UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

JOSÉ ANDRÉ BEZERRA DA CRUZ

DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS: Um Estudo Sobre o Processo De Transposição Didática Interna No Ensino Fundamental

Recife
2018

JOSÉ ANDRÉ BEZERRA DA CRUZ

DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS: Um Estudo Sobre o Processo De Transposição Didática Interna No Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Educação Matemática e Tecnológica

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Rosinalda Aurora de Melo Teles.

Recife

2018

Catalogação na fonte
Bibliotecária Amanda Ganimo, CRB-4/1806

C957d Cruz, José André Bezerra da.
Divisão de números naturais: um estudo sobre o processo de transposição didática interna no ensino fundamental/ José André Bezerra da Cruz. – Recife, 2018.
138 f. : il.

Orientadora: Rosinalda Aurora de Melo Teles.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2019.
Inclui Referências

1. Matemática (Ensino fundamental). 2. Professores – Prática de ensino. 3. Números naturais. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Teles, Rosinalda Aurora de Melo (Orientadora). II. Título.

372.7 (23. ed.) UFPE (CE2019-060)

JOSÉ ANDRÉ BEZERRA DA CRUZ

DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS: Um Estudo Sobre o Processo De Transposição Didática Interna No Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 05 / 04 / 2018.

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Rosinalda Aurora de Melo Teles (Orientadora)

Universidade Federal de Pernambuco

____

Profª. Drª. Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa (Examinadora Interna)

Universidade Federal de Pernambuco

____

Profª. Drª. Alina Galvão Spinillo (Examinadora Externa)

Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

O pessimista vê dificuldade em cada oportunidade. O otimista vê oportunidade em cada dificuldade.

Winston Churchill

Ao final deste estudo, é justo reconhecer as contribuições que o tornou possível. Tal estudo durou dois anos e foi decorrente da minha força de vontade de nunca desistir dos meus sonhos, apesar de todas as dificuldades que enfrentei desde criança. Contudo, não seria possível tal sonho sem a ajuda de muitas pessoas que se fizeram presentes ao longo da minha jornada. Por isso, se houvesse uma expressão mais intensa que MUITO OBRIGADO, certamente, usaria, para agradecer:

Em primeiro lugar, a Deus, por torna possível a realização de mais um sonho.

Aos meus pais, José Aprígio e Jacira, que se estivessem vivos, penso que sentiriam muito orgulho das minhas conquistas.

A minha tia e mãe, Jesuíta, que por muitas vezes quando ia estudar começava a falar e acabava não deixando estudar, sei que isso é decorrente da sua idade, mas não tenho como agradecer por tudo que fez por mim durante minha criação.

As minhas outras mães que a vida me deu, Jandira, Lídia Márcia e Lurdes, por todos os conselhos, afetos, motivações e apoio que me proporcionam.

À Professora Rosinalda, pelas brilhantes orientações e pelos ensinamentos no decorrer deste estudo, sempre nos incentivando a avançar e crescer. Ser seu orientando é um daqueles privilégios, que a gente nunca entende como pode ter alcançado tamanha dádiva.

A minha vó, Josefa, que apesar de não estar mais entre nós e não ter dito uma boa formação escolar, foi doutora nos conhecimentos da vida.

As minhas irmãs, Janaína, Jaqueline e Patrícia, que sempre que preciso estão a minha disposição.

A todos os meus tios e tias: João, Josenildo, Rosa, Luciana, Jeová, Zezinho (in memoria), Jadi (in memoria) e Neta (in memoria).

A todos os meus professores e amigos: do Colégio Municipal Gerson de Albuquerque Maranhão (Águas Belas – PE), de forma especial a professora Maria Eugênia; da Escola de Aplicação Professora Ivonita Alves Guerra (Garanhuns – PE); da Universidade de Pernambuco (UPE – campus Garanhuns), de maneira especial ao professor Diógenes Maclyne; dos grupos de pesquisa Gipem e SEMEAR, em especial para Rosinalda Teles e Marilene Rosa.

Às Professoras Cristiane Pessoa e Alina Spinillo, por participarem e contribuírem com este estudo no exame de qualificação e na banca de defesa.

Aos professores, professoras, funcionários e colegas do EDUMATEC. Ter participado deste grupo, é uma honra.

Aos integrantes (professores, professoras e mestrandos) da linha de pesquisa Didática da Matemática, pelas diversas contribuições no decorrer de todo o percurso deste estudo.

A todos os colegas do EDUMATEC, com quem foi um prazer conviver nestes dois anos. Especialmente, Demettrius, Marcel, Larissa e Jailson, que são amigos que levo para toda a vida.

Aos meus amigos, parceiros e irmãos de todos os momentos: Amilton, Junior Malta, William, Marcos e Alléf, que sempre se fazem presente na minha vida.

Aos três professores e aos integrantes da escola sede da pesquisa, que participaram deste estudo, e nos ajudaram a compreender as questões que nos propomos investigar.

Aos meus alunos, de ontem, de hoje e de amanhã, por me ensinarem tanto, a cada dia. Conviver com vocês é um prazer sem igual.

Aos meus parceiros e amigos do grupo os Improváveis, João Marcelo, Juninho Alves, Wendell, Lucas, Jonatas, Alexandre e Cristóvão, que me proporcionaram diversão, mesmo quando, as demandas do Mestrado eram imensas.

A você, prezado (a) leitor (a), por acreditar que nesta pesquisa, encontrará elementos e evidências que possam contribuir com o Ensino e a Aprendizagem da operação divisão de números naturais.

RESUMO

O presente estudo é fruto de uma pesquisa de mestrado, que buscou analisar a Transposição Didática Interna no processo de ensino da operação de divisão de números naturais, no 4°,5° e 6° anos do Ensino Fundamental. Do ponto de vista teórico, baseia-se na noção de Transposição Didática proposta por Yves Chevallard, em particular a Transposição Didática Interna, apoiando-se também em pesquisas anteriores sobre o tema, das quais emergem as categorias de análise adotadas neste estudo, quais sejam: os diferentes procedimentos de cálculos (mental, escrito, exato, aproximado, por estimativas, arredondamentos e utilizando os algoritmos convencionais), os significados da divisão (partição e quotição), o tratamento dado ao resto e a interpretação dos resultados obtidos na operação divisão. Especificamente buscou-se identificar o saber a ensinar relacionado à operação divisão sugerido pelos documentos legais e livros didáticos adotados por professores que ensinam matemática nos 4º, 5º e 6º anos em escolas públicas da rede municipal da cidade de Águas Belas, no Agreste de Pernambuco, e analisar o saber efetivamente ensinado em aulas dos professores participantes da pesquisa em situação de ensino da operação de divisão. Com vistas alcançar os objetivos, foram analisados alguns documentos oficiais, bem como os três livros didáticos adotados pela escola e que deveriam ser utilizados pelos professores participantes da pesquisa, na tentativa de compreender o que as escolas e os mesmos estabelecem enquanto saber a ensinar. Foram observadas ainda as aulas dos professores participantes em situação de ensino da operação divisão de números naturais, visando a uma posterior comparação entre o saber previsto para ser ensinado (documentos legais e livros didáticos) e o saber efetivamente ensinado (aulas dos professores). Os dados apontam que nenhum dos três professores ensinou o saber previsto para ser ensinado nos documentos legais analisados e livros didáticos, ou seja, transformaram o saber a ensinar em saber ensinado, através de mudanças, deformações e deixando lacunas no saber previsto para ser ensinado. Em relação aos diferentes procedimentos de cálculos observou-se o ensino de “regrinhas” para facilitar o processo de aquisição do conhecimento sobre a operação divisão, bem como nenhum dos professores trabalhou todos os procedimentos de cálculos destacados nos documentos e livros didáticos; quanto aos significados da divisão notou-se que os professores priorizaram o significado

partição em suas aulas; já no tratamento dado ao resto trabalharam divisões exatas e não exatas, isto é, o resto não foi tratado, pois tem relação com as estratégias dos alunos, ou seja, o saber aprendido; e na interpretação dos resultados da divisão, verificou-se que apenas um dos professores ensinou o saber previsto para ser ensinado. É importante destacar ainda a não utilização do LD pelos três professores, isto é, levavam fichas de atividades prontas ou escreviam no quadro, fato esse que pode ter contribuído para as mudanças, deformações e lacunas evidenciadas. Diante do exposto, concluímos que o processo de Transposição Didática Interna decorrente da abordagem dos três professores participantes em relação ao saber a ensinar, a operação divisão de número naturais, ocorreu de forma diferente do que estava previsto nos documentos legais e livros didáticos, o que pode acarretar prejuízos para a aprendizagem de seus alunos.

Palavras-chave: Transposição Didática Interna. Divisão de Números Naturais. Prática Docente.

ABSTRACT

This is the result of a Master's research that aimed to analize the Internal Didactic Transposition in the teaching process of the operation of division of natural numbers in the 4th, 5th and 6th grades of the Fundamental Teaching. From the theoretical point of view, It is based on the notion of Didactic Transposition proposed by Yves Chevallard in particular the Internal Didactic Transposition, based on previous research on the subject from which emerges the categories of analysis adopted in this study, namely: the different calculation procedures (mental, written, exact, approximate, by estimation, rounding and using conventional algorithms), the meanings of the division (partition and discharge), the treatment given to the rest and the interpretation of the results obtained in the division operation. Specially sought to identify the teaching know-how related to operation division suggested by legal documents and textbooks adopted by teachers math in the 4th, 5th and 6th grades in public schools of the municipal network of the city of Águas Belas in the rough of Pernambuco and analyze the knowledge effectively taught in classes of teachers participating in the research on the teaching operation of the division operation. In order to achieve the objectives, some official documents were analyzed, as well as the three textbooks adopted by the school and that they should be used by the teachers participating in the research, in an attempt to understand what the schools and the teachers stablish while knowing how to teach. The classes of the participating teachers in the teaching situation of the natural numbers division operation were also observed aiming at a later comparison between the knowledge expected to be. The data indicated that none of the three teachers taught the knowledge expected to be taught in the analyzed legal documents and textbooks, that is, transformed the teaching knowledge into untaught knowledge, through changes deformation and leaving gaps in the knowledge expected to be taught. Regarding the different calculation procedures, the teaching of "rules" was observed to facilitate the process of aquiring knowledge about the division operation, as well as none of the teachers worked all the procedures on the documents and textbook; as for the meanings of the division, it was noted that the teachers prioritized the meaning partition in their classes; already in the treatment given to the rest worked exact and non-exact division, that is, the rest was not dealt with, because it has with strategies of the students, that is, the knowledge learned; and in the interpretation of the division, it was found that only one of the teachers taught the knowledge expected to be taught. It is important to highlight the non-use of the LD by the teachers, that is, they would carry out complete activity sheets or write on the board, a fact that may have contributed to the changes, deformations and highlighted gaps. Given the above, we conclude that the process of Internal Didactic Transposition resulting from the approach of the three participating teachers in relation to knowing how to teach the operation division of natural numbers occured differently from what was foreseen in legal documents and textbooks which can cause damage to students' learning.

Keywords: Internal Didactic Transposition. Division of Natural Numbers. Teaching Practice.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

BCC/PE	BASE CURRICULAR COMUM PARA AS REDES PÚBLICAS DE ENSINO DE PERNAMBUCO
BNCC	BASE NACIONAL COMUM CURRUCULAR BNCC
EJA	EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS
PCN	PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS
PNLD	PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO
SAEPE	SISTEMA DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL DE PERNAMBUCO
UNDIME/PE	UNIÃO NACIONAL DOS DIRIGENTES MUNICIPAIS DE EDUCAÇÃO DE PERNAMBUCO
PCPE	PARÂMETROS PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA DO ESTADO DE PERNAMBUCO

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Pesquisas acadêmicas em Educação Matemática abordam a existência de certa distinção entre o saber que é previsto para ser ensinado e o que é realmente ensinado nas salas de aula (JOSSE, E.,1992; BESSA DE MENEZES, Marcus, 2004; MATOS FILHO, MENEZES, SILVA e QUEIROZ, 2008). Estas pesquisas apontam que o saber a ser ensinado sofre transformações até se tornar saber efetivamente ensinado.

Esse processo de ‘transformação’ dos saberes é o que Yves Chevallard denomina de Transposição Didática, e refere-se às modificações que são feitas nos conteúdos dos programas e manuais de ensino. David Bordet (1997) sugere a existência de duas fases nessa teoria de Chevallard: a transposição didática externa, que é a passagem do saber científico, denominado de ‘saber sábio’ para o saber a ensinar e a transposição didática interna caracterizada pela passagem do saber a ensinar ao saber efetivamente ensinado em sala de aula.

Vale destacar que as aprendizagens da operação divisão não têm sido garantidas à maioria dos alunos que chegam aos Anos Finais do Ensino Fundamental, pois muitos ainda apresentam dificuldades para a realização dos cálculos numéricos, seja mobilizando algoritmos pessoais ou o algoritmo euclidiano convencional, bem como dificuldades relacionadas aos diferentes significados da divisão (partição e quotição), ao tratamento dado ao resto e à interpretação dos resultados obtidos. Notadamente destacam-se muitas incompreensões relacionadas à divisão, conforme evidenciaram Saiz (2001), Benvenutti (2008) e Alves (2012).

Além disso, o ensino da operação de divisão, em grande parte das salas de aula, ainda é realizado por meio de uma abordagem que prioriza um ensino sem grandes reflexões. Souza (2010, p. 2), afirma que “as operações são apresentadas como técnicas, procedimentos e ações que, quando aplicadas em sequência e repetidamente, conduzem à resposta”.

Em contraposição a essa forma de abordagem, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997, p. 39) recomenda que o trabalho com as operações no Ensino Fundamental deve se concentrar “na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, nas relações existentes entre elas e no estudo reflexivo do cálculo, contemplando diferentes tipos - exato e aproximado, mental e escrito”.

Partindo dessas compreensões iniciais, a presente pesquisa busca investigar como a transposição didática interna ocorre no ensino da operação de divisão de números naturais, no 4°, 5° e 6° anos do Ensino Fundamental. Tal estudo tem como foco de análise a divisão de números naturais de forma geral, ou seja, os diferentes procedimentos de cálculos (mental, escrito, exato, aproximado, por estimativas, arredondamentos e utilizando os algoritmos convencionais), os significados da divisão (partição e quotição), bem como o tratamento dado ao resto e a interpretação dos resultados obtidos, buscando verificar como ocorre o processo de transposição didática interna da referida operação.

O interesse pelo tema surgiu a partir de inquietações e indagações decorrentes da experiência docente ao lecionar a disciplina de Matemática, no 8° e no 9° ano do Ensino Fundamental, no Colégio Municipal Gerson de Albuquerque Maranhão, na cidade de Águas Belas no Agreste de Pernambuco, de onde sou natural e resido. Por meio das vivências didático-pedagógicas foi possível observar que grande parte dos alunos apresentavam dificuldades relacionadas à utilização dos diferentes procedimentos de cálculos, bem como no tratamento dado ao resto e na interpretação dos resultados obtidos na divisão. Aliada a tal experiência, somam-se também as vivências e estudos desenvolvidos por meio da disciplina Construtos Teóricos da Educação Matemática, na condição de aluno especial de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC), da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), que possibilitou o contato com várias teorias, dentre elas, a Transposição Didática que se constitui na teoria que embasa o presente estudo.

Vale salientar também que a escolha da operação de divisão, levou em consideração que as operações que os alunos apresentam mais dificuldades são as de subtração e divisão (consideradas mais difíceis). Tal fato decorre da experiência ao ensinar as operações fundamentais em sala de aula.

Ao realizar o levantamento de trabalhos (portal da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, Revista EM TEIA e Bolema) não localizamos pesquisas voltadas para a transposição didática interna com foco no ensino da operação de divisão. Nos achados, identificamos pesquisas referentes às operações de multiplicação e divisão voltadas para a aprendizagem dos alunos, refletindo sobre ‘como os alunos aprendem’, suas dificuldades, estratégias e concepções (ALVES, 2012; BENVENUTTI, 2008; CUNHA, 1997; LIMA, 2012; SAIZ, 2001; SILVA, 2014; SOUZA, 2010; WALLEUER, 2006) e algumas sobre ‘como os professores ensinam’ seus conhecimentos, concepções e dificuldades (MOREIRA, 2004; VACONCELOS, 2009), mas nenhuma utilizando a noção da transposição didática interna. Portanto, dessa forma, destacamos o ineditismo do tema, bem como sua possível significativa contribuição social e pedagógica para a Educação Matemática, que está relacionada a evidenciar o que é para ser ensinado nos documentos legais e livros didáticos e o saber efetivamente ensinado em sala de aula, isso referente à operação divisão de números naturais. É importante comentar ainda que apesar da presente pesquisa se tratar da operação de divisão, em muitos momentos falamos também da multiplicação, tendo em vista as inter-relações entre essas operações, bem como por uma ser a operação inversa da outra.

Salientamos ainda, que do ponto de vista teórico, baseamo-nos na noção proposta por Yves Chevallard sobre a transposição didática, buscando identificar e analisar as transformações realizadas pelo professor em relação ao saber a ensinar, no que se refere à operação de divisão de números naturais. A seguir discutiremos sobre o processo de transposição didática.

Nesse trabalho apresentamos uma fundamentação teórica sobre a transposição didática e os elementos da operação divisão, trazemos uma revisão de literatura centrada em trabalho que envolvam às operações de multiplicação e divisão, por fim abordamos os aspectos metodológicos e os resultados e discussão da presente pesquisa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta secção discutiremos sobre a transposição didática contemplando suas duas fases, segundo David Bordet (1997), a transposição didática externa e a interna. Também discutiremos sobre as categorias que serão levadas em consideração na presente pesquisa, isto é, os diferentes significados da divisão, os procedimentos de cálculo, o tratamento dado ao resto e a interpretação dos resultados, bem como abordaremos sobre um pouco da história das operações de multiplicação e divisão e sobre o algoritmo da divisão.

2.1 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Para Rosa dos Santos (2015) a teoria da transposição didática, apresenta um elemento importante em sua composição que é a relação recíproca entre saber e instituição (a palavra “instituição” é utilizada, em conformidade com a Teoria da Transposição Didática, ou seja, num sentido mais amplo do que na vida cotidiana). Dessa maneira, a noção de saber pode ser compreendida como formas de organização de conhecimentos, ou seja, fruto da ação humana institucional. Assim, Chevallard (1991) aponta que todo saber é saber de uma instituição, bem como um mesmo saber pode viver em instituições diferentes.

Na presente pesquisa levaremos em consideração o estudo da operação de divisão de números naturais, que transita por diversas instituições como ‘a escola’, ‘uma disciplina’, ‘a sala de aula’, etc. Segundo Chevallard (1991), para que um saber possa fazer parte de uma instituição, é necessário que o mesmo se sujeite a certas exigências, o que acarreta na necessidade dele se transformar, senão não poderá pertencer à instituição.

O fenômeno da transposição didática, proposto por Chevallard (1991) é definido como o conjunto de transformações adaptativas que um objeto de saber a ensinar sofre até se tornar objeto de ensino. Conforme defende o autor:

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os “objetos de ensino”. O “trabalho” que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática (CHEVALLARD, 1991, p, 39).

Segundo Bosch e Gascon (2007, p. 387) “o processo de transposição didática começa longe da escola, na escolha dos *corpos* de conhecimento que se deseja transmitir”. Assim, os saberes são transformados e chegam às salas de aula, devido às necessidades sociais de educação e comunicação.

É importante comentar que Chevallard inspirou-se nas ideias de Verret (1975), principalmente na abordagem epistemológica das suas análises do saber e ao distanciamento entre o saber sábio e o saber a ser ensinado. Contudo, nota-se diferenças sobretudo no campo de atuação, Verret no campo da Sociologia e Chevallard na Didática da Matemática.

Chevallard (1991) evidencia, em sua teoria, a noção de habitat de um objeto como sendo o tipo de instituição onde se encontra o saber relacionado ao objeto de estudo, que por sua vez determinará seu nicho, ou seja, a função desse saber. Dessa maneira, o autor distingue as instituições como produtoras, utilitárias, transpositivas, e de ensino.

As instituições produtoras segundo Rosa dos Santos (2015, p. 27) "são, geralmente, as mais valorizadas pela sociedade e formadas por cientistas, intelectuais e pesquisadores"; as utilitárias (empresas, indústrias, comércios, etc.) "são aquelas que utilizam o conhecimento produzido nas instituições produtoras" (p. 28); as transpositivas (a noosfera) "são consideradas a mola maestra da Transposição Didática, pois permitem que os saberes passem de uma instituição a outra" (p. 28); e as instituições de ensino (escolas) "são as mais visíveis culturalmente e representadas pelo professor em sala de aula" (p. 28).

Para Chevallard (1991), a noosfera é uma instituição pensante e invisível, que tem como responsabilidades, selecionar os saberes sábios que farão parte do currículo escolar. Os sujeitos que fazem parte da noosfera são: especialistas, técnicos, gestores, secretários educacionais, etc., (são os responsáveis pela elaboração das diretrizes curriculares, ou seja, normatizam o que deve ser estudado nas instituições de ensino).

Nesse sentido, Chevallard (1991) aponta o processo de transformações dos saberes em três grupos: *savoir salvant* (saber sábio), *savoir à enseigner* (o saber a ensinar) e o *savoir enseigné* (saber ensinado). Cada um desses grupos tem seus próprios sujeitos, suas próprias instituições, seus objetivos e normas que influenciam nas transformações ocorridas no saber. Tais normas configuram um processo de preparação didática, que podem ser resumidas, de acordo com Chevallard (1991), como a dessincretização, a despersonalização, a programabilidade, a publicidade do saber e o controle social das aprendizagens.

A dessincretização segundo Rosa dos Santos (2015, p. 30), "consiste na exigência de conduzir primeiramente uma divisão da teoria entre áreas e especialidades bem delimitadas, em que cada uma será expressa por meio de um discurso próprio". Na despersonalização há uma exigência que consiste em separar do saber qualquer contexto pessoal, ou seja, é retirada toda e qualquer conexão com o ambiente no qual ele foi gerado. Segundo Chevallard (1991):

> O saber que produz a transposição didática será, então, um saber exilado de suas origens, e separado de sua produção histórica na esfera do saber científico, legitimando-se, então, o saber ensinado como algo que não é de tempo algum nem de lugar algum, e não se legitimando mediante o recuso à autoridade de um produtor, qualquer que seja (CHEVALLARD, 1991, p. 18).

A programabilidade da aquisição do saber incide na determinação de uma programação da aprendizagem, de maneira sequencial e racional. Já na publicidade a exigência define explicitamente o que deve ser ensinado. A linguagem utilizada nessa nova divulgação é nova e muitos termos usados no saber sábio são omitidos.

Por fim a última exigência é o controle social das aprendizagens, que segundo Rosa dos Santos (2015, p. 31), "está intimamente relacionado com a programabilidade, que é chamada de publicidade, pois determina quais os saberes que deverão ser ensinados, para que faixa etária, em que tempo, como ensiná-los (muitas vezes) e o que avaliar".

Como resultado destes processos, Rosa dos Santos (2015), evidencia que o saber a ensinar toma forma de conteúdo didático sendo apresentado em diversos documentos, segundo uma amostra racional e uma organização progressiva, linear e cumulativa, devendo estar acessíveis aos professores. Segundo Henry (1991), dá-se início a uma nova transformação, dando origem ao saber escolar (*savoir scolaire)*. Tal saber está entre o saber a ensinar e o saber ensinado, isto, são os livros didáticos e manuais de ensino que auxiliam o professor na preparação de suas aulas e são produzidos a partir dos documentos que os norteiam.

Outra transformação do saber que está entre o saber a ensinar e o saber ensinado, foi denominada por Ravel (2003) de saber preparado (*savoir apprêté*). Esse saber decorre das escolhas didáticas e matemáticas realizadas pelo professor ao lecionar um dado assunto matemático (saber matemático), pois durante o planejamento da aula a ser dada o professor faz suas escolhas, utiliza o livro didático adotado pela escola ou mesmo outros materiais de sua preferência, ou seja, decide sobre a forma de organização e exposição dos saberes.

Todavia, esse saber preparado pelo professor, algumas vezes registrado em seu plano de ensino (tendo em vista que várias pesquisas e também observações empíricas apontam que a maioria dos professores não faz um planejamento sistemático, por escrito, das aulas que ministra), poderá ou não corresponder àquele efetivamente vivenciado em sua sala de aula, conforme analisados por pesquisas como, a de Brito de Menezes (2006) e Bessa de Menezes (2004).

Nessa etapa da transposição didática, o professor transforma o saber preparado em saber ensinado. Contudo, Rosa dos Santos (2015) destaca que,

> [...] essa transposição é influenciada tanto pela concepção de educação do professor, dos coordenadores de área, dos supervisores e dos familiares quanto pelas condições e impedimentos existentes na instituição escolar (tipo de escola, localização, metas, projeto político pedagógico, etc.) (ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 33).

Outro elemento que está presente na teoria da transposição didática é o tempo, sobre o mesmo Chevallard (1986), destaca duas variáveis a respeito desse tempo no sistema didático que são o tempo didático e o tempo de aprendizagem. O tempo didático é aquele determinado nos programas de ensino, orientações curriculares, planos de curso e nos livros didáticos. Já o tempo de aprendizagem está ligado às rupturas e conflitos do conhecimento, que está relacionada à complexidade do ato de aprender, não sendo possível controlar.

Câmara dos Santos (1997), partindo das ideias de Chevallard (1986), avança na construção de um modelo de funcionamento do tempo, propondo um modelo composto por mais duas dimensões, que são o tempo noosférico e o tempo do professor.

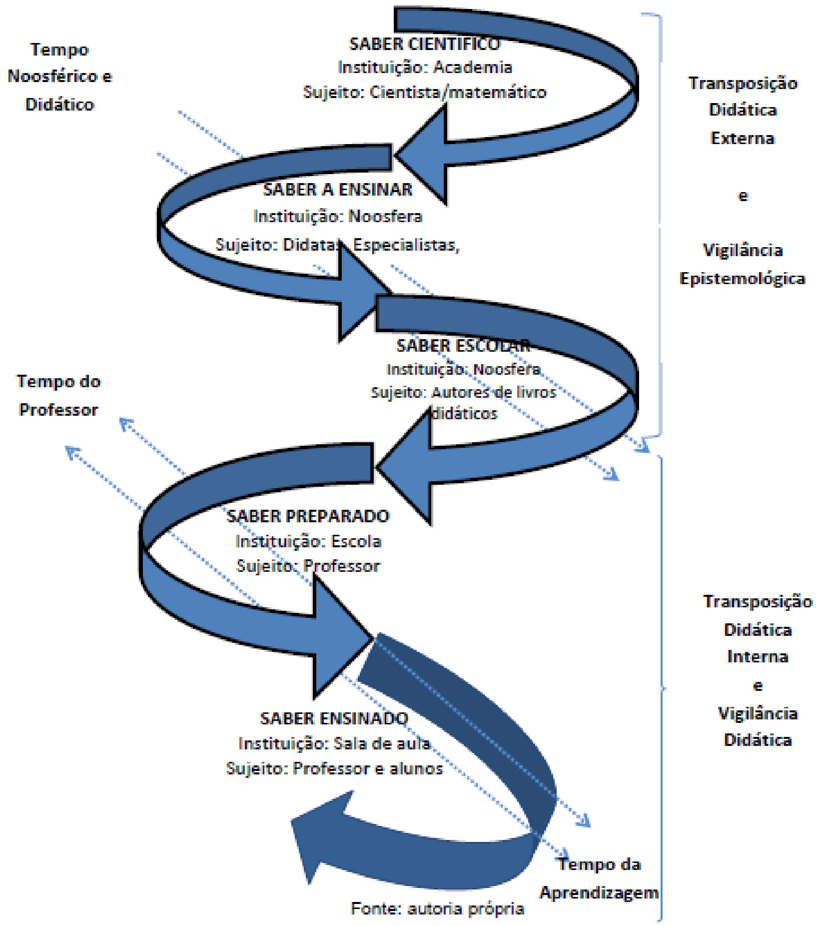
Sobre tempo noosférico Câmara (1997), aborda que a ordem de surgimento do conhecimento na comunidade escolar é predeterminada pelo texto escolar. Tal texto determina de certa forma a programação escolar. O tempo noosférico para o autor é composto por dois componentes que atuam de forma integrada e simultânea. O tempo legal, responsável por regular o ritmo de aparecimento dos objetos de conhecimento na relação didática, através da divisão do texto escolar e o tempo lógico que é aquele inerente ao próprio conhecimento matemático, sendo um tempo linear, que origina o que chamamos de cadeia de pré-requisitos.

O tempo do professor, de acordo com Câmara (1997), decorre da relação que o professor tem com o conhecimento matemático, o que justifica de certa maneira o professor avançar o tempo do saber de um dado objeto matemático (quando sua relação com tal saber falta intimidade) e frear esse tempo em outros objetos do saber (quando sua relação com tal saber é intima).

Assim, Chevallard (1991), destaca que as transformações podem acontecer de duas maneiras distintas, são elas: Transposição Didática *Stricto sensu* e Transposição Didática *Lato sensu.* A primeira ocorre quando a evolução das ideias é analisada em relação a um dado conceito, enquanto a segunda, ocorre quando a análise é realizada em um contexto mais amplo.

Diante do exposto evidenciamos que as transposições didáticas podem ser externas (transformações do saber sábio em saber a ensinar) e internas (transformações do saber a ensinar em saber efetivamente ensinado). Rosa dos Santos (2015), em seu estudo elaborou uma representação gráfica da trajetória do saber desde o saber sábio (que a autora chama de saber científico) até o saber ensinado. Tal representação é evidenciada a seguir.

Figura 1 – Representação da trajetória dos saberes na Transposição Didática



Fonte: ROSA DOS SANTOS, 2005, p. 37.

A autora optou por uma representação que expressasse movimento, pois mesmo acreditando que os saberes não se sobrepõem, entende que há uma circularidade nesse processo, de forma que o saber ensinado instiga novos questionamentos, dos quais surgem novas pesquisas que são investigadas pela comunidade científica que desenvolve novos saberes a ensinar.

Rosa dos Santos (2015) ainda afirma que a transposição didática não é estática, cada seta na figura acima está impregnada de intenções, muitas delas ideológicas, para suprir as exigências de um projeto social em vigor. É importante destacar ainda, que de acordo, com a mesma não existe saber maior ou menor, todos têm sua importância para a Teoria da Transposição Didática.

Com o intuito de melhor esclarecer o processo de Transposição Didática, a seguir explicaremos de forma mais detalhada a transposição didática externa e a interna.

2.2 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA EXTERNA

O fenômeno da transposição didática tem como etapa inicial a transposição didática externa, que consiste na transformação do saber científico ou ‘saber sábio’, conforme denomina o próprio autor, em saber a ensinar. Esse processo de transformação do saber científico em saber a ensinar é realizado em um espaço denominado por Chevallard de “noosfera”[1], que envolve pessoas e instituições responsáveis por designar o que deve ser ensinado nas instituições de ensino. Conforme afirma Bessa de Menezes (2004),

> Podemos, nesse sentido, referirmo-nos aos didatas, professores, pedagogos, técnicos de instituições do Governo responsáveis por gerir o ensino (no caso do Brasil, o MEC, por exemplo). Enfim, pessoas (muitas delas representando instituições) que vão elaborar programas, diretrizes curriculares, livros didáticos, etc. os quais aparecem, então, como instrumentos *reguladores*, no sentido de que eles vão normatizar o que deve ser ensinado na escola, o *saber a ensinar*, consolidando uma primeira etapa da transposição didática e caracterizando a transposição didática externa. (BESSA de MENEZES, 2004, p. 22).

Ao longo do processo de transformação dos saberes, o saber científico sofre deformações, adaptações e modificações, deixando para trás partes de seu formato

[1] O conceito de Noosfera é primeiramente apresentado pelo aP.^{e} Theilhard de Chardin no Livro O Fenômeno Humano de 1955. Referência: Pierre Teilhard de CHARDIN. O Fenômeno Humano. (tradução e notas: José Luiz Archanjo, Ph. D.). São Paulo: Editora Cultrix, s/d. 392p

original. Dessa maneira é necessário que se realize o que Chevallard (1991) intitulou de *vigilância epistemológica,* para que o saber a ensinar não se desconecte do saber científico, de forma a acarretar obstáculos à aprendizagem. Dialogando também sobre o tema Araújo (2009), aponta que essa vigilância é o principal objetivo da transposição didática, uma vez que visa analisar o saber desde do instante da sua produção (saber sábio), até ser ensinado nas salas de aula (saber ensinado).

Nessa perspectiva Rosa dos Santos (2015) destaca que,

> Para que o saber em jogo tenha sentido e ajude na compreensão do estudante é necessário que o professor faça o caminho contrário do cientista (matemático), ou seja, contextualize o conceito. Para isso é necessário promover situações que levem o estudante a agir, formular e testar hipóteses, legitimar e, por fim, o educador descontextualiza para poder institucionalizar, para que haja uma generalização (ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 32).

Uma das formas de realizar essa contextualização em sala de aula é colocar para os alunos situações semelhantes àquelas que deram origem a esse dado saber, ou seja, colocar eles na posição do cientista (matemático).

Devido às deformações e adaptações que o saber científico sofre ao longo do processo da transposição didática, o professor quase nunca terá acesso ao saber original, mas sim a adaptações por meio dos livros didáticos e/ou manuais de ensino, sendo ainda responsável por mais uma etapa da Transposição Didática que ocorrerá no seio da sala de aula (Transposição Didática interna).

Essas sucessivas adaptações do saber fazem surgir outro elemento que Chevallard (1991) chamou de criações didáticas, que são artifícios utilizados com intuito de facilitar a apropriação do conhecimento por parte dos discentes (um exemplo bastante conhecido é o diagrama de Venn, utilizado para facilitar o processo de ensino/aprendizagem da Teoria dos Conjuntos). Contudo, essas criações didáticas trabalhadas em sala de aula podem acarretar diferenças com relação ao saber a ensinar, como exemplo ensinar o diagrama de Venn, pensando que desta maneira estará ensinando Teoria dos Conjuntos.

Ainda sobre as criações didáticas, Rosa dos Santos (2015, p. 33), evidencia que “algumas definições e propriedades geralmente são ditas de forma diferente e algumas demonstrações sofrem modificações para que os alunos compreendam”.

Tudo isso visa facilitar o processo de ensino e aprendizagem, isto é, adaptar os saberes às condições cognitivas e sociais dos alunos.

Chevallard (1991) recomenda que o saber ensinado não deve ser tão próximo nem tão distante do saber sábio. Nesse caso, há a necessidade de equilíbrio entre o saber sábio e o saber ensinado, com vista que um (saber ensinado) não se desconectar do outro (saber sábio).

Dando continuidade ao processo de Transposição didática, o mesmo chega à sala de aula consolidando a última etapa deste processo. Assim, discutiremos a seguir sobre o processo de transposição didática interna, cuja discussão é fundamental para o presente estudo, uma vez que queremos observar a transformação do saber previsto para ser ensinado em saber ensinado, e isto decorre da abordagem do professor em sala de aula.

2.3 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA INTERNA

A transposição didática interna é a última transformação sofrida pelo saber sábio, tendo enquanto parceiros envolvidos, o professor e os alunos. Tal transformação é decorrente da abordagem do professor em relação aos saberes a ensinar. De acordo com Brito de Menezes (2006), na sala de aula o professor não traduz fielmente o que o livro didático traz, mas sim ele fornece uma nova abordagem a esse saber, de forma a transformá-lo, modificá-lo, criando conforme Chevallard (1991), um metatexto, ou seja, um texto do texto.

Brito de Menezes (2006) declara que na relação professor/aluno/saber (relação didática), o professor quase nunca terá acesso ao saber original, mas sim as adaptações/deformações por meio dos livros didáticos e manuais de ensino, sendo ele, ainda o responsável por mais uma etapa nessa adaptação que ocorrerá no interior da sala de aula, denominada de Transposição Didática Interna.

Câmara dos Santos (1997) acredita que, na transposição didática interna o professor cria um novo texto didático carregado pela sua subjetividade.

A transposição didática interna é realizada pelo professor, de forma que ele mesmo, não percebe que está realizando tal feito, conforme defende Chevallard (1991). Bessa de Menezes (2004), também dialogando sobre o tema, afirma que a transposição didática interna acontece de maneira inconsciente para o professor, ou seja, ele pensa que está sendo fiel ao saber a ensinar.

É importante abordar que, apesar do professor realizar tal processo de maneira inconsciente, ele faz planejamentos para suas aulas, organiza materiais de estudo, buscando uma melhor forma de ensinar os assuntos para seus alunos. Dessa forma, podemos dizer que a Transposição Didática Interna envolve elementos conscientes e inconscientes.

