



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Micael Estevão da Silva

Teoria dos Jogos e Dinâmica de Populações

Recife

2020

Micael Estevão da Silva

Teoria dos Jogos e Dinâmica de Populações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise

Orientador(a): Dr. César Augusto Rodrigues Castilho

Recife

2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586t Silva, Micael Estevão da
Teoria dos jogos e dinâmica de populações / Micael Estevão da Silva. –
2020.
113 f.: il., fig.

Orientador: César Augusto Rodrigues Castilho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Matemática, Recife, 2020.
Inclui referências e apêndice.

1. Análise. 2. Teoria dos jogos. I. Castilho, César Augusto Rodrigues
(orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2020 - 72

MICAEL ESTEVÃO DA SILVA

TEORIA DOS JOGOS E DINÂMICA DE POPULAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 19/02/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Alex Dias Ramos (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Obrigado, Deus!

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pois sei que sem ele não teria concluído essa etapa. Percebi que nos momentos mais difíceis ele estava comigo, me segurou, andou comigo e colocou pessoas especiais em minha vida, que foram muito importante durante toda essa caminhada. Obrigado, Pai!

Agradeço a minha família: mãe (Marinalva), pai (Estevão - in Memoriam), irmãos (Marciela, Patricia e Irailson), aos meus avós (Belchior, Delmira, Maria - in Memoriam, Liberato - in Memoriam) e aos meus tios, tias e primos. Obrigado por todo apoio e carinho.

Ao meu orientador, César Castilho, por todo conhecimento transmitido, pelas ajudas, confiança, incentivo e paciência que teve para comigo. Obrigado mesmo!

Aos professores Felipe Wergete, Marco Barone, Tonny e Ricardo Bortolotti pelos ensinamentos passados, pela compreensão, as dúvidas tiradas e incentivo, ao professor Miguel Loayza pelo suporte prestado para fazer o mestrado aqui na UFPE e ao professor Alex Ramos (membro da banca) pelas dicas para melhorar esse trabalho. Aos meus professores da graduação Alex Sandro, Bruno Vasconcelos, João Santos, Daniel da Costa Silva, Gilberto, Erick e Cicero por sempre me incentivarem a fazer o mestrado, pelas aulas de análise na reta e palavras de encorajamento pra encarar os desafios do mestrado que não foram poucos.

Por último, e não menos importante, aos meus amigos que sempre me ajudaram de alguma forma, em especial a equipe argé: Mirelle, Geovani e Jacqueline. Vocês são muito importantes pra mim e foram fundamentais para que eu pudesse concluir a graduação e o mestrado. Só tenho agradecer a vocês por tirarem minhas dúvidas, por me ajudarem seja com relação aos estudos e outras situações do dia a dia. Ao Ricardo, grande companheiro de estudos e treinos, também ao Júlio e ao Josué que nos acolheu (os argés) em Recife como se fossemos seus irmãos, ao meu amigo Agenor que me ajudou bastante na parte biológica desse trabalho assim como ao João Gondim que sempre me ajudou no que podia. E Claro, a CNPQ pelo apoio financeiro. Enfim, muito obrigado a todos vocês: família, professores e amigos. Saibam que vocês foram e sempre serão muito importantes na minha vida.

RESUMO

A Teoria dos Jogos é a teoria dos modelos matemáticos que estuda as escolhas de decisões ótimas sob condições de conflito de dois ou mais agentes que interagem entre si. Essa teoria pode ser usada em diversas áreas do conhecimento, sendo umas destas na Biologia, mais precisamente na evolução de espécies, onde é conhecida como Teoria do Jogos Evolucionários. Neste trabalho, inicialmente, apresentamos o conceito de jogos, revisamos alguns tipos de jogos e estratégias, e apresentamos a formulação do Equilíbrio de Nash. Em seguida, usamos o conceito da Teoria dos Jogos Evolucionários para deduzir e definir a Equação do Replicador, onde tal equação é um modelo de sistema dinâmico formado por Equações Diferenciais Ordinárias, o qual nos ajuda a entender a evolução de determinadas espécies. A partir disso, analisamos a Equação do Replicador bem como sua relação com equilíbrio de Nash e a Equação Geral de Lotka - Volterra. Por fim, baseado no estudo de D Basanta *et al* [4] usamos a Equação do Replicador através de simulações no software MATLAB para analisar a evolução temporal do carcinoma de próstata e possíveis formas de tratamento.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos. Equilíbrio de Nash. Teoria do Jogos Evolucionários. Equação do Replicador. Carcinoma de Próstata.

ABSTRACT

Game Theory is the theory of mathematical models that studies how to make optimal decision choices under conditions of conflict between two or more agents that interact with each other. This theory can be used in several areas of knowledge, one of which is in Biology, more precisely in the evolution of species, where it is known as the Theory of Evolutionary Games. In this work, I started, we present the concept of games, we review some types of games and strategies, and we present the comparison of the Nash Equilibrium. Then, use the Evolutionary Game Theory concept to deduce and define the Replicator Equation, where that equation is a model of dynamic system formed by Ordinary Differential Equations, or which helps to understand the evolution of conditions. From there, we analyzed the replicator equation as well as its relation to the Nash equilibrium and the general Lotka - Volterra equation. Finally, based on the study by D Basanta *et al* [4] uses the Replicator Equation using simulations in the MATLAB software to analyze the temporal evolution of prostate carcinoma and possible forms of treatment.

Keywords: Game Theory. Nash Balance. Evolutionary Game Theory. Replicator Equation. Prostate Carcinoma.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Próstata e a sua localização	78
Figura 2 – Alteração na aptidão do fenótipo das CI.....	84
Figura 3 – Alteração na aptidão do fenótipo das CD	85
Figura 4 – Tratamento direcionado as CI.....	87
Figura 5 – Tratamento direcionado ao estroma.....	88
Figura 6 – Coexistência dos três fenótipos	89

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	TEORIA DOS JOGOS	13
2.1	Jogos	13
2.2	Equíbrio de Nash	22
3	DINÂMICA DO REPLICADOR	26
3.1	A Equação do Replicador	26
3.2	Relações entre o Equíbrio de Nash e a Equação do Replicador	38
3.3	Jogo Pedra - Papel - Tesoura	53
3.4	A Equação Geral de Lotka - Volterra	63
3.5	A relação entre a Equação do Replicador e a Equação Geral de Lotka - Volterra	70
4	INVESTIGANDO AS INTERAÇÕES TUMOR – ESTROMA DO CÂNCER DE PRÓSTATA : Percepções clínica e biológicas de um jogo evolutivo	77
4.1	O principal	77
4.2	O jogo	79
4.3	Implicações terapêuticas	85
4.4	Discussão.....	88
4.5	Conclusão	91
4.6	Análise dos pontos de equilíbrio	92
4.7	Análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio	96
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	106
	REFERÊNCIAS	107
	APÊNDICE A – ALGUMAS DEFINIÇÕES E RESULTADOS	110

1 INTRODUÇÃO

Durante o dia a dia, em casa ou no trabalho, ou em uma atividade de lazer, é comum as pessoas se depararem com situações que demandam a escolha de determinadas estratégias e usa-las a fim de que se possa resolver da melhor forma possível a situação presente. Por exemplo, quando um casal procura saber qual a melhor opção para sair, se é o futebol ou cinema, qual o melhor investimento para o seu capital, quais produtos lançar no mercado, na Economia, nas eleições, em jogos de xadrez, em um jogo de par ou ímpar, etc. Existe uma teoria que nos permite analisar qual a melhor solução para cada um desses tipos de problemas, **a Teoria dos Jogos**.

A Teoria dos Jogos pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob condições de conflito de duas ou mais pessoas que interagem entre si. Em outras palavras, ela estuda as escolhas de estratégias quando o custo e benefício de cada uma destas não é fixo, mas depende sobretudo, da estratégia escolhida pelos outros indivíduos, como os exemplos acima.

A Teoria dos Jogos se deu a partir do surgimento da teoria da probabilidade (é o estudo matemático das probabilidades). O estudo mais analítico sobre a teoria da probabilidade teve início com o filósofo, matemático e físico francês Blaise Pascal, juntamente com o matemático francês Fermat, através desses estudos desenvolveram a teoria da probabilidade em jogos de azar utilizando regras matemáticas.[1]

Os estudos iniciais em teoria dos jogos não eram de grande interesse da comunidade acadêmica da época. Mas, a partir de 1928 o matemático John von Neumann mudou esta situação. Neumann demonstrou que todo jogo finito de soma zero com duas pessoas possui uma solução em estratégias mistas. Nessa mesma época Oskar Morgenstern (1902-1977), economista alemão, estava por publicar o livro Implicações Quantitativas do

comportamento do Máximo, que discute qual deveria ser a unidade de análise econômica: o individualismo ou a interação social. John von Neumann, que trabalhava em muitas áreas da ciência, mostrou interesse em economia e, junto com o economista Oscar Morgenstern, publicou o clássico “The Theory of Games and Economic Behaviour” em 1944 e, com isto, a teoria dos jogos invadiu a economia e a matemática aplicada [22], [26].

Em 1950, o matemático John Forbes Nash Júnior formou-se na Universidade de Princeton com a tese Non-Cooperative Games (Jogos Não-Cooperativos, publicada em 1951) tese essa que lhe proporcionou o prêmio Nobel de Economia em 1994, e sua biografia foi motivo de filme o qual é intitulado no Brasil por: “Uma Mente Brilhante”. Em “Equilibrium Points in n-Person Games” e “Non-cooperative Games”, Nash provou a existência de um equilíbrio de estratégias mistas para jogos não-cooperativos, denominado **Equilíbrio de Nash** (conceito que será detalhado mais tarde), equilíbrio esse que se tornou um dos principais conceitos da Teoria dos Jogos. Dessa forma, a Teoria dos Jogos se tornou uma importante ferramenta para estudar diversos tipos de interações envolvendo pessoas, modelando tais interações como um jogo. Até mesmo a interação e evolução de espécies.

A interação entre as diferentes espécies sempre foi um dos principais temas de interesse da Biologia. Biólogos como John Maynard Smith e Prince que foram um dos grandes pioneiros nos estudos desses tipos de interação, notaram que poderia usar o conceito de teoria dos jogos para melhor compreender a interação de espécies, como evoluíam. A partir disto, surgiu a **Teoria dos Jogos Evolucionários**, como mais uma ferramenta para compreender a Dinâmica das Populações de organismos e como elas se comportam em um ambiente.

Sob o princípio básico do Darwinismo (organismo mais apto é selecionado pelo meio e transmite suas características aos seus descendentes), a Teoria dos Jogos Evolucionários é uma maneira de pensar sobre a evolução em nível fenotípico (características observáveis de um indivíduo) quando as aptidões de fenótipos particulares dependem de suas frequências na população. Enquanto que uma suposição central da teoria clássica dos jogos é que os jogadores comportam-se racionalmente e de acordo com algum critério de interesse próprio, tal suposição estaria claramente fora de lugar no contexto evolutivo. Em vez

disso, o critério da racionalidade é substituído pelo de dinâmica e estabilidade populacional (pois como não é possível estudar as estratégias que uma determinada espécie irá escolher pois considera-se que ela não é racional, então a forma de prevê seu comportamento futuro é através da sua dinâmica, como ela se relaciona com outras espécies e isso é possível analisando a sua frequência em uma população) e o critério de interesse próprio pela aptidão darwiniana [20]. Nesse tipo de jogo as estratégias de um determinado organismo são suas características fenotípicas (características observáveis de um indivíduo, a forma que ela age no ambiente que se encontra), onde essas estratégias já são pré-determinadas por um ser, o **Replicador**.

O Replicador é um ser capaz de se auto-replicar ou seja, que gera uma prole idêntica a si próprio. Dessa forma, com o intuito de analisar como se dá a evolução temporal de determinadas espécies, estamos na verdade interessados em analisar a dinâmica do Replicador. Tal análise é possível por meio da **Equação do Replicador**.

A Equação do Replicador (será apresenta nos capítulos seguintes), que foi concebida por Taylor e Jonker, é um modelo de sistema dinâmicos formados por Equações Diferenciais Ordinárias, que ajuda a compreender a evolução temporal de determinadas espécies através das sua frequência numa população. Esta equação baseia-se no princípio de que semelhante gera semelhante e leva em conta a disseminação do mais apto. Com isso, esta dinâmica retrata a propagação das estratégias proporcionalmente ao sucesso delas [6] [25] .

Por meio da Equação do Replicador, por exemplo, pode-se analisar como se dá a evolução temporal de um **câncer de próstata** e sugerir possíveis formas de tratamento, uma vez que um câncer se desenvolve devido uma mutação que ocorre nas células fazendo com que elas se proliferem indiscriminadamente, replicando células com suas mesmas características [14]. Nesta dissertação, focaremos na dinâmica do replicador continua e na análise da evolução temporal de um câncer de próstata, onde algumas definições e resultados usados no decorrer da mesma são encontrados no apêndice A.

Na segunda seção, cuja referências principais foram [6] [22] , são apresentados o conceito de jogos matematicamente, alguns tipos de jogos como jogos simétricos, determinadas estratégias e o Equilíbrio de Nash.

Posteriormente, na terceira seção, que é uma parte fundamental deste trabalho, faremos o estudo da dinâmica do replicador contínua de forma qualitativa, concentrando-se em jogos simétricos, usando como referências principais [6] [11]. Nesta seção é abordada a associação entre a Teoria dos Jogos Clássicos apresentados na seção 2 e a Teoria dos jogos Evolucionários e a partir disso a dedução e definição da Equação do Replicador. Ainda na seção 3, serão mostrados resultados envolvendo a Equação do Replicador bem como sua relação com o Equilíbrio de Nash e a Equação Geral de Lotka-Volterra.

Por fim, na quarta seção que é a principal parte deste trabalho, baseado no artigo de D Basanta *et al* [4], foi usada a Teoria dos Jogos Evolucionários para deduzir uma Equação do Replicador no caso de um carcinoma de próstata (Câncer no estroma prostático), considerando como jogadores células tumorais e células estromais pois suas interações são essenciais no desenvolvimento de tal câncer. A partir disso, foram feitas análises sobre certas condições de como se dá a evolução temporal de tal câncer e possíveis formas de tratamento. Essas análises foram feitas por meio de simulações, implementando a Equação do Replicador obtida nessa situação do carcinoma de próstata no software MATLAB, usando o algoritmo de Runge-Kutta. Por último, ainda nessa seção, foi feita a análise dos pontos de equilíbrio e de suas estabilidades da Equação do Replicador obtida, a fim de que se possa ter um controle sobre as evolução de tais células.

2 TEORIA DOS JOGOS

A Teoria dos Jogos pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob condições de conflito de dois ou mais agentes que interagem entre si. Em outras palavras, ela estuda as escolhas de estratégias quando o custo e benefício de cada uma destas não é fixo, mas depende sobretudo, da estratégia escolhida pelos outros indivíduos. Nesta seção, tomando como base [6] [11] [22], apresentaremos o conceito da Teoria Clássica dos Jogos descrevendo certas situações em forma de um jogo com o intuito de compreender o conceito da Teoria do Jogos Evolucionários que será visto na próxima seção. Para isto, veremos a definição de um jogo bem como alguns exemplos de jogos, entre eles, o Dilema dos Prisioneiros. Veremos também alguns tipos de jogos como o jogo simétrico que será o tipo de jogo considerado nos capítulos posteriores, determinadas estratégias entre elas as puras e mistas, e por fim, apresentamos a formulação do Equilíbrio de Nash e algumas observações ao seu respeito.

2.1 Jogos

Um jogo é constituído de **jogadores**. Cada jogador por sua vez possui **estratégias** de como agir conforme regras predefinidas. Para cada estratégia usada, escolhida no conjunto de todas as **situações possíveis** ou perfil, existirá um **ganho** (*payoff*).

Definição 1. Um jogo é constituído por:

- i) Um conjunto finito de jogadores, denotado por $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.
- ii) Um conjunto finito de **estratégias puras** do jogador g_i , denotado por $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{mi}\}$ onde $\#E_i \geq 2$ e $i = 1, 2, \dots, n$.
- iii) um vetor $\mathbf{e} = (e_{m1}, e_{m2}, \dots, e_{mn})$ chamado de **perfil de estratégias puras**, per-

tendente ao produto cartesiano

$$E = \prod_{i=1}^n E_i = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$$

onde tal produto é denominado **espaço de estratégias puras do jogo**, e que $e_{mi} \in E_i$ representa uma estratégia pura para o jogador $g_i \in G$ com $i = 1, 2, \dots, n$.

iv) Uma função utilidade

$$\begin{aligned} U_i : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{e} &\longrightarrow U_i(\mathbf{e}) \end{aligned}$$

que determina o ganho para cada estratégia pura $\mathbf{e} \in E$ usada por um jogador $g_i \in G$.

v) Uma **Matriz de payoff (Matriz de ganho)**, cujos elementos desta matriz são os ganhos dos jogadores $g_i \in G$.

Exemplo 1. (DILEMA DOS PRISIONEIRO) Dois ladrões, Paulo e Carlos, são capturados e acusados de um mesmo crime. Presos em salas separadas e sem poder se comunicar entre si, o delegado de plantão faz a seguinte proposta: Cada um pode escolher entre confessar (c) ou negar (n) o crime. De acordo com as seguintes regras:

- i) Se nenhum confessar, ambos serão submetidos a uma pena de 1 ano.
- ii) Se os dois confessarem, ambos terão pena de 5 anos.
- iii) Se um confessar e o outro negar, o que confessou será libertado e o outro será condenado a 10 anos de prisão.

Denotando Paulo e Carlos como os jogadores g_1 e g_2 respectivamente, neste caso temos:

O conjunto dos jogadores

$$G = \{g_1, g_2\}.$$

As estratégias puras

$$E_1 = \{c, n\}, E_2 = \{c, n\}.$$

O espaço de estratégias puras

$$E = E_1 \times E_2 = \{(c, c), (c, n), (n, c), (n, n)\}.$$

As funções utilidades

$$U_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$$

correspondente ao ganho de Paulo dado por

$$U_1(c, c) = -5, \quad U_1(c, n) = 0, \\ U_1(n, c) = -10, \quad U_1(n, n) = -1.$$

e

$$U_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$$

correspondente ao ganho de Carlos dado por

$$U_2(c, c) = -5, \quad U_2(c, n) = 0, \\ U_2(n, c) = -10, \quad U_2(n, n) = -1.$$

Logo, considerando os ganhos dos jogadores g_1 e g_2 para esse jogo, temos a seguinte a matriz de payoff

		Carlos	
		confessar	negar
Paulo	confessar	$(-5, -5)$	$(0, -10)$
	negar	$(-10, 0)$	$(-1, -1)$

onde em cada entrada dessa matriz o primeiro valor refere-se ao payoff do jogador “linha” Paulo e o segundo valor refere-se ao jogador “coluna” Carlos.

Exemplo 2. (BATALHA DOS SEXOS)

João e Maria desejam sair para passear. Contudo, João prefere sair para assistir um jogo de futebol (f) enquanto Maria prefere ir ao cinema (c). Dessa forma

- i) Se ambos forem para o jogo de futebol, o nível de satisfação de João será 10 e o de Maria 5.
- ii) Se ambos forem para o cinema, o nível de satisfação de Maria será 10 e o de João 5.
- iii) se ambos saírem sozinhos, ambos ficarão insatisfeitos, com nível de satisfação 0 para cada um.

Seja João o jogador g_1 e Maria o jogador g_2 . Para esse jogo temos:
o conjunto de jogadores

$$G = \{g_1, g_2\}.$$

As estratégias puras serão

$$E_1 = \{f, c\}, \quad E_2 = \{f, c\}.$$

portanto, o espaço de estratégias puras

$$E = E_1 \times E_2 = \{(f, f), (f, c), (c, f), (c, c)\}.$$

As funções utilidades

$$U_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$$

correspondente ao ganho de João dado por

$$U_1(f, f) = 10, \quad U_1(c, f) = 0,$$

$$U_1(f, c) = 0, \quad U_1(c, c) = 5.$$

e,

$$U_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$$

correspondente ao ganho de Maria dado por

$$U_2(f, f) = 5, \quad U_2(c, f) = 0,$$

$$U_2(f, c) = 0, \quad U_2(c, c) = 10.$$

A matriz de payoff será

		Maria	
		futebol	cinema
João	futebol	(10,5)	(0,0)
	cinema	(0,0)	(5,10)

Existem diferentes tipos de jogos. Entre eles, falaremos de alguns a seguir.

Definição 2. Um jogo é **simultâneo** quando os jogadores movem-se simultaneamente, ou desconhecem previamente as ações de seus adversários (tornando-os efetivamente simultâneos).

Exemplo 3. Os exemplos 1 e 2 dados anteriormente, e um jogo de par ou ímpar são exemplos de jogos simultâneos.

Jogos simultâneos podem ser representados pela **forma normal**, onde tal representação consiste em descrever um jogo em matrizes de payoffs. Essa descrição é da seguinte maneira: Por simplicidade, considere um jogo com dois jogadores g_1 e g_2 . Sejam

$$A = (a_{ij}) \in M_{n \times m} \text{ e } B = (b_{ij}) \in M_{n \times m},$$

matrizes de payoffs dos jogadores g_1 e g_2 respectivamente, onde $n = \#E_1$, $m = \#E_2$ e $a_{ij} \in \mathbf{R}$ representa o ganho do jogador g_1 quando este usa a estratégia $e_{i1} \in E_1$ e o jogador g_2 usa a estratégia $e_{j2} \in E_2$. De forma análoga, $b_{ij} \in \mathbf{R}$ representa o ganho do jogador g_2 quando este usa a estratégia $e_{j2} \in E_2$ e o jogador g_1 usa $e_{i1} \in E_1$. Então a matriz de pares ordenados (a_{ij}, b_{ij}) é a representação pela **forma normal**, cujo número de linhas (respectivamente colunas), correspondem à quantidade de estratégias puras disponíveis para o jogador g_1 (respectivamente jogador g_2). Com isto, uma entrada (i,j) da matriz com o par (a_{ij}, b_{ij}) significa que quando o jogador g_1 escolha a i -ésima estratégia e o jogador g_2 escolha a j -ésima estratégia o ganho do primeiro é a_{ij} e do segundo b_{ij} . Como exemplo temos o jogo Dilema dos Prisioneiros (ex:1) e a Batalha dos Sexos (ex:2).

Definição 3. Um jogo **simétrico**, é aquele no qual os payoffs para os jogadores ao usarem uma estratégia, dependem somente da estratégia escolhida, e não de quem está jogando. isto significa que $E_1 = E_2$ e $A^t = B$. Exemplo Dilema dos Prisioneiros.

Definição 4. Um jogo é de **soma zero** quando as matrizes A e B satisfazem:

$$a_{ij} + b_{ij} = 0$$

para todo (i,j) . Ou seja, a quantidade de ganho para um jogador é a perda para o outro.

Exemplo 4. (JOGO CARA E COROA)

Cada jogador g_1 e g_2 lançam uma moeda pro alto. Ao cair, se ambas as moedas apresentarem cara ou coroa o jogador g_1 ganha 1 real de g_2 . Mas, se uma apresentar cara e a outra coroa então o jogador g_2 que ganha 1 real do jogador g_1 . A matriz de payoff para este jogo é

		g_2	
		cara	coroa
g_1	cara	(1,-1)	(-1,1)
	coroa	(-1,1)	(1,-1)

Definição 5. Dizemos que uma estratégia $e_{i1} \in E_1$ é uma **estratégia dominada ou fortemente dominada** por uma estratégia $e_{k1} \in E_1$, quando independente da escolha do outro jogador, o ganho de g_1 por usar e_{i1} é menor do que seu ganho por usar e_{k1} . Ou seja,

$$a_{ij} < a_{kj} \quad \forall j = 1, \dots, \#E_2.$$

Se,

$$a_{ij} \leq a_{kj} \quad \forall j = 1, \dots, \#E_2,$$

dizemos que e_{i1} é **fracamente dominada** por e_{k1} . Analogamente se define os mesmo conceitos para elementos de E_2 (por simplicidade estamos considerando jogos com dois jogadores).

Exemplo 5. Considere um jogo cuja matriz de payoff é dada a seguir:

		g_2			
		e_{21}	e_{22}	e_{23}	e_{24}
g_1	e_{11}	(5,2)	(2,6)	(1,4)	(0,4)
	e_{12}	(0,0)	(3,2)	(2,1)	(1,1)
	e_{13}	(7,0)	(2,2)	(1,1)	(5,1)
	e_{14}	(9,5)	(1,3)	(0,2)	(4,8)

Vamos analisar as estratégias dominadas.

1. A estratégia e_{21} para o jogador g_2 é dominada pela estratégia e_{24} . Pois,

de (5,2) e (0,4) $\Rightarrow 4 > 2$,

de (0,0) e (1,1) $\Rightarrow 1 > 0$,

de (7,0) e (5,1) $\Rightarrow 1 > 0$,

de (9,5) e (4,8) $\Rightarrow 8 > 5$.

descartando a 1ª coluna temos

		g_2		
		e_{22}	e_{23}	e_{24}
g_1	e_{11}	(2,6)	(1,4)	(0,4)
	e_{12}	(3,2)	(2,1)	(1,1)
	e_{13}	(2,2)	(1,1)	(5,1)
	e_{14}	(1,3)	(0,2)	(4,8)

2. Para o jogador g_1 , as estratégias e_{11} e e_{14} são estritamente dominadas respectivamente por e_{12} e e_{13} . Eliminando as linhas das estratégias dominadas (mesmo processo do item 1) temos

		g_2		
		e_{22}	e_{23}	e_{24}
g_1	e_{12}	(3,2)	(2,1)	(1,1)
	e_{13}	(2,2)	(1,1)	(5,1)

3. A estratégia e_{23} para o jogador g_2 é estritamente dominada pela estratégia e_{22} . Logo

		g_2	
		e_{22}	e_{24}
g_1	e_{12}	(3,2)	(1,1)
	e_{13}	(2,2)	(5,1)

4. A estratégia e_{24} para o jogador g_2 é estritamente dominada pela estratégia e_{22} .

Assim

		g_2
		e_{22}
	e_{12}	(3,2)
g_1	e_{13}	(2,2)

Por fim, a estratégia e_{13} do jogador g_1 é estritamente dominada por pela estratégia e_{12} e portanto, a solução do jogo é (e_{12}, e_{22}) .

Definição 6. Seja $\{e_{1k}, e_{2k}, \dots, e_{nk}\}$ o conjunto de estratégias puras de um jogador g_k . Chama-se de **estratégia mista** de um jogador g_k , o vetor $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ pertencente ao simplexo $S_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ e } x_i \geq 0\}$. Isto é, p é uma distribuição de probabilidade, sendo p_i a probabilidade de cada estratégia pura e_{ik} usada pelo jogador g_k em suas jogadas.

O ganho esperado para o jogador g_1 ao usar uma estratégia mista $p \in S_n$ e jogador g_2 uma estratégia $e_{j2} \in E_2$ é dado pela j -ésima coluna do vetor $p^t A$, que será representado por $(p^t A)_j$. Dessa forma, se o jogador g_1 usa $p \in S_n$ e o jogador g_2 usa $q \in S_m$, o ganho esperado de g_1 é $p^t A q$. De forma análoga, para o jogador g_2 , $p^t B q$ é o seu ganho por jogar q quando g_1 joga p .

