



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

PLÍNIO RUBENS DE FARIAS MARCOLINO

**COMPREENSÕES DE ESTUDANTES DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO SOBRE O
CONCEITO DE MÉDIA ARITMÉTICA**

Caruaru

2020

PLÍNIO RUBENS DE FARIAS MARCOLINO

**COMPREENSÕES DE ESTUDANTES DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO SOBRE O
CONCEITO DE MÉDIA ARITMÉTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho

Caruaru

2020

PLÍNIO RUBENS DE FARIAS MARCOLINO

**COMPREENSÕES DE ESTUDANTES DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO SOBRE O
CONCEITO DE MÉDIA ARITMÉTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciência e Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em: 04/06/2020.

BANCA EXAMINADORA

Participação via videoconferência

Prof. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco – Campos do Agreste

Participação via videoconferência

Prof. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco – Campos do Agreste

Participação via videoconferência

Profa. Dra. Liliane Maria Teixeira Lima de Carvalho (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Pernambuco - Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino

OBSERVAÇÃO

A defesa em epígrafe foi realizada integralmente, por videoconferência, envolvendo a Banca Examinadora e a discente, através de recursos de videoconferência, que possibilitaram realizar a discussão acadêmica sobre o objeto de estudo, com som e imagem. A defesa assim ocorreu, em virtude da suspensão das atividades acadêmicas presenciais, adotada pelo Consórcio Pernambuco Universitatis e os Institutos Federais do Estado de Pernambuco, por período indeterminado (UPE, UFPE, UFRPE, IFPE, IFR Sertão, UNICAP e UNIVASF), considerando a pandemia do novo Coronavírus (COVID-19).

AGRADECIMENTOS

É difícil escrever em uma página o quão grato estou por este trabalho. Agradeço primeiramente a Deus e à Nossa Senhora pelo fim de mais uma etapa em minha vida, pelo sonho que se concretiza e por me proporcionarem sabedoria e paciência na construção desta pesquisa. Porque Deles, por meio Deles e para Eles são todas as coisas em minha vida.

Agradeço aos meus pais, Sebastião e Marinês, meus maiores exemplos. Obrigado por cada incentivo e orientação, pelas orações em meu favor, pela preocupação para que eu estivesse sempre percorrendo o caminho correto e por sempre me apoiarem nos meus estudos.

Ao meu irmão Paulo, que é meu melhor amigo. Se não fosse o caminho trilhado por você eu não teria chegado, certamente, nem perto de concluir esta etapa e, a cada dia, você me deu forças para chegar ao sucesso profissional e pessoal que você possui e que eu tanto admiro.

A meus avós (*in memoriam*), que com suas simplicidades me deram forças para seguir sempre em busca dos meus sonhos, em especial na educação.

Agradeço ao meu orientador, Ivanildo F. de Carvalho, pela paciência, pelas orientações, que foram momentos de extremo aprendizado, por todas as sugestões e dicas na construção do trabalho, por me dar forças em momentos de angústia.

Aos colegas e docentes do PPGECM, que me proporcionaram momentos de alegrias e de extremo crescimento intelectual.

À banca examinadora, professores Liliane Maria e Edelweis José por suas disponibilidades e contribuições na melhoria do trabalho.

Às gestoras das escolas nas quais trabalhei ao longo da pesquisa, Rosimere e Tassiane, por compreenderem os momentos em que tive que me ausentar do trabalho para realização da pesquisa.

Aos amigos e colegas de trabalho, que me deram forças para continuar com a pesquisa e acreditar na Educação Pública e de qualidade.

Às escolas nas quais realizei a pesquisa e aos seus respectivos alunos, que se disponibilizaram a ajudar para a realização desta.

Obrigado a todos que, mesmo não citados aqui, tanto contribuíram para a conclusão desta etapa em minha vida.

“Meu ardente desejo e minha esperança são que em nada serei confundido, mas que, hoje como sempre, Cristo será glorificado no meu corpo (tenho toda a certeza disto), quer pela minha vida, quer pela minha morte. Porque para mim o viver é Cristo e o morrer é lucro” (Filipenses 1:20-21).

RESUMO

O presente estudo investigou como o conceito de média aritmética é compreendido por estudantes do terceiro ano do Ensino Médio. Tem como base teórica os campos conceituais desenvolvidos por Gerárd Vergnaud. Participaram desta pesquisa 231 alunos oriundos de três cidades e cinco escolas públicas que fazem parte da Gerência Regional de Educação – Mata Centro (GRE- Mata Centro) – Secretaria de Educação de Pernambuco. Os estudantes responderam individualmente a um instrumento diagnóstico composto por cinco questões que consideraram os diferentes significados e propriedades que sustentam o conceito de média aritmética. A análise dos dados se deu por categorizações das estratégias implementadas pelos estudantes, organizadas e comparadas por meio de um programa estatístico. Os dados deste estudo demonstram um desempenho abaixo do desejado para estudantes concluintes do Ensino Médio. Observou-se que nenhum dos sujeitos respondeu corretamente a todas às questões do instrumento diagnóstico. A média aritmética da quantidade de acertos foi de 2,23 pontos quando poderiam ser alcançados 7 pontos. Na resolução das questões, os estudantes se detêm em procedimentos de cálculo e não realizam uma análise crítica e reflexiva do que as questões propõem. Quando analisamos as propriedades e significados da média aritmética, percebemos que em algumas situações as propriedades influenciam mais que os significados no nível de desempenho dos estudantes. Evidenciamos a importância da abordagem dos diferentes significados e propriedades na compreensão do conceito de média aritmética e acreditamos que há possibilidades didáticas possíveis para o ensino e aprendizagem da média aritmética nas escolas e, de forma mais ampla, para o letramento estatístico dos estudantes. Com os resultados deste estudo reforçamos a discussão sobre a formação inicial e continuada de professores no campo da Educação Estatística.

Palavras-chave: Média aritmética. Medidas de Tendência Central. Teoria dos Campos Conceituais. Letramento Estatístico. Educação Estatística.

ABSTRACT

This study investigated how the concept of 'arithmetic mean' is understood by students in the third year of high school. This study has as a theoretical basis the conceptual fields developed by Gerárd Vergnaud. A total of 231 students participated in this research from three cities and five public schools that are part of the Regional Education Management - Mata Centro (Gerência Regional de Educação - Mata Centro) - Pernambuco Department of Education. The students responded individually to a diagnostic instrument composed of five questions, which considered the different meanings and properties that support the concept of 'arithmetic mean'. Data analysis was carried out by categorizing the strategies implemented by the students. These strategies were then organized and compared using a statistical program. The data in this study demonstrated that the participants in the study had a performance that was below the desired level for high school graduates. It is noteworthy that none of the subjects answered all questions correctly in the diagnostic instrument. The 'arithmetic mean' of the number of correct answers was 2.23 points when 7 points could be achieved. In solving the questions, students stopped at calculation procedures and did not carry out a critical and reflective analysis of what the questions proposed. When we analyze the properties and meanings of the 'arithmetic mean' we realize the students' performance level is influenced more by the properties of the mean than its meaning. In this study we highlight the importance of addressing the different meanings and properties in understanding the concept of 'arithmetic mean', and we believe that there are possible didactic possibilities for teaching and learning 'arithmetic mean' in schools, and more broadly, for students' statistical literacy. With the results of this study, we reinforce the discussion on the initial and continuing education of teachers in the field of Statistical Education.

Keywords: Arithmetic Mean. Measures of Central Tendency. Theory of Conceptual Fields. Statistical Literacy. Statistical Education.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Modelo do letramento estatístico de Gal.....	24
Tabela 2 –	Conhecimentos estatísticos necessários para o letramento.....	25
Tabela 3 –	Significado da média aritmética.....	36
Tabela 4 –	Exemplo do significado 3.....	38
Tabela 5 –	Cidades e escolas selecionadas para fazerem parte da pesquisa....	46

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Quadro 1 –	Frequência do ensino de estatística nas propostas curriculares.....	28
Quadro 2 –	Propriedades da média.....	40
Quadro 3 –	Resumo da classificação metodológica.....	45
Quadro 4 –	Significados e propriedades por questão.....	56
Quadro 5 –	Alunos por sexo biológico e município.....	57
Gráfico 1 –	Quantidade de acertos por questões.....	58
Quadro 6 –	Quantidade de acertos, erros e em branco por questões.....	59
Gráfico 2 –	Número de respostas corretas por estudantes.....	60
Gráfico 3 –	Distribuição de acertos por município.....	61
Gráfico 4 –	Distribuição de acertos por escolas.....	62
Quadro 7 –	Enunciado da questão Q3a e Q3b.....	64
Quadro 8 –	Enunciado das questões Q4, Q5a e Q5b	66
Quadro 9 –	Percentual de acertos por questão, significado e propriedade.....	68
Quadro 10 –	Tipos de respostas, estratégias e seus respectivos percentuais apresentados pelos alunos ao resolverem a Q1.....	72
Gráfico 5 –	Quantidade de alunos que escolheram cada letra na Q1.....	73
Figura 1 –	Resposta correta da Q1, fazendo uso do conceito da média aritmética.....	74
Figura 2 –	Resposta incorreta da Q1, utilizando o número mais comum, que é o 6,3.....	75
Figura 3 –	Resposta incorreta da Q1, com uso do algoritmo da média aritmética.....	76
Quadro 11 –	Tipos de respostas, estratégias e seus respectivos percentuais apresentados pelos alunos ao resolverem a Q2.....	77
Figura 4 –	Resposta incorreta da Q2, com uso do algoritmo da média aritmética.....	79
Figura 5 –	Resposta incorreta da Q2, com uso de compensação em função do valor da média.....	80
Figura 6 –	Resposta incorreta da Q2, com uso do algoritmo da média aritmética, porém dividido por 5.....	81

Quadro 12 –	Tipos de respostas, estratégias e seus respectivos percentuais apresentados pelos alunos ao resolverem a Q3a.....	83
Figura 7 –	Resposta correta da questão Q3a, com explicitação do procedimento de resolução.....	84
Figura 8 –	Resposta incorreta da Q3a, com uso da média aritmética, mas desconsiderando os cinco alunos envolvidos no enunciado da questão.....	85
Quadro 13 –	Tipos de respostas, estratégias e seus respectivos percentuais apresentados pelos alunos ao resolverem a Q3b.....	86
Figura 9 –	Justificativa por um dos alunos referente à Q3b, trata-se do aumento das variáveis e do aumento da média aritmética.....	87
Figura 10 –	Justificativa de dois alunos referentes à Q3b, resposta incorreta, desconsideram que o aumento de um livro alteraria a média.....	88
Quadro 14 –	Tipos de respostas, estratégias e seus respectivos percentuais apresentados pelos alunos ao resolverem a Q3b.....	90
Figura 11 –	Resposta correta com explicação do procedimento de resolução da Q4.....	92
Figura 12 –	Resposta incorreta da Q4, com uso de variáveis que apresentam números inferiores ou iguais à média 3.....	93
Quadro 15 –	Tipos de respostas, estratégias e seus respectivos percentuais apresentados pelos alunos ao resolverem a Q5a.....	94
Figura 13 –	Resposta correta da Q5a, com uso da média aritmética ponderada.....	96
Figura 14 –	Resposta incorreta da Q5a, com a soma das variáveis referentes às horas.....	97
Figura 15 –	Resposta incorreta da Q5a, com a soma das horas das atividades físicas de todos os alunos.....	97
Quadro 16 –	Tipos de respostas, estratégias e seus respectivos percentuais apresentados pelos alunos ao resolverem a Q5b.....	99
Figura 16 –	Resposta correta da Q5b, com uso da média aritmética ponderada.....	101
Figura 17 –	Resposta incorreta da Q5b, com a soma das variáveis referentes às horas.....	102

Figura 18 – Resposta incorreta da Q5b, com a soma das horas que o grupo
(10 alunos) gastou ao ouvir música e praticar esportes..... 103

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	13
2	EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA.....	18
2.1	Uma breve discussão da história da estatística.....	18
2.2	Letramento estatístico.....	22
2.3	Educação Estatística no currículo.....	26
2.4	Estudos sobre a média aritmética.....	29
3	TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E O CAMPO CONCEITUAL DA MÉDIA ARITMÉTICA.....	34
3.1	Os significados da média aritmética.....	36
3.2	As propriedades do conceito de média aritmética.....	39
4	METODOLOGIA.....	43
4.1	Características da pesquisa	43
4.2	Participantes.....	46
4.3	Procedimentos.....	47
4.4	Instrumentos de coleta de dados.....	47
4.5	Instrumento diagnóstico (questões).....	49
5	ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS ESTUDANTES DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO.....	57
5.1	Análise geral do desempenho dos estudantes.....	58
5.2	Análise de desempenho em relação aos significados e propriedades.....	63
6	ESTRATÉGIAS QUE OS ESTUDANTES UTILIZARAM NA RESOLUÇÃO DO INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO.....	72
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	105
	REFERÊNCIAS.....	111
	APÊNDICE A: CARTA DE ANUÊNCIA.....	117
	APÊNDICE B: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.....	118

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, há grandes avanços na área de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem de Estatística, contribuindo para o surgimento de uma área de estudos denominada Educação Estatística. Um dos aspectos dessa área de conhecimentos envolve a compreensão e interpretação de dados que visam facilitar determinadas decisões, em diferentes áreas da sociedade (LOPES, 2010). Desta forma, dada a importância da Educação Estatística para os cidadãos, busca-se constantemente estudar e entender como se ensina e se aprende conteúdos de Estatística, contribuindo, assim, para o desenvolvimento de metodologias e materiais para facilitar o ensino, visando o desenvolvimento do letramento estatístico (CONTI, 2018).

O letramento estatístico objetiva o desenvolvimento do pensamento estatístico, em que a pessoa desenvolve a habilidade de utilizar as ideias estatísticas compreendidas na escola para atribuir significados aos dados estatísticos encontrados diariamente (LOPES, 2010), corroborando, assim, para que o cidadão desenvolva a habilidade de compreender, argumentar e avaliar criticamente as informações estatísticas (GAL, 2002).

Compreendendo a importância de contribuir no desenvolvimento da sociedade, acreditamos que a escola é essencial nesse processo, já que é nela que se trabalha a formação do caráter, de valores e princípios morais que direcionarão os alunos para uma formação crítica e argumentativa, garantindo que todos eles desenvolvam habilidades para a vida em sociedade, de forma que eles possam atuar de maneira efetiva em seu meio social.

Em contrapartida, algumas pesquisas (LOPES, 2008) consideram que o ensino de Estatística não está sendo trabalhado de forma satisfatória e, portanto, não corroborando para que a sociedade tenha um maior grau de criticidade. Os autores elencam que a insatisfação no ensino de Estatística já começa com a falta de informação dos professores que lecionam tais conteúdos nessa área.

Não é suficiente, por parte do professor, apenas o didático na transmissão dos conteúdos. É essencial que o docente combine, de forma adequada, o conhecimento acerca do conteúdo matemático e o conhecimento pedagógico e didático de como ensiná-lo (LOPES, 2008).

Assim, enfatiza-se a importância do professor em buscar novas metodologias para o ensino de Estatística, já que muitos utilizam apenas o livro didático como principal recurso em sala de aula. Em alguns casos, os docentes deixam de ensinar conteúdos relacionados à Estatística, os quais, em muitos livros, encontram-se em seu final.

Há mais de duas décadas, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática - PCN (BRASIL, 1998) para a Educação Básica abriram espaço para a Educação Estatística e

Probabilidade no Brasil (LOPES, 1998). Vinte anos depois, com a aprovação da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017), este espaço, para a Educação Estatística, ganha ainda mais notoriedade. O novo documento que norteia a Educação Básica no Brasil enfatiza que a abordagem da Estatística e da Probabilidade pode ser desenvolvida por meio de projetos desde os anos iniciais (BRASIL, 2017).

Propõe a abordagem de conceitos, os quais considera essenciais. Com tal abordagem, espera-se que a população desenvolva habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e organizar dados de uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas, inclusive raciocinar acerca de conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos (BRASIL, 2017).

Neste sentido, a BNCC propõe métodos que contribuem para o desenvolvimento de habilidades voltadas para o senso crítico e argumentativo dos alunos. O ensino de Estatística, portanto, se constitui como algo fundamental para o desenvolvimento dessas habilidades favorecendo assim, o exercício da cidadania.

A BNCC recomenda que o estudo da Estatística e Probabilidade deve ocorrer desde o 1º ano do Ensino Fundamental e que, nessa fase, as crianças devem desenvolver habilidades de leitura de tabelas e de gráficos de colunas simples, como também saber coletar e organizar informações (BRASIL, 2017). Portanto, desde os anos iniciais até o Ensino Médio é destacada a necessidade de os alunos estudarem a Estatística. Tratando-se do conceito de média aritmética, foco desta pesquisa, a BNCC orienta que os alunos devem estudar este conceito a partir do 7º ano do Ensino Fundamental e, dentre as habilidades esperadas para esse ano de escolaridade, espera-se que eles tenham a compreensão da noção de média, como também dos aspectos relacionados ao cálculo do seu valor (BRASIL, 2017). Nos demais anos do Ensino Fundamental, as expectativas de aprendizagem sobre o conceito de média vão se aprofundando de acordo com o aumento da escolaridade.

A despeito da importância da Estatística desde os anos iniciais, com ênfase no conceito de média ser indicada desde os PCN (BRASIL, 1997) e sendo reforçada novamente com a BNCC (BRASIL, 2017), estudantes estão concluindo o Ensino Fundamental com dificuldades de compreensão do conceito de média aritmética. Vemos em pesquisas como a de Eugênio (2013), por exemplo, que analisou a compreensão sobre o conceito de média aritmética simples de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, a constatação da ausência de um raciocínio crítico em relação ao uso da média nas situações estudadas.

Em nossa prática docente, é comum nos depararmos com o fato de alunos chegarem ao Ensino Médio muitas vezes com um alto nível de dificuldade em conceitos ligados à Estatística, mesmo aqueles mais elementares como o de média aritmética. Em paralelo a essas inquietações sobre as dificuldades dos alunos, também é possível notar que reflexões acerca do conceito de média aritmética vêm sendo muitas vezes deixadas de lado pelo professor. Em relação a esse conceito, objeto da nossa pesquisa, é comum os alunos entenderem a regra que ela é “a soma total dos termos dividida pelo número total de termos”, mas, ao se depararem com situações-problemas diferentes das que estão habituados a resolver, apresentam dificuldades e/ou não conseguem resolver. Algumas pesquisas (STRAUSS; BICHLER, 1988; MAYÉN et al., 2007; CAZORLA, 2008; MELO, 2010; EUGÊNIO, 2013; DAMIN, 2015) enfatizam que alguns estudantes têm domínio do algoritmo da média, mas apresentam dificuldades de compreensão acerca dos diversos aspectos conceituais da média aritmética.

Outras pesquisas desenvolvidas no Ensino Médio como a de Stella (2003) e Barizon (2011) constataram que estudantes do 3º ano do Ensino Médio sentem dificuldades em resolver problemas relacionados ao conceito de média. Com relação a professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, Magina et al. (2008) e Melo (2010) apontam que eles também apresentam dificuldades em resolver problemas relacionados à média. Através dos resultados dessas pesquisas, vemos que desde o Ensino Fundamental, anos iniciais, até o Ensino Médio os alunos sentem dificuldades em resolver problemas que envolvam a média aritmética.

Contudo, se nos reportarmos ao percurso histórico do conceito de média aritmética para tentar compreender as dificuldades elencadas pelas pesquisas já citadas, identificamos diversos significados para além dessa regra geral. Batanero (2000), por exemplo, ressalta que o desenvolvimento desse conceito tem se dado de forma insuficiente e que só recentemente estamos tomando conhecimento das principais dificuldades dos alunos em relação ao conceito da média aritmética.

Assim, destacamos que a média constitui um conceito complexo, cuja compreensão situa-se em um campo conceitual (VERGNAUD, 1988; 1991), possuindo diferentes propriedades (STRAUSS; BICHLER, 1988) e significados (BATANERO, 2000; WATSON, 2006).

Fundamentamos nosso referencial teórico na Teoria dos Campos Conceituais elaborada por Gérard Vergnaud, por considerarmos a importância desse estudo para a análise do conceito de média aritmética, conforme já realizado por outros pesquisadores (EUGÊNIO, 2013).

Com base nesse aporte teórico, nos resultados da pesquisas e por acreditarmos que há possibilidades didáticas possíveis para o ensino e aprendizagem da média aritmética nas

escolas, e de forma mais ampla, para o letramento estatístico dos estudantes, desenvolvemos esta pesquisa a partir da seguinte questão: como o conceito de média aritmética é compreendido por alunos do 3º ano do Ensino Médio? Quais as dificuldades que eles apresentam, considerando diferentes propriedades e significados sistematizados por Vergnaud (1997), significados de Batanero (2000) e propriedades de Strauss e Bichler (1998)?

Para responder a essas questões, como objetivo geral desta pesquisa buscamos investigar os conhecimentos sobre o conceito de média aritmética de estudantes do 3º do Ensino Médio oriundos de escolas da Gerência Regional de Ensino - Mata Centro (GRE-Mata Centro) do estado de Pernambuco. Os nossos objetivos específicos são os seguintes:

- Analisar a compreensão dos estudantes sobre as propriedades do conceito de média aritmética;
- Analisar a compreensão dos estudantes sobre os significados do conceito de média aritmética;
- Relacionar as compreensões dos estudantes sobre as propriedades e significados do conceito de média aritmética.

Assim, esperamos com esta pesquisa contribuir com o desenvolvimento do ensino de Estatística nas escolas da Educação Básica e, mais especificamente, nas escolas que fazem parte da Gerência Regional de Ensino - Mata Centro (GRE-Mata Centro) do estado de Pernambuco.

Além desta introdução, em que situamos o leitor sobre a problemática e introduzimos os objetivos da pesquisa, a dissertação está organizada em 7 capítulos.

No capítulo 2, realizamos uma breve apresentação histórica relacionada a aspectos do conceito de média, buscando compreender o surgimento da Estatística e seus respectivos avanços até a Educação Estatística. Dando continuidade, abordamos a importância da Educação Estatística para o mundo contemporâneo, ocasião em que refletimos o quanto esta colabora para que os estudantes sejam capazes de pensar, argumentar e analisar criticamente assuntos relacionados a políticas, assistências sociais e a informações relacionadas à sua região. Ainda neste segundo capítulo, abordamos o letramento estatístico, que tem como objetivo o desenvolvimento do pensamento estatístico, contribuindo para que as pessoas desenvolvam as habilidades de utilizar as ideias estatísticas compreendidas na escola para atribuir significados aos dados estatísticos encontrados diariamente. Em seguida, analisamos a Educação Estatística no currículo, enfatizando que este campo de estudo deve ocorrer desde os primeiros anos de escolarização, encontrando-se vinculada à disciplina de Matemática. Por fim, apresentamos estudos sobre a média aritmética, trazendo, assim, alguns estudos que evidenciam aspectos do ensino e aprendizagem desse conceito.

No terceiro capítulo, apresentamos a Teoria dos Campos Conceituais e, na ocasião, analisamos a contribuição desta teoria em pesquisas referentes à Educação Estatística. Discutimos sobre o tripé que forma o campo conceitual e que constitui a base para nossa pesquisa. Na sequência, apresentamos os significados da média sistematizados por Batanero (2000) e as propriedades apresentados por Strauss e Bichler (1988).

A metodologia abordada no quarto capítulo descreve os métodos e técnicas que norteiam a nossa pesquisa. No capítulo, descrevemos acerca dos participantes, dos procedimentos adotados e do instrumento diagnóstico utilizado em nossa pesquisa.

No quinto capítulo, abordamos a análise do desempenho dos estudantes participantes da pesquisa referente ao conceito de média aritmética, especificamente em relação às propriedades e significados do conceito.

No sexto capítulo, analisamos os tipos de respostas e estratégias utilizadas pelo grupo investigado ao resolverem as questões que compõem o instrumento diagnóstico. Compreendemos que essa análise é de fundamental importância, uma vez que tais estratégias dão indicações de como os alunos que estão concluindo a Educação Básica encontram-se em relação à compreensão do conceito de média aritmética.

As considerações finais estão no sétimo capítulo, no qual abordamos os resultados mais importantes, além de possibilidades para estudos futuros.

2 EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA

Neste capítulo, realizamos uma breve apresentação histórica relacionada ao conceito de média, buscando compreender o surgimento da estatística e seus respectivos avanços até a Educação Estatística. Dando continuidade, abordamos a importância desta para o mundo contemporâneo e, em seguida, apresentamos elementos que ajudam na compreensão do letramento estatístico para o desenvolvimento do seu pensamento, contribuindo para que as pessoas desenvolvam habilidades de utilizar suas ideias compreendidas na escola. Analisamos também a Educação Estatística no currículo, buscando identificar quando esse campo de estudo deve ocorrer e em que fase da educação. Por fim, apresentamos estudos sobre a média aritmética, trazendo, assim, algumas pesquisas que evidenciam aspectos do ensino e aprendizagem desse conceito.

2.1 Uma breve discussão da história da estatística

Para um melhor entendimento acerca do conceito de média, é preciso buscar compreender o contexto mais amplo da estatística em que ele está inserido. Assim, decidimos realizar uma breve apresentação histórica dos aspectos aos quais este conceito encontra-se envolto, buscando compreender o surgimento dela e seus respectivos avanços até a Educação Estatística, área que estuda o conceito de média aritmética.

Em alguns estudos, como o de Silva e Coutinho (2005), destaca-se que a primeira contagem populacional ocorreu por volta de 5000 a 2000 a.C. na Suméria, onde há registros em tábuas de argila de bens da população. Outros registros dão indícios de que aproximadamente 3000 a.C. já tinha censos em Roma, na China, na Babilônia e no Egito. Esses censos eram realizados com o objetivo de que a população declarasse suas riquezas (BAYER et al., 2009).

As discussões referentes à Educação Estatística, se deram a partir de propostas da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura – UNESCO – e de outras instituições internacionais que tinham como objetivo melhorar as pesquisas em estatística nos países em desenvolvimento (BATANERO, 2001). Com este objetivo, foram criadas associações com a finalidade de proporcionar debates acerca da Educação Estatística. Esse movimento de criação de associações contribuiu para o surgimento do Instituto Internacional de Estatística (ISI), que tem como objetivo ampliar e incentivar as pesquisas na área da Educação Estatística.

Mesmo com esses movimentos, a área estudada demorou alguns anos para ser reconhecida mundialmente como uma importante ferramenta para se tratar dados. A partir desse reconhecimento começou a surgir em muitos países o ensino de Estatística na Educação Básica, despertando um maior interesse no âmbito acadêmico por pesquisas na área, hoje denominada de Educação Estatística (BATANERO, 2001). No Brasil, só veio a ser implementado o ensino de estatística em 1997, com o estabelecimento dos novos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's (BAYER et al., 2009).

Com o crescente número de países implantando o ensino de estatística na Educação Básica, o conceito de média começou a aparecer nos livros didáticos. Segundo Lavoie e Gattuso (1998 apud CARVALHO, 2011), a introdução do conceito de média nas escolas através de livros didáticos se deu em um contexto comercial. O conceito de média começou a aparecer em escolas da França em 1935 e, no mesmo período, nos Estados Unidos e no Canadá, ela apareceu nos livros de forma sucinta como sendo só “somar e dividir”.

É notória a necessidade da sociedade contemporânea em compreender dados estatísticos que são apresentados em revistas, jornais, *outdoors* e outros meios de comunicação (BATANERO, 2001; ESTRADA et al., 2010). A maioria desses dados são apresentados à sociedade por meio de tabelas, gráficos e percentagens (MENEZES, 2008) e, para compreendê-los criticamente, é necessário que a sociedade tenha um conhecimento básico. Sendo assim, destacamos a importância da Educação Estatística para a sociedade.

Segundo Campos et al. (2011, p. 12), a Educação Estatística tem por objetivo:

Promover o entendimento e o avanço da Educação Estatística e seus assuntos correlacionados; fornecer embasamento teórico às pesquisas em ensino da estatística; melhorar a compreensão das dificuldades dos estudantes; estabelecer parâmetros para um ensino mais eficiente dessa disciplina; auxiliar o trabalho do professor na construção de suas aulas; sugerir metodologias de avaliação diferenciadas, centradas em metas estabelecidas e em competências a serem desenvolvidas; valorizar uma postura investigativa, reflexiva e crítica do aluno, em uma sociedade globalizada, marcada pelo acúmulo de informações e pela necessidade de tomada de decisões em situações de incerteza.

Dessa forma, um dos objetivos da Educação Estatística é facilitar para a sociedade a compreensão e interpretação de dados obtidos a partir de uma grande quantidade de informações e, assim, facilitar determinadas decisões, nos diferentes segmentos da sociedade (LOPES, 2010; SCHNEIDER; ANDREIS, 2013). Destacamos a importância do papel da escola para formar cidadãos que sejam capazes de compreender as diversas informações veiculadas nos meios de comunicação e a Educação Estatística pode contribuir na formação destes cidadãos.

Sobre a importância da Educação Estatística na escola, Cazorla (2008, p. 2) enfatiza que:

Para que o indivíduo seja capaz de abstrair reflexivamente todas essas informações veiculadas, em forma de gráficos e tabelas, é necessário que a escola traga para si a responsabilidade de introduzir e desenvolver o conhecimento estatístico com seus alunos, objetivando formar cidadãos capazes de ler, compreender e comparar dados estatísticos, bem como criticá-los.

Nesta perspectiva, a Educação Estatística corrobora para o desenvolvimento e o uso de estratégias que visam a coletas de dados e, assim, resume, organiza e analisa as informações levantadas (FARIAS et al., 2003; CAZORLA, 2008). A estatística contribui no desenvolvimento de habilidades para a sociedade; dentre elas, podemos destacar a capacidade em analisar e organizar criticamente determinados dados (IGNÁCIO, 2010; SILVA et al., 2017).

Batanero (2002, p. 7) enfatiza algumas razões que tornam a Educação Estatística essencial na formação de cidadãos críticos, sendo elas:

- I. A Estatística é uma parte da cultura geral desejável para futuros cidadãos, aqueles que precisam adquirir a capacidade de leitura e interpretação de tabelas e gráficos estatísticos que aparecem com frequência em meios informativos;
- II. Ajuda os alunos a compreenderem outras disciplinas do currículo, nas quais frequentemente aparecem ideias estatísticas;
- III. Seu estudo ajuda o desenvolvimento pessoal, incentivando um raciocínio crítico, com base na avaliação de dados objetivos;
- IV. É útil para a vida profissional, pois muitas profissões exigem pelo menos um conhecimento básico sobre o assunto.

Como já mencionado, com o quantitativo de informações que temos acesso cotidianamente, se faz necessária uma sociedade que saiba compreender e analisar criticamente as informações que lhe são apresentadas. Assim, as razões levantadas por Batanero (2002) mostram a importância da estatística para a sociedade, corroborando para que os currículos a fixem desde os anos iniciais.

Alguns países implantaram a estatística como componente curricular desde os anos iniciais, favorecendo, assim, a criticidade entre as crianças, tornando-os capazes de desenvolverem seu senso crítico com habilidades para exercerem a cidadania e terem êxitos na vida profissional e pessoal (SCHNEIDER; ANDREIS, 2013).

O professor assume um papel importantíssimo na implantação desses currículos, em como colocá-lo em prática, adaptando-os constantemente ao nível da escolaridade (PONTE, 2001; LEMOS, 2016). Ressaltamos, assim, que o ensino dos conteúdos da estatística dependerá

da importância transmitida aos professores de que ela é primordial na formação de estudantes críticos e argumentativos.

Tendo em vista a importância da criticidade na formação dos estudantes, a Educação Estatística corrobora para que, através de uma educação crítica, os estudantes sejam capazes de pensar, argumentar e analisar criticamente assuntos relacionados a políticas, assistências sociais e tudo o que for relacionado a sua região.

Freire (2003), enfatiza que a educação crítica está relacionada às desigualdades, à participação política da sociedade, às oportunidades e contrastes educacionais. Ou seja, o autor relaciona educação crítica com a democracia plena. Skovsmose (2001, p. 101) também afirma que a educação crítica é:

Para que a educação, tanto como prática como pesquisa, seja crítica, ela deve estar a par dos problemas sociais, das desigualdades. [...] deve tentar fazer da educação uma força social progressivamente ativa. [...] Para ser crítica a educação deve reagir às contradições sociais.

