UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Brandon Marcelino Carhuas De La Torre

Sobre um sistema de difusão não-local acoplado não-linear com resultados tipo Fujita

Recife

2020

Brandon Marcelino Carhuas De La Torre

Sobre um sistema de difusão não-local acoplado não-linear com resultados tipo Fujita

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Dr. Felipe Wergete Cruz.

Recife

2020

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

D278s De La Torre, Brandon Marcelino Carhuas
Sobre um sistema de difusão não-local acoplado não-linear com resultados tipo Fujita / Brandon Marcelino Carhuas De La Torre. – 2020.
48 f.

Orientador: Felipe Wergete Cruz.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2020.
Inclui referências.

1. Análise matemática. 2. Difusão não-local. I. Cruz, Felipe Wergete (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2020 - 49

BRANDON MARCELINO CARHUAS DE LA TORRE

Sobre um sistema de difusão não-local acoplado não-linear com resultados tipo Fujita

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 17/02/2020.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Prof. Dr. Arlucio da Cruz Viana (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelas bênçãos, e pela certeza de saber que ainda nos momentos difíceis, sua misericórdia está sempre presente para nos dar paz e força para perseverar.

Para minha querida prima Betzabe, meu irmão Victor, meu sobrinho Jonathan por sempre cuidar de mim.

Agradeço a toda a minha família a qual devo todo o apoio durante toda a minha vida, especialmente gostaria de agradecer ao meu pai Marcelino, minha mãe Mariluz e a minhas irmãs Cherli, Leticia.

Um agradecimento especial a Milagros Toledo Rios por quem tenho grande admiração e por todos momentos de companheirismo e apoio.

Ao professor Felipe Wergete, meu orientador, pela amizade, paciência e estimulo durante todo o curso.

Ao professor Miguel Loayza, pela amizade e apoio.

Aos professores da pós-graduação do DMAT-UFPE, pelo ensino nas disciplinas.

A toda a minha família pelo apoio e conselhos dados e também a família Toledo Rios.

Aos meus professores da Universidad Nacional San Luis Gonzaga de Ica-UNICA: Yance, Vicente, Gutierres, Velazques, Aparcana Aquije e Berrocal.

Aos meus colegas e amigos da pós-graduação: Ditmar, Angel (meus amigos peruanos), Geovani, Jackellyny, Micael, Mirelle, Nelson, Mário, Matheus, Ricardo e Ygor.

Aos meus amigos: Oscar, Omar, Ricardo, Alberto, Fernando, Júlio e meus amigos do Perú pelo apoio e conselhos.

Aos meus amigos de minha universidade onde estudei a graduação: Sandra, Will e Alberca, pelo apoio dado.

E, finalmente, meu agradecimento a CAPES por todo o apoio financeiro.

RESUMO

Nesta dissertação, baseada no artigo [17], consideramos um sistema de difusão não-local acoplado não-linear. Inicialmente, usamos o expoente crítico de Fujita e, em seguida, o segundo expoente crítico para determinar a taxa crítica de decaimento dos dados iniciais na região de coexistência de soluções globais e não-globais. Tais resultados coincidem com os do clássico sistema do calor. Ademais, além de generalizar os resultados no caso escalar, obtidos por J. Garcia-Melian e F. Quiros em [8], mas excluímos a condição de monotonicidade no núcleo J (onde J é uma função não-negativa compacta e radialmente simétrica com integral unitária). As principais técnicas são modificando o método de função de teste reescalonado com uma nova função de teste em vez de a função própria do operador não local para lidar com a explosão da solução, e selecionado um espaço normado completo adequado através das estimativas obtidas por J. Terra e N. Wolanski em [15] para obter as soluções globais.

Palavras-chave: Difusão não-local. Expoente crítico de Fujita. Sistemas parabólicos. Soluções globais. Soluções não-globais.

ABSTRACT

In this work, which is based on the article [17], we consider a nonlinear nonlocal diffusion system. Initially, we use Fujita's critical exponent and the second critical exponent to determine the critical decay rates of initial data in the region where global and non-global solutions coexist. The results coincide with the classic heat system. Furthermore, beside generalizing the results in the scalar case, obtained by J. Garcia-Melian and F. Quiros in [8], we also exclude the monotonicity condition on the kernel function J (where J is a compact non-negative and radially symmetrical function with integral equal to 1). The main techniques are to modify the rescheduled test function method with a new test function instead of the own function of the non-local operator to deal with the explosion of the solution, and selecting a suitable complete standard space using estimates obtained by J. Terra and N. Wolanski in [15] to get global solutions.

Keywords: Non local diffusion. Fujita critical exponent. Parabolic systems. Global solutions. Non-global solutions.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A equação do calor e os sistemas relacionados a essas equações modelam vários fenômenos do tipo difusivo. Estudos referentes à existência local de soluções para tais problemas são bem conhecidos. É natural analisar condições sobre as quais as soluções são globais e condições sobre as quais a solução não é global. Em particular, difusões não-locais são de interesse em problemas biológicos e biomédicos.

Nesta dissertação, cujos resultados foram obtidos por Jinge Yang no artigo [17], estudaremos o seguinte sistema de difusão não-local

$$\begin{cases} u_t = J * u - u + v^p, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ v_t = J * v - v + u^q, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ u\,(x,0) = u_0\,(x)\,, \quad v\,(x,0) = v_0\,(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $p, q > 1$ e $J \in C_c\left(\mathbb{R}^N\right)$ é uma função não-negativa e radialmente simétrico com integral igual a 1, i.e,

$$J\,(z) = J\,(-z) \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^N \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}^N} J\,(z)\, dz = 1.$$

Aqui, $*$ denota a convolução usual em $\mathbb{R}^N$ e u_0 e v_0 são funções não-negativas e limitadas. Sem perda de generalidade, assumimos que o suporte de J é a bola unitária fechada, ou seja $\operatorname{supp}(J) \equiv \bar{B}_1$.

O problema (1.1) foi considerado em [17] e modela a iteração de duas populações com difusão não-local (veja [3]), onde u e v representam as densidades de duas populações respetivamente, e $J\,(x,y)$ indica a densidade de distribuição de probabilidade do movimento de um ponto x para y. Inicialmente observamos que, no caso de dados iniciais contínuos e com suporte compacto u_0 e v_0, a partir de [1], concluímos que a solução de (1.1) pode ser escrita, pelo princípio de Duhamel, como

$$\begin{cases} u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y,t)\, u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y,t-s)\, v^p(y,s)\, dyds, \\ v(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y,t)\, v_0(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y,t-s)\, u^q(y,s)\, dyds, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $G(x,t) = e^{-t}\delta + W(x,t)$, com $W(x,t) = e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n J^{*n}(x)}{n!}$, $\quad J^{*n}$ representando as $(n-1)$ vezes convolução de J consigo mesmo, n contando o número de $J's$, de modo que por convenção $J^{*0} = \delta$, $\quad J^{*1} = J$ (onde δ é o delta de Dirac). A existência local de soluções e o teorema de comparação são obtidos por técnicas padrões.

Sabe-se que a equação de difusão não-local linear $u_t = J * u - u$ tem muitas propriedades similares com a equação clássica do calor $u_t = \Delta u$ (por exemplo, o princípio do máximo; veja [14,16]).

Para equações de difusão não-locais e não-lineares, Garcia-Melián e Quiros [8] provaram que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = J * u - u + u^p, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.3}$$

tem o mesmo expoente crítico $p_c = 1 + \frac{2}{N}$ da equação clássica do calor não-linear

$$u_t = \Delta u + u^p. \tag{1.4}$$

Assim, se $1 < p < p_c$, a solução explode em tempo finito para qualquer dado inicial não-negativo e não-trivial $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Por outro lado, conclui-se que se $p > p_c$, então existem soluções globais para dados iniciais pequenos $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. É mencionado que o núcleo J não apenas satisfaz as condições em nosso trabalho atual, mas também está decrescendo radialmente. Em 1966, H. Fujita deu início ao estudo do expoente crítico de Fujita p_c (veja) [7]. Além disso, a fim de descrever a taxa crítica de decaimento dos dados iniciais na região do parâmetro de coexistência de soluções globais e não-globais, Lee e Ni introduziram em [10] o conceito de segundo expoente crítico para (1.4). Agora consideremos o sistema do calor acoplado

$$u_t = \Delta u + v^p, \qquad v_t = \Delta v + u^q. \tag{1.5}$$

As equações em (1.5) fornecem um exemplo simples de um sistema de difusão-reação. Tais equações podem ser usadas para descrever o modelo de propagação do calor em uma mistura de combustível composta por dois componentes. Neste caso, u e v representam as temperaturas dos componentes em interação, a condutividade térmica é suposta constante e igual para ambas as substâncias, e é assumida uma liberação de energia em volume dada por algumas potências de u e v.

Em 1991, Escobedo e Herrero [5] deduziram a curva crítica de Fujita como $(pq)_c = 1 + \frac{2}{N}\max\{p+1, q+1\}$, ou seja, se $1 < pq \leq (pq)_c$ cada solução explode em tempo finito, e se $pq > (pq)_c$, existem tanto soluções globais como não-globais. Sejam $u_0(x) \sim |x|^{-a}, v_0(x) \sim |x|^{-b}, |x| \to \infty$, Mochizuki [13] provou na região de coexistência $pq > (pq)_c$ que existem soluções globais de (1.5) se $a > a_0 = \frac{2}{p-1}$ e $b > b_0 = \frac{2(q+1)}{pq-1}$, enquanto a solução explode em tempo finito se $0 < a < \frac{2(p+1)}{pq-1}$ ou $0 < b < \frac{2(q+1)}{pq-1}$ (veja também [4,11]).

Motivado pelos trabalhos acima, nosso principal interesse neste trabalho é ver como o termo não-linear afeta o comportamento assintótico das soluções.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 apresentamos alguns conceitos preliminares como os espaços L^p, espaços de Solbolev, equação do calor.

No Capítulo 3 lidamos com a curva crítica de Fujita do problema (1.1) com o seguinte

Teorema 3.1 A curva crítica de Fujita do sistema (1.1) é

$$(pq)_c = 1 + \frac{2}{N}\max\{p+1, q+1\},$$

ou seja, qualquer solução não-negativa e não-trivial do sistema (1.1) explode em tempo finito se $1 < pq \leq (pq)_c$, enquanto que existem soluções globais e não-globais se $pq > (pq)_c$, dependendo do "tamanho" dos dados iniciais.

No Capítulo 4 para estudar o segundo expoente crítico, introduzimos os seguintes espaços:

$$\mathbb{I}_a = \left\{ \phi \in BC\left(\mathbb{R}^N\right) \mid \quad \phi(x) \geq 0, \quad \liminf_{|x|\to\infty} |x|^a \phi(x) > 0 \right\},$$

$$\mathbb{I}^a = \left\{ \phi \in BC\left(\mathbb{R}^N\right) \mid \quad \phi(x) \geq 0, \quad \limsup_{|x|\to\infty} |x|^a \phi(x) < \infty \right\},$$

onde $a \geq 0$ e $BC\left(\mathbb{R}^N\right)$ denota o espaço das funções contínuas e limitadas em $\mathbb{R}^N$. Temos, então, o seguinte resultado.

Teorema 4.2 Seja $pq > (pq)_c$, com dados iniciais não-triviais e não-negativos $u_0(x) = \lambda\psi(x)$, $v_0(x) = \mu\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Sejam

$$a_0 := \frac{2(p+1)}{pq-1} \qquad \text{e} \qquad b_0 := \frac{2(q+1)}{pq-1}.$$

i) Se $a > a_0$ e $b > b_0$, $\psi \in \mathbb{I}^a$, $\varphi \in \mathbb{I}^b$, então existe uma solução global, não-negativa e não-trivial de (1.1) desde que λ e μ sejam suficientemente pequenos e não-negativos.

ii) Se $0 < a < a_0$ ou $0 < b < b_0$, $\psi \in \mathbb{I}_a$, $\varphi \in \mathbb{I}_b$, então existe uma solução de (1.1) que explode em tempo finito.

