



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Geovani José de Carvalho

Alguns resultados do Laplaciano Fracionário e Funções s-harmônicas

Recife

2020

Geovani José de Carvalho

Alguns resultados do Laplaciano Fracionário e Funções s-harmônicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise

Orientador(a): Silvia Sastre Gómez

Recife

2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Arabelly Ascoli CRB4-2068

C331a Carvalho, Geovani José de
Alguns resultados do laplaciano fracionário e funções s-
harmônicas / Geovani José de Carvalho. – 2020.
96.: il., fig.

Orientadora: Silvia Sastre Gómez
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Matemática. Recife, 2020.
Inclui referências e apêndice.

1. Análise. 2. Difusão não local. 3. Operador laplaciano. 4.
Extensão harmônica. I. Sastre Gómez, Silvia (orientadora). II.
Título.

515 CDD (22. ed.) UFPE-CCEN 2020-33

GEOVANI JOSÉ DE CARVALHO

ALGUNS RESULTADOS DO LAPLACIANO FRACIONÁRIO E FUNÇÕES S-HARMÔNICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 18/02/2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr^a. Silvia Sastre Gómez (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba

AGRADECIMENTOS

Agradeço em especial.

A Deus pela minha existência, por me iluminar e proteger, por me guiar em todos os caminhos e por todas as graças recebidas. A todos os meus familiares que sempre me deram forças para conquistar os meus sonhos, especialmente meu pai José Bento de Carvalho e minha mãe Ildete Maria Filha por todo apoio, amor, fortalecimento nos momentos de dificuldades e por confiar em meu potencial desde o início quando voltei a estudar, ao meu irmão Jonas José de Carvalho que sempre me incentivou, aos meus sobrinhos Enzo e Sofia pelos momentos de descontração, a minha cunhada Soraia pela torcida. A minha noiva Maria dos Reis Brito de Farias que é carinhosamente conhecida como Merinha por todas as conversas demoradas, por sempre dar uma palavra de motivação e por todo amor e carinho que tens por mim. Aos meus amigos Micael, Mirelle e Jackellyny por esses seis anos estudando juntos (desde a graduação), por todas as experiências, trocas de conhecimentos, pelos momentos de alegria, desafios e lutas.... sei que sem vocês esse sonho não seria possível. Em nome de Júlio, agradeço a todos os amigos que fiz no Departamento de Matemática da UFPE por todas as conversas, brincadeiras e acima de tudo pelos momentos de estudo que acrescentaram muito na minha formação. Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí do campus de Picos pelo apoio de sempre, tornando essa possibilidade do mestrado uma realidade, em especial ao professor Alex Sandro por todo auxílio durante o mestrado. Aos professores da Universidade Federal do Pernambuco por todos os conhecimentos transmitidos, inspiração, respeito e por toda contribuição na minha formação acadêmica. A minha orientadora Silvia Sastre Gómez por todo apoio na dissertação com suas correções precisas e sugestões impecáveis, pela paciência, incentivo e disponibilidade. E por fim e não menos importante, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro, certamente sem a bolsa esse sonho seria inviável.

Geovani José de Cavalho

RESUMO

Neste trabalho, estudamos alguns resultados de difusão não local usando o operador laplaciano fracionário. Começamos motivando o estudo da difusão em matemática explicando brevemente a modelagem desses problemas e a necessidade do estudo da difusão não local. Para isso apresentamos o operador laplaciano fracionário (operador de difusão não local) usando duas versões: uma com transformada de Fourier, e outra abordagem por semigrupos. Estudamos algumas das desigualdades estruturais principais que se tem para o laplaciano, como a Desigualdade de Sobolev Fracionária e a Desigualdade de Harnack. Mostramos alguns exemplos de funções s-harmônicas e apresentamos uma função s-harmônica com laplaciano fracionário constante na bola. Definimos os espaços fracionários de Sobolev e apresentamos algumas inclusões de Sobolev e provamos o princípio do máximo. Será mostrado um resultado de densidade que diz que toda função pode ser aproximada localmente por funções s-harmônicas. Analisamos o fato notável que, em muitas ocasiões, operadores não-locais podem ser equivalentemente representados como operadores locais em uma dimensão a mais. Finalmente, apresentamos duas aplicações do laplaciano fracionário a dois modelos físicos, o modelo de ondas de água e o modelo Peierls-Nabarro relacionados a luxações de cristal, e ofereceremos uma justificativa do procedimento de extensão via transformada de Fourier.

Palavras-chave: Difusão Não Local. Operador Laplaciano Fracionário. Extensão Harmônica.

ABSTRACT

In this paper, we study some nonlocal diffusion results using the fractional Laplacian operator. We begin motivating the study of diffusion in mathematics briefly explaining the modeling of these problems and the need to study non-local diffusion. To do this, we present the fractional Laplacian operator (non-local diffusion operator) using two versions: the Fourier transform, and another approach by semigroups. We study some of the main structural inequalities that exist for the Laplacian, such as the Sobolev Fractional Inequality and Harnack's Inequality. We show some examples of s-harmonic functions and present an s-harmonic function with constant fractional Laplacian in the ball. We define the fractional Sobolev spaces and present some inclusions of Sobolev and prove the maximum principle. We show a density result that says that every function can be approximated locally by s-harmonic functions. We analyze the remarkable fact that, on many occasions, non-local operators can be equivalently represented as local operators in an extra dimension. Finally, we present two applications of fractional Laplacian to two physical models, the water wave model and the Peierls-Nabarro model related to crystal dislocations, and we will offer a justification for the Fourier transform extension procedure.

Keywords: Non Local Diffusion. Fractional Laplacian Operator. Harmonic Extension.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Contorno de v_R	30
Figura 2 -	Função s-harmônica	42
Figura 3 -	A extensão harmônica	60
Figura 4 -	Modelo de ondas de água	61
Figura 5 -	Deslocamento de cristal	63
Figura 6 -	Achatando a fronteira	95

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Equação do calor. Modelo principal para difusão	10
2	DIFUSÃO NÃO LOCAL E APLICAÇÕES	15
2.1	O espaço fracionário de Sobolev $W^{s,p}$	18
2.2	Abordagem semigrupos	27
2.3	Desigualdade de Sobolev Fracionária e Fórmula Generalizada de Co-área	34
2.4	Princípio do Máximo e Desigualdade de Harnack	37
2.5	Exemplo de Função s-harmônica	41
2.6	Aproximação local por funções s-harmônicas	47
2.7	Uma função com laplaciano fracionário constante na bola	51
3	PROBLEMAS DE EXTENSÃO E APLICAÇÕES	58
3.1	Modelo de ondas de água	60
3.2	Modelo de Luxações de Cristal	62
3.3	Uma abordagem para o problema de extensão via transformada de Fourier	66
	REFERÊNCIAS	78
	APÊNDICE A - ESPAÇOS DE SOBOLEV	80

1 INTRODUÇÃO

Difusão é o processo pelo qual a matéria é transportada de uma parte de um sistema para outra como resultado de movimentos moleculares aleatórios. Há uma série de fenômenos nas ciências físicas que associamos com a ideia de difusão. Um exemplo clássico geralmente é dado pelo experimento em que um vaso cilíndrico tem sua parte inferior preenchida com solução de iodo, por exemplo, e uma coluna de água limpa é derramada na parte superior, com cuidado e devagar, para que não sejam instaladas correntes de convecção. No início, a parte colorida é separada da clara por uma fronteira nítida e bem definida. Mais tarde, verifica-se que a parte superior fica colorida, a cor fica mais fraca em direção ao topo, enquanto a parte inferior fica correspondentemente menos intensamente colorida. Após tempo suficiente, toda a solução aparece uniformemente colorida. Evidentemente, existe uma transferência de moléculas de iodo da parte inferior para a parte superior do vaso que ocorre na ausência de correntes de convecção. Diz-se que o iodo se difundiu na água, para mais detalhes e outros exemplos veja [6].

A palavra difusão deriva do latim *diffundere*, que significa “espalhar-se”. Para começar, podemos perguntar se a matemática é realmente relevante no estudo do processo de difusão? A resposta é que a difusão é um tópico que possui excelente modelagem matemática, isto é, a difusão é um ramo das ciências naturais que agora está firmemente ligada a várias teorias matemáticas que explicam seu mecanismo de trabalho de maneira bem sucedida. A quantidade que difunde pode ser uma concentração, calor, momento, informação, idéias, preço,... todo esse processo pode ser chamado de difusão e sua evolução é explicada pela análise matemática. A descrição da propagação de calor e difusão é dada por meio de Equações Diferenciais Parciais (EDPs). O tipo de EDPs utilizadas são as chamadas parabólicas, uma família baseada no modelo mais clássico, a equação do calor

linear que é chamada neste contexto a equação de difusão. Os modelos lineares tem prioridade quando aplicável em virtude de sua rica teoria e computação mais fácil, mas os modelos não lineares são absolutamente necessários em muitos contextos do mundo real. Um exemplo não linear bem conhecido é o Problema de Stefan (Lamé e Clapeyron, 1833; Stefan 1880) o problema descreve a distribuição de temperatura em um meio homogêneo passando por uma mudança de fase (como gelo e água). A equação do calor deve ser resolvida em ambos os meios separados, reunindo um determinado espaço $D \subset \mathbb{R}^n$, e a superfície de separação pode se mover com o tempo de acordo com alguma lei de transferência, o leitor poderá consultar [15] para mais detalhes.

1.1 Equação do calor. Modelo principal para difusão

Começamos apresentando a equação linear do calor.

$$u_t = \Delta u.$$

Por muito tempo o estudo matemático do transporte de calor e a difusão foi quase exclusivamente centrada na equação do calor. Modelos matemáticos de propagação e difusão de calor fizeram grandes progressos tanto em teoria quanto em aplicação, a teoria tem sido influenciado pela sua motivação da Física, e por sua vez, os conceitos e métodos derivado dele tem influenciado fortemente a Física e a Engenharia. Em tempos mais recentes essa influência se espalhou ainda mais, para Biologia (por exemplo com os movimentos de nutrientes até uma célula ou uma coleção de células quando consideramos ecossistemas bacterianos), para a Economia (a equação de Black-Scholes modela a evolução do preço dos ativos financeiros) e para Ciências Sociais (existem modelos que se baseiam na ideia de que indivíduos interagem por meio de um campo de comunicação. Esse campo é induzido por cada indivíduo da sociedade modelando a interação informacional entre eles).

Quando o calor se propaga no espaço livre $\mathbb{R}^n$, o problema natural é o problema do valor inicial

$$u_t = \Delta u, u(x, 0) = f(x), \tag{1.1}$$

que é resolvido por convolução com a versão evolutiva da função Gaussiana.

$$G(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right). \quad (1.2)$$

Note que G tem boas propriedades analíticas para $t > 0$, mas para $t = 0$ temos $G(x, 0) = \delta(x)$, uma massa de Dirac.

A difusão de matéria é um dos assuntos mais antigo em Física, já tratado por Robert Boyle no século *XVII* com o estudo da difusão em sólidos. Depois do trabalho de Fourier na propagação de calor, Adolf Fick propôs sua lei de difusão de matéria, onde o fluxo de massa é proporcional ao gradiente de concentração e vai na direção de concentrações mais baixas. Isso leva à equação do calor, como modelo matemático. Ele também apontou a analogia fundamental entre difusão, condução do calor e também eletricidade. Na verdade, a lei de Fourier para condução de calor (1822), a lei de Ohm para eletricidade corrente (1827), a lei de Fick para difusão em sólidos (1855), e a lei de Darcy para fluxo hidráulico (1856) tem uma forma de gradiente matemático semelhante.

A iteração temporal das variáveis independentes com a mesma distribuição levaram à teoria de caminhadas aleatórias, nos primeiros tempos de Bernoulli. A conexão do estudo probabilístico com o estudo via equação do calor deu lugar após a construção do movimento browniano como um rigoroso objeto matemático sob a forma do processo Wiener. Na década de 1930, Kolmogorov investigou a equivalência dos dois pontos de vista, isto é, a abordagem via equação de calor (Equações Diferenciais Parciais) e a abordagem estocástica via movimento Browniano (Probabilidade). Este tópico é abordado por muitos autores de EDPs, mencionamos [7] para mais detalhes. A observação experimental do caótico movimento na natureza devido a efeitos mecânicos no nível microscópico é creditado a Robert Brown (1827), daí o rótulo “movimento browniano”.

Nesta dissertação iremos focar no estudo do laplaciano fracionário. Vejamos qual a motivação para a criação desse operador. A substituição do operador laplaciano pelo operador laplaciano fracionário é motivada pela necessidade de representar processos envolvendo difusão anômala. Em termos probabilísticos, ele apresenta interações de longa distância em vez da interação próximo-vizinho de caminhadas aleatórias e as interações de curta distância de seu limite, o movimento browniano. Os principais modelos matemáticos

utilizados para descrever tais processos são os operadores fracionários, uma vez que possuem propriedades especiais de simetria e invariância, o que contribui para uma teoria mais rica. Esses operadores são geradores de processos estáveis de Lévy, que incluem saltos e interações de longa distância. Eles razoavelmente explicam a difusão anômala observada, com aplicações na mecânica de continuum (elasticidade, deslocamento de cristal, fluxos geostróficos, ...), fenômenos de transição de fase, dinâmica populacional, controle ótimo, processamento de imagens, teoria dos jogos, finanças e outros.

Depois de um período muito ativo de trabalho sobre problemas envolvendo operadores não-locais, agora há uma teoria bem estabelecida em várias direções, como equações semilineares e problemas com obstáculos, principalmente do tipo estacionário. Em vez da equação de calor a equação de evolução básica é agora

$$u_t + (-\Delta)^s u = 0. \quad (1.3)$$

Sabe-se que existe um semigrupo bem definido associado a esta equação para cada $0 < s < 1$ que resolve o problema acima em todo o espaço. Embora no limite $s \rightarrow 1$ a equação de calor padrão é recuperada, há uma grande diferença entre o operador local $-\Delta$ que aparece na equação clássica de calor e representa o movimento browniano de um lado, e a família não local $(-\Delta)^s$, $0 < s < 1$, por outro lado. No restante do artigo, discutiremos algumas propriedades do operador laplaciano fracionário que já são bem conhecidas em Equações Diferenciais Parciais clássicas.

Todas as versões do operador laplaciano fracionário que estudaremos nesta dissertação são equivalentes quando o operador atua no $\mathbb{R}^n$. No entanto, para trabalhar num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ teremos que reexaminar todos eles. Por exemplo, usar a transformada de Fourier não faz sentido. Duas principais alternativas eficientes para estudar laplacianos fracionários em domínios limitados são estudados em Probabilidade e Equações Diferenciais Parciais, correspondendo à maneira diferente pela qual a informação vinda da fronteira e do complemento do domínio deve ser tomada em conta. Eles são chamados de Laplaciano Fracionário Restrito (LFR) e o Laplaciano Fracionário Espectral (LFE), o leitor poderá consultar [15] para mais detalhes. Nesta dissertação focaremos no estudo do laplaciano fracionário em $\mathbb{R}^n$.

A teoria da difusão linear teve muito progresso, e agora está solidamente estabelecida em teoria e aplicações. Entretanto, logo foi observado que muitas das equações que modelam fenômenos físicos sem simplificação excessiva são essencialmente não-lineares e suas características mais salientes não são refletidas pelas teorias lineares que foram desenvolvidas, apesar do fato de que tais teorias lineares foram e continuam a ser muito eficientes para um grande número de aplicações. Podemos citar como exemplos de modelos não lineares o Problema do Obstáculo que é o problema de fronteira livre mais famoso e pertence à classe de problemas estacionários, conectados com equações elípticas e a Equação do Meio Poroso que aparece em modelos para gases em meios porosos, física de alta energia, dinâmica populacional e muitos outros, nos referimos a [15] para mais detalhes.

A continuação descrevemos o que foi feito em cada capítulo, iniciamos o capítulo dois com algumas definições do operador laplaciano fracionário e mostramos a equivalência entre as definições. Fazemos uma comparação com o operador laplaciano clássico que é a média localizada nas proximidades de um ponto x , enquanto a média do laplaciano fracionário ocorre em todo o espaço (embora decaía no infinito), por isso esses operadores são chamados de não-locais. Definimos os espaços fracionários de Sobolev $W^{s,p}$ onde $s \in (0, 1)$ e $1 \leq p < \infty$ e provamos algumas inclusões, colocamos no apêndice a definição dos espaços de Sobolev $W^{k,p}$ (onde k inteiro não-negativo e $1 \leq p \leq \infty$) e algumas propriedades das funções regularizantes, assim como um resultado de extensão para o leitor fazer uma comparação com os espaços fracionários de Sobolev. Ainda no capítulo dois apresentamos detalhadamente duas versões do operador laplaciano fracionário: a primeira via transformada de Fourier e a segunda uma abordagem por semigrupos, além disso, exibimos a prova que as constantes dimensionais que aparecem nas diferentes abordagens são iguais. Discutimos alguns exemplos de funções s -harmônicas em detalhes e apontamos algumas desigualdades estruturais, decorrentes de um princípio de comparação fracionária, tais como Desigualdade de Sobolev Fracionário, Desigualdade de Harnack, discutimos a Fórmula Generalizada de Co-área e provamos o Princípio do Máximo. Apresentamos um resultado bastante surpreendente o qual afirma que todas as funções podem ser localmente aproximadas por funções s -harmônicas (em nítido contraste com

a rigidez das funções harmônicas clássicas) e concluímos o capítulo com um exemplo de uma função com laplaciano fracionário constante na bola.

No capítulo três lidamos com problemas de extensão harmônica onde o laplaciano fracionário pode ser visto como o laplaciano clássico em uma dimensão maior. É um fato notável que, em muitas ocasiões, operadores não-locais possam ser equivalentemente representados como operadores locais (embora possivelmente degenerados ou singulares) em uma dimensão a mais. Além disso, como contrapartida, vários modelos surgidos em uma estrutura local dão origem a equações não-locais, devido a efeitos de contorno. Assim, para introduzir o problema de extensão e dar uma intuição concreta, apresentaremos dois modelos em física (no qual consideramos o caso particular em que expoente fracionário $s = \frac{1}{2}$) o modelo de ondas de água onde mostramos que o laplaciano fracionário surge quando se procura uma função harmônica com dado em $\mathbb{R}^n \times \{y = 0\}$ e o modelo Peierls-Nabarro relacionado a luxações de cristal, como o cristal é um material cujos os átomos são exibidos de maneira regular, o modelo caracteriza as modificações causadas por algum estresse externo e a motivação é aplicar uma força compatível com a estrutura do cristal por ser mais simples e menos dispendioso. Concluímos o capítulo três fornecendo uma justificativa detalhada desse procedimento de extensão por meio da transformada de Fourier.

2 DIFUSÃO NÃO LOCAL E APLICAÇÕES

Neste capítulo apresentaremos algumas noções preliminares sobre o laplaciano fracionário e o espaço de Sobolev fracionário. Além disso, apresentamos um exemplo de uma função s-harmônica em $\mathbb{R}_+$, uma função com laplaciano fracionário constante na bola, discutimos alguns princípios máximos e uma desigualdade de Harnack e apresentamos uma propriedade de densidade local bastante surpreendente das funções s-harmônicas no espaço das funções suaves.

Primeiro introduzimos as definições de difusão não local.

Definição 2.1. *Seja $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suficientemente regular e seja $s \in (0, 1)$ um parâmetro fracionário. Então, o laplaciano fracionário de u é dado por*

$$(-\Delta)^s u(x) = \frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy \quad (2.1)$$

onde $C(n, s)$ é uma constante que depende de n e do parâmetro s , definida em (2.22) e (2.27).

Por uma questão de simplicidade podemos considerar em (2.1) u no espaço de Schwartz que definimos abaixo.

Definição 2.2. *O espaço Schwartz ou espaço de funções que decaem rapidamente em $\mathbb{R}^n$ é o espaço de funções*

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_\beta f(x)| < \infty \right\} \quad (2.2)$$

Vamos, agora, definir a transformada de Fourier e a transformada de Fourier inversa.

Definição 2.3. *Sejam $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ a variável espacial e $\xi \in \mathbb{R}^n$ a variável de frequência, então a transformada de Fourier e a transformada de Fourier inversa são respectivamente*

$$\hat{f}(\xi) := \mathcal{F}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (2.3)$$

$$f(x) := \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi. \quad (2.4)$$

Outra definição útil é a de Valor Principal

Definição 2.4. *Dada u no espaço de Schwartz definimos o valor principal de u como*

$$V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \quad (2.5)$$

Quando y está em uma vizinhança de x , em geral essa singularidade não é integrável no sentido de Lebesgue. Com efeito, próximo de x , temos que $u(x) - u(y)$ se comporta em primeira ordem como $\nabla u(x) \cdot (x - y)$, portanto a integral acima se comporta na primeira ordem como

$$\frac{\nabla u(x) \cdot (x - y)}{|x - y|^{n+2s}} \quad (2.6)$$

cujo valor absoluto dá uma integral infinita perto de x (a menos que $\nabla u(x) = 0$ ou $s < \frac{1}{2}$).

A ideia da definição em (2.5) é que o termo em (2.6) calcula a média em uma vizinhança de x por simetria, uma vez que o termo é ímpar em relação a x , e portanto não contribui para a integral se fizermos isso de maneira simétrica. Num sentido o valor principal em (2.5) mata a primeira ordem da função no numerador, o que produz um crescimento linear e concentra-se nos restos de segunda ordem.

A notação em (2.5) nos permite escrever (2.1) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) &= \frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x) - u(x + y) - u(x - y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{C(n, s)}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{2u(x) - u(x + y) - u(x - y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{C(n, s)}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{u(x) - u(x + y)}{|y|^{n+2s}} dy + \frac{C(n, s)}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{u(x) - u(x - y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{C(n, s)}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x) - u(\eta)}{|x - \eta|^{n+2s}} d\eta + \frac{C(n, s)}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x) - u(\zeta)}{|x - \zeta|^{n+2s}} d\zeta \\ &= C(n, s) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x) - u(\eta)}{|x - \eta|^{n+2s}} d\eta \end{aligned}$$

mediante as mudanças de variáveis $\eta = x + y$ e $\zeta = x - y$ obtemos

$$(-\Delta)^s u(x) = C(n, s) V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \quad (2.7)$$

A expressão em (2.1) não requer a formulação do valor principal da integral, por exemplo, tomando $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e localmente $C^2(\mathbb{R}^n)$, usando a expansão de Taylor de u em B_1 , observa-se que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|2u(x) - u(x+y) - u(x-y)|}{|y|^{n+2s}} dy \\ & \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} |y|^{-n-2s} dy + \int_{B_1} \frac{|D^2 u(x)| |y|^2}{|y|^{n+2s}} dy \\ & \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} |y|^{-n-2s} dy + \|D^2 u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_1} |y|^{-n-2s+2} dy \end{aligned}$$

As integrais acima fornecem uma quantidade finita.