Portanto, a Educação Estatística, ao colaborar para uma sociedade crítica, tornando-se essencial para formação dela, corrobora para que a população reflita e seja capaz de exercer seu papel na sociedade. Tais reflexões podem acontecer em situações de decisões individuais ou coletivos, bem como em qualquer faixa etária, já que desde crianças somos expostos a dados estatísticos (LOPES, 2010). Com isso, o ensino de estatística é primordial na formação do estudante, ajudando-o a compreender conceitos que contribuam de forma efetiva na formação dos indivíduos (LOPES, 2008; 2010). A esse respeito, Lopes (2010, p. 53) destaca que:

Quando se pensa em pessoas e cidadãos competentes em Estatística, matemática ou outra qualquer disciplina, não se pode reduzir essa competência aos seus saberes característicos; é preciso acrescentar outras duas dimensões fundamentais: as atitudes e os valores; e as capacidades.

Assim, como ressalta Lopes (2010), é importante que na Educação Estatística o que seja visto em sala de aula tenha significado para o aluno. Nesse contexto, ao trabalharmos com a estatística devemos ver a melhor forma para que os alunos compreendam todos os aspectos que envolvem conceitos e, dessa forma, para que se possa exaltar a capacidade de cada estudante.

Para que seja exaltada a capacidade de cada estudante, é importante que o ensino de estatística lhes possibilite a resolução de situações problemas do mundo real, relacionados à vida social, aos valores e ao contexto socioeconômico. Lopes (2008, p. 60) enfatiza que,

Não basta ao cidadão entender as porcentagens expostas em índices estatísticos como o crescimento populacional, taxas de inflação, desemprego, [...] é preciso analisar/relacionar criticamente os dados apresentados, questionando/ponderando até mesmo sua veracidade. Assim como não é suficiente ao aluno desenvolver a capacidade de organizar e representar uma coleção de dados, faz-se necessário interpretar e comparar esses dados para tirar conclusões.

Portanto, é importante que os estudantes compreendam e dominem as habilidades relacionadas aos conceitos estatísticos, para que consigam compreender com criticidade dados que são apresentados pelos meios de comunicação, sejam através de gráficos, tabelas ou porcentagens. A média, por ser um conceito estatístico utilizado em vários momentos da vida em sociedade, necessita ser compreendida.

Dada a importância da Educação Estatística para os cidadãos, ela busca constantemente estudar e entender como a sociedade ensina e aprende estatística, compreendendo, assim, os aspectos cognitivos do ensino-aprendizagem dela e o desenvolvimento de metodologias e materiais para o ensino, visando o desenvolvimento do letramento estatístico (CONTI, 2018).

2.2 Letramento estatístico

Como já mencionado, nos deparamos diariamente com inúmeros dados estatísticos, com informações acerca da sociedade e da economia. Muitas vezes, tais dados são apresentados por meio de gráficos e tabelas (ALMEIDA, 2010; MENEZES, 2008). Nesse contexto, surge a necessidade de análise, interpretação e compreensão de tais informações por parte da sociedade, para que esta possa tomar decisões diariamente. Portanto, é necessário que a população se torne letrada estatisticamente para que consiga fazer análises com mais criticidade sobre os dados que lhe são apresentados.

O letramento estatístico objetiva o desenvolvimento do pensamento estatístico, onde a pessoa desenvolve a habilidade de utilizar as ideias compreendidas na escola para atribuir significados aos dados encontrados diariamente (LOPES, 2010), corroborando para que o cidadão desenvolva a habilidade de compreender, argumentar e avaliar criticamente as informações estatísticas (GAL, 2002). Ressaltamos que o letramento estatístico vai além da aprendizagem mecanizada, na medida em que um cidadão letrado estatisticamente, ao se deparar com alguma informação estatística, consegue ler, compreender, discutir e questionar tais informações (BATANERO et al., 2011).

Sendo assim, tal letramento contribui para que a sociedade não apenas consiga ler os dados, mas consiga criticar e argumentar, podendo propor alternativas para resolução de problemas da sociedade (CARVALHO, 2011). O letramento fornece argumentos para o

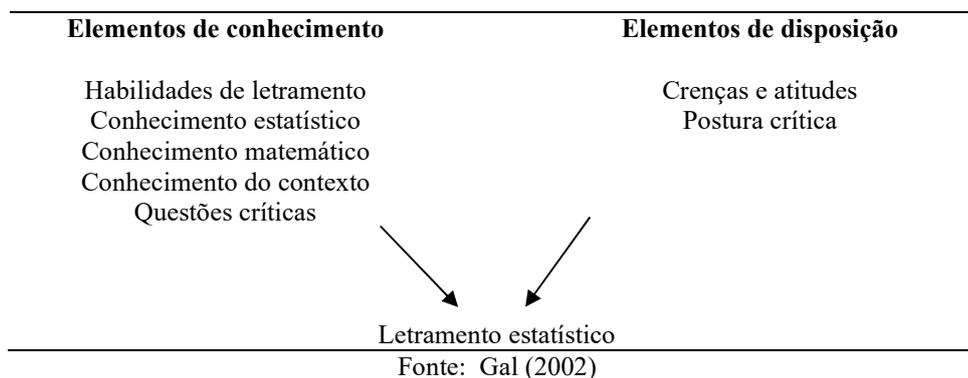
desenvolvimento de pessoas ativas e argumentativas que possam ler e compreender dados estatísticos das diferentes áreas de conhecimento (MONTEIRO, 2010), contribuindo para uma sociedade participativa nas decisões de áreas como as sociais e as econômicas.

É fundamental que tenhamos cidadãos letrados estatisticamente para desempenharem com desenvoltura seu papel na sociedade. Gal (2002, p. 2-3) destaca que uma pessoa letrada estatisticamente é aquela que utiliza um conjunto de competências de literacia, como:

- a) competência da pessoa para interpretar e avaliar criticamente a informação estatística, os argumentos relacionados aos dados ou aos fenômenos estocásticos, que podem se apresentar em qualquer contexto e, quando relevante;
- b) competência da pessoa para discutir ou comunicar suas reações para tais informações estatísticas, tais como seus entendimentos do significado da informação, suas opiniões sobre as implicações desta informação ou suas considerações acerca da aceitação das conclusões fornecidas.

É necessário termos cidadãos letrados, já que vivemos em uma sociedade na qual são vinculadas inúmeras informações, das quais muitas podem ser falsas. Nesse sentido, o cidadão conseguirá desenvolver argumentos e a capacidade de analisar com criticidade as informações que lhe são apresentadas. Nessa perspectiva, o autor buscou compreender, a partir desses princípios, como os cidadãos podem compreender efetivamente informações através de dados estatísticos. Assim, segundo o autor, para haver um letramento estatístico efetivo é necessário se ter como base de conhecimento cinco elementos, sendo eles: habilidades de letramento, conhecimento estatístico, conhecimento matemático, conhecimento do contexto e apresentar atitude crítica.

Gal (2002) apresenta uma compreensão acerca do letramento estatístico, segundo a qual todos os cidadãos em formação devem dispor para compreender, analisar e criticar as estatísticas que são expostas diariamente pelos vários meios de comunicação. Essa compreensão engloba dois conjuntos fundamentais, sendo: “elementos de conhecimento” e “elementos de disposição”, que são detalhados na **TABELA 1**.

Tabela 1 - Modelo do letramento estatístico de Gal

Ao analisarmos o modelo proposto por Gal (2002), observamos que primeiro o autor destaca o conjunto denominado “elementos de conhecimento”, composto por cinco elementos essenciais, sendo eles: a habilidade de letramento - que está relacionada à habilidade de ler e compreender informações textuais, gráficos e tabelas -, os conhecimentos estatísticos, os conhecimentos matemáticos, o conhecimento do contexto e a competência para elaborar questões críticas.

A postura crítica, segundo Silva (2007), é compreendida como a capacidade dos adultos agirem como questionadores diante das informações quantitativas, que podem ser unilaterais ou incompletas, possuindo ou não intencionalidade. Já o segundo elemento destacado por Gal (2002) é compreendido como as crenças e as atitudes de um determinado indivíduo. O autor exemplifica tal elemento destacando que, se uma pessoa acredita ser capaz de compreender dados estatísticos (crença) e tem uma atitude positiva em relação à investigação estatística, ela tende a apresentar uma atitude crítica com relação às informações estatísticas.

Gal (2002) destaca que para um letramento estatístico efetivo é necessário que os sujeitos tenham um conhecimento básico acerca da Matemática e da Estatística. Neste contexto, o autor ressalta que é através desses conhecimentos que o indivíduo pode compreender o significado e o contexto dos dados que foram obtidos. Portanto, tais conhecimentos e habilidades servem como base para garantir o letramento estatístico, dependendo, assim, do nível de letramento que estamos esperando. Tal letramento não é algo mecânico e não existe uma rigidez de passos a seguir, pois depende do objetivo que desejamos, entre outros fatores (COBELLO, 2018).

Dessa forma, Gal (2002) traz cinco questões essenciais e necessárias que servem como base de conhecimentos estatísticos para construção do letramento, sendo eles:

Tabela 2 - Conhecimentos estatísticos necessários para o letramento

Ordem	Conhecimento
1º	Saber por que os dados são necessários e como os dados podem ser produzidos
2º	Familiaridade com conceitos básicos e ideias relacionadas com a Estatística descritiva
3º	Familiaridade com exibições gráficas e tabulares e sua interpretação
4º	Compreender noções básicas de probabilidade
5º	Saber como conclusões ou inferências estatísticas são obtidas

Fonte: Gal (2002)

Gal (2002), ao apresentar o modelo acima, destaca alguns conhecimentos essenciais para que ocorra efetivamente o letramento estatístico, sendo o primeiro tópico “saber por que os dados são necessários e como os dados podem ser produzidos”. Nesse tópico, o autor destaca que é importante que o cidadão possua entendimentos acerca das origens dos dados e como esses são produzidos.

Já no segundo tópico, denominado “familiaridade com conceitos básicos e ideias relacionadas com a estatística descritiva”, o autor parte do pressuposto de que o cidadão já possui entendimento acerca da origem dos dados. Nesse sentido, destaca a importância de o cidadão estar familiarizado com as representações por meio das quais são apresentadas as informações, ou seja, o sujeito deve ter familiaridade com os conceitos básicos da estatística.

O terceiro tópico traz a “familiaridade com exibições gráficas e tabulares e sua interpretação”. O autor destaca que é importante que o cidadão compreenda a criação de gráficos, tabelas e seus respectivos padrões e, assim, consiga compreender e analisar dados apresentados em gráficos e tabelas.

O quarto tópico envolve “compreender noções básicas de probabilidade”. O trabalho envolvendo a ideia de azar e eventos aleatórios são utilizados de maneira explícita ou implícita em muitas mensagens. Assim, é necessário que compreendam noções básicas acerca da probabilidade para se ter uma análise crítica em dados apresentados.

O quinto tópico é denominado “saber como conclusões ou inferências estatísticas são obtidas”. Assim, o autor destaca que a maioria dos cidadãos só consome informações, mas não as produz. Desta forma, é importante que a população saiba como são realizadas as conclusões de dados estatísticos, como podem variar, o quanto uma amostra pode ser tendenciosa e, assim, ser crítica nos dados que são apresentados.

2.3 Educação Estatística no currículo

Há aproximadamente 20 anos houve um avanço na Educação Estatística no Brasil, com a implementação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998). Esse documento, que norteava a Educação Básica no Brasil, frisava que a Educação Estatística deveria ocorrer desde os primeiros anos de escolarização, encontrando-se vinculada à disciplina de Matemática. Neste documento, os conteúdos eram divididos em blocos e aquele que aborda os conceitos de probabilidade, contagem e noções de estatística era denominado como: Tratamento da Informação. Este bloco era compreendido como importante para a sociedade (BRASIL, 1998), já que tinha como objetivo auxiliar a população a ler e interpretar diversas informações que são disponibilizadas diariamente pelos diversos meios de comunicação. Nesse contexto, dada a importância de se ter uma sociedade letrada estatisticamente, estes conteúdos são inseridos desde os anos iniciais (LOPES, 2003).

O principal objetivo proposto por esse documento para o ensino de estatística no Ensino Fundamental, em suma, traz que:

[...] fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu dia-a-dia. Além disso, calcular algumas medidas estatísticas como média mediana e moda com o objetivo de fornecer novos elementos para interpretar dados estatísticos (BRASIL, 1998, p.52).

Sendo assim, vemos que desde os PCN se faz necessário que esses procedimentos sejam trabalhados pelo professor em sala de aula, com o objetivo de formar cidadãos críticos capazes de tomar decisões frente às informações recebidas. Destacamos também a importância de se trabalhar as medidas de tendência central, com ênfase na média aritmética, que fornecerá elementos para tornar a pessoa mais crítica e capaz de analisar e interpretar dados estatísticos.

Ao analisarmos os PCN, documento que anteriormente norteava a Educação Básica, vemos que os conteúdos relacionados à estatística estão presentes em todas as etapas de escolarização, proporcionando aos alunos o direito de desenvolver um pensamento crítico e reflexivo acerca das informações com as quais se deparam. Assim, um aluno no 3º ano do Ensino Médio passou por todos os ciclos anteriores e teve contato com a estatística desde os anos iniciais e com aspectos relacionados a média aritmética desde o primeiro ano dos anos iniciais.

Em Pernambuco, existe a Base Curricular Comum para as redes públicas de ensino de Pernambuco (BCC/PE), que é bem parecida com os PCN, apresentando a Educação Estatística

desde os anos iniciais. Assim, no item “a Matemática na Segunda Etapa do Ensino Fundamental” indica que, em relação à estatística, deve-se:

[...] utilizar informações obtidas do ambiente social do aluno, o professor poderá promover situações que permitam a compreensão de algumas como, por exemplo, A interpretação de termos como frequência, frequência relativa, amostra, etc., também pode ser bastante facilitada quando se trabalha com atividades ligadas ao contexto social do aluno (PERNAMBUCO, 2008, p. 103).

Vemos, assim, a importância que a BCC/PE traz para a Educação Estatística, ressaltando que se deve trabalhar com conceitos estatísticos desde os anos iniciais. Se dá ênfase à média aritmética a partir do 2º ciclo do Ensino Fundamental, mais exatamente no 5º ano. Neste ano em específico, espera-se que os alunos compreendam o conceito de média aritmética e sejam capazes de usar a média para comparar dois conjuntos de dados.

Já para o Ensino Médio, a BCC/PE traz orientações que se familiarizam com as orientações dos PCN. Na área de Educação Estatística, orienta-se que:

[...] o aluno precise tomar certas decisões em sua vida cotidiana podem ser trazidas para a discussão de algumas como, por exemplo, medidas de tendência central (média, mediana e moda) e de dispersão (desvio-médio, desvio-padrão e variância). A interpretação de termos como frequência, frequência relativa, amostra, espaço amostral, etc., também pode ser consolidada (PERNAMBUCO, 2008, p. 111).

Portanto, no Ensino Médio destaca-se mais uma vez que os conteúdos de Estatística devem ter sido trabalhados de forma gradativa, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, estabelecendo, assim, novos conceitos, respeitando a escolaridade dos alunos. A BCC – PE, neste contexto, volta a destacar a importância de se trabalhar com as medidas de tendência central no Ensino Médio para corroborar com estudantes mais críticos em tomadas de decisões.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) enfatiza aprendizagens essenciais para a Educação Básica. Essas aprendizagens se dão através de competências, concebidas pela BNCC como:

[...] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2017, p. 8).

Ao analisarmos as competências do Ensino Fundamental, vemos que as crianças do 1º ano devem ter acesso ao conhecimento de estatística e probabilidade. No que diz respeito à

estatística para as crianças do 1º ano, a BNCC indica como objetos de conhecimento a leitura de tabelas e gráficos simples e a coleta e organização de informações. Nessa perspectiva, vai se aprofundando no contexto educacional da estatística até os anos finais do Ensino Fundamental.

No que diz respeito às medidas de tendência central, mais especificamente à média aritmética, segundo a BNCC, deve começar a ser trabalhada desde no 7º ano dos anos finais do Ensino Fundamental. A expectativa da BNCC é que nos “anos finais os alunos saibam planejar e construir relatórios de pesquisas estatísticas descritivas, incluindo medidas de tendência central e construção de tabelas e diversos tipos de gráfico” (BRASIL, 2017, p. 275). Essa diretriz enfatiza que os estudantes, ao concluírem os anos finais do Ensino Fundamental, devem ser capazes de desenvolver com habilidade alguns conteúdos de estatística, entre eles as medidas de tendência central, nas quais se inclui a média aritmética.

Ao analisamos as competências específicas para o Ensino Médio, constatamos que a estatística continua fazendo partes das habilidades que os alunos devem desenvolver. Com relação à média, desde o 1º ano do Ensino Médio este conceito deve ser estudado. Na ocasião, se propõe que esta competência seja aprofundada ao longo do Ensino Médio. Um dos objetivos propostos é “resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana)” (BRASIL, 2017, p. 529), enfatizando um aprofundamento do que se foi trabalhado em anos anteriores e proporcionando o desenvolvimento de habilidades para os conceitos envolvidos nesse objetivo.

Neste estudo, achamos pertinente trazer dados dos PCN, dado que a BNCC foi oficialmente promulgada apenas em 2017/2018 e o ensino dos alunos do 3º ano do Ensino Médio que fizeram parte de nossa pesquisa foi orientado pelos primeiros (PCN, 1988; BCC/PE, 2006).

Resumimos no **QUADRO 1** a frequência com que os conteúdos de estatística se fazem presentes nos principais documentos que norteiam a Educação Básica no estado de Pernambuco. No quadro, temos do primeiro ao último ano da Educação Básica e nele marcamos com um “x” quando os documentos norteadores elencam que a estatística já deve ser ensinada naquele corrente ano.

Quadro 1 - Frequência do ensino de estatística nas propostas curriculares

Ano de escolaridade	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano	10º ano	12º ano	13º ano
PCN	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
BCC-PE	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
BNCC	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Fonte: o autor

Como podemos observar, tanto os autores das PCN, BCC – PE e da BNCC sugerem o ensino da estatística em todos os anos da Educação Básica. Desta forma, voltamos a justificar nossa escolha pelo 3º ano do Ensino Médio, por acreditarmos que os alunos já estão com uma compreensão efetiva acerca do conceito de média aritmética.

2.4 Estudos sobre a média aritmética

Na revisão de literatura buscamos trazer alguns estudos que evidenciam aspectos do ensino e aprendizagem da média aritmética. As pesquisas estão compreendidas em vários níveis de ensino, desde o Ensino Básico ao Ensino Superior. A partir desses estudos, buscamos identificar possíveis contribuições para esta pesquisa, na qual buscamos analisar como o conceito de média aritmética é compreendido por alunos do 3º ano do Ensino Médio, através dos diferentes significados e propriedades do campo conceitual da média aritmética.

Stella (2003), em sua pesquisa, buscou entender quais as interpretações do conceito de média de alunos do Ensino Médio que seguem o currículo brasileiro. A autora dividiu a pesquisa em duas partes. Na primeira parte, investigou o que é abordado sobre média utilizando quatro fontes relacionadas ao ensino de Matemática no Brasil: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e os livros didáticos. Na segunda parte, a autora teve como objetivo investigar o que o aluno, do Ensino Médio, entende por média, quais concepções ele já tem a respeito deste conceito, quais estratégias ele utiliza na resolução de problemas tradicionais (em que é pedido para obter a média por meio do uso do algoritmo), de construção (onde é dada a média e o aluno constrói a distribuição) e de interpretação (onde é preciso descrever, resumir, comparar e raciocinar sobre um conjunto de dados).

Ao final, Stella (2003) conclui que os estudantes nem sempre tinham o conhecimento das regras de cálculo. Segundo a autora, parte dos estudantes carecia necessariamente de uma compreensão real dos conhecimentos subjacentes, já que, se os alunos adquirem apenas o conhecimento de tipo algorítmico, é mais provável que cometam erros previsíveis, salvo nos problemas mais simples, onde basta calcular a média.

Magina et al. (2008) buscaram analisar concepções de estudantes e professores sobre média aritmética. A pesquisa foi realizada através de uma sequência didática composta por sete questões, envolvendo leitura, interpretação e construção de tabelas e gráficos e o conceito de média. Porém, o estudo só traz os resultados da análise de três questões acerca do conceito de

média aritmética. A pesquisa foi realizada com 287 participantes, dos quais 54 eram alunos do 5º ano, 47 eram do 6ª ano do Ensino Fundamental, 61 eram estudantes iniciantes, 82 eram estudantes concluintes do curso de Pedagogia, e 43 eram professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Como resultado, as autoras observaram que nenhum dos estudantes que participaram da pesquisa conseguiu responder corretamente às três questões propostas. Já os professores apresentaram um desempenho um pouco melhor e 18,6% conseguiram responder às três questões sobre o conceito de média. Ao final, as autoras concluíram que a média se apresentou como um conceito difícil de ser compreendido, inclusive para os participantes com níveis mais elevados de estudos como os professores. Assim, elas destacam o quanto ainda é preciso investir em processos de formação de professores, principalmente na formação inicial.

Melo (2010), em sua pesquisa realizada no mestrado, investigou como o conceito de média aritmética é compreendido por alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, considerando diferentes invariantes, significados e representações. Participaram do estudo 210 sujeitos de seis escolas públicas do município de Moreno, em Pernambuco, sendo 75 alunos do 3º ano, 104 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental e 31 professores desse mesmo nível de ensino.

Melo (2010) aplicou uma sequência de sete questões, envolvendo os diferentes invariantes, significados e representações. Os resultados indicaram que os alunos obtiveram um desempenho fraco e não foram observadas diferenças significativas entre os níveis de escolaridade. Já os professores apresentaram um desempenho significativamente superior ao dos alunos, demonstrando assim uma melhor compreensão do conceito de média aritmética. Mesmo tendo um desempenho melhor que os alunos, a autora destaca que o desempenho dos mestres ainda foi abaixo do desejado. A autora conclui que as representações não influenciaram na compreensão do conceito de média. Já com relação aos significados, os professores e os alunos apresentaram dificuldades. Tratando-se dos invariantes, alguns foram de difícil compreensão tanto para os professores, quanto para os alunos. A autora finaliza evidenciando a importância dos invariantes, significados e representações na compreensão do conceito de média aritmética.

Damin (2015), em sua pesquisa, avaliou o conhecimento dos alunos em relação ao conceito de média aritmética no Ensino Fundamental. A pesquisa foi realizada com onze alunos, na faixa etária de 13 anos, do 8º ano do Ensino Fundamental de um colégio da rede privada de uma cidade no norte do estado do Paraná. A pesquisa foi realizada através da aplicação de uma sequência com cinco questões dissertativas, adaptadas da literatura, sobre

média aritmética, direcionadas apenas a esse conceito. Em seguida, iniciou-se a análise, adotando um método onde as respostas dos alunos não eram codificadas em certas ou erradas, mas separadas inicialmente em três blocos - “responde adequadamente à questão”, “responde parcialmente à questão” e “não responde à questão”. O autor conclui que a turma pesquisada não apresentou a compreensão adequada sobre o conceito de média aritmética. Destaca-se, ainda, que o principal erro dos alunos foi o de calcular a média apenas realizando a soma de dados, não dividindo o valor encontrado pela quantidade de dados do conjunto.

Eugênio (2013) buscou analisar a compreensão sobre o conceito de média aritmética simples de estudantes do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental, indagando como os estudantes interpretavam a média aritmética com e sem o auxílio do recurso do *software ThinkerPlots*. As tarefas de pesquisa incluíram a resolução de um teste e a utilização do software que potencializou ações de organização e análise de dados estatísticos. Na pesquisa, participaram 16 estudantes do Ensino Fundamental, sendo oito do 5º ano e oito do 9º ano. O teste foi composto por dez questões sobre média. Os estudantes responderam individualmente às tarefas de pesquisa em duas sessões, uma com os oito participantes do 5º ano e uma sessão com os do 9º ano. Na sessão de coleta de dados, cada estudante recebeu uma folha impressa com as tarefas. O autor destaca que a aprendizagem da média aritmética, em diferentes situações, vai além do que o estudante sabe ou não; é uma compreensão que deveria desenvolver-se no decorrer do processo de escolarização. Nas situações de uso da média em situação familiar e da mídia, observou-se que a maioria dos estudantes do 5º ano respondeu a partir de respostas singulares e sem uma análise mais específica aos dados do problema. Os do 9º ano, por sua vez, resolveram os problemas a partir de respostas mais elaboradas e que envolveram a noção de média como um conjunto de dados. A respeito desse avanço na abordagem da média em relação à escolarização, observou-se a ausência de respostas relacionais nas abordagens dos estudantes do 9º ano. O autor destaca que esse resultado é preocupante, pois coloca em evidência a ausência de um raciocínio crítico em relação ao uso da média nas situações estudadas.

Barizon (2011), em sua pesquisa, teve como objetivo elaborar, avaliar e validar uma escala de interações com o intuito de compreender como acontecia a autorregulação da aprendizagem em estatística. A pesquisadora investigou o desempenho de alunos do 3º ano do Ensino Médio na cidade de São Paulo e o seu instrumento diagnóstico era composto por questões que envolviam conceitos estatísticos, entre eles o da média aritmética. As questões abordavam aspectos do letramento estatístico, ou seja, questões voltadas à leitura e interpretação crítica de informações. Os alunos que fizeram parte da pesquisa realizaram um pré-teste, antes de terem contato com os conteúdos da estatística, e um pós-teste, que foi

realizado após os alunos terem contato com os conteúdos de estatística na sala de aula. Os resultados, segundo a pesquisadora, demonstraram que os alunos não apresentaram letramento estatístico satisfatório.

Mayén et al. (2007), em sua pesquisa, investigaram a compreensão sobre medidas de tendência central de 125 estudantes mexicanos de um curso técnico e de 144 estudantes espanhóis que estavam concluindo o ensino secundário. A investigação ocorreu através da aplicação de um questionário composto de nove questões, entre elas questões envolvendo a média aritmética. Os autores concluíram que a maioria dos estudantes apresentaram dificuldades em perceber que todos os valores influenciavam no cálculo da média aritmética. Eles também verificaram que os estudantes apresentaram dificuldades em compreender que a média não é uma boa medida quando se têm valores discrepantes na distribuição. Ao final, concluíram que nas questões envolvendo o cálculo da média, o percentual de acertos foi de 35% dos alunos mexicanos e 67% dos alunos espanhóis.

Garret e Cruz (2008) desenvolveram uma pesquisa com estudantes de Angola e Espanha, sendo 96 estudantes do Ensino Médio da Espanha e 146 estudantes da educação pública de Angola, contabilizando um total de 242 alunos investigados. Os pesquisadores tinham como objetivo investigar, por meio de um questionário, a compreensão do conceito de média dos alunos que estavam concluindo o Ensino Médio daqueles países. Após a aplicação, os resultados foram insatisfatórios quanto às propriedades da média elencadas por Strauss e Bichler (1988). Os estudantes apresentaram maior dificuldades nas propriedades 5 e 6 com relação à possibilidade da média poder ser um número que não tem um correspondente na realidade física e que o cálculo da média leva em consideração todos os valores, inclusive os nulos e os negativos. Os estudantes dos dois países apresentaram dificuldades, sendo um dos principais erros eles não considerarem os valores nulos. Os pesquisadores concluíram que os alunos da Angola apresentam mais dificuldades que os alunos da Espanha, porém nenhum dos grupos apresentou um resultado considerado satisfatório.

Río (2017), em sua pesquisa de dissertação, investigou a compreensão do conceito de média aritmética por 84 alunos espanhóis que cursavam o 1º ano do Ensino Médio. A pesquisa foi realizada pela aplicação de uma sequência contendo sete questões abertas adaptadas da literatura. O pesquisador destacou que, mesmo a média aritmética sendo considerada um conceito simples e que os alunos aprendem desde a Educação Primária, os alunos que estão no primeiro ano do Ensino Médio acharam difíceis questões relacionadas ao conceito. Segundo o pesquisador, a maioria dos estudantes apresentaram uma falta de compreensão acerca do conceito de média, sentindo dificuldades até em sua definição. Río (2017) destaca que os

professores devem ficar cientes da importância do conceito e da dificuldade dos alunos, para que organizem metodologias efetivas para superar tais dificuldades.

Cazorla (2002), em sua pesquisa, buscou investigar a compreensão de graduandos que estavam cursando a disciplina de estatística em uma universidade no estado da Bahia em relação ao conceito de média aritmética e à compreensão de gráficos e linhas. As questões que envolviam conhecimentos acerca das propriedades da média aritmética consistiam em se obter a média ao incorporar um novo valor ao conjunto de dados já existentes. A pesquisadora considerou os resultados razoáveis referentes à compreensão do conceito de média. Porém, ao final, ela destaca a importância que deveria ser dada às propriedades relacionadas a esse conceito.

Amaral (2010), em sua pesquisa, buscou a validação de uma sequência didática na qual se referia as medidas de tendência central, entre elas a média. A pesquisa foi desenvolvida com professores de uma escola da cidade de São Paulo. As questões que faziam parte da sequência didática estavam relacionadas às propriedades e significados das medidas de tendência central. Em uma das questões que envolvia a média aritmética, era solicitado que os professores interpretassem um gráfico e agregassem valores aproximados para média e mediana a partir das informações que estavam contidos no gráfico.

Ao final, analisando os resultados, Amaral (2010) destaca que, nas questões que envolviam a média aritmética, os professores desenvolveram um cálculo exato, apesar das questões solicitarem valores aproximados. O autor ressalta que os resultados com os professores foram satisfatórios, porém nas questões que envolviam a interpretação da média os professores demonstraram bastante dificuldades.

Abordamos nesta seção algumas pesquisas de diversos contextos e nacionalidades e pudemos observar que o letramento estatístico dos estudantes de diversos níveis de escolarização está aquém do que se é desejado. Constatamos, também, que resultados de pesquisas mais antigas como a tese desenvolvida por Cazorla (2002), até resultados de pesquisas mais recentes como a dissertação de Ríó (2017), apontam que os alunos sentem dificuldades para compreenderem a média. As pesquisas demonstradas neste capítulo reforçam a importância das propriedades da média (STRAUSS; BICHLER, 1988) e dos seus significados (BATANERO, 2000). Na seção que segue, destacamos estudos que oferecem níveis de classificação de respostas sobre a média por estudantes.

3 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E O CAMPO CONCEITUAL DA MÉDIA ARITMÉTICA

Neste capítulo, apresentamos a Teoria dos Campos Conceituais sistematizado por Vergnaud (1990; 1997) na qual ele elenca que a formação de um conceito é constituída por uma tríade de conjuntos distintos. Buscamos compreender, igualmente, o tripé que forma o campo conceitual, base para nossa pesquisa. Na sequência, apresentamos os significados da média sistematizados por Batanero (2000) e as propriedades apresentados por Strauss e Bichler (1988).

A Teoria dos Campos Conceituais (1990), elaborada pelo pesquisador Gérard Vergnaud, é:

Uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, nomeadamente daquelas de relevam das ciências e das técnicas (VERGNAUD, 1996, p.155)

A Teoria dos Campos Conceituais contribui significativamente com pesquisas referentes à Educação Matemática, tendo como finalidade proporcionar a professores e pesquisadores uma compreensão de como se desenvolve o entendimento de conceitos matemáticos por parte dos alunos (MAGINA et al., 2001). Vergnaud (1990) destaca que, quando resolvemos alguma situação problema, esta situação tem relação com o ambiente escolar ou com a vida social. Assim, ao tentar resolver tal situação, faz-se necessário que o sujeito descubra relações com seu ambiente e, assim, explore-as.

Vergnaud (1996) compreende que existem diversos fatores que influenciam no desenvolvimento dos conceitos pelos estudantes. Considera que é importante que se ofereça situações diversas para a resolução de problemas. Assim, os estudantes refletirão acerca das situações, fortalecendo as relações existentes e construindo novas aprendizagens (MOREIRA, 2002).