Como observado no artigo [17], "os teoremas acima implicam que os resultados são coincidentes com o sistema do calor clássico [5,13]. Não apenas estendemos os resultados no caso escalar [8] para o caso de um sistema, mas também excluímos a condição de monotonicidade no núcleo J. Conseguimos através de uma modificação do método da função teste reescalonada com uma nova função teste, em vez da auto-função do operador não-local, lidar com a explosão da solução, e selecionando um espaço completo adequado através das estimativas obtidas por Terra e Wolanski [16], obtivemos a solução global. Além disso, da prova do Teorema 4.2, é possível obter estimativas da solução global em relação a x e t".

2 CONCEITOS BÁSICOS

Este capítulo tem como principal objetivo inserir a linguagem e os conceitos básicos, bem como um pouco da notação que utilizaremos no restante desta dissertação. Para mais detalhes, veja as referências [2] e [6].

2.1 Espaços L^p

Consideramos uma função $u : U \to \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$.

Definição 2.1 *Se u é uma função mensurável em U e $1 \leq p < \infty$, definimos*

$$L^p(U) := \left\{ u : U \to \mathbb{R} \,;\, u \text{ é mensurável e } \|u\|_p < \infty \right\},$$

onde

$$\|u\|_p := \left[\int_U |u|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Vejamos algumas propriedades desse espaço.

2.1.1 Propriedades básicas

Lema 2.2 *Se $a, b \geq 0$ e $0 < \lambda < 1$, então*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b.$$

Demonstração. Para $b = 0$ o resultado é óbvio. Suponha, então, que $b \neq 0$. Daí, dividindo a expressão $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$ por b e considerando $t = a/b \geq 0$, obtemos

$$t^\lambda \leq \lambda t + 1 - \lambda.$$

Logo, é suficiente mostrar que a desigualdade acima é válida para todo $t \geq 0$. Para isto, defina a função f por $f(t) := t^{\lambda} - \lambda t$. Note que

$$f'(t) = \lambda t^{\lambda-1} - \lambda = \lambda\left(t^{\lambda-1} - 1\right).$$

Além disso, temos que $f'(t) = 0$ se, e somente se, $t = 1$. E, para $t = 1$, temos que

$$f''(1) = \lambda(\lambda - 1) < 0.$$

Consequentemente, $f(t) \leq f(1) = 1 - \lambda$. Portanto, para todo $t \geq 0$, temos

$$t^{\lambda} - \lambda t \leq (1 - \lambda)$$

isto é,

$$t^{\lambda} \leq \lambda t + 1 - \lambda,$$

para todo $t \geq 0$. □

Teorema 2.3 *(Desigualdade de Hölder) Assuma que* $1 \leq p, q \leq \infty$*,* $p^{-1} + q^{-1} = 1$*. Se* $u \in L^p(U)$ *e* $v \in L^q(U)$*, então*

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Demonstração. Se $\|u\|_p = 0$ ou $\|v\|_q = 0$ o resultado é imediato, pois

$$\begin{aligned} \|u\|_p = 0 \text{ ou } \|v\|_q = 0 &\Longrightarrow u = 0 \text{ ou } v = 0 \text{ quase sempre} \\ &\Longrightarrow uv = 0 \text{ quase sempre} \\ &\Longrightarrow \|uv\|_1 = 0. \end{aligned}$$

Suponha, então, que $\|u\|_p \neq 0$ e $\|v\|_q \neq 0$. Sendo $a = |u|^p, b = |v|^q$ e $\lambda = \frac{1}{p}$ segue do lema anterior que

$$|u|\,|v| \leq \frac{1}{p}|u|^p + \frac{1}{q}|v|^q. \tag{2.1}$$

Integrando a desigualdade (2.1) sobre U, obtemos

$$\int_U |uv|\,dx \leq \frac{1}{p}\|u\|_p^p + \frac{1}{q}\|v\|_q^q. \tag{2.2}$$

Considere agora, $\alpha = \|u\|_p^{-1} \|v\|_q^{\frac{q}{p}}$. Substituindo u por αu na desigualdade (2.2), temos

$$\begin{array}{rcl} \int_U |\alpha uv| \, dx & \leq & \frac{1}{p}\|\alpha u\|_p^p + \frac{1}{q}\|v\|_q^q \\ & \Downarrow & \\ \alpha \int_U |uv| \, dx & \leq & \frac{\alpha^p}{p}\|u\|_p^p + \frac{1}{q}\|v\|_q^q \\ & \Downarrow & \\ \int_U |uv| \, dx & \leq & \frac{\alpha^{p-1}}{p}\|u\|_p^p + \frac{1}{\alpha q}\|v\|_q^q. \end{array}$$

Ou seja,

$$\int_U |uv| \, dx \leq \frac{1}{p}\|u\|_p \|v\|_q + \frac{1}{q}\|u\|_p \|v\|_q.$$

Portanto,

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q,$$

como queríamos. □

Teorema 2.4 *(Desigualdade de Minkowski) Se* $1 < p < \infty$ *e* $u, v \in L^p(U)$, *então*

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Demonstração. Para $p = 1$, segue da desigualdade triangular que

$$|u + v| \leq |u| + |v| \, .$$

Integrando sobre U, obtemos

$$\|u + v\|_1 \leq \|u\|_1 + \|v\|_1.$$

Além disso, se $u + v = 0$ quase sempre, o resultado também é imediato. De fato,

$$0 = \|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Observe agora que, se $1 < p < \infty$ e $u + v \neq 0$, então

$$|u + v|^p \leq (|u| + |v|) \, |u + v|^{p-1}.$$

Daí, usando a desigualdade de Hölder e relembrando que $(p - 1)q = p$, obtemos

$$\begin{array}{rcl} \int_U |u + v|^p dx & \leq & \|u\|_p \left\| |u + v|^{p-1} \right\|_q + \|v\|_p \left\| |u + v|^{p-1} \right\|_q \\ & = & \left(\|u\|_p + \|v\|_p \right) \left(\int_U |u + v|^p dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{array}$$

Portanto,

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Isso prova o teorema. $\square$

Usando a desigualdade de Minkowski, é possível mostrar que o espaço $L^p(U)$, com $p \geq 1$, é um espaço normado com norma $\|\cdot\|_p$.

Definição 2.5 *Definimos*

$$\|u\|_\infty := \sup_{x \in U} \operatorname{ess} |u(x)| = \inf \{M\,;\, |u(x)| < M, \text{ em quase todo ponto } x \in U\}.$$

Assim,

$$L^\infty(U) := \{u : U \to \mathbb{R}\,;\, u \text{ é mensurável e } \|u\|_\infty < \infty\}.$$

A partir dos espaços $L^p(U)$ e de um novo conceito de derivada vamos definir na próxima seção novos espaços, conhecidos como espaços de Sobolev.

2.2 Espaços de Sobolev

Nesta seção definiremos os espaços $W^{m,p}(U)$, conhecidos com espaços de Sobolev, onde $m \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ e $U \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto. As propriedades destes espaços são muito utilizadas em aplicações da teoria das equações diferenciais parciais. Aqui, $C_c^\infty(U)$ denota o espaço das funções $\phi : U \to \mathbb{R}$ com suporte compacto em U e infinitamente diferenciáveis.

2.2.1 Derivada fraca

Seja $u \in C^1(U)$. Se $\phi \in C_c^\infty(U)$ podemos ver, através de integração por partes, que

$$\int_U u\phi_{x_j}\, dx = -\int_U u_{x_j}\phi\, dx, \tag{2.3}$$

com $j = 1, \cdots, n$. Os termos de fronteira são nulos na integração por partes pois se ϕ possui suporte compacto em U, então ϕ é zero em ∂U. Diante desta motivação, temos a seguinte

Definição 2.6 *Sejam $u, v \in L^1_{loc}(U)$, onde*

$$L^1_{loc}(U) := \left\{ u : U \to \mathbb{R}\,;\; u \in L^1(V)\,,\ \textit{para todo } V \subset \widetilde{V} \subset U \ \textit{com } \widetilde{V} \ \textit{compacto} \right\},$$

e seja α um multi-índice. Dizemos que v é a derivada parcial fraca de ordem α de u, a qual denotamos por $D^\alpha u = v$, quando, para todo $\phi \in C_c^\infty(U)$, vale

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi \, dx. \tag{2.4}$$

A partir do conceito de derivada fraca vamos, na próxima seção, definir os espaços de Sobolev. Tais espaços têm bastante aplicação na teoria das EDPs.

2.2.2 Definição dos espaços de Sobolev

Fixe $1 \leq p \leq \infty$ e m um inteiro não-negativo.

Definição 2.7 *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(U)$ consiste de todas as funções localmente somáveis $u : U \to \mathbb{R}$ tais que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ existe no sentido de derivada fraca e pertence a $L^p(U)$. Se $u \in W^{m,p}(U)$, definimos a norma de u por:*

$$\|u\|_{W^{m,p}(U)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} \int_U |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \textit{para} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} \sup_U \operatorname{ess} |D^\alpha u| & \textit{para} \quad p = \infty. \end{cases}$$

É possível mostrar que o espaço de Sobolev $W^{m,p}(U)$ é um espaço de Banach. O caso $p = 2$, em particular, é bastante utilizado nas aplicações em equações diferenciais parciais. Neste caso, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(U)$ é representado por $H^m(U)$. O espaço $H^m(U)$ é um espaço de Hilbert com produto interno definido para $u, v \in H^m(U)$, por

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(U)}.$$

Na próxima seção determinaremos a solução da equação do calor.

2.3 A equação do calor

Na matemática, o estudo das soluções de equações na forma

$$u_t - \varepsilon \Delta u = 0$$

começou no início do século XIX e perdura até hoje. Tal equação, conhecida como equação do calor, está associado a processos de dissipação de calor. Nesta seção, faremos inicialmente um estudo sobre a equação do calor com $\varepsilon = 1$:

$$u_t - \Delta u = 0. \tag{2.5}$$

Aqui, consideraremos $t > 0$ e $x \in U$, onde $U \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto. Estudaremos também a equação do calor não-homogênea, dada por

$$u_t - \Delta u = f, \tag{2.6}$$

onde f é uma função conhecida que, na física, representa uma fonte de calor no sistema. Nosso objetivo, então, é encontrar soluções para equação do calor. Para isto, vamos começar supondo que suas soluções possuem uma forma específica com o intuito de reduzir a equação (2.5) a uma equação diferencial ordinária separável. Primeiramente, observe que se u é solução de (2.5) então dado $\lambda \in \mathbb{R}$, para $u(\lambda x, \lambda^2 t)$, temos

$$\lambda^2 u_t(x,t) - \lambda^2 \Delta u(x,t) = \lambda^2 \left(u_t(x,t) - \Delta u(x,t) \right) = 0.$$

Logo, $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ também é solução da equação (2.5). Isto indica que a razão $\frac{r^2}{t}$, onde $r = |x|$, é importante para equação do calor e sugere a seguinte mudança de variável para $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$:

$$u(x,t) = v\left(\frac{r^2}{t}\right) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right),$$

para alguma função v que será convenientemente determinada. Suponha que a solução $u(x,t)$ pode ser escrita na forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \tag{2.7}$$

onde α, β são constantes e $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função. Para obter a identidade (2.7), basta observar que a equação (2.5) satisfaz para todo $\lambda > 0, x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$ a seguinte igualdade:

$$u(x,t) = \lambda^{\alpha} u\left(\lambda^{\beta} x, \lambda t\right).$$

Considerando $\lambda = t^{-1}$ e definindo $v(y) := u(y,1)$, temos

$$v(y) = \lambda^{\alpha} u\left(\lambda^{\beta} y, \lambda\right) = \tfrac{1}{t^{\alpha}} u\left(\tfrac{y}{t^{\beta}}, \tfrac{1}{t}\right).$$

Substituindo a expressão (2.7) na equação (2.5), obtemos

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right) + \beta t^{-(\alpha+1)} \frac{x}{t^{\beta}}.Dv\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right) = 0. \tag{2.8}$$

Tome $\beta = \frac{1}{2}$ na equação anterior. Daí

$$\alpha v + \frac{1}{2} y.Dv + \Delta v = 0,$$

onde $y := t^{-\beta} x = t^{-\frac{1}{2}} x$. Agora, escreva v na forma $v(y) = w(|y|)$ para algum $w : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Assim,

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$

com $r = |y|$ e $\prime = \frac{d}{dr}$. Sendo $\alpha = \frac{n}{2}$, segue que

$$\begin{gathered} \tfrac{n}{2} w + \tfrac{1}{2} r w' + w'' + \tfrac{n-1}{r} w' = 0 \\ \tfrac{n}{2} r^{n-1} w + \tfrac{1}{2} r^{n} w' + r^{n-1} w'' + (n-1) r^{n-2} w' = 0 \\ \left(r^{n-1} w'\right)' + \tfrac{1}{2} (r^{n} w)' = 0 \\ r^{n-1} w' + \tfrac{1}{2} r^{n} w = a, \end{gathered}$$

para alguma constante a. Assumindo que $\lim\limits_{r \to \infty} w = w' = 0$, segue que $a = 0$. Logo,

$$w' = -\frac{1}{2} r w.$$

Então, para alguma constante b, temos

$$w = b e^{-\frac{r^2}{4}}.$$

Concluímos, então, que

$$u(x,t) = \frac{b}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

é solução da equação (2.5).