Bessa de Menezes (2004) defende que a Transposição Didática Interna está vinculada fundamentalmente aos elementos aluno e saber, que juntamente com o professor compõem o sistema didático. Este sistema é instituído a partir das relações aluno/professor, aluno/saberes e professor/saberes. Tratando-se da relação professor/saberes, esta detém uma forte interligação com a Transposição Didática Interna, uma vez que a transformação do saber a ensinar em saber ensinado transcorre da relação que o professor detém com o saber a ensinar. Conforme Câmara dos Santos (1997), “por exemplo, observa que, em função da sua relação com o saber, os professores tendem a dilatar ou diminuir o tempo em que o saber em questão permanece no jogo didático” (p.30).

Em seu trabalho, E. Josse (1992) realizou um estudo comparativo do discurso de dois professores de matemática, frente a uma mesma lição. Foram identificadas diferenças entre o que estava previsto por ambos, em seus planos de aulas, bem como entre o desenvolvimento do assunto por cada um, tendo em vista alcançar o mesmo objetivo, a aprendizagem dos alunos sobre o conteúdo apresentado.

Bessa de Menezes (2004) buscou analisar de que forma dois professores introduziram em sala de aula, as ideias inerentes ao ensino dos conteúdos relacionados aos quadriláteros, procurando identificar elementos que caracterizariam um processo de transposição didática interna focada nos referidos conteúdos. A partir da análise dos dados coletados, observaram-se diferenças entre o saber previsto para ser ensinado e o saber efetivamente ensinado. Em sua concepção essas diferenças se dão por vários motivos, a exemplo de: concepções de ensino, contratos didáticos, formação pedagógica, influências da escola, projetos pedagógicos, dentre outros. No entanto, a relação que o professor tinha com o saber a ser ensinado mostrou-se sempre presente na ocorrência dessas diferenças.

Matos Filho et al, (2008) procuraram analisar a transposição didática realizada pelo professor ao abordar o conceito de função, no espaço de uma sala de aula, da Educação de Jovens e Adultos (EJA). Por meio dessa pesquisa observou que o professor, ao realizar a transposição do conceito de função, descaracterizou-o, transformando e modificando o saber a ensinar.

Tais pesquisas, possivelmente, confirmem a existência da transposição didática interna, proposta por Chevallard (1991), o que nos leva à reflexão sobre *como a transposição didática interna ocorre no ensino da operação de divisão de números naturais, no 4°, 5° e 6° anos do Ensino Fundamental*, o que se constitui em nosso problema de pesquisa.

A seguir discutimos sobre os diferentes significados da divisão, os procedimentos de cálculo da divisão, o tratamento dado ao resto e a interpretação dos resultados obtidos na operação divisão, uma vez que representam para transposição didática saberes a serem mobilizados pelos professores, ou seja, saberes a ensinar. Discutimos ainda um pouco da história das operações de multiplicação e divisão e sobre o algoritmo da divisão.

2.4 OS DIFERENTES SIGNIFICADOS DA DIVISÃO

A análise do processo de desenvolvimento e uso significativo dos conceitos da divisão de números inteiros fundamenta-se na Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida pelo psicólogo francês Gerard Vergnaud (1996), mais especificamente, no campo conceitual das Estruturas Multiplicativas. Neste estudo, no entanto, faremos um recorte com o olhar da Teoria da Transposição Didática, construindo nossa discussão a partir dos tipos de problemas (SELVA, 1998); procedimentos de cálculo; tratamento dado ao resto na divisão e interpretação dos resultados obtidos na operação apenas no domínio dos números naturais.

Selva (1998) aborda em seu trabalho que na operação divisão são encontrados dois tipos de problemas básicos: os problemas de partição e os de quotição. Nos problemas de partição, “conhece-se o número total de elementos em um conjunto, que deverá ser distribuído igualmente em um número de partes predeterminado, devendo-se calcular o número de elementos em cada parte” (SELVA, 1998, p. 97). Já nos problemas de quotição, “o conjunto conhecido deve ser dividido em partes de grandeza previamente estabelecida, devendo-se calcular o número de partes que serão obtidas” (p. 97). Como forma de esclarecer esses dois tipos de problemas que exploraram os significados (partição e quotição) da operação de divisão, bem como mostrar a diferença entre os dois tipos Selva (1998) apresenta os seguintes exemplos.

Partição: "D. Maria fez 15 doces para dividir igualmente entre três bandejas. Quantos doces serão colocados em cada bandeja? "

Quotição: "D. Maria fez 15 doces e quer arrumar esses doces colocando três doces em cada bandeja. De quantas bandejas ela vai precisar? " (SELVA, 1998, p. 97).

A autora ainda explica que no exemplo do problema de partição, conhece-se o número de doces e o número de bandejas, devendo-se calcular a quantidade de doces por bandeja, já no problema de quotição tem-se a quantidade total de doces e a quantidade de doces por bandeja, devendo-se calcular a quantidade de bandejas. É importante frisar que apesar desses problemas serem diferentes do ponto de vista das quantidades conhecidas, os mesmos podem ser resolvidos através do mesmo cálculo numérico, nesse caso, 15÷3.

Alguns autores como Fischbein, Deri e Marino (1985) apontam que os problemas de partição são mais simples por levar em consideração a ideia de repartir quantidades. Dessa maneira, tal ideia seria compreendida desde cedo pelas crianças levando-os a resolver com sucesso os problemas de partição. Já outros estudos (GUNDERSON, 1955, apud DICKSON. et al. 1984) e ZWENG (1964, apud DICKSON. et al. 1984) não acreditam nesse ponto vista, uma vez que afirmam que os problemas de quotição podem ser resolvidos com maior facilidade pelas crianças por levá-las diretamente à estratégia da subtração repetida.

Selva (1998) buscou investigar o efeito do uso de materiais na resolução de problemas de divisão, bem como determinar se os dois tipos de problemas de divisão (de partição e de quotição) leva a diferentes formas de utilização do material e a diferenças no número de acertos e erros entre crianças que receberam e que ainda não receberam ensino formal sobre divisão. Entre seus resultados verificou que o desempenho das crianças nos problemas de partição (79,4 de acertos) e quotição (78,96 de acertos) foi semelhante. Assim, esses resultados não apoiam os estudos que apontam o modelo de partição como sendo compreendido mais cedo do que o modelo de quotição.

A análise de alguns livros didáticos de matemática (PALUMBO 1988; GIOVANNI 1989; THEREZA 1990; CORREA e GALHARDI 1991; PASSOS, FONSECA e CHAVES 1992; PASSOS e SILVA 1992; PEIXOTO e OLIVEIRA 1992; MEIRELLES 1993; MORRI 1993; IMENES, JAKUBO e LELLIS 1993) da segunda série (atual terceiro ano, no qual inicia-se o ensino da operação de divisão) realizada por Selva (1998), também evidenciou que não é considerada explicitamente a diferença entre os problemas de partição e quotição e os dois problemas são tratados como iguais. É importante comentar que foram encontrados ainda nesses livros uma frequência bem maior de problemas de partição. Dessa maneira, percebemos que tais pontos podem deixam lacunas no saber previsto para ser ensinado com relação ao ensino da operação de divisão, uma vez que alguns conhecimentos são mais priorizados que outros. A seguir discutiremos sobre os procedimentos de cálculo da divisão.

2.5 OS PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO DA DIVISÃO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998) defendem que o ensino da divisão deve comtemplar os diferentes procedimentos de cálculos (estratégias pessoais, cálculos mental, escrito, exato, aproximado e técnicas convencionais - algoritmos). Enquanto os Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) destacam o cálculo mental, estimativas, arredondamentos e algoritmos convencionais. Já a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) recomenda o cálculo mental, estimativas e algoritmos convencionais.

Selva (1998) aponta cinco categorias de estratégias evidenciadas em sua pesquisa para resolução de problemas de divisão são elas: 1) representação direta com distribuição de pequenas quantidades; 2) representação direta com formação de grupos; 3) ensaio e erro; 4) repetição aditiva; e 5) uso de fato conhecido.

Como forma de melhor compreender cada uma das estratégias citadas anteriormente, vejamos a explicação de cada uma delas: a estratégia 1, representação direta do problema com distribuição de pequenas quantidades, leva em consideração a correspondência um a um ou a separação dos elementos em grupos de dois ou três para resolver um problema proposto; a 2, representação direta com formação de grupos, foi evidenciada quando as crianças participantes da pesquisa contavam fichas ou desenhavam marcas em número correspondente ao valor do dividendo e formavam ou circulavam grupos com quantidade indicada pelo valor do divisor, por fim contavam o número de grupos obtidos; a 3, ensaio e erro, consisti em escolher sucessivas vezes um certo número de elementos para constituir cada grupo, contando a cada escolha o número total de elementos, com vista determinar se atingiu a quantidade expressa pelo dividendo do problema; a 4, denominada de repetição aditiva, considera tanto os casos que o problema é resolvido por adições sucessivas da mesma quantidade, como também aqueles que são resolvidos por subtração sucessiva da mesma quantidade; e 5, uso de fato conhecido, consisti na utilização de fatos conhecidos, podendo envolver multiplicações ou divisões.

Diante disso percebemos que são várias as estratégias de cálculos utilizadas pelos estudantes. Contudo, defendemos primeiramente um bom trabalho com as estratégias pessoais (ou seja, os procedimentos próprios dos alunos) para depois haver a formalização ou mesmo ensino dos procedimentos convencionais em sala de aula. Conforme afirma SAIZ (2001, p.188) "temos que permitir que as crianças comprovem seus próprios procedimentos, suas próprias soluções, antes de conhecer os algoritmos tradicionais".

2.6 O TRATAMENTO DADO AO RESTO

Selva (1998), em seu estudo constatou que as crianças participantes de sua pesquisa obtiveram um desempenho maior nos problemas de divisão exata, isto é, as crianças apresentaram mais dificuldades nos problemas com resto. Essas dificuldades estão relacionadas ao tratamento dado ao resto na divisão. Assim, a autora observou seis estratégias para lidar com o resto: a) solicitar maior quantidade; b) aceitar uma desigualdade, ou seja, aceitar que um dos grupos ficasse com mais; c) remover o resto; d) formar grupos iguais, independentemente do enunciado do problema; e) refazer o problema; e f) dividir o resto em partes que pudessem ser distribuídas entre todos os grupos.

Foi evidenciado também um maior uso da aceitação de desigualdade entre as crianças mais jovens (da alfabetização e da primeira série, atual segundo ano), fato que pode ser explicado pela dificuldade que elas apresentaram ao lidar com o resto. Para as mesmas, resolver problema de divisão parece que significa dividir o total de elementos especificado (o dividendo) sem deixar nenhuma sobra. Já na segunda série (atual terceiro ano) pôde-se verificar um aumento da divisão do resto e o decréscimo da aceitação de desigualdades. Dessa maneira, as crianças da segunda série demostraram que as regras contidas no enunciado da questão não podiam ser burladas, não se podendo admitir modificações no valor do dividendo e no divisor, além dos grupos formados terem que apresentar igual quantidade, mesmo que sobrassem elementos.

Selva, Borba e Steedman (2004) investigaram o efeito dos significados dados à divisão e de representações simbólicas na resolução de problemas de divisão com resto na busca de observar até que ponto eles afetam o desempenho das crianças. Em relação ao uso de estratégias no tratamento do resto, não foram observadas diferenças nos tipos de estratégias em função do resto (grande ou pequeno) nas séries investigadas (2ª e 3ª séries, atuais 3° e 4° anos), ou seja, o fato do resto ser um número mais próximo do divisor ou ser menor parece não ter influenciado a escolha das estratégias de tratamento dado ao resto. Essa forma de tratamento foi influenciada apenas pelo tipo de problema (partição ou quotição). As principais estratégias usadas pelos sujeitos participantes foram: subdividir o resto em partes suficientes para a nova redistribuição, acrescentar ao quociente, dar um novo fim ao resto e ignorar o resto.

Borba e Selva (2006) analisaram a influência de significados dados à divisão e de representação simbólicas na resolução de problemas de divisão com resto diferente de zero. Com relação ao tratamento dado ao resto as autoras chamam a atenção para as dificuldades evidenciadas pelos dois grupos participantes do estudo (alunos da 3ª e 5ª séries, atuais 4° e 6° anos). Sugerem que o uso de representações variadas, um estudo significativo do número racional, um trabalho com resolução de problemas e o retorno ao enunciado do problema após a resolução possam ser caminhos para ajudar os alunos na compreensão do tratamento dado ao resto em problemas de divisão. Dessa maneira, notamos que o resto em uma divisão gera muita dificuldade por parte dos alunos, e o correto tratamento dado ao mesmo depende dos conhecimentos utilizados. A seguir discutiremos sobre a interpretação dos resultados obtidos na operação divisão.

2.7 A INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS NA OPERAÇÃO DIVISÃO

Ao realizar o cálculo da divisão de um dado problema matemático, ao término necessitamos interpretar os resultados obtidos na operação divisão, pois dependendo do problema o quociente, o resto, o quociente mais um e o resto mais uma quantidade podem ser as soluções do problema. Diante disso faz-se necessário a discussão desse ponto.

Borba e Selva (2005) buscaram observar como as crianças comparam os resultados de um mesmo problema de divisão com resto resolvido por meio de diferentes representações (papel e lápis versus calculadora, calculadora versus papel e lápis e manipulativo versus papel e lápis); e analisar como crianças usam e interpretam os resultados obtidos por meio da calculadora. É importante frisar que a calculadora pode ser um instrumento auxiliar, uma vez que apresenta o resto em forma decimal possibilitando à criança verificar dois tipos de representações (decimal, na calculadora e inteiro, na resolução escrita). Assim, as autoras elencam algumas interpretações dos resultados obtidos na resolução de problemas de divisão com a utilização da calculadora pelas crianças participantes de seus estudos, as quais são apresentadas abaixo.

- Fazer leitura sem considerar o ponto. Dessa maneira, 6.25, por exemplo, foi lido como 625.
- Considerar que o ponto na calculadora era apenas para evitar a leitura de todos os números, evidenciando o inteiro como resposta e desprezando o decimal. Assim, o resultado 4.25 na calculadora, tem como resultado final 4.
- Ler ambos os valores como inteiros. Dessa forma, o resultado 2.25 na calculadora, tem como resposta 2 e o vinte e cinco ainda vai ser dividido.
- Ler o valor obtido como uma divisão. Por exemplo, 4.5 é lido como “4 dividido por 5”.
- Ler o decimal como o que sobrou. Exemplo: o resultado 4.5 na calculadora, tem como resposta “deu quatro para cada um, aí sobrou 5, aqui na calculadora”.

Outro aspecto importante sobre a interpretação dos resultados obtidos na divisão é o seguinte: fiz a conta e agora qual a resposta do problema? Na resolução de problemas de divisão o quociente nem sempre é a resposta. A resposta pode ser o quociente, o quociente mais um, o resto ou o resto mais uma quantidade. Como forma de melhor esclarecer apresentamos os seguintes exemplos.

- A resposta é o quociente.

Exemplo 1: Paulo quer dividir 28 pirulitos entre seus quatro sobrinhos. Quantos pirulitos irá receber cada um?

- A resposta é o quociente mais um.

Exemplo 2: Um ônibus de uma empresa de turismo transporta 45 pessoas. Quantos ônibus são necessários, no mínimo, para transportar 182 pessoas?

- A resposta é o resto.

Exemplo 3: Quantas semanas completas há em 130 dias? Quantos dias sobram?

- A resposta é o resto mais uma quantidade.

Exemplo 4: João em sua plantação utiliza 30 sementes para plantar em cada canteiro. Sabendo que ele dispõe de 122 sementes. Quantos canteiros ele vai utilizar? E para completar todos os canteiros utilizados, João irá precisar de mais quantas sementes?

No exemplo 1, percebemos que a resposta do problema é 7 pirulitos, ou seja, a resposta é o quociente (sete) da divisão de 28 por 4. Já no exemplo 2, a resposta é 5 ônibus (o quociente 4 mais 1), isto é 4 (ônibus com 45 pessoas) + 1 (um ônibus para as duas pessoas que sobrarão). No exemplo 3, a resposta da segunda pergunta é o resto da divisão de 130 por 7, ou seja, 4 (dias). E por fim, a resposta da segunda pergunta do exemplo 4, é o resto da divisão 122 por 30 somado com 28, ou seja, 2+28. Assim, contamos a importância dos alunos saber interpretar os resultados obtidos nos seus cálculos, pois a resposta correta depende dessa interpretação.

É importante destacar que apesar toda essa explanação realizada na fundamentação teórica, iremos nos deter apenas nações de saber a ensinar e o saber efetivamente ensinado, bem como nas categorias estabelecidas na pesquisa: os diferentes procedimentos de cálculos (mental, escrito, exato, aproximado, por estimativas, arredondamentos e utilizando os algoritmos convencionais); os significados da divisão (partição e quotição); o tratamento dado ao resto; e a interpretação dos resultados obtidos.

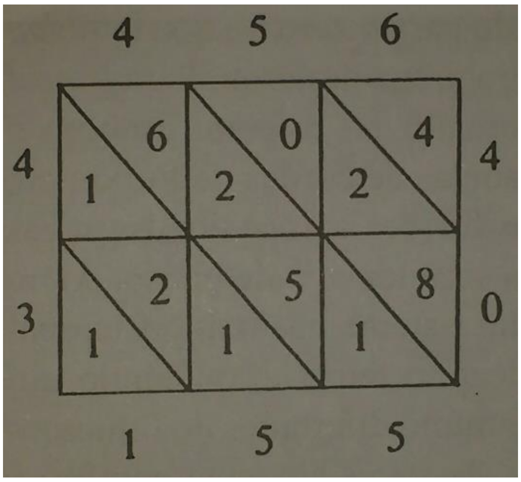
A seguir abordaremos sobre um pouco da história das operações de multiplicação e divisão.

2.8 UM POUCO DA HISTÓRIA DAS OPERAÇÕES DE MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

É importante reforçar, conforme relatado anteriormente, que embora o foco da presente pesquisa seja a operação de divisão, torna-se necessário discutir também a multiplicação, devido às relações intrínsecas entre as duas, especialmente por uma ser a operação inversa da outra.

Falando um pouco da história dessas operações, Boyer e Merzbach (2012) apontam que na Índia as operações de adição e multiplicação eram realizadas de modo muito parecido ao que utilizamos nos dias atuais, só que tudo indica que os indianos parecem ter preferido escrever os números com unidades menores à esquerda. Dessa maneira, trabalhavam da esquerda para direita e utilizavam para isso pequenas lousas com tinta removível branca ou uma tábua coberta de areia ou mesmo farinha. Com relação aos esquemas utilizados para a multiplicação, havia um que é conhecido por várias denominações: multiplicação em reticulado, multiplicação em *gelosia,* em célula, em grade ou quadrilateral. A figura abaixo mostra esse esquema:

Figura 2: Esquema da multiplicação em *gelosia*

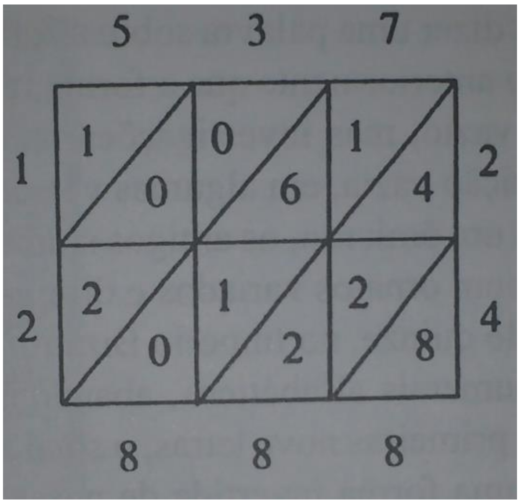


Fonte: BOYER, 2003, p. 148.

O esquema acima é de fácil compreensão, trata-se da multiplicação do número 456 por 34. Dessa forma, o multiplicando foi escrito acima do reticulado e o multiplicador à esquerda do mesmo, os produtos parciais ocupam as células quadradas. A partir daí basta somar os números nas fileiras diagonais e o produto 15.504 aparece embaixo e à direta.

Com o intuito de mostrar que outros arranjos são possíveis, Boyer (2003) evidencia a multiplicação de 537 por 24, conforme mostra a figura abaixo:

Figura 3: Outro arranjo possível para multiplicação *gelosia*



Fonte: BOYER, 2003, p. 148.

Nesse caso o multiplicando é o número 537, que está representado acima do reticulado e o multiplicador o número 24, que está ao lado direito do reticulado. O processo é o mesmo soma-se os produtos parciais que estão nas diagonais e o produto é 12.888.

É importante destacar que não se sabe quando e onde a multiplicação em *gelosia* surgiu. Entretanto, muitos historiadores como Boyer (2003) acreditam que a fonte mais provável parece ser a Índia. Cabe ressaltar ainda que o princípio multiplicativo da multiplicação em *gelosia*, consiste no mesmo que o da nossa, ou seja, o arranjo em células sendo apenas um esquema conveniente para ajudar na concentração mental necessária ao "transportar" de lugar as dezenas que aparecem nos produtos parciais. Dessa maneira, o único "transporte" evidenciado na multiplicação em *gelosia* são as adições finais ao somar os números das diagonais.

De acordo com Boyer (1974), a operação de divisão no Egito era realizada através de sucessivas "duplicações", isso embasado no fato de que todo número pode ser representado por uma soma de potências. Conforme traz Salvador (2012), em seu livro denominado "Dividindo histórias e opiniões: compartilhando e polemizando a operação de divisão".

Figura 4: Divisão pelo método das "duplicações"

Quero dividir 1311 por 69. Dobrando o divisor sucessivamente, primeiro obtemos 138 (69 x 2), depois 276 (138 x 2), a seguir 552 (276 x 2) e, finalmente, 1104 (552 x 2). Sabemos que o dobro de 1104 ultrapassa 1311.

Temos $1104 + 138 + 69 = 1311$. Então, como 1104 é 16 vezes o 69 e 138 é duas vezes, o quociente será 16 + 2 + 1 = 19.

Fonte: SALVADOR, 2012, p. 8.

O ganho desse processo é evidenciado por EVES (1995):

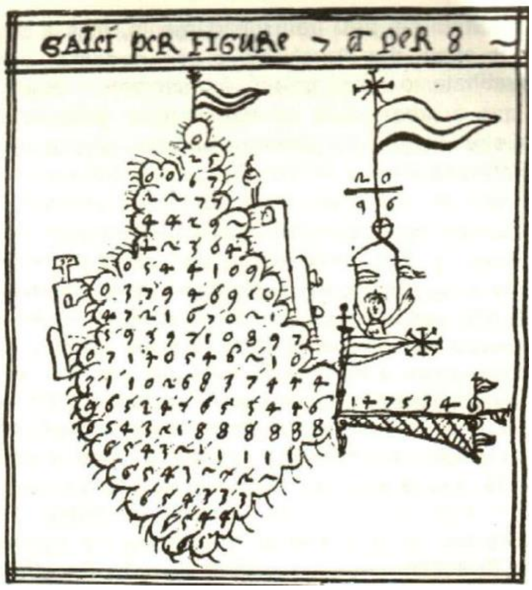
> O processo egípcio de (multiplicação e) divisão não só elimina a necessidade de aprender uma tábua de multiplicação, como também se amolda tanto ao ábaco que perdurou enquanto esse instrumento esteve em uso e mesmo depois (EVES, 1995, p.73).

Boyer (2003) dialogando sobre os métodos de divisão discursa que:

> Os árabes (e através deles os europeus mais tarde) parecem ter adotado a maior parte de seus métodos aritméticos da Índia, e por isso é provável que o esquema de divisão conhecido como "método de riscar" ou "método do galeão" (por sua semelhança com um navio) também venha da Índia (BOYER, 2003, p. 148).

A figura abaixo evidencia o método do galeão de dividir:

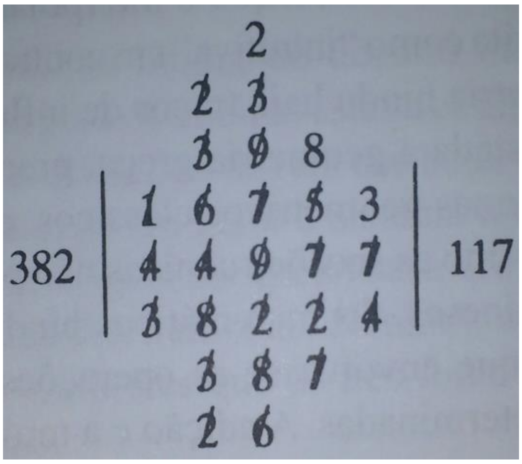
Figura 5: Divisão em galeão, século dezesseis



Fonte: BOYER, 2003, p. 149.

Tendo em vista ilustrar esse método, Boyer (2003), aponta a seguinte divisão "suponhamos que se queira dividir 44.977 por 382". A figura abaixo mostra essa operação pelo método do galeão.

Figura 6: Divisão pelo método do galeão



Fonte: BOYER, 2003, p. 148

Com vista a compreender tal método, Salvador (2012), aponta as seguintes etapas para a divisão de 44.977 por 382, que estão elencadas abaixo:

I - Escreva o divisor à esquerda do dividendo, como mostra abaixo. Obtenha, de maneira habitual, o primeiro algarismo do quociente (449 : 382), que é 1, e escreva-o à direita do dividendo.

$$382 \quad \left|\ 44977\ \right| \quad 1$$

II – Escreva o produto de 1 x 382, que é 382, abaixo de 449.

- Faça mentalmente 4 – 3 = 1. Risque o 4 e o 3 e escreva 1 acima do primeiro 4.

- Como não podemos subtrair 8 de 4, agrupe o 1, que escreveu acima, com o 4 e faça mentalmente 14 – 8 = 6.

Risque o 1, e o 4 e o 8 e escreva 6 acima do segundo 4.

- Faça mentalmente 9 – 2 = 7. Risque o 9 e o 2 e escreva 7 acima do 9.

Dessa maneira, o esquema fica o seguinte:

$$382 \quad \left|\ \begin{array}{l} \cancel{1}67 \\ \cancel{4}\cancel{4}\cancel{9}77 \\ \cancel{3}\cancel{8}\cancel{2} \end{array}\ \right| \quad 1$$

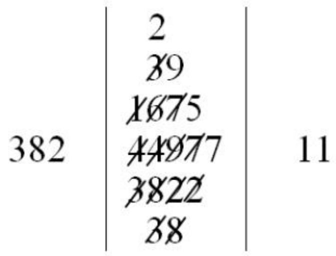
III – O dividendo resultante da etapa II é 6777, que são os algarismos não riscados, lidos de cima para baixo, na coluna cental. Obtenha o próximo algarismo do quociente (677 : 382), que é 1.

- Escreva o produto de 1 x 382, que é o próprio 382, colocando o 3 abaixo do 8, o 8 abaixo do 2 e o 2 abaixo do 7.

- Faça mentalmente 6 – 3 = 3. Risque o 6, o 3 e escreva 3 acima do 6.

- Como não podemos subtrair 8 de 7, risque o 3 e escreva 2 acima do 3 e realize mentalmente 17 – 8 = 9. Risque o 7 e o 8 e escreva 9 acima do 7.

- Faça mentalmente 7 – 2 = 5. Risque o 7 e o 2 e escreva 5 acima do 7.



IV – O dividendo resultante da etapa III é o número 2957, que é formado pelos os algarismos não riscados, lidos de cima para baixo, na coluna central. Dessa maneira, obtenha o próximo algarismo do quociente (2957 : 382), que é 7.

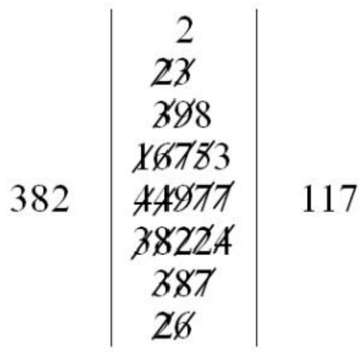
- Escreva o produto de 7 x 382, que é igual 2674, colocando o 2 abaixo do 3, o 6 abaixo do 8, o 7 abaixo do do 2 e o 4 abaixo do 7.

- Faça mentalmente 2 – 2 = 0. Risque os dois números 2.

- Faça mentalmente 9 – 6 = 3. Risque o 9 e o 6 e escreva o 3 acima do 9.

- Como não podemos subtrair 7 de 5, risque o 3 e escreva 2 acima do 3 e realize mentalmente 15 – 7 = 8. Risque o 5 e o 7 e escreva 8 acima do 5.

- Faça mentalmente 7 – 4 = 3. Risque o 7 e o 4 escreva 3 acima do 7.



Assim chegamos ao quociente 117 e o resto 283.

Dessa maneira, percebe-se também que no método do galeão a posição numa dada coluna é significativa, porém não a posição numa linha.

A partir do exposto percebe-se que durante a história da matemática diferentes civilizações construíram procedimentos (algoritmos), com vista a encontrar soluções para os problemas que surgiam em sua época. Contudo, com o passar dos tempos esses procedimentos deram espaço para outros que são mais utilizados atualmente no ambiente escolar, os quais discutiremos mais adiante.

2.9 ALGORITMO DA DIVISÃO

A seguir discutiremos sobre o que é algoritmo, bem como os seguintes tipos de algoritmos da operação divisão: algoritmo americano e algoritmo euclidiano. Tal discussão é importante para o presente estudo, pois uma das categorias da pesquisa é os diferentes procedimentos de cálculos na operação divisão o que torna necessário tal abordagem, uma vez que os algoritmos evidenciados a seguir são procedimentos de cálculos da operação divisão.

2.9.1 O que é algoritmo?

De acordo com Mol (2013, p. 67), a palavra algoritmo (assim, com palavra algarismo) deriva do nome do matemático e astrônomo **Muhammed ibn-Musa al-Khwarizmi** (c. 780–850) responsável pela versão/divulgação do sistema de numeração posicional hindu para a sociedade árabe, atualmente, nosso sistema de numeração.

Vários autores propõem definições e passos para a resolução de um algoritmo. Entre eles, destacam-se os citados abaixo.

Usiskinj (1998) que, dialogando sobre o tema, aponta que um algoritmo pode ser considerado como um procedimento ou sequência de procedimentos, com um número finito de passos, destinado a executar uma dada tarefa que se deseja realizar.

Lopes (2009) fazendo uma aproximação casual da definição de algoritmo evidencia que:

> Uma aproximação informal da definição de algoritmo é a noção de “receita”. Historicamente os algoritmos surgiram quando foi necessária a realização de cálculos sem o auxílio de ábacos, dedos e outros recursos materiais. De

> certo ponto de vista os algoritmos são “receitas” para se fazer cálculos (LOPES, 2009, p.67).

Ferreri e Cechinel (2008) afirmam que “um algoritmo pode ser definido como uma sequência de passos (instruções) para resolver um determinado problema”. Desta maneira, sempre que utilizamos ou construímos um algoritmo devemos seguir um padrão, ou seja, uma norma de excursão que quando bem utilizada resulta no resultado esperado.

Ferreri e Cechinel (2008) apontam ainda que para o desenvolvimento eficiente de um algoritmo se faz necessário obedecermos algumas premissas básicas no momento de sua construção, elencadas abaixo:

- ✓ Definir ações simples e sem ambiguidade;
- ✓ Organizar ações de forma ordenada;
- ✓ Estabelecer as ações dentro de uma sequência finita de passos.

Segundo os referidos autores, os algoritmos são capazes de realizar tarefas como:

- ✓ Ler e escrever dados;
- ✓ Avaliar expressões algébricas, relacionais e lógicas;
- ✓ Tomar decisões com base nos resultados das expressões avaliadas;
- ✓ Repetir um conjunto de ações de acordo com uma condição.

Sena (2011) defende que algoritmo é uma sequência de passos que busca atingir um objetivo bem definido e suas características fundamentais são:

- ➢ Deve ser preciso: com indicação clara da ordem, bem como da forma de realização de cada passo.
- ➢ Deve estar bem definido: se seguido duas vezes, de produzir sempre o mesmo resultado.
- ➢ Deve ser finito: ao ser seguido, deve terminar num dado instante de tempo (finito).

Oliveira (2004, p. 3) em seu trabalho Algoritmo Lógica de Programação define algoritmo da seguinte maneira: “A especificação da sequência ordenada de passos que deve ser seguida para a realização de uma tarefa, garantindo a sua repetibilidade, dá-se o nome de algoritmo”.

Dessa maneira, a partir de todas as definições evidenciadas percebemos que a grande maioria aponta que algoritmo consiste em uma sequência de passos que devem ser realizados obedecendo sua ordem e que pode ser repetido várias vezes e o resultado deve ser o mesmo. Assim, em nosso estudo iremos adotar essa perspectiva observada na maioria das definições de algoritmo encontradas.

Cabe ressaltar que ao longo da história da matemática foram criados alguns procedimentos (algoritmos) para resolução de problemas de divisão, conforme mencionado anteriormente. Porém, atualmente alguns algoritmos são mais utilizados em sala de aula, como: o algoritmo americano e o algoritmo euclidiano (processos longo e curto). A seguir discutiremos sobre tais algoritmos.

2.9.2 O algoritmo americano

O algoritmo americano, também conhecido como "método de divisão por estimativas" ou "método das subtrações sucessivas", segundo Souza (2010) parte basicamente da ideia que as crianças fazem quando repartem igualmente dados objetos, ou seja, quando vão repartindo um a um, dois a dois, três a três até que não haja mais objetos para serem divididos, ou até que se perceba que não será mais possível repartir igualmente.

Embora no início, os cálculos se tornem mais longos e demorados esse processo permite que os estudantes determinem o quociente e o resto da divisão com total compreensão, uma vez que ao obterem êxito os estudantes fazem estimativas com aproximações maiores, vindo a atingir o resultado desejado de forma mais rápida, e assim eliminar etapas do processo (NHONCANCE, 2006). Além disso, possibilita o desenvolvimento da capacidade de estimar. Dessa forma, a quantidade a ser dividida é pensada em sua totalidade, diferentemente do algoritmo usual que visa a dividir até esgotar as quantidades contidas nas ordens levadas em consideração. Esse método se apoia no cálculo por estimativa, buscando um número que quando multiplicado pelo divisor chegue próximo do dividendo, ou seja, estimamos um valor próximo. É importante salientar que tal método permite a resolução por meio de diferentes estimativas, obtendo o mesmo resultado.

Há alguns casos, em que a operação exige que façamos reagrupamentos das ordens, de forma a "desagrupar ou transportar". Na medida em que desenvolvemos tal algoritmo no seu quociente vão aparecendo resultados parciais, que são somados ao final para obter o resultado da divisão.

Com intuito de melhor evidenciar o algoritmo americano, observe a ilustração nas figuras abaixo:

Figura 7: Algoritmo pelo método americano ou método das estimativas

275	5
-100	20
175	+20
-100	10
75	5
-50	55
25	
-25	
00	

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 8: Outra estimativa para resolução do algoritmo pelo método americano ou método das estimativas.

275	5
-250	50
025	+ 5
-25	55
00	

Fonte: Elaborada pelo autor

É importante frisar que o processo americano é um pouco menos comum no ensino da divisão. Contudo, tal processo parece ser bastante eficaz para ser ensinado em sala de aula, tendo em vista que representa o pensamento inicial das crianças quando repartem objetos igualmente, além do final desse processo representar o início do processo euclidiano.

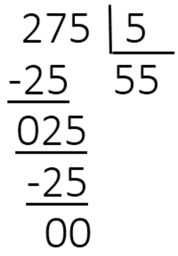
2.9.3 O algoritmo euclidiano

O algoritmo euclidiano é o mais utilizado em sala de aula pelos os professores. Todavia, há certa discordância entre eles na utilização do processo euclidiano longo e o processo breve.

Em relação a esses dois processos Toledo (1997, p. 152) define como “processo longo aquele em que a subtração é indicada no algoritmo, aparecendo o produto do quociente pelo divisor”. Enquanto “no processo breve, só se representa o resultado da subtração entre o dividendo e o produto do quociente pelo divisor”.

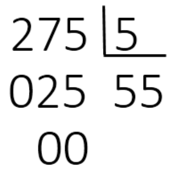
Dessa maneira, o processo breve exige do aluno uma maior habilidade com o cálculo mental para desenvolver tal algoritmo.

Figura 9: Processo do algoritmo longo



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 10: Processo do algoritmo breve ou curto



Fonte: Elaborada pelo autor

Cabe ressaltar que o método curto é uma “abreviação” do método longo. Dessa maneira, recomenda-se que primeiro o aluno deve compreender as etapas do processo longo, para depois poder se utilizar do processo breve, uma vez, que possivelmente, já terá desenvolvido sua autoconfiança dominando o processo de divisão.

2.9.4 Propriedade Fundamental da Divisão ou Identidade Fundamental da Divisão

A compreensão da Propriedade Fundamental da Divisão ou Identidade Fundamental da Divisão é um dos tópicos importantes para resolução de situações envolvendo divisão de números naturais, deste modo um saber a ensinar que deve fazer parte do repertório do ensino da matemática.