Definição 7. Uma estratégia $p \in S_n$ é chamada de **melhor resposta** para estratégia $q \in S_m$ se satisfaz

$$p^t A q \geq x^t A q \quad \forall x \in S_n.$$

fixado $q \in S_m$, denotamos o conjunto

$$MR(q) = \{p \in S_n; p^t A q \geq x^t A q \quad \forall x \in S_n\}$$

como sendo o conjunto de melhores respostas para q .

Proposição 1. $MR(q) \neq \emptyset$.

Demonstração: Temos que S_n é compacto, pois é limitado e fechado. Logo pelo Teorema de Weierstrass, a função

$$x \in S_n \rightarrow x^t A q$$

atinge seu máximo em S_n , ou seja, $\exists \bar{p} \in S_n$, tal que

$$(\bar{p})^t A q \geq x^t A q$$

Portanto, $MR(q) \neq \emptyset$. ■

Proposição 2. $MR(q)$ é compacto.

Demonstração: Como $MR(q)$ é limitado uma vez que $MR(q) \subseteq S_n$ e S_n é compacto, basta mostrar que $MR(q)$ é fechado. Com efeito, tome $a \in MR(q)$. Então existe uma sequência $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \in MR(q)$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = a.$$

Como $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \in MR(q)$, temos que

$$(p_k)^t A q \geq x^t A q \quad \forall x \in S_n.$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$, então

$$(a)^t A q \geq x^t A q \quad \forall x \in S_n$$

logo, $a \in MR(q)$ implicando que $MR(q)$ é fechado. Portanto, como $MR(q)$ é limitado e fechado, $MR(q)$ é compacto. ■

Proposição 3. $MR(q)$ é convexo.

Demonstração: Sejam $p, r \in MR(q)$. para $s \in [0, 1]$ temos que

$$\begin{aligned} [(1-s)p + sr]^t A q &= [(1-s)p^t + sr^t] A q \\ &= (1-s)p^t A q + sr^t A q \\ &\geq (1-s)x^t A q + sx^t A q \\ &= x^t A q \end{aligned}$$

logo o segmento de reta $[p, r] \in MR(q)$. Portanto, $MR(q)$ é convexo. ■

2.2 Equilíbrio de Nash

Considere um jogo com dois jogadores g_1 e g_2 que possuem respectivamente as estratégias puras E_1 , E_2 e $A = (a_{ij})_{n \times m}$, $B = (b_{ij})_{n \times m}$ como suas matrizes de payoffs, onde $n = \#E_1$ e $m = \#E_2$.

Definição 8. Um **Equilíbrio de Nash (EN)** para um jogo, consiste em um par de estratégias $(p, q) \in S_n \times S_m$ que satisfaz

$$p^t A q \geq x^t A q \quad \forall x \in S_n \text{ e } p^t B q \geq p^t B y \quad \forall y \in S_m. \quad (2.1)$$

Um par de estratégias $(p, q) \in S_n \times S_m$ é dito um **Equilíbrio de Nash Estrito (ENE)** para o jogo se em (2.1) vale que

$$p^t A q > x^t A q \quad \forall x \in S_n - \{p\} \text{ e } p^t B q > p^t B y \quad \forall y \in S_m - \{q\} \quad (2.2)$$

Proposição 4. Um (ENE) é da forma $(e_i, f_j) \in S_n \times S_m$ onde e_i e f_j pertencem as bases canônicas de seus respectivos espaços.

Demonstração: Seja p é um ENE. Por (2.2)

$$p^t A q > x^t A q \quad \forall x \in S_n - \{p\} \text{ e } p^t B q > p^t B y \quad \forall y \in S_m - \{q\}$$

Assume para efeitos de contradição que $p \notin \{e_1, \dots, e_n\}$. Como a desigualdade acima vale $\forall x \in S_n - \{p\}$, em particular vale que

$p^t A q > e_j^t A q = (Aq)_j \quad \forall j \in \text{supp}(p) = \{i \in \{1, \dots, n\}; p_i > 0\}, p \in S_n.$
 $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, então $p^t A q = \sum_{i=1}^n p_i (p^t A q) > \sum_{i=1}^n p_i (Aq)_i = p^t A q$. Logo $p^t A q > p^t A q$, que é um absurdo. Portanto, $p \in \{e_1, \dots, e_n\}$. Analogamente segue que $q \in \{f_1, \dots, f_m\}$. Portanto se (p, q) são ENE, (p, q) é da forma (e_i, f_j) . ■

Note que $(p, q) \in S_n \times S_m$ é um EN quando

$$p \in MR(q) = \{p \in S_n; p^t A q \geq x^t A q \quad \forall x \in S_n\}$$

$$q \in MR(p) = \{q \in S_m; p^t B q \geq p^t B y \quad \forall y \in S_m\}$$

ou seja, um EN é a melhor estratégia de um jogador sobre seu oponente.

Observação 1. Nem sempre a melhor estratégia de um jogo, será um EN.

De fato, considere o jogo Dilema dos Prisoneiros (exemplo 1). A melhor estratégia para os dois jogadores seria que ambos optassem por negar o crime, porém devido as circunstâncias, ao analisarem a melhor estratégia para si, acabam optando por confessar. lembrando que Paulo é jogador g_1 e Carlos o jogador g_2 , vamos analisar como isso acontece:

i) Se g_2 optar por confessar, e g_1 confessar, g_1 pegará $U_1(\text{confessar}, \text{confessar}) = -5$. Se g_1 negar, pegará $U_1(\text{negar}, \text{confessar}) = -10$. Então se g_2 confessar, a melhor estratégia para g_1 é confessar.

ii) Se g_2 optar por negar, e g_1 confessar, g_1 pegará $U_1(\text{confessar}, \text{negar}) = 0$. se g_1 negar, pegará $U_1(\text{negar}, \text{negar}) = -1$. Nesse caso a melhor a melhor estratégia para g_1 também é confessar.

Dessa forma, Olhando do ponto de vista de Paulo, o mesmo optaria por confessar. Analisando na mesma linha de raciocínio, Carlos também optaria por confessar. Portanto em termos de estratégia pura (confessar, confessar) é o equilíbrio de nash para o jogo Dilema do Prisoneiros.

Observação 2. Em termos de estratégia mistas, $(1, 0)$ $\in S_1 \times S_2$ é o Equilíbrio de Nash do jogo Dilema dos Prisoneiros.

Com efeito, seja

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} \\
 \text{a matriz de payoff de } g_1. \text{ Para todo } x = (t, 1-t) \in S_2 \text{ temos que} \\
 &= \begin{bmatrix} t & 1-t \\ -5 & 0 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1-t \\ -5 & 0 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -5t - 10 + 10t \\ 5t - 10 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (\text{pois } 0 \leq t \leq 1) \\
 &= \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .
 \end{aligned}$$

Dessa forma, tomando $p = (1, 0)$ e $q = (0, 1)$ então $p^t A q \geq x^t A q \forall x \in S_n$. Considerando

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a matriz de payoff de $g_2 \forall y = (s, 1-s) \in S_2$ temos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5s - 10 \\ -1 + s \end{pmatrix} \\ &= 5s - 10 \\ &\leq -5 \quad (\text{pois } 0 \leq s \leq 1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo para $p = (1, 0)$, $q = (1, 0)$ e $y = (s, 1-s) \in S_2$ temos que $p^t B q \geq p^t B y \forall y \in S_n$. Portanto, $p = (1, 0)$ e $q = (1, 0)$ é o EN para o jogo Dilema dos Prisioneiros.

Usando a mesma linha de raciocínio, verifica-se que os pontos

$$(1, 0), (1, 0) ; (0, 1), (0, 1) \text{ e } \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

são EN do jogo batalha dos sexos (exemplo 2). Além disso, através de argumentos otimização os pontos citados tanto no jogo Dilema dos Prisioneiros bem como no jogo Batalha do Sexos são os únicos EN de seus respectivos jogos (ver [22]). Note também que o jogo Batalha dos Sexos nos mostra que os conjuntos $MR(p)$ e $MR(q)$ podem possuir mais de um elemento.

Assim, um par de estratégias $(p, q) \in S_n \times S_m$ é um ENE quando

$$\{p\} = MR(q) \text{ e } \{q\} = MR(p).$$

Os jogadores de um jogo simétrico possuem as mesmas estratégias, papéis indistinguíveis. Para tal jogo onde a matriz de payoff é $A \in M_{n \times n}$, a definição de Equilíbrio de Nash é semelhante a de Equilíbrio de Nash para jogos assimétricos, que é um tipo de jogo onde em maior parte os jogadores possuem estratégias diferentes já que é possível ter

jogos com estratégias iguais porém, se trata de um jogo assimétrico como por exemplo o jogo Batalha dos Sexos (exemplo 2).

Vamos estudar os EN de jogos simétricos que são da forma $(p, p) \in S_n \times S_n$, onde p é uma melhor resposta para sí mesmo. isto é,

$$p^t A p \geq x^t A p \quad \forall x \in S_n. \quad (2.3)$$

Dessa forma para um jogador g_1 , temos que $p \in MR(p)$. Note que de (2.3) aplicando a transposta em ambos os lados

$$p^t A^t p \geq p^t A^t x \Rightarrow p^t B p \geq p^t B x.$$

ou seja, para o jogador g_2 , $p \in MR(p)$.

3 DINÂMICA DO REPLICADOR

O Replicador é um ser capaz de se auto-replicar ou seja, que gera uma prole idêntica a si próprio. Dessa forma, com o intuito de analisar como se dá a evolução temporal de determinadas espécies, estamos na verdade interessados em analisar a Dinâmica do Replicador. Nesta seção, tomando como base as referências [6] e [11], abordaremos conceito da Teoria dos Jogos Evolucionários para deduzir e definir a Equação do Replicador. Em seguida, analisaremos sua Dinâmica vendo alguns resultados a seu respeito e mostrando a sua relação com Equilíbrio de Nash e a Equação Geral de Lotka-Volterra.

3.1 A Equação do Replicador

Na Teoria Clássica dos Jogos, os jogadores são racionais em suas ações no sentido que cada jogador decide sua própria estratégia visando um ganho. Entretanto, na Teoria dos Jogos Evolucionários os organismos (jogadores) que interagem entre si (jogo), não são racionais. As estratégias dos organismos são suas características fenotípicas, que já são pré - determinadas por um ser, o Replicador. O ganho (payoff) é aptidão ao ambiente no qual está vivendo , que no sentido Darwiniano significa o seu sucesso reprodutivo.

Assume que uma população é constituída em n -tipos de replicadores denotados por $E_1, E_2, \dots, E_n$ que participam de um jogo, onde esses tipos podem serem vistos como sendo n estratégias, e Seja x_i a frequência relativa da população do tipo i , com

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ e } x_i \geq 0\}.$$

O vetor x pertencente ao simplexo S_n é denominado de estado da população.

Exemplo 6. Em uma população com 100 indivíduos, 40 são do tipo E_1 , 35 do tipo E_2 e

25 do tipo E_3 . Logo

$$x_1 = \frac{40}{100}; x_2 = \frac{35}{100}; x_3 = \frac{25}{100}.$$

Definimos $f_i(x)$ como sendo a aptidão (fitness) de E_i , onde a aptidão representa o quão bem uma espécie está adaptada em um determinado ambiente, sendo associado ao seu sucesso reprodutivo.

Vamos supor que a população é suficientemente grande e que as gerações são indistinguíveis, dessa forma podemos assumir que o estado $x(t)$ evolui no simplexo S_n como uma função diferenciável de t . Logo a taxa de crescimento $\frac{\dot{x}_i}{x_i}$ do replicador E_i será uma medida de seus sucessos reprodutivo. Pelo princípio básico do Darwinismo (organismo mais apto é selecionado pelo meio e transmite suas características aos seus descendentes) podemos expressar tal sucesso como a diferença entre a aptidão $f_i(x)$ de E_i e a média das aptidões $\bar{f}(x) = \sum_{i=1} x_i(t)f_i(x)$ da população. Assim obtemos

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = f_i(x) - \bar{f}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

Definição 9. O sistema de equações (3.1) é chamado de **Equação do Replicador**.

A Dinâmica do replicador descreve a evolução da frequência de estratégias em uma população. Note que, se as funções f_i forem localmente lipshitzianas, então as soluções de (3.1) estão unicamente determinadas pelas condições iniciais (teorema de Picard).

Proposição 5. Se as funções f_i forem localmente lipshitzianas, então S_n é invariante pelo fluxo de (3.1).

Demonstração: Queremos mostrar que se a condição inicial $x_i(0) \in S_n$, então $x(t) \in S_n \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Com efeito, definindo a seguinte função

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow S(t) = \sum_{i=1} x_i(t) \end{aligned}$$

e considerando $x_i(t)$ solução de (3.1) temos que

$$\begin{aligned}
 \dot{S}(t) &= \sum_{i=1}^n x_i'(t), \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i(t)(f_i(x) - f(x)), \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i(t)f_i(x) - \sum_{i=1}^n x_i(t)f(x), \\
 &= \frac{f(x) - f(x)}{f(x)} \sum_{i=1}^n x_i(t) \quad \text{pois } f(x) = \sum_{i=1}^n x_i(t)f_i(x) \\
 \Rightarrow \dot{S}(t) &= f(x)(1 - S(t)).
 \end{aligned}$$

Dessa forma a solução constante $S(t) = 1$ é solução de $\dot{S}(t)$. E assim toda solução de $x(t)$ de (3.1) com condição inicial

$$S(0) = \sum_{i=1}^n x_i(0) = 1$$

cumpra $S(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) = 1 \quad \forall t \in I$, onde I é o intervalo de definição de $x_i(t)$. Portanto, as soluções de (3.1) começam em S_n e permanecem, sendo assim o simplex S_n invariante por (3.1). ■

Note também que a face de S_n denotado por $S_n(J) = \{(x_1, \dots, x_n); x_i = 0 \quad \forall i \in J\}$, tal que $J \subset \{1, \dots, n\}$, também é invariante pelo fluxo de (3.1). Pois, se $x_i(0) = 0 \quad \forall i \in J$ e assumindo f_i como sendo localmente lipschitziana para todo i , pela unicidade das soluções maximais temos que $x_i(t) = 0 \quad \forall i$ e $\forall t \in I$, onde I é o intervalo de definição de $x(t)$, e dessa forma a face $S_n(J)$ é invariante por (3.1).

Observação 3. A existência e a unicidade das soluções de (3.1) e o fato de que o compacto S_n é invariante por (3.1), garante que o intervalo de definição de toda solução com condição inicial em S_n é $I = \mathbb{R}$. (ver [24])

Considere um jogo simétrico com n estratégias puras $R_1, R_2, \dots, R_n$ e seja $U \in M_{n \times n}$ a matriz de payoff deste jogo. Suponhamos que cada tipo E_i corresponde uma estratégia mista deste jogo $P^i \in S_n$. Seja $a_{ij} = (P^i)^t U P^j$ o ganho de um tipo E_i ao interagir com um tipo E_j , temos que a matriz $A := (a_{ij}) \in M_{n \times n}$ será a matriz de payoff do jogo com n estratégias puras, onde cada uma delas representando um tipo E_i

de replicador. Dessa forma, a aptidão $f_i(x)$ do tipo E_i numa população de composição $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_n$ será dado por

$$f_i(x) = (Ax)_i$$

e a aptidão média da população como sendo

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i(x) = \sum_{i=1}^n x_i (Ax)_i = x^t Ax.$$

Portanto, teremos como a Equação do Replicador

$$\dot{x}_i = x_i [(Ax)_i - x^t Ax], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.2)$$

De agora em diante, utilizaremos como Equação do replicador a expressão (3.2) restrita a S_n . Note que o lado direito da equação (3.2) é uma função lipshtziana, pois é uma função continuamente diferenciável definida no compacto S_n , logo sua derivada é limitada e como consequência a função será lipshtziana. Com isso, as soluções de (3.2) estão unicamente determinadas pelas condições iniciais e como já foi visto (Proposição 5), S_n e em particular $\text{int}(S_n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ e } x_i > 0\}$ são invariantes por (3.2) e as soluções com condições iniciais em S_n estão definidas em $\mathbb{R}$.

Proposição 6. *Se $x(t)$ é uma solução de (3.2) com condição inicial satisfazendo $x_j(0) \neq 0$, temos que*

$$\frac{d}{dt} \frac{x_i}{x_j} = \frac{x_i}{x_j} [(Ax)_i - (Ax)_j]$$

Demonstração: Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{x_i}{x_j} &= \frac{\dot{x}_i x_j - x_i \dot{x}_j}{(x_j)^2}, \\
 &= \frac{x_i[(Ax)_i - x^t Ax]x_j - x_i x_j[(Ax)_j - x^t Ax]}{(x_j)^2} \\
 &= \frac{x_i(Ax)_i x_j - x_i x^t Ax x_j - x_i x_j(Ax)_j + x_i x_j x^t Ax}{(x_j)^2}, \\
 &= \frac{x_i x_j [(Ax)_i - (Ax)_j]}{(x_j)^2}, \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{x_i}{x_j} &= \frac{x_i}{x_j} [(Ax)_i - (Ax)_j].
 \end{aligned}$$

■

A proposição 6 nos permite analisar a frequência de uma espécie do tipo E_i com relação a uma do tipo E_j . Por exemplo, se $(Ax)_i - (Ax)_j = 0$ teríamos que $\frac{x_i}{x_j} = c$, com c constante. Assim a frequência dos tipos E_i e E_j estariam em uma razão constante ao longo do tempo.

Proposição 7. A adição de uma constante b_j a todas as entradas da j -ésima coluna da matriz A não altera a equação (3.2) .

Demonstração: Seja

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & b_j & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_j & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que dados e_i e e_j vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$ pertencentes ao simplexo S_n e $x(t) \in S_n$ onde $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ temos que

$$e_i^t B_j = b_j e_j^t \quad e \quad x^t B_j = \sum_{i=1}^n x_i b_j \quad e^t = b_j \sum_{i=1}^n x_i e_j^t = b_j e_j^t \Rightarrow e_i^t B_j = x^t B_j. \quad (3.3)$$

Logo, para cada $i=1,2,\dots,n$ temos que

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i &= x_i \left[\sum_j (A + B_j)x_j - x^t (A + B_j)x \right], \\
 &= x_i [e^t(A + B_j)x - x^t(A + B_j)x], \\
 &= x_i [e^tAx + e^tB_jx - x^tAx - x^tB_jx], \\
 &= x_i [(e^tAx - x^tAx) + (e^tB_jx - x^tB_jx)], \\
 &= x_i [(Ax)_i - x^tAx] + (e^tB_j - x^tB_j)x.
 \end{aligned}$$

Portanto por (3.3) teremos,

$$\dot{x}_i = x_i [(Ax)_i - x^tAx].$$

■

a proposição (7) nos ajudará mais adiante a obter resultados importantes com relação a Equação do Replicador (3.2).

Proposição 8. Se o produto $P(t) = \prod_{i=1}^n (x_i(t))^{\alpha_i}$ está bem definido, sua derivada satisfaz

$$\dot{P} = P \sum_{i=1}^n \alpha_i [(Ax)_i - x^tAx]$$

onde $x(t)$ é solução de (3.2).

Demonstração: Usando a regra do produto e considerando $\lambda_i = \alpha_i [(Ax)_i - x^tAx]$, temos

$$\begin{aligned}
\dot{P}(t) &= \alpha_1 x_1^{\alpha_1-1} \prod_{i=2}^n (x_i(t))^{\alpha_i} + x_1^{\alpha_1} \frac{d}{dt} (x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}), \\
&= \alpha_1 x_1^{\alpha_1-1} x_1 [(Ax)_1 - x^t Ax] \prod_{i=2}^n (x_i(t))^{\alpha_i} + x_1^{\alpha_1} \frac{d}{dt} (x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}), \\
&= \alpha_1 x_1^{\alpha_1} [(Ax)_1 - x^t Ax] \prod_{i=2}^n (x_i(t))^{\alpha_i} + x_1^{\alpha_1} \frac{d}{dt} (x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}), \\
&= \lambda_1 \prod_{i=1}^n (x_i(t))^{\alpha_i} + x_1^{\alpha_1} \alpha_2 x_2^{\alpha_2-1} x_2 \prod_{i=3}^n (x_i(t))^{\alpha_i} + x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \frac{d}{dt} (x_3^{\alpha_3} \cdots x_n^{\alpha_n}), \\
&= \lambda_1 \prod_{i=1}^n (x_i(t))^{\alpha_i} + x_1^{\alpha_1} \alpha_1 x_2^{\alpha_2-1} x_2 [(Ax)_2 - x^t Ax] \prod_{i=3}^n (x_i(t))^{\alpha_i} + x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \frac{d}{dt} (x_3^{\alpha_3} \cdots x_n^{\alpha_n}), \\
&= \lambda_1 \prod_{i=1}^n (x_i(t))^{\alpha_i} + \alpha_1 [(Ax)_2 - x^t Ax] \prod_{i=1}^n (x_i(t))^{\alpha_i} + x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \frac{d}{dt} (x_3^{\alpha_3} \cdots x_n^{\alpha_n}), \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \prod_{i=1}^n (x_i(t))^{\alpha_i} + x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \frac{d}{dt} (x_3^{\alpha_3} \cdots x_n^{\alpha_n}), \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \prod_{i=1}^n (x_i(t))^{\alpha_i} + x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} + \cdots + x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \frac{d}{dt} (x_n^{\alpha_n}), \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \prod_{i=1}^n (x_i(t))^{\alpha_i} + x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} + \cdots + x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \alpha_n x_n^{\alpha_n-1} [(Ax)_n - x^t Ax], \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \prod_{i=1}^n (x_i(t))^{\alpha_i} + \prod_{i=1}^n (x_i(t))^{\alpha_i} \alpha_n [(Ax)_n - x^t Ax], \\
&= \prod_{i=1}^n \lambda_i \prod_{i=1}^n (x_i(t))^{\alpha_i}.
\end{aligned}$$

Portanto, como tomamos $\lambda_i = \alpha_i [(Ax)_i - x^t Ax]$,

$$\dot{P} = P \sum_{i=1}^n \alpha_i [(Ax)_i - x^t Ax].$$

■

Teorema 1. Fixados c_1, c_2, c_3 reais positivos. Seja $H = \{x \in \mathbb{R}^3; \sum_{i=1}^3 x_i = 1\}$. A restrição da transformação projetiva

$$T : H \longrightarrow H$$

$$x \longmapsto T(x) = y, \text{ com } y_i = \frac{c_i x_i}{\sum_{j=1}^3 c_j x_j}$$

ao S_3 fornece uma conjugação entre a Equação do Replicador

$$\dot{x}_i = x_i[(Ax)_i - x^t Ax]$$

com Equação do Replicador

$$\dot{y}_i = y_i[(\bar{A}y)_i - y^t \bar{A}y],$$

onde $A = (\frac{a_{ij}}{c_j})$.

Demonstração: Considere h como sendo a restrição de T ao S_3 . temos que:

$$1. h(S_3) \subset S_3$$

Com efeito, tome $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) \in h(S_3)$ então existe $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in S_3$ tal que $h(\bar{x}) = \bar{y}$ e $\bar{y}_i = \frac{c_i \bar{x}_i}{\sum_{j=1}^3 c_j \bar{x}_j}$. Assim

$$y_i \geq 0 \text{ e } y_i = \frac{\sum_{i=1}^3 c_i \bar{x}_i}{\sum_{j=1}^3 c_j \bar{x}_j} = 1 \Rightarrow y_i \in S_3.$$

Logo, $h(S_3) \subset S_3$.

$$2. h \text{ é injetiva.}$$

Sejam $x, z \in S_3$ tal que $h(x) = h(z)$. Para todo $i = 1, 2, 3$ temos que

$$\frac{c_i x_i}{\sum_{j=1}^3 c_j x_j} = \frac{c_i z_i}{\sum_{j=1}^3 c_j z_j} \Leftrightarrow \frac{x_i}{\sum_{j=1}^3 c_j x_j} = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^3 c_j z_j} \Leftrightarrow \frac{x_i}{\sum_{j=1}^3 c_j x_j} = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^3 c_j z_j} \Leftrightarrow \frac{1}{\sum_{j=1}^3 c_j x_j} = \frac{1}{\sum_{j=1}^3 c_j z_j}$$

Portanto,

$$\frac{x_i}{\sum_{j=1}^3 c_j x_j} = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^3 c_j z_j} \Leftrightarrow x_i = z_i.$$

3. h é sobrejetiva.

Com efeito, como h é continua e S_3 é simplesmente conexo, então $h(S_3)$ é simplesmente conexo.

afirmação: as faces $S_3(J)$ de S_3 estão contidas em $h(S_3)$.

De fato, pois dado $x \in S_3(J)$ existe $i = 1, 2, 3$ tal que $x_i = 0$. Dessa forma,

$$y_i = \frac{c_i x_i}{\sum_{j=1}^3 c_j x_j} = 0,$$

e assim as faces $S_3(J)$ estão contidas em $h(S_3)$. Logo, pela conexidade de $h(S_3)$ e por esta ultima afirmação podemos garantir que $S_3 \subset h(S_3)$. Daí, Pelo item 1 temos que $h(S_3) \subset S_3$ então, $h(S_3) = S_3$ e portanto h é sobrejetiva.

4. $DT(x)$ é um isomorfismo $\forall x \in S_3$, onde $DT(x)$ é a derivada de T no ponto x .

Note que dado $x \in H$ temos que $\sum_{i=1}^3 x_i = 1$ e assim, $x_3 = 1 - x_1 - x_2$. Logo, com x_3 escrita em função das variáveis x_1, x_2 , a transformação T pode ser reescrita da seguinte forma

$$T(x_1, x_2) = \frac{c_1 x_1}{c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)}, \frac{c_2 x_2}{c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} T_1(x_1, x_2) &= \frac{c_1 - c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2) - c_1 x_1(c_1 - c_3)}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^2}, \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} T_1(x_1, x_2) &= \frac{c_1 c_2 x_2 - c_1 c_3 x_2 + c_1 c_3}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^2}. \\ \frac{\partial}{\partial x_2} T_1(x_1, x_2) &= \frac{-c_1 x_1(c_2 - c_3)}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_2} T_1(x_1, x_2) &= \frac{c_1 c_3 x_1 - c_1 c_2 x_1}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} T_2(x_1, x_2) &= \frac{-c_2 x_2 (c_1 - c_3)}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^2}, \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} T_2(x_1, x_2) &= \frac{c_2 c_3 x_2 - c_1 c_2 x_2}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^2}. \\
\frac{\partial}{\partial x_2} T_2(x_1, x_2) &= \frac{c_2 - c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2) - c_2 x_2 (c_2 - x_2)}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^2} \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_2} T_2(x_1, x_2) &= \frac{c_1 c_2 x_1 - c_2 c_3 x_1 + c_2 c_3}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^2}.
\end{aligned}$$

Como

$$\det[DT(x)]_\beta = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} T_1(x_1, x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2} T_1(x_1, x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} T_2(x_1, x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2} T_2(x_1, x_2) \end{vmatrix},$$

então

$$\det[DT(x)]_\beta = \begin{vmatrix} \frac{c_1 c_2 x_2 - c_1 c_3 x_2 + c_1 c_3}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^2} & \frac{c_1 c_3 x_1 - c_1 c_2 x_1}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^2} \\ \frac{c_2 c_3 x_2 - c_1 c_2 x_2}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^2} & \frac{c_1 c_2 x_1 - c_2 c_3 x_1 + c_2 c_3}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^2} \end{vmatrix}.$$

usando a propriedade do determinante,

$$\det[DT(x)]_\beta = \frac{1}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^4} \begin{vmatrix} c_1 c_2 x_2 - c_1 c_3 x_2 + c_1 c_3 & c_1 c_3 x_1 - c_1 c_2 x_1 \\ c_2 c_3 x_2 - c_1 c_2 x_2 & c_1 c_2 x_1 - c_2 c_3 x_1 + c_2 c_3 \end{vmatrix}.$$

Tomando

$$\lambda = \frac{1}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^4}$$

e calculando o determinante temos,

$$\begin{aligned}
\det[DT(x)]_\beta &= \lambda [c_1 c_2 (c_3)^2 - c_1 c_2 (c_3)^2 x_1 + (c_1)^2 c_2 c_3 x_1 - c_1 c_2 (c_3)^2 x_2 + c_1 (c_2)^2 c_3] \\
&= \lambda [c_1 c_2 c_3 (c_3 - c_3 x_1 + c_1 x_1 - c_3 x_2 + c_2 x_2)] \\
&= \frac{1}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^4} [c_1 c_2 c_3 c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]
\end{aligned}$$

Logo, $\det[DT(x)]_\beta = \frac{c_1 c_2 c_3}{[c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3(1 - x_1 - x_2)]^3} \neq 0$ para todo $x \in H$, onde β é base de $\mathbb{R}^2$. Portanto, $DT(x)$ é um isomorfismo.