Da discussão feita anteriormente temos a seguinte

Definição 2.8 *A função*

$$\phi(x,t) := \begin{cases} \frac{b}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & se \quad x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ 0 \quad se \quad x \in \mathbb{R}^N, t \leq 0 \end{cases}$$

é chamada de solução fundamental da equação do calor.

2.3.1 Problema de valor inicial

Agora vamos usar a solução fundamental ϕ para encontrar uma solução para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u = g \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Para isto, note primeiramente que para $(x,t) \neq (0,0)$ a função $u(x,t) = \phi(x,t)$ é solução da equação do calor. Além disso, para $y \in \mathbb{R}^N$ fixo, $u(x,t) = \phi(x-y,t)$ também é solução da equação (2.5). Consequentemente,

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y,t)\, g(y)\, dy = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy \tag{2.10}$$

é uma solução para o problema de Cauchy. Vejamos agora como determinar a solução para o problema de Cauchy não-homogêneo (2.6).

2.3.2 Problema não-homogêneo

Considere o seguinte problema de Cauchy não-homogêneo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Observe primeiramente que dados $y \in \mathbb{R}^N$ e $s \in (0,t)$, a função $\phi(x-y,t-s)$ é solução para a equação do calor. Além disso, fixado s, a função

$$u = u(x,t;s) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y,t-s)\, f(y,s)\, dy$$

é solução de

$$\begin{cases} u_t(\cdot;s) - \Delta u(\cdot;s) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(\cdot;s) = f(\cdot;s) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \{t = s\}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Note que o problema de Cauchy (2.12) é um problema de Cauchy da forma (2.9) com tempo inicial $t = s$. Logo, $u(\cdot;s)$ não pode ser solução do problema (2.11).

2.4 Observações

Esta seção é dedicada a coletar algumas propriedades para nosso problema principal.

Observação 2.9 *Sejam a e b positivos e $q > 1$. Então $a^{1/q} + b^{1/q} \leq C(a+b)^{1/q}$, onde C é uma constante positiva.*

De fato, considere a função $f(\lambda) := \lambda^{1/q}$, com $q > 1$ e $\lambda \geq 0$. Então temos que

$$f'(\lambda) = \frac{1}{q}\lambda^{(1-q)/q}.$$

Logo

$$f''(\lambda) = \frac{1}{q}\left(\frac{1-q}{q}\right)\lambda^{(1-2q)/q} < 0,$$

pois $q > 1$. Assim, f é côncava para baixo em $\mathbb{R}^+$. Se f é continua e côncava, então $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Daí,

$$\begin{aligned} f(a+b) = f\left(\frac{2a+2b}{2}\right) = (a+b)^{\frac{1}{q}} &\geq \frac{f(2a)+f(2b)}{2} \\ &= \frac{(2a)^{\frac{1}{q}} + (2b)^{\frac{1}{q}}}{2} = \frac{2^{\frac{1}{q}}}{2}\left(a^{\frac{1}{q}} + b^{\frac{1}{q}}\right). \end{aligned}$$

Isto implica que $a^{\frac{1}{q}} + b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{2}{2^{\frac{1}{q}}}(a+b)^{\frac{1}{q}} = 2^{\frac{q-1}{q}}(a+b)^{\frac{1}{q}}$, i.e.,

$$a^{\frac{1}{q}} + b^{\frac{1}{q}} \leq C(a+b)^{\frac{1}{q}},$$

onde $q > 1$. □

Observação 2.10 *Se $W(x,t) := e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n J^{*n}(x)}{n!}$, então $\|W\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1 - e^{-t}$.*

De fato, como $W(x,t) = e^{-t}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n J^{*n}(x)}{n!}$, temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} W(x,t)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}tJ(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{e^{-t}t^2(J*J)(x)}{2!}dx + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{e^{-t}t^3(J*J*J)(x)}{3!}dx + \cdots \\
&= e^{-t}t\int_{\mathbb{R}^N} J(x)\,dx + \frac{e^{-t}t^2}{2!}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)\,J(y)\,dydx \\
&\quad + \frac{e^{-t}t^3}{3!}\int_{\mathbb{R}^N}((J*J)*J)(x)\,dx + \cdots .
\end{aligned}
$$

Pelo teorema de Fubini, segue que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} W(x,t)\,dx \\
&= e^{-t}t + \frac{e^{-t}t^2}{2!}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)\,J(y)\,dxdy + \frac{e^{-t}t^3}{3!}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(J*J)(x-y)\,J(y)\,dydx \\
&\quad + \cdots \\
&= e^{-t}t + \frac{e^{-t}t^2}{2!}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)\,dxJ(y)\,dy \\
&\quad + \frac{e^{-t}t^3}{3!}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y-z)\,J(z)\,dzJ(y)\,dydx + \cdots \\
&= e^{-t}t + \frac{e^{-t}t^2}{2!} + \frac{e^{-t}t^3}{3!}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} J(y)\,dyJ(x-y-z)\,J(z)\,dzdx + \cdots \\
&= e^{-t}t + \frac{e^{-t}t^2}{2!} + \frac{e^{-t}t^3}{3!}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} J(z)\,dzJ(x-y-z)\,dx + \cdots \\
&= e^{-t}t + \tfrac{e^{-t}t^2}{2!} + \tfrac{e^{-t}t^3}{3!} + \cdots + \tfrac{e^{-t}t^n}{n!} + \cdots \\
&= e^{-t}\left(t + \tfrac{t^2}{2!} + \tfrac{t^3}{3!} + \cdots + \tfrac{t^n}{n!} + \cdots\right) \\
&= e^{-t}\left(1 + t + \tfrac{t^2}{2!} + \tfrac{t^3}{3!} + \cdots + \tfrac{t^n}{n!} + \cdots - 1\right) \\
&= e^{-t}\left(e^t - 1\right) \\
&= 1 - e^{-t},
\end{aligned}
$$

como afirmamos. $\square$

3 EXPOENTE CRÍTICO DE FUJITA

3.1 Resultado principal

Neste capítulo, consideramos o expoente crítico de Fujita do sistema

$$\begin{cases} u_t = J * u - u + v^p, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ v_t = J * v - v + u^q, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.1}$$

Diferente do caso escalar [8] empregamos o método da função teste reescalonada [12], em lugar do método de Kaplan [9], mesmo no caso subcrítico $1 \leq pq \leq (pq)_c$. Para lidar com a natureza não-local, precisamos adotar uma nova função teste e uma função como a função teste reescalonada no caso subcrítico e crítico, respetivamente.

Teorema 3.1 ([17], Teorema 1) *A curva crítica de Fujita do sistema (1.1) é*

$$(pq)_c = 1 + \frac{2}{N} \max\{p+1, q+1\},$$

ou seja, qualquer solução não-negativa e não-trivial do sistema (1.1) explode em tempo finito se $1 < pq \leq (pq)_c$*, enquanto que existem soluções globais e não-globais se* $pq > (pq)_c$*, dependendo do "tamanho" dos dados iniciais.*

3.2 Prova do Teorema 3.1

Sem perda de generalidade, suponha $p \geq q$. Assuma, também, que (u, v) é uma solução global não-negativa e não-trivial do sistema (1.1).

Primeiro, provaremos o caso quando $1 < pq \leq (pq)_c$. Escolha

$$\xi(x) = e^{-|x|^2} \quad \text{e} \quad \phi(t) \in C_0^\infty((-1,1))$$

satisfazendo $\phi \equiv 1$ em $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ e $0 \leq \phi \leq 1$. Sejam m e q expoentes conjugados, ou seja, $m^{-1} + q^{-1} = 1$ $\left(m = \frac{q}{q-1}\right)$ e considere

$$\xi_R(x) = \xi\left(\frac{x}{R}\right),\ x \in \mathbb{R}^N, \qquad \psi_R(t) = \phi^m\left(\frac{t}{R^2}\right),\ t \geq 0.$$

Multiplicando a primeira equação de (1.1) por $\xi_R \psi_R$ e integrando em $Q = \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v^p(x,t)\, \xi_R(x)\, \psi_R(t)\, dxdt &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} (u_t - J * u + u)(x,t)\, \xi_R(x)\, \psi_R(t)\, dxdt \\
&= \underbrace{\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u_t(x,t)\, \xi_R(x)\, \psi_R(t)\, dxdt}_{I_1} \\
&\quad - \underbrace{\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} (J * u - u)(x,t)\, \xi_R(x)\, \psi_R(t)\, dxdt}_{I_2}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

A seguir, vamos estimar I_1 e I_2. Temos que

$$I_1 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u_t(x,t)\, \xi_R(x)\, \psi_R(t)\, dxdt = \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^\infty u_t(x,t)\, \xi_R(x)\, \psi_R(t)\, dtdx.$$

Integrando por partes em t, obtemos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\, \xi_R(x)\, \psi_R(t)\big|_{t=0}^{t=\infty} dx - \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^\infty u(x,t)\, \xi_R(x)\, \psi_R'(t)\, dtdx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\, \xi_R(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^\infty u(x,t)\, \xi_R(x)\, \psi_R'(t)\, dtdx \\
&= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\, \xi_R(x)\, \psi_R'(t)\, dxdt - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\, \xi_R(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Como $\psi_R(t) = \phi^m\left(\frac{t}{R^2}\right)$, temos, pela regra da cadeia, que

$$\begin{aligned}\psi_R'(t) &= m\phi^{m-1}\left(\tfrac{t}{R^2}\right)\phi'\left(\tfrac{t}{R^2}\right)\tfrac{1}{R^2}\\ &= mR^{-2}\phi^{m-1}\left(\tfrac{t}{R^2}\right)\phi'\left(\tfrac{t}{R^2}\right).\end{aligned}$$

Uma vez que $m = \frac{q}{q-1}$, então $m-1 = \frac{q}{q-1} - 1 = \frac{1}{q-1}$. Logo,

$$\phi^{m-1}\left(\frac{t}{R^2}\right) = \phi^{\frac{1}{q-1}}\left(\frac{t}{R^2}\right) = \phi^{\frac{m}{q}}\left(\frac{t}{R^2}\right) = \left(\phi^m\left(\frac{t}{R^2}\right)\right)^{\frac{1}{q}} = \psi_R^{\frac{1}{q}}(t).$$

Por outro lado, como $\phi(t) \in C_0^\infty((-1,1))$ é tal que $\phi \equiv 1$ em $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ e $0 \leq \phi \leq 1$, temos, pelo teorema do valor médio, que existe um $\frac{t}{R^2} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ satisfazendo

$$\frac{\phi(1) - \phi\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \phi'\left(\frac{t}{R^2}\right) \leq \left|\phi'\left(\frac{t}{R^2}\right)\right| \leq C.$$

Note que, se $t \notin \left[\frac{R^2}{2}, R^2\right]$, então $\frac{t}{R^2} \notin \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Assim,

$$\phi'\left(\frac{t}{R^2}\right) = 0 \ \text{ se } \ t \notin \left[\frac{R^2}{2}, R^2\right] \ \text{ e } \ \left|\phi'\left(\frac{t}{R^2}\right)\right| \leq C, \ \text{ se } \ t \in \left[\frac{R^2}{2}, R^2\right].$$

Como

$$\chi_{\left[\frac{R^2}{2}, R^2\right]} = \begin{cases} 1, & \text{se} \qquad t \in \left[\frac{R^2}{2}, R^2\right], \\ \\ 0, & \text{caso contrario,}\end{cases}$$

temos que

$$|\psi_R'(t)| \leq CR^{-2}\psi_R^{\frac{1}{q}}\chi_{\left[\frac{R^2}{2}, R^2\right]}. \tag{3.2}$$