Santos (2012) em seu livro Introdução à Teoria dos Números aborda em um tópico denominado O Algoritmo da Divisão, a relação entre dividendo, quociente, divisor e resto, ou seja, a propriedade matemática abaixo:

DIVIDENDO (D) = QUOCIENTE (q) x DIVISOR (d) + RESTO (r)

Contudo, o autor utiliza *a* e *b* para simbolizar, respectivamente, o DIVIDENDO (D) e o DIVISOR (d) na propriedade. Assim, utilizaremos essa mesma simbologia para explicar a propriedade fundamental da divisão, bem como sua demonstração.

Como primeiro passo, levemos em consideração o seguinte teorema.

Teorema 1: Dados dois inteiros a e b, $b > 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que:

$$a = q \times b + r, \text{ com } 0 \leq r < b \quad (r = 0 \leftrightarrow b \mid a)$$

(onde q é chamado quociente e r de resto da divisão de a por b).

Santos (2012) para demonstrar a referida propriedade utiliza como recurso o Teorema de Eudoxius e com o auxílio do mesmo consegue demonstrar a propriedade fundamental da divisão, a qual vemos abaixo.

Demonstração: Pelo Teorema de Eudoxius, como $b > 0$, existe q satisfazendo:

$$q \times b \leq a < (q + 1)\, b$$

o que implica $0 \leq a - q \times b$ e $a - q \times b < b$. Desta maneira, se definirmos $r = a - q \times b$, teremos, garantida, a existência de q e r. Com o objetivo de mostrarmos a unicidade, vamos supor a existência de outro par q_1 e r_1 verificando:

$$a = q_1 + r_1 \quad \text{com} \quad 0 \leq r_1 < b.$$

Desta forma temos $(q \times b + r) - (q_1 \times b + r_1) = 0 \rightarrow b\,(q - q_1) = r_1 - r$, o que implica $b \mid (r_1 - r)$. Porém, como $r_1 < b$ e $r < b$, temos $\mid r_1 - r \mid < b$ e, portanto, como $b \mid (r_1 - r)$ devemos ter $r_1 - r = 0$ o que implica $r = r_1$. Então, $q_1 \times b = q \times b \rightarrow q_1 = q$, visto que $b \neq 0$.

Vale destacar a seguinte observação feita pelo autor, que apesar de no enunciado do Teorema 1 exista a restrição a $b > 0$, isto não é necessário e, utilizando-se da equação do teorema teríamos encontrado q e r também para $b < 0$. Podemos, assim, enunciar o Algoritmo da Divisão de Euclides (ou, propriedade fundamental da divisão) da seguinte maneira: Dados dois inteiros a e b, $b \neq 0$ existe um único par de inteiros q e r tais que $a = q \times b + r$, com $0 \leq r < |b|$.

Outro ponto importante que vale evidenciar é que r é indicador das seguintes situações:

i) Quando o resto r é igual a zero ($r = 0$), a divisão é dita exata;

ii) Quando o resto r é diferente de zero ($r \neq 0$), a divisão é dita não-exata.

Dessa maneira, se faz necessário a compreensão por parte dos alunos dos termos da divisão, bem como da propriedade fundamental da divisão, uma vez que, a mesma ajuda eles a verificar se o resultado da operação está correto (também conhecido como prova da divisão). Além disso, esses dois pontos são importantes para a resolução de problemas como o exemplo abaixo.

Qual o número que, dividido por 30, tem quociente 19 e o resto é o maior possível?

Percebemos que para resolver tal problema, o aluno deve conhecer os termos da divisão (quociente e resto), assim como compreender a propriedade fundamental da divisão, além de perceber que o maior resto na divisão por 30 é 29, ou seja, o maior resto em uma divisão é divisor menos um.

A seguir apresentamos, em linhas gerais, alguns resultados de pesquisas anteriores cujo foco foram as operações de multiplicação e divisão que contribuem para a presente pesquisa.

3 REVISÃO DE LITERATURA

A seguir apresentaremos trabalhos sobre as operações de multiplicação e divisão encontrados na nossa revisão de literatura.

3.1 OPERAÇÕES DE MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Ao analisarmos a literatura referente ao ensino das operações de multiplicação e divisão, encontramos alguns trabalhos que contribuem para o embasamento da presente pesquisa.

Dentre eles, Cunha (1997) teve como objetivo investigar as concepções sobre as operações de multiplicação e divisão de alunos de 5ª e 7ª séries. Trata-se de uma dissertação realizada em uma escola da rede particular. Por meio da realização de um teste diagnóstico verificou que os resultados indicaram que os alunos têm as concepções “multiplicação sempre aumenta” e “divisão sempre diminui”. Partindo desses resultados buscou construir uma sequência de atividades apresentando situações-problema envolvendo multiplicação de números decimais, nas quais ou o multiplicando era um número decimal, ou o multiplicador era um número decimal, ou ainda, os dois eram números decimais; situações envolvendo números racionais escritos na forma fracionária; e problemas envolvendo divisão, trabalhando as relações existentes entre dividendo, divisor, quociente e resto. Essas atividades visavam a que os alunos compreendessem que as concepções de que “multiplicação sempre aumenta” e “divisão sempre diminui” tem validade somente no domínio dos inteiros positivos, não se estendo ao domínio dos racionais. Contudo, os resultados apontaram que tais concepções estão muito interiorizadas pelos alunos e que uma mudança, possivelmente, só poderia ocorrer se desde o início da escolarização dos alunos, as operações de multiplicação e divisão fossem trabalhadas por meio de diferentes abordagens, a exemplo de medida de área e raciocínio combinatório.

Saiz (2001), em seu artigo “Dividir com dificuldade ou dificuldade de dividir” mostrou as dificuldades (como exemplos: os alunos não atribuem significados ao algoritmo que aplicam; o algoritmo ensinado aparece como puro trabalho sobre os números; e há uma carência de recursos para reconhecer se sua solução é errada ou não) que alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental enfrentaram diante de situações que envolviam o conteúdo divisão. Foram apresentados cinco problemas aos alunos de 5ª e 6ª séries (atuais 6º e 7° anos), selecionados por serem frequentes no final dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Em sua investigação a pesquisadora analisou as dificuldades e procedimentos inadequados de alunos, ressaltando que é um meio que auxilia o professor na interpretação dos resultados encontrados em sala de aula. Para a autora um dos problemas de aprender conceitos matemáticos é que os alunos não atribuem significado ao algoritmo que aplicam, por isso não interpretam as soluções em conformidade com o enunciado do problema. A pesquisa de Saiz (2001) mostrou que compreender é muito mais que repetir técnica, uma vez que a utilização correta do algoritmo não garante a compreensão dos conceitos inerentes à divisão.

Lautert e Spinillo (2001), investigaram as relações entre o significado que as crianças atribuem à divisão e o desenho das mesmas em problemas de divisão. As crianças participantes responderam a duas questões de divisão com resto, sendo uma de partição e a outra de quotição e em um segundo momento tiveram que responder a seguinte questão ‘O que dividir?’ As respostas das crianças foram classificadas em quatro tipos: 1) criança não sabe definir divisão; 2) a decisão está associada à ideia de compartilhar algo; 3) a criança apresenta um significado matemático associado a outras operações e 4) a criança apresenta um significado matemático associado à divisão. Nos resultados percebeu-se que as crianças tendiam a não atribuir um significado matemático à divisão ou quando faziam era de natureza geral.

Moreira (2004), procurou diagnosticar o conhecimento, as concepções e as dificuldades de três professores do 1° ciclo, relacionadas à Matemática e ao ensino das operações de multiplicação e divisão, bem como desenvolver uma estratégia de trabalho colaborativo centrado na reflexão, buscando uma possível mudança nas concepções dos professores participantes da pesquisa. Trata-se de uma pesquisa de mestrado realizada em agrupamento de escolas nas quais os três sujeitos da pesquisa ensinavam. No que se refere às dificuldades, foi evidenciado que os professores participantes as manifestaram no ensino das operações de multiplicação e divisão, uma vez que encaravam a multiplicação apenas como uma soma de parcelas iguais e a divisão como repartição equitativa, apresentando de maneira geral uma visão limitada do ensino desses conceitos, o que refletia em seus trabalhos realizados com os alunos em sala de aula. Dessa maneira, conclui que a metodologia adotada na pesquisa (trabalho colaborativo) pode constitui-se como elemento facilitador na implementação de novas abordagens pedagógicas, uma vez que o aluno passa a assumir um papel mais ativo no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Wallauer (2006), em sua dissertação, buscou elucidar os conhecimentos sobre a operação de divisão que as crianças sujeitas de sua pesquisa trouxeram para a escola antes de entrarem em contato com o algoritmo convencional. Na coleta de dados foram entrevistados estudantes de seis, sete e oito anos, pertencentes a classes multisseriadas de duas escolas do município de Teutônia, Rio Grande do Sul. Os estudantes foram divididos em dois grupos (G1 e G2), mas as intervenções didáticas denominadas, no seu conjunto de “unidade instrutiva” só foram realizadas com o grupo G2, e tinham como objetivo contribuir para a compreensão do conceito de divisão a partir do esquema da correspondência. A partir do estudo verificou-se que crianças foram capazes de resolver problemas de divisão através do registro espontâneo. Dessa forma, a autora aponta que é necessário rever a forma de trabalho proposto pela escola, a qual utiliza técnicas que levam ao fracasso nas séries seguintes (terceira e quarta séries), quando a divisão passa a ser ensinada. Assim, propõe uma intervenção didática, pois considerava que compreendendo como a criança constrói o conceito de divisão, o professor pode realizar intervenções que se baseiem no esquema de correspondência, que se mostrou promissor em seu trabalho.

Benvenutti (2008), em sua dissertação, realizou um estudo no qual propôs caracterizar as estratégias de resolução escritas, produzidas por adolescentes da 5ª série para a solução de problemas de divisão, envolvendo partição e quotição. Participaram do estudo 41 crianças e adolescentes da 5ª série (atual 6º ano) do ensino fundamental de uma escola pública estadual de Camboriú, Santa Catarina. O estudo evidenciou que a estratégia de resolução mais utilizada foi o algoritmo da divisão, mas observou também que os sujeitos-participantes resolveram os problemas de maneiras variadas, utilizando diversas operações, não se restringindo unicamente à utilização do algoritmo da divisão. Os erros encontrados na aplicação do algoritmo foram analisados, percebeu-se que os mais frequentes foram os relacionados a tabuada, seguidos dos de execução do algoritmo. Foram encontradas ainda respostas escritas na linguagem materna que não levavam em consideração os dados e as questões apresentadas no enunciado dos problemas. Assim, a autora conclui que as crianças nem sempre mobilizam esquemas intelectuais próprios que têm a seu favor.

Vasconcelos (2009), em sua dissertação, focalizou-se na investigação do processo de formação continuada dos professores que atuavam na 3ª e 4ª séries (atuais 4º e 5º anos) do Ensino Fundamental da rede pública estadual, da região metropolitana de Alagoas. A formação continuada aconteceu no espaço do laboratório de matemática, abrangendo discussões acerca das estruturas multiplicativas, no que se refere às questões das ideias de quotição e repartição presentes nos problemas de divisão. Foi utilizado o “jogo de sementes” como recurso para contagem através de agrupamentos aditivos e multiplicativos, durante as oficinas. Tal formação possibilitou que as práticas dos professores participantes fossem refletidas em procedimentos metodológicos direcionados para diversas possibilidades didáticas, visando a favorecer a aprendizagem dos alunos.

Souza (2010), em seu artigo, buscou discutir a forma de apresentação dos conceitos de multiplicação e divisão, bem como os mecanismos criados pelas crianças para resolver tais operações. Nesse estudo, ela defende que a abordagem inicial dos conteúdos básicos deve se realizar a partir da contextualização, historicização e enredamento, buscando dar sentido à aprendizagem e envolver o aluno na construção do conhecimento, de forma que o mesmo possa aplicar o conhecimento que está construindo. Outro ponto evidenciado é o fato do ensino das operações, na maioria das salas de aula, ainda ser baseado em uma abordagem que prioriza um ensino sem grandes reflexões.

Alves (2012), em sua dissertação, visou a entender as dificuldades e resistências de adolescentes, jovens e adultos escolarizados na compreensão dos conceitos concernentes à multiplicação e à divisão de números inteiros, além de compreender que aspectos específicos poderiam influenciar nas estratégias e compreensão desses estudantes. Tal pesquisa foi realizada por meio de entrevistas clínicas aplicadas a 32 estudantes já escolarizados na multiplicação e divisão de números inteiros. Os participantes foram distribuídos em quatro grupos: jovens na 4ª fase da EJA, adultos na 4ª fase da EJA, adolescentes no 8º ano do Ensino Fundamental e adultos no 8º ano do Ensino Fundamental. Nos resultados de sua pesquisa verificou que todos os participantes apresentaram dificuldades na resolução de situações envolvendo a multiplicação e a divisão de números inteiros relativos, embora estivessem a caminho da compreensão desses conceitos. Foi evidenciado ainda, que enquanto os adultos recorrem com maior frequência a distintas formas de resolução, os mais jovens se apegam aos algoritmos da multiplicação e divisão.

Lima (2012), em sua dissertação, investigou diferentes estratégias de resolução de problemas de divisão (ideias de partição e quotição) utilizadas por alunos do 4° ano do Ensino Fundamental. Participaram de sua pesquisa 105 alunos com idade entre 8 e 14 anos de três escolas públicas da cidade de Maceió, os alunos resolveram quatro situações-problema, sendo três problemas de divisão por quota e um problema de partição. Os resultados indicaram que os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental não vivenciam o trabalho com resolução de problemas e suas estratégias apontam que tiveram como base, em suas respostas, a tabuada de multiplicação e/ou a continuidade do raciocínio do campo aditivo (uso da adição de parcelas repetidas), e as ideias de partição (ação de distribuir igual) foram mais presentes nas resoluções dos problemas propostos, não sendo evidenciadas diferenças entre as ideias de partição e quotição. Além disso, as resoluções dos alunos demonstram o não contato durante a sua escolaridade, com atividades de matemática que solicitem justificativas para as respostas, o que demanda ausência da linguagem matemática. Esse resultado aponta que na Matemática, o mais importante é o uso de cálculos e a linguagem natural é um estudo especifico da Língua Portuguesa.

Silva (2014) em sua dissertação realizou um estudo em uma escola da rede pública do munícipio de Vitória – Espirito Santos que buscou investigar as estratégias e ideias de divisão dos alunos de uma 3ª série/4° ano do Ensino Fundamental. Tal estudo foi norteado pela realização de atividades que exploravam o conceito da operação de divisão. Os dados foram coletados a partir da observação de aulas, atividades resolvidas pelos alunos e aulas ministradas pela professora pesquisadora. Como resultados verificou que experiência com as atividades contribuiu para uma mudança de atitude nos estudantes, tornando-os mais reflexivos e participativos nas aulas de matemática, de forma a buscarem diversas estratégias para elaborar e resolver problemas. Além disso, acredita-se que aconteceram mudanças nas concepções de divisão e nas estratégias de ensino tanto da professora da turma pesquisada, quanto da pesquisadora.

No Quadro 1 abaixo apresentamos uma síntese das principais informações das pesquisas relatadas nesta revisão.

Quadro 1 – Síntese das principais informações das pesquisas relatadas na revisão de literatura

Autor/ano	**Objeto de estudo**	**Principais resultados**
Maria Carolina Cascino da Cunha (1997)	As concepções sobre as operações de multiplicação e divisão com decimais de alunos de 5ª e 7ª séries.	Verificou que as concepções de “multiplicação sempre aumenta” e “divisão sempre diminui” estão muito interiorizadas nos alunos.
Irma Saiz (2001)	As dificuldades que alunos dos anos finais do Ensino Fundamental (5ª e 6ª séries) enfrentaram diante de situações que envolvia o conteúdo divisão.	A autora evidencia que um dos problemas de aprender conceitos matemáticos é que os alunos não atribuem significado ao algoritmo que aplicam, por isso não interpretam as soluções em conformidade com o enunciado do problema.
Síntria Labres Lautert e Alina Galvão Spinillo (2001)	As relações entre o significado que as crianças atribuem à divisão e o desenho das mesmas em problemas de divisão.	As crianças tendiam a não atribuir um significado matemático à divisão ou quando faziam era de natureza geral.
Manuel Augusto da Rocha Campos Moreira (2004)	O conhecimento, as concepções e as dificuldades de três	Evidenciou que os professores participantes da pesquisa apresentaram dificuldades no

	professores do 1° ciclo, relacionadas à Matemática e ao ensino das operações de multiplicação e divisão	ensino das operações de multiplicação e divisão, o que refletia em seus trabalhos realizados em sala de aula.
Andrea Wallauer (2006)	Os conhecimentos sobre a operação de divisão que as crianças (estudantes de seis, sete e oito anos) sujeitas de sua pesquisa trouxeram para a escola antes de entrarem em contato com o algoritmo convencional.	As crianças foram capazes de resolver problemas de divisão através do registro espontâneo (esquema de correspondência). Dessa forma, a autora aponta que é necessário rever a forma de trabalho proposto pela escola.
Luciana Cardoso Benvenutti (2008)	As estratégias de resolução escritas, produzidas por adolescentes da 5ª série para a solução de problemas de divisão, envolvendo partição e quotição.	O estudo evidenciou que a estratégia de resolução mais utilizada foi o algoritmo da divisão e os erros mais frequentes foram os relacionados à tabuada, seguidos dos de execução do algoritmo.
Cheila Francett Bezerra Silva de Vasconcelos (2009)	Formação continuada acerca das estruturas multiplicativas com professores que atuavam na 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental da rede pública estadual, da região metropolitana de Alagoas.	A formação possibilitou que as práticas dos professores participantes fossem refletidas em procedimentos metodológicos direcionados para diversas possibilidades didáticas, visando a favorecer a aprendizagem dos alunos.
Kátia dos Nascimento Venerando de Souza (2010)	A apresentação dos conceitos de multiplicação e divisão, bem como os mecanismos criados pelas crianças para resolver tais operações.	Constatou que o ensino das operações, na maioria das salas de aula, ainda é baseado em uma abordagem que prioriza um ensino sem grandes reflexões.
Evanilson Landim Alves (2012)	As dificuldades e resistências de adolescentes, jovens e adultos escolarizados na compreensão dos conceitos concernentes à multiplicação e à divisão de números inteiros	Verificou que todos os participantes apresentaram dificuldades na resolução de situações envolvendo a multiplicação e a divisão de números inteiros relativos e que os adultos recorreram com maior frequência a distintas formas de resolução

		e os mais jovens aos algoritmos da multiplicação e divisão.
Rosemeire Roberta de Lima (2012)	As diferentes estratégias de resolução de problemas de divisão (ideias de partição e quotição) utilizadas por alunos do 4° ano do Ensino Fundamental.	Os resultados indicaram que os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental não vivenciam o trabalho com resolução de problemas e suas estratégias apontam que tiveram como base, em suas respostas, a tabuada de multiplicação e/ou a continuidade do raciocínio do campo aditivo.
Alexsandra Lúcia Miranda Lima Senna da Silva (2014)	As estratégias e ideias de divisão dos alunos de uma 3ª série/4° ano do Ensino Fundamental.	Verificou que experiência com as atividades contribuiu para uma mudança de atitude nos estudantes, tornando-os mais reflexivos e participativos nas aulas de matemática.

Fonte: Elaboração do autor

Tais pesquisas tiveram suas contribuições para um aprofundamento cognitivo e didático das operações de multiplicação e divisão, evidenciando um ensino sem grandes reflexões das referidas operações, bem como uma visão limitada por parte dos professores em relação aos conceitos das operações de multiplicação e divisão o que acarreta em seus trabalhos realizados em sala de aula, além disso, verificou-se a necessidade do trabalho com essas operações ser realizado por meio de diferentes abordagens, tais como a contextualização, a historicização e o enredamento, pontuados por Souza (2010). Essas conclusões só veem reforçar a necessidade frequente de analisar a prática docente de professores na busca de soluções que auxiliem para um melhor ensino/aprendizagem de modo particular da operação de divisão de números naturais.

Vale salientar que não encontramos estudos voltados à verificação sobre como é realizado o ensino dessas operações pelo professor, utilizando a noção da transposição didática interna e nenhuma pesquisa que tenha investigado as transformações realizadas no saber a ensinar, em particular, referente à operação divisão de números naturais. Portanto, dessa maneira, reafirmamos a importância dessa pesquisa para a Educação Matemática, tendo em vista que a mesma pode fornecer evidências de como está sendo realizado o ensino dessas operações em sala, contribuindo para futuras intervenções na busca de um ensino mais adequado que possibilite uma aprendizagem com mais significado da operação divisão. É importante salientar ainda que tais pesquisas não discutem as questões relacionadas ao cálculo numérico e aos algoritmos convencionais da divisão. Contudo, o estudo desses se faz necessário, tendo em vista que em grande parte das salas de aulas os estudantes utilizam com maior frequência desses algoritmos, conforme evidenciado por Alves (2012).

Tendo em vista todos os aspectos discutidos até então, desenvolvemos uma pesquisa cujos objetivos são elencados a seguir.

4 OBJETIVOS

4.1 GERAL

Analisar a Transposição Didática interna no processo de ensino da operação de divisão de números naturais, no 4°,5° e 6° anos do Ensino Fundamental.

4.2 ESPECÍFICOS

4.2.1 Identificar o saber a ensinar relacionado à operação divisão sugerido pelos documentos legais e livros didáticos adotados por professores que ensinam matemática nos 4º, 5º e 6º anos em escolas públicas do Agreste Pernambuco;
4.2.2 Analisar o saber efetivamente ensinado em aulas dos professores participantes da pesquisa em situação de ensino da operação de divisão.

5 PROCEDIMENTOS METODOLOGICOS

Há uma dinâmica inerente a este estudo que traz em si a necessidade de adoção de estratégias metodológicas diversificadas, uma vez que a proposta é observar e ouvir os atores envolvidos com a prática docente no que diz respeito ao ensino da operação de divisão.

Para alcançar os objetivos traçados, tivemos como foco de análise o saber previsto e o saber efetivamente ensinado de professores do 4°, 5° e 6° anos, isto é, professores pedagogos e licenciados em matemática, acompanhando todo o processo de ensino da operação divisão de uma instituição de ensino, da rede municipal da cidade Águas Belas-PE localizada no Agreste Meridional. A rede de ensino atualmente é composta por 33 escolas e 9.418 alunos. Nosso estudo será realizado com uma amostra deste universo: com três professores de uma escola da zona urbana. O intuito, entre outros aspectos, é valorizar a pesquisa no interior do Agreste Meridional e também colocar em evidência a Educação Matemática nesta região.

Essas escolhas justificam-se ainda pela escassez de pesquisas acadêmicas nesta região, bem como por residir na mesma, além do fato de fazer parte do grupo de pesquisa SEMEAR[2] que tem como um dos objetivos desenvolver estudos com a finalidade de subsidiar o ensino de Ciências e a Educação Matemática no Agreste Pernambucano.

O procedimento metodológico constou das seguintes etapas: estudo de documentos legais para orientação curricular do Brasil e do Estado de Pernambuco; análise dos livros didáticos adotados pelos professores participantes da pesquisa; entrevistas; e observação e análise das aulas dos três professores participantes da pesquisa.

5.1 ESTUDO DE DOCUMENTOS LEGAIS DO BRASIL E DO ESTADO DE PERNAMBUCO:

Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN – Matemática (1997 e 1998), Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco (2008)**,** Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (2012) e a Base Nacional Comum Curricular (2017). Nesta primeira etapa da pesquisa buscou-se identificar as orientações curriculares fornecidas para a efetivação do ensino da operação de divisão de números naturais durante o ensino fundamental, ou seja, do 2º ao 9º ano, no qual era abordado a dada operação nos documentos.

O objetivo desta etapa foi, além de identificar as orientações, elaborar um roteiro com os principais aspectos relacionados ao ensino da divisão contidos nos

[2] SEMEAR: Subsidiar o Ensino de Ciências e a Educação Matemática no Agreste Pernambucano Efetuando Aprofundadas Reflexões. Grupo de Pesquisa liderado pela Profª Rosinalda Aurora de Melo Teles e pela Profª Marilene Rosa dos Santos. Grupo certificado pelo CNPq: http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/0601058612653346.

documentos analisados que foram levados em consideração na observação das aulas dos professores participantes da pesquisa. Tal roteiro é composto pelos: diferentes procedimentos de cálculos (mental, escrito, exato, aproximado, por estimativas, arredondamentos e utilizando os algoritmos convencionais); os significados da divisão (partição e quotição); o tratamento dado ao resto; e a interpretação dos resultados obtidos. Vale reforçar que os Documentos de Orientação Curricular representam para a Transposição Didática Interna o saber a ser ensinado, ou seja, o saber previsto para ser ensinado nas salas de aulas.

5.2 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS ADOTADOS NOS 4º, 5º E 6º E USADOS PELOS PROFESSORES PARTICIPANTES DA PESQUISA.

Os livros didáticos que foram analisados são os apresentados abaixo.

- Porta Aberta: matemática, 4° ano: ensino fundamental – anos iniciais / Marília Ramos Centurión, Júlia La Scala Teixeira, Arnaldo Bento Rodrigues. – 1. ed. – São Paulo: FTD, 2014.

Imagem 1: Porta Aberta 4º ano

Fonte: CENTURIÒN, TEIXEIRA e RODRIGUES, 2014

- Porta Aberta: matemática, 5° ano: ensino fundamental – anos iniciais / Marília Ramos Centurión, Júlia La Scala Teixeira, Arnaldo Bento Rodrigues. – 1. ed. – São Paulo: FTD, 2014.

Imagem 2: Porta Aberta 5º ano

Fonte: CENTURIÒN, TEIXEIRA e RODRIGUES, 2014

- Vontade de saber matemática, 6° ano / Joamir Roberto de Souza, Patricia Rosana Moreno Pataro. – 3.ed. – São Paulo: FTD, 2015.

Imagem 3: Vontade de Saber 6º ano

Fonte: SOUZA e PATARO, 2015

A seguir apresentamos uma breve análise desses livros de acordo com o Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), ou seja, transcrevemos literalmente o que o documento aponta sobre os livros.

- Porta Aberta – (PNLD, 2016)

É importante destacar que apesar do ano dos livros do 4º e 5º anos serem de 2014 tratam-se de uma edição renovada que foi submetida para PNLD de 2016, por isso a discordância de datas. Contudo, referem-se aos mesmos livros, ou seja, não havendo mudanças no conteúdo dos livros nas versões de 2014 e 2016.

De acordo com o Guia do PNLD (BRASIL, 2016), na Coleção Porta Aberta os conhecimentos matemáticos partem de situações-problema que são trabalhadas de maneira intuitiva. Há uma valorização dos conhecimentos prévios dos alunos e diversas possibilidades de interação, com vista que possam explicitar suas estratégias. O ponto alto da coleção é o Manual do professor que traz sugestões e comentários para realização das atividades propostas e textos para a formação contínua do docente.

Com relação à operação de divisão os conteúdos programados para o 4° ano, são: divisão - ideias, em partes iguais; com resto, cálculo mental, algoritmos. Já para o 5° são elencados os seguintes conteúdos: divisão - ideias, algoritmos, cálculo mental.

É importante comentar ainda que a distribuição dos campos (eixos da matemática) é pouco satisfatória, pois no volume 4, há uma ênfase elevada em números e operações, a geometria é pouco trabalhada e o mesmo acontece com grandezas e medidas no 5° ano. É elogiável a exploração das diferentes ideias das operações presente nos livros do 4° e 5° anos.

- Vontade de saber matemática – 6° ano (PNLD, 2017)

Cabe frisar também que apesar do ano do livro do 6º ano ser de 2015 refere-se a uma terceira edição, ou seja, uma edição renovada que foi submetida para PNLD de 2017, por isso a discordância de datas. Todavia, trata-se do mesmo livro analisado, isto é, não há mudanças no conteúdo dos livros nas versões de 2015 e 2017.

Na obra encontram-se muitas situações que possibilitam uma abordagem contextualizada dos conceitos estudados e em diversos momentos há propostas de trabalho com temas transversais ou que envolvem o uso da matemática em práticas do cotidiano. Os pontos negativos são relacionados a tender muitas vezes a sistematizar a partir de um único exemplo, de priorizar a apresentação de algoritmos, de procedimentos e de nomenclaturas específicas. Já os pontos positivos são voltados às propostas a serem desenvolvidas com o apoio do Geogebra ou de planilha eletrônica, bem como ter um manual multimídia com vídeos para a formação do professor.

No livro do 6° ano há um capítulo específico para o trabalho com as operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão). Com relação à divisão esta é vista a partir da resolução de problemas, como operação inversa da multiplicação e através de expressões numéricas. Vale destacar que o estudo das operações é realizado com base na observação de poucos exemplos, bem como na reprodução de algoritmos e procedimentos.

O cálculo mental é apresentado por meio de exemplos, ao invés de propostas que envolvam o aluno, são raras as utilizações de materiais concretos para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem e a história da matemática é raramente tratada como recurso de problematização.

O objetivo da análise desses livros foi buscar compreender o que a escola e os professores estabelecem enquanto ‘saber a ensinar’, considerando que este tem se mostrado como uma espécie de “texto do saber”, conforme conceitua Chevallard, bem como verificar como a operação divisão é apresentada para ser ensinada em sala de aula, uma vez que os livros didáticos são considerados para a Transposição Didática o saber a ser ensinado. Tal análise enfatizou a abordagem dos conceitos e atividades relativas ao ensino da operação de divisão, favorecendo uma posterior comparação entre o saber previsto para ser ensinado e o saber realmente ensinado pelos professores. Vale destacar ainda que para analisar os livros didáticos levemos em consideração as categorias propostas na presente pesquisa: os diferentes procedimentos de cálculos (mental, escrito, exato, aproximado, por estimativas, arredondamentos e os algoritmos convencionais); os significados da divisão (partição e quotição); o tratamento dado ao resto; e a interpretação dos resultados obtidos.

É importante frisar ainda que tal analise foi realizada no capítulo ou unidade específica de cada livro que visava ensinar a operação de divisão de números naturais.

5.3 ENTREVISTA

A terceira etapa da pesquisa consistiu na realização de uma entrevista com os professores participantes da pesquisa. Tendo em vista que pesquisas acadêmicas e também observações empíricas apontam que a maioria dos professores não faz um planejamento sistemático, por escrito, das aulas que ministra, propomos neste estudo uma entrevista com o objetivo de verificar quanto tempo os professores participantes da pesquisa acham que seria necessário para ensinar o conteúdo divisão de números naturais em suas turmas, bem como para sabermos o tempo necessário de observação para cada professor, além de fornecer dados sobre os livros didáticos e outros materiais utilizados pelos mesmos em suas aulas de divisão.

ROTEIRO ENTREVISTA:

A entrevista foi composta com os questionamentos e objetivos apresentados na Tabela 1 abaixo:

Tabela 1: Questionamentos e objetivos metodológicos

Perguntas	Objetivos metodológicos
1) Quanto tempo você acha que seria necessário para abordar conteúdo divisão de números naturais em sua turma?	Mapear quanto tempo seria o ideal para o ensino da divisão de números naturais, sob o ponto de vista do professor.
2) Quanto tempo efetivamente você utiliza para abordar este conteúdo?	Definir quanto tempo de observação será necessário para cada um dos professores participantes.
3) Quais livros didáticos ou outros materiais de apoio você utiliza para elaborar a(s) aula(s)?	Identificar os livros didáticos e/ou outros materiais que os professores participantes da pesquisa utilizam para organizar suas aulas.

Fonte: Elaboração do autor

5.4 OBSERVAÇÃO E ANÁLISE DAS AULAS DOS TRÊS PROFESSORES PARTICIPANTES DA PESQUISA

Para finalização do estudo foi realizada a observação e a análise de aulas ministradas por um professor do 4° ano, um do 5° ano e um do 6° ano. A escolha do

4°, 5° e 6° anos levou em consideração que o processo de divisão começa a "realmente ser ensinado", de acordo com os documentos legais, a partir do 4° ano do Ensino Fundamental (uma, vez que 3° ano a exploração se restringe apenas às ideias iniciais), bem como ao término do 6° ano espera-se que tenha sido consolidado o ensino da divisão com números naturais, além da existência da transição dos anos inicias para os finais (que acontece do 5° para o 6° ano).

Dessa maneira, observamos aulas ministradas por esses professores em situação de ensino da operação de divisão. Para realizar a análise da prática docente, consideremos os seguintes critérios: 'saber a ensinar' concretamente estabelecido pelos documentos legais e escola/professores por meio dos livros didáticos escolhidos e saber efetivamente ensinado pelos professores participantes da pesquisa; os diferentes procedimentos de cálculos (mental, escrito, exato, aproximado, por estimativas, arredondamentos e utilizando os algoritmos convencionais); os significados da divisão (partição e quotição); o tratamento dado ao resto; e a interpretação dos resultados obtidos priorizados pelo professor em sua transposição didática, visando uma posterior comparação com o saber a ser ensinado (documentos legais e livros didáticos).

A seguir apresentamos os resultados, bem como a discussão dos mesmos.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta secção apresentamos os resultados das análises dos documentos, livros didáticos, entrevistas e observação das aulas.

6.1 O QUE AS ORIENTAÇÕES CURRICULARES SUGEREM SOBRE O ENSINO DA DIVISÃO?

Foram analisados os seguintes documentos legais: Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997); Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998); A Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco (2008); Os Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco (2012); e A Base Nacional Comum Curricular (2017). Vale destacar que Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), orientam o ensino no 1º e 2 º ciclos do ensino fundamental (1ª e 2ª séries, atuais 2° e 3° anos) e (3ª e 4ª séries, atuais 4° e 5° anos), enquanto os Parâmetros Curriculares Nacionais

(BRASIL, 1998), orientam o ensino no 3º e 4º ciclos (5ª e 6ª séries, atuais 6° e 7° anos) e (7ª e 8ª séries, atuais 8° e 9° anos).

6.1.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) – 1º e 2º Ciclos do EF

Apesar de termos no Brasil atualmente um novo documento de orientação curricular para o ensino fundamental, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), isto não revoga a importância dos PNC, principalmente porque todo documento, resolução ou lei necessita de um tempo de maturação para apropriação pela comunidade, ou seja, o documento de orientação curricular que faz parte da usualidade dos participantes desta pesquisa ainda são os PCN.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais são referências de qualidade construídos pelo Governo Federal com o intuito de nortear as equipes escolares na execução de suas atividades. Criados em 1996, têm como objetivo principal garantir a todas as crianças e jovens brasileiros, mesmo em locais com condições socioeconômicas desfavoráveis, o direito de usufruir do conjunto de conhecimentos reconhecidos como necessários para o exercício da cidadania. É importante esclarecer que os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997) trazem as orientações para o 1° (1ª e 2ª séries, atuais 2° e 3° anos) e o 2° (3ª e 4ª séries, atuais 4° e 5° anos) ciclos do ensino fundamental e ainda não consideram o ensino fundamental de 9 anos.

A operação de divisão aparece pela primeira vez no primeiro ciclo nos conteúdos conceituais e procedimentais, os PCN defendem o trabalho com cálculos por meio de estratégias pessoais. Contudo, é nítido um destaque especial para as operações de adição e subtração neste ciclo, ou seja, a divisão deve ser vista apenas por meio de problemas que explorem suas “noções iniciais”. Assim, de acordo com os PCN, espera-se que o aluno seja capaz de resolver problemas de divisão expressos por situações orais, textos ou representações matemáticas e utilize conhecimentos relacionados aos números, às medidas e aos significados da operação, selecionando um procedimento de cálculo pessoal ou convencional.

No segundo ciclo deve-se ampliar os procedimentos de cálculos (mental, escrito, exato e aproximado). Assim, a divisão deve ser trabalhada de forma a explorar as estratégias pessoais, o uso de técnicas operatórias convencionais (com compressão dos processos nelas envolvidos) e os seus diferentes significados. Dessa maneira, espera-se que o estudante ao final desse ciclo seja capaz de resolver problemas de divisão utilizando conhecimentos relacionados aos números naturais e racionais, às medidas e os significados da operação, produzindo estratégias pessoais de solução, selecionando os procedimentos de cálculos e justificando tanto os processos de solução quanto os procedimentos de cálculos em função da situação proposta.

Dentre as situações relacionadas à multiplicação e à divisão (significados da multiplicação e da divisão), o documento ainda aponta nas orientações didáticas para serem exploradas nestes dois ciclos, quatro grupos: situações associadas ao que se poderia denominar multiplicação comparativa; situações associadas à comparação entre razões, que, portanto, envolve a ideia de proporcionalidade; situações associadas à configuração retangular; e situações associadas à ideia de combinatória. Assim, ao trabalhar essas situações em sala de aula, podemos propiciar oportunidades para os estudantes poderem interagir com os diferentes significados das operações, levando-os a compreensão que um mesmo problema pode ser resolvido através de diferentes operações, como também uma mesma operação pode estar associada a diferentes problemas.