A fórmula (2.7) também tem uma analogia estimulante com o laplaciano clássico. Ou seja, o laplaciano clássico (até constantes de normalização) é a medida do deslocamento infinitesimal de uma função em média (esta é a propriedade “elástica” das funções harmônicas, cujo valor em um determinado ponto tende a reverter para a média em uma bola). De fato, cancelando as contribuições ímpares, e usando que

$$\int_{B_r(x)} |x - y|^2 dy = \sum_{k=1}^n \int_{B_r(x)} (x_k - y_k)^2 dy = n \int_{B_r(x)} (x_i - y_i)^2 dy$$

para qualquer $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos que

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \left[u(x) - \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(y) dy \right] = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} (u(y) - u(x)) dy \right] \\ & = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{n+2} |B_1|} \int_{B_r(x)} \left[\nabla u(x) \cdot (x - y) + \frac{1}{2} D^2 u(x) : (x - y) \otimes (x - y) + \mathcal{O}(|x - y|^3) \right] dy \\ & = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r^{n+2} |B_1|} \sum_{i,j=1}^n \int_{B_r(x)} \partial_{ij}^2 u(x) (x_i - y_i) (x_j - y_j) dy \\ & = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r^{n+2} |B_1|} \sum_{i=1}^n \int_{B_r(x)} \partial_i^2 u(x) (x_i - y_i)^2 dy \\ & = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2nr^{n+2} |B_1|} \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u(x) \int_{B_r(x)} |x - y|^2 dy \\ & = -C_n \Delta u(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

para algum $C_n > 0$. Nesse espírito, quando comparamos a última fórmula (2.8) com (2.7), podemos pensar que o laplaciano fracionário corresponde a uma média ponderada da oscilação da função. Enquanto a média em (2.8) para o laplaciano clássico está localizada nas proximidades de um ponto x , a média em (2.7) para o laplaciano fracionário ocorre em todo o espaço (embora decaia no infinito). Além disso, a homogeneidade espacial da média em (2.8) tem um fator extra proporcional às variáveis espaciais da potência -2 , enquanto a potência correspondente na média em (2.7) é $-2s$ (e isso é consistente para $s \rightarrow 1$).

2.1 O espaço fracionário de Sobolev $W^{s,p}$

Definiremos agora os espaços fracionários de Sobolev. Colocamos no apêndice os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ onde k inteiro não-negativo e $1 \leq p \leq \infty$ para fazer uma comparação com os espaços fracionários de Sobolev. Seja Ω um conjunto aberto geral, que pode não ser suave em $\mathbb{R}^n$. Para qualquer real $s > 0$ e para qualquer $p \in [1, \infty)$, definimos os espaços fracionários de Sobolev $W^{s,p}$. Na literatura os espaços fracionários de Sobolev também são chamados de espaços de Aronszajn, Gagliardo ou Slobodeckij, com o nome daqueles que os apresentaram, quase simultaneamente. Para mais detalhes o leitor poderá consultar [11].

Inicialmente lembramos a definição de espaço L^p .

Definição 2.5. *Dado $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$, u mensurável e Ω subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ o espaço $L^p(\Omega)$ é o conjunto*

$$L^p(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid |u|^p \in L^1(\Omega)\} \quad (2.9)$$

dotado da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (2.10)$$

Para obter mais detalhes sobre os espaços L^p o leitor poderá consultar [9].

Definiremos agora o espaço fracionário de Sobolev, que é um espaço intermediário de Banach entre $L^p(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$.

Definição 2.6. Considere o expoente fracionário $s \in (0, 1)$ fixado. Para qualquer $p \in [1, \infty)$, o espaço fracionário de Sobolev é

$$W^{s,p}(\Omega) =: \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\} \quad (2.11)$$

dotado da norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left[\int_{\Omega} |u|^p dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right]^{\frac{1}{p}} \quad (2.12)$$

Observação 2.7. O termo

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left[\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right]^{\frac{1}{p}}$$

é chamado *semi-norma de Gagliardo* de u .

Na seguinte proposição é dada uma inclusão dos espaços fracionários de Sobolev.

Proposição 2.8. Seja $p \in [1, +\infty)$ e $0 < s \leq s' < 1$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}$$

para alguma constante positiva adequada $C(n, s, p) \geq 1$. Em particular,

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Demonstração. Fazendo a mudança de variável $z = y - x$ temos que $dz = dy$ e $|z| = |y - x| \geq 1$. Daí,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dy \right) |u(x)|^p dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\int_{|z| \geq 1} \frac{1}{|z|^{n+sp}} dz \right) |u(x)|^p dx \\ &= C(n, s, p) \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \\ &= C(n, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p, \end{aligned}$$

onde $C(n, s, p) = \int_{|z| \geq 1} \frac{1}{|z|^{n+sp}} dz < \infty$, pois $n + sp > n$.

Usando a estimativa acima e

$$|u(x) - u(y)|^p \leq (|u(x)| + |u(y)|)^p \leq (2 \max\{|u(x)|, |u(y)|\})^p \leq 2^p(|u(x)|^p + |u(y)|^p).$$

Obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ & \leq 2^p \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x)|^p + |u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ & \leq 2^p \left[\int_{\Omega} \left(\int_{|z| \geq 1} \frac{1}{|z|^{n+sp}} dz \right) |u(x)|^p dx + \int_{\Omega} \left(\int_{|z| \geq 1} \frac{1}{|z|^{n+sp}} dz \right) |u(y)|^p dy \right] \\ & = 2^{p+1} C(n, s, p) \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \\ & = 2^{p+1} C(n, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por outro lado, como $|x - y| < 1$ e $s \leq s'$, então

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| < 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \leq \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| < 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+s'p}} dx dy. \tag{2.14}$$

Então por (2.13) e (2.14) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ & = \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy + \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| < 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ & \leq 2^{p+1} C(n, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+s'p}} dx dy \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy + \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \\ & \leq [2^{p+1} C(n, s, p) + 1] \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+s'p}} dx dy \\ & \leq C(n, s, p) \|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}^p \end{aligned}$$

onde $C(n, s, p) \geq 1$ já que é um mais uma constante positiva. Portanto

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p \leq C \|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}^p.$$

□

Mostraremos que o resultado da proposição anterior também se aplica no caso limite, isto é, quando $s' = 1$, mas para isso temos que levar em consideração a regularidade da fronteira de Ω denotada por $\partial\Omega$.

Para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in (0, 1]$, dizemos que Ω é de classe $C^{k,\alpha}$ se existir $M > 0$, de modo que, para todo $x \in \partial\Omega$, existam uma bola $B = B_r(x)$, $r > 0$ e um isomorfismo $T : Q \rightarrow B$ tal que $T \in C^{k,\alpha}(\overline{Q})$, $T^{-1} \in C^{k,\alpha}(\overline{B})$, $T(Q_+) = B \cap \Omega$, $T(Q_0) = B \cap \partial\Omega$ e $\|T\|_{C^{k,\alpha}(\overline{Q})} + \|T^{-1}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{B})} \leq M$, onde

$$\begin{aligned} Q &:= \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |x'| < 1, |x_n| < 1\} \\ Q_+ &:= \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |x'| < 1, 0 < x_n < 1\} \\ Q_0 &:= \{x \in Q : x_n = 0\}. \end{aligned}$$

Temos agora a seguinte inclusão de espaços fracionários de Sobolev.

Proposição 2.9. *Seja $p \in [1, \infty)$ e $s \in (0, 1)$. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$ com a fronteira limitada e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

com $C = C(n, s, p) \geq 1$. Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$.

Demonstração. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Graças as hipóteses de regularidade de Ω e pelo Teorema A.20 no apêndice, podemos estender u para uma função $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ para alguma constante C .

Agora usando a mudança de variável $z = y - x$ temos que $dz = dy$ e $|z| = |y - x| < 1$

então usando o Teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy &\leq \int_{\Omega} \int_{B_1} \frac{|u(x) - u(z+x)|^p}{|z|^{n+sp}} dz dy \\
&= \int_{\Omega} \int_{B_1} \frac{|u(x) - u(z+x)|^p}{|z|^p} \cdot \frac{1}{|z|^{n+(s-1)p}} dz dy \\
&\leq \int_{\Omega} \int_{B_1} \left(\int_0^1 \frac{|\nabla u(x+tz)|}{|z|^{\frac{n}{p}+s-1}} dt \right)^p dz dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_1} \int_0^1 \frac{|\nabla \tilde{u}(x+tz)|^p}{|z|^{n+p(s-1)}} dt dz dx \\
&= \int_{B_1} \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla \tilde{u}(x+tz)|^p}{|z|^{n+p(s-1)}} dx \right) dt dz \\
&\leq \int_{B_1} \int_0^1 \frac{\|\nabla \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p}{|z|^{n+p(s-1)}} dt dz \\
&= \|\nabla \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \int_{B_1} \int_0^1 \frac{1}{|z|^{n+p(s-1)}} dt dz \\
&\leq C_1(n, s, p) \|\nabla \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \\
&\leq C_2(n, s, p) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

obtemos

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \leq C_2(n, s, p) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + 2^{p+1} C(n, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p$$

renomeando a constante $C(n, s, p)$ concluímos que

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p \leq C(n, s, p) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p.$$

□

Observação 2.10. Voltemos a definição do espaço $W^{s,p}(\Omega)$. Vale a pena explicar por que a definição em (2.11) não pode ser estendida para o caso $s \geq 1$. Suponha que Ω seja um conjunto aberto conexo em $\mathbb{R}^n$, então qualquer função mensurável $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy < \infty$$

é realmente constante (veja referência [3] para mais detalhes). Esse fato está estritamente relacionado ao seguinte resultado que vale para qualquer $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s) \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy = C_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \tag{2.16}$$

para alguma constante C_1 dependendo de n e p .

Quando $s > 1$ não é um número inteiro, escrevemos $s = m + \sigma$, onde m é um número inteiro, e $\sigma \in (0, 1)$. Nesse caso, o espaço de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ consiste nas classes de equivalência de funções $u \in W^{m,p}(\Omega)$ cujas derivadas $D^\alpha u$, com $|\alpha| = m$, pertencem a $W^{\sigma,p}(\Omega)$ a saber

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega), \forall \alpha; |\alpha| = m\} \quad (2.17)$$

e este é um espaço de Banach em relação a norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{W^{\sigma,p}(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.18)$$

se $s = m$ é um inteiro, o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ coincide com o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$.

Corolário 2.11. *Seja $p \in [1, \infty)$ e $s, s' > 1$. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$. Então, se $s \leq s'$ temos que*

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Demonstração. Escrevemos $s = k + \sigma$ e $s' = k' + \sigma'$ com k, k' inteiros e $\sigma, \sigma' \in (0, 1)$. No caso em que $k = k'$ podemos usar a Proposição 2.8 para concluir que $W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$. Por outro lado se $k' \geq k + 1$ usando a Proposição 2.8 e a Proposição 2.9 temos

$$W^{k'+\sigma',p}(\Omega) \subseteq W^{k',p}(\Omega) \subseteq W^{k+1,p}(\Omega) \subseteq W^{k+\sigma,p}(\Omega)$$

portanto $W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$ como queríamos demonstrar. $\square$

Como no caso clássico de s ser um número inteiro, qualquer função no espaço fracionário de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ pode ser aproximada por uma sequência de funções suaves com suporte compacto.

Teorema 2.12. *Para qualquer $s > 0$, o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ de funções suaves com suporte compacto é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Consultar [2]. $\square$

Definição 2.13. Definimos o conjunto $W_0^{s,p}(\Omega)$ como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ definido em (2.18). Além disso, tendo em vista o Teorema 2.12, temos

$$W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) = W^{s,p}(\mathbb{R}^n).$$

Observação 2.14. No caso $p = 2$ os espaços fracionários de Sobolev $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ e $W_0^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ acabam sendo espaços de Hilbert. Esses são geralmente denotados por $H^s(\mathbb{R}^n)$ e $H_0^s(\mathbb{R}^n)$ respectivamente.

Agora apresentaremos o operador laplaciano fracionário expresso em variáveis de frequência de Fourier multiplicados por $(2\pi|\xi|)^{2s}$, como indicado no seguinte lema.

Lema 2.15. Seja $u \in S(\mathbb{R}^n)$, então

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathcal{F}^{-1}((2\pi|\xi|)^{2s} \hat{u}(\xi)). \quad (2.19)$$

Observação 2.16. A grosso modo, o lema acima caracteriza o operador laplaciano fracionário no espaço de Fourier, tomando a potência s no multiplicador associado ao operador laplaciano clássico. Com efeito, usando a transformada inversa de Fourier, temos que

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= -\Delta(\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}))(x) \\ &= -\Delta\left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi|\xi|)^2 \hat{u}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \\ &= \mathcal{F}^{-1}((2\pi|\xi|)^2 \hat{u}(\xi)), \end{aligned}$$

assim, o laplaciano clássico atua no espaço de Fourier como um multiplicador de $(2\pi|\xi|)^2$.

A partir disso e da equação (2.19), segue-se também que o laplaciano clássico é o caso limite do fracionário, ou seja, para qualquer $u \in S(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\lim_{s \rightarrow 1} (-\Delta)^s u = -\Delta u \quad \text{e também} \quad \lim_{s \rightarrow 0} (-\Delta)^s u = u.$$

Faremos agora a prova do Lema 2.15 que nos diz que (2.1) e (2.19) são equivalentes.

Demonstração. Apliquemos a transformada de Fourier à igualdade (2.1)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}((-\Delta)^s u(x)) &= \mathcal{F}\left(\frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\
&= \frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right) dy \\
&= \frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^{n+2s}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (2u(x) - u(x+y) - u(x-y)) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right) dy
\end{aligned}$$

vamos resolver a integral dentro do parentese da última igualdade. Usando as mudanças de variáveis $\eta = x + y$ e $\zeta = x - y$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} (2u(x) - u(x+y) - u(x-y)) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx - \int_{\mathbb{R}^n} u(x+y) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx - \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\
&= 2\hat{u}(\xi) - \int_{\mathbb{R}^n} u(\eta) e^{-2\pi i(\eta-y) \cdot \xi} d\eta - \int_{\mathbb{R}^n} u(\zeta) e^{-2\pi i(\zeta+y) \cdot \xi} d\zeta \\
&= 2\hat{u}(\xi) - \int_{\mathbb{R}^n} u(\eta) e^{-2\pi i \eta \cdot \xi} e^{2\pi i y \cdot \xi} d\eta - \int_{\mathbb{R}^n} u(\zeta) e^{-2\pi i \zeta \cdot \xi} e^{-2\pi i y \cdot \xi} d\zeta \\
&= 2\hat{u}(\xi) - e^{2\pi i y \cdot \xi} \hat{u}(\xi) - e^{-2\pi i y \cdot \xi} \hat{u}(\xi) \\
&= \hat{u}(\xi) (2 - e^{2\pi i y \cdot \xi} - e^{-2\pi i y \cdot \xi}).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}((-\Delta)^s u(x)) &= \frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^{n+2s}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (2u(x) - u(x+y) - u(x-y)) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right) dy \\
&= \frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \left(\frac{2 - e^{2\pi i y \cdot \xi} - e^{-2\pi i y \cdot \xi}}{|y|^{n+2s}} \right) dy \\
&= \frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \left(\frac{2 - 2\cos(2\pi \xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} \right) dy \\
&= C(n, s) \hat{u}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi \xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Fazendo a mudança de variável $z = |\xi|y$ temos que $y = \frac{z}{|\xi|}$ então $\frac{1}{|y|^{n+2s}} = \frac{|\xi|^{n+2s}}{|z|^{n+2s}}$ e

$2\pi\xi \cdot y = 2\pi\xi \cdot \frac{z}{|\xi|}$ além disso, $dy = \frac{1}{|\xi|^n}dz$, daí, definimos

$$\begin{aligned} J(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos\left(2\pi\xi \cdot \frac{z}{|\xi|}\right)}{|z|^{n+2s}} \cdot \frac{|\xi|^{n+2s}}{|\xi|^n} dz \\ &= |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos\left(2\pi\xi \cdot \frac{z}{|\xi|}\right)}{|z|^{n+2s}} dz. \end{aligned}$$

Agora usaremos que J é invariante por rotações, mais precisamente, consideramos uma rotação R que envia $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ em $\frac{\xi}{|\xi|}$, que é $Re_1 = \frac{\xi}{|\xi|}$ e chamamos R^T sua transposição. Então, usando a mudança de variável $w = R^T z$ temos que

$$\begin{aligned} J(\xi) &= |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos\left(2\pi\xi \cdot \frac{z}{|\xi|}\right)}{|z|^{n+2s}} dz \\ &= |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi Re_1 \cdot z)}{|z|^{n+2s}} dz \\ &= |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi R^T z \cdot e_1)}{|R^T z|^{n+2s}} dz \\ &= |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi w_1)}{|w|^{n+2s}} dw. \end{aligned}$$

Fazendo $\tilde{w} = 2\pi w$ então $d\tilde{w} = (2\pi)^n dw$ temos ainda que $\frac{1}{|\tilde{w}|^{n+2s}} = \frac{1}{(2\pi)^{n+2s}|w|^{n+2s}}$ (ainda denotando w como a variável de integração), obtemos que

$$J(\xi) := (2\pi|\xi|)^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+2s}} dw. \quad (2.21)$$

Note que essa última integral é finita. Com efeito, fora da bola B_1 (onde $B_1 := B_1(0)$) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{|1 - \cos(w_1)|}{|w|^{n+2s}} dw \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{2}{|w|^{n+2s}} dw < \infty,$$

enquanto dentro da bola podemos usar a expansão de Taylor da função cosseno e observar que

$$\int_{B_1} \frac{|1 - \cos(w_1)|}{|w|^{n+2s}} dw \leq \int_{B_1} \frac{|w|^2}{|w|^{n+2s}} dw \leq \int_{B_1} \frac{1}{|w|^{n+2s-2}} dw < \infty.$$

Portanto tomando

$$C(n, s) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+2s}} dw \right)^{-1} \quad (2.22)$$

segue de (2.21) que

$$J(\xi) = \frac{(2\pi|\xi|)^{2s}}{C(n, s)},$$

aplicando em (2.20) temos

$$\mathcal{F}((-\Delta)^s u(x)) = C(n, s) \hat{u}(\xi) J(\xi) = (2\pi|\xi|)^{2s} \hat{u}(\xi).$$

Logo aplicando a transformada de Fourier inversa na igualdade acima obtemos

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathcal{F}^{-1}((2\pi|\xi|)^{2s} \hat{u}(\xi)).$$

Como queríamos demonstrar. $\square$

2.2 Abordagem semigrupos

Esta técnica é clássica, mas também tem sido usada eficientemente em trabalhos recentes. A ideia principal sobre a abordagem de semigrupo vem do uso explícito de fórmulas para a função de Euler: para qualquer $\lambda > 0$, usando integração por partes e uma substituição $\tau = \lambda t$ vemos que

$$\begin{aligned} -s\Gamma(-s) &= \Gamma(1-s) \\ &= \int_0^\infty \tau^{-s} e^{-\tau} d\tau \\ &= - \int_0^\infty \tau^{-s} \frac{d}{d\tau} (e^{-\tau} - 1) d\tau \\ &= - \left[(\tau^{-s} (e^{-\tau} - 1)) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -s\tau^{-s-1} (e^{-\tau} - 1) d\tau \right] \\ &= -s \int_0^\infty \tau^{-s-1} (e^{-\tau} - 1) d\tau \\ &= -s \int_0^\infty (\lambda t)^{-s-1} (e^{-\lambda t} - 1) \lambda dt \\ &= -s(\lambda)^{-s} \int_0^\infty t^{-s-1} (e^{-\lambda t} - 1) dt. \end{aligned}$$

Portanto ,

$$(\lambda)^s = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^\infty t^{-s-1} (e^{-\lambda t} - 1) dt. \quad (2.23)$$

Então aplica-se formalmente essa identidade a $\lambda := -\Delta$. Assim obtemos que

$$(-\Delta)^s = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^\infty t^{-s-1} (e^{\Delta t} - 1) dt,$$

isto é, interpretando 1 como operador identidade temos

$$(-\Delta)^s u(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^\infty t^{-s-1} (e^{\Delta t} u(x) - u(x)) dt. \quad (2.24)$$

Formalmente se $U(x, t) := e^{\Delta t} u(x)$, temos que $U(x, 0) = u(x)$ e $\partial_t U = \frac{\partial}{\partial t} (e^{\Delta t} u(x)) = \Delta e^{\Delta t} u(x) = \Delta U$, isto é, $U(x, t) := e^{\Delta t} u(x)$ pode ser interpretado como a solução da equação do calor com o dado inicial u .

No seguinte lema vamos justificar as formalidades escritas acima.

Lema 2.17. *A equação (2.24) é verdadeira. Isto é, se $U \in S(\mathbb{R}^n)$ e $U = U(x, t)$ é a solução da equação do calor*

$$\begin{cases} \partial_t U = \Delta U, & \text{em } t > 0 \\ U|_{t=0} = u, \end{cases}$$

então

$$(-\Delta)^s u(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^\infty t^{-s-1} (U(x, t) - u(x)) dt \quad (2.25)$$

Demonstração. Já sabemos que U é obtido por convolução Gaussiana com massa unitária (veja [8]), isto é,

$$U(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t) u(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} G(y, t) u(x - y) dy \quad (2.26)$$

onde $G(x, t) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp(\frac{-|x|^2}{4t})$. Daí, fazendo a mudança de variável $\tau := \frac{|y|^2}{4t}$ obtemos que

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty t^{-s-1} (U(x, t) - u(x)) dt \\ &= \int_0^\infty t^{-s-1} \left[\int_{\mathbb{R}^n} G(y, t) (u(x - y) - u(x)) dy \right] dt \\ &= \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^n} t^{-s-1} G(y, t) (u(x - y) - u(x)) dy \right] dt \\ &= \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^n} t^{-s-1} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{-|y|^2}{4t}} (u(x - y) - u(x)) dy \right] dt \\ &= \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^n} \tau^{\frac{n}{2}} (\pi |y|^2)^{-\frac{n}{2}} |y|^{-2s} (4\tau)^{s+1} e^{-\tau} (u(x - y) - u(x)) dy \right] \frac{d\tau}{4\tau^2} \\ &= \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^n} \pi^{-\frac{n}{2}} \tau^{\frac{n}{2}} |y|^{-n-2s} 4^{s+1} \tau^{s+1} \frac{1}{4\tau^2} e^{-\tau} (u(x - y) - u(x)) dy \right] d\tau \\ &= \pi^{-\frac{n}{2}} 2^{2s-1} \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^n} \tau^{\frac{-n}{2}+s-1} e^{-\tau} \frac{u(x + y) + u(x - y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \right] d\tau. \end{aligned}$$

Agora note que

$$\int_0^\infty \tau^{\frac{-n}{2}+s-1} e^{-\tau} d\tau = \Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)$$

daí, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty t^{-s-1} (U(x, t) - u(x)) dt \\ &= \pi^{\frac{-n}{2}} 2^{2s-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \pi^{\frac{-n}{2}} 2^{2s-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right) \frac{2}{C(n, s)} (-\Delta)^s u(x) \\ &= -\frac{\pi^{\frac{-n}{2}} 2^{2s} \Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)}{C(n, s)} (-\Delta)^s u(x). \end{aligned}$$

Isso prova (2.25) escolhendo $C(n, s)$ adequadamente. E, de fato, fornece o valor explícito da constante $C(n, s)$ que é

$$C(n, s) = -\frac{2^{2s} \Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(-s)} = \frac{2^{2s} s \Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(1-s)} \quad (2.27)$$

onde usamos novamente que $\Gamma(1-s) = -s\Gamma(-s)$ para todo $s \in (0, 1)$ isso prova o resultado desejado. $\square$

Provaremos agora que a transformada de Fourier de uma Gaussiana é ela própria.

