(x,y;t)u_0(y)dy.$$

As provas dos resultados desta seção usam o seguinte limite inferior no K_Ω : se o segmento de linha se unir x e y é uma distância pelo menos δ a partir de $\partial\Omega$, então o núcleo de calor Dirichlet $K_\Omega(x,y;t)$ é delimitada abaixo pelo núcleo de calor gaussiano $\mathbb{R}^d$,

$$K_\Omega(x,y;t) \geq e^{\frac{-d^2\pi^2 t}{4\delta^2}}(4\pi t)^{\frac{-d}{2}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} \quad \text{for all} \quad t > 0.$$

(Veja van den Berg (BERG, 1990b), Teorema 2 e Lemas 8 e 9.)

Lema 3.1. *(BERG, 1990c) Existe uma constante absoluta $c_d \in (0,1)$, isso depende apenas de d, tal que para cada $r > 0$; para $B_{r+\delta} \subset \Omega$,*

$$S(t)X_r \geq c_d \left(\frac{r}{r+\sqrt{t}}\right)^d X_{r+\sqrt{b}}$$

para tudo $0 < t \leq \delta^2$,

$$S(t)X_r \geq c_d \left(\frac{r}{r+\sqrt{t}}\right)^d X_{r+\sqrt{t}} \tag{3.2}$$

for all $0 < t \leq \delta^2$.

Demonstração. Para cada x tal que $d(x, \partial\Omega) \geq \delta$ lestimar abaixo em (3.1) implica que para $0 < t \leq \delta^2$

$$
\begin{aligned}
[S(t)X_r](x) =& \int_{B_r(0)} K_\Omega(x, y, t) dy \\
\geq& \int_{B_r(0)} e^{-\frac{d^2\pi^2 t}{4\delta^2}} (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \\
\geq& e^{-\frac{d^2\pi^2}{4}} (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int_{B_r(0)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy
\end{aligned}
$$

a ultima integral é radialmente simetrica e diminui con $|x|$ e assim por $|x| \leq r + \sqrt{t}$ escolhendo um vetor unidade u podemos escrever

$$
\begin{aligned}
[S(t)X_r](x) \geq& e^{-\frac{d^2\pi^2}{4}} (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int_{B_r((r+\sqrt{t})u)} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} dz \\
=& e^{-\frac{d^2\pi^2}{4}} \pi^{-\frac{d}{2}} \int_{B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{2\sqrt{t}}\right)u\right)} e^{-|w|^2} dw
\end{aligned}
$$

observe que, se $e \geq r$ então

$$
B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2\sqrt{t}}\right) u\right) \subseteq B_{\frac{e}{2\sqrt{t}}}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{e}{2\sqrt{t}}\right) u\right)
$$

segue-se que para $r \geq \sqrt{t}$ nós temos

$$
B_{\frac{1}{2}}(u) \subseteq B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2\sqrt{t}}\right) u\right)
$$

logo

$$
[S(t)X_r](x) \geq e^{-\frac{d^2\pi^2}{4}} \pi^{-\frac{d}{2}} \int_{B_{\frac{1}{2}}(u)} e^{-|w|^2} dw =: c'_d
$$

por outro lado, se $\frac{r}{\sqrt{t}} \leq 1$ então

$$
\begin{aligned}
[S(t)X_r](x) \geq& e^{-\frac{d^2\pi^2}{4}} \pi^{-\frac{d}{2}} \operatorname{vol}\left(B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2\sqrt{t}}\right) u\right)\right) e^{-\frac{t}{2r}} \\
\geq& e^{-\frac{d^2\pi^2}{4}} \pi^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{r}{2\sqrt{t}}\right)^d e^{-\frac{9}{4}} = c''_d \left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)^d
\end{aligned}
$$

tomando $c_d = \min(c'_d, c''_d)$ temos

$$
[S(t)X_r](x) \geq c_d \left(\frac{r}{\max(r, \sqrt{t})}\right)^d \geq c_d \left(\frac{r}{r + \sqrt{t}}\right)^d
$$

□

Usaremos esse resultado na forma de um dos dois corolários simples a seguir.

Corolário 3.1. *(LAISTER et al., 2016) Existe uma constante ansoluta $\alpha_d > 0$ dependendo apenas de d, tal que para qualquer $r, \delta > 0$ para o qual $B_{r+\delta} \subset \Omega$,*

$$
\int_\Omega S(t)X_r dx \geq \alpha_d r^d
$$

para todo $0 < t \leq \min(\delta^2, r^2)$.

Demonstração. Integrando la desigualdade (3.2) sobre Ω

$$\begin{aligned}\int_\Omega S(t)X_r dx \geq & c_d \left(\frac{r}{r+\sqrt{t}}\right)^d \int_\Omega X_{r+\sqrt{t}} dx \\ = & c_d \left(\frac{r}{r+\sqrt{t}}\right)^d \operatorname{vol} B(0, r+\sqrt{t}) \\ = & c_d \left(\frac{r}{r+\sqrt{t}}\right)^d (r+\sqrt{t})^d \operatorname{vol} B_1(0) \\ = & w_d c_d r^d.\end{aligned}$$

□

Corolário 3.2. *(LAISTER et al., 2016) Existe uma constante absoluta $B_d > 0$ dependendo apenas de d, tal que para qualquer $r, \delta > 0$ para o qual $B_{r+\delta} \subset \Omega$,*

$$S(t)X_r \geq B_d X_{r+\sqrt{t}}$$

para todo $0 < t \leq \min(\delta^2, r^2)$.

3.2 Dados iniciais em $L^q(\Omega)$, $q \in (1, \infty)$

Dadas essas preliminares, podemos provar nosso primeiro resultado inexistente. Tomamos a seguinte definição de (QUITTNER; SOUPLET, 2007) como nossa (esssencialmente mínima) definição de uma solução de (1). Observe que qualquer solução clássica ou leve é uma solução integral local no sentido desta definição (QUITTNER; SOUPLET, 2007, p. 77-78)

Definição 3.1. *(LAISTER et al., 2016) Dado $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ e $u_0 \geq 0$ dizemos que u é uma solução integral local de (1) em $[0, T)$ e se $u : \Omega \times [0, T) \longrightarrow [0, \infty]$ é mensurável, finito em quase todos os lugares e satisfaz*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s) f(u(s)) ds \tag{3.3}$$

quase todo lugar $\Omega \times [0, T)$.

Estaremos interessados em soluções com dados iniciais não negativos $u_0 \in L^q(\Omega)$ que permanecem delimitados em $L^q(\Omega)$. Para este fim, fazemos a seguinte definição.

Definição 3.2. *(WEISSLER, 1980b) dizemos que você é um local L^q solução de (1) se u é uma solução integral local em $[0, T)$ para alguns $T > 0$ e $u \in L^\infty((0, T); L^q(\Omega))$. Se todo não negativo $u_0 \in L^q(\Omega)$ dá origem a um local L^q solução, então dizemos que (1) tem a propriedade de existência local em $L^q(\Omega)$.*

Agora mostramos que existem condições iniciais não negativas em $L^q(\Omega)$ para o qual não há local L^q solução se f satisfaz a condição de crescimento assintótico em (3.4). Essa condição é modelada na condição mais forte

$$\lim_{s\to\infty} \inf s^{-\left(\frac{1+2q}{d}\right)} f(s),$$

Como en Weissler (WEISSLER, 1980a) (Teorema 5, Corolarios 5.1 y 5.2), no requerimos que f sea continuo.

Teorema 3.1. *Sea $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ não decrecente. Si $q > 1$ e*

$$\lim_{s\to\infty} \sup s^{-\left(1+\frac{2q}{d}\right)} f(s) = \infty \tag{3.4}$$

então existe $u_0 \in L^q(\Omega)$ com $u_0 \geq 0$ tal que

$$u_t - \Delta u = f(u), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(0) = u_0 \tag{3.5}$$

Não tem uma solução local.