Outro ponto importante discutido nos PCN (1997) é a relação entre a habilidade em cálculo e a dependência de pontos de apoio, nos quais são destacados o domínio da contagem e as combinações aritméticas, que são conhecidas por várias denominações, como exemplos: tabuadas, listas de fatos fundamentais, leis, repertório básico, entre outros. Todavia, é fundamental destacar que o ensino e a aprendizagem de um repertório básico de cálculos não se dá pela simples memorização de fatos de uma dada operação matemática, mas sim, como o próprio documento aponta, através de um trabalho que envolve a construção, organização, e como consequência, a memorização compreensiva dos fatos das operações trabalhadas em sala de aula. Dessa maneira, ao possibilitar que os alunos construam e organizem um repertório básico de cálculos, estamos também ajudando os mesmos a perceber de forma intuitiva, algumas propriedades da operação, como exemplos: a associatividade, entender que (2 x 3) x 4 = 2 x (3 x 4); a comutatividade, compreender que 2 x 4 = 8 e 4 x 2 = 8; a distributividade, perceber que 5 x (3 + 4) = 5 x 3 + 5 x 4; e o elemento neutro, verificar que todo número multiplicado por 1 é igual a ele mesmo, ou seja, 9 x 1 = 9.

Vale destacar também, que o ensino das operações de multiplicação e divisão deve ser realizado em conjunto, conforme destacam os PCN de Matemática (1997).

> Assim como no caso da adição e da subtração, destaca-se a importância de um trabalho conjunto de problemas que explorem a multiplicação e a divisão, uma vez que há estreitas conexões entre as situações que os envolvem e a necessidade de trabalhar essas operações com base em um campo mais amplo de significados do que tem sido usualmente realizado (BRASIL, 1997, p. 72).

A partir do exposto destacamos que apesar da presente pesquisa se tratar da operação de divisão, falamos também da operação de multiplicação, devido suas estreitas conexões, bem como por uma operação (multiplicação) ser a operação inversa da outra (divisão).

Com relação aos tipos de cálculos (cálculo mental ou escrito, exato ou aproximado) o documento defende que o trabalho seja realizado concomitantemente no processo de ensino e aprendizagem das operações, como podemos evidenciar a seguir.

> Assim, é recomendável que a organização do estudo do cálculo privilegie um trabalho que explore concomitantemente procedimentos de cálculo mental e cálculo escrito, exato e aproximado, de tal forma que o aluno possa perceber gradativamente as relações existentes entre eles e com isso aperfeiçoar seus procedimentos pessoais, para torná-los cada vez mais práticos, aproximando-os aos das técnicas usuais (BRASIL, 1997, p. 76).

Ainda é destacada a utilização da calculadora no processo de ensino e aprendizagem das operações, uma vez que é um recurso que pode auxiliar na construção de conhecimentos por parte dos estudantes. Tendo em vista que a partir dela os alunos podem levantar hipóteses, testar essas hipóteses, e por fim com as interações e discussões entre aluno-aluno e aluno-professor validá-las.

6.1.2 Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) - 3º e 4º ciclos do EF

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN – Matemática, 1998), apontam que o trabalho com as operações no 3° (5ª e 6ª séries, atuais 6° e 7° anos) e 4° (7ª e 9ª séries, atuais 8° e 9° anos) ciclos de ensino deve se concentrar “na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, nas relações existentes entre elas e no estudo do cálculo, contemplando diferentes tipos - exato e aproximado, mental e escrito” (BRASIL, 1998, p. 50).

Em relação aos objetivos de aprendizagem, o documento destaca para o terceiro ciclo, dentre outros, “resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação” (BRASIL, 1998, p. 64). Vale frisar que muitos alunos nesse ciclo de ensino ainda não têm domínio total dos procedimentos necessários para a realização de cálculos, principalmente com as operações multiplicação e a divisão. Dessa maneira faz-se necessário a superação da memorização de técnicas e algoritmos, conforme o documento evidencia.

> Certamente, eles ainda não têm domínio total de algumas técnicas operatórias, como da multiplicação e da divisão envolvendo números naturais, compostos de várias ordens, ou aquelas com números decimais, e isso precisa ser trabalhado sistematicamente. O importante é superar a mera memorização de regras e de algoritmos (“divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima”, “inverte a segunda e multiplica”) e os procedimentos mecânicos que limitam, de forma desastrosa, o ensino tradicional do cálculo (BRASIL, 1998, p. 67).

Em relação às situações-problema convêm destacar que,

> a resolução de situações-problema com diferentes tipos de números é pouco trabalhada neste ciclo (e menos ainda no quarto ciclo), não possibilitando aos alunos ampliar ou construir novos significados, seja para a adição/ subtração, multiplicação/divisão ou para a potenciação/radiciação (BRASIL, 1998, p. 67).

Entre os recursos a ser utilizados pelo professor é destacado o uso da calculadora, pois dentre as várias razões para seu uso ressalta-se,

> a possibilidade de explorar problemas com números frequentes nas situações cotidianas e que demandam cálculos mais complexos, como: os fatores utilizados na conversão de moedas, os índices com quatro casas decimais (utilizados na correção da poupança), dos descontos como 0,25% etc. (BRASIL, 1998, p. 67).

É esperado que ao final desse ciclo (terceiro ciclo) o aluno seja capaz de efetuar cálculos envolvendo a operação de divisão, escolhendo adequadamente os procedimentos de cálculos (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função dos contextos dos problemas, bem como também dos números envolvidos.

Para o quarto ciclo é apontado dentre outros objetivos “resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação”. (BRASIL, 1998, p. 81). De forma a levar os estudantes a selecionar e utilizar os procedimentos mais adequados de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) para uma situação-problema proposta, utilizando para isso a calculadora como um recurso capaz de produzir resultados e ajudar a construir estratégias de verificação dos resultados encontrados.

Outro ponto importante elencado no documento e discutido na presente pesquisa é o fato de muitos alunos chegarem aos anos finais com conhecimento insuficiente dos números e das operações, ou seja, apresentando ainda dificuldades nesses conhecimentos, conforme destaca os PCN (1998).

> Embora o estudo dos números e das operações seja um tema importante nos currículos do ensino fundamental, constata-se, com frequência, que muitos alunos chegam ao final desse curso com um conhecimento insuficiente dos números, de como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações (BRASIL, 1998, p. 95).

Os pontos levantados para ocorrência dessas dificuldades são o ensino baseado em uma abordagem inadequada para o tratamento dos números e das operações, bem como a pouca ênfase que é dada a este assunto nos terceiro e quarto ciclos.

Os PCN (1998) ainda destacam que uma das maiores dificuldades constatadas pelos professores ao longo de todo o ensino fundamental está em relacionar a situação problema com a operação que permite obter a resposta. Dessa maneira, o ensino nos terceiro e quarto ciclos deve privilegiar atividades que favoreçam a ampliação do sentido numérico e a compreensão do significado das operações, segundo o documento.

6.1.3 A Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco (2008)

A Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco (BCC/PE, 2008), foi um projeto iniciado em 2004, proposto pela União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação de Pernambuco (UNDIME/PE) e elaborado em conjunto com diversas instituições do Estado de Pernambuco. Tem como objetivo contribuir e orientar os sistemas de ensino na formação e atuação dos professores da Educação Básica e servir como referencial à avaliação do desempenho dos alunos através do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE).

A BCC/PE (2008) evidencia que na primeira etapa do Ensino Fundamental os estudantes já apresentam certa familiaridade com as operações fundamentais. As situações do dia-a-dia dos alunos deverão servir de ponto de partida para o trabalho com tais operações. É importante destacar que é necessário fugir do modelo de ensino ainda bastante utilizado nas escolas, no qual os alunos memorizam tabuadas e depois são apresentados os algoritmos, seguidos de uma série de problemas. As atividades baseadas em situações do dia-a-dia dos alunos ajudam os mesmos a automatizar a tabuada sem a necessidade de exercícios de memorização.

Com relação à divisão, o documento aponta que seu ensino na primeira etapa do Ensino Fundamental pode ocorrer através de três situações: a) partição; b) busca do número de cotas; e c) proporcionalidade. Vale salientar que os algoritmos convencionais para as operações devem ser construídos de forma bem cautelosa, através da valorização das estratégias pessoais dos alunos, bem como por meio do confronto de estratégias. Dessa maneira, é fundamental para o processo de ensino durante toda a primeira etapa do Ensino Fundamental, conforme destaca a BCC/PE (2008),

> o trabalho com o **cálculo mental**, quase sempre apoiado em diversas estratégias de decomposição dos números e de realização das operações. Fazer **estimativas e arredondamentos** são outras habilidades numéricas a serem desenvolvidas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. O uso da **calculadora** nessa fase, deve ser bastante criterioso. A familiaridade com tal recurso de cálculo deve ser adquirida com base em atividades que incentivem o aluno a fazer explorações com números e com as operações, a confrontar os resultados com o cálculo mental e as estimativas. (PERNAMBUCO, 2008, p. 82).

Convém destacar que a utilização da calculadora nas salas de aulas deve ser realizada com cautela, com vista não se tornar um entrave para o processo de construção de outras formas de realização dos cálculos numéricos.

Na segunda etapa do ensino fundamental deve ocorrer, segundo a BCC/PE (2008), uma continuação e consolidação das aprendizagens da primeira etapa. Em relação às operações fundamentais, a compreensão do sistema de numeração decimal e suas propriedades, ajudarão os alunos a entenderem o funcionamento dos algoritmos convencionais das operações com diferentes tipos de números. Destaca ainda para compreensão desses algoritmos as situações de cálculo mental, em que os alunos sejam encorajados a explicitar suas estratégias. O professor pode ainda utilizar “o cálculo mental, associado ao uso da calculadora e à realização de estimativas e de arredondamentos”, tendo em vista “que o aluno desenvolva a capacidade de análise de resultados obtidos como respostas a problemas” (PERNAMBUCO, 2008, p 95).

6.1.4 Os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (2012)

Os Parâmetros para a Educação Básica do estado de Pernambuco (PCPE, 2012) é fruto de uma ação da Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco em articulação com a União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação de Pernambuco (UNDIME/PE). Tal projeto teve como objetivo revisar os documentos já existentes no estado de Pernambuco (entre esses A Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco, 2008), com o propósito de construir o referido documento, que visa a contribuir para a qualidade da educação em Pernambuco, garantindo a sistematização dos conhecimentos desenvolvidos na sociedade e o desenvolvimento integral do ser humano.

O documento evidencia nas expectativas de aprendizagem para os anos iniciais do ensino fundamental que nesse período de ensino os alunos já trazem certos conhecimentos sobre as operações fundamentais. Contudo, ainda segundo o documento, deverão ser as situações do convívio social dos alunos que servirão como ponto de partida para o ensino de tais operações. É importante frisar que devemos evitar a automatização dos nossos estudantes, ainda bastante praticada nas salas de aula, a partir da memorização de tabuadas e utilização de algoritmos, conforme aponta os PCPE (2012).

> É muito importante fugir do esquema, ainda bastante encontrado nas escolas, de procurar que o estudante automatize os resultados das operações básicas de adição e multiplicação com números de um dígito (tabuada, fatos básicos), seguindo-se a apresentação dos algoritmos e uma série de problemas (PERNAMBUCO, 2012, p. 77).

As atividades baseadas no contexto social (situações de vida dos estudantes) no qual os alunos estão inseridos proporcionam uma construção e automatização da tabuada sem a necessidade de exercícios de memorização, os quais atribuem-se a uma Matemática com falta de significados.

Os PCPE (2012) destacam também a importância da exploração dos diversos significados das operações fundamentais. Por exemplo, para a multiplicação são fundamentais situações nas quais apareçam: a) a ideia de multiplicação comparativa (três vezes mais...); b) a noção de proporcionalidade (um custa 2 reais, 4 quanto custam?); c) a contagem de configurações retangulares (em 5 fileiras de 6 bancas, quantas bancas há?); e d) a combinação de elementos de diferentes maneiras (com 3 camisas e 2 calças, de quantas maneiras pode-se vestir uma camisa e uma calça?). Já para a divisão as situações a serem exploradas são: a) partição (repartir igualmente 12 balas para 4 crianças); b) busca do número de cotas (quantas prestações de 24 reais são necessárias para pagar 72 reais); e c) de proporcionalidade (se 4 passagens custam 12 reais, quanto custa uma passagem?).

Vale frisar que as estratégias pessoais de cálculo escrito desenvolvidas pelos estudantes devem ser valorizadas pelo professor e confrontadas com as dos demais alunos em sala de aula. Com relação ao uso dos algoritmos os PCPE (2012) abordam que:

> A aquisição da habilidade de calcular com os algoritmos convencionais das quatro operações, em papel e lápis, deve ocorrer somente na conclusão de um longo processo, a se iniciar a partir do 5° ano do Ensino Fundamental, consolidando-se na etapa seguinte de escolarização (PERNAMBUCO, 2012, p 78).

Nesse processo é essencial o trabalho com o cálculo mental, a realização de estimativas e arredondamentos, e a utilização da calculadora, através de atividades que incentivem os estudantes a fazer explorações com os números e as operações e confrontar seus resultados com o cálculo mental e as estimativas.

A primeira expectativa de aprendizagem com relação à operação de divisão aparece nos anos iniciais do ensino fundamental, mais precisamente no 3° ano, da seguinte maneira: “resolver e elaborar problemas de divisão em linguagem verbal (com o suporte de imagens ou materiais de manipulação), envolvendo as ideias de repartir uma coleção em partes iguais e determinar quantas vezes uma quantidade cabe em outra (números até 100)”. (PERNAMBUCO, 2012, p. 85). No 4° ano o documento evidencia as seguintes expectativas para a divisão: representar simbolicamente a multiplicação e a divisão, obtendo o resultado por meio de cálculo mental; relacionar multiplicação e divisão, como operações inversas; e resolver e elaborar problemas de divisão em linguagem verbal utilizando diferentes estratégias de cálculo mental baseadas na decomposição de números em sua forma polinomial (por exemplo: $384 \div 3 = (300 \div 3) + (60 \div 3) + (24 \div 3) = 100 + 20 + 8 = 128$). Para 5° ano são elencadas: resolver e elaborar problemas de divisão envolvendo seus diferentes significados, em situações contextualizadas e utilizando o cálculo mental; efetuar divisão com divisor de até dois algarismos em linguagem simbólica, utilizando diferentes formas de registro; usar estratégias mentais para determinar quocientes por 10, 100, 1000; e compreender a relação inversa entre multiplicação e divisão.

Nas expectativas de aprendizagem para os anos finais do ensino fundamental é defendido o aprofundamento dos conhecimentos construídos na etapa anterior, bem como compreensão do funcionamento dos algoritmos escritos convencionais das operações. Todavia, o documento adverte que “tais algoritmos não devem ser os únicos a merecer a atenção no ensino” (PERNAMBUCO, 2012, p. 111). A compreensão dos mesmos pode ser facilitada a partir do trabalho com situações de cálculo mental (em que os estudantes sejam levados a explicitar suas estratégias), bem como a utilização das estimativas e o uso da calculadora, já mencionados anteriormente.

São apresentadas as seguintes expectativas de aprendizagem para a divisão no 6° ano: resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo diferentes significados da divisão; e compreender a divisão como operação inversa da multiplicação e usar essa relação para resolver problemas. A partir do 7° ano percebemos que não aparecem expectativas específicas para o ensino da divisão de números naturais, as que aparecem já trazem consigo os conjuntos dos números inteiros e racionais, como a presente pesquisa tem como foco a divisão nos números naturais optamos por não as elencar.

6.1.5 A Base Nacional Comum Curricular (2017)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017) é um documento que visa a nortear o que deverá ser ensinado nas escolas das redes pública e privada do Brasil, engloba cada etapa da Educação Básica, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio. A mesma trata-se de uma referência dos objetivos de aprendizagem de cada umas das etapas da formação dos cidadãos nas áreas de Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas. Vale salientar que não se trata de um currículo totalmente fixo, a BNCC é uma referência que visa a orientar a elaboração do currículo específico de cada rede de ensino, levando em consideração as particularidades metodológicas, sociais e regionais de cada uma.

A BNCC aponta nas expectativas para os anos iniciais do Ensino Fundamental que ao final dessa etapa os estudantes possam resolver “problemas com números naturais e decimais envolvendo diferentes significados das operações”, bem como “tenham desenvolvido diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e por cálculo mental” (BRASIL, 2017, p. 270).

Nos objetivos de aprendizagem são destacados que no terceiro ano do Ensino Fundamental devem ser incluídos os “problemas de multiplicação (parcelas iguais ou configuração retangular) e no quarto e no quinto anos “é importante a inclusão de problemas envolvendo a noção de proporcionalidade” (BRASIL, 2017, p. 270). Vale mencionar que a divisão deve ser explicitamente trabalhada nesses dois últimos anos e que o ensino e aprendizagem das operações devem se apoiar em situações de interesses dos estudantes.

Em se tratando da divisão, o primeiro objetivo de aprendizagem é evidenciado no 3° ano do ensino fundamental, sendo destacada a importância de “resolver e elaborar problemas de divisão em partes iguais (por 2, 3, 4, 5 e 10), com resto e sem resto, com o suporte de imagem ou material manipulável, utilizando estratégias e registros pessoais, incluindo as ideias de metade, terça parte e quarta parte”; para o 4° ano “resolver e elaborar problemas de divisão (com resto e sem resto), envolvendo os significados de partição e de medida, utilizando estratégias diversas, entre elas o cálculo por estimativa, o cálculo mental e podendo incluir o cálculo por algoritmos”; e para o 5° ano “resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e decimais (com multiplicador e divisor natural), utilizando estratégias diversas, entre elas o cálculo por estimativa, o cálculo mental e podendo incluir o cálculo por algoritmos”. (BRASIL, 2017, p. 277). Desta maneira, verificamos a importância dada nesses três anos (3°,4° e 5° anos) a elaboração e resolução de problemas, em particular de divisão, bem como a valorização do trabalho com as diversas estratégias sejam elas pessoais, por estimativas, cálculo mental ou mesmo com os algoritmos.

As expectativas de aprendizagem para os anos finais do ensino fundamental evidenciam que ao final dessa etapa os estudantes devem ser capazes de resolver:

> problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as quatro operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, entre elas o cálculo por estimativa, o cálculo mental, o

> cálculo por algoritmos, com compreensão dos processos neles envolvidos (BRASIL, 2017, p. 424).

Cabe salientar que o desenvolvimento do pensamento numérico não se completa somente com os objetivos traçados na unidade Números e Operações, todavia "esse pensamento e ampliado e aprofundado quando o professor trata de situações que envolvem conteúdos relativos a unidade das Grandezas e Medidas, da Estatística e Probabilidade e da Álgebra e Funções" (BRASIL, 2017, p. 425).

Dentre os objetivos elencados para os anos finais do Ensino Fundamental no eixo Números e Operações não constatamos objetivos voltados para o trabalho com a divisão com números naturais, mas sim para o conjunto dos números racionais. Assim, apesar de não explícito, provavelmente, o documento entende que esse conhecimento deve ter sido construído na etapa anterior, isto é, nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Contudo, a experiência em sala de aula nos faz perceber a necessidade do trabalho com divisão de números naturais também nos anos finais do Ensino Fundamental, uma vez que, muitos alunos chegam a esse nível sem o devido conhecimento da operação divisão.

6.1.6 Síntese dos principais aspectos relacionados ao ensino de divisão (de números naturais)

No Quadro 2 abaixo apresentamos uma síntese dos principais aspectos relacionados ao ensino da divisão de números naturais presentes nos documentos analisados.

Quadro 2: Síntese dos principais aspectos relacionados ao ensino da divisão de números naturais presentes nos documentos analisados

Documentos analisados	Momento escolar em que começa a ser introduzido à operação de divisão de números naturais	Procedimentos de cálculos	Significados
PCN (1997 e 1998)	1° ciclo (2° e 3° anos)	Estratégias pessoais, cálculos mental, escrito, exato, aproximado e técnicas convencionais (algoritmos)	Situações associadas ao que se poderia denominar multiplicação comparativa; situações associadas à comparação entre,

			razões, que, portanto, envolve a ideia de proporcionalidade; situações associadas à configuração retangular; situações associadas à ideia de combinatória, situações associadas ao produto de medidas.
BCC/PE (2008)		Cálculo mental, estimativas, arredondamentos e algoritmos convencionais	Partição, quotição e proporcionalidade
PCPE (2012)	3 ° ano do Ensino Fundamental	Cálculo mental, estimativas, arredondamentos e algoritmos convencionais	Partição, quotição e proporcionalidade
BNCC (2017)	3 ° ano do Ensino Fundamental	Cálculo mental, estimativas e algoritmos convencionais	Partição, quotição e medida

Fonte: Elaboração do autor

A partir da análise dos documentos, percebemos que o ensino da divisão de números naturais inicia-se no 3° ano do ensino fundamental (através, de uma noção mais introdutória, ou seja, explorando suas noções iniciais) e se prolonga até o 6° ano do ensino fundamental (onde é esperado que seja consolidado o ensino da dada operação). Com relação aos procedimentos de cálculos é defendido um ensino contemplando os diferentes tipos de cálculos (mental, escrito, exato, aproximado, por estimativas, arredondamentos e utilizando os algoritmos convencionais). Os significados da divisão a serem explorados durante o processo de ensino da operação divisão de número naturais (que vai do 3° ao 6° ano do ensino fundamental) são principalmente partição e quotição. Desta maneira, procuremos observar nas aulas dos professores participantes da pesquisa os diferentes procedimentos de cálculos (mental, escrito, exato, aproximado, por estimativas, arredondamentos e utilizando os algoritmos convencionais), os significados da divisão (partição e quotição), bem como o tratamento dado ao resto e a interpretação dos resultados obtidos. Vale frisar que as orientações curriculares (documentos analisados) são consideradas de acordo com a Transposição Didática o saber a ser ensinado, ou seja, o saber previsto para ser ensinado, uma vez que visa a nortear o ensino.

É importante destacar ainda os aspectos convergentes e divergentes encontrados nos documentos analisados. Como aspectos convergentes, encontramos: início do ensino da operação de divisão a partir do 3° ano; e utilização dos seguintes procedimentos de cálculo mental, estimativas e algoritmos convencionais. Já nos aspectos divergentes encontramos em relação aos significados da operação divisão, pois há documentos que apontam outros significados além de partição e quotição, como exemplos: proporcionalidade (BCC/PE, 2008 e PCPE, 2012) e medida (BNCC, 2017). Outro aspecto divergente encontrado se relaciona aos procedimentos de cálculos, uma vez que, como podemos observar no quadro acima há documentos que destacam mais estratégias de cálculos que outros.

Dessa maneira, percebemos que, o saber a ensinar proposto nos documentos analisados de forma geral, concentram-se nos diferentes tipos de cálculos (mental, escrito, exato, aproximado, por estimativas, arredondamentos e utilizando os algoritmos convencionais) e nos significados da divisão partição e quotição. É importante destacar ainda que encontramos nos documentos analisados referências explicitas sobre o tratamento dado ao resto e a interpretação dos resultados obtidos em uma divisão.

6.2 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

A análise desses livros buscou, como já relatamos nos procedimentos metodológicos, compreender o que a escola e os professores estabelecem enquanto ‘saber a ensinar’, considerando que este tem se mostrado como uma espécie de “texto do saber”, conforme conceitua Chevallard (1991), bem como verificar como a operação divisão é apresentada para ser ensinada em sala de aula, uma vez que os livros didáticos são considerados para a Transposição Didática o saber a ser ensinado.

Tal análise enfatizou a abordagem dos conceitos e atividades relativas ao ensino da operação de divisão, levando em consideração as categorias propostas na presente pesquisa: os diferentes procedimentos de cálculos (mental, escrito, exato, aproximado, por estimativas, arredondamentos e os algoritmos convencionais); os significados da divisão (partição e quotição); o tratamento dado ao resto; e a interpretação dos resultados obtidos.

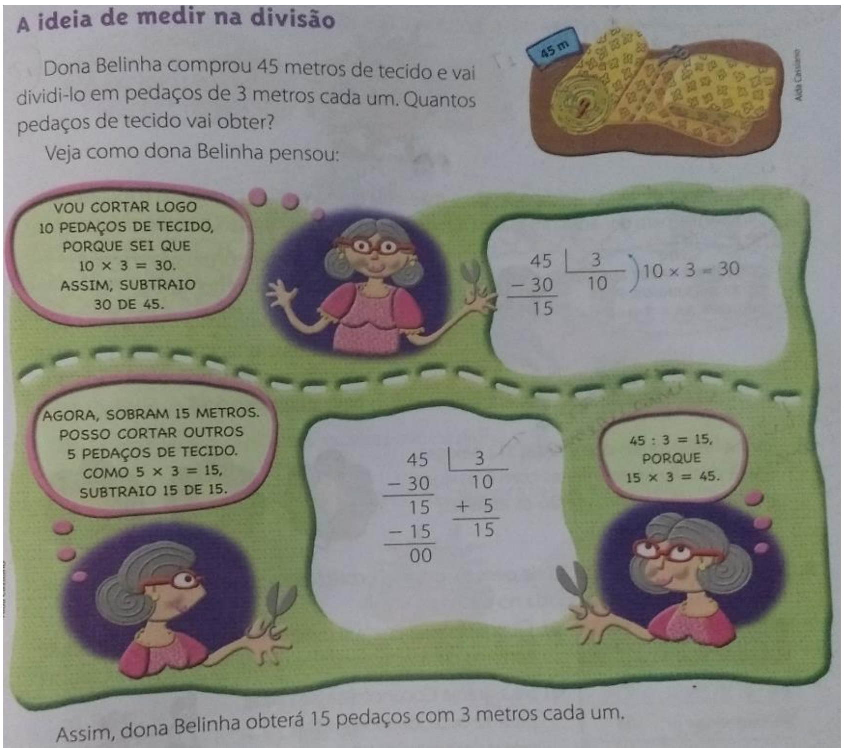
A seguir evidenciamos a análise de cada um desses livros.

6.2.1 Porta aberta 4° ano

O livro didático Porta Aberta 4º ano é dividido em nove unidades (capítulos), compostas por vários tópicos indicados previamente por um sumário. Dentre essas unidades, realizamos a análise da unidade 6, denominada "Operações de multiplicação e divisão de números naturais", em particular na operação de divisão de números naturais.

Tal capítulo inicia a apresentação de cada tópico sempre a partir de um problema, no qual traz sempre mais de uma estratégia de resolução, como por exemplo, no primeiro tópico denominado "A ideia de medir na divisão" apresenta o problema a seguir:

Figura 11: A ideia de medir na divisão

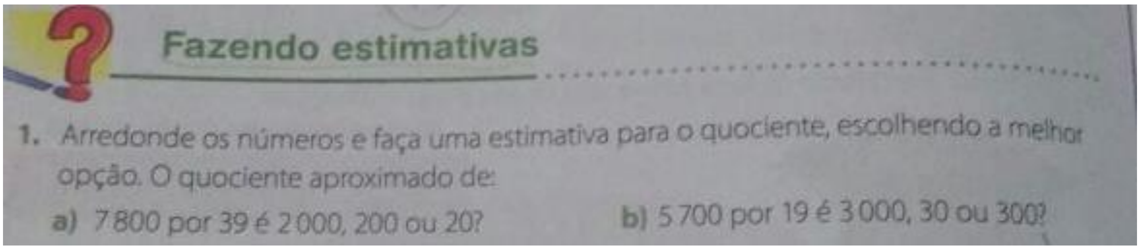


Fonte: CENTURIÒN, TEIXEIRA e RODRIGUES, 2014, p.163.

Para resolução de tal problema conforme pode ser verificado na figura 11, o livro apresenta as seguintes estratégias de cálculo: estratégia pessoal, cálculo mental, algoritmo americano e algoritmo euclidiano longo.

Além das estratégias de cálculo mencionadas acima na unidade do LD analisado, também encontramos questões que buscavam trabalhar os procedimentos de cálculo por arredondamento e estimativa, conforme podemos verificar na figura abaixo.

Figura 12: Exemplo de questão que explora os procedimentos de cálculo por arredondamento e estimativa


Fazendo estimativas

1. Arredonde os números e faça uma estimativa para o quociente, escolhendo a melhor opção. O quociente aproximado de:

a) 7 800 por 39 é 2 000, 200 ou 20?

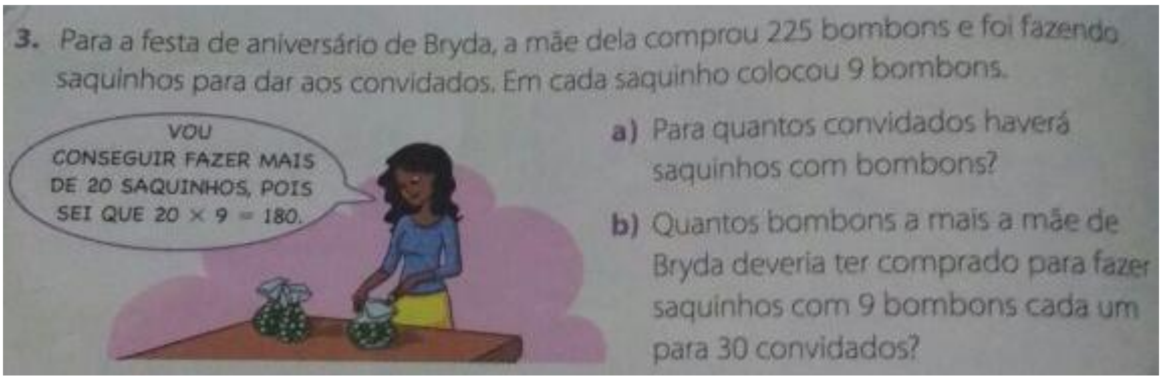
b) 5 700 por 19 é 3 000, 30 ou 300?

Fonte: CENTURIÒN, TEIXEIRA e RODRIGUES, 2014, p.170.

Diante disso, notamos uma “certa” preocupação dos autores com trabalho com as diferentes estratégias de cálculo na operação divisão, fato esse que é defendido como já mostramos nos documentos legais analisados nessa pesquisa.

Especificamente no mapeamento das questões em torno da operação divisão de números naturais foram contabilizados um total de 54 questões, entre exemplos respondidos e questões a serem respondidas em toda a unidade. Vale destacar que dessa quantidade de questões identificamos 15 questões que exploravam o significado da divisão como quotição e 25 questões o significado partição. A seguir mostramos exemplos dessas questões encontradas no capítulo do LD analisado.

Figura 13: Exemplo de questão que explora o significado da divisão quotição


3. Para a festa de aniversário de Bryda, a mãe dela comprou 225 bombons e foi fazendo saquinhos para dar aos convidados. Em cada saquinho colocou 9 bombons.

a) Para quantos convidados haverá saquinhos com bombons?

b) Quantos bombons a mais a mãe de Bryda deveria ter comprado para fazer saquinhos com 9 bombons cada um para 30 convidados?

Fonte: CENTURIÒN, TEIXEIRA e RODRIGUES, 2014, p.164.

Com relação a esse tipo de questão, podemos perceber que a ideia é calcular a quantidade de quotas, ou seja, no item a) calcular a quantidade de saquinhos que poderão ser formados com os 225 bombons e sabendo que em cada saquinho serão colocados 9 bombons. Dessa maneira, temos a quantidade total de bombons e a quantidade de bombons por saquinho, devendo-se calcular a quantidade de saquinhos. Ao realizar a divisão 225 por 9 chegamos ao quociente 25, ou seja, dá para formar 25 saquinhos com 9 bombons em cada. Com relação ao item b) sabemos através da resolução do item a) que com 225 bombons podemos formar 25 saquinhos com 9 bombons, atendendo dessa maneira a 25 convidados. Assim, para responder b) basta apenas calcular a quantidade de bombons dos 5 convidados que faltam para completar os 30 convidados, isto é, basta fazermos 9 x 5 = 45 bombons.

Figura 14: Exemplo de questão que explora o significado da divisão partição

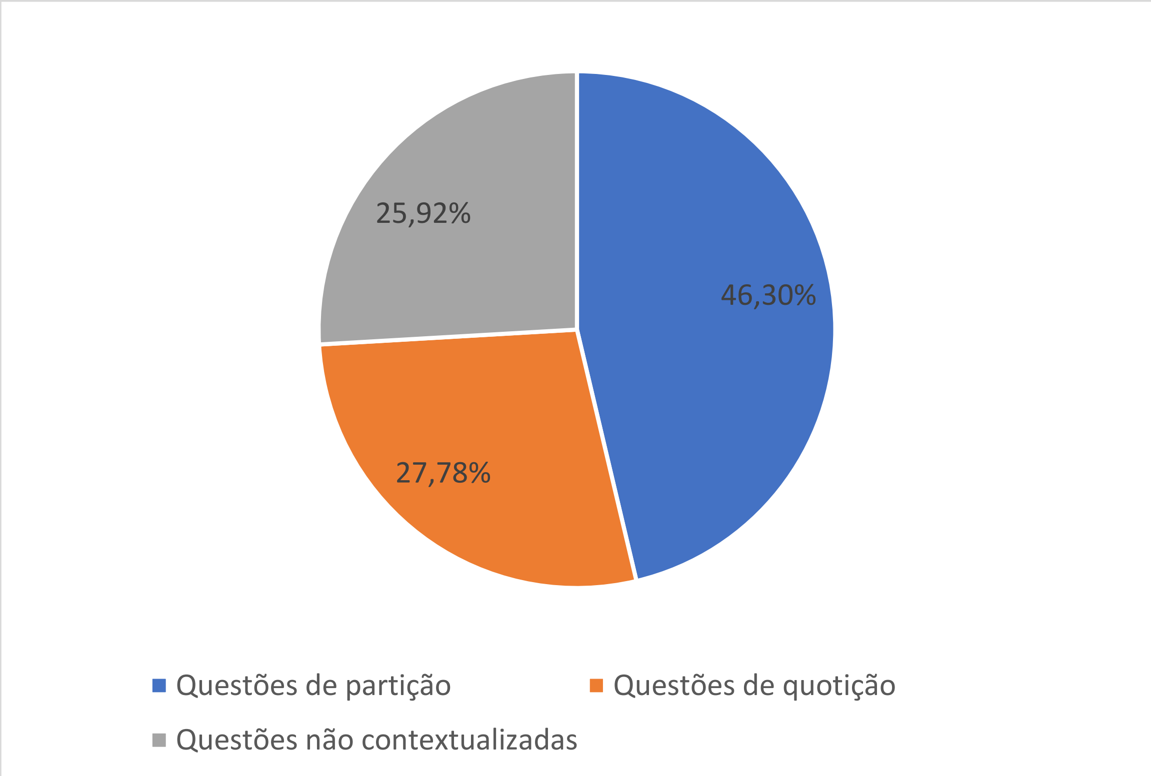
Fonte: CENTURIÒN, TEIXEIRA e RODRIGUES, 2014, p.167.

É importante destacar que nesse tipo de questão a ideia é dividir ou repartir igualmente uma dada quantidade, isto é, nessa questão temos que dividir a conta de 255 reais para os 3 casais. Assim, conhecemos o valor da conta e o número de casais, devendo-se calcular a quantidade em reais a pagar por cada casal. Ao realizarmos a divisão de 255 por 3 chegamos ao quociente 85, ou seja, cada casou pagou R$ 85,00.

Como forma de melhor evidenciar a quantidade de questões de partição e quotição presentes na unidade do LD analisado, construímos o gráfico a seguir.

Vale destacar que para construção deste gráfico levamos em consideração que as questões que não explorasse o significado partição ou quotição, seriam encaixadas em um outro subgrupo ou categoria a qual denominamos de “questões não contextualizadas”, exemplo figura 15. Tais questões são aquelas que não há nenhum contexto, apenas um comando direto para efetuar o cálculo. Foram encontradas 14 questões na unidade do LD analisada.

Gráfico 1 – Percentuais de questões encontradas na unidade do LD do 4º ano analisado

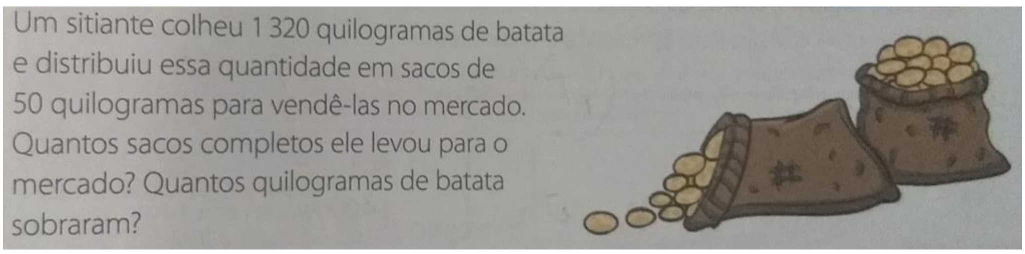


Fonte: Acervo da pesquisa

A partir do gráfico podemos perceber que o significado partição, com 46,30% das questões é o que mais aparece na unidade do LD analisado, seguido por quotição com 27,78% das questões e questões não contextualizadas com 25,92% das questões.

Em se tratando do tratamento dado resto, podemos verificar apenas o trabalho com questões nas quais a divisão era exata (exemplos, figuras 11, 12, 13 e 14), ou seja, o resto é zero. Assim como questões em que o resto era diferente de zero, conforme o exemplo abaixo.