Proposição 2.18. *Seja $\xi \in \mathbb{R}^n$ então,*

$$\mathcal{F}(e^{-\pi|\xi|^2}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = e^{-\pi|\xi|^2}. \quad (2.28)$$

Demonstração. Vamos fazer a prova inicialmente para $n = 1$. Se $\xi = 0$ a equação (2.28) é a integral bastante conhecida

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi|x|^2} dx = 1. \quad (2.29)$$

Agora suponha que $\xi > 0$ e considere a função $f(z) = e^{-\pi|z|^2}$, que é uma função holomorfa definida no conjunto dos números complexos, em particular, holomorfa no interior do contorno γ_R , representado na Figura 1

O contorno γ_R consiste em um retângulo com vértices $R, R + i\xi, -R + i\xi, -R$ e a orientação positiva no sentido anti horário. Pelo Teorema de Cauchy (veja [14]),

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

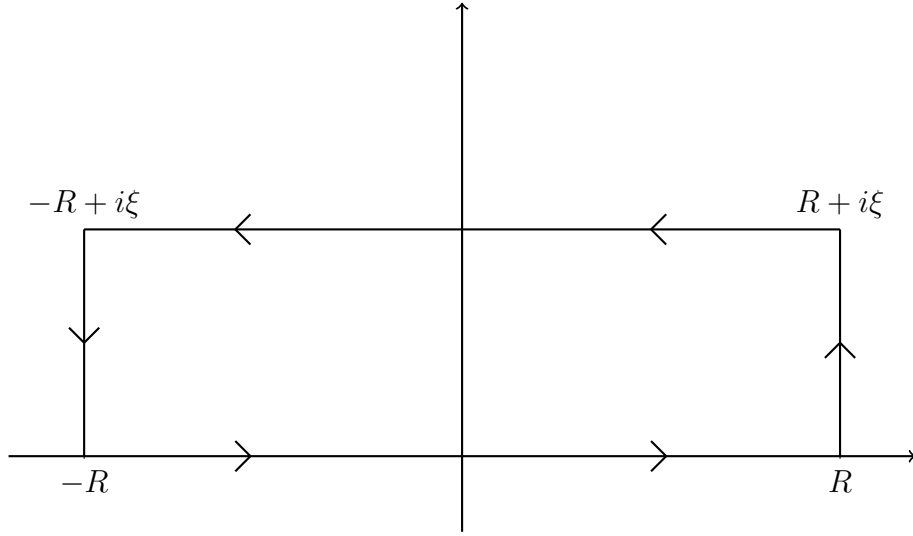


Figura 1: Contorno de γ_R

A integral sobre o segmento real é simplesmente

$$I = \int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx,$$

que converge para 1 quando $R \rightarrow \infty$. A integral no lado vertical à direita é

$$\begin{aligned} I_+ &= \int_0^\xi f(R + iy) idy \\ &= \int_0^\xi e^{-\pi(R+iy)^2} idy \\ &= \int_0^\xi e^{-\pi(R^2 + 2iRy - y^2)} idy. \end{aligned}$$

Essa integral vai para zero quando $R \rightarrow \infty$, pois ξ é fixo e podemos estimar por

$$\begin{aligned} |I_+| &= \left| \int_0^\xi e^{-\pi(R^2 + 2iRy - y^2)} idy \right| \\ &\leq \int_0^\xi \left| e^{-\pi(R^2 + 2iRy - y^2)} i \right| dy \\ &= e^{-\pi R^2} \int_0^\xi |e^{\pi y^2}| dy \\ &= C e^{-\pi R^2}. \end{aligned}$$

Analogamente, a integral sobre o segmento vertical a esquerda I_- também vai para zero quando $R \rightarrow \infty$ pelos mesmos motivos. Finalmente a integral sobre o segmento horizontal

na parte superior é

$$\begin{aligned}
 S &= \int_R^{-R} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx \\
 &= \int_R^{-R} e^{-\pi(x^2+2ix\xi-\xi^2)} dx \\
 &= -e^{\pi\xi^2} \int_{-R}^R e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx.
 \end{aligned}$$

Daí, somando as integrais temos que

$$0 = \int_{\gamma_R} f(z) dz = I + I_+ + I_- + S \quad (2.30)$$

tendo em vista os cálculos acima, fazendo $R \rightarrow \infty$ em (2.30) obtemos que

$$0 = 1 - e^{\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = e^{-\pi\xi^2}$$

o que prova o caso $n = 1$. Para provar o caso geral aplicaremos o Teorema de Fubini, o caso unidimensional que acabamos de provar e (2.29). Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(e^{-\pi|\xi|^2}) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_1^2} \dots e^{-\pi x_n^2} e^{-2\pi i x_1 \xi_1} \dots e^{-2\pi i x_n \xi_n} dx_1 \dots dx_n \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_2^2} \dots e^{-\pi x_n^2} e^{-2\pi i x_2 \xi_2} \dots e^{-2\pi i x_n \xi_n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_1^2} e^{-2\pi i x_1 \xi_1} dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n \\
 &= e^{-\pi\xi_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_3^2} \dots e^{-\pi x_n^2} e^{-2\pi i x_3 \xi_3} \dots e^{-2\pi i x_n \xi_n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_2^2} e^{-2\pi i x_2 \xi_2} dx_2 \right) dx_3 \dots dx_n
 \end{aligned}$$

repetindo-se esse processo obtemos

$$\mathcal{F}(e^{-\pi|\xi|^2}) = e^{-\pi\xi_1^2} e^{-\pi\xi_2^2} \dots e^{-\pi\xi_n^2} = e^{-\pi|\xi|^2}$$

isso prova o que queríamos. □

Agora, faremos uma prova direta de que (2.22) e (2.27) são iguais, utilizando métodos de Fourier e (2.23).

Lema 2.19. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, e $s \in (0, 1)$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi w_1)}{|w|^{n+2s}} dw = \frac{\pi^{\frac{n}{2}+2s} \Gamma(1-s)}{s \Gamma(\frac{n}{2} + s)}. \quad (2.31)$$

Equivalentemente, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+2s}} dw = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(1-s)}{2^{2s} s \Gamma(\frac{n}{2} + s)}. \quad (2.32)$$

Demonstração. A igualdade (2.31) é equivalente à igualdade (2.32). Com efeito, fazendo a mudança de variável $\tilde{w} := 2\pi w$ temos que $d\tilde{w} = (2\pi)^n dw$ logo $dw = \frac{d\tilde{w}}{(2\pi)^n}$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\pi^{\frac{n}{2}+2s} \Gamma(1-s)}{s \Gamma(\frac{n}{2} + s)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi w_1)}{|w|^{n+2s}} dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\tilde{w}_1)}{|\frac{\tilde{w}}{2\pi}|^{n+2s}} \frac{d\tilde{w}}{(2\pi)^n} \\ &= (2\pi)^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\tilde{w}_1)}{|\tilde{w}|^{n+2s}} d\tilde{w} \end{aligned}$$

portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\tilde{w}_1)}{|\tilde{w}|^{n+2s}} d\tilde{w} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(1-s)}{2^{2s} s \Gamma(\frac{n}{2} + s)}.$$

Agora comparando (2.1), (2.19) e (2.22) temos que

$$\frac{1}{2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+2s}} dw} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy = \mathcal{F}^{-1}((2\pi|\xi|)^{2s} \hat{u}(\xi)). \quad (2.33)$$

Similarmente, comparando (2.1), (2.25) e (2.27), obtemos que

$$\begin{aligned} &\frac{2^{2s-1} s \Gamma(\frac{n}{2} + s)}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(1-s)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^\infty t^{-s-1} (U(x, t) - u(x)) dt. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Além disso, veja (2.26), temos que $U(x, t) := \Gamma_t * u(x)$, onde $\Gamma_t := G(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Aplicando a Proposição 2.18 e para qualquer $t > 0$ fixo, usando a substituição $y = \frac{x}{\sqrt{4\pi t}}$

temos que $dx = (\sqrt{4\pi t})^n dy$, assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\Gamma_t(\xi)) &= \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\
&= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\sqrt{4\pi t} y|^2}{4t}} e^{-2\pi i y \cdot (\sqrt{4\pi t} \xi)} (\sqrt{4\pi t})^n dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi |y|^2} e^{-2\pi i y \cdot (\sqrt{4\pi t} \xi)} dy \\
&= e^{-\pi |\sqrt{4\pi t} \xi|^2} \\
&= e^{-4\pi^2 t |\xi|^2}
\end{aligned}$$

como consequência,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(U(x, t) - u(x)) &= \mathcal{F}(\Gamma_t * u(x) - u(x)) \\
&= \mathcal{F}(\Gamma_t * u)(\xi) - \hat{u}(\xi) \\
&= (\mathcal{F}(\Gamma_t(\xi)) - 1) \hat{u}(\xi) \\
&= (e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} - 1) \hat{u}(\xi)
\end{aligned}$$

multiplicando por t^{-s-1} e integrando sobre $t > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \left(\int_0^\infty t^{-s-1} (U(x, t) - u(x)) dt \right) &= \int_0^\infty t^{-s-1} (e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} - 1) dt \hat{u}(\xi) \\
&= \Gamma(-s) (4\pi^2 |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)
\end{aligned}$$

graças a equação (2.23) usando $\lambda = 4\pi^2 |\xi|^2$ agora tomando a transformada inversa de Fourier, temos

$$\int_0^\infty t^{-s-1} (U(x, t) - u(x)) dt = \Gamma(-s) (2\pi)^{2s} \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \hat{u}(\xi))$$

aplicando em (2.34), obtemos

$$\frac{2^{2s-1} s \Gamma(\frac{n}{2} + s)}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(1-s)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy = (2\pi)^{2s} \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \hat{u}(\xi))$$

agora lembrando (2.33)

$$\frac{1}{2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+2s}} dw} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy = \mathcal{F}^{-1}((2\pi |\xi|)^{2s} \hat{u}(\xi)).$$

Concluimos que

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(1-s)}{2^{2s} s \Gamma(\frac{n}{2} + s)} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+2s}} dw$$

como queríamos demonstrar. $\square$

2.3 Desigualdade de Sobolev Fracionária e Fórmula Generalizada de Co-área

Os espaços fracionários de Sobolev possuem um grande número de importantes desigualdades funcionais. Apresentaremos aqui a Desigualdade de Sobolev fracionária e a Fórmula de Co-área Generalizada.

A Desigualdade de Sobolev fracionária pode ser escrita da seguinte forma.

Teorema 2.20. *Para todo $s \in (0, 1)$, $p \in (1, \frac{n}{s})$ e $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-sp}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.35)$$

para algum $C > 0$, dependendo de n e p .

Demonstração. Fixamos $a > 0$, $r > 0$, $p > 1$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Então, para todo $y \in \mathbb{R}^n$ temos $|u(x)| = |u(x) - u(y) + u(y)| \leq |u(x) - u(y)| + |u(y)|$ e assim, integrando sobre $B_r(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} |B_r| |u(x)| &\leq \int_{B_r(x)} |u(x) - u(y)| dy + \int_{B_r(x)} |u(y)| dy \\ &= \int_{B_r(x)} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^a} |x - y|^a dy + \int_{B_r(x)} |u(y)| dy \\ &\leq r^a \int_{B_r(x)} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^a} dy + \int_{B_r(x)} |u(y)| dy \end{aligned}$$

agora definindo $a := \frac{n+sp}{p}$ e usando a desigualdade de Hölder (veja [8]) com expoentes p

e $\frac{p}{p-1}$ e com expoentes $\frac{np}{n-sp}$ e $\frac{np}{n(p-1)+sp}$, obtemos

$$\begin{aligned}
& |B_r| |u(x)| \\
& \leq r^{\frac{n+sp}{p}} \int_{B_r(x)} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n+sp}{p}}} dy + \int_{B_r(x)} |u(y)| dy \\
& \leq r^{\frac{n+sp}{p}} \left(\int_{B_r(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_r(x)} dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
& + \left(\int_{B_r(x)} |u(y)|^{\frac{np}{n-sp}} dy \right)^{\frac{n-sp}{np}} \left(\int_{B_r(x)} dy \right)^{\frac{n(p-1)+sp}{np}} \\
& = r^{\frac{n+sp}{p}} (C_1 r^n)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B_r(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
& + (C_1 r^n)^{\frac{n(p-1)+sp}{np}} \left(\int_{B_r(x)} |u(y)|^{\frac{np}{n-sp}} dy \right)^{\frac{n-sp}{np}} \\
& \leq C r^{n+s} \left(\int_{B_r(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dy \right)^{\frac{1}{p}} + C r^{\frac{n(p-1)+sp}{p}} \left(\int_{B_r(x)} |u(y)|^{\frac{np}{n-sp}} dy \right)^{\frac{n-sp}{np}}
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \int_{B_1(0)} dy$ e $C > 0$. Então, dividimos por r^n e renomeando C , obtemos que

$$|u(x)| \leq C r^s \left[\left(\int_{B_r(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dy \right)^{\frac{1}{p}} + r^{\frac{-n}{p}} \left(\int_{B_r(x)} |u(y)|^{\frac{np}{n-sp}} dy \right)^{\frac{n-sp}{np}} \right].$$

Considerando a notação

$$\alpha := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dy$$

e

$$\beta := \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^{\frac{np}{n-sp}} dy$$

temos que

$$|u(x)| \leq C r^s \left((\alpha)^{\frac{1}{p}} + r^{\frac{-n}{p}} (\beta)^{\frac{n-sp}{np}} \right),$$

elevando ambos os membros ao termo apropriado $\frac{np}{n-sp}$ e renomeando C , vemos que

$$|u(x)|^{\frac{np}{n-sp}} \leq C r^{\frac{ns}{n-sp}} \left((\alpha)^{\frac{1}{p}} + r^{\frac{-n}{p}} (\beta)^{\frac{n-sp}{np}} \right)^{\frac{np}{n-sp}}. \quad (2.36)$$

Tomando agora $r := \frac{(\beta)^{\frac{n-sp}{n^2}}}{(\alpha)^{\frac{1}{n}}}$, com essa configuração, temos que $r^{\frac{-n}{p}} (\beta)^{\frac{n-sp}{np}} = (\alpha)^{\frac{1}{p}}$.

Assim, possivelmente renomeando C , nós temos na equação (2.36)

$$\begin{aligned} |u(x)|^{\frac{np}{n-sp}} &\leq C(\alpha)(\beta)^{\frac{sp}{n}} \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dy \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^{\frac{np}{n-sp}} dy \right)^{\frac{sp}{n}} \end{aligned}$$

para algum $C > 0$, e assim, integrando sobre $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{np}{n-sp}} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^{\frac{np}{n-sp}} dy \right)^{\frac{sp}{n}}$$

portanto, após uma simplificação, obtemos que

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-sp}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Agora iremos apresentar a Fórmula de Co-área Generalizada.

Teorema 2.21. *Para qualquer $s \in (0, 1)$ e qualquer função mensurável $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$, então*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{n+s}} dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\{x \in \Omega, u(x) > t\}} \int_{\{y \in \Omega, u(y) \leq t\}} \frac{dx dy}{|x - y|^{n+s}} \right) dt$$

Demonstração. Nós pedimos que para qualquer $x, y \in \Omega$

$$|u(x) - u(y)| = \int_0^1 (\chi_{\{u > t\}}(x) \chi_{\{u \leq t\}}(y) + \chi_{\{u \leq t\}}(x) \chi_{\{u > t\}}(y)) dt. \quad (2.37)$$

Para provar isso, corrigimos x e $y \in \Omega$ e trocando-os, podemos supor sem perda de generalidade que $u(x) \geq u(y)$. Então definimos

$$\varphi(t) := \chi_{\{u > t\}}(x) \chi_{\{u \leq t\}}(y) + \chi_{\{u \leq t\}}(x) \chi_{\{u > t\}}(y)$$

por construção

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < u(y) \text{ e } t \geq u(x) \\ 1 & \text{se } u(y) \leq t < u(x) \end{cases}$$

assim, sendo

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = \int_{u(y)}^{u(x)} dt = u(x) - u(y) = |u(x) - u(y)|,$$

provando (2.37). Agora, multiplicando por $\frac{1}{|x-y|^{n+s}}$ e integrando (2.37) em $\Omega \times \Omega$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{n+s}} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\chi_{\{u>t\}}(x) \chi_{\{u \leq t\}}(y) + \chi_{\{u \leq t\}}(x) \chi_{\{u>t\}}(y)}{|x - y|^{n+s}} dx dy \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\{u>t\}} \int_{\{u \leq t\}} \frac{dx dy}{|x - y|^{n+s}} + \int_{\{u \leq t\}} \int_{\{u>t\}} \frac{dx dy}{|x - y|^{n+s}} \right) dt \\ &= 2 \int_0^1 \left(\int_{\{u>t\}} \int_{\{u \leq t\}} \frac{dx dy}{|x - y|^{n+s}} \right) dt. \end{aligned}$$

□

2.4 Princípio do Máximo e Desigualdade de Harnack

A Desigualdade de Harnack e o Princípio do Máximo das funções harmônicas são tópicos clássicos na teoria da regularidade elíptica, ou seja, no caso clássico se uma função não negativa é harmônica em B_1 (a bola de centro 0 e raio 1), então seu mínimo e máximo em B_r (a bola de centro 0 e raio r) para $r \in (0, 1)$ devem sempre ser comparáveis. Em particular a função não pode tocar o nível zero em B_r .

Definição 2.22. Dizemos que uma função $u \in S(\mathbb{R}^n)$ é s -harmônica quando satisfaz $(-\Delta)^s u = 0$.

Vale ressaltar que a contrapartida fracionária desses fatos é, em geral, falsa, como mostra esse próximo resultado.

Teorema 2.23. Existe uma função limitada u que é s -harmônica em B_1 , não negativa em B_1 , mas tal que $\inf_{B_1} u = 0$.

Demonstração. A ideia principal é que nós somos capazes de pegar o dado de fora de B_1 de maneira adequada para “abaixar” a função dentro de B_1 até atingir o nível zero. Ou seja, tomando $M \geq 0$ e tomando u_M como a função que satisfaz

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_M = 0 & \text{em } B_1 \\ u_M = 1 - M & \text{em } B_3 \setminus B_2 \\ u_M = 1 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus ((B_3 \setminus B_2) \cup B_1). \end{cases} \quad (2.38)$$

Quando $M = 0$, a função u_M é identicamente 1. Quando $M > 0$, esperamos que u_M se curve já que o fato do laplaciano fracionário desaparecer em B_1 força o quociente de segunda ordem desaparecer em média (isto é, por (2.1), ou a formulação equivalente em (2.7)). De fato, afirmamos que existe $M_* > 0$ tal que $u_{M_*} \geq 0$ em B_1 com $\inf_{B_1} u_{M_*} = 0$. Então o resultado do Teorema seria alcançado tomando-se $u := u_{M_*}$.

Para verificar a existência desse M_* , mostramos que $\inf_{B_1} u_M \rightarrow -\infty$ quando $M \rightarrow \infty$. De fato, argumentamos por contradição, suponha que isso não possa acontecer. Então para qualquer $M \geq 0$, teríamos que

$$\inf_{B_1} u_M \geq -a \quad (2.39)$$

para algum $a \in \mathbb{R}$ fixo. Definimos $v_M := \frac{u_M + M - 1}{M}$. Então por (2.38)

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v_M = 0 & \text{em } B_1 \\ v_M = 0 & \text{em } B_3 \setminus B_2 \\ v_M = 1 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus ((B_3 \setminus B_2) \cup B_1). \end{cases}$$

Além disso, por (2.39), para qualquer $x \in B_1$ temos que $v_M(x) \geq \frac{-a+M-1}{M}$. Tomando limites quando $M \rightarrow \infty$, obtemos que v_M se aproxima de uma função v_∞ que satisfaz

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v_\infty = 0 & \text{em } B_1 \\ v_\infty = 0 & \text{em } B_3 \setminus B_2 \\ v_\infty = 1 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus ((B_3 \setminus B_2) \cup B_1). \end{cases}$$

e, para todo $x \in B_1$, $v_\infty(x) \geq 1$. Em particular, o máximo de v_∞ é atingido em algum ponto $x_* \in B_1$, com $v_\infty(x_*) \geq 1$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{v_\infty(x_*) - v_\infty(y)}{|x_* - y|^{n+2s}} dy \\ &\geq V.P. \int_{B_3 \setminus B_2} \frac{v_\infty(x_*) - v_\infty(y)}{|x_* - y|^{n+2s}} dy \\ &\geq V.P. \int_{B_3 \setminus B_2} \frac{1 - 0}{|x_* - y|^{n+2s}} dy \\ &> 0, \end{aligned}$$

que é uma contradição. □

Observação 2.24. *O Teorema 2.23 é apenas um caso particular do efeito que o dado no infinito pode ter sobre o laplaciano fracionário. Por outro lado, a Desigualdade de Harnack e o Princípio do Máximo são verdadeiros se, por exemplo, o sinal da função u for controlado em todo o $\mathbb{R}^n$.*

Agora apresentaremos em detalhes um Princípio do Máximo Global.

Teorema 2.25. *Se $(-\Delta)^s u \geq 0$ em B_1 e $u \geq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$, então $u \geq 0$ em B_1 .*

Demonstração. Suponha por contradição, que o ponto mínimo $x_* \in B_1$ satisfaz $u(x_*) < 0$. Então $u(x_*)$ é um mínimo em $\mathbb{R}^n$ (pois u é positivo fora de B_1), seja $y \in B_2$ então temos que $2u(x_*) - u(x_* + y) - u(x_* - y) \leq 0$. Por outro lado, se $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_2$ temos que $x_* \pm y \in \mathbb{R}^n \setminus B_1$, logo $u(x_* \pm y) \geq 0$ então

$$\begin{aligned} 0 &\leq (-\Delta)^s u(x_*) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x_*) - u(x_* + y) - u(x_* - y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_2} \frac{2u(x_*) - u(x_* + y) - u(x_* - y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_2} \frac{2u(x_*)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &< 0 \end{aligned}$$

isso nos leva a uma contradição. Portanto, $u \geq 0$ em B_1 como queríamos demonstrar. $\square$

Similarmente ao Teorema 2.25 acima, pode-se provar um Princípio do Máximo Forte.

Teorema 2.26. *Se $(-\Delta)^s u \geq 0$ em B_1 e $u \geq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$, então $u > 0$ em B_1 a menos que u seja identicamente nula.*

Demonstração. Observamos que $u \geq 0$ em todo $\mathbb{R}^n$, graças ao Teorema 2.25. Portanto, se u não for estritamente positivo, existe $x_0 \in B_1$ tal que $u(x_0) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (-\Delta)^s u(x_0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x_0) - u(x_0 + y) - u(x_0 - y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x_0 + y) + u(x_0 - y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

pois, $u(x_0 + y)$ e $u(x_0 - y)$ são não negativos, portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x_0 + y) + u(x_0 - y)}{|y|^{n+2s}} dy = 0$$

e assim, concluímos que u é identicamente nula, como queríamos. $\square$

Uma versão simples da desigualdade do tipo Harnack no sentido fracionário também pode ser obtida da seguinte forma.

Proposição 2.27. *Suponha que $(-\Delta)^s u \geq 0$ em B_2 , com $u \geq 0$ em todo $\mathbb{R}^n$. Então*

$$u(0) \geq c \int_{B_1} u(x) dx,$$

para $c > 0$ adequado.