Na Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (1990) destaca que, para a realização de uma situação problema, são designadas tarefas. Assim, qualquer situação complexa pode ser compreendida e analisada como uma combinação de subtarefas elementares. Nesta perspectiva, o autor compreende que se deve buscar analisar a natureza e a dificuldade de subtarefas elementares, aprofundando a análise das situações complexas. Desta forma, o autor considera duas ideias importantes:

1. A ideia de variedade – existe uma grande variedade de situações num campo conceitual e a variedade de situações é um meio de gerar sistematicamente o conjunto das classes possíveis; e

2. A ideia de história – os conhecimentos dos alunos são elaborados em situações que eles enfrentam e dominam progressivamente, sobretudo para as primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se pretende ensinar-lhes.

Vergnaud destaca que um Campo Conceitual é “um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição” (MOREIRA, 2002, p. 2). Assim, compreende-se que não é uma teoria de ensino de conceitos explícitos e formalizados, mas uma teoria que se dedica a estudar e compreender o desenvolvimento cognitivo da aprendizagem de competências complexas.

De acordo com Vergnaud, matemáticos normalmente buscam ser precisos, completos e econômicos quando escrevem definições, enquanto pesquisadores em Educação Matemática tentam compreender "como conceitos são formados progressivamente, através de diferentes tipos de situações e competências e através de diferentes tipos de representações linguísticas e símbolos" (1997, p. 5). Ainda de acordo com Vergnaud (1997), conceitos matemáticos se desenvolvem nas mentes de aprendizes como resultados das suas experiências dentro e fora da escola e, para estudar e compreender este processo de desenvolvimento, precisamos considerar que um conceito (C) é composto por um tripé de três conjuntos S , I e R , dentre os quais:

a) S é o conjunto de situações que dão ao conceito utilidade e significado. Segundo Vergnaud (1990), para os conceitos terem sentido é necessário considerar algumas situações e problemas, ou seja, analisar e compreender exhaustivamente as características das situações problemas. Para uma melhor compreensão, vejamos dois exemplos: exemplo 1: Pedro tem 8 carrinhos e seu irmão tem 9 carrinhos. Quantos carrinhos tem os dois juntos? Exemplo 2: Pedro deu 9 figurinhas a seu irmão Paulo e ficou com 8 figurinhas. Quantas figurinhas Pedro tinha antes de dar algumas a seu irmão? Observa-se que a resolução das duas situações é igual, sendo suficiente somar as duas quantidades para ter o resultado de carrinhos ou figurinhas. Porém, a situação 2 tem um pouco mais de dificuldade na sua resolução que a situação 1. Desta forma, Vergnaud (1990) destaca a importância de se trabalhar diferentes situações para compreender um único conceito;

b) **I** é o conjunto de invariantes operacionais que podem ser utilizados por indivíduos para lidar com estas situações, ou seja, um determinado conjunto de situações requer uma série de pensamentos precisos que se referem aos invariantes operatórios;

c) **R** é o conjunto de representações simbólicas linguísticas, gráficas ou gestuais, que podem ser usadas na representação de invariantes, situações e procedimentos. Vergnaud (1985) enfatiza que é impossível falar de conceito sem citar os termos da linguagem natural ou simbólica.

Desta forma, compreende-se que o primeiro conjunto de situações se refere ao conceito, o segundo conjunto de invariantes operatórios refere-se ao significado do conceito e o terceiro conjunto de representações simbólicas é referente ao significante (MOREIRA, 2002). Assim, destacamos que, para se estudar e aprofundar um determinado conceito, é fundamental considerar os três conjuntos simultaneamente (VERGNAUD, 1985; MOREIRA, 2002). Destaca-se nessa teoria a importância de professores diversificarem as situações-problemas para que os alunos possam pensar sobre um determinado conceito a partir de diferentes perspectivas.

Com o presente trabalho, buscamos investigar como o conceito de média aritmética é compreendido por alunos do 3º ano do Ensino Médio, considerando os diferentes significados e propriedades. Nesse caso, a teoria proposta por Vergnaud é a base para referenciar e subsidiar nosso estudo, contribuindo para que possamos compreender a formação do conceito de média.

3.1 Os significados da média aritmética

Particularmente importante para nossa pesquisa também é a aplicação dos significados. A respeito do caráter complexo do conceito estatístico de "média", Batanero (2000) sugere que este emerge progressivamente de um campo de problemas dos quais ela elenca quatro tipos aplicáveis a média, que são os seguintes:

Tabela 3 - Significado da média aritmética

Ordem	Significados do conceito de média aritmética
1º	Estimação de uma quantidade desconhecida na presença de erros de medição – cálculo da melhor estimativa de um valor desconhecido
2º	Necessidade de obter um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme.
3º	Servir de elemento representativo de um conjunto de dados, cuja distribuição é simétrica.
4º	Valor mais provável quando aleatoriamente tomamos um elemento de uma população.

Fonte: Batanero (2000)

Batanero (2000) argumenta que o campo composto pelos problemas, primeiro práticos e mais tarde teóricos (no sentido da formalização, generalização), exemplificados por esses tipos descritos acima, tem levado a definição do conceito de média à identificação de suas propriedades.

Descrevemos com mais detalhes os quatro significados definidos por Batanero (2000) a respeito do conceito da média. Incluímos, também, considerações sobre as dificuldades dos estudantes associadas a esses elementos que foram identificados nas pesquisas relacionadas ao conceito de média aritmética.

A autora destaca que o reconhecimento dos problemas, das situações que envolvem o conceito de média é um aspecto fundamental para resolvê-los. Por exemplo, não é suficiente conhecer o algoritmo e as definições de medidas de tendência central, ou mesmo saber calcular, se não há reconhecimento dos problemas que envolvem o conceito de média.

No significado 1, conforme apresentado na **TABELA 3**, a autora destaca que precisamos medir, em algumas situações, uma quantidade desconhecida x várias vezes para poder obtermos um valor mais aproximado da amostra real. A autora traz o seguinte exemplo: *“um pequeno objeto é pesado com o mesmo instrumento por oito alunos de uma classe, obtendo os seguintes valores em gramas: 6,2; 6,0; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. Qual seria a melhor estimativa do peso real do objeto?”* (BATANERO, 2000, p. 2).

Segundo Batanero (2000), se os alunos se depararem com este tipo de problema, é muito provável que a maioria somará os valores e dividirá por oito, obtendo assim o valor de 6,1475. A autora destaca que, em muitas situações, precisamos medir uma quantidade desconhecida x de certa magnitude. Contudo, devemos considerar as imperfeições de nossos instrumentos, pois com várias medições será comum obtermos números diferentes como medidas de x . Assim, não devemos pensar que um valor estará mais próximo de um ou de outro dos dados obtidos. Questões desse tipo são muito comuns em áreas como a Física, a Química e a Astronomia. Esse significado, em pesquisas como as de Melo (2010) e de Marcolino (2017), apresentaram um alto índice de dificuldades por parte dos participantes.

No significado 2, apresentado na **TABELA 3**, a autora coloca em evidência que, ao precisarmos realizar uma distribuição uniforme de determinada amostra, fazemos uso da média aritmética. A autora destaca um exemplo para uma melhor compreensão, vejamos: *“algumas crianças levam doces para as aulas. André leva 5, Maria 8, José 6, Carmem 1 e Daniel não leva nenhum. Como distribuir esses doces de forma equitativa?”* (BATANERO, 2000, p. 3).

Neste exemplo, Batanero (2000) destaca a necessidade de se obter uma quantidade equitativa para dividir uniformemente; sendo assim, é necessário que se considere todos os

dados da amostra. Esse tipo de significado é muito comum no nosso cotidiano, como, por exemplo, ao calcularmos a nota final de uma disciplina que foi composta por várias atividades avaliativas. Algumas pesquisas (MELO, 2010; EUGÊNIO, 2013; MAGINA et al., 2001; MARCOLINO, 2017; LIMA, 2005) observaram que este significado é considerado abstrato para alguns alunos e que outros apresentam um alto índice de dificuldades.

No significado 3, a autora leva em consideração a propriedade de localização central, tomando a média como representante de um conjunto de dados. Vejamos o exemplo destacado pela autora (2000, p.3, grifos nossos): “*ao medir a altura em cm, que um grupo de estudantes pode pular, antes e depois de ter um treinamento esportivo, os seguintes valores foram anotados. Você acha que o treinamento é significativo?*” (BATANERO, 2000, p. 3).

Tabela 4 - Exemplo do significado 3

	Altura que saltou em cm									
Aluno	Ana	Bia	Carol	Diana	Elena	Fanny	Gia	Hilda	Ines	Joana
Antes do treinamento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Depois do treinamento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

Fonte: Batanero (2000)

Nesse exemplo, a autora destaca alguns dados da altura média antes e depois de um treinamento, com o objetivo de analisar se surtiu algum efeito. Sendo assim, para conseguirmos representar um conjunto de dados fazendo uso da média aritmética, é necessário considerar suas propriedades de localização central. Ressalta-se também que, quando o conjunto é formado por valores discrepantes, faz-se necessário o uso de outras medidas de tendência central, tais como: a moda e mediana. Em algumas pesquisas (CAZORLA, 2002; CAETANO, 2004; MELO, 2010), os autores concluem que esse significado é o mais complexo para os participantes.

Por último, conforme a **TABELA 4**, a autora descreve o significado 5 e destaca a necessidade de se conhecer o valor que será obtido com maior probabilidade quando se toma um elemento aleatório de uma população amostral. Batanero (2000, p.4) destaca o seguinte exemplo a respeito desse significado:

A altura média dos alunos de uma determinada escola é de 1,40m. Se retirarmos aleatoriamente uma amostra de 5 alunos, medindo assim, a altura dos 4 primeiros, descobrimos que eles tem altura igual a: 1,38m, 1,42m, 1,60m e 1,40m. Desta forma, qual será a altura mais provável do quinto aluno?

Neste exemplo, Batanero (2000) destaca a necessidade de conhecer um determinado valor que será obtido com maior probabilidade quando se toma um elemento aleatório de uma população. Esse significado faz-se presente constantemente no cotidiano da população; por exemplo, atualmente no Brasil fala-se muito na reforma da previdência, com argumentos que a população está envelhecendo. Neste contexto, ao prever a expectativa de vida da população ou o tempo que a população usufruirá de benefício (aposentadorias), a média da variável da idade da população e o tempo que receberá o benefício é tomada como uma possibilidade, como um valor provável, por suas propriedades de amostra derivadas do teorema do limite central. Desta forma, quando prevemos o tempo de vida de uma população, usamos a idade média da população amostral a que estamos nos referindo.

Portanto, segundo Batanero (2000) é desejável que esses significados sejam formalizados nas escolas progressivamente a partir de diferentes situações-problemas, com os quais os estudantes se deparam ao longo do processo de escolarização. Sendo assim, usamos como base os quatro significados elencados por Batanero (2000) para analisar as respostas apresentadas pelos alunos do 3º ano que fazem parte de nossa pesquisa.

O conceito de média aritmética é compreendido como um conceito básico da estatística e é um dos mais utilizados no dia a dia das pessoas (POLLATSEK et al., 1981). Cotidianamente fazemos uso da média aritmética, seja na escola, ao calcularmos a nota obtida em uma determinada disciplina, ao sair com os amigos para um bar e ao final dividirmos a conta, entre outras ocasiões.

Porém, apesar de ser simples o conceito de média aritmética, resultados de algumas pesquisas (EUGENIO, 2013; MELO, 2010; MAGINA et al., 2001) têm demonstrado que os alunos apresentam bastante dificuldades na resolução de questões que envolvem seu conceito. Um exemplo são os estudos dos autores Strauss e Bichler (1988), que investigaram como 80 estudantes compreendiam o conceito de média. No estudo dos autores, os alunos também apresentaram dificuldades, fazendo com que eles elencassem sete propriedades que devem ser ensinadas nas escolas, com objetivo de os estudantes dominarem o conceito de média.

3.2 As propriedades do conceito de média aritmética

As sete propriedades elencadas por Strauss e Bichler (1988) acerca da média aritmética encontram-se descritas no **QUADRO 2** a seguir.

Quadro 2 - Propriedades da média

Ordem	Propriedades
P1	A média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo \leq média \leq valor máximo);
P2	A soma dos desvios a partir da média é zero ($\sum (X_i - \text{média}) = 0$);
P3	A média é influenciada por cada um e por todos os valores (média = $\sum X_i/n$);
P4	A média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem;
P5	A média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (por exemplo, o número médio de filhos por casal é de 2,3);
P6	O cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos;
P7	A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada. Em termos espaciais, a média é o valor que está mais próximo de todos os valores.

Fonte: Strauss; Bichler (1988)

Essas propriedades elencadas por Strauss e Bichler (1988) são primordiais para uma compreensão conceitual de média (EUGENIO, 2013). Desta forma, é fundamental para nossa pesquisa, já que, para se ter domínio do conceito de média, se faz necessária uma perfeita compreensão das propriedades elencadas por Strauss e Bichler (1988) (MAGINA et al., 2001).

Segundo Strauss e Bichler (1988), para a construção do conceito de média são essenciais as propriedades elencadas por eles e tais propriedades são compreendidas em três aspectos, a saber: aspecto estatístico, aspecto abstrato e aspectos representativos. Segundo os autores, o aspecto estatístico está relacionado às três primeiras propriedades que são consideradas básicas; já as propriedades relacionadas ao aspecto abstrato (P3, P4 e P5) requer que se faça uso de valores que não aparecem. A P7, segundo os autores, refere-se ao aspecto representativo e é considerada a propriedade que apresenta o maior grau de dificuldade.

A propriedade 1 enuncia que: “a média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo \leq média \leq valor máximo)”, referindo-se que o valor da média aritmética estará sempre entre o menor valor e o maior valor de um conjunto de dados. Exemplo, se analisarmos a altura de todos os alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma determinada turma e desejarmos obter a média de altura dos alunos, essa média com certeza estará entre a altura do menor aluno e do maior aluno.

A propriedade 2 expõe que: “a soma dos desvios a partir da média é zero ($\sum (X_i - \text{média}) = 0$)”, referindo-se que, ao somarmos todos os desvios a partir da média aritmética, o resultado será sempre igual a zero. Os autores trazem um exemplo: a média de 3, 5 e 7 é igual a 5, logo ocorre que $(3-5) + (5-5) + (7-5)$ será igual a 0.

A propriedade 3 profere que “a média é influenciada por cada um e por todos os valores (média = $\sum X_i/n$)”, referindo-se que a média aritmética é influenciada pelas alterações sofridas pelos valores do conjunto. Se um valor do conjunto for modificado, a média também sofrerá

modificações. Exemplo: a idade de 4 alunos do 3º ano do Ensino Médio é 16 anos, 17 anos, 17 anos e 18 anos. A média aritmética das idades será de 17 anos. Porém, se algumas das idades forem alteradas, sendo incluídas ou excluídas novas idades, a média sofrerá modificações.

A propriedade 4 profere que “a média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem”. A partir dessa propriedade, os autores compreendem a média como uma propriedade abstrata. Nesta propriedade, é compreensível que a média possa ser um valor que não corresponde a nenhum número do conjunto, podendo, aliás, ser diferente dele. Exemplo: em uma empresa, Paulo ganha R\$ 2.000,00, Marta ganha R\$ 950,00 e o estagiário ganha R\$ 500,00. A média salarial dos três é igual a R\$ 1.150,00; logo, não faz parte do conjunto amostral.

A propriedade 5 enuncia que “a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (por exemplo, o número médio de filhos por casal é de 2,3)”, também considerada pelos autores como uma propriedade abstrata, porque o número correspondente à média pode ser um valor em forma de fração ou decimal. Os autores exemplificam a partir da menção “o número médio de filhos por casal é de 2,3”. Neste contexto, a média não tem sentido na vida das pessoas, porém mostra a representatividade da média. Em pesquisas recentes, esta propriedade tem demonstrado que os alunos têm um alto nível de dificuldade ao resolvê-la, desde crianças pequenas, por não compreenderem o número decimal (WATSON, 1996; SELVA; BORBA, 2005) e/ou por não conseguir relacionar duas grandezas, sendo elas: o número total de filhos e o número total de casais (CAZORLA, 2003).

A propriedade 6 enuncia que “o cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos”. Os autores consideram esta propriedade como abstrata por ser necessário levar em consideração números que não aparecem. Nesta perspectiva, ao calcularmos a média devemos levar em consideração todos os valores da amostra, sendo eles os nulos e negativos. Exemplo: se formos calcular a média de gols de um determinado clube de futebol, devemos considerar todas as partidas jogadas pelo clube, inclusive quando não fizerem gols e quando perderem. Em pesquisas como a de Lima (2005) e a de CAETANO (2004), demonstrou-se que os alunos têm uma certa incompreensão com relação a esta propriedade. Um dos possíveis motivos para os alunos apresentarem dificuldades com essa propriedade seria o professor não a explorar adequadamente em sala de aula, já que em pesquisas como a de Anjos e Gitirana (2008) destaca-se que esta propriedade é pouco explorada em livros didáticos.

A propriedade 7 enuncia que “a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada. Em termos espaciais, a média é o valor que está mais próximo de todos os valores.” Segundo os autores, a única propriedade com aspecto representativo. Isso quer dizer que a média aritmética é o valor que mais próximo chega da representação de um dado

amostral. Nesta propriedade, compreende-se também que, em alguns casos, a média não será a melhor representação do dado amostral, tendo que fazer uso de outras medidas de tendência central.

Strauss e Bichler (1988), em seus estudos, após destacarem a importância de as sete propriedades serem aprendidas nas escolas, frisam que a propriedade 7 é considerada a mais significativa, por envolver o significado da média como uma medida de tendência central. Nas pesquisas dos autores, foi constatado que a propriedade 3 é considerada a mais fácil, enquanto as propriedades 6 e 7 são as que demonstram um maior nível de dificuldade e de compreensão pelos alunos.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, descrevemos os métodos e técnicas que nortearam a nossa pesquisa. A metodologia descreve como a pesquisa foi realizada, fazendo-se uso de um instrumento diagnóstico para se chegar a uma determinada conclusão (GIL, 1995; MARCONI; LAKATOS, 1991; ROESCH, 1996). Dessa forma, apresentamos em seguida as características da nossa pesquisa e dos participantes, além de aspectos relativos aos instrumentos diagnósticos utilizados e procedimentos metodológicos para aplicação.

4.1 Características da pesquisa

Dado o problema levantado e seus respectivos objetivos, podemos classificar a finalidade desta pesquisa como aplicada. A pesquisa é compreendida como aplicada por ser desenvolvida em sala de aula através da aplicação de um instrumento diagnóstico formado por cinco questões, conforme detalhado mais adiante.

Segundo Roesch (1996), a pesquisa aplicada tem por objetivo compreender a natureza e a fonte dos problemas concretos, bem como, compreender questões consideradas importantes pela sociedade, embasadas nas contribuições das teorias que podem ser usadas nas intervenções de resolução de problemas. Neste sentido, nossa pesquisa é também compreendida como aplicada por se concentrar em torno de uma situação problema que está diretamente relacionada às instituições de ensino (GRE-Mata Centro) e a um grupo social (alunos).

Quanto à abordagem do problema, a pesquisa é definida como quantitativa, por envolver dados estatísticos em seus resultados. Segundo Mattar (2001), a pesquisa quantitativa procura validar hipóteses mediante o uso de dados estruturados, estatísticos, com análise de muitos casos representativos, recomendando um curso final da ação. Ela quantifica os dados e generaliza os resultados da amostra para os interessados. Por fim, fizemos uso da pesquisa qualitativa para melhor explicar os resultados obtidos pela pesquisa quantitativa.

A coleta de dados foi realizada através de fontes primárias e secundárias. Nestas últimas, procedemos ao levantamento bibliográfico de pesquisas relacionadas aos assuntos pertinentes a este estudo. Foram feitas buscas no repositório de teses e dissertações da CAPES, bem como em revistas e livros. Já as fontes primárias são aquelas obtidas diretamente na fonte pesquisada (BARBETA, 2014). Os dados primários foram obtidos através da aplicação da sequência de questões aos alunos. Desta forma, podemos afirmar que estes foram resultantes dos dados

coletados com o objetivo de atender às necessidades da pesquisa em andamento (MATTAR, 1996).

A análise dos dados teve um cunho exploratório-descritivo. Segundo Gil (1995), a pesquisa exploratória tem como objetivo esclarecer conceitos e ideias. Sendo assim, fizemos uso da pesquisa exploratória no início deste trabalho, no qual, além de descrever o conceito relacionado à média aritmética, usamos a pesquisa em periódicos da CAPES como principal fonte de aprimoramento de ideias. Em seguida, a pesquisa se caracterizou como descritiva, por ter como objetivo descrever a compreensão do conceito de média aritmética dos alunos do 3º ano do Ensino Médio. Segundo Gil (2007), a pesquisa descritiva tem como principal objetivo a descrição de características envolvendo populações, ou, ainda, estabelecer relações entre variáveis.

Forza (2002) destaca que uma pesquisa descritiva contribui para um conhecimento mais aprofundado de uma determinada área e esse conhecimento pode ser adquirido através de coletas de informações diretamente ligadas aos indivíduos ou sobre o ambiente onde esses indivíduos estão inseridos. Segundo o autor, a pesquisa descritiva é relevante por proporcionar subsídios para construção e/ou refinamento de teorias.

Ressaltamos que a pesquisa descritiva permite uma análise aprofundada do problema de pesquisa em relação a vários contextos (MARCONI; LAKATOS, 2006). Sendo assim, corrobora para que a nossa pesquisa apresente uma análise minuciosa do nosso grupo investigado. Oliveira (2005, p. 41) destaca que a pesquisa descritiva é:

É um processo de reflexão e análise da realidade através da utilização de métodos e técnicas para compreensão detalhada do objeto de estudo em seu contexto histórico e/ou segundo estruturação. Esse processo implica em estudos segundo a literatura pertinente ao tema, observações, aplicação de questionários ou/e entrevistas e análise de dados, que deve ser apresentada de forma descritiva.

Nesse contexto, podemos destacar os princípios norteadores do nosso trabalho, no qual realizamos uma análise dos resultados apresentados pelo grupo amostral da pesquisa. Ressaltamos, ainda, que o pesquisador não interferiu de nenhuma forma nas respostas elaboradas/apresentadas pelos participantes.

Nossa pesquisa, portanto, apresenta dados que foram adquiridos através de um instrumento diagnóstico composto por cinco questões aplicadas a alunos do 3º ano do Ensino Médio. Desta forma, é importantíssimo levar em consideração a população amostral e/ou amostra (GIL, 2007), que consiste na parte de uma população escolhida para fazer parte da pesquisa (VERGARA, 2013). Desta forma, essa pesquisa caracteriza-se como não

probabilística, já que a amostra (escolas/alunos) foi selecionada por critério de acessibilidade aos locais de pesquisa.

Segundo Vergara (2004), uma amostra não probabilística pode ser selecionada por acessibilidade ou por tipicidade. No caso da nossa pesquisa, a amostra foi selecionada por acessibilidade. Sendo assim, a seleção das escolas e alunos ocorreu por apresentarem um melhor acesso ao pesquisador, logo não apresentam procedimentos estatísticos na seleção do grupo amostral.

Nesta perspectiva, na aplicação da sequência de questões utilizamos o tipo de análise não probabilístico e por acessibilidade. Essa população amostral é compreendida como uma parte do universo/população escolhida, seguindo como critério: as escolas e alunos fazerem parte da Gerência Regional de Educação – Mata Centro (GRE-Mata Centro) do estado de Pernambuco; entre as cidades que fazem parte da GRE – Mata Centro, foram escolhidas quatro para termos um grupo mais heterogêneo; elas ficam próximas à cidade do pesquisador. Nas cidades escolhidas, foram consultadas as escolas com disponibilidade da gestão escolar e de professores que concordassem em participar da pesquisa, cedendo uma aula para aplicação da sequência de questões. Todos os alunos estavam cursando o 3º ano do Ensino Médio.

Assim sendo, podemos resumir a classificação do presente estudo através do quadro a seguir:

Quadro 3 - Resumo da classificação metodológica

Questionamento	Esclarecimento
A finalidade da pesquisa é pura ou aplicada?	A pesquisa é aplicada, por ter como objetivo compreender a natureza e a fonte de um problema concreto ligado a um ambiente social.
Quanto a abordagem do problema é qualitativa ou quantitativa?	Nossa pesquisa apresenta um contexto quantitativo, já que, na medida em que a pesquisa apresenta dados estatísticos e analisa os vários casos representativos.
Quanto à técnica de coleta de dados ele é primário ou secundário? Ou os dois?	A presente pesquisa apresenta uma técnica primária e secundária. Primário, referente a sequência de questões aplicadas. Secundárias, referentes as pesquisas já realizadas: artigos, livros, dissertações e teses.
Quanto a análise dos dados será de cunho exploratória, descritiva ou explicativa?	A análise dos dados será de cunho exploratória-descritiva. Exploratória por ter como objetivo compreender conceitos e ideias. E descritiva, por apresentar a descrição de características envolvendo a população amostral.
Quanto a pesquisa ela caracteriza-se como probabilística ou não probabilística?	A pesquisa apresenta uma característica não probabilística. Já que não apresenta, em seu desenvolvimento, procedimentos estatísticos.
Quanto a pesquisa foi selecionada por tipicidade ou por acessibilidade?	A presente pesquisa apresenta uma amostra que foi selecionada por acessibilidade.

Fonte: o autor

4.2 Participantes

Nesta pesquisa, participaram estudantes que estavam cursando o 3º ano do Ensino Médio nas escolas que fazem parte da Gerência Regional de Educação – Mata Centro (GRE-Mata Centro) do estado de Pernambuco, mais especificamente todas as escolas estaduais que oferecem Ensino Médio nas cidades de Barra de Guabiraba, Bezerros, Bonito, Camocim de São Félix, Chã de Alegria, Chã Grande, Escada, Glória do Goitá, Gravatá, Pombos, Sairé, São Joaquim do Monte e Vitória de Santo Antão.

A amostra da nossa pesquisa se deu por um subconjunto da população em estudo, em que todos os participantes da amostra estariam cursando o 3º ano do Ensino Médio em escolas públicas estaduais em algumas das cidades já mencionadas.

Escolhemos o 3º ano do Ensino Médio por acreditarmos que os alunos que estão concluindo a Educação Básica devem possuir a habilidade de responder corretamente questões que envolvam o conceito de média aritmética. Ressaltamos que, segundo os documentos que norteiam a Educação Básica no Brasil, os alunos começam a desenvolver tal habilidade nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e perpassam até o Ensino Médio. Desta forma, acreditamos que os alunos, após anos de estudos do conceito, consigam desenvolver uma resposta correta acerca do conceito de média.

Por trata-se de uma análise não probabilística e por acessibilidade, a seleção das cidades, como já mencionado anteriormente, seguiu alguns critérios. Desta forma, a tabela a seguir traz as cidades escolhidas e a quantidade de escolas estaduais que oferecem Ensino Médio nas respectivas cidades.

Tabela 5 - Cidades e escolas selecionadas para fazerem parte da pesquisa

Cidades	Cidade A	Cidade B	Cidade C
Quantidade de escolas	6	1	7

Fonte: o autor

A Gerência Regional de Educação – Mata Centro é constituída de 39 escolas, das quais 14 estão localizadas nas cidades da qual fizemos a pesquisa. Para a seleção das escolas nas quais aplicamos a sequência de questões, utilizamos os seguintes critérios: haver turmas do 3º ano do Ensino Médio; terem uma localização de melhor acesso ao pesquisador; e se mostrarem disponíveis à realização da pesquisa por parte da gestão escolar e dos professores.

Após esse filtro, chegamos a cinco escolas distribuídas em três cidades desta GRE. Preferimos não disponibilizar o nome das escolas para manter o sigilo das instituições, bem como dos alunos que concluiriam o Ensino Médio naquele ano.

4.3 Procedimentos

A escolha das escolas foi realizada por contato direto do pesquisador com os gestores das instituições. Inicialmente, explicamos do que se tratava a pesquisa, que os dados levantados na instituição seriam mantidos em sigilo e que o nome da escola e dos participantes não seriam revelados. Na ocasião, pedimos a assinatura da carta de anuência (apêndice 1), através da qual os gestores autorizaram a realização da pesquisa nas respectivas instituições. Dando procedimento, pedimos aos gestores(as) indicação de professores de Matemática que nos ajudassem na realização desta etapa da pesquisa. Após indicação, falamos com os professores, se poderiam nos ceder uma aula e participar em sala da aplicação do instrumento diagnóstico. Após falar com os professores, marcamos com eles as datas de aplicação.

Portanto, o teste diagnóstico foi realizado de acordo com a disponibilidade de data proposta pelo professor. A aplicação ocorreu na sala de aula dos estudantes, na qual tivemos dois encontros: no primeiro, explicamos do que se tratava a pesquisa e da importância deles na pesquisa. Em seguida, pedimos para os maiores de 18 anos assinarem o Termo de Consentimento – PCLE (apêndice 2) e, para os menores de 18 anos, que o levassem assinado, no dia seguinte, pelos pais ou responsáveis - TCLE (apêndice 3). No segundo encontro, os alunos trabalharam individualmente para resolução do instrumento diagnóstico, contaram com lápis, caneta e borracha, não sendo permitidas consultas. Os alunos tiveram uma aula (50 minutos) para a realização das questões.

4.4 Instrumento de coleta de dados

Na construção de nosso instrumento de coleta, achamos pertinente nos orientar em Vergnaud (1990), o qual fundamenta a nossa ideia de formação de conceito. Vergnaud (1990; 1997), na Teoria dos Campos Conceituais, destaca que a formação de um conceito é constituída por uma tríade de conjuntos distintos. Nesse contexto, o conceito precisa ser analisado a partir de um campo conceitual, sendo este composto por propriedades, objetivos, relações (invariantes) e, por último – mas não menos importante -, situações que constituem os tipos de problemas em que eles são expressos. Sendo assim, ao estudarmos e/ou analisarmos o

desenvolvimento e o uso de um conceito, no decorrer da aprendizagem ou de sua utilização, é imprescindível considerar os conjuntos simultaneamente (MOREIRA, 2002). Portanto, nossa pesquisa e análise perpassa pelos invariantes e significados relacionados ao conceito de média.

Nessa perspectiva, dada a importância de se trabalhar propriedades e significados na compreensão de conceitos, nosso estudo também levou em consideração as propriedades de média aritmética levantada por Strauss e Bichler (1988). Consideramos as propriedades elencadas pelos autores, como fundamentais para se compreender o conceito de média (EUGÊNIO, 2013). As propriedades que Strauss e Bichler (1988) elencam são aquelas listadas no **QUADRO 2** e que apresentamos novamente em seguida:

- a) A média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo \leq média \leq valor máximo);
- b) A soma dos desvios a partir da média é zero ($\sum (X_i - \text{média}) = 0$);
- c) A média é influenciada por cada um e por todos os valores (média = $\sum X_i/n$);
- d) A média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem;
- e) A média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (por exemplo, o número médio de filhos por casal é de 2,5);
- f) O cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos;
- g) A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada. Em termos espaciais, a média é o valor que está mais próximo de todos os valores.

As propriedades elencadas por esses autores são fundamentais para a compreensão do conceito de média aritmética (EUGÊNIO, 2013), já que apresentam aspectos que vão do básico ao abstrato para compreensão do conceito. Por exemplo, em seus estudos os autores consideram que as três primeiras propriedades são básicas, referindo-se ao aspecto estatístico da média; já as propriedades seguintes são compreendidas como abstratas, por requererem que se faça uso de valores que não aparecem.

Referente aos significados, adotamos como orientação na construção de nosso instrumento de coletas os estudos de Batanero (2000), nos quais a autora elenca que mesmo os conceitos mais simples, como os de média, precisam de um tratamento específico para que os estudantes consigam compreender os múltiplos significados. Sendo assim, a autora levanta os quatro significados do conceito de média adotados, sendo eles:

- i. A estimativa de uma quantidade desconhecida, em presença de erros de medida [...];
- ii. A obtenção de uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme [...];
- iii. A aplicação de que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores dados, cuja distribuição é aproximadamente simétrica [...]; e
- iv. A necessidade de conhecer o valor que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição (BATANERO, 2000, p. 1-6).

Batanero (2000), ao conceituar tais significados, destaca que os estudantes devem se deparar ao longo da escolarização com situações-problemas que abordem tais elementos. Sendo assim, seguindo as orientações elencadas por Batanero (2000) verificaremos a compreensão aos significados do conceito de média por estudantes do 3º ano do Ensino Médio.