Demonstração. Sea $p = 1 + \frac{2q}{d}$. Se sequege (3.4) que podemos escolher uma sequencia ϕ_k tal que $\phi_k \geq k$ e $f(\phi_k) \geq \phi_k^p e^{\frac{k}{q}}$. Sea $r_k = \epsilon\phi^{-\frac{q}{d}} k^{-\frac{2q}{d}}$, $u_k = \beta_d^{-1}\phi_k X_{r_k}$ onde β_d é a constante do corolário 3.2 e ϵ constante suficientemente pequeña com $B_{2rk} \subset \Omega$ para cada k. Ademais definamos

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

logo note que

$$\|u_k\|_{L^q} = \beta_d^{-1}\epsilon^{\frac{d}{q}} k^{-2}$$

então

$$\begin{aligned}\|u_0\|_{L^q} \leq & \sum_k \|u_k\|_{L^q} = \sum_k \beta_d^{-1}\epsilon^{\frac{d}{q}} k^{-2} \\ \leq & \beta_d^{-1}\epsilon^{\frac{d}{q}} \sum_k k^{-2} < \infty\end{aligned}$$

logo

$$u_0 \in L^q(\Omega)$$

Si $u(t)$ es solugtdão de (3.5) , então

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s) f(u(s)) ds$$

para $u \geq 0$ e $f \geq 0$ logo

$$u(t) \geq S(t)u_0 \geq S(t)u_k$$

para cada k fijo

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q}^q \geq \int_{B_{r_k}} |u(t)|^q dx \geq & \int_{B_{r_k}} \beta_d^q r_k^{2q} f(\phi_k)^q dx \\ \geq & \beta_d^q r_k^{2q} f(\phi_k)^q \operatorname{vol} B_{r_k} \\ = & \beta_d^q r_k^{2q} f(\phi_k)^q r_k^d w_d \\ = & c r_k^{d+2q} f(\phi_k)^q \\ = & c(\epsilon \phi_k^{-\frac{q}{d}} k^{-\frac{2q}{d}})^{d+2q} \phi_k^{pq} e^k \\ = & c k^{-\frac{2q}{d}(d+2q)} e^k\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to\infty} \|u\|_{L^q}^q = \infty \Longrightarrow \|u\|_{L^q} = \infty$$

logo u não é um elemento de $L^\infty((0,T), L^q(\Omega))$ para cada $T > 0$. $\square$

Observamos acima que Laister, Robinson e Sierżęga (2013) mostraram que sob condições mais fortes

$$\lim_{s\to\infty} \sup s^{-\gamma} f(s) = \infty, \quad \gamma > q\left(1 + \frac{2}{d}\right)$$

existem dados iniciais não negativos em $L^q(\Omega)$ para o qual qualquer solução local não está presente $L^1_{loc}(\Omega)$ para todos pequenos $t > 0$. É uma questão em aberto interessante se essa explosão forte ainda ocorre sob a condição mais fraca do Teorema (3.1).

Uma combinação do resultado da explosão do Teorema 3.3 e resultados clássicos para a equação de Fujita agora fornece nosso primeiro teorema de caracterização, sobre a existência local em $L^q(\Omega)$ quando $q > 1$.

Teorema 3.2. *Seja $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ não decrecente e continua. Si $q > 1$ então* (3.5) *brene la propiedad de existencia local em $L^q(\Omega)$ se esomente se $\lim_{s\to\infty} \sup s^{-\left(1+\frac{2q}{d}\right)} f(s) < \infty$*

Demonstração. Para o teorema (3.5) t, resta apenas provar que (3.5) tem solução local limitada em $L^q(\Omega)$ quando é cumprida $\lim_{s\to\infty} \sup s^{-\left(1+\frac{2q}{d}\right)} f(s) < \infty$.
De fato, dado

$$\lim_{s\to\infty} \sup s^{-p} f(s) < \infty, \qquad p = 1 + \frac{2q}{d}$$

segue-se que há uma constante c tal que

$$f(s) \leq c(1 + s^p)$$

logo por corolário (Corolário (3.2) em Weissle (WEISSLER, 1980a) se garante que existe solucão "v" de (3.5) tal que $v \in L^\infty((0,T), L^q(\Omega))$, então

$$v(t) = S(t)u_0 + c\int_0^t S(t-\sigma)(1 + v^p) d\sigma \geq S(t)u_0 + c\int_0^t S(t-\sigma) f(v) dv$$

portanto v é supersolucão, logo existe solucão local de (3.5) (teorema em Robinson e Sierzega). $\square$

Pode-se reformular o resultado acima em termos de quantidade

$$\gamma* = \sup\{\gamma \geq 0 : \quad \lim_{s\to\infty} \sup s^{-\gamma} f(s) = \infty\}.$$

Com $q* = \frac{d(\gamma*-1)}{2}$ equação (3.5) não possui existência local para todos os dados iniciais não negativos em L^q para $q < q^*$, mas faz por $q > q*$. Nesse caminho q^* define um "expoente crítico" para a classe geral de variáveis não decrescentes f nós consideramos aqui. Providenciou que $q^* > 1$ existência / inexistência local no espaço crítico L^{q*} é determinado pelo comportamento de

$$\lim_{s\to\infty} \sup s^{-\gamma*} f(s).$$

Quando $q* = 1$ a situação é mais delicada e um tanto surpreendente.

3.3 Dados iniciais em $L^1(\Omega)$

3.3.1 Uma condição de não existência de uma solução local L^1 solução

Como acabamos de observar, o comportamento das soluções para dados iniciais em $L^1(\Omega)$ é mais delicado. Celik e Zhou (2003) mostraram que quando $f(s) = s^{1+\frac{2}{d}}$, existem dados iniciais em $L^1(\Omega)$ para o qual não há local L^1 solução. Isso sugere que quando $q = 1$ a exigência do teorema (3.1) pode ser enfraquecido. De fato, a exigência de que a soma em (15) diverja é claramente mais fraca que a condição assintótica,

$$\lim_{s\to\infty} \sup s^{-(1+\frac{2}{d})} f(s) > 0;$$

pode ocorrer uma explosão para certos f para os quais o lim sup é zero, como $f(s) = \frac{s^{1+\frac{2}{d}}}{log(e+s)^\beta}$ com $0 < \beta \leq 1$. Em particular, o crescimento algébrico $f(s) = s^{1+\frac{2}{d}}$ de fato, não é o verdadeiro "limite" para L^1 explodir. Examinamos este exemplo com mais detalhes na Seção 4.4.

Observe que na declaração do teorema a seguir não incluímos a hipótese de que f é contínuo; isso não é necessário para este resultado de explosão.

Teorema 3.3. *Suponha que $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é não decrescente e existe uma sequência $\{s_k\}$ de tal modo que*

$$s_{k+1} \geq \theta s_k, \quad \theta > 1,$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k^{-p} f(s_k) = \infty, \tag{3.6}$$

onde $p = 1 + \frac{2}{d}$. Existe uma condição inicial não negativa $u_0 \in L^1(\Omega)$ de tal modo que

$$u_t - \Delta u = f(u), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0 \tag{3.7}$$

não possui uma solução integral local que permaneça em $L^1_{loc}(\Omega)$ para $t > 0$ (Assim, em particular, não local L^1 solução existe).

Antes de apresentarmos a prova adequadamente, é instrutivo apresentar um argumento muito simplificado para o "L^1-like" dados iniciais $u_0 = \delta_0$, uma função delta centralizada na origem (esses dados são L^1-like tão longe quanto $\int \delta_0 = 1$). Para simplificar ainda mais o argumento, colocamos o problema em todo o espaço $\mathbb{R}^d$.

