Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós Graduação em Matemática

Omar Stevenson Guzmán Rea

EXISTÊNCIA LOCAL DE SOLUÇÕES PARA ALGUNS PROBLEMAS PARABÓLICOS COM DADOS INICIAIS SINGULARES

Recife

2020

Omar Stevenson Guzmán Rea

EXISTÊNCIA LOCAL DE SOLUÇÕES PARA ALGUNS PROBLEMAS PARABÓLICOS COM DADOS INICIAIS SINGULARES

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: Miguel Loayza Lozano
Coorientador: Ricardo Castillo Maldonado

Recife

2020

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

R281e Rea, Omar Stevenson Guzmán
Existência local de soluções para alguns problemas parabólicos com dados iniciais singulares / Omar Stevenson Guzmán Rea. – 2020.
61f.

Orientador: Miguel Fidencio Loyaza Lozano.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2020.
Inclui referências.

1. Análise matemática. 2. Sistema parabólico acoplado. I. Lozano, Miguel Fidencio Loyaza (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2020 - 43

OMAR STEVENSON GUZMAN REA

EXISTÊNCIA LOCAL DE SOLUÇÕES PARA ALGUNS PROBLEMAS PARABÓLICOS COM DADOS INICIAIS SINGULARES.

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 17/02/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr**.** Miguel Fidencio Loayza Lozano (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Clessius Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Arlucio da Cruz Viana (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado sabedoria e força para que podesse chegar até aqui. Sem Ele não teria conseguido nada do que conquistei na minha vida, pois está sempre na minha vida.

A minha família.

A minha noiva, Grace Herrera, pelo amor, por sua paciência, pelo apoio e por torcer por mim cada día.

A meu orientador Prof. Miguel Loayza e meu coorientador Prof. Ricardo Castillo, pela orientação e dedicação no desenvolvimento desta tese.

Aos professores da banca examinadora, por todas as correções e sugestões apontadas.

A todos os professores das disciplinas que cursei no doutorado.

Aos amigos do DMAT-UFPE.

A CNPq, pelo apoio financiero.

A todos os funcionários do DMAT-UFPE

RESUMO

Consideremos o sistema parabólico $u_t - a\Delta u = f(v), v_t - b\Delta v = g(u)$ em $\Omega \times (0,T)$, onde $a, b > 0,\ f, g \in [0,\infty) \to [0,\infty)$ são funções contínuas e não decrescentes, e Ω é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave ou o espaço todo $\mathbb{R}^N$. Caracterizamos as funções f, g para que o sistema tenha solução local para cada condição inicial $(u_0, v_u) \in L^r(\Omega) \times L^s(\Omega)$, $u_0, v_0 \geq 0$, $1 \leq r, s < \infty$. Nesta direção consideramos também o problema parabólico semilinear com potencial singular $u_t - \Delta u = |\cdot|^{-\gamma} f(u)$ em $\Omega \times (0,T)$ com $\gamma > 0$ e com condições de Dirichlet na fronteira. A função $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é contínua e não decrescente, e Ω é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave contendo a origem ou o espaço todo $\mathbb{R}^N$. Determinamos condições para a existência e não existência de soluções para dados iniciais $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$, com $1 \leq r < \infty$.

Palavras-chave: Sistema parabólico acoplado. Equação do calor com potencial singular. Problema de Dirichlet. Existência local. Não existência. Espaços de Lebesgue.

ABSTRACT

We consider the parabolic system $u_t - a\Delta u = f(v), v_t - b\Delta v = g(u)$ in $\Omega \times (0,T)$, where $a, b > 0$, $f, g \in [0,\infty) \to [0,\infty)$ are continuous and non-decreasing functions, and either Ω is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ or the whole space $\mathbb{R}^N$. We characterize the functions f, g so that the system has a local solution for every initial data $(u_0, v_u) \in L^r(\Omega) \times L^s(\Omega)$, $u_0, v_0 \geq 0$, $1 \leq r, s < \infty$. In this direction we also consider the semilinear parabolic equation with a singular potential $u_t - \Delta u = |\cdot|^{-\gamma} f(u)$ in $\Omega \times (0,T)$ with $\gamma > 0$ and Dirichlet conditions on the boundary. The function $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ is continuous and non-decreasing, and Ω is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ containing the origin or the whole space $\mathbb{R}^N$. We determine conditions for the existence and non-existence of solutions for initial data $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$, with $1 \leq r < \infty$.

Keywords: Coupled parabolic system. Heat equation with singular potential. Dirichlet problem. Local existence. Non-existence. Lebesgue spaces.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho são obtidos resultados de existência local para o seguinte problema fracamente acoplado com dados iniciais singulares

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u &= f(v) \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ v_t - b\Delta v &= g(u) \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = v &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \geq 0 \quad \text{em } \Omega, \\ v(0) &= v_0 \geq 0 \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $a, b > 0$, $f, g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ são funções não decrescentes e contínuas, $u_0 \in L^r(\Omega)$ e $v_0 \in L^s(\Omega)$, com $r, s \geq 1$ Obtenemos também, resultados similares para o seguinte problema parabólico semilinear com potencial singular ou problema parabólico de Hardy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= |\cdot|^{-\gamma} f(u) \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \geq 0 \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $0 < \gamma < \min\{2, N\}$, $|\cdot|^{-\gamma} : \Omega \to [0,\infty)$, $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função não decrescente e contínua, $u_0 \in L^r(\Omega)$, com $r \geq 1$.

Em ambos problemas (1.1) e (1.2), consideramos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é ou um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave ou $\Omega = \mathbb{R}^N$ (neste caso, as condições de fronteira são omitidas), $N \geq 1$ e $T > 0$.

A motivação do estudo destes problemas está relacionado com o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= u^p \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \geq 0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $p > 0$, $T > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é ou um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave ou $\Omega = \mathbb{R}^N$. Quando $p > 1$, dos trabalhos de Brezis, Cazenave, Weissler, Quittner e Souplet (veja (BREZIS; CAZENAVE, 1996), (WEISSLER, 1979), (WEISSLER, 1980), (WEISSLER, 1981) e (QUITTNER; SOUPLET, 2019)), sabemos que existe de um valor crítico $p^* = 1 + 2r/N$ tal que:

1. se $p < p^*$ e $r \geq 1$ ou $p = p^*$ e $r > 1$, então o problema (1.3) tem solução local, para cada $u_0 \in L^r(\Omega)$.

2. se $p > p^*$ e $r > 1$ ou $p = p^*$ e $r = 1$, é possível encontrar uma condição inicial $u_0 \geq 0$ no espaço $L^r(\Omega)$ para a qual o problema (1.3) não tem solução (veja também (CELIK; ZHOU, 2003)).

Baras e Pierre em (BARAS; PIERRE, 1985) consideraram $f(u)$ em lugar de u^p no lado direito do problema (1.3), e assumiram que f é uma função contínua e convexa. Eles determinaram uma condição suficiente e necessária sobre a condição inicial para a existência local de soluções para o problema (1.3). Recentemente, Laister, Robinson, Sierzega e Vidal-López em (LAISTER et al., 2016), consideraram f não negativa, contínua e não decrescentes. Eles mostraram o seguinte resultado:

Teorema 1. ((LAISTER et al., 2016)) Seja $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função contínua e não decrescente.

1. Quando Ω é um domínio limitado.

   a) O problema (1.3) possui uma solução local para cada $u_0 \in L^r(\Omega)$ com $r > 1$ se, e somente se,
   $$\limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty. \tag{1.4}$$
   b) O problema (1.3) possui solução local para cada $u_0 \in L^1(\Omega)$ se, e somente se,
   $$\int_1^\infty t^{-(1+2/N)} F(t)dt < \infty, \tag{1.5}$$
   onde $F(t) = \sup_{1\leq\sigma\leq t} f(\sigma)/\sigma$.

2. Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, as afirmações (a) e (b) permaneceram válidas se substituirmos as condições (1.4) e (1.5) por
   $$\limsup_{t\to 0} f(t)/t < \infty \quad \text{e} \quad \limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty, \tag{1.6}$$
   $$\limsup_{t\to 0} f(t)/t < \infty \quad \text{e} \quad \int_1^\infty t^{-(1+2/N)} \tilde{F}(t)dt < \infty \tag{1.7}$$
   respectivamente, onde $\tilde{F}(t) = \sup_{0\leq\sigma\leq t} f(\sigma)/\sigma$.

No caso de sistemas parabólicos acoplados, relacionados ao nosso problema (1.1), foram inicialmente estudados por Escobedo e Herrero, em (ESCOBEDO; HERRERO, 1993) e (ESCOBEDO; HERRERO, 1991). Especificamente, eles consideraram o seguinte problema
$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= v^p \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ v_t - \Delta v &= u^q \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ u &= v = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \geq 0, v(0) = v_0 \geq 0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{1.8}$$

com $p, q \geq 1$, $pq > 1$ e dados iniciais $u_0, v_0 \in C_b(\Omega)$, onde $C_b(\Omega)$ denota o conjunto das funções contínuas e limitadas. O mesmo problema, com dados iniciais $u_0 \in L^r(\Omega), v_0 \in L^s(\Omega)$ e $1 \leq r, s < \infty$, foi considerado por Dickstein e Loayza em (DICKSTEIN; LOAYZA, 2008), e por Quittner e Souplet em (QUITTNER; SOUPLET, 2019), (QUITTNER; SOUPLET, 2001) e (QUITTNER; SOUPLET, 2002). A partir dos resultados obtidos nesses trabalhos, sabemos que existem valores críticos

$$p_c = s\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{N}\right), \ q_c = r\left(\frac{1}{s} + \frac{2}{N}\right) \tag{1.9}$$

tais que:

1. Se $r, s > 1$, $p \leq p_c$ e $q \leq q_c$ ou $r \geq 1, s = 1$, $p < p_c$ e $q < q_c$ então o problema (1.8) possui uma solução. Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ é necessário assumir que $r \leq qs$ e $s \leq pr$.

2. Se $r, s \geq 1$ e $p > p_c$ ou $q > q_c$, é possível encontrar $(u_0, v_0) \in L^r(\Omega) \times L^s(\Omega)$, de modo que o sistema (1.8) não admite uma solução.

Inspirados nos trabalhos comentados anteriormente, na presente Tese, obtemos os seguintes resultados

Teorema 2. Suponha $r, s > 1$ tais que $|1/r - 1/s| \leq 2/N$.

1. Seja Ω um domínio limitado. O problema (1.1) possui solução local para cada $(u_0, v_0) \in L^r(\Omega) \times L^s(\Omega)$, com $u_0, v_0 \geq 0$ se, e somente se,
$$\limsup_{t\to\infty} t^{-(\frac{s}{r}+\frac{2s}{N})} f(t) < \infty \quad \text{e} \quad \limsup_{t\to\infty} t^{-(\frac{r}{s}+\frac{2r}{N})} g(t) < \infty. \tag{1.10}$$

2. Seja $\Omega = \mathbb{R}^N$. Se o problema (1.1) possui solução local para cada $(u_0, v_0) \in L^r(\mathbb{R}^N) \times L^s(\mathbb{R}^N)$, com $u_0, v_0 \geq 0$, então
$$\limsup_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^{s/r}} < \infty, \quad \limsup_{t\to\infty} t^{-(\frac{s}{r}+\frac{2s}{N})} f(t) < \infty \tag{1.11}$$
e
$$\limsup_{t\to 0} \frac{g(t)}{t^{r/s}} < \infty, \quad \limsup_{t\to\infty} t^{-(\frac{r}{s}+\frac{2r}{N})} g(t) < \infty. \tag{1.12}$$
Reciprocamente, se as condições (1.11) e (1.12) são válidas, então o problema (1.1), com $a = b$, possui solução local para cada $(u_0, v_0) \in L^r(\mathbb{R}^N) \times L^s(\mathbb{R}^N)$, com $u_0, v_0 \geq 0$

Além disso, nas duas situações anteriores, a solução do problema (1.1) pertence ao espaço $[L^\infty_{loc}((0, T), L^\infty(\Omega))]^2$.

Teorema 3. Sejam $r \geq 1$ e Ω um domínio limitado. Para $t \geq 0$, definimos

$$F_r(t) = \sup_{1\leq\sigma\leq t} \frac{f(\sigma)}{\sigma^{1/r}}, \quad G_r(t) = \sup_{1\leq\sigma\leq t} \frac{g(\sigma)}{\sigma^r} \tag{1.13}$$

1. Se
$$\int_1^\infty t^{-(1+2/N)}F_r(t)dt < \infty \quad \text{e} \quad \int_1^\infty t^{-(1+2r/N)}G_r(t)dt < \infty, \tag{1.14}$$
então o problema (1.1), com $a = b$, possui solução local para cada $(u_0, v_0) \in L^r(\Omega) \times L^1(\Omega)$, $u_0, v_0 \geq 0$. Além disso, a solução pertence ao espaço $[L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega))]^2$.

2. Se
$$\lim_{t\to 0^+} t^{-N/(2r')} \int_{t^{-N/2}}^\infty \sigma^{-(1+2/N+1/r')}F_r(\sigma)d\sigma = \infty \tag{1.15}$$
ou
$$\int_1^\infty \sigma^{-(1+2r/N+\varepsilon)}G_r(\sigma)d\sigma = \infty \tag{1.16}$$
para algum $\varepsilon > 0$ quando $r > 1$ e $\varepsilon = 0$ quando $r = 1$ então existe $(u_0, v_0) \in L^r(\Omega) \times L^1(\Omega)$, $u_0, v_0 \geq 0$ tal que o problema (1.1) não possui solução local. O valor r' é o conjugado de $1 \leq r < \infty$ e é definida por $1/r' = 1 - 1/r$.

Teorema 4. Sejam $r \geq 1$, $a, b > 0$, $\Omega = \mathbb{R}^N$ e
$$\bar{F}_r(t) = \sup_{0<\sigma\leq t} \frac{f(\sigma)}{\sigma^{1/r}}, \quad \bar{G}_r(t) = \sup_{0<\sigma\leq t} \frac{g(\sigma)}{\sigma^r} \tag{1.17}$$
para $t > 0$.

1. Se
$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t^{1/r}} < \infty, \quad \limsup_{t\to 0^+} \frac{g(t)}{t^r} < \infty,$$
$$\int_1^\infty t^{-(1+2/N)}\bar{F}_r(t)dt < \infty \quad \text{e} \quad \int_1^\infty t^{-(1+2r/N)}\bar{G}_r(t)dt < \infty,$$
então o problema (1.1), com $a = b$, tem uma solução local para cada $(u_0, v_0) \in L^r(\mathbb{R}^N) \times L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, a solução pertence ao espaço $[L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^N))]^2$.

2. Se alguma das seguintes condições é verdadeira:

   a) $\displaystyle\limsup_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t^{1/r}} = \infty$;

   b) $\displaystyle\limsup_{t\to 0^+} \frac{g(t)}{t^r} = \infty$;

   c) $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^{-\frac{N}{2r'}} \int_{t^{-N/2}}^\infty \sigma^{-(1+\frac{2}{N}+\frac{1}{r'})}\bar{F}_r(\sigma)d\sigma = \infty$;

   d) $\displaystyle\int_1^\infty \sigma^{-(1+\frac{2r}{N}+\varepsilon)}\bar{G}_r(\sigma)d\sigma = \infty$ ($\varepsilon > 0$ se $r > 1$, $\varepsilon = 0$ se $r = 1$),

   então existe uma condição inicial $(u_0, v_0) \in L^r(\mathbb{R}^N) \times L^1(\mathbb{R}^N)$, $u_0, v_0 \geq 0$ tal que o problema (1.1) não possui solução local.

Os Teoremas 2, 3 e 4 fazem parte de um artigo que foi publicado no *Journal of Differential Equations* (veja (APARCANA et al., 2020)). Com os resultados obtidos, alguns casos que estavam na literatura em aberto foram resolvidos. Por exemplo, o caso $r = 1, p = p_c$ e $q < q_c$; o caso $s = 1$, $p < p_c$, $q = q_c$; o caso $r = s = 1, p = p_c$ e $q = q_c$.

Por outro lado, quando a não linearidade tem um potencial que depende da variável espacial $x \in \Omega$, o problema é mais delicado. Loayza em (LOAYZA, 2006) considerou o seguinte problema

$$u_t - \Delta u = a(x)u^q + b(x)u^p \tag{1.18}$$

onde $a \in L^{\alpha}(\Omega)$ e $b \in L^{\beta}(\Omega)$, com $1 \leq \alpha, \beta < \infty$, Ω domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, e $0 < q \leq 1 < p$. Nesse trabalho foram mostrados resultados de existência, unicidade e regularidade das soluções do problema (1.18), com condição inicial $u_0 \in L^r(\Omega)$, $r \geq 1$. De outro lado, Baras e Goldstein estudaram o problema (1.18) em (BARAS; GOLDSTEIN, 1984) com $a(x) = \lambda|x|^{-2}$, $\lambda > 0$, $b(x) = 0$ e $q = 1$. Eles mostraram que se $\lambda \leq \lambda^*$ e a condição inicial $u_0 \in L^1(\Omega)$ verifica $\int_{\Omega} |x|^{-\alpha}u_0(x)dx < \infty$, onde α é a menor raiz de $(N - 2 - \alpha)\alpha = \lambda$, então o problema (1.18) tem solução fraca positiva. Para o caso em que $\lambda > \lambda^*$, o problema (1.18) não admite solução fraca não negativa, com condição inicial $u_0 \in L^1(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$. O valor $\lambda^* = (N-2)^2/4$ é a constante ótima que corresponde à desigualdade de Hardy (veja também (CABRÉ; MARTEL, 1999)). O caso em que $a(x) = 0$, $b(x) = |x|^{-\gamma}$, com $0 < \gamma < \min\{2, N\}$, e $\Omega = \mathbb{R}^N$, foi considerado por Slimene, Tayachi e Weissler, os quais mostraram em (SLIMENE; TAYACHI; WEISSLER, 2017) que o problema (1.18) tem solução local para $u_0 \in L^r(\Omega)$, com $r > 1$, se $1 < p \leq p^*$, onde

$$p^* = \frac{(2-\gamma)r}{N} + 1. \tag{1.19}$$

Para $p > p^*$, a unicidade falha, ou seja, existe uma solução positiva para o problema (1.18) para a condição inicial $u_0 = 0$ em $L^r(\Omega)$, se $\dfrac{(2-\gamma)}{N} + 1 < p < 1 + \dfrac{2(2-\gamma)}{N-2}, N \geq 3$.

Motivados pelos resultados anteriores, obtemos os seguintes resultados para o problema (1.2).

Teorema 5. Seja $r > 1$

1. Suponhamos que Ω é domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e $0 \in \Omega$. O problema (1.2) possui uma solução local para cada $u_0 \in L^r(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ se, e somente se,

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty. \tag{1.20}$$

2. Suponhamos que $\Omega = \mathbb{R}^N$.

a) Se $\gamma < N/r$,

$$\limsup_{t\to 0} t^{-[1-(\gamma r)/N+\epsilon]} f(t) < \infty \quad \text{e} \quad \limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty, \tag{1.21}$$

para algum $\epsilon \in (0, \gamma r/N)$, ou

$$\gamma > N/r \quad \text{e} \quad \limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty, \tag{1.22}$$

então o problema (1.2) possui solução local para cada $u_0 \in L^r(\Omega)$, com $u_0 \geq 0$.

b) Se $\gamma < N/r$ e $\limsup_{t\to 0} t^{-[1-(\gamma r)/N]} f(t) = \infty$ ou $\limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) = \infty$, então existe $u_0 \in L^r(\Omega)$ com $u_0 \geq 0$ tal que o problema (1.2) não possui solução.

Teorema 6. Seja $r = 1$.

1. Suponhamos que Ω é domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $0 \in \Omega$ e $F(s) = \sup_{1\leq\sigma\leq s} f(\sigma)/\sigma$ para $s \geq 1$.

   a) Se
   $$\int_1^\infty s^{-[(2-\gamma)/N+1]} F(s)ds = \infty, \tag{1.23}$$
   então existe $u_0 \in L^1(\Omega), u_0 \geq 0$, tal que o problema (1.2) não possui solução local.

   b) Se
   $$\lim_{t\to 0} t^{\gamma/2} \int_{t^{-N/2}}^\infty (t - s^{-2/N})^{-\gamma/2} s^{-(2-\gamma)/N-1} F(s)ds = 0, \tag{1.24}$$
   então para cada $u_0 \in L^1(\Omega), u_0 \geq 0$, existe uma solução local para o problema (1.2).