Daí, segue que

$$I_1 \leq CR^{-2}\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\xi_R(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\,dxdt - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\xi_R(x)\,dx. \tag{3.3}$$

Agora, vamos estimar I_2. Lembre-se que

$$I_2 = \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}(J * u - u)(x,t)\,\xi_R(x)\,\psi_R(t)\,dxdt.$$

Pelo teorema de Fubini, as propriedades de que J é radial e simétrica, temos $\int_{\mathbb{R}^N} (J*u-u)(x,t)\,\xi_R(x)\,dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^N} (J*u)(x,t)\,\xi_R(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\xi_R(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y,t)\,u(y,t)\,\xi_R(x)\,dydx - \int_{\mathbb{R}^N} \xi_R(x)\,u(x,t)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y,t)\,\xi_R(x)\,dx\right)u(y,t)\,dy - \int_{\mathbb{R}^N} \xi_R(x)\,u(x,t)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} J(y-x,t)\,\xi_R(x)\,dx\right)u(y,t)\,dy - \int_{\mathbb{R}^N} \xi_R(x)\,u(x,t)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (J*\xi_R)(y)\,u(y,t)\,dy - \int_{\mathbb{R}^N} \xi_R(x)\,u(x,t)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (J*\xi_R)(x)\,u(x,t)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} \xi_R(x)\,u(x,t)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (J*\xi_R-\xi_R)(x)\,u(x,t)\,dx.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$I_2 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} (J*\xi_R-\xi_R)(x)\,u(x,t)\,\psi_R(t)\,dxdt. \tag{3.4}$$

Pela definição de convolução, as propriedades de que J é radial, simétrica e sua integral é igual a 1, fazendo mudança de variável $z=y-x \quad \Rightarrow \quad dz=dy$ e usando a desigualdade $e^x \geq 1+x, \forall\, x\in\mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}
(J*\xi_R-\xi_R)(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)\,\xi_R(y)\,dy - \xi_R(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} J(y-x)\,\xi_R(y)\,dy - \xi_R(x)\int_{\mathbb{R}^N} J(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} J(z)\,\xi_R(x+z)\,dz - \int_{\mathbb{R}^N} J(z)\,\xi_R(x)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} J(z)\left(\xi_R(x+z)-\xi_R(x)\right)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} J(z)\left(e^{-\frac{|x+z|^2}{R^2}} - e^{-\frac{|x|^2}{R^2}}\right)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} J(z)\left(e^{-\frac{1}{R^2}\left(|x|^2+2\langle x,z\rangle+|z|^2\right)} - e^{-\frac{|x|^2}{R^2}}\right)dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^N} J(z)\, e^{-\frac{|x|^2}{R^2}} \left(e^{-\frac{1}{R^2}\left(2\sum_{i=1}^N x_i z_i + |z|^2\right)} - 1 \right) dz \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N} J(z)\, e^{-\frac{|x|^2}{R^2}} \left(-\frac{1}{R^2} \left(2\sum_{i=1}^{N} x_i z_i + |z|^2 \right) \right) dz \\
&= -e^{-\frac{|x|^2}{R^2}} \int_{\mathbb{R}^N} J(z)\, \frac{1}{R^2} \left(2\sum_{i=1}^{N} x_i z_i + |z|^2 \right) dz.
\end{aligned}$$

De acordo com a simetria de J, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} J(z)\, z_i dz = \int_{\mathbb{R}^N} J(-z)\, z_i dz.$$

Seja $y = -z$, donde concluímos que $dy = (-1)^N dz$. Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} J(z)\, z_i dz = -\int_{\mathbb{R}^N} J(y)\, y_i dy = -\int_{\mathbb{R}^N} J(z)\, z_i dz.$$

Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} J(z)\, z_i dz = 0.$$

Ademais, temos que $J(z)\,|z|^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^N} J(z)\,|z|^2 dz > 0$. Portanto:

$$\int_{\mathbb{R}^N} J(z)\, z_i dz = 0 \quad \text{e} \quad A(J) := \int_{\mathbb{R}^N} J(z)\,|z|^2 dz > 0. \tag{3.5}$$

Consequentemente, $(J * \xi_R - \xi_R)(x) \geq -A(J)\, R^{-2} \xi_R(x)$. Dai, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
-I_2 &\leq A(J)\, R^{-2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\, \xi_R(x)\, \psi_R(t)\, dxdt \\
&\leq CR^{-2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\, \xi_R(x)\, \psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\, dxdt \qquad (3.6)\\
&\quad \text{pois} \quad \tfrac{1}{q} < 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \psi_R(t) \leq 1.
\end{aligned}$$

Então por (3.1), (3.3), (3.6) temos que
$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v^p(x,t)\, \xi_R(x)\, \psi_R(t)\, dxdt$

$$\begin{aligned}
&\leq CR^{-2} \int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2} \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\, \xi_R(x)\, \psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\, dxdt - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\, \xi_R(x)\, dx \\
&\quad + CR^{-2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\, \xi_R(x)\, \psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\, dxdt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= CR^{-2}\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\xi_R(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\,dxdt \\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\xi_R(x)\,dx + CR^{-2}\int_0^{\frac{R^2}{2}}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\xi_R(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\,dxdt \\
&\quad + CR^{-2}\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\xi_R(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\,dxdt + CR^{-2}\int_{R^2}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\xi_R(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\,dxdt \\
&= CR^{-2}\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\xi_R(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\,dxdt - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\xi_R(x)\,dx \\
&\quad + CR^{-2}\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\xi_R(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\,dxdt \\
&\leq CR^{-2}\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\xi_R(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\,dxdt - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\xi_R(x)\,dx \\
&\quad + CR^{-2}\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\xi_R(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\,dxdt \\
&\leq CR^{-2}\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\xi_R(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\,dxdt - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\xi_R(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Portanto, usando a desigualdade de Hölder em x e depois em t, temos que

$$
\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N} v^p(x,t)\,\xi_R(x)\,\psi_R(t)\,dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\xi_R(x)\,dx
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq CR^{-2}\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\xi_R(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\,dxdt \\
&= CR^{-2}\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\xi_R^{\frac{1}{q}}(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\,\xi_R^{\frac{q-1}{q}}(x)\,dxdt \\
&= CR^{-2}\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(u(x,t)\,\xi_R^{\frac{1}{q}}(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\right)\xi_R^{\frac{1}{m}}(x)\,dxdt \\
&\leq CR^{-2}\int_0^{R^2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(u(x,t)\,\xi_R^{\frac{1}{q}}(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(\xi_R^{\frac{1}{m}}(x)\right)^m dx\right)^{\frac{1}{m}} dt \\
&= CR^{-2}\int_0^{R^2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^q(x,t)\,\xi_R(x)\,\psi_R(t)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\xi_R(x)\,dx\right)^{\frac{1}{m}} dt \\
&\leq CR^{-2}\left(\int_0^{R^2}\left(\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^q(x,t)\,\xi_R(x)\,\psi_R(t)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \times\left(\int_0^{R^2}\left(\left(\int_{\mathbb{R}^N}\xi_R(x)\,dx\right)^{\frac{1}{m}}\right)^m dt\right)^{\frac{1}{m}}
\end{aligned}
$$

$$= \quad CR^{-2}\left(\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u^q\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N}\xi_R\left(x\right)dxdt\right)^{\frac{q-1}{q}}.$$

Como $\int_{\mathbb{R}^N}\xi_R\left(x\right)dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x|^2}{R^2}}dx$, fazendo a mudança de variável $z = \frac{x}{R}$, donde $R^N dz = dx$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\xi_R\left(x\right)dx = R^N\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2}dz = R^N\pi^{\frac{N}{2}}$$

$$\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N}\xi_R\left(x\right)dxdt = \int_0^{R^2} R^N\pi^{\frac{N}{2}}dt = R^{N+2}\pi^{\frac{N}{2}}$$

$$\left(\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N}\xi_R\left(x\right)dxdt\right)^{\frac{q-1}{q}} = R^{(N+2)\frac{(q-1)}{q}}\pi^{\frac{N}{2}\frac{(q-1)}{q}}.$$

Logo,

$$\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(x\right)\xi_R\left(x\right)dx$$
$$\leq CR^{-2}R^{(N+2)\frac{(q-1)}{q}}\pi^{\frac{N}{2}\frac{(q-1)}{q}}\left(\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u^q\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(x\right)\xi_R\left(x\right)dx \\ &\leq CR^{N-\frac{(N+2)}{q}}\left(\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u^q\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Repetindo o mesmo procedimento na segunda equação de (1.1), ao invés da primeira, conclui-se que

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N} u^q\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} v_0\left(x\right)\xi_R\left(x\right)dx \\ &\leq CR^{N-\frac{(N+2)}{p}}\left(\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Substituindo (3.8) no lado direito de (3.7) e pela desigualdade Young, obtemos

$$\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(x\right)\xi_R\left(x\right)dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; CR^{N-\frac{(N+2)}{q}}\left(CR^{N-\frac{(N+2)}{p}}\left(\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \; CR^{N-\frac{(N+2)}{q}}C^{\frac{1}{q}}R^{\frac{N}{q}-\frac{(N+2)}{pq}}\left(\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{pq}}\\
&\leq \; CR^{N\left(1-\frac{1}{pq}\right)-\frac{2(p+1)}{pq}}\left(\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{pq}}\\
&\leq \; \frac{\left(CR^{N\left(1-\frac{1}{pq}\right)-\frac{2(p+1)}{pq}}\right)^{\frac{pq}{pq-1}}}{\frac{pq}{pq-1}}+\frac{1}{pq}\left(\left(\left(\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{pq}}\right)^{pq}\right.\\
&\leq \; CR^{N-\frac{2(p+1)}{pq-1}}+\tfrac{1}{pq}\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt+\int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(x\right)\xi_R\left(x\right)dx\\
&\leq CR^{N-\frac{2(p+1)}{pq-1}}+\tfrac{1}{pq}\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Como $\int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(x\right)\xi_R\left(x\right)dx$ é não-negativo, temos

$$
\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt \leq CR^{N-\frac{2(p+1)}{pq-1}}+\frac{1}{pq}\int_0^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt
$$

$$
\left(1-\frac{1}{pq}\right)\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt \leq CR^{N-\frac{2(p+1)}{pq-1}}
$$

$$
\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt \leq CR^{N-\frac{2(p+1)}{pq-1}}, \quad \text{pois} \quad 1-\frac{1}{pq}>0.
$$

Se $1<pq<\left(pq\right)_c$, onde $\left(pq\right)_c=1+\frac{2}{N}\max\left\{p+1,q+1\right\}$ por hipótese, então

$$
1<pq<1+\frac{2}{N}\max\left\{p+1,q+1\right\}=1+\frac{2}{N}\left(p+1\right),
$$

pois $p\geq q$ e

$$
N-\frac{2\left(p+1\right)}{pq-1}=\frac{N\left(pq-1\right)-2\left(p+1\right)}{pq-1}<0,
$$

já que $pq-1<\frac{2}{N}\left(p+1\right)$, o que implica $N\left(pq-1\right)-2\left(p+1\right)<0$ e $1<pq$. Por outro lado, se $R\to\infty$, então

$$
\lim_{R\to\infty}\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt \leq \lim_{R\to\infty} CR^{N-\frac{2(p+1)}{pq-1}}=0
$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt=0$$
$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}\lim_{R\to\infty} v^p\left(x,t\right)\xi_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt=0$$
$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)dxdt=0 \quad\Rightarrow\quad v\equiv 0 \quad \text{(contradição)}.$$

Isto contradiz o fato que v é uma solução não trivial.