Uma vez que neste caso

$$[S(s)\delta_0](x) = (4\pi s)^{\frac{-d}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4s}}$$

segue-se que para cada k,

$$S(s)\delta_0(x) \geq \phi_k X_{\sqrt{s}} \quad \text{for} \quad s \leq t_k := c\phi_k^{\frac{-2}{d}}$$

(onde $c = \frac{e^{\frac{-1}{2d}}}{4\pi}$).

Agora para qualquer $t > 0$, usando o fato de que $\int_{\mathbb{R}^d} S(t)X_r = \omega_d r^d$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^t S(t-s)f(S(s)\delta_0)ds \geq & \int_{\mathbb{R}^d}\sum_k \int_{t_{k+1}}^{t_k} S(t-s)f(S(s)\delta_0)ds \\
\geq & \sum_k f(\phi_k)\int_{t_{k+1}}^{t_k}\int_{\mathbb{R}^d} S(t-s)X_{\sqrt{t}}ds \\
= & \omega_d \sum_k f(\phi_k)\int_{t_{k+1}}^{t_k} d^{\frac{d}{s}}ds \\
= & c\omega_d \sum_k f(\phi_k)(t_k^{\frac{(2+d)}{2}} - t_{k+1}^{\frac{2+d}{2}}) \\
(t_k = c\phi_k^{\frac{-2}{d}}) \qquad \geq & c'\omega_d \sum_k f(\phi_k)(\phi_k^{-p} - \phi_{k+1}^{-p}) \\
(\phi_{k+1} \geq \theta\phi_k) \qquad \geq & c'(1-\theta^{-p})\omega_d \sum_k f(\phi_k)\phi_k^{-p} = \infty,
\end{aligned}$$

usando (3.6). A prova do teorema (3.3) seguirá linhas muito semelhantes.

Demonstração. (Teorema (3.3)) Definir $\phi_k = c_d^{-1}s_k$, e definir

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2}\alpha_n^d X\left(\frac{1}{\alpha_n}\right) \quad \text{where} \quad \alpha_n = (n^2\phi_{\zeta_n})^{\frac{1}{d}},$$

com ζ_n para ser escolhido mais tarde. Deixei

$$u_0(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n(x),$$

com n_0 escolhido de modo que

$$\frac{1}{\alpha_{n_0}} < \delta_0 := \frac{1}{2}\inf_{x\in\partial\Omega}|x|.$$

Observe que $\frac{1}{\alpha_n} \leq \delta_0$ e entao $B_{\frac{1}{\alpha_n}+\delta_0} \subset \Omega$ para todos $n \geq n_0$, e essa

$$\|u_0\|_{L^1} \leq \omega_d \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty.$$

Argumentando como na prova do Teorema (3.1), para qualquer escolha de n temos

$$\int_\Omega u(t;u_0)dx \geq \int_\Omega \int_0^t S(t-s)f(S(s)u_n)dsdx.$$

Agora consideramos a ação do semigrupo de calor nos dados iniciais $v_0 = \psi\alpha^d X_{\frac{1}{\alpha}}$. Segue-se do Lema (3.1) com $r = \frac{1}{\alpha}$ e $\delta = \delta_0$ naquele

$$S(s)v_0 \geq c_d\psi \frac{\alpha^d}{(1+\alpha^2 s)^{\frac{d}{2}}} X_{\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\sqrt{s}},$$

assim $[S(s)v_0](x) \geq c_d\phi_k$ para

$$|x| \leq \frac{1}{\alpha} + \sqrt{s} \quad \text{enquanto} \quad s \leq t_k = \min\left(\delta_0^2, \left(\frac{\psi}{\phi_k}\right)^{\frac{2}{d}} - \frac{1}{\alpha^2}\right),$$

e esse intervalo não está vazio, desde que $\phi_k \leq \psi\alpha^d$.

Agora para qualquer $0 < t < \delta_0^2$, usando corolário (3.1) temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_0^t S(t-s)f(S(s)v_0)dsdx \geq & \sum_k \int_\Omega \int_{t_{k+1}}^{t_k} S(t-s)f(S(s)v_0)dsdx \\
= & \sum_k \int_{t_{k+1}}^{t_k} \int_\Omega S(t-s)f(S(s)v_0)dxds \\
\geq & c'\sum_k f(c_d\phi_k) \int_{t_{k+1}}^{t_k} \int_\Omega S(t-s)X_{\alpha^{-1}+\sqrt{s}}dxds \\
\geq & \alpha_d c'\sum_k f(c_d\phi_k) \int_{t_{k+1}}^{t_k} \left(\frac{1}{\alpha}+\sqrt{s}\right)^d ds \\
\geq & c''\sum_k f(c_d\phi_k) \int_{t_{k+1}}^{t_k} s^{\frac{d}{2}} ds,
\end{aligned}$$

onde a soma em k é tomada sobre os valores para os quais

$$\frac{1}{\alpha^d} \leq \frac{\psi}{\phi_k} \leq \left(t + \frac{1}{\alpha^2}\right)^{\frac{d}{2}}.$$

Vamos considerar k que atendem a esse requisito e a restrição adicional que $\frac{\phi_{k+1}}{\alpha^d\psi} \leq \frac{1}{2}$.

Para cada um desses k temos

$$\begin{aligned}
\int_{t_{k+1}}^{t} s^{\frac{d}{s}} ds =& \frac{2}{2+d}\left(t_k^{\frac{d}{2}+1} - t_{k+1}^{\frac{d}{2}+1}\right)\\
=& \frac{2}{2+d}\left\{\left[\left(\frac{\psi}{\phi_k}\right)^{\frac{2}{d}} - \frac{1}{\alpha^2}\right]^{\frac{d}{2}+1} - \left[\left(\frac{\psi}{\phi_{k+1}}\right)^{\frac{2}{d}} - \frac{1}{\alpha^2}\right]^{\frac{d}{2}+1}\right\}\\
=& \frac{2}{2+d}\left(\frac{\psi}{\phi_k}\right)^{1+\frac{2}{d}}\left[\left(1-\left(\frac{\phi_k}{\alpha^d\psi}\right)^{\frac{2}{d}}\right)^{\frac{d}{2}+1} - \frac{\phi_k^{1+\frac{2}{d}}}{\phi_{k+1}^{1+\frac{2}{d}}}\left(1-\left(\frac{\phi_{k+1}}{\alpha^d\psi}\right)^{\frac{2}{d}}\right)^{\frac{d}{2}+1}\right]\\
\geq& \frac{2}{2+d}\left(\frac{\psi}{\phi_k}\right)^{1+\frac{2}{d}}\left(1-\frac{\phi_k^{1+\frac{2}{d}}}{\phi_{k+1}^{1+\frac{2}{d}}}\right)\left(1-\left(\frac{\phi_{k+1}}{\alpha^d\psi}\right)^{\frac{2}{d}}\right)^{\frac{d}{2}+1}\\
\geq& \sigma\left(\frac{\psi}{\phi_k}\right)^{1+\frac{2}{d}},
\end{aligned}$$

usando os fatos que $\phi_{k+1} \geq \theta\phi_k$ e $\frac{\phi_{k+1}}{\alpha^d\psi} \leq \frac{1}{2}$. Tão certamente

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\int_0^t S(t-s)f(S(s)v_0)ds \geq& c''\sigma\sum_k f(c_d\phi_k)\left(\frac{\psi}{\phi_k}\right)^{1+\frac{2}{d}}\\
=& c'''\psi^p\sum_k f(s_k)s_k^{-p},
\end{aligned}$$

onde a soma é assumida

$$\left\{k : \frac{2}{\alpha^d} \leq \frac{\psi}{\phi_{k+1}} < \frac{\psi}{\phi_k} \leq \left(t+\frac{1}{\alpha^2}\right)^{\frac{d}{2}}\right\}. \tag{3.8}$$