5. $h : S_3 \rightarrow S_3$ é um difeomorfismo.

Pelo item 4, temos que $DT(x)$ é um isomorfismo para todo $x \in H$, logo pelo teorema da função inversa, dado $a \in H$ existem abertos $V \ni a$ e $W \ni T(a)$ tal que

$$T : V \rightarrow W$$

é um difeomorfismo. Dessa forma, h é um difeomorfismo local e como pelo item 2 h é injetiva, portanto h é um difeomorfismo global.

6. Finalmente, h é a conjugação entre a equação (3.2) com a Equação do Replicador com matriz

$$A = \frac{a_{ij} x_j}{c_j}.$$

Com efeito, considere $x(t)$ solução da Equação do Replicador (3.2), e note que

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \text{ e } x^t Ax = \sum_{i,j=1}^3 x_i a_{ij} x_j.$$

daí, de $y_i = \frac{c_i x_i}{\sum_{k=1}^3 c_k x_k}$ temos

$$\dot{y}_i = \frac{\sum_{k=1}^3 c_k \dot{x}_i x_k - c_i x_i \sum_{k=1}^3 c_k \dot{x}_k}{\left(\sum_{k=1}^3 c_k x_k\right)^2},$$

$$= \frac{c_i x_i \sum_{k=1}^3 (Ax)_i - x^t Ax \sum_{k=1}^3 c_k x_k - c_i x_i \sum_{k=1}^3 c_k x_k \sum_{k=1}^3 (Ax)_k - x^t Ax \sum_{k=1}^3 c_k x_k}{\left(\sum_{k=1}^3 c_k x_k\right)^2},$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{k=1}^3 c_i x_i (Ax)_i \sum_{k=1}^3 c_k x_k - c_i x_i x^t A x \sum_{k=1}^3 c_k x_k - c_i x_i \sum_{k=1}^3 c_k x_k (Ax)_k + c_i x_i \sum_{k=1}^3 c_k x_k x^t A x}{\left(\sum_{k=1}^3 c_k x_k \right)^2}, \\
&= \frac{\sum_{k=1}^3 c_i x_i (Ax)_i \sum_{k=1}^3 c_k x_k - c_i x_i \sum_{k=1}^3 c_k x_k (Ax)_k}{\left(\sum_{k=1}^3 c_k x_k \right)^2}, \\
&= \frac{\sum_{j=1}^3 c_i x_i \sum_{k=1}^3 a_{ij} x_j \sum_{k=1}^3 c_k x_k - c_i x_i \sum_{k=1}^3 c_k x_k \sum_{j=1}^3 a_{kj} x_j}{\left(\sum_{k=1}^3 c_k x_k \right)^2}, \\
&= \frac{\sum_{k=1}^3 \frac{c_i x_i}{\sum_{k=1}^3 c_k x_k} \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j - \sum_{k=1}^3 c_k x_k \sum_{j=1}^3 a_{kj} \frac{x_j}{\sum_{k=1}^3 c_k x_k}}{\left(\sum_{k=1}^3 c_k x_k \right)^2}, \\
&= \frac{\frac{c_i x_i}{\sum_{k=1}^3 c_k x_k} \sum_{j=1}^3 \frac{a_{ij}}{c_j} c_j x_j - \sum_{k,j=1}^3 \frac{c_k x_k}{c_j} \frac{a_{kj}}{c_j} \frac{c_j x_j}{\sum_{k=1}^3 c_k x_k}}{\left(\sum_{k=1}^3 c_k x_k \right)^2}.
\end{aligned}$$

multiplicando em ambos os lados da igualdade por $\sum_{p=1}^3 c_p x_p$, teremos

$$\frac{y_i}{\sum_{p=1}^3 c_p x_p} = \frac{c_i x_i}{\sum_{k=1}^3 c_k x_k} \sum_{j=1}^3 \frac{a_{ij}}{c_j} \frac{c_j x_j}{\sum_{p=1}^3 c_p x_p} - \sum_{k,j=1}^3 \frac{c_k x_k}{\sum_{p=1}^3 c_p x_p} \frac{a_{kj}}{c_j} \frac{c_j x_j}{\sum_{k=1}^3 c_k x_k}$$

Definindo $\tau(t) = \int_0^t \sum_{p=1}^3 \frac{y_i}{c_p x_p} (Ay)_i - y^t \bar{A} y$, temos que $\frac{d}{dt} \tau(t) = \sum_{p=1}^3 \frac{c_p x_p}{c_p x_p} (t)$. Daí, note que

$$y_i(\tau(t)) \equiv \frac{dy_i(\tau(t))}{dt} = \frac{dy_i}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}$$

nos permite escrever $y_i(\tau(t)) = \frac{y_i}{c_p x_p}$. Portanto, $y_i = y_i (\bar{A}y)_i - y^t \bar{A} y$

■

3.2 Relações entre o Equilíbrio de Nash e a Equação do Replicador

Lembrando que um ponto de equilíbrio de uma equação diferencial

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x = f(t, x)$$

é um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(t, \bar{x}) = 0,$$

os pontos de equilíbrio da Equação do Replicador (3.2) são os pontos $x \in S_n$, tais que

$$(Ax)_i = x^t Ax \quad \forall i \in \text{supp}(x)$$

onde $\text{supp}(x) = \{i \in \{1, \dots, n\}; x_i > 0\}$. Note que os pontos $x \in \text{int}(S_n)$ satisfazem $\text{supp}(x) = \{1, \dots, n\}$, então os pontos de equilíbrio de (3.2) em $\text{int}(S_n)$ satisfazem $(Ax)_i = x^t Ax \quad \forall i \in \text{supp}(x)$.

Observação 4. *Todo ponto de equilíbrio de (3.2) em $\text{int}(S_n)$ é solução do seguinte sistema linear*

$$\square \quad (Ax)_1 = (Ax)_2 = \dots = (Ax)_n$$

$$\square \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

com n incógnitas e n equações.

A primeira condição do sistema $(Ax)_1 = (Ax)_2 = \dots = (Ax)_n$ se dá pelo fato que se $x \in \text{int}S_n$ é um ponto de equilíbrio, então $(Ax)_i = x^t Ax \quad i \in \text{supp}(x)$. E a segunda é pela definição de $x \in \text{int}S_n$.

Nas faces de S_n os pontos de equilíbrio de (3.2) são determinados de forma análoga pois, fixado $J \subset \{1, \dots, n\}$, os pontos de equilíbrio de (3.2) na face

$$S_n(J) = \{(x_1, \dots, x_n); x_i = 0 \quad \forall i \in J\}$$

são

$$x \in S_n; (Ax)_i = x^t A x \quad \forall i \notin J.$$

Dessa forma, todo ponto de equilíbrio de (3.2) na face $S_n(J)$ é solução de $n - \#J$ equações e $n - \#J$ incógnitas (já que $i \notin J$), ou seja,

$$\begin{aligned} & (Ax)_i = (Ax)_j \quad \forall i, j \notin J \\ & \sum_{i \notin J} x_i = 1 \end{aligned}$$

Para os casos onde $J = \{j\}$, isto é, J é unitário, temos que $S_n(J) = e_j$ é o ponto de equilíbrio de (3.2). Por exemplo, supondo $J = \{2\}$, seja

$$a \quad b \quad c$$

$$A = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

$$e^t A e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & e & i \end{pmatrix} = e.$$

Por outro lado

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ e \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow A e_2 = e.$$

Logo para $i = j = 2$ $i = 2 = \text{supp}(e_2)$ temos que $(Ae_2)_i - e^t A e_2 = 0$ e portanto e_2 é ponto de equilíbrio.

Existem relações entre os pontos de equilíbrio da Equação do Replicador (3.2) e o Equilíbrio de Nash (EN) para um jogo simétrico com matriz A , dentre elas veremos as seguintes

Teorema 2. Se (p, p) é um EN do jogo cuja matriz de payoff é A , então p é um ponto de equilíbrio do sistema (3.2).

Demonstração: Como (p,p) é um EN, então satisfaz

$$p^t A p \geq x^t A p \quad \forall x \in S_n$$

em particular, satisfaz $p^t A p \geq e^t A p = (A p)_i \quad \forall i$. Devemos mostrar que

$$(A p)_i = p^t A p \quad \forall i \in \text{supp}(p)$$

.

Para isto suponhamos que existe $j \in \text{supp}(p)$ tal que

$(A p)_j < p^t A p$ (considera-se o caso $<$ pois como p é EN os únicos casos possíveis são $\leq$).

Dessa forma, lembrando que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ teremos que

$$p^t A p = \sum_{i=1}^n p_i (p^t A p) > \sum_{i=1}^n p_i (A p)_i = p^t A p \Rightarrow p^t A p > p^t A p$$

o que é um absurdo! logo, $(A p)_i = p^t A p \quad \forall i \in \text{supp}(p)$ e portanto p é um Equilíbrio de Nash. ■

Teorema 3. Se (p, p) é um equilíbrio de Nash estrito (ENE) e estável do jogo com matriz de payoff A , então p é um ponto assintoticamente estável de (3.2) .

Demonstração: Por hipótese (p, p) é um ENE e em particular é EN, logo pelo teorema anterior temos que p é um ponto de equilíbrio de (3.2) . Como p é ENE pela Definição 8, equação (2.2) (seção anterior), temos que

$$p^t A p > x^t A p \quad \forall x \in S_n - \{p\}.$$

pela proposição 4, os pontos que são ENE pertencem as bases canônicas de seus respectivos espaços. Dessa forma como (p,p) é um ENE existe e_i com $i = 1, \dots, n$ tal que $p = e_i$. Assim,

$$e_i^t A e_i > x^t A e_i \quad \forall x \in S_n - \{e_i\}. \quad (3.4)$$

Logo,

$$x^t A e_i - e_i^t A e_i < 0 \quad \forall x \in S_n - \{e_i\}$$

em particular,

$$e_j^t A e_i - e_i^t A e_j < 0 \quad \forall j \neq i, \text{ pois } e_j \in S_n. \quad (3.5)$$

Note que para cada $j \neq i$ a função dada por pelo mapa

$$y \mapsto e_j^t A y - y^t A y$$

é continua uma vez que A é uma matriz e e_j, y são pontos de $S_n \subset \mathbb{R}^n$, logo se trata de soma de funções continuas que é continua. Dessa forma pela continuidade do mapa e por (3.5) existe $s_j > 0$ tal que $\forall x \in B(e_i, s_j) \cap S_n$ tem-se que

$$e_j^t A x - x^t A x < 0 \quad (3.6)$$

Além disso, fixado $y \in S_n - \{e_i\}$, a continuidade da função

$$z \mapsto e_i^t A z - y^t A z$$

e a desigualdade (3.4) garantem que existe $s_i(y) > 0$ tal que para todo $x \in B(e_i, s_i) \cap S_n$

$$e_i^t A x - y^t A x > 0.$$

Note que como S_n é compacto, existe $s_i > 0$ tal que para todo $x \in B(e_i, s_i) \cap S_n$ e $\bar{y} \in S_n - \{e_i\}$,

$$e_i^t A x - \bar{y}^t A x > 0.$$

E m particular se $\bar{y} = x \in B(e_i, s_i) \cap S_n - \{e_i\}$, então

$$e_i^t A x - x^t A x > 0 \quad (3.7)$$

Tomando $s = \min\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ e fixando $x_0 \in B(e_i, s) \cap S_n - \{e_i\}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, temos que se $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ é a solução maximal do problema de Cauchy dado por (3.2) onde $\phi(0) = x_0 \in B(e_i, s) \cap S_n$, temos que $\phi(t) \in B(e_i, s) \cap S_n \quad \forall t \geq 0$ (devido a invariância das soluções no compacto S_n) e por (3.6) e (3.7) $\phi(t)$ satisfaz respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{\phi_i}{\phi_j} &= ((A\phi)_j - \phi^t A \phi) < 0 \quad \forall j \neq i \\ \frac{\phi_i}{\phi_i} &= ((A\phi)_i - \phi^t A \phi) > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\phi_j &= \phi_j((A\phi)_j - \phi^t A\phi) < 0 \quad \forall j \neq i \\ \phi_i &= \phi_i((A\phi)_i - \phi^t A\phi) > 0.\end{aligned}$$

Assim, cada coordenada de ϕ é estritamente monótona e como $\phi(t) \in B(e_i, s) \cap S_n \quad \forall t \geq 0$ também é limitada, então o $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t)$ existe, e tal limite pertence $B(e_i, s) \cap S_n \quad \forall t \geq 0$

aff: $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = e_i = p$

Com efeito, suponha que o $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \bar{x} \neq e_i$, como ϕ é uma solução maximal do problema de Cauchy dado por (3.2), $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio do sistema (3.2) pertencente a $B(e_i, s) \cap S_n - \{e_i\}$. Logo,

$$(A\bar{x})_i - \bar{x}^t A\bar{x} = 0 \implies e^t A\bar{x} - \bar{x}^t A\bar{x} = 0$$

contradizendo (3.7), pois x deveria cumprir $e^t A\bar{x} - \bar{x}^t A\bar{x} > 0$. Portanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = e_i = p$ e dessa forma p é assintoticamente estável. ■

Teorema 4. Se p é o ω -limite de uma órbita do sistema (3.2) contido no $\text{int}S_n$, então (p, p) é um EN do jogo cuja matriz de payoff é A .

Demonstração: Seja ϕ uma solução de (3.2) tal que $\{\phi(t), t \in \mathbf{R}\} \subset \text{int}(S_n)$. Suponha que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p$ mas (p, p) não é EN. Por um lado, como $\{p\} = \omega(\{\phi(t); t \in \mathbf{R}\})$ então p é um ponto de equilíbrio de (3.2). Dessa forma

$$p^t A p = (A p)_i \quad \forall i \in \text{supp}(p).$$

Por outro lado, por definição se (p, p) é um EN, então

$$p^t A p \geq x^t A p \quad \forall x \in S_n \implies p^t A p \geq e^t A p \quad \forall i \implies p^t A p \geq (A p)_i \quad \forall i.$$

mas, estamos supondo que (p, p) não é um EN, então existe j tal que

$$(A p)_j > p^t A p.$$

Note que se (p, p) não é um EN, existe $x \in S_n$ onde

$$\begin{aligned}p^t A p &< x_n^t A p \\ \implies p^t A p &< \sum_{i=1} x_i (A p)_i = \sum_{i \in \text{supp}(p)} x_i (A p)_i + \sum_{j \notin \text{supp}(p)} x_j (A p)_j \\ &= \sum_{i \in \text{supp}(p)} x_i (p^t A p) + \sum_{j \notin \text{supp}(p)} x_j (A p)_j.\end{aligned}$$

Dessa forma, $j \in \{1, \dots, n\} - \text{supp}(p)$ tal que $(Ap)_j > p^t Ap$, logo existindo $s > 0$ onde $(Ap)_j - p^t Ap > s$. Pela continuidade da expressão, existe um $\delta > 0$ tal que se $y \in B(p, \delta) \cap S_n$ então $(Ay)_j - y^t Ay > s$. Dessa forma para t suficientemente grande tal que $\phi(t) \in B(p, \delta)$, e pelo fato de $\phi(t)$ ser solução de (3.2), temos que

$$\frac{\phi_j(t)}{\phi_j} > s \implies \phi_j(t) > e^{(st + \ln(\phi_j(0)))} = \phi_j(0)e^{st} \quad (\text{integrado com relação a } t, \text{ de } 0 \text{ a } t)$$

$$\implies \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_j(t) = +\infty$$

que é um absurdo uma vez que p é um ponto de equilíbrio do sistema (3.2) tal que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Portanto, (p, p) é um EN. ■

Teorema 5. *Se um ponto de equilíbrio p do sistema (3.2) é estável no sentido Lyapounov, então (p, p) é um EN do jogo cuja matriz de payoff é A .*

Demonstração: Com efeito, suponha que para efeito de contradição que p é um ponto de equilíbrio estável no sentido lyapounov mas (p, p) não é um EN. Então existe $x \in S_n$ tal que

$$p^t Ap < x^t Ap \implies p^t Ap < \sum_i x_i (Ap)_i = \sum_{i \in \text{supp}(P)} x_i (p^t Ap) + \sum_{j \notin \text{supp}(p)} x_j (Ap)_j$$

portanto, existe $j \in \{1, \dots, n\} - \text{supp}(p)$ e $s > 0$ tal que:

$$(Ap)_j - p^t Ap > s$$

Pela continuidade da expressão, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in B(p, \delta) \cap S_n$, tem se que

$$(Ax)_j - x^t Ax > s \quad (3.8)$$

Por outro lado como p é estável, por definição existe um $\delta^j > 0$ tal que se $x_0 \in B(p, \delta^j) \cap S_n$ então $\phi(t) \in B(p, \delta) \cap S_n \forall t \geq 0$ onde $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ é a solução maximal do problema de Cauchy dado por (3.2) onde $\phi(0) = x_0$. Logo, fixado $x_0 \in B(p, \delta^j) \cap -\{p\}$ com $j \in \text{supp}(x_0)$ e por (3.8) temos que

$$\frac{\phi_j(t)}{\phi_j} > s \quad \forall t \geq 0$$

$$\implies \phi_j > e^{(st + \ln(\phi_j(0)))} = \phi_j(0)e^{st} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_j(t) = +\infty$$

e dessa forma temos que $\phi(t) \notin B(p, \delta) \cap S_n \forall t \geq 0$, ou seja que p não seria estável, o que é uma contradição. Portanto, (p, p) é um EN. ■

Resumindo

- i) (p, p) é EN $\Rightarrow p$ é um ponto de equilíbrio.
- ii) (p, p) é ENE $\Rightarrow p$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável
- iii) $\{p\} = \omega(x)$ para algum ponto $x \in \text{int}S_n \Rightarrow (p, p)$ é EN.
- iv) p é ponto de equilíbrio estável $\Rightarrow (p, p)$ é EN.

Proposição 9. *Nenhuma das condições acima vale a recíproca.*

Demonstração:

para i) Considere o sistema (3.2) com $n=2$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

temos que e_1 é ponto de equilíbrio uma vez que

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (Ae_1)_1 = 1$$

$$e^t Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow e^t Ae_1 = 1 \Rightarrow (Ae_1)_1 = e^t Ae_1 \text{ onde } 1 \in \text{supp}(e_1)$$

mas não é EN, pois

$$e^t Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 > 1 = e^t Ae_1$$

e para e_1 ser EN deveria acontecer

$$e_1^t Ae_1 \geq x^t Ae_1 \quad \forall x \in S_n$$

portanto não valendo a recíproca de **i)**.

para ii) considere o sistema (3.2) com $n=2$ e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nesse caso, como o simplexo será S_2 podemos considerar o vetor $(x_1, 1 - x_1) \in S_2$ logo

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

e

$$x^t Ax = (x_1 \quad 1 - x_1) \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = 2(1 - x_1)x_1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 (Ax)_1 - x^t Ax \\ &= x_1 (1 - x_1) - 2(1 - x_1)x_1. \end{aligned}$$

logo,

$$x'_1 = x_1(1 - x_1)(1 - 2x_1).$$

Daí, note que $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é ponto de equilíbrio pois

$$x'_1 = x_1(1 - x_1)(1 - 2x_1) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$$

e assintoticamente estável, uma vez que definindo uma função F como

$$F(x_1) = x_1(1 - x_1)(1 - 2x_1)$$

temos

$$F'(x_1) = (1 - x_1)(1 - 2x_1) - x_1(1 - 2x_1) - 2x_1(1 - x_1) \Rightarrow F'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0.$$

Mas,

$$x^t Ap = \begin{pmatrix} x_1 & 1 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

e

$$p^t Ap = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

logo, $x^t A p = p^t A p \quad \forall x = (x_1, 1 - x_1) \in S_2$, e dessa forma (p,p) não é ENE pois deveria acontecer $p^t A p > x^t A p \quad \forall x = (x_1, 1 - x_1) \in S_2$. Portanto, não vale a recíproca de **ii**).

Para iii) Considere o sistema (3.2) com $n=2$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por um lado $e_1^t A e_1 = 1$, e $\forall x = (x_1, 1 - x_1) \in S_2$ temos que $x^t A e_1 = 1$. Assim $e_1^t A e_1 = x^t A e_1$. Em particular $e_1^t A e_1 \geq x^t A e_1$, logo (e_1, e_1) é EN.

Por outro lado, como um ponto qualquer $x \in S_2$ pode ser escrito como $(x_i, 1 - x_i)$ note que

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ 1 - x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (Ax)_i = 1 \\ \text{e} \quad x^t Ax &= \begin{pmatrix} x_i & 1 - x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow (Ax)_i = x^t Ax \quad \forall x \in S_2. \end{aligned}$$

Ou seja, todo ponto $x \in S_2$ é ponto de equilíbrio do sistema (3.2) com tal matriz de payoff A. Dessa forma, $e_1 \neq \omega(x) \quad \forall x \in S_2 - \{e_1\}$, devido x ser ponto de equilíbrio. Portanto, a recíproca de **iii**) é falsa.

para iv) Considere o sistema (3.2) com $n=2$ e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por um lado considere $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ temos que

$$p^t A p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

e $\forall x = (x_1, 1 - x_1) \in S_2$

$$x^t A p = \begin{pmatrix} x_1 & 1 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Logo, $p^t A p = x^t A p \quad \forall x \in S_1$ e assim p é EN.

Por outro lado,

$$(Ax) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

e

$$x^t A x = \begin{pmatrix} x_1 & 1 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1(-1 + x_1) - x_1(1 - x_1).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(Ax)_1 - x^t A x \\ &= x_1(-1 + x_1) - x_1(-1 + x_1) + x_1(1 - x_1) \\ &= x_1 - (1 - x_1) + x_1(1 - x_1) + x_1(1 - x_1) \end{aligned}$$

Portanto o sistema (3.2) com a matriz A em questão pode ser escrito como

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1)(2x_1 - 1)$$

logo para $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ temos que

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})(2 \cdot \frac{1}{2} - 1) = 0$$

com isso, p é um ponto de equilíbrio. Definindo

$$G(x_1) = x_1(1 - x_1)(2x_1 - 1)$$

teremos

$$G'(x_1) = (1 - x_1)(2x_1 - 1) - x_1(2x_1 - 1) + 2x_1(1 - x_1) \Rightarrow G'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0.$$

Assim, $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é um ponto de equilíbrio instável. Logo, $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é EN, mas é um ponto de equilíbrio instável, Portanto, não vale a recíproca de **iv**). ■

Proposição 10. Se p é um ponto de equilíbrio de (3.2) em $\text{int}S_n$, então (p, p) é EN.

Demonstração: Com efeito, como p é um ponto de equilíbrio de (3.2) em $\text{int}(S_n)$ então

$(Ap)_i = p^t A p \quad \forall i$. Logo,

$$(Ap)_i = p^t A p \Leftrightarrow p^t A p = \sum_i x_i(p^t A p) = \sum_i x_i(Ap) = x^t A p \quad \forall x \in S_n.$$

Assim, $p^t A p = x^t A p \quad \forall x \in S_n$. Em particular,

$$p^t A p \geq x^t A p \quad \forall x \in S_n.$$

Portanto, p é um EN. ■

Teorema 6. *Todo jogo simultâneo, simétrico, com dois jogadores e com um número finito de estratégias puras, tem pelo menos um equilíbrio de Nash.*

Demonstração: Para $s \in \mathbb{R}$ considere o campo

$$V^s : S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dado por

$$V_i^s(x) = x_i[(Ax)_i - x^t Ax - ns] + s \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

a equação,

$$\dot{x} = V^s(x) \quad (3.10)$$

vale para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e suas soluções existem e estão unicamente determinadas pelas condições iniciais. Note ainda que (3.10) é uma perturbação (acréscimos de constante) da equação (3.2).

tomando $s > 0$ suficientemente pequeno, temos que

afirmação 1: o S_n e $\text{int}(S_n)$ são invariantes por (3.10).

Com efeito, seja $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $S(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)$ onde $x(t)$ é solução de (3.10). temos que :

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i[(Ax)_i - x^t Ax - ns] + \sum_{i=1}^n s \\ &= \sum_{i=1}^n x_i(Ax)_i - \sum_{i=1}^n x_i(x^t Ax) - \sum_{i=1}^n x_i ns + \sum_{i=1}^n s \\ &= x^t Ax - x^t Ax \sum_{i=1}^n x_i - ns \sum_{i=1}^n x_i + ns \\ &= x^t Ax(1 - \sum_{i=1}^n x_i) + ns(1 - \sum_{i=1}^n x_i) \\ &= (x^t Ax + ns)(1 - S(t)) \end{aligned}$$

Dessa forma, como a função constante $S(t) = 1$ é solução de $(x^t Ax + ns)(1 - S) = 0$, então toda solução $x(t)$ de (3.10) com condição inicial satisfazendo $S(t_0) = 1$ satisfaz $S(t) = \sum_i x_i = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Logo, S_n é invariante por (3.10). Agora, considere uma solução $x(t)$ de (3.10) com condição inicial

$$x(0) \in S_n(J) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i = 0 \quad \forall i \in J \subset \{1, \dots, n\}\}.$$

Sendo $x_i(0) = 0$, por (3.10) teremos que $\dot{x}_i(0) = s > 0$ e dessa forma para uma vizinhança de 0 temos que $x_i(t) > 0$ para todo t nessa vizinhança. Como $x(t) \in S_n$ para todo $t > 0$, podemos concluir que $x_i(t) > 0$ para todo $t > 0$ e para todo $i \in J$. Logo, o fluxo de (3.10) sobre o bordo de S_n está direcionado para o $\text{int}S_n$ (pois para $x \in \text{int}(S_n)$ tem-se que $x_i > 0$) e assim as soluções estarão em $\text{int}S_n$ para todo t . Portanto, $\text{int}(S_n)$ também é invariante por (3.10).

De agora em diante, vamos considerar apenas a restrição de (3.10) ao S_n .

Defina

$$F_\delta : S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dado por $F_\delta = x + \delta V^s(x)$ onde $\delta > 0$.

afirmação 2: $F_\delta(S_n) \subset \{x \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$.