Se $pq=1+\frac{2}{N}\max\left\{p+1,q+1\right\}=1+\frac{2}{N}\left(p+1\right)$, então $N-\frac{2(p+1)}{pq-1}=0$. Logo, se $R\to\infty$, temos que

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)dxdt\leq C. \tag{3.10}$$

Em seguida, lidamos com o caso crítico. Seja $\zeta\left(x\right)\in C_0^\infty\left(B_1\right)$, tal que $\zeta\equiv 1$ em $B_{\frac{1}{2}}$ e $\zeta\geq 0$. Denote $\zeta_R\left(x\right):=\zeta\left(\frac{x}{R}\right)$, $x\in\mathbb{R}^N$. Multiplicando a primeira equação de (1.1) por $\zeta_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)$ e integrando em Q, obtemos

$$\begin{aligned} K_p\left(R\right) &:= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} v^p\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt \\ &= \underbrace{\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} u_t\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt}_{I_3}-\underbrace{\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}\left(J*u-u\right)\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt}_{I_4}. \end{aligned}$$

Agora, estimaremos I_3 e I_4. Observe que

$$I_3=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} u_t\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt=\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty u_t\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dtdx.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\mathbb{R}^N} u\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)\Big|_{t=0}^{t=\infty}dx-\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty u\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R'\left(t\right)dtdx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(x\right)\zeta_R\left(x\right)dx-\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty u\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R'\left(t\right)dtdx \\ &= -\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} u\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R'\left(t\right)dxdt-\int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(x\right)\zeta_R\left(x\right)dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} K_p\left(R\right)+\int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(x\right)\zeta_R\left(x\right)dx &= -\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} u\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R'\left(t\right)dxdt \\ &\quad -\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}\left(J*u-u\right)\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt. \end{aligned}$$

Como $u_0(x)\zeta_R(x)$ é não-negativo, então

$$\begin{aligned} K_p(R) \leq & -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\zeta_R(x)\,\psi_R'(t)\,dxdt \\ & -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} (J*u-u)(x,t)\,\zeta_R(x)\,\psi_R(t)\,dxdt. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Podemos obter, a partir de (3.2), que

$$\begin{aligned} & -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\zeta_R(x)\,\psi_R'(t)\,dxdt \leq CR^{-2}\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\zeta_R(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\,dxdt \\ = & \; CR^{-2}\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\left(\int_{B_R} u(x,t)\,\zeta_R(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} u(x,t)\,\zeta_R(x)\,\psi_R^{\frac{1}{q}}(t)\,dx\right)dt. \end{aligned}$$

Como ζ tem suporte compacto, temos que

$$\zeta_R(x) = \zeta\left(\frac{x}{R}\right) = 1,\ \left|\frac{x}{R}\right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \zeta_R(x) = \zeta\left(\frac{x}{R}\right) = 0,\ x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R.$$

Uma vez que $\psi_R^{\frac{1}{q}}(t) = \phi^{\frac{m}{q}}\left(\frac{t}{R^2}\right)$ e, como ϕ tem suporte compacto, então

$$\phi\left(\frac{t}{R^2}\right) \leq 1 \text{ em } \left[\frac{R^2}{2}, R^2\right] \text{ pois } \frac{R^2}{2} \leq t \leq R^2 \text{ o que implica } -1 \leq \frac{t}{R^2} \leq 1.$$

Assim,

$$-\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\zeta_R(x)\,\psi_R'(t)\,dxdt \leq CR^{-2}\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{B_R} u(x,t)dxdt. \tag{3.12}$$

Agora, temos que $(J*\zeta_R-\zeta_R)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J(z)\left(\zeta\left(\frac{x+z}{R}\right)-\zeta\left(\frac{x}{R}\right)\right)dz$. Pela formula de Taylor, segue diretamente que

$$\begin{aligned} \zeta\left(\tfrac{x+z}{R}\right)-\zeta\left(\tfrac{x}{R}\right) &= \zeta\left(\tfrac{x}{R}+\tfrac{z}{R}\right)-\zeta\left(\tfrac{x}{R}\right) = \left(\tfrac{z}{R}.\nabla\right)\zeta\left(\tfrac{x}{R}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{z}{R}.\nabla\right)^2\zeta\left(\tfrac{x+\theta z}{R}\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{z_i}{R}\zeta_{x_i}\left(\frac{x}{R}\right)+\sum_{i,j=1}^N \frac{z_iz_j}{2R^2}\zeta_{x_ix_j}\left(\frac{x+\theta z}{R}\right), \end{aligned}$$

onde $\theta \in [0,1]$. Por (3.5) temos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J(z)\,z_i dz = 0$. Como J tem suporte compacto e $\operatorname{supp}(J) = B_1$, então

$$\begin{aligned} (J*\zeta_R-\zeta_R)(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} J(z)\left(\sum_{i=1}^N \frac{z_i}{R}\zeta_{x_i}\left(\frac{x}{R}\right)+\sum_{i,j=1}^N \frac{z_iz_j}{2R^2}\zeta_{x_ix_j}\left(\frac{x+\theta z}{R}\right)\right)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} J(z)\sum_{i=1}^N \frac{z_i}{R}\zeta_{x_i}\left(\frac{x}{R}\right)dz+\int_{\mathbb{R}^N} J(z)\sum_{i,j=1}^N \frac{z_iz_j}{2R^2}\zeta_{x_ix_j}\left(\frac{x+\theta z}{R}\right)dz \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2R^2}\int_{\mathbb{R}^N} J(z)\sum_{i,j=1}^{N} z_i z_j \zeta_{x_i x_j}\left(\frac{x+\theta z}{R}\right)dz \\
&= \frac{1}{2R^2}\left(\int_{B_1} J(z)\sum_{i,j=1}^{N} z_i z_j \zeta_{x_i x_j}\left(\frac{x+\theta z}{R}\right)dz + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} J(z)\sum_{i,j=1}^{N} z_i z_j \zeta_{x_i x_j}\left(\frac{x+\theta z}{R}\right)dz\right) \\
&= \frac{1}{2R^2}\int_{B_1} J(z)\sum_{i,j=1}^{N} z_i z_j \zeta_{x_i x_j}\left(\frac{x+\theta z}{R}\right)dz \\
&= \frac{1}{2R^2}\sum_{i,j=1}^{N}\int_{B_1} J(z)\, z_i z_j \zeta_{x_i x_j}\left(\frac{x+\theta z}{R}\right)dz.
\end{aligned}
$$

Como $\zeta(x) \in C_0^\infty(B_1)$, tal que $\zeta \equiv 1$ em $B_{\frac{1}{2}}$ e $\zeta \geq 0$, então

$$
\frac{x+\theta z}{R} \in B_{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \zeta \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad \zeta_{x_i x_j} \equiv 0.
$$

Ademais,

$$
\frac{x+\theta z}{R} \in B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \left|\zeta_{x_i x_j}\left(\frac{x+\theta z}{R}\right)\right| \leq C,
$$

pois se $\frac{x+\theta z}{R} \in B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}$, então $\frac{1}{2} \leq \left|\frac{x+\theta z}{R}\right| \leq 1$ onde $\theta \in [0,1]$, $\quad z \in B_1$. Logo, $\frac{R}{2} \leq |x+\theta z| \leq R$.

Se $\frac{R}{2} \leq |x+\theta z| \leq |x| + |\theta z| \leq |x| + 1$ então $\frac{R}{2} - 1 \leq |x|$. Dai, se $|x| - |\theta z| \leq |x+\theta z| \leq R$, então $|x| \leq R + |\theta z| \leq R+1$, donde $|x| \leq R+1$. Logo, $\frac{R}{2} - 1 \leq |x| \leq R+1$. Portanto, temos que

$$
|(J * \zeta_R - \zeta_R)(x)| = \left|\frac{1}{2R^2}\sum_{i,j=1}^{N}\int_{B_1} J(z)\, z_i z_j \zeta_{x_i x_j}\left(\frac{x+\theta z}{R}\right)dz\right| \leq CR^{-2}\chi_{\left\{\frac{R}{2}-1\leq|x|\leq R+1\right\}}.
$$

Assim, podemos escolher R suficientemente grande para que

$$
\begin{aligned}
-I_4 &\leq CR^{-2}\int_0^\infty \int_{\frac{R}{2}-1\leq|x|\leq R+1} u(x,t)\,\psi_R(t)\,dxdt \\
&\leq CR^{-2}\int_0^{R^2} \int_{\frac{R}{2}-1\leq|x|\leq R+1} u(x,t)\,dxdt \\
&\leq CR^{-2}\int_0^{R^2} \int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R} u(x,t)\,dxdt,
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

pois $\psi_R(t) = \phi^m\left(\frac{t}{R^2}\right)$, onde ϕ tem suporte compacto e $\phi\left(\frac{t}{R^2}\right) \equiv 1$, para $\frac{t}{R^2} \in [0, \frac{1}{2})$ e $\phi\left(\frac{t}{R^2}\right) \leq 1$ para $\frac{t}{R^2} \in [\frac{1}{2}, 1)$. Substituindo (3.13) e (3.12) em (3.11), usando a desigualdade de Hölder em x e depois em t e a observação 2.9, obtemos

$$
\begin{aligned}
K_p(R) &\leq CR^{-2}\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{|x|\leq R} u(x,t)dxdt + CR^{-2}\int_0^{R^2}\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R} u(x,t)\,dxdt \\
&= CR^{-2}\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{|x|\leq R}\left(u(x,t)\,1^{\frac{1}{q}}\right)1^{\frac{1}{m}}dxdt \\
&\quad + CR^{-2}\int_0^{R^2}\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R}\left(u(x,t)\,1^{\frac{1}{q}}\right)1^{\frac{1}{m}}dxdt \\
&\leq CR^{-2}\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\left(\int_{|x|\leq R}\left(u(x,t)\,1^{\frac{1}{q}}\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{|x|\leq R}\left(1^{\frac{1}{m}}\right)^m dx\right)^{\frac{1}{m}}dt \\
&\quad + CR^{-2}\int_0^{R^2}\left(\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R}\left(u(x,t)\,1^{\frac{1}{q}}\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R}\left(1^{\frac{1}{m}}\right)^m dx\right)^{\frac{1}{m}}dt \\
&= CR^{-2}\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\left(\int_{|x|\leq R}u^q(x,t)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{|x|\leq R}1dx\right)^{\frac{1}{m}}dt \\
&\quad + CR^{-2}\int_0^{R^2}\left(\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R}u^q(x,t)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R}1dx\right)^{\frac{1}{m}}dt \\
&\leq CR^{-2}\left(\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{|x|\leq R}u^q(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{|x|\leq R}1dxdt\right)^{\frac{1}{m}} \\
&\quad + CR^{-2}\left(\int_0^{R^2}\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R}u^q(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{R^2}\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R}1dxdt\right)^{\frac{1}{m}} \\
&= CR^{-2}\left(\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{|x|\leq R}u^q(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{q}}\left(vol\left(B_R\right)\tfrac{R^2}{2}\right)^{\frac{1}{m}} \\
&\quad + CR^{-2}\left(\int_0^{R^2}\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R}u^q(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(vol\left(B_{2R}\right)-vol\left(B_{\frac{R}{4}}\right)\right)R^2\right)^{\frac{1}{m}} \\
&= CR^{-2}\left(\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{|x|\leq R}u^q(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\alpha(N)\tfrac{R^{N+2}}{2}\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&\quad + CR^{-2}\left(\int_0^{R^2}\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R}u^q(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\alpha(N)(2R)^N-\alpha(N)\left(\tfrac{R}{4}\right)^N\right)R^2\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&= CR^{-2}\left(\alpha(N)\tfrac{R^{N+2}}{2}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{|x|\leq R}u^q(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +CR^{-2}\left(\left((2)^{N}-\left(\tfrac{1}{4}\right)^{N}\right)\alpha\left(N\right)R^{N+2}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_{0}^{R^{2}}\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R}u^{q}\left(x,t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\; & CR^{N-\frac{(N+2)}{q}}\left(\int_{\frac{R^{2}}{2}}^{R^{2}}\int_{|x|\leq R}u^{q}\left(x,t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +CR^{N-\frac{(N+2)}{q}}\left(\int_{0}^{R^{2}}\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R}u^{q}\left(x,t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\; & CR^{N-\frac{(N+2)}{q}}\left(\left(\int_{\frac{R^{2}}{2}}^{R^{2}}\int_{|x|\leq R}u^{q}\left(x,t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{0}^{R^{2}}\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R}u^{q}\left(x,t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\; & CR^{N-\frac{(N+2)}{q}}\left(\int_{\frac{R^{2}}{2}}^{R^{2}}\int_{|x|\leq R}u^{q}\left(x,t\right)dxdt+\int_{0}^{R^{2}}\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R}u^{q}\left(x,t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Onde $vol\left(B_r\right)=r^{N}\alpha\left(N\right)$ e temos que $-2+\left(N+2\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)=-2+N+2-\frac{(N+2)}{q}=N-\frac{(N+2)}{q}$.