Para qualquer fixo t com $0 < t < \delta_0^2$, uma vez n é suficientemente grande que $tn^{\frac{4}{d}} \geq 1$ o conjunto (3.8) com $\psi = n^{-2}$ e $\alpha = \alpha_n = (n^2\phi_{\zeta_n})^{\frac{1}{d}}$ certamente contém

$$\{k \quad : 1 \leq \phi_k \quad \text{and} \quad \phi_{k+1} \leq \frac{1}{2}\phi_{\zeta_n}\} = \{k \quad : k_0 \leq k \leq k_n\},$$

onde k_0 é o menor valor de k para qual $\phi_k \geq 1$ e escolhendo ζ_n de tal modo que $\phi_{k_n+1} \leq \frac{1}{2}\phi_{\zeta_n}$ podemos alcançar qualquer sequência desejada k_n. Desde a $\sum_{k=1}^{\infty} f(s_k)s_k^{-p} = \infty$ (por (3.6)) nós podemos escolher k_n de tal modo que

$$n^{-2p}\sum_{k=k_0}^{k_n} f(s_k)s_k^{-p}$$

diverge como $n \to \infty$. $\square$

Observamos que, se assumirmos, além disso, que $f(s) \geq cs$ para alguns $c > 0$, então sob as condições do teorema 3.3 de fato, não existe uma solução integral local de (3.7). De fato, suponha que exista uma solução integral local $u : \Omega \times [0,T) \longrightarrow [0,\infty)$. Então, por definição (3.1), u é finito em quase todos os lugares $\Omega \times [0,T)$. Como todas as nossas estimativas são realizadas dentro de B_{δ_0}, de fato, mostramos que existe uma bola $B \subset \Omega$ e um tempo $\delta_0^2 > 0$ de tal modo que

$$\int_B u(y,s)dy = \infty \quad \text{for all} \quad s \in (0, \delta_0^2).$$

Agora conserte $\tau = \min(T, \delta_0^2)$ e escolha qualquer $(x,t) \in B \times \left[\frac{\tau}{2}, \tau\right]$. Desde a u satisfaz (8),

$$\begin{aligned} u(x,t) \geq & \int_0^t \int_\Omega K(x,y;t-s) f(u(y,s)) dyds \\ \geq & c \int_0^{\frac{\tau}{4}} \int_B K(x,y;t-s) u(y,s) dyds, \end{aligned}$$

usando a suposição de que $f(s) \geq cs$. Para $s \in \left[0, \frac{\tau}{4}\right]$ e $t \in \left[\frac{\tau}{2}, \tau\right]$ nós ter $t - s \in \left[\frac{\tau}{4}, \tau\right]$. Pela continuidade e positividade de K existe $k > 0$ de tal modo que

$$K(x,y;\sigma) \geq k \quad \text{para todos} \quad (x,y,\sigma) \in B \times B \times \left[\frac{\tau}{4}, \tau\right],$$

de onde

$$u(x,t) \geq ck \int_0^{\frac{\tau}{4}} \int_B u(y,s) dyds = \infty.$$

Portanto $u = \infty$ em $B \times \left[\frac{\tau}{2}, \tau\right]$, contradizendo o requisito de que u é finito em quase todos os lugares $\Omega \times [0, T)$.

3.3.2 Uma condição integral equivalente para blowup

Desde que a condição em (3.6) é potencialmente estranho verificar na prática, agora formulamos uma condição integral equivalente. Observe que quando $\frac{f(s)}{s}$ não diminui, a condição integral em (ii) do lema abaixo se torna a mais convencional

$$\int_1^\infty s^{-(1+p)} f(s) ds = \infty.$$

Lema 3.2. *Suponha que $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ é não decrescente e $p > 1$. Então as duas condições a seguir são equivalentes.*

(i) Existe uma sequência $\{s_k\}$ de tal modo que $s_{k+1} \geq \theta s_k, \quad \theta > 1$ e

$$\sum_{k=1}^\infty s_k^{-p} f(s_k) = \infty.$$

(ii) $\int_1^\infty s^{-p} F(s) ds = \infty, \quad$ onde $\quad F(s) = \sup\limits_{1 \leq t \leq s} \frac{f(t)}{t}$.

Demonstração. Primeiro, mostramos que (i) implica (ii). Podemos aumentar a sequência $\{s_k\}$ para uma nova sequência σ_k de tal modo que

$$\sum_{k=0}^\infty \sigma_k^{-p} f(\sigma_k) = \infty$$

e além disso, escolhendo $1 < \alpha < p$,

$$1 < \theta \leq \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} \leq \theta^{\alpha},$$

incluindo pontos $\theta^j s_k$ até $s_{k+1} \leq \theta^{j+p-1} s_k$.

Configuração $\sigma_0 = 1$ nós podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} s^{-p} F(s) ds =& \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} s^{-p} F(s) \\
\geq& \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} s^{-p} F(\sigma_k) ds \\
\geq& \frac{1}{p-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma_k^{-(p-1)} - \sigma_{k+1}^{-(p-1)}) \frac{f(\sigma_k)}{\sigma_{k+1}} \\
=& \frac{1}{p-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^{-p} f(\sigma_k) \left\{ \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}} - \frac{\sigma_k^p}{\sigma_{k+1}^p} \right\} \\
\geq& \frac{1}{p-1} (\theta^{-\alpha} - \theta^{-p}) \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^{-p} f(\sigma_k),
\end{aligned}$$

a partir do qual (ii) segue.

Agora mostramos que (ii) implica (i). Escolher $\theta > 1$ e para $k = 0, 1, 2, ...$ deixei $\sigma_k = \theta^k$; Observe que $F(s) \leq F(\sigma_{n+1})$ para todos $s \in (\sigma_n, \sigma_{n+1}]$. Existe uma sequência $\{k_n\}$ com $k_n \leq n$ e $k_{n+1} \geq k_n$ de tal modo que $F(\sigma_{n+1}) = \frac{f(\tau_n)}{\tau_n}$ para alguns $\tau_n \in (\sigma_{k_n}, \sigma_{k_n+1}]$. Portanto

$$F(s) \leq F(\sigma_{n+1}) \leq \frac{f(\sigma_{k_n+1})}{\sigma_{k_n}} \quad \text{para todos} \quad s \in (\sigma_n, \sigma_{n+1}].$$

Portanto

$$\int_1^{\infty} s^{-p} F(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} s^{-p} F(s) ds \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\sigma_{k_n+1})}{\sigma_{k_n}} \int_{\sigma_n}^{\sigma_{n+1}} s^{-p} ds.$$

Agora observe que há uma sequência crescente n_j de tal modo que

$$k_{n_j} = k_n < k_{n_{j+1}} \quad \text{for} \quad n = n_j, ..., n_{j+1} - 1,$$

e entao

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\sigma_{k_n+1})}{\sigma_{k_n}} \int_{\sigma_n}^{\sigma_{n+1}} s^{-p} ds =& \sum_j \frac{f(\sigma_{k_{n_j}+1})}{\sigma_{k_{n_j}}} \int_{\sigma_{k_{n_j}}}^{\sigma_{k_{n_{j+1}}}} s^{-p} ds \\
<& \sum_j \frac{f(\sigma_{k_{n_j}+1})}{\sigma_{k_{n_j}}} \int_{\sigma_{k_{n_j}}}^{\infty} s^{-p} ds \\
\leq& \frac{1}{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\sigma_{k_{n_j}+1})}{\sigma_{k_{n_j}}} \sigma_{k_{n_j}}^{1-p} \\
=& \frac{\theta^p}{p-1} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{k_{n_j}+1}^{-p} f(\sigma_{k_{n_j}+1}).
\end{aligned}$$

Levando $s_j = \sigma_{k_{n_j}+1}$ rendimentos (i). □

3.3.3 Uma condição integral para a existência local

Agora mostramos que a condição integral em (ii) do Lema (3.2) é suficiente para o L^1 propriedade de existência local. Usaremos o seguinte teorema de Robinson e Sierżęga (2013) (Teorema 1, depois de Weissler (1981)) que garante a existência de uma solução $u(t)$ de (1) dada a existência de uma supersolução $v(t)$, i.e. uma função satisfatória (3.9). Para uso posterior, observamos que $\Omega = \mathbb{R}^d$, com $S(t)$ denotar a ação do semigrupo de calor (definido por convolução com o núcleo gaussiano) é uma opção admissível no Teorema (3.4) (veja a discussão nos "Comentários finais" em (ROBINSON; SIERŻĘGA, 2013)).