Figura 15: Exemplo de questão de divisão não-exata presente no capítulo do LD

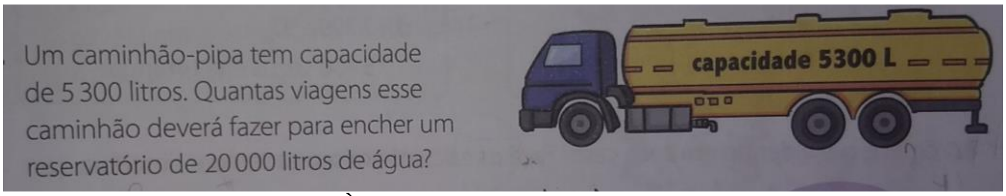


Fonte: CENTURIÒN, TEIXEIRA e RODRIGUES, 2014, p.175.

Note que para resolução dessa questão o aluno deveria dividir 1320 por 50, chegando ao quociente 26 sacos e o resto 20 quilogramas de batata. Vale salientar que a primeira pergunta a resposta é o quociente já na segunda é o resto, isto é, trata-se de uma divisão não exata.

Com relação à interpretação dos resultados da divisão verificamos questões em que o quociente era a solução (exemplos, figuras 11, 12 ,13 e 14), bem como questões em que o quociente mais um e o resto eram a solução, como podemos evidenciar nos exemplos abaixo.

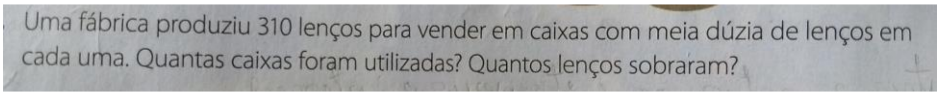
Figura 16: Exemplo de questão em que o quociente mais é a solução



Fonte: CENTURIÒN, TEIXEIRA e RODRIGUES, 2014, p.175.

Observa-se que nessa questão ao efetuarmos a divisão de 20000 por 5300, obtemos como quociente 3 e o resto 4100. Dessa maneira, o caminhão irá dá três viagens e ainda faltarão 4100 litros para encher o reservatório, sendo necessária mais uma viagem. Assim, temos que a solução é o quociente 3 somado com mais 1, ou seja, 3 + 1 = 4 viagens.

Figura 17: Exemplo de questão em que o resto é uma das soluções do problema


Uma fábrica produziu 310 lenços para vender em caixas com meia dúzia de lenços em cada uma. Quantas caixas foram utilizadas? Quantos lenços sobraram?

Fonte: CENTURIÒN, TEIXEIRA e RODRIGUES, 2014, p.170.

Nessa questão ao dividir 310 por 6 obtemos como quociente 51 e o resto 4, ou seja, a resposta da primeira pergunta é 51 caixas e da segunda, 4 lenços. Desse modo, o quociente é a solução para a primeira pergunta e o resto a solução da segunda.

6.2.2 Considerações sobre o LD Porta Aberta 4° ano

A partir da análise podemos perceber que o significado da divisão partição com 46,30% das questões foi o mais presente na unidade do LD analisado nesta pesquisa. Tal resultado corrobora com Selva (1998) que ao realizar a análise de alguns livros didáticos de matemática (PALUMBO 1988; GIOVANNI 1989; THEREZA

1990; CORREA e GALHARDI 1991; PASSOS, FONSECA e CHAVES 1992; PASSOS e SILVA 1992; PEIXOTO e OLIVEIRA 1992; MEIRELLES 1993; MORRI 1993; IMENES, JAKUBO e LELLIS 1993) da segunda série (atual terceiro ano, no qual inicia-se o ensino da operação divisão), percebeu uma maior frequência nos problemas de partição, ou seja, nos problemas de repartir em partes iguais, ou seja, apesar de tantos anos terem se passado, prevalece ainda a mesma opção nos LD atuais.

Outros pontos importantes que valem destacar são com relação à identificação dos diferentes procedimentos de cálculos, os significados da divisão (partição e quotição), o tratamento dado ao resto e a interpretação dos resultados obtidos na operação divisão que são as categorias de análise estabelecidas para essa pesquisa.

Levando em consideração tais categorias, a unidade do LD analisado estabelece enquanto saber a ensinar para o 4° ano do ensino fundamental, de modo particular relacionado à operação de divisão de números naturais: o trabalho com estratégias pessoais, cálculo mental, estimativas e arredondamentos, os algoritmos euclidiano (pelo processo longo) e americano (também conhecido como método das estimativas); os significados da divisão partição (com a ideia de repartir igualmente) e quotição (com a ideia de medir); o trabalho com divisões exatas e não exatas; e o trabalho com questões em que a solução é o quociente, o quociente mais um e o resto. Dessa maneira o LD atende de forma satisfatória o que é proposto nas orientações curriculares analisadas e nas leituras teóricas realizadas neste estudo, o que nos leva a refletir sobre questões, como: será que a opção adequada do LD reflete na prática dos professores? Ou seja, será que o saber proposto para ser ensinado contido nos LD é realmente ensinado nas salas de aula. Tais perguntas nos levam a necessidade de observação das aulas, isto é, observar a transformação do saber a ensinar em saber efetivamente ensinado.

É importante frisar que tal análise foi realizada no LD do estudante, pois o professor não tinha o LD do professor. Assim, a ideia é que se P4 fosse utilizar em sala de aula utilizaria o LD do estudante.

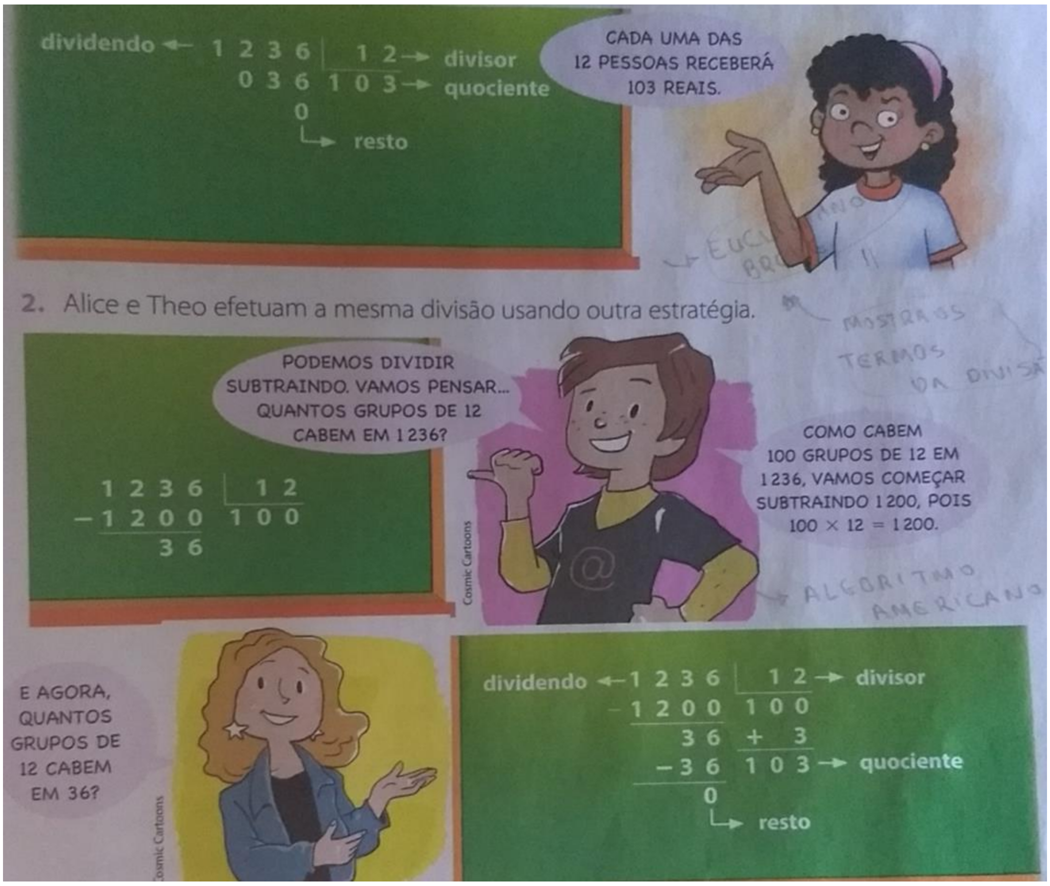
6.2.3 Porta aberta 5° ano

A análise do livro didático Porta Aberta do 5º ano, foi realizada especificamente na unidade 3, intitulada “Operações: Cálculos do dia a dia”.

Contudo, o livro é composto por nove unidades. Vale destacar que essa unidade analisada visa o ensino das quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) e que nos detivemos apenas no modo como a operação de divisão foi abordada no livro.

Os procedimentos de cálculos da operação de divisão evidenciados na unidade do LD analisado foram os seguintes: procedimentos pessoais, algoritmo euclidiano breve, algoritmo americano ou método das estimativas e o cálculo mental. Conforme podemos ver nas figuras abaixo.

Figura 18: Algoritmo euclidiano breve e o algoritmo americano

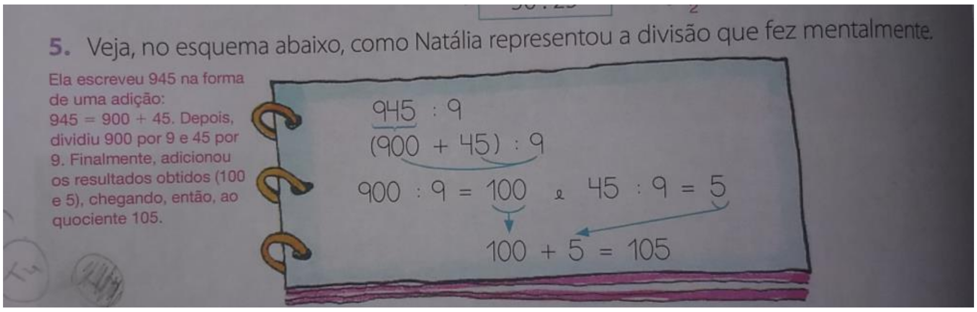


Fonte: CENTURIÒN, TEIXEIRA e RODRIGUES, 2014, p.91

Na figura acima vemos o trabalho com o algoritmo euclidiano breve no primeiro quadro acima e o algoritmo americano nos dois últimos quadros, no qual ao dividir 1236 por 12 são realizadas estimativas e a soma dessas (100 + 3) é o quociente da divisão, ou seja, 103.

Ao trazer o algoritmo americano para ser ensinado ou mesmo ser revisto o autor favorece o trabalho com o cálculo mental e o desenvolvimento da estimativa nos alunos, ponto positivo e que merece destaque nesse LD.

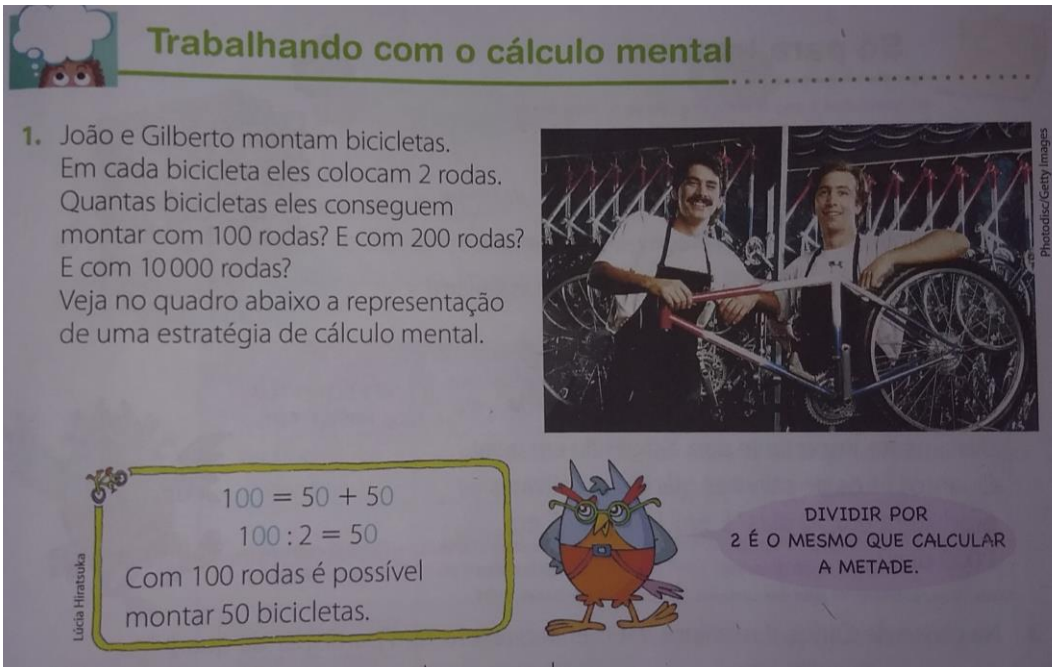
Figura 19: Exemplo de procedimento pessoal



Fonte: CENTURIÒN, TEIXEIRA e RODRIGUES, 2014, p.92

Na Figura 19 observamos um procedimento pessoal, em que ao dividir 945 por 9, o dividendo 945 é decomposto em 900 + 45. Dessa maneira, esses números decompostos são divididos de forma isolada (900 ÷ 9 = 100 e 45 ÷ 9 = 5). Assim, a soma do resultado dessas duas divisões é o quociente da questão, isto é, 100 + 5 = 105, ponto também positivo do LD para o ensino da operação divisão em sala de aula.

Figura 20: Exemplo do trabalho com o cálculo mental

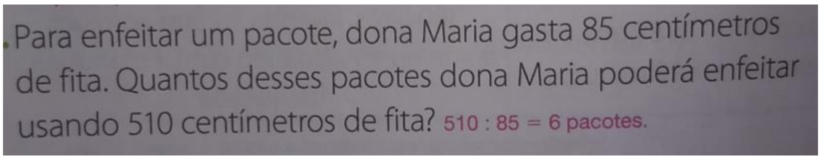


Fonte: CENTURIÒN, TEIXEIRA e RODRIGUES, 2014, p.93

Na figura acima vemos o destaque para o trabalho com o cálculo mental, pois ao realizar o cálculo da divisão de 100 por 2, os autores evidenciam que 100 é a mesma coisa de 50 + 50. Desse modo, com 100 rodas é possível montar 50 bicicletas. Assim, podemos fazer também para 200 rodas e 10000 rodas, ou seja, calculando apenas a metade do dividendo, pois conforme vemos na figura acima dividir por 2 é o mesmo que calcular a metade.

Em se tratando do mapeamento das questões em torno da operação divisão de números naturais foram contabilizados um total de 17 questões pesquisadas em toda a unidade do LD. Dessas questões, 7 buscavam trabalhar o significado da divisão quotição e 6 questões o significado partição. A seguir mostramos exemplos dessas questões encontradas na unidade do LD analisado.

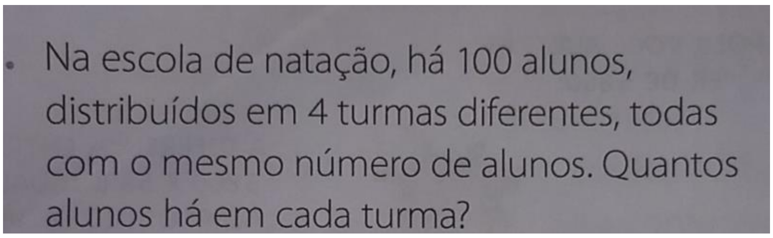
Figura 21: Exemplo de questão que explora o significado da divisão quotição


Para enfeitar um pacote, dona Maria gasta 85 centímetros de fita. Quantos desses pacotes dona Maria poderá enfeitar usando 510 centímetros de fita? 510 : 85 = 6 pacotes.

Fonte: CENTURIÒN, TEIXEIRA e RODRIGUES, 2014, p.96

Nesse tipo de questão temos o total (510 centímetros de fita) e a quantidade de centímetros para enfeitar um pacote (85 centímetros), devendo-se calcular a quantidade de quotas, ou seja, a quantidade de pacotes. Dessa maneira, ao realizarmos a divisão 510 por 85, obtemos como quociente 6 pacotes, que é a solução da questão.

Figura 22: Exemplo de questão que explora o significado da divisão partição


Na escola de natação, há 100 alunos, distribuídos em 4 turmas diferentes, todas com o mesmo número de alunos. Quantos alunos há em cada turma?

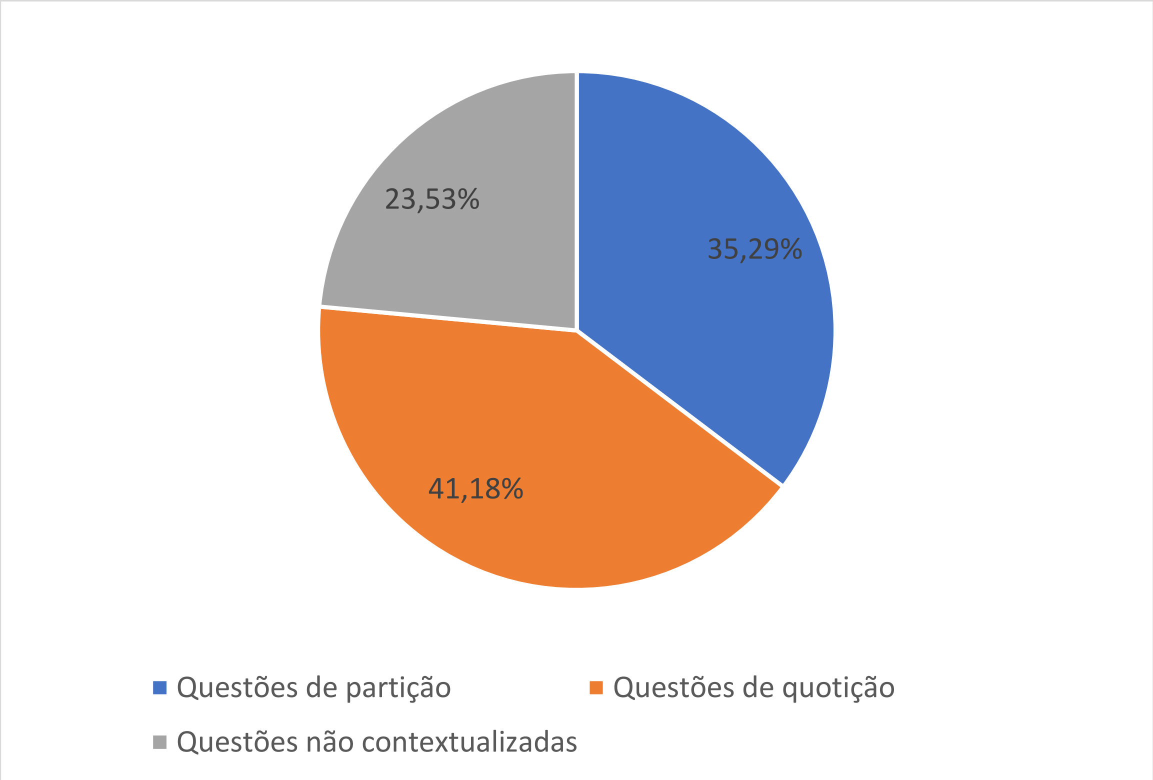
Fonte: CENTURIÒN, TEIXEIRA e RODRIGUES, 2014, p.88

Nessa questão temos a quantidade total de alunos (100 alunos) e a quantidade de turmas (4 turmas), devendo-se calcular a quantidade de alunos por turma, ou seja, repartir igualmente os alunos nas 4 turmas. Assim, ao realizarmos a divisão de 100 por 4, obtemos como quociente 25 alunos, que é a solução da questão

Como forma de melhor evidenciar a quantidade de questões de partição e quotição presentes na unidade do LD analisado, construímos o gráfico a seguir.

Vale salientar novamente que esse subgrupo ou categoria “questões não contextualizadas”, trata-se das questões que não visam trabalhar os significados da divisão partição e quotição.

Gráfico 2 – Percentuais de questões encontradas na unidade do LD do 5º ano analisado



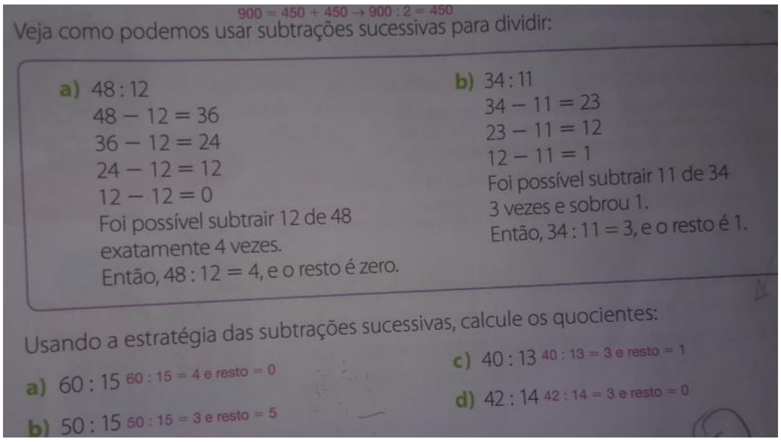
Fonte: Acervo da pesquisa

A partir do gráfico podemos ver também um certo equilíbrio entre a quantidade de questões que exploram o significado partição e as que exploram o significado quotição. Contudo, fica nítido uma baixa quantidade de questões de divisão de números naturais na unidade do LD analisado.

Esse equilíbrio é muito bom para o processo de aprendizagem da operação divisão, pois os estudantes têm a possibilidade de estudar de forma “quase igualitária” os dois significados. Porém, seria interessante aumentar a quantidade de questões que explora a operação divisão na unidade do LD.

Com relação ao tratamento dado ao resto observamos o apenas o ensino de divisões exatas (exemplos, figuras 19, 20, 21 e 22) e não-exatas, conforme o exemplo abaixo.

Figura 23: Exemplo de questão de divisão não-exata presente no capítulo do LD


900 = 450 + 450 → 900 : 2 = 450

Veja como podemos usar subtrações sucessivas para dividir:

a) 48 : 12
48 − 12 = 36
36 − 12 = 24
24 − 12 = 12
12 − 12 = 0
Foi possível subtrair 12 de 48 exatamente 4 vezes.
Então, 48 : 12 = 4, e o resto é zero.

b) 34 : 11
34 − 11 = 23
23 − 11 = 12
12 − 11 = 1
Foi possível subtrair 11 de 34 3 vezes e sobrou 1.
Então, 34 : 11 = 3, e o resto é 1.

Usando a estratégia das subtrações sucessivas, calcule os quocientes:

a) 60 : 15 60 : 15 = 4 e resto = 0
b) 50 : 15 50 : 15 = 3 e resto = 5
c) 40 : 13 40 : 13 = 3 e resto = 1
d) 42 : 14 42 : 14 = 3 e resto = 0

Fonte: CENTURIÒN, TEIXEIRA e RODRIGUES, 2014, p.93

Nessa questão são trabalhadas divisões exatas (itens a e d) e divisões não exatas (itens b e c). Vale destacar também o trabalho com o algoritmo americano ou método das subtrações sucessivas.

Na interpretação dos resultados da operação divisão constamos apenas questões em que o quociente era o resultado do problema (exemplos, figuras 20, 21 e 22).

6.2.4 Considerações sobre o LD Porta Aberta 5° ano

A partir da análise podemos perceber que o significado da divisão quotição com 41,18% das questões encontradas, foi o mais presente na unidade do LD analisado. Contudo, verificamos um certo equilíbrio com o significado partição. Vale frisar ainda a baixa quantidade de questões de divisão de números naturais na unidade do LD analisado.

Com relação ao saber a ensinar da operação divisão de números, previsto para o 5° do ensino fundamental, de acordo com as categorias de análise da pesquisa e a análise da unidade do LD, destacamos: estratégias pessoais, cálculo mental e os algoritmos euclidiano (pelo processo breve) e americano (também conhecido como método das estimativas ou subtração sucessivas); os significados da divisão partição e quotição; o trabalho com divisões exatas e não exatas; e o trabalho com problemas em que a solução é o quociente. Dessa maneira, observamos a falta do trabalho com problemas de divisão em que a solução é o resto e o quociente mais um, pois apesar de não ser explícito nas orientações curriculares se faz necessário seu ensino, devido as questões cognitivas, as questões de compreensão do problema, de cálculo relacional e interpretação dos resultados.

É importante destacar também o pouco trabalho com as divisões não exatas, aparecendo apenas em uma das 17 questões. Ponto negativo e que cabe ao professor que for utilizar esse livro o sanar, através da organização de materiais que explore a divisão não exata em sala de aula.

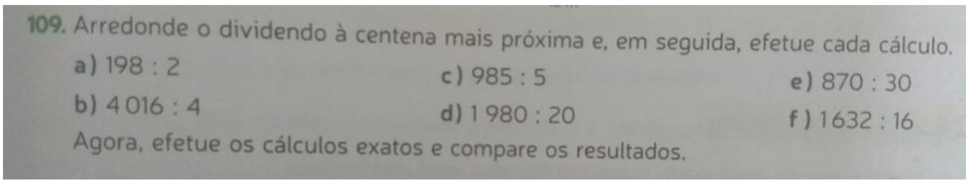
Vale frisar ainda que na unidade do LD, é destacado o ensino dos termos da divisão, bem como exemplos utilizando fichas que ajudam a compreender as noções do sistema decimal, o que facilita o entendimento do motivo de quando baixarmos um número na divisão e ele não dá para dividir pelo divisor colocarmos zero no quociente, bem como compreender as composições e decomposições realizadas ao efetuarmos divisões.

6.2.5 Vontade de Saber 6° ano

No livro didático Vontade de Saber do 6º ano, foi realizada a análise do capítulo 3 (tal livro é composto por doze capítulos), denominado "Operações com Números Naturais". Vale destacar também que esse capítulo visa ao ensino das quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) e que nossa concentração foi apenas na operação de divisão.

Os procedimentos de cálculos evidenciados no capítulo do LD analisado foram os seguintes: arredondamento e o algoritmo euclidiano pelo processo longo, conforme podemos ver nas figuras abaixo.

Figura 24: Exemplo do trabalho com o arredondamento presente no capítulo do LD

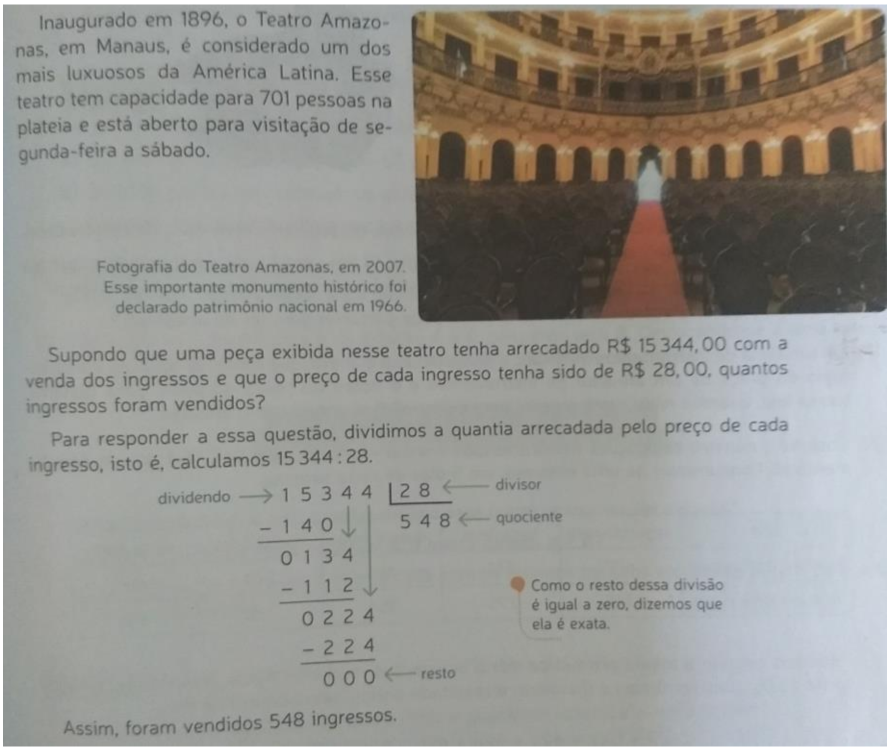


109. Arredonde o dividendo à centena mais próxima e, em seguida, efetue cada cálculo.
a) 198 : 2
b) 4 016 : 4
c) 985 : 5
d) 1 980 : 20
e) 870 : 30
f) 1632 : 16
Agora, efetue os cálculos exatos e compare os resultados.

Fonte: SOUZA e PATARO, 2015, p.85

Nessa questão, o aluno deveria arredondar o dividendo para a centena mais próxima e depois efetuar o cálculo da divisão com o dividendo arredondado e ele exato, fazendo uma comparação dos resultados posteriormente. Por exemplo, no item a) o aluno deveria arredondar o dividendo 198 para 200 que é a centena mais próxima e depois deveria fazer a divisão de 200 por 2, chegando ao quociente 100 e em seguida a divisão exata 198 por 2, obtendo como resultado o quociente 99. Este mesmo raciocínio deve ser utilizado nos demais itens.

Figura 25: Trabalho com algoritmo euclidiano longo


Inaugurado em 1896, o Teatro Amazonas, em Manaus, é considerado um dos mais luxuosos da América Latina. Esse teatro tem capacidade para 701 pessoas na plateia e está aberto para visitação de segunda-feira a sábado.

Fotografia do Teatro Amazonas, em 2007. Esse importante monumento histórico foi declarado patrimônio nacional em 1966.

Supondo que uma peça exibida nesse teatro tenha arrecadado R$ 15 344,00 com a venda dos ingressos e que o preço de cada ingresso tenha sido de R$ 28,00, quantos ingressos foram vendidos?

Para responder a essa questão, dividimos a quantia arrecadada pelo preço de cada ingresso, isto é, calculamos 15 344 : 28.

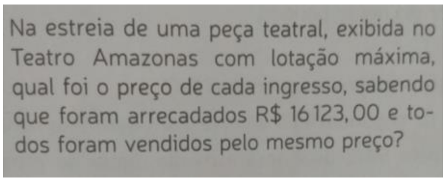
Assim, foram vendidos 548 ingressos.

Fonte: SOUZA e PATARO, 2015, p.73

Nessa questão percebemos também na resolução, além do trabalho com o algoritmo euclidiano longo, um destaque nos termos da divisão. Nota-se ainda que se trata de uma divisão exata, na qual o quociente é o resultado do problema. Temos na questão o total arrecado R$ 15344,00 e o preço por ingresso R$ 28,00, devendo-se calcular a quantidade de ingressos vendidos. Dessa maneira, ao efetuarmos a divisão de 15344 por 28, obtemos o quociente 548 que é solução do problema. Vale destacar ainda que se trata de um problema, cujo o significado da divisão é a quotição.

No mapeamento das questões em torno da operação divisão de números naturais foram contabilizados um total de 18 questões pesquisadas em todo o capítulo do LD. Dessas questões 3 exploravam o significado da divisão quotição e 11 questões o significado partição. Como exemplos dessas questões encontradas no capítulo do LD analisado, temos para quotição o problema da Figura 25 e para partição o exemplo da figura a seguir.

Figura 26: Exemplo de questão que explora o significado da divisão partição

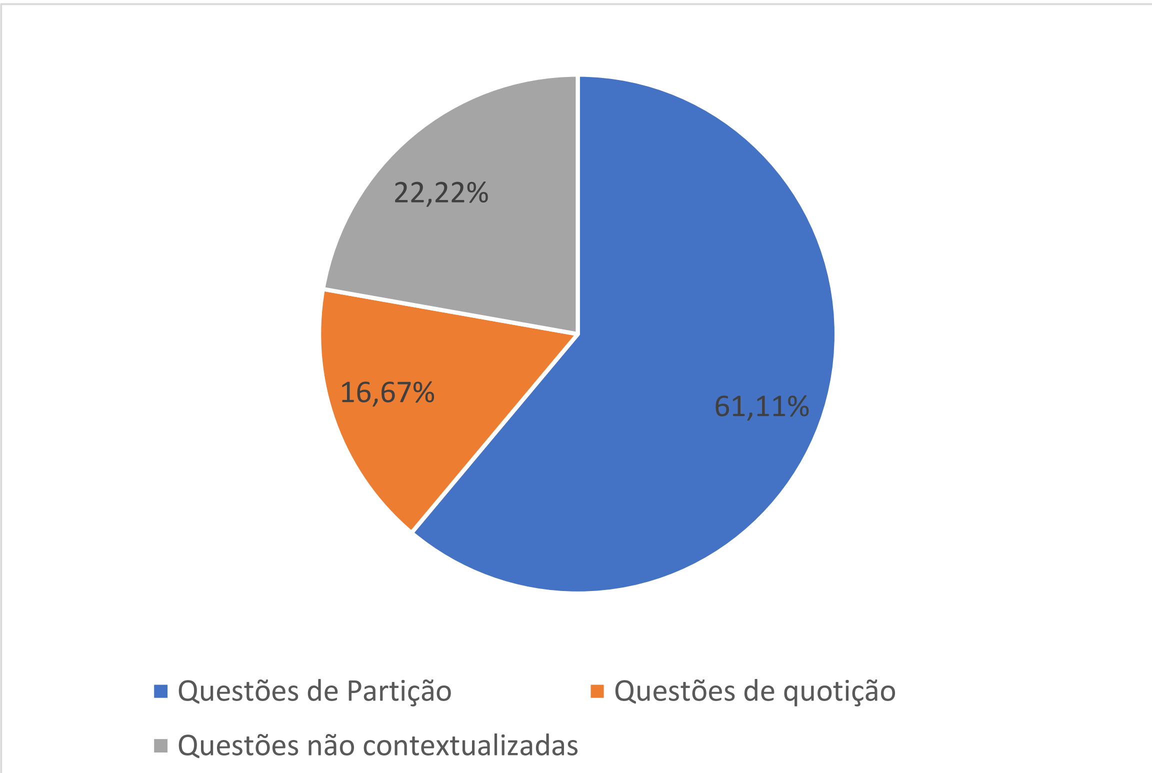

Na estreia de uma peça teatral, exibida no Teatro Amazonas com lotação máxima, qual foi o preço de cada ingresso, sabendo que foram arrecadados R$ 16 123,00 e todos foram vendidos pelo mesmo preço?

Fonte: SOUZA e PATARO, 2015, p.73

É importante frisar com relação a essa questão que para sua resolução é necessário prestar atenção no enunciado da Figura 25, o qual fala que a capacidade máxima do Teatro Amazonas é de 701 pessoas. Assim, basta fazermos a divisão do valor arrecadado R$ 16123,00 pela quantidade de pessoas 701, chegando ao quociente R$ 23,00 que é solução da questão.

Na busca de melhor evidenciar a quantidade de questões de partição e quotição presentes no capítulo do LD analisado, construímos o gráfico a seguir.

Gráfico 3 – Percentuais de questões encontradas no capítulo do LD do 6º ano analisado

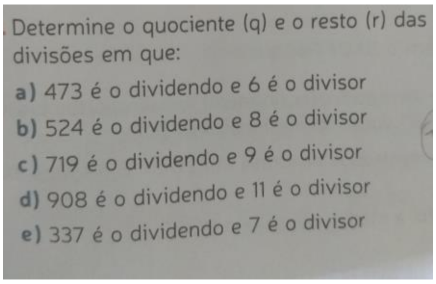


Fonte: Acervo da pesquisa

De acordo com o gráfico podemos verificar uma predominância das questões que exploram o significado partição com 61,11% das questões encontradas na análise do LD (ou seja, mais da metade das questões), seguidas de questões não contextualizadas com 22,22% das questões e quotição com 16,67% das questões. Vale destacar também a baixa quantidade de questões que exploram a operação divisão de números naturais no capítulo do LD analisado, uma vez que foram contabilizados apenas um total de 18 questões pesquisadas em todo o capítulo.

Em se tratando do tratamento dado ao resto evidenciamos apenas o trabalho com divisões exatas (exemplos, figuras 25 e 26) e divisões não-exatas, conforme o exemplo da figura abaixo.

Figura 27: Exemplo de questão de divisão não-exata presente no capítulo do LD


Determine o quociente (q) e o resto (r) das divisões em que:

a) 473 é o dividendo e 6 é o divisor

b) 524 é o dividendo e 8 é o divisor

c) 719 é o dividendo e 9 é o divisor

d) 908 é o dividendo e 11 é o divisor

e) 337 é o dividendo e 7 é o divisor

Fonte: SOUZA e PATARO, 2015, p.73

É importante destacar que os quocientes e os restos da questão da Figura 27 são respectivamente a) 78 e 5, b) 65 e 4, c) 79 e 8, d) 82 e 6 e e) 48 e 1, ou seja, todos os itens tratam-se de questões de divisões não exatas.

Com relação à interpretação dos resultados da divisão encontramos questões em que: o quociente era o resultado da divisão (exemplos, figuras 25 e 26) e questões em que o resto era o resultado (exemplo, segunda pergunta da figura 27).