Demonstração. Seja $\Gamma \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{2}})$, com $\Gamma(x) \in [0, 1]$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, e $\Gamma(0) = 1$. Fixamos $\epsilon > 0$, e seja

$$\eta := u(0) + \epsilon > 0. \quad (2.40)$$

Definimos $\Gamma_a(x) := 2\eta\Gamma(x) - a$. Note que se $a > 2\eta$, então $\Gamma_a(x) \leq 2\eta - a < 0 \leq u(x)$ em todo $\mathbb{R}^n$, consequentemente o conjunto $\{\Gamma_a < u \text{ em } \mathbb{R}^n\}$ é não vazio, e podemos definir

$$a_* := \inf_{a \in \mathbb{R}^n} \{\Gamma_a < u \text{ em } \mathbb{R}^n\}.$$

Por construção

$$a_* \leq 2\eta \quad (2.41)$$

Se $a < \eta$ então $\Gamma_a(0) = 2\eta - a > \eta > u(0)$ o que contradiz a definição de a_* , então

$$a_* \geq \eta. \quad (2.42)$$

Note que

$$\Gamma_{a_*} \leq u \text{ em todo } \mathbb{R}^n. \quad (2.43)$$

Nós pedimos que

$$\text{exista } x_0 \in \overline{B_{\frac{1}{2}}} \text{ tal que } \Gamma_{a_*}(x_0) = u(x_0). \quad (2.44)$$

Para provar isso, supomos por contradição, que $u > \Gamma_{a_*}$ em $\overline{B_{\frac{1}{2}}}$, isto é,

$\mu := \min_{\overline{B_{\frac{1}{2}}}} (u(x) - \Gamma_{a_*}(x)) > 0$. Além disso, se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{\frac{1}{2}}}$, temos que $u(x) - \Gamma_{a_*}(x) =$

$u(x) - 2\eta\Gamma(x) + a_* = u(x) + a_* \geq a_* \geq \eta$, por (2.42). Como consequência para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$u(x) - \Gamma_{a_*}(x) \geq \min\{\mu, \eta\} = \mu_* > 0.$$

Então se definirmos $a_* := a_* - (\frac{\mu_*}{2})$, temos que $a_* < a_*$ e

$$u(x) - \Gamma_{a_*}(x) = u(x) - \Gamma_{a_*}(x) - \frac{\mu_*}{2} \geq \frac{\mu_*}{2} > 0$$

isto está em contradição com a definição de a_* provando assim (2.44).

De (2.44) temos que $x_0 \in \overline{B_{\frac{1}{2}}}$, daí, $(-\Delta)^s u(x_0) \geq 0$. Também $|(-\Delta)^s \Gamma_{a_*}(x)| = 2\eta|(-\Delta)^s \Gamma(x)| \leq C\eta$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, portanto por (2.43) e (2.44)

$$\begin{aligned} C\eta &\geq (-\Delta)^s \Gamma_{a_*}(x_0) - (-\Delta)^s u(x_0) \\ &= C(n, s) V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Gamma_{a_*}(x_0) - \Gamma_{a_*}(x_0 + y)}{|y|^{n+2s}} dy - C(n, s) V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x_0) - u(x_0 + y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= C(n, s) V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Gamma_{a_*}(x_0) - \Gamma_{a_*}(x_0 + y) - u(x_0) + u(x_0 + y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= C(n, s) V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x_0 + y) - \Gamma_{a_*}(x_0 + y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &\geq C(n, s) V.P. \int_{B_1(-x_0)} \frac{u(x_0 + y) - \Gamma_{a_*}(x_0 + y)}{|y|^{n+2s}} dy \end{aligned}$$

note agora que se $y \in B_1(-x_0)$, então $|y| \leq |x_0| + 1 < 2$, assim obtemos

$$C\eta \geq \frac{C(n, s)}{2^{n+2s}} \int_{B_1(-x_0)} [u(x_0 + y) - \Gamma_{a_*}(x_0 + y)] dy.$$

Observe que $-\Gamma_{a_*}(x) = 2\eta\Gamma(x) - a_* \leq \eta$, por (2.42), nós concluímos que

$$C\eta \geq \frac{C(n, s)}{2^{n+2s}} \left[\int_{B_1(-x_0)} (u(x_0 + y) - \eta|B_1|) dy \right],$$

isto é, usando a mudança de variável $x = x_0 + y$, recordando (2.40) e renomeando as constantes, temos que

$$C(u(0) + \epsilon) = C\eta \geq \int_{B_1} u(x) dx.$$

Daí, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ o resultado segue. $\square$

2.5 Exemplo de Função s-harmônica

Nesta seção fornecemos um exemplo explícito de uma função que é s-harmônica em $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Teorema 2.28. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, seja $w_s(x) := x_+^s = \max\{x, 0\}^s$. Então

$$(-\Delta)^s w_s(x) = \begin{cases} -c_s |x|^{-s}, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

para uma constante adequada $c_s > 0$.

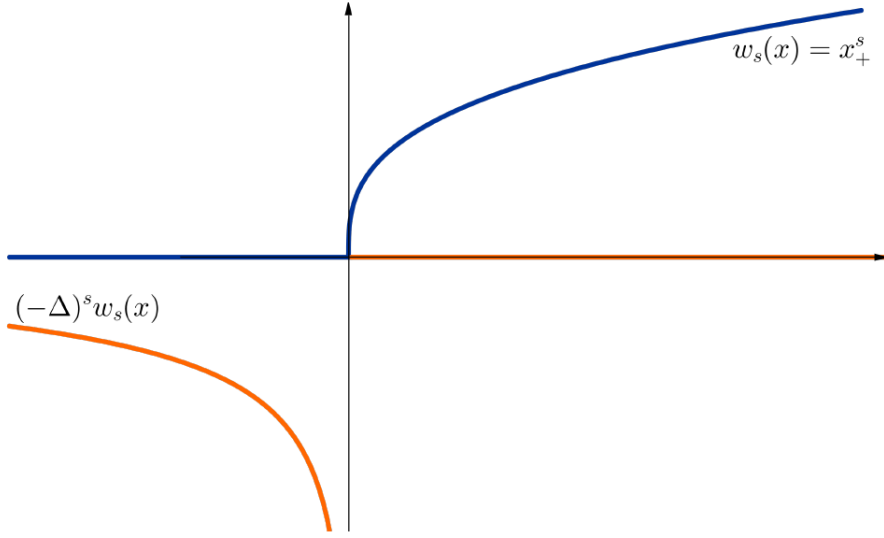


Figura 2: Função s-harmônica. (Figura obtida de [4]).

Para provar o Teorema acima, começamos com alguns cálculos preliminares.

Lema 2.29. Para todo $s \in (0, 1)$ temos que

$$\int_0^1 \frac{(1+t)^s + (1-t)^s - 2}{t^{1+2s}} dt + \int_1^\infty \frac{(1+t)^s}{t^{1+2s}} dt = \frac{1}{s}.$$

Demonstração. Fixando $\epsilon > 0$, integramos por partes:

$$\begin{aligned} & \int_\epsilon^1 \frac{(1+t)^s + (1-t)^s - 2}{t^{1+2s}} dt \\ &= -\frac{1}{2s} \int_\epsilon^1 [(1+t)^s + (1-t)^s - 2] \frac{d}{dt} t^{-2s} dt \\ &= -\frac{1}{2s} \left[\frac{(1+t)^s + (1-t)^s - 2}{t^{2s}} \right]_\epsilon^1 + \frac{1}{2s} \left[\int_\epsilon^1 \frac{s(1+t)^{s-1} - s(1-t)^{s-1}}{t^{2s}} dt \right] \\ &= -\frac{1}{2s} \left[2^s - 2 - \frac{(1+\epsilon)^s + (1-\epsilon)^s - 2}{\epsilon^{2s}} \right] + \frac{1}{2} \int_\epsilon^1 \frac{(1+t)^{s-1} - (1-t)^{s-1}}{t^{2s}} dt \\ &= \frac{1}{2s} \left[\frac{(1+\epsilon)^s + (1-\epsilon)^s - 2}{\epsilon^{2s}} - 2^s + 2 \right] + \frac{1}{2} \left[\int_\epsilon^1 (1+t)^{s-1} t^{-2s} dt - \int_\epsilon^1 (1-t)^{s-1} t^{-2s} dt \right] \\ &= \frac{1}{2s} [o(1) - 2^s + 2] + \frac{1}{2} \left[\int_\epsilon^1 (1+t)^{s-1} t^{-2s} dt - \int_\epsilon^1 (1-t)^{s-1} t^{-2s} dt \right] \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} & \int_{\epsilon}^1 \frac{(1+t)^s + (1-t)^s - 2}{t^{1+2s}} dt \\ &= \frac{1}{2s} [o(1) - 2^s + 2] + \frac{1}{2} \left[\int_{\epsilon}^1 (1+t)^{s-1} t^{-2s} dt - \int_{\epsilon}^1 (1-t)^{s-1} t^{-2s} dt \right] \end{aligned}$$

onde $o(1)$ converge para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$. Além disso, fazendo a mudança de variável $\tilde{t} := \frac{t}{1-t}$ isto é, $t := \frac{\tilde{t}}{1+\tilde{t}}$ então, $dt = \frac{1}{(1+\tilde{t})^2} d\tilde{t}$, e se $t = \epsilon$ temos $\tilde{t} = \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ e quando $t = 1$ temos $\tilde{t} = \infty$ além disso,

$$\begin{aligned} (1-t)^{s-1} t^{-2s} &= \left(1 - \frac{\tilde{t}}{1+\tilde{t}}\right)^{s-1} \left(\frac{\tilde{t}}{1+\tilde{t}}\right)^{-2s} \\ &= \left(\frac{1}{1+\tilde{t}}\right)^{s-1} (1+\tilde{t})^{2s} (\tilde{t})^{-2s} \\ &= (1+\tilde{t})^{-s+1+2s} (\tilde{t})^{-2s} \\ &= (1+\tilde{t})^{1+s} (\tilde{t})^{-2s} \end{aligned}$$

assim,

$$\int_{\epsilon}^1 (1-t)^{s-1} t^{-2s} dt = \int_{\frac{\epsilon}{1-\epsilon}}^{\infty} (1+\tilde{t})^{1+s} (\tilde{t})^{-2s} d\tilde{t}.$$

Agora escrevendo t ao invés de $\tilde{t}$ como variável de integração, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\epsilon}^1 \frac{(1+t)^s + (1-t)^s - 2}{t^{1+2s}} dt \\ &= \frac{1}{2s} [o(1) - 2^s + 2] + \frac{1}{2} \left[\int_{\epsilon}^1 (1+t)^{s-1} t^{-2s} dt - \int_{\epsilon}^1 (1-t)^{s-1} t^{-2s} dt \right] \\ &= \frac{1}{2s} [o(1) - 2^s + 2] + \frac{1}{2} \left[\int_{\epsilon}^1 (1+t)^{s-1} t^{-2s} dt - \int_{\frac{\epsilon}{1-\epsilon}}^{\infty} (1+t)^{s-1} t^{-2s} dt \right] \\ &= \frac{1}{2s} [o(1) - 2^s + 2] + \frac{1}{2} \left[\int_{\epsilon}^{\frac{\epsilon}{1-\epsilon}} (1+t)^{s-1} t^{-2s} dt - \int_1^{\infty} (1+t)^{s-1} t^{-2s} dt \right] \end{aligned} \tag{2.45}$$

agora, observamos que a primeira integral na direita pode ser limitada como segue,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\epsilon}^{\frac{\epsilon}{1-\epsilon}} (1+t)^{s-1} t^{-2s} dt \\
&\leq \int_{\epsilon}^{\frac{\epsilon}{1-\epsilon}} (1+\epsilon)^{s-1} \epsilon^{-2s} dt \\
&= (1+\epsilon)^{s-1} \epsilon^{-2s} [t]_{\epsilon}^{\frac{\epsilon}{1-\epsilon}} \\
&= (1+\epsilon)^{s-1} \epsilon^{-2s} \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon} - \epsilon \right) \\
&= (1+\epsilon)^{s-1} \epsilon^{-2s} (1-\epsilon)^{-1} \epsilon^2 \\
&= \epsilon^{-2s+2} (1+\epsilon)^{s-1} (1-\epsilon)^{-1}
\end{aligned}$$

sendo assim,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\frac{\epsilon}{1-\epsilon}} (1+t)^{s-1} t^{-2s} dt = 0.$$

Então, (2.45) satisfaz

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{(1+t)^s + (1-t)^s - 2}{t^{1+2s}} dt \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2s} (o(1) - 2^s + 2) + \frac{1}{2} \left(\int_{\epsilon}^{\frac{\epsilon}{1-\epsilon}} (1+t)^{s-1} t^{-2s} dt - \int_1^{\infty} (1+t)^{s-1} t^{-2s} dt \right) \right] \\
&= \frac{-2^s + 2}{2s} - \frac{1}{2} \int_1^{\infty} (1+t)^{s-1} t^{-2s} dt.
\end{aligned}$$

Agora integrando por partes, a integral entre 1 e infinito, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_1^{\infty} (1+t)^{s-1} t^{-2s} dt &= \frac{1}{2s} \int_1^{\infty} t^{-2s} \frac{d}{dt} (1+t)^s dt \\
&= \frac{1}{2s} [t^{-2s} (1+t)^s]_1^{\infty} - \frac{1}{2s} \int_1^{\infty} -2st^{-1-2s} (1+t)^s dt \\
&= -\frac{2^{2s}}{2s} + \int_1^{\infty} t^{-1-2s} (1+t)^s dt.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(1+t)^s + (1-t)^s - 2}{t^{1+2s}} dt &= \frac{-2^s + 2}{2s} - \frac{1}{2} \int_1^{\infty} (1+t)^{s-1} t^{-2s} dt \\
&= \frac{-2^s + 2}{2s} + \frac{2^{2s}}{2s} - \int_1^{\infty} (1+t)^s t^{-1-2s} dt \\
&= \frac{1}{s} - \int_1^{\infty} (1+t)^s t^{-1-2s} dt
\end{aligned}$$

concluindo assim o que queríamos demonstrar. $\square$

Do Lema 2.29 acima deduzimos a seguinte propriedade da função w_s , cujo laplaciano fracionário em 1 é zero.

Corolário 2.30. *Seja w_s como no Teorema 2.28. Então,*

$$(-\Delta)^s w_s(1) = 0.$$

Demonstração. Primeiramente note que a função $t \mapsto (1+t)^s + (1-t)^s - 2$ é par, portanto,

$$\int_{-1}^1 \frac{(1+t)^s + (1-t)^s - 2}{|t|^{1+2s}} dt = 2 \int_0^1 \frac{(1+t)^s + (1-t)^s - 2}{t^{1+2s}} dt.$$

Vejamos a relação entre as integrais em $(-\infty, -1]$ e $[1, \infty)$. Fazendo a mudança de variável $\tilde{t} = -t$ implica que $dt = -d\tilde{t}$ e se $t \rightarrow -\infty$ temos que $\tilde{t} \rightarrow \infty$ e quando $t = -1$ segue que $\tilde{t} = 1$ portanto,

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{(1-t)^s - 2}{|t|^{1+2s}} dt = - \int_{\infty}^1 \frac{(1+\tilde{t})^s - 2}{|\tilde{t}|^{1+2s}} d\tilde{t} = \int_1^{\infty} \frac{(1+\tilde{t})^s - 2}{|\tilde{t}|^{1+2s}} d\tilde{t}$$

assim, consideramos t como a variável de integração ao invés de $\tilde{t}$ e pelo Lema 2.29,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_s(1+t) + w_s(1-t) - 2w_s(1)}{|t|^{1+2s}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{(1-t)^s - 2}{|t|^{1+2s}} dt + \int_{-1}^1 \frac{(1+t)^s + (1-t)^s - 2}{|t|^{1+2s}} dt + \int_1^{\infty} \frac{(1+t)^s - 2}{|t|^{1+2s}} dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{(1+t)^s + (1-t)^s - 2}{t^{1+2s}} dt + 2 \int_1^{\infty} \frac{(1+t)^s - 2}{|t|^{1+2s}} dt \\ &= 2 \left[\int_0^1 \frac{(1+t)^s + (1-t)^s - 2}{t^{1+2s}} dt + \int_1^{\infty} \frac{(1+t)^s}{|t|^{1+2s}} dt - 2 \int_1^{\infty} \frac{dt}{|t|^{1+2s}} \right] \\ &= 2 \left[\frac{1}{s} - 2 \int_1^{\infty} \frac{dt}{|t|^{1+2s}} \right]. \end{aligned}$$

Como

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{|t|^{1+2s}} = \left[-\frac{t^{-2s}}{2s} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{2s}.$$

Daí,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_s(1+t) + w_s(1-t) - 2w_s(1)}{|t|^{1+2s}} dt = 2 \left[\frac{1}{s} - 2 \frac{1}{2s} \right] = 0.$$

Portanto $(-\Delta)^s w_s(1) = 0$. Isso prova o resultado desejado. $\square$

A contrapartida do Corolário 2.30 é dada pelo seguinte lema.

Lema 2.31. *Seja w_s como no Teorema 2.28. Então*

$$-(-\Delta)^s w_s(-1) > 0.$$

Demonstração. Temos que

$$w_s(-1+t) + w_s(-1-t) - 2w_s(-1) = (-1+t)_+^s + (-1-t)_+^s \geq 0$$

e não é identicamente zero, o que prova o resultado desejado. $\square$

Agora faremos a prova do Teorema 2.28.

Demonstração. Seja $\sigma \in \{-1, 1\}$ denotando o sinal de $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fixo. Afirmamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_s(\sigma(1+t)) + w_s(\sigma(1-t)) - 2w_s(\sigma)}{|t|^{1+2s}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_s(\sigma+t) + w_s(\sigma-t) - 2w_s(\sigma)}{|t|^{1+2s}} dt. \quad (2.46)$$

De fato, a equação (2.46) é óbvia quando $x > 0$ (ou seja, $\sigma = 1$), então supomos $x < 0$ (ou seja, $\sigma = -1$) e fazendo a mudança de variável $\tau = -t$ logo $d\tau = -dt$ e se $t \rightarrow -\infty$ então $\tau \rightarrow \infty$ e quando $t \rightarrow \infty$ temos que $\tau \rightarrow -\infty$. Assim, vemos que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_s(\sigma(1+t)) + w_s(\sigma(1-t)) - 2w_s(\sigma)}{|t|^{1+2s}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_s(-1-t) + w_s(-1+t) - 2w_s(\sigma)}{|t|^{1+2s}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_s(-1+\tau) + w_s(-1-\tau) - 2w_s(\sigma)}{|\tau|^{1+2s}} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_s(\sigma+\tau) + w_s(\sigma-\tau) - 2w_s(\sigma)}{|\tau|^{1+2s}} d\tau, \end{aligned}$$

isso prova (2.46). Agora observamos que para qualquer $r \in \mathbb{R}$,

$$w_s(|x|r) = (|x|r)_+^s = |x|^s r_+^s = |x|^s w_s(r)$$

isto é,

$$w_s(xr) = w_s(\sigma|x|r) = |x|^s (\sigma r)_+^s = |x|^s w_s(\sigma r).$$

Então fazendo a mudança de variáveis $y = tx$ temos $dy = xdt$ e $\frac{1}{|y|^{1+2s}} = \frac{1}{|t|^{1+2s}|x|^{1+2s}}$ e por

(2.46) obtemos que

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_s(x+y) + w_s(x-y) - 2w_s(x)}{|y|^{1+2s}} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_s(x(1+t)) + w_s(x(1-t)) - 2w_s(x)}{|x|^{2s}|t|^{1+2s}} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^s w_s(\sigma(1+t)) + |x|^s w_s(\sigma(1-t)) - 2|x|^s w_s(\sigma)}{|x|^{2s}|t|^{1+2s}} dt \\
&= |x|^{-s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_s(\sigma+t) + w_s(\sigma-t) - 2w_s(\sigma)}{|t|^{1+2s}} dt.
\end{aligned}$$

Isso diz que

$$(-\Delta)^s w_s(x) = \begin{cases} |x|^{-s} (-\Delta)^s w_s(-1) & \text{se } x < 0 \\ |x|^{-s} (-\Delta)^s w_s(1) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Portanto, pelo Lema 2.31 e o Corolário 2.30 temos que

$$(-\Delta)^s w_s(x) = \begin{cases} -c_s |x|^{-s} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

onde $c_s = -(-\Delta)^s w_s(-1) > 0$. □

2.6 Aproximação local por funções s-harmônicas

Aqui mostraremos que as funções s-harmônicas podem aproximar localmente qualquer função dada, sem restrições geométricas. Este fato é bastante surpreendente e é uma característica puramente não local, no sentido de que não tem contrapartida clássica. De fato, no cenário clássico, as funções harmônicas são bastante rígidas, por exemplo, não podem ter um máximo local estrito e, portanto, não podem aproximar uma função com um máximo local estrito. O quadro não local é completamente diferente, como a oscilação de uma função “de longe” pode tornar a função localmente harmônica, quase independentemente de seu comportamento local.

O que segue é um resultado de aproximação, por funções s-harmônicas.

Teorema 2.32. *Seja $k \in \mathbb{N}$ fixado. Então para qualquer $f \in C^k(\overline{B}_1)$ e qualquer $\epsilon > 0$ existem $R > 0$ e $u \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap C^s(\mathbb{R}^n)$ tais que*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u(x) = 0 & \text{em } B_1 \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus B_R, \end{cases} \quad (2.47)$$

$$e \|f - u\|_{C^k(\overline{B}_1)} \leq \epsilon.$$

Demonstração. Dividiremos a prova em três etapas. Além disso, por simplicidade, faremos a prova no caso unidimensional.

Etapa I: Reduzindo para monômios

Seja $k \in \mathbb{N}$ fixo. Usamos em primeiro lugar o teorema de Stone-Weierstrass e temos que para todo $\epsilon > 0$ e qualquer $f \in C^k([0, 1])$ existe um polinômio P tal que

$$\|f - P\|_{C^k(\overline{B}_1)} \leq \epsilon.$$

Assim, basta provar esse Teorema para polinômios. Então, por linearidade, basta prova isso para monômios. De fato, se $P(x) = \sum_{m=0}^N c_m x^m$ encontra-se uma função s-harmônica u_m tal que

$$\|u_m - x^m\|_{C^k(\overline{B}_1)} \leq \frac{\epsilon}{N|c_m|},$$

em seguida tomando $u := \sum_{m=0}^N c_m u_m$ temos que

$$\begin{aligned} \|u - P\|_{C^k(\overline{B}_1)} &= \left\| \sum_{m=0}^N c_m u_m - \sum_{m=0}^N c_m x^m \right\|_{C^k(\overline{B}_1)} \\ &= \left\| \sum_{m=0}^N c_m (u_m - x^m) \right\|_{C^k(\overline{B}_1)} \\ &\leq \sum_{m=0}^N |c_m| \|u_m - x^m\|_{C^k(\overline{B}_1)} \\ &\leq \sum_{m=0}^N |c_m| \frac{\epsilon}{N|c_m|} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

observe que a função u ainda é uma função s-harmônica, já que o operador laplaciano fracionário é um operador linear.

Etapa II: Abrangendo as derivadas

Provamos a existência de uma função s-harmônica em B_1 , desaparecendo fora de um compacto e com um número arbitrariamente grande de derivadas prescritas. Ou seja, mostramos que para qualquer $m \in \mathbb{N}$ existem $R > r > 0$, um ponto $x \in \mathbb{R}$ e uma função u tal que

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u(y) = 0 & \text{em } (x - r, x + r) \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus (x - R, x + R) \end{cases} \quad (2.48)$$

e

$$\begin{cases} D^j u(x) = 0 & \text{para todo } j \in \{0, 1, \dots, m-1\} \\ D^m u(x) = 1. \end{cases} \quad (2.49)$$

Para provar isso argumentamos por contradição.