2. Suponhamos que $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $F(s) = \sup_{0<\sigma\leq s} f(\sigma)/\sigma$ para $s > 0$.

   a) Se $\limsup_{t\to 0} t^{-(1-\gamma/N)} f(t) = \infty$ ou
   $$\int_1^\infty s^{-[(2-\gamma)/N+1)} F(s)ds = \infty, \tag{1.25}$$
   então existe $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0$ tal que o problema (1.2) não possui solução local.

   b) Se
   $$\limsup_{t\to 0} t^{-(1-\gamma/N)} f(t) < \infty \tag{1.26}$$
   e
   $$\lim_{t\to 0} t^{\gamma/2} \int_{t^{-N/2}}^\infty (t - s^{-2/N})^{-\gamma/2} s^{-(2-\gamma)/N-1} F(s)ds = 0, \tag{1.27}$$
   então para cada $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0$, o problema (1.2) possui solução local.

Em relação à unicidade temos o seguinte resultado.

Teorema 7. Suponhamos que $0 < \gamma < \min\{2, N\}$ e $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ diferenciável. O problema (1.2) possui uma única solução na classe $L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$, se $f'(u) \in L^\infty((0,T), L^\alpha(\Omega))$ para cada $u \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$, onde $\alpha > N/(2-\gamma)$ e $1/\alpha + 1/r < 1 - \gamma/N$.

Os Teoremas 5, 6 e 7 fazem parte de um segundo artigo (veja (CASTILLO; GUZMÁN-REA; LOAYZA,)), o qual encontra-se submetido. Os resultados obtidos estendem o caso $f(s) = s^p$ até o momento considerado. Além disso, analisamos o caso onde as condições iniciais pertencem ao espaço $L^1(\Omega)$, o qual, até onde sabemos, não tem sido tratado mesmo no caso particular $f(s) = s^p$.

2 PRELIMINARES

2.1 Espaços L^p

Nesta seção apresentamos algumas propriedades dos espaços L^p. Maiores detalhes podem ser encontrados em (BREZIS, 2010), (EVANS, 2010) e (FOLLAND, 2013).

Definição 2.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e $1 \leq p \leq \infty$. Para $1 \leq p < \infty$ temos que*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } |f|^p \text{ é integrável }\}.$$

No caso $p = \infty$ temos

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \exists\, C > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq C, q.t.p \text{ de } \Omega\},$$

onde q.t.p de Ω significa quase todo ponto de Ω.

O conjunto $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach se consideramos a norma

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty; \\ \sup\limits_{x\in\Omega} ess|f(x)| = \inf\{C; |f(x)| \leq C, \text{ q.t.p de } \Omega\}, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Os seguintes resultados apresentam algumas propriedades de convergência nos espaços $L^p(\Omega)$.

Teorema 2.2 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^1(\Omega)$ tal que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para quase todo ponto x de Ω e $\sup\limits_n \int_\Omega f_n < \infty$. Então $f_n(x)$ converge para $f(x)$ para quase todo ponto em Ω. Além disso, $f \in L^1(\Omega)$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|dx = 0$.*

Teorema 2.3 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^1(\Omega)$ tal que $f_n(x) \to f(x)$, quando $n \to \infty$, para quase todo ponto x de Ω. Se existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para quase todo ponto x de Ω e para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f \in L^1(\Omega)$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|dx = 0$.*

Definição 2.4. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $u|_K \in L^p(K)$ para todo compacto $K \subset \Omega$.*

Seja X um espaço de Banach com a norma $\| \cdot \|_X$.

Definição 2.5. *Sejam $p \in [1, \infty]$ e I um intervalo da reta. Definimos por $L^p(I, X)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : I \to X$ tais que a função $t \mapsto \|f(t)\|_X$ pertence a $L^p(I)$.*

Para $f \in L^p(I, X)$, definimos no caso $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \left\{ \int_I \|f(t)\|_X^p dt \right\}^{1/p}.$$

No caso $p = \infty$ definimos

$$\|f\|_{L^\infty(I,X)} = \sup_{t \in I} ess \|f(t)\|_X.$$

Denotamos por:

(i) $C^k(I, X)$, o espaço formado pelas funções que são k vezes continuamente diferenciáveis sobre I com valores em X.

(ii) $\mathcal{D}(I, X)$, o conjunto de todas as funções $f : I \to X$ com suporte compacto em I, equipado com a topologia da convergência uniforme de todas as derivadas sobre subintervalos compactos de I.

(iii) $L^p_{loc}(I, X)$, o espaço das funções mensuráveis $f : I \to X$ tais que $f|_J \in L^p(J, X)$ para qualquer subintervalo limitado J de I.

(iv) $C_0(I, X)$, o fecho do conjunto $\mathcal{D}(I, X)$ em $L^\infty(I, X)$.

2.2 Equação do calor

Nesta seção apresentamos algumas propriedades do operador Laplaciano em alguns espaços e algumas propriedades sobre a equação do calor homogênea. Para mais detalhes veja (CAZENAVE et al., 1998) e (PAZY, 2012).

Seja Ω qualquer subconjunto aberto não vazio de $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 1$. Consideremos o seguinte operador $A : D(A) \subset X \to X$, onde X é um espaço de Banach e $D(A)$ é o domínio do operador A. Quando $A = -\Delta$, chamamos de operador Laplaciano e, nas seguintes situações, dizemos que o operador A gera um semigrupo o qual denotaremos por $\{S(t)\}_{t \geq 0}$:

1. $X = H^{-1}(\Omega)$ e $D(A) = H_0^1(\Omega)$.

2. $X = L^2(\Omega)$ e $D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$.

3. $X = L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$ e $D(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

4. $X = L^1(\Omega)$ e $D(A) = \{u \in W_0^{1,1}(\Omega); \Delta u \in L^1(\Omega)\}$.

5. $X = L^\infty(\Omega)$ e $D(A) = \{u \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^\infty(\Omega)\}$.

6. $X = C_0(\Omega)$ e $D(A) = \{u \in C_0(\Omega); \Delta u \in C_0(\Omega)\}$.

Nos casos 3 e 4 precisamos que o subconjunto Ω tenha fronteira suave e no caso 5 precisamos que o subconjunto Ω seja limitado.

Consideremos agora o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(0) &= u_0, \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Proposição 2.6. *Seja $u(t) = S(t)u_0$, com $t \geq 0$.*

1. *Se $u_0 \in L^2(\Omega)$, então u é solução do problema (2.1) e $u \in C([0,\infty), L^2(\Omega)) \cap C^1((0,\infty), L^2(\Omega))$, $\Delta u \in C((0,\infty), L^2(\Omega))$. Além disso, temos*

$$\begin{aligned} &u \in C((0,\infty), H_0^1(\Omega)), \\ &\|\Delta u\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{t}}\|u_0\|_{L^2} \text{ para } t > 0, \\ &\|\nabla u\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{t}}\|u_0\|_{L^2}, \text{ para } t > 0. \end{aligned}$$

2. *Se $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, então $u \in C([0,\infty), H_0^1(\Omega))$ e $\|\Delta u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2t}}\|\nabla u_0\|_{L^2}$, para $t > 0$.*

3. *Se $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$, então $u \in C^1([0,\infty), L^2(\Omega))$, $\Delta u \in C([0,\infty), L^2(\Omega))$ e $u_t(x,0) - \Delta u(x,0) = 0$.*

4. *Se $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, então $u \in C([0,\infty), H^2(\Omega))$.*

Para a demonstração da Proposição veja (CAZENAVE et al., 1998, Proposição 3.5.2 e 3.5.3)

Uma das estimativas mais comuns para o semigrupo do calor nos espaços de Lebesgue, é conhecida como efeito regularizante.

Proposição 2.7 (Efeito regularizante)**.** *Sejam* $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$, $t > 0$ *e* $\psi \in L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$

$$\|S(t)\psi\|_{L^{q_2}} \leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right)}\|\psi\|_{L^{q_1}}. \tag{2.2}$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (CAZENAVE et al., 1998, Teorema 3.5.7) ou (QUITTNER; SOUPLET, 2019, Proposição 48.4).

Lema 2.8. *Seja* $\mathcal{K} \subset L^q(\Omega)$ *um conjunto compacto e seja* $r \in (q, \infty]$. *Existe uma função* $\Gamma : (0, 1] \to (0, \infty)$ *com* $\lim_{t \to 0^+} \Gamma(t) = 0$, *tal que*

$$t^{\alpha}\|S(t)u_0\|_{L^r} \leq \Gamma(t),$$

para todo $t \in (0, 1)$ *e todo* $u_0 \in \mathcal{K}$, *onde* $\alpha = \dfrac{N}{2}\left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{r}\right)$.

Para a demonstração deste resultado veja (BREZIS; CAZENAVE, 1996, Lema 8).

Seja

$$[S(t)u_0](x) = \int_{\Omega} K_{\Omega}(x, y; t)u_0(y)dy, \tag{2.3}$$

solução do problema (2.1), onde $u_0 \in L^1(\Omega)$ e K_{Ω} é o núcleo do calor de Dirichlet em Ω.

Dos resultados apressentados por Van der Berg em (BERG, 1990, Teorema 2 e Lemas 8 e 9), temos as seguinte estimativa para K_{Ω}

$$K_{\Omega}(x, y; t) \geq \exp(-N^2\pi^2 t/4\delta^2)(4\pi t)^{-N/2}\exp(-|x - y|^2/4t), \tag{2.4}$$

para $t > 0$, desde que o segmento de reta que une x e y esteja a uma distância de pelo menos δ de $\partial\Omega$.

Agora, consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(0) &= u_0, \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.5}$$

O seguinte teorema é um resultado de regularidade da solução do problema (2.5). Este resultado é conhecido como regularidade maximal.

Teorema 2.9. *Sejam* $T > 0$, $p, q \in (1, \infty)$, $f \in L^p((0, T), L^q(\Omega))$ *e a função* u *definida por*

$$u(t) = \int_0^t S(t - \sigma)f(\sigma)d\sigma.$$

Então $u \in W^{1,p}((0, T), L^q(\Omega))$, $\Delta u \in L^p((0, T), L^q(\Omega))$ *e existe uma constante* C *tal que*

$$\|u_t\|_{L^p((0,T),L^q)} + \|\Delta u\|_{L^p((0,T),L^q)} \leq C\|f\|_{L^p((0,T),L^q)}.$$

Para mais detalhes veja (LAMBERTON, 1987, Corolário 1.1).

2.3 Lemas importantes

Nesta seção apresentamos dois resultados que serão usados nos capítulos seguintes. O primeiro deles é inspirado no resultado dado em (PINSKY, 1997, Lema 6) e o segundo resultado foi estabelecido em (LAISTER et al., 2016, Lema 4.2).

Lema 2.10. *Para $\gamma \geq 0$ e $t > 0$, a função $H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por*

$$H(x) \equiv (4\pi t)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4t}\right) |y|^{-\gamma} dy$$

atinge seu máximo em $x = 0$.

Demonstração. Para cada $\delta > 0$, definimos a seguinte função $H_\delta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$,

$$H_\delta(x) \equiv (4\pi t)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4t}\right) (\delta + |y|)^{-\gamma} dy$$

Então por (PINSKY, 1997, Lema 6) temos que $H_\delta(x) \leq H_\delta(0)$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$. Como $\gamma < N$, o resultado segue do Teorema 2.1, fazendo $\delta \to 0^+$. □

Lema 2.11. *Sejam $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função não decrescente e $p > 1$. As seguintes afirmações são equivalentes :*

(i) Existe uma sequência $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $s_{k+1} \geq \theta s_k$, com $\theta > 1$ e

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k^{-p} f(s_k) = \infty.$$

(ii) $\displaystyle\int_1^\infty \sigma^{-p} F(\sigma) d\sigma = \infty$, *onde* $F(s) = \sup_{1 \leq t \leq s} f(t)/t$.

3 EXISTÊNCIA LOCAL DE UM SISTEMA PARABÓLICO FRACAMENTE ACOPLADO EM ESPAÇOS DE LEBESGUE

3.1 Introdução

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ou um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave ou $\Omega = \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $a, b > 0$, $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ funções contínuas e não decrescentes, $u_0 \in L^r(\Omega)$ e $v_0 \in L^s(\Omega)$, com $1 \leq r, s < \infty$. Consideremos o seguinte sistema parabólico

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u &= f(v) \text{ em } \Omega \times (0, T), \\ v_t - b\Delta v &= g(u) \text{ em } \Omega \times (0, T), \\ u &= v = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) &= u_0 \geq 0, v(0) = v_0 \geq 0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

No caso que $\Omega = \mathbb{R}^N$ as condições de fronteira são omitidas. O sistema (3.1) é chamado de fracamente acoplado (veja (DICKSTEIN; LOAYZA, 2008)). Neste capítulo determinamos condições para a existência e não existência de soluções do problema (3.1). Antes disso, definimos o conceito de solução do problema (3.1) e apresentamos dois lemas úteis para a demonstração dos resultados de não existência.

Definição 3.1. *Sejam $a, b > 0$, $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ funções contínuas e $(u_0, v_0) \in L^r(\Omega) \times L^s(\Omega)$, com $u_0, v_0 \geq 0$ e $1 \leq r, s < \infty$. Um par (u, v), cujas coordenadas são funções não negativas definidas em quase todo ponto de $\Omega \times (0, T)$, para algum $T > 0$, é dita uma solução do problema (3.1) se $u \in L^\infty((0, T), L^r(\Omega))$, $v \in L^\infty((0, T), L^s(\Omega))$ e verificam o seguinte sistema*

$$\begin{cases} u(t) &= S_a(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S_a(t - \sigma)f(v(\sigma))d\sigma, \\ v(t) &= S_b(t)v_0 + \displaystyle\int_0^t S_b(t - \sigma)g(u(\sigma))d\sigma, \end{cases} \tag{3.2}$$

em quase todo ponto de $\Omega \times (0, T)$, onde $\{S_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$, para $\alpha > 0$, é dado por $S_\alpha(t) = S(\alpha t)$ para $t \geq 0$ e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ denota o semigrupo do calor (veja o Capítulo 1, para maiores detalhes, ou veja (DICKSTEIN; LOAYZA, 2008) e (QUITTNER; SOUPLET, 2019, Capítulo III)).

Daqui em diante denotamos por $B_\rho(x) \subset \mathbb{R}^N$ a bola centrada em x com raio $\rho > 0$, e denotamos por χ_ρ a função característica em $B_\rho(0)$.

Lema 3.2. *Sejam $\alpha > 0$ e $0 < \beta < N$, e sejam $\rho, \delta > 0$ tal que $B_{\rho+2\delta} \subset \Omega$. Existe uma constante $c_N \in (0,1)$, dependendo apenas de N, tal que*

1.
$$S_\alpha(t)\chi_\rho \geq c_N \left(\frac{\rho}{\rho + \sqrt{\alpha t}}\right)^N \chi_{\rho+\sqrt{\alpha t}}, \tag{3.3}$$
para todo $0 < t \leq \delta^2/\alpha$.

2.
$$S_\alpha(t)|\cdot|^{-\beta}\chi_\rho \geq c'_N(\alpha t)^{-\beta/2}\chi_{\sqrt{\alpha t}} \tag{3.4}$$
para todo $0 < t \leq \min\{\delta^2, \rho^2\}/\alpha$.

Demonstração. (i) segue diretamente de (LAISTER et al., 2016, Lema 2.1). Para mostrar (ii), observemos que por hipótese temos que $B_{\rho+2\delta} \subset \Omega$, então para cada $x \in B_{\sqrt{\alpha t}}$, temos $dist(x, \partial\Omega) \geq \delta$. Assim, pela estimativa (2.4), para $|x| \leq \sqrt{\alpha t}$, temos

$$\begin{aligned}
[S_\alpha(t)|\cdot|^{-\beta}\chi_\rho](x) &\geq e^{-\frac{N^2\pi^2\alpha t}{4\delta^2}}(4\alpha\pi t)^{-N/2}\int_{B_\rho} e^{\frac{-|x-y|^2}{4\alpha t}}|y|^{-\beta}dy \\
&\geq e^{-\frac{N^2\pi^2\alpha}{4}}(4\alpha\pi t)^{-N/2}e^{-\frac{|x|^2}{2\alpha t}}\int_{B_\rho} e^{-\frac{|y|^2}{2\alpha t}}|y|^{-\beta}dy \\
&\geq C(\alpha t)^{-\beta/2}\int_{B_{\frac{\rho}{\sqrt{\alpha t}}}} e^{-\frac{|z|^2}{2}}|z|^{-\beta}dz
\end{aligned}$$

onde $C = e^{-\frac{N^2\pi^2\alpha}{4}}(4\alpha\pi)^{-N/2}e^{-1/2}$. Como $B_1 \subset B_{\frac{\rho}{\sqrt{\alpha t}}}$, o resultado segue. □

Observação 1. *Quando $\Omega = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ e $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^\mathbb{N})$ temos que*

$$[S(t)u_0](x) = \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y)u_0(y)dy,$$

onde $K_t(x) = (4\pi t)^{-N/2}\exp(-|x|^2/4t)$ é o núcleo do calor. Logo, argumentando como na prova do (LAISTER et al., 2016, Lema 2.1), é possível mostrar que existe uma constante $c'_N > 0$, dependendo apenas de N, para a qual a estimativa (3.3) é satisfeita para $t > 0$.

O seguinte resultado é uma extensão do Lema 2.11 ($\gamma = 1$).

Lema 3.3. *Suponha que $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função não decrescente, $q > 1$ e $\gamma > 0$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) Existe uma sequência $\{s_k\}_{k\geq 1}$ *tal que* $s_{k+1} \geq \theta s_k$*,* $\theta > 1$ *e*

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k^{1-q-\gamma} f(s_k) = \infty.$$

(ii) $\displaystyle\int_1^{\infty} t^{-q} F(t)dt = \infty$*, onde* $\displaystyle F(t) = \sup_{1\leq\sigma\leq t} \frac{f(\sigma)}{\sigma^{\gamma}}$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Como a sequência $\{s_k\}_{k\geq 1}$ é não decrescente e $\lim_{k\to\infty} s_k = \infty$, então podemos assumir que $s_k \geq 1$ para cada $k \geq 1$. Consequêntemente,

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} t^{-q} F(t)dt &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{s_k}^{s_{k+1}} t^{-q} F(t)dt \\
&\geq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{s_k}^{s_{k+1}} t^{-q} F(s_k)dt \\
&\geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(s_k)}{s_k^{\gamma}} \int_{s_k}^{s_{k+1}} t^{-q}dt \\
&= \frac{1}{q-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(s_k)}{s_k^{\gamma}} (s_k^{-q+1} - s_{k+1}^{-q+1}) \\
&= \frac{1}{q-1} \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{-q-\gamma+1} f(s_k) \left(1 - \frac{s_{k+1}^{-q+1}}{s_k^{-q+1}}\right) \\
&\geq \frac{1}{q-1} (1-\theta^{(-q+1)}) \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{-q-\gamma+1} f(s_k),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

a partir disso, obtemos (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$ Escolhendo $\theta > 1$ e consideremos a sequência $\{\sigma_k\}_{k\geq 1}$ dada por $\sigma_k = \theta^k$, para $k \geq 1$. Observemos que $F(s) \leq F(\sigma_{n+1})$, $\forall s \in (\sigma_n, \sigma_{n+1}]$. Existe uma sequência $\{k_n\}_{n\geq 1}$ com $k_n \leq n$ e $k_n \leq k_{n+1}$ tal que $F(\sigma_{n+1}) = \dfrac{f(\tau_n)}{\tau_n^{\gamma}}$ para algum $\tau_n \in (\sigma_{k_n}, \sigma_{k_{n+1}}]$. Logo,

$$F(s) \leq F(\sigma_{n+1}) \leq \frac{f(\sigma_{k_n+1})}{\sigma_{k_n}^{\gamma}}, \forall s \in (\sigma_n, \sigma_{n+1}].$$

Portanto,

$$\int_1^{\infty} s^{-q} F(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\sigma_n}^{\sigma_{n+1}} s^{-q} F(s)ds \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\sigma_{k_n+1})}{\sigma_{k_n}^{\gamma}} \int_{\sigma_n}^{\sigma_{n+1}} s^{-q}ds. \tag{3.6}$$

Notemos que há uma sequência crescente n_j tal que $k_{n_j} = k_n < k_{n_j+1}$, $n =$

$n_j, \cdots, n_{j+1}-1$, e assim

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\sigma_{k_n+1})}{\sigma_{k_n}^{\gamma}} \int_{\sigma_n}^{\sigma_{n+1}} \sigma^{-q} d\sigma &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(\sigma_{k_{n_j}+1})}{\sigma_{k_{n_j}}^{\gamma}} \int_{\sigma_{k_{n_j}}}^{\sigma_{k_{n_j}+1}} \sigma^{-q} d\sigma \\ &= \frac{1}{q-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(\sigma_{k_{n_j}+1})}{\sigma_{k_{n_j}}^{\gamma}} (\sigma_{k_{n_j}}^{1-q} - \sigma_{k_{n_j}+1}^{1-q}) \\ &= \frac{1}{q-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(\sigma_{k_{n_j}+1})}{\sigma_{k_{n_j}}^{\gamma}} \sigma_{k_{n_j}+1}^{1-q} \left[\left(\frac{\sigma_{k_{n_j}}}{\sigma_{k_{n_j}+1}} \right)^{1-q} - 1 \right] \\ &= \frac{\theta^q(\theta^{q-1}-1)}{q-1} \sum_{j=1}^{\infty} f(\sigma_{k_{n_j}+1}) \sigma_{k_{n_j}+1}^{-q-\gamma+1}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Tomando $s_j = \sigma_{k_{n_j}+1}$ então temos (i). □

Lema 3.4. *Sejam $p > 0$ e $q > 0$ tal que $pq > 1$. Consideremos as sequências $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por*

$$\frac{p}{\theta_0} - \frac{1}{\zeta_0} = c_1 \quad e \quad \frac{q}{\zeta_0} - \frac{1}{\theta_0} = c_2 \tag{3.8}$$

e

$$\frac{p}{\theta_n} - \frac{1}{\zeta_{n+1}} = d_1 \quad e \quad \frac{q}{\zeta_n} - \frac{1}{\theta_{n+1}} = d_2, \ para\ n \geq 1, \tag{3.9}$$

com $\zeta_0, \theta_0 > 0$, $0 < c_1 < d_1$ e $0 < c_2 < d_2$. Então as sequências $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências crescentes tal que $\dfrac{p}{\theta_{n_0}} < d_1$ e $\dfrac{q}{\zeta_{n_0}} < d_2$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$.