Da mesma forma, também podemos obter que

$$
\begin{aligned}
L_q\left(R\right) \;:=\; & \int_{0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N}u^{q}\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt \\
\leq\; & CR^{N-\frac{(N+2)}{p}}\left(\int_{\frac{R^{2}}{2}}^{R^{2}}\int_{|x|\leq R}v^{p}\left(x,t\right)dxdt+\int_{0}^{R^{2}}\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R}v^{p}\left(x,t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Combinando (3.14) com (3.15), observando que se $\frac{R}{4}<\frac{R}{2} \Rightarrow \zeta_R\left(x\right)\equiv 1$ e $\frac{R^2}{16}<\frac{R^2}{2} \Rightarrow \psi_R\left(t\right)\equiv 1$ e lembrando que $pq=\left(pq\right)_c$, obtemos

$$
\begin{aligned}
& K_p\left(\tfrac{R}{4}\right)\leq CR^{N-\frac{(N+2)}{q}}\left(\int_{\frac{R^{2}}{32}}^{\frac{R^{2}}{16}}\int_{|x|\leq\frac{R}{4}}u^{q}\left(x,t\right)dxdt+\int_{0}^{\frac{R^{2}}{16}}\int_{\frac{R}{16}\leq|x|\leq\frac{R}{2}}u^{q}\left(x,t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\; & CR^{N-\frac{(N+2)}{q}}\times \\
& \left(\int_{\frac{R^{2}}{32}}^{\frac{R^{2}}{16}}\int_{|x|\leq\frac{R}{4}}u^{q}\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt+\int_{0}^{\frac{R^{2}}{16}}\int_{\frac{R}{16}\leq|x|\leq\frac{R}{2}}u^{q}\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\; & CR^{N-\frac{(N+2)}{q}}\left(\int_{0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N}u^{q}\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt+\int_{0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N}u^{q}\left(x,t\right)\zeta_R\left(x\right)\psi_R\left(t\right)dxdt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq CR^{N-\frac{(N+2)}{q}}\left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u^q\,(x,t)\,\zeta_R\,(x)\,\psi_R\,(t)dxdt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= CR^{N-\frac{(N+2)}{q}}\left(L_q\,(R)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq CR^{N-\frac{(N+2)}{q}}\left(CR^{N-\frac{(N+2)}{p}}\left(\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{|x|\leq R} v^p\,(x,t)dxdt + \int_0^{R^2}\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R} v^p\,(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= CR^{N-\frac{(N+2)}{q}}C^{\frac{1}{q}}R^{\frac{N}{q}-\frac{(N+2)}{pq}}\left(\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{|x|\leq R} v^p\,(x,t)dxdt + \int_0^{R^2}\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R} v^p\,(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{pq}}\\
&\leq C\left(\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{|x|\leq R} v^p\,(x,t)dxdt + \int_0^{R^2}\int_{\frac{R}{4}\leq|x|\leq 2R} v^p\,(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{pq}}\\
&= C\left(\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{|x|\leq R} v^p\,(x,t)dxdt + \int_0^{R^2}\int_{|x|\leq 2R} v^p\,(x,t)dxdt - \int_0^{R^2}\int_{|x|\leq\frac{R}{4}} v^p\,(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{pq}}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&K_p\left(\tfrac{R}{4}\right)\\
&\leq C\left(\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{|x|\leq R} v^p\,(x,t)dxdt + \int_0^{R^2}\int_{|x|\leq 2R} v^p\,(x,t)dxdt - \int_0^{R^2}\int_{|x|\leq\frac{R}{4}} v^p\,(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{pq}}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Fazendo $R\to\infty$, obtemos

$$
\lim_{R\to\infty} K_p\left(\frac{R}{4}\right) \leq 0,
$$

$$
\lim_{R\to\infty}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} v^p\,(x,t)\,\zeta_{\frac{R}{4}}\,(x)\,\psi_{\frac{R}{4}}\,(t)\,dxdt \leq 0,
$$

$$
\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} v^p\,(x,t)dxdt \leq 0,
$$

$$
\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} v^p\,(x,t)dxdt = 0 \quad\Rightarrow\quad v\equiv 0 \text{ em } \mathbb{R}^N\times(0,\infty) \quad \text{(contradição)}.
$$

Isto contradiz o fato que v é uma solução não trivial.

Isto finaliza a demonstração do Teorema 3.1. $\square$

A prova da existência global será feito no Teorema 4.2.

4 SEGUNDO EXPOENTE CRÍTICO

4.1 Introdução e resultado principal

Neste capítulo, a fim de descrever a taxa crítica de decaimento dos dados iniciais na região de coexistência das soluções globais e não-globais, provaremos o Teorema 4.2 que refere-se ao segundo expoente crítico. Inicialmente, introduzimos o seguinte lema.

Lema 4.1 ([16], Proposição 1) *Assuma que $a \in (0, N)$ e $\phi \in \mathbb{I}^a$. Então*

$$(1+t)^{\frac{a}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t)\,\phi(y)\,dy \leq C\left(\|\phi\|_{L_a^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right) \tag{4.1}$$

e

$$\left(1+|x|^2\right)^{\frac{a}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t)\,\phi(y)\,dy \leq C\left(\|\phi\|_{L_a^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right), \tag{4.2}$$

onde W é definido em (1.2), C é uma constante positiva que depende apenas de N e J, e

$$L_a^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) := \left\{\varphi \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \;\; ; \;\; \|\varphi\|_{L_a^\infty} = \left\|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{a}{2}}\varphi\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty\right\}.$$

Demonstração. Primeiro mostraremos (4.1). Se t é muito pequeno, a desigualdade é óbvia. Logo, basta provar o resultado para t grande.

Agora por hipótese $\phi \in \mathbb{I}^a \quad \Rightarrow \quad \limsup_{|y|\to\infty} |y|^a \phi(y) < \infty \quad \Rightarrow \quad |y|^a \phi(y) \leq C \Rightarrow \phi(y) \leq C|y|^{-a} \leq Ct^{-a}$, Fazendo a mudança de variável $z = (1+t)\,y \;\Rightarrow\; (1+t)^{-1}z = y \quad \Rightarrow \quad (1+t)^{-N}dz = dy$, pela observação 2.10. Temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t)\,\phi(y)\,dy \\
&= \int_{|y|<t} W(x-y,t)\,\phi(y)\,dy + \int_{|y|\geq t} W(x-y,t)\,\phi(y)\,dy \\
&= \int_{|y|<t} W(x-y,t)\,\phi(y)\,dy + \int_{|y|\geq t} W(x-y,t)\,\phi^{\frac{1}{2}}(y)\,\phi^{\frac{1}{2}}(y)\,dy \\
&\leq \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{|y|<t} W(x-y,t)\,dy + \|\phi\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{|y|\geq t} Ct^{-\frac{a}{2}} W(x-y,t)\,dy \\
&\leq \left(1+|x|^2\right)^{\frac{a}{2}} \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{|y|<t} W(x-y,t)\,dy \\
&\quad + C\frac{(1+t)^{\frac{a}{2}}}{(1+t)^{\frac{a}{2}}} t^{-\frac{a}{2}} \|\phi\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{|y|\geq t} W(x-y,t)\,dy \\
&= \|\phi\|_{L^\infty_a(\mathbb{R}^N)} \int_{|y|<t} W(x-y,t)\,dy + C\frac{\left(\frac{1}{t}+1\right)^{\frac{a}{2}}}{(1+t)^{\frac{a}{2}}} \|\phi\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{|y|\geq t} W(x-y,t)\,dy \\
&\leq (1+t)^{N-\frac{a}{2}} \|\phi\|_{L^\infty_a(\mathbb{R}^N)} \int_{|y|<t} W(x-y,t)\,dy + \frac{C}{(1+t)^{\frac{a}{2}}} \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{|y|\geq t} W(x-y,t)\,dy \\
&\leq \frac{\|\phi\|_{L^\infty_a(\mathbb{R}^N)}}{(1+t)^{\frac{a}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t)\,(1+t)^N dy + \frac{C\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{(1+t)^{\frac{a}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t)\,dy \\
&= \frac{\|\phi\|_{L^\infty_a(\mathbb{R}^N)}}{(1+t)^{\frac{a}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} W\left(x-(1+t)^{-1}z,t\right)dz + \frac{C\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{(1+t)^{\frac{a}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t)\,dy \\
&\leq \frac{\|\phi\|_{L^\infty_a(\mathbb{R}^N)}}{(1+t)^{\frac{a}{2}}} + \frac{C\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{(1+t)^{\frac{a}{2}}} \\
&\leq \frac{C}{(1+t)^{\frac{a}{2}}} \left(\|\phi\|_{L^\infty_a(\mathbb{R}^N)} + \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right).
\end{aligned}
$$

Logo, temos que

$$
(1+t)^{\frac{a}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t)\,\phi(y)\,dy \leq C\left(\|\phi\|_{L^\infty_a(\mathbb{R}^N)} + \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right).
$$

A demonstração da desigualdade (4.2) é completamente análoga. □

O principal resultado deste capítulo é o seguinte teorema.

Teorema 4.2 ([17], Teorema 2) *Seja* $pq > (pq)_c$, *com dados iniciais não-triviais e não-negativos* $u_0(x) = \lambda\psi(x)$, $v_0(x) = \mu\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. *Sejam*

$$
a_0 = \frac{2(p+1)}{pq-1} \qquad e \qquad b_0 = \frac{2(q+1)}{pq-1}.
$$

i) Se $a > a_0$ e $b > b_0$, $\psi \in \mathbb{I}^a$, $\varphi \in \mathbb{I}^b$, então existe uma solução global, não-negativa e não-trivial de (1.1) desde que λ e μ sejam suficientemente pequenos e não-negativos.

ii) Se $0 < a < a_0$ ou $0 < b < b_0$, $\psi \in \mathbb{I}_a$, $\varphi \in \mathbb{I}_b$, então existe uma solução de (1.1) que explode em tempo finito.

4.2 Prova do Teorema 4.2

i) Note que é suficiente considerar o caso em que $a_0 < a < N$ e $b_0 < b < N$ com $u_0 = \lambda\psi \in \mathbb{I}^a$, $v_0 = \mu\varphi \in \mathbb{I}^b$. Ademais, observamos que, se λ e μ são suficientemente pequenos então existe uma solução global não-trivial e não-negativa. No caso em que $a \geq N$ e $b \geq N$, a conclusão pode ser obtida pelo teorema de comparação.

Sejam $\tilde{a} \in (a_0, a)$ e $\tilde{b} \in (b_0, b)$ satisfazendo

$$\tilde{a}q - 2 > \tilde{b}, \qquad \tilde{b}p - 2 > \tilde{a}.$$

É claro que $u_0 \in \mathbb{I}^a, \quad v_0 \in \mathbb{I}^b$.

Considere o espaço normado completo

$$X := \left\{ (u,v) \in C\left([0,\infty); L^\infty_{\tilde{a}}\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \times C\left([0,\infty); L^\infty_{\tilde{b}}\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \mid \quad \|(u,v)\|_X \leq M \right\},$$

com a norma

$$\|(u,v)\|_X := \sup_{t\geq 0} \left\{ (1+t)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + (1+t)^{\frac{\tilde{b}}{2}} \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|u(t)\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \|v(t)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}(\mathbb{R}^N)} \right\},$$

onde $M > 0$ é uma constante a ser determinada posteriormente.

Denote o operador $\mathcal{M}\left[(u,v)\right] := \left(\mathcal{M}_1\left[(u,v)\right], \mathcal{M}_2\left[(u,v)\right]\right)$ com

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1\left[(u,v)\right](x,t) \quad &:= \quad e^{-t}u_0(x) + \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t)\, u_0(y)\, dy + \int_0^t e^{-(t-s)} v^p(x,s)\, ds \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t-s)\, v^p(y,s)\, dyds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2\left[(u,v)\right](x,t) \quad &:= \quad e^{-t}v_0(x) + \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t)\, v_0(y)\, dy + \int_0^t e^{-(t-s)} u^q(x,s)\, ds \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t-s)\, u^q(y,s)\, dyds.
\end{aligned}$$

Seja $(u,v)\in X$. Pela Observação 2.10, temos que $\|W\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}=1-e^{-t}$, $\tilde{b}p>\tilde{a}+2$.
Como $v^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}(y,s)=\left(\left(1+|y|^2\right)^{\frac{\tilde{b}}{2}}v(y,s)\right)^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}\left(1+|y|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}\leq\|v(s)\|^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}_{L^\infty_{\tilde{b}}}\left(1+|y|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}$, pelo Lema 4.1 (desigualdade (4.1)), a definição de $L^\infty_{\tilde{b}}(\mathbb{R}^N)$ e pela definição do espaço X . Temos

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}W(x-y,t-s)\,v^p(y,s)\,dyds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{t}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}W(x-y,t-s)\,v^p(y,s)\,dyds+\int_{\frac{t}{2}}^t\int_{\mathbb{R}^N}W(x-y,t-s)\,v^p(y,s)\,dyds\\
&= \int_0^{\frac{t}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}W(x-y,t-s)\,v^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}(y,s)\,v^{p-\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}(y,s)\,dyds\\
&\quad+\int_{\frac{t}{2}}^t\int_{\mathbb{R}^N}W(x-y,t-s)\,v^p(y,s)\,dyds\\
&\leq \int_0^{\frac{t}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}W(x-y,t-s)\,v^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}(y,s)\,dy\|v(s)\|^{p-\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}ds\\
&\quad+\int_{\frac{t}{2}}^t\|v(s)\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\int_{\mathbb{R}^N}W(x-y,t-s)\,dyds\\
&\leq \int_0^{\frac{t}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}W(x-y,t-s)\,\|v(s)\|^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}_{L^\infty_{\tilde{b}}}\left(1+|y|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}dy\|v(s)\|^{p-\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}ds\\
&\quad+\int_{\frac{t}{2}}^t\|v(s)\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|W(t-s)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}ds\\
&\leq \int_0^{\frac{t}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}W(x-y,t-s)\,\|v(s)\|^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}_{L^\infty_{\tilde{b}}}\left(1+|y|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}dy\left((1+s)^{\frac{-\tilde{b}}{2}}\|v(s)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}}\right)^{\frac{\tilde{b}p-\tilde{a}}{\tilde{b}}}ds\\
&\quad+\int_{\frac{t}{2}}^t\|v(s)\|^p_{L^\infty_{\tilde{b}}}(1+s)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}}\|W(t-s)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}ds\\
&\leq \|v(s)\|^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}+\frac{\tilde{b}p-\tilde{a}}{\tilde{b}}}_{L^\infty_{\tilde{b}}}\int_0^{\frac{t}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}W(x-y,t-s)\left(1+|y|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}dy(1+s)^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}}ds\\
&\quad+\|v(s)\|^p_{L^\infty_{\tilde{b}}}\int_{\frac{t}{2}}^t(1+s)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}}ds\\
&= \|v(s)\|^p_{L^\infty_{\tilde{b}}}\int_0^{\frac{t}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}W(x-y,t-s)\left(1+|y|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}dy(1+s)^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}}ds\\
&\quad+\|v(s)\|^p_{L^\infty_{\tilde{b}}}\int_{\frac{t}{2}}^t(1+s)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}}ds\\
&\leq M^p\int_0^{\frac{t}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}W(x-y,t-s)\left(1+|y|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}dy(1+s)^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}}ds+M^p\int_{\frac{t}{2}}^t(1+s)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}}ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq CM^p \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-s)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} (1+s)^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}} ds + M^p \left(\frac{(1+t)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}+1}}{\frac{-\tilde{b}p}{2}+1} - \frac{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}+1}}{\frac{-\tilde{b}p}{2}+1} \right) \\
&\leq CM^p \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-s)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} (1+s)^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}} ds + M^p \left(- \frac{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}+1}}{\frac{-\tilde{b}p}{2}+1} \right) \\
&\leq CM^p \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-s)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} (1+s)^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}} ds + CM^p (1+t)^{\frac{-(\tilde{b}p-2)}{2}} \\
&\leq CM^p \left(1+\tfrac{t}{2}\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} \int_0^{\infty} (1+s)^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}} ds + CM^p (1+t)^{\frac{-(\tilde{b}p-2)}{2}} \\
&= CM^p \left(1+\tfrac{t}{2}\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} \left(0 - \frac{1}{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}+1} \right) + CM^p (1+t)^{\frac{-(\tilde{b}p-2)}{2}} \\
&\leq CM^p \left(1+\tfrac{t}{2}\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} + CM^p (1+t)^{\frac{-(\tilde{b}p-2)}{2}} \\
&\leq CM^p \left(1+\tfrac{t}{2}\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} + CM^p (1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} \text{ pois } \frac{-\left(\tilde{b}p-2\right)}{2} < \frac{-\tilde{a}}{2} \\
&\leq 2CM^p (1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} \leq CM^p (1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} \text{ pois } \left(1+\tfrac{t}{2}\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} \leq C(1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}},
\end{aligned}
$$

pelo Lema 4.1, para $\phi(y) = \left(1+|y|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}$, obtemos
$\int_{\mathbb{R}^N} W(x-y, t-s) \left(1+|y|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} dy \leq C(1+t-s)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} \left(\|\phi\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right)$,
além de isso se $\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}+1} \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}+1} \leq C(1+t)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}+1}$,
como $0 \leq s \leq \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad 1+t-s \geq 1+\frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad (1+t-s)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} \leq \left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}$
e $\tilde{b}p > \tilde{a}+2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{b}p-\tilde{a} > 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{-\left(\tilde{b}p-\tilde{a}\right)}{2} < -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-\left(\tilde{b}p-\tilde{a}\right)}{2}+1 < 0.$
Ademais, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^t e^{-(t-s)} v^p(x,s)\, ds &\leq \int_0^t e^{-(t-s)} \|v(s)\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds \\
&= \int_0^t e^{-(t-s)} (1+s)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}} \|v(s)\|^p_{L^\infty_{\tilde{b}}} ds \\
&\leq M^p \int_0^t e^{-(t-s)} (1+s)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}} ds \\
&= M^p \left(\int_0^{\frac{t}{2}} e^{-(t-s)} (1+s)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}} ds + \int_{\frac{t}{2}}^t e^{-(t-s)} (1+s)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}} ds \right) \\
&\leq M^p \left(\int_0^{\frac{t}{2}} e^{-(t-s)} ds + \int_{\frac{t}{2}}^t (1+s)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}} ds \right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq M^p\left(\int_0^{\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}}ds + \int_{\frac{t}{2}}^{t}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}} ds\right)\\
&= M^p\left(\tfrac{t}{2}e^{-\frac{t}{2}} + \tfrac{t}{2}\left(1+\tfrac{t}{2}\right)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}}\right)\\
&\leq M^p\left(\tfrac{t}{2}C(1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}-1} + \tfrac{t}{2}C(1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}-1}\right)\\
&= M^p\left(tC(1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}-1}\right)\\
&\leq CM^p(1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}},
\end{aligned}$$

pois $0 \leq s \leq \frac{t}{2} \quad\Rightarrow\quad 1 \leq 1+s \leq 1+\frac{t}{2} \quad\Rightarrow\quad (1+s)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}} \leq (1)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}} = 1, \quad \frac{-\tilde{b}p}{2} < 0,$

$\frac{t}{2} \leq s \leq t \quad\Rightarrow\quad \frac{t}{2} \geq t-s \geq 0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{t}{2} \leq -(t-s) \leq 0 \quad\Rightarrow\quad e^{-(t-s)} \leq e^0 = 1,$

$\frac{t}{2} \leq s \leq t \quad\Rightarrow\quad 1+\frac{t}{2} \leq 1+s \leq 1+t \quad\Rightarrow\quad (1+s)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}} \leq \left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}},$

$0 \leq s \leq \frac{t}{2} \quad\Rightarrow\quad t \geq t-s \geq \frac{t}{2} \quad\Rightarrow\quad -t \leq -(t-s) \leq -\frac{t}{2} \quad\Rightarrow\quad e^{-(t-s)} \leq e^{-\frac{t}{2}},$

$\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}} \leq C(1+t)^{\frac{-\tilde{b}p}{2}} \leq C(1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}-1}$ pois $\frac{-\tilde{b}p}{2} < \frac{-\tilde{a}}{2} - 1$

e $e^{\frac{t}{2}} \geq \left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}+1} \quad\Rightarrow\quad e^{\frac{-t}{2}} \leq \left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}-1} \leq C(1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}-1}.$

Daí,

$$\int_0^t e^{-(t-s)}v^p\,(x,s)\,ds \leq CM^p(1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}. \tag{4.3}$$

Portanto, pelo Lema 4.1 (desigualdade (4.1)), obtemos que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_1\left[(u,v)\right]| &\leq |e^{-t}u_0\,(x)| + \left|\int_{\mathbb{R}^N} W\,(x-y,t)\,u_0\,(y)\,dy\right| + \left|\int_0^t e^{-(t-s)}v^p\,(x,s)\,ds\right|\\
&\quad + \left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} W\,(x-y,t-s)\,v^p\,(y,s)\,dyds\right|\\
&\leq C + C(1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}\left(\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)}\right) + C(1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}M^p\\
&\quad + C(1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}M^p\\
&\leq C(1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}\left(\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)}\right) + C(1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}M^p.
\end{aligned}$$

Assim,

$$|\mathcal{M}_1\left[(u,v)\right]| \leq C(1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}\left(\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)}\right) + C(1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}M^p. \tag{4.4}$$

Por outro lado, pela estimativa (4.2), a definição do espaço X e pelo fato que $\tilde{b}p > \tilde{a}+2$, a igualdade $v^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}\,(y,s) = \left(\left(1+|y|^2\right)^{\frac{\tilde{b}}{2}}v\,(y,s)\right)^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}\left(1+|y|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} \leq \|v\,(s)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}}^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}\left(1+|y|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}$ e pelo

Lema 4.1 e a desigualdade (4.2) com $\phi(y) = \left(1+|y|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t-s)\, v^p(y,s)\, dyds \\
&= \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t-s)\, v^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}(y,s)\, v^{p-\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}(y,s)\, dyds \\
&\leq \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t-s)\, v^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}(y,s)\, dy \|v(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{p-\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}} ds \\
&\leq \int_0^t \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t-s)\, \|v(s)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}}^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}} \left(1+|y|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} dy \|v(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{p-\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}} ds \\
&\leq \int_0^t \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t-s)\, \|v(s)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}}^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}} \left(1+|y|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} dy \Big((1+s)^{\frac{-\tilde{b}}{2}} \|v(s)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}} \Big)^{\frac{\tilde{b}p-\tilde{a}}{\tilde{b}}} ds \\
&= \|v(s)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}}^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}+\frac{\tilde{b}p-\tilde{a}}{\tilde{b}}} \int_0^t \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t-s) \left(1+|y|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} dy (1+s)^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}} ds \\
&\leq CM^p \int_0^t \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} (1+s)^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}} ds \\
&= CM^p \int_0^t (1+s)^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}} ds \\
&= CM^p \left(\frac{(1+t)^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}+1}}{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}+1} - \frac{(1+0)^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}+1}}{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}+1} \right) \\
&\leq CM^p.
\end{aligned}$$

Além disso, $v^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}(x,s) = \left(\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{b}}{2}} v(x,s) \right)^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} \leq \|v(s)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}}^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}}$, pelo Lema (4.1) o espaço $L^\infty_{\tilde{b}}\left(\mathbb{R}^N\right)$, também temos que

$$\begin{aligned}
&\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \int_0^t e^{-(t-s)} v^p(y,s)\, ds \\
&= \int_0^t e^{-(t-s)} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} v^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}(y,s)\, v^{p-\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}(y,s)\, ds \\
&\leq \int_0^t e^{-(t-s)} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} v^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}(y,s)\, \|v(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{p-\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}} ds \\
&\leq \int_0^t e^{-(t-s)} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \|v(s)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}}^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} \|v(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{p-\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}} ds \\
&= \int_0^t e^{-(t-s)} \|v(s)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}}^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}} \Big((1+s)^{\frac{-\tilde{b}}{2}} \|v(s)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}} \Big)^{\frac{\tilde{b}p-\tilde{a}}{\tilde{b}}} ds \\
&= \|v(s)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}}^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}+\frac{\tilde{b}p-\tilde{a}}{\tilde{b}}} \int_0^t e^{-(t-s)} (1+s)^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}} ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M^p \int_0^t e^{-(t-s)}(1+s)^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}} ds \\
&\leq M^p \int_0^t e^{-(t-s)} ds \\
&= M^p \left(1-e^{-t}\right) \leq CM^p,
\end{aligned}
$$

pois $0 \leq s \leq t \quad \Rightarrow \quad 1 \leq 1+s \leq t+1 \quad \Rightarrow \quad (1+s)^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}} \leq 1^{\frac{-(\tilde{b}p-\tilde{a})}{2}} = 1.$