O instrumento diagnóstico utilizado em nossa pesquisa foi construído a partir 5 questões da literatura. Cada questão envolve um único significado levantado por Batanero (2000) e uma ou mais propriedades elencadas por Strauss (1988). Através das respostas, analisamos a compreensão dos alunos em relação aos significados e propriedades do conceito de média.

Ao analisarmos o desempenho em relação aos significados e propriedades, categorizamos as respostas de acordo com o que o aluno respondeu. Ou seja, em cada questão buscamos identificar:

- a) As respostas foram: certas ou erradas?
- b) Com quais significados os alunos têm mais facilidade? E com quais têm mais dificuldades?
- c) Quais propriedades levaram a um melhor desempenho?
- d) Quais alunos apresentaram mais dificuldades?

Destacamos que todas essas respostas foram categorizadas com base nos significados e propriedades do conceito de média aritmética utilizados no instrumento diagnóstico que descrevemos em seguida.

4.5 Instrumento diagnóstico (questões)

Utilizamos como instrumento diagnóstico uma sequência com cinco questões, buscando verificar a compreensão do grupo investigado em relação às propriedades e significados do conceito de média. Portanto, as atividades foram escolhidas por já terem sido trabalhadas em pesquisas semelhantes como a de Batanero (2000) e de Magina et al. (2010) e por apresentarem

as propriedades e significados que discutimos na seção 3.3. Descrevemos em seguida cada questão, seguidas de comentários e forma de resolução.

Questão 1 - Estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida.

Nove estudantes pesaram um pequeno objeto com um mesmo instrumento em uma aula de ciências. Cada estudante registrou os seguintes pesos (em gramas):

6,3 6,0 6,0 15,3 6,1 6,3 6,2 6,15 6,3

Os estudantes querem determinar com a maior precisão possível o peso real do objeto. Qual dos seguintes métodos é recomendado que utilizem?

- (a) Usar o número mais comum, que é 6,3.*
- (b) Usar 6,15, posto que é o peso mais preciso.*
- (c) Somar os 9 números e dividir a soma por 9.*
- (d) Usar 6,2, pois quatro medidas ficam abaixo e quatro acima*
- (e) Outro método. Qual? _____*

Comentários e resolução da questão 1:

Segundo Batanero (2000), questões deste tipo requerem que os sujeitos estimem uma quantidade desconhecida para o objeto. Desta forma, a média é empregada como uma estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida (significado) e a média é influenciada por cada um e por todos os valores (propriedade). A ideia para se resolver esta questão adaptada de Batanero (2000) é que, como não é possível saber qual dos pesos é o mais preciso, os estudantes precisariam descartar o peso 15,3 por se tratar de uma variável muito alta, tendo em vista que a questão específica que é o mesmo objeto e, em seguida, aplicassem o algoritmo da média, somando-as aos demais valores e dividindo por 8. Assim, a média representaria uma estimativa mais próxima do peso do objeto.

Os alunos que utilizaram como alternativa de resposta a letra “a” estariam considerando a média como o que é mais frequente (moda). Sendo assim, as possíveis características de quem apresenta esse tipo de resposta é a seguinte: normalmente, eles usam o conceito de moda para construir uma distribuição ou interpretar uma existência, não apresentam flexibilidade em

escolher estratégias. Segundo Stella (2003, p. 59), esses estudantes são “incapazes de construir uma distribuição quando não é permitido usar a média dada como um dado ponto”.

Os alunos que utilizaram a letra “b” como resposta possivelmente acreditam que a média aritmética de um conjunto de dados não é um valor matemático exato, mas uma aproximação que pode assumir vários valores. É provável que, para esses sujeitos encontrarem o valor exato, se faça necessário que os dados apresentem valores exatos e não estimativas, como a questão enuncia.

Alunos que utilizaram a letra “c” como resposta utilizaram o algoritmo da média, seguindo rigidamente o que foi ensinado em sala de aula, no sentido de executar um procedimento para encontrar a média aritmética. Assim, alunos que dão como alternativa correta a letra “c” apresentam estratégias limitadas para averiguar a “razoabilidade” das soluções.

Alunos que utilizaram a letra “d” como resposta viam a média como uma ferramenta para dar sentido aos dados. Eles escolheram uma média que era representativa dos dados, a partir uma perspectiva matemática e de uma perspectiva do senso comum. Procuraram pelo “centro” para representar os dados, definido como mediana, o meio do intervalo.

Possivelmente, o erro mais comum a essa questão deva ocorrer com os alunos considerando as 9 variáveis, fazendo uso do algoritmo da média, ou seja, somando os 9 valores e em seguida, dividindo-os por 9. Dessa forma, a média representada não demonstrará uma melhor estimativa do peso do objeto.

Questão 2 – Necessidade de conhecer o que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição.

A altura média dos alunos de uma turma do 6º ano é de 1,40. Se retirarmos uma amostra aleatória de 5 estudantes desta sala e descobrirmos que a altura (em metros) dos 4 primeiros é:

1,38; 1,42; 1,60; 1,40.

Qual seria a altura mais provável do quinto aluno?

Comentários e resolução da questão 2:

A questão 2, adaptada de Batanero (2000), tem por definição a necessidade de conhecer o que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado ainda não preenchido em uma distribuição, ou seja, requer o reconhecimento da média como valor que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado oculto em uma distribuição (significado). Envolve, igualmente, a ideia de que a média está localizada entre os valores extremos (propriedade).

Esperava-se que os alunos apresentassem a resposta correta, que era o valor da própria média apresentada na situação (1,40m). Desta forma, a questão já trazia a resposta em seu enunciado ao solicitar o valor mais provável. O peso do 5º aluno não seria uma certeza, mas, sim, uma possibilidade.

As possíveis dificuldades que podiam ocorrer ao resolverem essa questão eram a necessidade de conhecer o que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição; apresentar respostas incorretas com valores apresentados na questão; deixar a questão em branco; ou somar os quatro valores apresentados e dividir por 5.

Questões semelhantes a esta, em estudos como o de Stella (2003), destacam que normalmente os alunos buscam o valor do peso das 5 pessoas somado as quatro anteriores. Assim, os sujeitos não utilizam o conceito de média como “valor mais provável”, apenas como algoritmo.

Questão 3 - Média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme.

Toda sexta-feira a professora de uma turma solicita que os alunos tragam livros para empréstimo coletivo para estimular a leitura no fim de semana. Em um destes dias, a turma apresentou a seguinte quantidade de livros:

Joana trouxe 1

Caio trouxe 5

Gina apresentou 1 e

Paulo 3 livros.

Marina saiu atrasada de casa e esqueceu de pegar os livros.

Como redistribuir os livros de forma que cada aluno fique com a mesma quantidade? E qual seria a quantidade de cada um, após a distribuição?

Se Marina tivesse levado 1 livro, a média de livros por aluno teria aumentado? Por quê?

Comentários e resolução da questão 3:

A questão 3 pedia o cálculo da média aritmética, admitindo que a mesma referia-se a uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme (significado), como também que o cálculo da média levaria em consideração todos os valores, inclusive os nulos, e que a média poderia ser um número que não tem um correspondente na realidade física (por exemplo, o número médio de filhos por casal é de 2,5). Requer que os alunos reconheçam que se acrescentar mais um valor ao conjunto de dados a média será modificada.

Esperava-se que os alunos respondessem corretamente, fazendo uso do algoritmo da média, somando a quantidade de livros e dividindo pela quantidade de alunos, obtendo como resultado a quantidade de 2 livros por aluno(a). O procedimento para se obter o resultado, poderia ser desenvolvido desta forma:

$$\text{Média aritmética} = \frac{1+5+1+2+0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Em seu segundo questionamento, a resposta é “sim”, seria alterada, já que o número de livros teria aumentado. Sendo assim, requeria que os alunos obtivessem a média aritmética, aceitando-a como uma quantidade justa a ser dividida para conseguir uma distribuição uniforme (significado), onde a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (propriedade) apresentada.

Alguns dos possíveis erros nessa questão poderiam ser a resolução incorreta da mesma, por nunca ter tido acesso aos conceitos de média aritmética; ou erro ao somar os números inteiros positivos e desconsiderar o valor zero, uma vez que ele nem sempre é tomado em conta no cálculo da média pelos alunos, que ainda poderiam sentir dificuldades em realizar o cálculo da divisão resultante em um número decimal.

Questão 4 - A média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica.

Letícia está pesquisando preços de salgadinhos para comprar mais barato e economizar sua mesada. Ela anotou preços de três lugares diferentes e descobriu que o preço médio destes

salgadinhos é de R\$3,00. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso) para os possíveis valores que Letícia encontrou:

a) () 1, 1, 1

d) () 1, 3, 6

b) () 1, 3, 5

e) () 1, 1, 1

c) () 3, 3, 3

f) () 1, 2, 6

Descreva como você pensou: _____

Comentários e resolução da questão 4:

A questão 4, obtida da pesquisa de Magina et al. (2010), tem por significado a média como elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica. A questão solicitava que, a partir da média aritmética já dada, fossem identificados os possíveis conjuntos de dados que satisfazem a média. Porém, seria necessário que o aluno compreendesse a média como um elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica (significado) e, além disso, um valor representativo das informações a partir dos quais ela foi calculada (propriedade).

Na alternativa “a”, os valores que fazem parte do conjunto de dados são constantes e a somatória deles é análoga ao valor da média, portanto deveria ser marcada como falsa;

Na alternativa “b”, são distintos os valores e o conjunto de dados correspondentes à média exposta na questão, ou seja, a questão é considerada verdadeira, pois a somatória de todos os seus termos é igual a nove, que realizando o cálculo irá corresponder à média da questão já apresentada;

Na opção “c”, os valores são constantes e análogos aos valores da média, correspondendo à média descrita na questão. Portanto, a questão é verdadeira, onde os valores apresentados correspondem a média da mesma;

Na alternativa “d”, os valores são múltiplos do valor da média, ou seja, a questão é considerada falsa, pois não satisfaz à média solicitada;

Na opção “e”, os valores são constantes e excedem o valor da média. Sendo assim, a questão é falsa, já que realizando o cálculo da média a questão não corresponde ao solicitado;

Enfim, na alternativa “f”, os valores são distintos e análogos aos valores da média, correspondendo à média descrita na questão. Portanto, a questão é verdadeira, onde os valores apresentados correspondem a média.

Alguns possíveis erros que poderiam vir a acontecer nesta questão poderiam ser devido aos alunos nunca terem entrado em contato com alguma questão similar a esta, e assim, não compreenderem o que a questão pede. Sendo assim, os alunos poderiam não conseguir desenvolver a questão, mesmo já trazendo a média e solicitando quais dos possíveis cálculos levariam àqueles resultados. Ainda se destaca que os alunos poderiam vir a errar por não terem compreendido bem a fórmula ou o cálculo para se resolver questões desta propriedade/significado.

Questão 5 - A média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica.

Maria e Pedro passam em média 8 horas a cada final de semana praticando esportes. Outros 8 alunos dedicam a cada fim de semana, em média, 4 horas praticando esportes.

- a) Em média, quantas horas os 10 alunos praticam esportes todo final de semana?*
- b) Maria e Pedro também passam 1 hora ouvindo músicas todo fim de semana, já os outros 8 alunos passam 3 horas. Qual é a média de horas que os 10 alunos dedicam no fim de semana com as duas atividades? Ouvir músicas e praticar esportes.*

Comentários e resolução da questão 5:

A questão 5, adaptada da pesquisa de Mayén et al. (2007), solicitava que o grupo investigado obtivesse a média aritmética ponderada, admitindo-a. A média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica. (significado), bem como a soma dos desvios a partir da média é zero (propriedade). A média ponderada do primeiro questionamento dará 4,8 horas. No segundo questionamento, que trata da soma das médias, dará exatos 7,4hrs.

Alguns erros possíveis que poderiam ocorrer nesta questão eram o desenvolvimento equivocado do cálculo da média aritmética ponderada por parte dos alunos, quem como a realização apenas da soma das variáveis.

Para finalizar a descrição das questões analisadas acima, apresentamos no quadro abaixo os aspectos sobre os quais versam cada questão do instrumento diagnóstico.

Quadro 4 - Significados e propriedades por questão

Questões	Significados	Propriedades
1º	Estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida. (S1)	1. A média é influenciada por cada um e por todos os valores; (P3) 2. A média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo \leq média \leq valor máximo); 3. A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada.
2º	Necessidade de conhecer o que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição. (S4)	1. A média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo \leq média \leq valor máximo); (P1) 2. A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada 3. A média é influenciada por cada um e por todos os valores;
3º	Média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme. (S2)	1. O cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos. (P6) 2. A média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física; (P5) 3. A média é influenciada por cada um e por todos os valores; (P3)
4º	A média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica. (S3)	1. A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada; (P7) 2. A média é influenciada por cada um e por todos os valores; (P3)
5º	A média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica. (S3)	1. A soma dos desvios a partir da média é zero (P2) 2. A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada; 3. A média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem.

Fonte: o autor

5 ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS ESTUDANTES DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, apresentamos a análise do desempenho dos estudantes participantes da pesquisa. Destacamos que a análise dos dados foi realizada com o auxílio do *software* estatístico *Statistical Package for the Social Sciences* – SPSS. No capítulo posterior, apresentaremos o estudo das diversas estratégias desenvolvidas pelos estudantes na resolução de cinco questões envolvendo o conceito de média aritmética.

Retomamos que o objetivo desse estudo foi investigar como o conceito de média aritmética é compreendido por alunos do terceiro ano do Ensino Médio considerando diferentes propriedades e significados. A pesquisa tem como base teórica a noção de conceito desenvolvida por Vergnaud (1990) por meio da teoria dos Campos Conceituais, em que destaca que um conceito matemático abrange um conjunto de propriedades, significados e representações.

Ressaltamos que o instrumento diagnóstico foi composto por cinco questões envolvendo diferentes propriedades e significados do conceito de média. Nossa pesquisa envolveu 231 (duzentos e trinta e um) alunos do 3º ano do Ensino Médio. A pesquisa foi realizada no decorrer do ano de 2019 em 5 (cinco) escolas que fazem parte da Gerência Regional de Educação – Mata Centro (GRE- Mata Centro) da Rede Pública de ensino do estado de Pernambuco.

Para manter o sigilo das cidades que fizeram parte da pesquisa e suas respectivas instituições de ensino, adotamos a seguinte nomenclatura: município A, município B e município C. O **QUADRO 5** apresenta a quantidade de alunos pesquisados por sexo e sua respectiva cidade por município.

Quadro 5 - Alunos por sexo biológico e município

		Municípios			Total
		Município A	Município B	Município C	
Sexo biológico	Masculino	57	17	6	80
	Feminino	82	28	15	125
	Não informou	15	4	7	26
Total		154	49	28	231

Fonte: o autor

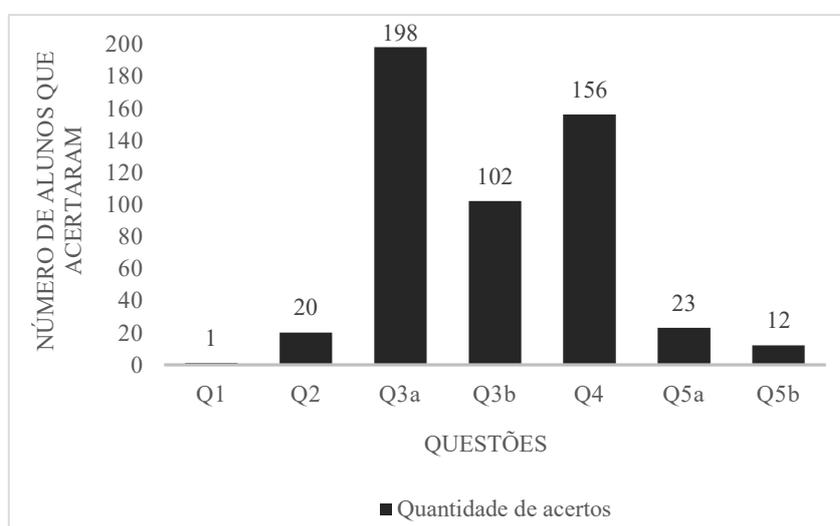
Em dados gerais, o município A representa 66,7%, o município B 21,2% e, por último, o município C 12,1% em nossa pesquisa. Salientamos que a maioria do público investigado é composto por mulheres representando aproximadamente um percentual de 54%, podendo ser ainda maior, tendo em vista que 26 alunos (11%) não informaram o sexo.

5.1 Análise geral do desempenho dos estudantes

Apresentamos aqui a análise geral acerca do desempenho do grupo investigado referente ao conceito de média aritmética, especificamente em relação às propriedades e significados de tal conceito. Vale lembrar que cada questão envolvia um determinado significado e algumas propriedades. Assim, buscou-se averiguar qual a compreensão desse grupo acerca do conceito de média aritmética. Com o intuito de preservar a identidade dos participantes, os protocolos foram enumerados de 1 a 231.

Para tanto, iniciamos mostrando a quantidade de acertos por questão. Vale ressaltar que, dos 231 (duzentos e trinta e um) sujeitos, alguns deixaram questões em branco. Ressaltamos que, para facilitar a compreensão, dividimos a questão 3 e 5 em duas partes, já que as questões apresentam dois questionamentos. O número de acertos varia entre zero e sete. O zero corresponde a nenhuma questão correta e o sete significa que todas as questões do instrumento diagnóstico foram respondidas corretamente. No **GRÁFICO 1**, consideramos apenas os acertos de questão para se ter uma noção geral. Na ocasião, utilizamos o SPSS na análise dos dados.

Gráfico 1 - Quantidade de acertos por questões



Fonte: o autor

Ao analisarmos o **GRÁFICO 1**, vemos que dos 231 estudantes que participaram da pesquisa, apenas 1 (um) estudante analisou a questão corretamente, que requer estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida. Esse dado é preocupante, pois

mostra que tais estudantes estão concluindo a Educação Básica sem possivelmente compreender o significado da média como um valor representativo dos dados.

Na questão Q3a, dos 231 que responderam, 231 acertaram, o que representa um percentual de 85,7% de acertos. Este resultado é satisfatório e mostra que o fato de a questão já trazer a resposta em seu enunciado ajudou na quantidade de acertos.

Destacamos que a questão Q3 foi dividida em duas partes sendo elas, Q3a e Q3b. Essa questão envolve o mesmo significado (S2), em que a média é uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme. Portanto, percebemos uma relevante discrepância entre as duas questões, mesmo elas apresentando o mesmo significado; discutiremos mais detalhadamente essa questão na próxima sessão.

Apresentamos a seguir o quantitativo de questões certas, erradas e em branco. Teremos, assim, uma visão geral de como os alunos se saíram na resolução do instrumento. Veja o **QUADRO 6**, a seguir:

Quadro 6 - Quantidade de acertos, erros e em branco por questões

	QUESTÕES						
	Q1	Q2	Q3a	Q3b	Q4	Q5a	Q5b
Certo	01	20	198	102	156	23	13
Errado	225	197	19	110	59	176	174
Em branco	5	4	14	19	16	32	44

Fonte: o autor

Dando início à análise do **QUADRO 6**, verifica-se que não houve nenhuma questão em que todos os alunos acertaram. Em dados gerais, podemos destacar que o grupo investigado foi efetivamente participativo na pesquisa. Aproximadamente 91% das questões que compunham o teste diagnóstico foi respondido. Em torno de 9% das questões foram deixadas em branco, com um percentual maior nas questões Q5a e Q5b.

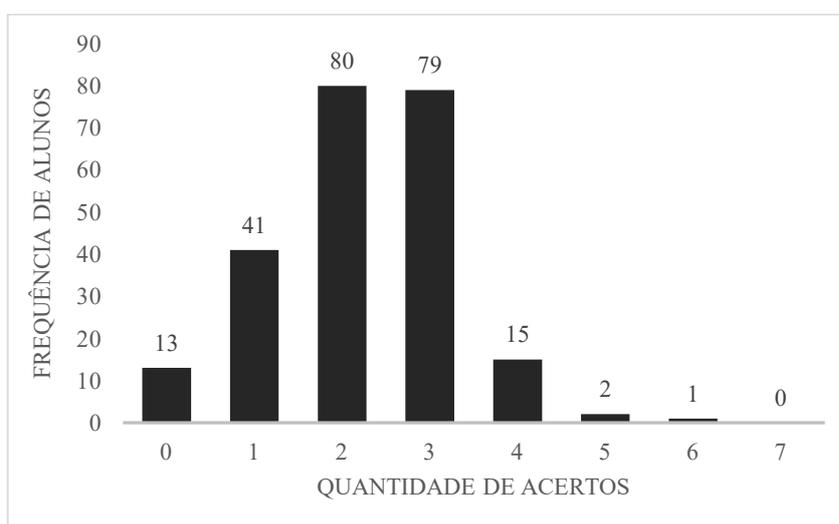
Analisando esse maior percentual nessas questões, consideramos algumas hipóteses que talvez possam explicar o fato de os alunos terem deixado essas questões em branco. Tais hipóteses são: por se tratar de média ponderada para alguns (alunos), tais questões tornam-se mais complexas. A outra hipótese é que, em quase todas as escolas pesquisadas, os alunos responderam o instrumento diagnóstico em aulas que antecipavam saídas para intervalo e/ou ida para casa, influenciando para que não quisessem responder as últimas questões, com o intuito de sair “mais rápido”.

Ao analisarmos o quantitativo de acertos, é notória a dificuldade do grupo investigado em algumas propriedades e significados. A questão Q1 apresenta o pior percentual de acertos, dado que apenas 0,4% dos estudantes responderam corretamente, isto corresponde a apenas 1 (um) estudante. Ressaltamos que tal questão envolvia o significado S1, o qual trata a média como uma estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida. O referido significado, em algumas pesquisas como a de Caetano (2004) e Melo (2010), é considerado de fácil compreensão. Em nossa pesquisa, tal significado foi o mais complexo se levarmos em consideração o quantitativo de erros.

Em contrapartida, a questão Q3a apresenta um resultado bom quando comparada as outras questões. Com um percentual de 85,7% de acertos, a questão envolvia o significado na qual a média é uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme. Em uma análise geral, podemos destacar que o resultado do grupo foi aquém do desejado. Vale ressaltar que tal resultado se assemelhou aos percebidos nos estudos de Anjos e Gitirana (2008) e Caetano (2004), para os quais as pessoas apresentam facilidade em tal significado.

Podemos ver no **GRÁFICO 2**, o quantitativo de respostas corretas por estudantes.

Gráfico 2 - Número de respostas corretas por estudantes



Fonte: o autor

Como mencionado anteriormente, o número de respostas corretas varia de zero a sete. Zero corresponde a todas as questões do diagnóstico respondidas incorretamente e sete significa que o participante acertou todas as questões.

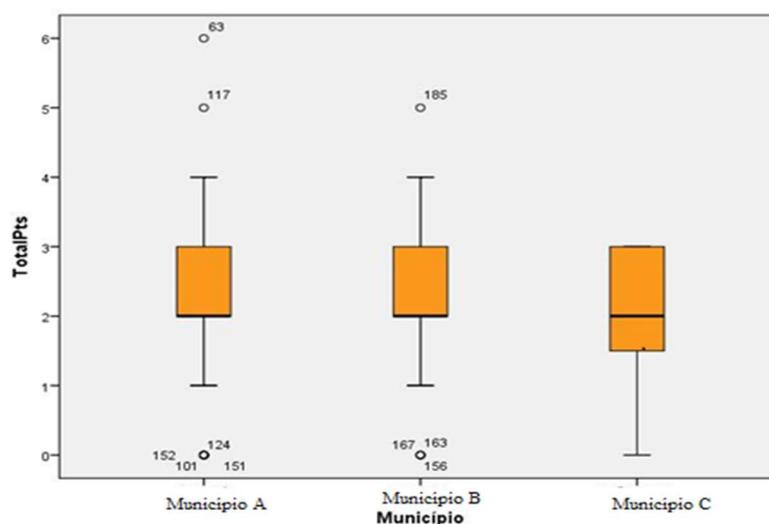
Ao analisarmos o **GRÁFICO 2**, é nítido o quanto o resultado do grupo foi abaixo do desejado para os alunos do 3º ano do Ensino Médio. Lembramos que, segundo os documentos que norteiam a educação no Brasil e que discutimos em nossa revisão de literatura, esses alunos possivelmente já estudaram o conceito de média aritmética desde os anos finais do Ensino Fundamental. Destacamos que, dos 231 participantes, nenhum dos alunos acertou todas as questões e apenas 1 (um) participante acertou 86% do teste diagnóstico, correspondendo a aproximadamente 0,4% do grupo.

Em síntese, ao analisarmos o desempenho geral dos estudantes, é nítido o baixo desempenho dos mesmos acerca do conceito de média aritmética. Como mencionado anteriormente, o instrumento diagnóstico era composto de cinco questões, onde a questão três e cinco foram divididas em duas questões, respectivamente, por apresentarem dois questionamentos. Ao analisarmos, consideramos cada acerto um ponto. Nessa perspectiva, o estudante que resolvesse todas as questões do instrumento diagnóstico corretamente teria o máximo de sete pontos.

Os dados são ainda mais preocupantes quando vemos que no grupo investigado 58% dos alunos acertaram entre 0 e 2 questões. Isto é, 134 (cento e trinta e quatro) alunos não conseguiram responder corretamente mais que duas questões. Acreditamos que esses resultados foram insatisfatórios, tendo em vista se tratar de alunos que estão concluindo a Educação Básica

A média aritmética da quantidade de acertos é de 2,23 pontos. Isso indica que em média cada estudante acertou 2,23 questões das 7 possíveis. A seguir, apresentamos o **GRÁFICO 3** com a distribuição de acertos por município.

Gráfico 3 - Distribuição de acertos por município



Fonte: o autor

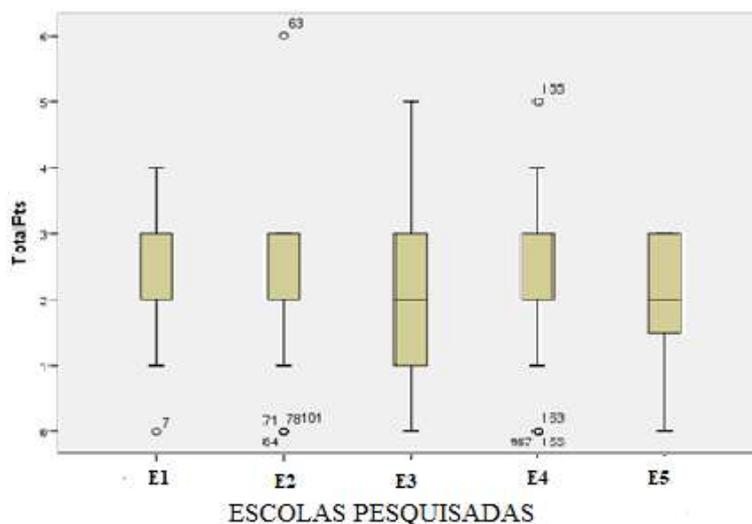
Neste gráfico, podemos analisar a similaridade entre a quantidade de acertos/erros por município, lembrando que os estudantes que fizeram parte da pesquisa tiveram seus protocolos enumerados de 1 a 231 para prevalecer seu anonimato.

Buscamos analisar se havia estatisticamente uma discrepância com a média de acertos por município. Nesse sentido, o **GRÁFICO 3** nos fornece uma visão dos estudantes que tiveram um índice da quantidade de acertos atípico, como valores extremos. O traço escuro da caixa nos indica a média que, como mencionado anteriormente, foi de aproximadamente 2,23 pontos.

Analizamos se há diferença estatisticamente significativa entre os três diferentes grupos. Para isto, utilizamos um T Teste por grupo e constatamos que não há diferença significativa entre os três grupos, a saber: M1 com M2 [$T(154,49) = 0,331$; $p \leq 0,05$], M1 com M3 [$T(154,28) = 0,564$; $p \leq 0,05$] e M2 com M3 [$T(49,28) = 0,209$; $p \leq 0,05$].

Para compreender o comportamento da variável “escola”, geramos um box-plot por escola, vejamos no **GRÁFICO 4**:

Gráfico 4 - Distribuição de acertos por escolas



Fonte: o autor

Reforçamos que, para preservar o sigilo das escolas, as protocolamos como E1, E2 ... E5. No **GRÁFICO 4**, pudemos analisar a similaridade entre a quantidade de acertos por escola. O gráfico também apresenta aqueles alunos que estão nas extremidades, isto é, que acertaram muitas questões e que estão acima da média de acertos ou aqueles que erraram muitas e estão bem abaixo da média de acertos.

Com a análise do box-plot, constatamos que os protocolos que tiveram o maior percentual de acertos são referentes aos estudantes 63, 117 e 180, referentes a duas cidades e integrantes de apenas duas escolas. Percebe-se também que as escolas E3 e E5 apresentaram uma maior quantidade de estudantes que acertaram menos que a média de acertos. O **GRÁFICO 4** mostra, igualmente, que em todas as escolas ao menos um aluno errou todas as questões. Em suma, constatamos que a média de acertos entre os municípios e as escolas assemelham-se, não demonstrando uma diferença estatisticamente significativa. Isto quer dizer que, independentemente da localização do estudante ou da escola na qual ele estuda, a maioria conclui a Educação Básica sem compreender o conceito de média aritmética. Portanto, se faz necessário uma sistematização do conceito de média aritmética em todo contexto da Educação Básica.

5.2 Análise de desempenho em relação aos significados e propriedades

Nesta subseção, apresentamos o resultado da análise do desempenho dos estudantes levando em consideração os significados e as propriedades que envolvem cada questão, com o intuito de compreender com quais significados e propriedades o grupo estudado apresentou uma maior habilidade ou maiores dificuldades.

Destacamos que as questões que compõem o instrumento diagnóstico foram desenvolvidas com base em mais de uma propriedade. Algumas questões necessitam que os alunos compreendam mais profundamente algumas propriedades. Sendo assim, na análise que faremos a seguir iremos considerar as propriedades que, em nossa opinião, estão mais envolvidas na resolução das questões.

A Q1 envolve o significado S1 - média obtida com a estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida e mais de uma propriedade P1 e P2, tendo como propriedade operante a P3 – a média é influenciada por cada um e por todos os valores. Vejamos a questão a seguir:

Quadro 7 - Enunciado da questão Q3a e Q3b

Toda sexta-feira a professora de uma turma solicita que os alunos tragam livros para empréstimo coletivo para estimular a leitura no fim de semana. Em um destes dias, a turma apresentou a seguinte quantidade de livros:

Joana trouxe 1

Caio trouxe 5

Gina apresentou 1 e

Paulo 3 livros.

Marina saiu atrasada de casa e esqueceu de pegar os livros.

Como redistribuir os livros de forma que cada aluno fique com a mesma quantidade? E qual seria a quantidade de cada um, após a distribuição?

Se Marina tivesse levado 1 livro, a média de livros por aluno teria aumentado? Por quê?

Fonte: o autor

Essa questão apresenta o maior índice de acertos do instrumento diagnóstico desta pesquisa. Em dados gerais, vemos que a Q3a e a Q3b apresentaram 85,7% e 44,2% de acertos, respectivamente. Levando em consideração o significado, que é o mesmo (na Q3a e Q3b), a média aritmética de acertos é de 64,9%.

Tais dados reforçam os resultados de Mayén et al. (2007) que, em sua pesquisa, constataram que os estudantes de Bacharelado e os estudantes concluintes do Ensino Secundário também apresentaram um melhor desempenho em questões que abordavam tal significado. Nesta pesquisa, apesar de ser a questão/significado que apresentou o maior percentual de acertos (85,7% e 44,2%), se formos considerar a média de acertos (64,9%) na questão, o resultado é insatisfatório para o grupo investigado.

Levando em consideração a propriedade da questão Q3a –(P6), em que o cálculo da média leva em consideração todos os valores, inclusive os nulos, vemos que o grupo aqui investigado apresenta um melhor desempenho nesta questão. Levando em consideração que a questão apresenta o mesmo significado e propriedades diferentes, acreditamos que essa discrepância ocorra devido à propriedade, isto é, os alunos apresentam mais facilidade em

questões que envolvem a P6 e sentem mais dificuldades em questões em que a P5 está envolvida.