Considere Z o conjunto de todos os pares (u, x) de pontos $x \in \mathbb{R}$ e de funções s-harmônicas em uma vizinhança de x , satisfazendo (2.48). Para qualquer par, associamos o vetor

$$(u(x), Du(x), \dots, D^m u(x)) \in \mathbb{R}^{m+1}$$

e seja V o espaço vetorial abrangido por esta construção, ou seja,

$$V := \{(u(x), Du(x), \dots, D^m u(x)), \text{ para } (u, x) \in Z\}.$$

Afirmamos que

$$V \text{ é um espaço linear.} \quad (2.50)$$

Com efeito, sejam $V_1, V_2 \in V$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Então para todo $i \in \{1, 2\}$, temos que

$$V_i = \{(u_i(x_i), Du_i(x_i), \dots, D^m u_i(x_i)), \text{ para } (u_i, x_i) \in Z\},$$

isto é, u_i é s-harmônica em $(x_i - r_i, x_i + r_i)$ e é nula em $\mathbb{R} \setminus (x_i - R_i, x_i + R_i)$, para algum $R_i \geq r_i > 0$. Definimos

$$u_3(x) := a_1 u_1(x + x_1) + a_2 u_2(x + x_2).$$

Por construção, u_3 é s-harmônica em $(-r_3, r_3)$, e nula em $\mathbb{R} \setminus (-R_3, R_3)$, com $r_3 := \min\{r_1, r_2\}$ e $R_3 := \max\{R_1, R_2\}$, assim sendo $(u_3, 0) \in Z$. Além disso,

$$D^j u_3(x) = a_1 D^j u_1(x + x_1) + a_2 D^j u_2(x + x_2)$$

e assim

$$\begin{aligned} a_1 V_1 + a_2 V_2 &= a_1 (u_1(x_1), Du_1(x_1), \dots, D^m u_1(x_1)) + a_2 (u_2(x_2), Du_2(x_2), \dots, D^m u_2(x_2)) \\ &= (u_3(x_3), Du_3(x_3), \dots, D^m u_3(x_3)) \end{aligned}$$

pertence a V , provando assim (2.50).

Agora para completar a prova da Etapa II basta mostrar que

$$V = \mathbb{R}^{m+1}. \quad (2.51)$$

De fato, se (2.51) é verdadeiro, então em particular $(0, \dots, 0, 1) \in V$ que é o desejado na Etapa II. Para provar (2.51) argumentamos por contradição, isto é, se (2.51) não ocorre, por (2.50) temos que V é um subespaço próprio de $\mathbb{R}^{m+1}$ e por isso está em um hiperplano. Assim, existe um vetor $c = (c_0, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ tal que

$$V \subseteq \{w \in \mathbb{R}^{m+1}; c \cdot w = 0\}.$$

Isto é, tomando $(u, x) \in Z$ o vetor $c = (c_0, \dots, c_m)$ é ortogonal a qualquer vetor $(u(x), Du(x), \dots, D^m u(x))$, logo

$$\sum_{j \leq m} c_j D^j u(x) = 0.$$

Para encontrar uma contradição agora encontramos uma função s-harmônica apropriada e avaliamos em um ponto apropriado x . De fato, um bom candidato para a função s-harmônica é x_+^s , como sabemos do Teorema 2.28, estritamente falando, esta função não é permitida aqui, já que não tem suporte compacto, mas digamos que pode-se construir uma função s-harmônica que tenha suporte compacto com o mesmo comportamento próximo da origem. Com essa pequena observação deixada de lado, calculamos para $x \in (0, 1)$, próximo à origem

$$D^j x^s = s(s-1) \cdot \dots \cdot (s-j+1) x^{s-j}$$

e multiplicando a soma por x^{m-s} (para $x \neq 0$) temos que

$$\sum_{j \leq m} c_j s(s-1) \cdot \dots \cdot (s-j+1) x^{m-j} = 0$$

mas $s \in (0, 1)$ e o produto $s(s-1) \cdot \dots \cdot (s-j+1)$ nunca se anula. Portanto o polinômio é identicamente nulo se, e somente se, $c_j = 0$ para qualquer j , o que é uma contradição. Isto completa a prova da existência de uma função u que satisfaz (2.48) e (2.49).

Etapa III Argumento de reescalonamento e conclusão da prova

Na etapa anterior, para cada $m \in \mathbb{N}$, fomos capazes de construir uma função localmente s-harmônica u tal que $u(x) = x^m + o(x^{m+1})$ próximo à origem. Considerando a explosão

$$u_\lambda(x) = \frac{u(\lambda x)}{\lambda^m} = x^m + \lambda o(x^{m+1})$$

temos que para λ pequeno, u_λ é arbitrariamente próximo do monômio x^m . Como afirmado na primeira etapa, concluindo assim a demonstração do Teorema 2.32. $\square$

Vale ressaltar que a flexibilidade das funções s-harmônicas do Teorema 2.32 pode ter consequências concretas. Por exemplo, temos que uma população biológica com atitudes dispersivas não locais pode se adaptar melhor localmente a uma distribuição dada de recursos, ou seja, espécies biológicas não locais podem eficientemente usar recursos distantes e elas podem se ajustar aos recursos disponíveis nas proximidades consumindo-as (quase) completamente, tornando assim mais difícil o estabelecimento de uma espécie competidora diferente.

2.7 Uma função com laplaciano fracionário constante na bola

Nesta seção iremos calcular explicitamente o Laplaciano fracionário da função

$$\mathcal{U}(x) = (1 - |x|^2)_+^s.$$

Em B_1 temos que

$$(-\Delta)^s \mathcal{U}(x) = C(n, s) \frac{w_n}{2} B(1 - s, s), \quad (2.52)$$

onde $C(n, s)$ é introduzido em (2.22) e B é a função especial Beta.

Seja $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(x) = (1 - |x|^2)_+^s$. Considere o laplaciano fracionário restrito a $(-1, 1)$

$$\mathcal{L}u(x) := V.P. \int_{-1}^1 \frac{u(x) - u(x - y)}{|y|^{1+2s}} dy$$

vamos calcular $\mathcal{L}u(0)$. Por simetria temos que

$$\mathcal{L}u(0) = 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{1 - (1 - y^2)^s}{y^{1+2s}} dy.$$

Fazendo a mudança de variável $w = y^2$, temos $dw = 2ydy$, logo $\frac{dw}{2\sqrt{w}} = dy$, daí, integrando

por partes obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}u(0) &= 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^1 y^{-1-2s} dy - \int_{\epsilon}^1 (1-y^2)^s y^{-1-2s} dy \right] \\
&= 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2s} + \frac{\epsilon^{-2s}}{2s} - \frac{1}{2} \int_{\epsilon^2}^1 (1-w)^s (\sqrt{w})^{-1-2s} (\sqrt{w})^{-1} dw \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{s} + \frac{\epsilon^{-2s}}{s} - \int_{\epsilon^2}^1 (1-w)^s (w)^{-1-s} dw \right] \\
&= -\frac{1}{s} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\epsilon^{-2s}}{s} - \left[(1-w)^s \frac{w^{-s}}{-s} \right]_{\epsilon^2}^1 - \int_{\epsilon^2}^1 \frac{w^{-s}}{-s} [-s(1-w)^{s-1}] dw \right\} \\
&= -\frac{1}{s} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\epsilon^{-2s}}{s} + (1-\epsilon^2)^s \frac{\epsilon^{-2s}}{-s} + \int_{\epsilon^2}^1 w^{-s} (1-w)^{s-1} dw \right] \\
&= -\frac{1}{s} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\epsilon^{-2s} - \epsilon^{-2s}(1-\epsilon^2)^s}{s} + \int_{\epsilon^2}^1 w^{-s} (1-w)^{s-1} dw \right]
\end{aligned}$$

aplicando o limite e usando a representação integral da função Beta, ou seja,

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt,$$

obtemos que

$$\mathcal{L}u(0) = -\frac{1}{s} + B(1-s, s). \quad (2.53)$$

Para calcular $\mathcal{L}u(x)$, seja $x \in B_1$ e considere a mudança de variáveis $w = \frac{x-y}{1-xy}$ implica que $y = \frac{x-w}{1-xw}$ assim, $dy = \frac{-(1-x^2)}{(1-xw)^2} dw$ observe também que

$$(1-y^2)^s = \left[1 - \left(\frac{x-w}{1-xw} \right)^2 \right]^s = \left[\frac{(1-xw)^2 - x^2 + 2xw - w^2}{(1-xw)^2} \right]^s = \frac{(1-w^2)^s (1-x^2)^s}{(1-xw)^{2s}}$$

e

$$|x-y|^{1+2s} = |w(1-xy)|^{1+2s} = |w(1-x \left(\frac{x-w}{1-xw} \right))|^{1+2s} = |w|^{1+2s} \frac{|1-x^2|^{1+2s}}{|1-xw|^{1+2s}}$$

logo

$$\frac{1}{|x-y|^{1+2s}} = \frac{(1-xw)^{1+2s}}{|w|^{1+2s} |1-x^2|^{1+2s}}$$

como $w = \frac{x-y}{1-xy}$ se $y = -1$ temos $w = 1$ e se $y = 1$ então $w = -1$. Agora usando as

observações acima obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}u(x) &= V.P. \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^s - (1-y^2)^s}{|x-y|^{1+2s}} dy \\
&= V.P. \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^s - \left[\frac{(1-w^2)^s (1-x^2)^s}{(1-xw)^{2s}} \right]}{|w|^{1+2s}} \frac{(1-xw)^{1+2s}}{(1-x^2)^{1+2s}} \frac{(1-x^2)}{(1-xw)^2} dw \\
&= V.P. \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^{-s} (1-xw)^{2s-1+2s} - (1-w^2)^s (1-x^2)^{-s} (1-xw)^{-1+2s}}{(1-xw)^{2s} |w|^{1+2s}} dw \\
&= (1-x^2)^{-s} V.P. \int_{-1}^1 \frac{(1-xw)^{2s-1} - (1-w^2)^s (1-xw)^{-1}}{|w|^{1+2s}} dw \\
&= (1-x^2)^{-s} V.P. \int_{-1}^1 \frac{1 - (1-w^2)^s + (1-xw)^{2s-1} - 1 + (1-w^2)^s [1 - (1-xw)^{-1}]}{|w|^{1+2s}} dw \\
&= (1-x^2)^{-s} V.P. \int_{-1}^1 \frac{1 - (1-w^2)^s}{|w|^{1+2s}} dw + (1-x^2)^{-s} V.P. \int_{-1}^1 \frac{(1-xw)^{2s-1} - 1}{|w|^{1+2s}} dw \\
&\quad + (1-x^2)^{-s} V.P. \int_{-1}^1 \frac{(1-w^2)^s [1 - (1-xw)^{-1}]}{|w|^{1+2s}} dw \\
&= (1-x^2)^{-s} [\mathcal{L}u(0) + J(x) + I(x)],
\end{aligned}$$

portanto

$$\mathcal{L}u(x) = (1-x^2)^{-s} [\mathcal{L}u(0) + J(x) + I(x)] \quad (2.54)$$

onde $\mathcal{L}u(0)$ é dado por (2.53) e denotamos

$$J(x) := V.P. \int_{-1}^1 \frac{(1-xw)^{2s-1} - 1}{|w|^{1+2s}} dw$$

e

$$I(x) := V.P. \int_{-1}^1 \frac{(1-w^2)^s [1 - (1-xw)^{-1}]}{|w|^{1+2s}} dw.$$

Em $J(x)$ temos que

$$\begin{aligned}
J(x) &= V.P. \left[\int_{-1}^1 \frac{(1-xw)^{2s-1}}{|w|^{1+2s}} dw - \int_{-1}^1 \frac{1}{|w|^{1+2s}} dw \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^1 \frac{(1+wx)^{2s-1} + (1-xw)^{2s-1}}{w^{1+2s}} dw - 2 \int_{\epsilon}^1 w^{-1-2s} dw \right]
\end{aligned}$$

fazendo a mudança de variáveis $t = \frac{1}{w}$ temos que $dt = \frac{-1}{w^2} dw$ além disso, $t = \epsilon$ implica $w = \frac{1}{\epsilon}$ e $t = 1$ implica $w = 1$, como $|w| = \frac{1}{|t|}$ temos que $\frac{1}{|w|^{1+2s}} = |t|^{1+2s}$ observe que

$$\begin{aligned}
-2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 w^{-1-2s} dw &= -2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{w^{-2s}}{-2s} \Big|_{\epsilon}^1 \right) \\
&= \frac{1}{s} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{-\epsilon^{-2s}}{s} \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{(1+wx)^{2s-1} + (1-xw)^{2s-1}}{w^{1+2s}} dw &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\frac{1}{\epsilon}}^1 \frac{(t+x)^{2s-1} + (t-x)^{2s-1}}{w^{1+2s}} \frac{t^{2s+1}}{-t^2} dt \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_1^{\frac{1}{\epsilon}} (t+x)^{2s-1} + (t-x)^{2s-1} dt \right]
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
J(x) &= \frac{1}{s} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{(t+x)^{2s}}{2s} \right]_1^{\frac{1}{\epsilon}} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{(t-x)^{2s}}{2s} \right]_1^{\frac{1}{\epsilon}} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{-\epsilon^{-2s}}{s} \right) \\
&= \frac{1}{s} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{(\frac{1}{\epsilon} + x)^{2s}}{2s} - \frac{(1+x)^{2s}}{2s} + \frac{(\frac{1}{\epsilon} - x)^{2s}}{2s} - \frac{(1-x)^{2s}}{2s} - \frac{-\epsilon^{-2s}}{s} \right] \\
&= \frac{1}{s} - \frac{(1+x)^{2s} + (1-x)^{2s}}{2s} + \frac{1}{2s} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(1+\epsilon x)^{2s} + (1-\epsilon x)^{2s} - 2}{\epsilon^{2s}} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{(1+x)^{2s} + (1-x)^{2s}}{2s}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$J(x) = \frac{1}{s} - \frac{(1+x)^{2s} + (1-x)^{2s}}{2s}. \quad (2.55)$$

Para calcular $I(x)$, com uma expansão de Taylor de $(1-wx)^{-1}$ em 0, temos que

$$\begin{aligned}
I(x) &= V.P. \int_{-1}^1 \frac{1 - (1-wx)^{-1}}{|w|^{1+2s}} (1-w^2)^s dw \\
&= V.P. \int_{-1}^1 \frac{-\sum_{k=1}^{\infty} (xw)^k}{|w|^{1+2s}} (1-w^2)^s dw
\end{aligned}$$

a parte ímpar da soma desaparece por simetria, e assim

$$\begin{aligned}
I(x) &= -2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{-\sum_{k=1}^{\infty} (xw)^{2k}}{w^{1+2s}} (1-w^2)^s dw \\
&= -2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} \int_{\epsilon}^1 w^{2k-2s-1} (1-w^2)^s dw.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $t = w^2$ temos $dt = 2wdw$ e integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}
I(x) &= -2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} \int_{\epsilon^2}^1 t^{k-s-\frac{1}{2}} (1-t)^s \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\
&= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} \int_{\epsilon^2}^1 t^{k-s-1} (1-t)^s dt \\
&= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} \left[-(1-\epsilon^2)^s \left(\frac{\epsilon^{2(k-s)}}{k-s} \right) + \frac{s}{k-s} \int_{\epsilon^2}^1 (1-t)^{s-1} t^{k-s} dt \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{(1-\epsilon^2)^s \epsilon^{2(k-s)}}{k-s} - \frac{s}{k-s} \int_{\epsilon^2}^1 (1-t)^{s-1} t^{k-s} dt \right]
\end{aligned}$$

para $k \geq 1$, o limite quando ϵ vai para zero do primeiro somatório é nulo, assim usando a representação da função Beta, temos que

$$\begin{aligned}
I(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} \left(\frac{-s}{k-s} \right) \int_0^1 (1-t)^{s-1} t^{k-s} dt \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} \left(\frac{-s}{k-s} \right) B(k+1-s, s).
\end{aligned}$$

Definição 2.33. *Seja q um número complexo e $k \geq 0$ um número inteiro, o símbolo de Pochhammer é definido como*

$$(q)_k = \begin{cases} 1, & \text{para } k = 0 \\ q(q+1)\dots(q+k-1), & \text{para } k > 0. \end{cases} \quad (2.56)$$

usando a definição acima e propriedades bem conhecidas das funções Beta e Gama conseguimos

$$\begin{aligned}
\frac{-s}{k-s} B(k+1-s, s) &= \frac{-s \Gamma(k+1-s) \Gamma(s)}{(k-s) \Gamma(k+1)} \\
&= \frac{-s(k-s) \Gamma(k-s) \Gamma(s)}{(k-s) k!} \\
&= \frac{-s(k-s-1) \Gamma(k-s-1) \Gamma(s)}{k!} \\
&= \frac{-s(k-s-1)(k-s-2) \Gamma(k-s-2) \Gamma(s)}{k!} \\
&= \frac{-s(k-s-1)(k-s-2)\dots(-s+1) \Gamma(-s+1) \Gamma(s)}{k! \Gamma(1)} \\
&= B(1-s, s) \frac{(-s)_k}{k!}
\end{aligned}$$

portanto,

$$I(x) = B(1-s, s) \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} \frac{(-s)_k}{k!}$$

pela definição da função hipergeométrica (ver [12]) obtemos

$$\begin{aligned} I(x) &= -B(1-s, s) + B(1-s, s) \sum_{k=1}^{\infty} (-s)_k \frac{x^{2k}}{k!} \\ &= B(1-s, s) \left[F\left(-s, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Agora por 15.1.8 em [12] temos

$$F\left(-s, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) = (1-x^2)^s$$

e portanto

$$I(x) = B(1-s, s) [(1-x^2)^s - 1]$$

substituindo (2.53), (2.55) e $I(x)$ em (2.54) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x) &= (1-x^2)^{-s} [\mathcal{L}u(0) + J(x) + I(x)] \\ &= (1-x^2)^{-s} \left\{ B(1-s, s) - \frac{1}{s} + \frac{1}{s} - \frac{(1+x)^{2s} + (1-x)^{2s}}{2s} + B(1-s, s) [(1-x^2)^s - 1] \right\} \\ &= B(1-s, s) - (1-x^2)^{-s} \frac{(1+x)^{2s} + (1-x)^{2s}}{2s}. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Agora escrevemos o laplaciano fracionário de u como

$$\begin{aligned} \frac{(-\Delta)^s u(x)}{C(1, s)} &= \mathcal{L}u(x) + \int_{-\infty}^{-1} \frac{|u(x)|}{|x-y|^{1+2s}} dy + \int_1^{\infty} \frac{|u(x)|}{|x-y|^{1+2s}} dy \\ &= \mathcal{L}u(x) + (1-x^2)^s \left[\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|x-y|^{1+2s}} dy + \int_1^{\infty} \frac{1}{|x-y|^{1+2s}} dy \right] \\ &= \mathcal{L}u(x) + (1-x^2)^s \frac{(1+x)^{-2s} + (1-x)^{-2s}}{2s} \end{aligned}$$

aplicando (2.57) temos que

$$(-\Delta)^s u(x) = C(1, s) B(1-s, s). \tag{2.58}$$

Para o caso n-dimensional, sem perda de generalidade e até rotações, consideramos $x = (0, 0, \dots, 0, x_n)$ com $x_n \geq 0$. Mudamos para coordenadas polares $x - y = th$, com

$h \in \partial B_1$ e $t \geq 0$. Temos que

$$\begin{aligned} \frac{(-\Delta)^s \mathcal{U}(x)}{C(n, s)} &= V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 - |x|^2)^s - (1 - |y|^2)^s}{|x - y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial B_1} \left[V.P. \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - |x|^2)^s - (1 - |x + ht|^2)^s}{|t|^{1+2s}} dt \right] d\mathcal{H}^{n-1}(h). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Fazendo a mudança de variável $t = -|x|h_n + \tau\sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1}$ então $dt = \sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1} d\tau$ e notando que

$$1 - |x + ht|^2 = (1 - \tau^2)(|h_n x|^2 - |x|^2 + 1)$$

então devido a (2.58) temos que

$$\begin{aligned} &V.P. \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - |x|^2)^s - (1 - |x + ht|^2)^s}{|t|^{1+2s}} dt \\ &= V.P. \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - |x|^2)^s - (1 - \tau^2)^s (|h_n x|^2 - |x|^2 + 1)^s}{|-|x|h_n + \tau\sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1}|^{1+2s}} \sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1} d\tau \\ &= V.P. \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - |x|^2)^s - (1 - \tau^2)^s (|h_n x|^2 - |x|^2 + 1)^s}{|-|x|h_n + \tau\sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1}|^{1+2s}} \frac{(\sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1})^{1+2s}}{(|h_n x|^2 - |x|^2 + 1)^s} d\tau \\ &= V.P. \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - |x|^2)^s - (1 - \tau^2)^s (|h_n x|^2 - |x|^2 + 1)^s}{\left| \frac{-|x|h_n + \tau\sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1}}{\sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1}} \right|^{1+2s}} d\tau \\ &= V.P. \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - \frac{|x|^2 h_n^2}{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1})^s - (1 - \tau^2)^s}{\left| \tau - \frac{|x|h_n}{\sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1}} \right|^{1+2s}} d\tau \\ &= \frac{(-\Delta)^s u \left(\frac{|x|h_n}{\sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1}} \right)}{C(1, s)} = B(1 - s, s). \end{aligned}$$

Agora a partir de (2.59) concluímos que

$$\frac{(-\Delta)^s \mathcal{U}(x)}{C(n, s)} = \frac{1}{2} \int_{\partial B_1} B(1 - s, s) d\mathcal{H}^{n-1}(h)$$

portanto,

$$(-\Delta)^s \mathcal{U}(x) = C(n, s) B(1 - s, s) \frac{w_n}{2}$$

isso concluí a prova da igualdade (2.52).

3 PROBLEMAS DE EXTENSÃO E APLICAÇÕES

Dedicamos este capítulo à extensão do laplaciano fracionário que trata da representação de operadores não-locais de forma equivalente à operadores locais em uma dimensão a mais. Apresentamos as duas primeiras aplicações, o modelo de ondas de água e o modelo de Peierls-Nabarro relacionados a luxações de cristal, deixando claro como o problema de extensão aparece nesses modelos. Concluimos essa parte discutindo em detalhe o problema de extensão via transformada de Fourier. A extensão harmônica do laplaciano fracionário considerada aqui é devida a Luis Caffarelli e Luis Silvestre ([5] para mais detalhes).

A ideia desse procedimento de extensão é que o operador não local $(-\Delta)^s$ atuando em funções definidas em $\mathbb{R}^n$ pode ser reduzido a um operador local, agindo sobre funções definidas no meio espaço de dimensão superior $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Definimos, $U : \mathbb{R}_+^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $U(x, 0) = u(x)$ em $\mathbb{R}^n$, é solução para a equação

$$\operatorname{div}(y^{1-2s} \nabla U(x, y)) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}$$

então, até as constantes, temos que

$$\lim_{y \rightarrow 0} (y^{1-2s} \partial_y U(x, y)) = (-\Delta)^s u(x).$$

Considere o espaço $\mathbb{R}_+^{n+1}$ dotado das coordenadas $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in (0, \infty)$. Vamos mostrar que o laplaciano com $s = \frac{1}{2}$ surge quando se procura uma função harmônica em $\mathbb{R}_+^{n+1}$ com dado em $\mathbb{R}^n \times \{y = 0\}$. Assim, consideramos o seguinte problema local

Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} \Delta U(x) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ U(x, 0) = u(x) & \text{para } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

A função U é a extensão harmônica de u , escrevemos $U = Eu$, e definimos o operador $\mathcal{L}$ como

$$\mathcal{L}u(x) := -\partial_y U(x, 0) \quad (3.1)$$

pedimos que

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\Delta_x}, \quad (3.2)$$

em outras palavras

$$\mathcal{L}^2 = -\Delta_x.$$

Com efeito, usando o fato que $E(\mathcal{L}u) = -\partial_y U$ (que pode ser provado por exemplo, usando a representação do kernel de Poisson para a solução), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2 &= \mathcal{L}(\mathcal{L}u)(x) \\ &= -\partial_y E(\mathcal{L}u)(x, 0) \\ &= -\partial_y (-\partial_y U)(x, 0) \\ &= \partial_{yy} U(x, 0) \\ &= \partial_{yy} U(x, 0) + \Delta_x U(x, 0) - \Delta_x U(x, 0) \\ &= \Delta U(x, 0) - \Delta u(x) \\ &= -\Delta u(x) \end{aligned}$$

portanto

$$\mathcal{L}^2 = -\Delta_x$$

que concluí a prova de (3.2).