6.2.6 Considerações sobre o LD Vontade de Saber 6° ano

A partir da análise podemos verificar que o significado da divisão partição é o que mais aparece com 61,11% das questões presentes no capítulo do LD. Tal resultado também corrobora com Selva (1998). É importante para o professor que utiliza esse livro em sala de aula saber dessa fragilidade, pois para a sanar o mesmo deve pesquisar questões que explorem o significado quotição trabalhando de forma igualitária os dois significados, com vista um melhor aprendizado da operação divisão de números naturais.

Verificamos também que os autores estabelecem enquanto saber a ensinar para operação de divisão de números naturais no 6° ano do ensino fundamental: o trabalho com arredondamento e o algoritmo euclidiano (pelo processo longo); o trabalho com ideia de partição e a ideia de quotição; o trabalho com divisões exatas e não-exatas; e o trabalho com questões em que a solução é o quociente e o resto.

Não evidenciamos o trabalho com as estratégias pessoais, cálculo mental, estimativas, bem com o trabalho com divisões em que a solução é o quociente mais um. Pontos fundamentais e que são destacados nos documentos analisados.

É importante salientar ainda que no capítulo analisado é destacado o trabalho com uso da calculadora que é defendido nos PCN (1997 e 1998), na BCC/PE (2008) e nos PCPE (2012), bem com traz tópicos importantes para o estudo da divisão com números naturais, como: multiplicação e divisão (o estudo das mesmas como operações inversas) e a relação fundamental da divisão (dividendo = divisor · quociente + resto).

6.2.7 Síntese dos aspectos comuns e divergentes em relação aos três livros analisados

Com relação aos aspectos comuns dos três livros analisados podemos destacar: o trabalho com os significados da divisão partição e quotição; o ensino de divisões exatas e não exatas; e o trabalho com questões em que a solução da divisão é o quociente. Em se tratando dos aspectos divergentes observamos que: o significado partição foi mais presente nas questões analisadas no 4º e 6º anos com respectivamente 46,3% e 61,11% das questões, enquanto no 5º ano o significado que prevaleceu foi quotição com 41,18% das questões; a quantidade de procedimentos de cálculos apresentados nos LD vai diminuindo no decorrer dos anos observados, ou seja, no 4º ano, por exemplo, são exploradas as estratégias pessoais, cálculo mental, estimativas, arredondamentos, os algoritmos euclidiano (pelo processo longo) e americano, já no 6º ano são explorados apenas o arredondamento e o algoritmo euclidiano (pelo processo longo); apenas no 4º ano é trabalhado divisões em que solução é o quociente mais um; no 5º é trabalhado somente questões em que a solução é o quociente; e no 4º e 5º anos são trabalhados também questões em que solução é o resto.

É importante comentar que a prevalência do significado partição nos livros didáticos, bem como a redução dos procedimentos de cálculos ao longo dos anos podem acarretar prejuízos para a aprendizagem dos estudantes, uma vez que o ensino da operação divisão de números naturais acaba por ficar centrado em uma visão limitada.

Vale frisar ainda o pouco trabalho com divisões não exatas no 5º ano, aparecendo apenas em uma das dezessete questões encontradas na análise da unidade do LD, fato esse que pode acarretar dificuldades nos alunos nas operações de divisão que tenham resto. Dessa maneira, se faz necessário que o professor que for utilizar esse livro leve para suas aulas mais questões de divisões não exatas, como forma de sanar essa fragilidade apresentada na unidade do LD analisada.

Outro ponto importante é uso da calculadora no LD do 6º ano, aspecto defendido nos PCN (1997 e 1998), na BCC/PE (2008) e nos PCPE (2012). Dessa maneira, percebemos que o LD do 4º é o que atende de forma mais satisfatória as orientações curriculares analisadas, pois aborda os principais procedimentos de cálculos, os significados da divisão partição e quotição, trabalha divisões exatas e não exatas, bem como traz questões em que a solução é o quociente, o quociente mais um e o resto.

Para facilitar a compreensão dos leitores trazemos o quadro a seguir.

No Quadro 3 apresentamos uma síntese dos principais aspectos comuns e divergentes presentes nos livros didáticos analisados.

Quadro 3: Síntese dos principais aspectos comuns e divergentes presentes nos livros didáticos analisados

LD	Aspectos Comuns	Aspectos Divergentes
4º, 5º e 6º anos	✓ Trabalho com os significados da divisão partição e quotição; ✓ Ensino de divisões exatas e não exatas; ✓ Trabalho com questões em que a solução da divisão	✓ Significado partição foi mais presente nas questões analisadas no 4º e 6º anos; ✓ 5º ano o significado que prevaleceu foi quotição; ✓ A quantidade de procedimentos de

	é o quociente.	cálculos apresentados nos LD vai diminuindo no decorrer dos anos observados; ✓ Apenas no 4º ano é trabalhado divisões em que solução é o quociente mais um; ✓ No 5º ano é trabalhado somente questões em que a solução é o quociente; ✓ No 4º e 5º anos são trabalhados também questões em que solução é o resto; ✓ Pouco trabalho com divisões não exatas no 5º ano; ✓ Uso da calculadora no LD do 6º ano.

Fonte: Elaboração do autor

A partir desse levantamento do saber previsto para ser ensinado nos LD e documentos analisados, faz-se necessário verificar como professores transformam esse saber em saber efetivamente ensinado em sala de aula. Contudo, antes de entrar no ambiente escolar para verificação de tais transformações é fundamental a realização de entrevistas com os participantes da presente pesquisa, com intuito de buscar informações que possam ajudar na etapa de observação das aulas. A seguir mostramos as perguntas e respostas dadas pelos professores nas entrevistas.

6.3 ANALISE DAS ENTREVISTAS

6.3.1 Entrevista

A entrevista foi composta por três perguntas, com os seguintes objetivos: verificar quanto tempo os professores participantes da pesquisa achavam que seria necessário para ensinar o conteúdo divisão de números naturais em suas turmas; saber o tempo necessário de observação para cada professor; fornecer dados sobre os livros didáticos e outros materiais utilizados pelos mesmos em suas aulas de divisão. Com o intuito de manter em anonimato a identidade de cada professor pesquisado, codificaremos os professores de P4, P5 e P6 (onde, P representa professor e a numeração 4, 5 e 6 o ano que cada professor ensina). A seguir apresentamos a pergunta seguida de um quadro com a resposta dada por cada professor.

1) Quanto tempo você acha que seria necessário para abordar conteúdo divisão de números naturais em sua turma?

Quadro 4: Respostas dadas pelos professores participantes da pesquisa

Professor	Resposta
P4	Acho que seria necessário no mínimo uns 30 dias, dependendo do nível da turma.
P5	Vendo como meus alunos estão apresentando muitas dificuldades relacionadas à adição, à subtração e principalmente à multiplicação que é a operação inversa da divisão, acho seria necessário todo um bimestre.
P6	Dependendo do desenvolvimento dos meus alunos ao ensinar divisão procuro só revisar com eles, então seriam necessárias apenas 6 aulas. Caso apresentem dificuldades é necessário, bem mais, em torno de 15 aulas.

Fonte: Elaboração do autor

2) Quanto tempo efetivamente você utiliza para abordar este conteúdo?

Quadro 5: Respostas dadas pelos professores participantes da pesquisa

Professor	Resposta
P4	É porque eu nunca ensinei divisão, é a primeira vez que estou ensinando no 4° ano, ensinava normalmente no 2° ano e não chegava a ensinar a divisão. Então, acho que devo utilizar uns 15 dias.
P5	Eu acho que vou passar muito tempo, pois além das dificuldades, muitos dos meus alunos são repetentes. Dessa forma, terei que trabalhar de forma muito detalhada. Então, utilizarei uns 20 dias de aula.
P6	Eu utilizo em torno de 6 aulas.

Fonte: Elaboração do autor

3) Quais livros didáticos ou outros materiais de apoio você utiliza para elaborar a(s) aula(s)?

Quadro 6: Respostas dadas pelos professores participantes da pesquisa

Professor	Resposta
P4	Utilizo muito a internet, pesquisando atividades e também o livro dos alunos o Porta Aberta do 4° ano.
P5	Eu utilizo jogos matemáticos e o livro adotado pela escola o Porta Aberta do 5° ano, mas já vi que muitos dos assuntos do livro são muito avançados para meus alunos. Então, procuro trazer tarefas pesquisadas na internet.
P6	Eu utilizo situações-problema, material dourado e o livro didático adotado pelo município o Vontade Saber da FTD.

Fonte: Elaboração do autor

6.3.2 Análise da entrevista

A partir da análise das entrevistas percebemos na primeira pergunta um tempo longo e considerável apontados pelos professores. Um deles chegando a falar: (P5) “*que seria necessário todo um bimestre para ensinar divisão de números naturais em suas turmas”*. Essa resposta é justificada pelas dificuldades que seus alunos têm em relação às operações, de modo particular em relação à operação de divisão, bem como as dificuldades de ensino dessa operação. Vale evidenciar que um professor (P6) aponta a necessidade de apenas seis aulas, desde que seja para revisar com seus alunos a dada operação. Contudo, se sua turma apresentar dificuldades essas aulas são aumentadas para mais que o dobro (15 aulas). Assim, constatamos que não há um tempo ideal, no ponto de vista dos professores pesquisados para o ensino da divisão de números naturais, pois a definição desse tempo leva em consideração as particularidades de cada turma.

Com relação à segunda pergunta, definimos a partir das respostas dadas pelos professores, um tempo aproximado que levaríamos para observar as aulas de cada professor participante. Denominamos tempo aproximado, pois esse tempo pode variar conforme a necessidade do professor. O tempo aproximado para observação de cada professor são os seguintes: P4 (15 dias); P5 (20 dias); e P6 (6 aulas). Totalizando um período aproximado de 37 dias de observação de aulas.

A partir da terceira pergunta identificamos os livros didáticos, ou seja, o saber escolar e os outros materiais utilizados pelos professores participantes da pesquisa para organizar suas aulas. Assim, os livros didáticos citados são: Porta Aberta (4° e 5°anos) da FTD dos autores Marília Ramos Centurión, Júnia La Scala Texeira e Arnaldo Bento Rodrigues; e Vontade de Saber (6° ano) da FTD dos autores Joamir Roberto Souza e Patrícia Rosana Moreno Pataro. Os outros materiais citados pelos professores foram: jogos matemáticos, material dourado, atividades pesquisadas na internet e situações-problema.

Vale destacar que o principal material apontado pelos professores foi o livro didático. Identificamos que cada professor citou apenas um livro, ou seja, o livro adotado pela escola e utilizado pelos alunos e que já analisamos no item 6.2 deste estudo. Tal situação corrobora com Chevallard (1991) que evidencia que o livro didático tem se mostrado como uma espécie de “texto do saber”.

De forma sintética essa primeira etapa de estudo nos apontou o saber a ensinar previsto nos documentos legais, conforme destacamos: os diferentes tipos de cálculos - mental, escrito, exato, aproximado, por estimativas, arredondamentos e utilizando os algoritmos convencionais e os significados da divisão - partição e quotição, bem como o tempo estimado de observação das aulas de cada professor e os materiais que os mesmos utilizam para ensinar a operação de divisão em suas salas de aulas.

A seguir discutiremos a análise das aulas dos três professores participantes da pesquisa, dando continuidade ao estudo do processo de transposição didática interna da operação de divisão de números naturais, uma vez que, sabendo o saber previsto para ser ensinado (documentos legais e livros didáticos) há a necessidade no presente estudo de verificar a transformação desse saber realizada pelos professores em sala de aula, ou seja, o saber efetivamente ensinado que decorre da forma como o professor ensina o saber previsto para ser ensinado.

6.4 OBSERVAÇÃO E ANALISE DAS AULAS DOS TRÊS PROFESSORES

6.4.1 Professor do 4º ano

O período de observação das aulas de P4 foram 12 dias, variando entre das 13 horas às 15:30 ou das 15:50 às 17:20. De acordo com as necessidades e demandas do professor, tendo em vista que era um pedagogo e tinha as outras disciplinas para ensinar. Foram trabalhadas oito listas elaboradas pelo professor com auxílio da internet, num total de 38 questões, isso fora as questões que eram trabalhadas durante a explicação do conteúdo. Essas listas P4 já as levava xerocadas, normalmente uma lista por dia de observação e todas as questões eram corrigidas coletivamente.

É importante destacar que P4 iniciou as aulas de divisão a partir de exemplos do dia-a-dia dos alunos, utilizando para isso palitos de picolé, copinhos descartáveis, grãos de feijão e bombons na resolução dos problemas. Cabe frisar também que era a primeira vez segundo P4 que os estudantes estudavam à operação divisão de números naturais, ou seja, não haviam estudado no 1º, 2º e 3º anos, pois como já havíamos discutido antes na análise dos documentos legais (PCN, 1997 e 1998; PCPE, 2012; BNCC, 2017), o início do ensino da operação divisão é previsto para o 3º ano, contudo, normalmente os professores o deixa para o 4º ano, alegando que não dá tempo ensinar, pois o foco até o 3º ano fica nas operações de adição e subtração.

A seguir mostramos imagens de alunos fazendo divisões utilizando tais materiais.

Imagem 1: Alunos fazendo divisões utilizando os copinhos descartáveis e grãos de feijão

Fonte: Acervo da pesquisa

Imagem 2: Aluno resolvendo divisões utilizando apenas os grãos de feijões

Fonte: Acervo da pesquisa

Imagem 3: Aluno fazendo a divisão com os bombons

Fonte: Acervo da pesquisa

O professor buscou trabalhar divisão através da prática, utilizando os materiais citados acima, levando em consideração que com o tempo seus alunos iriam deixar de utilizar os mesmos e apenas fariam as contas com o uso do algoritmo. As atividades eram realizadas em duplas e os alunos deveriam resolver as questões de forma prática (utilizando os materiais já citados) e depois teriam que registar na ficha utilizando o algoritmo euclidiano longo (algoritmo ensinado por P4 em sala de aula). Vale destacar que com 7 dias de estudo alguns alunos faziam as questões apenas utilizando o algoritmo conforme P4 deduziu, bem como nessa atividade prevalecia as ideias associadas ao significado da divisão partição, pois parte da ideia de repartir igualmente os materiais a serem divididos. Contudo, aqueles alunos que tinham mais dificuldades com a matemática ainda sim, só faziam as divisões com o uso dos materiais. Nessa atividade prática foram trabalhadas questões de divisões exatas e não exatas, conforme os exemplos a seguir.

Exemplo 1: Manoel tem 30 laranjas para fazer suco. Em cada copo de suco, utiliza 5 laranjas. Quantos copos de suco ele pode fazer?

Nesse exemplo os alunos deveriam dividir 30 laranjas por 5, que teriam como quociente 6 copos de suco e resto zero, isto é, trata-se de uma divisão exata em que o quociente é a resposta da questão. Nessa atividade prática ao ir distribuindo nos copinhos os alunos verificavam que não sobrava nenhum grão de feijão fora dos copinhos.

Exemplo 2: Joana ganhou 13 canetinhas para dividir em partes iguais com sua irmã. Quantas canetinhas ficou para cada?

Os alunos deveriam nesse exemplo dividir 13 canetinhas por 2, chegando ao quociente 6 canetinhas e o resto 1, ou seja, percebiam que sobrava um grão de feijão fora dos copinhos, por exemplo, tratando-se de uma divisão não exata em que o quociente é a resposta da questão.

Outras dificuldades vivenciadas tanto por P4 quanto por seus alunos, ocorreu ao ensinar divisões em que o dividendo tinha três dígitos, por exemplo, 136 ÷ 2, uma vez que os estudantes sempre buscavam um número que quando multiplicado pelo divisor fosse igual ao dividendo. Devido tais multiplicações envolverem números maiores do que os vinham sendo trabalhados até então (divisões com dividendo de dois dígitos), eles erravam muito nas multiplicações o que implicava em errar nas divisões, visto que uma operação é a inversa da outra.

Dessa maneira, P4 sempre buscou ensinar tais divisões por partes (por exemplo, ao dividir 136 por 2 dividia 13 por 2, que dá 6 e resta 1 e em seguida baixava a próxima casa decimal, ficando agora 16 para dividir por 2, cujo o resultado é 8 e o resto é zero. Assim, temos que o quociente de tal divisão é 68 e o resto 0), mas os alunos ainda apresentavam dificuldades na hora de baixar os números, ou seja, na hora de compor e decompor os números que seriam divididos na divisão por partes. Como forma de tentar sanar tais dificuldades P4 até ensina duas “regrinhas” as quais mostramos abaixo.

I -“Só pegamos um outro número se o número que pegamos for menor que o divisor, ou seja, não der para dividir”.

Ao falar isso, P4 quer mostrar, por exemplo, que na divisão de 136 por 2 pegamos o 13 para dividir inicialmente, pois o 1 é menor que o divisor 2, isto é, o 1 não dá para dividir por 2, isso no conjunto dos números naturais.

É importante explicar que na verdade pegamos a outra casa decimal o 3, pois o 1 representa uma centena que sem ser decomposta não pode ser dividida por 2. Contudo, ao baixar a próxima casa decimal convertemos a centena em dez dezenas que somadas com as três dezenas (no caso o 3) que baixamos temos agora 13 dezenas para dividir por 2, cujo resultado é 6 dezenas é resta uma dezena.

II – “Ao baixar um número e ele não der para dividir pelo divisor para baixarmos outro número temos que colocar um zero no quociente”.

Ao apontar isso, P4 quer dizer, por exemplo, que na divisão de 320 por 3 dividimos 3 por 3 que dá 1 e resta zero e ao baixar a próxima casa decimal 2 ficamos com 02 para dividir por 3, isto é, 2 por 3. Assim, temos que o divisor 3 é maior que o dividendo 2, ou seja, não dá para dividir no conjunto dos números naturais, tendo a necessidade de baixar a próxima casa decimal 0, mas para isso temos que acrescentar zero no quociente (de acordo com a regrinha), ficando após baixar a próxima casa decimal 20 para dividir por 3, cujo o resultado é 6 e o resto é 2. Desse modo, temos que o quociente da divisão de 320 por 3 é 106 e o resto é 2.

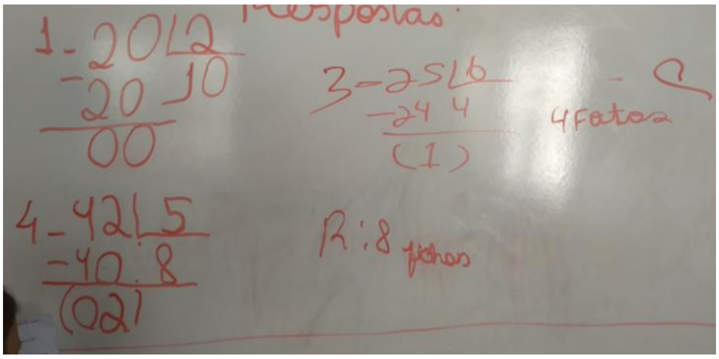
Todavia cabe esclarecer que a ideia de colocar zero no quociente não é decorrente dessa regrinha, mas sim dos conhecimentos de nosso sistema decimal, pois colocamos zero no quociente pôr o 2 ser na verdade duas dezenas que se não decompostas não dá para dividir pelo divisor 3, ou seja, nessa divisão (duas dezenas por 3) “ninguém ganhará dezenas”. Assim, zero é resposta para tal divisão.

Essas “regrinhas” são exemplos de criações didáticas que como já comentado na presente pesquisa, são artifícios utilizados com intuito de facilitar a apropriação do conhecimento por parte dos discentes. Portanto, ao ensinar tais “regrinhas” P4 realiza deformações no saber a ensinar, pois ao ensinar as mesmas e os alunos aprenderem não quer dizer que eles compreenderam as noções por trás delas, por exemplo, a ideia de valor posicional e as noções do sistema decimal, ou seja, não quer dizer que aprenderam a dividir. Possivelmente P4 não tem um bom conhecimento dessas noções envolvidas na operação divisão.

É importante destacar também que o único algoritmo explorado por P4 foi o euclidiano longo. Dessa maneira deixa lacunas no processo de ensino da operação de divisão de números naturais, uma vez que as orientações curriculares analisadas e o LD evidenciam ainda o ensino do algoritmo americano no 4º ano do ensino fundamental, bem como também o ensino do algoritmo euclidiano longo é baseado na técnica e não na compreensão desse processo de dividir o que não garante uma aprendizagem compreensiva e significativa de tal algoritmo.

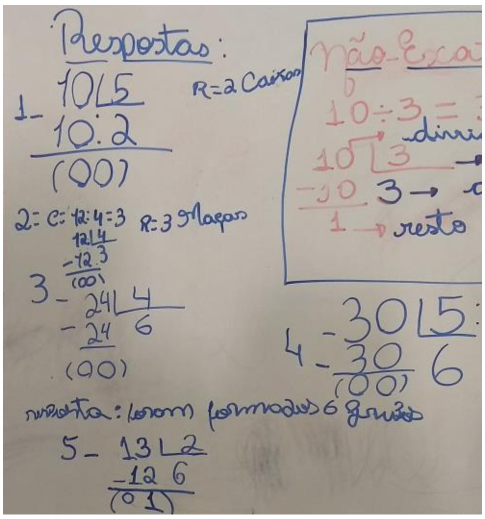
Outro ponto importante com relação às aulas de P4 foi o trabalho de resolução das questões no quadro, onde todas as listas eram corrigidas pelos alunos, ou seja, P4 chamava os alunos para responder as questões e quando os mesmos erravam P4 os indagavam, buscando fazer eles pensarem onde erraram. Dessa maneira, não dava as respostas prontas, aspecto positivo no processo de ensino e aprendizagem, o qual coloca os alunos na posição de construtores do conhecimento, a seguir mostramos imagens de algumas resoluções dos alunos no quadro.

Imagem 4: Algumas resoluções dos alunos



Fonte: Acervo da pesquisa

Imagem 5: Resolução das questões pelos alunos



Fonte: Acervo da pesquisa

Conforme podemos observar nas imagens 4 e 5, verificamos o trabalho com divisões exatas e não exatas e a utilização do algoritmo euclidiano longo, que serão pontos discutidos mais adiante.

Vale destacar também que P4 buscou levar desafios, onde eram sorteados números da caderneta e quem fosse sorteado deveria escolher uma flor e atrás dessa tinha um problema, o aluno que resolvesse corretamente o problema ganhava um bombom. A seguir mostramos imagens dessas flores.

Imagem 6: Imagem das flores com problemas no verso

Fonte: Acervo da pesquisa

Essa prática utilizada por P4 de levar desafios visando premiar os alunos que resolvessem corretamente pode levar a uma participação em sala de aula dependente de prêmios. Na verdade, o ideal é que o professor desperte o interesse de seus estudantes, através de práticas que os deixem curiosos para aprender o assunto, como exemplos: problemas presentes no dia-a-dia e a utilização de jogos educativos. Contudo, vale destacar quanto a utilização de jogos que esses devem levar a construção de conhecimentos e não ficar apenas o lúdico pelo lúdico.

Imagem 7: Imagem do problema no verso de uma flor

Fonte: Acervo da pesquisa

Nesse problema o aluno deveria dividir 35 balas para os seus 5 primos. Assim, ao realizar a divisão de 35 por 5, chegaria ao quociente 7 e ao resto zero, isto é, a resposta da questão é 7 balas para cada primo.

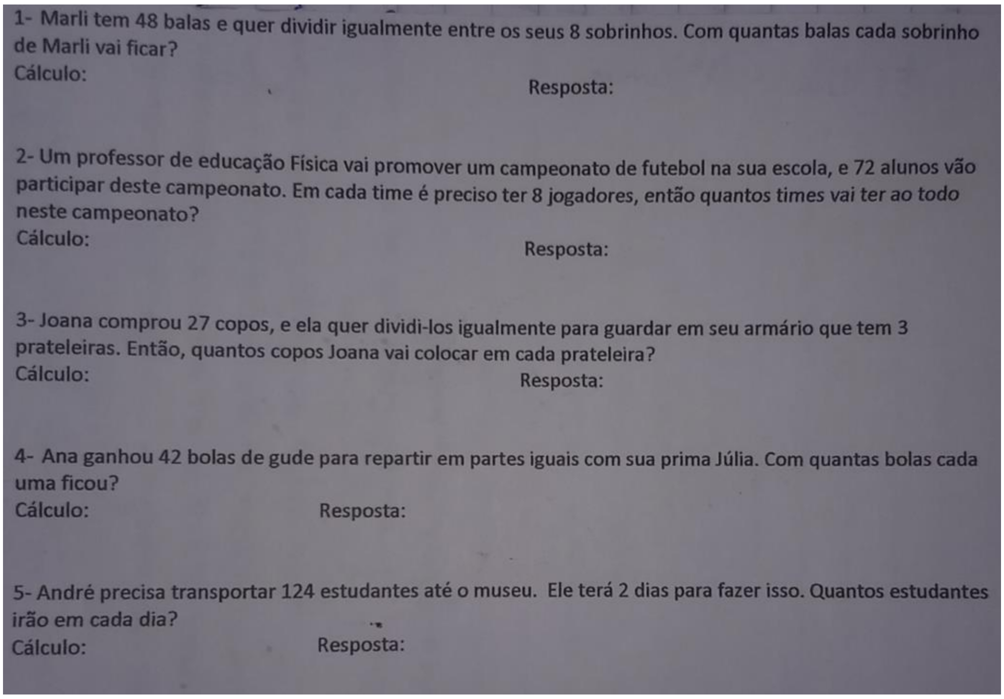
Cabe destacar ainda a não utilização por P4 do livro didático, isto é, o mesmo levava listas prontas para o ensino da divisão de números naturais na sala de aula, conforme já foi destacado anteriormente.

A seguir discutiremos sobre as categorias de analise propostas na presente pesquisa e previstas nos documentos analisados e no livro didático do 4º ano do ensino fundamental.

Os diferentes procedimentos de cálculos – os procedimentos de cálculos evidenciados nas aulas de P4 foram o trabalho com algoritmo euclidiano longo (imagens 4 e 5), o trabalho com estratégias pessoais e o cálculo mental (quando os próprios alunos pensavam em suas estratégias para realizar as divisões com os materiais disponibilizados por P4, exemplos imagens 1, 2 e 3). Dessa maneira, podemos verificar com relação ao saber a ensinar previsto nos documentos analisados e no livro didático adotado pela escola e que deveria ser utilizado por P4, o não trabalho com as estimativas, os arredondamentos e o algoritmo americano (também conhecido como método das estimativas). Tais procedimentos de cálculos são previstos para ser ensinados nesse nível de escolaridade (4º ano do ensino fundamental). Assim, constatamos lacunas no saber efetivamente ensinado em relação ao saber previsto para ser ensinado com relação aos diferentes procedimentos de cálculos, haja vista o não ensino dos procedimentos já destacados.

Os significados da divisão – conforme já explicado anteriormente foram trabalhadas oito listas, num total de 38 questões, isso fora as questões que eram trabalhadas durante a explicação do conteúdo. A seguir mostramos um exemplo dessas listas.

Imagem 8: Exemplo de lista trabalhada em sala de aula por P4



1- Marli tem 48 balas e quer dividir igualmente entre os seus 8 sobrinhos. Com quantas balas cada sobrinho de Marli vai ficar?
Cálculo: Resposta:

2- Um professor de educação Física vai promover um campeonato de futebol na sua escola, e 72 alunos vão participar deste campeonato. Em cada time é preciso ter 8 jogadores, então quantos times vai ter ao todo neste campeonato?
Cálculo: Resposta:

3- Joana comprou 27 copos, e ela quer dividi-los igualmente para guardar em seu armário que tem 3 prateleiras. Então, quantos copos Joana vai colocar em cada prateleira?
Cálculo: Resposta:

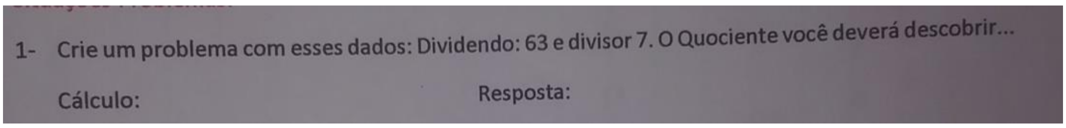
4- Ana ganhou 42 bolas de gude para repartir em partes iguais com sua prima Júlia. Com quantas bolas cada uma ficou?
Cálculo: Resposta:

5- André precisa transportar 124 estudantes até o museu. Ele terá 2 dias para fazer isso. Quantos estudantes irão em cada dia?
Cálculo: Resposta:

Fonte: Acervo da pesquisa

Nessa lista verificamos que as questões 1, 3, 4 e 5 exploram o significado da divisão partição, enquanto a questão 2 o significado quotição. Fazendo uma análise semelhante à realizada no LD, constamos que das 38 questões trabalhadas em sala de aula, 36 foram de partição, 1 de quotição (apenas a questão 2 da imagem 8) e uma que se encaixa na categoria questões não contextualizadas a qual mostramos abaixo.

Imagem 9: Questão não contextualizada presente nas aulas de P4



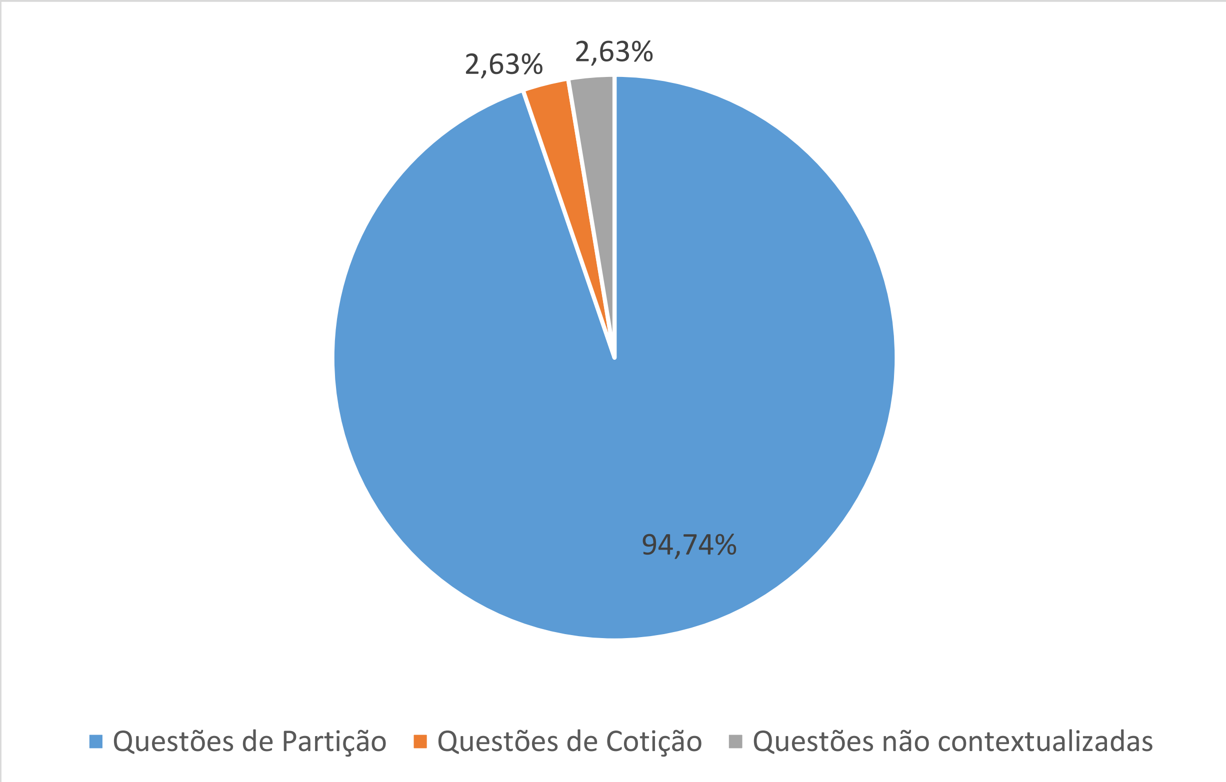
1- Crie um problema com esses dados: Dividendo: 63 e divisor 7. O Quociente você deverá descobrir...
Cálculo: Resposta:

Fonte: Acervo da pesquisa

Nota-se que nessa questão o aluno é quem deve criar o problema ponto importante e destacado na BNCC (2017), pois possibilita a participação do estudante no processo de construção do conhecimento. Vale destacar também o trabalho com os termos da operação divisão que foram bem frequentes nas aulas de P4.

Ainda como forma de melhor evidenciar os percentuais das questões de partição e quotição trabalhadas por P4 em sala de aula mostramos o gráfico abaixo.

Gráfico 4 – Percentuais de questões trabalhadas por P4



Fonte: Acervo da pesquisa

Ao analisar tais dados percebemos uma predominância do significado partição (com 94,74% das questões) nas aulas de P4 e se comparados com os dados da análise do LD do 4º ano do ensino fundamental (questões de partição 46,30%) verificamos um aumento de 48,44% na quantidade de questões de partição efetivamente trabalhadas em relação as previstas no LD.

Observamos também a diminuição do percentual de questões de quotição (com 27,78% das questões no LD previstas para serem ensinadas e 2,63% das questões efetivamente ensinadas por P4 nas listas) e questões não contextualizadas (25,92% das questões no LD previstas para serem ensinadas e 2,63% das questões efetivamente ensinadas por P4). Dessa maneira, contatamos que P4 promove mudanças no saber a ensinar (previsto no LD do 4º ano e nos documentos analisados), isto é, o mesmo concentra-se praticamente no ensino do significado partição com 94,74% das questões trabalhadas, possivelmente por ter um maior conhecimento desse significado, pois de acordo com Câmara (1997), a relação que o professor tem com o conhecimento matemático, justifica de certa maneira o professor avançar o tempo do saber de um dado objeto matemático (quando sua relação com tal saber falta intimidade) e frear esse tempo em outros objetos do saber (quando sua relação com tal saber é intima).

Vale frisar ainda que mesmo não utilizando o LD do 4º ano, conforme observamos, há uma predominância dos problemas de partição nas aulas de P4, possivelmente por ser o significado que mais aparece nos LD e por envolver a ideia de repartir em partes iguais dadas as quantidades.

O tratamento dado ao resto – em se tratando do tratamento dado ao resto, verificamos que P4 explica inicialmente as divisões exatas e não exatas, através do cartaz abaixo.

Imagem 10: Cartaz mostrado por P4 no quadro

Fonte: Acervo da pesquisa

Nesse cartaz P4 mostra para os estudantes os símbolos que representam a divisão, bem como evidencia a existência de dois tipos de divisões: exatas e não exatas. Com relação a essas divisões, P4 aponta dois exemplos.

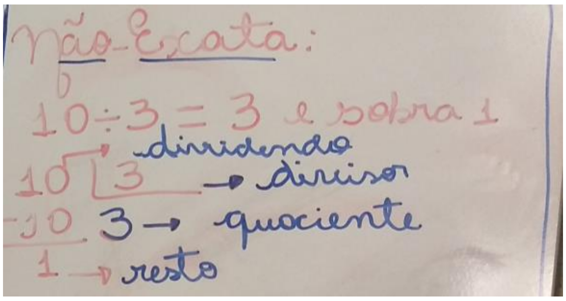
- Divisão exata

Imagem 11: Exemplo de divisão exata

Fonte: Acervo da pesquisa

- Divisão não-exata

Imagem 12: Exemplo de divisão não-exata



Fonte: Acervo da pesquisa

Nesses exemplos, P4 procura evidenciar que nas divisões exatas o resto é zero, já nas não exatas sempre irá ter uma sobra, destaca ainda os nomes dos termos da divisão, já comentado anteriormente. É importante enfatizar que esses dois exemplos foram resolvidos no quadro por P4 e depois resolvidos de maneira concreta com a utilização de bolas de plástico e bombons, ou seja, recursos manipuláveis. Nesse momento P4 convidou cinco alunos, no caso da divisão exata para distribuir 12 bombons para quatro alunos, ou seja, um aluno dividiu os bombons para os outros quatro. Vale destacar que tal divisão foi realizada utilizando a ideia intuitiva da distribuição um a um pelo aluno, isto é, o mesmo foi dando um bombom para cada aluno até que não sobrou nenhum e que P4 também mostra a possibilidade de fazer tal divisão, utilizando a operação multiplicação (4x1 = 4, 4x2 = 8 e 4x3 = 12), isto é, procurar o número que multiplicado por 4 resulta em 12, utilizando a ideia da operação inversa da divisão. Dessa maneira, frisa a importância de os alunos saberem a tabuada.

Com relação ao exemplo da divisão não exata, P4 procede da mesma maneira respondendo no quadro e em seguida chamando 4 alunos para dividir 10 bolinhas, isto é, um dividiu para os outros três. Assim, procura evidenciar a ideia do resto na divisão, nesse caso, a sobra de uma bolinha. Além disso, alerta da possibilidade do estudo de divisões com decimais, salientado que tal estudo acontecerá nos anos posteriores da escolarização. Vale destacar ainda que P4 utilizou tais exemplos para explicar o algoritmo euclidiano breve (imagem 11) e o longo (imagem 12).