Teorema 3.4. *Levar $u_0 \geq 0$. E se $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é contínuo e não diminui e existe uma $v \in L^1((0,T) \times \Omega)$ de tal modo que*

$$S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(v(s))ds \leq v(t) \quad \textit{para todos} \quad t \in [0,T] \tag{3.9}$$

existe uma solução integral local u de (1) em $[0,T]$ com $u(x,t) \leq v(x,t)$ para todos $x \in \Omega$ e $t \in [0,T]$.

Este teorema é provado através da construção de uma sequência de supersoluções $v_n(t)$ definido pela configuração $v_0(t) = v(t)$ e

$$v_{n+1}(t) = \mathscr{F}(v_n) := S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(v_n(s))ds.$$

Essa sequência é monotonicamente decrescente, é delimitada abaixo por $S(t)u_0$, e, portanto, tem um limite pontual $u(t)$ que pode ser mostrado para satisfazer

$$S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds = u(t) \quad \text{para todos} \quad t \in [0,T]$$

usando o Teorema da Convergência Monótona.

Usando esse resultado, provamos um teorema da existência local; o argumento é adaptado da prova da Proposição 7.2 em Sierzega (2012). Observe que nossa suposição permanente de que Ω é limitado é um ingrediente importante na prova, pois exigimos $X_\Omega \in L^1(\Omega)$.

Teorema 3.5. *E se $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é contínuo, não diminui e*

$$\int_1^\infty s^{-\left(1+\frac{2}{d}\right)} F(s)ds < \infty, \quad \textit{onde} \quad F(s) = \sup_{1 \leq t \leq s} \frac{f(t)}{t} \tag{3.10}$$

então para todo não negativo $u_0 \in L^1(\Omega)$ existe um $T > 0$ de tal modo que (3.5) tem uma solução

$$u \in L^\infty_{loc}((0,T); L^\infty(\Omega)) \cap C^0([0,T]; L^1(\Omega)).$$

Em particular, (3.5) tem o local L^1 propriedade de existência.

Demonstração. E se $u_0 0$ então $v(t) \equiv X_\Omega$ é uma supersolução, já que

$$S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(S(s)X_\Omega)ds \leq \int_0^t S(t-s)\{f(1)X_\Omega\} \leq tf(1)X_\Omega \leq X_\Omega$$

para todos t suficientemente pequeno.

Tratar $u_0 \neq 0$, definir $\tilde{f}(s) = f(s)$ para $s \in [0,1]$ e $\tilde{f}(s) = sF(s)$ para $s > 1$. Então $f(s) \leq \tilde{f}(s)$ e $\frac{\tilde{f}(s)}{s} : [1,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é não decrescente. Em particular, qualquer supersolução para a equação

$$u_t - \Delta u = \tilde{f}(u) \tag{3.11}$$

também é uma supersolução para (3.5), e, portanto, mostrar que (3.5) tem uma solução suficiente para encontrar uma supersolução para (3.11). Reescrito em termos de $\tilde{f}$, a condição integral em (3.10) torna-se

$$\int_1^\infty s^{-\left(2+\frac{2}{d}\right)}\tilde{f}(s)ds < \infty,$$

e depois da substituição $s = \tau^{\frac{-d}{2}}$ nós obtemos

$$\int_0^1 \tau^{\frac{d}{2}}\tilde{f}(\tau^{\frac{-d}{2}})d\tau < \infty.$$

Agora mostramos que, para qualquer $A > 1$, $v(t) = AS(t)u_0 + X_\Omega$ é uma supersolução de (3.11) em algum intervalo de tempo adequado, i.e. satisfaz a condição (3.9) no teorema (3.4). Para fazer isso, primeiro lembre-se da estimativa de suavização

$$\|S(t)u_0\|_{L^\infty} \leq ct^{\frac{-d}{2}}\|u_0\|_{L^1}.$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\tilde{f}(v(s))ds &= S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(AS(s)u_0+1)ds \\ &= S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\left(\frac{\tilde{f}(AS(s)u_0+1)}{AS(s)u_0+1}\right)(AS(s)u_0+1)ds \\ &\leq S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\left\|\frac{\tilde{f}(AS(s)u_0+1)}{AS(s)u_0+1}\right\|_{L^\infty}(AS(s)u_0+1)ds. \end{aligned}$$

Desde o L^∞ norma é uma constante escalar e $S(t-s)$ é linear, segue-se que

$$\mathscr{F}(v)(t) \leq S(t)u_0 + \left\{\int_0^t \left\|\frac{\tilde{f}(AS(s)u_0+1)}{AS(s)u_0+1}\right\|_{L^\infty} ds\right\}[S(t)u_0 + X_\Omega],$$

Como $S(t)X_\Omega \leq X_\Omega$ para todos $t > 0$. Agora, usando o fato de que $\frac{f\tilde{(s)}}{s}$ não diminui para $s \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(v)(t) \leq& S(t)u_0 + \left\{\int_0^t \frac{\tilde{f}(\|AS(s)u_0+1\|_{L^\infty})}{\|AS(s)u_0+1\|_{L^\infty}}ds\right\}[AS(t)u_0 + X_\Omega] \\ \leq& S(t)u_0 + \left\{\int_0^t \frac{\tilde{f}(2Acs^{\frac{-d}{2}}\|u_0\|_{L^1})}{2Acs^{\frac{-d}{2}}\|u_0\|_{L^1}}ds\right\}[AS(t)u_0 + X_\Omega], \end{aligned}$$

para s suficientemente pequeno, uma vez que

$$\|AS(s)u_0 + 1\|_{L^\infty} = \|AS(s)u_0\|_{L^\infty} + 1 \leq Acs^{\frac{-d}{2}}\|u_0\|_{L^1} + 1 \leq 2Acs^{\frac{-d}{2}}\|u_0\|_{L^1}$$

para s suficientemente pequeno.

Portanto $\mathscr{F}(v)(t)$ é delimitado acima por

$$S(t)u_0 + (2Ac\|u_0\|_{L^1})^{\frac{2}{d}} \left(\int_0^{t(2Ac\|u_0\|_{L^1})^{\frac{-2}{d}}} \tau^{\frac{d}{2}} \tilde{f}(\tau^{\frac{-d}{2}}) d\tau \right) [AS(t)u_0 + X_\Omega]$$

$$\leq AS(t)u_0 + X_\Omega,$$

providenciou que t é suficientemente pequeno. Existência local de uma solução $u(t)$ com $u(t) \leq v(t) = 2S(t)u_0 + X_\Omega$ agora segue do teorema (3.4). Naquele $u(t)$ é delimitado em $L^1(\Omega)$ agora segue do teorema (3.4). Segue que $u \in L^\infty_{loc}((0,T); L^\infty(\Omega))$, i.e. é uma solução clássica. A partir da condição integral em f, $f(u) \in L^1((0,T); L^1(\Omega))$, de onde (3.3) segue que $u \in C^0([0,T]; L^1(\Omega))$. □

Portanto, obtivemos a seguinte caracterização desses f para o qual existe existência local em $L^1(\Omega)$.