Tome $y \in F_\delta(S_n)$ então existe x pertencente ao S_n , tal que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ e

$$y_i = x_i + \delta \cdot x_i [(Ax)_i - x^t Ax - ns] + s$$

dessa forma,

$$y_i = x_i + \delta x_i (Ax)_i - \delta x_i x^t Ax - \delta x_i ns + \delta s$$

então,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i &= \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \delta x_i (Ax)_i - \delta x^t Ax \sum_{i=1}^n x_i - n\delta s \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \delta s, \\ &= 1 + \delta x^t Ax - \delta x^t Ax - n\delta s + n\delta s, \\ &= 1. \end{aligned}$$

Sendo assim, y pertence ao hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ e portanto $F_\delta(S_n) \subset \{x \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ para todo δ .

Como F_δ é continua no compacto S_n , pois é soma de funções continuas, e o campo em ∂S_n aponta para o $\text{int} S_n$ (como vimos na afirmação 1), então juntamente com afirmação 2 podemos afirmar que $F_\delta(S_n) \subset S_n$ para δ suficientemente pequeno. Então para δ suficientemente pequeno F_δ é uma função onde,

$$F_\delta : S_n \rightarrow S_n.$$

Pelo teorema do ponto fixo de Brower, existe um ponto fixo $p(s)$ em S_n tal que

$$F_\delta(p(s)) = p(s).$$

Dessa forma,

$$p(s) + \delta V^s(p(s)) = p(s) \Rightarrow V^s(p(s)) = 0$$

Note também que pelo mesmo argumento visto na afirmação 1, o comportamento do fluxo de (3.10) sobre o bordo ∂S_n nos diz que $p(s)$ pertence ao $\text{int}(S_n)$. Com isso, $p(s) \in \text{int}(S_n)$ é um ponto de equilíbrio de (3.10) pois $V^s(p(s)) = 0$ e satisfaz

$$p_i(s) \left[\sum_{i=1}^n p_i(s) - p(s)^t A p(s) - ns \right] + s = 0$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n p_i(s) \left[\sum_{i=1}^n p_i(s) - p(s)^t A p(s) - ns \right] + s = -p(s) < 0 \text{ pois } p(s) > 0 \text{ já que } p(s) \in \text{int}(S_n) \quad (3.11)$$

Daí, Seja $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência monotona decrescente no intervalo $(0, s]$, onde $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k =$

0. Como a sequência $\{p(s_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ pertence ao compacto S_n , pelo teorema de Bolzano-

Weierstrass existe um conjunto infinito $\mathbb{N}^j \subset \mathbb{N}$ para o qual a sequência $\{p(s_k)\}_{k \in \mathbb{N}^j \subset \mathbb{N}}$ é convergente. Então seja $\lim_{k \in \mathbb{N}^j} p(s_k) = p$, $p \in S_n$. logo por (3.11)

$$\sum_{i=1}^n p_i(s_k) \left[\sum_{i=1}^n p_i(s_k) - p(s_k)^t A p(s_k) - ns_k \right] + s_k < 0$$

fazendo $k \in \mathbb{N}^j \subset \mathbb{N}$ tender ao infinito, teremos que

$$(Ap)_i - p^t A p \leq 0$$

Assim,

$$(Ap)_i \leq p^t Ap \Rightarrow e_i^t Ap \leq p^t Ap \quad \forall i = 1, \dots, n$$

então como vale para os vetores da base e_i de S_n então

$$x^t Ap \leq p^t Ap \quad \forall x \in S_n$$

Portanto, p é um EN. ■

Teorema 7. *Se todo ponto de equilíbrio x de (3.2) que seja um EN, é regular, isto é, $\det DV^0(x) \neq 0$ onde V^0 é o campo definido em (3.9) com $s = 0$, ou seja o campo*

$$\dot{x}_i = [(Ax)_i - x^t Ax]$$

então há apenas um número finito deles.

Demonstração: Suponha por absurdo que há infinitos pontos de equilíbrio de (3.2) em S_n que são EN e é regular. Então considere $\{P_1, P_2, \dots, P_m, \dots\}$ o conjunto infinito enumerável de tais pontos em S_n . Pela compacidade de S_n existe uma subsequência $(P_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ que converge para um ponto de S_n , seja $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{m_k} = p \in S_n$. Por um lado p também é regular, logo $|DV^0(p)| \geq c$ para algum $c > 0$. Além disso, como V^0 é um campo diferenciável então podemos escrevê-lo da seguinte forma: seja $x \in S_n$ onde $p + x \in S_n$, temos

$$V^0(p + x) - V^0(p) = DV^0(p)x + r(x)$$

$$\text{onde } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{|x|} = 0.$$

$$\text{De } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{|x|} = 0, \text{ dado } \frac{c}{2} > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{r(x)}{|x|} \right| < \frac{c}{2} \Rightarrow |r(x)| < \frac{c}{2}|x|.$$

Logo para $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x| < \delta$ e $p + x \in S_n$

$$|V^0(p + x) - V^0(p) - DV^0(p)x| = |r(x)| < \frac{c}{2}|x|$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} |V^0(p+x) - V^0(p) - DV^0(p)x| &= |DV^0(p)x - V^0(p+x) + V^0(p)| \\ &\geq |DV^0(p)| |x| - |V^0(p+x) - V^0(p)| \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |DV^0(p)| |x| - |V^0(p+x) - V^0(p)| &\leq |r(x)| \leq \frac{c}{2} |x| \\ \Rightarrow |DV^0(p)| - \frac{|V^0(p+x) - V^0(p)|}{|x|} &\leq \frac{c}{2} \\ \Rightarrow \frac{|V^0(p+x) - V^0(p)|}{|x|} &\geq |DV^0(p)| - \frac{c}{2} \\ &\geq c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\frac{|V^0(p+x) - V^0(p)|}{|x|} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, 0 < |x| < \delta \text{ e } p+x \in S_n. \quad (3.12)$$

Mas, para $\delta > 0$, existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$, temos que

$$0 < |P_{m_k} - p| < \delta.$$

Com isso,

$$\frac{|V^0(p + P_{m_k} - p) - V^0(p)|}{|P_{m_k} - p|} = \frac{|V^0(P_{m_k}) - V^0(p)|}{|P_{m_k} - p|} = 0$$

pois V^0 é um campo contínuo e k é suficientemente grande tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{m_k} = p$, garantido que $|V^0(P_{m_k}) - V^0(p)| = 0$ para k suficientemente grande. E isto contradiz (3.12). Tal contradição se dá ao supormos que existe uma quantidade infinita de pontos de equilíbrio de equilíbrio de Nash, pois a partir disto conseguimos montar a sequência que ocasionou a contradição. Portanto há apenas uma quantidade finita de pontos de Equilíbrio de Nash que são regulares. ■

3.3 Jogo Pedra-Papel-tesoura

O Jogo Pedra-Papel-tesoura é um jogo simétrico caracterizado por três estratégias puras E_1, E_2, E_3 , com a seguinte regra

E_2 vence E_1 ,

E_3 vence E_2 ,

E_1 vence E_3 .

Se ambos usam a mesma estratégia pura, ocorre o empate. A matriz de payoff para um jogador g_k nesse jogo é dado por

$$\Lambda = (\lambda_{ij}) = \begin{bmatrix} E & D & V \\ V & E & D \\ D & V & E \end{bmatrix}$$

onde **E,D,V** significa empate, derrota e vitória respectivamente para tal jogador. Isto significa que quando um jogador g_k usa E_i , $i = 1, 2, 3$ o resultado do jogo para ele é **E,D,V** conforme a estratégia E_i, E_{i+1}, E_{i-1} usada pelo outro jogador respectivamente (com essa análise identificamos E_0 com E_3 e E_4 com E_1) .

atribuindo valores λ_{ij} , respeitando as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \lambda_{i,i+1} &< \lambda_{ii} < \lambda_{i,i-1} \\ \lambda_{i-1,i} &< \lambda_{ii} < \lambda_{i+1,i} \end{aligned}$$

tal que $\lambda_{i,i+1}$ e $\lambda_{i-1,i}$ são os valores que representa a derrota (D), λ_{ii} é o valor associado ao empate(E), $\lambda_{i,i-1}$ e $\lambda_{i+1,i}$ os valores associado a vitória (V). Então, pela proposição 7 o sistema

$$\dot{x}_i = x_i[(\Lambda x)_i - x^t \Lambda x], i = 1, 2, 3$$

permanece inalterado se somarmos a Λ uma matriz cujos elementos da i -ésima coluna são $-\lambda_{ii}$. Com isso, efetuando tal soma para $i=1,2,3$ teremos a seguinte matriz

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -a_2 & b_3 \\ b_1 & 0 & -a_3 \\ -a_1 & b_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde as constante a_i, b_j são positivas . Portanto, podemos reescrever o sistema acima como

$$\dot{x}_i = x_i[(Ax)_i - x^t Ax], \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.14)$$

Observação 5. Como visto na observação 4, os vértices e_i são pontos de equilíbrio de (3.14), uma vez que tal sistema é um caso particular de (3.2) .

Proposição 11. Se A não é singular (A é invertível), então não há pontos de equilíbrio em $\partial S - \{e_1, e_2, e_3\}$

Demonstração: De fato, fixe $i \in \{1, 2, 3\}$ e considere $x = se_i + (1 - s)e_j$, onde $j=i+1$ e $s \in (0, 1)$. Note que para $i=1$, e considerando os e_i como sendo a base canônica do $\mathbb{R}^3$, temos

$$x = se_1 + (1 - s)e_2 = (s, 1 - s, 0) \in \partial S_n - \{e_1, e_2, e_3\}$$

daí,

$$(Ax) = \begin{pmatrix} 0 & -a_2 & b_3 \\ b_1 & 0 & -a_3 \\ -a_1 & b_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 1-s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2(1-s) \\ b_1s \\ -a_1s + b_2(1-s) \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$(Ax)_i = -a_2(1 - s) = -a_j(1 - s), j = 1 + 1$$

e

$$x^t Ax = \begin{pmatrix} s & 1-s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_2(1-s) \\ b_1s \\ -a_1s + b_2(1-s) \end{pmatrix} = -a_2(1-s)s + b_1(1-s)s = -a_j(1-s)s + b_i(1-s)s.$$

Generalizando, $(Ax)_i = -a_j(1 - s)$ e $x^t Ax = -a_j(1 - s)s + b_i(1 - s)s$.

Assim, por um lado,

$$\begin{aligned} (Ax)_i - x^t Ax &= -a_j(1 - s) + sa_j(1 - s)s - b_i(1 - s)s, \\ &= (1 - s)(-a_j + a_js) + b_i(s - 1)s, \\ &= (1 - s)a_j(s - 1) + b_i(s - 1)s, \\ &= (s - 1)((1 - s)a_j + b_is). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & -a_2 & b_3 \\ b_1 & 0 & -a_3 \\ -a_1 & b_2 & 0 \end{pmatrix} = -a_2 a_3 a_1 + b_1 b_2 b_3 \neq 0$$

pois A é não-singular. Com isso, e pelo fato de $s \in (0, 1)$ temos que $(Ax)_i - x^t A x \neq 0$ e portanto não há pontos de equilíbrio em $\partial S - \{e_1, e_2, e_3\}$. ■

Observação 6. O sistema (3.14) possui um único ponto de equilíbrio em $\text{int}(S_n)$.

Para demonstrar isso vamos mostrar que o sistema:

$$\begin{aligned} (Ax)_1 &= (Ax)_2 = (Ax)_3 \\ \sum_{i=1}^3 x_i &= 1 \end{aligned}$$

Possui uma única solução.

Com efeito, seja $x = (x_1, x_2, x_3) \in \text{int} S_n$, temos que

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & -a_2 & b_3 \\ b_1 & 0 & -a_3 \\ -a_1 & b_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 x_2 + b_3 x_3 \\ b_1 x_1 - a_3 x_3 \\ -a_1 x_1 + b_2 x_2 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (Ax)_1 &= b_3 x_3 - a_2 x_2 \\ (Ax)_2 &= b_1 x_1 - a_3 x_3 \\ (Ax)_3 &= b_2 x_2 - a_1 x_1 \end{aligned}.$$

Com isso,

$$(Ax)_1 = (Ax)_2 \Leftrightarrow b_3 x_3 - a_2 x_2 = b_1 x_1 - a_3 x_3 \Leftrightarrow b_1 x_1 + a_2 x_2 - (a_3 + b_3) x_3 = 0$$

e,

$$(Ax)_3 = (Ax)_1 \Leftrightarrow b_2 x_2 - a_1 x_1 = b_3 x_3 - a_2 x_2 \Leftrightarrow a_1 x_1 - (a_2 + b_2) x_2 + b_3 x_3 = 0$$

lembrando que $\sum_{i=1}^3 x_i = 1$, dessa forma podemos representar o sistema da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_2 & -a_3 - b_3 \\ a_1 & -a_2 - b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

calculando o determinante da matriz desse sistema, teremos

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & a_2 & -a_3 - b_3 \\ a_1 & -a_2 - b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -b_1 a_2 - b_1 b_2 + a_2 b_3 - a_1 a_3 - a_1 b_3 - (a_2 a_3 + a_3 b_2 + a_2 b_3 b_3) - b_1 b_3 - a_1 a_2$$

logo,

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & a_2 & -a_3 - b_3 \\ a_1 & -a_2 - b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_2 a_3 - a_2 b_1 - a_1 b_3 - a_3 b_2 - b_1 b_2 - b_1 b_3 b_2 b_3 < 0$$

Portanto o sistema admite uma única solução e conseqüentemente um único ponto de equilíbrio.

Observação 7. (ver [11]) O único ponto de equilíbrio de (3.14) em $\text{int}(S_n)$ é

$$p = \frac{1}{\Delta A} (a_2 a_3 + a_3 b_2 + b_2 b_3, a_1 a_3 + a_1 b_3 + b_1 b_3, a_1 a_2 + a_2 b_1 + b_1 b_2)$$

Com

$$\Delta A = -\det \begin{pmatrix} b_1 & a_2 & -a_3 - b_3 \\ a_1 & -a_2 - b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

. Pela observação anterior podemos perceber que $\Delta A > 0$.

Proposição 12. O ponto de equilíbrio p de (3.14) pertencente ao $\in \text{int}(S_n)$ satisfaz

$$p^t A p = \frac{1}{\Delta A} \det A$$

.

Demonstração: com efeito,

$$\begin{aligned}
 p^t A p &= (A p)_1 = b_3 p_3 - a_2 p_2 \\
 &= \frac{1}{\Delta A} [b_3(a_1 a_2 + a_2 b_1 + b_1 b_2) - a_2(a_1 a_3 + a_1 b_3 + b_1 b_3)] \\
 &= \frac{1}{\Delta A} [a_1 a_2 b_3 + a_2 b_1 b_3 + b_1 b_2 b_3 - a_2 a_1 a_3 - a_1 b_3 a_2 - b_1 b_3 a_2] \\
 &= \frac{1}{\Delta A} [b_1 b_2 b_3 - a_1 a_2 a_3]
 \end{aligned}$$

Portanto, $p^t A p = \frac{1}{\Delta A} \det A$. (O resultado também é válido considerando $p^t A p = (A p)_2$

ou $p^t A p = (A p)_3$ pois p é ponto de equilíbrio). ■

Lema 1. Seja $q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \text{int}(S_n)$ e $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{q_i}$$

então q é o ponto de máximo da função ϕ restrita a S_n .

Demonstração: Primeiro temos que

$$\begin{aligned}
 \nabla \phi(x) &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right), \\
 &= \left(q_1 x_1^{q_1-1} \prod_{i=1}^n x_i^{q_i}, \dots, q_n x_n^{q_n-1} \prod_{i=1}^n x_i^{q_i} \right), \\
 &= \left(q_1 \frac{x_1^{q_1-1}}{x_1} \prod_{i=1}^n x_i^{q_i}, \dots, q_n \frac{x_n^{q_n-1}}{x_n} \prod_{i=1}^n x_i^{q_i} \right), \\
 &= \left(q_1 \prod_{i=1}^n x_i^{q_i}, \dots, q_n \prod_{i=1}^n x_i^{q_i} \right), \\
 &= \left(q_1 \prod_{i=1}^n x_i^{q_i}, \dots, q_n \prod_{i=1}^n x_i^{q_i} \right).
 \end{aligned}$$

logo,

$$\nabla \phi(x) = \phi(x) \left(\frac{q_1}{x_1}, \dots, \frac{q_n}{x_n} \right).$$

Uma vez que S_n é compacto, considere $c = \max\{a \in \mathbb{R}; S_n \cap \{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x) = a\} \neq \emptyset\}$ note que um ponto de máximo $\bar{x}$ de ϕ em S_n intersecta a hipersuperfície de nível c de ϕ (ou seja, a curva de nível obtida pela imagem inversa $\phi^{-1}(c)$). Defina $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\psi(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Então, $S_n = \psi^{-1}(1)$ e $\nabla \psi(x) = (1, 1, \dots, 1)$. Como desejamos encontrar o ponto de máximo da função ψ , supondo $\bar{x}$ com tal ponto então pela condição de multiplicador de Lagrange existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que

$$\nabla \psi(\bar{x}) = \lambda \nabla \phi(\bar{x}) \Rightarrow (1, \dots, 1) = \lambda \phi(\bar{x}) \left(\frac{q_1}{\bar{x}_1}, \dots, \frac{q_n}{\bar{x}_n} \right). \quad (3.15)$$

Afirmção 1 : A condição (3.15) é satisfeita para $\bar{x} = q$.

Para mostrar isso, é suficiente mostrar que conseguimos encontrar o valor de λ para $\bar{x} = q$.

Como

$$\begin{aligned} (1, 1, \dots, 1) &= \lambda \phi(q) \left(\frac{q_1}{q_1}, \dots, \frac{q_n}{q_n} \right) \\ &= \lambda \phi(q) (1, 1, \dots, 1) \\ &= (\lambda \phi(q), \lambda \phi(q), \dots, \lambda \phi(q)) \end{aligned}$$

logo,

$$1 = \lambda \phi(q) \text{ e como } q \in \text{int}(S_n) \text{ tem-se que } q \neq 0 \in \mathbb{R}^n \text{ e assim, } \lambda = \frac{1}{\phi(q)}.$$

Afirmção 2: q é único.

Suponha que exista $r \in \text{int} S_n$ que também cumpre (3.15). Então

$$1 = \lambda \phi(r) \frac{q_i}{r_i} \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \lambda \phi(r) \frac{q_i}{r_i} = \lambda \phi(r) \frac{q_j}{r_j} \quad \forall i, j \Rightarrow \frac{q_i}{r_i} = \frac{q_j}{r_j} \quad \forall i, j \Rightarrow r_i = q_i \frac{r_j}{q_j} \quad \forall i, j$$

como $r, q \in \text{int} S_n$, temos

$$1 = \sum_{i=1}^n r_i = \sum_{j=1}^n q_j \Rightarrow 1 = \frac{r_j}{q_j} \Rightarrow r_j = q_j \quad \forall j$$

Portanto, q é o ponto de máximo da função ϕ restrita a S_n . ■

Teorema 8. As seguintes condições são equivalentes para a equação (3.14):

- (a) p é assintoticamente estável
- (b) p é globalmente estável
- (c) $\det A > 0$
- (d) $p^t A p > 0$ onde p é ponto de equilíbrio do sistema (3.14)

Demonstração: Primeiro note que $c \Leftrightarrow d$ é imediato.

De fato, uma vez que p é ponto de equilíbrio de (3.14), pela proposição 12, temos que

$$p^t A p = \frac{1}{\Delta A} \det A$$

e como vimos na observação 7, $\Delta A > 0$. Segue que $\det A > 0$ se, e somente se, $p^t A p > 0$.

Vamos mostrar as demais equivalências. Para isto, considere a seguinte equação

$$\dot{x}_i = x_i[(Bx)_i - x^t B x], \quad i = 1, 2, 3 \text{ tal que } B = \begin{bmatrix} 0 & b_2 & -a_3 \\ -a_1 & 0 & b_3 \\ b_1 & -a_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

onde os a_i, b_j são as mesmas constantes da matriz A em (3.13) e que

$$\det B = b_1 b_2 b_3 - a_1 a_2 a_3 > 0.$$

De forma análoga a demonstração da observação (6), podemos mostrar que existe um único ponto de equilíbrio $v \in \text{int} S_3$ da equação (3.16). De fato pois

$$Bv = \begin{bmatrix} 0 & b_2 & -a_3 \\ -a_1 & 0 & b_3 \\ b_1 & -a_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 v_2 - a_3 v_3 \\ -a_1 v_1 + b_3 v_3 \\ b_1 v_1 - a_2 v_2 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (Bv)_1 &= b_2 v_2 - a_3 v_3 \\ (Bv)_2 &= -a_1 v_1 + b_3 v_3 \\ (Bv)_3 &= b_1 v_1 - a_2 v_2 \end{aligned}$$

Dessa forma, sendo v um ponto de equilíbrio do sistema (3.16), então

$$v^t B v = (Bv)_1 = (Bv)_2 = (Bv)_3 = c.$$

Assim, temos que

$$(Bv)_1 = (Bv)_2 \Leftrightarrow b_2v_2 - a_3v_3 = -a_1v_1 + b_3v_3 \Leftrightarrow -a_1v_1 + b_3v_3 - b_2v_2 + a_3v_3 = 0.$$

Logo,

$$-a_1v_1 - b_2v_2 + (a_3 + b_3)v_3 = 0.$$

e da igualdade $(Bv)_3 = (Bv)_1$, temos

$$b_1v_1 - a_2v_2 = b_2v_2 - a_3v_3 \Leftrightarrow b_2v_2 - a_3v_3 - b_1v_1 + a_2v_2 = 0 \Leftrightarrow -b_1v_1 + (a_2 + b_2)v_2 - a_3v_3 = 0$$

e Como $\sum_{i=1}^3 v_i = 1$, teremos

$$\begin{bmatrix} -a_1 & -b_2 & a_3 + b_3 \\ -b_1 & a_2 + b_2 & -a_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde o determinante da matriz do sistema é

$$-a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3 - a_1b_2 - a_2b_3 - a_3b_1 - b_1b_2 - b_2b_3 - b_1b_3 < 0$$

Portanto, v é o único ponto de equilíbrio do sistema (3.16). Como visto na proposição (12), v satisfaz

$$v^t B v = \frac{1}{\Delta B} \det B$$

onde,

$$\Delta B = -\det \begin{bmatrix} -a_1 & -b_2 & a_3 + b_3 \\ -b_1 & a_2 + b_2 & -a_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\Delta B = -(-a_1a_2 - a_2a_3 - a_1a_3 - a_1b_2 - a_3b_1 - a_2b_3 - a_3b_2 - b_1b_2 - b_1b_3) > 0.$$

Pelo teorema 1, a transformação projetiva $F : S_3 \rightarrow S_3$ dado por $F(x) = y$ onde $y_i = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{v_j}}$ (tome $c_j = \frac{1}{v_j}$) é uma conjugação entre o sistema (3.14) e o seguinte sistema

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i[(Cx)_i - x^t Cx], \quad i = 1, 2, 3 \text{ tal que } C = \begin{bmatrix} 0 & -v_2a_2 & v_3b_3 \\ v_1b_1 & 0 & -v_3a_3 \\ -v_1a_1 & v_2b_2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dessa forma, o jogo cuja matriz C é do tipo pedra-papel-tesoura e satisfaz

$$v_i b_i - v_{i+1} a_{i+1} = c \text{ (pois } v^t B v = (Bv)_1 = (Bv)_2 = (Bv)_3 = c \text{)}.$$

Seja $\phi(x) = \sum_{i=1}^n x^{q_i}$, onde $q = F(p) \in \text{int}S_n$ é ponto de equilíbrio de (3.17). Considere

$$\dot{\phi}(x(t)) := \frac{d}{dt} \phi(x(t))$$

e $x(t)$ soluções de (3.17), temos que

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x(t)) &= (\nabla \phi(x), \dot{x}(t)) \\ &= (\phi(x) \left[\frac{q_1}{x_1}, \frac{q_2}{x_2}, \dots, \frac{q_n}{x_n} \right], (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)) \text{ (lema 1) }, \\ &= \phi(x) \sum_{i=1}^n q_i [(Cx)_i - x^t Cx] \quad (\text{pois } x(t) \text{ é solução onde } \dot{x}_i = x_i [(Cx)_i - x^t Cx]), \\ &= \phi(x) \sum_{i=1}^n q_i (Cx)_i - \sum_{i=1}^n q_i x_i^t Cx, \quad (\text{pois } \sum_{i=1}^n q_i = 1, q \in \text{int}S_n), \\ &= -\phi(x) [(x - q)^t Cx]. \end{aligned}$$

Note também que $(x - q)^t Cq = 0$ pois como q é ponto de equilíbrio

$$(Cq)_i - q^t Cq = 0$$

e $(Cq)_1 = (Cq)_2 = (Cq)_3$. Então, $e^t Cq = e^2 Cq = e^3 Cq$. Assim, $e^t Cq - q^t Cq = 0$. Como é válido para a base canônica então é válido para $x \in S_n$, isto é, $x^t Cq - q^t Cq = 0$ de onde segue que $(x - q)^t Cq = 0$. logo temos

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x(t)) &= -\phi(x) [(x - q)^t Cx - (x - q)^t Cq], \\ &= -\phi(x) [(x - q)^t (Cx - Cq)], \\ &= -\phi(x) [(x - q)^t C(x - q)], \\ &= -\phi(x) [\xi^t C\xi], \text{ onde } \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (x - q). \end{aligned}$$

Como

$$\xi^t C\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -v_2 a_2 & v_3 b_3 \\ v^1 b^1 & 0 & -v^3 a^3 \\ -v_1 a_1 & v_2 b_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

teremos

$$\begin{aligned} \xi^t C \xi &= (\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2) \begin{pmatrix} -\xi_2 v_2 a_2 + \xi_3 v_3 b_3 \\ \xi_1 v_1 b_1 - \xi_3 v_3 a_3 \\ -\xi_1 v_1 a_1 + \xi_2 v_2 b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \xi^t C \xi &= -\xi_1 \xi_2 v_2 a_2 + \xi_1 \xi_3 v_3 b_3 + \xi_2 \xi_1 v_1 b_1 - \xi_2 \xi_3 v_3 a_3 - \xi_3 \xi_1 v_1 a_1 + \xi_3 \xi_2 v_2 b_2 \\ &= (v_1 b_1 - v_2 a_2) \xi_1 \xi_2 + (v_2 b_2 - v_3 a_3) \xi_2 \xi_3 + (v_3 b_3 - v_1 a_1) \xi_1 \xi_3 \\ &= c \xi_1 \xi_2 + c \xi_2 \xi_3 + c \xi_1 \xi_3, \text{ (pois } v_i b_i - v_{i+1} a_{i+1} = c) \end{aligned}$$

Com isso, teremos que $\dot{\phi}(t) = -c\phi(x)[\xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_1 \xi_3]$.

Além disso, como $\xi = x - q$ onde $x, q \in S_n$ observe que:

$$\xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_1 \xi_3 = \frac{1}{2}[(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)] \leq 0$$

onde a desigualdade é estrita $\forall \xi \neq 0$, isto é $\forall x \neq q$. O sinal de c nos dá as seguintes informações sobre o comportamento das soluções de (3.17) :

1) Se $c = 0$ então $\dot{\phi}$ é constante ao longo das órbitas de (3.17), digamos $\phi(x) = \alpha \forall x \in S_n$. Desta forma, a imagem inversa ϕ^{-1} determina as curvas de nível α onde localmente teríamos órbitas periódicas, e como q é o único ponto de equilíbrio, tais órbitas estariam no entorno de q , ou seja q seria um centro.