Após essa explicação na maioria das atividades realizadas em sala de aula ao término da divisão P4 sempre perguntava “essa divisão é exata ou não exata? ”, buscando fixar nos alunos a ideia de divisão exata e não exata, bem com saber se eles compreendem quando uma divisão é exata ou não a partir do que já tinha explanado em sala de aula.

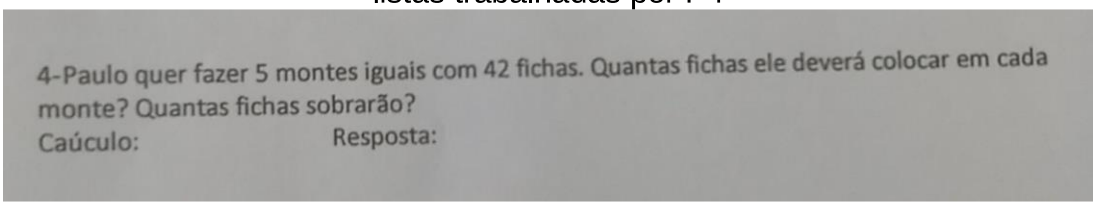
A partir do exposto podemos perceber que P4 faz o caminho inverso do que é destacado nos documentos analisados, pois faz primeiro no quadro para depois os alunos fazerem com os materiais. Na verdade, P4 deveria deixar os alunos se familiarizar com o material, colocar os alunos da condição de pesquisadores e ser apenas um mediador nesse processo de aprendizagem, conforme destaca Rosa dos Santos (2015),

> Para que o saber em jogo tenha sentido e ajude na compreensão do estudante é necessário que o professor faça o caminho contrário do cientista (matemático), ou seja, contextualize o conceito. Para isso é necessário promover situações que levem o estudante a agir, formular e testar hipóteses, legitimar e, por fim, o educador descontextualiza para poder institucionalizar, para que haja uma generalização (ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 32).

Dessa forma ensinaria o saber previsto para ser ensinado de forma coerente e adequada com os documentos. Vale destacar o não tratamento dado ao resto na operação divisão, uma vez que esse está relacionado as estratégias utilizadas pelos alunos para lidar com o resto e o objetivo dessa parte da pesquisa era observar e analisar o saber efetivamente ensinado, ou seja, a prática do professor e não as estratégias dos alunos que estão relacionadas ao saber aprendido. Assim, contatamos que P4 ensinou de forma satisfatória as divisões exatas e não exatas, cometendo equívocos apenas ao não colocar seus alunos na posição de pesquisador.

A interpretação dos resultados obtidos na divisão - pudemos verificar o trabalho com questões em que o quociente era a solução do problema (37 questões das 38 trabalhadas nas listas, exemplos questões 1, 2, 3, 4, e 5 da imagem 8) e uma questão em que uma das soluções é o resto, a qual mostramos abaixo.

Imagem 13: Questão em que uma das soluções é o resto presente em uma das listas trabalhadas por P4


4-Paulo quer fazer 5 montes iguais com 42 fichas. Quantas fichas ele deverá colocar em cada monte? Quantas fichas sobrarão?
Caúculo: Resposta:

Fonte: Acervo da pesquisa

Notamos que nessa questão a primeira resposta é o quociente, ou seja, 8 resultante da divisão de 42 por 5 e a segunda resposta é o resto, isto é, 2. Dessa maneira, evidenciamos o pouco trabalho com questões em a solução é o resto por parte de P4, aparecendo apenas em uma das questões trabalhadas em sala de aula nas listas. Diante do exposto, constatamos que P4 limita o saber a ensinar previsto no LD e nos documentos analisados com relação a interpretação dos resultados obtidos na divisão, uma vez que se restringe praticamente ao trabalho com questões em a solução é o quociente, quase não ensinando questões em que a solução é o resto e não ensinando questões em que a solução é o quociente mais um.

6.4.2 Professor do 5º ano

O período de observação das aulas de P5 foram 9 dias, variando também entre das 13 horas às 15:30 ou das 15:50 às 17:20. De acordo com as necessidades e demandas do professor, tendo em vista que era também um pedagogo e tinha as outras disciplinas para ensinar. Foram trabalhadas 23 questões e duas listas de questões não contextualizadas, uma trabalhando a tabuada divisão do 1 ao 10 e a outra no estilo arme e efetue as divisões, fora os exemplos dados e corrigidos por P5 durante sua explicação em sala de aula. Tais questões e listas foram elaboradas por P4, por meio de pesquisas realizadas na internet, nas mesmas P4 as variava hora levando xerocadas, outra hora escrevendo-as no quadro, normalmente entorno de quatro questões ou uma dessas listas citadas por dia de observação. Vale destacar que na sua maioria eram corrigidas coletivamente, com a ida dos alunos para o quadro.

O ensino da operação divisão de números naturais é iniciado por P5, através do seguinte texto escrito no quadro.

"Divisão é uma das quatro operações fundamentais da matemática. Seu símbolo é o "÷". No entanto, pode variar, por exemplo, no teclado do computador o símbolo adotado é a barra "/", em outros casos, ":". A divisão é o ato de dividir em partes iguais para todos. O número que está sendo dividido em partes iguais é chamado de ***dividendo****, o número que indica em quantas vezes vamos dividir é chamado de* ***divisor****, o resultado é chamado de* ***quociente****, o que sobra é chamado de* ***resto****".*

A partir desse texto podemos frisar que P5 destaca o significado partição da divisão, bem como evidencia os termos da divisão e os símbolos que a representa.

Vale frisar que tal definição não engloba o significado quotição da divisão limitando-se apenas ao significado partição, bem como possivelmente P5 parte do princípio que seus alunos já estudaram a operação divisão no ano anterior.

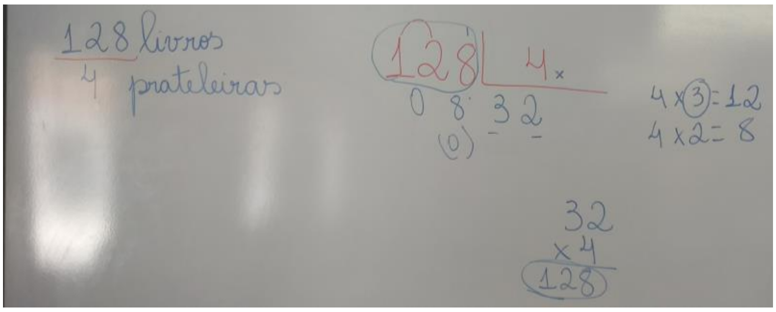
Durante suas aulas P5 sempre dá exemplos do dia-a-dia dos alunos para explicar a operação divisão, como o exemplo abaixo.

Exemplo: Em um bingo em que o prêmio é R$ 10,00, duas pessoas batem. Quanto ganhará cada uma? E se três pessoas batessem?

Com relação a esse exemplo, P5 busca mostrar a ideia de divisão exata e de não exata a qual discutiremos mais adiante. Cabe salientar que a utilização de exemplos do dia-a-dia pode possibilitar o despertar do interesse dos estudantes para com o assunto.

Outros pontos importantes em sua prática docente são relacionados à correção das atividades. Algumas vezes P5 próprio corrigia no quadro e na sua maioria chamava os alunos para responder, a seguir mostramos exemplos dessa prática.

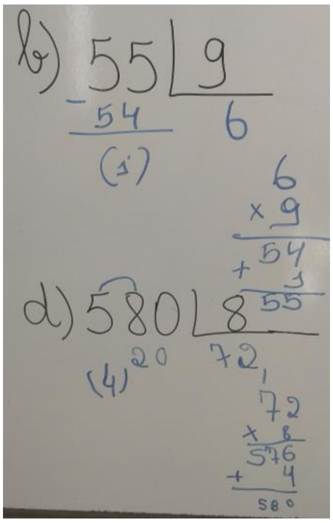
Imagem 14: Resolução realizada por P5 no quadro



Fonte: Acervo da pesquisa

Em se tratando dessa resolução a mesma consistia em dividir 128 livros em 4 prateleiras. Dessa maneira, podemos evidenciar o trabalho por P5 com algoritmo euclidiano breve (algoritmo ensinado P5 em sala de aula), bem como destacar o trabalho frequente de conferir se o resultado de tal divisão está correto, por meio da multiplicação do divisor pelo quociente e o resultado somado com o resto, ou seja, por meio da relação fundamental da divisão (D = d x q + r). Além disso, verificamos o trabalho com o significado da divisão partição.

Imagem 15: Resoluções realizadas pelos alunos



Fonte: Dados da pesquisa

Tais atividades estão relacionadas a questões não contextualizadas as quais exigem apenas efetuar a divisão. Podemos constatar que os estudantes utilizam o procedimento utilizado por P5 na sua explicação e suas resoluções, isto é, utiliza o algoritmo euclidiano breve e depois confere o resultado através da relação fundamental da divisão ou como o próprio P5 falava "tirar a prova". Vale destacar que o mesmo explica a resolução realizada pelos alunos após eles terminarem, bem como que alguns alunos recorrem aos tracinhos e bolinhas para resolver as divisões.

Cabe ressaltar ainda o trabalho com a tabuada realizado por P5, pois muitos alunos não sabiam da mesma. Com intuito de fazer seus alunos fixarem algumas divisões, P5 passou uma lista da tabuada de divisão do 1 ao 10 (uma das listas de questões não contextualizadas), a qual mostramos abaixo.

Imagem 16: Tabuada de divisão do 1 ao 10

TABUADA DE DIVISÃO DO 1 AO 10

1 ÷ 1 =	2 ÷ 2 =	3 ÷ 3 =	4 ÷ 4 =	5 ÷ 5 =
2 ÷ 1 =	4 ÷ 2 =	6 ÷ 3 =	8 ÷ 4 =	10 ÷ 5 =
3 ÷ 1 =	6 ÷ 2 =	9 ÷ 3 =	12 ÷ 4 =	15 ÷ 5 =
4 ÷ 1 =	8 ÷ 2 =	12 ÷ 3 =	16 ÷ 4 =	20 ÷ 5 =
5 ÷ 1 =	10 ÷ 2 =	15 ÷ 3 =	20 ÷ 4 =	25 ÷ 5 =
6 ÷ 1 =	12 ÷ 2 =	18 ÷ 3 =	24 ÷ 4 =	30 ÷ 5 =
7 ÷ 1 =	14 ÷ 2 =	21 ÷ 3 =	28 ÷ 4 =	35 ÷ 5 =
8 ÷ 1 =	16 ÷ 2 =	24 ÷ 3 =	32 ÷ 4 =	40 ÷ 5 =
9 ÷ 1 =	18 ÷ 2 =	27 ÷ 3 =	36 ÷ 4 =	45 ÷ 5 =
10 ÷ 1 =	20 ÷ 2 =	30 ÷ 3 =	40 ÷ 4 =	50 ÷ 5 =
6 ÷ 6 =	7 ÷ 7 =	8 ÷ 8 =	9 ÷ 9 =	10 ÷ 10 =
12 ÷ 6 =	14 ÷ 7 =	16 ÷ 8 =	18 ÷ 9 =	20 ÷ 10 =
18 ÷ 6 =	21 ÷ 7 =	24 ÷ 8 =	27 ÷ 9 =	30 ÷ 10 =
24 ÷ 6 =	28 ÷ 7 =	32 ÷ 8 =	36 ÷ 9 =	40 ÷ 10 =
30 ÷ 6 =	35 ÷ 7 =	40 ÷ 8 =	45 ÷ 9 =	50 ÷ 10 =
36 ÷ 6 =	42 ÷ 7 =	48 ÷ 8 =	54 ÷ 9 =	60 ÷ 10 =
42 ÷ 6 =	49 ÷ 7 =	56 ÷ 8 =	63 ÷ 9 =	70 ÷ 10 =
48 ÷ 6 =	56 ÷ 7 =	64 ÷ 8 =	72 ÷ 9 =	80 ÷ 10 =
54 ÷ 6 =	63 ÷ 7 =	72 ÷ 8 =	81 ÷ 9 =	90 ÷ 10 =
60 ÷ 6 =	70 ÷ 7 =	80 ÷ 8 =	90 ÷ 9 =	100 ÷ 10 =

Fonte: Acervo da pesquisa

Ao responder tal lista os alunos poderiam usar como suporte as respostas dessa tabuada para realizar as demais atividades de divisão que foram delineadas nesse dia (3º dia de observação). Contudo, vale destacar que a mera fixação da tabuada não garante o aprendizado da operação divisão de números naturais, melhor que fixar contas da tabuada é fazer com que os alunos compreendam as relações existentes entre elas, como exemplo: o aluno para saber que 8 x 6 é igual a 48, basta perceber que 8 x 3 é igual a 24 e que o multiplicador 6 da primeira multiplicação é o dobro do multiplicador 3 da segunda. Assim, o produto da primeira multiplicação será o dobro da segunda, isto é, 24 x 2 = 48. Dessa maneira, podemos favorecer uma aprendizagem compreensiva sem a memorização da tabuada.

É importante destacar também algumas frases ditas por P5 durante a resolução e explicação das atividades em sala de aula, as quais mostramos abaixo.

I. *"Os estudantes têm muita dificuldade parecendo não ter estudado matemática nos anos anteriores".*

II. *"Vocês têm que estudar a tabuada minha gente".*

III. *"A divisão é o contrário da multiplicação".*

IV. *"Não trabalho com o livro, pois grande parte dos alunos não têm".*

V. *"Quando baixar um número e não dá para dividir colocamos zero no quociente".*

VI. *"Se tenho dois números no divisor tenho que pegar dois números no dividendo".*

VII. *"Quando o primeiro termo do dividendo não dá para dividir temos que juntar com o outro".*

VIII. *"Baixei o zero não deu para dividir coloca zero no quociente".*

Nas frases I e II observamos que são decorrentes das dificuldades dos alunos em relação à operação divisão evidenciadas por P5; a III mostra um conhecimento básico de P5 com relação às operações inversas, ou seja, quer falar possivelmente que a divisão é a operação inversa da multiplicação; a IV evidencia o motivo apontado por P5 para a não utilização do LD, isto é, suas aulas eram realizadas, através de listas prontas ou atividades escritas no quadro, tal fato era justificado pelo professor pôr no final do ano muitos alunos não devolverem os LD, o que acarretava que muitos alunos do ano seguinte não recebiam os livros; a V, VI e VII são algumas "regrinhas" já apontadas na análise das aulas de P4, ou seja, tratam-se de criações didáticas que visam a facilitar a aquisição do conhecimento e acabam mudando ou deformando o saber a ensinar em relação à operação divisão; e a VIII refere-se a mais uma dessas “regrinhas”, para melhor compreender a mesma vejamos o exemplo dado por P5 na divisão de 400 por 10.

Como o 4 não dá para dividir pelo divisor 10, temos conforme as “regrinhas” VI e VII que pegar o número 40, na divisão de 40 por 10 o resultado é 4 e o resto é zero, ao baixar o outro zero o mesmo não dá para dividir por 10, então de acordo com essa “regrinha” temos que colocar zero no quociente. Assim, temos que o quociente é 40 e o resto é zero.

Faz se necessário salientar que tal fato não decorre dessa regrinha explicada por P5 que apenas visa facilitar a apropriação do conhecimento, mas dos conhecimentos do sistema de numeração decimal, uma vez que, ao baixar o zero, este representa zero unidades e a divisão de 0 por 10 é 0, pois o único número que quando multiplicado por 10 (o divisor) resulta em zero é o próprio zero, daí o motivo de colocar zero no quociente. Assim, percebemos também a dificuldade de P5 ao ensinar divisão de números naturais, possivelmente decorrente da falta de conhecimento do sistema de numeração decimal.

O professor ainda utilizou em suas aulas dois vídeos (Matemática Zero – aulas 1 e 2 – Divisão – Nerci) os quais explicava os termos da divisão, a relação fundamental da divisão (D = d x q + r), o algoritmo euclidiano longo e o breve, a divisão exata e não exata, e a divisão por zero.

A seguir discutiremos sobre as categorias de análise propostas na presente pesquisa e previstas nos documentos analisados e no livro didático do 5º ano do ensino fundamental.

Os diferentes procedimentos de cálculos – podemos verificar o trabalho com o algoritmo euclidiano longo, a estratégia pessoal e o algoritmo euclidiano breve, ao resolver e explicar os seguintes exemplos durante sua explicação.

Exemplo: Se nossa sala tem hoje 25 alunos e se quisesse fazer grupos de 4 alunos. Quantos grupos poderia fazer?

Figura 28: Resolução do exemplo por P5, através do algoritmo euclidiano longo

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{25} & \underline{\mathbf{4}} \\ \underline{\mathbf{-\ 24}} & \mathbf{6} \\ \mathbf{(01)} & \end{array}$$

Fonte: Acervo da pesquisa

Tal exemplo consistia na divisão de 25 alunos em 4 grupos, podemos verificar além da utilização do algoritmo euclidiano longo, o trabalho com o significado partição na divisão, bem como o trabalho com divisão não exata.

Exemplo: Um relógio custa R$ 100,00 e a loja vai dividir em cinco parcelas. Qual o valor de cada parcela a ser paga?

Figura 29: Resolução do exemplo por P5, através de uma estratégia pessoal de P5 de cálculo

20
20
20
20
20

Fonte: Acervo da pesquisa

Nesse exemplo verificamos o ensino de divisão, através da utilização de um procedimento pessoal: cada retângulo representa uma parcela e ao distribuir igualmente os R$ 100,00 nos cinco retângulos verificamos que o valor de cada parcela a ser paga é de R$ 20,00. Trata-se de uma divisão exata em que envolve o significado da divisão partição.

Exemplo: Cinquenta e cinco lápis dividido para cinco pessoas. Quantos lápis irá ganhar cada pessoa?

Figura 30: Resolução do exemplo por P5, através do algoritmo euclidiano breve

55 | 5
05 11
(0)

Fonte: Acervo da pesquisa

Em se tratando desse exemplo, verificamos o trabalho com o algoritmo euclidiano breve, bem como trata-se de uma divisão exata que em que envolve o significado partição.

Assim, a partir das análises das aulas de P5 podemos verificar ainda lacunas no saber ensinado em relação ao saber a ensinar previsto nos documentos e no LD do 5º ano do ensino fundamental relacionado aos diferentes procedimentos de cálculos, uma vez que constatamos o não trabalho com os procedimentos de cálculos mental e o algoritmo americano. A falta do trabalho desses procedimentos pode acarretar prejuízos a aprendizagem em sala de aula, pois os mesmos favorecem o desenvolvimento da estimativa e do cálculo mental. Vale destacar ainda o trabalho com o algoritmo euclidiano longo não previsto para ser ensinado de acordo com o LD do 5º ano analisado.

Os significados da divisão – foram trabalhadas 23 questões, fora os exemplos dados e corrigidos por P5, além de duas listas de questões não contextualizadas, conforme já abordamos anteriormente. Dessas questões pudemos constatar que 15 questões envolviam o significado da divisão partição, 4 questões o significado quotição e 4 questões que se encaixam na categoria de questões não contextualizadas.

Para melhor evidenciar tais questões mostramos algumas abaixo.

Imagem 17: Questão que envolve o significado da divisão partição

10. Rosalva, diretora da escola Caminho Feliz, distribuiu 4.560 folhas sulfites entre 8 classes. Quantas folhas cada classe recebeu?

Fonte: Acervo da pesquisa

Tal questão trabalha o significado partição e visa a realização da divisão de 4560 por 8, a qual o quociente é 570 e o resto é zero. É importante destacar que se trata de uma divisão exata em que o quociente é o resultado da questão.

Imagem 18: Questão que envolve o significado da divisão quotição

5. Se em uma dúzia de ovos contém 12 ovos. Quantas dúzias compõe 96 ovos?

( ) 6 dúzias

( ) 7 dúzias

( ) 8 dúzias

( ) 5 dúzias

Fonte: Acervo da pesquisa

Nessa questão trabalha-se o significado quotição e busca-se a resolução da divisão de 96 por 12, a qual o quociente é 8 e o resto é zero. Temos uma divisão exata na qual o quociente também é a resposta da questão.

Imagem 19: Questão não contextualizada

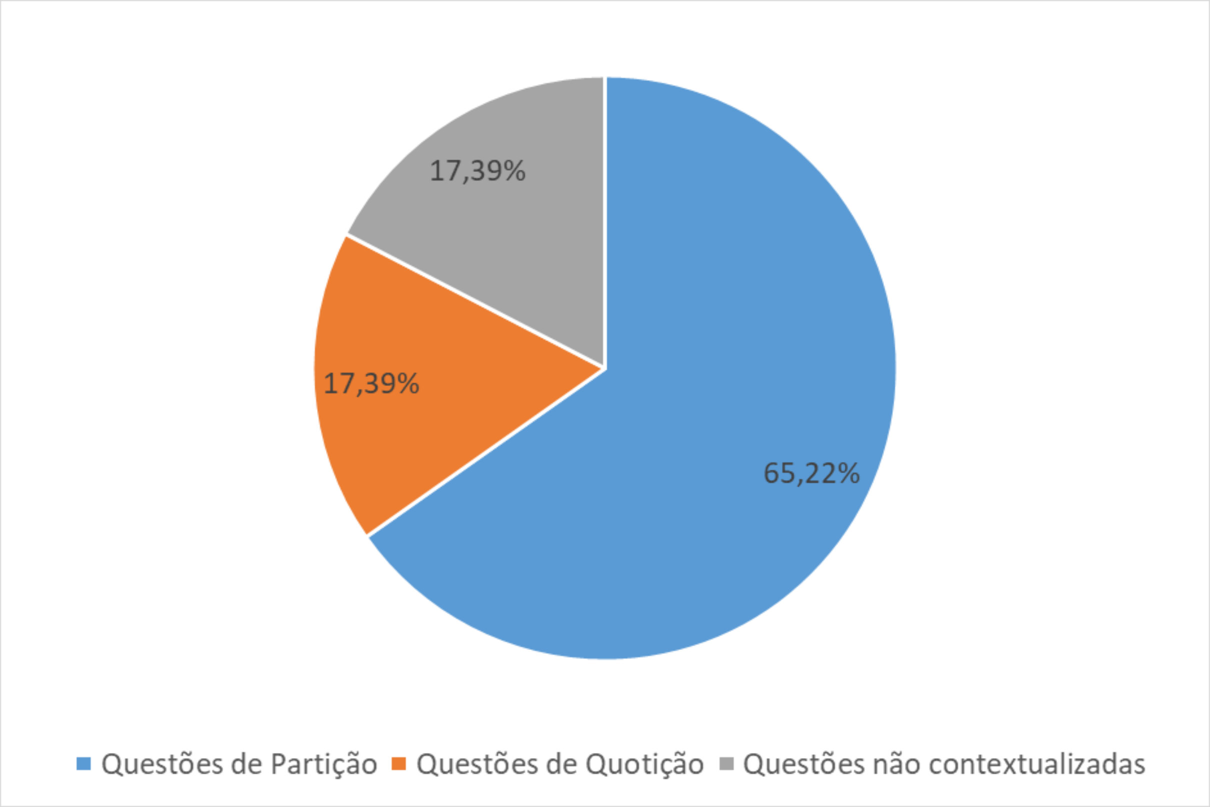
Em uma divisão, se o dividendo for 73 e o divisor for 2, qual será o quociente? E o resto?

Fonte: Acervo da pesquisa

Com relação a essa questão notamos o trabalho com os termos da divisão frequentes nas aulas de P5. Vale frisar ainda que tal questão visa a divisão de 73 por 2, a qual o quociente é 36 e o resto é 1, ou seja, refere-se a uma divisão não exata em que uma das respostas é o quociente e a outra é o resto.

Como forma de melhor evidenciar os percentuais das questões de partição e quotição trabalhadas por P5 em sala de aula mostramos o gráfico abaixo.

Gráfico 5 – Percentuais de questões trabalhadas por P5



Fonte: Acervo da pesquisa

Cabe frisar que os percentuais do Gráfico 5 foram calculados em cima das 23 questões, não sendo utilizadas as duas listas para tais resultados.

Analisando tais dados fica nítido uma predominância do significado partição (com 65,22% das questões) nas aulas de P5 e quando comparados com os dados da análise do LD do 5º ano do ensino fundamental (questões de partição 35,29%) verificamos um aumento de 29,93% na quantidade de questões de partição efetivamente trabalhadas em relação as previstas no LD. Isso decorre possivelmente também da não utilização por parte de P5 do LD e pôr o significado partição envolver a ideia de repartir igualmente, sendo mais presente nos livros didáticos segundo Selva (1998) e também como foi evidenciado na análise dos LD utilizados pelos sujeitos participantes desta pesquisa.

Observamos ainda a diminuição do percentual de questões de quotição (com 41,18% das questões no LD previstas para serem ensinadas e 17,39% das questões efetivamente ensinadas por P5 nas suas aulas) e questões não contextualizadas (25,53% das questões no LD previstas para serem ensinadas e 17,39% das questões efetivamente ensinadas por P5). Dessa maneira, verificamos que P5 promove mudanças no saber a ensinar (previsto no LD do 5º ano e nos documentos), isto é, o próprio ensina na sua maioria questões de partição, não seguindo o previsto para ser ensinado no LD, no qual havia um certo equilíbrio entre as questões de partição e quotição a serem trabalhadas em sala de aula o que pode acarretar prejuízos para aprendizagem de seus alunos.

O tratamento dado ao resto – observamos o trabalho com divisões exatas e não exatas, as quais P5 buscou em um primeiro momento ensinar as mesmas através desses dois exemplos das figuras abaixo.

Figura 31: Exemplo de divisão exata

DIVIDENDO ← 14 |2 → DIVISOR
(0) 7 → QUOCIENTE
↓
RESTO

Fonte: Acervo da pesquisa

Nesse exemplo P5, visa ensinar que tal divisão trata-se de uma divisão exata, pois “não sobra nada”, ou seja, o resto é zero. Evidenciamos ainda o destaque que P5 dá aos termos da divisão.

Figura 32: Exemplo de divisão não-exata

DIVIDENDO ← 13 |5 → DIVISOR
(3) 2 → QUOCIENTE
↓
RESTO

Já nesse outro exemplo salienta que se refere a uma divisão não exata, uma vez que “há sobra”, isto é, o resto é diferente de zero. Dessa maneira, observamos que P5 ensinou o saber previsto para ser ensinado no LD e nos documentos analisados em relação ao tratamento dado ao resto na operação divisão, pois ensinou de forma satisfatória as divisões exatas e não exatas (de acordo com o LD e os documentos analisados). Vale destacar ainda um maior trabalho do professor com divisões não exatas do que o previsto no LD, bem como o não tratamento dado ao resto na operação divisão, uma vez que esse está relacionado conforme já citado as estratégias utilizadas pelos alunos para lidar com o resto e o objetivo dessa parte da pesquisa era observar e analisar o saber efetivamente ensinado, ou seja, a prática do professor e não as estratégias dos alunos que estão relacionadas ao saber aprendido.

A interpretação dos resultados obtidos na divisão – verificamos o trabalho com questões em que a solução é o quociente (exemplos, imagens 17,18 e 19) e questões em que a solução é o resto (exemplo, imagem 19). Vale frisar que das 23 questões trabalhadas em sala de aula por P5, em 22 questões a solução era o quociente e em 5 questões a solução era o resto. Cabe ressaltar que em quatro dessas questões eram perguntadas as duas soluções (quociente e resto, conforme a imagem 19).

Assim, observamos que P5 trabalhou com questões nas quais a solução é o quociente (conforme previsto para ser ensinado) e também com questões em que a solução é o resto (não previsto no LD do 5º ano). Dessa maneira, constamos que P5 trabalha o saber previsto para ser ensinado e vai além do que previa o LD, ensinando questões em que a solução é o resto ponto positivo na sua prática.

6.4.3 Professor do 6º ano

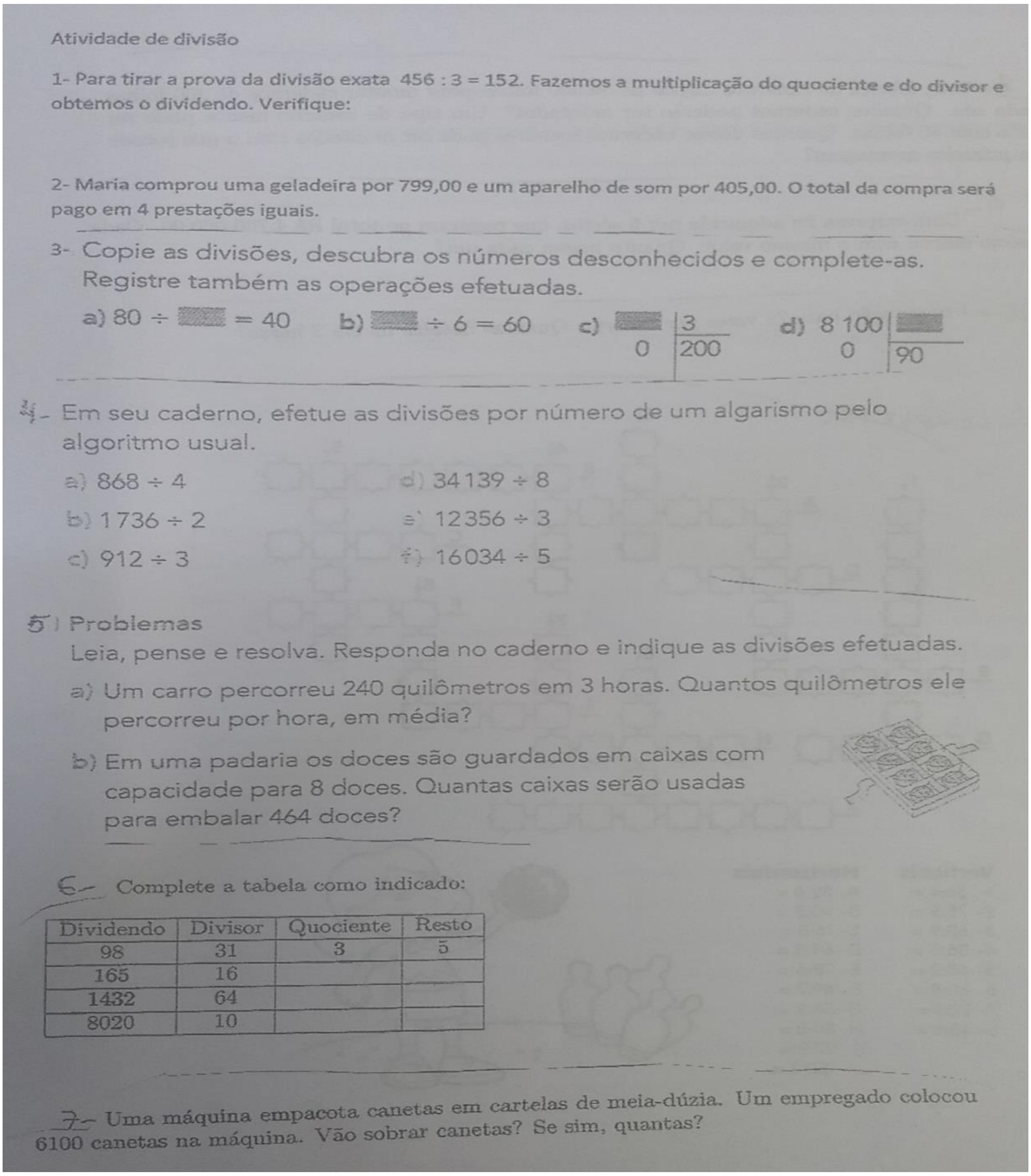
O período de observação das aulas de P6 foram 5 dias, totalizando 13 aulas observadas de 50 minutos cada. Nesse tempo P6 trabalhou 3 listas de questões de divisões de números naturais elaboradas por ele mesmo, com a ajuda da internet, num total de 29 questões. Tais listas eram trabalhadas uma por dia de observação e corrigidas coletivamente no mesmo dia ou no dia seguinte de observação, quando não dava tempo de corrigir todas as questões, isto é, corrigidas com a ida dos alunos para resolver no quadro. Além disso, duas dessas listas foram levadas xerocadas e uma copiada no quadro.

Vale destacar que tal professor tinha dito na entrevista que dependendo do nível da turma só revisava a operação divisão com seus alunos.

Com relação ao ensino da operação divisão, P6 iniciou entregando uma lista de questões (com 11 questões) para seus alunos, buscando com já havia dito revisar tal operação com os mesmos, bem como ver o nível de conhecimento deles. Cabe ressaltar que a dinâmica das suas aulas consistia na entrega de listas ou escrevia no quadro atividades de divisão, seguidas da correção com a participação dos seus alunos no quadro, ou seja, chamava os próprios para responder as atividades no quadro, quando um aluno não conseguia chamava outro e se ficasse alguma dúvida P6 a explicava. Vale destacar ainda que P6 não utilizava o LD do 6º ano do ensino fundamental adotado pela escola e que deveria ser utilizado por ele.

A seguir mostramos a primeira lista de questões e algumas resoluções dos alunos.

Imagem 20: Primeira parte da lista de questões



Atividade de divisão

1- Para tirar a prova da divisão exata 456 : 3 = 152. Fazemos a multiplicação do quociente e do divisor e obtemos o dividendo. Verifique:

2- Maria comprou uma geladeira por 799,00 e um aparelho de som por 405,00. O total da compra será pago em 4 prestações iguais.

3- Copie as divisões, descubra os números desconhecidos e complete-as. Registre também as operações efetuadas.

a) 80 ÷ ____ = 40 b) ____ ÷ 6 = 60 c) ____ | 3 ; 0 | 200 d) 8 100 | ____ ; 0 | 90

4- Em seu caderno, efetue as divisões por número de um algarismo pelo algoritmo usual.

a) 868 ÷ 4
b) 1 736 ÷ 2
c) 912 ÷ 3
d) 34 139 ÷ 8
e) 12 356 ÷ 3
f) 16 034 ÷ 5

5) Problemas

Leia, pense e resolva. Responda no caderno e indique as divisões efetuadas.

a) Um carro percorreu 240 quilômetros em 3 horas. Quantos quilômetros ele percorreu por hora, em média?

b) Em uma padaria os doces são guardados em caixas com capacidade para 8 doces. Quantas caixas serão usadas para embalar 464 doces?

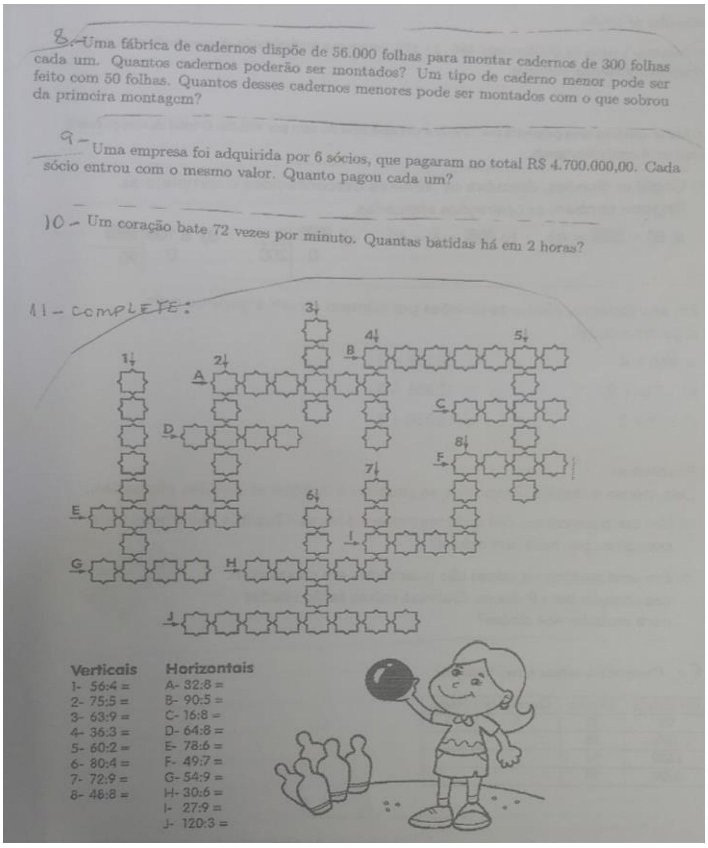
6- Complete a tabela como indicado:

Dividendo	Divisor	Quociente	Resto
98	31	3	5
165	16		
1432	64		
8020	10		

7- Uma máquina empacota canetas em cartelas de meia-dúzia. Um empregado colocou 6100 canetas na máquina. Vão sobrar canetas? Se sim, quantas?

Fonte: Acervo da pesquisa

Imagem 21: Segunda parte da lista de questões



8 - Uma fábrica de cadernos dispõe de 56.000 folhas para montar cadernos de 300 folhas cada um. Quantos cadernos poderão ser montados? Um tipo de caderno menor pode ser feito com 50 folhas. Quantos desses cadernos menores pode ser montados com o que sobrou da primeira montagem?

9 - Uma empresa foi adquirida por 6 sócios, que pagaram no total R$ 4.700.000,00. Cada sócio entrou com o mesmo valor. Quanto pagou cada um?