Corolário 3.3. *E se $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é contínuo e não diminui, então* (3.5) *tem o local L^1 propriedade de existência se e somente se*

$$\int_1^\infty s^{-(1+\frac{2}{d})} F(s) ds < \infty, \quad \textit{onde} \quad F(s) = \sup_{1 \leq t \leq s} \frac{f(t)}{t}.$$

Observamos que podemos aplicar a parte "existência local" dessa caracterização (i.e. Teorema (3.5)) a uma não linearidade g que não é decrescente ao encontrar uma função não decrescente $f(s)$ de tal modo que $g(s) \leq f(s)$, aplicando o Teorema (3.5) e então deduzindo a existência local por comparação. O exemplo da seção a seguir fornece um exemplo disso, além de uma ilustração da aplicação do Corolário (3.3).

3.4 Resultados para todo o espaço e condições de fronteira

Vale ressaltar que, como eles dependem apenas dos limites inferiores gaussianos para o núcleo de calor de Dirichlet, os resultados inexistentes dos Teoremas (3.1) e (3.3) são válidos com essencialmente as mesmas provas para as equações colocadas em todo o espaço $\mathbb{R}^d$. Eles também são válidos para condições de contorno de Neumann $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ em } \partial\Omega\right)$, Desde a

$$K_{\Omega_N}(x,y;t) \geq K_{\Omega_D}(x,y;t), \quad x,y \in \Omega, \quad t > 0,$$

onde Ω_N e Ω_D denotam os núcleos de calor de Neumann e Dirichlet, respectivamente (a prova segue por comparação, ou pode-se usar métodos probabilísticos, veja em (BERG, 1989, Corolário 2.5), por exemplo).

No entanto, os resultados da existência local em todo o espaço exigem alguns suposições adicionais. É fácil ver que se $f(0) \neq 0$ qualquer condição inicial não negativa dá origem a uma solução que não esteja $L^q(\mathbb{R}^d)$ para qualquer $q \in [1, \infty)$. De fato, desde então $u(t) \geq 0$ para todos $t \geq 0$ temos

$$u(t) \geq \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds \geq \int_0^t S(t-s)f(0)ds = tf(0) \notin L^q(\mathbb{R}^d).$$

Também exigimos uma condição "derivada limitada no zecom condições de contorno de Dirichletro", a saber com condições de contorno de Dirichlet Sem essa condição, podemos encontrar um resultado não negativo. $u_0 \in L^q(\mathbb{R}^d)$ para o qual a solução não está delimitada $L^q(\mathbb{R}^d)$ para todos $t > 0$.

De fato, se (**??**) não segura então existe $s_n \to 0$ de tal modo que $s_n \leq n^{-2}$ e $f(s_n) \geq n^2 s_n$. Considere dados iniciais

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_d^{-1} s_n X_{n^{\frac{-2}{n}} s_n^{\frac{-q}{d}}}(x_n)$$

onde o x_n são escolhidos de modo que $B(x_n, n^{\frac{-2}{d}} s_n^{\frac{-q}{d}})$ são disjuntos. Observe que $\|u_0\|_{L^q} < \infty$ e essa $n^{\frac{-2}{d}} s^{\frac{-q}{d}} \geq 1$. Então

$$S(s)u_0 \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} s_n X_{n^{\frac{-2}{d}} s_n^{\frac{-q}{d}}}(x_n)$$

para todos $s \leq 1$. Então para $t \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} u(x,t) \geq & \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} S(t-s) n^2 s_n X_{n^{\frac{-2}{d}} s_n^{\frac{-q}{d}}}(x_n) ds \\ \geq & \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} c_d n^2 s_n X_{n^{\frac{-2}{d}} s_n^{\frac{-q}{d}}}(x_n) ds \\ = & t c_d \sum_{n=1}^{\infty} n^2 s_n X_{n^{\frac{-2}{d}} s_n^{\frac{-q}{d}}}(x_n) \end{aligned}$$

e entao

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x,t)|^q dx \geq (tc_d)^q \sum_{n=1}^{\infty} n^{2q} s_n^q n^{-2} s_n^{-q} = tc_d \sum_{n=1}^{\infty} n^{2(q-1)} = \infty.$$

Para agora $q > 1$ se tivermos, com $p = 1 + \frac{2q}{d}$,

$$\lim_{s \to \infty} \sup s^{-p} f(s) < \infty \quad \text{e} \quad \lim_{s \to 0} \sup \frac{f(s)}{s} < \infty$$

então

$$f(s) \leq C(s + s^p)$$

para alguns $C > 0$. Para $f(s) = C(s + s^p)$ nós podemos garantir o local L^q propriedade de existência em $\mathbb{R}^d$ do seguinte modo. Primeiro, resultados que garantem a L^q propriedade de existência local em todo o espaço quando $f(s) = 2Cs^p$ pode ser encontrado em Weissler (WEISSLER, 1979; WEISSLER, 1980a) (a análise é válida em todo o espaço), Teorema 1 em (GIGA, 1986) ou (ROBINSON; SIERŻĘGA, 2013) (consulte “Comentários finais”). Então, dado um não negativo $u_0 \in L^q(\mathbb{R}^d)$, deixei $u(t)$ seja o local L^q solução obtida desta maneira. Agora defina $v(t) = e^{2Ct}u(t)$. Então

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v =& 2Ce^{2Ct}u + e^{2Ct}(u_t - \Delta u) \\ =& 2Ce^{2Ct}u + e^{2Ct}2Cu^p \\ =& 2C(v + (e^{2Ct})^{1-p}v^p) \\ \geq& C(v + v^p) \end{aligned}$$

providenciou que $(e^{2Ct})^{1-p} \geq \frac{1}{2}$.Isso é legítimo, pois v é uma solução clássica forte para $t > 0$. Segue-se facilmente que v é uma supersolução no sentido integral do teorema (3.4) em algum pequeno intervalo de tempo. A existência de tal supersolução, limitada em $L^q(\mathbb{R}^d)$, implica então a existência de uma solução delimitada em $L^q(\mathbb{R}^d)$ usando o teorema (3.4).

Para $q = 1$ existência local decorre dos argumentos do Teorema (3.5), agora tomando

$$F(s) = \sup_{0 \leq t \leq s} \frac{f(t)}{t}$$

e observando que se $u_0 \geq 0$ e é diferente de zero então $S(t)u_0 > 0$ para todos $t > 0$ (isto segue imediatamente da expressão para $S(t)u_0$ em termos do núcleo gaussiano). (E se $u_0 = 0$ então obviamente $u(t) = 0$ é uma solução desde $f(0) = 0$ pela condição lim sup em $s = 0$.)

Resumimos formalmente no seguinte teorema.

Teorema 3.6. *Deixei $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ ser contínuo e não diminuir e deixar $\Omega = \mathbb{R}^d$. Então*

(i) para $q \in (1, \infty)$ a equação (1) possui a L^q propriedade de existência se e somente se

$$\limsup_{s \to 0} \frac{f(s)}{s} < \infty \quad e \quad \limsup_{s \to \infty} s^{-\left(1 + \frac{2q}{d}\right)} f(s) < \infty;$$

(ii) a equação (1) possui a local L^1 propriedade de existência se e somente se

$$\limsup_{s \to 0} \frac{f(s)}{s} < \infty \quad e \quad \int_1^\infty s^{-\left(1 + \frac{2q}{d}\right)} F(s) ds < \infty,$$

onde $F(s) = \sup_{0 \leq t \leq s} \frac{f(t)}{t}$.

4 RESULTADOS FINAIS

Nós caracterizamos completamente aqueles não negativos, não decrescentes, funções contínuas f para o qual a equação

$$u_t - \Delta u = f(u), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(0) = u_0 \in L^q(\Omega), \quad u_0 \geq 0,$$

possui pelo menos uma solução local delimitada em $L^q(\Omega)$. Para $1 < q < \infty$ isso ocorre se e somente se

$$\lim_{s\to\infty} \sup s^{-\left(1+\frac{2q}{d}\right)} f(s) < \infty,$$

enquanto para $q = 1$ isso ocorre se e somente se

$$\int_1^\infty s^{-\left(1+\frac{2q}{d}\right)} \left(\sup_{1\leq t\leq s} \frac{f(t)}{t} \right) ds < \infty.$$

Também demos resultados para as equações de todo o espaço $\mathbb{R}^d$ e para o problema de Neumann em um domínio limitado.