2) Se $c > 0$, então $\dot{\phi}(x) > 0$ para todo $x \in \text{int}S_3 - \{q\}$, então pelo teorema de Lyapunov, temos que

$$\omega(x) \cap \text{int}S_3 \subset \{x \in \text{int}S_3; \phi(x) = 0\}$$

Logo pela lema 1, q é o único ponto de máximo da função ϕ , assim $\phi(q) = 0$, e

$$\omega(x) \cap \text{int}S_3 \subset \{q\}$$

onde q é ponto de equilíbrio e neste caso q é assintoticamente estável e globalmente estável.

3) Se $c < 0$ então $\dot{\phi}(x) < 0$ para todo $x \in \text{int}S_3 - \{q\}$ de onde segue também pelo teorema de Lyapunov que $\alpha(x) \subset \{q\}$. Ou seja, as órbitas de (3.17) se afastam de q a

medida que o parâmetro t cresce ($t \rightarrow +\infty$), exceto pela órbita constante $\{q\}$ uma vez que q é um ponto de equilíbrio. Como para toda solução $x(t) \in \text{int}S_3 - \{q\}$ a função

$$t \rightarrow \phi(x(t))$$

é decrescente (pois $\phi(x) < 0$) e limitada já que $\phi(x) = \prod_{i=1}^q x_i^{q_i}$ com $x, q \in \text{int}(S_3)$, então o $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(x(t))$ existe.

afirmação $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(x(t)) = 0$

Com efeito, suponhamos por absurdo que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(x(t)) = r > 0$ para alguma solução $x(t)$ de (3.17) em $\text{int}S_3 - \{q\}$ então obtemos $\omega(x(t_0)) \subset \phi^{-1}(r)$. Dessa forma, como as órbitas se afastam de $\{q\}$ quando $t \rightarrow +\infty$ isso nos diz que $q \notin \omega(x(t_0))$, Logo pelo teorema de Poincaré-Bendixon o conjunto $\omega(x(t_0))$ é uma órbita periódica, ou seja, ϕ seria constante ao longo dessa órbita. Mas, ϕ é estritamente decrescente ao longo das soluções de (3.17) em $\text{int}S_3 - \{q\}$, o que é uma contradição. Portanto $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(x(t)) = 0$ e toda solução em $\text{int}S_3 - \{q\}$, tende a ∂S_3 quando $t \rightarrow +\infty$, pois para que tal limite aconteça, $x_i \rightarrow 0$ para algum i .

Logo, pelo fato dos sistemas (3.14) e (3.17) serem topologicamente conjugados, temos que

- se $c = 0 \Leftrightarrow p$ é centro.
- se $c > 0 \Leftrightarrow p$ é assintoticamente estável e globalmente estável.
- se $c < 0 \Leftrightarrow p$ é instável, uma vez que as orbitas se dispersam para ∂S_3 .

E como $\det B = \det A = b_1 b_2 b_3 - a_1 a_2 a_3$ e $\Delta B > 0$ teremos

$$c = v^t B v = \frac{\det B}{\Delta B} = \frac{\det A}{\Delta B}$$

Com isso, $c > 0$ se, e somente se, $\det A > 0$ concluindo assim que p é assintoticamente estável e globalmente estável se, e somente se, $\det A > 0$. Portanto, $a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c \Leftrightarrow d$. ■

3.4 A Equação Geral de Lotka-Volterra

A Equação Geral de Lotka-Volterra descreve a dinâmica populacional de indivíduos que interagem entre si num ambiente fechado. Para n -populações a Equação Geral de

Lotka-Volterra é dado por (ver [11])

$$\dot{x}_i = x_i \left(r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.18)$$

onde:

$x_i \rightarrow$ é a densidade de uma população,

$r_i \rightarrow$ são as taxas intrínsecas de crescimento (ou decrescimento),

$a_{ij} \rightarrow$ descreve o efeito do j -ésima população sobre a i -ésima população.

Os a_{ij} podem ser positivos, negativos ou nulos dependendo se a influência da população j é positiva, negativa ou neutra respectivamente, sobre o crescimento da população i .

A matriz $A := (a_{ij})$ é chamada de **matriz de interação**.

Observação 8. Dado $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$, a unicidade das soluções garantem que toda solução $x(t)$ de (3.18) com condição inicial $x(0) \in \{x \in \mathbb{R}^n; x_i = 0 \ \forall i \in J\}$ satisfaz $x(t) \in \{x \in \mathbb{R}^n; x_i = 0 \ \forall i \in J\}$. Logo, $\mathbb{R}_+^n$ é invariante por esta equação.

A equação (3.18) descreve todas as interações entre as populações assumindo que a influência de uma população sobre taxas de crescimento per capita das demais é linear.

Definição 10. O sistema (3.18) é dito **competitivo**, quando as interação entre as populações é do tipo competitiva (indivíduos competem uns com os outros), isto é, os coeficientes a_{ij} da matriz de interação são negativos.

Definição 11. O sistema (3.18) é dito **cooperativo**, quando as interações entre as populações são do tipo cooperação (indivíduos cooperam uns com os outros). Neste caso, $a_{ii} < 0$ e $a_{ij} > 0 \ \forall i \neq j$.

Quando a interação é do tipo simbiose, que é um tipo de relação harmônica que é neutra para um dos envolvidos, a matriz de interação para essa relação é como da cooperação, exceto pelo fato de que $a_{ij} = 0$ para algum (não todos) $i \neq j$.

Quando se tratar do caso onde a Equação Geral de Lotka-Volterra (3.18) modelar uma relação de predador-presa entre duas populações, as entradas da matriz de interação são

$$a_{12} > 0, a_{21} < 0 \quad \text{e} \quad a_{ii} < 0$$

onde para $i=1$ refere-se a população de predadores e para o índice $i=2$ as de presas.

Teorema 9. *A equação Lotka-Volterra bidimensional*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a + bx + cy), \\ \dot{y} &= y(d + ex + fy) \end{aligned} \quad (3.19)$$

não admite órbita periódica isolada.

Demonstração: Suponha que γ seja uma órbita periódica de (3.19) em $\mathbb{R}_+^2$. Então pela aplicação do teorema de Teorema de Poincaré-Bendixon (A1) existe um ponto de equilíbrio de (3.19) em $\text{int}(\gamma) \subset \text{int}(\mathbb{R}_+^2)$ onde $\text{int}(\gamma)$ é a componente convexa limitada de $\mathbb{R}_+^2 \setminus \gamma$. Dessa forma, as isoclinas

$$\begin{aligned} (a + bx + cy) &= 0, \\ (d + ex + fy) &= 0, \end{aligned}$$

devem se intersectar no $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$ e tal intersecção deve conter apenas um ponto . Pois caso contrário, se tal intersecção contivesse mais de um ponto as retas descritas pelas equações acima seriam coincidentes. logo não poderia existir órbita periódica γ já que a mesma teria ponto de equilíbrio em seu interior e como as retas isoclinas contem os pontos de equilíbrio de (3.19) , elas iriam se intersectar com a órbita periódica γ e isso não poderia acontecer. Note também que tais retas não poderiam ser paralelas, pois como γ possui ponto de equilíbrio em seu interior então teria que se intersectar com umas das isoclinas. Mas um ponto de equilíbrio deve satisfazer as equações (3.19) simultaneamente. Com isso, as isoclinas

$$\left\{ \left(0, -\frac{a}{c}\right) + s\left(1, -\frac{b}{c}\right); s \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \left(0, -\frac{d}{f}\right) + s\left(1, -\frac{e}{f}\right); s \in \mathbb{R} \right\}$$

não são paralelas, e portanto $\frac{b}{c}f = e$.

Define $G(x, y) = x(a + bx + cy)$, $H(x, y) = y(d + ex + fy)$ e $B(x, y) = x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$ onde α, β

serão especificadas mais adiantes. A divergência do campo de vetores (BG, BH) será

$$\begin{aligned}
 \text{div}(BG, BH) &= \frac{\partial}{\partial x} [x^{\alpha-1} y^{\beta-1} x(a + bx + cy)] + \frac{\partial}{\partial y} [x^{\alpha-1} y^{\beta-1} y(d + ex + fy)] \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} [x^{\alpha} y^{\beta-1} (a + bx + cy)] + \frac{\partial}{\partial y} [x^{\alpha-1} y^{\beta} (d + ex + fy)] \\
 &= [\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta-1} (a + bx + cy) + x^{\alpha} y^{\beta-1} b] + [x^{\alpha-1} \beta y^{\beta-1} (d + ex + fy) + x^{\alpha-1} y^{\beta} f] \\
 &= x^{\alpha-1} y^{\beta-1} [\alpha(a + bx + cy) + xb + \beta(d + ex + fy) + yf] \\
 &= B(x, y)[\alpha a + x(ab + \beta e + b) + y(\alpha c + \beta f + f) + \beta d] .
 \end{aligned}$$

Dessa forma, com o intuito de aplicar o teorema de Bendixon-Dulac (A2) escolhemos α, β tais que

$$\alpha b + \beta e + b = 0 ,$$

$$\alpha c + \beta f + f = 0 ,$$

com isso, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} (BG) + \frac{\partial}{\partial y} (BH) = B[\alpha a + \beta d] . \quad (3.20)$$

Note que como $bf \neq ce$, já que as isoclinas não são paralelas, então α e β estão unicamente determinados. Como estamos considerando que (3.19) admite órbita periódica γ , então pelo teorema de Bendixon- Dulac (onde $B(x,y)$ será a função de dulac), temos que

$$\alpha a + \beta d = 0 .$$

Logo de (3.20),

$$-\frac{\partial}{\partial x} (BG) = \frac{\partial}{\partial y} (BH)$$

que é uma condição de integrabilidade para o campo vetorial bidimensional $(BH, -BG)$.

Portanto, existe uma função $V=V(x,y)$ definida em $\mathbb{R}^2_+$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = BH \quad e \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -BG$$

A derivada da função

$$t \rightarrow V(x(t), y(t)) .$$

satisfaz

$$\dot{V} = (\nabla V(x, y), (\dot{x}, \dot{y})) = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \dot{y} = BHG - BGH = 0 .$$

Portanto, $V(x, y) = \lambda$, onde λ é uma constante. Assim, as órbitas de (3.19) estão contidas em curvas de nível da função V . Em particular γ é uma curva de nível V . Dessa forma, pela continuidade de V nas orbitas do sistema (3.19), γ não é uma órbita periódica isolada. Portanto, (3.19) não admite órbita periódica. ■

Observação 9. Note que os pontos de equilíbrio da equação de Lotka-Volterra (3.18) no $\text{int}(\mathbb{R}_+^n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i > 0\}$ satisfazem

$$r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

isto é, são soluções do sistema linear

$$Ax = (-r_1, \dots, -r_n)^t$$

Os pontos de equilíbrio nas faces de $\mathbb{R}_+^n$ são determinados de forma análoga.

Observação 10. Em geral, existe no máximo um ponto de equilíbrio de (3.18) em $\text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ que é no caso quando $\det(A) \neq 0$. Dessa forma, teremos uma única solução no sistema linear $Ax = (-r_1, \dots, -r_n)^t$ e consequentemente um único ponto de equilíbrio.

Teorema 10. O $\text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ contém o α -limite ou o ω -limite de algum ponto de $\mathbb{R}_+^n$ se, e somente se, a Equação de Lotka-Volterra (3.18) admite um ponto de equilíbrio no $\text{int}(\mathbb{R}_+^n)$.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Por hipótese seja $p \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ um ponto de equilíbrio de (3.18).

Nesse caso $\alpha(p) = \omega(p) = p \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$. Portanto, $\alpha(p) = \omega(p) \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$.

($\Rightarrow$) Suponha que (3.18) não admita ponto de equilíbrio em $\text{int}(\mathbb{R}_+^n)$. Defina a aplicação

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dada por

$$f(x) = Ax + r \quad \text{i.e.} \quad f_i(x) = r_i + (Ax)_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Note que

(i) o conjunto $f^{-1}(\text{int}(\mathbb{R}_+^n))$ não contém a origem uma vez que (3.18) não possui ponto de

equilíbrio ($r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$).

(ii) O conjunto $f^{-1} \text{int}(\mathbb{R}^n)^{\Sigma}$ é convexo, pois é a imagem de um conjunto convexo por uma função afim.

De fato, dado $s, q \in f^{-1} \text{int}(\mathbb{R}_+^n)^{\Sigma}$, $\exists a, b \in \text{int}_+(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$s = f(a) = Aa + r \quad e \quad q = f(b) = Ab + r$$

logo,

$$\begin{aligned} st + (1-t)q &= (Aa + r)t + (1-t)(Ab + r) \\ &= Aat + tr + (1-t)Ab + (1-t)r \\ &= A \dot{a}t + (1-t)b^{\Sigma} + r \\ &= f^{-1}at + (1-t)b^{\Sigma} \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Como $at + (1-t)b \in \text{int}(\mathbb{R}^n)$, assim $st + (1-t)q \in f^{-1} \text{int}(\mathbb{R}^n)^{\Sigma}$ e portanto convexo. Dessa forma por (i) e (ii) existe um hiperplano H contendo a origem $0 \in \mathbb{R}^n$ (onde H sem perda de generalidade pode ser $H = Ax$) tal que $H \cap f^{-1} \text{int}(\mathbb{R}_+^n)^{\Sigma} = \emptyset$. Este hiperplano separa o $\mathbb{R}^n$ em duas componentes conexas uma das quais contém $f^{-1} \text{int}(\mathbb{R}_+^n)^{\Sigma}$. Com isso, tome $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$ ortogonal à H e contido na mesma componente conexa de $f^{-1} \text{int}(\mathbb{R}_+^n)^{\Sigma}$ ou seja

$$(v, x) = 0 \quad \forall x \in H \quad e \quad (v, y) > 0 \quad \forall y \in f^{-1} \text{int}(\mathbb{R}_+^n)^{\Sigma}.$$

Considere a seguinte função de Lyapunov

$$\begin{aligned} V: \mathbb{R}_+^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow V(x) = \sum_{i=1}^n v_i \ln x_i, \end{aligned}$$

logo se $x(t)$ é solução de (3.18) com condição inicial $x(0) = x_0 \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$, temos que:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \frac{v_i}{x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i f_i(x) \\ &= (v, f(x)) > 0. \end{aligned}$$

Assim, V é crescente ao longo das orbitas no $\text{int}(\mathbb{R}_+^n)$. Dessa forma, $\text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ não contém α -limite ou ω -limite pois caso contrario, $\omega(x) \cap \text{int}(\mathbb{R}_+^n) \neq \emptyset$, Então pelo teorema de Lyapunov teríamos que

$$\omega(x) \cap \text{int}(\mathbb{R}_+^n) \subset \{\text{int}(\mathbb{R}_+^n); \dot{V}(x) = 0\}$$

Mas, $\{\text{int}(\mathbb{R}_+^n); \dot{V}(x) = 0\} = \emptyset$ já que $\dot{V}(x) > 0$ em $\text{int}(\mathbb{R}_+^n)$. Logo, $\omega(x) \cap \text{int}(\mathbb{R}_+^n) = \emptyset$, contradizendo a hipótese! Portanto, (3.18) admite ponto de equilíbrio em $\text{int}(\mathbb{R}_+^n)$. ■

Se existir um único ponto de equilíbrio interno $p \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$, e se a solução $x(t)$ não converge para um ponto limite nem para o infinito, então a média temporal da trajetória converge para p . De maneira informal, isso é o que nos diz o seguinte teorema.

Teorema 11. Se (3.18) admite um único ponto de equilíbrio $p = (p_1, \dots, p_n) \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ e existe um conjunto compacto $K \subset \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ com a propriedade que para todo $x \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$, existe um $\tau \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $x(t) \subset K \quad \forall t > \tau$, então

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_{\tau}^T x_i(t) dt = p_i$$

onde $x(t)$ é a solução que passa por x .

Demonstração: Por hipótese K é compacto. Logo existem constantes positivas a e b com propriedades que para todo $x \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ existe $\tau \in \mathbb{R}_+^n$ tal que

$$a \leq x_i(t) \leq b \quad \forall t > \tau \quad e \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Fixado $x \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ considere $\tau > 0$ tal que

$$a \leq x_i(t) \leq b \quad \forall t > \tau \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Em $\text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ temos que

$$(\ln x_i)' = r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad i = 1, \dots, n$$

integrando com respeito a t , de $t = \tau$ a $t = T$ obtemos

$$\int_{\tau}^T (\ln x_i)' dt = \int_{\tau}^T r_i dt + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_{\tau}^T x_j dt$$

$$\Rightarrow \ln x_i(T) - \ln x_i(\tau) = r_i(T - \tau) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_{\tau}^T x_j dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T-\tau} \ln x_i(T) - \ln x_i(\tau) = r_i + \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{T-\tau} \int_{\tau}^T x_j dt.$$

Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ onde $\phi_i(T) := \frac{1}{T-\tau} \int_{\tau}^T x_i dt$. Note que

$$a \leq x_i(t) \leq b \Rightarrow \int_{\tau}^T a dt \leq \frac{1}{T-\tau} \int_{\tau}^T x_i(t) dt \leq \frac{1}{T-\tau} \int_{\tau}^T b dt$$

logo, $a \leq \phi_i(T) \leq b, i = 1, \dots, n$. Seja $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência tal que $T_k > \tau \forall k \in \mathbb{N}$.

Como $\{\phi_i(T_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada, segue pelo teorema de Bolzano-Weierstrass que existe uma

subsequência convergente $\{\phi_i(T_{k_j})\}_{j \in \mathbb{N}}$. Seja $q = \lim_{k \in \mathbb{N}'} \phi(T_k)$.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{T-\tau} \ln x_i(T) - \ln x_i(\tau) = r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \lim_{k \in \mathbb{N}'} \phi_j(T_k)$$

$$\Rightarrow 0 = r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \quad i = 1, \dots, n$$

então $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ é um ponto de equilíbrio de (3.18). E como $q_i = \lim_{k \in \mathbb{N}'} \phi_i(T_k) \geq a > 0 \quad i = 1, \dots, n$

temos que $q \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ e portanto pela unicidade de p , $q_i = p_i$. ■

3.5 A relação entre a Equação do Replicador e a Equação Geral de Lotka - Volterra

Como vimos anteriormente tanto Equação do Replicador quanto a Equação Lotka-Volterra são modelos que estudam a Dinâmica de determinadas populações. O teorema a seguir, nos diz que se quisermos analisar espécies em um determinado ambiente, podemos utilizar tanto a equação do replicador quanto a Equação de Lotka-Volterra.

Teorema 12. Existe um difeomorfismo de $\hat{S}_n = \{x \in S_n; x_n > 0\}$ em $\mathbb{R}^{n-1}$ que leva órbitas da equação do Replicador (3.2) em órbitas da Equação Geral de Lotka-Volterra

$$\dot{y}_i = y_i \left(r_i + \sum_{j=1}^{n-1} \hat{a}_{ij} y_j \right); \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.21)$$

onde $r_i = a_{in} - a_{nn}$ e $\hat{A} = (\hat{a}_{ij}) \in M_{(n-1) \times (n-1)}$ com $\hat{a}_{ij} = a_{ij} - a_{nj}$.

Demonstração: Defina $Z = \{z \in \mathbb{R}_+^n; z_n = 1\}$ e considere o campo

$$V: Z \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dado por

$$\begin{aligned} \square \quad V_i(z) &= r_i + \sum_{j=1}^{n-1} \hat{a}_{ij} z_j; i = 1, \dots, n-1 \\ \square \quad V_n(z) &= 0 \end{aligned}$$

Note que

$$H: \mathbb{R}_+^{n-1} \rightarrow Z$$

dado por $H_i(y) = y_i, i = 1, \dots, n-1$ e $H_n(y) = 1$ é um difeomorfismo cujo inverso é

$$H^{-1}: Z \rightarrow \mathbb{R}_+^{n-1}, \text{ onde } H_i^{-1}(z) = z_i, i = 1, \dots, n-1$$

é uma conjugação entre (3.21) e a equação

$$z' = V(z).$$

Agora considere a transformação projetiva

$$F: Z \rightarrow \hat{S}_n$$

dado por

$$F_i(z) = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^n z_j}, i = 1, \dots, n.$$

Afirmção: a função, $G: \hat{S}_n \rightarrow Z$ dado por

$$G_i(x) = \frac{x_i}{x_n}, i = 1, \dots, n$$

é a inversa de F.

Com efeito,

$$F_i \circ G(x) = \frac{G_i(x)}{\sum_{j=1}^n G_j(x)} = \frac{\frac{x_i}{x_n}}{\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{x_n}} = \frac{\frac{x_i}{x_n}}{\frac{1}{x_n} \sum_{j=1}^n x_j} = \frac{x_i}{x_n} = x_i, i = 1, \dots, n$$

e como $z_n = 1$,

$$F(z) = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{z_j} = z$$

Logo G é inversa de F .

$$G_i(z) = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^n z_j} = \frac{z_i}{z_n} = z$$

Dessa forma, temos que F é uma função contínua com inversa contínua, segue F é um homeomorfismo. Além disso, como F e sua inversa são diferenciáveis (pois suas funções coordenadas são) nas respectivas superfícies onde estão definidas, temos que F é um difeomorfismo. Note que, para efeitos didáticos considerando $\hat{A} \in M_{3 \times 3}$ temos que

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{41} & a_{12} - a_{42} & a_{13} - a_{43} \\ a_{21} - a_{41} & a_{22} - a_{42} & a_{23} - a_{43} \\ a_{31} - a_{41} & a_{32} - a_{42} & a_{33} - a_{43} \end{bmatrix}$$

e subtraindo a_{nj} das colunas da matriz $A \in M_{4 \times 4}$ teremos

$$A - (a_{4j}) = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{41} & a_{12} - a_{42} & a_{13} - a_{43} & a_{14} - a_{44} \\ a_{21} - a_{41} & a_{22} - a_{42} & a_{23} - a_{43} & a_{24} - a_{44} \\ a_{31} - a_{41} & a_{32} - a_{42} & a_{33} - a_{43} & a_{34} - a_{44} \end{bmatrix}$$

que nos fornece

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} - a_{41} & a_{12} - a_{42} & a_{13} - a_{43} & a_{14} - a_{44} \\ a_{21} - a_{41} & a_{22} - a_{42} & a_{23} - a_{43} & a_{24} - a_{44} \\ a_{31} - a_{41} & a_{32} - a_{42} & a_{33} - a_{43} & a_{34} - a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então pela proposição 7, temos que a equação do replicador (3.2) permanece inalterada com a adição da constante $-a_{nj}$ a todas as entradas da j -ésima coluna da matriz A . Assim, podemos reescrever a equação (3.2) como

$$\dot{x}_i = x_i \left((Ax)_i - x^t Ax \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.22)$$

onde $\bar{A}$ pode ser escrita na forma de blocos como

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \hat{A} & \begin{matrix} a_{1n} - a_{nn} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} - a_{nn} \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo se $x(t)$ é uma solução de (3.22) com condição inicial $x(0) = x_0 \in \hat{S}_n$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G_i(x) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{x_i}{x_n} \right), \\ &= \frac{x_i}{x_n} [(\bar{A}x)_i - (\bar{A}x)_n], \quad (\text{proposição 6}), \\ &= G_i(x) [(\bar{A}x)_i] - \sum_{j=1}^n \text{pois} (\bar{A}x)_n = 0, \\ &= G_i(x) \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \\ &= G_i(x) \sum_{j=1}^{j=1} a_{ij} x_j \frac{x_n}{x_n}, \\ &= G_i(x) \sum_{j=1}^{j=1} a_{ij} \frac{x_j}{x_n} x_n, \\ &= G_i(x) \sum_{j=1}^n a_{ij} G_j(x) x_n, \\ &= x_n \sum_{j=1}^n G_i(x) a_{in} G_n(x) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} G_j(x), \\ &= x_n \sum_{j=1}^n G_i(x) a_{in} + \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} G_j(x) \quad \text{pois } G_n(x) = \frac{x_n}{x_n} = 1 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G_i(x) &= x_n G_i(x) a_{in} + \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} G_j(x) \\ \frac{d}{dt} G_n(x) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{x_n}{x_n} \right) = 0 \end{aligned}$$

Dessa forma, denotando $r_i = \bar{a}_{in} = a_{in} - a_{nn}$ com $i = 1, \dots, n$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G_i(x) &= x_n G_i(x) r_i + \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} G_j(x) \\ \frac{d}{dt} G_n(x) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{x_n}{x_n} \right) = 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} G(x) = x_n V(G(x)) \quad (3.23)$$

Pelo lema de mudança de velocidade (ver apêndice A), a imagem de G pela órbita de x_0 é a órbita de $G(x_0)$ pelo sistema $\dot{Z} = V(z)$. Como $H^{-1} : Z \rightarrow \mathbb{R}_+^{n-1}$ é uma conjugação

entre (3.21) e o sistema $\dot{Z} = V(z)$, Portanto $H^{-1} \circ G : \hat{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ é aplicação desejada pois é a composição de funções diferenciáveis e sua inversa é diferenciável por também ser composição de funções diferenciáveis. ■

Corolário 1. *a restrição de (3.2) ao $\text{int}S_n$ é a restrição de (3.21) ao $\text{int}\mathbb{R}_+^{n-1}$ são diferencialmente equivalentes.*

Demonstração: Com efeito, mostramos no teorema que era válido a equivalência para $\mathbb{R}_+^{n-1}$ e S_n , então em particular vale para $\text{int}(\mathbb{R}_+^{n-1})$ e $\text{int}S_n$. ■

Corolário 2. *Para $n=3$ a equação do replicador não possui órbita periódica isolada.*

Demonstração: Pelo teorema 12 temos a equivalência entre a Equação do replicador e a Equação de Lotka-Volterra. Daí, pelo teorema 9 a Equação de Lotka-Volterra bidimensional

$$\dot{x} = x(a + bx + cy),$$

$$\dot{y} = y(d + ex + fy)$$

não possui órbita periódica isolada. Portanto, para $n=3$ a Equação do Replicador não possui órbita periódica isolada. ■

Teorema 13. *A aplicação $F : \mathbb{R}_+^n \rightarrow S_n$ dado por,*

$$F_i(y) = \frac{y_i}{\sum_{j=1}^n y_j}, \quad i = 1, \dots, n$$

leva órbitas da Equação Lotka-Volterra n -dimensional

$$\dot{y}_i = y_i [r_i + (Ay)_i] = y_i \left(r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right), \quad i = 1, \dots, n$$

Em órbitas da Equação do replicador (3.2) com Matriz A .

Demonstração: Seja $y(t)$ a solução maximal do problema de Cauchy

□

$$\dot{y} = V(y)$$

□

$$y(0) = y_0$$

dado por,

$$W_i = y_i \sum (Ay)_i - y^t Ay^t, \quad i = 1, \dots, n$$

temos que

$$\frac{d}{dt} F(y) = - \sum_{j=1}^n y_j W(F(y)).$$

Portanto, pelo lema de mudança de velocidade a órbita cuja condição inicial é y_0 da Equação Lotka-Volterra é levada por F na órbita cuja condição inicial é $F(y_0)$ da Equação do Replicador. ■

Este último teorema nos diz que a dinâmica da equação lotka-Volterra n -dimensional pode ser projetada numa superfície $(n-1)$ -dimensional.