Observação 3.1. Note que no cálculo acima se definirmos $\hat{\mathcal{L}}u(x) = \partial_y U(x, 0)$, o mesmo cálculo daria $\hat{\mathcal{L}}^2 = -\Delta$.

De certo modo não é surpresa que uma equação quadrática ofereça duas possíveis soluções. Mas, uma questão natural é como escolher a “certa”. Vamos discutir

uma justificativa puramente geométrica, no caso unidimensional mais simples. Nos perguntamos como é a solução do problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u(x) = 1 & \text{em } (-1, 1) \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \end{cases} \quad (3.3)$$

deve aparecer na variável estendida y . Primeiramente pelo Princípio do Máximo (Teoremas 2.25 e 2.26) temos que u é positiva quando $x \in (-1, 1)$ (já que $(-\Delta)^s u(x) = 1$, com dados zero fora). Então a extensão harmônica U em $y > 0$ de uma função u que é positiva em $(-1, 1)$ e zero fora de $(-1, 1)$ deve ter a mesma forma de uma membrana elástica sobre o semi-plano $\mathbb{R}_+^2$ que é restrito ao gráfico de u no traço $\{y = 0\}$.

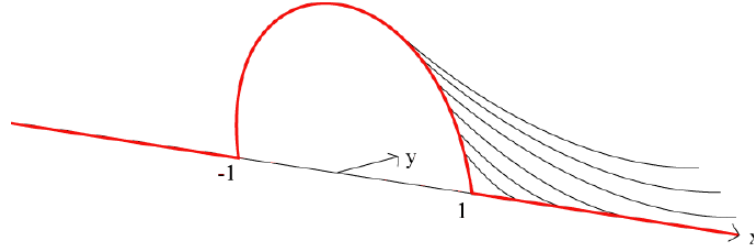


Figura 3: A extensão harmônica. (Figura obtida de [4]).

Damos uma imagem desta função U na Figura 3. Observe a partir da imagem que $\partial_y U(x, 0)$ é negativo, para qualquer $x \in (-1, 1)$. Como $(-\Delta)^s u(x)$ é positivo, deduzimos que para tomar nossa imagem consistente com o Princípio do Máximo, precisamos pegar o sinal de $\mathcal{L}$ oposto ao de $\partial_y U(x, 0)$. Isto dá uma justificativa geométrica da observação 3.1, que é baseada somente nos princípios do máximo (e em “como as funções harmônicas clássicas se parecem”).

3.1 Modelo de ondas de água

Mostramos agora que o operador $\mathcal{L}$ surge na teoria das ondas de água de fluidos irrotacionais, incompressíveis, de pequena amplitude, considerando ondas longas.

Considere uma partícula no mar, que está no espaço $\mathbb{R}^n \times (0, 1)$, onde o fundo do mar é definido no nível 1 e a superfície no nível 0 ver Figura 4. A velocidade da

partícula é $v : \mathbb{R}^n \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e escrevemos $v(x, y) = (v_x(x, y), v_y(x, y))$, onde $v_x : \mathbb{R}^n \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a componente horizontal e $v_y : \mathbb{R}^n \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ é a componente vertical. Estamos interessados na velocidade vertical da água na superfície do mar que chamamos $u(x)$, ou seja, $u(x) := v_y(x, 0)$.

Em nosso modelo, a água é incompressível, assim $\operatorname{div}(v) = 0$ em $\mathbb{R}^n \times (0, 1)$. Além disso, no fundo do mar (desde que a água não pode penetrar na areia), a velocidade tem apenas a componente horizontal não nula, portanto $v_y(x, 1) = 0$. Ademais, em nosso modelo, assumimos que não há vórtices: em um sentido matemático isso dá que v é irrotacional, assim podemos escrevê-lo como o gradiente de uma função $U : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

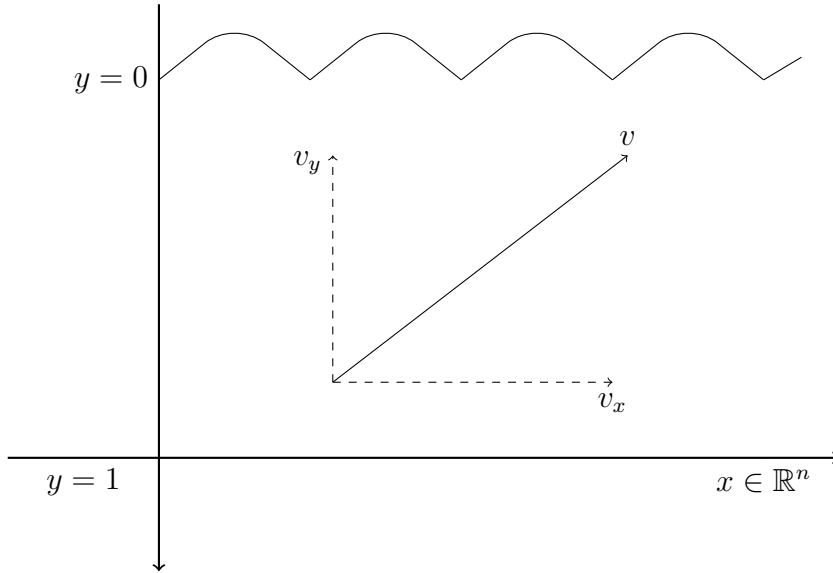


Figura 4: O modelo das ondas de água

Somos levados ao problema

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1} \\ \partial_y U(x, 1) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \\ U(x, 0) = u(x) & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.4)$$

Seja $\mathcal{L}$, como antes, o operador $\mathcal{L}u(x) = -\partial_y u(x, 0)$. Resolvemos o problema (3.4) usando a transformada de Fourier e, até um fator de normalização, obtemos

$$\mathcal{L}u = \mathcal{F}^{-1} \left(|\xi| \frac{e^{|\xi|} - e^{-|\xi|}}{e^{|\xi|} + e^{-|\xi|}} \hat{u}(\xi) \right).$$

Apresentaremos a abordagem desse problema de extensão no Teorema 3.4.

Observação 3.2. *Para frequências grandes ξ , este operador é assintótico à raiz quadrada do laplaciano.*

$$\mathcal{L}u \simeq \mathcal{F}^{-1}(|\xi|\hat{u}(\xi)) = \sqrt{-\Delta}u.$$

3.2 Modelo de Luxações de Cristal

Um cristal é um material cujos os átomos são exibidos de maneira regular. Devido a algumas impurezas no material ou a um estresse externo, alguns átomos podem se mover de suas posições de repouso. O sistema reage a pequenas modificações, empurrando de volta para o equilíbrio. No entanto, modificações ligeiramente maiores podem levar a deformações plásticas. De fato, se um deslocamento do átomo é da ordem do tamanho da periodicidade do cristal, ele pode ser perfeitamente compatível com o comportamento do material de larga escala, e pode levar a uma modificação permanente.

Deslocamentos de átomos adequadamente sobrepostos também podem produzir deformações macroscópicas do material, e as deslocações de átomos podem ser movidos por uma força externa adequada, que pode ser mais efetiva se for compatível com a estrutura periódica do cristal.

Essas considerações simples podem ser enquadradas em um cenário matemático e também tem aplicações concretas em muitas indústrias (por exemplo, na produção de uma lata de refrigerante, a fim de alterar a forma de uma folha de alumínio, é razoável acreditar que aplicar a força certa a ela pode ser mais simples e menos dispendioso do que, fundir o metal).

Também é bastante popular descrever o movimento de deslocamento do átomo em cristais em analogia com o movimento da lagarta (a grosso modo, é menos caro para a lagarta produzir um defeito no alinhamento de seu corpo e deslocar esse deslocamento, em vez de traduzir rigidamente seu corpo no chão).

O arcabouço matemático da luxação apresentada aqui está relacionado ao modelo Peierls-Nabarro, que é um modelo híbrido no qual uma deslocação discreta ocorrendo ao longo de uma linha deslizante é incorporada em um meio contínuo. A energia total no

modelo de Peierls-Nabarro combina a energia elástica do material em reação às deslocações únicas e a energia potencial de deslocamento ao longo do plano de planeio. O principal resultado é que, em um nível macroscópico, as luxações tendem a se concentrar em pontos únicos, seguindo a periodicidade natural do cristal.

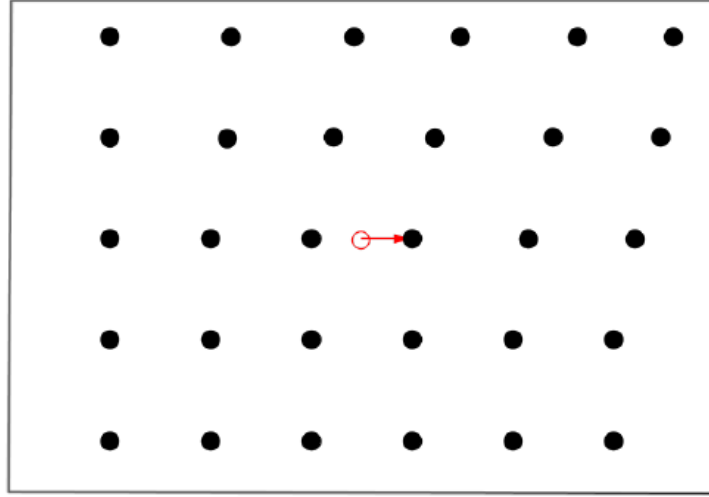


Figura 5: Deslocamento de cristal. (*Figura obtida de [4]*).

Para introduzir um arcabouço matemático para a luxação de cristal, primeiro “cortamos” o cristal com um plano. A configuração matemática será então, por argumentos de simetria, o semi-plano $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$ e a linha de deslizamento será o eixo x . Em uma estrutura cristalina os átomos são exibidos periodicamente. Nomeadamente, os átomos no eixo x tem a preferência de ocupar locais inteiros. Se os átomos saírem de suas posições de descanso devido a um desajuste, o material terá uma reação elástica, tentando restaurar a configuração cristalina. A tendência é recuar os átomos para suas posições originais, ou recriar por traduções, a configuração periódica natural. Esse efeito pode ser modelado pela definição de $v^0(x) = v(x, 0)$ é a discrepância entre a posição do átomo x e sua posição de repouso. Então, a energia de deslocamento é

$$\mathcal{M}(v^0) := \int_{\mathbb{R}} W(v^0(x)) dx, \quad (3.5)$$

onde W é o potencial periódico suave, normalizado de tal maneira que $W(u+1) = W(u)$ para qualquer $u \in \mathbb{R}$ e $0 = W(0) < W(u)$ para qualquer $u \in (0, 1)$. Também assumimos que o mínimo de W é não degenerado, ou seja, $W''(0) > 0$.

Consideramos a função de deslocamento $v(x, y)$ no semi-plano $\mathbb{R}_+^2$. A energia elástica deste modelo é dada por

$$\epsilon(v) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} |\nabla v(x, y)|^2 dx dy. \quad (3.6)$$

A energia total do sistema é, portanto,

$$\mathcal{F}(v) := \epsilon(v) + \mathcal{M}(v^0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} |\nabla v(x, y)|^2 dx dy + \int_{\mathbb{R}} W(v^0(x)) dx. \quad (3.7)$$

Ou seja, a energia total do sistema é a superposição da energia em (3.5), que tende a instalar todos os átomos em sua posição de repouso (ou em outra posição equivalente a ela do ponto de vista do cristal periódico) e a energia em (3.6), que é a energia elástica do próprio material.

Observe que algumas aproximações foram realizadas nesta construção. Por exemplo, o deslocamento do átomo altera a estrutura do próprio cristal: para escrever (3.5), estamos assumindo que os deslocamentos dos átomos individuais não destrua a periodicidade do cristal em larga escala, e é de fato essa estrutura periódica “permanente” que produz o potencial W .

Além disso, em (3.6), supomos que um deslocamento de átomos “horizontal” ao longo da linha $\{y = 0\}$ provoca um deslocamento horizontal em $\{y = \epsilon\}$ também. É claro que a realidade, se um átomo em $\{y = 0\}$ se move digamos para a direita, um átomo em nível $\{y = \epsilon\}$ é arrastado para a direita também, mas também levemente para baixo em direção a linha de deslizamento $\{y = 0\}$. Assim, em (3.6) estamos negligenciando esse deslocamento “vertical”. Essa aproximação é, no entanto, razoável, pois, por um lado, espera-se que o deslocamento vertical seja insignificante em relação ao horizontal e, por outro lado a estrutura periódica vertical do cristal tende a evitar deslocamentos verticais dos átomos fora da faixa de periodicidade (do ponto de vista matemático, notamos que levar em conta os deslocamentos verticais tornaria a função de deslocamento vetorial, o que produziria um sistema de equações, em vez de uma única equação para o sistema).

Além disso, a suposição inicial de cortar o cristal se baseia em algum grau de simplificação, pois trata-se de estudar curvas de deslocamento em espaços que são “transversais” ao plano da fatia.

De qualquer forma, tomaremos essas premissas simplificadoras (razoáveis, afinal) como garantidas, estudaremos suas consequências matemáticas e veremos como os resultados obtidos estão de acordo com a experiência física.

Para encontrar a equação de Euler-Lagrange associada a (3.7), vamos considerar uma perturbação $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ com $\varphi(x) := \phi(x, 0)$ e seja v um minimizador. Então

$$\left[\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}(v + \epsilon\phi) \right]_{\epsilon=0} = 0, \quad (3.8)$$

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}(v + \epsilon\phi) &= \frac{d}{d\epsilon} [\epsilon(v + \epsilon\phi) + \mathcal{M}(v^0 + \epsilon\phi)] \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} |\nabla(v + \epsilon\phi)|^2 dx dy + \int_{\mathbb{R}} W(v^0 + \epsilon\phi) dx \right] \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} [|\nabla v|^2 + 2\nabla v \cdot \nabla \epsilon\phi + \epsilon^2 |\nabla \phi|^2] dx dy + \int_{\mathbb{R}} W(v^0 + \epsilon\phi) dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Portanto considerando $\epsilon = 0$ por (3.8) e (3.9) temos

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \nabla v \cdot \nabla \phi dx dy + \int_{\mathbb{R}} W'(v^0) \varphi dx = 0.$$

Considere a princípio o caso em que $\text{supp } \phi \cap \partial\mathbb{R}_+^2 = \emptyset$, portanto $\varphi = 0$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \nabla v \cdot \nabla \phi dx dy = 0.$$

Pelo Teorema da Divergência (veja [10]), obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \phi \Delta v dx dy = 0 \text{ para qualquer } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),$$

assim $\Delta v = 0$ em $\mathbb{R}_+^2$. Por outro lado, se $\text{supp } \phi \cap \partial\mathbb{R}_+^2 \neq \emptyset$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \text{div}(\phi \Delta v) dx dy + \int_{\mathbb{R}} W'(v^0) \varphi dx \\ &= \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} \phi \frac{\partial v}{\partial \nu} dx + \int_{\mathbb{R}} W'(v^0) \varphi dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \varphi \frac{\partial v}{\partial y} dx + \int_{\mathbb{R}} W'(v^0) \varphi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[W'(v^0) - \frac{\partial v}{\partial y} \right] \varphi dx \end{aligned}$$

para $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ arbitrário portanto $\frac{\partial v}{\partial y}(x, 0) = W'(v^0)$ para $x \in \mathbb{R}$. Portanto os pontos críticos de $\mathcal{F}$ são soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta v(x, y) = 0 & \text{para } x \in \mathbb{R} \text{ e } y > 0, \\ v(x, 0) = v^0(x) & \text{para } x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y v(x, 0) = W'(v^0(x, 0)) & \text{para } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

e até constante de normalização, lembrando (3.1) e (3.2), temos que

$$-\sqrt{-\Delta}v(x, 0) = W'(v^0(x, 0)), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

A equação de evolução parabólica correspondente é

$$\partial_t v(x, 0) = -\sqrt{-\Delta}v(x, 0) - W'(v^0(x, 0)).$$

Após essa discussão para $s = \frac{1}{2}$, o leitor interessado poderá consultar [4] onde é considerado o caso mais geral do laplaciano fracionário $(-\Delta)^s$ para qualquer $s \in (0, 1)$.

3.3 Uma abordagem para o problema de extensão via transformada de Fourier

Discutiremos aqui o operador de extensão do laplaciano fracionário através da transformada de Fourier. Vamos considerar algumas notações. Denotamos pontos em $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ como $X = (x, y)$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $y > 0$. Ao calcular gradientes em $\mathbb{R}_+^{n+1}$, escrevemos $\nabla_X = (\nabla_x, \partial_y)$, onde ∇_x é o gradiente em $\mathbb{R}^n$. Além disso, em $\mathbb{R}_+^{n+1}$ muitas vezes tomaremos a transformada de Fourier na variável x apenas, para y fixo igual a zero. Também estabelecemos

$$a := 1 - 2s \in (-1, 1).$$

Agora, levamos em conta uma definição alternativa dos espaços $H^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ através da transformada de Fourier.

Definição 3.3. *O espaço fracionário de Sobolev $\hat{H}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto de funções $u \in S(\mathbb{R}^n)$ que satisfazem*

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + [\hat{u}]_G < \infty$$

onde

$$[v]_G := \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |v(\xi)|^2 d\xi}.$$

Para qualquer $u \in W_{loc}^{1,1}(0, \infty)$, consideramos o funcional

$$G(u) := \int_0^\infty t^a (|u(t)|^2 + |u'(t)|^2) dt. \quad (3.10)$$

Pelo Teorema 4 em [13], sabemos que o funcional G atinge seu mínimo entre todas as funções $u \in W_{loc}^{1,1}(0, \infty) \cap C^0[0, \infty)$ com $u(0) = 1$. Denotamos por g ao minimizador e

$$C_* := G(g) = \min_{\substack{u \in W_{loc}^{1,1}(0, \infty) \cap C^0[0, \infty) \\ u(0)=1}} G(u). \quad (3.11)$$

O principal resultado desta seção é o seguinte.

Teorema 3.4. *Seja $u \in S(\mathbb{R}^n)$ e seja*

$$U(x, y) := \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(\xi)g(|\xi|y)). \quad (3.12)$$

Então,

$$\operatorname{div}(y^a \nabla U) = 0 \quad (3.13)$$

para qualquer $X = (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. Além disso,

$$-y^a \partial_y U \Big|_{\{y=0\}} = C_* (-\Delta)^s u \quad (3.14)$$

em $\mathbb{R}^n$, tanto no sentido de distribuições quanto no limite pontual.

Para provar o Teorema 3.4, precisamos fazer alguns cálculos preliminares. Inicialmente, lembramos algumas propriedades úteis da função minimizadora g do funcional G introduzida em (3.10).

Sabemos pela fórmula (4.5) em [13] que

$$0 \leq g \leq 1, \quad (3.15)$$

e da fórmula (2.6) em [13] que

$$g' \leq 0 \quad (3.16)$$

também citamos a fórmula (4.3) em [13], segundo a qual g é uma solução de

$$g''(t) + at^{-1}g'(t) = g(t) \quad (3.17)$$

para todo $t > 0$ e a fórmula (4.4) em [13], segundo a qual

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^a g'(t) = -C_*. \quad (3.18)$$

Definição 3.5. Para qualquer $V \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ definimos

$$[V]_a := \sqrt{\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a |\nabla_X V(X)|^2 dX}.$$

Observe que $[U]_a$ está bem definido (possivelmente infinito) nesse espaço. Além disso, pode-se calcular $[U]_a$ explicitamente no seguinte caso:

Lema 3.6. Seja $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ e

$$U(x, y) := \mathcal{F}^{-1}(\psi(\xi)g(|\xi|y)). \quad (3.19)$$

Então

$$[U]_a^2 = C_*[\psi]_G^2. \quad (3.20)$$

Demonstração. Por (3.15) e como $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ temos que para qualquer $y > 0$ fixo, a função $\xi \mapsto \psi(\xi)g(|\xi|y)$ pertence a $L^2(\mathbb{R}^n)$ e portanto, podemos considerar sua transformada de Fourier (inversa). Isso diz que a definição de U está bem colocada.

Pela definição da transformada inversa de Fourier (2.4), temos que

$$\begin{aligned} \nabla_x U(x, y) &= \nabla_x \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi)g(|\xi|y)e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} i\xi \psi(\xi)g(|\xi|y)e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \mathcal{F}^{-1}(i\xi \psi(\xi)g(|\xi|y))(x). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Plancherel (em [16])

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x U(x, y)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi \psi(\xi)g(|\xi|y)|^2 d\xi.$$

Integrando sobre $y > 0$, e fazendo a mudança de variáveis $t = |\xi|y$ logo $dt = |\xi|dy$ temos,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a |\nabla_X U(X)|^2 dX &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\psi(\xi)|^2 \left[\int_0^\infty y^a |g(|\xi|y)|^2 dy \right] d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\psi(\xi)|^2 \left[\int_0^\infty \frac{t^a}{|\xi|^a} |g(t)|^2 \frac{dt}{|\xi|} \right] d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{1-a} |\psi(\xi)|^2 \left[\int_0^\infty t^a |g(t)|^2 dt \right] d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\psi(\xi)|^2 d\xi \int_0^\infty t^a |g(t)|^2 dt \\
&= [\psi]_G^2 \int_0^\infty t^a |g(t)|^2 dt.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Vamos agora provar que a seguinte identidade está bem posta

$$\partial_y U(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi| \psi(\xi) g'(|\xi|y)). \tag{3.22}$$

Para isso, observamos que

$$|g'(t)| \leq C_* t^{-a}. \tag{3.23}$$

Para verificar isso, definimos $\gamma(t) := t^a |g'(t)|$. Por (3.16) e (3.17), obtemos que

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= -\frac{d}{dt}(t^a g'(t)) \\
&= -at^{a-1} g'(t) - t^a g''(t) \\
&= -t^a [g''(t) + at^{-1} g'(t)] \\
&= -t^a g(t) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\gamma(t) \leq \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \gamma(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \tau^a |g'(\tau)| = C_*,$$

onde usamos (3.18) na última identidade. Assim,

$$t^a |g'(t)| = \gamma(t) \leq C_*$$

portanto,

$$|g'(t)| \leq C_* t^{-a},$$

o que prova (3.23).

De (3.23) fazendo a mudança $t = |\xi|y \log t^{-a} = |\xi|^{-a}y^{-a}$ temos que

$$|\xi||\psi(\xi)||g'(|\xi|y) \leq C_*y^{-a}|\xi|^{1-a}|\psi(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Provando assim (3.22).

Portanto, por (3.22) e pelo Teorema de Plancherel (em [16])

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_y U(x, y)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\psi(\xi)|^2 |g'(|\xi|y)|^2 d\xi.$$

Integrando sobre $y > 0$, e fazendo a mudança de variáveis $t = |\xi|y \log dt = |\xi|dy$ daí,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a |\partial_y U(x, y)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\psi(\xi)|^2 \left[\int_0^\infty y^a |g'(|\xi|y)|^2 dy \right] d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{1-a} |\psi(\xi)|^2 \left[\int_0^\infty t^a |g'(t)|^2 dt \right] d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\psi(\xi)|^2 d\xi \int_0^\infty t^a |g'(t)|^2 dt \\ &= [\psi]_G^2 \int_0^\infty t^a |g'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Somando isso com (3.21) e por (3.11), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a |\nabla_X U(x, y)|^2 dX &= [\psi]_G^2 \int_0^\infty t^a |g(t)|^2 dt + [\psi]_G^2 \int_0^\infty t^a |g'(t)|^2 dt \\ &= [\psi]_G^2 \int_0^\infty t^a [|g(t)|^2 + |g'(t)|^2] dt \\ &= C_* [\psi]_G^2 \end{aligned}$$

portanto,

$$[U]_a^2 = C_* [\psi]_G^2$$

como queríamos demonstrar. □

Agora, dado $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, consideramos o espaço X_u de todas as funções $V \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ tais que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, o mapa $y \mapsto V(x, y)$ está em $C^0([0, \infty))$, com $V(x, 0) = u(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. Então o problema de minimizar $[\cdot]_a$ sobre X_u tem uma solução explicita.