Para a demonstração veja (DICKSTEIN; LOAYZA, 2008, p. 6)

3.2 Resultado de existência

Para os resultados de existência local, usamos o método de super e subsolução. Portanto, é necessário definir o que entedemos por super e subsolução do problema (3.1).

Definição 3.5. *Sejam $a, b > 0$, $f, g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ funções contínuas e $(u_0, v_0) \in L^r(\Omega) \times L^s(\Omega)$, com $u_0, v_0 \geq 0$ e $1 \leq r, s < \infty$. Dizemos que um par $(\overline{u}, \overline{v})$, cujas coordenadas são funções não negativas definidas quase sempre em $\Omega \times (0,T)$, para algum $T > 0$, é uma supersolução de (3.1) se*

$$(\bar{u}, \bar{v}) \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega)) \times L^\infty((0,T), L^s(\Omega)),$$

e verificam

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &\geq S_a(t)u_0 + \int_0^t S_a(t-\sigma) f(\bar{v}(\sigma)) d\sigma, \\ \bar{v}(t) &\geq S_b(t)v_0 + \int_0^t S_b(t-\sigma) g(\bar{u}(\sigma)) d\sigma. \end{aligned}$$

Subsoluções são definidas analogamente, com desigualdades invertidas.

O resultado a seguir é uma versão, para o problema (3.1), do resultado da existência local dado em (ROBINSON; SIERŻĘGA, 2013, Teorema 1).

Lema 3.6. *Suponha que $a, b > 0$, $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ são funções contínuas e não decrescentes, e $(u_0, v_0) \in L^r(\Omega) \times L^s(\Omega)$, com $u_0, v_0 \geq 0$ e $1 \leq r, s < \infty$. O problema (3.1) admite uma solução em $\Omega \times (0, T)$ se e somente se admitir uma supersolução em $\Omega \times (0, T)$.*

Demonstração. Por definição, toda solução de (3.1) é ao mesmo tempo uma supersolução de (3.1). Assim, precisamos apenas mostrar que a existência de uma supersolução do problema (3.1) implica a existência de uma solução do problema (3.1). Para isto, consideremos u, v funções não negativas definidas em quase todo ponto de $\Omega \times (0, T)$, e definimos os operadores $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$; por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(v)(t) &= S_a(t)u_0 + \int_0^t S_a(t-\sigma) f(v(\sigma)) d\sigma, \\ \mathcal{F}_2(u)(t) &= S_b(t)v_0 + \int_0^t S_b(t-\sigma) g(u(\sigma)) d\sigma. \end{aligned}$$

Observamos que $\bar{u} \geq \mathcal{F}_1(\bar{v})$ e $\bar{v} \geq \mathcal{F}_2(\bar{u})$, pois $(\bar{u}, \bar{v})$ é uma supersolução de (3.1).

Usando a monotonicidade de f e g, e o fato de o semigrupo de calor preservar a positividade, concluímos que $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são não decrescentes. Portanto, se $u_1 = \mathcal{F}_1(\bar{v})$, $v_1 = \mathcal{F}_2(\bar{u})$ e $u_{k+1} = \mathcal{F}_1(v_k)$, $v_{k+1} = \mathcal{F}_2(u_k)$, então $u_1 = \mathcal{F}_1(\bar{v}) \leq \bar{u}$, $v_1 = \mathcal{F}_2(\bar{u}) \leq \bar{v}$, $u_2 = \mathcal{F}_1(v_1) \leq \mathcal{F}_1(\bar{v}) = u_1$, $v_2 = \mathcal{F}_2(u_1) \leq \mathcal{F}_2(\bar{u}) = v_1$, e assim sucessivamente. Por consequência , $\{u_k\}_{k\geq 1}$ e $\{v_k\}_{k\geq 1}$ são sequências não crescentes.

Sejam

$$u(x,t) = \lim_{k\to\infty} u_k(x,t) \quad \text{e} \quad v(x,t) = \lim_{k\to\infty} v_k(x,t)$$

sempre que eles existem. Afirmamos que (u, v) é solução de (3.1).

De fato, pela continuidade de f e g, e pelo teorema da convergência monótona, é possível concluir que $\lim_{k\to\infty} \mathcal{F}_1(v_k) = \mathcal{F}_1(v)$ e $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_2(u_k) = \mathcal{F}_2(u)$ quase sempre em $\Omega \times (0, T)$. Assim, devido à construção das sequências, temos $u = \mathcal{F}_1(v)$ e $v = \mathcal{F}_2(u)$ quase sempre em $\Omega \times (0, T)$. □

No seguinte resultado, determinamos a existência de soluções para o problema (3.1) no caso $r, s > 1$.

Teorema 3.7. *Sejam $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ funções contínuas e não decrescentes. Sejam também $a, b > 0$ e $r, s > 1$ tal que $|1/r - 1/s| \leq 2/N$.*

1. *Considere Ω um domínio limitado. O problema (3.1) possui uma solução local para cada $(u_0, v_0) \in L^r(\Omega) \times L^s(\Omega)$, com $u_0, v_0 \geq 0$, se e somente se,*

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-p_c} f(t) < \infty \quad e \quad \limsup_{t\to\infty} t^{-q_c} g(t) < \infty. \tag{3.10}$$

2. *Seja $\Omega = \mathbb{R}^N$. Se o problema (3.1) possui uma solução local para cada $(u_0, v_0) \in L^r(\mathbb{R}^N) \times L^s(\mathbb{R}^N)$, com $u_0, v_0 \geq 0$, então*

$$\limsup_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^{s/r}} < \infty,\ \limsup_{t\to\infty} t^{-p_c} f(t) < \infty,\ e \tag{3.11}$$

$$\limsup_{t\to 0} \frac{g(t)}{t^{r/s}} < \infty,\ \limsup_{t\to\infty} t^{-q_c} g(t) < \infty. \tag{3.12}$$

Por outro lado, se as condições (3.11) e (3.12) são verdadeiras, então o problema (3.1), com $a = b$, possui solução para cada $(u_0, v_0) \in L^r(\mathbb{R}^N) \times L^s(\mathbb{R}^N)$.

Nas duas situações, a solução encontrada para o problema (3.1) pertence ao espaço $[L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega))]^2$.

Observação 2. *Segue abaixo algumas observações sobre o Teorema 3.7.*

1. *A condição $|1/r - 1/s| \leq 2/N$ implica que os valores críticos $p_c = s\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{N}\right)$, $q_c = r\left(\frac{1}{s} + \frac{2}{N}\right)$, verificam $p_c, q_c \geq 1$. Se $0 < p_c < 1$ ou $0 < q_c < 1$, é possivel tratar o problema (3.1) num domímio limitado com uma condição sobre a condição inicial: $u_0(x), v_0(x) \geq \gamma\ dist(x, \partial\Omega)$ para todo $x \in \Omega$ e para alguma constante $\gamma > 0$. Esta condição foi usada para estudar o problema* (1.3) *com a não linearidade $f(t) = t^{p_1} + t^{p_2}$ e $0 < p_1 < 1 < p_2$ em (LOAYZA, 2006).*

2. *Observamos que se $f = g$ e $r = s$, então o Teorema 3.7 coincide com o Teorema 1 que foi enunciado na introdução.*

3. *Se $f(t) = t^p$ e $g(t) = t^q$ para $t \geq 0$, então a condição* (3.10) *é a mesma obtida em (QUITTNER; SOUPLET, 2019, Teorema 32.1). Além disso, as condições*

$$\limsup_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^{s/r}} < \infty \quad e \quad \limsup_{t\to 0} \frac{g(t)}{t^{r/s}} < \infty$$

são satisfeitas se $s \leq pr$ e $r \leq qs$. Essas condições foram consideradas no Teorema 2.3 de (DICKSTEIN; LOAYZA, 2008).

4. *A parte de não existência do Teorema 3.7 é mostrada usando argumentos similares de (LAISTER et al., 2016). Na parte de existência local é mostrada usando o princípio de comparação estabelecido no Lema 3.6.*

Demonstração. (i) Sem perda de generalidade, assumimos que $0 \in \Omega$. Suponhamos que o problema (3.1) possui solução local para cada dado inicial $(u_0, v_0) \in L^r(\Omega) \times L^s(\Omega)$, com $u_0, v_0 \geq 0$, e que a condição (3.10) não é válida, ou seja $\limsup_{t\to\infty} t^{-p_c} f(t) = \infty$ ou $\limsup_{t\to\infty} t^{-q_c} g(t) = \infty$. Vamos supor que $\limsup_{t\to\infty} t^{-p_c} f(t) = \infty$, já que o outro caso é tratado similarmente. Assim, existe uma sequência $\{z_k\}_{k\geq 1}$ tal que

$$z_k \geq k \quad \text{e} \quad f(z_k) \geq z_k^{(s/r+2s/N)} e^{k/r}. \tag{3.13}$$

Seja $v_0 = \sum_{k=1}^{\infty} v_k$ com $v_k = 2^N c_N^{-1} z_k \chi_{\rho_k}$ e $z_k \rho_k^{N/s} = k^{-2}$ para cada $k \geq 1$, onde c_N é a constante do Lema 3.2(i). Note que $\lim_{k\to\infty} \rho_k = 0$. Portanto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $B_{3\rho_k} \subset \Omega$ para $k \geq k_0$. Observemos também que

$$\|v_0\|_{L^s} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\|_{L^s} = 2^N c_N^{-1} \omega_N^{1/s} \sum_{k=1}^{\infty} z_k \rho_k^{N/s} = 2^N c_N^{-1} \omega_N^{1/s} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} < \infty.$$

Seja (u, v) solução do problema (3.1) definida num intervalo $[0, T]$, para algum $T > 0$, com condição inicial $(u(0), v(0) = (0, v_0)$. Como $v \geq 0$ e $g \geq 0$, de (3.2) e o Lema 3.2 temos que

$$v(\sigma) \geq S_b(\sigma) v_0 \geq S_b(\sigma) v_k \geq 2^N c_N^{-1} z_k S_b(\sigma) \chi_{\rho_k} \geq z_k \chi_{\rho_k + \sqrt{b\sigma}} \geq z_k \chi_{\rho_k}, \tag{3.14}$$

para $0 < \sigma \leq \rho_k^2/b$ e $k \geq k_0$. Como f é não decrescente, de (3.2) e (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \int_0^t S_a(t-\sigma) f(S_b(\sigma) v_k) d\sigma \\ &\geq \int_0^t f(z_k) S_a(t-\sigma) \chi_{\rho_k} d\sigma \\ &\geq c_N 2^{-N} \int_0^t f(z_k) \chi_{\rho_k} d\sigma \end{aligned} \tag{3.15}$$

para $0 < \sigma \leq t \leq \min\{T, \rho_k^2/a, \rho_k^2/b\}$ e $k \geq k_0$. Fixando $t \in (0, \min\{T, \rho_{k_0}^2/a, \rho_{k_0}^2/b\})$ e $k_1 \in \mathbb{N}$ de modo que $\rho_k^2/2 \leq t$ para $k \geq k_1$. Então, de (3.15), obtemos

$$u(t) \geq c_N 2^{-N} \int_0^{\frac{\rho_k^2}{2}} f(z_k) \chi_{\rho_k} d\sigma \geq c_N 2^{-N} \rho_k f(z_k) \chi_{\rho_k}$$

para $k \geq k_1$. De (3.13) temos

$$\|u(t)\|_{L^r} \geq f(z_k) \omega_N^{1/r} \rho_k^{(2+N/r)} \geq \omega_N^{1/r} c_N 2^{-N} e^{k/r} k^{-2(2s/N+s/r)}.$$

para $k \geq k_1$. Como o lado direito tende para o infinito quando $k \to \infty$, temos uma contradição.

Reciprocamente, seja $(u_0, v_0) \in L^r(\Omega) \times L^s(\Omega)$, com $r, s > 1$ e $u_0, v_0 \geq 0$. Como $\limsup_{t\to\infty} t^{-p_c} f(t) < \infty$ e $\limsup_{t\to\infty} t^{-q_c} g(t) < \infty$, existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$f(t) \leq C_0(1 + t^{p_c}), \;\; g(t) \leq C_0(1 + t^{q_c}) \tag{3.16}$$

para $t \geq 0$, onde p_c e q_c são dados em (1.9). Como $|1/r - 1/s| \leq 2/N$, temos que $p_c, q_c \geq 1$. Ademais, observamos que $p_c q_c > 1$.

A condição (3.16) nos leva a considerar o seguinte sistema

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u &= C_0(1 + v^{p_c}) \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ v_t - b\Delta v &= C_0(1 + u^{q_c}) \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ u &= v = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0, v(0) = v_0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{3.17}$$

Quittner e Souplet, mostraram no Teorema 32.1 de (QUITTNER; SOUPLET, 2019), a existência local para o problema (3.17) quando $p_c, q_c > 1$ e $a = b = 1$. Apresentamos a seguir, seguindo as idéias de Brezis, Cazenave e Weissler dadas em (BREZIS; CAZENAVE, 1996), (WEISSLER, 1979) e (WEISSLER, 1981), uma prova para o caso $p_c, q_c \geq 1$ com $p_c q_c > 1$.

Sem perda de generalidade podemos assumir $p_c \leq q_c$. Temos que

$$r = \frac{N}{2}\left(\frac{p_c q_c - 1}{p_c + 1}\right) \text{ e } s = r\frac{p_c + 1}{q_c + 1}.$$

Seja $\eta_1 \in (r, sq_c)$ com $\eta_1 \geq q_c$ e seja $\eta_2 = \eta_1(p_c+1)/(q_c+1)$. Como $p_c \leq q_c$, $p_c q_c > 1$ e pela definição de η_2, temos que $(p_c+1)^2 q_c \leq p_c(q_c+1)^2$ e $\eta_2 \geq p_c$. Daí, concluimos que $\eta_2 \in (s, rp_c)$ e $\eta_2 \geq p_c$.

Sejam $\alpha = \dfrac{N}{2}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{\eta_1}\right)$ e $\beta = \dfrac{N}{2}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{\eta_2}\right)$. Então

$$0 < \alpha q_c < 1,\ 0 < \beta p_c < 1, \frac{p_c}{\eta_2} - \frac{1}{\eta_1} < \frac{2}{N}, \frac{q_c}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} < \frac{2}{N}, \tag{3.18}$$

$$\frac{p_c}{\eta_2} - \frac{1}{r} < \frac{2}{N},\ \frac{q_c}{\eta_1} - \frac{1}{s} < \frac{2}{N}. \tag{3.19}$$

Consideremos o conjunto

$$K = \{(u,v) \in E;\ \ t^{\alpha}\|u(t)\|_{L^{\eta_1}} \leq \delta, t^{\beta}\|v(t)\|_{L^{\eta_2}} \leq \delta \text{ para } t \in (0,T)\},$$

onde $E = E_1 \times E_2$, $E_1 = L^{\infty}_{loc}((0,T), L^{\eta_1}(\Omega))$, $E_2 = L^{\infty}_{loc}((0,T), L^{\eta_2}(\Omega))$ e $\delta > 0$ é escolhido apropriadamente. Se

$$d(u_1, u_2) = \sup_{t\in(0,T)} \{t^{\alpha}\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^{\eta_1}}\} + \sup_{t\in(0,T)} \{t^{\beta}\|v_1(t) - v_2(t)\|_{L^{\eta_2}}\}$$

para $u_1 = (u_1, v_1), u_2 = (u_2, v_2) \in K$, então (K, d) é um espaço métrico completo.

Dado $(u,v) \in K$, definimos o operador $\Phi(u,v) = (\Phi_1(v), \Phi_2(u))$ por

$$\begin{aligned} \Phi_1(v)(t) &= S_a(t)u_0 + C_0 \int_0^t S_a(\sigma)1d\sigma + C_0 \int_0^t S_a(t-\sigma)v^{p_c}(\sigma)d\sigma, \\ \Phi_1(u)(t) &= S_b(t)v_0 + C_0 \int_0^t S_b(\sigma)1d\sigma + C_0 \int_0^t S_b(t-\sigma)u^{q_c}(\sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

Usando a estimativa (2.2) e (3.18), temos

$$\begin{aligned} t^\alpha \|\Phi_1 v(t)\|_{L^{\eta_1}} &\le t^\alpha \|S_a(t)u_0\|_{L^{\eta_1}} + t^{1+\alpha} C_0 |\Omega|^{1/\eta_1} \\ &+ C_0 \int_0^t [a(t-\sigma)]^{-\frac{N}{2}(\frac{p_c}{\eta_2} - \frac{1}{\eta_1})} \|v(\sigma)\|_{\eta_2}^{p_c} d\sigma \\ &\le t^\alpha \|S_a(t)u_0\|_{L^{\eta_1}} + t^{1+\alpha} C_0 |\Omega|^{1/\eta_1} + C_0 C_1 \delta^{p_c}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde $C_1 = \int_0^1 [a(1-\sigma)]^{-\frac{N}{2}(\frac{p_c}{\eta_2} - \frac{1}{\eta_1})} \sigma^{-\beta p_c} d\sigma < \infty$. Analogamente temos

$$t^\beta \|\Phi_2 u(t)\|_{L^{\eta_2}} \le t^\beta \|S_b(t)v_0\|_{L^{\eta_2}} + t^{1+\beta} C_0 |\Omega|^{1/\eta_2} + C_0 C_2 \delta^{q_c}, \tag{3.21}$$

onde $C_2 = \int_0^1 [b(1-\sigma)]^{-\frac{N}{2}(\frac{q_c}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2})} \sigma^{-\alpha q_c} d\sigma < \infty$.

Como $\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \|S_a(t)u_0\|_{L^{\eta_1}} = \lim_{t\to 0^+} t^\beta \|S_b(t)v_0\|_{L^{\eta_2}} = 0$, devido ao Lema 2.8, concluímos de (3.20) e (3.21) que é possível escolher $\delta > 0$ e $T > 0$ tal que $(\Phi_1 v, \Phi_2 u) \in K$.

Similarmente, como foi mostrado em (3.20) e (3.21), podemos provar que para $u_1 = (u_1, v_1), u_2 = (u_2, v_2) \in K$

$$t^\alpha \|\Phi_1(v_1)(t) - \Phi_1(v_2)(t)\|_{L^{\eta_1}} \le C_0 C_3 \delta^{p_c - 1} d(u,v)$$

e

$$t^\beta \|\Phi_2(u_1)(t) - \Phi_2(u_2)(t)\|_{L^{\eta_2}} \le C_0 C_4 \delta^{q_c - 1} d(u,v).$$

Tomando δ suficientemente pequeno, de modo tal que $C_0 C_3 \delta^{p_c - 1} \le \dfrac{1}{4}$ e $C_0 C_4 \delta^{q_c - 1} \le \dfrac{1}{4}$, concluimos que Φ é uma contração estrita. Daí, temos que existe um ponto fixo $(\bar{u}, \bar{v})$, o qual é uma solução de (3.17).

Por outro lado, usando a estimativa (3.19) e argumentando como a estimativa (3.20), temos

$$\|\bar{u}(t)\|_{L^r} \le \|u_0\|_{L^r} + C_0 T |\Omega|^{1/r} + C_0 C_3 \delta^{p_c},$$

onde $C_3 = \int_0^1 [a(1-\sigma)]^{-\frac{N}{2}(\frac{p_c}{\eta_2} - \frac{1}{r})} \sigma^{-\beta p_c} d\sigma < \infty$. Assim, $\bar{u} \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$. Procedendo similarmente, temos $\bar{v} \in L^\infty((0,T), L^s(\Omega))$.