As partes inexistentes de nossos argumentos são talvez as mais novas, usando limites inferiores no núcleo de calor de Dirichlet devido a (BERG, 1989; BERG, 1990b) para fornecer limites inferiores em soluções da equação do calor com funções características como dados iniciais e, portanto, limites inferiores em soluções do problema semilinear. O L^1 caso se comporta de maneira muito diferente do problema em espaços com maior integrabilidade, com a aparência do limite superior

$$sF(s) = s \sup_{1\leq t\leq s} \left[\frac{f(t)}{t} \right]$$

nos critérios de explosão e existência, uma surpresa.

Uma questão em aberto deixada por nossa análise baseada em L q é se temos "uma explosão forte", $u(t) \notin L^q$ para todos $t > 0$, quando $q > 1$ e

$$\lim_{s\to\infty} \sup s^{-\gamma} f(s) = \infty, \quad \gamma \in \left[1 + \frac{2q}{d}, q\left(1 + \frac{2}{d}\right) \right],$$

ou se existe uma transição verdadeira de uma explosão tão forte (obtida em (LAISTER; ROBINSON; SIERŻĘGA, 2013) para $\gamma > q\left(1 + \frac{2}{d}\right)$ apenas para o comportamento ilimitado $\lim_{t\to 0} \sup \|u(t)\|_{L^q}$ (obtido aqui no teorema (3.1) quando $\gamma = 1 + \frac{2q}{d}$). Uma questão relacionada é se é possível excluir a existência de soluções integrais locais para uma classe mais ampla de f do que fazemos na discussão no final da Seção 4.1 (atualmente exigimos $f(s) \geq Cs$ para alguns $C > 0$).

Seria interessante tentar provar resultados de caracterização semelhantes em outras escalas de espaços, como os espaços de Sobolev ou os de Besov. Isso exigiria técnicas diferentes, uma vez que nossos argumentos atuais não levam em consideração a suavidade das soluções, mas apenas sua integrabilidade.

Buscando generalização em uma direção diferente, pode-se perguntar se existe uma maneira de identificar o espaço crítico de Lebesgue para a classe mais geral de positivo, mas não necessariamente monótono. f, ou mesmo para geral f com sinal alterando dados iniciais.

Por fim, observamos que não tentamos aqui considerar o problema da singularidade. Pela não linearidade $f(u) = |u|^{p-1}u$ (NI; SACKS, 1985) provou não ser singular para o valor crítico de p (Teorema 3); veja também (MATOS; TERRANEO, 2003) e (HARAUX; WEISSLER, 1982). Seria interessante ver se é possível obter uma caracterização exata desses f que admitem soluções únicas, talvez baseadas em condições assintóticas generalizando (2) da maneira que nossas condições para a existência local generalizam as taxas de crescimento do exemplo canônico $f(u) = |u|^{p-1}u$.

Lema 4.1. *Existe uma constante absoluta $c_d \in (0,1)$, isso depende apenas de d, tal que para cada $r > 0$; para $B_{r+\delta} \subset \Omega$,*

$$S(t)X_r \geq c_d \left(\frac{r}{r+\sqrt{t}} \right)^d X_{r+\sqrt{b}}$$

para tudo $0 < t \leq \delta^2$

Demonstração. Para cada x tal que $d(x, \partial\Omega) \geq \delta$ lestimar abaixo em (3.1) implica que para $0 < t \leq \delta^2$

$$\begin{aligned}
[S(t)X_r](x) =& \int_{B_r(0)} K_\Omega(x,y,t)dy \\
\geq& \int_{B_r(0)} e^{-\frac{d^2\pi^2 t}{4\delta^2}} (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \\
\geq& e^{-\frac{d^2\pi^2}{4}} (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int_{B_r(0)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy
\end{aligned}$$

a ultima integral é radialmente simetrica e diminui con $|x|$ e assim por $|x| \leq r + \sqrt{t}$ escolhendo um vetor unidade u podemos escrever

$$\begin{aligned}
[S(t)X_r](x) \geq& e^{-\frac{d^2\pi^2}{4}} (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int_{B_r((r+\sqrt{t})u)} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} dz \\
=& e^{-\frac{d^2\pi^2}{4}} \pi^{-\frac{d}{2}} \int_{B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{2\sqrt{t}}\right)u\right)} e^{-|w|^2} dw
\end{aligned}$$

observe que, se $e \geq r$ então

$$B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{2\sqrt{t}}\right)u\right) \subseteq B_{\frac{e}{2\sqrt{t}}}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{e}{2\sqrt{t}}\right)u\right)$$

segue-se que para $r \geq \sqrt{t}$ nós temos

$$B_{\frac{1}{2}}(u) \subseteq B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{2\sqrt{t}}\right)u\right)$$

logo

$$[S(t)X_r](x) \geq e^{-\frac{d^2\pi^2}{4}}\pi^{-\frac{d}{2}} \int_{B_{\frac{1}{2}}(u)} e^{-|w|^2} dw =: c'_d$$

por outro lado, se $\frac{r}{\sqrt{t}} \leq 1$ então

$$\begin{aligned}
[S(t)X_r](x) \geq& e^{-\frac{d^2\pi^2}{4}}\pi^{-\frac{d}{2}} \operatorname{vol}\left(B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{2\sqrt{t}}\right)u\right)\right) e^{-\frac{t}{2r}} \\
\geq& e^{-\frac{d^2\pi^2}{4}}\pi^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{r}{2\sqrt{t}}\right)^d e^{-\frac{9}{4}} = c''_d \left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)^d
\end{aligned}$$

tomando $c_d = \min(c'_d, c''_d)$ temos

$$[S(t)X_r](x) \geq c_d \left(\frac{r}{\max(r,\sqrt{t})}\right)^d \geq c_d \left(\frac{r}{r+\sqrt{t}}\right)^d.$$

□

Corolário 4.1. *Existe uma constante ansoluta $\alpha_d > 0$ dependendo apenas de d, tal que para qualquer $r, \delta > 0$ para o qual $B_{r+\delta} \subset \Omega$,*

$$\int_\Omega S(t)X_r dx \geq \alpha_d r^d$$

para todo $0 < t \leq \min(\delta^2, r^2)$

Demonstração. Integrando la desigualdade (7) sobre Ω

$$\begin{aligned}
\int_\Omega S(t)X_r dx \geq& c_d \left(\frac{r}{r+\sqrt{t}}\right)^d \int_\Omega X_{r+\sqrt{t}} dx \\
=& c_d \left(\frac{r}{r+\sqrt{t}}\right)^d \operatorname{vol} B(0, r+\sqrt{t}) \\
=& c_d \left(\frac{r}{r+\sqrt{t}}\right)^d (r+\sqrt{t})^d \operatorname{vol} B_1(0) \\
=& w_d c_d r^d
\end{aligned}$$

□

Corolário 4.2. *Existe uma constante absoluta $B_d > 0$ dependendo apenas de d, tal que para qualquer $r, \delta > 0$ para o qual $B_{r+\delta} \subset \Omega$,*

$$S(t)X_r \geq B_d X_{r+\sqrt{t}}$$

para todo $0 < t \leq \min(\delta^2, r^2)$

Teorema 4.1. *Sea $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ não decrecente. Si $q > 1$ e*

$$\limsup_{s\to\infty} s^{-\left(1+\frac{2q}{d}\right)} f(s) = \infty \tag{4.1}$$

então existe $u_0 \in L^q(\Omega)$ com $u_0 \geq 0$ tal que

$$u_t - \Delta u = f(u), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(0) = u_0 \tag{4.2}$$

não tem uma solucão local.