Lema 3.7. *Assuma que $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\min_{V \in X_u} [V]_a^2 = [U]_a^2 = C_* [\hat{u}]_G^2, \quad (3.24)$$

$$U(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(\xi)g(|\xi|y)). \quad (3.25)$$

Demonstração. Note que (3.25) é simplesmente (3.19) com $\psi = \hat{u}$, então pelo Lema 3.6 temos que

$$[U]_a^2 = C_*[\hat{u}]_G^2.$$

Além disso, afirmamos que

$$U \in X_u. \quad (3.26)$$

Para provar isso, primeiro observamos que

$$|g(T) - g(t)| \leq \frac{C_*|T^{2s} - t^{2s}|}{2s} \quad (3.27)$$

para provar (3.27), supomos sem perda de generalidade que $T \geq t \geq 0$. Portanto, por (3.16) e (3.23) obtemos

$$\begin{aligned} |g(T) - g(t)| &= \left| \int_t^T g'(r) dr \right| \\ &\leq \int_t^T |g'(r)| dr \\ &\leq \int_t^T C_* r^{-a} dr \\ &= \frac{C_*|T^{1-a} - t^{1-a}|}{1-a} \\ &= \frac{C_*|T^{2s} - t^{2s}|}{2s} \end{aligned}$$

isso prova (3.27).

Então, por (3.27), para qualquer $y, \tilde{y} \in (0, \infty)$, vemos que

$$|g(|\xi|y) - g(|\xi|\tilde{y})| \leq \frac{C_*|\xi|^{2s}|y^{2s} - \tilde{y}^{2s}|}{2s},$$

e

$$\begin{aligned} |U(x, y) - U(x, \tilde{y})| &= |\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(\xi)g(|\xi|y)) - \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(\xi)g(|\xi|\tilde{y}))| \\ &= |\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(\xi)(g(|\xi|y) - g(|\xi|\tilde{y})))| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)(g(|\xi|y) - g(|\xi|\tilde{y}))e^{ix \cdot \xi} d\xi \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)| |g(|\xi|y) - g(|\xi|\tilde{y})| e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &\leq \frac{C_*|y^{2s} - \tilde{y}^{2s}|}{2s} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)| d\xi, \end{aligned}$$

provando assim (3.26).

Graças a (3.26) e (3.20), para concluir a prova de (3.24), basta mostrar que, para qualquer $V \in X_u$, temos que

$$[V]_a^2 \geq [U]_a^2. \quad (3.28)$$

Para provar isso, seja $V \in X_u$. Sem perda de generalidade, desde que $[U]_a < \infty$ graças a (3.20), podemos supor que $[V]_a < \infty$. Portanto, fixando $y > 0$ em quase todo ponto, temos que

$$y^a \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x V(x, y)|^2 dx \leq y^a \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_X V(x, y)|^2 dx < \infty,$$

daí $|\nabla_x V(x, y)|^2$ pertence a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo, pelo Teorema de Plancherel (em [16])

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x V(x, y)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(\nabla_x V(x, y))(\xi)|^2 d\xi. \quad (3.29)$$

Agora, pela transformada de Fourier definida em (2.3) e aplicando o gradiente com relação a x dentro da integral obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\nabla_x V(x, y))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x V(x, y) e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} i\xi V(x, y) e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= i\xi \mathcal{F}(V(x, y))(\xi), \end{aligned}$$

daí, (3.29) torna-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x V(x, y)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\mathcal{F}(V(x, y))(\xi)|^2 d\xi. \quad (3.30)$$

Por outro lado,

$$\mathcal{F}(\partial_y V(x, y))(\xi) = \partial_y \mathcal{F}(V(x, y))(\xi)$$

e assim, pelo Teorema de Plancherel (em [16]) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_y V(x, y)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(\partial_y V(x, y))(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_y \mathcal{F}(V(x, y))(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Resumimos este último resultado com a identidade (3.30) e usamos a notação $\phi(\xi, y) := \mathcal{F}(V(x, y))(\xi)$ para concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_X V(x, y)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} [|\xi|^2 |\phi(\xi, y)|^2 + |\partial_y \phi(\xi, y)|^2] d\xi. \quad (3.31)$$

Assim, integrando sobre $y > 0$ e multiplicando por y^a , deduzimos que

$$[V]_a^2 = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a [|\xi|^2 |\phi(\xi, y)|^2 + |\partial_y \phi(\xi, y)|^2] d\xi dy. \quad (3.32)$$

Vamos primeiro considerar a integração sobre y , para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fixo, e agora omitimos da notação quando isso não gerar nenhuma confusão. Definimos $h(y) := \phi(\xi, |\xi|^{-1}y)$ então, $h'(y) = |\xi|^{-1} \partial_y \phi(\xi, |\xi|^{-1}y)$ daí, usando a mudança de variáveis $t = |\xi|y$ temos $dt = |\xi|dy$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y^a [|\xi|^2 |\phi(\xi, y)|^2 + |\partial_y \phi(\xi, y)|^2] dy &= \int_0^\infty \frac{t^a}{|\xi|^a} [|\xi|^2 |\phi(\xi, |\xi|^{-1}t)|^2 + |\partial_y \phi(\xi, |\xi|^{-1}t)|^2] \frac{dt}{|\xi|} \\ &= |\xi|^{1-a} \int_0^\infty t^a [|\phi(\xi, |\xi|^{-1}t)|^2 + |\partial_y \phi(\xi, |\xi|^{-1}t)|^2] dt \\ &= |\xi|^{1-a} \int_0^\infty t^a [|h(t)|^2 + |h'(t)|^2] dt \\ &= |\xi|^{2s} G(h). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Agora, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $w \in W_{loc}^{1,1}(0, \infty) \cap C^0[0, \infty)$ com $w(0) = \lambda$, definimos $w_\lambda(x) = \lambda^{-1}w(x)$. Portanto vemos que $w_\lambda(0) = 1$ e então $G(w) = \lambda^2 G(w_\lambda) \geq \lambda^2 G(g) = \lambda^2 C_*$, devido a minimalidade de g , isso juntamente com o fato de que

$$h(0) = \phi(\xi, 0) = \mathcal{F}(V(x, o))(\xi) = \hat{u}(\xi),$$

obtemos que

$$G(h) \geq C_* |\hat{u}(\xi)|^2.$$

Como consequência, obtemos em (3.33) que

$$\int_0^\infty y^a [|\xi|^2 |\phi(\xi, y)|^2 + |\partial_y \phi(\xi, y)|^2] dy \geq C_* |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2.$$

Integrando sobre $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a [|\xi|^2 |\phi(\xi, y)|^2 + |\partial_y \phi(\xi, y)|^2] d\xi dy &\geq C_* \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= C_* [\hat{u}]_G^2. \end{aligned}$$

Portanto, por (3.32),

$$[V]_a^2 \geq C_* [\hat{u}]_G^2,$$

que prova (3.28), e assim (3.24), fica provado. $\square$

Agora faremos a prova do Teorema 3.4.

Demonstração. Considere φ suave e com suporte compacto dentro de $\mathbb{R}_+^{n+1}$ e $\epsilon > 0$ pela propriedade minimal de (3.24) temos que $[U]_a^2 \leq [U + \epsilon\varphi]_a^2$ para qualquer φ , ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a [|\nabla_X U(X)|^2 - |\nabla_X (U + \epsilon\varphi)(X)|^2] dX \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a [-2\epsilon \nabla_X U \cdot \nabla_X \varphi - \epsilon^2 |\nabla_X \varphi(X)|^2] dX. \end{aligned}$$

Daí, dividindo por épsilon, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, usando a fórmula de integração por partes (consultar [8]) e que φ tem suporte compacto em $\mathbb{R}_+^{n+1}$, além disso, $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^{n+1})$ denota o vetor normal unitário, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq - \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a \nabla_X U \cdot \nabla_X \varphi dX \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a (\partial_{x_1} U \partial_{x_1} \varphi + \dots + \partial_{x_n} U \partial_{x_n} \varphi + \partial_y U \partial_y \varphi) dX \\ &= - \left[\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a \partial_{x_1} U \partial_{x_1} \varphi dX + \dots + \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a \partial_y U \partial_y \varphi dX \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \partial_{x_1} (y^a \partial_{x_1} U) \varphi dX - \int_{\partial \mathbb{R}_+^{n+1}} y^a \partial_{x_1} U \varphi \eta^1 dS + \dots + \\ &\quad \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \partial_y (y^a \partial_y U) \varphi dX - \int_{\partial \mathbb{R}_+^{n+1}} y^a \partial_y U \varphi \eta^{n+1} dS \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \partial_{x_1} (y^a \partial_{x_1} U) \varphi dX + \dots + \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \partial_y (y^a \partial_y U) \varphi dX \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} (\partial_{x_1}, \dots, \partial_y) (y^a \nabla_X U) \varphi dX \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \text{div} (y^a \nabla_X U) \varphi dX. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \text{div} (y^a \nabla_X U) \varphi dX \leq 0. \quad (3.34)$$

Como (3.34) vale para toda φ e $-\varphi$ também tem suporte compacto em $\mathbb{R}_+^{n+1}$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \text{div} (y^a \nabla_X U) (-\varphi) dX \leq 0.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \text{div} (y^a \nabla_X U) \varphi dX \geq 0. \quad (3.35)$$

Daí, por (3.34) e (3.35) concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \operatorname{div}(y^a \nabla_X U) \varphi dX = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1}).$$

Portanto, concluimos que

$$\operatorname{div}(y^a \nabla_X U) = 0.$$

Agora tomamos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (note que o suporte agora pode chegar a $\{y = 0\}$). Definimos $u_\epsilon := u + \epsilon\varphi$, e U_ϵ como em (3.12), substituindo $\hat{u}$ por $\hat{u}_\epsilon$ (note que (3.12) é o mesmo que (3.25)), portanto usando o Lema 3.7 e definindo

$$\varphi_*(x, y) := \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}(\xi)g(|\xi|y)).$$

Observamos que

$$\varphi_*(x, 0) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}(\xi)g(0)) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}(\xi)) = \varphi(x) \quad (3.36)$$

e

$$U_\epsilon = U + \epsilon \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}(\xi)g(|\xi|y)) = U + \epsilon \varphi_*$$

como consequência

$$\begin{aligned} [U_\epsilon]_a^2 &= [U + \epsilon \varphi_*]_a^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a |\nabla_X (U + \epsilon \varphi_*)|^2 dX \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a |\nabla_X (U)|^2 dX + 2\epsilon \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a \nabla_X U \cdot \nabla_X \varphi_* dX + \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a |\nabla_X \varphi_*|^2 dX \\ &= [U]_a^2 + 2\epsilon \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^a \nabla_X U \cdot \nabla_X \varphi_* dX + o(\epsilon). \end{aligned}$$

Portanto, usando (3.13), (3.36), a propriedade produto de um escalar e um vetor do divergente e o Teorema da Divergência temos

$$\begin{aligned} [U_\epsilon]_a^2 &= [U]_a^2 + 2\epsilon \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \operatorname{div}(\varphi_* y^a \nabla_X U) dX + o(\epsilon) \\ &= [U]_a^2 - 2\epsilon \int_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \varphi y^a \partial_y U dx + o(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Além disso, do Teorema de Plancherel, pelo Lema 2.15 e o fato da imagem de φ ser real obtemos

$$\begin{aligned}
[\hat{u}_\epsilon]_G^2 &= [\hat{u} + \epsilon\hat{\varphi}]_G^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |(\hat{u} + \epsilon\hat{\varphi})(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + 2\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)} d\xi + \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
&= [\hat{u}]_G^2 + 2\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)} d\xi + o(\epsilon) \\
&= [\hat{u}]_G^2 + 2\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} u(x) \overline{\varphi(x)} dx + o(\epsilon) \\
&= [\hat{u}]_G^2 + 2\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \hat{u}(\xi)) \varphi(x) dx + o(\epsilon) \\
&= [\hat{u}]_G^2 + 2\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s u(x) \varphi(x) dx + o(\epsilon).
\end{aligned}$$

Comparando isso com (3.37) e por (3.24), obtemos

$$\begin{aligned}
[U]_a^2 - 2\epsilon \int_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \varphi y^a \partial_y U dx + o(\epsilon) \\
&= [U_\epsilon]_a^2 \\
&= C_* [u_\epsilon]_G^2 \\
&= C_* \left([\hat{u}]_G^2 + 2\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s u(x) \varphi(x) dx + o(\epsilon) \right) \\
&= [U]_a^2 + 2C_* \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s u \varphi dx + o(\epsilon)
\end{aligned}$$

então,

$$- \int_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \varphi y^a \partial_y U dx = C_* \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s u \varphi dx,$$

para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ que é a formulação distributiva de (3.14). Além disso, em (3.12) temos que

$$\begin{aligned}
y^a \partial_y U(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}(|\xi| \hat{u}(\xi) y^a g'(|\xi|y)) \\
&= \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{1-a} \hat{u}(\xi) (|\xi|y)^a g'(|\xi|y)).
\end{aligned}$$

Portanto por (3.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow 0^+} y^a \partial_y U(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{1-a} \hat{u}(\xi) (|\xi|y)^a g'(|\xi|y)) \\
&= -C_* \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \hat{u}(\xi)) \\
&= -C_* (-\Delta)^s u(x),
\end{aligned}$$

essa é a formulação de limite pontual de (3.14). Isto conclui a prova do Teorema 3.4. $\square$

REFERÊNCIAS

- [1] ABRAMOWITZ, M. AND STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 55 For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. 1964
- [2] ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York-London, 1975.
- [3] BREZIS, H. *How to recognize constant functions. Connections with Sobolev spaces*, Uspekhi Mat. Nauk 57 (2002), no. 4 (346), 59-74; translation in Russian Math. Surveys 57 (2002), no. 4, 693-708.
- [4] BUCUR, C. AND VALDINOCI, E. *Nonlocal diffusion and applications*, accepted for Publication for the Springer Series Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, preprint arXiv:1504.08292, 2015.
- [5] CAFFARELLI, L. AND SILVESTRE, L. *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations, 32(7-9):1245-1260, 2007.
- [6] CRANK, J. *The Mathematics of Diffusion*, Oxford University Press, Second Edition, 1975.
- [7] EVANS, LAWRENCE C., “ *An introduction to stochastic differential equations*”, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

- [8] EVANS, LAWRENCE C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [9] FOLLAND, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, A Wiley-Interscience Publication, Second Edition, 1999.
- [10] GILBARG, D. AND TRUDINGER, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1998.
- [11] NEZZA, E. D. PALATUCCI, G. AND VALDINOCI, E. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math., 136(5): 521-573, 2012.
- [12] OBERHETTINGER, F. *Tabellen zur Fourier Transformation*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957.
- [13] SERVADEI, R. AND VALDINOCI, E. *On the spectrum of two different fractional operators*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 144(4):831-855, 2014.
- [14] STEIN, E. M. AND SHAKARCHI R. *Complex Analysis*, Princeton Lectures in Analysis, 2. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.
- [15] VAZQUEZ, J. L. *The mathematical theories of diffusion. Nonlinear and fractional diffusion*, Nonlocal and nonlinear diffusions and interactions: new methods and directions, 205-278, Lecture Notes in Math., 2186, Springer, Cham, 2017.
- [16] YOSIDA, K. *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1980.

APÊNDICE A - ESPAÇOS DE SOBOLEV

Neste apêndice apresentemos alguns resultados dos espaços de Sobolev. Começamos introduzindo as definições e alguns dos principais resultados das derivadas fracas, definimos os espaços de Sobolev e provamos que é um espaço de Banach. Prosseguimos com resultados das funções regularizantes com teoremas de aproximação por funções suaves e concluímos com um teorema de extensão.

A.1 Espaços de Sobolev

Estabeleceremos agora algumas noções do que são espaços de Sobolev bem como a demonstração do teorema de extensão, para mais detalhes o leitor poderá consultar a referência [8].

Definição A.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $C_c^\infty(U)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto em U , ϕ é chamada função teste.*

Agora daremos uma motivação para a definição de derivada fraca. Dada uma função $u \in C^1(U)$. Então se $\phi \in C_c^\infty(U)$ temos pela formula de integração por partes que

$$\int_U u \phi_{x_i} dx = - \int_U u_{x_i} \phi dx \quad (i = 1, \dots, n)$$

pois, ϕ tem suporte compacto em U . Mais geralmente, se k é um inteiro positivo $u \in C^\infty(U)$, e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$, então

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u \phi dx$$

onde $D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \phi$.

Definição A.2. Considere $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $1 \leq p < \infty$. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função mensurável e para qualquer compacto $K \subset U$ temos $\int_K |f(x)|^p dx < \infty$, dizemos que $f \in L^1_{loc}(U)$.

No restante da seção consideramos $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, salvo quando mencionarmos o contrário.

Definição A.3. Suponha $u, v \in L^1_{loc}(U)$, e α um multi-índice. Dizemos que v é α^{th} -derivada parcial fraca de u , escrevemos

$$D^\alpha u = v, \text{ daí temos}$$

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u \phi dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U).$$

Lema A.4. Uma α^{th} -derivada fraca de u se existe, é unicamente definida sobre um conjunto de medida nula.

Demonstração. Sejam $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(U)$ satisfazendo:

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \tilde{v} \phi dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$. Então,

$$\int_U (v - \tilde{v}) \phi dx = 0 \text{ para toda } \phi \in C_c^\infty(U).$$

Portanto, $v - \tilde{v} = 0$ em quase todo ponto. □

Exemplo A.5. Sejam $n = 1$, $U = (0, 2)$, e

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Defina

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Mostre que $u' = v$ no sentido fraco.

Demonstração. Seja $\phi \in C_c^\infty(U)$, devemos mostrar que

$$\int_0^2 u\phi' dx = - \int_0^2 v\phi dx.$$

Usando integração por partes, a definição de u , o Teorema Fundamental do Cálculo e o fato de $\phi \in C_c^\infty(U)$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^2 u\phi' dx &= \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx \\ &= \phi(1) - 0 - \int_0^1 \phi dx + 0 - \phi(1) \\ &= - \int_0^1 \phi dx \\ &= - \int_0^2 v\phi dx. \end{aligned}$$

□

Definição A.6. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(U)$ ($1 \leq p \leq \infty$, k inteiro não negativo) consiste de todas as funções localmente integráveis $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(U)$. Ou seja,

$$W^{k,p}(U) = \{u \in L^p(U) : D^\alpha u \in L^p(U) \text{ para todo } 0 \leq |\alpha| \leq k\}.$$

Definição A.7. Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial com produto interno que também é um espaço de Banach com a norma canônica definida pelo produto interno: $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Observação A.8. Se $p = 2$, geralmente escrevemos

$$H^k(U) = W^{k,2}(U) \text{ para } (k = 0, 1, \dots).$$

A letra H é usada, pois, $H^k(U)$ é um espaço de Hilbert.

Definição A.9. Se $u \in W^{k,p}(U)$, definimos a norma

$$||u||_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_U |D^\alpha u| & p = \infty. \end{cases}$$

onde o ess sup_U é o supremo essencial definido como a menor cota superior essencial (isto é, se $u(x) \leq a$ para quase todo $x \in U$).

Definição A.10. *Seja $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ uma sequência de funções e $u \in W^{k,p}(U)$. Dizemos que u_m converge para u em $W^{k,p}(U)$ e escrevemos*

$$u_m \rightarrow u \text{ em } W^{k,p}(U)$$

se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0.$$

Observação A.11. *Denotamos por $W_0^{k,p}(U)$ o fecho de $C_c^\infty(U)$ em $W^{k,p}(U)$, isto é, $u \in W_0^{k,p}(U)$ se, e somente se, existe $u_m \in C_c^\infty(U)$ tal que $u_m \rightarrow u$ em $W^{k,p}(U)$.*

A seguir verificamos algumas propriedades das derivadas fracas.

Teorema A.12. *Assuma que $u, v \in W^{k,p}(U)$, $|\alpha| \leq k$, então*

- (i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ e $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ para todo multi-índice α, β com $|\alpha| + |\beta| \leq k$.
- (ii) Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ e $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leq k$.
- (iii) Se $\psi \in C_c^\infty(U)$, então $\psi u \in W^{k,p}(U)$ e

$$D^\alpha(\psi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi D^{\alpha-\beta} u \text{ (fórmula de Leibiniz)} \quad (\text{A.1})$$

onde $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Demonstração. (i) Fixando $\phi \in C_c^\infty(U)$ então $D^\beta \phi \in C_c^\infty(U)$ assim, usando a definição de derivada fraca temos

$$\begin{aligned} \int_U D^\alpha u D^\beta \phi dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_U u D^{\alpha+\beta} \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \phi dx \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \phi dx. \end{aligned}$$

Portanto, $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}u$ no sentido fraco.

(ii) Dada qualquer $\phi \in C_c^\infty(U)$. Então

$$\begin{aligned}
 \int_U D^\alpha(\lambda u + \mu v)\phi dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_U (\lambda u + \mu v) D^\alpha \phi dx \\
 &= (-1)^{|\alpha|} \int_U (\lambda u D^\alpha + \mu v D^\alpha) \phi dx \\
 &= (-1)^{|\alpha|} \int_U \lambda u D^\alpha \phi dx + (-1)^{|\alpha|} \int_U \mu v D^\alpha \phi dx \\
 &= \int_U \lambda D^\alpha u \phi dx + \int_U \mu D^\alpha v \phi dx \\
 &= \int_U (\lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v) \phi dx.
 \end{aligned}$$

Portanto, $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.

(iii) Faremos a prova por indução sobre $|\alpha|$. Suponha primeiro $|\alpha| = 1$. Para qualquer $\phi \in C_c^\infty(U)$, aplicando a definição de derivada fraca temos

$$\begin{aligned}
 \int_U \psi u D^\alpha \phi dx &= \int_U u(\psi D^\alpha \phi) dx \\
 &= \int_U u[D^\alpha(\psi \phi) - \phi(D^\alpha \psi)] dx \\
 &= \int_U u D^\alpha(\psi \phi) dx - \int_U u \phi(D^\alpha \psi) dx \\
 &= (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u \psi \phi dx - \int_U u \phi(D^\alpha \psi) dx \\
 &= (-1)^{|\alpha|} \int_U [\psi D^\alpha u + u D^\alpha \psi] \phi dx
 \end{aligned}$$

logo, $D^\alpha(\psi u) = \psi D^\alpha u + u D^\alpha \psi$.