Para mostrar a regularidade de $(\bar{u}, \bar{v})$, usamos o argumento de bootstrap de (DICKSTEIN; LOAYZA, 2008, p.7) (ver também (SNOUSSI; TAYACHI; WEISSLER, 2001, p. 153)). Ou seja, mostramos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)} \|u(t)\|_{L^{r_1}} \le C \quad \text{e} \quad t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_1}\right)} \|v(t)\|_{L^{s_1}} \le C, \tag{3.22}$$

para todo $t \in (0,T)$, com $1 \leq r \leq r_1 \leq \infty$ e $1 \leq s \leq s_1 \leq \infty$. Observe que a parte de existência garante que a estimativa é válida para $r_1 = \eta_1 = \zeta_0$ e $s_1 = \eta_2 = \theta_0$. Sejam $c_1 = \frac{p_c}{\theta_0} - \frac{1}{\zeta_0}$ e $c_2 = \frac{q_c}{\zeta_0} - \frac{1}{\theta_0}$. Então, por (3.18) temos que

$$\frac{p_c}{\theta_0} - \frac{1}{\zeta_0} < \frac{2}{N} \text{ e } \frac{q_c}{\zeta_0} - \frac{1}{\theta_0} < \frac{2}{N}. \tag{3.23}$$

Sejam $\{\zeta_n\}_{n\geq 1}$ e $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ as sequências definidas como em (3.9), isto é, $\frac{p_c}{\theta_n} - \frac{1}{\zeta_{n+1}} = d_1$ e $\frac{q_c}{\zeta_n} - \frac{1}{\theta_{n+1}} = d_2$, com $0 < c_1 < d_1 < \frac{2}{N}$ e $0 < c_2 < d_2 < \frac{2}{N}$. Suponhamos que (3.22) é válido para algum $r_1 = \zeta_k$ e $s_1 = \theta_k$. Então, do Lema 3.4 temos que as sequências $\{\zeta_n\}_{n\geq 1}$ e $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ são crescentes, e de (3.18) temos que

$$\frac{p_c}{\theta_n} - \frac{1}{\zeta_{n+1}} < \frac{2}{N} \text{ e } \frac{q_c}{\zeta_n} - \frac{1}{\theta_{n+1}} < \frac{2}{N} \tag{3.24}$$

Como

$$\bar{u}(t) = S_a(t/2)u(t/2) + C_0\int_{t/2}^{t} S_a(\sigma)\chi_\Omega d\sigma + C_0\int_{t/2}^{t} S_a(t-\sigma)v^{p_c}(\sigma)d\sigma,$$
$$\bar{v}(t) = S_b(t/2)v(t/2) + C_0\int_{t/2}^{t} S_b(\sigma)\chi_\Omega d\sigma + C_0\int_{t/2}^{t} S_b(t-\sigma)u^{q_c}(\sigma)d\sigma,$$

para $0 < t < T$, pela estimativa (2.2) temos

$$\begin{aligned}
& t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\zeta_{k+1}}\right)}\|\bar{u}(t)\|_{L^{\zeta_{k+1}}} \leq t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\zeta_{k+1}}\right)}\|S_a(t/2)u(t/2)\|_{L^{\zeta_{k+1}}} \\
& + C_1 t^{1+\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\zeta_{k+1}}\right)}|\Omega|^{1/\zeta_{k+1}} \\
& + C_1 t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\zeta_{k+1}}\right)}\int_{t/2}^{t}(t-\sigma)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p_c}{\theta_k}-\frac{1}{\zeta_{k+1}}\right)}\sigma^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p_c}{s}-\frac{p_c}{\theta_k}\right)}d\sigma \\
& \leq 2^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{\zeta_k}-\frac{1}{\zeta_{k+1}}\right)}t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\zeta_k}\right)}\|u(t/2)\|_{L^{\zeta_k}} + C_1 t^{1+\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\zeta_{k+1}}\right)}|\Omega|^{1/\zeta_{k+1}} \\
& + C_1 t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\zeta_{k+1}}\right)}\int_{t/2}^{t}(t-\sigma)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p_c}{\theta_k}-\frac{1}{\zeta_{k+1}}\right)}\sigma^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p_c}{s}-\frac{p_c}{\theta_k}\right)}d\sigma,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

e de (3.22), (3.24), para $r_1 = \zeta_k$, temos que

$$t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\zeta_{k+1}}\right)}\|\bar{u}(t)\|_{L^{\zeta_{k+1}}} \leq C, \text{ para todo } t \in (0,T). \tag{3.26}$$

Similarmente, obtemos

$$t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{\theta_{k+1}}\right)}\|\bar{v}(t)\|_{L^{\theta_{k+1}}} \leq C, \text{ para todo } t \in (0,T). \tag{3.27}$$

A estimativa (3.22), para $r_1 = +\infty$ e $s_1 = +\infty$, se obtem por um número finito de passos, isto devido ao Lema 3.4. Assim,$(\bar{u},\bar{v}) \in [L^{\infty}_{loc}((0,T), L^{\infty}(\Omega))]^2$. Além disso, de (3.16) e (3.17) vemos que $(\bar{u},\bar{v})$ é uma supersolução de (3.2). Portanto, pelo Lema 3.6 obtemos uma solução para o problema (3.2).

(ii) Suponhamos que o problema (3.1) possui solução local para cada dado inicial $(u_0, v_0) \in L^r(\mathbb{R}^N) \times L^s(\mathbb{R}^N)$, com $u_0, v_0 \geq 0$, e que a condição (3.11) não é válida, ou seja, ou $\limsup_{t\to\infty} t^{-p_c} f(t) = \infty$ ou $\limsup_{t\to 0} f(t)/t^{s/r} = \infty$. O mesmo argumento pode ser usado se a condição (3.12) não é verdadeira.

Se $\limsup_{t\to\infty} t^{-p_c} f(t) = \infty$, se procede similarmente como no item (i), pois a estimativa do Lema 3.2 também se verifica, em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (veja a Observação 1).

Suponhamos agora que $\limsup_{t\to 0} f(t)/t^{s/r} = \infty$. Então existe uma sequência $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ tal que

$$\lambda_k \leq k^{-3}, f(\lambda_k) \geq k^{3s/r}\lambda_k^{s/r} \text{ e } \lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0.$$

Seja $v_0 = \sum_{k=1}^{\infty} v_k$, onde $v_k = (c'_N)^{-1}2^N\lambda_k\chi_{\rho_k}$, $\rho_k = (\lambda_k k^2)^{-s/N}$ e c'_N é a constante da Observação 1. Observemos que

$$\|v_0\|_{L^s} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|v_k\|_{L^s} = 2^N(c'_N)^{-1}\omega_N^{1/s} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} < \infty.$$

Consideremos (u, v) solução do problema (3.1), definida no intervalo $[0, T]$, para algum $T > 0$, com condição inicial $(u(0), v(0)) = (0, v_0)$.

Como $\lambda_k \leq k^{-3}$ então $\rho_k \geq k^{s/N}$. Daí, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_k \geq \max\{a, b\}$ para $k \geq k_0$. Pela estimativa do Lema 3.2 em $\mathbb{R}^N$ (Observação 1), temos

$$\begin{aligned} S_b(\sigma)v_k &= (c'_N)^{-1}2^N\lambda_k S_b(\sigma)\chi_{\rho_k} \\ &\geq (c'_N)^{-1}2^N\left[\rho_k/(\rho_k + \sqrt{b\sigma})\right]^N \chi_{\rho_k+\sqrt{b\sigma}} \\ &\geq \lambda_k\chi_{\rho_k+\sqrt{b\sigma}} \\ &\geq \lambda_k\chi_{\rho_k}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

para todo $0 < \sigma \leq 1$. Como f é não decrescente podemos proceder como na estimativa (3.28) e obter

$$\begin{aligned} S_a(t-\sigma)f(S_b(\sigma)v_k) &\geq f(\lambda_k)S_a(t-\sigma)\chi_{\rho_k} \\ &\geq c'_N 2^{-N} f(\lambda_k)\chi_{\rho_k+\sqrt{a(t-\sigma)}} \\ &\geq c'_N 2^{-N} f(\lambda_k)\chi_{\rho_k} \end{aligned}$$

para $0 < \sigma \leq t \leq 1$. Fixando $t \in (0, \min\{1, T\})$, temos

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \int_0^t S_a(t-\sigma)f(S_b(\sigma)v_0)d\sigma \\ &\geq \int_0^t S_a(t-\sigma)f(S_b(\sigma)v_k)d\sigma \\ &\geq c'_N 2^{-N}\int_0^t f(\lambda_k)\chi_{\rho_k}d\sigma \\ &\geq tc_N 2^{-N}k^{3s/r}\lambda_k^{s/r}\chi_{\rho_k}. \end{aligned}$$

Logo
$$\|u(t)\|_{L^r} \geq c_N 2^{-N} t\omega_N^{1/r} k^{s/r}. \tag{3.29}$$
Como o lado direito de (3.29) tende para o infinito quando $k \to \infty$, temos uma contradição.

Por outro lado, seja $(u_0, v_0) \in L^r(\mathbb{R}^N) \times L^s(\mathbb{R}^N)$. Suponhamos que
$$\limsup_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^{s/r}} < \infty \quad \text{e} \quad \limsup_{t\to\infty} t^{-p_c} f(t) < \infty$$
e
$$\limsup_{t\to 0} \frac{g(t)}{t^{r/s}} < \infty \quad \text{e} \quad \limsup_{t\to\infty} t^{-q_c} g(t) < \infty.$$
Então, existe $C_0 > 0$ tal que
$$f(t) \leq C_0(t^{s/r} + t^{p_c}) \quad \text{e} \quad g(t) \leq C_0(t^{r/s} + t^{q_c}),$$
onde p_c, q_c são dados por (1.9). A condição $|1/r - 1/s| \leq 2/N$ implica que $p_c, q_c \geq 1$. Além disso, se $r \neq s$ então $s/r < 1$ ou $r/s < 1$. Por este motivo, não seria possível usar o argumento de ponto fixo, como no caso Ω limitado. Devido a essa dificuldade, abordamos o problema determinando uma supersolução para o problema (3.1).

Sejam $r > \alpha > \max\{1, r/s\}$, $\beta = s\alpha/r$, $r_1 = r/\alpha$ e $p_1 = 1 - 1/\alpha + p_c/\beta$. Então $r_1, \alpha, \beta > 1$, $p_1 > 1$ e
$$r_1 = \frac{N}{2}(p_1 - 1).$$
Ademais, $w_0 = u_0^\alpha + v_0^\beta \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N)$.

Consideremos o seguinte problema
$$\begin{cases} u_t - a\Delta u &= C_1(u + u^{p_1}) \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ \quad u(0) &= w_0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.30}$$
onde $C_1 \geq C_0 \max\{\alpha, \beta\}$. Do resultado da existência em (BREZIS; CAZENAVE, 1996, Teorema 1) existe uma solução local $w \in C([0,T], L^{r_1}(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\eta(\mathbb{R}^N))$ para o problema (3.30) tal que $t^{\frac{N}{2}(1/r_1 - 1/\eta_0)}\|w(t)\|_{L^{\eta_0}} \leq C_2$ para algum $\eta_0 > r_1$ e para alguma constante $C_2 > 0$. Ademais, pelo argumento de bootstrap (como foi mostrado para o caso Ω limitado), é possível concluir que existe uma constante $C_3 > 0$ tal que $t^{\frac{N}{2}(1/r - 1/\eta)}\|w(t)\|_{L^\eta} \leq C_3$ para todo $\eta_0 \leq \eta \leq \infty$. Assim, pela regularidade parabólica (Teorema 2.9), concluímos que w é C^1 em $t \in (0,T)$ e C^2 em $x \in \mathbb{R}^N$.

Seja $(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = (w^{1/\alpha}(t), w^{1/\beta}(t))$ para $t \in [0,T]$. Então $\tilde{u}(0) \geq u_0$, $\tilde{v}(0) \geq v_0$, $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in L^\infty((0,T), L^r(\mathbb{R}^N)) \times L^\infty((0,T), L^s(\mathbb{R}^N))$, e
$$\begin{aligned} \tilde{u}_t - a\Delta\tilde{u} &= \frac{1}{\alpha} w^{1/\alpha - 1}(w_t - a\Delta w) - \frac{a}{\alpha}(\frac{1}{\alpha} - 1) w^{1/\alpha - 2}|\nabla w|^2 \\ &\geq C_0 w^{1/\alpha - 1}(w + w^{p_1}) \\ &= C_0(\tilde{v}^{s/r} + \tilde{v}^{p_c}) \geq f(\tilde{v}). \end{aligned}$$

Similarmente, $\tilde{v}_t - a\Delta\tilde{v} \geq g(\tilde{u})$. Portanto, é possível concluir que $(\tilde{u}, \tilde{v})$ é uma supersolução de (3.1). Assim, o resultado segue do Lema 3.6. □

O caso $r = 1$ ou $s = 1$ é tratado no seguinte resultado. Pela simetria do problema (3.1), é suficiente considerar somente o caso $s = 1$, ou seja, estudar a existência local para condições iniciais $(u_0, v_0) \in L^r(\Omega) \times L^1(\Omega)$ com $r \geq 1$. Para um domínio limitado temos o seguinte resultado.

Teorema 3.8. *Sejam $f, g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ funções contínuas e não decrescentes, $r \geq 1$, $a, b > 0$ e Ω um domínio limitado. Para $t \geq 1$, definimos*

$$F_r(t) = \sup_{1\leq\sigma\leq t} \frac{f(\sigma)}{\sigma^{1/r}}, \quad G_r(t) = \sup_{1\leq\sigma\leq t} \frac{g(\sigma)}{\sigma^r}. \tag{3.31}$$

1. *Se*
$$\int_1^\infty t^{-(1+2/N)} F_r(t)dt < \infty \quad e \quad \int_1^\infty t^{-(1+2r/N)} G_r(t)dt < \infty, \tag{3.32}$$
então o problema (3.1), com $a = b$, possui solução local para cada $(u_0, v_0) \in L^r(\Omega)\times L^1(\Omega)$. Além disso, esta solução pertence ao espaço $(L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega)))^2$.

2. *Se*
$$\lim_{t\to 0^+} t^{-N/(2r')} \int_{t^{-N/2}}^\infty \sigma^{-(1+2/N+1/r')} F_r(\sigma)d\sigma = \infty \tag{3.33}$$
ou
$$\int_1^\infty t^{-(1+2r/N+\varepsilon)} G_r(t)dt = \infty, \tag{3.34}$$

para algum $\varepsilon > 0$ quando $r > 1$, e $\varepsilon = 0$ quando $r = 1$, então existe $(u_0, v_0) \in L^r(\Omega) \times L^1(\Omega)$, $u_0, v_0 \geq 0$ tal que o problema (3.1) não possui solução local. O valor r' é o conjugado de $1 \leq r < \infty$ e é dado por $1/r' = 1 - 1/r$.

Observação 3. *Segue abaixo algumas observações sobre o Teorema 3.8.*

1. *Quando $r = 1$, temos que $1/r' = 0$, e o resultado é ótimo.*

2. *Se $f(t) = t^p$ e $g(t) = t^q$ para $t \geq 0$ com $p, q \geq 1$, então a condição (3.32) é verificada quando $p < 1/r+2/N$ e $q/r < 1+2/N$. A condição (3.33) é satisfeita quando $p \geq 1+2/N$ para $r = 1$ e $p > 1/r+2/N$ para $r > 1$. A condição (3.34) é verificada se $q/r \geq 1+2/N$.*

3. *Existe um vacuo entre a condição $\int_1^\infty \sigma^{-(1+2/N)} F_r(\sigma)d\sigma = \infty$ e a condição (3.33). Em geral,*
$$\begin{aligned} \int_1^\infty \sigma^{-(1+2/N)} F_r(\sigma)d\sigma &\geq \int_{t^{-N/2}}^\infty \sigma^{-(1+\frac{2}{N}+\frac{1}{r'})+\frac{1}{r'}} F_r(\sigma)d\sigma \\ &\geq t^{-N/(2r')} \int_{t^{-N/2}}^\infty \sigma^{-(1+2/N+1/r')} F_r(\sigma)d\sigma \end{aligned}$$

para $0 < t \leq 1$. *Mas, para* $f(t) = t^p$ *com* $p = 1/r + 2/N$ *e* $r > 1$ *temos que* $\int_1^\infty \sigma^{-(1+2/N)} F_r(\sigma) d\sigma = \infty$ *e* $t^{-N/(2r')} \int_{t^{-N/2}}^\infty \sigma^{-(1+2/N+1/r')} F_r(\sigma) d\sigma = r'$.

4. *O item (i) do Teorema 3.8 é mostrado usando uma supersolução apropriada do problema* (3.1) *(see* (3.36)*). O item (ii) é mostrado considerando dados iniciais da forma* $\alpha^N \chi_{1/\alpha}$*, com* $\alpha > 0$*, quando* $r = 1$ *e* $|\cdot|^{-\beta}$ *com* $0 < \beta < N/r$ *quando* $r > 1$.

5. *A condição* $a = b$*, na parte da existência, é necessária para lidar com a supersolução* (3.36)*.*

Demonstração. (i) Adaptamos o argumento dado na prova do Teorema 4.4 de (LAISTER et al., 2016). Suponhamos que (3.32) é verdadeira e definimos $\tilde{f}(t) = f(t)$ para $t \in [0,1]$ e $\tilde{f}(t) = t^{1/r} F_r(t)$ para $t > 1$. Então $f(t) \leq \tilde{f}(t)$ para todo $t \geq 0$ e $\tilde{f}(t)/t^{1/r} : [1,\infty) \to [0,\infty)$ é não decrescente. De forma similar, definimos $\tilde{g} : [1,\infty) \to [0,\infty)$ por $\tilde{g}(t) = g(t)$ para $t \in [0,1]$ e $\tilde{g}(t) = t^r G_r(t)$ para $t > 1$.

Como $f \leq \tilde{f}$ e $g \leq \tilde{g}$, do Lema 3.6 vemos que é suficiente encontrar uma supersolução (w_1, w_2) para o problema

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u &= \tilde{f}(v) \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ v_t - a\Delta v &= \tilde{g}(u) \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ u &= v = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0, v(0) = v_0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{3.35}$$

Para $t \geq 0$, definimos w_1 e w_2 por

$$\begin{cases} w_1(t) &= A[S_a(t)u_0^r]^{1/r} + A[S_a(t)v_0]^{1/r} + 1, \\ w_2(t) &= BS_a(t)u_0^r + BS_a(t)v_0 + 1, \end{cases} \tag{3.36}$$

onde A e B são constantes positivas, os quais serão escolhidos apropriadamente.

Como $u_0^r \in L^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \|w_1(t)\|_{L^r} &\leq A\|S_a(t)u_0^r\|_{L^1}^{1/r} + A\|S_a(t)v_0\|_{L^1}^{1/r} + |\Omega|^{1/r} \\ &\leq A\|u_0\|_{L^r} + A\|v_0\|_{L^1}^{1/r} + |\Omega|^{1/r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|w_2(t)\|_{L^1} &\leq B\|S_a(t)u_0^r\|_{L^1} + B\|S_a(t)v_0\|_{L^1} + |\Omega| \\ &\leq B\|u_0\|_{L^r}^r + B\|v_0\|_{L^1} + |\Omega|. \end{aligned}$$

Então, $w_1 \in L^\infty((0,\infty), L^r(\Omega))$ e $w_2 \in L^\infty((0,\infty), L^1(\Omega))$. Ademais, por (2.2), temos

$$\begin{aligned} \|w_1(t)\|_\infty &\leq A\|S_a(t)u_0^r\|_{L^\infty}^{1/r} + A\|S_a(t)v_0\|_{L^\infty}^{1/r} + 1 \\ &\leq A(at)^{-N/2r}\|u_0\|_{L^r} + A(at)^{-N/2r}\|v_0\|_{L^1}^{1/r} + 1 \\ &\leq 2A_1(at)^{-N/2r}, \\ \|w_2(t)\|_\infty &\leq B(at)^{-N/2}\|u_0\|_{L^r}^r + B(at)^{-N/2}\|v_0\|_{L^1} + 1 \\ &\leq 2B_1 t^{-N/2}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

para t suficientemente pequeno, onde $A_1 = A(\|u_0\|_{L^r} + \|v_0\|_{L^1}^{1/r})$ e $B_1 = B(\|u_0\|_{L^r}^r + \|v_0\|_{L^1})$.