Consideramos que a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (P5), propriedade da qual está envolvida na questão Q5b. Anjos e Gitirana (2008), ao analisarem os livros do PNLD de 2008, constataram que essa propriedade se fazia pouco presente nas atividades daquelas coleções e, por consequência, representava uma propriedade pouco vista pelos estudantes da época. Carvalho (2011) identifica uma mudança no cenário dos livros didáticos, através da qual essa propriedade passou a ser das mais encontradas nas propostas pelas coleções analisadas. Nesse cenário, acreditamos que os avanços que vêm ocorrendo na literatura tenham colaborado para que os estudantes apresentassem um melhor desenvolvimento nesta propriedade em comparação com as outras.

Estudos como o de Melo (2010) e o de Cazorla (2002) apontam que os grupos investigados apresentam uma certa dificuldade em médias aritméticas que têm como resultado um número decimal, com as quais o aluno não consegue assimilar o resultado à realidade física. Nossa pesquisa assemelha-se em parte com o dos autores citados, pois conseguimos constatar que os alunos não sentem dificuldade em desenvolver o algoritmo do cálculo, “somar todos os números e então dividir pela quantidade de números somados”, mas sentem dificuldade em compreender que a média pode ser um número que não tem correspondente na realidade física.

Isso fica ainda mais claro nas justificativas apresentadas pelos alunos quanto à segunda parte da questão. Ao perguntar “*se Marina tivesse levado 1 livro, a média de livros por aluno teria aumentado?*”, grande parte dos alunos justificou informando que “não, pois mesmo aumentando um livro, uns iriam ganhar 2 e outros 3 livros”. Assim, fica claro que os alunos compreendem a média como um número inteiro e não compreendem que a média pode ser um número sem correspondência na realidade física. Vale salientar que, na primeira parte, a maioria dos estudantes não justifica sua resposta, apenas coloca o resultado. Em sua justificativa na segunda parte, percebe-se tal dificuldade.

Como citamos anteriormente, os estudantes conseguem compreender como desenvolver o algoritmo do cálculo da média aritmética. Em contrapartida, quando se fala em acréscimo aos dados que compõem a média aritmética, os alunos sentem uma maior dificuldade. Tal dado corrobora com o resultado da propriedade anteriormente discutida, onde destaca que a média é influenciada por cada um e por todos os valores. Grande parte do grupo aqui investigado não compreende que se acrescentarmos um número ele irá influenciar no resultado da média. Considerando o conceito de média, isso reflete dizer que a maior parte dos estudantes saem do Ensino Médio só sabendo desenvolver o algoritmo do cálculo e, quando colocados em situações

consideradas mais complexas, não apresentam um bom resultado. Vale salientar que mesmo a maioria apresentando essa não compreensão, em nossos resultados essa questão foi a que obteve o maior percentual de acertos.

As questões Q4 e Q5 (esta última apresenta dois questionamentos, sendo identificadas nas análises como Q5a e Q5b) apresentam o mesmo significado S3 - a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica. Considerando a propriedade, as questões apresentam propriedades distantes, onde a Q4 tem por propriedade (P7) que a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada e na Q5 tem como propriedade (P2) que a soma dos desvios a partir da média é zero ($\sum (X_i - \text{média}) = 0$). Vejamos as questões a seguir:

Quadro 8 - Enunciado das questões Q4, Q5a e Q5b

Questão 4: (Q4)	Questão 5: (Q5a e Q5b)
<p><i>Letícia está pesquisando preços de salgadinhos para comprar mais barato e economizar sua mesada. Ela anotou preços de três lugares diferentes e descobriu que o preço médio destes salgadinhos é de R\$ 3,00. Assinale V (Verdadeiro) ou F (Falso) para os possíveis valores que Letícia encontrou:</i></p> <p>a) () 1,1,1 d) () 1, 3, 6.</p> <p>b) () 1,3,5 e) () 9,9,9</p> <p>c) () 3,3,3 f) () 1, 2, 6</p> <p><i>Descreva como você pensou: _____</i></p> <p>_____</p>	<p><i>Maria e Pedro passam em média 8 horas a cada final de semana praticando esportes. Outros 8 alunos dedicam a cada fim de semana, em média, 4 horas praticando esportes.</i></p> <p>a. <i>Em média, quantas horas os 10 alunos praticam esportes todo final de semana?</i></p> <p>b. <i>Maria e Pedro também passam 1 hora ouvindo músicas todo fim de semana, já os outros 8 alunos passam 3 horas. Qual é a média de horas, que os 10 alunos dedicam no fim de semana com as duas atividades? Ouvir músicas e praticar esportes.</i></p>

Fonte: o autor

Entre as questões acima citadas, a Q4 está entre as questões que apresentam um desempenho um pouco melhor, comparadas às outras. De maneira oposta, a Q5 (dividida em duas partes, Q5a e Q5b) apresenta um dos piores desempenhos. Destacamos, assim, que as questões (Q4 e Q5) apresentam o mesmo significado e o quantitativo de acertos foram completamente diferentes entre as questões.

Na questão Q4, identificamos um índice de 67,5% de acertos, relativamente melhor comparado às outras questões. Em contrapartida, a questão Q5a e Q5b obteve um desempenho aquém do desejado. A questão Q5 apresentou um índice de acertos de 10% (Q5a) e 5,6% (Q5b). Em dados gerais, ao fazermos a média de acertos da Q5, vemos que apenas 7,8% dos alunos acertaram toda a questão.

Tratando-se do significado, vemos pesquisas que corroboram com os nossos resultados, a exemplo da de Melo (2010), que chegou a constatar dificuldades neste significado por parte do grupo investigado, e da de Watson e Moritz (1999; 2000), que concluiu que alunos do Ensino Fundamental e Médio tem um baixo desempenho neste significado. Ao analisar a literatura e os resultados desta pesquisa, constatamos que, no decorrer dos anos, pouco se tem avançado no aprofundamento deste significado. Muitas vezes os educadores apresentam dificuldade na compreensão e, conseqüentemente, não o aprofundam em sala de aula, prejudicando muitos estudantes que chegam a concluir a Educação Básica sem o mínimo de conhecimento acerca do conceito de média aritmética.

Como mencionado anteriormente, as questões Q4 e Q5 apresentam o mesmo significado, porém propriedades opostas. Nesse contexto, a questão Q4 tem por propriedade enfocar que a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada. Ao verificarmos um percentual de 67,5% de acertos, acreditamos que tal propriedade tenha influenciado um melhor desempenho por partes dos participantes nesta questão.

Em estudos como o de Lima (2005), essa propriedade tem um teor considerado complexo dado o quantitativo de erros, porém em alguns casos que envolviam essa propriedade o grupo investigado apresentava um valor dedutivamente e acertava. Ou seja, a depender do enunciado os alunos respondiam correto por dedução. Vale ressaltar que, em nossa pesquisa, mesmo o resultado sendo relativamente melhor que outras questões, tal resultado está aquém do desejado para alunos que estão finalizando a Educação Básica.

A Q5, dividida em duas questões na análise de dados, apresenta a propriedade que a soma dos desvios a partir da média é zero. A média do percentual de acertos nessa questão foi de 7,8%. Constata-se que ela apresenta um dos piores resultados da pesquisa.

Na literatura, pesquisas como a de Cobo e Batanero (2004), que investigaram a compreensão da média aritmética com 53 estudantes do Ensino Médio, demonstram certa dificuldade na compreensão de algumas propriedades por parte dos alunos, inclusive da referida acima. Em outras pesquisas, como a de Anjos e Gitirana (2008), que analisou o PNLD 2008, e a de Carvalho (2011), que analisou o PNLD de 2011, não foram encontradas nas coleções

investigadas questões que envolvessem a propriedade que a soma dos desvios a partir da média é zero.

Vemos na literatura que, na maioria das vezes, essa propriedade é deixada de lado em livros didáticos e que, em pesquisas já existentes, os alunos sentem dificuldades em compreender quando a questão solicita o cálculo da média ponderada. Neste sentido, nossa pesquisa se assemelha a de Mayén et al (2007), pois nosso grupo investigado apresenta, em sua maioria, dificuldade em compreender a necessidade do cálculo da média ponderada.

De acordo com Watson (2006), a construção do conceito de média se desenvolve longitudinalmente, no decorrer dos anos escolares. Neste sentido, ao analisarmos os resultados com relação ao conceito de média aritmética, percebemos que os alunos do 3º ano do Ensino Médio que fizeram parte desta pesquisa finalizaram a Educação Básica sem possivelmente ter tido um trabalho sistematizado acerca do conceito de média ao longo dos anos de escolarização. Faz-se necessário que os professores da Educação Básica tenham formação continuada e apoio pedagógico para colocarem em prática o que determina os documentos norteadores de tal fase educacional. Se o conceito de média for trabalhado de forma sistematizada em toda Educação Básica, possivelmente teremos melhores resultados por parte dos alunos.

A seguir, de forma resumida, apresentaremos no quadro os percentuais de acertos levando em consideração o respectivo significado e a propriedade envolvida em cada questão. Vejamos o quadro a seguir:

Quadro 9 - Percentual de acertos por questão, significado e propriedade

Significado da Média	Propriedades	Questões	Percentual de acertos
S1 - Estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida.	P3 A média é influenciada por cada um e por todos os valores.	Q1	0,4
S4- Necessidade de conhecer o que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição	P1 - A média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo \leq média \leq valor máximo);	Q2	8,7
S2 -Média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme.	P6 -O cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos.	Q3a	85,7
	P5 -A média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física;	Q3b	44,2

S3- A média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica.	P7 - A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada;	Q4	67,5
	P2 - A soma dos desvios a partir da média é zero	Q5a	10%
		Q5b	5,6%

Fonte: o autor

Ao analisarmos o **QUADRO 9**, percebe-se se que os estudantes foram mais bem-sucedidos na questão Q3, que inclui o significado da média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme e que tem como propriedade que a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física.

Vale ressaltar que essa questão foi dividida em duas partes por apresentar dois questionamentos, onde a Q3a apresentou um percentual de acertos maior do que a Q3b. Nesta questão, fica claro que os alunos conseguem desenvolver o algoritmo da média aritmética, mas apresentam dificuldade em médias aritméticas que têm como resultado um número decimal, por meio do qual o aluno não consegue assimilar o resultado à realidade física (CAZORLA, 2002).

Verifica-se, ainda, que a maior dificuldade do grupo investigado foi na Q1, a qual versa sobre o significado que a média é uma estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida e tem por propriedade que a média é influenciada por cada um e por todos os valores. Apenas 1 (um) aluno acertou esta questão, ficando evidenciado que os alunos se “prendem” ao algoritmo da média aritmética e não conseguem refletir quando se deparam com questões consideradas mais complexas.

Em síntese, os significados: estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida; necessidade de conhecer o que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição; e a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica foram os significados que apresentaram o maior percentual de erros, o que coincide com a nossa concepção de que estes significados possuem um maior teor de complexidade em relação aos outros.

Acreditamos que talvez o insucesso nesses significados seja decorrência da sua complexidade e de um “círculo vicioso” que corrobora para a não sistematização no ensino. Este “círculo vicioso” pode ser compreendido ao analisarmos a literatura já sistematizada, em que na Educação Básica os professores dão aulas com livros que não abordam os significados;

os alunos concluem a Educação Básica, muitas vezes, sem refletir acerca do assunto. Em seguida, entram nas universidades sem o conhecimento do significado, espaços em que concluem a formação docente e retornam como professores da Educação Básica, sem haverem refletido sobre o conceito/significado. Se constitui, assim, um “círculo vicioso” que corrobora para a não aprendizagem do conceito/significado. Nesse contexto, urge a sistematização de ensino em toda Educação Básica (COBO; BATANERO, 2004).

Em suma, destacamos que as propriedades em que os alunos apresentaram maiores dificuldades foram: a média é influenciada por cada um e por todos os valores; a média está localizada entre os valores extremos ($\text{valor mínimo} \leq \text{média} \leq \text{valor máximo}$); a soma dos desvios a partir da média é zero ($\sum (X_i - \text{média}) = 0$); e, por fim, a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física.

Segundo Strauss e Bichler (1988), saber desenvolver o algoritmo do cálculo, “somar todos os números e então dividir pela quantidade de números somados”, não significa necessariamente que o estudante compreenda o conceito de média, levando em consideração que o conceito apresenta suas particularidades. Nesse sentido, os autores elencam que, para uma perfeita compreensão do conceito de média, se faz necessário um domínio acerca das propriedades por eles descritas.

Os autores destacam que as propriedades: a média está localizada entre os valores extremos ($\text{valor mínimo} \leq \text{média} \leq \text{valor máximo}$), a soma dos desvios a partir da média é zero ($\sum (X_i - \text{média}) = 0$) e a média é influenciada por cada um e por todos os valores, são propriedades básicas que se referem aos aspectos estatísticos da média aritmética. Para que o aluno compreenda perfeitamente o conceito de média, faz-se necessário o entendimento de todas as propriedades envolvidas no conceito, do básico ao abstrato. Ao analisarmos os resultados, notamos que o grupo de estudantes estudado possui um desempenho baixíssimo nas propriedades básicas que envolvem o conceito.

A propriedade com pior o desempenho, com apenas 0,4% de acertos, trata a média como influenciada por cada um e por todos os valores. Nosso estudo assemelha-se ao de Lemos (2011) que, ao pesquisar com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental anos iniciais e com professores em formação, constatou as dificuldades surgidas na resolução de questões que envolvem tal propriedade. De maneira semelhante, Damim (2014), ao analisar sobre os conhecimentos adquiridos acerca da média aritmética com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, constatou que, dos 11 (onze) alunos investigados, apenas 1 (um) acertou a questão que envolvia essa propriedade.

A propriedade que destaca que a média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo \leq média \leq valor máximo) apresenta, em nosso estudo, um péssimo resultado. Em estudos semelhantes, como o de Damim (2014) e Magina et al. (2010), constatou-se que os participantes apresentam dificuldades na compreensão de questões que envolvem essa propriedade.

Anjos e Gitirana (2008) e Carvalho (2011) mostram em suas pesquisas que esta propriedade foi pouco abordada em coleções de livros didáticos. Tais resultados são, possivelmente, uma das justificativas que explicam o baixo desempenho dos estudantes nesta pesquisa, desvelando uma realidade onde os alunos passaram por toda a Educação Básica sem ter sistematizado de forma satisfatória o conceito de média aritmética.

6 ESTRATÉGIAS QUE OS ESTUDANTES UTILIZARAM NA RESOLUÇÃO DO INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO

No capítulo anterior, apresentamos as análises dos percentuais de acertos em cada questão. Vimos, igualmente, os significados e propriedades com os quais os estudantes apresentaram maior dificuldade. Ao final, identificamos a dificuldade que o grupo de estudantes teve na compreensão dos significados e propriedades envolvidos no conceito de média aritmética. Neste sentido, se faz necessário compreender entre os erros e acertos o que os estudantes demonstravam entender do conceito de média aritmética.

Neste capítulo, portanto, analisamos os tipos de respostas e estratégias utilizadas pelos grupos investigados para resolverem as questões que compunham o instrumento diagnóstico. Essa análise é de fundamental importância, dado que tais estratégias nos dão indicações de como os alunos que estão concluindo a Educação Básica compreendem o conceito de média aritmética.

Para uma melhor compreensão, apresentamos para cada questão as estratégias utilizadas, o quantitativo de alunos que utilizaram e seus respectivos percentuais. Na sequência, trazemos alguns exemplos de respostas utilizadas pelos alunos.

No **QUADRO 10**, mostramos os tipos de respostas, estratégias e seus percentuais. Conseguimos, assim, identificar os tipos de respostas e as estratégias utilizadas entre os 231 (duzentos e trinta e um) participantes da pesquisa. Iniciamos apresentando os resultados da Q1 no **QUADRO 10**.

Quadro 10 - Tipos de respostas, estratégias e seus respectivos percentuais apresentados pelos alunos ao resolverem a Q1

Tipos de respostas	Estratégias	Percentual
1. O aluno apresenta uma resposta correta e faz uso do conceito de média aritmética.	O estudante apresentou uma resposta correta e fez uso do procedimento do cálculo da média aritmética. Usou como estratégia de resolução: descartar o peso mais alto (15,3), em seguida destaca a necessidade de fazer uso do algoritmo da média aritmética;	0,4%
2. Os alunos apresentam uma resposta incorreta e fazem uso do número mais comum, que é 6,3.	Os alunos apresentam uma resposta incorreta, eles utilizam como estratégia usar a moda, isto é, número que mais se repete.	29,9%
3. Os alunos apresentam uma resposta incorreta, fazendo uso do número 6,15 por considerar como o peso mais preciso.	Os alunos apresentam uma resposta incorreta, com uso de um valor apresentado na própria questão, especificamente o valor da menor variável.	3,9%

4. Os alunos apresentam resposta incorreta, com uso do algoritmo da média aritmética.	Apresentam resposta incorreta, com uso do algoritmo da média aritmética. Somam todas as variáveis e dividem pela quantidade de dados.	54,9%
5. Os alunos apresentam resposta incorreta, usam 6,2 por considerar que está correta por se situar no meio dos dados.	Os alunos apresentam uma resposta incorreta e utilizam como estratégia usar a mediana, o número que está situado no meio da distribuição de dados.	8,7%
6. Os alunos deixam a questão em branco.	Os alunos deixaram a questão em branco, onde não é apresentada nenhuma tentativa de resolução da questão	2,2%

Fonte: o autor

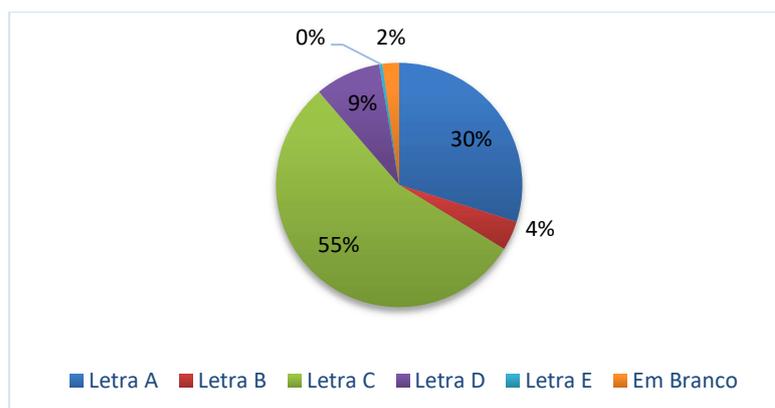
Ao analisarmos o **QUADRO 10**, percebemos que apenas 0,4% dos alunos responderam esta questão corretamente, ou seja, dos 231 alunos que fizeram parte da pesquisa, apenas um acertou essa questão. Consideramos esta questão a mais complexa de todo instrumento diagnóstico, dado o quantitativo de alunos que responderam incorretamente ou deixaram em branco.

Desta forma, os alunos que não responderam ou que erraram esta questão totalizam-se 99,6 %, do grupo investigado. São dados preocupantes e insatisfatórios para alunos do 3º ano do Ensino Médio, tendo em vista que os alunos possivelmente trabalharam com esse conceito desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Com base no **QUADRO 10**, podemos observar que as principais estratégias usadas nas respostas foram a 4 (54,9%) e a 2 (29,9%). Porém, é de fundamental importância analisarmos as demais estratégias para buscarmos aferir o que os alunos estão compreendendo sobre o conceito de média aritmética.

Para uma melhor visualização, trazemos no **GRÁFICO 5** o quantitativo de alunos que escolheram cada alternativa como correta.

Gráfico 5 - Quantidade de alunos que escolheram cada letra na Q1



Fonte: o autor

Como podemos ver no **GRÁFICO 5**, nesta questão os alunos foram bem participativos, com 97,8% dos alunos tentando respondê-la de alguma maneira. Fica claro, também, que de todos os participantes, apenas 1 (um) deles fez uso da letra E e apresentou uma justificativa correta. Portanto, analisamos a seguir as estratégias utilizadas nas respostas dos alunos.

Na figura a seguir, analisamos a estratégia que o(a) aluno(a) utilizou para responder corretamente à questão Q1. Vejamos:

Figura 1 - Resposta correta da Q1, fazendo uso do conceito da média aritmética

Nove estudantes pesaram um pequeno objeto com um mesmo instrumento em uma aula de ciências. Cada estudante registrou os seguintes pesos (em gramas):

6,3 6,0 6,0 15,3 6,1 6,3 6,2 6,15 6,3

Os estudantes querem determinar com a maior precisão possível o peso real do objeto. Qual dos seguintes métodos é recomendado que utilizem?

(a) Usar o número mais comum, que é 6,3.

(b) Usar 6,15, posto que é o peso mais preciso.

(c) Somar os 9 números e dividir a soma por 9.

(d) Usar 6,2, pois quatro medidas ficam abaixo e quatro acima

Outro método. Qual? *Descarto o 15,3, pois é muito distante dos outros, e tiro a média dos números que restaram.*

Fonte: dados da pesquisa

Antes de começarmos a análise da **FIGURA 1**, vale ressaltar que o pesquisador se fez presente em todas as turmas em que se aplicou o instrumento diagnóstico. Deste modo, presenciou toda a inquietação do grupo ao responder algumas das questões.

Analisando a **FIGURA 1**, podemos ver que o(a) aluno(a) respondeu corretamente, considerando que todos os pesos obtidos se tratava de um mesmo objeto. E por conseqüente, o objeto não poderia apresentar tamanha diferença.

O(a) aluno(a) justifica sua resposta da seguinte maneira: “descarto o 15,3, pois é muito distante dos outros, e tiro a média dos números que restaram”. O esperado era que método utilizado fosse empregado por todos os alunos do 3º ano do Ensino Médio. O primeiro passo seria, como percebemos na figura acima, descartar o 15,3 e, em seguida, frisar para o uso do algoritmo da média aritmética.

Destacamos que apenas 0,4% dos 231 (duzentos e trinta e um) alunos apresentaram resposta desse tipo, ou seja, apenas 1 (um) aluno. Indagamos a complexidade desta questão para o grupo investigado. Este foi o(a) único(a) estudante que demonstrou compreender o

significado S1 - estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida - e a propriedade P3 - em que a média é influenciada por cada um e por todos os valores. Os nossos resultados assemelham-se aos atingidos pela pesquisa de Marcolino (2017), o qual constatou que, dentre um grupo de 180 (cento e oitenta) estudantes do 1º ano do Ensino Médio, apenas 5 (cinco) conseguiram responder questões que envolviam tal significado e propriedade.

Analisamos a seguir, na **FIGURA 2**, um exemplo de uma resposta incorreta, em que os estudantes apresentam como o melhor método a utilização do número mais comum.:

Figura 2 - Resposta incorreta da Q1, utilizando o número mais comum, que é o 6,3

Nove estudantes pesaram um pequeno objeto com um mesmo instrumento em uma aula de ciências. Cada estudante registrou os seguintes pesos (em gramas):

6,3 6,0 6,0 15,3 6,1 6,3 6,2 6,15 6,3

Os estudantes querem determinar com a maior precisão possível o peso real do objeto. Qual dos seguintes métodos é recomendado que utilizem?

(a) Usar o número mais comum, que é 6,3.

(b) Usar 6,15, posto que é o peso mais preciso.

(c) Somar os 9 números e dividir a soma por 9.

(d) Usar 6,2, pois quatro medidas ficam abaixo e quatro acima.

(e) Outro método. Qual? _____

Res: é o número que mais se repete e ele aparece no começo, depois do número do meio e no final.

Handwritten calculations on the right side of the page show a sum of the numbers: $6,3 + 6,0 + 6,0 + 15,3 + 6,1 + 6,3 + 6,2 + 6,15 + 6,3 = 73,8$. Below this, there is a calculation for the mode: $3 \times 6,3 = 18,9$ and $3 \times 6,0 = 18,0$, with a total of $36,9$. Another calculation shows $9 \times 6,2 = 55,8$ and 14 .

Fonte: dados da pesquisa

Antes de analisarmos sobre o método utilizado pelos alunos ao optar por essa alternativa, destacamos que de todos os 29,9% dos alunos que fizeram uso desta alternativa, apenas 2,2% justificaram sua resposta. Os 27,7% restantes apenas marcaram com x a alternativa.

Na **FIGURA 2**, percebemos que o(a) aluno(a) fez uso de um método incorreto, utilizando como estratégia usar a moda, ou seja, o número que mais se repete. Fica nítido que os alunos, ao se depararem com questões deste tipo, não sabem qual a melhor medida de tendência central a ser utilizada.

Neste exemplo, o(a) aluno(a) iniciou fazendo uso do algoritmo da média aritmética, mas no decorrer da soma das variáveis o(a) mesmo(a) erra. Logo em seguida, desiste dessa estratégia e escolhe a letra A, a qual aborda o número que mais se repete (moda). Ao fazer uso da moda, o(a) aluno(a) justifica sua resposta destacando que o 3 “é o número que mais se repete. Ele aparece no começo, depois no meio e no final”. Com esse raciocínio, vemos que o(a) estudante,

a depender da situação que a qual se depare, apresenta dificuldades em saber qual medida de tendência central usar.

Essa estratégia foi usada por 29,9% dos 231 (duzentos e trinta e um) estudantes que responderam o instrumento diagnóstico. Isto quer dizer que 69 (sessenta e nove) alunos fizeram uso dessa estratégia. Conclui-se, assim, que os alunos que a utilizaram provavelmente se equivocaram em razão da má compreensão do significado (S1) e propriedade (P3) que estavam envolvidos na questão, ou ainda pela dificuldade na compreensão do contexto da situação proposta, por confundirem a moda com a média, dentre outros motivos.

Outra resposta, pouco utilizada, mas que também se fez presente – conforme apontado no **QUADRO 10** – foi a que codificamos como estratégia 3, na qual os alunos apresentaram uma resposta incorreta, com uso de um valor apresentado na própria questão, especificamente o valor da menor variável. Nesta alternativa, os alunos que a utilizaram não justificaram suas respostas, apenas assinalaram.

Somente 3,9% dos estudantes fizeram uso desta estratégia, o correspondente a aproximadamente 9 (nove) alunos. Não trouxemos exemplos da resolução, pois os alunos apenas assinalaram a resposta, sem apresentarem nenhuma justificativa.

Analisamos a seguir a estratégia que os alunos mais utilizaram, resultando em respostas incorretas em que os alunos fazem uso do algoritmo da média aritmética. Vejamos a **FIGURA 3** a seguir:

Figura 3 - Resposta incorreta da Q1, com uso do algoritmo da média aritmética

Nove estudantes pesaram um pequeno objeto com um mesmo instrumento em uma aula de ciências. Cada estudante registrou os seguintes pesos (em gramas):

6,3 6,0 6,0 15,3 6,1 6,3 6,2 6,15 6,3

Os estudantes querem determinar com a maior precisão possível o peso real do objeto. Qual dos seguintes métodos é recomendado que utilizem?

(a) Usar o número mais comum, que é 6,3.

(b) Usar 6,15, posto que é o peso mais preciso.

(c) Somar os 9 números e dividir a soma por 9.

(d) Usar 6,2, pois quatro medidas ficam abaixo e quatro acima.

(e) Outro método. Qual? _____

somar todos os números e após dividir, pela quantidade de termos sendo assim, uma média simples.

$\frac{9}{9}$

Fonte: dados da pesquisa

Ao analisarmos a **FIGURA 3**, percebemos que os alunos que fizeram uso dessa estratégia apresentaram uma resposta incorreta, com uso do algoritmo da média aritmética.

Compreendem que o correto seria somar todas as variáveis e dividir pela quantidade de dados, não considerando a possibilidade do estudante que apresentou como peso 15,3 ter errado, já que a questão deixa bem claro que se trata de um mesmo objeto.

Este método de resolução foi utilizado por 54,9% dos alunos, o correspondente a 127 (cento e vinte e sete). As justificativas que apresentadas nesta estratégia foram semelhantes à apresentada no exemplo da **FIGURA 3**. Ao analisamos a resposta deste(a) aluno(a), vemos que sua justifica está respaldada em “somar todos os números e após dividir pela quantidade de termos. Sendo assim, uma média simples.” Neste exemplo vemos que o(a) mesmo(a) possui uma noção do conceito de média aritmética, mas possivelmente tem uma compreensão equivocada acerca do significado e propriedades que estão envolvidas nesse conceito.

Este tipo de resposta está equivocado. Se levarmos em consideração o valor extremo, conseguiríamos com o cálculo da média um valor aproximado de 7,1, por sua vez equivocado, já que, pelo método correto e já discutido anteriormente, deveríamos obter como resposta o valor aproximado de 6,2, o mais próximo das variáveis apresentadas na questão.

Outra estratégia também utilizada nas respostas incorretas foi a utilização do número que está situado no meio da distribuição de dados, isto é, a mediana. No **QUADRO 10**, denominamos esta estratégia como a de número 5. Nela notamos que todos que a utilizaram não quiseram justificar suas respostas, apenas assinalaram a alternativa. Por esse motivo, não trouxemos exemplos de resposta.

A estratégia 5, foi utilizada por 8,7% dos alunos, isto é, dos 231 alunos apenas 9 acreditavam que esta alternativa era correta. Conclui-se assim, que este grupo de alunos errou provavelmente pela incompreensão do conceito de média aritmética, do significado e propriedades envolvidas nesta questão, pela dificuldade de compreensão do contexto da situação proposta, por confundir a moda com a média, dentre outros motivos.

O baixo índice de acertos nesta questão (Q1) demonstra que os estudantes que fizeram parte desta pesquisa estão terminando o 3º ano do Ensino Médio com pouquíssima habilidade no que diz respeito à compreensão do conceito de média aritmética, dado este bastante preocupante, já que o PCN (1998) e a BNCC (2018) traz indicações de que os estudantes trabalham com questões que abordam esses conceitos desde os anos iniciais.

O quadro a seguir mostra as respostas, estratégias e seus respectivos percentuais na Q2. Nesta questão, requer-se a média aritmética, entendendo-a como um valor que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição (S4). Também envolvia a ideia de que a média está localizada entre os valores extremos (P1).

Quadro 11 - Tipos de respostas, estratégias e seus respectivos percentuais apresentados pelos alunos ao resolverem a Q2

Tipos de respostas	Estratégias	Percentuais
1. Os alunos apresentam uma resposta correta, porém não explicam o procedimento de resolução;	Os alunos apresentam apenas a resposta correta que é a média citada na própria questão. E não explicam como chegaram a essa conclusão.	8,7%
2. Os alunos apresentam uma resposta incorreta, com uso do algoritmo da média aritmética.	Os alunos utilizam como estratégia, somar todos os valores das variáveis obtendo 5,8 em seguida eles dividem por 4.	34,2%
3. Apresentam a resposta incorreta, com uso de compensação em função do valor da média.	Os estudantes apresentam resposta incorreta, com uso do seguinte procedimento: I. Somam os valores da variável; II. Multiplicam o valor da média por 5 (quantidade de alunos que fazem parte da questão); III. Subtraem do 2º resultado o 1º resultado.	11,3%
4. Os alunos apresentam resposta incorreta, com uso do algoritmo da média aritmética, porém ao final dividem por 5 (cinco).	Resposta incorreta, somam todos os valores das variáveis e ao final dividem por 5.	13%
5. Resposta incorreta, com uso de valor (es) apresentado (s) na questão.	Os sujeitos apresentam resposta incorreta, com uso de valor (es) apresentado (s) na questão. Aqui, não justificam a resposta, apenas marcam o número ou colocam o número que faz parte ao conjunto de variáveis.	16,4%
6. Resposta incorreta, fizeram uso da soma das variáveis.	Os alunos apresentam uma resposta incorreta, somando todas as variáveis.	4,8%
7. Respostas incorretas, com uso de valores na qual não conseguimos identificar relação com a situação proposta.	Os alunos apresentam respostas incorretas, com uso de valores que não conseguimos identificar relação com a situação proposta. Exemplos de respostas: 1,70 m, 1,50m e 1,55m.	5,6%
8. Em branco	Os alunos deixaram a questão em branco, onde não é apresentada nenhuma tentativa de resolução da questão.	6%

Fonte: o autor

Ao analisarmos o **QUADRO 11**, percebemos que apenas 8,7% dos alunos responderam a esta questão corretamente. Isto é, dos 231 (duzentos e trinta e um) alunos que responderam o instrumento diagnóstico, apenas 20 (vinte) acertaram esta questão, considerada em nossa pesquisa como complexa em razão do quantitativo de alunos que responderam incorretamente ou que deixaram em branco.