10 - Um coração bate 72 vezes por minuto. Quantas batidas há em 2 horas?

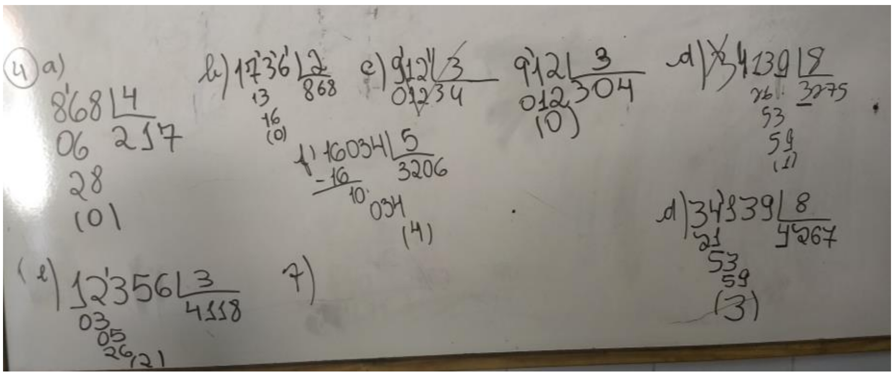
11 - COMPLETE:

Verticais	Horizontais
1- 56:4 =	A- 32:8 =
2- 75:5 =	B- 90:5 =
3- 63:9 =	C- 16:8 =
4- 36:3 =	D- 64:8 =
5- 60:2 =	E- 78:6 =
6- 80:4 =	F- 49:7 =
7- 72:9 =	G- 54:9 =
8- 48:8 =	H- 30:6 =
	I- 27:9 =
	J- 120:3 =

Fonte: Acervo da pesquisa

Nessa lista podemos observar o trabalho com questões de partição (exemplo questão 2 da lista), questões de quotição (exemplo questão 5 item b), questões não contextualizadas (exemplo questão 3), questões de divisões exatas (exemplo questão 5 item a), questões de divisão não exata (exemplo questão 8), questões em que o resultado é o quociente (exemplo questão 9) e questões em que o resto é resultado (exemplo questão 7). Verificamos ainda o trabalho com os termos da operação divisão (exemplo questão 6), ou seja, percebemos que P6 buscou realmente revisar a operação de divisão com seus alunos.

Imagem 22: Algumas resoluções dos alunos



Fonte: Acervo da pesquisa

Nessas resoluções verificamos a utilização por parte dos alunos do algoritmo euclidiano breve, ensinado por P6 em suas aulas. É importante destacar que muitos alunos apresentaram dificuldades na letra “c” da quarta questão. Tal dificuldade se concentrava ao baixar um número (no caso, o número 1) e ele não dar para dividir pelo divisor 3, como podemos ver na imagem acima, ou seja, eles não colocavam zero no quociente ao baixar o outro número (no caso, o número 2) encontrando como resultado 34 ao invés de 304.

Diante disso, P6 explica uma regrinha já apontada pelos professores P4 e P5, a qual mostramos abaixo.

I. “Quando baixamos um número e ele não dá para dividir colocamos zero no quociente”.

Tal regra, conforme já explicamos, trata-se de uma criação didática que visa a facilitar a aquisição do saber. Contudo, a compreensão da mesma não garante a compreensão dos conhecimentos matemáticos que estão por trás dela (exemplos, conhecimento do sistema decimal e valor posicional), ou seja, tal regra acaba deformando o saber previsto para ser ensinado em sala de aula e pode acarretar prejuízos para com a aprendizagem de seus alunos com relação a operação de divisão de números naturais.

Ainda com relação às aulas de P6 notamos que o mesmo distribuía material dourado para os alunos que apresentavam mais dificuldades com a operação divisão. Com isso buscava que a utilização desse material pudesse apoiar os discentes na resolução das questões. A seguir mostramos uma imagem de um aluno realizando divisões com o apoio do material dourado.

Imagem 23: Aluno realizando divisões com o apoio do material dourado

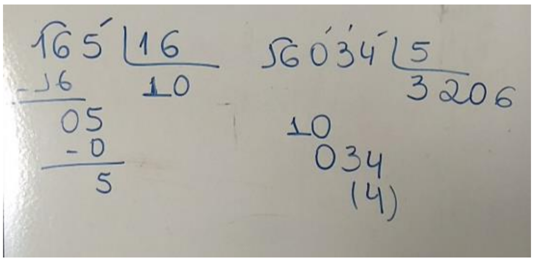
Fonte: Acervo da pesquisa

Esse aluno busca resolver as questões propostas, utilizando o esquema da distribuição equitativa, por exemplo, na divisão de 45 por 5, ele vai distribuindo 45 cubinhos por 5, um cubinho para cada, até que não tenha mais cubinhos para distribuir. Dessa maneira, subentendemos que P6 entende que com o tempo ele vai deixar de usar tal material e responderá as questões com o uso do algoritmo euclidiano breve, assim como outros alunos da turma.

A seguir discutiremos sobre as categorias de análise propostas na presente pesquisa e previstas nos documentos analisados e no livro didático do 6º ano do ensino fundamental.

Os diferentes procedimentos de cálculos – verificamos o trabalho com os algoritmos euclidiano longo e breve nas aulas de P6. A seguir na imagem abaixo evidenciamos o ensino dos dois algoritmos pelo professor.

Imagem 24: Ensino dos algoritmos euclidiano longo e breve por P6



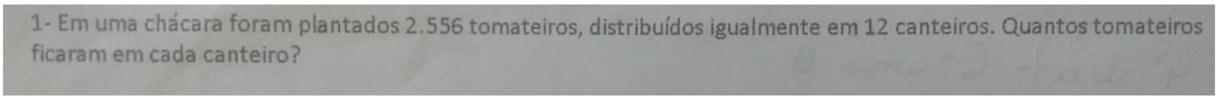
Fonte: Acervo da pesquisa

Na imagem acima observamos a resolução de dois exemplos de duas divisões por P6, uma utilizando o algoritmo euclidiano longo (a divisão de 165 por 16), em que vemos a utilização da regrinha já abordada acima (ao baixar o 5 não dá para dividir pelo divisor 16, então coloca-se zero no quociente) e outra (a divisão de 16034 por 5) utilizando o algoritmo euclidiano breve, no qual também há o emprego da regrinha (ao baixar o 3 e não dá para dividir pelo divisor 5). Assim, percebemos que P6 visa mostrar ou mesmo revisar os dois procedimentos para resolver as questões de divisões propostas em suas aulas.

Desse modo evidenciamos lacunas no saber ensinado em relação ao saber a ensinar previsto nos documentos e no LD do 6º ano do ensino fundamental, tendo em vista que não observamos o trabalho com o procedimento de cálculo arredondamento previsto no LD do 6º e nos documentos analisados. É importante frisar o trabalho com o algoritmo euclidiano breve não previsto para ser ensinado de acordo com o LD do 6º ano analisado.

Os significados da divisão – foram trabalhadas 29 questões, conforme já apontamos anteriormente. Dessas questões observamos que 13 questões envolviam o significado da divisão partição, 8 questões o significado quotição e 8 questões que se encaixam na categoria de questões não contextualizadas. A seguir mostramos exemplos dessas questões trabalhadas nas aulas de P6.

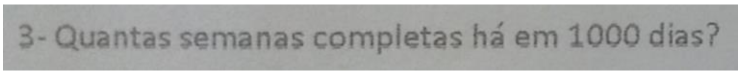
Imagem 25: Questão que envolve o significado da divisão partição


1- Em uma chácara foram plantados 2.556 tomateiros, distribuídos igualmente em 12 canteiros. Quantos tomateiros ficaram em cada canteiro?

Fonte: Acervo da pesquisa

Essa questão trabalha o significado da divisão partição e busca-se a realização da divisão de 2556 por 12, a qual o quociente é 213 e o resto é zero, isto é, a resposta da questão é 213 tomateiros. Vale frisar ainda que se trata de uma divisão exata em que o quociente é o resultado da questão.

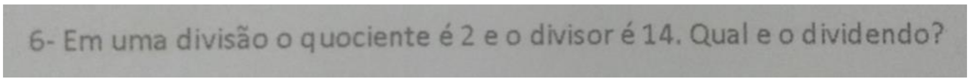
Imagem 26: Questão que envolve o significado da divisão quotição


3- Quantas semanas completas há em 1000 dias?

Fonte: Acervo da pesquisa

Tal questão apesar de não explicitar quantos dias tem uma semana trabalha-se o significado quotição, pois temos o total de dias (1000 dias) e de forma implícita a quantidade de dias em uma semana (7 dias), devendo-se calcular a quantidade de semanas. Assim, temos que quociente é 142 e o resto é 6, ou seja, a resposta da questão é 142 semanas. É importante destacar ainda que se trata de uma divisão não exata em o quociente é a resposta da questão.

Imagem 27: Questão não contextualizada

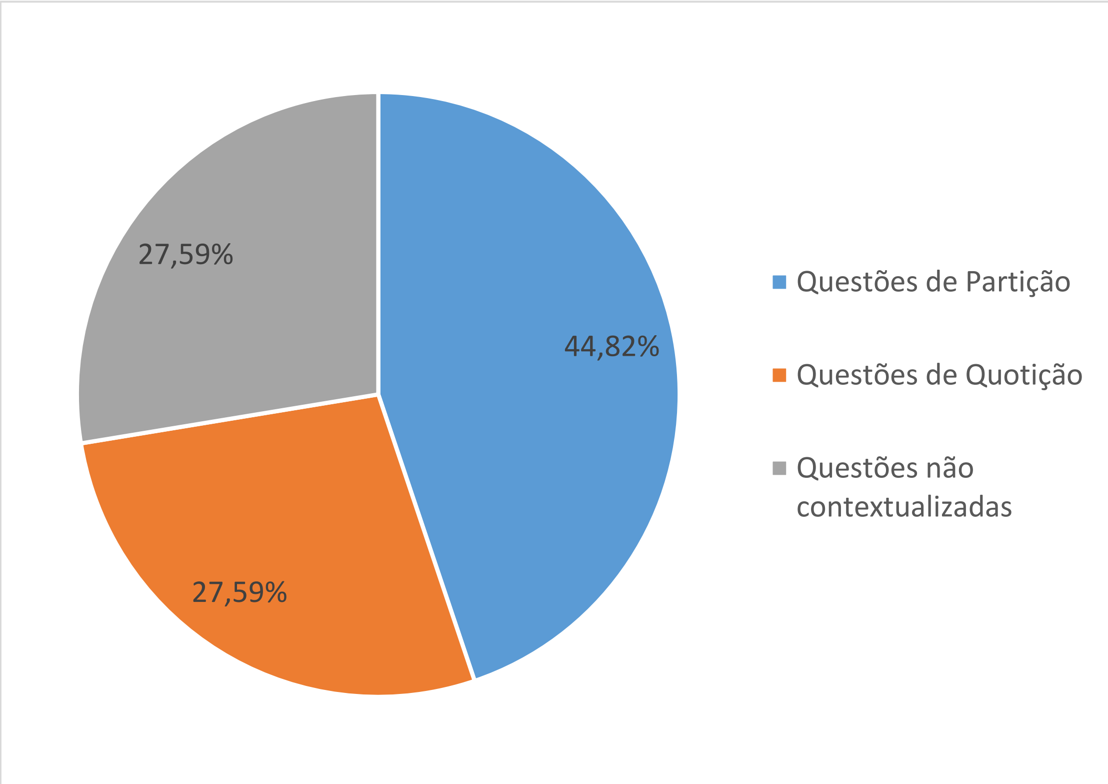

6- Em uma divisão o quociente é 2 e o divisor é 14. Qual e o dividendo?

Fonte: Acervo da pesquisa

Essa questão se encaixa na categoria de questão não contextualizada, pois não temos nenhum contexto, apenas temos o quociente 2 e o divisor 14 e quer saber o dividendo. É importante comentar que para resolver essa questão temos que usar a ideia da relação fundamental da divisão ($D = d \cdot q + r$), na qual para encontrar o dividendo multiplicamos o divisor 14 pelo quociente 2, não precisamos somar com o resto, pois o mesmo é zero. Dessa maneira, temos que o dividendo é igual a 28. Trata-se de uma divisão exata em que o dividendo é a resposta da questão.

A fim de melhor evidenciar os percentuais das questões de partição e quotição trabalhadas por P6 em sala de aula mostramos o gráfico a seguir.

Gráfico 6 – Percentuais de questões trabalhadas por P6



Fonte: Acervo da pesquisa

Ao analisar tais dados fica evidente uma predominância do significado partição (com 44,82% das questões) nas aulas de P6 e quando comparados com os dados da análise do LD do 6º ano do ensino fundamental (questões de partição 61,11%) verificamos uma diminuição de 16,29% na quantidade questões de partição efetivamente trabalhadas em relação as previstas no LD.

Observamos ainda um aumento do percentual de questões de quotição (com 16,67% das questões no LD previstas para serem ensinadas e 27,59% das questões efetivamente ensinadas por P6 nas suas aulas) e questões não contextualizadas (22,22% das questões no LD previstas para serem ensinadas e 27,59% das questões efetivamente ensinadas por P5). Assim, percebemos que apesar de P6 ter ensinado de forma mais igualitária os significados da divisão partição e quotição do que o previsto no LD, o mesmo ainda prioriza o significado partição em suas aulas.

Dessa maneira, deixa lacunas no saber previsto para ser ensinado, uma vez que, os dois significados merecem ser trabalhados igualmente em sala de aula.

O tratamento dado ao resto – verificamos o trabalho com divisões exatas e não exatas. Nas divisões exatas P6 buscou trabalhar através das questões de suas listas (exemplo questão 5 item a / imagem 20) não respondendo nenhuma, apenas mandando os alunos responderem e depois deles resolverem, chamava-os para resolver no quadro e a partir das resoluções dos mesmos explicava como procederam na resolução de tais questões, ou seja, P6 subtendia possivelmente que eles sabiam já divisões exatas. Enquanto nas divisões não exatas o próprio P6 respondeu os dois exemplos da imagem 24, visando mostrar os dois algoritmos já mencionados, bem como revisando com seus alunos divisões em que resto é diferente de zero, isto é, divisões não exatas. Dessa maneira, P6 faz o caminho inverso do que defende Rosa dos Santos (2015), isto é, mostra como resolver sem colocar os alunos na condição de pesquisador restringindo a capacidade de pensar dos mesmos.

Assim, verificamos que P6 ensinou o saber previsto para ser ensinado no LD e nos documentos analisados em se tratando do tratamento dado ao resto na operação divisão, cometendo alguns equívocos ao restringir a capacidade de pensar de seus alunos.

É importante mencionar ainda que não houve tratamento dado ao resto, pois essa análise como já destacamos decorre das estratégias utilizadas pelos alunos.

A interpretação dos resultados obtidos na divisão – observamos o trabalho com questões em que a solução é o quociente (exemplos imagens 25 e 26) e questões em que a solução é o resto (exemplo questão 7 / imagem 20). Nessa questão percebemos que se trata da divisão de 6100 canetas em pacotes com 6 e cujo o objetivo é saber se sobra canetas e se sobra quantas são. Assim, temos que quociente é 1016 canetas e o resto que é a resposta da questão 4 canetas. Vale destacar que apenas duas das 29 questões trabalhadas se tratavam de questões em que o resto é a solução das mesmas.

Dessa forma, notamos que P6 trabalha o saber previsto para ser ensinado de acordo com o LD e os documentos analisados. Contudo, constatamos o pouquíssimo trabalho com questões em que o resto é a solução da questão.

6.4.4 Síntese geral das análises das aulas observadas

No Quadro 7 abaixo apresentamos uma síntese geral dos principais aspectos relacionados ao processo de transposição didática interna das aulas observadas de cada professor participante da pesquisa.

Quadro 7: Síntese geral dos principais aspectos relacionados ao processo de transposição didática interna das aulas observadas de cada professor participante da pesquisa

Categorias de análise	**Lacunas, mudanças ou deformações no saber a ensinar**		
	P4	**P5**	**P6**
Os diferentes procedimentos de cálculos	Uso de “regrinhas” com intuito de facilitar o processo de aquisição do conhecimento: I -“Só pegamos um outro número se o número que pegamos for menor que o divisor, ou seja, não der para dividir”. II – “Ao baixar um número e ele não der para dividir pelo divisor para baixarmos outro número temos que colocar um zero no quociente”. Não trabalho com as estimativas, os arredondamentos e o algoritmo americano (também conhecido como método das estimativas).	Uso de “regrinhas” com intuito de facilitar o processo de aquisição do conhecimento: “Quando baixar um número e não dá para dividir colocamos zero no quociente”. “Se tenho dois números no divisor tenho que pegar dois números no dividendo”. “Quando o primeiro termo do dividendo não dá para dividir temos que juntar com o outro”. Não trabalho com os procedimentos de cálculos mental e o algoritmo americano.	Uso de “regrinhas” com intuito de facilitar o processo de aquisição do conhecimento: “Quando baixamos um número e ele dá não para dividir colocamos zero no quociente”. Não trabalho com o procedimento de cálculo arredondamento.
Os significados da divisão	Pouco trabalho com o significado da divisão quotição.	Pouco trabalho com o significado da divisão quotição.	Prioriza o significado partição em suas aulas.
O tratamento dado ao resto	Ensino do saber previsto para ser ensinado, pois ensinou de forma satisfatória as divisões exatas e não exatas,	Ensino do saber previsto para ser ensinado, pois ensinou de forma satisfatória as	Ensino do saber previsto para ser ensinado no LD e nos documentos analisados em se

	cometendo equívocos apenas ao não colocar seus alunos na posição de pesquisador.	divisões exatas e não exatas (de acordo com previsto no LD e nos documentos analisados).	tratando do tratamento dado ao resto na operação divisão, cometendo alguns equívocos ao restringir a capacidade de pensar de seus alunos.
A interpretação dos resultados obtidos na divisão	Pouco ensino de questões em que a solução é o resto; Não ensino de questões em que a solução é o quociente mais um.	Ensino do saber previsto para ser ensinado, pois ensinou de forma satisfatória questões de divisões em que a solução é quociente e questões em que a solução é o resto.	Pouco trabalho com questões em que o resto é a solução da questão.

Fonte: Acervo da pesquisa

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa surge a partir de inquietações e indagações decorrentes da experiência docente ao lecionar a disciplina de Matemática, no 8° e no 9° ano do Ensino Fundamental. Enquanto professor, vivemos situações que nos fazem refletir sobre as dificuldades vivenciadas por nossos alunos no processo de aprendizagem.

Entre as dificuldades enfrentadas pelos estudantes na sala de aula, uma nos chamou a atenção, e estava relacionada à operação divisão, ou seja, as dificuldades enfrentadas pelos alunos no trabalho com a operação divisão. Diante disso, a nossa questão de origem tomou a seguinte forma: *Como a transposição didática interna ocorre no ensino da operação de divisão de números naturais, no 4°, 5° e 6° anos do Ensino Fundamental?*

A investigação, que ora concluímos, teve como principal objetivo analisar como é realizada a Transposição Didática interna no processo de ensino da operação de divisão de números naturais, no 4°,5° e 6° anos do Ensino Fundamental.

A fim de atingir o objetivo proposto, tivemos como foco de análise o saber previsto nos documentos legais e livros didáticos e o saber efetivamente ensinado de professores do 4°, 5° e 6° anos, isto é, professores pedagogos e licenciados em matemática, acompanhando todo o processo de ensino da operação divisão de uma instituição de ensino, da rede municipal da cidade Águas Belas-PE, localizada no Agreste Meridional.

Como intuito de verificar o saber previsto para ser ensinado, analisamos os documentos legais (PCN/1997,1998; BCC/ PE 2008; PCPE, 2012 e BNCC, 2017), buscando averiguar as orientações para ensino da operação divisão, bem com a partir dessas definimos as categorias de análise da presente pesquisa, as quais foram: os diferentes procedimentos de cálculos (mental, escrito, exato, aproximado, por estimativas, arredondamentos e utilizando os algoritmos convencionais), os significados da divisão (partição e quotição), bem como o tratamento dado ao resto e a interpretação dos resultados obtidos na operação divisão.

Em seguida realizamos uma entrevista com os sujeitos participantes da pesquisa com os seguintes objetivos: mapear quanto tempo seria o ideal para o ensino da divisão de números naturais, sob o ponto de vista do professor; definir quanto tempo de observação seria necessário para cada um dos professores participantes; e identificar os livros didáticos e/ou outros materiais que os professores participantes da pesquisa utilizam para organizar suas aulas.

Dessa maneira, verificamos o tempo que seria o ideal, na opinião dos professores, para o ensino da operação de divisão de números naturais em suas turmas. A definição desse tempo leva em consideração as particularidades de cada turma, bem como pudemos estipular um tempo aproximado para a observação das aulas de cada professor que foram os seguintes: P4 (15 dias); P5 (20 dias); e P6 (6 aulas). Totalizando um período aproximado de 37 dias de observação de aulas. Além disso, identificamos os livros didáticos, isto é, o saber escolar e os outros materiais utilizados pelos professores participantes da pesquisa na organização de suas aulas. Dessa maneira, os livros didáticos apontados foram: Porta Aberta (4° e 5°anos) da FTD dos autores Marília Ramos Centurión, Júnia La Scala Texeira e Arnaldo Bento Rodrigues; e Vontade de Saber (6° ano) da FTD dos autores Joamir Roberto Souza e Patrícia Rosana Moreno Pataro. Os outros materiais citados pelos professores foram: jogos matemáticos, material dourado, atividades pesquisadas na internet e situações-problema.

A partir dessa entrevista pudemos ainda verificar que o principal material apontado pelos professores foi o livro didático (identificamos que cada professor citou apenas um livro, ou seja, o livro adotado pela escola e que deveria ser utilizado por ele e pelos alunos). Tal situação corrobora com Chevallard (1991) que evidencia que o livro didático tem se mostrado como uma espécie de "texto do saber".

Dando continuidade à pesquisa, analisamos os livros didáticos apontados pelos professores, buscando observar o saber previsto para ser ensinado nos mesmos, a fim de poder comparar o saber previsto para ser ensinado (documentos legais analisados e livros didáticos) e o saber efetivamente ensinado (aulas dos professores de divisão). Assim, tal análise foi realizada levando em consideração as categorias previstas na pesquisa.

Dessa análise verificamos o saber previsto para ser ensinado nos LD em cada um dos anos de ensino da operação divisão de números naturais, que se centram em:

- ✓ 4º ano do ensino fundamental - trabalho com estratégias pessoais, cálculo mental, estimativas e arredondamentos, os algoritmos euclidianos (pelo processo longo) e americano (também conhecido como método das estimativas); os significados da divisão partição (com a ideia de repartir igualmente) e quotição (com a ideia de medir); trabalho com divisões exatas e não exatas; e trabalho com questões em que a solução é o quociente, o quociente mais um e o resto.
- ✓ 5º ano do ensino fundamental - estratégias pessoais, cálculo mental e os algoritmos euclidiano (pelo processo breve) e americano (também conhecido como método das estimativas ou subtração sucessivas); os significados da divisão partição e quotição; o trabalho com divisões exatas e não exatas; e o trabalho com problemas em que a solução é o quociente.
- ✓ 6º ano do ensino fundamental - trabalho com arredondamento e o algoritmo euclidiano (pelo processo longo); trabalho com ideia de partição e a ideia de quotição; divisões exatas e não-exatas; e questões em que a solução é o quociente e o resto.

Vale destacar ainda uma predominância de questões que envolvem o significado partição no 4º e 6º anos, bem como um certo equilíbrio nas questões de partição e quotição no 5º ano. Além disso, observamos uma baixa quantidades de questões de divisão no LD do 5º e 6º anos.

Ao observar e analisar as aulas dos professores participantes, fazendo a comparação entre o saber previsto para ser ensinado (documentos legais analisados e livros didáticos) e o saber efetivamente ensinado (aulas dos professores), verificamos mudanças, deformações e lacunas no saber efetivamente ensinado em relação ao saber a ensinar. Essas se concentraram basicamente em:

- ✓ 4º ano do ensino fundamental - uso de "regrinhas" com intuito de facilitar o processo de aquisição do conhecimento (criações didáticas); não trabalho com as estimativas, os arredondamentos e o algoritmo americano (também conhecido como método das estimativas); pouco trabalho com o significado da divisão quotição; pouco ensino de questões em que a solução é o resto; e não ensino de questões em que a solução é o quociente mais um.
- ✓ 5º ano do ensino fundamental - uso de "regrinhas" com intuito de facilitar o processo de aquisição do conhecimento (criações didáticas); não trabalho com os procedimentos de cálculos mental e o algoritmo americano; e pouco trabalho com o significado da divisão quotição.
- ✓ 6º ano do ensino fundamental - uso de "regrinhas" com intuito de facilitar o processo de aquisição do conhecimento (criações didáticas); não trabalho com o procedimento de cálculo arredondamento; prioriza o significado partição em suas aulas; e pouco trabalho com questões em que o resto é a solução da questão

Assim, constatamos que nenhum dos três professores ensinou o saber previsto para ser ensinado nos documentos legais analisados e livros didáticos, ou seja, transformaram o saber a ensinar em saber ensinado, através de mudanças, deformações e deixando lacunas no saber previsto para ser ensinado, o que pode acarretar dificuldades nos alunos no processo de aprendizado da operação divisão de números naturais.

Outra informação importante decorrente da pesquisa é a não utilização do LD pelos três professores, isto é, levavam fichas de atividades prontas ou escreviam no quadro, fato esse que pode ter contribuído para as mudanças, deformações e lacunas evidenciadas. É importante salientar que todos falaram na entrevista que utilizavam o LD, ou seja, todos tinham um saber escolar definido que deveria auxiliar na preparação de suas aulas.

Também observamos que nenhum dos três utilizou a calculadora no processo de ensino da operação divisão, o que é previsto nos documentos legais analisados (PCN/1997, 1998; BCC/ PE, 2008; PCPE, 2012).

Diante do exposto, concluímos que o processo de Transposição Didática Interna decorrente da abordagem dos três professores participantes em relação ao saber a ensinar, a operação divisão de número naturais, ocorreu de forma diferente do que estava previsto nos documentos legais e livros didáticos, o que pode acarretar prejuízos para a aprendizagem de seus alunos.

Ao terminar esta pesquisa, damos conta que muitas outras questões sobre a presente temática, ainda precisam ser respondidas, como exemplo: Qual o saber aprendido após o ensino da operação divisão de números naturais? Por que os professores não utilizam o livro didático? Será que a relação entre o saber a ser ensinado e o saber a ensinar tem a ver com o conteúdo a ser ensinado? Como ocorre o processo de transposição didática interna referente á operação divisão de números decimais? Qual o saber aprendido após o ensino da operação divisão com números decimais?

Essas e outras questões, que surgem a partir desta pesquisa, ficam como indicações para futuras investigações, a fim de, cada vez mais, aproximarmos de uma aprendizagem mais eficiente e significativa das operações fundamentais.

8 REFERÊNCIAS

ALVES, E. L. **Menos com menos é menos ou é mais? Resolução de problemas de multiplicação e divisão de números inteiros por alunos do ensino regular e da educação de jovens e adultos.** Dissertação (Mestrado em Educação) – UFPE – PE, Recife, 2012.

ARAUJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França**: estudo sobre o ensino de equações do 1° grau à luz da Teoria Antropológica do Didático. Universidade Federal de Pernambuco. CE. Educação. Tese de doutoramento. Recife, 2009.

BENVENUTTI, L. C. **A operação de divisão**: um estudo com alunos de 5ª série. 2008. 61f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Vale do Itajaí, Santa Catarina, Itajaí, 2008.

BESSA DE MENEZES, M. **Investigando o Processo de Transposição Didática Interna: o caso dos quadriláteros.** Dissertação de Mestrado não publicada. Programa de Pós-graduação em Educação – Mestrado em Educação – UFPE-PE, 2004.

BORBA, Rute; SELVA, Ana. Alunos de 3ª e 5ª séries resolvendo problemas de divisão com resto diferente de zero: o efeito de representações simbólicas, significados e escolarização. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL

DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO (ANPEd), 29., 2006, Caxambu. **Anais**… Caxambu, 2006.

BORDET, David. Transposition didactique: une tentative d'éclaircissement. In: **DEES**, nº110. CNDP, 1997.

BOSCH, M. C.; GASCON, J. 25 años de Transposición Didáctica. In: RUIZ-HIGUERAS, L.(Org.). **Societad, Escuela y matemáticas, Aportaciones de la Teoria Antropológica de lo Didáctico.** Espana. Ed. Universidad de Jaen. 2007. p. 385-406.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

______. **História da matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide. – 2. ed. – São Paulo: Edgard Blucher, 2003.

______. **História da matemática.** Revista por Uta C. Merzbach; tradução Helena Castro. – 3. Ed – São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. **Guia de livros didáticos: PNLD Campo 2013**: Guia de Livros. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão, 2012. 57 p.

BRASIL. **Guia de livros didáticos: PNLD 2016**: Alfabetização Matemática e Matemática:
ensino fundamental anos iniciais. – Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2015. 322 p.: il.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2017: matemática** – Ensino fundamental anos finais / Ministério Educação – Secretaria de Educação Básica SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2016.155 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: **Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1998.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Curricular Comum:** BNCC 2016, 3ª versão revista. Brasília, 2017.

BRITO MENEZES, A.P.A.. **Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação á Álgebra na 6ª Série do Ensino Fundamental.** Tese de Doutorado não publicada, UFPE, 2006.

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. O professor e o tempo. In: **Revista Tópicos Educacionais.** v.15. nº 1/2. Recife: Universitária/UFPE, 1997.

CÂMARA DOS SANTOS, M. O professor e o tempo. **Tópicos Educacionais.** V.15, n° 1/2, p. 105-116. Recife, 1997.

CÂMARA, Marcelo. Algumas concepções sobre o ensino e a aprendizagem em matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, p. 38-46, 2002.

CHEVALLARD, Y. **La Transposition Didactique:** Du Savoir Savant au Savoir Ensigné. Grenoble, La pensée Sauvage. 1986.

________________ . **La Transposicíon Didáctica: del Saber Sábio al Saber Enseñado.** Buenos Aires: Aique, 1991.

________________ . Concepts fondamentaux de la didactique: perspective apportées par une approche anthropologique. In:**Recherches em Didactique de Mathématique**. v.12, p.73 – 112, 1992.

________________ . Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l' approche anthropologique. In: **Recherches em didactique des mathèmatique**, Grenoble, Éditions La Pensée Sauvage, v.19.2 n, 56, p. 221-265, 1999.

CORREA, M.E. e GALHARDI, M. (1991). **Como é fácil Matemática**. São Paulo: Scipione.

CUNHA, M. Carolina. (1997). **As operações de Multiplicação e Divisão junto a alunos de 5ª e 7ª séries.** Dissertação de Mestrado, PUC, São Paulo.

DICKSON, L., BROWN, M. e GIBSON, O. (1984). **Children learning mathematics**. Londres: Cassel for the Schools Council.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**/ Howerd Eves; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 1995.

FERRARI, Fabricio; CECHINEL, Cristian. **Introdução a Algoritmos e Programação**. Bagé: Universidade Federal do Pampa, 2008.

FISCHBEIN, E., DERI, M. e MARINO, M. (1985). "The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division", **Jounal for Research in Mathematics Education** 16, pp. 3-17.

GIOVANNI, J.R. (1989). **A conquista da matemática**. São Paulo: FTD.

HENRY, M. **Didactique des Mathématiques: sensibilizations à la didactique em vue de la formation initiale dês ensignants de mathématiques.** Laboratoire de Mathématiques – IPEM, Besançon, 1991.

IMENES, M., JAKUBO e LELLIS (1992). **Matemática ao vivo**. São Paulo: Scipione.

JOSSE, E. **Analyse du discours des enseignanats**. Paris: Presses Universite-Paris VII, 1992.

LAUTERT, S. E SPINILLO, A. **Definindo a divisão e resolvendo problemas de divisão: as múltiplas facetas do conhecimento matemático**. In anais do I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática. Universidade Católica do Paraná: 61-79. 2001.

LIMA, R.R. de. **Campo multiplicativo**: estratégias de resoluções de problemas de divisão em alunos do 4° ano do Ensino Fundamental em escolas públicas de Maceió. 2012. 126f. Dissertação (Mestrado em ensino de ciências e matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2012.

LOPES, Antônio José. RODRIGUEZ, Joaquin Gimenez. **Metodologia para o ensino da aritmética: competência numérica no cotidiano**, volume único: livro do professor. São Paulo: FTD, 2009.

MATOS FILHO, M. A. S.; et al. A Transposição Didática em Chevallard: As Deformações/Transformações Sofridas pelo Conceito de Função em Sala de Aula. In: Congresso Nacional de Educação, 8, 2008, Curitiba. **Anais...**

MEIRELLES, M.L. (1993). **Construindo a matemática**. Belo Horizonte: Dimensão.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.138 p.

MORI, I. (1993). **Viver e aprender**. São Paulo: Saraiva.

MOREIRA, M. A. (2004). **Trabalho colaborativo e reflexão para o ensino da multiplicação e da divisão – um estudo com três professores do 1º ciclo do Ensino Básico.** Braga: Universidade do Minho (Dissertação de Mestrado).

NHONCANCE, Leandro. **O algoritmo da divisão: O "método americano" da divisão e os resultados obtidos com alunos da 2ª e 3ª séries do Ensino Médio.** 2006. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

OLIVEIRA, Luiz Affonso Guedes de. **Algoritmo e Lógica de Programação**. Natal (RN): Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2004.

PALUMBO, W.D. (1988). **Aprendendo matemática moderna**. São Paulo: Lisa.

PASSOS, L., FONSECA, A. e CHAVES, M. (1992). **Alegria de saber**. São Paulo: Scipione.

PASSOS, C. e SILVA, Z. (1992). **Eu gosto de matemática**. São Paulo: Nacional.

PEIXOTO, M.L. e OLIVEIRA, M.L. (1992). **Bom tempo: Matemática**. São Paulo: Moderna.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco:** matemática / Secretaria de Educação.- Recife : SE. 2008.

______. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco:** Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Recife, 2012.

RAVEL, L. **Des programmes à la classe:** étude de la transposition didactique interne. Exemple de l´arithmétique em Terminale S spécialité mathématique. Tese de doutorado em Didática da Matemática. Grenoble: Universidade Joseph Fourier. 2003.

ROSA DOS SANTOS,tad M. **A Transposição didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6ºano do ensino fundamental:** um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. 2015. 281f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências. Departamento de Educação. Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife: UFRPE, 2015.

SAIZ, Irma. Dividir com dificuldade ou dificuldade de dividir. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2001, p. 162-191.

SALVADOR, H. F. **Dividindo histórias e opiniões:** compartilhando e polemizando a operação de divisão. Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática. Universidade Severino Sombra. Vassouras, Rio de Janeiro, 2012.

SELVA, Ana; BORBA, Rute. O uso de diferentes representações na resolução de problemas de divisão inexata: analisando a contribuição da calculadora. **Boletim GEPEM**, n.47, jul./dez. 2005.

SELVA, Ana; BORBA, Rute; STEEDMAN, Lígia. Explorando a resolução de problemas de divisão com resto por crianças de 2ª e 3ª séries. VII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004. Recife. **Anais...**

SELVA, Ana Coelho. **Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão.** IN: SCHLIEMANN, Ana Lúcia e CARRAHER, David. *A compreensão de conceitos Aritméticos*. Editora Papirus, 1998.

SILVA, A. L. M. L. S. **A apropriação do conceito de divisão por alunos dos anos inicias do ensino fundamental**. 1972. 175f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, 2014.

SANTOS, JOSÉ. **Introdução à teoria dos números**. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

SOUZA, Kátia do Nascimento Venerando de. **As operações de multiplicação e divisão nas séries iniciais do Ensino Fundamental.** Disponível em <www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/ric/article/viewFile/272/258> Acesso em: 15 mar. 2015.

THEREZA, A. (1990). **Crescer em matemática**. São Paulo: FTD.

TOLEDO, M. **Didática da Matemática: como dois e dois: a construção da Matemática**. São Paulo: FTD, 1997.

USISKINJ, Zalman. **Paper-and-Pencil Algorithms in a Calculator-and-Computer Age.** In The Teaching and Learning of algorithms in School Mathematics, 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, editado por Margaret J. Kenney, Lorna J. Morrow, pp. 7 – 20. NCTM, Reston, Virginia.

VACONCELOS, Cheila Fracett Bezerra Silva de. **A (re)construção do conceito de dividir na formação de professores**: o uso do jogo como recurso metodológico.2009. 157f. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Universidade Federal de Alagoas, 2009.

VERGNAUD, Gérard. Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUNN. J. (Ed.). **Didáctica das Matemáticas**. v. 62. Horizontes Pedagógicos, Lisboa, 1996. p.155-191.

WALLEUER, A. **Reflexões sobre a construção da operação de divisão em crianças de 1ª e 2ª série de classes multisseriadas**. 2006. 205f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.