4 INVESTIGANDO AS INTERAÇÕES TUMOR - ESTROMA DO CÂNCER DE PRÓSTATA : Percepções clínicas e biológicas de um jogo evolutivo

O carcinoma de próstata, segundo o Instituto Nacional de Câncer (INCA), é o segundo mais comum entre os homens no Brasil (atrás somente do câncer de pele não-melanoma) [13]. Nesta seção, baseado na metodologia de D Basanta *et al* [4], vamos estudar como se dá a evolução temporal desse tipo de câncer. Para isto, veremos alguns fatores que influenciam na sua formação e progressão, em seguida usaremos o conceito de Teoria dos Jogos Evolucionários para descrever essa situação em um jogo, e consequentemente deduzir e definir a Equação do Replicador para tal situação. Dessa forma, usaremos a Equação do Replicador para analisar a evolução temporal do carcinoma de próstata que será feito por meio de simulações, implementando a equação no software MATLAB, usando o algoritmo de Runge - Kutta , e a partir disso discutiremos os resultados obtidos e veremos possíveis formas de tratamento. Por fim, analisaremos os pontos de equilíbrio e das suas estabilidades obtidas da Equação do Replicador nesse jogo.

4.1 O principal

A próstata é uma glândula do sistema genital masculino, localizada na frente do reto e embaixo da bexiga urinária. O seu tamanho varia com a idade. Em homens mais

jovens, tem aproximadamente o tamanho de uma noz, mas pode ser muito maior em homens mais velhos.

A função da próstata é produzir o fluído que protege e nutre os espermatozoides no sêmen, tornando-o mais líquido. Logo atrás da próstata, estão as glândulas denominadas vesículas seminais, que produzem a maior parte do líquido para o sêmen. A uretra, que transporta a urina e o sêmen para fora do corpo através do pênis, atravessa o centro da próstata. **(ver Figura 1)**

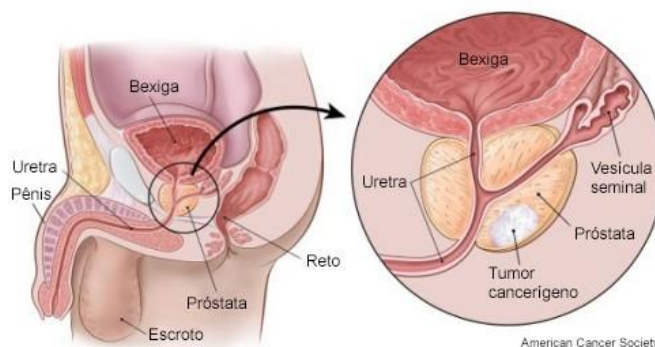


Figura 1 : Próstata e a sua localização

Envolvendo a próstata, existe uma cápsula fibroelástica rica em músculo liso, que envia septos que entram na glândula, formando o estroma prostático. O estroma é constituído pelo tecido conjuntivo, sua função é dar suporte e nutrição à glândula, manter unidas suas diferentes partes, conduzir vasos, nervos e dutos excretores e eventualmente recobrir a glândula como um todo, formando tal cápsula fibroelástica. Ademais, o fluido liberado por esse órgão é produzido pela porção secretora, sendo essa porção constituída por tecido epitelial.

A formação do câncer (carcinogênese) e a sua progressão se dá por meio de processos evolutivos nos quais as interações entre as células tumorais (células que sofreram uma alteração no seu DNA, fazendo com que elas cresçam e se multipliquem de forma desordenada) seu ambiente e o estroma circundante resultam na sua proliferação indiscriminadamente, conseqüentemente, no comportamento clinicamente maligno. Dentre os tipos de câncer, o carcinoma é aquele que ocorre em células do tecido epitelial. O carcinoma de próstata, Segundo o Instituto Nacional de Câncer (INCA), é o segundo mais

comum entre os homens no Brasil (atrás somente do câncer de pele não-melanoma).

Estudos demonstram que células inflamatórias estão envolvidas na promoção de tumores em muitos lugares incluindo a próstata ([2];[18];[19]). Ademais, também Já foi demonstrado que fibroblastos (células constituinte do tecido conjuntivo) associado ao carcinoma provenientes de tumores de próstata humanos, podem promover o desenvolvimento ou formação do tumor ([3];[8]; [16];[21]). Portanto, percebe-se que as células circundantes ao tumor desempenham um papel fundamental na progressão do cancer, sendo essas células, no caso do câncer de próstata, encontradas no estroma.

Vamos analisar a progressão do carcinoma de próstata como um jogo da Teoria dos Jogos Evolucionários. Isto será feito sob a visão de tumores como ecossistemas e estudando a evolução de três populações celulares diferentes ao longo do tempo:

- i) Células Estromais (CS) são as células que circundam o tumor proporcionado suporte e nutrição. além disso, as CS ao se interagirem com certas células tumorais, produzem fatores de crescimento que beneficiam ambas.
- ii) Células tumorais Dependentes (CD), que são células que necessitam do suporte microambiental e são capazes de cooptar células estromais para seu crescimento;
- iii) Células tumorais Independentes(CI) que não requerem suporte microambiental associado ou não ao estroma.

4.2 O Jogo

Sejam α , β , γ , e ρ os custos e benefícios para interação das células em questão deste jogo , onde os mesmo pertencem ao intervalo $(0, 1)$. α é o benefício mutuo para a cooperação entre uma CS e uma CD, ja que CS é responsável pela progressão das células tumorais que ainda são dependentes de seus recursos, sendo neste caso as CD. β refere-se ao custo das CD pela extração de recursos do microambiente. Portanto, presume-se que uma CD ao se interagir com uma outra CD tenha o dobro de custo, ou seja 2β . Como ambas dependem do microambiente para sobrevivência e crescimento, sua aptidão será $1 - 2\beta$. γ é o custo da CI por ser micro ambientalmente independente. Desse modo, pode se considerar que a aptidão de uma CI ao interagir com qualquer uma das outras três

células será constantemente $1 - \gamma$ uma vez que esse tipo celular, além da independência do microambiente, produz seus próprios fatores de crescimento. Por último, ρ representa um benefício da CD obtido ao interagir com CI, uma vez que esta produz espaços e fatores de crescimento compartilháveis. Ainda é importante lembrar que como CS é uma célula com função de nutrição e suporte do microambiente, uma interação de duas células desse tipo entre si resultam em uma aptidão 0. Essa mesma aptidão aplica-se numa interação entre CS e CI, pois a CI independe do microambiente. Sendo assim, temos a seguinte matriz de payoff deste jogo:

	CS	CD	CI
CS	0	α	0
CD	$1-\beta + \alpha$	$1-2\beta$	$1-\beta + \rho$
CI	$1-\gamma$	$1-\gamma$	$1-\gamma$

Uma vez que um câncer se desenvolve devido uma mutação que ocorre nas células fazendo com que elas se prolifere indiscriminadamente, replicando células com suas mesmas características, pode se aplicar a Equação do Replicador

$$\dot{x}_i = x_i \left((Ax)_i - x^t Ax \right)$$

descrita no capítulo anterior para estudar como se dá a evolução temporal da população de células, que neste caso são as células estromais (CS), células tumorais dependentes (CD) e células tumorais independentes (CI). Tal estudo será caracterizado pelas quatro variáveis do modelo: α, β, γ e ρ .

Como já foi visto, x_i representa a frequência de um tipo E_i , ou seja, a proporção de indivíduos em um determinado tempo. Para este jogo considere S, D , e I como sendo as proporções das CS, CD e CI respectivamente onde $S = 1 - D - I$. Assim, o estado da população é $x = (S, D, I)$ em S_3 . A matriz de payoff será

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 - \beta + \alpha & 1 - 2\beta & 1 - \beta + \rho \\ 1 - \gamma & 1 - \gamma & 1 - \gamma \end{bmatrix}$$

Dessa forma, note que

$$\begin{aligned}
 Ax &= \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 - \beta + \alpha & 1 - 2\beta & 1 - \beta + \rho \\ 1 - \gamma & 1 - \gamma & 1 - \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ D \\ I \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha D \\ (1 - \beta + \alpha)S + (1 - 2\beta)D + (1 - \beta + \rho)I \\ (1 - \gamma)S + (1 - \gamma)D + (1 - \gamma)I \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha D \\ (1 - \beta + \alpha)S + (1 - 2\beta)D + (1 - \beta + \rho)I \\ (1 - \gamma)(S + D + I) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha D \\ (1 - \beta + \alpha)S + (1 - 2\beta)D + (1 - \beta + \rho)I \\ (1 - \gamma)(1 - D - I + D + I) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha D \\ (1 - \beta + \alpha)S + (1 - 2\beta)D + (1 - \beta + \rho)I \\ (1 - \gamma) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
 x^t Ax &= \begin{bmatrix} S & D & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha D \\ (1 - \beta + \alpha)S + (1 - 2\beta)D + (1 - \beta + \rho)I \\ (1 - \gamma) \end{bmatrix} \\
 &= S\alpha D + D \begin{bmatrix} (1 - \beta + \alpha)S + (1 - 2\beta)D + (1 - \beta + \rho)I \\ (1 - \gamma) \end{bmatrix} \\
 &= D \begin{bmatrix} S\alpha + (1 - \beta + \alpha)S + (1 - 2\beta)D + (1 - \beta + \rho)I \\ (1 - \gamma) \end{bmatrix} \\
 &= D \begin{bmatrix} S(1 - \beta + 2\alpha) + (1 - 2\beta)D + (1 - \beta + \rho)I \\ (1 - \gamma) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\begin{aligned}(Ax)_1 &= \alpha D \\ (Ax)_2 &= (1 - \beta + \alpha)S + (1 - 2\beta)D + (1 - \beta + \rho)I \\ (Ax)_3 &= (1 - \gamma)I\end{aligned}$$

representa as aptidões absolutas das células S, D e I respectivamente e

$$x^t Ax = D [S(1 - \beta + 2\alpha) + (1 - 2\beta)D + (1 - \beta + \rho)I] + (1 - \gamma)I$$

a aptidão média da população de células, de acordo com a Equação do Replicador, temos que

$$\begin{aligned}\dot{S} &= S [(Ax)_1 - x^t Ax] \\ &= S [\alpha D - D [S(1 - \beta + 2\alpha) + (1 - 2\beta)D + (1 - \beta + \rho)I] - (1 - \gamma)I] \\ &= S [D \alpha - S(1 + 2\alpha - \beta) - (1 - 2\beta)D - (1 - \beta + \rho)I - (1 - \gamma)I], \\ \dot{D} &= D [(Ax)_2 - x^t Ax] \\ &= D [S(1 - \beta + \alpha) + D - S(1 + 2\alpha - \beta) - I(1 - \beta + \rho) + (1 - 2\beta)(1 - D) + I(\gamma + \rho - \beta)], \\ \dot{I} &= I [(Ax)_3 - x^t Ax] \\ &= I [(1 - \gamma)I - D [S(1 - \beta + 2\alpha) + (1 - 2\beta)D + (1 - \beta + \rho)I] - (1 - \gamma)I] \\ &= I [D - S(1 - \beta + 2\alpha) - (1 - 2\beta)D - (1 - \beta + \rho)I + (1 - \gamma)(1 - I)].\end{aligned}$$

Portanto, as equações que permitirão estudar a dinâmica das CS, CD, CI será

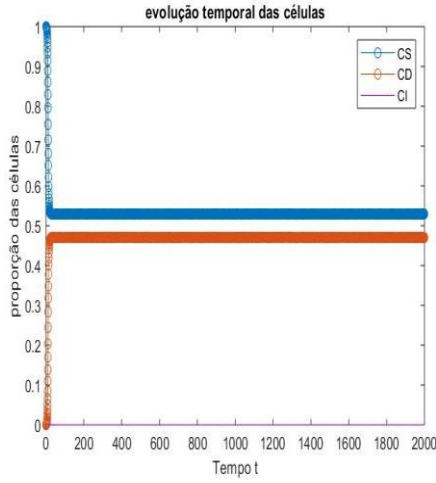
$$\begin{aligned}\dot{S} &= S [D \alpha - S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - D(1 - 2\beta) - I(1 - \gamma)] \\ \dot{D} &= D [S(1 - \beta + \alpha) + D - S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) + (1 - 2\beta)(1 - D) + I(\gamma + \rho - \beta)] \\ \dot{I} &= I [D - S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - D(1 - 2\beta) + (1 - \gamma)(1 - I)]\end{aligned}$$

Assume-se que cada uma das populações tumorais (CD e CI) é igualmente provável de surgir da população epitelial normal (não modelada), pois não há evidências conclusivas de uma das anormais necessariamente surgindo da outra (por exemplo: células I aparecendo como células D mutantes ou vice-versa).

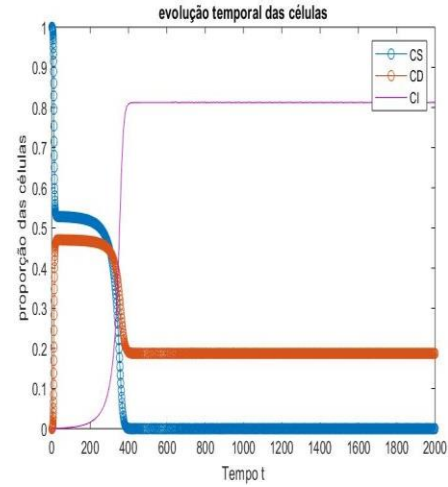
Como o surgimento de tumores estromagênicos (CD) versus aqueles independentes do estroma(CI) é de grande interesse, Vamos explorar a dinâmica desses resultados.

Iremos fazer isso considerando vários cenários, ou seja fazendo alterações nos parâmetros α , β , γ e ρ .

Nas figuras fig2E e fig2D, podemos ver como se dá a evolução no tempo da Equação do Replicador para dois exemplos específicos. Nelas podemos perceber como pequenas mudanças na aptidão dos fenótipos das CI (conforme determinado por γ) ou das CD (conforme determinado por β , ρ e α) podem resultar em grandes mudanças na dinâmica da população, levando a resultados fundamentalmente diferentes. Na **fig2E**: Uma vez que α é um benefício de cooperação entre uma CS e uma CD, e ρ é um benefício de cooperação entre uma CD e uma CI, para um valor suficientemente alto de α ($\alpha = 0.5$) e um valor baixo de ρ ($\rho = 0.1$), significa que as CD obtêm um benefício maior da interação com as CS do que com as CI. Dessa forma, considerando uma baixa aptidão geral das CI ($\gamma = 0.8$), as CI é rapidamente levada a extinção pois a vantagem da cooperação se sustenta, onde devido o γ ser um custo alto, as CI gastam bastante para sobreviver e por α ser relativamente alto, as CD é que mais se beneficia por receber bastante nutrientes do estroma, logo promovendo as CD e CS. Na **fig2D**: Temos que as CI um pouco mais adaptada (com $\gamma = 0.75$ ao invés de $\gamma = 0.8$) mantêm o crescimento e, à medida que se torna uma parte cada vez maior da população tumoral, a mesma interrompe a cooperação entre as CD e CS já iniciada, levando a extinção as CS e tornando as CD a uma parte menor da população tumoral.



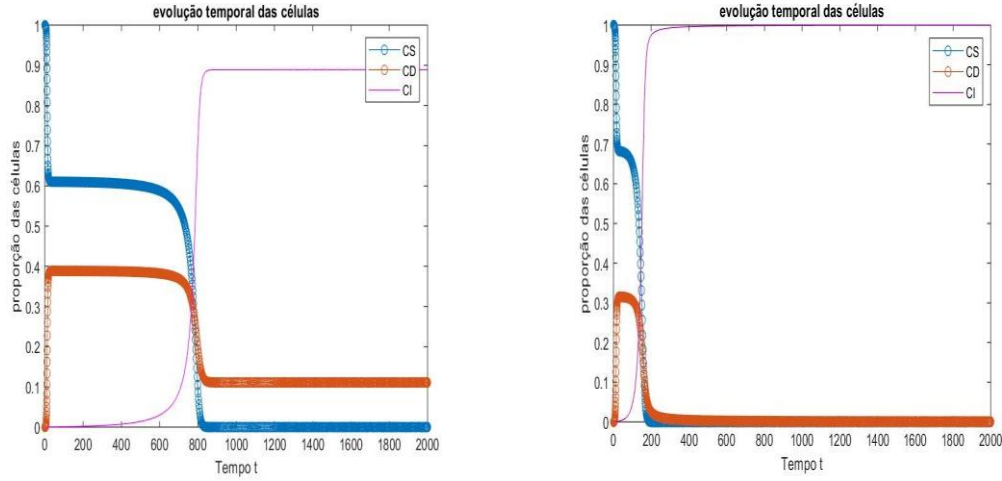
(a) fig2E: Temos o comportamento da evolução temporal das células em estudo, CS CD e CI, onde as proporções iniciais para cada uma das populações de CD e CI foi de $\frac{1}{10^4}$ e como $S + D + I = 1$ resultando em $1 - \frac{2}{10^4}$ a proporção inicial para as CS. Os valores escolhidos para α, β, γ e ρ foram $\alpha = 0.5, \beta = 0.7, \gamma = 0.8$ e $\rho = 0.1$



(b) fig2D: Temos o comportamento da evolução temporal das células em estudo, CS CD e CI, onde as proporções iniciais para cada uma das populações de CD e CI foi de $\frac{1}{10^4}$ e como $S + D + I = 1$ resultando em $1 - \frac{2}{10^4}$ a proporção inicial para as CS. Os valores escolhidos para α, β, γ e ρ foram $\alpha = 0.5, \beta = 0.7, \gamma = 0.75$ e $\rho = 0.1$

Figura 2 : Alteração na aptidão do fenótipo das CI

Durante a progressão do tumor, o microambiente está suscetível à alterações por meio de intervenções externas (por exemplo, tratamento) e também pelas próprias células tumorais. Uma vez que β representa um custo das CD por depender do microambiente, então no momento que o microambiente sofre uma alteração o mesmo acontece no parâmetro β . Na **fig3E**: Percebe-se um comportamento semelhante com a fig2D. Mas, na fig3E a população de CS chega a extinção mais lentamente e como é de se esperar devido o aumento de custo para $\beta = 0.8$ a população de CD se torna menor com relação na fig2D resultando na dominância em proporções maiores para as CI já que é uma célula microambiental independente. Na **fig3D**: Considerando um microambiente extremamente agressivo (ou extramente pobre em recursos) onde $\beta = 0.9$, isso ocasiona uma desestabilização na cooperação entre as CS e CD levando-as a extinção e consequentemente as CI se torna a única predominante entre essas células estudadas já que independe do microambiente.



(a) fig3E: Temos o comportamento da evolução temporal das células em estudo, CS CD e CI, onde as proporções iniciais para cada uma das populações de CD e CI foi de $\frac{1}{10^4}$ e como $S + D + I = 1$ resultando em $1 - \frac{2}{10^4}$ a proporção inicial para as CS. Os valores escolhidos para α, β, γ e ρ foram $\alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = 0.8$ e $\rho = 0.1$

(b) fig3D: temos o comportamento da evolução temporal das células em estudo, CS CD e CI, onde as proporções iniciais para cada uma das populações de CD e CI foi de $\frac{1}{10^4}$ e como $S + D + I = 1$ resultando em $1 - \frac{2}{10^4}$ a proporção inicial para as CS. Os valores escolhidos para α, β, γ e ρ foram $\alpha = 0.5, \beta = 0.9, \gamma = 0.8$ e $\rho = 0.1$

Figura 3 : Alteração na aptidão do fenótipo das CD

4.3 Implicações terapêuticas

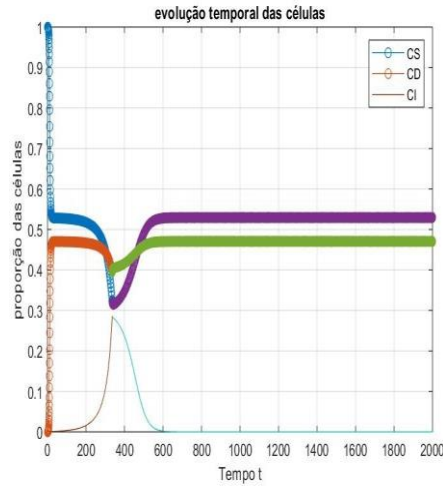
Tendo em vista as informações obtidas do nosso modelo, e que estão presentes na **figura 2**, é notável que pequenas mudanças na aptidão do fenótipo das CI ocasionam mudanças relevantes, causando até mesmo transições de uma independência estromal para um tumor estromagênico. Além disso, levando em consideração os dois diferentes fenótipos apresentados pelos gráficos, pode se dizer que eles são sensíveis a diferentes tipos de terapia. Por exemplo, para as células I, o tratamento a partir da manipulação de uma via biológica (como a mTOR) poderia afetar especificamente esse tipo celular. Pois as CI produzem seus próprios fatores de crescimento e proliferação por meio de uma sinalização interna que ocorre entre elas, ou seja uma comunicação, no qual essa comunicação é possível por que cada célula é programada para receber uma informação, mais precisamente elas são dotadas de receptores que reconhecem as moléculas sinalizadoras, como proteínas ou hormônios. E o mTOR é uma proteína que tem um papel fundamental

no crescimento, proliferação e manutenção das células, agindo internamente nas células, processo este chamado de sinalização intracelular. Quando as células do corpo perdem a habilidade de controlar a atividade do mTOR, caso conhecido como imperatividade de mTOR, isso faz com que as células se multipliquem indiscriminadamente e simultaneamente. baseado nisso, o objetivo é inibir o mTOR de forma que haja um controle nesse crescimento e multiplicação.([4], [7])

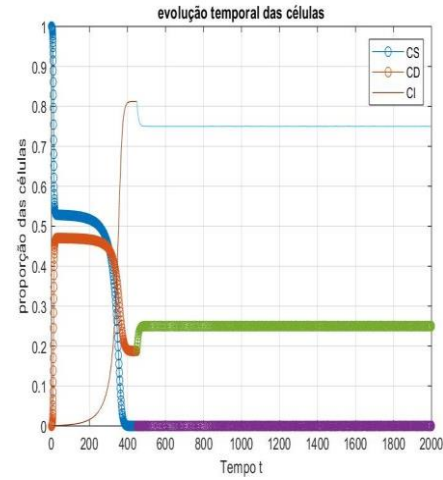
Já em relação as CD, uma terapia com foco na manipulação das CS ou na sinalização entre o tumor e o estroma (terapia hormonal como por exemplo a castração) seria mais efetiva para esse tipo celular. Isso por que no corpo humano existe um hormônio chamado de andrógeno, que é um hormônio que estimula ou controla a origem de desenvolvimento de características próprias masculinas, como por exemplo a testosterona. A testosterona estimula as células do câncer de próstata a crescerem. Então, reduzir os níveis de andrógenos ou impedi-los de atuar nas células cancerígenas da próstata muitas vezes faz com que os tumores diminuam de tamanho ou cresçam mais lentamente por um tempo, e como as CD dependem diretamente do estroma, elas poderiam ser diretamente afetadas . E optam por ser como por exemplo a castração, cirúrgica ou clinica, pois seria uma forma mais eficaz uma que vez que estudos mostram que a supressão ineficaz de andrógeno está associada à maior mortalidade por câncer de próstata. Então diminuir a quantidade de testosterona que seria produzido em maior parte pelos testículos seria o tratamento ideal ([4],[15]). Ademais, como os estados estacionários (comportamento final das células a parti de um determinado tempo) não depende somente dos parâmetros mas também das populações relativas, o momento da terapia pode mudar drasticamente o resultado.

A aplicação de uma terapia em diferentes tempos é mostrada na **figura 4**. No caso dessa terapia simulada, que possivelmente representaria um inibidor de mTOR, afetando preferencialmente as CI, percebe-se que o efeito final da terapia é notavelmente influenciado pelo tempo de iniciação, alterando fortemente o resultado. Na **fig4E**: Uma iniciação precoce do tratamento (quando ainda há competição entre I e D) leva a extinção das CI; enquanto na **fig4D**: O começo mais tardio do tratamento é ineficaz contra as CI, onde a mesma tende a predominar no ambiente. Aplicando este mesmo conceito em uma

terapia mais direcionada ao estroma (por exemplo, manipulação hormonal) não produziu diferenças significativas, sugerindo que um pequeno atraso no início é menos importante nessa estratégia terapêutica.



(a) fig4E: Temos o comportamento da evolução temporal das células em estudo, CS CD e CI, onde as proporções iniciais para cada uma das populações de CD e CI foi de $\frac{1}{10^4}$ e como $S + D + I = 1$ resultando em $1 - \frac{2}{10^4}$ a proporção inicial para as CS. Nesse caso, a simulação de **início de tratamento** Se deu no tempo $t=336$ e durou em todo intervalo $(336, 2000)$, cujo valores escolhidos para α, β, γ e ρ **antes do tratamento** foram $\alpha = 0.5, \beta = 0.7, \gamma = 0.75$ e $\rho = 0.1$ **e após o início do tratamento** foram $\alpha = 0.5, \beta = 0.7, \gamma = 0.8$ e $\rho = 0.1$



(b) fig4D: Temos o comportamento da evolução temporal das células em estudo, CS CD e CI, onde as proporções iniciais para cada uma das populações de CD e CI foi de $\frac{1}{10^4}$ e como $S + D + I = 1$ resultando em $1 - \frac{2}{10^4}$ a proporção inicial para as CS. Nesse caso, a simulação de **início de tratamento** Se deu no tempo $t=450$ e durou em todo intervalo $(450, 2000)$, cujo valores escolhidos para α, β, γ e ρ **antes do tratamento** foram $\alpha = 0.5, \beta = 0.7, \gamma = 0.75$ e $\rho = 0.1$ **e após o início do tratamento** foram $\alpha = 0.5, \beta = 0.7, \gamma = 0.8$ e $\rho = 0.1$

Figura 4 : Tratamento direcionado as CI

Tendo em vista que o tratamento anterior não ocasionou resultados significativos contra as CD, uma estratégia terapêutica diferente foi adotada (mudando a duração da terapia direcionada ao estroma). Na **figura 5**, leva-se em consideração que a aplicação de tal terapia afetaria sobretudo o benefício que as CD obtêm ao interagir com CS (α reduzido), dessa forma é perceptível que a duração da terapia altera fortemente o resultado do jogo. O resultado (Fig5C) recapitula a realidade clínica da evolução da resistência à terapia hormonal (por exemplo, câncer de próstata resistente à castração).

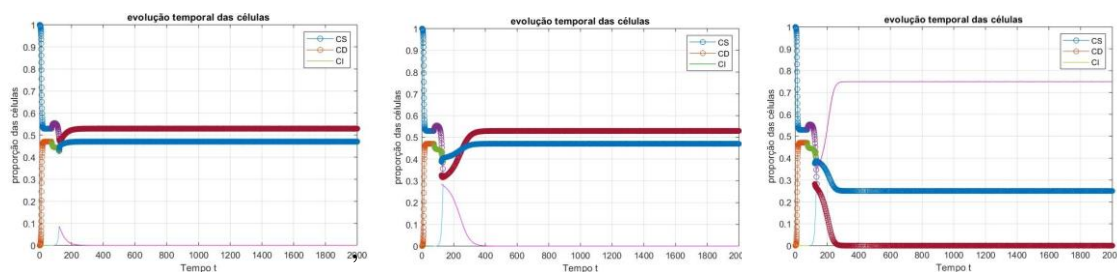


Figura 5 : Tratamento direcionado ao estroma - Temos o comportamento da evolução temporal das células em estudo, CS CD e CI , onde as proporções iniciais para cada uma das populações de CD e CI foi de $\frac{1}{10}$ e como $S + D + I = 1$ resultando em $1 - \frac{2}{10}$ a proporção inicial para as CS. Tais figuras representam as simulações feitas sobre a hipótese de uma terapia hormonal direcionada ao estroma, cujo valores escolhidos para α, β, γ e ρ em todos os casos **antes e depois do tratamento** foram $\alpha = 0.5, \beta = 0.7, \gamma = 0.8$ e $\rho = 0.1$ e **durante o tratamento** foram $\alpha = 0.1, \beta = 0.7, \gamma = 0.8$ e $\rho = 0.1$ e o tempo de início do tratamento se deu em $t=75$. Na primeira figura (**ftg5A**) , o tratamento ocorreu no intervalo de $[75, 123]$. Na segunda figura (**ftg5B**), se deu no intervalo de $[75, 133]$ e por último, na terceira figura (**ftg5C**) o tratamento ocorreu no intervalo de $[75, 135]$.