Por outro lado, como $\tilde{f}(\cdot)/(\cdot)^{1/r}$ é não decrescente em $[1,\infty)$, de (3.37) temos

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{\tilde{f}(\|w_2(\sigma)\|_{L^\infty})}{\|w_2(\sigma)\|_{L^\infty}^{1/r}} d\sigma \\ &\leq \int_0^t \frac{\tilde{f}(2B_1\sigma^{-N/2})}{(2B_1)^{1/r}\sigma^{-N/2r}} d\sigma \\ &= \frac{2(2B_1)^{2/N}}{N} \int_{2B_1 t^{-N/2}}^\infty \sigma^{-1-\frac{1}{r}-\frac{2}{N}} \tilde{f}(\sigma) d\sigma = C_1(t). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{\tilde{g}(\|w_1(\sigma)\|_{L^\infty})}{\|w_1(\sigma)\|_{L^\infty}^r} d\sigma \\ &\leq \int_0^t \frac{\tilde{g}(2A_1\sigma^{-N/2r})}{(2A_1\sigma^{-N/2r})^r} ds\sigma \\ &= \frac{2r(2A_1)^{2r/N}}{N} \int_{2A_1 t^{-N/2r}}^\infty \sigma^{-1-r-2r/N} \tilde{g}(\sigma) d\sigma = C_2(t). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Note que a finitude de $C_1(t)$ e $C_2(t)$ é dada por supor que (3.32) é verdadeira.

Agora, como $[S_a(t)\psi]^r \leq S_a(t)\psi^r$, $S_a(t)\chi_\Omega \leq \chi_\Omega$ e $\tilde{f}(\cdot)/(\cdot)^r$ é não decrescente obtemos

$$\begin{aligned} &S_a(t)u_0 + \int_0^t S_a(t-\sigma)\tilde{f}(w_2(\sigma))d\sigma \\ &= S_a(t)u_0 + \int_0^t S_a(t-\sigma)\frac{\tilde{f}(w_2(\sigma))}{w_2^{1/r}(\sigma)} w_2^{1/r}(\sigma) d\sigma \\ &\leq S_a(t)u_0 + \int_0^t \left\| \frac{\tilde{f}(w_2(\sigma))}{w_2^{1/r}(\sigma)} \right\|_{L^\infty} S_a(t-\sigma)\left\{ B^{1/r}[S_a(\sigma)v_0]^{1/r} + B^{1/r}[S_a(\sigma)u_0^r]^{1/r} + 1 \right\} d\sigma \\ &\leq [S_a(t)u_0^r]^{1/r} + \left(\int_0^t \frac{\tilde{f}(\|w_2(\sigma)\|_{L^\infty})}{\|w_2(\sigma)\|_{L^\infty}^{1/r}} d\sigma \right) \left\{ B^{1/r}[S_a(t)v_0]^{1/r} + B^{1/r}[S_a(t)u_0^r]^{1/r} + 1 \right\} \\ &\leq [S_a(t)u_0^r]^{1/r} + C_1(t)\left\{ B^{1/r}[S_a(t)v_0]^{1/r} + B^{1/r}[S_a(t)u_0^r]^{1/r} + 1 \right\} \\ &\leq [1 + B^{1/r}C_1(t)][S_a(t)u_0^r]^{1/r} + C_1(t)B^{1/r}[S_a(t)v_0]^{1/r} + C_1(t), \end{aligned}$$

onde C_1 é dado por (3.38). Similarmente,

$$\begin{aligned}
&S_a(t)v_0 + \int_0^t S_a(t-\sigma)\tilde{g}(w_1(\sigma))d\sigma \\
&= S_a(t)v_0 + \int_0^t S_a(t-\sigma)\frac{\tilde{g}(w_1(\sigma))}{w_1^r(\sigma)} w_1^r(\sigma)d\sigma \\
&\leq S_a(t)v_0 + 3^{r-1}\left(\int_0^t \frac{\tilde{g}(\|w_1(\sigma)\|_{L^\infty})}{\|w_1(\sigma)\|_{L^\infty}^r}d\sigma\right)[A^r S_a(t)u_0^r + A^r S_a(t)v_0 + 1] \\
&\leq [1 + 3^{r-1}A^r C_2(t)]S_a(t)v_0 + 3^{r-1}A^r C_2(t)S_a(t)u_0^r + 3^{r-1}C_2(t)
\end{aligned}$$

Por (3.32), temos que $C_1(t), C_2(t) \to 0$ quando $t \to 0^+$. Assim, podemos escolher as constantes $A, B > 1$ de modo que

$$1 + B^{1/r}C_1(t) \leq A \leq \left[\frac{B-1}{3^{r-1}C_2(t)}\right]^{1/r}$$

para t suficientemente pequeno. Portanto,

$$\begin{aligned}
S_a(t)u_0 + \int_0^t S_a(t-\sigma)\tilde{f}(w_2(\sigma))d\sigma &\leq w_1(t), \\
S_a(t)v_0 + \int_0^t S_a(t-\sigma)\tilde{g}(w_1(\sigma))d\sigma &\leq w_2(t),
\end{aligned}$$

para t pequeno. Logo, (w_1, w_2) é supesolução de (3.35).

(ii) Sem perda de generalidade, vamos assumir que $0 \in \Omega$. Seja $\delta > 0$ de modo que $B_{3\delta} \subset \Omega$. Suponhamos que (3.33) é válido. Seja $v_0 = 2^N b^{N/2} c_N^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\alpha_k^N \chi_{1/\alpha_k}$ com $\alpha_k^N = b^{-N/2}2^k s_{n_{k+1}} > 0$ tal que $1/\alpha_k < \delta$ para $k \geq k_0$, para algum $k_0 \in \mathbb{N}$, e a sequência $\{n_k\}_{k\geq 1}$ será escolhida apropriadamente mais adiante. Notemos que $v_0 \in L^1(\Omega)$ e

$$\|v_0\|_{L^1} = 2^N c_N^{-1}\omega_N \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$

Agora, consideremos

$$(u, v) \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega)) \times L^\infty((0,T), L^1(\Omega))$$

solução do problema (3.1) com condição inicial $(u(0), v(0)) = (0, v_0)$. Do Lema 3.2, temos

$$\begin{aligned}
S_b(\sigma)v_0 &= 2^N b^{N/2} c_N^{-1}\alpha_k^N S_b(\sigma)\chi_{1/\alpha_k} \\
&\geq 2^N b^{N/2} 2^{-k}\alpha_k^N \left(\frac{1/\alpha_k}{1/\alpha_k + \sqrt{b\sigma}}\right)^N \chi_{1/\alpha_k + \sqrt{b\sigma}} \\
&\geq 2^{-k}\sigma^{-\frac{N}{2}}\chi_{1/\alpha_k + \sqrt{b\sigma}}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

para $1/\alpha_k^2 \leq b\sigma \leq \delta^2$ e $k \geq k_0$.

Como a função f é não decrescente e o semigrupo preserva a positividade, temos

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \int_0^t S_a(t-\sigma) f(S_b(\sigma)v_0)d\sigma \\ &\geq \int_{1/(b\alpha_k^2)}^t S_a(t-\sigma) f(2^{-k}\sigma^{-\frac{N}{2}})\chi_{1/\alpha_k+\sqrt{b\sigma}}d\sigma \\ &= \int_{1/(b\alpha_k^2)}^t f(2^{-k}\sigma^{-N/2})S_a(t-\sigma)\chi_{1/\alpha_k+\sqrt{b\sigma}}d\sigma \end{aligned} \tag{3.41}$$

para $0 < t \leq \delta^2/b$. Do Lema 3.2, e como $\sqrt{b\sigma} + \sqrt{a(t-\sigma)} \geq \sqrt{\min\{a,b\}t}$ para todo $\sigma \in [0,t]$ e $1/\alpha_k + \sqrt{b\sigma} + \sqrt{a(t-\sigma)} \leq (2\sqrt{b} + \sqrt{a})\sqrt{t}$ para todo $\sigma \in (1/(b\alpha_k^2), t)$, então obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &\geq c_N \int_{1/(b\alpha_k^2)}^t f(2^{-k}\sigma^{-N/2}) \left[\frac{1/\alpha_k + \sqrt{b\sigma}}{1/\alpha_k + \sqrt{b\sigma} + \sqrt{a(t-\sigma)}}\right]^N \chi_{1/\alpha_k+\sqrt{b\sigma}+\sqrt{a(t-\sigma)}}d\sigma \\ &\geq c_N b^{N/2}(2\sqrt{b}+\sqrt{a})^{-N}t^{-N/2}\chi_{1/\alpha_k+\sqrt{\min\{a,b\}t}} \int_{1/(b\alpha_k)^2}^t f(2^{-k}\sigma^{-N/2})\sigma^{N/2}d\sigma. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\|u(t)\|_{L^r} \\ &\geq c_N b^{N/2}\omega_N^{1/r}\left(\frac{(1/\alpha_k + \sqrt{\min\{a,b\}t})^r}{2\sqrt{b}+\sqrt{a}}\right)^N t^{-N/2}\int_{1/(b\alpha_k)^2}^t f(2^{-k}\sigma^{-N/2})\sigma^{N/2}d\sigma \\ &\geq Ct^{-N/2r'}\int_{1/(b\alpha_k^2)}^t f(2^{-k}\sigma^{-N/2})\sigma^{N/2}d\sigma \\ &= C2^{-k(1+2/N)}t^{-N/2r'}\int_{2^{-k}t^{-N/2}}^{2^{-k}(b\alpha_k^2)^{N/2}} f(\sigma)\sigma^{-(2/N+2)}d\sigma, \end{aligned} \tag{3.42}$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende somente de N, a e b.

De (3.6) e (3.7) vemos que existe uma sequência $\{s_k\}$ tal que $s_{k+1} \geq \theta s_k$, com $\theta > 1$, e

$$t^{-N/(2r')}\int_{2^{-k}t^{-N/2}}^\infty \sigma^{-q}F_r(\sigma)d\sigma \leq C(\theta,q)t^{-N/(2r')}\sum_{j=1}^\infty f(s_j)s_j^{-2/N-1}$$

onde $q = 1 + \dfrac{2}{N} + \dfrac{1}{r'}$ e $C(\theta,q) = \dfrac{\theta^q(\theta^{q-1}-1)}{q-1}$

$$t^{-N/(2r')}\sum_{j=1}^\infty f(s_j)s_j^{-2/N-1} \to \infty \tag{3.43}$$

quando $t \to 0^+$.

Fixando $t > 0$ e $k_1 \geq k_0$ tal que $s_{n_{k_1}} \geq t^{-N/2}$. De (3.42) temos

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^r} &\geq 2^{-k(1+2/N)} C t^{-N/2r'} \sum_{j=n_{k_1}}^{n_k} \int_{s_j}^{s_{k_{j+1}}} f(\sigma)\sigma^{-(2/N+2)} d\sigma \\
&\geq 2^{-k(1+2/N)} C t^{-N/2r'} \sum_{j=n_{k_1}}^{n_k} f(s_j) \int_{s_j}^{s_{j+1}} \sigma^{-(2/N+2)} d\sigma \\
&= 2^{-k(1+2/N)} C t^{-N/2r'} \sum_{j=n_{k_1}}^{n_k} f(s_j)(s_j^{-1-2/N} - s_{j+1}^{-1-2/N}) \\
&= 2^{-k(1+2/N)} C t^{-N/2r'} \sum_{j=n_{k_1}}^{n_k} f(s_j) s_j^{-1-2/N} \left[1 - \left(\frac{s_{j+1}}{s_j}\right)^{-1-2/N}\right] \\
&= (1-\theta^{-1-2/N}) 2^{-k(1+2/N)} C t^{-N/2r'} \sum_{j=n_{k_1}}^{n_k} f(s_j) s_j^{-1-2/N}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Finalmente, como (3.43) é válido, existe uma subsequência $\{n_k\}_{k\geq 1}$ tal que $2^{-k(1+2/N)} \displaystyle\sum_{j=n_{k_1}}^{n_k} f(s_j)s_j^{-1-2/N}$ diverge quando $k \to \infty$, e assim temos uma contradição em (3.44).

Suponhamos agora que (3.34) é válida. Consideramos dois casos:

Caso 1. $r = 1$. Como no caso anterior consideramos

$$u_0 = 2^N a^{N/2} c_N^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \beta_k^N \chi_{1/\beta_k},$$

com $\beta_k^N = a^{-N/2} 2^k \tilde{s}_{n_{k+1}} > 0$ tal que $1/\beta_k < \delta$ para $k \geq k_0$, para algum $k_0 \in \mathbb{N}$, e a sequência $\{n_k\}_{n\geq 1}$ é escolhida apropriadamente. Então, $u_0 \in L^1(\Omega)$ e $\|u_0\|_{L^1} = 2^N a^{N/2} c_N^{-1} \omega_N \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$. Procedendo como no caso anterior se obtem o resultado.

Caso 2. $r > 1$. Consideramos $u_0(x) = (c_N')^{-1}|x|^{-\beta}\chi_\delta$ com $\beta = \dfrac{N}{r+\varepsilon'}$ e $\varepsilon' = \left(1 + \dfrac{2}{N}\right)^{-1} \varepsilon > 0$. Portanto, $u_0 \in L^r(\Omega)$.

Da condição (3.34) e do Lema 3.3, temos que existe uma sequência $\{\tilde{s}_k\}_{k\geq 1}$ tal que $\tilde{s}_{k+1} \geq \tilde{\theta}\tilde{s}_k$, com $\tilde{\theta} > 1$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g(\tilde{s}_k)\tilde{s}_k^{-r-(2r)/N-\varepsilon} = \infty$.

Seja (u, v) uma solução do problema (3.1) com condição inicial $(u(0), v(0)) = (u_0, 0)$. Da estimativa (3.4) temos $S_a(\sigma)u_0 \geq (a\sigma)^{-\beta/2}\chi_{\sqrt{a\sigma}}$, para $0 < \sigma < \delta^2/a$. Assim, da estimativa (3.3) temos

$$\begin{aligned}
v(t) &\geq \int_0^t S_b(t-\sigma) g(S_a(\sigma)u_0) d\sigma \\
&\geq \int_0^t S_b(t-\sigma) g((a\sigma)^{-\beta/2}) \chi_{\sqrt{a\sigma}} d\sigma \\
&\geq c_n \int_0^t g((a\sigma)^{-\beta/2}) \left(\frac{\sqrt{a\sigma}}{\sqrt{a\sigma} + \sqrt{b(t-\sigma)}}\right)^N \chi_{\sqrt{a\sigma}+\sqrt{b(t-\sigma)}} d\sigma,
\end{aligned}$$

para $0 < t < \dfrac{\delta^2}{\max\{a,b\}}$. Procedendo analogamente como na estimativa (3.44) obtemos

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{L^1} &\geq c_n \int_0^t g((a\sigma)^{-\beta/2})(a\sigma)^{N/2} d\sigma \\ &\geq \frac{2c_N}{a\beta} \int_{(at)^{-\beta/2}}^{\infty} g(\sigma)\sigma^{-\left(1+\frac{N+2}{\beta}\right)} d\sigma \\ &\geq \frac{2c_N}{a\beta} \int_{(at)^{-\beta/2}}^{\infty} g(\sigma)\sigma^{-\left(r+\frac{2r}{N}+\varepsilon\right)} d\sigma \\ &\geq C \sum_{j=k_0}^{\infty} g(\tilde{s}_j)\tilde{s}_j^{-\frac{N+2}{\beta}}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{s}_{k_0} \geq (at)^{-\beta/2}$. Assim, temos uma contradição. $\square$

No seguinte resultado analisamos o caso $r = 1$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Teorema 3.9. *Sejam $f, g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ funções não decrescentes e contínuas, $r \geq 1$, $a, b > 1$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$. Para $t > 0$, definimos*

$$\bar{F}_r(t) = \sup_{0<\sigma\leq t} \frac{f(\sigma)}{\sigma^{1/r}},\ \bar{G}_r(t) = \sup_{0<\sigma\leq t} \frac{g(\sigma)}{\sigma^r}. \tag{3.45}$$

1. *Se*

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t^{1/r}} < \infty, \limsup_{t\to 0^+} \frac{g(t)}{t^r} < \infty,$$

$$\int_1^{\infty} t^{-(1+2/N)} \bar{F}_r(t) dt < \infty \ e \ \int_1^{\infty} t^{-(1+2r/N)} \bar{G}_r(t) dt < \infty,$$

então o problema (3.1), com $a = b$, possui uma solução local para cada $(u_0, v_0) \in L^r(\mathbb{R}^N) \times L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, a solução pertence ao espaço $[L^{\infty}_{loc}((0,T), L^{\infty}(\mathbb{R}^N))]^2$.

2. *Se algumas das seguintes condições são verdadeiras:*

   a) $\displaystyle\limsup_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t^{1/r}} = \infty.$

   b) $\displaystyle\limsup_{t\to 0^+} \frac{g(t)}{t^r} = \infty.$

   c) $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^{-\frac{N}{2r'}} \int_{t^{-N/2}}^{\infty} \sigma^{-(1+\frac{2}{N}+\frac{1}{r'})} \bar{F}_r(\sigma) d\sigma = \infty.$

   d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \sigma^{-(1+\frac{2r}{N}+\varepsilon)} \bar{G}_r(\sigma) d\sigma = \infty$ *($\varepsilon > 0$ se $r > 1$, $\varepsilon = 0$ se $r = 1$).*

   Então existe uma condição inicial $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N), v_0 \in L^1(\mathbb{R}^N), u_0, v_0 \geq 0$ tal que o problema (3.1) não possui solução local.

Demonstração. (i) Seja $(u_0, v_0) \in L^r(\mathbb{R}^N) \times L^1(\mathbb{R}^N)$. Das condições $\lim_{t\to 0} f(t)/t^{1/r} < \infty$ e $\lim_{t\to 0} g(t)/t^r < \infty$, implica que $f(0) = g(0) = 0$. Assim, se $(u_0, v_0) = (0,0)$ temos que $(u, v) = (0, 0)$ é uma solução do problema (3.1).

Suponhamos que $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$. Seja

$$\begin{aligned} w_1(t) &= A[S(t)u_0^r]^{1/r} + A[S(t)v_0]^{1/r}, \text{ e} \\ w_2(t) &= BS(t)u_0^r + BS(t)v_0. \end{aligned}$$

Então, $w_1(t) > 0, w_2(t) > 0$ para $t > 0$. Argumentando como na demonstração do Teorema 3.8 (i), com $\tilde{f}(t) = f(t)$ e $\tilde{g} = g(t)$ para $t \geq 0$, o resultado segue.

(ii) Usamos os mesmos argumentos utilizados na demonstração dos Teoremas 3.7 e 3.8. $\square$

4 EXISTÊNCIA LOCAL PARA A EQUAÇÃO PARABÓLICA DE HARDY EM ESPAÇOS DE LEBESGUE

4.1 Introdução

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave ou $\Omega = \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função contínua e não decrescente, $\gamma > 0$ e $u_0 \in L^r(\Omega)$ com $1 \leq r < \infty$. Consideramos o problema parabólico com potencial singular

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= |\cdot|^{-\gamma} f(u) \text{ em } \Omega \times (0, T), \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) &= u_0 \geq 0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $T > 0$ e $|\cdot|^{-\gamma} : \Omega \to [0, \infty)$.

A equação (4.1) é também conhecida como a equação parabólica de Hardy (veja (SLIMENE; TAYACHI; WEISSLER, 2017)).

Neste capítulo apresentamos condições para a existência e não existência de soluções locais para o problema (4.1). Antes disso, definimos o que entendemos por solução do problema (4.1).

Definição 4.1. *Seja $u_0 \in L^r(\Omega)$, com $u_0 \geq 0$ e $1 \leq r < \infty$. Uma função não negativa u definida quase sempre em $\Omega \times (0, T)$, para algum $T > 0$, é dita solução local do problema (4.1) se $u \in L^\infty((0, T), L^r(\Omega))$ e verifica*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t - \sigma)|\cdot|^{-\gamma} f(u(\sigma))d\sigma \tag{4.2}$$

quase sempre em $\Omega \times (0, T)$, onde $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ denota o semigrupo do calor.

4.2 Resultado de existência

Para os resultados da existência local, usamos o método de super e subsolução. Super e subsolução são entendidos no seguinte sentido.

Definição 4.2. *Sejam $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função contínua, $\gamma > 0$, $u_0 \in L^r(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ e $r \geq 1$. Dizemos que uma função não-negativa, finita quase sempre e mensurável $\bar{u}$ definida em $\Omega \times (0, T)$, para algum $T > 0$, é uma supersolução de (4.1) se*

$$\bar{u} \in L^\infty((0, T), L^r(\Omega))$$

e satisfaz

$$\bar{u}(t) \geq S(t)u_0 + \int_0^t S(t - \sigma)|\cdot|^{-\gamma} f(\bar{u}(\sigma))d\sigma. \tag{4.3}$$

Subsoluções são definidas analogamente, com desigualdades invertidas.