Agora assumamos que $l < k$ e que a fórmula (A.1) é válida para qualquer $|\alpha| \leq l$ e qualquer função $\psi \in C_c^\infty(U)$. Escolha um multi-índice α com $|\alpha| = l + 1$. Então $\alpha = \beta + \gamma$ para algum $|\beta| = l$ e $|\gamma| = 1$. Então para $\phi \in C_c^\infty(U)$ usando a definição de derivada fraca e a

hipótese de indução temos que

$$\begin{aligned}
\int_U \psi u D^\alpha \phi dx &= \int_U \psi u D^\beta (D^\gamma \phi) dx \\
&= (-1)^{|\beta|} \int_U \left[\sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \psi D^{\beta-\sigma} u \right] D^\gamma \phi dx \\
&= (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_U \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma (D^\sigma \psi D^{\beta-\sigma} u) \phi dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_U \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} [D^{\sigma+\gamma} \psi D^{\beta-\sigma} u + D^\sigma \psi D^{\beta-\sigma+\gamma} u] \phi dx.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Chamando $\rho = \sigma + \gamma$ de modo que $\beta - \sigma = \beta + \gamma - (\sigma + \gamma) = \alpha - \rho$, escrevemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} [D^{\sigma+\gamma} \psi D^{\beta-\sigma} u + D^\sigma \psi D^{\beta-\sigma+\gamma} u] \\
&= \sum_{\rho \leq \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \psi D^{\alpha-\rho} u + \sum_{\rho \leq \alpha-\gamma} \binom{\alpha-\gamma}{\rho} D^\rho \psi D^{\alpha-\rho} u
\end{aligned}$$

usando a identidade

$$\binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} + \binom{\alpha-\gamma}{\rho} = \binom{\alpha}{\rho},$$

obtemos em (A.2)

$$\int_U \psi u D^\alpha \phi dx = \int_U \left[\sum_{\rho \leq \alpha} \binom{\alpha}{\rho} D^\rho \psi D^{\alpha-\rho} u \right] \phi dx.$$

□

Teorema A.13. Para cada $k = 1, 2, \dots$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev $W^{k,p}(U)$ é espaço de Banach.

Demonstração. Vamos mostrar que $\|u\|_{W^{k,p}(U)}$ é uma norma. Note que

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(U)} = \lambda \|u\|_{W^{k,p}(U)}$$

e

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \text{ se, e somente se, } u = 0 \text{ em quase todo ponto}$$

são imediatas pela definição. Agora para qualquer $u, v \in W^{k,p}(U)$, se $1 \leq p < \infty$ aplicando a desigualdade de Minkowski temos

$$\begin{aligned}
\|u + v\|_{W^{k,p}(U)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_{L^p(U)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(U)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)}.
\end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que $W^{k,p}(U)$ é completo. Dada $\{u_m\}$ sequência de Cauchy em $W^{k,p}(U)$. Então para cada $|\alpha| \leq k$, $\{D^\alpha u_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(U)$. Como $L^p(U)$ é completo, existe $u_\alpha \in L^p(U)$ tal que

$$D^\alpha u_m \rightarrow u_\alpha \text{ em } L^p(U) \text{ para } |\alpha| \leq k.$$

Em particular,

$$u_m \rightarrow u \text{ em } L^p(U).$$

Agora seja $u \in W^{k,p}(U)$, vamos provar que $D^\alpha u = u_\alpha$ para $(|\alpha| \leq k)$. Fixando $\phi \in C_c^\infty(U)$, então

$$\begin{aligned}
\int_U u D^\alpha \phi dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_U u_m D^\alpha \phi dx \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u_m \phi dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_U u_\alpha \phi dx.
\end{aligned}$$

Portanto, $D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$ em $L^p(U)$ para $|\alpha| \leq k$, logo, $u_m \rightarrow u$ em $W^{k,p}(U)$. $\square$

A.1.1 Convolução e suavização

A seguir, apresentamos ferramentas que nos permitem construir aproximações suaves para determinadas funções.

Notação: Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $\epsilon > 0$, defina

$$U_\epsilon := \{x \in U : \text{dis}(x, \partial U) > \epsilon\}.$$

Definição A.14. (i) Defina $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por

$$\eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

a constante $C > 0$ é selecionada para que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$.

(ii) Para cada $\epsilon > 0$, defina

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Chamamos η de função regularizante padrão. As funções η_ϵ são $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e satisfazem $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x) dx = 1$, $\text{supp}(\eta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$.

Definição A.15. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável, definimos sua regularização

$$f^\epsilon := \eta_\epsilon * f \text{ em } U_\epsilon.$$

Isto é,

$$f^\epsilon(x) = \int_U \eta_\epsilon(x-y) f(y) dy = \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(y) f(x-y) dy$$

para $x \in U_\epsilon$.

No teorema abaixo apresentamos algumas propriedades das funções regularizantes.

Teorema A.16. As seguintes afirmações são satisfeitas:

- (i) $f^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$.
- (ii) $f^\epsilon \rightarrow f$ em quase todo ponto com $\epsilon \rightarrow 0$.
- (iii) Se $f \in C(U)$, então $f^\epsilon \rightarrow f$ uniformemente em subconjuntos compactos de U .
- (iv) Se $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p_{loc}(U)$, então $f^\epsilon \rightarrow f$ em $L^p_{loc}(U)$.

Demonstração. (i) Fixe $x \in U_\epsilon$, $i \in \{1, \dots, n\}$ e h suficientemente pequeno tal que $x + he_i \in U_\epsilon$. Então para algum conjunto aberto $V \subset\subset U$ temos

$$\begin{aligned} \frac{f^\epsilon(x + he_i) - f^\epsilon(x)}{h} &= \frac{1}{h} \int_U \eta_\epsilon(x + he_i - y) f(y) dy - \frac{1}{h} \int_U \eta_\epsilon(x - y) f(y) dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_U \frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) \right] f(y) dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_V \frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) \right] f(y) dy. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) \right] \rightarrow \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right)$$

uniformemente em V , $\frac{\partial f^\epsilon}{\partial x_i}(x)$ existe e é igual a

$$\int_U \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_i}(x - y) f(y) dy.$$

Um argumento semelhante mostra que $D^\alpha f^\epsilon(x)$ existe e

$$D^\alpha f^\epsilon(x) = \int_U D^\alpha \eta_\epsilon(x - y) f(y) dy \quad (x \in U_\epsilon)$$

para cada multi-índice α . Isso prova (i).

(ii) De acordo com o teorema da Diferenciação de Lebesgue,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \text{ em quase todo ponto } x \in U. \quad (\text{A.3})$$

Fixe um ponto x . Então por (A.3) obtemos

$$\begin{aligned} |f^\epsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x - y) f(y) dy - \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x - y) f(x) dy \right| \\ &= \left| \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x - y) [f(y) - f(x)] dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} \eta\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) |f(y) - f(x)| dy \\ &\leq C \int_{B_\epsilon(x)} |f(y) - f(x)| dy \rightarrow 0 \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

provando assim a afirmação (ii).

(iii) Suponha que $f \in C(U)$. Dado $V \subset\subset U$ escolhemos $V \subset\subset W \subset\subset U$ como W é compacto f é uniformemente contínua em W . Portanto o limite em (A.3) é uniforme para $x \in V$. Consequentemente o cálculo acima implica $f^\epsilon \rightarrow f$ uniformemente em V .

(iv) Agora, suponha $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p_{loc}(U)$. Escolha um conjunto aberto $V \subset\subset U$, como acima um conjunto aberto W tal que $V \subset\subset W \subset\subset U$. Afirmamos que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$\|f^\epsilon\|_{L^p(V)} \leq \|f\|_{L^p(W)}. \quad (\text{A.4})$$

Para ver isso, observe que se $1 < p < \infty$ e $x \in V$, pela desigualdade de Hölder

temos

$$\begin{aligned}
|f^\epsilon| &= \left| \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y) f(y) dy \right| \\
&\leq \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y) \eta_\epsilon^{\frac{1}{p}}(x-y) |f(y)| dy \\
&\leq \left(\int_{B_\epsilon(x)} |\eta_\epsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y)|^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y) |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

uma vez que $\int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y) dx = 1$, elevando a p , integrando sobre V e usando o Teorema de Fubini a desigualdade acima implica

$$\begin{aligned}
\int_V |f^\epsilon|^p dx &\leq \int_V \left(\int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y) |f(y)|^p dy \right) dx \\
&\leq \int_W |f(y)|^p \left(\int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y) dx \right) dy \\
&= \int_W |f(y)|^p dy,
\end{aligned}$$

desde que $\epsilon > 0$ seja suficientemente pequeno esta é a desigualdade (A.4).

Agora fixe $V \subset\subset W \subset\subset U$, $\delta > 0$, e escolha $g \in C(W)$ de modo que

$$\|f - g\|_{L^p(W)} < \delta.$$

Então por (iii) e (A.4) obtemos

$$\begin{aligned}
\|f^\epsilon - f\|_{L^p(V)} &= \|f^\epsilon - g^\epsilon + g^\epsilon - g + g - f\|_{L^p(V)} \\
&\leq \|f^\epsilon - g^\epsilon\|_{L^p(V)} + \|g^\epsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g - f\|_{L^p(V)} \\
&\leq 2\|g - f\|_{L^p(W)} + \|g^\epsilon - g\|_{L^p(V)} \\
&\leq 2\delta + \|g^\epsilon - g\|_{L^p(V)}
\end{aligned}$$

uma vez que $g^\epsilon \rightarrow g$ uniformemente em V , temos $\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \|f^\epsilon - f\|_{L^p(V)} \leq 2\delta$. $\square$

A.1.2 Aproximação interior por funções suaves

Fixe um número inteiro positivo k e $1 \leq p < \infty$. Lembre-se de que $U_\epsilon := \{x \in U : \text{dis}(x, \partial U) > \epsilon\}$.

Teorema A.17. *Suponha $u \in W^{k,p}(U)$ para algum $1 \leq p < \infty$ então $u^\epsilon \rightarrow u$ em $W_{loc}^{k,p}(U)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$*

Demonstração. Inicialmente pedimos que se $|\alpha| \leq k$, então

$$D^\alpha u^\epsilon = \eta_\epsilon * D^\alpha u \text{ em } U_\epsilon \quad (\text{A.5})$$

isto é, a derivada α^{th} -parcial ordinária da função suave u^ϵ e a ϵ -regularização da α^{th} -derivada fraca de u . Para confirmar isso, calculamos para $x \in U_\epsilon$

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\epsilon &= D^\alpha \int_U \eta_\epsilon(x-y)u(y)dy \\ &= \int_U D_x^\alpha \eta_\epsilon(x-y)u(y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_U D_y^\alpha \eta_\epsilon(x-y)u(y)dy. \end{aligned}$$

Agora, para $x \in U_\epsilon$ fixo a função $\phi(y) := \eta_\epsilon(x-y)$ pertence a $C_c^\infty(U)$. consequentemente pela definição α^{th} -derivada fraca obtemos

$$\int_U D_y^\alpha \eta_\epsilon(x-y)u(y)dy = (-1)^{|\alpha|} \int_U \eta_\epsilon(x-y)D^\alpha u(y)dy$$

portanto,

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\epsilon &= (-1)^{|\alpha|+|\alpha|} \int_U \eta_\epsilon(x-y)D^\alpha u(y)dy \\ &= [\eta_\epsilon * D^\alpha u](x). \end{aligned}$$

isso prova (A.5). Seja agora um conjunto aberto $V \subset\subset U$. Por (A.5) e pelo Teorema A.16 temos $D^\alpha u^\epsilon \rightarrow D^\alpha u$ em $L^p(V)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, para cada $|\alpha| \leq k$. Consequentemente

$$\|u^\epsilon - u\|_{W^{k,p}(V)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u^\epsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}^p \rightarrow 0$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$. □

A.1.3 Aproximação por funções suaves

A seguir, mostramos que podemos encontrar funções suaves que se aproximam em $W^{k,p}(U)$ e não apenas em $W_{loc}^{k,p}(U)$. Note que não fazemos suposições sobre a suavidade da ∂U .

Teorema A.18. (*Aproximação global por funções suaves*) *Suponha que U seja limitado e que $u \in W^{k,p}(U)$ para $1 \leq p < \infty$. Então existem funções $u_m \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ tais que*

$$u_m \rightarrow u \text{ em } W^{k,p}(U).$$

Demonstração. Temos $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, onde

$$U_i = \left\{ x \in U : \text{dis}(x, \partial U) > \frac{1}{i} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

escreva $V_i = U_{i+3} - \overline{U}_{i+1}$. Escolha também qualquer conjunto $V_0 \subset\subset U$ tal que $U = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$. Agora seja $\{\psi_i\}_{i=0}^{\infty}$ uma partição suave da unidade subordinada aos conjuntos abertos $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$ isto é,

$$\begin{cases} 0 \leq \psi_i \leq 1, \psi_i \leq C_c^{\infty}(V_i) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i = 1 \text{ em } U. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Em seguida, escolha qualquer função $u \in W^{k,p}(U)$. De acordo com o Teorema A.12 $\psi_i u \in W^{k,p}(U)$ e $\text{supp}(\psi_i u) \subset V_i$. Agora fixe $\delta > 0$. Escolha então $\epsilon_i > 0$ tão pequeno que $u^i := \eta_{\epsilon_i} * (\psi_i u)$ satisfaça

$$\begin{cases} \|u^i - \psi_i u\|_{W^{k,p}(U)} \leq \frac{\delta}{2^{i+1}} \quad (i = 0, 1, \dots) \\ \text{supp}(u^i) \subset W_i \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

para $W_i := U_{i+4} - \overline{U}_i \supset V_i$ ($i = 1, 2, \dots$). Escreva $v := \sum_{i=0}^{\infty} u^i$. Esta função pertence a $C^{\infty}(U)$, pois para cada conjunto aberto $V \subset\subset U$ existe no máximo uma quantidade finita de termos diferentes de zero na soma. Como $u = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i u$, temos para cada $V \subset\subset U$

$$\begin{aligned} \|v - u\|_{W^{k,p}(V)} &= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} u^i - \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i u \right\|_{W^{k,p}(U)} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|u^i - \psi_i u\|_{W^{k,p}(U)} \\ &\leq \delta \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Tome o supremo sobre os conjuntos $V \subset\subset U$ para concluir $\|v - u\|_{W^{k,p}(U)} \leq \delta$. □

A.1.4 Aproximação global por funções suaves

Perguntamos agora quando quando é possível aproximar uma determinada função $u \in W^{k,p}(U)$ por funções pertencentes a $C^{\infty}(\overline{U})$, e não apenas $C^{\infty}(U)$. Tal aproximação requer alguma consideração sobre a fronteira de U .

Teorema A.19. (*Aproximação global por funções suaves até a fronteira*). Suponha que U seja limitado e ∂U seja C^1 . Seja $u \in W^{k,p}(U)$ para algum $1 \leq p < \infty$. Então existem funções $u_m \in C^\infty(\bar{U})$ tais que

$$u_m \rightarrow u \text{ em } W^{k,p}(U).$$

Demonstração. Fixe qualquer ponto $x_0 \in \partial U$. Como a ∂U é C^1 , existe um raio $r > 0$ e uma função C^1 $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, renomeando os eixos coordenados, se necessário, tenhamos

$$U \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) : x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Considere o conjunto $V := U \cap B_{\frac{r}{2}}(x_0)$. Defina o ponto $x^\epsilon := x + \lambda \epsilon e_n$ para $x \in V, \epsilon > 0$ e observe que, para algum número fixo $\lambda > 0$ a bola $B_r(x^\epsilon)$ está contida em $U \cap B_r(x_0)$ para todo $x \in V$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Agora defina $u_\epsilon(x) = u(x^\epsilon)$ para $x \in V$ esta é a função u feita uma translação $\lambda \epsilon$ na direção de e_n . Em seguida escreva $v^\epsilon = \eta_\epsilon * u_\epsilon$. A ideia é que nos movemos o suficiente para que “haja espaço para se suavizar dentro de U ”, claramente $v^\epsilon \in C^\infty(\bar{V})$. Agora pedimos que

$$v^\epsilon \rightarrow u \text{ em } W^{k,p}(U). \quad (\text{A.8})$$

Para mostrar isso, considere α o multi-índice com $|\alpha| \leq k$. Então

$$\|D^\alpha v^\epsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \leq \|D^\alpha v^\epsilon - D^\alpha u_\epsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\epsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}.$$

O segundo termo do lado direito vai para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$, uma vez que a translação é contínua na norma L^p e o primeiro termo também vai para zero no limite, por raciocínio semelhante do Teorema A.17. Selecione $\delta > 0$. Como a ∂U é compacta, podemos encontrar uma quantidade finita de pontos $x_0^i \in \partial U$, raios $r_i > 0$, conjuntos correspondentes $V_i = U \cap B_{\frac{r_i}{2}}(x_0^i)$ e funções $v_i \in C^\infty(\bar{V}_i)$ para $i = 1, \dots, N$ tais que $\partial U \subset \bigcup_{i=1}^N B_{\frac{r_i}{2}}(x_0^i)$ e

$$\|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \leq \delta. \quad (\text{A.9})$$

Tome um conjunto aberto $V_0 \subset\subset U$ de modo que $U \subset \bigcup_{i=1}^N V_i$ selecione, usando o Teorema A.17, uma função $v_0 \in C^\infty(\bar{V}_0)$ que satisfaça

$$\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} \leq \delta. \quad (\text{A.10})$$

Agora seja $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ uma partição da unidade subordinada aos conjuntos abertos $\{V_i\}_{i=1}^N$ em U . Defina $v := \sum_{i=1}^N \psi_i u$, usando o Teorema A.12 temos por (A.9) e (A.10) que para cada $|\alpha| \leq k$

$$\begin{aligned} \|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(U)} &\leq \sum_{i=1}^N \|D^\alpha(\psi_i v_i) - D^\alpha(\psi_i u)\|_{L^p(V_i)} \\ &\leq C \sum_{i=1}^N \|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \\ &\leq CN\delta. \end{aligned}$$

□

A.1.5 Extensões

Nosso objetivo a seguir é estender funções no espaço de Sobolev $W^{1,p}(U)$ para se tornarem funções no espaço de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, onde $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema A.20. (*Teorema de extensão*). *Assuma que U é limitado e ∂U é C^1 . Selecione um conjunto aberto limitado tal que $U \subset\subset V$. Então existe um operador linear limitado*

$$E : W^{1,p}(U) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \quad (\text{A.11})$$

tal que para cada $u \in W^{1,p}(U)$:

- (i) *$Eu = u$ em quase todo ponto em U .*
- (ii) *Eu tem suporte dentro de V .*
- (iii) *$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$, a constante C dependendo apenas de p , U e V .*

Demonstração. Passo 1. Fixe $x^0 \in \partial U$ e suponha primeiro que a ∂U é plano perto de x^0 , situada no plano $\{x_n = 0\}$. Então podemos assumir que existe uma bola aberta B , com centro x^0 e raio r , tal que

$$\begin{cases} B^+ = B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \overline{U} \\ B^- = B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n - U. \end{cases}$$

Passo 2. Suponha temporariamente também que $u \in C^\infty(\overline{U})$, nós definimos então

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in B^+ \\ -3u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}) & \text{se } x \in B^-. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Isso é chamado de reflexão de ordem superior de u de B^+ a B^- .

Passo 3. Nós pedimos que

$$\bar{u} \in C^1(B). \quad (\text{A.13})$$

Para verificar isso, vamos escrever $u^-|_{B^-}$, $u^+|_{B^+}$. Demonstraremos primeiro

$$u_{x_n}^- = u_{x_n}^+ \text{ em } \{x_n = 0\}. \quad (\text{A.14})$$

De fato, de acordo com (A.12)

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n}(x) = 3 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - 2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{-x_n}{2})$$

logo,

$$\begin{aligned} u_{x_n}^-|_{\{x_n=0\}} &= 3 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) - 2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \\ &= u_{x_n}^+|_{\{x_n=0\}}. \end{aligned}$$

isso prova (A.14). Agora desde que $u^+ = u^-$ em $\{x_n = 0\}$, vemos também que

$$u_{x_i}^-|_{\{x_n=0\}} = u_{x_i}^+|_{\{x_n=0\}} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (\text{A.15})$$

Então (A.14) e (A.15) implicam

$$D^\alpha u^-|_{\{x_n=0\}} = D^\alpha u^+|_{\{x_n=0\}}$$

para cada $|\alpha| \leq 1$ o que prova (A.13).

Passo 4. Vamos verificar que

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(B^+)}$$

para alguma constante C que não depende de u . Primeiramente observe que

$$|u(x) - u(y)|^p \leq (|u(x)| + |u(y)|)^p \leq (2|u(x)|^p)^p \leq 2^p(|u(x)|^p) \leq 2^p(|u(x)|^p + |u(y)|^p).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
& \int_{B^+} |u_{x_i}(x)|^p dx + \int_{B^-} \left| 3 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - 2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}) \right|^p dx \\
& \leq \int_{B^+} |u_{x_i}(x)|^p dx + 2^p \int_{B^-} \left| 3 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) \right|^p + \left| -2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}) \right|^p dx \\
& = \int_{B^+} |u_{x_i}|^p dx + 3^p 2^p \int_{B^+} |u_{x_i}|^p dx + 2^p 2^p \int_{B^+} |u_{x_i}|^p dx \\
& = (1 + 3^p 2^p + 2^{2p}) \int_{B^+} |u_{x_i}|^p dx \\
& = C \int_{B^+} |u_{x_i}|^p dx.
\end{aligned}$$

Portanto concluímos que

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(B^+)}.$$

Passo 5. Vamos considerar a situação que a ∂U não seja necessariamente plana perto de x^0 . Então, utilizando a notação e terminologia a partir do apêndice C em [8], podemos encontrar ϕ um mapa C^1 , com inversa ψ tal que ϕ “achata a ∂U perto de x^0 ” (ver Figura 6). Escrevemos $y = \phi(x)$, $x = \psi(y)$, $u_*(y) = u(\psi(y))$. Escolha uma pequena bola B como

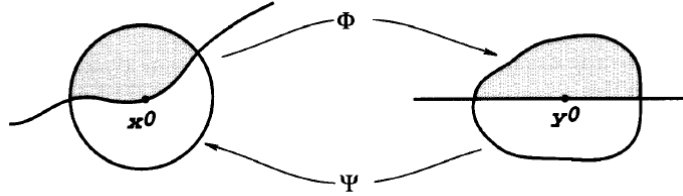


Figura 6: Achatando a fronteira. (*Figura obtida de [8]*).

desenhado antes. Em seguida, utilizando passos de 1 a 3 acima estendemos u_* de B^+ para uma função $\bar{u}_*$ definida em toda a bola B , tal que $\bar{u}_*$ é $C^1(B)$ e temos a estimativa

$$\|\bar{u}_*\|_{W^{1,p}(B)} \leq \|u_*\|_{W^{1,p}(B^+)}.$$

Seja $W = \psi(B)$. Em seguida convertendo de volta para variável x , obtemos uma extensão $\bar{u}$ de u para W , com

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(U)}. \quad (\text{A.16})$$

Passo 6. Uma vez que ∂U é compacta, existe uma quantidade finita de pontos $x_i^0 \in \partial U$, conjuntos abertos W_i e extensões $\bar{u}_i$ de u para W_i ($i = 1, 2, \dots, N$) como acima, de modo que $\partial U \subset \bigcup_{i=1}^N W_i$. Pegue $W_0 \subset\subset U$ de modo que $U \subset \bigcup_{i=0}^N W_i$ e seja $\{f_i\}_{i=1}^N$ uma partição da unidade associada. Escreva $\bar{u} := \sum_{i=1}^N f_i \bar{u}_i$, onde $u_0 = u$. Então utilize a estimativa em (A.16) e obtemos o limite

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(U)} \quad (\text{A.17})$$

para alguma constante C , dependendo de U, p, n , mas não de u . Além disso podemos providenciar o suporte de $\bar{u}$ para dentro de $V \subset\subset U$.

Passo 7. De agora em diante, escrevemos $Eu := \bar{u}$, e observamos que o mapa $u \mapsto Eu$ é linear. Lembre-se de que a construção até agora assumiu $u \in C^\infty(\bar{U})$. Suponha agora $u \in W^{1,p}(U)$, escolha $u_m \in C^\infty(\bar{U})$ convergindo para u em $W^{1,p}(U)$. A estimativa (A.17) e a linearidade de E implica

$$\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|E(u_m - u_l)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Assim, $\{Eu_m\}_{m=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy e converge para $\bar{u} =: Eu$. Essa extensão, que não depende da escolha particular da sequência aproximada $\{u_m\}_{m=1}^\infty$, satisfaz a conclusão do teorema. $\square$