4.4 Discussão

Nem todos os tumores que se desenvolvem na próstata se tornam fatais. Mas aqueles que tornam, podem tomar dois caminhos diferentes e distintos: torna-se independente do microambiente (representando um cenário de câncer de próstata de pequenas células) ou cooptar certas células estromais para sustentar a progressão do tumor (como acontece na doença metastática óssea). Neste trabalho foram apresentados os principais aspectos da dinâmica evolutiva do câncer de próstata, incluindo a progressão em direção a resultados letais que podem ser estromagênicos (resultantes de interações mutualísticas entre

o tumor e certas células estromais) ou independentes do estroma. Através dos resultados obtidos vimos que independentemente da adequação do Fenótipo I (determinado por γ), houve um aumento na proporção de CI quando o microambiente se tornava pobre em recursos (caracterizado pelo um alto valor para o parâmetro β) conforme visto nas figuras fig3E e fig3D. Para os casos onde α é suficientemente alto, representando que o estroma poder ser suportado pelo tumor, há um grande benefício na relação entre as CD e as CS, de forma que, o tumor como um todo tem uma grande relação com as células estromais. Dessa forma, a interação entre as CD e CS pode levar as CI a extinção (fig2E). Por outro lado, isso pode ser descrito como as células tumorais são particularmente efetivas em estimular o suporte estromal - a chave é o processo interativo, não tanto o comportamento absoluto da célula.

O resultado menos frequente é com relação a coexistência dos três fenótipos. Para tal coexistência é necessário que α seja suficientemente alto de forma que haja a colaboração entre CD e CS mas que não leve as CI a extinção, e um valor alto para ρ Permitindo a coexistência entre CD e CI. Assim, as CD pode se beneficiar de fatores de crescimento produzido por CI e ainda a cooperação com o estroma é mais suscetível para a sustentação dos três fenótipos em uma estratégia estável evolucionária.(ver figura 6)

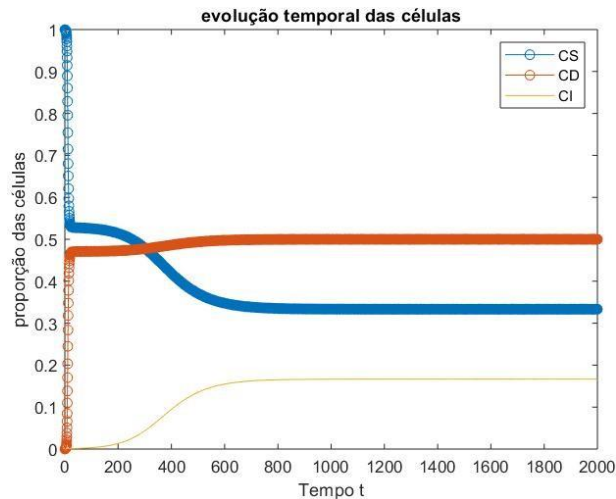


Figura 6 : Coexistência dos três fenótipos - Comportamento da relação de coexistência dos três fenótipos, onde as proporções iniciais para cada uma das populações de CD e CI foi de $\frac{1.4}{10}$ e como $S + D + I = 1$ resultando em $1 - \frac{2}{10}$ a proporção inicial para as CS. os valores escolhidos para α, β, γ e ρ foram $\alpha = 0.5, \beta = 0.7, \gamma = 0.75$ e $\rho = 0.8$.

Para combater o surgimento de resistência a castração (e efeitos colaterais) no tratamento do câncer de próstata metastático, muitos médicos adotaram esquemas de dosagem não padronizados para suas terapias de ablação de andrógenos, que é um processo de retirada de Andrógeno (ou androgênio).

Um estudo recente sugeriu que o uso dos níveis de testosterona medidos pelo paciente como guia ou o uso de um esquema intermitente em oposição à dosagem constante retardavam o início da resistência à castração [5]. Esse estudo mostra que horários alternativos trazem benefícios, mas ainda não existe um padrão de atendimento para isso. Esse fato foi explorado através da análise com diferentes tempos de início e duração de tratamento direcionado ao estroma, onde mostrou diferenças importantes e essências nos resultados com diferentes horários. Percebe-se que o início com período curto de tratamento (Figura 5A) não resulta em nenhuma mudança relevante no jogo. Já a iniciação por longa duração (Figura 5C), como previsto, mostra a evolução da resistência à castração e uma transição de fase para um novo estado estacionário dominado pelas CI, que será insensível a futuras manipulações com essa terapia, exigindo uma mudança de estratégia. Porém, há uma duração ideal (Figura 5B) no qual as CD são reduzidas sem um aumento irreversível nas CI. Quando a terapia é retirada, os níveis começam a retornar ao estado estacionário original dominado pelas CD, uma situação em que a terapia ‘estromal-direcionada’ funcionará novamente.

Por meio desses resultados, considerados em conjunto, sugerem que diferentes terapias provavelmente têm um valor diferente para os dois principais tipos de tumores: os tumores D provavelmente são melhores tratados através da manipulação estromal (por exemplo, terapia hormonal), já os tumores I seriam melhores tratados inicialmente com um agente biológico, como um inibidor de mTOR.

Independentemente do tempo e do cronograma, o surgimento de resistência à castração é amplamente inevitável dado um período de tempo suficientemente longo. Dessa forma, esses resultados sugerem que quando esse surgimento ocorrer, uma mudança na estratégia de tratamento está em ordem. E como pode ser visto em outros trabalhos, sugere-se que a adição de inibidores da mTOR à terapia hormonal após o início da resistência à castração [23] pode ser promissora.

4.5 Conclusão

Nesse estudo referente ao carcinoma de próstata, foi apresentado um modelo matemático aparentemente simples que nos possibilitou compreender como as células estromais podem influenciar na progressão do câncer de próstata. Os resultados aqui visto foram qualitativos, porém ressaltam a importância de compreender as interações tumor estroma na direção não somente dos resultados tumorais (malignos ou não), mas também de seu impacto em novas abordagens terapêuticas potencialmente novas.

Esse modelo nos proporciona um suporte teórico para compreender as observações clínicas. Ele não concede recomendações quantitativa para o tempo e duração da terapia (limitada pela natureza arbitrária tempo neste modelo), mas recomenda várias hipóteses testáveis. Destaca-se a importância das CS na seleção de fenótipos específicos para células tumorais, pois como foi visto, se houver uma grande interação entre células dependentes e células estromais, as células dependentes podem tornar-se predominantes. É importante salientar que os resultados sugerem que a coexistência de células microambientais dependentes e do estroma nem sempre é robusta e que alterações como as resultantes de uma terapia direcionada podem transformar o tumor no tipo independente do estroma mais agressivo.

A importância de um modelo abstrato como esse, não é necessariamente a interpretação direta dos resultados, pois muitos dos parâmetros testados ainda não são biologicamente testáveis ou acionáveis. Mas, em vez disso, usar o próprio método para determinar novas estratégias terapêuticas. No paradigma clínico do câncer de próstata metastático, tornou-se cada vez mais importante o desenvolvimento de estratégias racionais para testar novos esquemas de sequência e tempo. Por exemplo, o padrão determinado pelo tempo de manipulação hormonal até a falha, talvez não seja mais a melhor estratégia (chega um momento em que as células tumorais tornam-se resistentes ao tratamento hormonal, ou seja, ele não funciona mais) - mas como podemos eticamente e racionalmente incluir essas novas terapias sem alguma orientação? Os resultados deste modelo sugerem que, com o esforço multidisciplinar de biólogos, clínicos e teóricos, estratégias racionais podem ser sugeridas a partir de hipóteses até então não testadas desses novos agentes. Não

acredita-se que os resultados apresentados neste estudo sejam a resposta final à questão do câncer de próstata, mas espera-se que eles iniciem conversas entre disciplinas e estimulem novos tipos de perguntas.

4.6 Análise dos pontos de equilíbrio

Temos que as equações que estudam a dinâmica da evolução das células são dadas por

$$\begin{aligned}\dot{S} &= S [D(\alpha - S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - D(1 - 2\beta)) - I(1 - \gamma)] \\ \dot{D} &= D [S(1 - \beta + \alpha) + D(-S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) + (1 - 2\beta)(1 - D)) + I(\gamma + \rho - \beta)] \\ \dot{I} &= I [D(-S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - D(1 - 2\beta)) + (1 - \gamma)(1 - I)] .\end{aligned}$$

Uma vez que S, D e I pertence ao intervalo $[0, 1]$ tal que $S + D + I = 1$, pode-se analisar os pontos de equilíbrio destas equações considerando $D = 1 - S - I$ e assim tal análise será feita estudando as equações

$$\begin{aligned}\dot{S} &= S [D(\alpha - S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - D(1 - 2\beta)) - I(1 - \gamma)] \\ \dot{I} &= I [D(-S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - D(1 - 2\beta)) + (1 - \gamma)(1 - I)] .\end{aligned} \quad (4.1)$$

Com isso, temos os possíveis casos:

- i) $S = 0 ; I \in [0, 1]$;
- ii) $S \in [0, 1] ; I = 0$;
- iii) $S, I \in [0, 1]$ tal que $S + I = 1$;
- iv) $S, I \in (0, 1)$ tal que $0 < S + I < 1$.

Para o caso i), como $D = 1 - S - I$

$$\dot{S} = 0 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \dot{I} &= I D - S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - D(1 - 2\beta) + (1 - \gamma)(1 - I) \\ &= I[(1 - S - I)(-S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - (1 - S - I)(1 - 2\beta)) + (1 - \gamma)(1 - I)] \\ &= I[(1 - 0 - I)(-0(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - (1 - 0 - I)(1 - 2\beta)) + (1 - \gamma)(1 - I)] \quad (S = 0) \\ &= I[-(1 - I)I(1 - \beta + \rho) - (1 - I)^2(1 - 2\beta) + (1 - \gamma)(1 - I)] \\ &= I(1 - I)[-I(1 - \beta + \rho) - (1 - I)(1 - 2\beta) + (1 - \gamma)] \\ &= I(1 - I)[-I(1 - \beta + \rho) - 1 + 2\beta + I - I2\beta + 1 - \gamma] \\ &= I(1 - I)[-I(1 - \beta + \rho - 1 + 2\beta) + 2\beta - \gamma] \\ &= I(1 - I)[-I(\beta + \rho) + 2\beta - \gamma] \end{aligned}$$

Assim, para encontrar os pontos de equilíbrio faça $\dot{I} = 0$. Logo,

$$I(1 - I)[-I(\beta + \rho) + 2\beta - \gamma] = 0$$

¶

$$I = 0, I = 1 \text{ e}$$

$$-I(\beta + \rho) + 2\beta - \gamma = 0 \Rightarrow I = \frac{2\beta - \gamma}{\beta + \rho}$$

Daí, uma vez que $I \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} 0 \leq I \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq \frac{2\beta - \gamma}{\beta + \rho} \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq 2\beta - \gamma \leq \beta + \rho \\ &\Rightarrow \beta - \gamma \leq \rho. \end{aligned}$$

Lembrando que $\alpha, \beta, \gamma, \rho \in (0, 1)$, Então os pontos de equilíbrio para esse caso são

$$I = 0, I = 1 \text{ e } I = \frac{2\beta - \gamma}{\beta + \rho} \text{ tal que } \beta - \gamma \leq \rho.$$

Para o caso ii), como $D = 1 - S$ temos

$$\dot{I} = 0 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \dot{S} &= S[1 - S(\alpha - S(1 - \beta + 2\alpha) - 0(1 - \beta + \rho) - (1 - S)(1 - 2\beta)) - 0(1 - \gamma)] \\ &= S[1 - S(\alpha - S(1 - \beta + 2\alpha) - 1 + 2\beta + S - S2\beta)] \\ &= S(1 - S)[\alpha - S(1 - \beta + 2\alpha - 1 + 2\beta) - 1 + 2\beta] \\ &= S(1 - S)[\alpha - S(\beta + 2\alpha) - 1 + 2\beta] \end{aligned}$$

Logo, $\dot{S} = 0$ se, e somente se,

$$S(1 - S) [\alpha - S(\beta + 2\alpha) - 1 + 2\beta] = 0$$

¶

$$S = 0, S = 1 \text{ e}$$

$$\alpha - S(\beta + 2\alpha) - 1 + 2\beta = 0 \Rightarrow S = \frac{-1 + 2\beta + \alpha}{\beta + 2\alpha}.$$

Daí como $S \in [0, 1]$,

$$0 \leq S \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{-1 + 2\beta + \alpha}{\beta + 2\alpha} \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 + 2\beta + \alpha \leq \beta + 2\alpha$$

$$\Rightarrow -1 + \beta \leq \alpha.$$

Portanto tais ponto de equilíbrio são $S = 0, S = 1$ e $S = \frac{-1 + 2\beta + \alpha}{\beta + 2\alpha}$ tal que $-1 + \beta \leq \alpha$.

Para o caso iii) onde $S + I = 1$ tal que $S, I \in [0, 1]$, temos que $D = 1 - S - I = 0$. Logo

$$\square \quad 1) \dot{S} = -SI(1 - \gamma)$$

$$\square \quad 2) \dot{I} = I(1 - \gamma)(1 - I)$$

Assim, $\dot{S} = 0$ e $\dot{I} = 0$ se, e somente se, $S = 0 = I$ e $I = 1$ já que $(1 - \gamma) \neq 0$.

Para o caso iv), faça $\dot{S} = 0$ e $\dot{I} = 0$. Logo,

$$1) S [D(\alpha - S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - D(1 - 2\beta)) - I(1 - \gamma)] = 0$$

$$\square \quad 2) I [D(-S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - D(1 - 2\beta)) + (1 - \gamma)(1 - I)] = 0$$

Como $S, I \neq 0$ pois ambos nesse caso pertencem ao intervalo $(0,1)$, temos

$$\square \quad 1) D(\alpha - S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - D(1 - 2\beta)) - I(1 - \gamma) = 0$$

$$\square \quad 2) D(-S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - D(1 - 2\beta)) + (1 - \gamma)(1 - I) = 0$$

Assim,

$$\square \quad 1) \alpha - S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - D(1 - 2\beta) = \frac{I(1 - \gamma)}{D}$$

$$\square \quad 2) -S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - D(1 - 2\beta) = -\frac{(1 - \gamma)(1 - I)}{D}$$

Substituindo $D = 1 - S - I$ Note que

$$\begin{aligned} -S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - D(1 - 2\beta) &= -S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - (1 - 2\beta) \\ &\quad + S(1 - 2\beta) + I(1 - 2\beta) \end{aligned}$$

Logo,

$$-S(1-\beta+2\alpha)-I(1-\beta+\rho)-D(1-2\beta) = -S(1-\beta+2\alpha-1+2\beta)-I(1-\beta+\rho-1+2\beta)-1+2\beta$$

e portanto,

$$-S(1-\beta+2\alpha)-I(1-\beta+\rho)-D(1-2\beta) = -S(\beta+2\alpha)-I(\beta+\rho)-1+2\beta.$$

Com isso o sistema será da seguinte forma

$$\begin{aligned} 1) \quad & \alpha - S(\beta+2\alpha) - I(\beta+\rho) - 1+2\beta = \frac{I(1-\gamma)}{1-S-I} \\ 2) \quad & -S(\beta+2\alpha) - I(\beta+\rho) - 1+2\beta = -\frac{(1-\gamma)(1-I)}{1-S-I} \end{aligned}$$

Subtraindo 2 de 1,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{I(1-\gamma) + (1-\gamma)(1-I)}{1-S-I} \Rightarrow \alpha - \alpha S - \alpha I = 1 - \gamma \\ &\Rightarrow S = -I - \frac{(1-\alpha-\gamma)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Substituindo S em 2 tem-se

$$I(\beta+2\alpha) + \frac{(1-\alpha-\gamma)}{\alpha}(\beta+2\alpha) - I(\beta+\rho) - 1+2\beta = -\frac{(1-\gamma)(1-I)}{1+I + \frac{1-\alpha-\gamma}{\alpha} - I}$$

Daí,

$$I(\beta+2\alpha) + \frac{(\beta+2\alpha)}{\alpha} - (\beta+2\alpha) - \frac{\gamma(\beta+2\alpha)}{\alpha} - I(\beta+\rho) - 1+2\beta = -\frac{\alpha(1-\gamma)(1-I)}{\alpha+1-\alpha-\gamma}$$

segue que,

$$I(\beta+2\alpha) - I(\beta+\rho) + \alpha(1-I) + \beta\left(\frac{1}{\alpha} - 1 - \frac{\gamma}{\alpha} + 2\right) + 2 - 2\alpha - 2\gamma - 1 = 0$$

logo,

$$I(\alpha-\rho) + \beta \frac{1+\alpha-\gamma}{\alpha} + 1 - \alpha - 2\gamma = 0$$

Portanto,

$$I = \frac{-\beta(1+\alpha-\gamma) - \alpha(1-\alpha-2\gamma)}{\alpha(\alpha-\rho)}.$$

Dessa forma, substituindo o valor de I em $S = -I - \frac{(1-\alpha-\gamma)}{\alpha}$ tem-se

$$S = \frac{\beta(1+\alpha-\gamma) + \alpha(1-\alpha-2\gamma) - (\alpha-\rho)(1-\alpha-\gamma)}{\alpha(\alpha-\rho)}.$$

4.7 Análise de estabilidade dos ponto de equilíbrio

Uma vez que estamos sobre a condição que $D = 1 - S - I$, pelo sistema (4.1) considere

$$F(S, I) = S(1 - S - I) \alpha - S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - (1 - S - I)(1 - 2\beta) - SI(1 - \gamma)$$

$$G(S, I) = I(1 - S - I) - S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - (1 - S - I)(1 - 2\beta) + I(1 - \gamma)(1 - I).$$

como visto na seção anterior,

$$-S(1 - \beta + 2\alpha) - I(1 - \beta + \rho) - D(1 - 2\beta) = -S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta$$

logo podemos escrever

$$F(S, I) = S(1 - S - I) \alpha - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta - SI(1 - \gamma)$$

$$G(S, I) = I(1 - S - I) - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta + I(1 - \gamma)(1 - I)$$

Assim,

$$\frac{\partial F}{\partial S} = (1 - S - I)(\alpha - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta) - S(\alpha - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta),$$

$$-S(1 - S - I)(\beta + 2\alpha) - I(1 - \gamma),$$

$$\frac{\partial F}{\partial I} = -S \alpha - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta - S(1 - S - I)(\beta + \rho) - S(1 - \gamma),$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} = -I - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta - I(1 - S - I)(\beta + 2\alpha),$$

$$\frac{\partial G}{\partial I} = (1 - S - I) - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta - I - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta$$

$$-I(1 - S - I)(\beta + \rho) + (1 - \gamma)(1 - I).$$

Para o caso i), temos que $S = 0$. Logo

$$\frac{\partial F}{\partial S} = (1 - I)(\alpha - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta) - I(1 - \gamma),$$

$$\frac{\partial F}{\partial I} = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} = -I - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta - I(1 - I)(\beta + 2\alpha),$$

$$\frac{\partial G}{\partial I} = (1 - I) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta - I - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta - I(1 - I)(\beta + \rho) + (1 - \gamma)(1 - 2I).$$

Nesse caso, os pontos de equilíbrio encontrados para I foram

$$I = 0, I = 1 \text{ e } I = \frac{2\beta - \gamma}{\beta + \rho} \text{ tal que } \beta - \gamma \leq \rho.$$

Então para

• $I = 0$ (aplicar nas derivadas parciais acima quando $S=0$)

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \alpha - 1 + 2\beta, \quad \frac{\partial F}{\partial I} = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial I} = 2\beta - \gamma,$$

A matriz jacobiana será

$$J_{F,tt}(S, I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - 1 + 2\beta & 0 \\ 0 & 2\beta - \gamma \end{bmatrix},$$

o polinômio característico de $J_{F,tt}$ é dado por

$$P_{J_{F,G}}(\lambda) = \det(J_{F,tt}(S, I) - \lambda I_2) = (\alpha - 1 + 2\beta - \lambda)(2\beta - \gamma - \lambda)$$

onde I_2 é matriz identidade de ordem 2. Como Os autovalores de uma matriz são as raízes do polinômio característico, então

$$P_{J_{F,G}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \alpha - 1 + 2\beta \text{ ou } \lambda = 2\beta - \gamma.$$

Portanto, os autovalores são $\lambda_1 = \alpha - 1 + 2\beta$ e $\lambda_2 = 2\beta - \gamma$.

É de grande interesse encontrar pontos de equilíbrio estáveis. Para que isso aconteça, todos os autovalores associados a matriz jacobiana de um sistema de equações diferenciais ordinárias deve ter parte real negativa. Dessa forma, vamos analisar sobre quais condições isso acontece. Neste caso,

$$\begin{aligned}\lambda_1 < 0 \text{ e } \lambda_2 < 0 &\Leftrightarrow \alpha - 1 + 2\beta < 0 \text{ e } 2\beta - \gamma < 0 \\ &\Leftrightarrow \beta < \frac{1-\alpha}{2} \text{ e } \beta < \frac{\gamma}{2} \text{ onde } \alpha, \beta, \gamma \in (0, 1).\end{aligned}$$

Então o ponto de equilíbrio $(S, I) = (0, 0)$ é estável para $\beta < \min\left\{\frac{1-\alpha}{2}, \frac{\gamma}{2}\right\}$.

• $I = 1$ (aplicar nas derivadas parciais quando $S = 0$)

$$\frac{\partial F}{\partial S} = -(1 - \gamma), \quad \frac{\partial F}{\partial I} = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} = 1 - \beta + \rho, \quad \frac{\partial G}{\partial I} = \gamma - \beta + \rho,$$

a matriz jacobiana será

$$J_{F,G}(S, I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1 - \gamma) & 0 \\ 1 - \beta + \rho & \gamma - \beta + \rho \end{bmatrix},$$

tendo como polinômio característico

$$P_{J_{F,G}}(\lambda) = (-(1 - \gamma) - \lambda)((\gamma - \beta + \rho) - \lambda)$$

Cujos autovalores será $\lambda_1 = -(1 - \gamma)$ e $\lambda_2 = \gamma - \beta + \rho$.

Note que $\lambda_1 = -(1 - \gamma) < 0$, então basta analisar $\lambda_2 = \gamma - \beta + \rho$. então

$$\begin{aligned}\lambda_2 < 0 &\Leftrightarrow \gamma - \beta + \rho < 0 \\ &\Leftrightarrow \gamma < \beta - \rho\end{aligned}$$

Como $\beta, \rho \in (0, 1)$, tem-se que $-1 < \beta - \rho < 1$. Mas, $\gamma > 0$, então para que a última desigualdade seja satisfeita, os valores para $\beta, \rho \in (0, 1)$ devem cumprir $\beta - \rho > 0$. Dessa forma, o ponto $(S, I) = (0, 1)$ é ponto de equilíbrio estável quando $\gamma \in (0, \beta - \rho)$ tal que

$\beta, \rho \in (0, 1)$.

$$I = \frac{2\beta - \gamma}{\beta + \rho}$$

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{(\gamma - 1)(\beta + \rho) + (\gamma - \beta + \rho)\alpha}{\beta + \rho},$$

$$\frac{\partial F}{\partial I} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{\beta + \rho} [-(2\beta - \gamma)(\gamma - 1) - \frac{(2\beta - \gamma)(\gamma - \beta + \rho)(\beta + 2\alpha)}{\beta + \rho}],$$

$$\frac{\partial G}{\partial I} = \frac{1}{\beta + \rho} [-(2\beta - \gamma)(\gamma - \beta + \rho)].$$

Como a matriz jacobiana é dado por

$$J_{F,G}(S, I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} \end{bmatrix},$$

então o polinômio característico será

$$P_{J_{F,G}}(\lambda) = \frac{(\gamma - 1)(\beta + \rho) + (\gamma - \beta + \rho)\alpha}{\beta + \rho} - \lambda \frac{1}{\beta + \rho} [-(2\beta - \gamma)(\gamma - \beta + \rho)] - \lambda^2,$$

Logo os autovalores são

$$\lambda_1 = \frac{(\gamma - 1)(\beta + \rho) + (\gamma - \beta + \rho)\alpha}{\beta + \rho} \text{ e } \lambda_2 = \frac{1}{\beta + \rho} [-(2\beta - \gamma)(\gamma - \beta + \rho)].$$

Uma vez que $\beta + \rho > 0$ pois é soma de números positivos, para que λ_1 e λ_2 sejam ambos negativos é suficiente e necessário que

$$(\gamma - 1)(\beta + \rho) + (\gamma - \beta + \rho)\alpha < 0 \text{ e } -(2\beta - \gamma)(\gamma - \beta + \rho) < 0.$$

Se $2\beta - \gamma > 0$,

$$\frac{(\gamma - 1)(\beta + \rho)}{\alpha} < -(\gamma - \beta + \rho) \text{ e } (2\beta - \gamma)(\gamma - \beta + \rho) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \gamma)(\beta + \rho)}{\alpha} > (\gamma - \beta + \rho) \text{ e } (\gamma - \beta + \rho) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \gamma)(\beta + \rho)}{\alpha} > (\gamma - \beta + \rho) \text{ e } \gamma > \beta - \rho$$

Logo, com $\frac{(1 - \gamma)(\beta + \rho)}{\alpha} > (\gamma - \beta + \rho)$ e $\gamma > \beta - \rho$ temos que o ponto de equilíbrio $(0, \frac{2\beta - \gamma}{\beta + \rho})$ é estável. Se $2\beta - \gamma < 0$, analogamente, o ponto de equilíbrio $(0, \frac{2\beta - \gamma}{\beta + \rho})$ é

estável para $\frac{(1 - \gamma)(\beta + \rho)}{\alpha} > (\gamma - \beta + \rho)$ e $\gamma < \beta - \rho$.