Lema 4.3. *Suponhamos que $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é uma função contínua não decrescente e $0 < \gamma < N$. Seja $u_0 \in L^r(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ e $r \geq 1$. Então, o problema (4.1) admite uma solução em $\Omega \times (0, T)$, se, e somente se, admite uma supersolução em $\Omega \times (0, T)$.*

Demonstração. Por definição, qualquer solução de (4.1) é uma supersolução de (4.1). Assim, precisamos apenas mostrar que a existência de uma supersolução de (4.1) implica a existência de uma solução de (4.1). Para isso, definimos o seguinte operador

$$\mathcal{F}(u)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t - \gamma)|\cdot|^{-\gamma} f(u(\sigma))d\sigma,$$

para toda função u finita quase sempre, não negativa e mensurável em
$\Omega \times (0, T)$.

Note que $\bar{u} \geq \mathcal{F}(\bar{u})$, devido a que $\bar{u}$ é supersolução de (4.1). Ademais, $\mathcal{F}$ é não decrescente, já que f é não decrescente e o semigrupo do calor preserva a positividade. Considere a sequência $\{u^n\}_{n\geq 0}$, dado por $u^0 = \bar{u}$, e $\mathcal{F}(u^n) = u^{n+1}$.

Como $\mathcal{F}$ é não decrescente, segue-se que a sequência $\{u^n\}_{n\geq 0}$ é não crescente quase sempre em $\Omega \times (0, T)$. Seja $u(x, t) = \lim_{n\to\infty} u^n(x, t)$ sempre que existir o limite. Da continuidade da função f, e aplicando o Teorema 2.1, temos $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(u^n) = \mathcal{F}(u)$. Portanto, devido à construção da sequência, é possível concluir que $\mathcal{F}(u) = u$. □

4.3 Efeito regularizante

Usamos a seguinte estimativa.

Lema 4.4. *Sejam $N \geq 1$ e $0 < \gamma < N$, e sejam $q_1, q_2 \in (1, \infty]$ satisfazendo*

$$0 \leq \frac{1}{q_2} < \frac{\gamma}{N} + \frac{1}{q_1} < 1.$$

Então, existe uma constante $C > 0$ que depende de N, γ, q_1 e q_2 tal que

$$\|S(t)(|\cdot|^{-\gamma}\psi)\|_{L^{q_2}} \leq Ct^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right)-\frac{\gamma}{2}}\|\psi\|_{L^{q_1}}, \tag{4.4}$$

para todo $t > 0$ e todo $\psi \in L^{q_1}(\Omega)$, onde Ω é um domínio limitado com fronteira suave de $\mathbb{R}^N$ ou $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, o Lema é a Proposição 2.1 de (SLIMENE; TAYACHI; WEISSLER, 2017). Suponhamos que Ω é um domínio limitado suave e $\psi \in L^{q_1}(\Omega)$. Seja $\tilde{\psi}$ a extensão zero de ψ a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, i.e. $\tilde{\psi} = \psi$ em Ω e $\tilde{\psi} = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Por (BERG, 1990, Lema 7) temos que $K_\Omega(x, y, t) \leq K(x, y, t)$ para $x, y \in \Omega$ e $t \geq 0$, onde K_Ω e K são os núcleos do calor em Ω e $\mathbb{R}^N$, respectivamente. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|S(t)(|\cdot|^{-\gamma}\psi)\|_{L^{q_2}(\Omega)} &\leq \|S(t)(|\cdot|^{-\gamma}\tilde{\psi})\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq Ct^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right)-\frac{\gamma}{2}}\|\tilde{\psi}\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^N)} \\
&= Ct^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right)-\frac{\gamma}{2}}\|\psi\|_{L^{q_1}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

4.4 Problema auxiliar

Seja Ω ou um domínio limitado suave com $0 \in \Omega$ ou $\Omega = \mathbb{R}^N$. Nesta seção estudamos a existência de soluções para o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= g(x, u) = |x|^{-\gamma_1} + |x|^{-\gamma_2}u^p \text{ em } \Omega \times (0, T), \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) &= u_0 \geq 0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

onde $u_0 \in L^r(\Omega)$, $r > 1$, e $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2$. Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, prescindimos das condições de fronteira.

Antes de estabelecer o resultado de existência, precisamos dos seguintes lemas preliminares.

Lema 4.5. *Suponhamos que $0 < \gamma_2 < \min\{2, N\}, p > 1$ e $r = N(p-1)/(2-\gamma_2) > 1$. Então, existe $\eta > \max\{r, p\}$ tal que*

$$\frac{1}{r} - \frac{2}{Np} < \frac{1}{\eta} < \frac{N-\gamma_2}{Np}. \tag{4.6}$$

Além disso, se $\beta = N(1/r - 1/\eta)/2$ temos que $0 < \beta p < 1$,

1. $\dfrac{N}{2}\left(\dfrac{p}{\eta}-\dfrac{1}{r}\right)+\dfrac{\gamma_2}{2}+p\beta=1,$

2. $\dfrac{N}{2}\left(\dfrac{p}{\eta}-\dfrac{1}{\eta}\right)+\dfrac{\gamma_2}{2}+(p-1)\beta=1.$

Lema 4.6. *Seja $p>1$ e seja $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência definida por*

$$\frac{p}{\eta_0}-\frac{1}{\eta_0}=c, \;\; e \; \frac{p}{\eta_{n-1}}-\frac{1}{\eta_n}=d, \tag{4.7}$$

para $n\geq 1$ com $0<c<d$. Então $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência crescente tal que $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=+\infty$.

Demonstração. Por indução, temos que $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência crescente. Suponhamos que a sequência seja limitada superiormente. Então, existe $\tilde{\eta}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=\tilde{\eta}$. Como $p>1$, assim temos que $\eta_0>\tilde{\eta}$, o que é uma contradição. Portanto, segue o resultado. $\square$

A existência de solução do problema (4.5) é dada pelo seguinte resultado

Proposição 4.7. *Suponhamos que $0<\gamma_i<\min\{2,N\}$, $i=1,2$, $p>1$ e $u_0\in L^r(\Omega)$ com $r=N(p-1)/(2-\gamma_2)>1$. Se Ω ou é um domínio limitado suave ou $\Omega=\mathbb{R}^N$ e $\gamma_1>N/r$, então o problema (4.5) possui uma solução local.*

Demonstração. A prova usa argumentos semelhantes aos usados em (SLIMENE; TAYACHI; WEISSLER, 2017, Teorema 1.1)(iii)), no entanto, alguns cuidados devem ser tomados, pois o problema considerado por eles é (4.5) com $g(x,u)=|x|^{-\gamma_2}u^p$.

Caso 1. $\Omega=\mathbb{R}^N$. Seja $E=L^\infty((0,T),L^r(\mathbb{R}^N))\cap L^\infty_{loc}((0,T)),L^\eta(\mathbb{R}^N))$, $M\geq\|u_0\|_{L^r}$, $\delta>0$ (será escolhido apropriadamente mais adiante), e

$$K=\left\{u\in E;\|u(t)\|_{L^r}\leq M+1 \quad \text{e} \quad t^\beta\|u(t)\|_{L^\eta}\leq\delta \text{ para } t\in(0,T)\right\}, \tag{4.8}$$

onde $\beta=N(1/r-1/\eta)/2$ com η dado como no Lema 4.5. Equipando o conjunto K com a distância

$$d(u,v)=\sup_{t\in(0,T)}\|u(t)-v(t)\|_{L^r}+\sup_{t\in(0,T)}t^\beta\|u(t)-v(t)\|_{L^\eta},$$

temos que (K,d) é um espaço métrico completo não vazio.

Agora, definimos o operador $\Phi:K\to E$ por

$$\Phi(u)(t)=S(t)u_0+\underbrace{\int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma_1}d\sigma}_{I}+\underbrace{\int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma_2}u^p(\sigma)d\sigma}_{J}, \tag{4.9}$$

para todo $u\in K$.

Primeiro, mostramos que $\Phi(u) \in K$. Seja $m = N/\gamma_1$. Como $r > m$, temos que $|\cdot|^{-\gamma_1} = \psi_1 + \psi_2$ com $\psi_1 \in L^{m-\epsilon}(\mathbb{R}^N)$ e $\psi_2 \in L^{m+\epsilon}(\mathbb{R}^N)$, onde $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para que $r > m + \epsilon$, $m - 1 > \epsilon$ e

$$\frac{1}{m+\epsilon} < \frac{1}{m} = \frac{\gamma_1}{N} < \frac{1}{m-\epsilon} < \frac{2}{N}. \tag{4.10}$$

Assim, das estimativas (2.2) e (4.10) temos

$$\begin{aligned} \|I\|_{L^r} &\leq \int_0^t \|S(\sigma)(\psi_1 + \psi_2)\|_{L^r} \\ &\leq \int_0^t \sigma^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{m-\epsilon} - \frac{1}{r}\right)} \|\psi_1\|_{L^{m-\epsilon}} d\sigma + \int_0^t \sigma^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{m+\epsilon} - \frac{1}{r}\right)} \|\psi_2\|_{L^{m+\epsilon}} d\sigma \\ &\leq C_1 T^{1-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{m-\epsilon} - \frac{1}{r}\right)} + C_2 T^{1-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{m+\epsilon} - \frac{1}{r}\right)}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde

$$C_1 = \left[1 - \frac{N}{2}\left(\frac{1}{m-\epsilon} - \frac{1}{r}\right)\right]^{-1} \|\psi_1\|_{L^{m-\epsilon}},\ C_2 = \left[1 - \frac{N}{2}\left(\frac{1}{m+\epsilon} - \frac{1}{r}\right)\right]^{-1} \|\psi_2\|_{L^{m+\epsilon}}.$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \|I\|_{L^\eta} &\leq \int_0^t \|S(t-\sigma)(\psi_1 + \psi_2)\|_{L^\eta} d\sigma \\ &\leq \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{m-\epsilon} - \frac{1}{\eta}\right)} \|\psi_1\|_{L^{m-\epsilon}} d\sigma + \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{m+\epsilon} - \frac{1}{\eta}\right)} \|\psi_2\|_{L^{m+\epsilon}} d\sigma \\ &\leq C_3 T^{1-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{m-\epsilon} - \frac{1}{\eta}\right)} + C_4 T^{1-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{m+\epsilon} - \frac{1}{\eta}\right)}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde

$$C_3 = \left[1 - \frac{N}{2}\left(\frac{1}{m-\epsilon} - \frac{1}{\eta}\right)\right]^{-1} \|\psi_1\|_{L^{m-\epsilon}},\ C_4 = \left[1 - \frac{N}{2}\left(\frac{1}{m+\epsilon} - \frac{1}{\eta}\right)\right]^{-1} \|\psi_2\|_{L^{m+\epsilon}}.$$

Usando a estimativa (4.4) com $q_1 = \eta/p$ e $q_2 = r$, com (isso é possível devido a (4.6), já que $1/r - \gamma_2/N = p/r - 2/N$), e pelo Lema 4.5(i) temos

$$\begin{aligned} \|J\|_{L^r} &\leq \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\eta} - \frac{1}{r}\right) - \frac{\gamma_2}{2}} \|u^p(\sigma)\|_{L^{\eta/p}} d\sigma \\ &\leq \left(\sup_{0<t<T} t^\beta \|u(t)\|_{L^\eta}\right)^p \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\eta} - \frac{1}{r}\right) - \frac{\gamma_2}{2}} \sigma^{-p\beta} d\sigma \\ &\leq C_5 \delta^p, \end{aligned} \tag{4.13}$$

onde $C_5 = \displaystyle\int_0^1 (1-\sigma)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{\eta} - \frac{1}{r}) - \frac{\gamma_2}{2}} \sigma^{-\beta p} \sigma.$

Usando a estimativa (2.2), o Lema 4.4 com $q_1 = \eta/p$ e $q_2 = \eta$, e o Lema 4.5(ii) temos

$$\begin{aligned}
t^{\beta}\|J\|_{L^{\eta}} &\leq t^{\beta}\int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\eta}-\frac{1}{\eta}\right)-\frac{\gamma_2}{2}}\|u^p(\sigma)\|_{L^{\eta/p}}d\sigma \\
&\leq t^{\beta}\int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\eta}-\frac{1}{\eta}\right)-\frac{\gamma_2}{2}}\|u^p(\sigma)\|_{L^{\eta/p}}d\sigma \\
&\leq \left(\sup_{0<t<T} t^{\beta}\|u(t)\|_{L^{\eta}}\right)^p t^{\beta}\int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\eta}-\frac{1}{\eta}\right)-\frac{\gamma_2}{2}}\sigma^{-\beta p}d\sigma \\
&\leq C_6\delta^p,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde $C_6 = \displaystyle\int_0^1 (1-\sigma)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p-1}{\eta}\right)-\frac{\gamma_2}{2}}\sigma^{-\beta p}d\sigma$.

Como as constantes $C_i > 0, i = 1, ..., 6$ dependem somente de p, r, η, γ e N, e pelo Lema 2.8 temos que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^{\beta}\|S(t)u_0\|_{L^{\eta}} = 0$, segue de (4.10)-(4.14) que $\|\Phi(u)(t)\|_{L^r} \leq M+1$, e $\displaystyle\sup_{0<t<T} t^{\beta}\|\Phi(u)(t)\|_{L^{\eta}} \leq \delta$ desde que δ e T sejam suficientementes pequenos. Assim, $\Phi(u) \in K$.

Por outro lado, similarmente como se estima em (4.13) e (4.14), se mostra que para $u, v \in K$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in(0,T)}\|\Phi(u)(t)-\Phi(v)(t)\|_{L^r} + \sup_{t\in(0,T)} t^{\beta}\|\Phi(u)(t)-\Phi(v)(t)\|_{L^{\eta}} \\
&\leq C_7\delta^{p-1}d(u,v) \leq \frac{1}{4}d(u,v),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

para alguma constante C_7. Portanto, para $\delta > 0$ e T suficientemente pequeno temos que Φ é uma contração estrita. Daí, Φ possui um ponto fixo u, a qual é uma solução do problema (4.5).

Para mostrar a regularidade de u usamos o argumento de bootstrap de (DICKSTEIN; LOAYZA, 2008, p. 7) e (SNOUSSI; TAYACHI; WEISSLER, 2001, p. 153). Especificamente, mostramos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right)}\|u(t)\|_{L^s} \leq C, \tag{4.16}$$

para todo $t \in (0,T)$, $s \geq r$. Observemos que a parte da existência garante que (4.16) é válido para $s = \eta = \eta_0$. Seja $N(p-1)/2\eta_0 = c$. Então, pelo Lema 4.5 temos que

$$\frac{p}{\eta_0} + \frac{\gamma_2}{N} < 1,\ 0 < \frac{N}{2}\left(\frac{p-1}{\eta_0}\right) + \frac{\gamma_2}{2} < 1. \tag{4.17}$$

Seja $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ a sequência definida em (4.7), ou seja, $\dfrac{p}{\eta_{n-1}} - \dfrac{1}{\eta_n} = d$ com $0 < c < d < (2-\gamma_2)/N$. Suponhamos que (4.16) é válido para algum $s = \eta_k$. Do Lema 4.6 temos que $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ é crescente, e de (4.17) temos

$$\frac{p}{\eta_k} + \frac{\gamma_2}{N} < 1,\ 0 < \frac{p}{\eta_k} - \frac{1}{\eta_{k+1}} + \frac{\gamma_2}{N} < \frac{2}{N}. \tag{4.18}$$

Como
$$u(t) = S(t/2)u(t/2) + \int_{t/2}^{t} S(t-\sigma)[|\cdot|^{-\gamma_1} + |\cdot|^{-\gamma_2}u^p(\sigma)]d\sigma,$$
para $0 < t < T$,
$$\begin{aligned} t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)}\|u(t)\|_{L^{\eta_{k+1}}} &\leq t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)}\|S(t/2)u(t/2)\|_{L^{\eta_{k+1}}} \\ &+ t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)}\|I\|_{L^{\eta_{k+1}}} + t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)}\|J\|_{L^{\eta_{k+1}}}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Pela Proposição 2.7, temos
$$t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)}\|S(t/2)u(t/2)\|_{L^{\eta_{k+1}}} \leq 2^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{\eta_k}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)} t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta_k}\right)}\|u(t/2)\|_{L^{\eta_k}}.$$

Assim, de (4.16) para $s = \eta_k$, temos $t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)}\|S(t/2)u(t/2)\|_{L^{\eta_{k+1}}} \leq C$. Da condição (4.10) obtemos
$$\begin{aligned} t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)}\|I\|_{L^{\eta_{k+1}}} &\leq t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)} \int_{t/2}^{t} (t-\sigma)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{m-\epsilon}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)}\|\psi_1\|_{L^{m-\epsilon}} \\ &+ t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)} \int_{t/2}^{t} (t-\sigma)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{m+\epsilon}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)}\|\psi_2\|_{L^{m+\epsilon}} \\ &\leq Ct^{1-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{m-\epsilon}-\frac{1}{r}\right)} + Ct^{1-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{m+\epsilon}-\frac{1}{r}\right)} \leq C, \end{aligned}$$

e por (4.18), (4.16) (para $s = \eta_k$) temos
$$\begin{aligned} t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)}\|J\|_{L^{\eta_{k+1}}} &\leq t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)} \int_{t/2}^{t} (t-\sigma)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\eta_k}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)-\frac{\gamma_2}{2}}\|u(\sigma)\|^p_{L^{\eta_k}}d\sigma \\ &\leq Ct^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)} \int_{t/2}^{t} (t-\sigma)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\eta_k}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)-\frac{\gamma_2}{2}}\sigma^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{r}-\frac{p}{\eta_k}\right)}d\sigma \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Assim, de (4.19), concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que
$$t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta_{k+1}}\right)}\|u(t)\|_{L^{\eta_{k+1}}} \leq C, \tag{4.20}$$
para todo $t \in (0, T)$.

A estimativa (4.16), para $s = +\infty$, é obtida em um número finito de etapas. De fato, como $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = +\infty$, dado $M > 0$ suficientemente grande, existe $\eta_M > 1$ tal que $p/\eta_M < (2-\gamma_2)/N$. Portanto, procedendo da mesma forma como uma derivação de (4.20), com $\eta_{k+1} = +\infty$ e $\eta_k = \eta_M$, obtemos o resultado desejado.

Caso 2. Ω um domínio limitado. Consideremos o espaço métrico completo K e o operador $\Phi : K \to E$ como em (4.8) e (4.9) respectivamente (mudando Ω no lugar de $\mathbb{R}^N$). Observemos que neste caso somente temos $\psi_1 = |\cdot|^{-\gamma_1} \in L^{m-\epsilon}(\Omega)$ com $m = N/\gamma_1$.

Se $\gamma_1 > N/r$, então a demonstração da Proposição 4.7 é válida para o caso de Ω com $\psi_2 = 0$. Quando $\gamma_1 \leq N/r$ são necessárias algumas pequenas modificações para estimar o termo I de (4.9). Se $\gamma_1 = N/r$, então $r > m - \epsilon$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que $1/(m-\epsilon) < 1/\eta + 2/N$. Então, podemos estimar I como na dedução de (4.11) e (4.12) com $\psi_2 = 0$. Quando $\gamma_1 < N/r$ estimamos I do seguinte modo.

$$\|I\|_{L^r} \leq \int_0^t \|\psi_1\|_{L^r} \leq \|\psi_1\|_{L^r} T,$$

$$\|I\|_{L^\eta} \leq \int_0^t \sigma^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta}\right)} \|\psi_1\|_{L^r} \leq CT^{1-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta}\right)},$$

para alguma constante $C > 0$. Observe que de (4.6) temos $1 > \dfrac{N}{2}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{\eta}\right)$.

Note que as estimativas para J, em $L^r(\Omega)$ e $L^\eta(\Omega)$, dadas por (4.13) e (4.14), e (4.15) são válidas neste caso. Portanto, é possível concluir que Φ tem ponto fixo, que é solução de (4.5).

O resultado de regularidade é obtido como no Caso 1. $\square$

No próximo resultado analisamos o caso $r > 1$.

Teorema 4.8. *Sejam $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ uma função contínua e não decrescente, $r > 1$ e $0 < \gamma < \min\{2, N\}$.*

1. *Suponhamos que Ω é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e $0 \in \Omega$. O problema (4.1) possui uma solução local para cada $u_0 \in L^r(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, se e somente se $\limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty$.*

2. *Suponhamos que $\Omega = \mathbb{R}^N$.*

   a) Se $\gamma < N/r$,

$$\limsup_{t\to 0} t^{-[1-(\gamma r)/N+\epsilon]} f(t) < \infty \quad e \quad \limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty, \tag{4.21}$$

   para algum $\epsilon \in (0, \gamma r/N)$, ou

$$\gamma > N/r \quad e \quad \limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty, \tag{4.22}$$

   então o problema (4.1) possui uma solução local para cada $u_0 \in L^r(\Omega)$, com $u_0 \geq 0$.

   b) Se $\gamma < N/r$ e $\limsup_{t\to 0} t^{-[1-(\gamma r)/N]} f(t) = \infty$ ou $\limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) = \infty$, então existe $u_0 \in L^r(\Omega)$ com $u_0 \geq 0$ tal que o problema (4.1) não possui solução.