Ao analisarmos o quadro, percebemos que o grupo de alunos fez uso de 7 (sete) estratégias para resolução dessa questão. Na qual a mais utilizada foi a estratégia 2 (34,2%), em que eles apresentam uma resposta incorreta, com uso do algoritmo da média aritmética. Iremos abordá-la com mais detalhes adiante. De antemão, faz-se necessário analisarmos as demais estratégias para que possamos compreender o que os alunos entenderam acerca do conceito aqui estudado.

Nesta questão, tivemos 94% de participação dos alunos que tentaram de alguma forma respondê-la. Fica claro que mais de 90% dos alunos não conseguiram responder corretamente à questão, demonstrando que possivelmente os alunos apresentam dificuldades na resolução de questões que envolvam o significado (S4) na qual, para se obter a média, é necessário conhecer o que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição. De igual maneira, aparentam possuir dificuldades em questões que envolvam a propriedade (P1) na qual a média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo \leq média \leq valor máximo).

Os alunos que fizeram uso da estratégia 1 apresentaram apenas a resposta correta, que é a média citada na própria questão, não tendo explicado como chegaram a essa conclusão. Por esse motivo, optamos em não trazer exemplos para esta estratégia. Neste sentido, se pode concluir que possivelmente eles compreendem satisfatoriamente o significado S4 e a propriedade P1, que estão envolvidos nessa questão.

Analisemos outra estratégia, em que os alunos apresentam resposta incorreta com uso do algoritmo da média aritmética. Vejamos a seguir um exemplo de uma das respostas apresentada por esse grupo.

Figura 4 - Resposta incorreta da Q2, com uso do algoritmo da média aritmética

A altura média dos alunos de uma turma do 6º ano é de 1,40. Se retirarmos uma amostra aleatória de 5 estudantes desta sala e descobrirmos que a altura (em metros) dos 4 primeiros é:

1,38; 1,42; 1,60; 1,40.

Qual seria a altura mais provável do quinto aluno?

$$\frac{1,38 + 1,42 + 1,60 + 1,40}{4} = \frac{5,80}{4} = 1,45$$

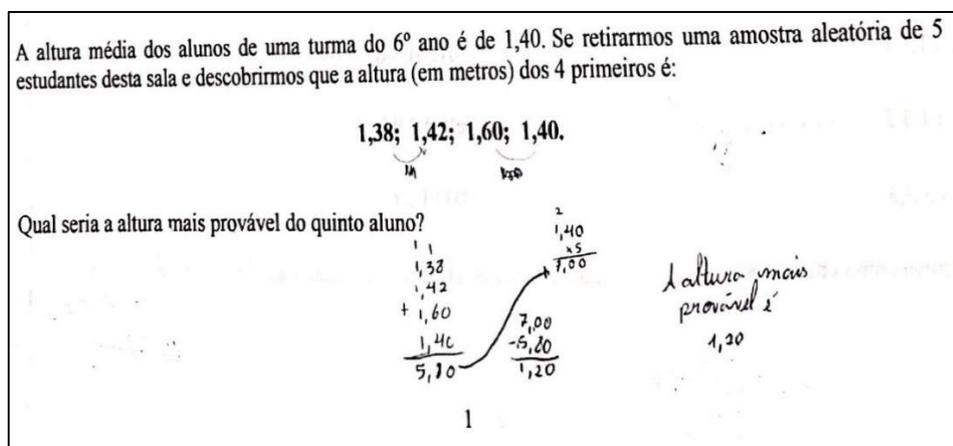
Fonte: dados da pesquisa

A estratégia que vemos na **FIGURA 4** foi a mais utilizada pelos alunos. Nela, eles realizam o cálculo do algoritmo da média considerando apenas as quatro variáveis. Ao somarem todos os valores das variáveis, obtêm um valor de 5,8, dividindo-o em seguida por 4 (quatro), número referente à quantidade de alunos. Ao final do cálculo, chegam a uma resposta de 1,45, incorreta.

Este modelo de resposta foi utilizado por 34,2% dos que participaram da pesquisa. É notório que foi levado em consideração o 5º aluno na obtenção da resposta. Esse método indica uma dificuldade de compreensão em relação ao significado levantado por Batanero (2000) que diz respeito ao reconhecimento da média como valor mais provável ao contar com um dado faltando em uma distribuição.

Na figura a seguir, vejamos um modelo de resposta incorreta com uso da estratégia 3, na qual utiliza a compensação a partir do valor da média.

Figura 5 - Resposta incorreta da Q2, com uso de compensação em função do valor da média



Fonte: dados da pesquisa

Ao analisarmos a **FIGURA 5**, vemos que os alunos utilizaram como estratégia três procedimentos, sendo eles: I - Somaram todos os valores das variáveis apresentados na questão, obtendo assim o valor de 5,8; II - Multiplicaram o valor correspondente à altura média dos alunos por 5 (correspondente à quantidade de alunos que fazem parte do enunciado da questão) e obtiveram como resultado o valor de 7,0; e III - Subtraíram do procedimento II o resultado do procedimento I. Por fim, obtiveram 1,20m como resultado, o qual consideraram ser o valor da altura do quinto aluno.

Ressaltamos que dos 231 (duzentos e trinta e um) alunos, aproximadamente 11,3% fizeram uso desta estratégia de resolução. Vemos que esse grupo de alunos ficou preso ao uso do algoritmo da média aritmética, razão pela qual possivelmente não conseguiram resolver questões que envolvam contextos relacionados esse significado (S1). Esta questão não necessitava de cálculo, dado que a resposta da questão (Q2) se apresentava no enunciado. A resposta correta é a própria média que consta no enunciado da questão.

Analisaremos a seguir a quarta estratégia utilizada pelos alunos. A estratégia apresenta uma resposta incorreta, com uso do algoritmo da média aritmética, porém dividida por 5 (cinco). Vejamos a figura:

Figura 6 - Resposta incorreta da Q2, com uso do algoritmo da média aritmética, porém dividido por 5

A altura média dos alunos de uma turma do 6º ano é de 1,40. Se retirarmos uma amostra aleatória de 5 estudantes desta sala e descobrirmos que a altura (em metros) dos 4 primeiros é:

1,38; 1,42; 1,60; 1,40.

Qual seria a altura mais provável do quinto aluno?

1,16

1,38
1,42
1,60
1,40

5,80 / 5
08 1,16
30

10

Fonte: dados da pesquisa

Esta estratégia foi a quarta mais utilizada pelos alunos. Nela, eles fazem uso do algoritmo da média aritmética, porém dividem por 5 (cinco). Eles somaram todos os valores das variáveis, obtendo 5,80, e em seguida dividiram por 5 (cinco), referente à quantidade de alunos do enunciado da questão. Ao final do cálculo, obtiveram como resposta 1,16, estando assim, incorreto.

Este método de resolução foi utilizado por aproximadamente 13% dos alunos. Novamente, os alunos ficam presos ao cálculo do algoritmo da média. Outro fato interessante é que, de todos que usaram este método de resolução, aproximadamente 40% deles erraram a soma dos números decimais. Fato preocupante, tendo em vista que possivelmente os alunos tenham dificuldades nas operações básicas da Matemática, complicando ainda mais na compreensão de conceitos como o da média aritmética.

Na estratégia 5, os alunos apresentam respostas incorretas, com uso de valor(es) apresentado(s) na questão. Não justificaram, apenas marcaram o número ou colocaram o número que faz parte do conjunto de variáveis. Nesse sentido, não traremos exemplos de respostas deste grupo de alunos.

Aproximadamente 16,4% dos alunos fizeram uso destas estratégias; isso corresponde a aproximadamente 38 (trinta e oito) alunos. Eles apresentaram números que fazem parte das variáveis, sem justificarem as respostas, inclusive tendo a maioria feito uso do valor mínimo. Vejamos o quantitativo de alunos que escolheram cada variável: 20 (vinte) alunos escolheram

o valor de 1,38 (valor mínimo), 11 (onze) alunos escolheram o valor de 1,42 e outros 7 (sete) alunos usaram o 1,60.

Na estratégia 6, os alunos apresentam respostas incorretas, com a soma dos valores das variáveis. Aqui, eles apenas somaram e não realizaram nenhuma operação a mais. Dessa forma, não traremos exemplos de resposta para esta estratégia.

Fizeram uso desta estratégia aproximadamente 4,8% dos alunos, ou seja, 11 (onze) alunos. Todos fizeram a soma das variáveis no instrumento diagnóstico e erraram a soma dos números decimais. Novamente, assim como na estratégia anterior, os alunos apresentam dificuldades no considerado “básico” da Matemática, o que pode acabar prejudicando na compreensão e resolução de questões que envolvam algumas propriedades, como a do conceito de média aritmética.

Na última estratégia, concebida no **QUADRO 11** como estratégia 7, os alunos apresentam respostas incorretas, com uso de valores não relacionados à situação proposta. Nenhum dos alunos que a utilizou explicaram ou fizeram algum cálculo, apenas apresentaram valores aleatórios na questão.

Aproximadamente 5,6% fizeram uso desta estratégia, percentagem correspondente a aproximadamente 13 (treze) alunos. Aqui, como já mencionamos anteriormente, eles não apresentaram cálculos ou explicações, apenas números aleatórios como, por exemplo, 1,70 m, 1,50m e 1,55m. Acreditamos que possivelmente os alunos chegaram a esses resultados através da soma das variáveis e, como nas estratégias anteriores, erraram a soma dos números decimais.

Por fim, aproximadamente 6% dos alunos deixaram esta questão em branco, não apresentando nenhuma tentativa de resolução. Isto é, apenas 14 (catorze) alunos não responderam. Acreditamos que deixaram em branco possivelmente por não compreender o enunciado, entre outros motivos. Em dados gerais, a participação na resolução da questão foi satisfatória, já que 94% dos alunos tentaram respondê-la.

O quadro a seguir demonstra as respostas, estratégias e seus respectivos percentuais na Q3. Nesta questão, requer-se a média aritmética, entendendo-a como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme (S2), bem como a ideia de que o cálculo da média leva em consideração todos os valores, inclusive os nulos (P6), e que a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (P5). Vejamos as respostas e justificativas dos 231 (duzentos e trinta e um) alunos:

Quadro 12 - Tipos de respostas, estratégias e seus respectivos percentuais apresentados pelos alunos ao resolverem a Q3a

Tipos de respostas	Estratégias	Percentuais
1. Os alunos responderam corretamente, usando o algoritmo da média aritmética;	Apresenta a resposta correta através do procedimento do cálculo da média aritmética: soma de todos os valores da variável dividido pela quantidade de dados.	108 46,7%
2. Apresenta resposta correta, porém os alunos não explicam o procedimento que utilizaram para resolução;	Os alunos apresentam a resposta correta e não esclarecem como chegaram a tal resposta.	39%
3. Resposta incorreta, os alunos resolvem o cálculo da média aritmética, mas descartam Mariana por não levar nenhum livro.	Os alunos apresentam uma resposta incorreta, fazem uso do algoritmo da média, porém, desconsideram a participante que não levou livros.	9 3,9%
4. Resposta apresenta-se incorreta, onde os alunos fazem uso da adição dos valores das variáveis presente na questão;	A questão apresenta-se incorreta, por aplicarem a soma dos valores das variáveis da questão. Os alunos somam todos os e não realizam mais nenhum procedimento.	4 1,7%
5. Os alunos apresentam uma resposta incorreta.	Os alunos apresentam uma resposta incorreta, desenvolveram o cálculo da média, porém erraram na soma ou divisão.	3 1,3%
6. Apresentam uma resposta incorreta, com uso de valores, que não apresentam relação com a questão.	Os alunos apresentam uma resposta incorreta, com uso de valores que não fazem sentido para a situação proposta. Exemplos de respostas: 22; 11 e 7.	3 1,3%
7. Em branco	Os alunos deixaram a questão em branco, onde não é apresentada nenhuma tentativa de resolução da questão.	6,1%

Fonte: o autor

Ao analisarmos o **QUADRO 12**, percebemos que esta questão é a que apresenta o maior percentual de acertos em todo o instrumento diagnóstico utilizado na pesquisa. Foram 85,7% de acertos, aproximadamente 198 (cento e noventa e oito) alunos apresentaram uma resposta correta, dos quais 46,7% fizeram uso do cálculo da média aritmética (soma de todos os valores da variável dividido pela quantidade de dados) e 39% apresentam apenas a resposta sem nenhum procedimento de cálculo.

Os alunos fizeram uso de 6 (seis) estratégias diferentes para resolução dessa questão. as estratégias mais utilizadas foram a 1 (46,7%), a 2 (39%) e a 3 (3,9). Iremos abordá-las com mais detalhes adiante. Mesmo apresentando um alto índice de acertos, se faz necessário analisarmos as demais estratégias.

Os dados nos apontam que possivelmente os alunos apresentam facilidade em resolver questões que envolvam o significado S2, a partir do qual a média deve ser considerada como

uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme, e a propriedade P6, na qual o cálculo da média leva em consideração todos os valores, inclusive os nulos.

Na primeira estratégia, os alunos apresentaram uma resposta correta, com uso do algoritmo da média aritmética. Destacamos a seguir uma das respostas apresentada por um(a) aluno(a).

Figura 7 - Resposta correta da questão Q3a, com explicitação do procedimento de resolução

Toda sexta-feira a professora de uma turma solicita que os alunos tragam livros para empréstimo coletivo para estimular a leitura no fim de semana. Em um destes dias, a turma apresentou a seguinte quantidade de livros:

Joana trouxe 1
 Caio trouxe 5
 Gina apresentou 1 e
 Paulo 3 livros.
 Marina saiu atrasada de casa e esqueceu de pegar os livros.

Como redistribuir os livros de forma que cada aluno fique com a mesma quantidade? e qual seria a quantidade de cada um após a distribuição?

Soma a quantidade e dividi

$$5 + 3 + 1 + 1 = 10 \quad | \quad 10 \overline{) 20}$$

R = 2 livros
 pra cada

Fonte: dados da pesquisa

Analisando a **FIGURA 7**, observa-se que o(a) aluno(a) responde corretamente a questão Q3a fazendo uso da seguinte estratégia: utilização do algoritmo da média aritmética e divisão correta com uso dos cinco participantes que fazem parte do enunciado da questão. Nesta questão, todos os alunos que utilizaram esse procedimento fizeram uso do cálculo da média aritmética (soma dos valores da variável e divisão pelo número de dados), obtendo como resposta 2 (dois). Fizeram uso dessa forma de resolução 108 (cento e oito) alunos, que demonstraram saber desenvolver o algoritmo da média aritmética.

Na estratégia 2, os alunos também apresentaram resposta correta, porém não explicaram o procedimento que utilizaram para resolução. Nesse contexto, não traremos exemplos de respostas, já que os alunos que utilizaram tal estratégia colocaram apenas o número correspondente à resposta. Fizeram uso desta estratégia aproximadamente 90 (noventa) estudantes.

Em dados gerais, vemos que o quantitativo de acertos, levando em consideração as duas estratégias, foi satisfatório. Isso demonstra que possivelmente os alunos não sentem dificuldades em resolver questões em que esta propriedade esteja envolvida; em outras palavras, possuem facilidade na resolução de questões levam em consideração no cálculo da média os valores nulos.

Vejamos na **FIGURA 8** um exemplo da estratégia 3, no qual o(a) aluno(a) apresentam uma resposta incorreta, fazendo uso do algoritmo da média, porém desconsiderando a participante que não levou livros.

Figura 8 - Resposta incorreta da Q3a, com uso da média aritmética, mas desconsiderando os cinco alunos envolvidos no enunciado da questão

Toda sexta-feira a professora de uma turma solicita que os alunos tragam livros para empréstimo coletivo para estimular a leitura no fim de semana. Em um destes dias, a turma apresentou a seguinte quantidade de livros:

Joana trouxe 1
 Caio trouxe 5
 Gina apresentou 1 e
 Paulo 3 livros.
 Marina saiu atrasada de casa e esqueceu de pegar os livros.

Como redistribuir os livros de forma que cada aluno fique com a mesma quantidade? E qual seria a quantidade de cada um após a distribuição?

$$\frac{1+1+3+5}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$$

Fonte: dados da pesquisa

Na **FIGURA 8**, podemos analisar que o aluno tem conhecimento de como calcular a média aritmética. Os alunos que fizeram uso desta estratégia desconsideraram o valor nulo (aluna que não levou livros). Este procedimento de resolução demonstra que possivelmente quem a utilizou não compreende que o cálculo da média leva em consideração todos os valores, inclusive os nulos.

Essa estratégia foi observada na resolução de 3,9% dos que responderam o instrumento diagnóstico. Número considerado pequeno, mas preocupante, já que é esperado que alunos nesse nível de ensino não sintam dificuldades nesse significado e propriedade.

Os alunos que utilizaram a estratégia 4 do **QUADRO 12** apresentam uma resposta incorreta, por aplicarem a soma dos valores das variáveis da questão. No caso, os alunos somaram todas as variáveis e não realizaram mais nenhum procedimento. Essa estratégia de resolução foi utilizada por 1,7% dos participantes da pesquisa. Possivelmente, esse grupo de estudantes não sabe fazer uso do algoritmo da média aritmética.

Na estratégia 5, os alunos apresentaram uma resposta incorreta, desenvolveram o cálculo da média, porém erraram na soma ou divisão. Aqui, os alunos aparentemente compreendem como se desenvolve o cálculo do algoritmo da média, porém erraram no

desenvolvimento do cálculo, mais especificamente na soma das variáveis e na divisão. Essa estratégia foi utilizada por aproximadamente 1,3% dos alunos.

A última estratégia utilizada pelos alunos no desenvolvimento desta questão, foi a estratégia 6, resultando em uma resposta incorreta, com uso de valores que não fazem sentido para a situação proposta.

No quadro a seguir, descrevemos os tipos de respostas, justificativas e percentuais apresentados pelos alunos ao responderem à questão Q3b, que solicita dos alunos o reconhecimento de que, ao se acrescentar mais um valor ao conjunto de dados da média, o resultado seria alterado.

Quadro 13 - Tipos de respostas, estratégias e seus respectivos percentuais apresentados pelos alunos ao resolverem a Q3b

Tipos de respostas	Estratégia	Percentual
1. Os alunos apresentam respostas corretas, consideram que o acréscimo implica na alteração da média.	As respostas apresentadas foram corretas. Aqui, os alunos justificam que o acréscimo implica na alteração da média.	34,7%
2. Respostas corretas e afirmam apenas que “sim”.	Apresentaram uma resposta correta, considerando que o aumento em um dos valores da variável alteraria a média aritmética. Porém, não apresentam justificativa para suas respostas apenas afirmam que “sim”	9,5%
3. Resposta incorreta, desconsideram que o aumento de um livro alteraria a média.	Apresentam uma resposta incorreta, os alunos compreendem que o resultado por se tratar de um número decimal, não aumentaria a média aritmética.	93 40,3%
4. Resposta incorreta, os alunos relacionam o aumento apenas com a adição dos valores.	Os alunos apresentam justificativa relacionando apenas com a adição dos valores da variável, desconsiderando o conceito da média.	10 4,3
5. Apresentam respostas incorretas, que não conseguimos identificar relação com a situação proposta.	Os alunos apresentam uma resposta incorreta, com uso de valores que não conseguimos identificar relação com a situação proposta. Exemplos de respostas: 26; 48, 34 entre outros.	7 3%
6. Em branco	Os alunos deixaram a questão em branco, onde não é apresentada nenhuma tentativa de resolução da questão.	8,2%

Fonte: o autor

Ao analisarmos o **QUADRO 13**, observamos que 44,2% dos alunos responderam corretamente a esta questão. Apenas alguns apresentaram justificativas. Para aqueles que acertaram, acreditamos que mesmo intuitivamente os alunos demonstram compreender que

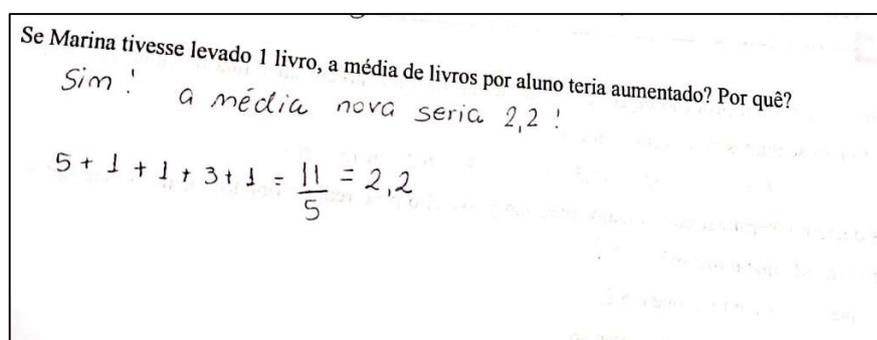
qualquer alteração nas variáveis implicaria em alterações na média aritmética. Logo, demonstram uma facilidade em compreender que a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física.

Nesta questão (Q3b), os alunos utilizaram seis diferentes formas de resolução, tendo sido as mais utilizadas as estratégias 1 (34,7%) e 2 (40,3%). A seguir, iremos analisá-las mais detalhadamente. Vale ressaltar que esta questão faz parte da questão 3 (Q3), dividida em duas partes (Q3a e Q3b) para que possamos melhor analisar. Neste sentido, a Q3 tem o mesmo significado (S2). Na primeira parte, os alunos tiveram um maior percentual de acertos; já na Q3b, apresentaram uma maior dificuldade.

Aproximadamente 102 (cento e dois) alunos conseguiram responder corretamente esta questão. Foi a terceira questão do teste diagnóstico que apresentou o maior percentual de acertos. Como mencionado anteriormente, esta questão tem como significado (S2), em que a média é uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme, tendo também a propriedade em que a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física. Se compararmos as duas questões (Q3a e Q3b), percebemos que os alunos sentem uma maior dificuldade nesta última, o que acreditamos ser decorrente da propriedade.

A seguir, analisamos as estratégias utilizadas pelos alunos. Começaremos pela primeira, na qual os alunos apresentam respostas corretas e justificam que o acréscimo implica na alteração da média. Vejamos a seguir um exemplo de uma das respostas apresentadas por esse grupo.

Figura 9 - Justificativa por um dos alunos referente à Q3b, trata-se do aumento das variáveis e do aumento da média aritmética



Se Marina tivesse levado 1 livro, a média de livros por aluno teria aumentado? Por quê?

Sim! a média nova seria 2,2!

$$5 + 1 + 1 + 3 + 1 = \frac{11}{5} = 2,2$$

Fonte: dados da pesquisa

Aproximadamente 80 (oitenta) alunos responderam corretamente e apresentaram justificativas para sua resolução. Desses 80 (oitenta), em torno de 35 (trinta e cinco) alunos

responderam com o uso do cálculo da média aritmética. Como podemos ver na **FIGURA 9**, o(a) aluno(a) realizou o cálculo da média aritmética com o acréscimo do livro de Marina, chegando assim à conclusão de que, sim, haveria um aumento da média. Outros alunos (45) não trouxeram explícito o cálculo da média, mas fizeram justificativas afirmando que o valor da média seria alterado, porém que a divisão dos livros não alteraria, dado que a média era um número decimal. Essa estratégia foi a segunda mais utilizada pelos alunos.

Os que fizeram uso da segunda estratégia também responderam corretamente. Porém, afirmaram apenas que “sim”. Por esse motivo, não traremos exemplos destas respostas. Ao utilizarem este procedimento de resolução, acreditamos que muitos responderam intuitivamente. Se utilizaram dessa estratégia aproximadamente 22 (vinte e dois) alunos.

Em dados gerais, vemos que 102 (cento e dois) alunos responderam corretamente fazendo uso de duas estratégias. Ressaltamos que o percentual de acertos nesta questão foi de 44,2%. Quando comparada à questão Q3b, que tem o mesmo significado (S2), vemos que os alunos apresentam uma maior dificuldade em compreender a média como um número não correspondente na realidade física.

Analisemos um exemplo da terceira estratégia, na qual os alunos desconsideram que o aumento de um livro alteraria a média.:

Figura 10 - Justificativa de dois alunos referentes à Q3b, resposta incorreta, desconsideram que o aumento de um livro alteraria a média

<p>Se Marina tivesse levado 1 livro, a média de livros por aluno teria aumentado? Por quê?</p> <p>não, pois a divisão da quantidade de livros seria diferente, ou seja, os alunos não ficariam com a mesma quantidade de livros</p>	<p>Se Marina tivesse levado 1 livro, a média de livros por aluno teria aumentado? Por quê?</p> $\frac{1+2+1+3+5}{5} = \frac{12}{5} = 2,2$ <p>Não</p>
---	--

Fonte: dados da pesquisa

A **FIGURA 10** mostra exemplos de resoluções de dois alunos. Eles fazem uso da estratégia 3, ambos incorrendo em respostas incorretas. Aqui, os alunos compreenderam que o resultado, por se tratar de um número decimal, não aumentaria a média aritmética. No primeiro exemplo, o(a) aluno(a) relata que não haveria aumento na média aritmética, dado que não daria para dividir. Vejamos sua resposta: “não, pois a divisão da quantidade de livros seria diferente, os alunos não ficariam com a mesma quantidade de livros”.

No segundo exemplo, o(a) aluno(a) fez uso do cálculo da média aritmética e chegou ao resultado de 2,2. Mesmo assim, concluiu que não haveria aumento da média. Nestes dois exemplos, vemos claramente que os alunos possivelmente não compreendem que o acréscimo de um livro aumentaria a média aritmética, mesmo seu resultado não sendo correspondente na realidade física.

Essa estratégia foi a mais utilizada pelos alunos; em torno de 40,3% dos alunos a utilizaram. Em outras palavras, 93 (noventa e três) alunos compreendem que o resultado, por se tratar de um número decimal, não aumentaria a média aritmética. Deste modo, aproximadamente 53 (cinquenta e três) alunos responderam de forma semelhante ao exemplo 1, cujas justificativas não foram acompanhadas pelo respectivo cálculo. Já cerca de 40 (quarenta) alunos justificaram suas respostas fazendo uso do cálculo da média.

Na estratégia 4, os alunos apresentaram uma resposta errada e justificaram relacionando apenas com a adição dos valores da variável, desconsiderando o conceito da média. Não traremos exemplos para essa estratégia, pois os alunos apenas colocaram o número correspondente à soma das variáveis. Percebemos que eles entendem que houve uma alteração por ser acrescido mais um livro, totalizando 11 (onze), mas não realizaram nenhum procedimento após a soma. Possivelmente os alunos não compreendem o conceito da média, entendendo-a como a soma de valores. Fizeram uso desta estratégia 4,3% dos alunos.

Na última estratégia, os alunos apresentaram uma resposta incorreta, com uso de valores que não conseguimos relacionar com a situação proposta. Nestes casos, os alunos não realizaram cálculos, apenas números, como por exemplo: 26, 48, dentre outros.

Ao finalizarmos a análise da Q3, dividida em Q3a e Q3b, percebemos uma grande diferença no que condiz com o quantitativo de acertos. Na Q3a, vimos que o percentual de acertos foi de 85,7%. Em contrapartida, na Q3b o percentual foi de 44,2%. Mesmo sendo a questão que apresentou o maior percentual de acertos, consideramos que o resultado geral ficou a desejar, pois grande parte dos alunos do 3º ano do Ensino Médio não demonstraram um entendimento adequado para esse nível de ensino. Acreditamos que a discrepância ocorrida entre as questões (Q3a e Q3b) se deu pelo fato de a Q3a ter como resultado um valor exato e estar relacionada à propriedade P6, enquanto que a Q3b tem como resultado um número com decimais e envolve a P5. Novamente, vemos que um grande grupo de alunos sente dificuldades em compreender a média como um número que não tem um correspondente na realidade física. Portanto, vemos que, nesta questão, as propriedades influenciam no nível de desempenho dos estudantes, mais que os significados. Apesar de apresentar o mesmo significado, ao mudar a propriedade o desempenho dos alunos caiu aproximadamente 50%.

No quadro a seguir, descrevemos os tipos de respostas, justificativas e percentuais apresentados pelos alunos ao responderem à questão Q4. A questão Q4 solicita dos alunos o reconhecimento de que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica (S3).

Antes de darmos início à análise, lembramos que a questão era de verdadeiro ou falso, na qual solicitava aos alunos que assinalassem como verdadeiro possíveis valores onde a média pudesse ser 3 (três) e como falso os valores em que a média não fosse 3 (três). Nesse sentido, a questão oferece seis alternativas, das quais três são verdadeiras e três são falsas. Para melhor analisarmos, consideramos que os alunos que acertassem quatro das seis alternativas estariam respondendo corretamente a toda à questão. Os alunos que acertassem 3 (três) das 6 (seis) alternativas estariam errando toda a questão. Fizemos desta forma pois, caso o(a) aluno(a) arriscasse tudo falso ou tudo verdadeiro, teoricamente estaria acertando 50% da questão. Neste caso, não conseguiríamos identificar se possivelmente ele(a) compreende o conceito de média aritmética.

Quadro 14 - Tipos de respostas, estratégias e seus respectivos percentuais apresentados pelos alunos ao resolverem a Q4

TIPOS DE RESPOSTAS	ESTRATÉGIAS	PERCENTUAIS
1. Os alunos apresentam uma resposta correta, com explicação do procedimento de resolução.	Demonstram a resposta correta por meio do cálculo da média aritmética: soma de todos as variáveis divididas pela quantidade de dados.	40,2%
2. Os alunos demonstram a resposta correta sem explicar o procedimento de resolução.	Os alunos apresentam apenas a resposta correta para a situação proposta.	27,3%
3. Os alunos apresentam uma resposta incorreta, assinalando todas as alternativas como falsas.	Os alunos marcaram todas as alternativas como falso. E não apresentam justificativas.	1,3%
4. Os alunos apresentam uma resposta incorreta, assinalando todas as alternativas como verdadeira.	Os alunos marcaram todas as alternativas como verdadeira. E não apresentam justificativas.	0,9%
5. Os alunos apresentam uma resposta incorreta, com escolha dos conjuntos de dados em que os valores são constantes.	Assinalam como verdadeiras as alternativas (a, c, e) referentes aos conjuntos de dados em que os valores são constantes.	3%
6. Os alunos apresentam uma resposta incorreta, fazendo uso das variáveis que apresenta números inferiores ou igual a média 3.	Os alunos, assinalam como verdadeiras as alternativas (a, c) que se referem aos conjuntos de dados em que os valores não ultrapassam o valor da média apresentada na questão.	8,7%
7. Apresentam uma resposta incorreta, assinalando com X uma única alternativa.	Os alunos, assinalam com X uma das alternativas. Não apresentam justificativa de como resolveram a questão.	6,5%
8. Resposta incorreta, com escolha do conjunto de dados em que os valores são	Assinalaram como verdadeira a alternativa (c) que se refere apenas a um dos conjuntos	

constantes e iguais ao valor da média apresentada na questão.	de dados que corresponde ao valor da média dada. Esse conjunto de dados especificamente é formado por valores constantes e iguais ao valor da média apresentada na questão.	3%
9. Apresentam resposta incorreta, com a escolha do conjunto de dados em que a soma dos valores resulta no valor da média apresentada na questão.	Apresentam como verdadeira a alternativa (a) que se refere ao conjunto de dados em que a soma dos valores resulta no valor da média apresentada na questão.	2,2%
10. Em branco	Os alunos deixaram a questão em branco, onde não é apresentada nenhuma tentativa de resolução da questão.	6,9%

Fonte: o autor

Ao analisarmos o **QUADRO 14**, observamos que 67,5% dos alunos apresentaram uma resposta correta para esta questão. Destacamos que esses 67,5% são referentes aos estudantes que acertaram quatro ou mais questões. Esta questão é a segunda que apresenta um maior percentual de acertos. Apresenta como significado (S3) que considera que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica e tem por propriedade (P7) que a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada.

Nesta questão, os alunos fizeram uso de 9 (nove) estratégias diferentes para sua resolução. As estratégias mais utilizadas foram a 1ª (40,2%), 2ª (27,3%) e 6ª (3,9). Iremos abordá-las com mais detalhes adiante. A questão apresenta um índice de acertos que consideramos razoável, mas se faz necessário analisarmos as demais estratégias para buscarmos entender o que os alunos compreendem acerca do conceito aqui estudado.