Demonstração. Sea $p = 1 + \frac{2q}{d}$. Se sequege (4.1) que podemos escolher uma sequencia ϕ_k tal que $\phi_k \geq k$ e $f(\phi_k) \geq \phi_k^p e^{\frac{k}{q}}$. Sea $r_k = \epsilon\phi^{-\frac{q}{d}} k^{-\frac{2q}{d}}$, $u_k = \beta_d^{-1}\phi_k X_{r_k}$ onde β_d é a constante do Corolario e ϵ constante suficientemente pequeña com $B_{2rk} \subset \Omega$ para cada k. Ademais definamos

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

logo note que

$$\|u_k\|_{L^q} = \beta_d^{-1}\epsilon^{\frac{d}{q}} k^{-2}$$

então

$$\begin{aligned}\|u_0\|_{L^q} \leq & \sum_k \|u_k\|_{L^q} = \sum_k \beta_d^{-1}\epsilon^{\frac{d}{q}} k^{-2} \\ \leq & \beta_d^{-1}\epsilon^{\frac{d}{q}} \sum_k k^{-2} < \infty\end{aligned}$$

logo

$$u_0 \in L^q(\Omega)$$

Si $u(t)$ es solugtdão de (4.2), então

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s) f(u(s)) ds$$

para $u \geq 0$ e $f \geq 0$ logo

$$u(t) \geq S(t)u_0 \geq S(t)u_k$$

para cada k fijo

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q}^q \geq & \int_{B_{r_k}} |u(t)|^q dx \geq \int_{B_{r_k}} \beta_d^q r_k^{2q} f(\phi_k)^q dx \\ \geq & \beta_d^q r_k^{2q} f(\phi_k)^q \operatorname{vol} B_{r_k} \\ = & \beta_d^q r_k^{2q} f(\phi_k)^q r_k^d w_d \\ = & c r_k^{d+2q} f(\phi_k)^q \\ = & c(\epsilon\phi_k^{-\frac{q}{d}} k^{-\frac{2q}{d}})^{d+2q} \phi_k^{pq} e^k \\ = & c k^{-\frac{2q}{d}(d+2q)} e^k\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to\infty} \|u\|_{L^q}^q = \infty \Longrightarrow \|u\|_{L^q} = \infty$$

logo u não é um elemento de $L^\infty((0,T), L^q(\Omega))$ para cada $T > 0$. $\square$

Teorema 4.2. *Seja* $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ *não decrecente e continua. Si* $q > 1$ *então* (4.2) *brene la propiedad de existencia local em* $L^q(\Omega)$ *se esomente se* $\lim_{s\to\infty} \sup s^{-\left(1+\frac{2q}{d}\right)} f(s) < \infty$

Demonstração. Para o teorema (4.1), resta apenas provar que (4.2) tem solução local limitada em $L^q(\Omega)$ quando é cumprida $\lim_{s\to\infty} \sup s^{-\left(1+\frac{2q}{d}\right)} f(s) < \infty$.
De fato, dado

$$\lim_{s\to\infty} \sup s^{-p} f(s) < \infty, \qquad p = 1 + \frac{2q}{d}$$

segue-se que há uma constante c tal que

$$f(s) \leq c(1 + s^p)$$

logo por corolário (3.2) em (WEISSLER, 1980a) se garante que existe solucão "v" de (4.2) tal que $v \in L^\infty((0,T), L^q(\Omega))$, então

$$v(t) = S(t)u_0 + c\int_0^t S(t-\sigma)(1+v^p)d\sigma \geq S(t)u_0 + c\int_0^t S(t-\sigma)f(v)dv$$

portanto v é supersolucão, logo existe solucão local de (4.2) (teorema em Robinson e Sierzega).

□

REFERÊNCIAS

BARAS, P.; PIERRE, M. Critere d'existence de solutions positives pour des équations semi-linéaires non monotones. In: ELSEVIER. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*. [S.l.], 1985. v. 2, n. 3, p. 185–212. Citado na página 8.

BERG, M. van den. Heat equation and the principle of not feeling the boundary. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, v. 112, n. 3-4, p. 257–262, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 31.

BERG, M. Van den. Gaussian bounds for the Dirichlet heat kernel. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 88, n. 2, p. 267–278, 1990. Citado na página 14.

BERG, M. Van den. Gaussian bounds for the dirichlet heat kernel. *Journal of functional analysis*, Elsevier, v. 88, n. 2, p. 267–278, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 31.

BERG, M. Van den. Gaussian bounds for the dirichlet heat kernel. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 88, n. 2, p. 267–278, 1990. Citado na página 15.

BREZIS, H.; CAZENAVE, T. A nonlinear heat equation with singular initial data. *Journal D'Analyse Mathématique*, Jerusalem [Israel]: Weizman Science Press of Israel, 1951-, v. 68, p. 277–304, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 8.

BRÉZIS, H.; FRIEDMAN, A. *Nonlinear Parabolic Equations Involving Measures as Initial Conditions*. [S.l.], 1981. Citado na página 8.

CELIK, C.; ZHOU, Z. No local l 1solution for a nonlinear heat equation. Taylor & Francis, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 20.

FUJITA, H. On the blowing up of solutions of the cauchy problem for $u_t + \delta u + u^{1+\alpha}$. *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo.*, Faculty of Science, The University of Tokyo, v. 13, n. 2, p. 109–124, 1966. Citado na página 7.

GIGA, Y. Solutions for semilinear parabolic equations in l^p and regularity of weak solutions of the navier-stokes system. *Journal of differential equations*, Academic Press, v. 62, n. 2, p. 186–212, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 30.

HARAUX, A.; WEISSLER, F. B. Non-uniqueness for a semilinear initial value problem. *Indiana University Mathematics Journal*, JSTOR, v. 31, n. 2, p. 167–189, 1982. Citado na página 32.

LADYZENSKAJA, O.; SOLONNIKOV, V.; URAL'CEVA, N. Linear and quasilinear equations of parabolic type, transl. math. *Monographs, Amer. Math. Soc*, v. 23, 1968. Citado na página 7.

LAISTER, R.; ROBINSON, J. C.; SIERŻĘGA, M. Non-existence of local solutions for semilinear heat equations of osgood type. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 255, n. 10, p. 3020–3028, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 31.

LAISTER, R. et al. A complete characterisation of local existence for semilinear heat equations in Lebesgue spaces. v. 33, n. 6, p. 1519–1538, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

MATOS, J.; TERRANEO, E. Nonuniqueness for a critical nonlinear heat equation with any initial data. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 55, n. 7-8, p. 927–936, 2003. Citado na página 32.

NI, W.-M.; SACKS, P. Singular behavior in nonlinear parabolic equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 287, n. 2, p. 657–671, 1985. Citado na página 32.

QUITTNER, P.; SOUPLET, P. Superlinear parabolic problems blow-up. *Global Existence and Steady States, Birkäuser Advanced Texts, Basel*, 2007. Citado na página 17.

ROBINSON, J. C.; SIERŻĘGA, M. Supersolutions for a class of semilinear heat equations. *Revista matemática complutense*, Springer, v. 26, n. 2, p. 341–360, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 30.

SIERZEGA, M. *Topics in the theory of semilinear heat equations*. Tese (Doutorado) — University of Warwick, 2012. Citado na página 26.

WEISSLER, F. B. Semilinear evolution equations in banach spaces. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 32, n. 3, p. 277–296, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 30.

WEISSLER, F. B. Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in l^p. *Indiana University Mathematics Journal*, JSTOR, v. 29, n. 1, p. 79–102, 1980. Citado 5 vezes nas páginas 7, 18, 19, 30 e 35.

WEISSLER, F. B. Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in l^p. *Indiana University Mathematics Journal*, JSTOR, v. 29, n. 1, p. 79–102, 1980. Citado na página 17.

WEISSLER, F. B. Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation. *Israel Journal of Mathematics*, Springer, v. 38, n. 1-2, p. 29–40, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 26.