Além disso, nos casos (i) e (ii)-(a) a solução u do problema (4.1) pertence ao espaço $L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega))$, e existe uma constante $C > 0$ tal que $t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{s})}\|u(t)\|_{L^s} \leq C$, para $r \leq s \leq \infty$ e $t \in (0,T)$.

Observação 4. *Segue abaixo algumas observações sobre o Teorema 4.8.*

1. *As afirmações (a) e (b) do item (ii) são 'quase' ótimo. De fato, o resultado é otimal se $\epsilon = 0$ em (4.21) e $\gamma \geq N/r$ em (4.22).*

2. *Quando $f(t) = t^p$ para $t \geq 0$, com $p > 1$, a condição $\limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty$ é satisfeita se e somente se $p \leq p^*$. Além disso, como $p > 1$, a primeira condição de (4.21) é satisfeita para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, o Teorema 4.8 (ii)-(a) coincide com o resultado da existência local dado pelo Teorema 1.1 de (SLIMENE; TAYACHI; WEISSLER, 2017) com $\Omega = \mathbb{R}^N$. Ademais, o item (b) mostra que p^* é o valor crítico para a existência local de soluções não negativas do problema (4.1).*

3. *Se $f(t) = t$, então a condição $\limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty$ é sempre satisfeita. Assim, quando Ω é uma domínio limitado e $0 < \gamma < \min\{2, N\}$, o problema (4.1) possui solução local para cada $u_0 \in L^r(\Omega), u_0 \geq 0$, $r > 1$.*

Demonstração. (i) Suponhamos que o problema (4.1) possui solução para cada $u_0 \in L^r(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, e $\limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) = \infty$.

Como $\limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) = \infty$, existe uma sequência $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ tal que $\phi_n \geq n$ e $f(\phi_n) \geq e^{n/r}\phi_n^{p^*}$.

Seja $\rho_n = \phi_n^{-r/N} n^{-2r/N}$. Como $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$, então podemos supor que $B_{3\rho_n} \subset \Omega$ para cada $n \geq 1$. Seja $u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, onde $u_n = c_N^{-1} 2^N \phi_n \chi_{\rho_n}$, e c_N é a constante que aparece no Lema 3.2. Observemos que

$$\|u_0\|_{L^r} \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_N^{-1} 2^N \phi_n \omega_N^{1/r} \rho_n^{N/r} = c_N^{-1} 2^N \omega_N^{1/r} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty.$$

Seja $u \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$ solução do problema (4.1) com condição inicial $u(0) = u_0$, para algum $T > 0$. Como $u \geq 0$ e $f \geq 0$, então pelo Lema 3.2 temos

$$u(\sigma) \geq S(\sigma)u_0 \geq S(\sigma)u_n \geq 2^N \phi_n \left(\frac{\rho_n}{\rho_n + \sqrt{\sigma}}\right)^N \chi_{\rho_n + \sqrt{\sigma}} \geq \phi_n \chi_{\rho_n},$$

para $0 < \sigma \leq \rho_n^2$. Como f é não decrescente, temos

$$f(u(\sigma)) \geq f(\phi_n)\chi_{\rho_n},\ 0 < \sigma \leq \rho_n^2. \tag{4.23}$$

Por outro lado, de (2.3) obtemos

$$S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}\chi_{\rho_n} \geq \rho_n^{-\gamma} S(t-\sigma)\chi_{\rho_n}.$$

Assim, para $t \in [\rho_n^2/2, \rho_n^2]$, por (4.2), (4.23) e pelo Lema 3.2, temos

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} f(S(\sigma)u_n)d\sigma \\ &\geq f(\phi_n)\int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}\chi_{\rho_n}d\sigma \\ &\geq Cf(\phi_n)\int_0^t \rho_n^{-\gamma}\chi_{\rho_n+\sqrt{t-\sigma}}d\sigma \\ &\geq Cf(\phi_n)\int_0^{\rho_n^2/2} \rho_n^{-\gamma}\chi_{\rho_n}d\sigma \\ &\geq Cf(\phi_n)\rho_n^{2-\gamma}\chi_{\rho_n}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^r} &\geq \omega_N^{1/r} Cf(\phi_n)\rho_n^{2-\gamma+N/r} \\ &\geq \omega_N^{1/r} Ce^{n/r}\phi^{p^*}(\phi_n^{-1}n^{-2})^{p^*} \\ &\geq \omega_N^{1/r} Ce^{n/r}n^{-2p^*}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Como o lado direito de (4.24) tende ao infinito, quando $n \to \infty$, concluímos que $u \notin L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$. Isto é uma contradição.

Reciprocamente, suponhamos que $\limsup_{t\to\infty} t^{-p^*}f(t) < \infty$ e $u_0 \in L^r(\Omega)$, com $u_0 \geq 0$. Então, existe uma constante $C_0 > 0$ tal que $f(t) \leq C_0(1+t^{p^*})$, para $t \geq 0$, onde $p^* = r(2-\gamma)/N + 1$.

Consideremos seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= C_0|\cdot|^{-\gamma}(1+u^{p^*}) \text{ em } \Omega\times(0,T) \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega\times(0,T) \\ u(0) &= u_0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{4.25}$$

A existência de uma solução para o problema (4.25) é garantida pela Proposição 4.7. A solução encontrada para o problema (4.25) é uma supersolução de (4.1), segue do Lema 4.3 a existência de solução local para o problema (4.1) e ademais, temos que pertence ao espaço $L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega))$.

(ii)-(a) Seja $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \geq 0$. Consideramos duas situações:

Caso 1. Suponhamos que $\gamma < N/r$, $\limsup_{t\to 0} t^{-(1+\epsilon-\gamma r/N)}f(t) < \infty$ para algum $\epsilon \in (0, \gamma r/N)$ e $\limsup_{t\to\infty} t^{-p^*}f(t) < \infty$. Então existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$f(t) \leq C_1(t^{1-\frac{\gamma r}{N}+\epsilon} + t^{p^*}), \tag{4.26}$$

para $t \geq 0$.

Seja $a = \left(\frac{r\gamma}{N} - \epsilon\right)^{-1} > 1$. Pela desigualdade de Young, obtemos

$$|\cdot|^{-\gamma} t^{1-\frac{\gamma r}{N}+\epsilon} \leq \frac{1}{a}|\cdot|^{-\gamma a} + \frac{t}{a'}. \tag{4.27}$$

onde a' é o conjugado de a, i.e., $1/a + 1/a' = 1$.

Seja v solução local do seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= C_1(|\cdot|^{-\gamma a} + u + |\cdot|^{-\gamma} u^{p^*}) \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(0) &= u_0, \text{ in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{4.28}$$

A existência de v é garatida da seguinte forma. Seja $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo do operador $\mathcal{A} = -\Delta - C_1 I$. Como $S_{\mathcal{A}}(t) = e^{C_1 t} S(t)$ para $t \geq 0$, as estimativas (2.2) e (4.4) são válidas para alguma constante do tipo $Ce^{C_1 T}$ para $t \in (0,T]$. Ademais, como $\gamma a = \dfrac{\gamma N}{r\gamma - N\epsilon} > \dfrac{N}{r}$ procedendo como na demonstração da Proposição 4.7 encontramos a função $w \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$, para algum $T > 0$, verificando

$$v(t) = S_{\mathcal{A}}(t)u_0 + C_1 \int_0^t S_{\mathcal{A}}(t-\sigma)(|\cdot|^{-\gamma a} + |\cdot|^{-\gamma} v^{p^*}(\sigma))d\sigma,$$

para $t \in (0,T)$. Então, é possível concluir que

$$v(t) = S(t)u_0 + C_1 \int_0^t S(t-\sigma)(v(\sigma) + |\cdot|^{-\gamma a} + |\cdot|^{-\gamma} v^{p^*}(\sigma))d\sigma.$$

De (4.26), (4.27) e (4.28) observamos que v é uma supersolução do problema (4.1). Então do Lema 4.3 concluímos que o problema (4.1) possui uma solução.

Caso 2. Suponhamos que $\gamma > N/r$ e $\limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) < \infty$. Então, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que $f(t) \leq C_2(1 + t^{p^*})$ para todo $t \geq 0$. Seja w solução local do seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= C_2(|\cdot|^{-\gamma} + |x|^{-\gamma} u^{p^*}) \text{ in } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

dada pela Proposição 4.7. Como w é supersolução de (4.1), o resultado segue pelo Lema 4.3.

(ii)-(b) Consideremos dois casos:

Caso 1. $\gamma < N/r$ e $\limsup_{t\to 0} t^{-(1-\frac{\gamma r}{N})} f(t) = \infty$. Suponhamos que o problema (4.1) possui solução local, para cada $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, com $u_0 \geq 0$.

Como $\limsup_{t\to 0} t^{-(1-\frac{\gamma r}{N})} f(t) = \infty$, então existe uma sequência $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$, tal que $\sigma_n \leq n^{-2}$ e $f(\sigma_n) \geq e^n \sigma_n^{1-\frac{\gamma r}{N}}$. Seja

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n = 2^N \tilde{c}_N^{-1} \sigma_n \chi_{\rho_n},\ \rho_n = (\sigma_n^{-1} n^{-2})^{r/N}$$

onde $\tilde{c}_N$ é a constante da Observação 1. Notemos que

$$\|u_0\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^N \tilde{c}_N^{-1} \omega_N^{1/r} \sigma_n \rho_n^{N/r} \leq 2^N \tilde{c}_N^{-1} \omega_N^{1/r} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty.$$

Seja $u \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$ uma solução local problema (4.1) com condição inicial $u(0) = u_0$ para algum $T > 0$. Note que $\rho_n \geq 1$. Assim, para todo $0 < \sigma \leq 1$, pela Observação 1

$$\begin{aligned} S(\sigma)u_n &= 2^N \tilde{c}_N^{-1} \sigma_n S(\sigma)\chi_{\rho_n} \\ &\geq 2^N \sigma_n \left(\frac{\rho_n}{\rho_n + \sqrt{\sigma}} \right)^N \chi_{\rho_n + \sqrt{\sigma}} \\ &\geq \sigma_n \chi_{\rho_n + \sqrt{\sigma}} \\ &\geq \sigma_n \chi_{\rho_n}. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(S(\sigma)u_n) \geq f(\sigma_n)\chi_{\rho_n}, \ 0 < \sigma \leq 1. \tag{4.29}$$

Observamos que de (2.3) temos $S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}\chi_{\rho_k} \geq \rho_k^{-\gamma} S(t-\sigma)\chi_{\rho_k}$. Então, para todo $0 < t \leq 1 \leq \rho_n$, de (4.29) e pelo Lema 3.2, obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} f(u(\sigma))d\sigma \\ &\geq \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} f(S(\sigma)u_n)d\sigma \\ &\geq \int_0^t f(\sigma_n) S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} \chi_{\rho_n} d\sigma \\ &\geq f(\sigma_n)\rho_n^{-\gamma} \int_0^t S(t-\sigma)\chi_{\rho_n} d\sigma \\ &\geq c_N f(\sigma_n)\rho_n^{-\gamma} \int_0^t \left(\frac{\rho_n}{\rho_n + \sqrt{t-\sigma}} \right)^N \chi_{\rho_n + \sqrt{t-\sigma}} d\sigma \\ &\geq 2^{-N} \tilde{c}_N t f(\sigma_n) \rho_n^{-\gamma} \chi_{\rho_n}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^r} &\geq 2^{-N} \tilde{c}_N \omega_N^{1/r} t f(\sigma_n) \rho_n^{\frac{N}{r}-\gamma} \\ &\geq 2^{-N} \tilde{c}_N \omega_N^{1/r} t f(\sigma_n) \rho_n^{\frac{N}{r}-\gamma} \\ &\geq 2^{-N} \tilde{c}_N \omega_N^{1/r} t e^n \sigma_n^{1-\frac{\gamma r}{N}} n^{-2\left(1-\frac{\gamma r}{N}\right)} \sigma_n^{-\left(1-\frac{\gamma r}{N}\right)} \\ &= 2^{-N} \tilde{c}_N \omega_N^{1/r} t e^n n^{-2\left(1-\frac{\gamma r}{N}\right)} \to \infty \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Portanto, $u \notin L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$, o que é uma contradição.

Caso 2. $\limsup_{t\to\infty} t^{-p^*} f(t) = \infty$. Neste caso procedemos como na demonstração do Teorema 4.8(i) usando a Observação 1 no lugar do Lema 3.2. $\square$

O caso $r = 1$ é tratado no seguinte resultado.

Teorema 4.9. *Seja* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *uma função contínua e não decrescente e seja* $0 < \gamma < \min\{2, N\}$.

1. *Suponhamos que* Ω *é um domínio limitado com fronteira* $\partial\Omega$ *suave e* $0 \in \Omega$, *e* $F(s) = \sup\limits_{1\leq\sigma\leq s} f(\sigma)/\sigma$ *para* $s \geq 1$.

   a) Se
$$\int_1^\infty \sigma^{-[(2-\gamma)/N+1]} F(\sigma)\, d\sigma = \infty,$$
   então existe $u_0 \in L^1(\Omega), u_0 \geq 0$, *tal que o problema* (4.1) *não possui solução local.*

   b) Se
$$\lim_{t\to 0} t^{\gamma/2} \int_0^t F(\sigma^{-N/2})(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2} d\sigma = 0, \tag{4.30}$$
   então para cada $u_0 \in L^1(\Omega), u_0 \geq 0$, *o problema* (4.1) *possui solução local.*

2. *Suponhamos que* $\Omega = \mathbb{R}^N$ *e* $\tilde{F}(s) = \sup\limits_{0<\sigma\leq s} f(\sigma)/\sigma$ *para* $s > 0$.

   a) Se $\limsup\limits_{t\to 0} t^{-(1-\gamma/N)} f(t) = \infty$ *ou*
$$\int_1^\infty \sigma^{-[(2-\gamma)/N+1)} \tilde{F}(\sigma) d\sigma = \infty, \tag{4.31}$$
   então existe $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0$ *tal que o problema* (4.1) *não possui solução local.*

   b) Se
$$\limsup_{t\to 0} t^{-(1-\gamma/N)} f(t) < \infty$$
   e
$$\lim_{t\to 0} t^{\gamma/2} \int_0^t \tilde{F}(\sigma^{-N/2})(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2} d\sigma = 0, \tag{4.32}$$
   então para cada $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0$, *o problema* (4.1) *possui solução local.*

Além disso, nos casos (i)-(b) e (ii)-(b) a solução encontrada pertence ao espaço $L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega))$.

Observação 5. *Alguns coméntarios sobre o Teorema 4.9 são dados a seguir:*

1. *Note que para* $\gamma = 0$, *a condição* (4.30)*(ou* (4.32)*) se reduz à seguinte* $\lim\limits_{t\to 0} \int_{t^{-N/2}}^\infty \sigma^{-(2/N+1)} F(\sigma) d\sigma = 0$, *que se verifica sempre que*
$$\int_1^\infty s^{-(2/N+1)} F(\sigma)\, d\sigma < \infty.$$
   Esta última condição foi usada em (LAISTER et al., 2016) para mostrar a existência local em $L^1(\Omega)$.

2. *Se $f(t) = t^p$ para $t \geq 0$, $p > 1$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$, então $\tilde{F}(s) = s^{p-1}$ para $s \geq 0$. Note que*

$$\int_0^t \tilde{F}(\sigma^{-N/2})(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2}d\sigma = \int_0^t (t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{(N-\gamma-Np)/2}d\sigma < \infty,$$

se $0 < \gamma < 2$ e $p < 1 + (2-\gamma)/N$. Além disso,

$$t^{\gamma/2}\int_0^t \tilde{F}(\sigma^{-N/2})(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2}d\sigma = Ct^{[2-\gamma-N(p-1)]/2},$$

para alguma constante $C > 0$. Logo, vemos que a condição (4.32) é verificada se $p < 1 + (2-\gamma)/N$. Por outro lado, a condição (4.31) é verificada se $p \geq 1 + (2-\gamma)/N$. Portanto, concluímos que, neste caso, o valor crítico é $p^* = 1 + (2-\gamma)/N$ que coincide com o valor dado em (1.19) (para $r = 1$).

3. *Se $f(t) = t$ para $t \geq 0$ e Ω um domínio limitado, então, $F(s) = 1$ e $t^{\gamma/2}\int_0^t F(\sigma^{-N/2})(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2}d\sigma = Ct^{(2-\gamma)/2}$. Assim, do Teorema 4.9 (i)-(b), temos que se $0 < \gamma < \min\{2, N\}$, então o problema (4.1) possui solução local para cada $u_0 \in L^1(\Omega), u_0 \geq 0$.*

Demonstração. (i) (a) Suponhamos que $\int_1^\infty \sigma^{-(\frac{2-\gamma}{N}+1)}F(\sigma)d\sigma = \infty$. Então pelo Lema 2.11, temos que existe uma sequência $\{s_k\}_{k\geq 0}$ tal que $s_{k+1} \geq \theta s_k$, para algum $\theta > 1$, e $\sum_{k=1}^\infty s_k^{-(\frac{2-\gamma}{N}+1)}f(s_k) = \infty$.

Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que $B_{3\delta} \subset \Omega$, e consideremos a sequência $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$, com $\psi_n^N = n^2 s_{k_n+1} > 0$ (a sequência $\{k_n\}_{n\geq 1}$ será escolhida mais adiante) tal que $1/\psi_n < \delta$ para $n \geq n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$.

Seja $u_0 = 2^N c_N^{-1}\sum_{n=1}^\infty n^{-2}\psi_n^N \chi_{1/\psi_n}$, onde c_N é a constante do Lema 3.2. Note que

$$\|u_0\|_{L^1} \leq 2^N c_N^{-1}\omega_N \sum_{n=1}^\infty n^{-2} < \infty.$$

Consideremos $u \in L^\infty((0,T), L^1(\Omega))$ uma solução do problema (4.1) com $u(0) = u_0$, para algum $T > 0$. Como $u_0 \geq u_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, pelo Lema 3.2

$$S(\sigma)u_0 \geq 2^N c_N^{-1} n^{-2}\psi_n^N S(\sigma)\chi_{1/\psi_n} \geq n^{-2}\sigma^{-N/2}\chi_{1/\psi_n+\sqrt{\sigma}},$$

para $1/\psi_n \leq \sqrt{\sigma} \leq \delta$ e $n \geq n_0$.

Observemos que de (2.3), temos que

$$S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}\chi_{1/\psi_n+\sqrt{\sigma}} \geq \rho_k^{-\gamma}S(t-\sigma)\chi_{1/\psi_n+\sqrt{\sigma}}.$$

Como f é não decrescente e pelo Lema 3.2, temos

$$
\begin{aligned}
u(t) &\geq \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} f(u(\sigma))d\sigma \\
&\geq \int_{1/\psi_n^2}^t f(n^{-2}\sigma^{-N/2})S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}\chi_{1/\psi_n+\sqrt{\sigma}}d\sigma \\
&\geq \int_{1/\psi_n^2}^t f(n^{-2}\sigma^{-N/2})\left(1/\psi_n+\sqrt{\sigma}\right)^{-\gamma} S(t-\sigma)\chi_{1/\psi_n+\sqrt{\sigma}}d\sigma \\
&\geq c_N \int_{1/\psi_n^2}^t f(n^{-2}\sigma^{-N/2})(2\sqrt{\sigma})^{-\gamma}\left(\frac{1/\psi_n+\sqrt{\sigma}}{1/\psi_n+\sqrt{\sigma}+\sqrt{t-\sigma}}\right)^N \chi_{1/\psi_n+\sqrt{\sigma}+\sqrt{t-\sigma}}d\sigma
\end{aligned}
$$

Assim, fixando $t>0$ e seja $n_1 \geq n_0$ tal que $s_{k_{n_1}} \geq t^{-N/2}$. Então

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^1} &\geq C(N,\gamma)\int_{1/\psi_n^2}^t f(n^{-2}\sigma^{-N/2})\sigma^{-\gamma/2}\left(1/\psi_n+\sqrt{\sigma}\right)^N d\sigma \\
&\geq C(N,\gamma)\int_{1/\psi_n^2}^t f(n^{-2}\sigma^{-N/2})\sigma^{-\gamma/2}\sigma^{N/2}d\sigma \\
&\geq C_1(N,\gamma)n^{-\frac{(2(N-\gamma)+4)}{N}}\int_{t^{-\frac{N}{2}}}^{s_{n_k+1}} f(\sigma)\sigma^{\frac{\gamma}{N}-\frac{2}{N}-2}d\sigma \\
&\geq C_1(N,\gamma)n^{-\frac{(2(N-\gamma)+4)}{N}}\sum_{j=k_{n_1}}^{k_n}\int_{s_j}^{s_{j+1}} f(\sigma)\sigma^{\frac{\gamma}{N}-\frac{2}{N}-2}d\sigma \\
&\geq C_1(N,\gamma)n^{-\frac{(2(N-\gamma)+4)}{N}}\sum_{j=k_{n_1}}^{k_n} f(s_j)\int_{s_j}^{s_{j+1}} \sigma^{\frac{\gamma}{N}-\frac{2}{N}-2}d\sigma \qquad (4.33)\\
&= C_1(N,\gamma)n^{-\frac{(2(N-\gamma)+4)}{N}}\sum_{j=k_{n_1}}^{k_n} f(s_j)\left[\frac{s_{j+1}^{\frac{\gamma}{N}-\frac{2}{N}-1}-s_j^{\frac{\gamma}{N}-\frac{2}{N}-1}}{\frac{\gamma}{N}-\frac{2}{N}-1}\right] \\
&= C_2(N,\gamma)n^{-\frac{(2(N-\gamma)+4)}{N}}\sum_{j=k_{n_1}}^{k_n} f(s_j)s_j^{\frac{\gamma}{N}-\frac{2}{N}-1}\left[1-\left(\frac{s_{j+1}}{s_j}\right)^{\frac{\gamma}{N}-\frac{2}{N}-1}\right] \\
&\geq (1-\theta^{\frac{\gamma}{N}-\frac{2}{N}-1})C_2(N,\gamma)n^{-\frac{(2(N-\gamma)+4)}{N}}\sum_{j=k_{n_1}}^{k_n} f(s_j)s_j^{\frac{\gamma}{N}-\frac{2}{N}-1}.
\end{aligned}
$$

Logo, como $\sum_{k=1}^{\infty} s_k^{-(\frac{2-\gamma}{N}+1)}f(s_k)=\infty$, existe uma subsequência $\{k_n\}_{n\geq 1}$ tal que (4.33) diverge, quando $n\to\infty$. Isso contradiz a existência da solução u.