Portanto, temos que

$$
\begin{aligned}
\left|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \mathcal{M}_1\left[(u,v)\right]\right| &\leq \left|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} e^{-t} u_0(x)\right| \\
&+ \left|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t)\, u_0(y)\, dy\right| \\
&+ \left|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \int_0^t e^{-(t-s)} v^p(x,s)\, ds\right| \\
&+ \left|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} W(x-y,t-s)\, v^p(y,s)\, dyds\right| \\
&\leq C + C\left(\|u_0\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right) + CM^p + CM^p \\
&\leq C\left(\|u_0\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right) + CM^p.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\left|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \mathcal{M}_1\left[(u,v)\right]\right| \leq C\left(\|u_0\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right) + CM^p. \tag{4.5}
$$

Repetindo os argumentos para a obtenção de (4.4) e (4.5), concluímos que

$$
\left|\mathcal{M}_2\left[(u,v)\right]\right| \leq C(1+t)^{\frac{-\tilde{b}}{2}} \left(\|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^\infty_{\tilde{b}}(\mathbb{R}^N)}\right) + C(1+t)^{\frac{-\tilde{b}}{2}} M^q,
$$

$$
\left|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{b}}{2}} \mathcal{M}_2\left[(u,v)\right]\right| \leq C\left(\|v_0\|_{L^\infty_{\tilde{b}}(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right) + CM^q.
$$

As desigualdades acima juntamente com (4.4) e (4.5) implicam que

$\|\mathcal{M}(u,v)\|_X = \|(\mathcal{M}_1[(u,v)], \mathcal{M}_2[(u,v)])\|_X$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{t\in[0,\infty)} \Big\{(1+t)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \|\mathcal{M}_1[(u,v)](t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + (1+t)^{\frac{\tilde{b}}{2}} \|\mathcal{M}_2[(u,v)](t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad + \|\mathcal{M}_1[(u,v)](t)\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \|\mathcal{M}_2[(u,v)](t)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}(\mathbb{R}^N)}\Big\} \\
&\leq \sup_{t\in[0,\infty)} \Big\{(1+t)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \left((1+t)^{\frac{-\tilde{a}}{2}} \left(C\left(\|u_0(t)\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \|u_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right) + CM^p\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + (1+t)^{\frac{\tilde{b}}{2}} \left((1+t)^{\frac{-\tilde{b}}{2}} \left(C \left(\|v_0(t)\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \|v_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right) + CM^q \right) \right) \\
& + \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{a}}{2}} \|\mathcal{M}_1 [(u,v)](t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\tilde{b}}{2}} \|\mathcal{M}_2 [(u,v)](t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \Big\} \\
\leq \ & \sup_{t\in[0,\infty)} \Big\{ C \left(\left(\|u_0(t)\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \|u_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right) + M^p \right) \\
& + C \left(\left(\|v_0(t)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}(\mathbb{R}^N)} + \|v_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right) + M^q \right) \\
& + C \left(\left(\|u_0(t)\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \|u_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right) + M^p \right) \\
& + C \left(\left(\|v_0(t)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}(\mathbb{R}^N)} + \|v_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right) + M^q \right) \Big\} \\
= \ & \sup_{t\in[0,\infty)} \Big\{ 2C \left(\left(\|u_0(t)\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \|u_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right) + M^p \right) \\
& + 2C \left(\left(\|v_0(t)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}(\mathbb{R}^N)} + \|v_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right) + M^q \right) \Big\} \\
\leq \ & \sup_{t\in[0,\infty)} \Big\{ C(\|u_0(t)\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \|u_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|v_0(t)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}(\mathbb{R}^N)} \\
& + \|v_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + M^p + M^q) \Big\} \\
\leq \ & C \big(\|u_0(t)\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \|u_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|v_0(t)\|_{L^\infty_{\tilde{b}}(\mathbb{R}^N)} + \|v_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\
& + M^p + M^q \big).
\end{aligned}
$$

Portanto, temos que

$$
\|\mathcal{M}(u,v)\|_X \leq C \left(\|u_0\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^\infty_{\tilde{b}}(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + M^p + M^q \right).
$$

Desta forma, podemos escolher λ, μ e M suficientemente pequenos para que $\mathcal{M}$ leve X em se mesmo. Aplicando um processo análogo, pode-se provar que $\mathcal{M}$ é uma contração estrita, desde que M seja escolhido ainda menor, se necessário. Então, temos que $u_0(x) = \lambda\psi(x)$, $v_0(x) = \mu\varphi(x)$, λ, $\mu > 0$ e p, $q > 1$. Logo:

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{M}(u,v)\|_X \ & \leq \ C(\lambda \|\psi\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \lambda\|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \mu\|\varphi\|_{L^\infty_{\tilde{b}}(\mathbb{R}^N)} + \mu\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + M^p + M^q) \\
& = \ C(\lambda \|\psi\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \lambda\|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \mu\|\varphi\|_{L^\infty_{\tilde{b}}(\mathbb{R}^N)} + \mu\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) + CM^p + CM^q \\
& \qquad \text{tome } \ \gamma = \max\{\lambda, \mu\} \\
& \leq \ C\gamma(\|\psi\|_{L^\infty_{\tilde{a}}(\mathbb{R}^N)} + \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|\varphi\|_{L^\infty_{\tilde{b}}(\mathbb{R}^N)} + \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) + CM^p + CM^q
\end{aligned}
$$

$$\text{escolha } CM^{p-1} \leq \tfrac{1}{3} \wedge CM^{q-1} \leq \tfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad CM^p \leq \tfrac{M}{3} \wedge CM^q \leq \tfrac{M}{3}$$

$$\leq \quad \tfrac{M}{3} + \tfrac{M}{3} + \tfrac{M}{3} = M.$$

Isto prova a parte i) do Teorema 4.2.

ii) Sem perda de generalidade, podemos assumir que $a \in (0, a_0)$ com $u_0 \in \mathbb{I}_a$. Assim, existe R_0 tal que $u_0 \geq C|x|^{-a}$, para todo $|x| \geq R_0$. Agora, suponha, para efeito de contradição, que existe uma solução global não-trivial e não-negativa (u, v) de (1.1). Pela estimativa (3.9), obtemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v^p\,(x,t)\,\xi_R\,(x)\,\psi_R\,(t)\,dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0\,(x)\,\xi_R\,(x)\,dx \\
&\leq CR^{N-\frac{2(p+1)}{pq-1}} + \tfrac{1}{pq}\int_0^{R^2} \int_{\mathbb{R}^N} v^p\,(x,t)\,\xi_R\,(x)\,\psi_R\,(t)\,dxdt.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left(1 - \frac{1}{pq}\right)\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v^p\,(x,t)\,\xi_R\,(x)\,\psi_R\,(t)\,dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0\,(x)\,\xi_R\,(x)\,dx \leq CR^{N-\frac{2(p+1)}{pq-1}}.$$

Como $\left(1 - \frac{1}{pq}\right)\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v^p\,(x,t)\,\xi_R\,(x)\,\psi_R\,(t)\,dxdt$ é não-negativa, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0\,(x)\,\xi_R\,(x)\,dx \leq CR^{N-\frac{2(p+1)}{pq-1}} = CR^{N-a_0},$$

pois $a_0 = \frac{2(p+1)}{pq-1}$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0\,(x)\,e^{\frac{-|x|^2}{R^2}}dx \leq CR^{N-a_0}.$$

Observe que, se $R \leq |x| \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \frac{|x|^2}{R^2}$, fazendo $y = \frac{x}{R} \quad \Rightarrow \quad dy = R^{-N}dx \quad \Rightarrow$ $R^N dy = dx$. Logo obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} u_0\,(x)\,e^{\frac{-|x|^2}{R^2}}dx &\geq \int_{\mathbb{R}^N} C|x|^{-a}e^{\frac{-|x|^2}{R^2}}dx \\
&= \int_{B_R} C|x|^{-a}e^{\frac{-|x|^2}{R^2}}dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} C|x|^{-a}e^{\frac{-|x|^2}{R^2}}dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} C|x|^{-a}e^{\frac{-|x|^2}{R^2}}dx \\
&= C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} R^{-a}|y|^{-a}e^{-|y|^2}R^N dy \\
&= C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} R^{-a}|x|^{-a}e^{-|x|^2}R^N dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= CR^{N-a}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1}|x|^{-a}e^{-|x|^2}dx \\ &\geq CR^{N-a}, \end{aligned}$$

para todo $R \geq R_0$. Portanto,

$$CR^{N-a_0} \geq \int_{\mathbb{R}^N} C|x|^{-a}e^{\frac{-|x|^2}{R^2}}dx \geq CR^{N-a} \quad \Rightarrow \quad R^{a-a_0} \geq 1.$$

Como $a - a_0 < 0$, fazendo $R \to \infty$ na desigualdade acima, concluímos que $0 \geq 1$, o que é um absurdo. Isto completa a demonstração do teorema. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] C. Brandle, E. Chasseigne, R. Ferreira, **Unbounded solutions of the nonlocal heat equation**, Commun. Pure Appl. Anal. 10, no. 6, 1663–1686, 2011.

[2] H. Brezis, **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**, Springer Science & Business Media, 2010.

[3] C. Carrillo, P. Fife, **Spatial effects in discrete generation population models**, J. Math. Biol. 50, no. 2, 161–188, 2005.

[4] K. Deng, H. Levine, **The role of critical exponents in blow-up theorems: the sequel**, J. Math. Anal. Appl. 243, no. 1, 85–126, 2000.

[5] M. Escobedo, M. A. Herrero, **Boundedness and blow-up for a semilinear reaction-diffusion system**, J. Differential Equations 89, no. 1, 176–202, 1991.

[6] L. Evans, **Partial differential equations**, Graduate studies im mathematics, American Mathematical Society, v. 19, 1998.

[7] H. Fujita, **On the blowing up of solution of the Cauchy problem for** $u_t = \Delta u + u^{\alpha+1}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 13, 109-124, 1966.

[8] J. García-Melián, F. Quirós, **Fujita exponents for evolution problems with nonlocal diffusion**, J. Evol. Equ. 10, no. 1, 147–161, 2010.

[9] S. Kaplan, **On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations**, Comm. Pure Appl. Math. 16, 305–330, 1963.

[10] T. Y. Lee, W. M. Ni, **Global existence, large time behavior and life span on solution of a semilinear parabolic Cauchy problem**, Trans. Amer. Math. Soc. 333, 365-378, 1992.

[11] H. Levine, **The role of critical exponents in blowup theorems**, SIAM Rev. 32, no. 2, 262–288, 1990.

[12] É. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, **A priori estimates and the absence of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities**, Tr. Mat. Inst. Steklova 234, 1–384, 2001.

[13] K. Mochizuki, **Blow-up, life span and large time behavior of solutions of a weakly coupled system reaction-diffusion equations**, Adv. Math. Appl. Sci. 48, 175-198, 1998.

[14] A. Pazoto, J. D. Rossi, **Asymptotic behavior for a semilinear nonlocal equation**, Asymptot. Anal. 52, 143-155, 2007.

[15] P. Quittner, P. Souplet, **Superlinear Parabolic Problems: Blow-up, Global Existence and Steady States**, Birkhäuser Advanced Texts, Basel/Boston/Berlin, 2007.

[16] J. Terra, N. Wolanski, **Large time behavior for a nonlocal diffusion equation with absorption and bounded initial data**, Discrete Contin. Dyn. Syst. 31, no. 2, 581–605, 2011.

[17] J. Yang, **Fujita-type phenomenon of nonlinear coupled nonlocal diffusion system**, J. Math. Anal. Appl. 428, no. 1, 227–237, 2015.