Para o caso ii) temos que $I = 0$. logo

$$\frac{\partial F}{\partial S} = (1 - S)(\alpha - S(\beta + 2\alpha) - 1 + 2\beta) - S(\alpha - S(\beta + 2\alpha) - 1 + 2\beta) - S(1 - S)(\beta + 2\alpha),$$

$$\frac{\partial F}{\partial I} = -S\alpha - S(\beta + 2\alpha) - 1 + 2\beta - S(1 - S)(\beta + \rho) - S(1 - \gamma),$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial I} = (1 - S)\alpha - S(\beta + 2\alpha) - 1 + 2\beta + (1 - \gamma).$$

Como os pontos de equilíbrio encontrados para S foram $S = 0$, $S = 1$ e $S = \frac{-1 + 2\beta + \alpha}{\beta + 2\alpha}$

tal que $-1 + \beta \leq \alpha$, temos que

$$\bullet S = 0$$

Teremos o ponto de equilíbrio $(0, 0)$, que ja foi analisado no caso i), onde tal ponto é estável para $\beta < \min\{\frac{1 - \alpha}{2}, \frac{\gamma}{2}\}$

$$\bullet S = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial S} = -(\alpha - 1 + \beta), \quad \frac{\partial F}{\partial I} = \gamma + \alpha - \beta,$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial I} = 1 - \gamma,$$

a matriz jacobiana é

$$J_{F,t}(S, I) = \begin{bmatrix} -(\alpha - 1 + \beta) & \gamma + \alpha - \beta \\ 0 & 1 - \gamma \end{bmatrix}.$$

Assim, o Polinômio característico será

$$P_{J_{F,G}}(\lambda) = -(\alpha - 1 + \beta) - \lambda \quad (1 - \gamma) - \lambda$$

Dessa forma, os autovalores são $\lambda_1 = -(\alpha - 1 + \beta)$ e $\lambda_2 = (1 - \gamma)$.

Como $\lambda_2 = (1 - \gamma) > 0$, pois $\gamma \in (0, 1)$, então o pontos de equilíbrio $(1, 0)$ é instável.

$$S = \frac{\alpha - 1 + 2\beta}{\beta + 2\alpha}$$

$$\frac{\partial F}{\partial S} = -\frac{(\alpha - 1 + 2\beta)(1 - \beta + \alpha)}{\beta + 2\alpha}, \quad \frac{\partial F}{\partial I} = -\frac{(\alpha - 1 + 2\beta)}{\beta + 2\alpha} \frac{(1 - \beta + \alpha)(\beta + \rho)}{\beta + 2\alpha} + (1 - \gamma)$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial I} = \frac{-\alpha(1 - \beta + \alpha) + (1 - \gamma)(\beta + 2\alpha)}{\beta + 2\alpha},$$

Assim teremos a seguinte matriz jacobiana

$$J_{F,t}(S, I) = \begin{bmatrix} -\frac{(\alpha - 1 + 2\beta)(1 - \beta + \alpha)}{\beta + 2\alpha} & -\frac{(\alpha - 1 + 2\beta)}{\beta + 2\alpha} \frac{(1 - \beta + \alpha)(\beta + \rho)}{\beta + 2\alpha} + (1 - \gamma) \\ 0 & \frac{-\alpha(1 - \beta + \alpha) + (1 - \gamma)(\beta + 2\alpha)}{\beta + 2\alpha} \end{bmatrix}.$$

Com isso, temos como polinômio característico

$$P_{J_{F,t}}(\lambda) = -\frac{(\alpha - 1 + 2\beta)(1 - \beta + \alpha)}{\beta + 2\alpha} - \lambda \quad \frac{-\alpha(1 - \beta + \alpha) + (1 - \gamma)(\beta + 2\alpha)}{\beta + 2\alpha} - \lambda$$

Cujos autovalores são

$$\lambda_1 = -\frac{(\alpha - 1 + 2\beta)(1 - \beta + \alpha)}{\beta + 2\alpha} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-\alpha(1 - \beta + \alpha) + (1 - \gamma)(\beta + 2\alpha)}{\beta + 2\alpha}$$

Uma vez que $(\beta + 2\alpha) > 0$ pois α e β são positivos, então

$$\begin{aligned}\lambda_1 < 0 \text{ e } \lambda_2 < 0 &\Leftrightarrow -(\alpha - 1 + 2\beta)(1 - \beta + \alpha) < 0 \text{ e } -\alpha(1 - \beta + \alpha) + (1 - \gamma)(\beta + 2\alpha) < 0 \\ &\Leftrightarrow -(\alpha - 1 + 2\beta) < 0 \text{ e } (1 - \gamma)(\beta + 2\alpha) < \alpha(1 - \beta + \alpha) \\ &\Leftrightarrow (\alpha - 1 + 2\beta) > 0 \text{ e } \gamma > 1 - \frac{\alpha(1 - \beta + \alpha)}{\beta + 2\alpha} \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - \alpha}{2} < \beta \text{ e } \gamma > \frac{\beta + 2\alpha - \alpha(1 - \beta + \alpha)}{\beta + 2\alpha}.\end{aligned}$$

Como $\frac{1 - \alpha}{2} > 0$ e $\beta \in (0, 1)$, logo podemos concluir que o ponto de equilíbrío $(\frac{\alpha - 1 + 2\beta}{\beta + 2\alpha}, 0)$

é estável desde que $\beta \in (\frac{1 - \alpha}{2}, 1)$ e $\gamma > \frac{\beta + 2\alpha - \alpha(1 - \beta + \alpha)}{\beta + 2\alpha}$.

para o caso iii), onde $S + I = 1$, os pontos de equilíbrío encontrados foram $S = 0, I = 0$ e $I = 1$. então tem-se as condições:

$$1) (S, I) = (0, 0)$$

$$2) (S, I) = (0, 1)$$

onde ambas já foram analisadas no caso i).

para o caso iv), temos que os pontos de equilíbrío encontrados foram

$$I = \frac{-\beta(1 + \alpha - \gamma) - \alpha(1 - \alpha - 2\gamma)}{\alpha(\alpha - \rho)} \text{ e } S = \frac{\beta(1 + \alpha - \gamma) + \alpha(1 - \alpha - 2\gamma) - (\alpha - \rho)(1 - \alpha - \gamma)}{\alpha(\alpha - \rho)}.$$

Lembrando que de

$$\begin{aligned}F(S, I) &= S(1 - S - I)(\alpha - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta) - SI(1 - \gamma) \\ G(S, I) &= I(1 - S - I)(\alpha - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta) + I(1 - \gamma)(1 - I)\end{aligned}$$

temos,

$$\frac{\partial F}{\partial S} = (1 - S - I)(\alpha - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta) - S(\alpha - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta),$$

$$-S(1 - S - I)(\beta + 2\alpha) - I(1 - \gamma),$$

$$\frac{\partial F}{\partial I} = -S(\alpha - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta) - S(1 - S - I)(\beta + \rho) - S(1 - \gamma),$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} = -I(\alpha - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta) - I(1 - S - I)(\beta + 2\alpha)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial I} &= (1 - S - I)(\alpha - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta) - I(\alpha - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta) \\ &\quad - I(1 - S - I)(\beta + \rho) + (1 - \gamma)(1 - 2I).\end{aligned}$$

Note que algumas expressões como

$$\cdot 1 - S - I$$

$$\cdot \alpha - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta$$

$$\cdot -S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta$$

são comuns em todas as derivadas parciais. Substituindo $I = \frac{-\beta(1 + \alpha - \gamma) - \alpha(1 - \alpha - 2\gamma)}{\alpha(\alpha - \rho)}$ e $S = \frac{\beta(1 + \alpha - \gamma) + \alpha(1 - \alpha - 2\gamma) - (\alpha - \rho)(1 - \alpha - \gamma)}{\alpha(\alpha - \rho)}$ nessas expressões temos

$$\cdot 1 - S - I = \frac{1 - \gamma}{\alpha}$$

,

$$\cdot \alpha - S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta = \frac{-\beta(1 - \gamma + \alpha) - \alpha(1 - \alpha - 2\gamma)}{\alpha - \rho}$$

$$\cdot -S(\beta + 2\alpha) - I(\beta + \rho) - 1 + 2\beta = \frac{(\alpha - \rho)\alpha - \beta(1 + \alpha - \gamma) - \alpha(1 - \alpha - 2\gamma)}{(\alpha - \rho)}.$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{\alpha^2(\alpha - \rho)^2} \left[-\beta(1 - \gamma + \alpha)\alpha - \alpha^2(1 - \alpha - 2\gamma) + (1 - \gamma)(\alpha - \rho)(\beta + 2\alpha) - \alpha(1 - \alpha - 2\gamma) - (\alpha - \rho)(1 - \alpha - \gamma) \right],$$

$$\frac{\partial F}{\partial I} = -\frac{\beta(1 - \gamma + \alpha) + \alpha(1 - \alpha - 2\gamma) - (\alpha - \rho)(1 - \alpha - \gamma)}{\alpha^2(\alpha - \rho)^2} - \beta(1 - \gamma + \alpha)\alpha - \alpha^2(1 - \alpha - 2\gamma) + (1 - \gamma)(\beta + \rho)(\alpha - \rho) + (1 - \gamma)(\alpha - \rho)\alpha,$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{\beta(1 - \gamma + \alpha) + \alpha(1 - \alpha - 2\gamma)}{\alpha^2(\alpha - \rho)^2} \left[(\alpha - \rho)\alpha^2 - \beta(1 - \gamma + \alpha) - \alpha(1 - \alpha - 2\gamma) + (\alpha - \rho)(1 - \gamma)(\beta + 2\alpha) \right],$$

$$\frac{\partial G}{\partial I} = \frac{1}{\alpha^2(\alpha - \rho)^2} \left[-(1 - \gamma)\alpha(\alpha - \rho) - (\alpha - \rho)\alpha^2 + \beta(1 + \alpha - \gamma)\alpha + \alpha^2(1 - \alpha - 2\gamma) - (1 - \gamma)(\beta + \rho)(\alpha - \rho) - \beta(1 - \gamma + \alpha) - \alpha(1 - \alpha - 2\gamma) \right].$$

Para analisar a estabilidade do ponto

$$\frac{\beta(1 + \alpha - \gamma) + \alpha(1 - \alpha - 2\gamma) - (\alpha - \rho)(1 - \alpha - \gamma)}{\alpha(\alpha - \rho)}, \frac{-\beta(1 + \alpha - \gamma) - \alpha(1 - \alpha - 2\gamma)}{\alpha(\alpha - \rho)}$$

vamos usar o critério de Routh – Hurwitz para polinômios de segundo grau, que diz o

seguinte:

Seja $P(x) = x^2 + a_1x + a_2$ um polinômio característico de segundo grau obtido através da matriz jacobiana de um sistema de equações diferenciais ordinárias. Os pontos de equilíbrio de tal sistema é estável se, e somente se, os coeficientes $a_i > 0$ com $i = 1, 2$. Como a matriz jacobiana do sistema em questão é

$$J_{F,tt}(S, I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} \end{bmatrix},$$

então o polinômio característico de segundo grau será

$$\begin{aligned} P_{J_{F,G}}(\lambda) &= \det(J_{F,tt}(S, I) - \lambda I_2) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} - \lambda & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial S} - \lambda \right) \left(\frac{\partial G}{\partial I} - \lambda \right) - \frac{\partial F}{\partial I} \frac{\partial G}{\partial S} \\ \Rightarrow P_{J_{F,G}}(\lambda) &= \lambda^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial S} + \frac{\partial G}{\partial I} \right) \lambda + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Dessa forma, pelo o critério de Routh – Hurwitz o ponto de equilíbrio

$$\left(\frac{\beta(1+\alpha-\gamma) + \alpha(1-\alpha-2\gamma) - (\alpha-\rho)(1-\alpha-\gamma)}{\alpha(\alpha-\rho)}, \frac{-\beta(1+\alpha-\gamma) - \alpha(1-\alpha-2\gamma)}{\alpha(\alpha-\rho)} \right)$$

é estável se, e somente se, $\frac{\partial F}{\partial S} + \frac{\partial G}{\partial I} < 0$ e $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} \end{vmatrix} > 0$.

Para $\frac{\partial F}{\partial S} + \frac{\partial G}{\partial I} < 0$, temos que $\frac{\partial F}{\partial S} < -\frac{\partial G}{\partial I}$. Assim,

$$\begin{aligned} & -\beta(1-\gamma+\alpha)\alpha - \alpha^2(1-\alpha-2\gamma) + (1-\gamma)(\alpha-\rho)(\beta+2\alpha) < -(\alpha-\rho)(1-\alpha-\gamma) \\ & < (1-\gamma)\alpha(\alpha-\rho) + (\alpha-\rho)\alpha^2 - \beta(1+\alpha-\gamma)\alpha - \alpha^2(1-\alpha-2\gamma) + (1-\gamma)(\beta+\rho)(\alpha-\rho) \\ & \quad - \beta(1-\gamma+\alpha) + \alpha(1-\alpha-2\gamma). \end{aligned}$$

Para $-\frac{\partial F}{\partial S} \frac{\partial G}{\partial I} - \frac{\partial F}{\partial I} \frac{\partial G}{\partial S} > 0$, $\frac{\partial F}{\partial S} \frac{\partial G}{\partial I} > \frac{\partial F}{\partial I} \frac{\partial G}{\partial S}$. Logo,

$$\begin{aligned}
 & \beta(1 - \gamma + \alpha)\alpha - \alpha^2(1 - \alpha - 2\gamma) + (1 - \gamma)(\alpha - \rho)(\beta + 2\alpha) - \beta(1 - \gamma + \alpha) - \alpha(1 - \alpha - 2\gamma) \\
 & - (\alpha - \rho)(1 - \alpha - \gamma) - (1 - \gamma)\alpha(\alpha - \rho) - (\alpha - \rho)\alpha^2 + \beta(1 - \alpha - \gamma)\alpha + \alpha^2(1 - \alpha - 2\gamma) \\
 & - (1 - \gamma)(\beta + \rho)(\alpha - \rho) - (\beta(1 - \gamma + \alpha) + \alpha(1 - \alpha - 2\gamma)) \\
 & < \beta(1 - \gamma + \alpha) + \alpha(1 - \alpha - 2\gamma) - (\alpha - \rho)(1 - \alpha - \gamma) - \beta(1 - \gamma + \alpha)\alpha - \alpha^2(1 - \alpha - 2\gamma) \\
 & - (1 - \gamma)(\beta + \rho)(\alpha - \rho) + (1 - \gamma)(\alpha - \rho)\alpha \\
 & - \beta(1 - \gamma + \alpha) + \alpha(1 - \alpha - 2\gamma) - (\alpha - \rho)\alpha^2 - \beta(1 - \gamma + \alpha) - \alpha(1 - \alpha - 2\gamma) \\
 & + (\alpha - \rho)(1 - \gamma)(\beta + 2\alpha).
 \end{aligned}$$

Portanto, pelo o critério de Routh – Hurwitz o ponto de equilíbrio

$$\left(\frac{\beta(1 - \gamma + \alpha) + \alpha(1 - \alpha - 2\gamma) - (\alpha - \rho)(1 - \alpha - \gamma)}{\alpha(\alpha - \rho)}, \frac{-\beta(1 - \gamma + \alpha) - \alpha(1 - \alpha - 2\gamma)}{\alpha(\alpha - \rho)} \right)$$

é estável quando as desigualdades acima são satisfeitas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa dissertação tratou da importância da Teoria do Jogos, mostrando sua aplicação na área da biologia, mais precisamente na evolução de determinadas espécies, sendo conhecida como Teoria do Jogos evolucionários. Por meio da Teoria dos Jogos Evolucionário, considerando jogos simétricos, deduziu-se a equação do replicador, onde se tornou uma grande ferramenta para compreender a evolução de espécies por meio da análise da frequência de estratégia das mesmas e que embora aparentando ser um modelo simples, como vimos através dessa equação pode-se obter vários resultados importantes. No caso do carcinoma de próstata, que era nosso principal objetivo de análise da evolução temporal, baseado no estudo de Basanta *et al*, não acredita-se que os resultados obtidos pela Equação do Replicador sejam a resposta final à questão do câncer de próstata, mas esses resultados em conjunto com outras áreas de conhecimento acabam se tornando um norte para possíveis formas de tratamentos mais eficazes e controle da doença.

REFERÊNCIAS

- [1] ALMEIDA, A.N; **Teoria dos Jogos: As origens e os fundamentos da Teoria dos Jogos**, UNIMESP - Centro Universitário Metropolitano de São Paulo, Novembro/2006
- [2] BALKWILL, F. **Tumour necrosis factor and cancer**, *Nature Reviews Cancer* vol.**9**, pag:361–371, Abril de 2009.
- [3] BARCLAY, W.W; WOODRUFF, R.D; HALL, M.C; CRAMER, S.D, **A System for Studying Epithelial-Stromal Interactions Reveals Distinct Inductive Abilities of Stromal Cells from Benign Prostatic Hyperplasia and Prostate Cancer**, *Endocrinology* vol:**146**,issue 1, pag: 13-18, Janeiro de 2005.
- [4] BASANTA, D; SCOTT, J.G; FISHMAN, M.N; AYALA, G; HAYWARD, S.W; ANDERSON, A.R.A.**Investigating prostate cancer tumour–stroma interactions: clinical and biological insights from an evolutionary game**, *British Journal of Cancer* **106**, pag: 174–181(2012) Dezembro de 2011.
- [5] BIUMBERG, J.M; KNOAT, E.O; CHEETHAM, T.C; NIU, F; SHAPIRO, C.E; PACIFICAR, J; LOO, R.K; WILLIAMS, S.G; CHIEN, G.W. **Early Development of Castrate Resistance Varies with Different Dosing Regimens of Luteinizing Hormone Releasing Hormone Agonist in Primary Hormonal Therapy for Prostate Cancer**. *Urology* **77**, pag: 412-416, fevereiro de 2011.
- [6] CABRAL, R.M.; **JOGOS EVOLUCIONÁRIOS**, Sistemas Dinâmicos. Área de concentração: Matemática Aplicada. Niterói: Universidade Federal Fluminense, 2008

- [7] ESTADÃO, **Câncer:descoberto defeito específico que altera produção de proteínas**. Disponível:<https://ciencia.estadao.com.br/blogs/ciencia-diaria/na-mirado-mtor-defeito-altera-producao-de-proteinas-e-pode-levar-ao-cancer/>. Acesso em: 11 de jan.2020
- [8] FRANCO, O.E; JIANG, M; STRAND, D.W; PEACOCK, J; FERNANDEZ, S; JACKSON II, R.S; REVELO, M.P; BHOWMICK, N.A, HAYWARD, S.W, **Altered TGF- β signaling in a subpopulation of human stromal cells promotes prostatic carcinogenesis**, *Cancer Research* **7**, pag: 1272–1281, Fevereiro de 2011.
- [9] HOFBAUER, J; **On the occurrence of limit cycles in the Lotka-Volterra equation. Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications**, v. 5, n. 9, 1981
- [10] HOFBAUER, J.; SIGMUND, K.; **The theory of evolution and dynamical systems**. Reino Unido: Cambridge University Press. 1988.
- [11] HOFBAUER, J., SIGMUND, K.; **Evolutionary games and population dynamics**, Reino Unido: Cambridge University Press, 1998.
- [12] HOFBAUER, J.; SIGMUND, K. **Evolutionary game dynamics**. Bull., new ser., Am. Math. Soc., v. 40, n. 4
- [13] instituto Nacional de Câncer (INCA), **Câncer de próstata**. Disponível : <https://www.inca.gov.br/tipos-de-cancer/cancer-de-prostata>. Acesso em: 10 de jan.2020
- [14] instituto Oncoguia, **o que é Câncer**. Disponível : <http://www.oncoguia.org.br/conteudo/cancer/12/1/>. Acesso em: 10 de jan.2020
- [15] JÚNIOR, E.W. **castração em pacientes com câncer de próstata**. Disponível: <https://www.siicsalud.com/pdf/145593.pdf>
- [16] KISKOWSKI, M.A; JACKSON II, R.S; BARNERJEE, J; LI, XIAOHONG; KANG, M; ITURREGUI, J.M; FRANCO, O.M; HAYWARD, S.W; BHOWMICK, **Role for stromal heterogeneity in prostate tumorigenesis**, *Cancer Research* **71**, pag: 3459-3470, Maio de 2011.

- [17] LIMA, E.L. **Curso de análise vol.2**. Brasil: IMPA (Projeto Euclides). 2005.
- [18] MANTOVANI, A; ALLAVENA, P; SICA, A; BALKWILL, F. **Cancer-related inflammation**, *nature* **454**, pag: 436-444, julho de 2008.
- [19] MARZO, A.M; PLATZ, E.A; SUTCLIFFE, S; XU, J; GRÖNBERG, C.G.D; NAKAI, Y; ISAACS, W.B; NELSON, G.W. **Inflammation in prostate carcinogenesis**, *Nature Reviews Cancer volume 7*, pag:256–269, Abril de 2007.
- [20] MAYNARD SMITH, j.; **Evolution and the Theory of Games**, University of Cambrige, 1982
- [21] OLUMI, A.F; GROSSFELD, GD; HAYWARD, S.W; CARROLL PR; TLSTY, TD; CUNHA, GR. **Carcinoma-associated fibroblasts direct tumor progression of initiated human prostatic epithelium**, *CancerRes* vol:**19**, pag:5002-5011, Outubro de 1999.
- [22] SARTINI, B.M; GARBUGIO, G; BORTOLOSSI, H.J; SANTOS , P.A; BARRETO, L.S. **Uma Introdução a Teoria dos Jogos**, Salvador: II Bienal da SBM, Universidade Federal da Bahia, 25 a 29 de outubro de 2004
- [23] SCHAYOWITZ, A; SABNIS, G; GOLOUBEVA, O; NJAR, V.C.O; BRODIE, A.M.H. **Prolonging hormone sensitivity in prostate cancer xenografts through dual inhibition of AR and mTOR**. *British Journal of Cancer* **103**, setembro de 2010.
- [24] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [25] TAYLOR, P.D.; JONKER, L.B. **Evolutionary stable strategies and game dynamics**. *Math. Biosc.*, v. 40, n. 2, 1978.
- [26] NEUMANN, J,V; **Zur Theorie der Gesellschaftsspiele** *Mathematische Annalen*, vol. 100, pp. 295-320. Traduzido por S. Bargmann:**On the Theory of Games of Strategy em Contributions to the Theory of Games**,vol. 4, pp. 13-42, A. W. Tucker e R. D. Luce (editores), Princeton University Press, 1959.

APÊNDICE A - ALGUMAS DEFINIÇÕES E RESULTADOS

Neste apêndice trazemos as definições e resultados relacionados as equações diferenciais ordinárias (EDO), que serão usados nos capítulos posteriores. As demonstrações dos resultados descritos aqui podem ser lidos nas suas respectivas referências.

Definição: O conjunto

$$S_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ e } x_i \geq 0\}$$

é denominado **simplexo** S_n .

Definição: O conjunto

$$\text{int}(S_n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ e } x_i > 0\}$$

é chamado o **interior** de S_n .

Definição: Seja $J \subset \{1, \dots, n\}$, $J \neq \emptyset$. O conjunto

$$S_n(J) = \{(x_1, \dots, x_n) \in S_n; x_i = 0 \ \forall \ i \in J\}$$

é dito uma **face** de S_n . A união de todas as faces de S_n é chamado de **fronteira** de S_n e é denotado por ∂S_n .

Definição: Seja $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. O conjunto

$$\text{supp}(x) = \{i \in \{1, \dots, n\}; x_i \neq 0\}.$$

é denominado de **suporte do ponto** x .

Definição: Em $\mathbb{R}^n$, o **octante não-negativo** é o conjunto

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n; x_i \geq 0 \ \forall \ i = 1, \dots, n\}.$$

Definição: O **interior** de $\mathbb{R}_+^n$ é o conjunto

$$\text{int}(\mathbb{R}_+^n) = \{x \in \mathbb{R}^n; x_i > 0 \ \forall \ i = 1, \dots, n\}.$$

Teorema de Picard:[24] Seja

$$f : \Omega = [t_0 - s, t_0 + s] \times [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

uma função contínua e lipschitziana em Ω . Se $|f| \leq M$, isto é, limitada em Ω , então existe uma única solução do problema de Cauchy

$$\square \quad \dot{x} = f(t, x)$$

$$\square \quad x(t_0) = x_0$$

em $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ onde $\alpha = \min\{s, \frac{\delta}{M}\}$.

Teorema de Peano:[24] Seja f uma função contínua em Ω definido como no teorema de Picard, se $|f| < M$ em Ω o problema de Cauchy

$$\square \quad \dot{x} = f(t, x)$$

$$\square \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{---} \quad \frac{\delta}{M}$$

tem pelo menos uma solução em I_α onde $\alpha = \min\{s, \frac{\delta}{M}\}$.

Teorema do Ponto Fixo de Brouwer: [17] Toda aplicação contínua

$$g : \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$$

possui (pelo menos) um ponto fixo.

Teorema de Poincaré-Bendixson: [24] Seja $\phi(t) = \phi(t, p)$ uma curva integral do campo

$$f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definida para todo $t \geq 0$ onde Δ é aberto, tal que $\gamma_p^+ = \{\phi(t, p) \geq 0\}$ (semi-orbita positiva) esteja contido no compacto $K \subset \Delta$. Suponha que o campo f possua um número finito de pontos de equilíbrio em $\omega(p)$. Têm-se as seguintes alternativas;

- a) Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.
- b) Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e pontos de equilíbrio, então $\omega(p)$ consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos de equilíbrio quando $t \rightarrow \pm$.

c) Se $\omega(p)$ não contem pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto de equilíbrio.

(A1) Aplicação do teorema de Poincaré - Bendixson:[24] Seja

$$f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

uma campo vetorial de classe C^1 no aberto Δ . Se γ é uma órbita periódica de f tal que $\text{int}(\gamma) \subset \Delta$, então existe um ponto de equilíbrio de f no $\text{int}(\gamma)$.

Sejam

$$V : Y \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, W : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ e } \xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \{s \in \mathbb{R}; s \geq c > 0\}$$

aplicações contínuas e localmente lipschitzianas, onde c é uma constante positiva, e

$$F : X \longrightarrow Y$$

um homeomorfismo diferenciável.

Lema de mudança de velocidade:[6] [10] Se a solução maximal x do problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \square & \quad \dot{x} = W(x) \\ \square & \quad x(0) = x_0 \end{aligned}$$

satisfaz $\frac{d}{dt}F(x) = \frac{1}{\xi}V(f(x))$ então a imagem por F da órbita de x_0 pelo sistema $\dot{x} = W(x)$ é a órbita de $F(x_0)$ pelo sistema $\dot{y} = V(y)$.

método de Bendixon-Dulac:[11] Seja $f = (f_1, f_2) : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 definido num conjunto simplesmente conexo $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Se $\text{div}f(x) > 0$ para todo $x \in S$ então, $\dot{x} = f(x)$ não admite órbita periódica.

(A2) Teorema de Bendixon-Dulac:[11] Seja $f = (f_1, f_2) : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 definido num conjunto simplesmente conexo $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Se existe uma função $B : S \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que a divergência do campo $x \longrightarrow B(x)f(x)$ é positiva em todo ponto de S , então $\dot{x} = f(x)$ não admite órbita periódica. Uma função B cumprindo tais condições deste enunciado é chamado de **função de Dulac**.

Teorema de Lyapunov:[11] Seja $\dot{x} = f(x)$ uma EDO que independe do tempo para algum subconjunto G de $\mathbb{R}_+^n$. Considere

$$V : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

contínua diferenciável. Se para alguma solução $x(t)$ tal que a derivada do mapa

$$t \mapsto V(x(t))$$

satisfaz a inequação $\dot{V} \geq 0$ ou $(\dot{V} \leq 0)$, então $\omega(x) \cap G \subset \{x \in G; \dot{V}(x) = 0\}$. O mesmo vale para $\alpha(x) \cap G$, onde

$\omega(x) = \{q \in \Delta \subset \mathbb{R}^n; \exists \text{ uma sequência de tempos } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } t_n \rightarrow +\infty \text{ e } x(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$

é omega limite de x , e

$\alpha(x) = \{q \in \Delta \subset \mathbb{R}^n; \exists \text{ uma sequência de tempos } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } x(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$

é o alpha limite de x .