Neste problema, tivemos aproximadamente 156 (cento e cinquenta e seis) alunos que responderam corretamente esta questão, considerada a segunda questão com um maior percentual de acertos de todo o instrumento diagnóstico. Nela, 59 (cinquenta e nove) alunos erraram e 16 (dezesesseis) deixaram em branco. Novamente, destacamos o percentual de participação dos estudantes ao responderem o instrumento diagnóstico; nesta questão, 93,1% dos alunos responderam fazendo uso das várias estratégias que veremos com mais detalhes a seguir.

Neste momento, vejamos exemplos das questões que tiveram um maior percentual de utilização e apresentaram justificativas em suas respostas.

possivelmente os alunos não compreendam corretamente o conceito de média, contribuindo, assim, para apenas assinalarem desta forma.

Na estratégia 5, os alunos apresentaram uma resposta incorreta, com escolha dos conjuntos de dados em que os valores são constantes. Assinalaram como verdadeiras as alternativas “a”, “c”, “e”. Os que fizeram uso desta estratégia não apresentam justificativas em suas respostas. Esta estratégia foi utilizada por 3% dos alunos, o correspondente a 7 (sete) alunos.

Vejamos a seguir um exemplo de resposta incorreta, com uso das variáveis que apresenta números inferiores ou igual à média 3.

Figura 12 - Resposta incorreta da Q4, com uso das variáveis que apresentam números inferiores ou iguais à média 3

Leticia está pesquisando preços de salgadinhos para comprar mais barato e economizar sua mesada. Ela anotou preços de três lugares diferentes e descobriu que o preço médio destes salgadinhos é de R\$ 3,00. Assinale V (Verdadeiro) ou F (Falso) para os possíveis valores que Leticia encontrou:

a) <input checked="" type="checkbox"/> 1,1,1	d) <input checked="" type="checkbox"/> 1,3,6
b) <input checked="" type="checkbox"/> 1,3,5	e) <input checked="" type="checkbox"/> 9,9,9
c) <input checked="" type="checkbox"/> 3,3,3	f) <input checked="" type="checkbox"/> 1,2,6

Descreva como você pensou. Se o valor mínimo é 3 reais não poderia ser um número maior

Fonte: dados da pesquisa

Na **FIGURA 12**, temos um exemplo em que o(a) aluno(a) responde como verdadeiras as alternativas “a” e “c”, referentes aos conjuntos de dados em que os valores não ultrapassam o valor da média apresentada na questão. Vemos que, ao descrever o percurso de raciocínio, o(a) mesmo(a) relata que: “se o valor mínimo é 3 reais não poderia ser um número maior”. Neste sentido, vemos que os alunos que utilizam essa estratégia de resolução relacionam a média às variáveis. Isto é, as variáveis em cada item não podem ultrapassar o valor da média. Esta estratégia foi utilizada por 8,7% de todo o grupo.

A estratégia 7 apresentou respostas incorretas, em que os alunos assinalaram com x ao menos uma das alternativas. O grupo que fez uso desta estratégia não apresentou justificativa de como resolveram a questão. Acreditamos que provavelmente esses alunos não

compreenderam o que era solicitado, contribuindo para que marcassem apenas com x qualquer uma das alternativas. Fizeram uso desta estratégia 6,5% dos alunos, ou seja, 15 (quinze) alunos.

Na estratégia 8, os estudantes apresentaram uma resposta incorreta. Assinalaram como verdadeira a alternativa “c”, que se refere apenas a um dos conjuntos de dados que corresponde ao valor da média dada. Esse conjunto de dados, especificamente, é formado por valores constantes e iguais ao valor da média apresentada na questão. Esta estratégia foi utilizada por 3% de todo grupo e não foram apresentadas justificativas de resolução.

Por fim, os estudantes que se valeram da estratégia 9 consideraram como verdadeira a alternativa “a”, que se refere ao conjunto de dados em que a soma dos valores resulta no valor da média apresentada na questão. Aproximadamente 2,2% dos alunos fizeram uso deste procedimento, não apresentando explicações de resolução.

Na análise a seguir, descrevemos os tipos de respostas, justificativas e percentuais apresentados pelos alunos ao responderem à questão Q5. Ressaltamos que a Q5 apresenta o mesmo significado da questão anterior (Q4), em que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica (S3). Reforçamos que a Q5 apresenta dois questionamentos e, para melhor compreendermos, dividimos essa questão em duas partes, sendo elas: Q5a e Q5b.

Neste contexto, vemos no quadro a seguir os tipos de respostas, estratégias e seus percentuais para a Q3a. Nesta, era necessário fazer o cálculo da média ponderada, que considera que a soma dos desvios a partir da média é zero.

Quadro 15 - Tipos de respostas, estratégias e seus respectivos percentuais apresentados pelos alunos ao resolverem a Q5a

Tipos de respostas	Estratégias	Porcentagem
1. Os alunos responderam corretamente, e explicam o procedimento através do algoritmo da média aritmética;	Os estudantes apresentam uma resposta correta e fazem uso do procedimento do cálculo da média aritmética ponderada.	10%
2. Apresentam uma resposta incorreta, somando as variáveis referente as horas.	Os estudantes apresentam uma resposta incorreta, somando as variáveis das horas. Isto é, $8 + 4 = 12$.	27,7%
3. Apresentam uma resposta incorreta. Somam as horas de cada aluno, referente a prática de esportes.	Resposta incorreta, utilizando como estratégia, somar as horas da prática de esportes dos 10 alunos.	19,9%
4. Apresentam uma resposta incorreta, multiplicando as 8 horas pela quantidade de participantes.	Resposta incorreta, utilizam a estratégia de multiplicar a média de horas de Maria e Pedro (8 horas) pela quantidade de participantes (10).	6,9%
5. Os alunos apresentam uma resposta incorreta, fazem uso do algoritmo da média aritmética, porém erram na divisão.	Apresenta uma resposta incorreta, no qual fazem uso do algoritmo da média	5,6%

	aritmética ponderada, porém erram na divisão.	
6. Resposta incorreta, com uso de valor (es) apresentado (s) na questão.	Os alunos apresentam uma resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentados na própria questão. Quantidade de participantes que usaram o valor da menor variável (4) e utilizaram a maior variável (3).	3%
7. Resposta incorreta, somam as variáveis das horas em seguida dividem por 2.	Apresentam uma resposta incorreta, somando as variáveis das horas. Isto é, $8 + 4 = 12$. E ao final dividem por 2.	3,9%
8. Resposta incorreta, os alunos somam todas as variáveis da questão.	Resposta incorreta, os alunos somam todos os números que aparecem na questão.	2,6%
9. Resposta incorreta, os alunos utilizam regra de três para resolução.	Apresentam resposta incorreta, utilizando como estratégia a regra de três.	3%
10. Respostas incorretas, com uso de valores na qual não conseguimos identificar relação com a situação proposta.	Os alunos apresentam respostas incorretas, com uso de valores que não conseguimos identificar relação com a situação proposta. Exemplos de respostas: 155; 220.	3,5%
11. Em branco	Os alunos deixaram a questão em branco, onde não é apresentada nenhuma tentativa de resolução da questão.	13,9%

Fonte: o autor

Na análise do **QUADRO 15**, percebemos que esta questão é a que apresenta um dos menores índices de acertos. Apenas 10% do grupo respondeu esta questão corretamente. Utilizaram no total de 10 (dez) estratégias diferentes para sua resolução, sendo as estratégias 2 (27,7%), 3 (18,2%) e 1 (10%) as mais utilizadas. Neste sentido, iremos abordar e analisar com mais detalhes adiante. Esta análise se faz necessária para buscarmos compreender o que os alunos entendem acerca do conceito aqui estudado.

Vemos que 86,1% dos alunos tentaram responder de alguma forma à questão. Acreditamos que os 32 (trinta e dois) alunos que não responderam esta questão devem ter considerá-la complexa ou desejassem se ausentar da sala de aula mais rapidamente, dado que na maioria das escolas a aplicação foi realizada em aulas que antecipavam a saída dos alunos para intervalo ou ida para casa.

Vemos que apenas 23 (vinte e três) alunos responderam corretamente esta questão, sendo nítida a dificuldade do grupo em resolvê-la. Relembramos que, em se tratando do conceito de média aritmética e de seus respectivos significados, a questão Q5 tem o mesmo significado da Q4, mudando apenas a propriedade, ditando esta que a soma dos desvios a partir da média é zero.

A seguir, damos início a análise da **FIGURA 13**, que traz um exemplo de resposta correta na qual o(a) aluno(a) utilizou como estratégia o procedimento do cálculo da média aritmética ponderada. Vejamos a figura:

Figura 13 - Resposta correta da Q5a, com uso da média aritmética ponderada

Maria e Pedro passam em média 8 horas a cada final de semana praticando esportes. Outros 8 alunos dedicam a cada fim de semana, em média, 4 horas praticando esportes.

a. Em média, quantas horas os 10 alunos praticam esportes todo final de semana?

$$\frac{8+8+4 \cdot 8}{10} = \frac{16+32}{10} = \frac{48}{10} = 4,8 \text{ horas}$$

Fonte: dados da pesquisa

Ao analisarmos a **FIGURA 13**, vemos que ele(a) respondeu corretamente e fez uso da estratégia 1 com o procedimento do cálculo da média aritmética ponderada. Na resolução o(a) aluno(a) somou a média de horas de Maria e Pedro e, em seguida, realizou o produto entre as horas (média) praticadas pelos 8 (oito) “alunos” da questão, obtendo a quantidade de horas em que os 8 (oito) participantes praticaram esportes. Ao final, ele(a) somou o quantitativo de horas gastas em atividades dos 10 (alunos) e dividiu pela quantidade de participantes, obtendo como resposta 4,8 horas.

Esta estratégia foi utilizada por 10% do grupo investigado. Isso é, 23 (vinte e três) alunos responderam corretamente à questão Q5a, na qual 18 (dezoito) – cerca de 7,8% - fez uso do cálculo da média e 5 (cinco) alunos (2,2%) apresentaram apenas a resposta. Aparentemente, o grupo demonstra facilidade em resolver questões envolvendo média ponderada.

Vejamos a seguir um exemplo de resposta incorreta, somando as variáveis referente às horas da questão Q5a.

Figura 14 - Resposta incorreta da Q5a, com a soma das variáveis referentes às horas

Maria e Pedro passam em média 8 horas a cada final de semana praticando esportes. Outros 8 alunos dedicam a cada fim de semana, em média, 4 horas praticando esportes.

a. Em média, quantas horas os 10 alunos praticam esportes todo final de semana?

$$8h + 4h = 12 \text{ horas}$$

Fonte: dados da pesquisa

Na **FIGURA 14**, vemos um exemplo de resposta incorreta, em que o(a) aluno(a) fez uso da estratégia 2, mediante a soma das variáveis das horas da questão Q5a. Vemos que, em sua resolução, ele(a) utilizou as 8 (oito) horas referente ao tempo de Maria e Pedro e somou com as 4 (quatro) horas referentes ao tempo gasto pelos demais alunos, obtendo como resposta 12 (doze) horas. Fica claro que os alunos que fizeram uso desta estratégia compreenderam a média como apenas a soma das variáveis. Essa estratégia foi a mais utilizada pelos alunos, presente na resposta de cerca de 27,7% destes. Em outras palavras, temos que aproximadamente 64 (sessenta e quatro) alunos compreenderam a média enquanto a soma das variáveis.

A seguir, traremos a **FIGURA 15**, exemplo de uma resposta incorreta, na qual o(a) aluno(a) somou as horas das atividades físicas de todos os citados na Q5a.

Figura 15 - Resposta incorreta da Q5a, com a soma das horas das atividades físicas de todos os alunos

Maria e Pedro passam em média 8 horas a cada final de semana praticando esportes. Outros 8 alunos dedicam a cada fim de semana, em média, 4 horas praticando esportes.

a. Em média, quantas horas os 10 alunos praticam esportes todo final de semana?

$$8 \cdot 4 + 8 \cdot 2 =$$

$$32 + 16 =$$

$$\boxed{48}$$

Fonte: dados da pesquisa

Na **FIGURA 15**, temos um exemplo de resposta incorreta, onde o(a) aluno(a) utilizou a estratégia 3, somando as horas das atividades físicas de todos os alunos. Em sua resposta,

vemos que o(a) aluno(a) realizou o produto entre a quantidade de horas gastas em atividades físicas (4) pelos 8 (oito) participantes e somou com produto das horas gastas por Maria e Pedro (16), obtendo o valor de 48 (quarenta e oito) e não realizando mais nenhum procedimento após. Esta estratégia esteve presente na resposta de aproximadamente 46 (quarenta e seis) alunos, tendo feito apenas a soma das variáveis e não realizando a divisão pelo número de dados. Novamente, vemos que possivelmente esse grupo não compreendeu corretamente o conceito de média aritmética.

Na estratégia 4, o grupo que a utilizou apresentou uma resposta incorreta, realizando o seguinte procedimento: multiplicar a média de horas de Maria e Pedro (8 horas) pela quantidade de participantes (10), obtendo como resultado 80. Eles afirmaram que, em média, os 10 alunos praticaram 80 horas de atividades físicas por final de semana. Percebemos, aqui, uma forma errônea de pensamento e que, infelizmente, o grupo não percebeu que sua resposta excedeu o quantitativo de horas de um final de semana, que é de 48 horas. Esta estratégia foi utilizada por um grupo de aproximadamente 16 (dezesesseis) alunos.

A estratégia 5 apresenta uma resposta incorreta, em que o grupo fez uso do algoritmo da média aritmética ponderada, porém erram na divisão. Esse grupo de alunos chegou ao total de horas gastas em atividades pelos 10 (dez) alunos, realizou a divisão pelo número de dados, porém errou a divisão. Vemos que o grupo tem conhecimento do conceito de média e, ao mesmo tempo, apresentou dificuldades em operações básicas da Matemática. Este processo de resolução foi utilizado por 13 (treze) alunos.

Na estratégia 6, temos uma forma de resposta incorreta, em que os alunos apresentaram uma resposta incorreta com uso de valor(es) apresentados na própria questão. Esta estratégia foi utilizada por 7 (sete) alunos, dois quais 4 (quatro) utilizaram como resposta o valor da menor variável e 3 (três) utilizaram como resposta o valor da maior variável.

Ao utilizarem a estratégia 7, apresentaram uma resposta incorreta, em que o grupo que a utilizou somou as variáveis das horas e, ao final, dividiu por 2. Neste tipo de procedimentos, os estudantes somaram $4 + 8$, obtendo como resposta 12, e dividiram por 2 (número de dados que eles consideram). Ao final, afirmaram que a média de horas gastas em atividades físicas, pelo grupo de 10 (dez) alunos é de 6 horas. Vemos que, aqui, os alunos compreendem o procedimento do cálculo da média, mas ao se depararem com questões mais complexas não conseguem resolvê-las. Este método foi utilizado por um grupo de 9 (nove) alunos.

A estratégia 8 apresenta uma resposta incorreta, em que os alunos somaram todos os números que aparecem na questão. Em outras palavras, eles somaram os números que aparecem no enunciado da questão, sendo eles: as horas e quantidades de alunos. No total, 6 (seis) alunos

utilizaram este procedimento. Novamente, vemos uma compreensão errada do conceito de média, em que ligam a média à soma de variáveis.

Em relação à estratégia 9, o grupo que a utilizou apresentou uma resposta incorreta, utilizando como estratégia a regra de três. Este método de resposta foi utilizado por 7 (sete) alunos, demonstrando que, aparentemente, os alunos não compreendem o conceito de média.

Por fim, quanto à última estratégia utilizada nesta questão (Q5a), os alunos apresentaram respostas incorretas, com uso de valores que não conseguimos relacionar com a situação proposta. Vejamos alguns exemplos de respostas utilizados por eles: 112horas, 144horas, entre outros. Ao total, 8 (oito) alunos responderam desta forma.

No quadro a seguir, descrevemos os tipos de respostas, justificativas e percentuais apresentados pelos alunos ao responderem à questão Q5b. A questão Q5b solicita dos alunos o reconhecimento de que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica.

Quadro 16 - Tipos de respostas, estratégias e seus respectivos percentuais apresentados pelos alunos ao resolverem a Q5b

Tipos de respostas	Estratégias	Percentuais
1. Os alunos responderam corretamente, e explicam o procedimento através do algoritmo da média aritmética;	Os alunos, demonstram a resposta correta por meio do seguinte procedimento: somam todas as variáveis e dividem pela quantidade de dados. Após, somam com o resultado da questão Q5a.	4,3%
2. Os alunos responderam corretamente, sem explicar o procedimento de resolução.	Os alunos, demonstram a resposta correta, mas não demonstram como chegaram ao resultado.	1,3%
3. Apresentam uma resposta incorreta, somando as 4 variáveis referente as horas da questão Q5a e Q5b.	Resposta incorreta, utilizando como estratégia: somar as 4 variáveis das horas presentes na Q5a e Q5b.	27,3%
4. Os alunos apresentam uma resposta incorreta. Somam as horas, referente a ouvir música.	Resposta incorreta, utilizando como estratégia: somar as duas variáveis referente a atividade de ouvir música.	9%
5. Os alunos apresentam uma resposta incorreta, fazem uso da média aritmética apenas da atividade “ouvir música”.	Resposta incorreta, utilizando como estratégia: fazer o cálculo da média aritmética ponderada da atividade ouvir música. E não somam com a média de praticar esportes.	3,5%
6. Apresentam uma resposta incorreta, somando individualmente o quantitativo de horas nas duas atividades: esportes e ouvir música.	Resposta incorreta, utilizando como estratégia: somar quantas horas os 10 alunos gastaram praticando esportes e ouvindo música. Esquecem de realizar a divisão no final.	19,6%
7. Resposta incorreta, com uso de valor (es) apresentado (s) na questão.	Os alunos apresentam uma resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentados na própria questão.	4,8%

8. Apresentam uma resposta incorreta, multiplicando as 3 horas pela quantidade de participantes. Ao final, somam com o resultado da Q5a.	Resposta incorreta, fazendo uso da seguinte estratégia: Multiplicam a variável 3 (horas) pela quantidade de alunos (10) com final eles somam com o resultado da Q5a.	5,2%
9. Resposta incorreta, os alunos utilizam regra de três para resolução.	Apresentam resposta incorreta, utilizando como estratégia a regra de três.	3%
10. Respostas incorretas, com uso de valores na qual não conseguimos identificar relação com a situação proposta.	Os alunos apresentam respostas incorretas, com uso de valores que não conseguimos identificar relação com a situação proposta. Exemplos de respostas: 144hrs; 175hrs.	3%
11. Em branco	Os alunos deixaram a questão em branco, onde não é apresentada nenhuma tentativa de resolução da questão.	19%

Fonte: o autor

Ao analisarmos o quadro 22, é perceptível que esta questão é uma das que apresenta um dos menores índices de acertos. Apenas 5,6% do grupo respondeu esta questão corretamente. Fizeram uso de 10 (dez) estratégias diferentes para sua resolução, sendo as estratégias 3 (23%), 6 (19,6%) e 4 (9,5%) as mais utilizadas. Sendo assim, a seguir abordamos e analisamos com mais detalhes todas as estratégias adiante. Esta análise se faz necessária para buscarmos compreender o que os alunos entendem acerca do conceito aqui estudado.

Aproximadamente 187 (cento e oitenta e sete) alunos responderam a esta questão fazendo uso de algumas das estratégias já citadas. Em contrapartida, se trata da questão que apresenta o maior quantitativo (44) de alunos que a deixaram em branco. Acreditamos que, por se tratar de média ponderada – conceito considerado mais complexo para alguns -, tenha influenciado um maior quantitativo de alunos a deixá-la em branco.

Nesta questão, apenas 13 (treze) alunos apresentaram uma resposta correta. Destacamos, novamente, que esta questão apresenta o mesmo significado (S3) das questões Q4 e Q5a, em que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica. Já a propriedade desta questão tem a mesma propriedade que a Q5a, em que a soma dos desvios a partir da média é zero (P2).

A seguir, analisaremos as estratégias utilizadas pelo grupo para Q5b, no qual traremos alguns exemplos de respostas das questões que tiveram um maior percentual de utilização, bem como identificaremos a presença de justificativas ou não nas respostas. Neste sentido, começemos por um exemplo de resposta correta.

Figura 16 - Resposta correta da Q5b, com uso da média aritmética ponderada

b. Maria e Pedro também passam 1 hora ouvindo músicas todo fim de semana, já os outros 8 alunos passam 3 horas. Qual é a média de horas, que os 10 alunos dedicam no fim de semana com as duas atividades? Ouvir músicas e praticar esportes.

$$1+1=2$$

$$8 \times 3 = 24$$

$$2+24=26$$

$$48+26=74 \div 10 = 7,4 \text{ horas para ouvir músicas e praticar esportes.}$$

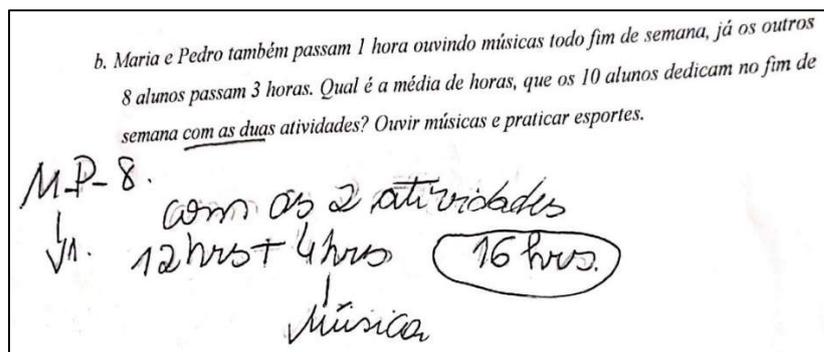
Fonte: dados da pesquisa

Em análise à **FIGURA 16**, vemos um exemplo de resposta correta em que o(a) aluno(a), segundo o **QUADRO 16**, fez uso da estratégia 1. Inicialmente, ele(a) calcula a quantidade de horas gastas pelo grupo (os 10 alunos) ouvindo música; em seguida, soma esse valor com 48 (quantidade de horas em que os 10 alunos praticam esportes no fim de semana), obtendo como resultado 74. Por fim, ela divide os 74 pela quantidade de dados (os 10 alunos) chegando ao resultado de 7,4 horas para ouvir músicas e praticar esportes. Este procedimento de resolução foi utilizado por 4,3% do grupo. Em outras palavras, aproximadamente 10 (dez) alunos fizeram uso deste procedimento. Coincidentemente, esses 10 alunos fazem parte do grupo que respondeu corretamente à questão Q5b.

Um pequeno grupo, mas não menos importante, fez uso da estratégia 2, em que apresenta uma resposta correta, mas não demonstra como chegou ao resultado. Este procedimento foi utilizado por aproximadamente 1,3% do grupo. Acreditamos que esse grupo também tenha certo nível de compreensão do conceito de média.

Na **FIGURA 17**, trazemos um exemplo de resposta incorreta, resultante da soma das quatro variáveis das horas presentes na Q5a e Q5b.

Figura 17 - Resposta incorreta da Q5b, com a soma das variáveis referentes às horas



Fonte: dados da pesquisa

Ao analisarmos a **FIGURA 17**, temos um exemplo de resposta incorreta, em que o(a) aluno(a) fez uso da estratégia 3, somando as 4 variáveis das horas presentes na Q5a e Q5b. Na resposta presente na figura, o(a) aluno(a) faz uso da 1 hora que Maria e Pedro ouvem música e soma com às 3 horas que os demais colegas ouvem música, chegando ao resultado de 4hrs. Em seguida, ela pega o resultado que obteve na questão Q5a e soma ao resultado da Q5b tendo como resultado 16hrs. Destacamos, que 17 alunos não realizam cálculos e apresentam apenas as 16hrs como resposta. Entre esses 17 alunos, 10 não responderam à questão Q5a.

Novamente vemos indícios de que provavelmente esse grupo de estudantes, compreende a média como apenas a soma das variáveis. Esse procedimento foi o mais utilizado na Q5b, em que aproximadamente 27,3% dos alunos a utilizaram. Isso corresponde a 63 (sessenta e três) alunos, que compreendem a média como soma de variáveis.

Segundo o **QUADRO 16**, os alunos que utilizaram a estratégia 4 apresentaram respostas incorretas e utilizaram como estratégia: somar as duas variáveis referentes à atividade de ouvir música. Neste procedimento, eles somaram a 1 hora (Maria e Pedro ouvem música) com às 3 horas (tempo gasto pelos 8 alunos ouvindo música), obtendo como resposta 4 horas. Este procedimento foi utilizado por 22 (vinte e dois) alunos.

Na estratégia 5, se observa uma resposta incorreta, por meio do qual fizeram uso do cálculo da média aritmética ponderada da atividade “ouvir música”. Isto é, os alunos calcularam a média de ouvir música corretamente, porém não somaram com a média de praticar esportes. Utilizaram esta estratégia 8 (oito) alunos, dos quais 7 (sete) responderam corretamente à Q5a. Acreditamos que a má interpretação da questão tenha levado ao erro.

Na figura a seguir, temos um exemplo de resposta incorreta, nos qual foram somadas as horas que o grupo (10 alunos) gastaram ao ouvir música e praticar esportes.

Figura 18 - Resposta incorreta da Q5b, com a soma das horas que o grupo (10 alunos) gastou ao ouvir música e praticar esportes

b. Maria e Pedro também passam 1 hora ouvindo músicas todo fim de semana, já os outros 8 alunos passam 3 horas. Qual é a média de horas, que os 10 alunos dedicam no fim de semana com as duas atividades? Ouvir músicas e praticar esportes.

$$\begin{array}{l} \text{Maria} - 1 \text{ hora} \\ \text{Pedro} - 1 \text{ hora} \\ \hline = 2 \text{ horas} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2 \text{ horas} \\ + 24 \text{ horas} \\ \hline = 26 \text{ horas} \end{array}$$

Outros 8 alunos passam = 3 horas - $8 \cdot 3 = 24 \text{ horas}$

$$\begin{array}{l} \text{Esportes} = 48 \text{ horas} \\ \text{música} = 26 \text{ horas} \\ \hline = \text{média de } 74 \text{ horas} \end{array}$$

Fonte: dados da pesquisa

Ao analisarmos a **FIGURA 18**, vemos um exemplo de resposta incorreta, em que o(a) aluno(a) somou quantas horas os 10 (dez) alunos gastaram praticando esportes e ouvindo música e, ao final, esqueceu de realizar a divisão pela quantidade de dados. O(a) aluno(a) realizou alguns procedimentos para chegar à resposta, tais como: I. A soma das horas que Maria e Pedro gastam ouvindo música, chegando ao resultado de 2; II. O cálculo, através de um produto, de quantas horas os 8 (alunos) passam ouvindo música, obtendo 24 horas; III. A soma do total de horas que o grupo (10 alunos) ouve música, tendo como resultado 26 horas; IV. Por fim, a soma do resultado das duas atividades, ouvir música e praticar esportes, chegando ao resultado de 74 (setenta e quatro) horas. Este procedimento foi utilizado por 45 (quarenta e cinco) alunos.

Na estratégia 7, os alunos apresentaram uma resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentados na própria questão. Este procedimento foi utilizado por 11 (onze) alunos, dos quais 7 (sete) alunos utilizaram a variável 3 e 4 (quatro) alunos utilizaram a variável 1.

Na estratégia 8, temos uma resposta incorreta, na qual os alunos utilizaram do seguinte procedimento: multiplicaram a variável 3 (horas) pela quantidade de alunos (10); e somaram este resultado com o resultado da Q5a. Este procedimento foi utilizado por aproximadamente 12 (doze) alunos, os mesmos que o utilizaram na Q5a.

Por fim, quanto à última estratégia utilizada na Q5b, os alunos apresentaram respostas incorretas, com uso de valores não relacionados com a situação proposta. Alguns exemplos de

respostas utilizadas por eles foram: 144 horas; 175 horas, dentre outros. Ao total, 7 (sete) alunos responderam desta forma.

Ao finalizarmos a análise desta questão (Q5), vemos que os alunos que responderam incorretamente – a maioria, cerca de 90% do total -, apresentaram dificuldades, seja na compreensão do conceito de média ou na realização do cálculo da média ponderada. Na questão Q5b, que era necessário a soma das médias, vimos que os alunos compreendem a necessidade da soma, mas não conseguem desenvolver corretamente a média ponderada. Estes dados, assemelham-se aos da pesquisa de Mayén et al (2007), que constatou que os alunos não conseguiam desenvolver o cálculo da média ponderada corretamente.

Como mencionado anteriormente, as questões Q4 e Q5 apresentavam o mesmo significado (S3) e tinham propriedades distintas, onde a Q4 tinha como propriedade que a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada (P7) e a Q5 trazia como propriedade que a soma dos desvios a partir da média é zero (P2). Como já analisamos, foi perceptível a discrepância entre os percentuais de acertos, em que a Q4 possui um percentual de 67,5% acertos e a Q5 (Q5a e Q5b) de 10% e 5,6%, respectivamente. Nesta questão, reiteramos nossa crença de que as propriedades influenciaram mais que o significado no nível de desempenho dos estudantes. Ao mudar a propriedade o percentual de acertos cai drasticamente.

Em dados gerais, após a análise vemos que muitos alunos ficam presos ao algoritmo da média e que, ao se depararem com situações distintas, não conseguem desenvolver o cálculo. Neste sentido, se faz necessária a sistematização do ensino e da aprendizagem do conceito de média, sendo fundamental a abordagem dos diferentes significados e propriedades para a compreensão do conceito de média aritmética.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Educação Estatística é importante para a sociedade em que vivemos por buscar constantemente estudar e entender como a sociedade ensina e aprende estatística, abrangendo, assim, os aspectos cognitivos do ensino e da aprendizagem da estatística e o desenvolvimento de metodologias e materiais para o ensino, visando o desenvolvimento do letramento estatístico.

É comum, diariamente, nos depararmos com inúmeros dados estatísticos, com informações acerca da sociedade, da economia, os quais vinculam várias informações em forma de gráficos, tabelas e vários outros meios de representação. Um exemplo atual é a pandemia da COVID-19, diariamente veiculada pelos meios de comunicação por meio de gráficos, percentuais de aumento, comparações estatísticas do quantitativo de casos entre cidades, estados e países, dentre outras informações. Necessita-se, assim, de uma população que saiba ler e compreender esses dados, para não se iludir com dados errados.

Neste sentido, surge a necessidade de que a sociedade saiba analisar, interpretar e compreender tais informações para que possa tomar decisões diariamente, de que a população se torne letrada estatisticamente para que os seus cidadãos consigam fazer análises com mais criticidade sobre os dados que lhe são apresentados.

Considerando a necessidade de uma população mais crítica, é necessário que a sociedade tenha uma apropriação de conceitos elementares da estatística na qual, os quais, segundo documentos (BNCC, 2017; 2018) que norteiam a Educação Básica, deve ocorrer desde os anos iniciais de escolarização. Dentre os conceitos que devem ser trabalhados, está o da média aritmética, utilizado habitualmente em vários contextos da sociedade como, por exemplo, nas escolas, através das notas dos alunos.

Acreditamos que a média constitui um conceito complexo. Movidos por essas inqueitações, o presente estudo investigou como o conceito de média aritmética é compreendido por estudantes do 3º ano do Ensino Médio. Tomando como base a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gerárd Vergnaud (1988; 1991), possuindo diferentes propriedades (STRAUSS; BICHLER, 1988) e significados (BATANERO, 2000).

Com relação aos significados, Batanero (2000) elenca quatro significados, sendo eles: I. Estimativa de uma quantidade desconhecida na presença de erros de medição – cálculo da melhor estimativa de um valor desconhecido; II. Necessidade de obter um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme; III. Servir de elemento representativo de um conjunto de dados, cuja distribuição é simétrica; IV. Valor mais provável quando aleatoriamente tomamos um elemento de uma população. A autora argumenta que o campo composto pelos problemas,

primeiro os práticos e mais tarde teóricos (no sentido da formalização, generalização), tem levado a definição do conceito de média à identificação de suas propriedades.

Referente às propriedades, para a construção do conceito de média são essenciais as propriedades elencadas por Strauss e Bichler (1988). Tais propriedades são compreendidas em três aspectos, sendo eles: aspecto estatístico, aspecto abstrato e aspectos representativos. Vejamos as propriedades a seguir: I. A média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo \leq média \leq valor máximo); II. A soma dos desvios a partir da média é zero; III. A média é influenciada por cada um e por todos os valores; IV. A média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem; V. A média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (por exemplo, o número médio de filhos por casal é de 2,3); VI. O cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos e VII. A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada. Em termos espaciais, a média é o valor que está mais próximo de todos os valores.