(b) Do Lema 4.3, é suficiente encontrar uma supersolução v para o problema (4.1). Seja $u_0 \in L^1(\Omega)$, com $u_0 \geq 0$ e seja $\tilde{\Omega} \supset \Omega$ tal que $dist(\Omega,\partial\tilde{\Omega}) \geq \delta$ com $\delta \in (0,1)$. Definimos $\tilde{u}_0 \in L^1(\tilde{\Omega})$ como a extensão de u_0 para $\tilde{\Omega}$, , i.e. $\tilde{u}_0 = u_0$ em Ω e $\tilde{u}_0 = 0$ em $\tilde{\Omega}\backslash\Omega$. Consideremos $\tilde{v}(t) = A\tilde{S}(t)\tilde{u}_0 + \chi_{\tilde{\Omega}}$, onde $\{\tilde{S}(t)\}_{t\geq 0}$ denota o semigrupo do calor em $\tilde{\Omega}$ com condições de Dirichlet na fronteira e A será escolhida adequadamente. Então pela estimativa (2.2), temos que $\tilde{v} \in L^\infty((0,T), L^1(\tilde{\Omega}))$. Além disso, temos

$$\|\tilde{v}(t)\|_\infty \leq At^{-\frac{N}{2}}\|u_0\|_{L^1} + 1 \leq 2At^{-\frac{N}{2}}\|u_0\|_{L^1}, \tag{4.34}$$

para todo $t > 0$ suficientemente pequeno.

Mostraremos que $v = \tilde{v}|_\Omega$, a restrição de $\tilde{v}$ a Ω, é uma supersolução do problema (4.1). Como $v \geq 1$, usando a condição (4.34) temos

$$\begin{aligned}
&S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} f(v(\sigma))d\sigma \\
&= S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}\frac{f(v(\sigma))}{v(\sigma)}v(\sigma)d\sigma \\
&\leq S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}F(\|v(\sigma)\|_{L^\infty})v(\sigma)d\sigma \\
&\leq S(t)u_0 + \int_0^t F\left(2A\sigma^{-N/2}\|u_0\|_{L^1}\right)S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}v(\sigma)d\sigma \\
&= S(t)u_0 + A\int_0^t F\left(2A\sigma^{-N/2}\|u_0\|_{L^1}\right)S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}[\tilde{S}(\sigma)\tilde{u}_0]|_\Omega\, d\sigma \\
&\qquad + \int_0^t F\left(2A\sigma^{-N/2}\|u_0\|_{L^1}\right)S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}\chi_\Omega\, d\sigma \\
&= S(t)u_0 + I + J.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

para t suficientemente pequeno.

Agora estimamos os termos I e J do lado direito de (4.35).

Estimativa de I. De (2.3), para $x \in \Omega$

$$\begin{aligned}
S(t-\sigma)[|\cdot|\tilde{S}(\sigma)\tilde{u}_0](x) &= \int_\Omega K_\Omega(x,y;t-\sigma)|y|^{-\gamma}\int_{\tilde{\Omega}} K_{\tilde{\Omega}}(y,z;\sigma)\tilde{u}_0(z)dzdy \\
&= \int_{\tilde{\Omega}}\int_\Omega K_{\tilde{\Omega}}(y,z;\sigma)\tilde{u}_0(z)K_\Omega(x,y;t-\sigma)|y|^{-\gamma}dydz.
\end{aligned}$$

Do (BERG, 1990, Lema 7) temos que

$$K_\Omega(x,y;t) \leq K_{\tilde{\Omega}}(x,y;t) \leq K(x,y;t)$$

para $x, y \in \Omega, t > 0$. Logo, pela identidade

$$\frac{|x-y|^2}{(t-\sigma)} + \frac{|y-z|^2}{\sigma} = \frac{t}{(t-\sigma)\sigma}\left|y - \frac{\sigma x + (t-\sigma)z}{t}\right|^2 + \frac{|x-z|^2}{t},$$

que vale para $x, y, z \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\begin{aligned}
&K_{\tilde{\Omega}}(y,z;\sigma)\ K_\Omega(x,y;t-\sigma) \leq K(y,z;\sigma)K(x,y;t-\sigma) \\
&\leq C_1\sigma^{-N/2}(t-\sigma)^{-N/2}\exp\left\{-\frac{1}{4}\left[\frac{|y-z|^2}{\sigma} + \frac{|x-y|^2}{(t-\sigma)}\right]\right\} \\
&= C_1\sigma^{-N/2}(t-\sigma)^{-N/2}\exp\left(-\frac{|x-z|^2}{4t}\right)\exp\left[-\frac{t}{4(t-\sigma)\sigma}\left|y - \frac{\sigma x + (t-\sigma)z}{t}\right|^2\right],
\end{aligned}$$

para $0 < \sigma < t$. Assim, do Lema 2.10 obtemos

$$\begin{aligned}
&S(t-\sigma)[|\cdot|\tilde{S}(\sigma)\tilde{u}_0](x)\\
&\leq C_1\sigma^{-N/2}(t-\sigma)^{-N/2}\int_{\tilde{\Omega}}\exp\left(-\frac{|x-z|^2}{4t}\right)\tilde{u}_0(z)\times\\
&\quad\int_{\Omega}\exp\left[-\frac{t}{4(t-\sigma)\sigma}\left|y-\frac{\sigma x+(t-\sigma)z}{t}\right|^2\right]|y|^{-\gamma}dydz\\
&\leq C_1\underbrace{\sigma^{-N/2}(t-\sigma)^{-N/2}\int_{\Omega}\exp\left[-\frac{t|y|^2}{4(t-\sigma)\sigma}\right]|y|^{-\gamma}dy}_{I_1}\underbrace{\int_{\tilde{\Omega}}\exp\left(-\frac{|x-z|^2}{4t}\right)\tilde{u}_0(z)dz}_{I_2}
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \sigma^{-N/2}(t-\sigma)^{-N/2}\int_{\Omega}\exp\left[-\frac{t|y|^2}{4(t-\sigma)\sigma}\right]|y|^{-\gamma}dy\\
&\leq [(t-\sigma)\sigma]^{-\gamma/2}t^{(\gamma-N)/2}\int_{\mathbb{R}^N}\exp\left(-\frac{|w|^2}{4}\right)|w|^{-\gamma}dw\\
&= C_2[(t-\sigma)\sigma]^{-\gamma/2}t^{(\gamma-N)/2},
\end{aligned}$$

onde $C_2 = \int_{\mathbb{R}^N}\exp\left(-\frac{|w|^2}{4}\right)|w|^{-\gamma}dw < \infty$. Ademais, da estimativa (2.4) temos

$$K_{\tilde{\Omega}}(x,z;t) \geq \exp\left(-\frac{N^2\pi^2 t}{4\delta^2}\right)(4\pi t)^{-N/2}\exp\left(-\frac{|x-z|^2}{4t}\right)$$

para $t > 0$ e $x, z \in \Omega$. Portanto,

$$\begin{aligned}
I_2 = &\int_{\Omega}\exp\left(-\frac{|x-z|^2}{4t}\right)u_0(z)dz\\
&\leq (4\pi t)^{N/2}\exp\left(\frac{N^2\pi^2 t}{4\delta^2}\right)\int_{\Omega}K_{\tilde{\Omega}}(x,z;t)u_0(z)dz\\
&= (4\pi t)^{N/2}\exp\left(\frac{N^2\pi^2 t}{4\delta^2}\right)\tilde{S}(t)\tilde{u}_0\\
&\leq C_3 t^{N/2}\tilde{S}(t)\tilde{u}_0
\end{aligned}$$

se $t < 1$, onde $C_3 = (4\pi)^{N/2}\exp(N^2\pi^2/4\delta^2)$. Logo,

$$S(t-\sigma)[|\cdot|\tilde{S}(\sigma)\tilde{u}_0](x) \leq C_1C_2C_3[(t-\sigma)\sigma]^{-\gamma/2}t^{\gamma/2}\tilde{S}(t)\tilde{u}_0,$$

e assim,

$$I \leq AC_1C_2C_3t^{\gamma/2}\tilde{S}(t)\tilde{u}_0\int_0^t F\left(2A\sigma^{-N/2}\|u_0\|_{L^1}\right)[(t-\sigma)\sigma]^{-\gamma/2}d\sigma. \tag{4.36}$$

Estimativa de J. Do Lema 4.4 (para $q_1 = q_2 = \infty$) temos

$$\begin{aligned} J &= \int_0^t F\left(2A\sigma^{-N/2}\|u_0\|_{L^1}\right) S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma}\chi_{\tilde{\Omega}} d\sigma \\ &\leq \int_0^t F\left(2A\sigma^{-N/2}\|u_0\|_{L^1}\right)(t-\sigma)^{-\gamma/2} d\sigma \\ &\leq t^{\gamma/2}\int_0^t F\left(2A\sigma^{-N/2}\|u_0\|_{L^1}\right)(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2} d\sigma. \end{aligned} \tag{4.37}$$

De (4.35), (4.36) e (4.37) temos

$$\begin{aligned} & S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} f(v(\sigma)) d\sigma \\ & \leq S(t)u_0 + C_1C_2C_3\Lambda(t)A\tilde{S}(t)\tilde{u}_0 + \Lambda(t) \end{aligned} \tag{4.38}$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= t^{\gamma/2}\int_0^t F\left(2A\sigma^{-N/2}\|u_0\|_{L^1}\right)(t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2} d\sigma \\ &= B^{(2-\gamma)/N}(B^{-2/N}t)^{\gamma/2}\int_0^{B^{-2/N}t} F(\sigma^{-N/2})(B^{-2/N}t-\sigma)^{-\gamma/2}\sigma^{-\gamma/2} d\sigma, \end{aligned}$$

com $B = 2A\|u_0\|_{L^1}$.

Da condição (4.30) temos que $\lim\limits_{t\to 0}\Lambda(t) = 0$, e de (4.38) concluímos que

$$S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} f(v(\sigma)) d\sigma \leq v(t),$$

se t é suficientemente pequeno. Portanto, v é supersolução do problema (4.1).

(ii)-(a) Se $\limsup\limits_{t\to 0} t^{-(1-\gamma/N)} f(t) = \infty$, procedemos com na demonstração do Caso 1 do Teorema 4.8(ii) - (b). Se $\int_1^\infty \sigma^{-(2-\gamma)/N+1}\tilde{F}(\sigma)d\sigma = \infty$, procedemos com na demonstração do Teorema 4.9 (i)-(a).

(b) Como $\limsup\limits_{t\to 0} t^{-(1-\gamma/N)} f(t) < \infty$, então $f(0) = 0$. Assim, se $u_0 = 0$ temos que $u = 0$ é solução do problema (4.1). Agora, suponhamos que $u_0 \neq 0$. Procedendo com na demonstração do Teorema 4.9(i) - (b), é possível mostrar que $v(t) = AS(t)u_0 > 0$ é supersolução do problema (4.1) para $A > 0$ escolhido apropriadamente. Daí, a solução é obtida pelo Lema 4.3. □

Em nosso último resultado, estabelecemos o seguinte resultado de unicidade.

Teorema 4.10. *Suponhamos que* $0 < \gamma < \min\{2, N\}$ *e* $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *é derivável. O problema* (4.1) *possui uma solução única na classe* $L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$ *se* $f'(u) \in L^\infty((0,T), L^\alpha(\Omega))$ *para cada* $u \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$, *onde* $\alpha > N/(2-\gamma)$ *e* $1/\alpha + 1/r < 1 - \gamma/N$.

Observação 6. *Quando $f(t) = t^p$ para todo $s \geq 0$ e $p > 1$. Definindo $\alpha = r/(p-1)$ temos que a unicidade é válida em $L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$ se $r > N(p-1)/(2-\gamma)$ e $r > Np/(N-\gamma)$. Isto coincide com os resultados de unicidade dados em (SLIMENE; TAYACHI; WEISSLER, 2017, Teorema 1.1(ii)) e (BREZIS; CAZENAVE, 1996, Teorema 4)(para $\gamma = 0$).*

Demonstração. Sejam $u, v \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))$ soluções de (4.1) com condição inicial $u(0) = v(0) = u_0 \in L^r(\Omega)$. Então, u e v satisfazem

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} f(u(\sigma))d\sigma \tag{4.39}$$

e

$$v(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)|\cdot|^{-\gamma} f(v(\sigma))d\sigma. \tag{4.40}$$

Subtraindo (4.40) de (4.39), e usando o Teorema do Valor Médio temos

$$\begin{aligned} u(t) - v(t) &= \int_0^t S(t-\gamma)|\cdot|^{-\gamma}[f(u(\sigma)) - f(v(\sigma))]d\sigma \\ &= \int_0^t S(t-\gamma)|\cdot|^{-\gamma} f'(w(\sigma))[u(\sigma) - v(\sigma)]d\sigma, \end{aligned}$$

onde $w(\sigma) = \theta u(\sigma) + (1-\theta)v(\sigma)$ para algum $\theta \in (0,1)$.

Assim, usando o Lema 4.4(com $q_2 = r, 1/q_1 = 1/\alpha + 1/r$) e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{L^r} &\leq \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{N}{2\alpha} - \frac{\gamma}{2}} \|f'(w(\sigma))\|_{L^\alpha} \|u(\sigma) - v(\sigma)\|_{L^r} d\sigma \\ &\leq \|f'(w(\cdot))\|_{L^\infty((0,T), L^r(\Omega))} \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{N}{2\alpha} - \frac{\gamma}{2}} \|u(\sigma) - v(\sigma)\|_{L^r} d\sigma. \end{aligned}$$

Como $\dfrac{N}{2\alpha} + \dfrac{\gamma}{2} < 1$, pelo Lema de Gronwall singular ((BREZIS; CAZENAVE, 1996, p. 288)) concluímos que $u = v$ quase sempre em $\Omega \times (0,T)$. $\square$

REFERÊNCIAS

APARCANA, A. et al. On the local existence for a weakly parabolic system in lebesgue spaces. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 268, n. 6, p. 3129–3151, 2020. Citado na página 12.

BARAS, P.; GOLDSTEIN, J. A. The heat equation with a singular potential. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 284, n. 1, p. 121–139, 1984. Citado na página 12.

BARAS, P.; PIERRE, M. Critere d'existence de solutions positives pour des équations semi-linéaires non monotones. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, Elsevier, v. 2, n. 3, p. 185–212, 1985. Citado na página 9.

BERG, M. Van den. Gaussian bounds for the dirichlet heat kernel. *Journal of functional analysis*, Elsevier, v. 88, n. 2, p. 267–278, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 18, 42 e 55.

BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. Citado na página 15.

BREZIS, H.; CAZENAVE, T. A nonlinear heat equation with singular initial data. *Journal D'Analyse Mathématique*, Jerusalem [Israel]: Weizman Science Press of Israel, 1951-, v. 68, p. 277–304, 1996. Citado 5 vezes nas páginas 8, 18, 27, 31 e 58.

CABRÉ, X.; MARTEL, Y. Existence versus explosion instantanée pour des équations de la chaleur linéaires avec potentiel singulier. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, Elsevier, v. 329, n. 11, p. 973–978, 1999. Citado na página 12.

CASTILLO, R.; GUZMÁN-REA, O.; LOAYZA, M. On the local existence for hardy parabolic equations in lebesgue spaces (submitted). Citado na página 14.

CAZENAVE, T. et al. *An introduction to semilinear evolution equations*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 1998. v. 13. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 18.

CELIK, C.; ZHOU, Z. No local l^1 solution for a nonlinear heat equation. Taylor & Francis, 2003. Citado na página 9.

DICKSTEIN, F.; LOAYZA, M. Life span of solutions of a weakly coupled parabolic system. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Springer, v. 59, n. 1, p. 1–23, 2008. Citado 6 vezes nas páginas 10, 20, 23, 25, 28 e 45.

ESCOBEDO, M.; HERRERO, M. A. Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 89, n. 1, p. 176–202, 1991. Citado na página 9.

ESCOBEDO, M.; HERRERO, M. A. A semilinear parabolic system in a bounded domain. *Annali di Matematica pura ed applicata*, Springer, v. 165, n. 1, p. 315–336, 1993. Citado na página 9.

EVANS, L. C. *Partial differential equations*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2010. v. 19. Citado na página 15.

FOLLAND, G. B. *Real analysis: modern techniques and their applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado na página 15.

LAISTER, R. et al. A complete characterisation of local existence for semilinear heat equations in lebesgue spaces. In: ELSEVIER. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*. [S.l.], 2016. v. 33, n. 6, p. 1519–1538. Citado 6 vezes nas páginas 9, 19, 21, 25, 33 e 52.

LAMBERTON, D. Equations d'évolution linéaires associées à des semi-groupes de contractions dans les espaces lp. *Journal of Functional Analysis*, Academic Press, v. 72, n. 2, p. 252–262, 1987. Citado na página 18.

LOAYZA, M. The heat equation with singular nonlinearity and singular initial data. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 229, n. 2, p. 509–528, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 25.

PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 44. Citado na página 16.

PINSKY, R. G. Existence and nonexistence of global solutions for $u_t = \delta u + a(x)u^p$ in $\mathbb{R}^d$. *journal of differential equations*, Elsevier, v. 133, n. 1, p. 152–177, 1997. Citado na página 19.

QUITTNER, P.; SOUPLET, P. Admissible l^p norms for local existence and for continuation in semilinear parabolic systems are not the same. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, v. 131, n. 6, p. 1435–1456, 2001. Citado na página 10.

QUITTNER, P.; SOUPLET, P. Global existence from single-component l^p estimates in a semilinear reaction-diffusion system. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 130, n. 9, p. 2719–2724, 2002. Citado na página 10.

QUITTNER, P.; SOUPLET, P. *Superlinear parabolic problems*. [S.l.]: Springer, 2019. Citado 6 vezes nas páginas 8, 10, 18, 20, 25 e 27.

ROBINSON, J. C.; SIERŻĘGA, M. Supersolutions for a class of semilinear heat equations. *Revista matemática complutense*, Springer, v. 26, n. 2, p. 341–360, 2013. Citado na página 24.

SLIMENE, B. B.; TAYACHI, S.; WEISSLER, F. B. Well-posedness, global existence and large time behavior for hardy–hénon parabolic equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 152, p. 116–148, 2017. Citado 6 vezes nas páginas 12, 40, 42, 43, 48 e 58.

SNOUSSI, S.; TAYACHI, S.; WEISSLER, F. B. Asymptotically self-similar global solutions of a general semilinear heat equation. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 321, n. 1, p. 131–155, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 45.

WEISSLER, F. B. Semilinear evolution equations in banach spaces. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 32, n. 3, p. 277–296, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 27.

WEISSLER, F. B. Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in l p. *Indiana University Mathematics Journal*, JSTOR, v. 29, n. 1, p. 79–102, 1980. Citado na página 8.

WEISSLER, F. B. Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation. *Israel Journal of Mathematics*, Springer, v. 38, n. 1-2, p. 29–40, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 27.