Nesse sentido, desenvolvemos um instrumento diagnóstico constituído por cinco questões da literatura, nas quais estavam envolvidos os significados e propriedades elencados por Batanero (2000) e Strauss e Bichler (1988). Nossa pesquisa envolveu 231 (duzentos e trinta e um) alunos do 3º ano do Ensino Médio. A pesquisa foi realizada no decorrer do ano de 2019 em 5 (cinco) escolas que fazem parte da Gerência Regional de Educação – Mata Centro (GRE-Mata Centro) da rede pública de ensino do estado de Pernambuco.

Neste contexto, realizamos a análise do desempenho do grupo investigado com relação às propriedades e significados do conceito de média e as diferentes estratégias que eles apresentaram na resolução das cinco questões que envolviam o conceito de média aritmética.

Ao analisarmos os conhecimentos sobre o conceito de média aritmética dos estudantes do 3º ano do Ensino Médio oriundos da (GRE-Mata Centro) do estado de Pernambuco percebemos que possivelmente as escolas que fizeram parte desta pesquisa, no que diz respeito ao conceito de média, têm dado uma importância maior para o cálculo do algoritmo da média, deixando de lado questões que façam os alunos refletirem, contribuindo, assim, para o mau desempenho dos alunos nesta pesquisa. Esperávamos que este grupo de estudantes não ficasse vinculado apenas ao cálculo e ao resultado, mas que conseguisse compreender o raciocínio, as propriedades e significados envolvidos em cada questão. Para nossa surpresa, o resultado foi o oposto. Acreditamos que questões que envolvam as propriedades e significados, contribuam para que os alunos tenham um aprofundamento no conhecimento desde conceito e, assim, colabore para que eles sejam mais reflexivos e críticos, de acordo com o enfatizado pela BNCC

no que tange à importância do aprofundamento da reflexão crítica acerca das várias áreas de conhecimentos (BRASIL, 2018, p.64)

Em relação ao desempenho do grupo investigado, observou-se que nenhum estudante respondeu corretamente a todas as questões que compunham o instrumento diagnóstico. Levando isso em consideração, a média aritmética da quantidade de acertos foi de 2,23 pontos, indicando que, em média, cada estudante acertou 2,23 questões das 7 (sete) possíveis.

Dado o resultado da média de acertos, buscamos analisar se havia diferença estatisticamente significativa entre os grupos (cidades e escolas) que fizeram parte da pesquisa. Para isto utilizamos um (T) teste por grupo e constatamos que não houve diferença estatisticamente significativa entre eles.

Ao analisarmos os significados e propriedades, percebemos que o S1- média obtida com a estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida como a P3 – é influenciada por cada um e por todos os valores. Foram os que apresentaram o menor índice de acertos, apenas 0,4% acertaram. Consideramos, assim, que esse significado e propriedade foram um dos mais complexos, se levarmos em consideração o quantitativo de erros.

A segunda questão do instrumento diagnóstico também apresentou um baixo índice de acertos, apenas 8,7% do grupo investigado apresentou uma resposta correta. Trata-se do significado (S2) e da propriedade (P1), que destaca que a média aritmética não pode estar localizada acima do valor máximo ou abaixo do valor mínimo.

Na questão Q3, dividida em Q3a e Q3b, requeria-se um entendimento de média aritmética enquanto uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme (S2). Na Q3a envolvia-se a ideia de que o cálculo da média leva em consideração todos os valores, inclusive os nulos (P6). Já a Q3b se relacionava à propriedade em que média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (P5). Considerando os percentuais de acertos, tiveram respectivamente 87,5% e 44,2%.

Esta questão (Q3), como vimos, tem o mesmo significado e propriedades diferentes e apresenta uma relevante discrepância se considerado o percentual de acertos. Acreditamos que esta discrepância se deu pelo fato de a Q3a ter como resultado um valor exato e estar relacionada à propriedade P6, enquanto que a Q3b possuía como resultado um número com decimais e envolvia a P5. Portanto, vemos que, neste caso, as propriedades influenciaram no nível de desempenho dos estudantes, mais do que o significado. Apesar de apresentarem o mesmo significado, ao mudarmos a propriedade, o desempenho dos alunos caiu aproximadamente 50%.

A questão Q4 apresentou 67,5% de acertos, um desempenho um pouco melhor, se comparado às outras questões. Se considerarmos o significado e a propriedade, vemos que S3 - a média - serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica e a (P7) que a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada, apresentam um desempenho razoavelmente bom.

Já a questão Q5 que tinha o mesmo significado (S3) da questão Q4, foi dividida em duas partes, sendo elas a Q5a e Q5b, mas apresentando como propriedade a (P2), que diz que a soma dos desvios a partir da média é zero. Neste contexto, os percentuais de acertos foram 10% e 5,6%, respectivamente.

Ao analisarmos a compreensão dos estudantes sobre as propriedades do conceito de média aritmética elencadas por Strauss e Bichler, 1998, percebemos que os alunos apresentam dificuldades em cinco delas. Compreendemos, também, que as propriedades influenciam mais que os significados no nível de desempenho dos estudantes. Um exemplo é nas questões Q4 e Q5, que apresentavam o mesmo significado (S3), porém com propriedades distintas, em que a Q4 tinha como propriedade a (P7) e a Q5 trazia como propriedade a (P2). A discrepância entre os percentuais de acertos é alarmante. Na Q4 temos 67,5% de acertos e na Q5 (Q5a e Q5b), 10% e 5,6% de acertos, respectivamente, confirmando o que já vimos na Q3 - as propriedades influenciaram mais que o significado no nível de desempenho dos estudantes -.

Ao analisamos as estratégias utilizadas pelos alunos percebemos que, em sua maioria, ao falar de média eles conseguem realizar o cálculo “somar todos os números e após dividir pela quantidade de termos”. Mas acabam errando por não compreenderem corretamente as propriedades e significados que envolvem este conceito. Tomemos como exemplo o fato de que os alunos, ao se depararem com questões que envolvem o significado S2 - necessidade de conhecer o que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição -, tendem a realizar o cálculo da média sem refletir as possíveis respostas da questão.

Os estudantes tendem a somar todas as variáveis e não realizam mais cálculo e isso é resultado da má compreensão dos significados e propriedades. Esse dado é um indicador de que talvez o conceito de média não tenha sido trabalhado de forma sistemática com os alunos. Possivelmente, se eles tivessem uma aprendizagem satisfatória, os resultados de sua compreensão poderiam ser outros.

Ao analisarmos a compreensão dos estudantes sobre os significados do conceito de média aritmética, percebemos que, dos quatro significados elencados por Batanero (2000), os alunos apresentam dificuldades em três deles, sendo os mais complexos o S1 - estimativa de

uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida - e o S4 - necessidade de conhecer o que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição-. Novamente, ressaltamos que, nesses casos, os alunos ficam presos ao cálculo e não conseguem desenvolver um raciocínio de resolução correto.

Em suma, destacamos que as propriedades com as quais os alunos apresentaram uma maior dificuldades foram as seguintes: a média é influenciada por cada um e por todos os valores (P3); a média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo \leq média \leq valor máximo (P1); a soma dos desvios a partir da média é zero ($\sum (X_i - \text{média}) = 0$)(P2); e, por fim, que a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (P5). Já as dificuldades apresentadas nos significados, em nossa pesquisa, estão diretamente ligadas às propriedades.

Ao relacionar as compreensões dos estudantes sobre as propriedades e significados do conceito de média aritmética, percebemos que em todas as questões um grupo de alunos conhece o algoritmo da média e, entre os seus membros, alguns conseguem calcular, mas através de suas respostas não apresentam conhecimento das propriedades e significados que estão envolvidos nas questões, tornando-se um conhecimento insuficiente para determinadas situações. Um exemplo se deu na questão Q3b, em que se tinha como resposta correta um número com decimais e 40,3% dos alunos não compreendem que a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física. Percebemos que, em determinadas situações, através das dificuldades dos alunos que fizeram parte desta pesquisa, o estudo do conceito de média está sendo insuficiente, fazendo-se necessário que se tenha uma atenção especial para este conceito, dada a sua importância.

A partir desses resultados, evidenciamos a importância da abordagem dos diferentes significados e propriedades na compreensão do conceito de média aritmética e acreditamos que há possibilidades didáticas possíveis para o ensino e aprendizagem da média aritmética nas escolas, e, de forma mais ampla, para o letramento estatístico dos estudantes. É necessária uma sistematização de ensino em toda Educação Básica acerca deste conceito.

Compreendemos a necessidade de os alunos trabalharem com situações problemas de construção, levando-os a refletir para se obter a resposta. Acreditamos que, através de situações-problemas que motivem a reflexão, o interesse do aluno e a argumentação contribuirão para uma compreensão mais sistematizada do conceito de média aritmética. Para tanto, acreditamos que é necessário um apoio aos professores, para desenvolverem métodos e situações problemas que contribuam para uma melhor compreensão da média.

Ao concluirmos esse estudo, reforçamos a discussão sobre a formação inicial e continuada de professores no campo da Educação Estatística, possibilitando o aprofundamento teórico acerca deste conceito. Desta forma, os resultados obtidos apontam alguns possíveis caminhos para se buscar a sistematização do ensino deste conceito.

Por fim, se faz necessário que outras pesquisas sejam realizadas em outros níveis de ensino, como a de professores em formação, a fim de saber se os professores que estão em formação compreendem o conceito de média aritmética. De igual maneira, em muito podem contribuir pesquisas realizadas junto aos docentes da Educação Básica, buscando aferir se os mesmos compreendem os significados e propriedades envolvidos na média. Por fim, uma última proposta para pesquisas futuras buscaria compreender se há diferença estatisticamente significativa na compreensão do conceito de média entre alunos da Educação Básica e graduandos em áreas afins da Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, C. C. **Análise de um instrumento de letramento estatístico para o ensino fundamental II**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

AMARAL, F. M. **Validação de sequência didática para (re)construção de conhecimentos estatísticos por professores do Ensino Fundamental**. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

ANJOS, D.; GITIRANA, V. Exploração do conceito de média nos em livros didáticos das séries finais do Ensino Fundamental. *In: 2º SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2008. **Anais [...]**. Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2008.

BARBETTA, P. A. **Estética aplicada às Ciências Sociais**. Florianópolis: Editora da UFSC, 2014.

BARIZON, E. **Validação de uma escala de autorregulação de estratégias de aprendizagem estatística de estudantes da terceira série do Ensino Médio de São Paulo**. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

BATANERO, C. **Didáctica de la Estadística**. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, 2001.

BATANERO, C. *et al.* Overview: challenges for teaching statistics in school mathematics and preparing mathematics teachers. *In: BATANERO, C. et al. (eds.). Teaching Statistics in School Mathematics - Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study*. London: Springer, 2011, p. 407- 418.

BATANERO, C. Los retos de la cultura estadística. *In: Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*. Buenos Aires, 2002. Disponível em: <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/CULTURA.pdf>. Acesso em: 20 set. 2018.

BATANERO, C. Significado y comprensión de las medidas de posición central. **UNO**, v. 25, p. 41-58, 2000. Disponível em: <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/isboa.pdf>. Acesso em: 09 set. 2018.

BAYER, A. *et al.* **A Estatística e sua história**. 2009. Disponível em: <https://notasdeaula.files.wordpress.com/2009/08/estatistica-e-sua-historia.pdf>. Acesso em: 05 set. 2018.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base: Ensino Fundamental**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental>. Acesso em: 05 set. 2018

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** - Educação é a Base: Ensino Médio. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio>. Acesso em: 05 set. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Acesso em: 05 set. 2018.

CABO, B.; BATANERO, C. Significados de la media em los libros de textos de secundário. **Ensenanza de las ciências**, v. 22, n. 1, p. 5-18, 2004.

CAETANO, S. **Introduzindo a estatística nas séries iniciais do ensino fundamental a partir de material manipulativo**: uma intervenção de ensino. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

CAMPOS, C. R. *et al.* **Educação estatística**: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

CARVALHO, J. E. F. **Média aritmética nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

CAZORLA, I. M. **A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos**. 2002. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, 2002.

CAZORLA, I. M. *et al.* A Leitura e interpretação de gráficos e tabelas no ensino fundamental e médio. *In: 2º SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2008. **Anais [...]**. Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2008.

COBELLO, S. L. **Letramento estatístico**: análise e reflexões sobre as tarefas contidas no material didático da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo para o Ensino Médio. 2018. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba-SP, 2018.

COBO, B.; BATANERO, C. Razonamiento numérico en problemas de promedios. **Suma**, n. 45, 79-86, 2004.

CONTI, K. C. O estudo da estatística num contexto colaborativo: o gráfico de setores. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v.9, n.2, p. 265-282, 2018.

DAMIN, W. **Ensino de estatística para os anos finais do ensino fundamental**. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2015.

ESTRADA, A. *et al.* Un estudio comparativo de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos. **UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 24, p. 45-66, dez. 2010.

EUGÊNIO, R. da S. **Exploração sobre a média no software tinkerplots 2.0 por estudantes do ensino fundamental**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

FARIAS, A. *et al.* **Introdução à Estatística**. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 2003.

FORZA, C. Survey Research in Operations Management: a Process-based Perspective. **International Journal of Operations & Production Management**, v. 22, n. 2, p. 152-194, 2002.

FREIRE, P. **Educação e mudança**. 27 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2003.

GAL, I. Adult's Statistical literacy: Meanings, Components, Responsibilities. **International Statistical Review**, n. 70, 2002.

GARRET, A. J; CRUZ, J. A. G. Algunos resultados sobre promedios con estudiantes en luanda y Tenerife. *In: XII JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS*, 2007. **Actas [...]**. Albacete: Universidad de Castilla-La Mancha. Albacete, 2007, p. 683-690. Disponível em: https://jagcruz.webs.ull.es/Articulos/Promedios_JAEM_05.pdf. Acesso em: 25 set. 2018.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2007.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 4 ed. São Paulo: Atlas, 1995.

GOULART, A. COUTINHO, C. Q. S. **Letramento Estatístico e o Exame Nacional de Ensino Médio**. *In: XIV CIAEM*. Chiapas, México, 2015. Disponível em: http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/980/572. Acesso em: 25 ago. 2018.

IGNÁCIO, S. A. Importância da estatística para o processo de conhecimento e tomada de decisão. Revista paranaense de desenvolvimento. *In: IGNÁCIO, S. A. Nota Técnica Ipardes*, n. 6, Curitiba, out. 2010. Disponível em: <http://www.ipardes.pr.gov.br/ojs/index.php/revistaparanaense/article/view/89/645>. Acesso em 25 ago. 2018.

LEMOS, M. P. F. O conhecimento dos professores do 1º ao 5º ano do ensino fundamental sobre medidas de tendência central. *In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2016, São Paulo-SP. **Anais [...]**. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/4635_3089_ID.pdf. Acesso em: 02 set. 2018.

LIMA, R. **Introduzindo o conceito de média aritmética na 4ª série do Ensino Fundamental usando o ambiente computacional**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

LOPES, C. E. A educação estatística no currículo de matemática: um ensaio teórico. *In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED 33*, 2010, Caxambu-MG. **Anais [...]**. Caxambu: AMPED, 2010a.

LOPES, C. E. O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil. 2003. 281 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas (SP), 2003.

LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Cad. Cedes**, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008 Disponível em: http://www.riopomba.ifsudestemg.edu.br/dcc/dmafe/subsistemas/professor/material/2081973108_CELI%20ESPASANDIN%20LOPES.pdf. Acesso em: 03 set. 2018.

LOPES, C. E. Os desafios para educação estatística no currículo de matemática. *In*: LOPES, C. E. *et al.* (orgs.). **Estudos e reflexões em educação estatística**. Campinas-SP: Mercado de Letras, 2010.

LOPES, C.A.E. **A probabilidade e a estatística no ensino fundamental**: uma análise curricular. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

MAGINA, S. *et al.* Concepções e concepções alternativas de média: um estudo comparativo entre professores e alunos do Ensino Fundamental. **Educar em Revista**, Curitiba n. especial 2, p. 59-72, 2010. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/er/nspe2/04.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2020.

MAGINA, S. *et al.* **Repensando adição, subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. 2 ed. São Paulo: PROEM, 2001.

MARCOLINO, P. R. F. **Aprendizagem significativa na Educação Estatística**: uma análise da compreensão do conceito de média aritmética com estudantes do 1º ano do Ensino Médio. 2017. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2017.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 4 ed. São Paulo: Atlas, 1991.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Metodologia do trabalho científico**: procedimentos básicos, pesquisa bibliografia, projeto e relatório, publicações e trabalhos científicos. 6 ed. São Paulo: Atlas, 2006.

MATTAR, F. N. **Pesquisa de marketing**. 4 ed. São Paulo: Atlas, 2001.

MATTAR, F. N. **Pesquisa de marketing**: metodologia, planejamento. 3 ed. São Paulo: Atlas, 1996.

MAYÉN, S. *et al.* Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. **Unión**, v. 9, p. 187-201, 2007.

MELO, M. C. M. **Fazendo Média**: compreensões de alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

MENEZES, J. E. O tratamento da informação na educação matemática: um aspecto da leitura de mundo. *In: 2º SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2008. **Anais [...]**. Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2008.

MONTEIRO, C. E. F. Letramento estatístico: conhecimento fundamental para a compreensão do mundo na contemporaneidade. *In: IX ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2010. **Anais [...]**. João Pessoa, 2010.

MOREIRA, H; CALEFFE, L. G. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. 2 ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MOREIRA, M. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a aplicação nessa área. **Investigações no Ensino de Ciências**, v. 7, n. 1, p. 7-29, 2002. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/569/361>. Acesso em: 08 set. 2018

OLIVEIRA, M. M. de. **Como fazer pesquisa qualitativa**. Recife: Bagaço, 2005.

PEREIRA, R. S. G. **O ajuste de funções à luz da Modelagem Matemática**. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Tecnologia) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa - PR, 2011.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: matemática**. Recife: SE, 2008. Disponível em: <http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/750/bccmat.pdf>. Acesso em: 01 set. 2018.

POLLATSEK, A. *et al.* Concept or computation: students' understanding of the mean. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 191-204, 1981.

PONTE, J. P. Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. *In: COONEY, T. J. e LIN, F. L. (eds.). Making sense of mathematics teacher education*. Dordrecht. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001, p. 53-72.

REZENDE, V. **Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino**. 2013. Tese (Doutorado em Educação para Ciência e Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

RÍO, A. J. M. **Comprensión del concepto de media aritmética en los estudiantes de educación secundaria obligatoria**. 2017. Dissertação (Mestrado em Didática da Matemática) - Universidad de Granada, Espanha, 2017.

ROESCH, S. M. A. **Projetos de estágio e de pesquisa em administração: guia para pesquisas, projetos, estágios e trabalhos de conclusão, dissertações e estudos de caso**. São Paulo: Atlas, 1996.

SCHNEIDER, J. C.; ANDREIS, R. F. **Contribuições do ensino de estatística na formação cidadã do aluno da Educação Básica**. 2013. Disponível em:

http://www.uniedu.sed.sc.gov.br/wp-content/uploads/2014/04/juliana_schneider.pdf. Acesso em: 01 set. 2018.

SELVA, A.; BORBA, R. O uso de diferentes representações na resolução de problemas de divisão inexata. *In: 28ª REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO*, 2005. **Anais [...]** – GT 19. Caxambú-MG, : ANPEd, 2005.

SILVA, C. B.; COUTINHO, C. Q. S. O Nascimento da Estatística e sua relação com a Teoria da Probabilidade. **Integração**, São Paulo, ano XI, n. 41, p. 191-196, abr.-jun. 2005.

SILVA, D. R. da. **Psicologia da Educação e Aprendizagem**. Associação Educacional Leonardo da Vinci (ASSELI). Indaial: ASSELI, 2007.

SILVA, F. S. *et al.* Um cenário sobre a pesquisa em educação estatística no boletim de educação matemática – BOLEMA, de 2006 até 2015. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 58 ago. 2017. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a08>. Acesso em: 02 fev. 2019.

SKOSVMOSE, O. **Educação Matemática Crítica: a questão da democracia**. Campinas: Papirus, 2001.

STELLA, C. A. **Um estudo sobre o conceito de média com alunos do ensino médio**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

STRAUSS, S; BICHLER, E. The development of children's concepts of the arithmetic average. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 19, 64-80, 1988.

THIOLLENT, M. (2009). **Metodologia de Pesquisa-ação**. São Paulo: Saraiva.

VERGARA, S. C. **Projetos e relatórios de pesquisa em administração**. São Paulo: Atlas, 2004.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. *In: BRUN, Jean (dir.)*. **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 155–191.

VERGNAUD, G. Concepts et schème dans une théorie opératoire de la représentation. **Psycho-logie Française**, n. 30, p. 245 a 252, 1985.

VERGNAUD, G. The nature of mathematical concepts. *In: NUNES, T.; BRYANT, P. (eds.)*. **Learning and teaching mathematics, an international perspective**. Hove (East Sussex), Psychology Press Ltd, 1997.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

WATSON, J. What's the point?. **The Australian Mathematics Teacher**, v. 52, n. 2, p. 40-43, 1996.

APÊNDICE A: CARTA DE ANUÊNCIA**SUBSTITUIR O CABEÇALHO PELO DA INSTITUIÇÃO ONDE A PESQUISA SERÁ REALIZADA****CARTA DE ANUÊNCIA**

Declaramos para os devidos fins, que aceitaremos (o) a pesquisador (a) Plínio Rubens de Farias Marcolino, a desenvolver o seu projeto de pesquisa **Compreensões de estudantes do 3º ano do Ensino Médio sobre o conceito de média aritmética**, que está sob a coordenação/orientação do (a) Prof. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho cujo objetivo é investigar como o conceito de média aritmética é compreendido, por alunos do 3º ano do Ensino Médio considerando diferentes propriedades e significados, na Escola Técnica Estadual José Joaquim da Silva Filho.

Esta autorização está condicionada ao cumprimento do (a) pesquisador (a) aos requisitos das Resoluções do Conselho Nacional de Saúde e suas complementares, comprometendo-se utilizar os dados pessoais dos participantes da pesquisa, exclusivamente para os fins científicos, mantendo o sigilo e garantindo a não utilização das informações em prejuízo das pessoas e/ou das comunidades.

Antes de iniciar a coleta de dados o/a pesquisador/a deverá apresentar a esta Instituição o Parecer Consubstanciado devidamente aprovado, emitido por Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos, credenciado ao Sistema CEP/CONEP.

Cidade em ____/____/_____.

Nome/assinatura e **carimbo** do responsável onde a pesquisa será realizada

APÊNDICE B: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO – CENTRO ACADÊMICO DO
AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA****TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

(PARA MAIORES DE 18 ANOS OU EMANCIPADOS)

Convidamos o (a) Sr. (a) para participar como voluntário (a) da pesquisa **Compreensões de estudantes do 3º ano do Ensino Médio sobre o conceito de média aritmética**, que está sob a responsabilidade do pesquisador Plínio Rubens de Farias Marcolino, residente à rua Comendador Miguel Gastão de Oliveira, CEP 55641-440/ Fone: (81) 9 9972-8021/ E-mail: pliniorubens@hotmail.com. A mesma está sob orientação de José Ivanildo Felisberto de Carvalho. Telefone: 81 98746379E-mail: ivanfcar@hotmail.com.

Todas as suas dúvidas podem ser esclarecidas com o responsável por esta pesquisa. Apenas quando todos os esclarecimentos forem dados e você concorde com a realização do estudo, pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma via lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Você estará livre para decidir participar ou recusar-se. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema, desistir é um direito seu, bem como será possível retirar o consentimento em qualquer fase da pesquisa, também sem nenhuma penalidade.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

- A pesquisa tem como objetivo principal analisar a compreensão de estudantes do 3º ano do Ensino Médio sobre o conceito de média aritmética. Será aplicada um instrumento diagnóstico composto por seis questões de Matemática em quatro escolas da cidade de Gravatá e Chã-Grande Pernambuco.
- Para a coleta de dados, o pesquisador fará uso de: Um instrumento diagnóstico composta por seis questões de Matemática, onde, buscamos verificar a compreensão do grupo investigado em relação as propriedades e significados do conceito de média. Ou seja, os

alunos irão responder seis questões envolvendo média aritmética, o instrumento diagnóstico (as seis questões) será do tipo: *Algumas crianças levam doces para as aulas. André leva 5, Maria 8, José 6, Carmen 1 e Daniel não leva nenhum. Qual é a média de doces por aluno?*

- Para esta pesquisa, será necessário um único encontro, que ocorrerá na sala de aula dos estudantes. Onde, explicaremos a eles do que tratasse a pesquisa e da importância deles para que seja realizada. Para resolução das questões, os alunos contarão com lápis caneta e borracha, não sendo permitido consultas. Os alunos terão uma aula (50 minutos) para realização das questões. Caso haja dificuldades na leitura das questões, o pesquisador poderá ler em voz alta para que os alunos entendam o que o enunciado traz.
- **RISCOS diretos** para o voluntário: Possibilidade de danos psíquicos ou sociais em decorrência da relação entre os estudantes e com o pesquisador. Por se tratar de uma pesquisa cujos dados serão coletados através instrumento diagnóstico composta por seis questões o estudante poderá se sentir desconfortável ou constrangido por responder essas questões com o pesquisador presente, dado que o pesquisador é uma pessoa estranha para o estudante. Outro risco, deixá-lo desconfortável ao achar que irá ser avaliado. Para tanto, atentamos que a todo momento será deixado claro que se trata de um estudo onde todas as informações pessoais sobre o estudante, tais como nome, idade etc., serão mantidas em sigilo e apenas terão acesso à essas informações os pesquisadores.
- **BENEFÍCIOS diretos e indiretos:** contribui efetivamente com a pesquisa referente a Educação Estatística, onde, proporcionara a professores e pesquisadores uma compreensão de como se está o entendimento do conceito de média por parte dos alunos pesquisados. Contribuir mais especificamente nas escolas que fazem parte da Gerência Regional de Ensino- Mata Centro (GRE-Mata Centro) do estado de Pernambuco.

Todas as informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa, através do instrumento diagnóstico, ficarão armazenados em uma pasta de arquivos, sob a responsabilidade do pesquisador, no endereço acima informado, pelo período de mínimo 5 anos.

Nada lhe será pago e nem será cobrado para participar desta pesquisa, pois a aceitação é voluntária, mas fica também garantida a indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial. Se houver necessidade, as despesas para a sua participação serão assumidas pelos pesquisadores (ressarcimento de transporte e alimentação).

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cepccs@ufpe.br).**

(assinatura do pesquisador)

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO VOLUNTÁRIO (A)

Eu, _____, CPF _____, abaixo assinado, após a leitura (ou a escuta da leitura) deste documento e de ter tido a oportunidade de conversar e ter esclarecido as minhas dúvidas com o pesquisador responsável, concordo em participar do **Compreensões de estudantes do 3º ano do Ensino Médio sobre o conceito de média aritmética**, como voluntário (a). Fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pelo(a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação. Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade.

Impressão digital (opcional)

Local e data _____

Assinatura do participante: _____

Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e o aceite do voluntário em participar (02 testemunhas não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura:

APÊNDICE C: TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO – CENTRO ACADÊMICO DO
AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA****TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO****(PARA MENORES DE 7 a 18 ANOS)**

OBS: Este Termo de Assentimento para o menor de 7 a 18 anos não elimina a necessidade da elaboração de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido que deve ser assinado pelo responsável ou representante legal do menor.

Convidamos você _____, após autorização dos seus pais ou responsáveis para participar como voluntário da pesquisa: **Compreensões de estudantes do 3º ano do Ensino Médio sobre o conceito de média aritmética**. Esta pesquisa é da responsabilidade do pesquisador Plínio Rubens de Farias Marcolino, residente à rua Comendador Miguel Gastão de Oliveira, CEP 55641-440/ Fone: (81) 9 9972-8021/ E-mail: plniorubens@hotmail.com. A mesma está sob orientação de José Ivanildo Felisberto de Carvalho. Telefone: 81 98746379E-mail: ivanfcar@hotmail.com.

Você será esclarecido (a) sobre qualquer dúvida com o responsável por esta pesquisa. Apenas quando todos os esclarecimentos forem dados e você concorde com a realização do estudo, pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma via deste termo lhe será entregue para que seus pais ou responsável possam guarda-la e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Você estará livre para decidir participar ou recusar-se. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema, desistir é um direito seu. Para participar deste estudo, um responsável por você deverá autorizar e assinar um Termo de Consentimento, podendo retirar esse consentimento ou interromper a sua participação em qualquer fase da pesquisa, sem nenhum prejuízo.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

- A pesquisa tem como objetivo principal analisar a compreensão de estudantes do 3º ano do Ensino Médio sobre o conceito de média aritmética. Será aplicada um instrumento diagnóstico composto por seis questões de Matemática em quatro escolas da cidade de Gravatá e Chã-Grande Pernambuco.
- Para a coleta de dados, o pesquisador fará uso de: Um instrumento diagnóstico composta por seis questões de Matemática, onde, buscamos verificar a compreensão do grupo investigado em relação as propriedades e significados do conceito de média. Ou seja, os alunos irão responder seis questões envolvendo média aritmética, o instrumento diagnóstico (as seis questões) será do tipo: *Algumas crianças levam doces para as aulas. André leva 5, Maria 8, José 6, Carmen 1 e Daniel não leva nenhum. Qual é a média de doces por aluno?*
- Para esta pesquisa, será necessário um único encontro, que ocorrerá na sala de aula dos estudantes. Onde, explicaremos a eles do que tratasse a pesquisa e da importância deles para que seja realizada. Para resolução das questões, os alunos contarão com lápis caneta e borracha, não sendo permitido consultas. Os alunos terão uma aula (50 minutos) para realização das questões. Caso haja dificuldades na leitura das questões, o pesquisador poderá ler em voz alta para que os alunos entendam o que o enunciado traz.
- **RISCOS diretos** para o voluntário: Possibilidade de danos psíquicos ou sociais em decorrência da relação entre os estudantes e com o pesquisador. Por se tratar de uma pesquisa cujos dados serão coletados através instrumento diagnóstico composta por seis questões o estudante poderá se sentir desconfortável ou constrangido por responder essas questões com o pesquisador presente, dado que o pesquisador é uma pessoa estranha para o estudante. Outro risco, deixá-lo desconfortável ao achar que irá ser avaliado. Para tanto, atentamos que a todo momento será deixado claro que se trata de um estudo onde todas as informações pessoais sobre o estudante, tais como nome, idade etc., serão mantidas em sigilo e apenas terão acesso à essas informações os pesquisadores.
- **BENEFÍCIOS diretos e indiretos:** contribui efetivamente com a pesquisa referente a Educação Estatística, onde, proporcionara a professores e pesquisadores uma compreensão de como se está o entendimento do conceito de média por parte dos alunos

pesquisados. Contribuir mais especificamente nas escolas que fazem parte da Gerência Regional de Ensino- Mata Centro (GRE-Mata Centro) do estado de Pernambuco.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa através do instrumento diagnóstico, ficarão armazenados em uma pasta de arquivos, sob a responsabilidade do pesquisados, no endereço acima informado, pelo período de mínimo 5 anos, após o término da pesquisa.

Nem você e nem seus pais / responsáveis pagarão nada para você participar desta pesquisa, também não receberão nenhum pagamento para a sua participação, pois é voluntária. Se houver necessidade, as despesas (deslocamento e alimentação) para a sua participação e de seus pais serão assumidas ou ressarcidas pelos pesquisadores. Fica também garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial.

Este documento passou pela aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE que está no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cepccs@ufpe.br).**

Assinatura do pesquisador (a)

ASSENTIMENTO DO(DA) MENOR DE IDADE EM PARTICIPAR COMO VOLUNTÁRIO(A)

Eu, _____, portador (a) do documento de Identidade _____, abaixo assinado, concordo em participar do estudo **Compreensões de estudantes do 3º ano do Ensino Médio sobre o conceito de média aritmética**, como voluntário (a). Fui informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, o que vai ser feito, assim como os possíveis riscos e benefícios que podem acontecer com a minha participação. Foi-me garantido que posso desistir de participar a qualquer momento, sem que eu ou meus pais precise pagar nada.

Local e data _____

Assinatura do (da) menor: _____

Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar (02 testemunhas não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura: