



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE DOUTORADO

CLOVIS LISBÔA DOS SANTOS JUNIOR

**GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO
PROFESSOR DE MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA À PRODUÇÃO DE
SIGNIFICADOS NO ESTUDO DE GEOMETRIA**

Recife- PE

2020

CLOVIS LISBÔA DOS SANTOS JUNIOR

**GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO
PROFESSOR DE MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA À PRODUÇÃO DE
SIGNIFICADOS NO ESTUDO DE GEOMETRIA**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Lícia de Souza Leão Maia

Recife- PE

2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Natália Nascimento, CRB-4/1743

- S237g Santos Júnior, Clóvis Lisboa dos.
Geometrias não euclidianas na formação inicial do professor de matemática: uma proposta à produção de significados no estudo de geometria. / Clóvis Lisboa dos Santos Júnior. – Recife, 2020. 239f.
- Orientadora: Lícia de Souza Leão Maia.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação, 2020.
Inclui Referências e Apêndices.
- 1.Geometria Euclidiana. 2.Professores- Formação. 3. Geometria - Estudo e Ensino. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Maia, Lícia de Souza Leão. (Orientadora). II. Título.
- 516 (23. ed.) UFPE (CE2020-037)

CLOVIS LISBÔA DOS SANTOS JUNIOR

**GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO
PROFESSOR DE MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA À PRODUÇÃO DE
SIGNIFICADOS NO ESTUDO DE GEOMETRIA**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 28/04/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Lícia de Souza Leão Maia (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Prof^a. Dr^a. Paula Moreira Baltar Bellemain (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Prof^a. Dr^a. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Prof^a. Dr^a. Anna Paula de Avelar Brito (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Prof. Dr. Evanilson Landim Alves (Examinador Externo)
Universidade de Pernambuco – UPE

DEDICATÓRIA

A Enzo: pela alegria de tê-lo como filho. Em seu sorriso encontro motivação para enfrentar os obstáculos da vida.

À minha esposa Patrícia: a quem eu amo e que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos.

Aos meus pais, irmãs e familiares: pelo apoio e compreensão nos momentos em que precisei me ausentar de seu convívio, para dedicar-me a este estudo.

AGRADECIMENTOS

À professora Dr^a. Lícia Maia, minha orientadora, pelo incentivo e apoio durante todo o processo de construção desse estudo, pelos diálogos, pelos ensinamentos, pela paciência, confiança e amizade.

Às professoras Dr^a. Paula Moreira Baltar Bellemain, Dr^a. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba, Dr^a. Giselle Costa de Sousa, Dr^a. Renata Lira dos Santos Aléssio, Dr^a. Anna Paula de Avelar Brito e prof. Dr. Evanilson Landim Alves pela disponibilidade e contribuições na banca de qualificação e na defesa desse estudo.

Aos professores e colegas do Programa EDUMATEC pelas trocas de conhecimentos e pelas experiências inesquecíveis.

À minha colega de trabalho e amiga professora Dr^a. Célia Barros Nunes, pelo incentivo e pelas importantes contribuições para a realização dessa pesquisa.

Ao professor Dr. Moysés Gonçalves Siqueira Filho pela amizade e pelos diálogos motivadores para o enfrentamento dessa caminhada.

Ao corpo técnico-administrativo da Secretaria do EDUMATEC pela dedicação e empenho em atender nossas demandas durante o processo.

Por último, mas não menos importante, eu quero agradecer à minha família e amigos pela paciência e afeto durante os anos que dediquei à construção do presente trabalho.

RESUMO

A presente pesquisa tem por propósito analisar o contexto do ensino e do estudo das Geometrias não Euclidianas no Brasil e a produção de significados de futuros professores de Matemática sobre esse tema. Dentro dessa ótica, identificamos os cursos de Licenciatura em Matemática que apresentam em suas propostas curriculares indícios do ensino de Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática onde realizamos um mapeamento por meio de amostra estratificada apresentada nas regiões do território brasileiro. Como resultado temos que, dos 372 cursos identificados e analisados, apenas 15,32% apresentaram disciplinas que abordam o estudo de Geometrias não Euclidianas como conteúdo específico para a formação do professor. O mapeamento indicou ainda que há pouco envolvimento do futuro professor com essas Geometrias contribuindo para que o licenciando construa sua relação com o espaço através de um único modelo geométrico – o euclidiano. Em outro momento da pesquisa, investigamos indícios que norteiam o ensino de Geometrias não Euclidianas na Educação Básica nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, nas Orientações Curriculares Estaduais e na Base Nacional Comum Curricular. As informações obtidas partindo do mapeamento efetuado e das orientações curriculares foram relevantes para a construção da proposta de intervenção, sendo essa desenvolvida com 16 discentes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia. Nesse contexto, foram então vivenciadas e exploradas situações didáticas envolvendo diferentes modelos geométricos. A Teoria Histórico-Cultural de Vygotsky, complementada pela Teoria da Atividade de Leontiev e a Atividade Orientadora de Ensino de Moura são os aportes teóricos que subsidiaram a investigação e as ações pedagógicas nessa etapa do estudo. Nessa perspectiva, apoiamos-nos nos pressupostos teórico-metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino como um desdobramento da perspectiva Histórico-Cultural, segundo a qual utilizamos como contexto para a negociação de significados entre os participantes. Para a construção dos dados obtidos nessa fase da pesquisa utilizamos os seguintes instrumentos: áudio gravações, questionário, Atividade de Ensino, diário de campo e relatórios individuais. O processo de internalização dos conceitos geométricos foi captado e analisado, utilizando-se como pressupostos duas categorias: o Conflito – da validade lógica à validade empírica; e a Ruptura – do espaço euclidiano para outros espaços, constituídas por meio das interações entre os participantes no Sistema de Atividade de Formação proposto. Os participantes ao estudarem modelos geométricos não euclidianos atribuíram significados diferenciados para o conceito de reta, paralelismo e soma de ângulos internos de um triângulo, ampliando assim, a compreensão desses conceitos quando constituídos no modelo geométrico euclidiano. Concluímos que o estudo de diferentes modelos geométricos na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino promove o desenvolvimento do pensamento teórico e prático do futuro professor de Matemática no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, em particular, das Geometrias não Euclidianas.

Palavras-chave: Geometrias não Euclidianas. Formação de professores. Teoria Histórico-Cultural. Atividade Orientadora de Ensino.

ABSTRACT

This research aims to analyze the context of teaching and studying non-Euclidean geometries in Brazil and the production of meanings of future mathematics teachers on this topic. Within this perspective, we identified the Licenciatura courses in Mathematics that present in their curricular proposals evidence of the teaching of non-Euclidean Geometries in the initial formation of the Mathematics teacher where we carried out a mapping by means of a stratified sample presented in the regions of the Brazilian territory. As a result, of the 372 courses identified and analyzed, only 15.32% presented subjects that approach the study of non-Euclidean geometries as specific content for teacher training. The mapping also indicated that there is little involvement of the future teacher with these Geometries, contributing to the licensee building his relationship with space through a single geometric model - the Euclidean. At another point in the research, we investigated evidence that guides the teaching of non-Euclidean Geometries in Basic Education in the National Curriculum Parameters for Elementary Education, in the National Curriculum Parameters for Secondary Education, in the State Curricular Guidelines and in the Common National Curricular Base. The information obtained from the mapping carried out and the curricular guidelines were relevant for the construction of the intervention proposal, which developed with 16 students of the Mathematics Degree course at the University of the State of Bahia. In this context, didactic situations involving different geometric models then experienced and explored. Vygotsky's Historical-Cultural Theory, complemented by Leontiev's Theory of Activity and Moura's Teaching Guidance Activity, are the theoretical contributions that supported research and pedagogical actions in this stage of the study. In this perspective, we rely on the theoretical and methodological assumptions of the Teaching Guidance Activity as an unfolding of the Historical-Cultural perspective, according to which we use it as a context for the negotiation of meanings between the participants. For the construction of the data obtained in this phase of the research, we used the following instruments: audio recordings, questionnaire, Teaching Activity, field diary and individual reports. The internalization process of geometric concepts captured and analyzed, using two categories as assumptions: Conflict - from logical validity to empirical validity; and Rupture - from Euclidean space to other spaces, constituted through interactions between participants in the proposed Training Activity System. When studying non-Euclidean geometric models, the participants attributed different meanings to the concept of a line, parallelism and the sum of the internal angles of a triangle, thus expanding the understanding of these concepts when constituted in the Euclidean geometric model. We conclude that the study of different geometric models in the perspective of Teaching Guidance Activity promotes the development of theoretical and practical thinking of the future Mathematics teacher in the process of teaching and learning Geometry, in particular, of non-Euclidean Geometries.

Keywords: Non-Euclidean Geometries. Teacher training. Historical-Cultural Theory. Teaching Guidance Activity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-	Modelo de estudo	19
Figura 2-	Teoremas demonstrados por Tales de Mileto	25
Figura 3-	Soma de ângulos de triângulos nos três sistemas de Geometrias	30
Figura 4-	Sistematização das etapas da revisão	40
Figura 5-	Esquema proposto por Vygotsky	67
Figura 6-	Relação mediada do sujeito humano com o meio	79
Figura 7-	Estrutura de um sistema de atividade humano	80
Figura 8-	Dois sistemas de atividades interagindo em um modelo mínimo da terceira geração da Teoria da Atividade	80
Figura 9-	Componentes de uma atividade	84
Figura 10-	Estrutura hierárquica da atividade de Leontiev.....	84
Figura 11-	Recursos da Atividade Orientadora de Ensino	98
Figura 12-	Esquema representativo da organização dos dispositivos de registro de dados	119
Figura 13-	Representação esquemática do Sistema de Atividade de Formação desenvolvida no projeto de intervenção	152
Figura 14-	Produção de significados dos participantes da pesquisa	158
Figura 15-	Representação gráfica da construção de uma semirreta em relação ao experimento de Anselmo	162
Figura 16-	Representação da superfície em que Anselmo vive pelo grupo LO	165
Figura 17-	Representação da solução da situação problema 1 da AE II realizada pelo grupo do LO	166
Figura 18-	Construção de retas paralelas na bola de isopor	172
Figura 19-	Construção de triângulos em superfície esférica	181
Figura 20-	Verificação da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer na superfície plana	182
Figura 21-	Construção do transferidor esférico	183
Figura 22-	O transferidor esférico e sua utilização durante o processo de formação	184
Figura 23-	Construção do grupo LG de triângulos em superfície hiperbólica	189
Figura 24-	Construção de retas paralelas em uma superfície hiperbólica	191

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1-	Mapeamento por região do país das IES que ofertam cursos de Licenciatura em Matemática	136
Gráfico 2-	Mapeamento dos cursos de Licenciatura em Matemática que ofertam o ensino de GNE	137

LISTA DE QUADROS

Quadro 1-	Quantitativo de artigos a partir dos descritores no periódico da Capes	37
Quadro 2-	1ª etapa de levantamento de artigos a partir dos descritores	38
Quadro 3-	Relação dos artigos selecionados	40
Quadro 4-	Elementos distintivos entre as três gerações da Teoria da Atividade	81
Quadro 5-	Características da Atividade Orientadora de Ensino	91
Quadro 6-	Perfil do participante e sua relação com a Geometria	109
Quadro 7-	Conhecimentos específicos dos participantes sobre Geometria.....	110
Quadro 8-	Caracterização dos participantes da pesquisa	111
Quadro 9-	AOE sobre Geometrias como unidade de formação entre professor e alunos	116
Quadro 10-	Descrição da proposta de intervenção	117
Quadro 11-	Caracterização das Atividades de Ensino (AE)	120
Quadro 12-	Mapeamento sobre o ensino de GNE nos cursos de Licenciatura em Matemática nas IES	138
Quadro 13-	Situação das componentes curriculares das IE que propõem o estudo de GNE	139
Quadro 14-	A geometria dos fractais – competências e habilidades	145
Quadro 15-	Proposta de ensino do conteúdo GNE na educação básica do estado do Paraná	147
Quadro 16-	Matriz curricular da educação básica do estado do Paraná	148
Quadro 17-	Conteúdos de GNE presentes no RCPR (2018) em relação as habilidades da Unidade Temática Geometria da BNCC (2017)	150
Quadro 18-	Descrição da estratégia para a criação de unidades de análise	153
Quadro 19-	Descrição síntese das categorias de análise	156
Quadro 20-	Episódio 1: Discussão dos participantes sobre a AE I	159
Quadro 21-	Cena 1: Discussão sobre o experimento de Anselmo na construção de uma semirreta	160
Quadro 22-	Cena 2: Aproximação do conceito de geodésica.....	162
Quadro 23-	Episódio 2: Discussão dos participantes sobre a AE II.....	163
Quadro 24-	Cena 1: Compreensão que a superfície em que Anselmo está é esférica.....	168
Quadro 25-	Episódio 3: Discussão dos participantes sobre a AE II	170

Quadro 26-	Cena 1: Discussão acerca do paralelismo entre retas na superfície esférica	171
Quadro 27-	Cena 2: Discussão acerca do paralelismo a partir do Postulado das Paralelas	174
Quadro 28-	Cena 3: Discussão acerca da existência de paralelismo entre retas coincidentes	175
Quadro 29-	Episódio 4: Discussão dos participantes sobre a AE III	179
Quadro 30-	Cena 1: Discussão sobre a construção de triângulo esférico.....	180
Quadro 31-	Cena 2: Discussão sobre a construção de triângulos na superfície plana ...	181
Quadro 32-	Cena 3: Discussão sobre as características de um triângulo esférico.....	185
Quadro 33-	Episódio 5: Construção de conceitos básicos geométricos em uma superfície hiperbólica.....	186
Quadro 34-	Cena 1: Discussão sobre a soma dos ângulos internos de triângulos hiperbólicos	187
Quadro 35-	Cena 2: Discussão acerca da existência de paralelismo entre retas em uma superfície hiperbólica	190

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	GÊNESE DO CONHECIMENTO GEOMÉTRICO: CONCEITOS BÁSICOS SOBRE AS GEOMETRIAS.....	21
2.1	Da Geometria Euclidiana a Geometria não Euclidiana: um recorte histórico.....	22
3	A REVISÃO SISTEMÁTICA COMO CAMINHO PARA A PROBLEMATIZAÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA.....	31
3.1	Produções científicas sobre Geometrias não Euclidianas na formação de professores: fundamentação da revisão.....	32
3.1.1	Protocolo da Revisão Sistemática.....	34
3.1.2	Questão norteadora da Revisão Sistemática.....	34
3.1.3	Possíveis contribuições da Revisão Sistemática.....	34
3.2	Desenvolvendo a Revisão Sistemática: método e procedimento	35
3.2.1	Publicações acadêmicas selecionadas: critérios de inclusão	36
3.3	Resultados da Revisão Sistemática	37
3.3.1	Mapeamento dos estudos.....	37
3.3.1.1	<i>Busca no Portal de Periódicos da Capes</i>	<i>37</i>
3.3.1.2	<i>Lista de periódicos encontrados.....</i>	<i>38</i>
3.4	Discussão da Revisão Sistemática: aproximações e distanciamentos	42
3.5	Considerações acerca da Revisão Sistemática	59
4	A CONSTRUÇÃO DO REFERENCIAL TEÓRICO SOB A LUZ DA PERSPECTIVA HISTÓRICO-CULTURAL	62
4.1	Perspectiva Histórico-Cultural e seus desdobramentos.....	62
4.2	A Teoria Histórico-Cultural	67
4.2.1	Mediação: um processo de interação entre sujeito e ambiente.....	67
4.2.2	Processo de Interiorização: desenvolvimento das funções psicológicas superiores.....	68
4.2.3	Zona de Desenvolvimento Proximal: um conceito importante para o processo de ensino e aprendizagem	69
4.2.4	Formação de Conceitos: entrelaces entre os conceitos espontâneos e os conceitos científicos	73
4.2.5	A produção de significado e sentido: alguns aspectos teóricos.....	76
4.3	Teoria da Atividade: conceitos e perspectivas	78

4.3.1	Construtos teóricos da TA proposta por Leontiev	82
5	ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO: UM CONTEXTO PARA A NEGOCIAÇÃO DE SIGNIFICADOS	89
5.1	Síntese histórica do conceito	93
5.2	Situação desencadeadora de aprendizagem	96
5.3	Síntese coletiva	99
5.4	Entrelaces entre o referencial teórico e a AOE.....	101
6	ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA.....	105
6.1	Descrição da estrutura da pesquisa	106
6.2	Instrumentos de coleta de dados e os sujeitos da pesquisa	107
6.2.1	Propostas curriculares de cursos de Licenciatura em Matemática	107
6.2.2	Documentos curriculares nacionais e estaduais	108
6.2.3	Questionário-diagnóstico.....	109
6.2.4	Caracterizando os participantes da pesquisa	110
6.2.4.1	<i>O Questionário Diagnóstico como instrumento norteador para a proposta de intervenção</i>	<i>112</i>
6.2.5	A Teoria Histórico-Cultural como base para a construção da proposta de intervenção.....	114
6.2.5.1	<i>Descrição da proposta de intervenção: contexto da investigação.....</i>	<i>116</i>
6.2.6	Atividades de Ensino (AE).....	119
6.2.7	Diário de Campo.....	133
6.2.8	Observação participante	133
7	RESULTADOS DA PESQUISA: ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS	135
7.1	Identificação e análise do ensino de Geometrias não Euclidianas a partir dos documentos de referência	135
7.1.1	O que dizem os documentos curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática	135
7.1.2	O que dizem os documentos nacionais e estaduais sobre o ensino de sistemas geométricos diferentes do Euclidiano na Educação Básica.....	142
7.2	Aspectos constitutivos da produção de significados geométricos sobre o estudo de diferentes Geometrias	151
7.2.1	Movimento de constituição das categorias de análise	153
7.2.2	A produção de Significados dos participantes da pesquisa	157
7.2.2.1	<i>Episódio 1: o que diz Euclides?</i>	<i>159</i>

7.2.2.2	<i>Episódio 2: questionando Euclides?</i>	163
7.2.2.3	<i>Episódio 3: questionando Euclides?</i>	169
7.2.2.4	<i>Episódio 4: a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre</i> <i>180°?</i>	179
7.2.2.5	<i>Episódio 5: outros espaços?</i>	186
7.2.2.6	<i>A produção de significados dos participantes: considerações finais</i>	193
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	195
	REFERÊNCIAS	202
	APÊNDICE A- BUSCA EM PERIÓDICOS NACIONAIS A1, A2, B1 E B2	211
	APÊNDICE B- DESCRIÇÃO DOS ESTUDOS SELECIONADOS	217
	APÊNDICE C- TERMO ANUÊNCIA (INSTITUIÇÃO)	226
	APÊNDICE D- TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	228
	APÊNDICE E- PROJETO DE INTERVENÇÃO	230
	APÊNDICE F- ROTEIRO DE OBSERVAÇÃO	238

1 INTRODUÇÃO

A Educação Matemática é uma área de conhecimento das ciências sociais e humanas que estuda o ensino e a aprendizagem da matemática em que “[...] caracteriza-se como uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar” (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 5).

Historicamente, a Matemática construída pela sociedade foi utilizada para explicar, compreender e solucionar problemas do cotidiano das pessoas em diferentes culturas e em diferentes momentos históricos. Dentre os campos de pesquisas da Matemática que oferecem um modelo para análise do espaço físico a Geometria Euclidiana foi utilizada durante séculos como a principal área do conhecimento humano para denotar o espaço e as suas propriedades. Mas, seria a Geometria Euclidiana suficiente à compreensão e resolução de demandas relativas ao espaço físico terrestre?

Tendo como premissa esse questionamento, a proposta da presente pesquisa é refletida no interesse pela história de fatos ligados às construções do conhecimento geométrico euclidiano e suas limitações, na possibilidade de aprofundamento dos estudos sobre as métricas não euclidianas e, em particular, no encorajamento acerca do ensino dessas Geometrias na formação inicial de professores de Matemática.

O interesse pelo tema tem sua gênese em 2004, durante o curso de graduação em Licenciatura em Ciências com Habilitação em Matemática. À época, minha experiência com essas Geometrias se restringiu a uma abordagem informativa e de pouca praticidade, sugerida como um tópico da disciplina História e Filosofia da Matemática. Essa abordagem não possibilitou a compreensão dos conceitos de maneira aprofundada, sobretudo porque a carga horária disponibilizada era limitada.

Em 2012 outro caminho surge ao cursar o mestrado no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo-Ifes/Câmpus Vitória, quando me deparei com a disciplina “Debates Conceituais em Matemática” em que foram apresentados e discutidos na forma de seminários os aspectos históricos das Geometrias Euclidiana e não Euclidiana a partir das relações entre os sistemas geométricos.

Os seminários foram desenvolvidos pelos discentes do curso que assumiram como proposta metodológica o movimento lógico-histórico da construção dos conceitos nos diferentes sistemas geométricos de maneira a compreendê-los alicerçando-se na necessidade da

sua produção, caracterizando-os como uma criação humana apropriada pelo homem por meio de sua atividade e pelas relações sociais.

A abordagem realizada nos seminários teve um viés teórico-prático na qual foi possível assimilar alguns conceitos sobre essas Geometrias, além de possibilitar reflexões acerca do seu ensino. As pesquisas realizadas no decorrer do semestre, acerca desse campo de investigação da Educação Matemática, serviram como fio condutor para novas possibilidades e desafios na minha carreira profissional e acadêmica.

Dessa maneira, incorporei esses conhecimentos nos meus afazeres profissionais e, ao ministrar a disciplina de Cálculo I no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), realizei uma atividade de Matemática com os discentes relacionando o conceito de Limite com uma Geometria não Euclidiana denominada de Geometria Fractal. A atividade de investigação Matemática trabalhada com os licenciandos partiu da curva de Koch¹, que por meio de sua estrutura fractal constituída pela auto-similaridade, complexidade infinita e dimensão do fractal possibilitaram encontrar a área limitada pela curva de Koch.

Outro momento que a temática referente a diferentes sistemas geométricos se fez presente na minha atuação profissional, deu-se na formação inicial de professores de Matemática quando ministrava, na UNEB, a disciplina História da Matemática. Apesar de a ementa da disciplina propor apenas uma abordagem histórica e filosófica do surgimento de Geometrias não Euclidianas, foi exigido para a apresentação dos seminários uma abordagem teórica e prática para cada sistema geométrico, sendo que, a parte teórica se constituiu pelos aspectos históricos e conceituais e a parte prática consistia em uma atividade a ser desenvolvida pelos demais grupos em sala de aula.

Os dois momentos foram ricos e a participação dos discentes alcançou as expectativas pretendidas. Dois aspectos me chamaram a atenção durante o desenvolvimento dessas ações e me conduziram a novos questionamentos com relação ao ensino de Geometria na formação inicial de professores de Matemática:

- Que relações são constituídas pelos futuros professores com a Geometria durante o curso?
- Quais são as dificuldades dos futuros professores de Matemática em aceitar uma métrica diferente da Euclidiana?

¹ Em 1904 o matemático sueco *Helge Von Koch* apresentou o processo de construção de uma curva que ficou conhecida por **floco de neve**.

Motivado por esses estudos, pelas experiências vivenciadas como formador no curso de Licenciatura em Matemática e em face da oportunidade do doutoramento ensejei articular uma proposta de pesquisa que trabalhasse a construção do conhecimento geométrico na formação inicial de professores de Matemática de maneira a atribuir significados para o estudo de Geometrias não Euclidianas.

Segundo Brum e Schuhmacher (2014) nas duas últimas décadas houve uma proliferação, nos meios educacionais, de intensas discussões sobre a inclusão de conteúdos oriundos das Geometrias não Euclidianas, em especial, a Geometria Esférica e Hiperbólica nas escolas por considerá-las adequadas à formação de estudantes em decorrência dos avanços teóricos da Matemática e da Computação no século XXI.

No entanto, na visão desses autores essas discussões levantaram alguns questionamentos que poderão nortear pesquisas no que se refere à inclusão e ensino das Geometrias não Euclidianas na Educação Básica, a saber: o ensino da Geometria não Euclidiana é um tema distante da realidade dos estudantes? O modelo geométrico para representar o planeta Terra abordado nas aulas de Geografia e Matemática é um plano, uma folha retangular ou uma superfície quase esférica? Quais são as concepções dos professores de Matemática sobre a inserção das Geometrias não Euclidianas? Será que o ensino de Geometrias não Euclidianas vem causando inquietações em professores de Matemática por ser um tema novo e ainda desconhecido? Quais são as Geometrias que deveremos ensinar na Educação Básica?

As discussões sobre a inserção do estudo de Geometrias não Euclidianas no currículo das escolas brasileiras encontram apoio nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998), os quais apresentam a relevância do ensino de outras Geometrias na educação básica como se explica:

[...] a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico (BRASIL, 1998, p. 25).

Neste sentido, os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) colocam que entre os objetivos do ensino de Matemática se encontra o desenvolvimento do pensamento geométrico. Recomenda-se a exploração de situações de aprendizagem que levem o estudante a resolver situações-problemas de localização e deslocamento de pontos no espaço, ler mapas, estimar e

comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas e saber usar diferentes unidades de medida. Portanto, há uma orientação para situações de aprendizagem que contemplem ao estudante estabelecer diferenças entre objetos sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações.

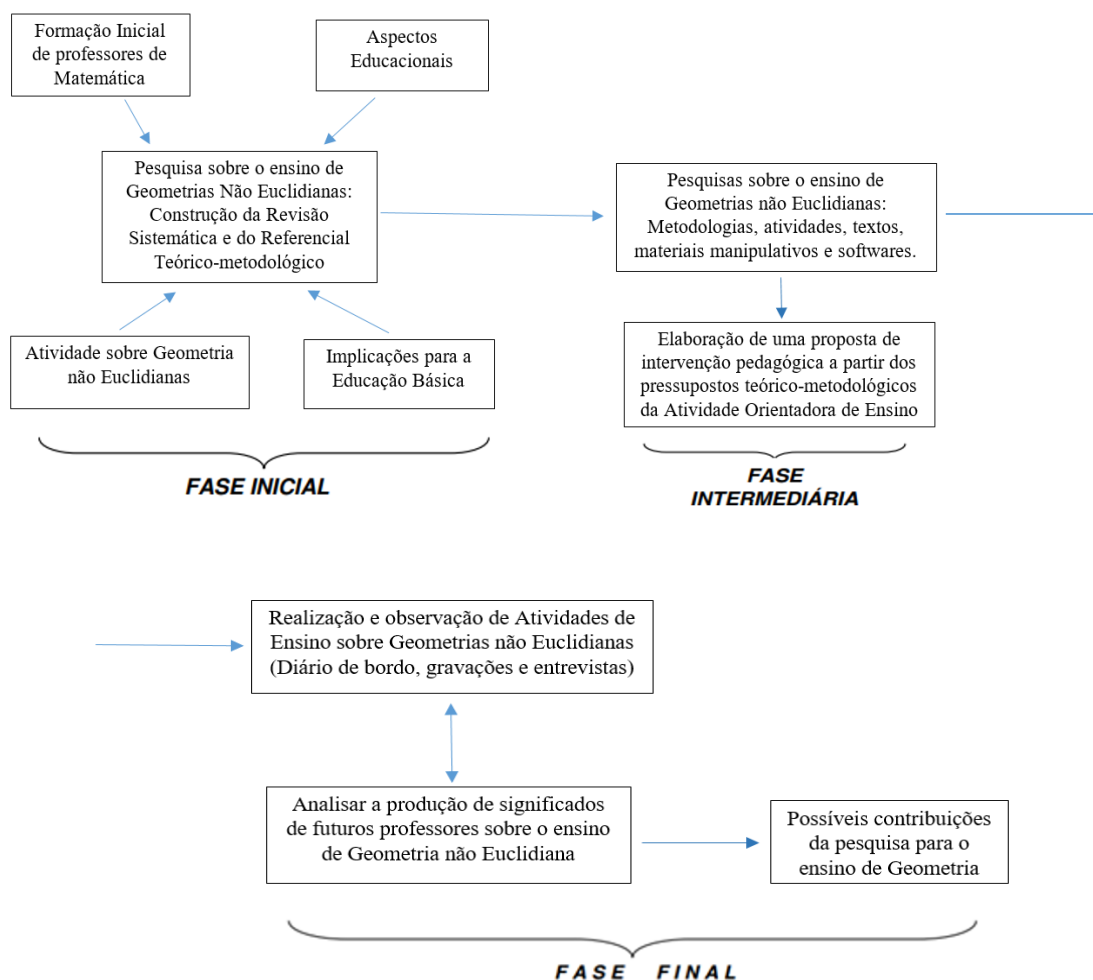
Brum e Schuhmacher (2014) expõem que para estabelecer diferenças entre objetos geométricos, como orienta os PCN, se faz necessário identificar diferentes modelos geométricos na natureza por meio do estudo das navegações, do sistema de localização por GPS (Sistema de Posicionamento Global), do comportamento da luz no espaço, em objetos comuns do cotidiano, como trompetes, poltronas, garrafas de vinho, nas produções artísticas como as obras de Escher, entre outros.

No intuito de contribuir com a presente discussão a respeito do ensino de Geometrias não Euclidianas na formação de futuros professores de Matemática, no contexto do desenvolvimento da presente pesquisa, investigou-se a seguinte questão: De quais formas os licenciandos do curso de Matemática compreendem e podem vir a compreender as Geometrias não Euclidianas?

Diante da delimitação do nosso problema de pesquisa e do ir e vir do processo de construção, compreendemos que o estudo elaborado tem por analisar o contexto do ensino e do estudo das Geometrias não Euclidianas no Brasil e a produção de significados de futuros professores de Matemática sobre esse tema.

Para que esta proposta se concretizasse esboçou-se um modelo de estudo constituído de três fases: a primeira trata dos estudos preliminares, que foram relevantes para compreender o objeto de estudo, delimitando assim: o tema, o problema, os objetivos e os fundamentos teórico-metodológicos da pesquisa; a segunda fase, a intermediária, refere-se ao material de experimentação que consistiu na elaboração de Atividades de Ensino sobre diferentes Geometrias para serem vivenciadas e exploradas por futuros professores de Matemática; a última fase consiste em realizar e analisar os resultados obtidos na pesquisa de campo, articulando e confrontando os resultados sob a Luz da Teoria Histórico-Cultural de Vygotsky (1987) e da Teoria da Atividade de Leontiev (1978).

Figura 1 - Modelo de estudo



Fonte: Próprio autor (2017).

A primeira fase do modelo é apresentada em três capítulos.

O primeiro capítulo contempla um recorte histórico sobre o desenvolvimento do conhecimento geométrico que compreende desde tempos mais remotos que antecedem o século V a. C, passando pelas contribuições de Euclides, à negação do quinto postulado de Euclides, até o surgimento das Geometrias não Euclidianas.

No segundo capítulo realizamos uma Revisão Sistemática sobre o assunto com a finalidade de analisarmos produções científicas no contexto do ensino de Geometrias não Euclidianas na formação de professores de Matemática e suas possíveis implicações para a Educação Básica e para o Ensino Superior. Essa revisão contribuiu para a delimitação do problema de pesquisa da tese de doutorado, uma vez que as análises realizadas apontaram fragilidades na formação inicial de professores de Matemática sobre estudos direcionados ao campo de Geometria, em particular, as consideradas não Euclidianas.

O capítulo três corresponde ao marco teórico da pesquisa onde apresentamos alguns aspectos da Teoria Histórico-Cultural e da Teoria da Atividade relativos à aprendizagem, formação de conceitos e produção de sentido e significados.

A segunda fase do modelo de estudo compreende aos capítulos quatro e cinco.

Versamos no capítulo quatro sobre os pressupostos teórico-metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino como um desdobramento da perspectiva Histórico-Cultural que foi utilizado como contexto para a negociação de significados entre os participantes da pesquisa.

No capítulo cinco seguimos com a abordagem teórico-metodológica, descrevendo o tipo de pesquisa, os sujeitos participantes, as ações realizadas para a coleta de dados e os instrumentos utilizados nesse processo. Pela natureza proposta nesta pesquisa entende-se que se trata de uma abordagem qualitativa, de caráter exploratório e interpretativo. Nesse sentido, propõe-se como instrumentos para coletas de dados a análise de propostas curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática e da Educação Básica, questionário diagnóstico, diário de bordo, Atividades de Ensino e relatórios individuais.

Na sequência, o capítulo seis compreende a última fase do modelo que é destinado à análise e discussão dos dados obtidos tomando por base as referências abordadas anteriormente e tendo como escopo analisar a produção de significados explicitada pelos participantes enquanto vivenciavam as Atividade de Ensino desenvolvidas na proposta de intervenção pelo professor-pesquisador. No referido contexto alguns momentos dos encontros formativos, cuja discussão sobre o estudo de Geometrias não Euclidianas se fez presente, são apresentados em forma de episódios.

Por fim, temos as considerações finais da pesquisa e suas possíveis contribuições para o ensino de Geometrias não Euclidianas.

Com base no exposto, a tese que defendemos é que o estudo de diferentes modelos geométricos na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino promove o desenvolvimento do pensamento teórico e prático do futuro professor de Matemática no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, em particular, das Geometrias não Euclidianas.

Na observação desse aspecto, espera-se contribuir para a (re)significação da práxis pedagógica docente frente a produção e aplicação de atividades diferenciadas para o ensino de Geometrias não Euclidianas na realidade sócio-educacional e registrar, nas linhas que constituem o trabalho escrito desta tese na área de Educação Matemática, os anseios, as apropriações, os esforços, as dificuldades, as conquistas e as produções dos futuros professores envolvidos na pesquisa efetivada.

2 GÊNESE DO CONHECIMENTO GEOMÉTRICO: CONCEITOS BÁSICOS SOBRE AS GEOMETRIAS

Desde a antiguidade que o ser humano tem enfrentado situações que exigem a transformação do espaço onde vive e é por meio do trabalho que realiza, quando ele transforma esse meio, que este se humaniza. Para tal, foi produzido um conjunto de conhecimentos a respeito desse espaço de maneira a torná-lo mais compreensível e suas ações mais eficazes.

A essência do conhecimento geométrico está em reconhecê-lo como uma atividade humana que se transforma no espaço-tempo de acordo com as necessidades do homem por meio de um processo gradativo histórico e cultural no qual estabelece significados que vão desde tempos mais remotos, que antecedem o século V a. C., marcado por uma Geometria experimental e aplicada que tem na cultura egípcia uns dos seus expoentes. Esse percurso encorajou a sistematização e a teorização dos conceitos pelos gregos, sobretudo no decorrer de um longo período, estendendo-se aproximadamente desde o século V a.C. até o século XVII d. C., alcançando, inclusive, o surgimento, compreendido entre os séculos XVII e XIX, de novos ramos nessa área: Geometria Analítica, Geometria Projetiva e Geometria Diferencial. E por fim o último período, que vai do século XIX até a atualidade, caracterizado pelo surgimento de modelos geométricos diferentes do modelo euclidiano.

Nessa perspectiva, compreendemos que as mudanças qualitativas ocorridas na forma de como o homem transmutou a sua concepção quanto Geometria ao longo do tempo é fruto de um processo histórico e cultural que se constituiu mediante o aprofundamento e generalização de teorias já existentes. Durante esse processo de transformação, o conhecimento geométrico adquire uma autonomia própria que faz surgir uma gama de problemas específicos, constituindo-se em uma “linha de investigação”.

A finalidade deste capítulo é revisitar as gêneses dos episódios históricos atrelados à construção do conhecimento geométrico em busca de indícios epistemológicos de Geometria e em particular, o surgimento das Geometrias não Euclidianas por meio de situações que tentam explorar as relações existentes entre a Ciência e a sociedade, entre a Ciência e as instituições científicas, entre as diversas Ciências, etc. (JAPIASSU, 1934).

Mas, o que é epistemologia? Para Japiassu (1934) etimologicamente *episteme* significa ciência e *logos* significa discurso. Nesse sentido, epistemologia é o discurso sobre a Ciência. Mas, o que é Ciência? Ciência significa conhecimento. Contudo, não é qualquer conhecimento que pode ser considerado como Ciência haja vista que o mesmo deve ser fruto de um processo rigoroso e detalhado durante a sua criação. De acordo com Lakatos (1979), para um

conhecimento ser científico, esse deve ser provado seguindo uma base empírica, levando em conta o falsacionismo metodológico, ou seja, admitindo-se que a base de uma teoria é falível, logo é preciso antecipar novos fatos e observar diferentes pontos de vista.

Assim, para realizar um processo holístico de construção do conhecimento geométrico é preciso considerar o contexto social, cultural, intelectual e histórico desse saber, analisando *a priori* as práticas específicas situadas no tempo e no espaço em que diferentes paradigmas surgem e quando e como os mesmos são superados ao longo do tempo. Para tentar entender possíveis objetos epistêmicos ao longo da história do conhecimento geométrico utiliza-se a visão de Moritz Epple² (2004) ao afirmar que, para conceituá-los e analisá-los numa perspectiva historiográfica que possibilite contextualizar no tempo e no espaço, é necessário compreender os objetos sob investigação, as construções intelectuais ou ainda os processos que são designados pelos cientistas.

Durante o processo desta investigação, ao ser estudado a origem da Geometria e dos conhecimentos que a embasam, alguns questionamentos vieram à tona: Quando surgiu a Geometria? Quais os fatores que resultaram em sua criação? A Geometria pode ser considerada Ciência? Qual seria o objeto epistêmico da Geometria?

Em busca de respostas para essas indagações, iniciamos uma investigação histórica que começa há quase 2000 anos antes de Cristo. O conhecimento geométrico surgiu tendo como base o conhecimento matemático, mas na medida em que as descobertas de outros elementos geométricos foram sendo realizadas, o referido conhecimento extrapolou o domínio da Matemática, expandindo-se para outras disciplinas. Não diremos que a Geometria é apenas um ramo da Matemática, mas sim que a mesma é uma Ciência que faz uso da Matemática encontrando-se presente em Artes, Química, Física, etc.

2.1 Da Geometria Euclidiana a Geometria não Euclidiana: um recorte histórico

Com origem no latim, *geo* significa terra e *metria* significa medida, então a palavra “Geometria” significa medida da terra. Do mesmo modo que outros saberes humanos, a Geometria surgiu das necessidades práticas e desenvolveu-se ao longo do tempo. Desse modo, foi mediante esse desenvolvimento que foram sendo descobertos novos conhecimentos geométricos; devido a isso, a Geometria passou a não ser apenas compreendida como a medida

² EPPLE, M. **Knot invariants in Vienna and Princeton during the 1920s**: Epistemic Configurations on Mathematical Research. *Science in Context*. 17, p. 131–164, 2004.

da terra, e sim como a Ciência que estuda as relações entre o homem, o espaço e a forma, relações estas de cunho abstrato ou concreto: daí a importância de se compreender como se dá o pensamento geométrico.

No Programa Nacional do Livro Didático é apresentada a importância do pensamento geométrico por meio dos seguintes dizeres:

O pensamento geométrico surge da interação espacial com os objetos e os movimentos no mundo físico e desenvolve-se por meio das competências de localização, de visualização, de representação e de construção de figuras geométricas. A organização e a síntese desse conhecimento também são importantes para a construção do pensamento geométrico (BRASIL, 2007, p. 16).

Ao iniciarmos a pesquisa encontramos indícios de que algumas civilizações possuíam conhecimentos tidos como “geométricos”, como se expende:

Hoje sabemos que as grandes civilizações antigas – chinesa, hindu, mesopotâmica, egípcia – possuíam muitas informações de natureza geométrica. E as aplicavam! Sabiam construir figuras planas e espaciais, conheciam relações entre as grandezas geométricas, calculavam comprimentos, áreas e volumes. Esses conhecimentos atendiam a necessidades socioeconômicas e culturais, tais como medição de propriedades rurais, construção de edificações, desenho de ornamentos etc. (LIMA; CARVALHO, 2010, p. 135-136).

Dentre essas civilizações muitos historiadores consideram a civilização egípcia como principal contribuinte para a origem da Geometria. No Egito antigo, encontram-se evidências da Geometria nos papiros de Moscou (c. 1850 a.C.) e de Ahmes (c. 1650 a.C.). O Papiro de Ahmes, também conhecido como Papiro de Rhind, tido como o mais importante pela extensão de conhecimentos matemáticos, destaca-se pela forma como os egípcios ensinavam a calcular a área do círculo “[...] sem justificar, ele diz que tal área é igual a área de um quadrado cujo lado é $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo” (GARBI, 2010, p.14).

Para atender às necessidades do cotidiano, a Geometria proposta nos Papiros sugere que os egípcios desenvolveram-na de maneira “[...] indutiva, basicamente para finalidades práticas como a agrimensura, a arquitetura e as obras de irrigação” (GARBI, 2010, p.12). Segundo Caraça (1951) o historiador grego Heródoto que viveu no século V a. C, conhecido como o pai da História, em seu livro II (*Euterpe*) se apoia nas práticas egípcias como indícios para o surgimento da Geometria.

[...] Disseram-me que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse

diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois ela passou aos gregos (CARAÇA, 1951, p. 32).

Diante do supracitado, a Geometria do mediterrâneo apresentava-se em caráter experimental e articulada aos problemas cotidianos das civilizações, em especial a egípcia, como foi destacado anteriormente. Numa tentativa de compreender os avanços, estagnações e retrocessos da Geometria como Ciência, acredita-se que a essência experimental presente nos Papiros foi de certa forma recuperada por Lakatos em sua obra intitulada “Metodologia dos Programas de Pesquisas Científicas” na qual se considera que em certas épocas, “técnicas relevantes” tais que “quem apreenda” é capaz de decidir se um enunciado experimental é “aceitável” para constituir uma base empírica que, por sua vez, permitirá decidir sobre sua aceitação temporária (LAKATOS³, 1982, p. 34 *apud* MOREIRA; MASSONI, 2011). Com isso pretende-se mostrar que a Geometria já estava ancorada em alguns aspectos que permeiam o fazer Ciência, a saber: observação, experimentação, comparação, validação, etc., são ações que eram presentes na cultura egípcia e a sua aceitação era desenvolvida pela apreensão de seus métodos.

Investigando os avanços da Geometria nos deparamos com as contribuições da civilização grega. Sabemos que os gregos buscaram no Egito conhecimentos de Geometria e elevaram o pensamento geométrico do viés prático e metodológico, aplicado na resolução de problemas de agrimensura, para uma abordagem mais teórica e dedutível apoiada em postulados, definições e axiomas. A Geometria perde um pouco o caráter experimental com foco na prática proposta pelos egípcios para suprir as necessidades da civilização grega de estruturação do conhecimento humano por meio de certo formalismo, rigor e conceito de prova ou justificativa lógica.

Ao analisarmos o acontecimento das demarcações de terra no antigo Egito, evidencia-se a sua relação com o significado etimológico da Geometria, porém por que considerar este episódio como um dos pioneiros da Geometria? Por que não considerar práticas mais antigas, como o formato pontiagudo escolhido para a fabricação de flechas ou a técnica de apontar o

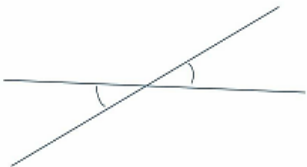
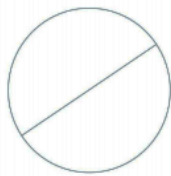
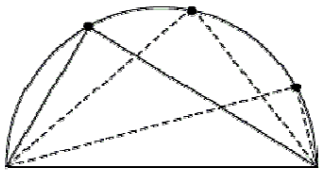
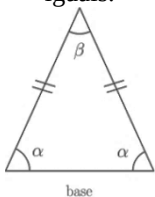
³ LAKATOS, I. (1982). **La metodología de los programas de investigación científica**. Madrid: Alianza Universidad. Tradução para o espanhol do original *The methodology of scientific research programs*, publicado pela Cambridge University Press em 1997.

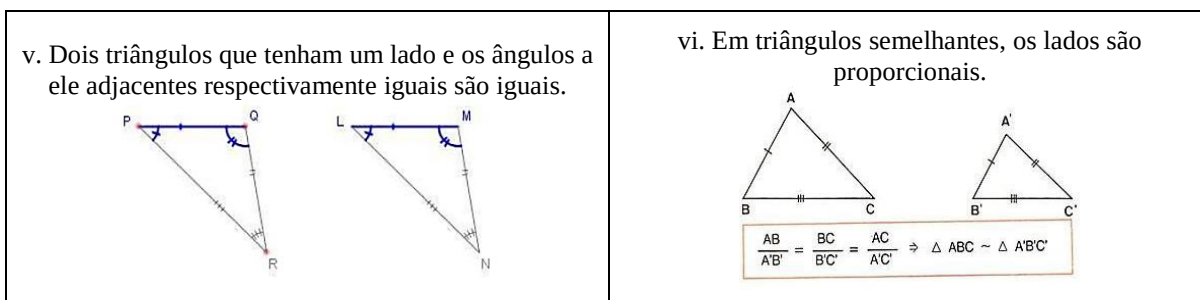
arco e flecha para cima para se obter um alcance maior do disparo, como eventos que iniciaram a estrutura do conhecimento geométrico?

A diferença entre a prática da demarcação de terra e os outros exemplos está na objetividade e no conhecimento das ações realizadas. Ao atirar com o arco e flecha não se tinha um conhecimento mais elaborado da relação entre o ângulo de arremesso do projétil e o alcance do disparo, o conhecimento existente era o “intuitivo”. Contudo, na situação das demarcações das terras, existia, de certo modo, um formalismo-prático para esta atividade. Os impostos estavam diretamente relacionados com a quantidade de terra que cada indivíduo possuía e existiam padrões estabelecidos para a realização dessas atividades de medição. Além desses padrões estabelecidos, há também os registros dos conceitos utilizados durante a ação que seriam a justificativa lógica e o rigor, dentre outras propriedades, que determinam a prática da demarcação de terra como o início da Geometria como Ciência.

Na concepção de Garbi (2010, p. 22) Tales é considerado o primeiro filósofo e primeiro matemático grego a quem é atribuída à revolucionária ideia que modificou a maneira de conceber o conhecimento matemático, afirmando que “[...] suas verdades devem ser justificadas, demonstradas, provadas por meio do raciocínio”. Segundo o autor, fontes históricas da Geometria mencionam que Tales plantou a semente da Matemática Dedutiva ao demonstrar os seguintes teoremas:

Figura 2 – Teoremas demonstrados por Tales de Mileto

i. Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais. 	ii. Qualquer diâmetro divide o círculo em duas partes iguais. 
iii. Qualquer ângulo inscrito em um semicírculo é reto. 	iv. Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são iguais. 



Fonte: Garbi (2010, p. 23-24).

Já nas ideias apresentadas acima nota-se que a Geometria começa a incorporar novas formas de sustentação como campo científico de investigações em que os objetos epistêmicos recebiam um tratamento dedutivo e formal, cuja validação se dava pela razão, pela consistência das ideias apresentadas e pela falta de ações que contra-argumentassem suas definições, postulados e noções comuns.

Garbi (2010, p. 57) elucida que a obra os Elementos⁴ de Euclides (por volta de 300 a.C.) “[...] tratava-se de matéria didática para o ensino de Geometria (elementar) a iniciantes”. A obra de Euclides dá ao mesmo o *status* de gênio não só pelos teoremas propostos, mas pela organização lógica que apresentou, pela forma rigorosa e concatenada nas provas presentes sobre o conhecimento matemático da época, contemplando algumas lacunas deixadas por outros estudiosos.

Para continuar a discussão sobre a episteme da Geometria, atém-se ao Livro I de Euclides que apresenta os célebres cinco postulados, a saber:

- i. Traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.
- ii. Estender um segmento de reta continuamente em uma linha reta.
- iii. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
- iv. Que todos os ângulos retos são iguais.
- v. Que, se uma linha reta caindo sobre duas linhas retas faz ângulos internos do mesmo lado cuja soma seja menor do que dois retos, as duas linhas retas, se estendidas indefinitivamente, encontram-se no mesmo lado em que a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos (GARBI, 2010, p. 59).

Somente após 23 séculos de análise e pesquisas profundas realizadas no século XIX no campo da axiomática mostraram ser conveniente rever alguns pontos de partida da Geometria Euclidiana e concluiu-se que o quinto postulado, das Paralelas, sobre o qual repousa quase toda a Geometria proposta por Euclides, poderia ser formulado de outras maneiras dando origem a novos tipos de Geometrias, igualmente válidas e coerentes. Importante ressaltar que Euclides parece seguir algumas ideias da Ciência proposta por Aristóteles em que “[...] princípios

⁴ Versão digital em catalão disponível em http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm. Acesso em: 12 abr. 2017.

assumidos sem demonstração seriam postulados se fossem específicos de certa Ciência e noções comuns se fossem válidos para várias Ciências”. (GARBI, 2010, p. 59).

Nesse sentido, as ideias propostas para a Geometria Euclidiana do ponto de vista de Aristóteles lhe outorga *status* de Ciência em que a lógica dedutiva empregada contribuiu para uma consciência interna da construção do conhecimento geométrico, ou seja, a Geometria atravessou 23 séculos tentando explicar os objetos da realidade por meio de uma única maneira de ver o mundo no qual seus paradigmas podem ter causados estagnações ou retrocessos na produção de outras formas de compreender o espaço.

A Geometria surge através das concepções de fazer Ciência de Aristóteles de forma bem estruturada, ancorada na formalidade e no rigor de seus procedimentos que dão indícios do desenvolvimento do pensamento lógico positivista ao propor um método para se fazer Ciência em qualquer área do conhecimento humano.

Além das contribuições no campo epistemológico de Aristóteles, Euclides e demais pensadores gregos, a Geometria teve como mola propulsora para seu desenvolvimento três célebres problemas da Antiguidade, os quais a Geometria grega era incapaz de resolvê-los por meio da sua principal técnica instrumental utilizada na época, régua e compasso. Os três problemas supracitados foram: ‘a quadratura do círculo’ (construir um quadrado com área igual à área de um círculo dado), ‘a duplicação do cubo’ (construir um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo dado) e ‘a trissecção do ângulo’ (construir um ângulo cuja medida é $1/3$ da medida de um ângulo dado).

A busca por soluções para os três problemas célebres da Antiguidade corroborou para o amadurecimento do pensamento geométrico dando origem a novas formas de compreensão do espaço, gerando novas hipóteses e, conseqüentemente, novas necessidades para o campo de estudo da Geometria.

Para Garbi (2010) os Elementos são uma obra que consiste na síntese do pensamento geométrico produzido na época e retrata essa ideia em seus dizeres:

[...] a maior parte dos teoremas nela incluídos foi descoberta por outros geômetras, embora várias das provas sejam originais de Euclides e outras tenham sido refeitas ou aperfeiçoadas por ele. **O toque de gênio de Euclides está não na descoberta de teoremas, o que ele certamente fez, mas na organização lógica com que os apresentou e provou de forma rigorosa e concatenada, preenchendo as lacunas deixadas por outros** (GARBI, 2010, p. 58, grifo do autor).

Os Elementos, durante 23 séculos, foram analisados e criticados pelos mais renomados matemáticos de diferentes épocas, ainda que nada de errado fora encontrado na obra.

Entretanto, pesquisas mais extenuantes realizadas a partir do século XIX - no campo da Axiomática - revelaram ser conveniente rever alguns pontos utilizados por Euclides.

Ao longo da história, a obra de Euclides chamou a atenção de seus contemporâneos até matemáticos renomados do século XIX pela sistematização dada ao conhecimento matemático existente, se tornando um valioso material de divulgação científica nessa área e contribuindo para o desenvolvimento de pesquisas e para o surgimento de novas formas de compreender o espaço.

O quinto postulado de Euclides (Postulado das Paralelas) fomentou grandes discussões ao longo da história e a partir do fascínio dos estudiosos em acreditar que este postulado poderia ser um teorema e que o mesmo poderia ser demonstrado pelos quatro postulados anteriores. Este se tornou um dos maiores problemas da Geometria na história da humanidade.

No século XVIII, o cientista escocês John Playfair apresentou um enunciado logicamente equivalente, com uma linguagem mais clara e objetiva onde enuncia que “[...] por um ponto fora de uma reta, existe exatamente uma reta paralela à reta dada”. O enunciado dado ao postulado ficou tão conhecido que muitos livros atuais de Geometria o apresentam como o Postulado das Paralelas, no lugar do enunciado original proposto por Euclides “[...] uma linha reta, que corta duas retas paralelas, faz os ângulos alternos iguais entre si o ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte, e finalmente os internos da mesma parte iguais a dois retos” (COMMANDINO, 1944, p. 20).

Para Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 199) o estudioso Girolamo Saccheri tentou uma abordagem diferente para o problema em questão dessa forma argumentando que:

- Sabemos que o axioma de Euclides não contém contradição porque temos no mundo real modelos do sistema;
- Acreditamos que o Postulado das Paralelas pode ser demonstrado a partir dos outros axiomas, mas até agora ninguém conseguiu fazê-lo;
- Suponha que possa ser demonstrado. Então, se substituirmos o Postulado por sua negação, estaremos pondo uma contradição no sistema;
- Portanto, se eu usar a negação do Postulado das Paralelas como axioma e encontrar uma contradição nesse novo sistema, terei mostrado que o Postulado das Paralelas pode ser demonstrado a partir dos outros axiomas, embora eu não tenha uma demonstração direta disso!

Assim, a negação do Postulado está dividida em duas partes. Por um ponto fora de uma reta:

- I – não passam retas paralelas a esta reta dada, ou
- II – passa mais de uma reta paralela a ela.

Sem a aceitação da comunidade acadêmica da época, Saccheri publicou seus estudos em 1733 e seus resultados caíram no esquecimento por longos cem anos.

O século XIX inicia-se com o resgate do pensamento de Saccheri e três estudiosos matemáticos consideraram a seguinte questão como proposta de trabalho: pode existir um sistema de Geometria plana no qual, por um ponto fora de uma reta, exista mais de uma reta paralela à reta dada?

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010) um dos três *expert* em matemática da época era o grande matemático alemão Carl Friedrich Gauss que explorou essa prerrogativa por volta de 1810. A falta da publicação dos seus resultados sobre o Postulado não o tornou, na época, um apreciador da questão e poucos estudiosos tiveram contato com o seu trabalho sobre a explanação do tema naquele momento da história.

O segundo matemático a apresentar resultados sobre nascimento de uma nova Geometria foi Nicolai Lobachevsky, matemático russo que dedicou parte de sua vida a estudar o assunto e foi o primeiro a publicar em 1829 o seu estudo sobre o novo sistema de Geometria por meio de um artigo intitulado “Sobre os Princípios da Geometria”. Essa publicação marcou o nascimento da Geometria não Euclidiana, ficando completamente convencido de que o quinto postulado de Euclides não pode ser provado com base nos outros quatro. A crítica denominou este trabalho de *Geometria Imaginária*.

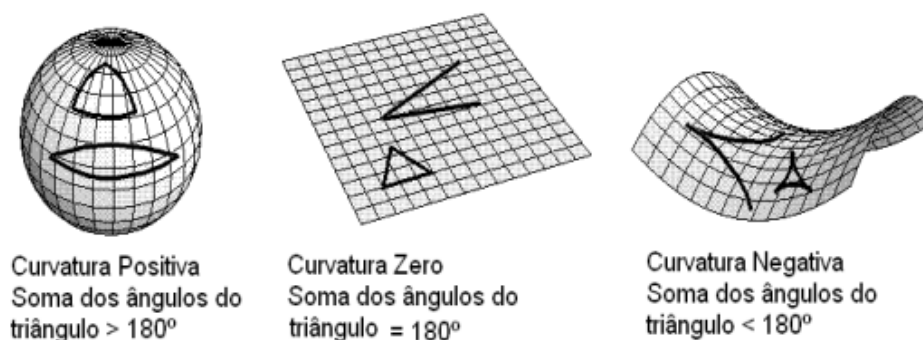
Em períodos mais próximos, János Bolyai desenvolveu um sistema de Geometria com as mesmas ideias que Lobachevsky e as publicou em 1832. O trabalho de Bolyai só foi reconhecido após o seu falecimento. O mesmo aconteceu com Lobachevsky que morreu cego e na pobreza.

Por fim, outro grande matemático de destaque da época foi Bernhard Riemann que reconheceu a importância dos trabalhos de Bolyai e Lobachevsky quando desenvolveu a teoria geral das variedades, por volta de 1854, legitimando os vários tipos de Geometrias não Euclidianas, mas também as chamadas Geometrias Reimannianas. A aceitação total da Geometria não Euclidiana só se estabeleceu após a morte de Reimann.

Nessa perspectiva, em meados do século XIX, eram conhecidos três tipos diferentes de Geometria, que se distinguiam pela maneira de tratar retas paralelas. Os novos sistemas propostos por Lobachevsky e Riemann foram denominados Geometrias não Euclidianas para enfatizar sua oposição ao sistema proposto por Euclides. Os três sistemas de Geometrias são consistentes na Geometria Riemanniana, mas há divergências na aceção sobre paralelismo em cada sistema conduzindo-os a propriedades distintas.

Para exemplificar as peculiaridades sobre essas Geometrias⁵, apresenta-se o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo varia de acordo com a curvatura do espaço em estudo.

Figura 3 - Soma de ângulos de triângulos nos três sistemas de Geometrias



Fonte: Baladão (2017)

A conclusão alcançada pelos matemáticos de que o Postulado das Paralelas não pode ser demonstrado a partir dos outros quatro postulados da Geometria Euclidiana proporcionou a invenção de uma nova Geometria plana: uma teoria inédita de formas sobre uma superfície. Com efeito, a superfície desse sistema não é o plano usual desenvolvido por Euclides, mas existe uma superfície para a qual esse sistema de postulados faz sentido e denominamos como Geometrias não Euclidianas.

Nessa perspectiva, apoia-se nos dizeres de Amoroso Costa (1929, p. 201) que na metade do século XX definiu as Geometrias não Euclidianas como “[...] qualquer dos sistemas dedutivos construídos sobre a negação do chamado [quinto] postulado de Euclides, conservadas e completadas [...] as demais proposições primitivas de Euclides”. Essa definição nos provoca reflexões que transcendem o diálogo simplista imposto pela intuição que sugere a Geometria estudada somente por meio da análise da superfície, em plana ou curva, para uma análise mais aprofundada que diferencia as Geometrias a partir do tratamento dado a retas paralelas nas superfícies estudadas.

⁵ O termo Geometrias é utilizado nessa obra com a proposta de fazer referências tanto a Geometria Euclidiana quanto a Geometrias não Euclidianas.

3 A REVISÃO SISTEMÁTICA COMO CAMINHO PARA A PROBLEMATIZAÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA

A presente Revisão Sistemática, doravante reconhecida pela sigla RS, buscou identificar trabalhos acadêmicos que versam sobre o ensino de Geometrias não Euclidianas presentes na formação de professores de Matemática. Sua principal finalidade é investigar o que se conhece em termos de pesquisas e o que ainda não foi pesquisado sobre essa temática. Para tanto, apoia-se na ação metodológica da RS a fim de que se perceba a construção do Estado da Arte sobre produções acadêmicas relacionadas ao ensino de Geometrias não Euclidianas, realizando uma varredura das pesquisas produzidas nos últimos dez anos em bancos de dados de comunidades acadêmicas nacionais e internacionais.

As revisões de literatura ou sínteses de pesquisa se configuram pela tentativa de sistematização de estudos sobre um determinado tema ou área de conhecimento por meio da identificação, organização, avaliação e integração desses estudos. Até os anos 1960, não havia um processo sistemático que direcionasse a produção de sínteses. A maioria das revisões de literatura era realizada de maneira artística, adotadas por um estilo narrativo ou jornalístico (COOPER *et al.*, 2009 *apud* TRACTENBERG, 2011).

Somente no final dos anos 1970 e início dos anos 1980 surgiram as primeiras revisões bibliográficas sistemáticas e meta-análises partindo de protocolos de revisão padronizados, constituídos de tratamento estatísticos, propiciando maior rigor, transparência, confiabilidade e precisão nas conclusões dos estudos a serem disseminados nos meios acadêmicos (TRACTENBERG, 2011).

Nas últimas décadas tem havido uma grande proliferação de estudos científicos estruturados na forma de revisões sistemáticas e meta-análises na área das ciências sociais, principalmente na Psicologia e na Educação, devido ao fortalecimento do movimento de práticas e políticas baseado em evidências⁶, muito difundido na Europa e no Reino Unido (LITTEL *et al.*, 2008 *apud* TRACTENBERG, 2011).

Para Littel *et al.* (2008) citado por Tractenberg (2011) a RS é um método de síntese que visa localizar e sintetizar estudos relacionados a questões específicas, organizar achados,

⁶As práticas e políticas baseadas em evidências consistem em um esforço por fundamentar a tomada de decisões em informações científicas consolidadas, e, também, por prestar contas aos agentes envolvidos (consumidores, clientes, usuários, público etc.) sobre as bases das decisões ou políticas implementadas. O desenvolvimento dos sistemas de informação em rede, aliados à clientes, consumidores e opinião pública, cada vez mais exigentes e críticos em relação às informações fornecidas e às práticas e políticas implementadas por profissionais, organizações e governos, são alguns dos fatores que têm contribuído para a valorização desse movimento (TRACTENBERG, 2011, p.208).

analisar impactos ou evidências e responder questões específicas de forma rigorosa por meio de procedimentos estruturados, transparentes e replicáveis, tomando o cuidado para minimizar erros e vieses em cada etapa desse processo.

Dessa forma, Tractenberg (2011) considera que a RS nos oferece uma visão holística sobre determinado campo de pesquisa podendo contribuir para o avanço das pesquisas científicas, uma vez que expõe o nível de aprofundamento dos estudos realizados (o que se sabe em termos de pesquisas) e as limitações desses estudos (o que ainda não foi pesquisado).

Para desenvolver este estudo destacam-se as questões que encorajaram o desenvolvimento desta ação metodológica:

- Durante a formação inicial, o professor de Matemática tem acesso a discussões sobre o ensino de Geometrias não Euclidianas?
- Quais práticas docentes corroboram para o ensino de Geometrias não Euclidianas na educação básica?
- Existem documentos que apoiam a inserção do ensino de Geometrias não Euclidianas no currículo da educação básica?

Consoante o escopo a ser atingido pelo estudo realizado, cremos que as questões traçadas para esta etapa contribuíram para a construção do desenho da pesquisa, uma vez que se pretende ter uma visão do todo sem perder de vista as especificidades nos estudos desenvolvidos pelos demais pesquisadores desse campo de investigação. A finalidade deste capítulo é apresentar uma RS de cunho exploratório e descritivo sobre a produção científica no contexto do ensino de Geometrias não Euclidianas na formação de professores de Matemática e suas possíveis implicações na Educação Básica e no Ensino Superior. Na seção seguinte, apresentam-se as etapas da RS, bem como o protocolo de buscas construído para a sistematização dos dados encontrados e, posteriormente produzir o relatório contendo fundamentos teóricos, procedimentos e resultados da revisão.

3.1 Produções científicas sobre Geometrias não Euclidianas na formação de professores: fundamentação da revisão

Acreditamos que uma das propostas da Educação Matemática é preparar os indivíduos para enfrentar problemas que estão presentes no cotidiano e que são muitas vezes conhecidos por um número expressivo de pessoas, contudo ainda podem ser desconhecidos para uma parcela da sociedade. Em outras palavras, a Educação Matemática também deve preparar os

indivíduos para resolver problemas que já não são tão explícitos nos afazeres das pessoas e que muitas vezes são desconhecidos por muitos.

Assim, no campo de pesquisa na Educação Matemática os estudos devem se preocupar não só com o processo que instrumentaliza o sujeito, mas, também, desenvolver competências e habilidades que possam mobilizar conhecimentos para enfrentar situações-problema do cotidiano, de modo que se afigure uma real inserção do mesmo na sociedade, garantindo-lhe condições de aprendizagem para enfrentar antigos e novos problemas.

É em torno do dilema em compreender a Geometria Euclidiana, como um conhecimento milenar e culturalmente aceito, considerado como a única maneira de representar o espaço no imaginário de algumas pessoas, que assumimos uma ação investigativa empreendendo a compreensão do espaço por meio de um conhecimento mais recente, exigindo um processo de instrumentação mais amplo em relação ao conhecimento geométrico, capaz de resolver situações-problema novas, onde o modelo geométrico euclidiano encontra limitações para solucioná-las, ao qual foi designado como sistemas de Geometria não Euclidiana.

Destarte, pretendemos institucionalizar a proposta de pesquisa deste estudo não sobrepondo o “novo conhecimento” sobre o conhecimento considerado mais “antigo”, e sim ressaltar a importância da produção histórico-social dos conhecimentos milenares para a produção de outros conhecimentos. Pontua-se que não é intenção da pesquisa hierarquizar os saberes, mas colocá-los em pé de igualdade com os demais saberes, porquanto valorosamente Paulo Freire nos ensina que “[...] não há saber mais, nem saber menos, há saberes diferentes”. (1987, p.68).

Entendemos que a relevância de realizar estudos sobre o ensino de Geometrias não Euclidianas nos cursos de Licenciatura em Matemática diz respeito à necessidade de compreensão, por parte dos estudantes, de que a Geometria Euclidiana não é a única praticada no mundo em que vivemos e que muitos problemas relacionados ao homem e ao mundo científico encontram explicações nos conhecimentos produzidos nas Geometrias não Euclidianas.

Além disso, as reflexões geradas pelo estudo de sistemas de diferentes Geometrias podem romper com o pensamento geométrico culturalmente enraizado onde o plano euclidiano é o espaço mais comum utilizado em Geometria, podendo vir a ser um obstáculo epistemológico para a compreensão dos avanços teóricos da Matemática e da computação, uma vez que ele é real apenas no imaginário dos matemáticos (LEIVAS, 2013).

Contudo, a justificativa para a construção de uma RS sobre o ensino de Geometrias não Euclidianas se deve a necessidade de o pesquisador mapear e analisar as produções acadêmicas

realizadas sobre o tema, com o intuito de gerar reflexões que possam servir de base para o refinamento do problema da pesquisa que norteará as tomadas de decisões, direcionando esse processo para algo realmente inovador e potencialmente relevante para o campo de pesquisa em Educação Matemática.

3.1.1 Protocolo da Revisão Sistemática

A construção dessa revisão conta com periódicos vinculados a área de Ensino e Educação. Os periódicos nacionais são avaliados pelo sistema de avaliação da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) *WebQualis*, tais quais: A1, A2, B1 e B2⁷.

Para filtrar a quantidade de informações e direcionar as buscas para o objeto de estudo em questão propôs-se investigar produções acadêmicas nos seguintes idiomas: Português, Espanhol e Inglês. Além disso, as produções acadêmicas a serem consultadas devem contemplar o período de 01 de Janeiro de 2010 a 31 de Dezembro de 2019. Ressaltamos que o critério adotado para o recorte temporal foi o propósito de refletir sobre trabalhos mais recentes relativos à temática, com o intuito de atualizar a pesquisa antes e durante o processo de doutoramento e assim estabelecer novos direcionamentos para esse campo de pesquisa.

3.1.2 Questão norteadora da Revisão Sistemática

Do ponto de vista da investigação exploratória e descritiva construiu-se a seguinte questão para a Revisão Sistemática:

- Quais as peculiaridades dos estudos desenvolvidos nos últimos dez anos que abordam o ensino de Geometrias não Euclidianas na formação inicial e continuada de professores de Matemática?

3.1.3 Possíveis contribuições da Revisão Sistemática

O levantamento de informações, a categorização e a descrição dos estudos propostas pela RS podem contribuir para:

⁷ Disponível em: www.sucupira.capes.gov.br . Acesso em: 27 mar. 2017

- Ampliar a visibilidade sobre o ensino de Geometrias não Euclidianas destacando os principais resultados de pesquisas realizadas sobre esse tema e como elas vêm evoluindo;
- Proporcionar uma visão holística sobre o tema e, ao mesmo tempo, revelar a diversidade dos contextos em que o ensino de Geometrias não Euclidianas pode contribuir para a compreensão do mundo;
- Viabilizar a realização de futuras pesquisas sobre o tema, auxiliando os pesquisadores a encontrarem mais facilmente os estudos afins, bem como identificar questões e subtemas ainda não explorados, enfoques/métodos utilizados e auxiliar na comparação de resultados de suas pesquisas com os de outras já realizadas.

O processo de análise a ser realizado nessa obra constitui-se pelo imbricamento de pesquisas destacando as aproximações e distanciamentos de estudos envolvendo o ensino de Geometrias não Euclidianas, tanto no Ensino Superior quanto na Educação Básica que estão pautados em três aspectos propostos nesta revisão: formação de professores, epistemologia e inserção no currículo.

Dessa forma, acredita-se que a RS pode interessar a pesquisadores da área de Educação Matemática, a professores que buscam práticas inovadoras para o ensino de Geometrias, professores-formadores do Ensino Superior e a órgãos públicos responsáveis pela implementação de currículos inovadores que fomentem a ressignificação do ensino da Geometria nesses espaços do ensino-aprendizagem: o Ensino Básico e o Ensino Superior.

3.2 Desenvolvendo a Revisão Sistemática: método e procedimento

O caráter da RS realizada é de natureza exploratória, descritiva e preponderantemente qualitativa. Acreditamos que o detalhamento das ações desenvolvidas num processo de investigação pode concatenar dados que permitam compreender a subjetividade do pesquisador face ao objeto de estudo.

Nessa perspectiva, apresentam-se os passos seguidos durante a construção desta revisão priorizando as etapas que dão indícios de aspectos exploratórios, descritivos e qualitativos. Sendo tais:

- A sistematização e a avaliação do protocolo de revisão foram realizadas por meio de uma ação conjunta que reuniu esforços em busca da melhor estruturação do trabalho em questão;

- Desde o início da pesquisa de doutorado foram realizadas várias buscas preliminares no portal de Periódicos da Capes⁸ e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) que proporcionaram maior familiarização com o objeto de estudo em questão, ressaltando os tipos de estudos realizados na área e os descritores mais utilizados;
- Realização de levantamentos preliminares a fim de construir um mapeamento qualitativo da literatura existente sobre o tema no Brasil, apontando as instituições em que tais estudos são produzidos e a incidência desses estudos por região;
- Análise da produção acadêmica selecionada com o intuito de fundamentar a revisão sistemática quanto à historicidade, contextualização e justificativa para a produção deste trabalho acadêmico;
- Construção de quadros de referências e fluxograma para organizar e sistematizar os dados levantados durante o processo.

3.2.1 Publicações acadêmicas selecionadas: critérios de inclusão

A escolha do Portal de Periódicos da Capes para levantamento de artigos que foram analisados se deve a estrutura de indexação provida pelo sistema, bem como o fato da submissão dessas obras passarem pelo crivo de especialistas que avaliam e revisam tais estudos. Esse processo tende a aumentar a qualidade das pesquisas apresentadas e fortalecem a credibilidade das metodologias e resultados alcançados por tais estudos nas comunidades científicas no âmbito nacional e no cenário internacional. Além disso, os artigos são indexados em bases de dados bibliográficas, o que facilita as buscas e a obtenção dos textos completos.

A consulta à BDTD se torna interessante a partir do momento que se propõe investigar estudos recentes, desenvolvidos em programas de pós-graduações, que estão em formato de teses e dissertações e que ainda não foram divulgados por meio de artigos em periódicos indexados ao Portal da Capes.

Para refinar a busca no Portal de Periódicos da Capes os idiomas inquiridos para análise foram estudos publicados em português, espanhol e inglês.

Para tanto, foi estabelecido os critérios de inclusão de referências para análise:

1. Temática: estudos que têm como objetivo o Ensino de Geometrias não Euclidianas.
2. Período de publicação: estudos que foram publicados entre 01 de janeiro de 2010 e 31 de dezembro de 2019.

⁸ Disponível em: http://www.periodicos.capes.gov.br/index.php?option=com_plogin&status=2. Acesso em: 27 mar. 2018.

3. Idioma: estudos que estão em português, espanhol ou inglês.
4. Tipo de publicação: publicações que estejam no formato de artigo e indexados na Capes.
5. Unicidade: estudos que se apresentam em forma de artigos e não repetidos.

Vale ressaltar que se respeitou a ordem crescente dos critérios de inclusão de acordo com a estabelecida acima (1 a 5).

3.3 Resultados da Revisão Sistemática

3.3.1 Mapeamento dos estudos

Para melhor apresentar os dados e o processo de mapeamento foi estabelecido o uso de quadros e fluxograma tendo por finalidade auferir uma visão holística do trabalho e assim justificar as escolhas feitas durante a construção do mesmo.

3.3.1.1 Busca no Portal de Periódicos da Capes

Com o sistema de buscas avançadas do portal de periódicos foi possível buscar por artigos publicados no período de 01 de Janeiro de 2010 a 31 de Dezembro de 2019 com o seguinte protocolo:

Quadro 1 - Quantitativo de artigos a partir dos descritores no periódico da Capes

PROTOCOLO DA REVISÃO SISTEMÁTICA CAPES	
Expressão de Busca: (Descritores)	Artigos
Ensino de Geometrias	78
Ensino de Geometria não euclidiana	26
Ensino de Geometrias AND Ensino Superior	10
Geometria não Euclidiana AND Geometrias	13
Geometrias AND Formação inicial	25
Geometrias AND Professores	28
Geometria não euclidiana AND professores	27
Geometria não euclidiana AND Formação de professores	22
Geometrias AND Formação de professores	14
Teacher training AND Non-euclidean geometry	38
Teacher training AND Geometries	1150
University Education AND Geometries	5531

University Education AND Non-euclidean geometry	48
Geometrías AND La geometria no euclidiana	21
Enseñanza AND La geometria no euclidiana	17
Enseñanza Superior AND Geometrías	15
La geometría no euclidiana AND formación de profesores	01
Geometrías AND Formación de profesores	00
TOTAL	383

Fonte: Portal da Capes (18/03/2020).

Os artigos que estão grifados em vermelho não foram considerados no quantitativo total, uma vez que as expressões de busca em Inglês “*Teaching AND Geometries*” e “*University Education AND Geometries*” nos direcionaram a milhares de artigos que não apresentavam relação direta ou indireta com o objeto de estudo traçado para essa pesquisa.

Para melhor compreensão da busca realizada apresentam-se em forma de quadros os periódicos consultados e as datas das consultas, bem como os descritores utilizados que contemplam os idiomas: Português, Espanhol e Inglês (APÊNDICE A).

3.3.1.2 Lista de periódicos encontrados

Para sistematizar e organizar melhor os artigos encontrados segue abaixo um quadro destacando os periódicos analisados e quantidade de artigos encontrados em cada um deles, bem como um fluxograma com as informações mais relevantes para a construção desse processo.

Quadro 2 - 1ª etapa de levantamento de artigos a partir dos descritores

SISTEMAS DE BUSCA	ARTIGOS LEVANTADOS
PORTAL DE PERIÓDICO DA CAPES	383
BOLEMA - Boletim de Educação Matemática (online)	45
ACTA SCIENTIAE – Revista de Ensino de Ciências e Matemática (ULBRA)	03
Boletim GEPEM (online)	SEM ACESSO*
EMP - Educação Matemática Pesquisa (online) – SP	12
EMR - Educação Matemática em Revista – SP	01
Educação Matemática em Revista-RS	00

JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática	01
Perspectivas da Educação Matemática (UFMS)	01
Revemat : Revista Eletrônica de Educação Matemática	06
ZETETIKÉ - Revista de Educação Matemática (online)	08
REMATEC. Revista de Matemática, Ensino e Cultura (UFRN)	00
EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana	01
REVEDUC - Revista Eletrônica de Educação - São Carlos	02
RIPEM - Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática	00
RPEM - Revista Paranaense de Educação Matemática	02
TOTAL	465

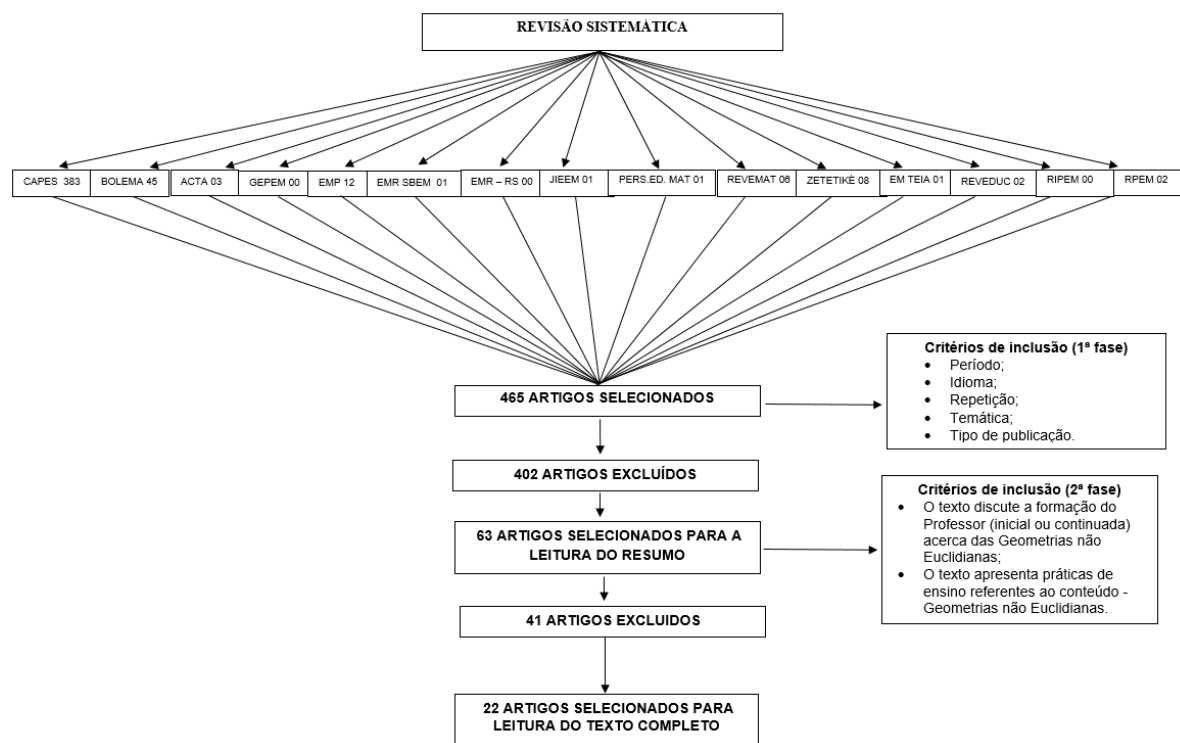
Fonte: Próprio autor (2020).

Para melhor compreender o processo de seleção do material que foi analisado nesta revisão, construímos um fluxograma para apresentar as produções acadêmicas selecionadas para a realização da RS.

Dessa maneira, obteve-se 465 artigos selecionados nessa primeira etapa da RS a partir da aplicação dos descritores onde 403 foram excluídos após a aplicação dos seguintes critérios de inclusão: período (compreendido de 01/01/2010 a 31/01/2019); idioma (português, inglês e espanhol); repetição (artigos gestados da mesma pesquisa eram excluídos); temática (artigos que porventura não abordavam o processo de ensino e aprendizagem de Geometrias não Euclidianas foram excluídos); tipo de publicação (somente publicações em forma de artigos foram analisados na construção desse material).

Assim, 62 artigos foram selecionados para a leitura de seus resumos e por interesse dessa pesquisa foram aplicados mais dois critérios de seleção para a leitura completa dos artigos. 21 artigos discutiam a formação do professor de matemática e práticas de ensino sobre Geometrias não Euclidianas foram selecionados para a análise e construção da discussão da revisão.

Figura 4 - Sistematização das etapas da revisão



Fonte: Próprio autor (2020).

A RS proposta na pesquisa tem o intuito de descrever os motivos do desenvolvimento desses estudos por meio de um quadro constituído por elementos de caracterização geral de pesquisas, tais como: referência, título, tipo de estudo, região do país, problema, objetivo, métodos, instrumentos e resultados (APÊNDICE B).

Apresentamos a seguir um quadro que apresenta os 21 artigos selecionados.

Quadro 3 - Relação dos artigos selecionados

Título do Artigo	Periódico Científico	Autores	Ano
Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática	Bolema	Claudemir Murari.	2011
Educação geométrica: reflexões sobre ensino e aprendizagem em geometria	Educação Matemática em Revista – RS	José Carlos Pinto Leivas.	2012
Aprendizagem de conceitos de geometria esférica e hiperbólica no ensino médio sob a perspectiva da teoria da aprendizagem significativa usando uma sequência didática	Aprendizagem Significativa em Revista	Wanderley Pivatto Brum; Elcio Schuhmacher.	2013
Relações entre os objetos ostensivos e objetos não ostensivos durante o ensino da geometria do taxista com o software Geogebra	Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática	Luciano Ferreira; Rui Marcos de O. Barros.	2013
Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos	Educação Matemática Pesquisa	José Carlos Pinto Leivas.	2013
Geometrias na segunda fase do ensino fundamental: um estudo apoiado na epistemologia genética	Zetetiké	João Debastiani Neto; Clélia Maria I. Nogueira; Valdeni Soliani Franco.	2013

A História da Matemática e os conhecimentos prévios dos professores como subsídios para o planejamento de um curso sobre Geometria	Itinerarius Reflectionis	Wanderley Pivatto Brum; Sani de Carvalho R. Silva.	2014
Livros didáticos de matemática: análise dos recursos didáticos auxiliares para a aprendizagem de conceitos elementares de Geometria não Euclidiana	Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa	Wanderley Pivatto Brum; Sani de Carvalho R. Silva.	2014
O Processo de Inserção das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Escola Paranaense: a visão dos professores participantes	Bolema	Marlova Estela Caldato; Regina Maria Pavanello.	2014
Elipse, parábola e hipérbole em uma geometria que não é euclidiana	Revista Eletrônica de Educação Matemática	José Carlos Pinto Leivas.	2014
Dificuldades e obstáculos apresentados por um grupo de professores de Matemática no estudo da geometria hiperbólica	Zetetiké	Karla Aparecida Lovis; Valdeni Soliani Franco; Rui Marcos de O. Barros.	2014
As Geometrias Esférica e Hiperbólica em Foco: sobre a apresentação de alguns de seus conceitos elementares a estudantes do Ensino Médio	Bolema	Wanderley Pivatto Brum; Elcio Schuhmacher; Sani de Carvalho R. Silva.	2015
Hermenêutica e Geometria Não Euclidiana: Imre Toth e os instrumentos específicos de uma filologia matemática	Perspectivas da Educação Matemática	Gustavo Barbosa.	2015
As Concepções de Geometrias não Euclidianas de um Grupo de Professores de Matemática da Educação Básica	Bolema	Karla Aparecida Lovis; Valdeni Soliani Franco.	2015
Problema das ideias de natureza simples para a Geometria não Euclidiana e para a Física não Newtoniana a partir da análise de Gaston Bachelard	Revista de Filosofia	Willian dos Santos Godoi	2015
A utilização de documentários enquanto organizadores prévios no ensino de Geometria não Euclidiana em sala de aula	Acta Scientiarum	Wanderley Pivatto Brum; Elcio Schuhmacher; Sani de Carvalho R. Silva.	2016
La Geometría al encuentro del aprendizaje	Educación Matemática	Luis Moreno-Armella; Rubén Elizondo Ramírez.	2017
A geometria do táxi: uma proposta da geometria não euclidiana na educação básica	Educação Matemática Pesquisa	Nathan Lascoski Gusmão; Fernando Yudi Sakaguti; Liceia Alves Pires.	2017
A Geometria Hiperbólica nos currículos escolares e universitários	Educação Matemática Pesquisa	Elias Santiago de Assis.	2017
Geometrias Não-Euclidianas: uma investigação na escola básica no Brasil com utilização do Geogebra	Thema	José Carlos Pinto Leivas; Hiago Portella de Portella; Helenara Machado Souza.	2017
Explorando a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio de uma oficina pedagógica	Thema	Aline Picoli Sonza; José Carlos Pinto Leivas.	2018
Geometria no ensino fundamental: das exigências legais às práticas cotidianas	Revista Paranaense de Educação Matemática	Daniele Regina Penteado; Ana Lúcia Pereira; Célia Finck Brandt.	2019

Fonte: Próprio autor (2020).

A seguir, pretendemos concatenar as ideias presentes nos artigos selecionados, relacionando-os entre si, promovendo um espaço de diálogo a partir dos seguintes aspectos: epistemologia, formação de professores e inserção no currículo.

3.4 Discussão da Revisão Sistemática: aproximações e distanciamentos

O objetivo dessa seção é promover o diálogo entre os artigos no que se refere ao ensino de Geometrias não Euclidianas se apoiando em três aspectos: epistemologia, formação de professores e inserção no currículo. Esse diálogo respeitará a ordem cronológica de produção dos artigos para facilitar a articulação entre os mesmos, destacando as aproximações e distanciamentos que possam existir.

- Dimensão epistemológica

Na dimensão epistemológica propõe-se analisar produções acadêmicas que se apoiam em elementos históricos da produção do conhecimento geométrico cujo intento é salientar a gênese das Geometrias não Euclidianas e o processo de amadurecimento desse campo de pesquisa ao longo do tempo.

Leivas (2012) traz em sua produção “Educação Geométrica: reflexões sobre ensino e aprendizagem em geometria” uma reflexão teórica sobre a Educação Geométrica a partir de um questionamento sobre o que é Geometria, não com a intenção de responder esse questionamento, mas sim dar alguns indícios que permitam um posicionamento sobre o tema.

Para iniciar a reflexão o autor se apoia em Freudenthal (1973) que propõe responder o questionamento a partir de outros dois, a saber: O que há de essencial na Geometria? E quais as perspectivas sobre a Educação Matemática?

Para Freudenthal (1973 *apud* Leivas, 2012, p. 9) , temos dois níveis diferentes para responder tais questionamentos:

[...] num nível mais elevado: a Geometria, de alguma forma axiomáticamente organizada, é certa parte da Matemática que, por algumas razões, é chamada Geometria.

Num nível mais elementar: é essencial compreender o espaço em que a criança vive, respira e se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar e conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor.

Ao que parece, os diferentes níveis apresentados por Freudenthal (1973) nos proporcionam uma nova dinâmica de pensar Geometria na Educação. A primeira perspectiva se refere ao nível mais elevado que está apoiada numa estrutura bem organizada e rigorosa, compelida por postulados, teoremas e axiomas, estabelecida há mais de 2.300 anos, proposta pelos gregos e organizada por Euclides em sua obra “Elementos”. Uma herança enraizada na

Matemática pela Geometria Euclidiana tida como a única maneira de compreender o espaço até meados do século XIX.

Lovis, Franco e Barros (2014) propõem que os postulados, os axiomas e as definições são o ponto de partida para as demonstrações apresentadas por Euclides tanto na Geometria Plana quanto na Espacial. Há convergência de ideias entre os autores e Leivas (2012), quando os mesmos dizem que Euclides ofereceu à Geometria uma forma dedutiva sistemática, para que as demonstrações fossem mais rigorosas e possibilitassem a elaboração de novas leis. Os autores supracitados (2014, p. 16) citam Barker (1969, p. 38) para corroborar as assertivas que por eles foram elaboradas:

[...] Euclides, nos Elementos, visava a aperfeiçoar o nosso conhecimento acerca de pontos, linhas, figuras, tornando mais rigorosas as demonstrações de leis já conhecidas, e visava a aumentar esse conhecimento, demonstrando leis novas, até então desconhecidas.

Nesse direcionamento, a origem da Geometria Euclidiana está de certa forma associada ao desenvolvimento das civilizações babilônica, egípcia e grega, onde os babilônicos e os egípcios desenvolveram uma Geometria mais prática com o objetivo de responder aos problemas com os quais se deparavam. Já a civilização grega, ao contrário dos babilônicos e dos egípcios, apreciava a Geometria não apenas em virtude de suas aplicações práticas, mas em virtude de seu interesse teórico (BARKER, 1969 *apud* LOVIS; FRANCO; BARROS, 2014).

As ideias de Euclides diferem das concepções indutivas e empíricas adotadas pelos egípcios onde seu raciocínio não está associado diretamente a problemas práticos do tipo medição de terras, bem como não está preocupado com os possíveis obstáculos (montanhas, rios, entre outros) que poderiam impedir a aplicação do pensamento geométrico proposto por ele. Em posse dos postulados, não interessa a Euclides as condições práticas, ou seja, ele admitia existir “[...] um espaço em que inexistiam obstáculos absolutos e em volta do qual inexistiam fronteiras exteriores absolutas”. (BARKER, 1969, p. 31 *apud* LOVIS; FRANCO; BARROS, 2014, p. 16).

Outro artigo identificado na RS é de autoria de Barbosa (2015) e realiza um estudo sobre o historiador e filósofo da Matemática Imre Toth que investiga a historicidade do conhecimento matemático analisando rigorosamente escritos antigos e a forma de transmissão desses saberes. Numa busca filosófica sobre o processo de construção do pensamento matemático expõe que o trabalho de Euclides em estruturar todo o conhecimento matemático que existia se deve aos esforços de Aristóteles e demais gregos, em que “[...] a estrutura axiomático-dedutiva

euclidiana é, em muitos aspectos, devedora dos esforços aristotélicos de organização científica, separação e hierarquização dos princípios”. (BARBOSA, 2015, p. 6). Não se trata de uma desconsideração da importância de Euclides como referencial historiográfico da Matemática, mas sim de apresentar princípios que remontam aos interesses dos gregos pela formalização do conhecimento matemático num viés lógico-dedutivo ancorado em axiomas, postulados e teoremas.

Barbosa (2015) aponta que o interesse pela obra “Elementos” foi diminuindo no período que compreende os séculos XVII a XIX e explica que isso se deve a mudança de prioridades marcada pelo desenvolvimento científico e tecnológico, contexto no qual novos problemas chamavam a atenção dos matemáticos da época, situações diárias ligadas a áreas científicas diversas de interesses monetários, a balística, a navegação, a construção de pontes e máquinas, a mecânica celeste, transmissão de calor, etc. Assim, expõe como favorável ao progresso da Matemática, destacando que termos como originalidade, criatividade e produtividade passaram a conduzir as pesquisas matemáticas desse período.

O cenário de mudanças proposto aos matemáticos a partir do século XVIII fez com que os mesmos retomassem, aos poucos, a atenção para o postulado das paralelas de Euclides, não mais com o intuito de discuti-lo ou questionar as consequências que podem surgir mediante sua negação, mas com o interesse de demonstrá-lo.

Somente no final do século XIX, que os matemáticos compreenderam a situação lógica do quinto postulado (postulado das paralelas) e afirmaram que ele é independente dos outros postulados propostos por Euclides, em outras palavras, admite-se a possibilidade de existência de sistemas geométricos consistentes a partir da afirmação contrária do postulado das paralelas.

Leivas (2012) complementa que as concepções que guiaram o conhecimento matemático e de mundo foram repensadas a partir do século XIX no movimento chamado Crise dos Fundamentos que rompeu com os antigos conceitos tidos como universais. Eis que foram construídas as Geometrias não Euclidianas, a teoria da relatividade, entre outras. A negação do quinto postulado gerou conceitos que são verídicos em modelos geométricos não euclidianos, onde destacamos o que Leivas (2012, p. 14) asserta:

[...] No modelo de Geometria Elíptica, em que o espaço ambiente pode ser uma esfera, existem triângulos cujos lados são segmentos de geodésicas e cuja soma dos ângulos internos é maior do que 180° . As geodésicas de uma esfera são suas circunferências máximas. Num modelo de Geometria Hiperbólica, em que o espaço ambiente pode ser uma pseudoesfera, existem triângulos, cujos lados são segmentos geodésicos, cuja soma dos ângulos internos é menor do que 180° .

No seu artigo científico, Godoi (2015) sustenta-se nos dizeres de Bachelard (1978) para enfatizar a importância das Geometrias não Euclidianas para a Geometria estabelecida por Euclides onde se alberga o intuito de considerar as Geometrias não Euclidianas como um complemento para o pensamento geométrico proposto até o final do século XIX.

Godoi (2015, p. 276) então corrobora:

[...] Assim, as geometrias não-euclidianas poderiam ser consideradas como complementos da geometria de Euclides. Poderíamos dizer que o objetivo das geometrias não-euclidianas seria estender o pensamento geométrico, e não, negar a geometria de Euclides, como pensavam os euclidianos.

Para Bachelard (1978, p. 276) mencionado por Godoi (2015, p. 102) a extensão das noções dos conceitos matemáticos contribui para aproximações que recaem na realidade Matemática quando entoa que:

[...] O pensamento matemático toma impulso com o aparecimento das ideias de transformação, de correspondência, de aplicação variada. Ora, não é no jogo dialético que a extensão atinge seu máximo e a transformação une as formas mais estranhas? É por este jogo que o espírito pode medir sua ação sobre a realidade matemática.

A realidade Matemática se enriquece com a extensão das suas noções ou, poderíamos dizer também, com a complexificação das suas noções. A extensão do conhecimento matemático que complexifica as noções científicas, torna as noções mais reais, do que as noções consideradas simples por determinados tipos de Ciência.

Desse modo, a ideia do princípio de extensão⁹ utilizado por Caraça (1951) para a criação de um campo numérico pode ser atribuído ao campo geométrico onde a extensão da Geometria não Euclidiana possibilita por meio de uma complementaridade a união com a Geometria Euclidiana e, conseqüentemente, o campo geométrico passa a ser uma pangeometria. Com efeito, após o surgimento das Geometrias não Euclidianas a noção de paralela não poderia jamais ser considerada uma noção simples e absoluta como queriam os geômetras euclidianos.

Em outras palavras, Godoi (2015) coloca que o realismo da Matemática na perspectiva de uma pangeometria pode ser expresso através de uma coerência entre as diferentes Geometrias. O autor se apoia nos dizeres de Bachelard que afirma a importância da busca dessa coerência para a efetiva compreensão e interpretação da realidade pela Matemática. Assim direciona o referido autor (2015, p. 277) ao citar as abordagens de Bachelard (1978, p. 104):

⁹ Para saber mais sobre o princípio da extensão consultar o livro “Conceitos Fundamentais da Matemática” de Bento de Jesus Caraça, 1951, p. 10.

[...] no que há de comum nas geometrias contrárias. É preciso estudar a correspondência estabelecida entre estas geometrias. É fazendo corresponder as geometrias que o pensamento matemático toma realidade.

Nessa contextualização, a existência das Geometrias não Euclidianas promoveu um debate científico e filosófico sobre a natureza da Geometria apropriada ao mundo físico e sobre a possibilidade de representar de maneira “intuitiva” o mundo físico por meio de uma Geometria não Euclidiana.

Godoi (2015, p. 286) afirma que:

Após a física relativística demonstrar que a ideia de “simultaneidade” não seria tão simples quanto seu fenômeno aparentava, a ideia de “simultâneo” não poderá jamais ser considerada uma ideia simples e absoluta, do mesmo modo que, após a geometria não-euclidiana, nunca mais poderá se considerar a noção de paralela como uma noção simples

Tem-se, portanto, que a complexificação das noções de “paralelismo” na Geometria corroborou para a complexificação das noções de “simultaneidade” na física, e esta promoveu uma ruptura na maneira de representar o mundo físico tendo como premissa não mais do acúmulo de conhecimentos sobre Geometria Euclidiana ou sobre a física newtoniana e sim questionamento das noções simplistas de “paralelismo” e “simultaneidade” que temos a materialização do conhecimento matemático.

Cavichiolo (2011) contemplou a análise das Geometrias não Euclidianas como pressuposto para a formação inicial do professor de Matemática sob a ótica dos formadores. A autora reporta que o estudo das diferentes Geometrias por futuros professores de Matemática contribui “[...] não somente para a ampliação e aprofundamento do conhecimento da área da Geometria, mas, sobretudo, da própria Matemática”. (CAVICHIOLO, 2011, p. 125). No que concerne à dimensão epistemológica, a autora infere que o conhecimento acerca de outras Geometrias permite mostrar as diversas possibilidades de interpretação do espaço e das aplicações dessas Geometrias nos fenômenos do mundo real.

Eis que compreendemos, na constituição da dimensão epistemológica, que o conhecimento geométrico é uma construção humana em que os construtos de sua epistemologia vão se modificando conforme o tratamento dado aos postulados de Euclides, permitindo novas maneiras de saber e de fazer no campo da Geometria.

- Dimensão formação de professores

Em relação à dimensão da formação de professores houve uma articulação entre a discussão dos artigos que investigaram a importância do conhecimento sobre Geometrias não Euclidianas na formação do professor de Matemática e as práticas educativas que permeiam o proficiente processo de ensino e aprendizagem das Geometrias, tanto na Educação Básica como no Ensino Superior, em especial, no curso de Licenciatura em Matemática.

Numa perspectiva que transcende a visão geométrica proposta por Euclides, Leivas (2012) compreende ser essencial que a criança aprenda a conhecer, explorar e conquistar o espaço, de modo a poder viver, respirar e mover-se melhor. Tal consideração é abordada pelo autor ao ponto de suas análises nos conduzirem a uma maneira diferenciada de se pensar o ensino da Geometria, uma vez que a compreensão do espaço pela axiomática proposta pelos gregos pode ser um obstáculo para a aprendizagem, pois o plano euclidiano R_2 somente é real na mente humana.

A compreensão do espaço a partir de aspectos que se diferem da lógica dedutiva proposta pelo sistema euclidiano pode desarticular a ação axiomática dada ao conhecimento geométrico, corroborando para o surgimento de novas formas de compreender o espaço, ressignificando os modos de ensinar e aprender os conceitos geométricos.

Lovis, Franco e Barros (2014) ressaltam que algumas afirmações conceituais da Geometria Euclidiana podem produzir obstáculos na compreensão do pensamento geométrico, em especial, das Geometrias não Euclidianas. Generalizações como: a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° ; dada uma reta r e um ponto P fora dessa reta, existe somente uma reta que passa por P e é paralela a r ; a distância entre duas retas paralelas é constante. Tais afirmações devem ser esclarecidas que são verdadeiras somente na Geometria Euclidiana. Dessa maneira, o professor deve conhecer os modelos geométricos existentes para especificar claramente em qual Geometria se aplica tais conceitos, apresentando a construção do conhecimento matemático como algo dinâmico, vivo, transformador, para desconstruir a visão de uma Ciência pronta, de resultados intocáveis, de um saber único.

Freudenthal (1973) é então mencionado nos estudos de Leivas (2012) ao ressaltar como é importante que o processo de ensino e aprendizagem em Matemática esteja intimamente relacionado à realidade, uma vez que, a Geometria estudada nos diferentes níveis educacionais tem apresentado dificuldades tanto no que concerne à aprendizagem quanto ao ensino.

O autor apresenta uma pesquisa desenvolvida em oito cursos de Licenciatura em Matemática localizados no estado do Rio Grande do Sul, verificando-se que oferecem

disciplinas como Geometria plana, espacial, analítica, mas geralmente ministradas por meio de um movimento lógico-formal que proporciona um ensino pautado no uso excessivo de regras e com rigor. Afirma que poucos são os cursos que abordam o ensino das Geometrias não Euclidianas, sendo essas desconhecidas por grande parte dos professores, o que poderia ser um elemento motivador para o ensino lógico-formal dado à Geometria na Educação Básica.

Nessa perspectiva, Leivas (2012) propõe como objetos de um novo fazer da Educação Geométrica três conceitos que julga imprescindíveis para o estudo de métricas euclidiana e não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática: a imaginação, a intuição¹⁰ e a visualização. O ensino de Geometrias não Euclidianas na formação de futuros professores de Matemática pode enriquecer as práticas investigativas experimentais e indutivas, desarticulando o uso prioritário do pensamento axiomático.

Lovis, Franco e Barros (2014) atestam que o professor de Matemática muitas vezes se baseia em experiências e observações para descrever a Geometria Euclidiana, uma vez que, o plano é visualizado no mundo físico, suscitando a ideia de que “[...] parte do mundo onde vivemos é plano” (SANTOS, 2009, p. 96). Nesse contexto, os conceitos e as propriedades da Geometria Euclidiana exercem forte influência no processo de aprendizado de novas Geometrias pelo professor e que tal situação constitui um obstáculo na compreensão de novos conceitos.

Os autores supracitados, por meio de um minicurso introdutório sobre Geometria Hiperbólica, realizado com 41 professores da região norte do Estado do Paraná, observaram que a maioria dos professores conhece somente a Geometria Euclidiana e acreditam que ela é a única forma possível de descrever o mundo físico. Os professores também impõem barreiras e dificuldades em abandonar a visão axiomática proposta pela Geometria Euclidiana, com seus conceitos e definições, tendo esta como um conhecimento universal.

Assim, na tentativa de uma ação diferenciada em relação ao ensino de Geometrias, o professor deverá ter acesso às discussões sobre as diferentes Geometrias tanto na formação inicial quanto na continuada de tal forma que consiga romper com o conhecimento universal instituído ao longo do tempo pela Geometria Euclidiana, de forma que “[...] o progresso do espírito científico se faz por rupturas com o senso comum, com as opiniões primeiras ou as pré-noções de nossa filosofia espontânea” (JAPIASSÚ, 1986, p. 70).

¹⁰ Compreende-se intuição aqui como “[...] um processo de construção de estruturas mentais cognitivas para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto” (LEIVAS, 2012, p. 15).

Lovis e Franco (2015) investigam os conhecimentos, as opiniões, as preferências e as ideias que professores de Matemática do estado do Paraná possuem a respeito das Geometrias não Euclidianas. A pesquisa aponta que a maioria dos professores somente teve contato com estudos sobre Geometrias não Euclidianas em cursos de capacitação promovidos pela Secretaria de Educação do Estado do Paraná. Desse modo, perceberam as fragilidades e lacunas na formação inicial do professor em relação ao estudo de Geometrias não Euclidianas, uma vez que os professores disseram nas respostas às entrevistas semiestruturadas que não houve estudos sobre o tema na graduação.

Os autores ainda delineiam a importância de o futuro professor de Matemática realizar estudos sobre as Geometrias durante o curso de Licenciatura, haja vista que os tópicos de Geometrias não Euclidianas fazem parte das Diretrizes Curriculares da Educação Básica - DCE do estado do Paraná, tais como: Geometria Topológica, Geometria Projetiva, Geometria dos Fractais, Geometria Hiperbólica e Geometria Elíptica.

Os autores concluíram que a inclusão do estudo de Geometrias não Euclidianas na Educação Básica pode contribuir para o surgimento de ações que fomentem o estudo de Geometrias tanto na formação inicial como na formação continuada dos professores, proporcionando ao profissional da educação uma reflexão sobre o ensino de conceitos geométricos em que os aspectos que diferenciam as Geometrias possam corroborar para a compreensão das mesmas. Lovis e Franco (2015) mencionam sobre a temática de forma que:

Apesar das concepções observadas, defende-se a inclusão do tópico *noções de geometrias não-euclidianas* nas DCE, uma vez que essa inclusão estimulou, ainda que insatisfatoriamente, o estudo das Geometrias promoveu, inclusive, uma reflexão sobre a própria Geometria Euclidiana, além de mostrar que a Geometria Euclidiana não é a única Geometria que existe. Nossa hipótese – mas que necessita de outras pesquisas – é a de que as concepções sobre as Geometrias foram e estão sendo alteradas e formadas com a inclusão das novas Geometrias na Educação Básica (LOVIS; FRANCO, 2015, p. 387, grifos dos autores).

Na obra “Aprendizagem de conceitos de Geometria Esférica e Hiperbólica no ensino médio sob a perspectiva da teoria da aprendizagem significativa usando uma sequência didática” de autoria de Brum e Schuhmacher (2013) percebe-se que o foco do artigo está na inserção da Geometria Esférica e Hiperbólica no ensino de Matemática na Educação Básica, expondo algumas dificuldades encontradas pelo professor para abordar esse tema na rede pública do município de Tijucas em Santa Catarina. Tais dificuldades incidem na formação do professor que se vê despreparado para construir práticas investigativas que abordem os referidos conteúdos. No contexto pesquisado, comprovaram que raramente conteúdos de Geometrias não Euclidianas são apresentados em cursos de formação de professores e, para

além, os temas estão praticamente ausentes nos livros didáticos adotados, esse fator pode vir a ser um dos embates que dificultam o ensino desses conteúdos na Educação Básica.

Nesse sentido, há consonância nos dizeres dos autores citados com os de Lovis e Franco (2015) quando afirmam que existem fragilidades na formação inicial e continuada de professores de Matemática no que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem das Geometrias não Euclidianas.

Com o intuito de contribuir para a formação do professor de Matemática, Brum e Da Silva (2014) buscaram subsidiar a ação docente fornecendo elementos para a construção de atividades de ensino sobre conceitos elementares de Geometria Esférica e Hiperbólica para estudantes de ensino médio baseado nos pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa.

Nesse sentido, os autores desenvolveram um plano de curso voltado para a formação docente que tem como tema gerador o estudo das Geometrias Esférica e Hiperbólica, no qual apresentam como subsídios para sua estruturação os seguintes aspectos: os conhecimentos prévios dos professores, a história da Matemática (em especial da Geometria) e resultados de pesquisas recentes sobre os processos de ensino e aprendizagem.

Teve-se como resultado que os autores reconhecem que a história da Matemática tem um papel importante no processo de formação de professores contribuindo para uma visão holística do pensamento geométrico, podendo revelar obstáculos epistemológicos por meio da semelhança entre os conhecimentos prévios e conhecimentos relativos a teorias científicas. A busca por similaridades ou divergências entre as Geometrias pode contribuir para a compreensão de conceitos geométricos.

Mas, quais são as dificuldades enfrentadas por futuros professores de Matemática no que se refere à aceitação de uma nova métrica, diferente da métrica Euclidiana?

Para responder a tal questionamento Ferreira e Barros (2013) apresentam no artigo intitulado “Relações entre os objetos ostensivos e objetos não ostensivos durante o ensino da geometria do taxista com o software Geogebra” alguns obstáculos didáticos¹¹ que podem dificultar a incorporação das Geometrias não Euclidianas nas aulas de Matemática. Na tentativa de esclarecer os possíveis obstáculos que podem surgir nas aulas de Matemática, os autores enunciam cinco fatores: a generalização abusiva, a regularização formal abusiva, a fixação em

¹¹ Para Brousseau (1983 *apud* Almouloud, 2007) os obstáculos didáticos são aqueles que surgem no processo da escolha do professor de uma estratégia de ensino que é passível de ser questionado ou inconcluso para a construção de conhecimentos, que pode, mais tarde, manifestar-se como obstáculo para o desenvolvimento de conceitos. É no processo de transposição didática, frente às tomadas de decisão do professor, mediante suas concepções sobre o saber em jogo e sua anuência ou não do currículo prescrito.

uma contextualização, à aderência exclusiva a um único ponto de vista e o amálgama de noções (ALMOULOU, 2007 *apud* FERREIRA; BARROS, 2013).

Os autores se apoiam também na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard para explicar a origem dos conceitos matemáticos (não ostensivos) e sua relação com os objetos que o representam (ostensivos) em termos da dialética em que “[...] os conceitos guiam e controlam a manipulação dos ostensivos, mas conceitos também são emergentes da manipulação ostensiva em determinadas organizações didáticas” afirmando assim que o “[...] uso de objetos ostensivos e não ostensivos, são fundamentais para a constituição de uma praxeologia, pois esses objetos ligam as tarefas, as técnicas, as tecnologias e a teoria, ou seja, criam uma boa Organização Matemática”. (FERREIRA; BARROS, 2013, p. 34)

O artigo descreve uma intervenção realizada com 15 discentes do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática em uma Universidade Estadual de uma cidade do noroeste do Paraná. Após aplicação e análise das atividades propostas no processo, os autores se depararam com as dificuldades dos discentes destacando a “generalização abusiva” - em que os objetos ostensivos influenciaram de maneira não correta os não ostensivos e “aderência exclusiva a um único ponto de vista”, portanto, os conceitos da Geometria Euclidiana podem ser caracterizados como obstáculos à construção de conceitos não euclidianos.

Assim, Ferreira e Barros (2013, p. 57) concluem para tal que:

[...] existe a possibilidade de aparecimento de conceitos não científicos (equivocados) advindos dos objetos ostensivos mostrados na tela do computador ao usar o software Geogebra e detectamos manifestações de possíveis obstáculos provenientes da constituição de conceitos euclidianos na aprendizagem de uma nova Geometria.

Brum, Schuhmacher e Da Silva (2015) compreendem a importância do ensino de Geometrias não Euclidianas na formação de professores, alegando que as mesmas servem de instrumentos para diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão do professor sobre a construção do conhecimento geométrico. Além disso, o estudo de outras Geometrias diferentes da Euclidiana pode corroborar para práticas educativas que desarticulem o excesso de formalismo que prevalece no ensino de Geometria nas aulas de Matemática.

Acreditamos que o professor ao conhecer diferentes modelos geométricos pode construir um *corpus* de conhecimentos mais aprofundados no campo da Geometria, aproximando ainda mais os conceitos geométricos da realidade e, por conseguinte, oportunizando a construção de significados para o estudo de diferentes modelos geométricos tanto no Ensino Superior quanto na Educação Básica.

Mas, como tem sido o processo de inclusão das Geometrias não Euclidianas na Educação Básica? E como tem sido a postura do professor de Matemática frente a esse desafio? Esses questionamentos serão focalizados no próximo item desta seção denominada como dimensão curricular.

- Dimensão curricular

Até o presente momento, a RS proposta tem captado os centros de produção de conhecimentos acerca do ensino de Geometrias. Constata-se que a maioria dos estudos é proveniente das regiões sul e sudeste do país onde as diretrizes curriculares voltadas para a Educação Básica foram reformuladas apresentando conteúdos de Geometrias não Euclidianas em sua composição.

A inserção de conteúdos de Geometrias não Euclidianas no currículo escolar tem provocado discussões entre pesquisadores e professores de Matemática, este empasse se deve ao fato de que a apropriação de conceitos geométricos tem exigido do professor abordagens diferenciadas que promovam a ressignificação do ensino de Geometria nas aulas de Matemática, para que a efetiva exploração de sistemas geométricos não euclidianos venha a colaborar para a compreensão de conceitos constituídos no sistema euclidiano.

Neto, Nogueira e Franco (2013) na obra “Geometrias na segunda fase do ensino fundamental: um estudo apoiado na epistemologia genética” evocam os estudos de Piaget e Inhelder (1993) no qual afirmam que as primeiras relações espaciais estabelecidas pela criança são topológicas e partindo das mesmas é que são estabelecidas quase que simultaneamente as relações projetivas e euclidianas. O estudo propõe que as primeiras relações estabelecidas pela criança se constituem num sistema geométrico não euclidiano de ordem topológica e projetiva.

O artigo de Neto, Nogueira e Franco (2013) têm como fundante a identificação do modo de como as crianças de 8 a 12 anos mobilizam algumas ideias básicas à construção de conceitos geométricos durante a resolução de situações-problema. A pesquisa se apoia na Teoria de Piaget que investigou a construção do espaço pela criança, destacando a forma como o percebe e o representa. A fundamentação teórica advém da Teoria da Construção do Espaço e como dito anteriormente, a criança estabelece primeiro as relações de ordem topológicas, para em seguida construir quase que simultaneamente as relações projetivas e euclidianas. Subsidiem-se também na Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud, quando afirma que um conceito demora muito tempo para ser construído.

Para Neto, Nogueira e Franco (2013) o estudo oferece subsídios para a inclusão de Geometrias não Euclidianas na Educação Básica, posto que as situações-problema presentes no artigo contribuíram para que as crianças compreendessem conceitos geométricos no campo das Geometrias: as noções de ponto e do contínuo, as operações de secção, distâncias, caminhos fechados – ângulos e triângulos, e conservação de área.

Por essa leitura analítica e reflexiva, a inclusão de estudos sobre Geometrias na Educação Básica pode ser possível primeiramente perfazendo as práticas investigativas que considerem como prioridade à construção de elementos mais primitivos de cunho topológico, para prosseguir na elaboração das estruturas projetivas e euclidianas, num processo sincrônico e solidário, como aduzem Neto, Nogueira e Franco (2013, p. 102):

Dessa forma, para afirmar como um sujeito mobiliza tais ideias básicas (noção de contínuo, de geometria da superfície esférica, de conservação de área, entre outros), devemos considerar como prioridade a construção dos elementos mais primitivos. Por exemplo, não devemos falar em continuidade, sem apresentar ideias básicas de vizinhança, ordem e separação, pois, como foi visto, o contínuo é a síntese dessas estruturas topológicas; da mesma forma, não devemos apresentar noções de geometria esférica, sem antes serem trabalhadas as estruturas do sistema de coordenadas.

Conclui-se que as ideias geométricas são organizadas gradativamente e o desenvolvimento das crianças se dá por meio de conflitos cognitivos produzidos entre as relações topológicas, projetivas e euclidianas. Tal constatação leva a entender que difere da proposta do currículo escolar, uma vez que pesquisas têm apontado que a Geometria Euclidiana tem sido a primeira ou a única a ser trabalhada em ambiente escolar, com um viés lógico-dedutivo que se distancia dos processos investigativos com base nos aspectos intuitivos dos estudantes (KOBAYASHI, 2001 *apud* NETO; FRANCO; BARROS, 2013).

As geometrias Topológica e Projetiva são designadas como Geometrias não Euclidianas. Dentro da ótica dos autores acima referendados vislumbra-se a dimensão de sua importância para a produção de significados na Educação Básica aguçando os sentidos dos discentes para uma prática investigativa que pode ser manifestada por meio da intuição. Destarte, os autores enfatizam que tendo como ponto inicial uma Geometria não estabelecida somente no plano euclidiano, como por exemplo, a Topológica, pode-se construir uma prática pedagógica que estimule o desenvolvimento cognitivo numa perspectiva intuitiva, para então estabelecer ações lógico-dedutivas tão requeridas pela Geometria Euclidiana.

Leivas (2009) realizou uma pesquisa com cursos de Licenciatura em Matemática do Rio Grande do Sul, no propósito de encontrar disciplinas que instigam reflexões sobre o processo de apropriação de conceitos geométricos na formação inicial do professor de Matemática. O

autor constatou que são ofertadas disciplinas de Geometria Plana e Geometria Espacial, um semestre para cada uma das disciplinas, onde são ministradas na maioria das vezes de maneira axiomática. Além disso, expõe que a disciplina de Geometria Analítica prioriza aspectos algébricos em detrimento aos aspectos geométricos, ou seja, em primeiro lugar constroem-se relações com os algoritmos - os quais enquadram determinadas expressões algébricas nessa ou naquela figura geométrica. Poucos projetos abordam minimamente estudos relacionados a Geometrias não Euclidianas, distanciando o futuro professor de Matemática das descobertas no campo da Geometria.

Leivas (2012) deita um olhar perscrutador sobre a estrutura programática dos cursos de Licenciatura em Matemática, asseverando que esta se encontra longe do ideal e que as disciplinas elencadas são ministradas de modo a não favorecer os aspectos considerados importantes para nortear o ensino de Geometrias, tais como: intuição, visualização e imaginação.

Essas considerações convergem para a hipótese levantada por Brum, Schuhmacher e Da Silva (2015, p. 423) quando afirmam que “[...] é possível que uma formação inicial deficitária de diversos professores acerca dos conhecimentos de outras Geometrias também seja um indicativo para ausência desse tema em sala de aula”.

Outro fator a ser considerado é que os livros didáticos se tornaram o principal norteador das ações do professor em sala de aula, direcionando a atenção a conteúdos algébricos em detrimento dos geométricos. Vogelmann (2011) coloca que de certa forma a maioria dos professores e dos livros didáticos privilegiam o ensino da Aritmética e Álgebra, enquanto a Geometria é deixada em segundo plano.

Dessa forma, discussões sobre o ensino das Geometrias ainda se fazem necessárias para ampliar a compreensão dos professores sobre esse tema, para conhecer linhas metodológicas adequadas ou, ainda, buscar a inserção de textos nos livros didáticos que contemplem o assunto. Tais aspectos podem contribuir para a ressignificação dos conceitos geométricos, gerando novas maneiras de compreender o espaço tendo como suporte as relações existentes entre os sistemas geométricos euclidianos e não euclidianos.

Leivas (2014) sustenta-se nos dizeres de Ponte (2005) ao evidenciar o papel que a Geometria exerce nos processos investigativos, impulsionada pela riqueza dos seus questionamentos e por esses representarem situações reais do dia a dia das pessoas. Além disso, a Geometria permite “[...] desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação.” (PONTE, 2005, p. 71). Nesse horizonte, refletir sobre as investigações no campo da Geometria podem contribuir para o ensino, uma vez que

determinados assuntos em Matemática podem ser acoplados nos currículos, tanto da Educação Básica quanto do Ensino Superior, redimensionando a prática pedagógica de professores de Matemática propiciando também o redimensionando do ensino de Geometria.

A pesquisa desenvolvida por Leivas (2014) teve a participação de sete estudantes do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, onde possibilitou a discussão de como introduzir no currículo escolar e universitário mudanças na maneira da abordagem de conceitos geométricos. Para tanto, buscou compreender como os estudantes interpretavam e representavam elipses, parábolas e hipérboles a partir de uma métrica não euclidiana, denominada de Geometria do Táxi ou Geometria Urbana.

O autor justifica a inclusão das Geometrias não Euclidianas na formação de professores, tanto no âmbito da formação inicial quanto continuada, uma vez que a investigação da métrica não euclidiana corroborou para a produção de significados sobre a aplicabilidade da Geometria do Táxi, assim como apontou os limites da Geometria Euclidiana no estudo de distâncias em áreas urbanas. Além disso, salientou a importância de realizar abordagens de outras Geometrias na formação de professores, destacando a existência da Geometria Topológica, como exemplo, em que a questão de medidas não é o fator principal e sim a continuidade.

Brum e Da Silva (2014) afirmam que há a existência de discussões acerca da inserção de Geometria Esférica e Hiperbólica nos currículos escolares, encontrados nos textos dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática - PCN (1998), os quais apresentam a importância do ensino das outras Geometrias aos estudantes:

[...] a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma *única geometria do real*, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma **pluralidade de modelos geométricos**, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico (BRASIL, 1998, p. 24, grifo nosso).

Segundo o PCN é a partir da identificação da pluralidade de modelos geométricos presente na natureza que podemos compreender as diferenças entre objetos geométricos por meio de estudos em diversas áreas do saber, tais como: na navegação, no Sistema de Posicionamento Global – GPS, no campo da Geografia física ao se referir ao planeta Terra, na Física para compreender o comportamento da luz no espaço, em objetos do nosso cotidiano (trompetes, batata empalhadas, cornetas, ondas do mar, poltronas, garrafas de vidro, entre outros).

Os autores Brum e Da Silva (2014) expõem que o ensino de Geometria não Euclidiana se manifesta há quase três décadas em algumas propostas curriculares brasileiras, como por exemplo, no Currículo Básico da Prefeitura Municipal de Curitiba (1988) ou na Proposta Curricular para a Matemática do Ensino Fundamental de São Paulo (1991, p. 88) que sugere o ensino da Geometria não Euclidiana para “[...] concretizar as noções de círculos máximos e circunferências máximas, respectivamente, em esferas e superfícies esféricas [...]”.

Brum e Da Silva (2014) ao analisarem livros didáticos afirmam que estes apresentam uma visão linear do conhecimento geométrico em que os temas de Geometria não Euclidiana encontram compartimentalizados em capítulos (Visão geral da geometria não euclidiana, a queda do quinto postulado, os matemáticos do século XVI, etc) e separados dos conteúdos de Geometria. Assim, temas como geodésicas e triângulo esférico não são abordados no capítulo destinado ao ensino de Geometria não Euclidiana, descobrindo-se que esta forma linear foi observada em todos os livros analisados. Os autores se apoiam em Cabariti (2006) quando sugerem que as diferenças e correlações existentes entre os modelos geométricos e suas propriedades devem ser estudadas no mesmo momento que são inseridas as ideias euclidianas, sem que haja uma separação entre as Geometrias.

Contudo, os livros analisados por Brum e Da Silva (2014) reproduzem o modelo tradicional de ensino, com leitura de textos e resolução de exercícios e, no geral, é inexistente práticas que incentivam a pesquisa e a educação científica, bem como, não há preocupação em correlacionar conteúdos no campo da Geometria. Vale ressaltar que a “[...] visão linear, muitas vezes alienada da produção de conhecimento que ainda permeia o ensino, reforça a ideia de que a Geometria não Euclidiana é para poucos gênios privilegiados que acertam sempre os problemas propostos” (BRUM; DA SILVA, 2014, p. 104).

O trabalho intitulado “O Processo de Inserção das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Escola Paranaense: a visão dos professores participantes” de autoria das pesquisadoras Caldato e Pavanello (2014) teve o objetivo de investigar como ocorreu o processo de elaboração do currículo vigente no estado do Paraná cuja prerrogativa foi amparada na visão de professores que dele participaram, considerando especificamente como aconteceu a inserção das Geometrias Não Euclidianas.

A inserção do estudo das Geometrias na Educação Básica da rede estadual de ensino do Paraná (2008) já é uma realidade e nos textos que compõem as Diretrizes Curriculares da Disciplina de Matemática, no tópico Conteúdos Estruturantes onde comportam que:

Entende-se por Conteúdos Estruturantes os conhecimentos de grande amplitude, os conceitos e as práticas que identificam e organizam os campos de estudos de uma

disciplina escolar, considerados fundamentais para a sua compreensão. Constituem-se historicamente e são legitimados nas relações sociais. Os Conteúdos Estruturantes propostos nestas Diretrizes Curriculares, para a Educação Básica da Rede Pública Estadual, são: Números e Álgebra; Grandezas e Medidas; **Geometrias**; Funções; Tratamento da informação (PARANÁ, 2008, p. 49, grifo nosso).

O conteúdo estruturante das Geometrias engloba estudos sobre Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica e Noções Básicas de Geometrias não Euclidianas. As Geometrias não Euclidianas, no que tange ao Ensino Fundamental, contempla os conteúdos: Geometria Projetiva, Geometria Topológica e noções de Geometria dos Fractais. Já para o Ensino Médio os conteúdos relacionados a esse campo são: Geometria dos Fractais, Geometria Projetiva, Geometria Hiperbólica e Elíptica.

O documento curricular apresentado propõe algumas possibilidades para abordar o estudo das Geometrias na Educação Básica, ressaltando assim as analíticas do PCN (1998) que se transcrevem:

Para abordar os conceitos elementares da Geometria Hiperbólica, uma possibilidade é através do postulado de Lobachevsky (partindo do conceito de pseudo-esfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma dos seus ângulos internos). Já na apresentação da Geometria Elíptica, fundamentá-la através do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodesia; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto à medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: polos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento (PARANÁ, 2008, p. 57).

Entretanto, a investigação proposta pelas autoras constatou que a inserção das Geometrias não Euclidianas ficou a cargo da equipe técnica de Matemática da Secretaria da Educação do Estado do Paraná (SEED) e a participação dos docentes nas discussões se limitou à distribuição dos conteúdos nas séries, uma vez que os conteúdos foram estabelecidos pela equipe técnica da SEED. Em outras palavras, o discurso presente nos documentos oficiais do Estado do Paraná de uma construção coletiva, envolvendo professores e corpo técnico da Secretaria de Educação, não transladou da teoria para a prática, atestando que a implementação do tema nas Diretrizes Curriculares da Disciplina de Matemática tão somente teve interesses e intenções políticas advindas da equipe técnica sobre o desenvolvimento dos conceitos geométricos.

As autoras sugerem que o conteúdo de Geometrias não Euclidianas deixará de ser parte constituinte somente do currículo prescrito¹² para ser efetivamente implementado nas aulas de Matemática (currículo em ação¹³) quando estudos sobre esse tema forem abordados tanto na fase da formação inicial dos professores como nos programas de formação continuada e somente através do esforço coletivo envolvendo professores e especialistas do tema, como reporta o discurso proposto pelos documentos oficiais – Diretrizes Curriculares do Paraná (Matemática), tal situação será realmente efetivada.

Assis (2017) em seu trabalho intitulado “A Geometria Hiperbólica nos currículos escolares e universitários”, verificou de que forma os currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática e as propostas curriculares do Ensino Básico no Brasil contemplam o ensino da Geometria Hiperbólica.

A pesquisa analisou as ementas de trinta e cinco cursos e as propostas curriculares para o Ensino Básico dos estados em que tais cursos estão inseridos. O autor constatou que vinte e três cursos mencionam de maneira sucinta a Geometria Hiperbólica e que o estudo desse modelo geométrico aparece de duas formas nas propostas curriculares dos cursos: “[...] através de componentes que tratam de questões históricas ou filosóficas da Matemática; ou por meio de componentes que tratam de conceitos (propriamente ditos) da geometria dentro de um contexto não euclidiano” (ASSIS, 2017, p. 401, grifo do autor).

Segundo o autor, a Geometria Hiperbólica está sendo inserida aos poucos no Ensino Superior juntamente com outros modelos geométricos não euclidianos em uma única disciplina curricular e, devido a esse aspecto, a sua exposição pode apresentar-se menos aprofundada. Quanto ao Ensino Básico, o autor coloca que somente os estados do Ceará, São Paulo e Paraná apresentam em suas propostas curriculares o ensino de modelos geométricos diferentes do euclidiano.

O autor conclui que a Geometria Hiperbólica ainda não detém o mesmo espaço que a Geometria Euclidiana no contexto do Ensino Superior e no da Educação Básica e que a elaboração das diretrizes curriculares estaduais devem considerar o tipo de formação que os professores de Matemática tem recebido.

¹² Compreende-se aqui currículo prescrito ou currículo formal aquele que se refere ao currículo estabelecido pelos sistemas de ensino, expresso em diretrizes curriculares, objetivos e conteúdos das áreas ou disciplina de estudo. Nele estão prescritos institucionalmente os conjuntos de diretrizes como os Parâmetros Curriculares Nacionais.

¹³ Entende-se aqui o currículo em ação ou currículo real aquele que se manifesta dentro da sala de aula, no dia a dia de professores e alunos, em decorrência de um projeto pedagógico e dos planos de ensino.

3.5 Considerações acerca da Revisão Sistemática

A RS permitiu a realização de uma síntese dos estudos desenvolvidos sobre o ensino de Geometrias, identificando os centros de pesquisas no Brasil, a amplitude dos mesmos, bem como possíveis questionamentos ainda não investigados que podem contribuir para novas reflexões nesse campo de pesquisa.

Em termos da investigação, constatou-se que os centros de pesquisas concentram-se na região Sul e Sudeste do país, principalmente nos Estados em que o conteúdo de Geometrias não Euclidianas foi incorporado nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica, fomentando algumas discussões que transcendem os muros das universidades que realizam estudos na área. A inserção do tema nos currículos escolares desses Estados contribuiu de certa forma para reflexões acerca do pensamento geométrico que vão desde o ensino de Geometria na Educação Básica até o Ensino Superior. Tais reflexões podem proporcionar ao professor novas práticas de ensino que minimizem a importância dada à abordagem axiomática da Geometria, corroborando para atividades de investigação que clarividenciem o desenvolvimento da imaginação, intuição e visualização.

Quanto ao aspecto epistemológico do conhecimento geométrico, os estudos analisados apontam que grande parte dos professores de Matemática desconhece a existência das Geometrias não Euclidianas, conduzindo-os a lecionar apenas a Geometria Euclidiana e, conseqüentemente, a falta de conhecimentos sobre diferentes Geometrias podem produzir obstáculos de cunho epistemológicos e/ou didáticos que impedem o surgimento de práticas inovadoras para o amplo ensino da Geometria; assim ainda vão arraigando uma abordagem exclusivamente axiomática do pensamento geométrico, no qual o professor prioriza aspectos aritméticos e algébricos em detrimento dos aspectos geométricos.

Durante as análises compreende-se que a história da Matemática, principalmente a história da construção do conhecimento geométrico pode contribuir de maneira significativa para uma visão mais ampla do professor, rompendo com a ideia simplória dada aos postulados de Euclides, em especial, o quinto postulado conhecido como Postulado das Paralelas, proporcionando um novo olhar para o professor de Matemática sobre o espaço: seja este plano ou curvo.

A história do conhecimento geométrico não serve somente para expor o momento de gênese da Geometria não Euclidiana, mas sim para construir uma visão mais ampla da Matemática como Ciência em que os construtos de sua epistemologia vão se modificando

conforme o tratamento dado aos postulados de Euclides, projetando novas formas de saber e fazer no campo da Geometria.

Leivas (2012) validou em suas pesquisas que as relações topológicas, a exemplo, referentes às noções de vizinhança, separação, interior e exterior são conceitos trabalhados em algumas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, mas essas noções são apresentadas desvinculadas do conhecimento geométrico, dificultando a articulação de ações interdisciplinares entre as disciplinas, podendo impedir o futuro professor de Matemática de realizar algumas articulações semelhantes na Educação Básica.

Com tudo que foi explanando, acredita-se que a busca por similaridades ou divergências entre as Geometrias possa contribuir para a compreensão de conceitos geométricos, à medida que a exploração de outro espaço, diferente do plano euclidiano, pode desarticular a lógica-formal vinculada ao atual ensino de Geometria, desarrolhe o desenvolvimento de novas práticas de ensino e assim ressignificar o conhecimento geométrico comumente abordado nas aulas de matemática.

Um aspecto importante que o professor de Matemática deve saber sobre a essência¹⁴ do conhecimento geométrico é compreendê-lo como um produto da atividade humana, em que esse saber é socialmente construído a partir do momento em que o homem transforma a natureza em função das suas necessidades, assim, a complexificação da atividade humana exige a produção de um conhecimento geométrico mais aprimorado que atenda às novas exigências.

Nessa perspectiva, o conhecimento geométrico se estabelece devido às necessidades dos nossos antepassados, principalmente os gregos, que construíram um modelo geométrico que fosse capaz de transformar o espaço que observavam, isto é, a Geometria Euclidiana é imposta a natureza como uma forma de transformar e explicar os fenômenos que emergem dela. Já as Geometrias não Euclidianas emergiram da complexificação do Postulado das Paralelas proposto por Euclides, com o intuito de compreender o espaço (natureza) como ele se apresenta e a partir dele matematizar ou geometrizar os fenômenos observados.

Assim, constatou-se que a ausência das Geometrias não Euclidianas na sala de aula pode ser atribuída a formação deficitária do professor de Matemática acerca do tema e a inexistência de abordagens nos livros didáticos utilizados nas aulas, uma vez que o livro didático ainda é o principal norteador das ações do professor. Além disso, Vogelmann (2011) coloca que de certa

¹⁴ Entende-se o termo essência como uma síntese de várias abstrações no processo de desenvolvimento de uma forma de conhecimento e que se apresenta em seus objetos mais elementares e mais desenvolvidos (PANOSSIAN, 2013 *apud* SANTOS, 2015).

forma a maioria dos professores e dos livros didáticos privilegiam o ensino da Aritmética e Álgebra, enquanto a Geometria é deixada em segundo plano.

A revisão de literatura constituída nesse trabalho contribuiu para a delimitação do problema de pesquisa desta tese de doutorado, uma vez que as análises realizadas apontaram fragilidades na formação inicial de professores de Matemática sobre estudos direcionados ao campo de Geometria, em particular, as consideradas não Euclidianas. A partir dessa problemática, a presente pesquisa busca investigar o ensino de Geometrias não Euclidianas na formação inicial de professores de Matemática partindo do seguinte questionamento: De quais formas os licenciandos do curso de Matemática compreendem e podem vir a compreender as Geometrias não Euclidianas?

Para construir o *corpus* teórico que permita analisar a compreensão dos licenciandos a respeito das Geometrias não Euclidianas, buscamos aproximação deste termo a partir do conceito de significado e sentido presentes em fontes primárias da Teoria Histórico-Cultural, destacando nas obras de Vygotsky e Leontiev com os construtos teóricos desses conceitos e as bases filosóficas que os constituíram.

4 A CONSTRUÇÃO DO REFERENCIAL TEÓRICO SOB A LUZ DA PERSPECTIVA HISTÓRICO-CULTURAL

Esta pesquisa, ao considerar a complexidade do ensino de Geometrias nas aulas de Matemática, em particular nos cursos de Licenciatura em Matemática, busca tecer reflexões acerca dos desafios relacionados ao desenvolvimento do conhecimento geométrico a partir da análise de significados produzidos por futuros professores de Matemática sobre o estudo de Geometrias não Euclidianas. Para tanto, os pressupostos teórico-metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino (AOE) propostos por Moura (1996, 2001) serão considerados como contexto para a negociação de significados entre os participantes da pesquisa. Concomitante a esse caminho, será desenvolvida a análise da produção de significados arregimentada nos aportes teóricos da Teoria Histórico-Cultural que tem como expoente Vygotsky (1987) e na Teoria da Atividade de Leontiev(1978).

4.1 Perspectiva Histórico-Cultural e seus desdobramentos

A Teoria do desenvolvimento das funções mentais superiores idealizada por Vygotsky e conhecida por muitos como a Teoria Histórico-Cultural ou Teoria Sociocultural assume a posição de que o homem desenvolve suas funções psicológicas superiores por meio de relações e interações com os demais, em que os conhecimentos são adquiridos ao longo do processo histórico cultural vivido em sociedade. É nesse movimento de apropriação cultural que o homem transforma seu meio e, ao mesmo tempo, transforma a si mesmo.

Para compreender a teoria vygotskyana se faz necessário revisitar os pressupostos teóricos do marxismo. É na compressão do materialismo histórico-dialético proposto por Marx e Engels que encontramos a alma do trabalho de Vygotsky, constituída pela própria historicidade dialética.

Assevera Elhammoumi (2016, p. 26) que o “[...] paradigma de pesquisa histórico-cultural de Vygotsky foi concebido dentro do quadro teórico do materialismo dialético e da concepção materialista da história”, assumindo a posição de que a realidade é inerentemente material e dialética. Nessa perspectiva, a Teoria Histórico-Cultural tem sua gênese nas concepções do Marxismo desenvolvidas inicialmente por Marx e, posteriormente, teve as contribuições de Engels (TRIVIÑOS, 1987).

Segundo Triviños (1987) o Marxismo compreende, na globalidade, três aspectos principais: o materialismo dialético, o materialismo histórico e a economia política. O

materialismo dialético é a fundamentação filosófica do marxismo que busca explicações coerentes, lógicas e racionais para os fenômenos da natureza, da sociedade e do pensamento. Nesse percurso, o materialismo dialético tem o estudo da teoria do conhecimento e a elaboração da lógica como seus objetos filosóficos. Triviños (1987, p. 51) sustenta que o enfoque dialético da realidade “[...] mostra como se transforma a matéria e como se realiza a passagem das formas inferiores às superiores”.

Ao considerar o dinamismo do conhecimento, e situá-lo historicamente, compreende-se um dos principais pilares do materialismo dialético que reconhece a prática social como critério de verdade, ou seja, as verdades científicas são tidas como níveis de conhecimentos e sua aceitação está limitada ao espaço-tempo da sua história.

Por esse ângulo, tem-se que o materialismo histórico é considerado a filosofia do marxismo que tem como essência estudar “[...] as leis sociológicas que caracterizam a vida da sociedade, de sua evolução histórica e da prática social dos homens, no desenvolvimento da humanidade” (TRIVIÑOS, 1987, p. 51). O materialismo histórico proposto por Marx e Engels evidencia que as ideias podem transformar as bases socioeconômicas e as relações de produção de uma sociedade.

Para González e Mello (2014) o materialismo histórico-dialético preconizado por Marx tem a história humana constituída pela história do próprio desenvolvimento humano, isto é, o ser humano se humaniza por meio do trabalho que realiza quando transforma a natureza e, traz como resultante, a construção de uma sociedade que é inerente à sua própria essência.

O contexto histórico da gênese do trabalho de Vygotsky é marcado pela sua localização espaço-temporal inserido nos primeiros anos tumultuados da Revolução Bolchevique¹⁵ na Rússia, país este em processo de reconstrução onde enfrentava problemas econômicos que incidiram na escassez de alimentos e na proliferação de mortes por tuberculose. Outro fator importante diz respeito à sua formação intelectual que foi profundamente influenciada pelos pensamentos do marxismo de modo que “[...] o objetivo maior era construir, sob a tutela da teoria marxista, uma nova sociedade, o que implicaria, também, a construção de uma nova ciência” (LUCCI, 2006, p. 3).

Foi nesse cenário, de extrema necessidade de transformação, que o materialismo histórico-dialético conquistou adeptos tornando-se o método mais coerente de leitura da

¹⁵ Maiores informações em: STEINBERG, Isaac. **Os socialistas-revolucionários de esquerda na Revolução Russa: uma luta mal conhecida**. Tradução: Plínio Augusto Coelho – Florianópolis. Editoria em Debate, 2012. 175 p.

realidade em seu desenvolvimento histórico. Nessa perspectiva, Vigotsky¹⁶ no texto “O significado histórico da crise da psicologia” [...] expõe o seu interesse pela teoria marxista com vistas à construção de uma ciência que permita investigar o psiquismo humano: “o que desejo é apreender, na globalidade do método de Marx, como se constrói a ciência, como enfocar a análise da psique” (Vigotsky, 1999, p. 395).

Segundo Lucci (2006), a Teoria Histórico-Cultural ou Sociocultural do psiquismo humano de Vygotsky tem como base as ideias de Marx e Engels, a dialética de Hegel, o evolucionismo de Darwin, entre outros. Os estudos deram origem ao objeto de interesse a psicologia de Vygotsky ao tomar como ponto de partida as funções psicológicas dos indivíduos, classificando-as em elementares de ordem naturais e superiores de ordem culturais. Nesta última se encontra o coração do trabalho de Vygotsky que propõe a consciência como um objeto de interesse da Psicologia do Conhecimento.

Para Marx e Engels (1993), a constituição das representações ideais que os homens fazem da vida e os processos e fenômenos não é um regime natural, mas sim, um processo contrário que surge do comportamento material do homem.

A produção de ideias, de representações, da consciência, está, de início, diretamente entrelaçada com a atividade material e com o intercâmbio material dos homens, como a linguagem da vida real. O representar, o pensar, o intercâmbio espiritual dos homens, aparecem aqui como emanção direta de seu comportamento material (MARX; ENGELS, 1993, p. 36).

Essa concepção proposta por Marx e Engels sobre a constituição da consciência está imbricada com a atividade material e com a permuta material dos homens, sendo esta absorvida por Vygotsky (2001, p. 2) propondo que “[...] para a psicologia moderna, não é nenhuma novidade que a consciência é um todo único e que funções particulares estão inter-relacionadas em sua atividade” e a “[...] consciência se desenvolve como um processo integral, modificando a cada nova etapa a sua estrutura e o vínculo entre as partes” (VYGOTSKY, 2001, p. 283). É na atividade e nas relações sociais que o homem desenvolve graus variáveis de tomada de consciência do mundo em que vive, de sua existência e das suas próprias ações.

Vygotsky (2001) se apropria das concepções de Engels sobre o trabalho humano e uso de instrumentos como mediadores para o homem transformar a natureza e, conseqüentemente, transformar a si mesmo. Nesse sentido, Lucci (2006, p. 140) coloca que “[...] os instrumentos

¹⁶ As diferentes – Vygotsky ou Vigotsky – aparecem no texto de acordo como o pesquisador foi citado nos textos estudados. Houve, porém em nossa pesquisa uma identificação com a escrita Vygotsky por ser a mais próxima do proponente da pesquisa.

são meios externos utilizados pelos indivíduos para interferir na natureza, mudando-a e, conseqüentemente, provocando mudanças nos mesmos indivíduos”. Esse conceito é explorado por Engels (1985, p. 73) citado por Triviños (1987, p. 62) elaborando que em se tratando do processo de desenvolvimento do homem, a mão é apenas o instrumento do trabalho, mas também produto do mesmo, seguindo assim com outras ilações:

Desse modo, a mão é apenas o órgão do trabalho; ela é também produto dele. Só pelo trabalho, pela adaptação a operações sempre novas, pela transmissão hereditária do aperfeiçoamento particular por esse fato ganho pelos músculos, ligamentos e, em espaços de tempo maiores, também pelos ossos e por uma aplicação sempre renovada desse refinamento hereditário a novas operações sempre mais complicadas, a mão humana alcançou aquele alto grau de perfeição...”

Engels (1985) utiliza as ideias sobre trabalho e instrumentos para explicitar o processo de humanização do homem para dessa maneira traçar a diferenciação entre o ser humano dos outros animais viventes na natureza. Nas palavras de Engels (1985, p. 74) a distinção entre a espécie humana e demais animais se deve ao fato de “[...] o animal meramente usa a natureza externa, mudando-a pela sua simples presença; o homem, através de suas transformações, faz com que a natureza sirva a seus propósitos, dominando-a”. Nessa direção, reforça-se que é o trabalho que opera de forma essencial na diferenciação entre as espécies.

Assim, surge um conceito imprescindível para a construção da teoria vigotskyana que medeia a relação homem-mundo para além do uso de instrumentos, denominando-os de signos que são, nas abordagens de Lucci (2006, p. 6) os “[...] mediadores internos, instrumentos psicológicos que dirigem e controlam as ações psicológicas do próprio indivíduo ou de outros indivíduos”.

Vygotsky compreende que tanto os sistemas de signos¹⁷ quanto o sistema de instrumentos são criações das sociedades ao longo da história humana e mudam a forma social e o nível de seu desenvolvimento cultural. Para Vygotsky as transformações intelectuais do indivíduo são provocadas por intermédio da internalização dos sistemas de signos produzidos culturalmente e estabelece um elo entre as funções elementares e superiores do desenvolvimento individual (COLE *et al.*, 1991).

Instaura-se assim as ideias de Vygotsky (1998, p. 25) que constrói a Teoria Histórico-Cultural (THC) com a finalidade de “[...] caracterizar os aspectos tipicamente humanos do comportamento e elaborar hipóteses de como essas características se formaram ao longo da história humana e de como se desenvolvem durante a vida de um indivíduo”.

¹⁷ Os sistemas de signos compreendem a linguagem, a escrita, os sistemas numéricos, etc.

Lucci (2006, p. 5) expõe as assertivas da THC com o intuito de ponderar os construtos teóricos que serviram de alicerce, destacando a dimensão social e cognitiva de sua teoria:

- a) o homem é um ser histórico-social ou, mais abrangentemente, um ser histórico-cultural; o homem é moldado pela cultura que ele próprio cria;
- b) o indivíduo é determinado nas interações sociais, ou seja, é por meio da relação com o outro e por ela própria que o indivíduo é determinado; é na linguagem e por ela própria que o indivíduo é determinado e é determinante de outros indivíduos;
- c) a atividade mental é exclusivamente humana e é resultante da aprendizagem social, da interiorização da cultura e das relações sociais;
- d) o desenvolvimento é um longo processo marcado por saltos qualitativos que ocorrem em três momentos: da filogênese (origem da espécie) para a sociogênese (origem da sociedade); da sociogênese para a ontogênese (origem do homem) e da ontogênese para a microgênese (origem do indivíduo único);
- e) o desenvolvimento mental é, em sua essência, um processo sociogenético;
- f) atividade cerebral superior não é simplesmente uma atividade nervosa ou neuronal superior, mas uma atividade que interiorizou significados sociais derivados das atividades culturais e mediada por signos;
- g) a atividade cerebral é sempre mediada por instrumentos e signos;
- h) a linguagem é o principal mediador na formação e no desenvolvimento das funções psicológicas superiores;
- i) a linguagem compreende várias formas de expressão: oral, gestual, escrita, artística, musical e matemática;
- j) o processo de interiorização das funções psicológicas superiores é histórico, e as estruturas de percepção, a atenção voluntária, a memória, as emoções, o pensamento, a linguagem, a resolução de problemas e o comportamento assumem diferentes formas, de acordo com o contexto histórico da cultura;
- k) a cultura é interiorizada sob a forma de sistemas neurofísicos que constituem parte das atividades fisiológicas do cérebro, as quais permitem a formação e o desenvolvimento dos processos mentais superiores.

Em consonância com as ideias supracitadas, Almeida (2000, p. 35) apresenta uma visão holística da THC afirmando que:

A teoria de Vygotsky tem como perspectiva o homem como um sujeito total enquanto mente e corpo, organismo biológico e social, integrado em um processo histórico. A partir de pressupostos da epistemologia genética, sua concepção de desenvolvimento é concebida em função das interações sociais e respectivas relações com processos mentais superiores, que envolvem mecanismo de mediação. As relações homem-mundo não ocorrem diretamente, são mediados por instrumentos ou signos fornecidos pela cultura.

Em suma, os estudos direcionados por Vygotsky apresentaram grande interesse em compreender e descrever o processo de desenvolvimento das funções mentais superiores do indivíduo, de modo que sua teoria baseia-se na interação entre homem-mundo por meio do trabalho apropriado culturalmente e mediado por instrumentos e signos.

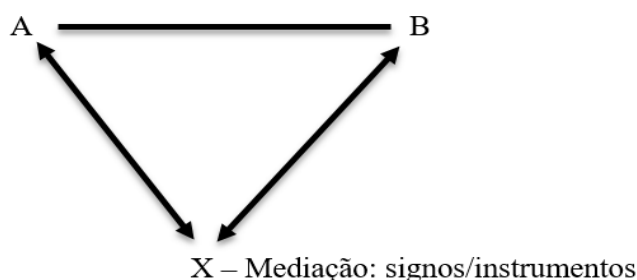
4.2 A Teoria Histórico-Cultural

4.2.1 Mediação: um processo de interação entre sujeito e ambiente

Na visão de Molon (1995) a mediação é um construto teórico que norteia toda a Teoria Histórico-Cultural. Noutro ponto de concepção, Vygotsky(1998) diz que a mediação é justamente o processo pelo qual a ação do indivíduo sobre o objeto é mediada por um elemento específico. Na visão de Oliveira (1996, p. 26), a mediação é uma função estabelecida entre o homem e o ambiente que decorre do “[...] processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação”, posto isso, a relação deixa de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento.

Para melhor compreender o processo conhecido como mediação proposto na THC, apoia-se no esquema sugerido por Moysés (1997, p. 24) em que A é o estímulo e B, a resposta associado a A e X é o instrumento psicológico ou material.

Figura 5 - Esquema proposto por Vygotsky



Fonte: Adaptada de Moysés (1997).

Para a THC o contexto sociocultural se apresenta como elemento mediador entre o homem (sujeito do conhecimento) e a realidade (objeto a ser compreendido). Nessa perspectiva, a linguagem é o principal mediador na formação e desenvolvimento das funções psicológicas superiores. A linguagem constitui-se em um sistema simbólico, concebido no curso da história social do homem que ao organizar os signos em estruturas complexas, possibilita-lhe tramitar de funções psicológicas elementares (regulação, vontade, percepção) para as funções psicológicas superiores (autoregulação, consciência, intencionalidade, atividade mediadora, dentre outras) tendo em vista a transformação da realidade.

4.2.2 Processo de Interiorização: desenvolvimento das funções psicológicas superiores

A ideia central da THC proposta por Vygotsky nos orienta que o desenvolvimento das funções psíquicas superiores se dá na interação social e por intermédio do uso de signos. Nesta perspectiva, o âmago do desenvolvimento cognitivo está relacionado à “[...] **internalização dos mediadores culturais**, ou seja, à transformação do cultural em psicológico” (ABREU, 2000, p. 108, grifo da autora).

Para Castorina (1996) quaisquer transformações no plano interpsicológico provocam transformações no plano intrapsicológico, desconsiderando nesse processo a mera “transmissão” de um plano para o outro, mas sim uma “transformação”. Assim, o sujeito internaliza por meio de interações sociais e estas ao serem constatadas, são apropriadas, recriadas e incorporadas às suas estruturas. A construção de significados é feita pelo sujeito, transformando-o e, em sequência, transformando a realidade.

Vygotsky (1998, p. 163) ao explicar o processo de interiorização afirma que a gênese social das funções mentais superiores está expressa na Lei Genética Geral do Desenvolvimento Cultural, que assim orchestra:

Qualquer função presente no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos distintos. Primeiro, aparece no plano social, e depois, então, no plano psicológico. Em princípio, aparece entre as pessoas e como uma categoria interpsicológica, para depois aparecer na criança, como uma categoria intrapsicológica. Isso é válido para atenção voluntária, a memória lógica, a formação de conceitos e o desenvolvimento da vontade. [...] a internalização transforma o próprio processo e muda sua estrutura e funções. As relações sociais ou relações entre as pessoas estão na origem de todas as funções psíquicas superiores.

Na leitura que segue, pode-se inferir que Vygotsky defende que o desenvolvimento das funções mentais superiores dos indivíduos está atrelado a dois planos distintos, ordenados e categorizados, em um processo de interação entre essas pessoas. O processo de internalização ocorre, em primeira instância, nas interações sociais constituídas pelos indivíduos ao desenvolverem uma determinada atividade, de maneira externa ao sujeito, mediada por instrumentos que possuem objetivos específicos e modos de utilização produzidos no momento histórico da atividade coletiva (FICHTNER, 2010). O estágio seguinte do processo de internalização ocorre no interior do indivíduo, no campo cognitivo, com a finalidade de dirigir e controlar as ações do próprio indivíduo, criando novas formas e processos de representação dos objetos da realidade. Esse estágio do processo de internalização é fruto de uma construção histórica e cultural da sociedade denominada por Vygotsky de signo. Seguindo a linha de pensamento, Faria (2013, p. 70) confecciona as seguintes conceituações:

Um signo é um estímulo artificial ou autogerado e tem por características: a atuação nas funções psicológicas superiores (atenção voluntária, memória e outras), a ação reversa que corresponde à ação sobre o indivíduo e não sobre o meio, a capacidade de conduzir o indivíduo a um comportamento distinto daquele relacionado à estimulação ambiental criando novas formas e processos baseados na cultura

Na concepção analítica de Vygotsky (1998) toda função intrapsicológica é uma construção histórico-social que se manifesta a partir de uma função interpsicológica, ou seja, toda a passagem do plano externo para o plano interno no indivíduo é mediada por um sistema simbólico que produz significações para as suas vivências e servem como estímulo para orientar a sua forma de sentir, pensar e agir.

Seguimos então evocando a lógica de que cada função psíquica do indivíduo ao ser internalizada implica numa nova reconstrução cognitiva que correlaciona a nova função com outras já existentes. O processo de internalização não ocorre como uma simples transmissão de conhecimentos do plano externo para o plano interno, como uma mera cópia de um determinado objeto, entretantes como uma coordenação entre estruturas cognitivas novas e antigas.

Isto posto, aclara-se a compreensão auferida por Vygotsky de que a passagem do plano externo (relações interpessoais) para o plano interno (relação intrapessoal) é mediada por um sistema de representações, na qual denotou o papel da linguagem como elemento preponderante no desenvolvimento das funções psicológicas superiores (WERTSCH, 1988).

Vygotsky (1998) pontua sua ação reflexiva afirmando que a linguagem surge como um instrumento de vital relevância que expressa o pensamento agindo no sentido de transformar qualitativamente a estrutura cognitiva do indivíduo, moldando a estrutura do pensar e, conseqüentemente, reestruturando diversas funções psicológicas, como a memória, a atenção voluntária, a formação de conceitos e demais.

4.2.3 Zona de Desenvolvimento Proximal: um conceito importante para o processo de ensino e aprendizagem

A Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) é um dos conceitos da THC mais difundido na Educação por contribuir de maneira significativa para o repensar do papel do professor no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que defende a importância da mediação do professor para a formação e apropriação de conceitos por parte dos educandos.

Para Vygotsky a ZDP é constituída pela “área” ou “diferença” compreendida entre o saber já apropriado pelo indivíduo - refletida naquilo que o indivíduo pode fazer sozinho e o saber que pode ser apropriado pelo indivíduo por meio da mediação de indivíduos mais

experientes - ponderada naquilo que o indivíduo pode vir a aprender ou a fazer com a ajuda de outras pessoas.

Traduzindo as abordagens de Vygotsky (1993) a ZDP é definida da seguinte maneira:

A distância entre o nível real de desenvolvimento, determinado pela capacidade de resolver independentemente um problema, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de um problema sob a orientação de um adulto ou em colaboração com outro parceiro mais capaz (VYGOTSKY, 1993, p. 133, tradução nossa).

No cenário educacional este conceito possibilita redimensionar a prática pedagógica, uma vez que o modo de formação e apropriação de conhecimentos passa a ter considerável relevância no processo de ensino e aprendizagem e, portanto, deve ser considerado tão importante quanto o produto gerado no fim do processo.

Na esteira de compreensão o professor assume o papel de agente mediador do processo de aprendizagem, propondo aos educandos situações-problema desafiadoras e ajudando-os a resolvê-las, num processo colaborativo marcado pela interação entre os alunos e o professor.

Nosso entendimento a respeito da ZDP nos leva a crer que o professor, sujeito consciente de suas atribuições como agente mediador no processo de ensino e aprendizagem, é o principal responsável pela sua prática pedagógica e deve identificar a capacidade real de seus educandos para resolver determinados problemas, bem como, vislumbrar o nível de desenvolvimento potencial de seus educandos para colaborar da melhor forma possível na construção de novos conhecimentos.

Vygotsky ao refletir sobre a ZDP afirma de maneira categórica que “[...] ensinar uma criança aquilo que é incapaz de aprender é tão inútil como ensinar-lhe a fazer o que é capaz de realizar por si mesma” (1993, p. 245). Esse pensamento contesta o ensino que se limita ao nível de desenvolvimento real do indivíduo, propondo que o único bom ensino é aquele que está para além do desenvolvimento real com vista na internalização de um novo saber.

O pensamento de Vygotsky apresenta para o professor o quanto é necessário identificar o nível de desenvolvimento real do educando acerca de determinado conteúdo, isto é, evidencia a importância de identificar o conhecimento prévio do educando, de maneira que o permita reconhecer a ZDP em que o estudante se encontra e, a partir daí, criar condições que possibilitem a apropriação do novo. O professor consciente dessa ação pode assumir na lógica interna do processo de ensino e aprendizagem o papel de mediador da construção de conhecimentos.

Sarmento (2006) traz as explanações de Wertsch (1988) que asseveram ser mais adequado utilizar o termo Zona de Desenvolvimento Próximo, alegando que a tradução literal deste termo do idioma russo para o espanhol sugere a ideia de mais próximo ou mais imediato o que pode provocar melhor entendimento do termo, uma vez que o mesmo surge dentro do contexto das problemáticas relacionadas “[...] à avaliação das capacidades intelectuais das crianças e à avaliação das práticas de instrução” (WERTSCH, 1988, p. 83).

Na tradução realizada por Pasqualini (2011) da obra de Chaiklin intitulada “The zone of proximal development in Vygotsky’s analysis of learning and instruction”¹⁸ publicada em 2003, apresenta como aspecto importante da ZDP o pressuposto da assistência, uma concepção comum sobre a teoria que nos faz crer que “[...] o professor competente é importante para a aprendizagem, a noção de zona de desenvolvimento próximo é com frequência utilizada para focalizar a importância de auxílio [de um par] mais competente” (PASQUALINI, 2011, p. 662). O autor chama a nossa atenção para o fato de que Vygotsky considera que “[...] a criança é sempre capaz de fazer mais e resolver tarefas mais difíceis em colaboração, sob direção ou mediante algum tipo de auxílio do que independentemente”. (VYGOTSKY, 1987, p. 209).

Na concepção do supracitado autor, o que Vygotsky põe em pauta não resume como fator primordial a competência em si da pessoa mais experiente, mas o fato de quão é importante “[...] compreender o significado da assistência em relação à aprendizagem e desenvolvimento da criança”. (PASQUALINI, 2011, p. 662). Em outras palavras, na educação o pressuposto da assistência não deve focar a competência do professor como o aspecto mais relevante no processo de ensino e aprendizagem; o professor não está no centro do processo. Pelo contrário, o educando é quem está no centro do processo de ensino e aprendizagem; fato esse que coloca a compreensão do significado da assistência como o aspecto mais relevante em relação à aprendizagem e desenvolvimento do indivíduo.

É possível observar o quanto é importante para o processo de aprendizagem a compreensão da assistência nos dizeres de Vygotsky quando este afirma que “o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer” (1987, p. 101).

¹⁸ Tradução do capítulo de livro: CHAIKLIN, Seth. The zone of proximal development in Vygotsky’s analysis of learning and instruction. In: KOZULIN, A., GINDIS, B., AGEYEV, V. S.; MILLER, S.M. (orgs.), *Vygotsky’s educational theory in cultural context*. Cambridge University Press, 2003. Com autorização da Cambridge University Press.

Quando se trata de aprendizagem, angariamos nos estudos de Costa e Peres (2012, p. 6-7) que sua elaboração se faz como um fenômeno ocorrido num evento que plaina um plano ainda mais efetivo, ou seja:

[...] se dá no plano psicológico envolvendo as funções mentais humanas, mas que sofre a influência dos processos social e cultural, com variados fatores que envolvem a história pessoal/coletiva de cada indivíduo, inclusive **processos pedagógicos escolares** (Grifo nosso).

Nos últimos dizeres dos autores é possível perceber a elevada importância que a organização do ensino tem para o processo de aprendizagem, reafirmando o papel do professor quanto à necessidade de compreender o significado da assistência na construção de conhecimento.

Por esse ângulo, Pereira (1996, p. 79), em consonância com as tessituras de Vygotsky, busca dentro da THC estabelecer a finalidade da aprendizagem escolar destacando que:

[...] desempenha um amplo papel – o de permitir a apropriação e interiorização dos conhecimentos históricos e socialmente acumulados e o de promover o desenvolvimento das funções psicológicas superiores que deem condições ao indivíduo de constituir-se enquanto sujeito, capaz de pensar e transformar a realidade por ele vivenciada.

Em síntese, o papel que a interação mediada desempenha na constituição dos processos de aprendizagem e do desenvolvimento das funções psicológicas superiores é um aspecto transformador do trabalho pedagógico que assume a humanização dos indivíduos a partir da apropriação e internalização dos saberes constituídos historicamente e culturalmente, perpassando por todas as situações interativas em uma sala de aula. Esse pensamento, em nosso entendimento, é o que diferencia essa perspectiva teórica de outras utilizadas na Educação.

Sobre a perspectiva teórica preconizada por Vygotsky, Martins (2016, p. 120) leciona que:

1. O processo de construção do conhecimento pressupõe a superação da síncrese pela mediação da análise, tendo em vista a formulação da síntese, condição para a formação dos ‘verdadeiros conceitos’.
2. À educação escolar compete, articulando forma e conteúdo, socializar os conhecimentos historicamente sistematizados ampliando o universo de significações, todavia, de significações calcadas naquilo que rege, objetivamente, a realidade concreta.
3. O trabalho pedagógico, pautado no ensino de conceitos científicos é mediação requerida à reprodução do concreto pela via do pensamento, é exigência para o alcance do pensamento abstrato e enriquecimento da consciência dos indivíduos.

Caminhando pelas estradas concretas das ideias de Martins (2013) notamos a relevância da ZDP para a formação de conceitos, uma vez que a compreensão de tal conceito nos orienta em relação ao papel do professor (enquanto mediador) e do estudante (enquanto sujeito ativo) no processo de ensino e aprendizagem.

Dessa maneira, o professor deve dentro do processo constituir-se numa autoridade que se manifesta por meio de sua responsabilidade nos processos de apropriação de conhecimento. Na esteira do que foi explanado, Garuti (1995, p. 102) propõe que:

[...] o valor das intervenções do professor, pois ficou evidenciado que sua participação no processo interativo é fundamental para que as interações sejam frutíferas como estratégias pedagógicas. Na tentativa de promover a construção do conjunto do conhecimento, é o professor que terá o papel de propiciar interações entre os alunos, mediando-as sempre que necessário, garantindo a cada parceiro a possibilidade de contribuir para o trabalho que está sendo partilhado.

Nesse sentido, um fator relevante para a Educação que é abordado com clareza pela THC diz respeito a imprescindibilidade da interação mediada entre o professor (sujeito historicamente constituído de um saber) e aluno (sujeito ativo em formação). É no reconhecimento da importância da mediação que o professor pode contemplar em seu planejamento as possibilidades de apropriação de determinado saber pelo educando.

4.2.4 Formação de Conceitos: entrelaces entre os conceitos espontâneos e os conceitos científicos

Vygotsky, em busca de uma teoria que fosse capaz de responder alguns questionamentos acerca do desenvolvimento do psiquismo humano, teve a colaboração de renomados estudiosos da perspectiva histórico-cultural. Dentre eles destacam-se Leontiev (1978, 1988), Luria (1982), Elkonin (1987), Talízina (1988), Bozhóvich (1987), Davydov (1995). Segundo Lima (2001), o legado dessa corrente histórico-cultural de produção do conhecimento contribui de maneira significativa para a Educação, instigando reflexões de práxis pedagógicas interessadas sobre o desenvolvimento de formas superiores de condutas, levando em conta a maximização de possibilidades de aprendizagem e desenvolvimento cultural do homem.

Nas investigações sobre o desenvolvimento do psiquismo humano a formação de conceitos é defendida por Vygotsky e colaboradores como uma extensão do processo de internalização e, conseqüentemente, da apropriação de um conhecimento. Em outras palavras, a construção de conceitos é, por excelência, uma atividade mediada por signos, que ocorre no

campo cognitivo do indivíduo, com a finalidade de dirigir e controlar as ações do próprio indivíduo, criando novas formas e processos de representação dos objetos da realidade.

Segundo Rego (1995, p. 77-78) na perspectiva histórico-cultural defendida por Vygotsky os conceitos são entendidos como um sistema de relações e generalização contida nas palavras e determinados por um processo histórico-cultural:

[...] são construções culturais, internalizadas pelos indivíduos ao longo de seu processo de desenvolvimento. Os atributos necessários e suficientes para definir um conceito são estabelecidos por características dos elementos encontrados no mundo real, selecionados como relevantes pelos diversos grupos culturais.

Outro aspecto relevante na THC diz respeito aos conceitos espontâneos e aos conceitos científicos. Assim, os conceitos espontâneos são aqueles que o indivíduo aprende em seu cotidiano, originados de experiências com determinados objetos, fatos, fenômenos etc. Já os conceitos científicos correspondem aqueles que são sistematizados e transmitidos intencionalmente, a partir de uma metodologia própria. Nesse sentido, reconhecemos o papel social da escola de viabilizar a formação de conceitos científicos nos indivíduos para que estes se insiram em práticas de produção de bens e serviços necessários para o desenvolvimento social, político, econômico e tecnológico da sociedade.

Nas elucubrações de Moysés (1997) a existência de um conceito científico está sempre atrelada a um sistema hierarquizado do qual ele faz parte e, conseqüentemente, cabe ao professor a tarefa de mediar o processo de construção desse tipo de conceito junto ao educando, de modo a “[...] estabelecer um enlace indireto entre o estudante e o objeto por meio das abstrações em torno das suas propriedades e da compreensão das relações que ele mantém com um conhecimento mais amplo” (MOYSÉS, 1997, p. 35). Assim, a formação de um conceito científico só se estabelece através de uma ação intencional e sistematizada que possibilita ao sujeito uma relação consciente e consentida com o objeto do saber em jogo.

Para Vygotsky (2005) existem três fases para a constituição de conceitos: conglomerado vago e sincrético de objetos isolados, pensamento por complexos e formação de conceitos. Quanto ao “conglomerado vago e sincrético de objetos isolados”, o indivíduo agrupa os objetos de forma desorganizada em amontoados, sem considerar as propriedades específicas que podem diferenciá-los ou classificá-los. Já na fase denominada “pensamento por complexo” os agrupamentos realizados pelo indivíduo são oriundos de sua percepção imediata dos objetos relacionados pelas semelhanças concretas entre as especificidades dos mesmos. Nessa fase, a formação dos grupos não segue um pensamento lógico abstrato capaz de promover

generalizações mais profundas, o que sugere um estágio de desenvolvimento denominado de pseudoconceito que se limita a reconhecer, classificar e separar os objetos. A última fase, denominada “formação de conceitos”, que está para além da fase de pensamento por complexo, propõe que o indivíduo é capaz de realizar no processo de análise e síntese, de abstração e segregação de características, ações que o permitiram migrar do particular para a generalização como da generalização para o particular. Destaca Vygotsky (1987, p. 95):

Abstrair, isolar elementos, e examinar os elementos abstratos separadamente da totalidade da experiência concreta de que fazem parte. Na verdadeira formação de conceitos, é igualmente importante unir e separar: A síntese deve combinar-se com a análise. O pensamento por complexos não é capaz de realizar essas duas operações.

Vygotsky (1987) ao analisar a complexidade do processo de formação dos conceitos, afirma que este surge da ação dinâmica do pensamento, dentro da pirâmide de conceitos, que tem a orientação para dois níveis distintos: a fase do pensamento por complexos e a fase de formação por conceitos. Estas fases oscilam entre duas direções, do particular para o geral e do geral para o particular.

Então, a escola assume o papel de propiciar ao educando à internalização e apropriação de conceitos hierarquicamente sistematizado. Não se atendo a detectar o nível de importância que os conceitos espontâneos ou científicos possuem de forma segregada, mas sim, reconhecendo a importância dos conceitos científicos para o desenvolvimento dos conceitos espontâneos como bem explicita Moysés (1997, p. 38):

Vygotsky chegou à conclusão de que o domínio de um nível mais elevado na esfera dos conceitos científicos eleva, por sua vez, o nível dos conceitos espontâneos. Há um movimento no qual os científicos descem em direção da realidade concreta e os espontâneos sobem buscando a sistematização, a abstração e a generalização mais ampla. Encontrou evidências de que o atingimento e o controle de conceitos científicos implicam a reconstrução, seguindo os mesmos moldes, dos conceitos espontâneos.

Nesse sentido, Vygotsky coloca que seria um grande erro subestimar as experiências pessoais dos estudantes (conceitos espontâneos), uma vez que “[...] a educação se faz através da própria experiência do aluno, a qual é inteiramente determinada pelo meio, e nesse processo o papel do mestre consiste em organizar e regular o meio” (2004, p. 64). É por meio da mediação do professor que o processo de formação de conceito se constitui em um percurso de mão dupla, onde os conceitos científicos podem ir ao encontro da realidade concreta dos discentes, fazendo com que os conceitos quotidianos encontrem significações para a sistematização, abstração e a ampla generalização.

Em suma, o processo de relacionar as experiências dos educandos (conceitos espontâneos) com os conhecimentos historicamente sistematizados e referendados nas práticas humanas (conceitos científicos) exige do agente mediador (professor) a compreensão dos diferentes significados que esses conceitos têm para os educandos. É por meio da organização adequada do ensino que o professor pode perceber em quais contextos surgem tais conceitos e quais são os sentidos nos quais eles estão sendo empregados (MOYSÉS, 1997).

4.2.5 A produção de significado e sentido: alguns aspectos teóricos

Para Vygotsky (1993) a essência da formação de conceitos se constitui nas relações estabelecidas entre os sujeitos e os objetos dentro de um contexto histórico-cultural que lhes atribuem significados, isto é, os conceitos se materializam em um processo de desenvolvimento histórico, por meio de uma ação compartilhada entre os sujeitos, adquirindo em determinado contexto um sentido próprio e pessoal para cada indivíduo.

Vygotsky coloca que a formação de conceitos não se constitui em um processo passivo, estático, cumulativo, que pressupõe um sistema de simples associações, automatizado e repetitivo, mas sim, um processo vivo e complexo do pensamento, capaz de comunicar, assimilar, entender ou resolver problemas. Nas palavras do autor temos que “[...] o conceito não é simplesmente um conjunto de conexões associativas que se assimila com a ajuda da memória, não é um hábito mental automático, mas um **autêntico e completo ato do pensamento**” (VYGOTSKY, 1993, p. 184, nosso grifo).

Como percebemos compreender o desenvolvimento das funções psíquicas superiores é o objeto de estudo da THC e para realizar esse estudo Vygotsky buscou esclarecer como se dá a produção de significados e sentidos pelos sujeitos, a fim de tratar das relações entre linguagem e pensamento. Dessa maneira, a formação de conceitos está intrinsecamente ligada a evolução do pensamento e da linguagem, pois é na conexão entre eles que um modifica e desenvolve o outro (VYGOTSKY, 1987).

Vygotsky (2003, p. 33) afirma que não existe pensamento sem linguagem:

[...] o momento de maior significado no curso do desenvolvimento intelectual, que dá origem às formas puramente humanas de inteligência prática e abstrata, acontece quando a fala e a atividade prática, então duas linhas completamente independentes de desenvolvimento, convergem.

Nos dizeres de Vygotsky, o pensamento não pode ser encontrado diretamente na palavra, ele se realiza ou se finda nela. A relação entre pensamento e linguagem é um

movimento de mão dupla onde um transforma e desenvolve a outra no decorrer do próprio desenvolvimento histórico do homem. Assim, devemos compreender que a materialização do pensamento através da linguagem exige a busca excessiva pela captação do sistema de relações que produziu um significado compartilhado por diferentes sujeitos até a investigação da forma como este foi empregado (o contexto em que surgiu) produzindo sentido todo próprio e pessoal para cada um (VYGOTSKY, 1993).

Para Vygotsky (2001) diz que o sentido se torna uma atividade humana consciente que surge na operacionalização da significação, em um processo histórico e cultural em busca da produção de conceitos, uma vez que:

o sentido de uma palavra é a soma de todos os fatos psicológicos que ela desperta em nossa consciência. Assim, o sentido é sempre uma formação dinâmica, fluida, complexa, que tem várias zonas de estabilidade variada. O significado é apenas uma dessas zonas do sentido que a palavra adquire no contexto de algum discurso e, ademais, uma zona mais estável, uniforme e exata (VYGOTSKY, 2001, p. 465).

Dessa maneira, a diretriz da obra de Vygotsky nos orienta que o pensamento conceitual se dá por meio de significados socialmente compartilhados e não apenas reproduzidos no processo de transição construtiva que estrutura-se a partir do diálogo entre as dimensões sociais (interpessoal) e individuais (intrapessoal). Ao compartilhar significados o sujeito constrói os seus próprios referenciais, o que chamamos de sentidos.

Em síntese, o conhecimento produzido por um homem ou grupo de homens só se constitui efetivamente em significação para os outros membros da espécie quando os sujeitos são inseridos na atividade humana que é mediatizada por esse conhecimento, processo que lhe confere significado social e sentido pessoal (MOURA; SFORNI; ARAÚJO, 2011, p. 44).

Referente ao ambiente escolar, os conceitos são formalizados a partir do momento em que o estudante consegue exprimir o que pensa e encontra uma solução para determinada tarefa, estabelecendo relação entre o significado social e o sentido pessoal atribuído à solução encontrada. Assim, os conceitos se tornam “instrumentos nossos quando conseguimos pensar com eles, estabelecer relação entre seu significado social e o sentido pessoal que lhes atribuímos” (MOURA; SFORNI; ARAÚJO, 2011, p. 44).

A compreensão da relação entre significado e o sentido atribuído a determinado conceito se torna um aspecto imprescindível para reconhecermos problemas no processo de aprendizagem, ou seja, dependendo do contexto em que o professor aborda uma palavra na sala de aula para trabalhar um novo conteúdo, o aluno pode não compartilhar do mesmo nível de

profundidade e amplitude de conceito, o que pode gerar desentendimentos e distanciamento entre a condição real e a condição potencial do discente frente a apropriação do conhecimento novo.

O papel do professor como mediador do processo de ensino e aprendizagem exige que o mesmo busque conhecer o alcance dos significados e sentidos atribuídos pelos discentes às suas falas, uma vez que “dependendo do contexto uma palavra pode significar mais, ou menos, do que significaria se considerada isoladamente: mais, porque adquire um novo conteúdo; menos, porque o contexto limita e restringe o seu significado” (VYGOTSKY, 1987, p. 125).

Desse modo, no desenvolvimento das funções psíquicas superiores o significado de cada palavra é uma generalização, um conceito. Cabe ao professor organizar adequadamente as atividades voltadas para o ensino, ficando sempre atento durante o processo de compartilhamento de significados nas relações estabelecidas pelo docente-discente/discente-discente a possibilidade de haver equívocos, distorções e outros problemas que podem ser encarados como obstáculos didáticos no processo de aprendizagem.

Na pretensão de alcançar os objetivos desse trabalho, numa perspectiva histórico-cultural em que “[...] o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer” (VYGOTSKY, 1987, p. 101), propõem-se as Atividades de Ensino como contexto para estimular a negociação de significados entre licenciandos do curso de Matemática acerca do estudo de Geometrias não Euclidianas.

4.3 Teoria da Atividade: conceitos e perspectivas

Vygotsky ao compreender o materialismo histórico-dialético preconizado por Marx, que tem como tese principal a humanização do homem por meio do trabalho que realiza quando transforma a natureza e, consequentemente, constrói uma sociedade que lhe é inerente à sua própria essência, propõe o conceito de *mediação* enfatizando que o homem se desenvolve através de suas relações e interações com os outros, vivendo em sociedade num processo de apropriação da cultura construída pela humanidade. Nessa dinâmica, o ser humano desenvolve suas funções psicológicas superiores e, assim, difere dos animais através da relação e uso que faz do pensamento e da linguagem. A ideia de atividade assumida por Vygotsky em seus estudos retrata uma ação mediada na tríade sujeito, objeto e instrumentos/signos.

Segundo Daniels (2003), o modelo de Vygotsky descreve a relação mediada entre os seres humanos e o ambiente: o “sujeito” é o agente cujo comportamento se pretende analisar;

os “artefatos mediadores” são objetos (materiais ou ideais) utilizados pelo sujeito para atingir seu resultado; e o “objeto” refere-se ao material bruto sobre o qual o sujeito vai agir, mediado pelas ferramentas, em interações contínuas com outras pessoas.

Figura 6 - Relação mediada do sujeito humano com o meio



Fonte: Adaptada de Daniels (2003, p. 114).

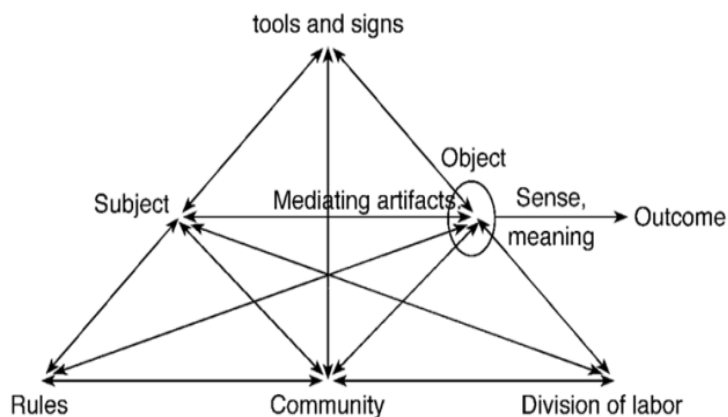
Leontiev a partir dos pressupostos da THC ocupou-se em estudar a atividade mental e a sua relação com o próprio desenvolvimento da personalidade do homem (MOYSÉS, 1997). Os estudos desenvolvidos deram um significado mais aprofundado ao termo atividade, propondo a atividade como processos humanos psicologicamente caracterizados com o fim de satisfazer uma necessidade, distinguindo-se, de uma simples ação. O sentido atribuído ao termo atividade inspirou a gênese de sua teoria, a qual a designou de Teoria da Atividade (LEONTIEV, 1978).

Nesse sentido, Leontiev aprofunda o conceito de atividade e transgride a visão central de uma ação mediada para um processo de desenvolvimento coletivo, na qual a função articulada por indivíduos torna-se um modo de organização de cada sujeito, em que a ação intersíquica vai se transformando em ação intrapsíquica (MOYSÉS, 1997). Portanto, surge a segunda geração da Teoria da Atividade (TA) tendo Leontiev como seu principal representante.

Na afirmativa de Braida (2012) compreende-se que o estudioso Leontiev trouxe contribuições importantes para o conceito de atividade ao passo que centralizou seu foco na inter-relação complexa entre o sujeito individual e sua comunidade. Assim, o modelo proposto por Vygotsky não foi ampliado para um sistema de atividade coletiva, mas adaptado de tal forma que o foco de um sistema de atividade humana não se concentrava somente no nível micro (sujeito individual e os instrumentos que opera), possibilitando também a realização de análises no nível macro (coletivo e comunidade).

Para melhor compreender a evolução da segunda geração da TA, Engeström (2001) apresenta a seguinte estrutura de um sistema de atividade humano.

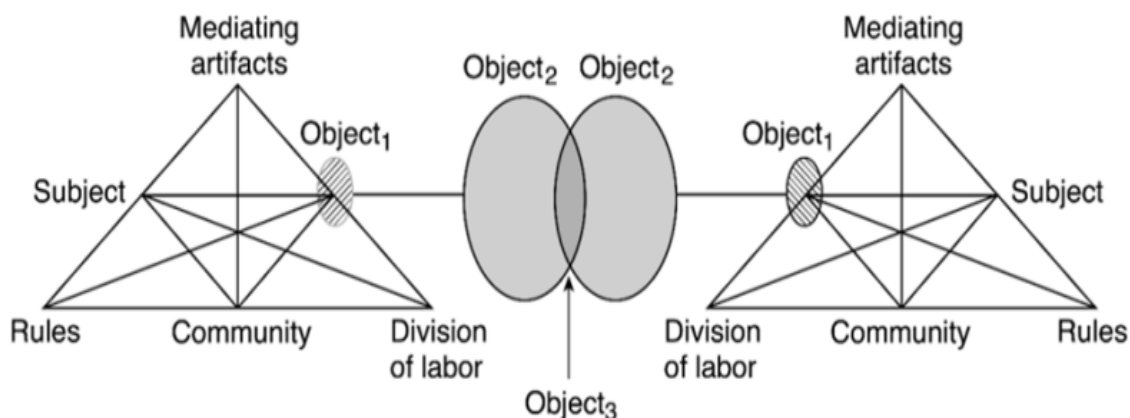
Figura 7 - Estrutura de um sistema de atividade humano



Fonte: Engeström (2001).

A terceira e última geração da TA tem como expoente Yrjö Engeström que propõe como foco do sistema de atividade humano é o coletivo. Esse modelo exige minimamente dois sistemas – sistema de atividade e sistema de Interação, na qual considera que o objeto é compartilhado (DANIELS, 2003). Na figura 8, encontra-se o modelo desenvolvido por Engeström para a terceira geração da TA.

Figura 8 - Dois sistemas de atividades interagindo em um modelo mínimo da terceira geração da Teoria da Atividade



Fonte: Engeström (2001).

Engeström (1999) citado por Daniels (2003, p. 121) exemplifica os dois sistemas – sistema de atividade e sistema de interação, juntamente com o objeto potencialmente compartilhado:

O objeto passa de um estado inicial de ‘matéria bruta’ irrefletida, situacionalmente dada (objeto 1; por exemplo, um paciente específico entrando num consultório médico) para um objeto coletivamente significativo, construído pelo sistema de

atividade (objeto 2; por exemplo, o paciente construído como um espécime de uma categoria biomédica de enfermidade e, portanto, uma instanciação do objeto geral de doença/saúde) e para um objeto potencialmente compartilhado ou conjuntamente construído (objeto 3; por exemplo, uma compreensão colaborativa construída da situação de vida e do plano de saúde do paciente). O objeto de atividade é alvo móvel, não redutível a metas conscientes de curta duração (Grifo do autor).

Dessa forma, a terceira geração da TA lança ideias de redes complexas entre sistemas de atividade, em que cada sistema faz inter-relações uns com os outros, influenciando-os simultaneamente. Assim, os objetos podem ser potencialmente compartilhados entre os sujeitos.

Cassagrande e Querol (2013, p. 12) sistematizaram e construíram um quadro comparativo das principais diferenças entre as três gerações:

Quadro 4 - Elementos distintivos entre as três gerações da Teoria da Atividade

Geração	Objeto de estudo	Principais conceitos	Unidade Investigativa	Unidade de Análise	Principais autores
1ª Geração	Formação de conceitos na criança	Mediadores da ação	Escola	Ação mediada	Vygotsky
2ª Geração	Sistema de atividade coletiva	sistema de atividade, objeto, mediação	Um organização de trabalho	Sistema de atividade	Leontiev, Davydov, Engeström
3ª Geração	Rede de atividades	objeto compartilhado	Um conjunto de organizações com objeto compartilhado	Dois ou mais sistemas de atividade com objeto compartilhado	Engeström

Fonte: (CASSAGRANDE; QUEROL, 2013).

Os autores apontam ao comparar as três gerações que as principais mudanças estão no objeto de estudo de cada geração, que parte de uma visão individual, na primeira geração, passando na segunda geração para um sistema de atividade coletiva e na terceira, o foco está na rede de atividades (objeto potencialmente compartilhado).

Quanto a unidade de investigação ela também se difere nas três gerações, partindo da escola (unidade de análise – ação mediada) passando para a organização de trabalho (unidade de análise – sistema de atividade) e, por último, um conjunto de organizações com objeto compartilhado (unidade de análise – dois ou mais sistema de atividade com objeto compartilhado).

É relevante frisar que a divisão proposta nos parágrafos anteriores para descrever a evolução da TA é apenas um artifício didático, não se tem a intenção de sobrepor uma geração sobre a outra, dizendo que uma é melhor do que outra, mas sim, desvelar o processo de evolução do conceito de atividade e compreender as vertentes dessa teoria como uma construção histórica

e cultural, que se estabelece por meio da interação entre os estudiosos e suas necessidades quanto pesquisadores.

Para compreendermos a importância das gerações da TA, basta realizar uma pequena busca nos grupos de pesquisas para constatar que muitos pesquisadores escolhem o modelo teórico que melhor atende aos seus interesses, transitando desde Vygotsky, Leontiev, passando por Davydov e chegando Engeström e demais estudiosos, sem ter a necessidade de se apoiar em um único modelo teórico, muito menos classificar um deles como o melhor.

Dessa maneira, após constatarmos as especificidades de cada geração da TA propõe-se como modelo teórico de investigação para essa tese, a segunda geração, por ter como objeto de investigação a organização do ensino através das ações teórico-metodológicas da Atividade Orientadora de Ensino como contexto para estimular a negociação de significados entre futuros professores de Matemática sobre o estudo de Geometrias não Euclidianas (MOURA, 1996).

4.3.1 Construtos teóricos da TA proposta por Leontiev

Após a síntese sobre a evolução da TA acreditamos ser necessário buscar uma definição para essa teoria que pudesse esclarecer o seu campo de pesquisa, bem como as diversas facetas de sua constituição. Dessa maneira, na obra intitulada “Perspectives on Activity Theory” de Engeström; Miettinen e Punamäki (1999, p.2) encontramos uma definição para a TA a qual traduzimos como:

A Teoria da Atividade é uma abordagem interdisciplinar das ciências humanas que se origina na escola da psicologia histórico-cultural, iniciada por Vygotsky, Leontiev e Luria. A Teoria da Atividade considera o sistema de atividade coletiva orientado a objetos e mediado por artefatos como sua unidade de análise, preenchendo assim o abismo entre o sujeito individual e a estrutura social.

A definição apresentada acima consegue, a nosso ver, compreender todas as gerações da TA, uma vez que enfatiza o campo de pesquisa na área das ciências humanas, destacando o seus aspectos multidisciplinares e sua gênese na THC desenvolvida por Vygotsky e seus colaboradores. Descreve a evolução da TA na concepção de Leontiev ao propor sua unidade de análise o sistema da atividade coletiva orientada para o objeto e mediada por artefatos, criando pontes entre o sujeito individual e a estrutura social.

A partir dessa definição e tomando consciência do objeto de estudo dessa tese, nos apoiaremos nos pressupostos teóricos sobre a TA proposta por Leontiev, buscando caracterizar seus aspectos mais relevantes a partir do conceito de atividade.

A terminologia da palavra práxis, transcrita do grego, refere-se à noção de atividade social prática. Na concepção marxista a terminologia “[...] designa o conjunto de relações de produção e trabalho, que constituem a estrutura social, e a ação transformadora que a revolução deve exercer sobre tais relações” (ABBAGNANO, 2007, p. 797). Em outras palavras, a práxis é uma atividade plenamente perceptível e consciente para o homem.

No campo da Psicologia sabemos que as ideias de Marx serviram de inspiração para o desenvolvimento da THC de Vygotsky, que ao utilizar as noções de atividade social oportunizou o surgimento de outra teoria denominada Teoria da Atividade, inicialmente desenvolvida por Leontiev, Rubinstein e Luria.

Para Daniels (2003) o objetivo dos teóricos da atividade é analisar os impactos psicológicos da atividade organizada, considerando as condições e sistemas gerados em e por tal atividade. Assim, a atividade social prática se torna unidade de análise para o desenvolvimento da consciência.

Dessa maneira, Leontiev (1988, p. 68) no contexto da TA define a atividade da seguinte forma:

[...] aqueles processos que, realizando as relações do homem com o mundo, satisfazem uma necessidade especial correspondente a ele [...]. Por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objeto que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo.

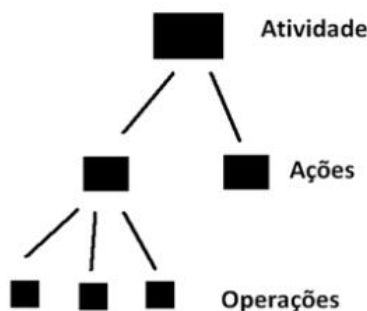
Leontiev (1978) se apropria dos estudos de Vygotsky e propõe que a atividade do homem é um processo de mão dupla entre os extremos sujeito e objeto, onde se manifestam os movimentos recíprocos, seja este um objeto material ou simbólico. Dessa forma, o autor pontua o aspecto objetivo da atividade, ressaltando a qualidade de ser sempre, e, necessariamente, orientada por um objeto.

Para Leontiev (1978) a atividade designa os processos que, efetivando as relações do homem com o mundo, satisfazem uma necessidade especial a ele correspondente (o motivo), enquanto outros processos que não atendem a esse pressuposto são por ele denominados de ações e operações. Nesse sentido, Kozulin (2004) menciona que Leontiev sugere que a atividade corresponde a um motivo, ação corresponde a um objetivo e operação depende de condições.

Segundo Leontiev (1978), a atividade é composta por ações, que têm relação direta com os objetivos. Essas ações, por sua vez, são compostas de operações, que podem ser definidas como os meios pelos quais as primeiras serão desenvolvidas.

A figura a seguir ilustra os elementos de uma atividade:

Figura 9 - Componentes de uma atividade



Fonte: Leontiev (1978).

Leontiev (1978) explica que uma ação pode ser realizada por diferentes operações e, esclarece que de maneira análoga, distintas ações podem ser desempenhadas pelas mesmas operações. O autor apresenta três níveis para diferenciar e relacionar os elementos estruturantes da atividade humana, associando motivo, meta e condições, com atividade, ação e operação.

Segundo Daniels (2001), o nível mais baixo e automático compreende-se a operação, inconsciente, que consiste nas rotinas realizadas pelo sujeito, associadas a uma ação e influenciadas pelas condições gerais da atividade. O nível seguinte consiste nas operações conscientes que surgem na forma de ação, podendo ser esta realizada pelo indivíduo ou grupo e subjugadas a uma meta. No último nível, consiste na atividade que é orientada a um motivo e realizada coletivamente.

Figura 10 - Estrutura hierárquica da Atividade de Leontiev



Fonte: Daniels (2001).

Leontiev (1978), no que tange à relação entre operação e ação, afirma que no momento que uma ação se automatiza ela passa a ser uma operação, possibilitando o surgimento e o desenvolvimento no indivíduo de ações cada vez mais complexas. Em palavras do próprio

autor, “[...] toda a operação é resultado da transformação de uma ação que ocorre com um resultado de sua inclusão e sua subsequente ‘tecnização’”. (LEONTIEV, 1978, p. 66, grifo do autor).

Ilustramos a relação dos elementos da estrutura da atividade, adaptando uma situação proposta por Leontiev (1978, p. 97) que tem a leitura de um livro como atividade de estudo para um indivíduo:

- A atividade é regida por seu motivo(s) – o estudante realiza um processo de leitura para obter conhecimentos necessários para ser aprovado em determinado exame ou para desempenhar uma futura profissão no mercado de trabalho. Para cada necessidade a leitura da obra terá um sentido para o indivíduo.
- As ações são regidas por seus objetivos – o estudante pode ler os capítulos ou conteúdo mais enfatizado pelo professor em sala de aula (conhecimento para o exame); ou realizar a leitura global da obra para compreender o campo de atuação e possíveis situações-problema que possa surgir durante o exercício da sua função como profissional de uma determinada área (conhecimentos para atuar).
- As operações são regidas pelas condições da leitura – como o estudante realiza diversas tarefas, elas dependerão de diversos fatores. Tais como: conhecimento em jogo, tipo de livro, luz adequada para o estudo, momento do estudo, local de estudo, etc.

Sforni (2006, p. 7-8) nos diz que o movimento entre atividade, ação e operação revela o processo contínuo de desenvolvimento do sujeito e sintetiza todas as ideias acima expostas:

1. Para que uma ação tenha significado para o sujeito, é necessário que ela seja produzida por um motivo;
2. Para que as ações passem para um lugar inferior na estrutura da atividade, tornando-se operações, é preciso que novas necessidades ou motivos exijam ações mais complexas;
3. Para que, subjetivamente, o sujeito sinta novas necessidades ou motivos que o estimulem a agir em um nível superior, é preciso que esteja inserido em um contexto que produza, objetivamente, a necessidade de novas ações;
4. Para que uma operação seja automatizada de forma consciente, é necessário que ela se estruture inicialmente na condição de ação.

Os elementos estruturantes da atividade humana são fundamentais para compreendermos as relações entre significado e sentido como componentes estruturais da consciência, que orienta a atividade no mesmo momento em que é por ela regulada, determinada (LEONTIEV, 1978). O autor debruça sobre dois importantes conceitos para o desenvolvimento de estudos na perspectiva Histórico-Cultural de Vygotsky: significado e

sentido, proporcionando um novo olhar para tais termos, expondo novas sutilezas em relação aos mesmos, denominando-os de significação social¹⁹ e sentido pessoal.

O esboço dessa pesquisa tem como cenário a formação inicial do professor de Matemática e pretende a partir da TA encontrar bases teóricas e metodológicas que favoreçam analisar a produção de significados de licenciandos do curso de Matemática sobre o estudo de Geometrias não Euclidianas.

Nesse sentido, utilizamos os termos significados social e sentido pessoal na acepção de Leontiev (1983) para realizar o estudo sobre a produção de significados. O autor coloca que o ser humano se vê imerso em um mundo de significações a partir das atividades que realiza. Essas significações traduzem e apresentam as normas, os conhecimentos à cultura de uma determinada sociedade, tornando-os sentido pessoal.

Leontiev (1978, p. 94) propõe como definição para o conceito de significação social:

A significação é a generalização da realidade que é cristalizada e fixada num vector sensível, ordinariamente a palavra ou a locução. É a forma ideal, espiritual da cristalização da experiência e das práticas sociais da humanidade. [...] A significação pertence, portanto, antes de mais, ao mundo dos fenômenos objetivamente históricos.

Em outras palavras, as significações sociais devem ser compreendidas como a generalização da realidade por meio das práticas sociais conjuntas, a forma ideal da existência humana, imerso num mundo objetivamente histórico e cultural.

Nas interações de Asbahr (2014) o processo de significação social se constitui como fenômeno da consciência individual, que tem por finalidade produzir dentro de sua subjetividade o conteúdo social. A forma como o sujeito se apropria ou não de determinadas significações, depende exclusivamente do sentido pessoal apreendido pelo sujeito.

Nesse entendimento, tem-se que Leontiev (1978) compreende o sentido pessoal como sendo produzido de forma subjetiva pelo sujeito e corresponde objetivamente entre o motivo da realização da atividade (aquilo que move ação) e seu objetivo imediato (aquilo que a orienta seu fim). Dessa forma, Duarte (2004) aduz que a consciência humana estrutura-se e funciona a partir das relações entre significado e sentido, uma vez que a atividade humana é realizada por meio da relação mediada psiquicamente entre o seu motivo, o conteúdo de cada ação que a compõe (significado da ação) e seu objetivo final.

¹⁹ Nesta pesquisa, os termos significado social e significação social serão utilizadas para expressar o mesmo conceito.

Ainda nas proposições de Duarte (2004) a educação escolar contemporânea tem como um dos grandes desafios viabilizar que a aprendizagem dos conteúdos escolares possa proporcionar determinado sentido para os estudantes. O ensino como principal atividade do professor deve ser organizado, intencional e sistematizado de modo a desencadear nos discentes a necessidade de apropriação do conhecimento científico, num processo que outorgue sentido pessoal à atividade de estudo (em relação ao estudante) e de ensino (em relação ao professor).

Segundo a pesquisadora Asbahr (2011) para que a aprendizagem escolar ocorra de forma satisfatória as ações provocadas pelos estudantes envolvidos neste processo devem ter um sentido pessoal correspondente aos motivos da atividade de estudar determinado conteúdo. O papel do professor como mediador da atividade de aprendizagem na direção de formalizar conhecimentos científicos deve considerar os conhecimentos espontâneos, isto é, busca-se a teorização do conhecimento sobre o conteúdo sensível²⁰.

Em outros termos, o professor deve organizar a atividade de estudo de tal forma que possa garantir ao conteúdo a ser ensinado o lugar de objeto da atividade de aprendizagem para que este se torne o motivo desta atividade, ou seja, trata-se então de garantir também o encontro do objeto com a sua necessidade. Vale ressaltar, que não se trata neste caso de qualquer necessidade, mas sim, necessidades de ordem superior. Nos processos de ensino e aprendizagem tem-se a tarefa de produzir necessidades de ordem superior para evoluir em relação às necessidades imediatas e pragmáticas que os discentes espontaneamente apresentam (ASBAHR, 2011).

Como é de interesse desta pesquisa, destaca-se que o papel primordial da educação escolar é formalizar conhecimentos científicos, desenvolvendo as funções psicológicas superiores imprescindíveis para a apropriação da Ciência, da Arte e das demais produções humanas (VYGOTSKY, 2006). Assim, tem-se como ideia central que o professor deve estruturar a atividade de estudo de maneira que os objetos a serem apropriados tenham lugar estrutural na atividade dos estudantes, pois o sucesso da aprendizagem depende diretamente do sentido que esta tenha para o sujeito.

Dessa forma, justifica-se a pretensão desta pesquisa de analisar a produção de significados de futuros professores de Matemática acerca do estudo de Geometrias não Euclidianas na graduação, a fim de formalizar conceitos científicos através da exploração e da vivência de Atividades de Ensino que possam ampliar os conhecimentos no campo da

²⁰ O conteúdo sensível (sensações, imagens de percepção, representações) é o que produz a base e as condições da consciência, o que cria sua riqueza e seu colorido (LEONTIEV, 1978, *apud*, ASBAHR, 2014, p. 267).

Geometria, a ponto de estabelecer sentido pessoal para a inserção desses modos de compreender os espaços nas aulas de Matemática.

No próximo capítulo, como desdobramento da TA proposta por Leontiev e colaboradores discutiremos as contribuições teórico-metodológicas da Atividade Orientadora de Ensino para o desenvolvimento de conceitos matemáticos e, conseqüentemente, para a formação inicial do professor de Matemática.

5 ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO: UM CONTEXTO PARA A NEGOCIAÇÃO DE SIGNIFICADOS

Os estudos realizados até o presente momento sobre a THC e TA, revelaram as preocupações dos idealizadores e pesquisadores dessas teorias com a formalização de conceitos, principalmente aqueles que são atribuídos à escola, denominados de conceitos científicos. Dessa maneira, esses idealizadores e pesquisadores propõem como necessidade social repensar a educação e, conseqüentemente, o processo de ensinar e aprender a Matemática. A questão traz à tona a função social da escola, uma vez que apresenta preocupações sobre como o ensino pode propiciar, aos estudantes, a apropriação dos conhecimentos culturalmente produzidos pela humanidade, humanizando-os e desenvolvendo as funções psicológicas superiores. Assim sendo “[...] a educação e o ensino são considerados formas universais de mediação cultural para o desenvolvimento humano” (CEDRO; MORAES; ROSA, 2010, p. 428).

Nesse sentido, a escola é o principal mecanismo social responsável por aproximar os indivíduos com os objetos do mundo através da relação entre indivíduos, ou seja, o papel da escola é oportunizar, por meio da comunicação entre os indivíduos, a apropriação dos conhecimentos produzidos pelo homem.

No campo educacional, a apropriação dos conhecimentos científicos surge como um desafio para os profissionais envolvidos no processo de escolarização. Nessa perspectiva, Vygotsky (1987, p. 101) ressalta a importância da mediação para o processo de escolarização dos indivíduos ao colocar que “[...] o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer”.

Ao pensarmos num processo de aprendizagem adequadamente organizado, é inevitável a associação do professor como agente principal do processo de escolarização, pois a sua atividade essencial está diretamente interligada à dos estudantes, que consiste na organização do ensino. Em outros termos, a função primordial do professor é organizar o ensino tendo em vista que os estudantes se apropriem dos conhecimentos produzidos historicamente pela humanidade.

Nesse sentido, apoia-se no conceito de atividade proposto por Leontiev (1978; 1983) para melhor compreender a importância do trabalho docente na organização do ensino e sua efetiva contribuição para o desenvolvimento das funções psíquicas superiores dos estudantes, na relação mediada por instrumentos culturais entre os sujeitos com os objetos.

Moura *et al.* (2010) coloca que a TA pode fundamentar o trabalho do professor na organização do ensino, ao passo que se trata de uma ação que deve estar voltada intencionalmente para a apropriação de conhecimentos produzidos historicamente, concretizando, assim, os objetivos sociais do currículo escolar. A organização do ensino é considerada como atividade na concepção dos autores por implicar que o professor deve definir ações (que considerem as condições objetivas da escola), eleger instrumentos (processos de mediação dos sujeitos com os objetos), avaliar o processo de ensino e aprendizagem (objetivos relacionados ao ensinar e aprender) e por fim, constatar a apropriação dos conhecimentos historicamente acumulados pelos discentes (necessidade/motivo).

Com base nos pressupostos da TA, Moura (2010) desvela que a atividade ensino do professor deve produzir e promover a atividade do estudante. O envolvimento do professor com sua atividade ensino pode auxiliá-lo a tomar consciência de seu próprio trabalho e de seu objeto de ensino, o produto do processo de construção do saber será transformado em objeto de aprendizagem para os estudantes. Assim, na organização do ensino, o professor também exerce ações que promovem os conhecimentos teóricos em jogo, tornando-os em objeto e necessidade de sua atividade de aprendizagem, o que simultaneamente cria no estudante a necessidade de se apropriar do conceito em questão.

Na confluência com as teorias já dissecadas a presente pesquisa recorre ao princípio histórico-cultural da atividade²¹ como mecanismo teórico-metodológico para problematizar a prática pedagógica e, conseqüentemente, atribuir significados à atividade ensino, tendo como unidade de investigação inicial a necessidade de organizar o trabalho pedagógico de “[...] maneira que os sujeitos interajam entre si e com o objeto de conhecimento” (MOURA, 2002, p. 159).

Para Lopes (2009) a organização do ensino assume um importante papel na atividade ensino no que tange à aprendizagem, pois tanto o professor quanto os estudantes estarão mobilizados para a apropriação de conhecimentos. Dessa forma pode entender que a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) torna-se a unidade de formação entre professor e alunos, pois o professor ao organizar o processo de ensinar também qualifica seus conhecimentos (MOURA, 1996; 2001).

²¹ Segundo Marco (2013, p. 318) o princípio fundamenta-se em criar um ambiente de atividade – caracterizado pela proposta de atividade e pela mediação docente – de modo que o aluno seja posto diante da necessidade de resolver situações-problema mobilizadas pela atividade, encontrando ações e operações que o levem a solucionar tal situação.

Assim, Lopes (2009) sistematiza algumas características da AOE para situá-la como a base para o ato de ensinar e o ato de aprender de professores e estudantes:

Quadro 5 - Características da Atividade Orientadora de Ensino

• Manter uma dinâmica de interação dos conhecimentos individuais nas ações coletivas;
• Tornar coletivos os conhecimentos sociais específicos;
• Possibilitar ao aluno perceber o conhecimento como bem comum a ser assumido coletivamente;
• Exigir do professor a intencionalidade educativa;
• Trabalhar a história do conceito na dimensão lúdica;
• Promover as condições de autoria para o professor, coloca-o num movimento de ação e reflexão, tornando possível a formação contínua.

Fonte: Vaz (2013).

As características elencadas por Lopes (2009) apresentam dimensões importantes da AOE dentre as quais destacamos: a interação dos indivíduos; a busca coletiva da formação de conceitos científicos; o papel preponderante do conhecimento histórico na produção de significados e sentidos; a responsabilidade do professor em exercer sua principal função – o ato de ensinar e; exige do professor um movimento de ação e reflexão acerca da *práxis* docente, num processo de empoderamento de determinado conhecimento que favorece a sua autonomia frente a produção desse saber, possibilitando assim, um processo de formação continuada que podem produzir novos significados e atribuir novo sentido ao conceito estudado.

Baseado no princípio histórico-cultural da atividade, Moura (2002) define o ensino como uma atividade que deve envolver o aluno num processo reflexivo a partir da vivência de situações-problema que produzam a necessidade do desenvolvimento de significados próprios do conceito em jogo. Para o autor (2002, p. 155) uma AOE pode ser definida como:

[...] aquela que se estrutura de modo a permitir que sujeitos interajam, mediados por um conteúdo, negociando significados, com o objetivo de solucionar coletivamente uma situação-problema. É atividade orientadora porque define elementos essenciais da ação educativa e respeita a dinâmica das interações que nem sempre chegam a resultados esperados pelo professor. Este estabelece os objetivos, define as ações e elege os instrumentos auxiliares de ensino, porém não detém todo o processo, justamente porque aceita que os sujeitos em interação partilhem significados que se modificam diante do objeto de conhecimento em discussão.

Logo, no coração da AOE encontra-se a situação problema como aspecto desencadeador da necessidade que levou o homem à construção de determinado conceito, promovendo o

compartilhamento de significados e experiências entre os estudantes, num ambiente que busca, de forma coletiva, as soluções para a situação-problema, na qual possibilita a troca e a produção de conhecimentos entre os envolvidos no dinâmico processo de ensino e aprendizagem. Assim, a AOE se configura por meio da intencionalidade do educador ao articular instrumentos e estratégias que permitirão a produção de significados dos sujeitos com o objeto de conhecimento (MOURA, 1996).

Moura, Sforini e Araújo (2011) colocam que para os princípios da AOE, uma situação-problema ou uma situação desencadeadora de aprendizagem requer do professor a compreensão histórica do conhecimento, a ponto de lançar um problema que oportunize o estudante a compreender a necessidade que levou a humanidade ao conceito em questão. Para os autores a situação-problema é uma perspectiva dentro da atividade orientadora que traz os seguintes conteúdos:

[...] ao utilizar a situação-problema na atividade orientadora não procuramos apenas a lógica do *objeto* – do conteúdo – ou a do *sujeito* – seus interesses e dinâmica. Contemplamos os dois movimentos: o do sujeito e o do objeto. Isso não significa apenas agrupá-los como dois aspectos importantes a ser levados em conta na organização do ensino, mas considerá-los em uma unidade. Essa unidade está presente no movimento de produção de conhecimento e também de sua apropriação pelos sujeitos (MOURA; SFORINI; ARAÚJO, 2011, p. 41, grifo dos autores).

Nessa perspectiva, Moura (1996; 2010) pontua três aspectos imprescindíveis para estrutura da AOE: A síntese histórica do conceito que possibilita o professor apropriar-se do aspecto pedagógico da história do conceito; A situação-problema ou a situação desencadeadora de aprendizagem que deve contemplar a gênese do conceito e pode ser materializada de maneiras diferentes, na qual apresenta três recursos metodológicos: os jogos, as situações que emergem do cotidiano e a história virtual do conceito; A síntese coletiva que é a solução “matematicamente correta” da situação-problema desenvolvida pelos estudantes em coletividade.

No viés das concepções trazidas, a presente pesquisa centra-se na formação inicial de professores de Matemática, compreendendo a importância da problematização das ações pedagógicas do professor, uma vez que busca por meio de situações de vivência e exploração de Atividades de Ensino desenvolver as funções psíquicas dos estudantes, futuros professores de Matemática, acerca do estudo de Geometrias não Euclidianas como uma maneira de ampliar os conhecimentos no campo geométrico e, conseqüentemente, ressignificar o ensino de Geometria. Acredita-se que vivenciar e explorar Atividades de Ensino na perspectiva da AOE

pode contribuir para uma formação pedagógica crítica do futuro professor de Matemática, bem como, corroborar para a projeção de sua prática pedagógica no campo da Geometria.

A seguir, iremos analisar os elementos estruturantes da AOE na perspectiva de compreender melhor as suas peculiaridades, bem como, as suas possíveis contribuições para o processo de formação de futuros professores de Matemática.

5.1 Síntese histórica do conceito

Para compreender o lugar que ocupa o conhecimento histórico na AOE, recorreremos aos dizeres de Nascimento (2010) tendo-a como base teórica de pesquisa, por se apoiar nos pilares teóricos da TA, isto é, ao pensar a organização do ensino enquanto atividade e, conseqüentemente, como objeto de pesquisa. É considerada também, como base metodológica ao se constituir como instrumento lógico-histórico para a organização dos conhecimentos no processo de ensino e aprendizagem.

Para Moura et al. (2010), a situação-problema ou a situação desencadeadora de aprendizagem deve ser constituída da essência do conhecimento em questão, relacionando-a ao modo “[...] como foram aparecendo os problemas e as necessidades humanas em determinada atividade e como os homens foram elaborando as soluções ou sínteses no seu movimento lógico-histórico” (MOURA ET AL., 2010, p. 103-104).

Moretti (2007, p. 97) ressalta a importância do movimento lógico-histórico para a construção teórica do conhecimento ao aduzir que:

[...] compreender a essência das necessidades que moveram a humanidade na busca de soluções que possibilitaram a construção social dos conceitos é parte do movimento de compreensão do próprio conceito. Assim, o aspecto histórico associa-se ao aspecto lógico no processo de conhecimento de um determinado objeto de estudo e é só nessa unidade dialética que o conhecimento desse objeto é possível.

Desse modo, a história do conceito deve permear a organização das ações do professor, principalmente o que ensina Matemática, de maneira que possa propor aos seus estudantes problemas desencadeadores que contenham em si a essência do conceito. Segundo Kopnin (1978, p. 186) a unidade entre o lógico e o histórico do conceito para a compreensão do conceito faz-se necessária uma vez que o “[...] lógico reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento”.

Dessa maneira, o movimento de apropriação conceitual se constitui no processo de articulação entre os aspectos lógicos e históricos do objeto de conhecimento, ou seja, o sujeito

somente toma consciência do conhecimento em questão, quando este se constitui na unidade entre a essência do objeto e sua teoria.

Kopnin (1978) afirma que:

O estudo da história do desenvolvimento do objeto cria, por sua vez, as premissas indispensáveis para a compreensão mais profunda de sua essência, razão porque, enriquecidos da história do objeto, devemos retomar mais uma vez a definição de sua essência, corrigir, completar e desenvolver os conceitos que o expressam. Deste modo, a teoria do objeto fornece a chave do estudo de sua história, ao passo que o estudo da história enriquece a teoria, corrigindo-a, completando-a e desenvolvendo-a (KOPNIN, 1978, p. 186).

Nesse entendimento, Moura (1996) compreende a importância do movimento lógico-histórico para a formação de conceitos pelo indivíduo, inserindo essa perspectiva metodológica de produção de significados e sentidos acerca de determinado objeto como elemento inicial da AOE. Então, na organização do ensino, o autor propõe que o movimento lógico-histórico se constitui na perspectiva da AOE pela realização da síntese histórica do conceito, que possibilita o professor apropriar-se do movimento lógico-histórico de constituição do conceito a ser trabalhado em sala de aula e, conseqüentemente, ter uma visão dinâmica de sua construção, compreendendo também as necessidades sociais de sua produção.

Para Moura (1996), esse elemento contribuirá para que o professor possa elaborar a situação desencadeadora de aprendizagem da AOE. É na compreensão da essência do conceito que o professor encontrará a autonomia necessária para estabelecer relações sociais para a criação e a solução de problemas. A síntese histórica do conceito, na perspectiva aqui apresentada, pode corroborar para a prática docente ao criar condições para o professor assumir a posição de autoria na construção do conhecimento, potencializando as suas ações ao planejar, executar e avaliar as Atividades de Ensino.

Nessa perspectiva, assumimos a síntese histórica do conceito como um recurso indispensável para a organização e desenvolvimento de ações metodológicas da AOE, que pode orientar, no caso desta pesquisa, as nossas investigações acerca do estudo de Geometrias não Euclidianas na formação de futuros professores de Matemática e suas implicações pedagógicas para a prática docente.

Santos (2016) coloca que no campo do conhecimento geométrico há o uso automatizado de fórmulas para o cálculo de áreas, perímetros e volumes, condição esta que não privilegia o estabelecimento das relações históricas da construção do conhecimento, mas apenas o uso de regras lógicas formais. O ensino do campo geométrico se apresenta como um conhecimento pronto, acabado, apoiado, muitas vezes, em um único modelo, considerado perfeito, imutável

e incapaz de ser questionado. Assim, o ensino do pensamento geométrico “[...] não pode ser reduzido apenas ao estudo do lógico-formal, a importância da geometria não está apenas no rigor, mas na possibilidade de criar, experimentar, levantar hipóteses e compreender que o conhecimento não é imutável” (SANTOS, 2016, p. 121).

A partir dos pressupostos traçados para este estudo, reconhecemos a importância do conhecimento histórico para o desenvolvimento das funções psíquicas superiores dos sujeitos, uma vez que o estudo lógico-formal²² de um conceito por si só, não garante aos indivíduos compreender a necessidade humana de tal produção. A aprendizagem focada somente nas regras e leis que constituem certo conceito pode conduzir o pensamento a encontrar verdades eternas, infalíveis e inquestionáveis.

Souza (2004, p. 75) ao questionar a construção do pensamento apoiado somente na lógica-formal dos conceitos, expõe a necessidade do dinamismo do pensamento para compreender a construção do saber como algo vivo, flexível, incerto e, sobretudo, necessário.

Ao assumirmos o lógico-histórico enquanto formas de pensamento, necessariamente, consideramos a flexibilidade, a relatividade, a interdependência, a fluência, o processo e o movimento do próprio pensamento que ocorre na totalidade do pensamento, enquanto define para si mesmo o que vem a ser a verdade elaborada pela práxis humana enquanto o homem tenta se humanizar pelo conhecimento.

Nesse sentido, entendemos a síntese histórica do conceito na perspectiva da AOE como uma ação metodológica imprescindível para a construção do conhecimento, que se constitui pela indissociabilidade entre o lógico e o histórico como uma ação necessária para a compreensão do dinamismo do pensamento. Assim, a síntese histórica do conceito contribuirá para esta pesquisa não só para expor a história das Geometrias, mas também, a história dos processos que as constituíram como um saber necessário.

A presente pesquisa pretende, a partir da síntese histórica do conceito, refletir junto a discentes do curso de Licenciatura em Matemática os produtos culturais e científicos elaborados pelo homem que corroboraram para o surgimento das Geometrias não Euclidianas, bem como, analisar as implicações pedagógicas desse conhecimento. Para tanto, consideraremos o movimento lógico-histórico que constituíram as rupturas necessárias para o surgimento das

²² Para Mundim (2002), etimologicamente, lógica vem do grego *logos* que significa “palavra”, “expressão”, “pensamento”, “conceito”, “razão”. Para Aristóteles, a lógica é a “ciência da demonstração”. O teorema de Pitágoras, por exemplo, é demonstrado observando-se as regras impostas pela lógica. Poderíamos definir lógica como “a ciência da consequência e da verdade da argumentação”. “É a ciência das leis do pensamento e a arte de aplicá-las corretamente na procura e demonstração da verdade” (MUNDIM, 2002, p. 135-136).

Geometrias não Euclidianas, destacando as relações entre os postulados de Euclides e as bases teóricas que sustentam os sistemas não euclidianos.

As ideias proferidas até aqui serviram como mecanismo de embasamento para o elemento inicial da AOE, propondo a importância desta ação para a organização do ensino. Isto é, o professor imbuído da síntese histórica do conceito terá melhores condições para conceber a situação desencadeadora de aprendizagem mais adequada para investigar o objeto de estudo em questão.

5.2 Situação desencadeadora de aprendizagem

Antes de compreendermos a situação ou problema desencadeador de aprendizagem na perspectiva da Moura (1996) e a sua importância pedagógica na construção de uma Atividade de Ensino, tentaremos expor o que consideramos como problema e como essa concepção está ligada a uma situação desencadeadora de aprendizagem.

Segundo Moretti (2014), muitos educadores matemáticos possuem dúvidas sobre a própria compreensão do que é um problema, o que pode ser considerado como obstáculo para o desenvolvimento de práticas pedagógicas que buscam produzir significados a partir desse conceito.

Dessa forma, recorreremos a literatura para apreender diferentes acepções sobre o termo “problema”, das quais destacamos as seguintes:

Um problema significa buscar conscientemente alguma ação apropriada para alcançar um fim claramente concebido, mas não imediatamente atingível (POLYA, 1962, p. 117).

É tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer (ONUCHIC, 1999, p. 215).

Um problema é, de certa forma, uma situação nova ou diferente do que já foi aprendido, que requer a utilização estratégica de técnicas já conhecidas (POZO, 1998, p. 15).

É toda situação em que se tem um planejamento inicial e uma exigência que obriga a transformá-lo. O caminho, para passar da situação ou planejamento inicial à nova situação exigida, tem que ser desconhecida e a pessoa deve querer fazer a transformação (PÉREZ; CABRERA, 2000, p. 118).

Problema é toda situação em que os alunos necessitam pôr em jogo tudo o que sabem, mas que contém, também, algo novo, para o qual ainda não têm resposta e que exige a busca de soluções” (MARINCEK; CAVALCANTI, 2000, p. 151).
Qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta (VAN DE WALLE, 2001, p. 42).

Nunes (2010) ao analisar as acepções acerca do termo “problema” constata algumas condições comuns pontuadas pelos autores que podem favorecer o ensinar e aprender conceitos matemáticos. A principal condição pontuada pela autora tem por cerne a atividade do professor que deverá propor ao estudante somente problemas acessíveis ao mesmo, de modo que o estudante tenha um conhecimento prévio para desenvolver soluções para os problemas propostos, se sinta motivado para resolvê-los e que facilite o desenvolvimento de sua intuição e criatividade, conduzindo-o ao desenvolvimento das suas funções psíquicas superiores.

No campo da Educação Matemática, a ideia de problema está vinculada ao desafio do novo, que mobiliza o sujeito para resolvê-lo a fim de satisfazer determinada necessidade. Logo, o problema não é um exercício em que o estudante aplica, de maneira automatizada regras e procedimentos, mas sim, um convite para que o estudante mobilize ações que desenvolvam sua capacidade de interpretar, investigar, pensar, relacionar, analisar e inferir.

O olhar estabelecido nesta pesquisa sobre as acepções do termo “problema” nos remete a sua importância para o processo de ensino e aprendizagem, onde as possibilidades de compreendermos o seu significado nos conduz a formas distintas de conceber e organizar o ensino.

Na perspectiva histórico-cultural, o problema surge no processo de ensino e aprendizagem no sentido de provocar a elaboração de situações-problema de aprendizagem que embutem em si a necessidade do conceito. Para Saviani (2000, p. 21), a constituição de um problema está intrinsecamente ligado a sua necessidade, assim

A essência do problema é a necessidade. [...] Assim, uma questão, em si, não caracteriza o problema, nem mesmo aquela cuja resposta é desconhecida; mas uma questão cuja resposta se desconhece e se necessita conhecer, eis aí um problema. Algo que eu não sei não é problema; mas quando eu ignoro alguma coisa que eu preciso saber eis-me, então, diante de um problema.

Moretti (2014) em consonância com as ideias de Saviani (2000) propõe que a situação-problema prediz uma primeira aproximação do estudante com o objeto de saber, na qual o problema designa processos que satisfazem a sua necessidade, criando condições para que o sujeito que aprende se aproprie do conhecimento historicamente construído pelo homem, humanizando-se.

Pelo contextualizado, ao pensarmos na organização do ensino, o professor de Matemática tem como desafio propor problemas que coloquem para os estudantes situações desencadeadoras de aprendizagem que ao serem resolvidas pelos mesmos provoquem a apropriação e a objetivação dos elementos essenciais do conhecimento que se pretende ensinar.

Moura (1996) defende a necessidade de o professor realizar a síntese histórica do conceito como um caminho para superar o desafio imposto ao docente de propor problemas que realmente se constituam em situações desencadeadoras de aprendizagem. Em outras palavras, a organização do ensino, que privilegia o movimento lógico-histórico do conceito pode se constituir numa ação metodológica que têm na essência do conceito a base para o desenvolvimento de situações-problema desencadeadoras de aprendizagem.

Nesse sentido, o professor visando uma aprendizagem significativa dos conceitos que quer ensinar deve partir de situações-problemas que sejam significativas para o estudante, podendo ser materializadas por meio de diferentes recursos metodológicos, dentre os quais se encontram os jogos, as situações emergentes do cotidiano e a história virtual do conceito.

Para melhor compreender os recursos propostos por Moura (1996), nos apoiamos na sistematização proposta por Vaz (2013, p. 39).

Figura 11 - Recursos da Atividade Orientadora de Ensino



Fonte: Vaz(2013).

A finalidade principal das situações desencadeadoras de aprendizagem consiste em envolver o estudante na busca da solução de um determinado problema, de modo a satisfazer uma determinada necessidade, que pode justificar a sua produção em certo momento histórico da humanidade. Segundo Moura *et al.* (2010, p.106), a solução da situação-problema deve ser realizada de forma coletiva, quando “aos indivíduos são proporcionados situações que exigem

o compartilhamento das ações para a resolução de uma determinada situação que surgem em certo contexto”, a qual foi denominada de síntese coletiva.

5.3 Síntese coletiva

A síntese coletiva se configura como a última ação proposta pela AOE, em que a solução da situação-problema deve ser elaborada pelos estudantes coletivamente. Dessa maneira, pensando na organização do ensino, cabe ao professor elaborar Atividades de Ensino que imbriquem os estudantes num processo de busca coletiva da solução.

Segundo Moysés (1997) os estudos por meio de atividade compartilhada ou atividade grupal se inserem, principalmente, em duas linhas de pesquisas:

[...] a dos que procuram saber de que maneira as formas coletivas de organização das atividades de aprendizagem contribuem para o desenvolvimento das funções mentais superiores, e a dos que, ao analisá-las, se preocupam mais em saber de que forma elas favorecem à aquisição de conhecimento (MOYSÉS, 1997, p. 57).

Nesse sentido, garantir que os educandos realizem a Atividade de Ensino dentro de um processo coletivo, expõe a filiação da AOE aos princípios de desenvolvimento das funções psíquicas superiores elaboradas pela THC, na qual é preconizada por Vygotsky (2001, p. 114) ao assegurar que:

[...] todas as funções psicointelectuais superiores aparecem duas vezes no decurso do desenvolvimento da criança: a primeira vez, nas atividades coletivas, nas atividades sociais, ou seja, como funções intersíquicas; a segunda, nas atividades individuais, como propriedades internas do pensamento da criança, ou seja, como funções intrapsíquicas.

Logo, o desenvolvimento das funções psíquicas superiores do indivíduo ocorrem primeiro nas atividades coletivas, no social, que se definem como funções de caráter intersíquico e, posteriormente, nas atividades individuais, como propriedades internas do pensamento, tornando-as de natureza intrapsíquica. Assim, é possível constatar a importância atribuída pela THC à prática coletiva no que diz respeito a formação intelectual do sujeito.

Para melhor compreendemos a importância da coletividade para a AOE proposta por Moura (1996) apoia-se em outro pilar teórico já mencionado anteriormente nessa pesquisa, a TA de Leontiev, que tem como unidade de análise a atividade coletiva, introduzindo novos mediadores sociais, tais como regras, divisão de trabalho e comunidade. A atividade coletiva como unidade de análise explica como diferentes ações individuais estão conectadas. Nessa

perspectiva, o sujeito se torna parte integrante de uma comunidade assumindo um conjunto de ações e tarefas que contribuem na produção de um objeto coletivo. O sujeito é responsável pela produção do objeto, uma vez que requer a colaboração dos envolvidos no processo (CASSANDE; QUEROL, 2013).

Rubtsov (1996) ao compreender a aprendizagem como uma atividade a ser realizada a partir dos pressupostos da TA de Leontiev, ressalta a importância da coletividade para o processo de interiorização de conhecimentos. Rubtsov (1996, p. 134) direciona o entendimento no sentido de que:

[...] as pesquisas dos psicólogos mostraram que a aptidão para a aprendizagem é, na verdade, resultado de uma determinada interiorização, de maneira que a atividade de aprendizagem se apresenta, essencialmente, sob a forma de uma atividade realizada em comum.

Assim, compreendemos que a aprendizagem como atividade se dá na coletividade, numa ação de colaboração entre os sujeitos que se mobilizam a aprender determinado conceito, orientando-os para o desenvolvimento do pensamento teórico que se constitui pela interatividade entre o professor, alunos e o objeto de conhecimento.

Dessa maneira, o compartilhamento de ações e ideias entre os indivíduos se caracteriza no terceiro elemento da AOE, na qual Moura (1996) denomina de síntese coletiva, que tem a finalidade de encontrar a solução “matematicamente correta” da situação desencadeadora de aprendizagem elaborada em coletividade pelos estudantes.

Pozebon *et al.* (2013, p. 5) reflete na aplicabilidade auferida através da mediação do professor pela síntese coletiva quando esta é desenvolvida pelos estudantes trazendo efetivas ponderações acerca da mesma, percebendo que:

[...] a turma deverá chegar a uma resposta comum a todos e “matematicamente correta” para o problema. Essa resposta deve estar relacionada e coincidir com a construção histórica do conceito, por isso, a consideramos como “matematicamente correta”. A ação do educador torna-se essencial neste momento de compartilhamento de ações e ideias, em que todos devem chegar a uma solução semelhante àquela historicamente vivenciada pelo homem.

De maneira sucinta, Lopes e Vaz (2014, p. 1023) explicam que “[...] a síntese coletiva refere-se à solução da situação problema na AOE que deve ser realizada na coletividade, a partir de situações que exigem o compartilhamento de ações”.

Do ponto de vista da organização do ensino, a síntese da solução em coletividade se torna um dos momentos mais delicados para o professor, pois os discentes vão expor as ideias

elaboradas como possível resposta para a situação-problema e por meio do conflito entre as mesmas deve-se encontrar uma solução em consenso.

O papel do docente neste momento é essencial, cabe a ele mediar a situação de modo a conduzir os estudantes para uma construção coletiva que visa encontrar a solução mais adequada do problema proposto, sem propor a solução imediata, mas sim, levantar hipóteses e questionamentos que possam fazer emergir reflexões nos discentes a partir das ideias expostas, podendo modificá-las e aprimorá-las, a ponto de formalizar os conceitos envolvidos e encontrar a melhor solução para a situação desencadeadora em questão.

5.4 Entrelaces entre o referencial teórico e a AOE

A presente pesquisa estrutura-se a partir dos pressupostos teóricos da THC preconizados por Vygotsky e na TA proposta por Leontiev, com desdobramentos na AOE proposta por Moura (1996) que contemplamos como base teórico-metodológica para o desenvolvimento do trabalho docente. Nessa perspectiva, apoia-se na AOE para refletir sobre a importância da organização do ensino na formação de futuros professores de Matemática, considerando o movimento lógico-histórico como elemento essencial para a organização dos saberes a serem ensinados e aprendidos.

Assim, a AOE assume a partir das contribuições da THC e, particularmente da TA, o ensino como a principal atividade do professor, uma vez que cabe a ele mediar o conhecimento historicamente produzido pela humanidade, criando condições para que este saber seja reconhecido pelo discente como necessário, motivando a sua apropriação.

Nesse sentido, a AOE é considerada como um processo para a apropriação de conceitos científicos, se tornando de fato uma forma de empreender a educação escolar, que busca o desenvolvimento das funções psíquicas superiores do indivíduo através de ações constituídas pela intencionalidade, sistematização e organização da principal atividade do professor: o ensino.

O professor ao pensar na organização do ensino de determinado conhecimento promove a articulação entre a teoria e a prática de modo a desenvolver a atividade de ensinar. Logo, o desenvolvimento dessa atividade se constituirá como *práxis* pedagógica a partir do momento que esta provoque por meio de interações entre os sujeitos (professor/estudantes) e o objeto do conhecimento a transformação da realidade escolar, transformando assim, o meio e os sujeitos envolvidos no processo.

Assim, Moretti (2007) atesta que é no movimento de articulação entre a teoria e a prática que o professor desenvolve sua principal atividade, e por meio dessa atividade que o professor se constitui como tal.

[...] oscilando entre momentos de reflexão teórica e ação prática e complementando-os simultaneamente que o professor vai se constituindo como profissional por meio de seu trabalho docente, ou seja, da práxis pedagógica. Podemos dizer então que: se, dentro da perspectiva histórico-cultural, o homem se constitui pelo trabalho, entendendo este como uma atividade humana adequada a um fim e orientada por objetivos, então o professor constitui-se professor pelo seu trabalho – a atividade de ensino – ou seja, o professor constitui-se professor na atividade de ensino. Em particular, ao objetivar a sua necessidade de ensinar e, conseqüentemente, de organizar o ensino para favorecer a aprendizagem (MORETTI, 2007, p. 1001).

A organização do ensino do ponto de vista da AOE coloca a aprendizagem numa posição de destaque na atividade – ensino, pois tanto o professor, quanto os estudantes estarão mobilizados para a apropriação de conhecimentos. A AOE torna-se a unidade de formação entre professor e alunos, pois o professor ao organizar o processo de ensinar, também, qualifica seus conhecimentos, produzindo novos significados e sentidos para o desenvolvimento de práticas pedagógicas diferenciadas, que podem gerar e promover a atividade do estudante: estudar e aprender teoricamente sobre a realidade (MOURA *et al.*, 2010).

No que se refere à aprendizagem do professor durante o processo de organização do ensino, Moretti (2014) coloca que esta assume algumas dimensões peculiares, dentre elas, destacam-se: a necessidade de se apropriar do conhecimento a ser ensinado (dimensão epistemológica do saber) e; a necessidade de articulação entre teoria e prática no que se refere a organização didática do conteúdo a ser ensinado (dimensão didática).

Em relação à organização do ensino, Moura *et al.* (2010, p. 100) considera que:

A AOE constitui-se um modo geral de organização do ensino, em que seu conteúdo principal é o conhecimento teórico e seu objeto é a constituição do pensamento teórico do indivíduo no movimento de apropriação do conhecimento. Assim, o professor, ao organizar as ações que objetivam o ensinar, também requalifica seus conhecimentos, e é esse processo que caracteriza a AOE como unidade de formação do professor e do estudante.

Nesse sentido, a AOE se configura em um modo de organização do ensino que se constitui pela compreensão teórica de um determinado conhecimento, em que exige do professor a elaboração de situações de aprendizagem que promovam práticas investigativas contundentes a partir da interação entre os alunos e o objeto de estudo. A organização do ensino se torna objeto de pesquisa e reflexão para o professor de modo a mediar o trabalho coletivo e

individual dos estudantes com a finalidade de possibilitar o acesso ao saber para que traga oportuna e proficiente apropriação do conhecimento em jogo tanto para o docente como para o discente.

No construtivismo, em especial, na abordagem Histórico-Cultural da produção de saber a atividade tem significado relevante para a aprendizagem, uma vez que o conhecimento surge com um processo de construção de significados em coletividade na busca de sua apropriação, na qual deve ter sentido pessoal para os indivíduos, atendendo aos interesses de cada sujeito envolvido no processo de aprendizagem.

Assim, o processo de elaboração e desenvolvimento da AOE ancorada nos elementos da TA (necessidade, motivos, objetivos, ações e operações), na condição de mediadora da produção do saber corrobora para o desenvolvimento das funções psíquicas superiores dos indivíduos que a realizam.

Nos estudos de Moura *et al.* (2010) fomenta-se o processo de planejamento e concretização da AOE, como instrumento de mediação, em seus aspecto teórico e prático, desencadeiam-se pela atividade do professor e do estudante da seguinte maneira:

A formação do estudante, que ao ser sujeito na atividade de aprendizagem se apropria do conhecimento teórico, desenvolvendo-se, transformando-se, humanizando-se, no movimento de análise e síntese inerente ao processo de solução do problema de aprendizagem da AOE; [...] **A formação do professor**, que tem por objetivo ensinar o aluno e que, entretanto, nas discussões coletivas, no movimento dos motivos de sua atividade, das ações, operações e reflexões que realiza, aprende a ser professor aproximando o sentido pessoal de suas ações da significação da atividade pedagógica como concretizadora de um objetivo social (MOURA ET AL. 2010, p. 226, grifo do autor).

Ao pensarmos na organização do ensino e na totalidade de suas dimensões, reconhecemos que o planejamento da AOE até a sua concretização, passando pelas ações de planejamento, desenvolvimento e avaliação, configuram a intencionalidade do professor, caracterizando-o como sujeito pesquisador, ao transformar a docência em atividade intelectual que busca compreender a natureza dos fenômenos educativos em razão da necessidade de aprendizado dos alunos e de sua formação humana; e sujeito reflexivo que ao examinar sua prática é capaz de interpretar as situações-problema que enfrenta (considerando questões sociais, políticas, econômicas e educacionais que envolvem a educação), propondo a reconstrução dos saberes relacionados à docência de modo compartilhado, sem desassociar teoria e prática (FEITOSA; BODIÃO, 2015).

Uns dos argumentos defendidos nesse trabalho coloca que o ensino adequadamente organizado pode contribuir de maneira significativa para a aprendizagem, uma vez que cabe ao

professor criar situações desencadeadoras de aprendizagem, estimulantes e desafiadoras, capazes de provocar a troca de experiências e saberes entre os estudantes. Assim, os pressupostos teórico-metodológicos da AOE podem contribuir para a formação de professores ao evidenciar a relevância da essência do conhecimento para o processo de ensino e aprendizagem, destacando dentro do movimento lógico-histórico aspectos de sua criação, (re) criação e, acima de tudo, compreendendo a sua necessidade e até mesmo o ressignificando.

Destarte, propomos durante a realização da pesquisa que os licenciandos do curso de Matemática vivenciassem e explorassem Atividades de Ensino envolvendo sistemas geométricos diferentes do euclidiano, compreendendo as Geometrias não Euclidianas como um complemento da Geometria Euclidiana, possibilitando a formalização de conceitos geométricos por meio da diferenciação entre os sistemas geométricos. O licenciando ao compreender o espaço em que vive a partir do estudo de diferentes sistemas geométricos pode produzir novos significados aos conceitos geométricos internalizados na educação básica, corroborando para a apropriação de novos conceitos e, conseqüentemente, construir significados para a sua prática pedagógica futura.

Na pesquisa aqui deslindada, as Atividades de Ensino na perspectiva proposta Moura (1996) serão utilizadas como contexto para estimular a negociação de significados entre os licenciandos e apresentam três objetivos imprescindíveis para o desenvolvimento do estudo: compreender os conceitos matemáticos dos sistemas de Geometrias não Euclidianas como extensão dos conceitos matemáticos presentes no sistema de Geometria Euclidiana, ampliando assim, os conhecimentos matemáticos no campo de estudo das Geometrias; vivenciar e explorar em coletividade situações desencadeadoras de aprendizagem por meio de Atividades de Ensino constituídas de diferentes sistemas geométricos; compreender as Atividades de Ensino sobre Geometrias como instrumento didático-metodológico de formação profissional e saberes docentes necessários para desenvolver os conceitos dessas Geometrias na Educação Básica.

6 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos as estratégias metodológicas da pesquisa, relacionando a questão de interesse dessa investigação com os procedimentos metodológicos utilizados para a coleta, organização e tratamento dos dados produzidos.

Pela natureza proposta para essa pesquisa entende-se que se trata de uma abordagem qualitativa, de caráter exploratório e interpretativo. A sua estrutura é caracterizada devido à sua profundidade e amplitude, onde se faz necessário considerar a relação dinâmica entre os sujeitos e os processos vivenciados por estes.

Para Bogdan e Biklen (1994, p. 11) uma pesquisa de cunho qualitativa é definida como uma “metodologia de investigação que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais”. Em outras palavras, uma pesquisa qualitativa visa obter descrições e interpretações pontuais de fenômenos que o pesquisador pode fornecer a outras pessoas para modificar as percepções delas sobre esses fenômenos, a partir de constituições teóricas que a fundamente.

Lüdke e André (1986, p. 11-13) com base nos estudos de Bogdan e Biklen (1994), apresentam cinco características para configurar uma pesquisa qualitativa:

- i- O ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento: “supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, via de regra através do trabalho intensivo de campo”;
- ii- Os dados são predominantemente descritivos: “o pesquisador deve, assim, atentar para o maior número possível de elementos presentes na situação estudada, pois um aspecto supostamente trivial pode ser essencial para a melhor compreensão do problema que está sendo estudado”;
- iii- A preocupação com o processo maior que com o produto: “o interesse do pesquisador ao estudar um determinado problema é verificar como ele se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações cotidianas”;
- iv- O significado é foco de atenção: “nesses estudos há sempre uma tentativa de capturar a ‘perspectiva dos participantes’, isto é, a maneira como os informantes encaram as questões que estão sendo focalizadas”;
- v- A análise dos dados por processo indutivo: os pesquisadores não se preocupam em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas previamente. As abstrações são realizadas e se consolidam a partir da análise dos dados num processo de baixo para cima.

Dessa forma, no processo constituído pela subjetividade do investigador em relação à construção de significados dos participantes da pesquisa e a realidade escolhida para desenvolver o estudo em questão, o pesquisador busca compreender melhor os modos de produção desses significados com o intuito de descrevê-los e interpretá-los. Para tanto, julga-

se necessário que o pesquisador atue diretamente no ambiente de investigação a fim de comprovar a importância e especificidade da pesquisa naquele momento e local.

No bojo do referido contexto, compreendemos que esta pesquisa de cunho qualitativo situa-se na perspectiva histórico-cultural em que pesquisador e pesquisado são partes constituintes do processo investigatório, pois ambos estão vivenciando a construção de conhecimentos por meio da interrelação entre os mesmos.

Como o objetivo principal dessa pesquisa é analisar a produção de significados de futuros professores de Matemática acerca do estudo de Geometrias não Euclidianas e se apoia na teoria do conhecimento, criada por Vygotsky – Teoria Histórico-Cultural, para analisar tais significados a partir dos três princípios dessa abordagem na análise do desenvolvimento das funções mentais superiores: a ênfase na análise do processo, e não no objeto em si; o fato de que essa análise possa revelar as relações dinâmicas causais desse objeto, partindo de uma análise explicativa, e não se centrando apenas na descrição dos fatos; e, por fim, chama a atenção para os processos que esmaeceram no tempo e tornaram-se fossilizados (VYGOTSKY, 2003). Por isso, o requisito básico do método dialético apropriado pelo autor em sua teoria afirma que estudar algo historicamente é estudá-lo no seu processo de mudança.

Em consonância com o exposto, Rego (1995, p. 41) aborda que “[...] as características tipicamente humanas não estão presentes desde o nascimento do indivíduo, nem são mero resultado das pressões do meio externo. Elas resultam da interação dialética do homem e seu meio sociocultural”. Desse modo, compreendemos a pesquisa como um processo social no qual o pesquisador participa intensamente e pode interferir nos sentidos produzidos pelos participantes, com vistas a proporcionar a aprendizagem para todos os envolvidos.

6.1 Descrição da estrutura da pesquisa

A partir das experiências vivenciadas pelo ir e vir da construção dos elementos dessa pesquisa e pelos estudos realizados até o presente momento, buscamos descrever os elementos constitutivos desse processo de investigação para elucidar a proposta e, conseqüentemente, proporcionar um momento de reflexão junto a futuros professores de Matemática sobre o estudo de diferentes modelos geométricos.

A questão motivadora dessa pesquisa, conforme mencionada no início desse trabalho, refere-se a: De quais formas os licenciandos do curso de Matemática compreendem e podem vir a compreender as Geometrias não Euclidianas?

Para orientar o processo de investigação do problema que originou a pesquisa traçamos como objetivo analisar o contexto do ensino e do estudo das Geometrias não Euclidianas no Brasil e a produção de significados de futuros professores de Matemática sobre esse tema. Para tanto, buscar-se-á satisfazer os seguintes objetivos específicos:

- Identificar cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil que contemplam em seus currículos o ensino de Geometrias não Euclidianas;
- Investigar o que dizem os documentos nacionais e estaduais sobre o ensino de sistemas geométricos diferentes do euclidiano na Educação Básica;
- Analisar os aspectos constitutivos da produção de significados geométricos sobre o estudo de diferentes Geometrias no contexto proposto pela Atividade Orientadora de Ensino.

6.2 Instrumentos de coleta de dados e os sujeitos da pesquisa

Com o intuito de alcançar os objetivos propostos para a pesquisa, buscamos realizar a investigação a partir dos seguintes instrumentos de coletas: identificação de propostas curriculares de cursos de Licenciatura em Matemática, documentos nacionais e estaduais que abordam o ensino de Geometria não Euclidiana na Educação Básica, questionário diagnóstico, Atividades de Ensino (AE), diário de campo e roteiro de observação.

6.2.1 Propostas curriculares de cursos de Licenciatura em Matemática

No processo inicial de investigação, realizou-se um mapeamento por meio de amostra estratificada das regiões do território brasileiro para identificar os cursos de Licenciatura em Matemática que apresentam em suas propostas curriculares ou em seus projetos políticos pedagógicos indícios do ensino de Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática. O mapeamento das instituições foi realizado na plataforma digital do Ministério da Educação (E-mec) cujo site é <http://emec.mec.gov.br/emec/nova>, utilizando como critérios de seleção os cursos de Licenciatura em Matemática que são ofertados em instituições públicas, no formato presencial e que são reconhecidos pela Capes.

As propostas curriculares ou os projetos políticos pedagógicos foram tomados como documentos da pesquisa e a análise dos mesmos está apoiada nas ações teórico-metodológicas da Análise Documental. Vale ressaltar que os documentos analisados foram encontrados nos sites das Instituições de Ensino Superior direcionados pelo portal do E-mec.

A Análise Documental foi empregada na pesquisa por “[...] se constituir numa técnica valiosa de abordagem dos dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos” (LUDKE; ANDRÉ, 2013, p.45). As autoras destacam que são considerados documentos materiais escritos que possam ser utilizados como fonte de informação, como leis e regulamentos, normas, pareceres, cartas, memorandos, diários pessoais, autobiografias, jornais, revistas, discursos, roteiros de programas de rádio e televisão até livros, estatísticas e arquivos escolares.

Marconi e Lakatos (2007) afirmam que existem apenas dois grandes grupos de tipos de documentos que são: os “documentos escritos” - documentos oficiais; publicações parlamentares; documentos jurídicos; fontes estatísticas; publicações administrativas; documentos particulares; e “outros” - iconografia: imagens, desenhos, pinturas (exceto fotografia); fotografias; objetos; canções folclóricas; vestuário e folclore. Nesse sentido, propõe-se como conceito para documento qualquer material que contenha informação registrada, seja escrita, sonora, iconográfica, entre outras, que possa ser consultada ou estudada.

Na linha contínua, Gil (2010) propõe que na pesquisa documental, os dados são obtidos de modo indireto, isto é, por meio de livros, jornais, papéis oficiais, registros estatísticos, fotos, discos, filmes e vídeos, evitando o desperdício de tempo e constrangimento, em que possibilita a obtenção de quantidade e qualidade de dados necessários para a realização da pesquisa. O autor apresenta algumas vantagens para essa abordagem metodológica: possibilita o conhecimento do passado; possibilita investigar processos de mudanças sociais e culturais; permite a obtenção de dados com menor custo e favorece a obtenção de dados sem constrangimento dos sujeitos.

Na leitura do caminho apresentado deu-se então a escolha por esta técnica cujo escopo de analisar as propostas curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática em universidades públicas do Brasil, com intuito de identificar no contexto da formação inicial do professor de Matemática a presença de conteúdos relacionados as Geometrias não Euclidianas.

6.2.2 Documentos curriculares nacionais e estaduais

Essa etapa da pesquisa consiste em dar voz aos documentos curriculares nacionais e estaduais sobre o ensino de Geometrias não Euclidianas na educação básica. Nesse sentido, foram identificados e analisados na Revisão Sistemática trabalhos acadêmicos que se apoiam em propostas curriculares para o ensino de Geometrias não Euclidianas na Educação Básica.

Estes documentos foram analisados a partir das ações teórico-metodológicas da Análise Documental.

6.2.3 Questionário-diagnóstico

O questionário diagnóstico teve a finalidade de levantar informações referentes ao perfil do grupo que participou da proposta de intervenção e produzir dados preliminares referentes ao conhecimento dos mesmos sobre Geometrias não Euclidianas. Foi realizado um piloto desse questionário com 5 licenciandos que cursavam o 3º semestre do curso de Matemática da Universidade do Estado da Bahia (UNEB) com o intuito de adequar esse instrumento de pesquisa. A coleta dos dados aconteceu em período extraclasse, de acordo com a disponibilidade dos voluntários.

Após a realização das adequações necessárias, a versão final do questionário diagnóstico aplicado à 16 licenciandos do curso de Matemática da UNEB que participaram da proposta de intervenção envolvendo o estudo sobre Geometrias não Euclidianas. Para isso requereu-se nesta investigação dois documentos: Termo de Anuência - para a instituição onde será realizada a proposta de intervenção (APÊNDICE C) e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - para os participantes (APÊNDICE D).

Segue abaixo as questões inqueridas aos licenciandos por meio do questionário diagnóstico dividido em duas partes:

Quadro 6 – Perfil do participante e sua relação com a Geometria

Parte I - Dados pessoais	
1. Idade: _____	2. Semestre que está cursando: _____
3. Concluiu o ensino básico:	
() Todo na rede pública () Todo na rede privada () Parte rede pública/ parte rede privada	
4. Participa ou já participou de alguma atividade não curricular na área de Geometria? Se sim, que conhecimentos geométricos foram abordados?	
5. Em relação aos conhecimentos geométricos que possui e que julga necessários à prática docente, você considera em termos de satisfação está:	
() nada satisfeito () insatisfeito () satisfeito () muito satisfeito	
6. Você considera que o conhecimento geométrico que está sendo construído no curso de Licenciatura em Matemática contribui para que sua prática pedagógica seja diferente das que vivenciou na Educação Básica quanto aluno? Justifique sua resposta.	

Fonte: Próprio autor (2019).

Quadro 7 - Conhecimentos específicos dos participantes sobre Geometria

Parte II - Informações sobre conhecimentos específicos da área de Geometria.

7. Euclides foi um matemático que viveu em Alexandria por volta dos anos 300 a. C. Em sua obra *Elementos* propõe que postulados são princípios que tomamos como verdades sem necessidade de demonstrá-los. Euclides organizou e sistematizou todo o conhecimento matemático de sua época e ficou conhecido como o Pai da Geometria. Considerando essa reflexão, o que você sabe a respeito dos 5 postulados de Euclides?

8. Você já leu e/ou ouviu falar sobre Geometrias não Euclidianas? Se sim, comente essa experiência.

9. Se algum aluno perguntasse para você o que é Geometria não Euclidiana, o que diria para ele?

10. Analise as sentenças abaixo, classifique-as em verdadeiras (V) ou falsas (F) e justifique sua escolha.

a) ☐ a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180° .

b) ☐ existe triângulo cuja soma dos ângulos internos é menor do que 180° .

c) ☐ Não existe triângulo cuja soma dos ângulos internos seja exatamente igual 270° .

d) ☐ dada uma reta r e um ponto P , que não pertence a r , por P pode passar mais de uma reta paralela a r .

e) ☐ dada uma reta r e um ponto P , que não pertence a r , por P passa uma única reta paralela a r .

f) ☐ dada uma reta r e um ponto P que não pertence a r , por P não existe reta paralela a r .

Referências:
 LEIVAS, José Carlos Pinto. Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.15, n.3, pp.647-670, 2013.

Fonte: Próprio autor (2019).

As informações obtidas por meio do questionário diagnóstico foram relevantes para captar a relação dos participantes com o ensino da Geometria e o quanto os mesmos sabiam sobre os conceitos das Geometrias não Euclidianas. A análise das informações contribuiu para a construção das Atividades de Ensino aplicadas na proposta de intervenção.

6.2.4 Caracterizando os participantes da pesquisa

Os dezesseis participantes da pesquisa são discentes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia – Uneb. Os discentes convidados para participar da pesquisa deveriam estar matriculados a partir do IV semestre por compreendermos ser necessário aos participantes já terem estudado no curso de Licenciatura as disciplinas que fazem parte da área específica da Geometria, tais como: Desenho Geométrico, Geometria Plana, Geometria Espacial e Geometria Analítica. Dessa forma, acredita-se que os participantes ao vivenciarem os conteúdos abordados nas referidas disciplinas os aproximam dos conhecimentos a serem trabalhados na proposta de intervenção, além disso, esses conhecimentos os colocam a par das demandas do currículo prescrito do curso de Licenciatura em Matemática em relação aos saberes geométricos necessários a sua formação.

Os participantes foram divididos durante a participação na pesquisa em 4 grupos com 4 integrantes cada, e, se auto denominaram: Beta, Delta, Geodésicos, Os Quatro Postulados. Em busca de identificar os sujeitos no decorrer da pesquisa utilizaremos a seguinte codificação:

- LB 1, LB 2, LB 3, LB 4 (Licenciandos do grupo Beta);
- LD 1, LD 2, LD 3, LD 4 (Licenciandos do grupo Delta);
- LG 1, LG 2, LG 3, LG 4 (Licenciandos do grupo Geodésicos);
- LO 1, LO 2, LO 3, LO 4 (Licenciandos do grupo Os Quatro Postulados).

O questionário diagnóstico nos possibilitou a elaboração do Quadro 7. Nesse quadro, caracterizamos o perfil dos participantes da pesquisa quanto a sua relação com a Geometria e os conhecimentos específicos que os mesmos possuem sobre diferentes modelos geométricos. Ressaltamos que o participante LO 3 não respondeu ao questionário diagnóstico.

Quadro 8 - Caracterização dos participantes da pesquisa

PERFIL	PARTICIPANTES	INFERÊNCIAS
Conhecimentos geométricos abordados em atividades não curriculares na área de Geometria.	LB 2, LB 3, LB 4, LD 3 e LD4	Dentre os cinco licenciandos que participaram de atividades não curriculares na área de Geometria, somente LB 3 e LB 4 deram indícios dos conteúdos estudados: noções de Geometria Plana (ângulos e figuras) e noções de Geometria Espacial. Já os participantes LD 3 e LD 4 relataram que as atividades não curriculares foram direcionadas para o estudo de figuras e ressaltaram o uso de origami no processo. LB 2 pontuou o estudo de figuras e medidas. Dessa forma, apenas aproximadamente 30% dos licenciandos tiveram experiências com o conhecimento geométrico para além das disciplinas obrigatórias do curso.
Nível de satisfação em relação aos conhecimentos geométricos que possui.	LD 1, LD 2, LG 1, LG 2	Dentre os 15 sujeitos participantes que responderam o questionário diagnóstico, apenas LD 1, LD 2, LG 1 e LG 2 afirmam estarem satisfeitos com os conhecimentos geométricos que possuem. Os demais participantes encontram-se insatisfeitos com o nível de conhecimento que possuem a respeito dos saberes geométricos.
O conhecimento geométrico que está sendo construído no curso de Licenciatura contribui para uma prática pedagógica diferenciada da que você teve na educação básica.	LB 1, LD 4, LG 3, LG 4	Os participantes LB 1, LD 4 e LG 3 foram categóricos em afirmar que o conhecimento geométrico construído no curso não contribui para práticas diferenciadas daquelas vivenciadas por eles na educação básica. Os mesmos alegam que a abordagem dos conteúdos é superficial e são estudados os mesmos conteúdos ofertados na educação básica. Os demais sujeitos, em sua maioria, afirmam que o conhecimento apreendido no curso contribui para práticas diferenciadas, pois estão além dos que foram estudados por eles na educação básica. O participante LG 4 expôs ser necessário uma nova abordagem do conteúdo para que a prática pedagógica se diferencie da que vivenciou em outras modalidades de ensino. Vale ressaltar que os participantes deixam claro que a contribuição maior está em aprender conteúdos geométricos que não foram ensinados a eles na educação básica.

Os conhecimentos históricos a respeito dos cinco Postulados de Euclides.	LB 1, LB 2, LB 3, LB 4, LD 1, LD 2, LG 4, LO 1, LO 4	Os participantes LB 1, LB 2, LB 3, LB 4, LD 1, LG 4, LO 1 fazem referência ao Postulado de Existência que são relacionados aos entes primitivos: ponto, reta e plano. Apenas os participantes LD 2 e LO 4 referem-se aos cinco célebres postulados de Euclides, dos quais mencionam o I, II e III postulados. É possível constatar que os participantes em sua maioria, desconhecem o processo histórico da construção de conceitos da Geometria Euclidiana, que tem os cinco postulados de Euclides como alicerce para a sua fundamentação.
Conhecimentos acerca das Geometrias não Euclidianas.	LB 1, LB 3, LD 2, LG 1, LG 2, LO 1, LO 2, LO 4	Os sujeitos LB 3, LG 1, LO 1, LO 2, LO 4 responderam que já leram ou ouviram falar sobre as Geometrias não Euclidianas. Mas, apenas LB 1 e LD 2 citaram modelos geométricos diferentes do euclidiano, respectivamente, Geometria dos Fractais e Geometria Hiperbólica. E, somente o participante LO 4, esclareceu que uma Geometria não Euclidiana é “aquela geometria que, basicamente, se contradiz em alguns postulados em relação à Geometria Euclidiana”. As informações sugerem que os licenciandos tiveram pouco contato ou desconhecem as Geometrias não Euclidianas.
A abrangência do campo de Estudo da Geometria em relação a pluralidade de modelos geométricos.	LB 2, LB 4, LD 4	A última pergunta do questionário buscou caracterizar diferentes modelos geométricos a partir de conceitos básicos que os fundamentam. Todos os 15 participantes responderam os itens da questão considerando apenas os conceitos de um único modelo geométrico, o Euclidiano. Os participantes LB 2, LB 4 e LD 4 em meio as justificativas assumiram que retas coincidentes são paralelas entre si. Em nossa análise, tal afirmação, se configurou em um erro conceitual que contrapõem o conceito de paralelismo entre retas na Geometria Euclidiana, na qual os participantes se apoiaram. Desse modo, compreendemos que os licenciandos se apoiam em um único modelo geométrico e demonstraram que alguns conceitos geométricos euclidianos ainda não foram devidamente internalizados.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

6.2.4.1 O Questionário Diagnóstico como instrumento norteador para a proposta de intervenção

As informações produzidas no questionário diagnóstico foram determinantes para direcionar as ações realizadas na proposta de intervenção, uma vez que foi possível apreender alguns anseios dos participantes em relação ao conhecimento geométrico que possuem e ter indícios de como essa abordagem foi vivenciada durante a caminhada acadêmica deles. Para orientar nossas ações na pesquisa de campo foram traçados 4 eixos de interesse concebidos mediante a leitura aprofundada do referencial teórico e serão abordadas de maneira mais detalhada posteriormente.

Assim, o eixo de interesse denominado de “planejamento” foi influenciado pelos indícios que os participantes deram sobre a abordagem dos conteúdos geométricos durante sua formação na Educação Básica. Para esse eixo, foi possível perceber na análise dos registros do

questionário diagnóstico o forte uso da lógica-formal na resolução de algumas questões, em que os participantes consideraram ações axiomáticas como a única forma para resolver problemas de cunho geométricos, o que reforça, em nosso entendimento, a ideia da existência de um modelo único geométrico. Ao considerarmos esse aspecto, propomos para a proposta de intervenção Atividades de Ensino que direcionassem os licenciandos para um ambiente de investigação que desarticulasse as ações preconcebidas de natureza euclidiana, conduzindo-os à reflexão acerca de espaços geométricos em que os conceitos euclidianos tivessem que ser apropriados, desconstruídos e reconstruídos para atender às necessidades dos mesmos.

Já os eixos de interesse “instrumentos pedagógicos e mediação”, foram contemplados a partir da articulação entre história virtual do conceito geométrico e aplicação dos conceitos em materiais manipulativos, de modo que os licenciandos fossem conduzidos a construir intuitivamente conceitos geométricos não euclidianos por meio da visualização e manipulação de objetos que representam superfícies plana, esférica e hiperbólica. Para tanto, construiu-se Atividades de Ensino considerando variados signos e instrumentos para serem desenvolvidos em grupo e individualmente.

Em relação ao eixo de interesse “conhecimento geométrico do participante”, o questionário nos fez entender que existem fragilidades em relação a aprendizagem de conceitos geométricos que acompanham os discentes desde a Educação Básica. Alguns participantes relacionam a relevância dos conhecimentos estudados nas disciplinas da área de Geometria, ofertado na instituição de Ensino Superior que frequentam, por estas apresentarem conteúdos que não foram estudados por eles no ensino básico. Isto é, a relação de importância das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, na área de Geometria, está atrelado ao fato de os participantes não terem estudado determinados conceitos geométricos na Educação Básica. Tal situação sugere que há uma preocupação por parte dos licenciandos em apropriar-se cada vez mais de conceitos geométricos que estão sendo trabalhados na Educação Básica, reforçando a ideia de que o acúmulo de conhecimentos pode ser a chave para a construção de práticas de ensino diferenciadas.

Esse pensamento pode distanciar o futuro professor de Matemática da essência do processo de ensino e aprendizagem, desassociando a teoria da prática, comprometendo-o mais com a quantidade de conteúdo a ser abordado nas aulas de Matemática, do que com práticas de ensino diferenciadas que possam contribuir para a apropriação dos conceitos durante o processo de ensino e aprendizagem.

Nessa perspectiva, as Atividades de Ensino foram pensadas a partir dos conhecimentos geométricos prévios dos participantes, de maneira que a interação entre o licenciando e os

conteúdos abordados fossem se desenvolvendo por meio de um processo investigativo que articulou os conceitos em níveis de aprofundamento, ou seja, todas as Atividades de Ensino eram interligadas e a compreensão dos conceitos de uma se tornava pré-requisito para a realização da outra. As Atividades de Ensino focaram na generalização do conhecimento geométrico em estudo.

6.2.5 A Teoria Histórico-Cultural como base para a construção da proposta de intervenção

Apresentamos aqui o processo de construção da proposta de intervenção, considerando os aportes teóricos da Teoria Histórico-cultural e da Teoria da Atividade para analisar, à luz dessas teorias, a produção de significados de futuros professores de Matemática sobre o estudo de Geometrias não Euclidianas.

Dessa forma, valemo-nos da Teoria Histórico-Cultural, Teoria da Atividade e dos pressupostos teórico-metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino (AOE), para a elaboração da proposta de intervenção em que, sinteticamente, o planejamento das estratégias foram desenvolvidas considerando mediações pedagógicas em que sua orientação–execução–controle fossem base para a formação de conceitos sobre diferentes modelos geométricos. Assim, buscamos auxiliar os futuros professores de Matemática a procurarem uma consonância entre os seus motivos e necessidades em relação a apropriação do objeto em estudo. Para tanto, escolhemos alguns aspectos a serem desenvolvidos durante a proposta de intervenção:

- Caracterização dos futuros professores de Matemática em relação ao conhecimento da pluralidade de modelos geométricos (questionário diagnóstico);
- Elaboração de instrumentos pedagógicos para formação de conceitos geométricos (Atividade de Ensino e material manipulativo);
- Elaboração de atividades em grupo e individual;
- Utilização de signos e instrumentos variados nas orientações escritas e orais;
- Mediação entre professor-formador e participantes e entre os participantes;
- Elaboração de atividades com foco na generalização do conhecimento geométrico em estudo (níveis de aprofundamento).

A intenção ao desenvolver essas estratégias é de buscar transformar a realidade dos participantes envolvidos neste processo de formação, a partir de instrumentos pedagógicos que lhes possibilitem a apropriação de diferentes modelos geométricos, por meio de interações promovidas pelo diálogo, com o intuito de ampliar a compreensão de conceitos geométricos euclidianos e não euclidianos. Portanto, a ação age como mola propulsora da prática, que por

sua vez constrói conhecimento e alcança seu ápice na transformação do saber dos participantes no processo.

Assim, para que a AOE se torne uma unidade de formação entre professor e alunos, se faz necessário estabelecer uma correspondência de modo que os motivos, intenções, objetivos, ações e condições possam se relacionar de maneira processual na realização da atividade pedagógica.

Para ilustrar os interesses dessa pesquisa, apresentamos no quadro abaixo a AOE como unidade de formação entre professor-pesquisador e participantes do projeto de intervenção, a partir do objeto de estudo proposto nessa investigação.

Quadro 9 - AOE sobre Geometrias como unidade de formação entre professor e alunos

	Atividade do Formador – Ensino	Atividade de Participante – Estudo
Motivo/Necessidade	Possibilitar a transformação dos participantes por meio do acesso à produção cultural relacionada ao surgimento e aplicação de modelos geométricos diferentes do euclidiano.	Tornar-se possuidor por direito da produção cultural relacionada ao surgimento e aplicação das Geometrias não Euclidianas.
Objetivo	Ensinar conhecimento sócio histórico sobre Geometrias não Euclidianas.	Apropriar-se do conhecimento sócio histórico relacionado a diferentes modelos geométricos.
Ações e Operações	Organizar o ensino: Definindo as Geometrias a serem estudadas; Definindo as condições (modo de ação) que as Geometrias serão abordadas na proposta de intervenção.	Realizar as Atividades de Ensino; Produção de textos individuais sobre o conhecimento geométrico abordado na proposta de intervenção; Desenvolver ações relacionadas com o processo avaliativo (assiduidade, participação, compromisso).

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Nessa perspectiva, o participante ao se apropriar do conhecimento teórico sobre os diferentes modelos geométricos passa a ter condição de atribuir novos significados para os conceitos geométricos já internalizados sobre a realidade em que vive, ampliando e modificando os seus modos de interagir com a realidade que lhe é sensível, o que “[...] permite a ele transformar a forma e o conteúdo do seu pensamento” (Rosa *et al.*, 2010, p. 67).

A participação de futuros professores de Matemática nessa pesquisa pode se configurar em uma atividade de formação, a partir do momento que esta possibilite aos participantes um espaço de diálogo e reflexão sobre o que compreendem dos conceitos geométricos euclidianos e não euclidianos, bem como, a necessidade desses conhecimentos para o desenvolvimento de sua prática docente.

6.2.5.1 Descrição da proposta de intervenção: contexto da investigação

A próxima etapa da pesquisa é marcada pela construção de uma proposta de intervenção (APÊNDICE E) envolvendo Atividades de Ensino que abordam diferentes modelos geométricos, intitulada “O desenvolvimento lógico-histórico do conhecimento geométrico: perspectivas para o ensino de Geometrias”. Essa intervenção foi desenvolvida com licenciandos em Matemática da UNEB. A priori, a proposta foi de cunho teórico-prático e teve a finalidade de construir documentos para a pesquisa que permitam analisar a produção de significados de futuros professores de Matemática, a partir da vivência e exploração de Atividades de Ensino sobre diferentes modelos geométricos. Para tanto, foram utilizados os seguintes instrumentos de coleta de dados: questionário diagnóstico, Atividades de Ensino envolvendo conhecimento sobre diferentes Geometrias, gravações audiovisuais e o roteiro de observação.

Na sequência, apresenta-se cada momento da proposta de intervenção, destacando os instrumentos utilizados para coletar os dados.

Quadro 10 - Descrição da proposta de intervenção

Encontro	Conteúdo	Objetivo	Ações a ser desenvolvidas	C.H.
1º 13/04/19	Discussão de aspectos de natureza histórico-epistemológica sobre os Postulados de Euclides.	Compreender o modelo geométrico euclidiano a partir dos postulados de Euclides.	- Aplicação de questionário diagnóstico; - Socialização das resoluções; - Discussão dos Postulados de Euclides.	3h
2º 27/04/19	Construção de conceitos básicos sobre Geometria Esférica.	Identificar conceitos elementares de Geometria Esférica.	-Realização da Atividade de Ensino sobre Geometria Esférica; - Apresentação e discussão em plenária dos resultados desenvolvidos por cada grupo;	3h
3º 04/05/19	A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.	Diferenciar a Geometria Euclidiana da Geometria Esférica pela construção de triângulos.	-Realização da Atividade de Ensino sobre Geometria Esférica); - Apresentação e discussão em plenária dos resultados desenvolvidos por cada grupo;	3h
4º 11/05/19	A Geometria do Globo Terrestre.	Aplicar os conceitos sobre Geometria Esférica no globo terrestre e comparar a sua planificação com sua forma espacial.	-Realização da Atividade de Ensino sobre a Geometria do Globo Terrestre; - Apresentação do Vídeo: As aventuras de Radix. - Apresentação e discussão em plenária dos resultados desenvolvidos por cada grupo; - Discussão do enunciado do Postulado das Paralelas na Geometria Esférica.	3h

5º 18/05/19	Construção de um transferidor esférico para mensurar ângulos formados por triângulos esféricos.	Investigar os ângulos formados em triângulos esféricos.	- Construção de um transferidor esférico; - Aferição de ângulos a partir de um transferidor esférico. - Atividade Individual.	3h
6º 25/05/19	Construção de triângulos e retas paralelas em superfícies hiperbólicas.	Investigar conceitos elementares da Geometria Hiperbólica.	- Realização da Atividade de Ensino sobre Geometria Hiperbólica; - Apresentação e discussão em plenária dos resultados desenvolvidos por cada grupo; - Discussão do enunciado do Postulado das Paralelas na Geometria Hiperbólica.	3h
7º 01/06/19	A Geometria dos Espaços ou Geometrias não Euclidianas	Diferenciar a partir dos Postulados de Euclides a Geometria Euclidiana das Geometrias Esférica e Hiperbólica.	- Sistematização das Geometrias por meio de um quadro comparativo; - Socialização da atividade. - Atividade Individual para institucionalização do saber.	3h

Fonte: Próprio autor (2019).

As Atividades de Ensino foram construídas a partir dos pressupostos teórico-metodológicos da AOE e utilizadas como contexto para estimular a negociação de significados de futuros professores de Matemática acerca do estudo de conceitos de Geometrias não Euclidianas. Os sistemas geométricos abordados tanto no questionário diagnóstico quanto nas Atividades de Ensino foram: Geometria Euclidiana, Geometria Esférica e Geometria Hiperbólica.

Acredita-se que a realização de gravações audiovisuais e o registro das observações referentes às ações e reflexões geradas no decorrer do curso se constituem métodos mais adequados para captar dados imprescindíveis para o estudo e podem contribuir de maneira eficaz para alcançar os objetivos traçados nessa pesquisa.

Os participantes-convidados para a pesquisa completa totalizaram o número de 16 licenciados da UNEB, como já mencionado. A escolha da referida instituição deu-se pelo fato de o proponente da pesquisa ser docente da mesma e por esse estudo ter sido de relevância para o incentivo da participação dos licenciandos na proposta de intervenção. Os encontros foram realizados no Centro Educacional Profº. Rômulo Galvão – CEPROG, em Teixeira de Freitas - Bahia.

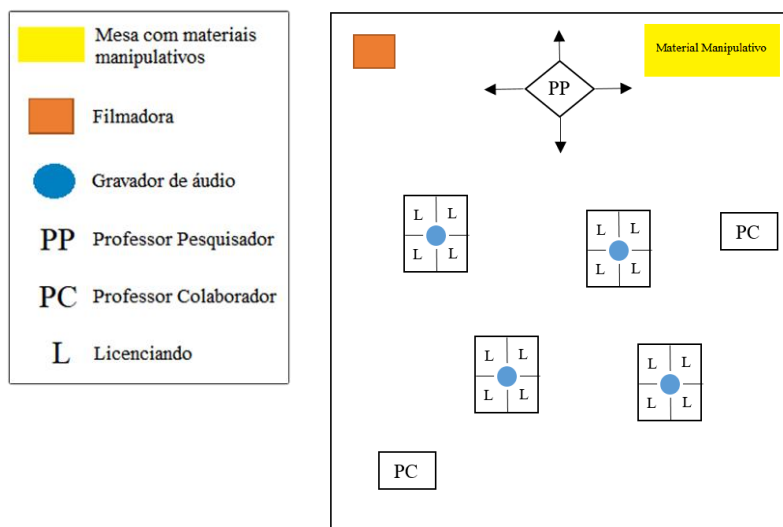
Para coletar os dados produzidos durante a interação nos grupos, disponibilizamos em cada grupo um gravador de áudio para captar nos discursos dos licenciandos a compreensão que os mesmos construíram sobre as diferentes Geometrias no processo de desenvolvimento das Atividades de Ensino em coletividade. Para melhor captar as ações dos participantes foi elaborado um roteiro de observação que foi preenchido por dois professores colaboradores que

observaram a interação dos integrantes de cada grupo e do pesquisador. Importante salientar que os docentes que auxiliaram na proposta de intervenção atuam no desenvolvimento de pesquisas, em que a mais experiente já possui doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus Rio Claro e o outro docente é mestre em Educação Matemática pelo programa de Pós-graduação em Educação Matemática na Universidade Estadual de Santa Cruz de Cabralia (UESC), Bahia.

A etapa final da aplicação da Atividade de Ensino de cada encontro seguiu os pressupostos teórico-metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino e quando em plénaria buscamos, por meio da síntese coletiva, encontrar a resposta matematicamente correta elaborada pelos participantes. Para tal fim, foi escolhido por cada grupo um relator que teve a finalidade de expressar como o grupo construiu a solução para a situação desencadeadora de aprendizagem, de maneira a permitir a realização das áudio-gravações individualizadas do processo construído pelos participantes em grupo. Cada relator, em seu devido tempo, podia acrescentar aspectos que o grupo julgava ser necessário à construção coletiva da solução mais adequada para a situação-problema dada.

Na figura 12 observamos a disposição dos licenciandos durante a realização das AE, em que a estratégia foi dividir os participantes em grupos de 4 integrantes que se mantiveram em todos os encontros juntos. Cada grupo escolheu um codinome para facilitar a identificação dos diálogos e intervenções ocorridas durante o desenvolvimento das AE, a saber: Beta, Delta, Os Geodésicos e Os 4 postulados. Dessa maneira, a disposição dos instrumentos de captação de áudio e vídeo foi mantida durante os encontros, bem como a posição fixa dos professores colaboradores para acompanharem as ações dos grupos e do professor-pesquisador. A estrutura propiciou ao professor-pesquisador movimentar-se de grupo em grupo facilitando assim o processo de interação entre os participantes da pesquisa e o mesmo.

Figura 12 - Esquema representativo da organização dos dispositivos de registro de dados



Fonte: Próprio autor (2019).

Os dados captados durante a proposta de intervenção foram analisados sob a luz da Teoria Histórico-Cultural e da Teoria da Atividade.

6.2.6 Atividades de Ensino (AE)

A partir do referencial teórico adotado nessa pesquisa foram planejadas e desenvolvidas 6 Atividades de Ensino (AE) denominadas: AE I – O que diz Euclides?; AE II – Questionando Euclides?; AE III – A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180° ?; AE IV – A Terra não é plana?; AE V – Outros espaços?; AE VI – É uma questão de curvatura? Essas AE foram elaboradas com a pesquisa e utilização adaptadas dos materiais produzidos por outros pesquisadores²³.

As AE foram desenvolvidas na perspectiva teórico-metodológico da AOE em um movimento que visa a produção de saberes sobre diferentes modelos geométricos como uma unidade de formação tanto para o professor-pesquisador quanto para os licenciandos participantes da pesquisa.

As AE serviram como fio condutor para a construção de um espaço de negociação de significados sobre diferentes modelos geométricos que se constituíram a partir das discussões, diálogos e reflexões produzidas pelos licenciandos e pelo professor-pesquisador. O processo de construção dos conhecimentos geométricos foi investigado com base na necessidade da sua

²³ Nas AE indicaremos as referências dos pesquisadores.

produção, analisando as limitações do modelo geométrico euclidiano para que emergisse novas formas de perceber e compreender o espaço em que vivemos.

No quadro abaixo, buscamos caracterizar as AE desenvolvidas na proposta de intervenção a partir de sua denominação, objetivos, conteúdos desenvolvidos, fontes utilizadas para a elaboração das mesmas e algumas inferências.

Quadro 11 - Caracterização das Atividades de Ensino (AE)

Atividade de Ensino	Objetivos	Conceitos	Fontes	Algumas Inferências
I- O que diz Euclides?	- Investigar o modelo geométrico euclidiano a partir dos Postulados de Euclides.	- Reta; - Infinitude; - Círculo; - Ângulos; - Retas paralelas.	- PETIT (1982).	A análise dos postulados possibilitou a compreensão da estrutura lógica da Geometria Euclidiana, considerando às necessidades culturais de sua produção.
II- Questionando Euclides?	- Analisar os conceitos elementares da Geometria Euclidiana para compreender os conceitos geométricos atribuídos a um espaço esférico.	- Retas; - Infinitude e limitada; - Retas Paralelas; - Retas Concorrentes; - Esfera.	- NASCIMENTO (2013); - PETIT (1982). - PRESTES (2006).	A investigação dos conceitos geométricos da Geometria Esférica a partir da manipulação de material concreto (bola de isopor) contribuiu para o processo de ensino e aprendizagem. A crença da existência de uma única Geometria foi desconstruída durante o processo.
III- A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180°?	- Diferenciar a Geometria Euclidiana da Geometria Esférica pela construção de triângulos; - Compreender a construção de triângulos como uma consequência dos Postulados das Paralelas.	- Ângulos; - Triângulos.	- ANTUNES (2009). - PETIT (1982).	Durante a realização da AE foi possível constatar um envolvimento maior por parte dos participantes ao aplicarem os conceitos geométricos. Os conceitos utilizados tinham que ser analisados e empregados de acordo com o modelo geométrico em estudo.
IV- O mundo de Anselmo não é Plano?	Compreender a importância do estudo dos conceitos da Geometria Esférica a partir da sua aplicação em práticas cotidianas.	- Distância entre dois pontos; - Cálculo de distâncias; - Trajetórias; - Medida do ângulo esférico.	- ANDRADE (2011). - PETIT (1982).	A construção do Transferidor Esférico contribuiu para ressignificar a importância do estudo da Geometria Esférica, pois considerou a necessidade do deslocamento humano no planeta Terra e seus avanços tecnológicos.

V- Outros Espaços?	Investigar conceitos fundamentais da Geometria Hiperbólica.	- Paralelismo; - Triângulo; - Disco de Poincaré;	- BONETE (2000). - NASCIMENTO (2013). - PETIT (1982).	O surgimento de mais uma Geometria não Euclidiana provocou novas reflexões, amadurecendo a ideia de investigação no campo da Geometria. Estudar espaços não euclidianos como uma prática para desarticular o uso do pensamento lógico-formal.
VI- É uma questão de curvatura?	Investigar consonâncias e divergências entre diferentes modelos geométricos tendo como ponto de partida os Postulados de Euclides.	- Ponto; - Reta; - Espaço; - Paralelismo; - Triângulo;	- BONETE (2000). - BRUM (2013). - NASCIMENTO (2013). - PETIT (1982).	O estudo de modelos geométricos diferentes do euclidiano, a partir da comparação entre os mesmos, contribuiu para a internalização de conceitos geométricos.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Segue abaixo as AE desenvolvidas pelos participantes da pesquisa. Ressaltamos que as AE foram adaptadas e direcionadas pelo personagem Anselmo, de autoria de Jean Pierre Petit, presente na obra intitulada: As aventuras de Anselmo Curioso – Os mistérios da Geometria.

- AE I – O que diz Euclides?

ATIVIDADE I – QUESTIONANDO EUCLIDES?

A Sociedade Euclides & C^o nasceu em Alexandria no século III a.C. Durante dois mil e duzentos anos os negócios prosperaram. Os produtos eram apreciados e a clientela estava satisfeita e era dedicada.

Mas, pouco a pouco, os gostos dos clientes mudaram. Alguns deles, outrora fervorosos adeptos da firma em questão, depois de curiosas experiências, perguntavam-se:
"O Euclides é realmente o que há de melhor em toda a parte e para tudo?"



Um dia, Anselmo decidiu esticar um fio entre duas estacas:

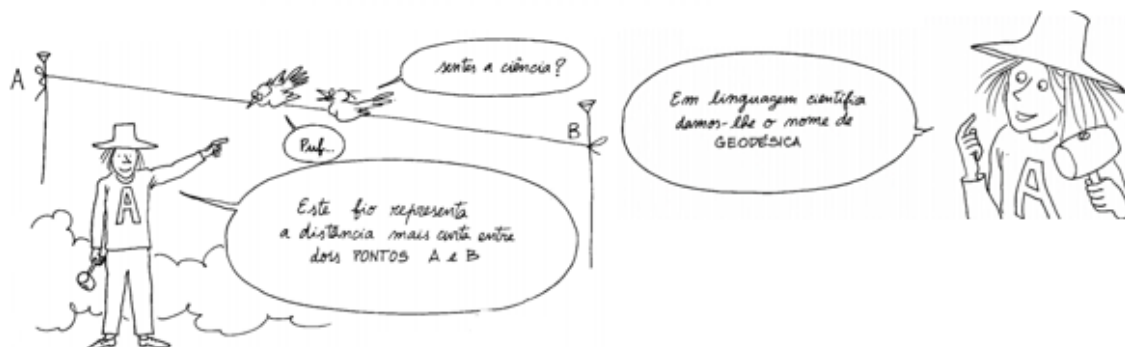


Figura: Material extraído de "As aventuras de Anselmo curioso: os mistérios da Geometria"

Fonte: http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/alice/OS_MISTERIOS_DA_GEOMETRIA.pdf

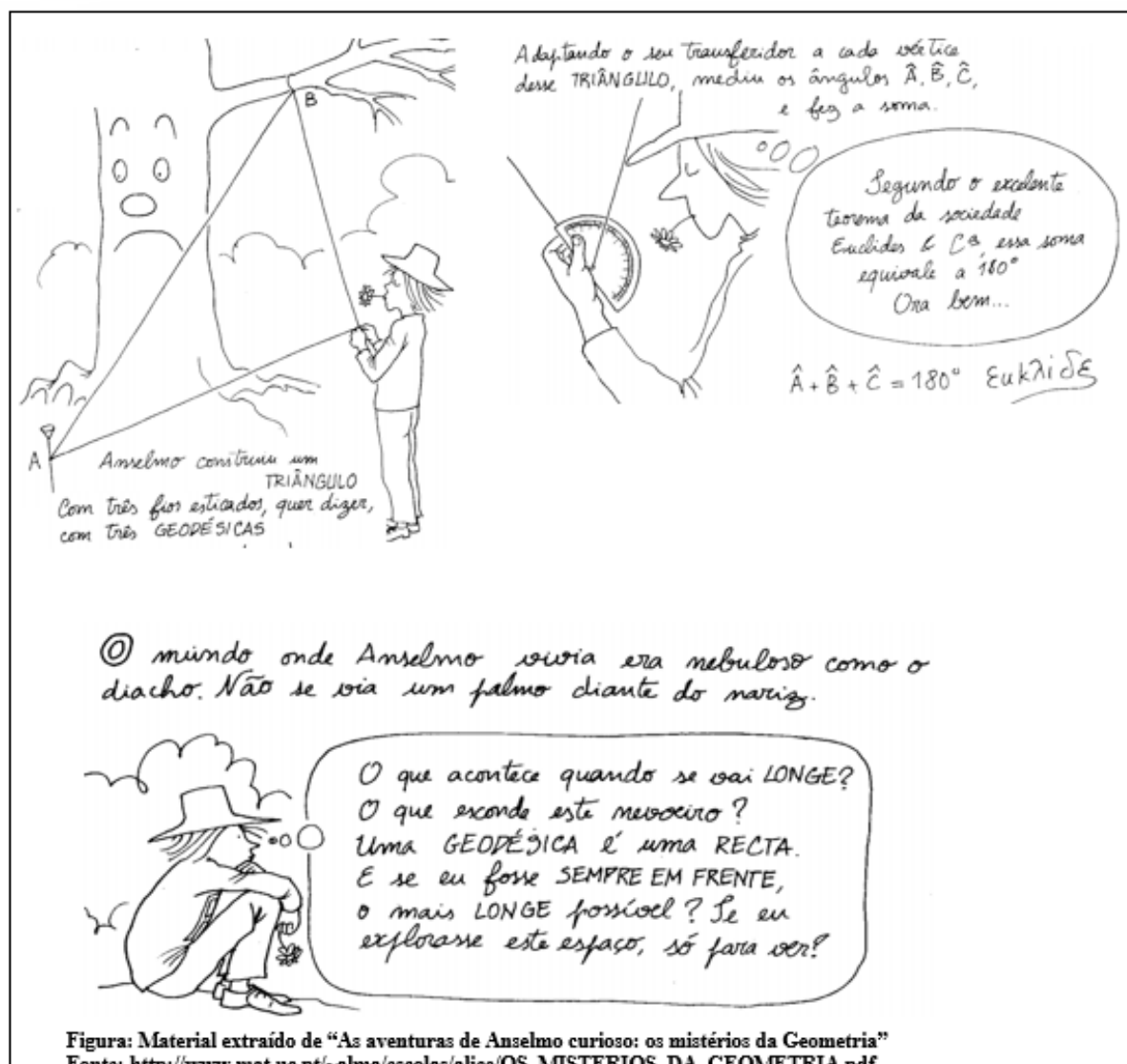


Figura: Material extraído de “As aventuras de Anselmo curioso: os mistérios da Geometria”
 Fonte: http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/alice/OS_MISTERIOS_DA_GEOMETRIA.pdf

1. A partir das reflexões de Anselmo e de seus conhecimentos geométricos, responda:

- As estacas fincadas no chão representam que objeto geométrico?
- Suponha que Anselmo fincasse uma estaca no chão e fosse desenrolando um fio bem esticado e fosse em frente sempre em frente, o mais longe possível. Do ponto de vista geométrico o que poderíamos dizer sobre essa construção? Desenhe o caminho percorrido por Anselmo.
- “Uma Geodésica é uma recta” o que quer dizer Anselmo sobre essa afirmação? Como vocês definiriam uma Geodésica?
- Sobre o triângulo construído por Anselmo, qual objeto de estudo da Geometria lhe vem a mente?
- Em poucas linhas o que vocês podem dizer sobre os conhecimentos geométricos de Anselmo?

Referências:

PETIT, Jean-Pierre. *As Aventuras de Anselmo Curioso – Os Mistérios da Geometria*, traduzido por Luís Pignatelli, Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1982.

• AE II – Questionando Euclides?



Figura: Material adaptado de “As aventuras de Anselmo curioso: os mistérios da Geometria”
 Fonte: http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/alice/OS_MISTERIOS_DA_GEOMETRIA.pdf

1. Se Anselmo saísse a partir da estaca e caminhasse 10 km ao sul. Depois virasse ao oeste e caminhasse por mais 10 km. E virasse novamente e caminhasse 10 km ao Norte. É possível Anselmo encontrar o ponto de partida? Justifique por meio de desenhos e/ou textos explicativo.
2. Imagine que Anselmo, resolveu sair a partir da estaca e caminhasse em linha reta infinitamente.
 - a) Desenhe o caminho percorrido por Anselmo numa folha de papel.
 - b) De acordo com o caminho desenhado na folha de papel, é possível Anselmo voltar ao ponto de partida?
 - c) Com fitas adesivas, represente o caminho percorrido por Anselmo na esfera de isopor? Que figura geométrica você encontrou? O que você pode afirmar a partir dessa representação sobre o caminho percorrido por Anselmo?
 - d) Comparem as representações realizadas na folha de papel com as representações realizadas na bola de isopor e anote suas reflexões considerando suas relações.
3. A partir das reflexões propostas até agora:
 - a) Marque um ponto sobre a esfera.
 - Quantas “retas” vocês podem traçar passando por esse ponto?
 - Na bola de isopor representem uma dessas retas.
 - b) O primeiro postulado de Euclides diz que por dois pontos pode passar apenas uma única reta.
 - Esse postulado se verifica na superfície esférica? Porquê?
 - Na superfície esférica as retas são infinitas e ilimitadas como na superfície plana?

- c) Duas retas são chamadas concorrentes quando estão num mesmo plano e possuem um ponto em comum.
- Na superfície esférica existem retas concorrentes?
- Se existirem, na bola de isopor, represente duas retas concorrentes.
- d) Duas retas são paralelas se estão num mesmo plano e não possuem nenhum ponto em comum na Geometria Euclidiana.
- Na superfície esférica existem retas paralelas?
- Se existirem, na bola de isopor, represente essa ideia.
- e) Sejam X e Y dois pontos distintos. Em quantas partes eles dividem:
a) uma reta euclidiana?
b) uma reta esférica?

REFERENCIAS:

- NASCIMENTO, Anna Karla Silva do. Geometrias não-euclidianas como anomalias: implicações para o ensino de geometria e medidas. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Natal, 2013.
- PETIT, Jean-Pierre. *As Aventuras de Anselmo Curioso – Os Mistérios da Geometria*, traduzido por Luís Pignatelli, Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1982.
- PRESTES, Irene da Conceição Rodrigues. Geometria esférica: uma conexão com a geografia. 201 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo: 2006. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11101>. Acessado em: 18/07/2018.

- AE III – A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180° ?



Considerando a situação vivenciada por Anselmo, explique o que pode estar ocorrendo com o teorema de Euclides sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo para que este não funcione no mundo de Anselmo.

Vamos realizar dois experimentos para compreendermos melhor a situação vivenciada pelo Anselmo.

Experimento I

- a) Verificar se a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .
 - Corte um triângulo de uma folha de papel.
 - Pinte cada ângulo do triângulo de uma cor diferente.
 - Dobre esse triângulo ao “meio”, paralelo a um dos lados juntando um vértice ao lado oposto (um jeito de fazer ficar bem paralelo é dobrar nos pontos médios dos lados).
 - Agora dobre perpendicular à base, juntando com o ângulo da dobradura anterior.
 - Agora dobre perpendicular à base, juntando o com o ângulo da 1ª dobradura.
- b) Qual a conclusão a que você chega com relação à soma dos ângulos internos de um triângulo? Justifique sua resposta.
- c) Que relações podemos estabelecer entre a construção proposta no item a e o V Postulado de Euclides?

Experimento II

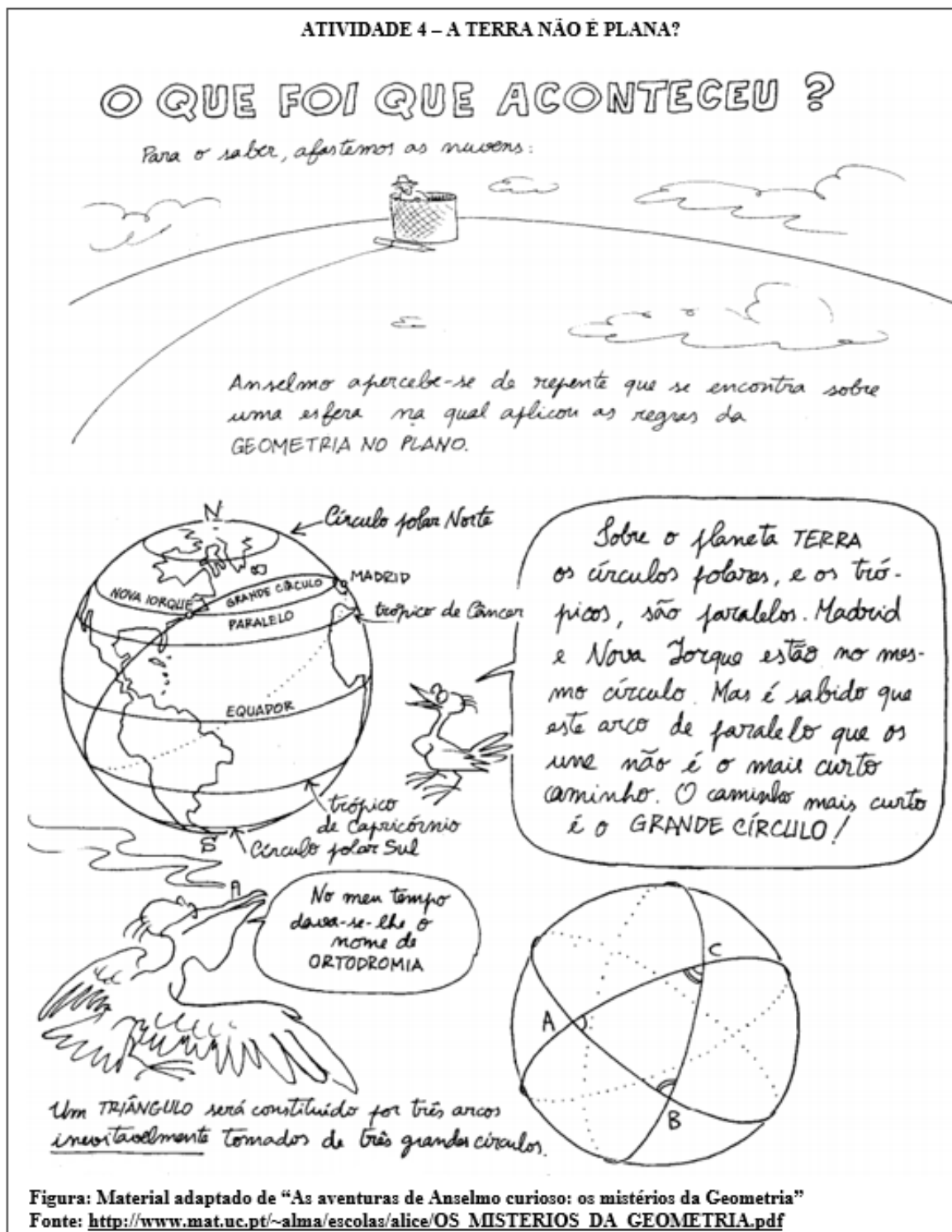
- a) A soma dos ângulos internos no triângulo esférico.
 - Utilizando a bola de isopor e fitas adesivas, construa três triângulos esféricos um dentro do outro.
 - Medir com o auxílio de um transferidor os ângulos internos dos três triângulos e realizar a soma dos ângulos internos de cada um.
- b) Na superfície esférica os triângulos possuem uma soma de ângulos internos menores, iguais ou maiores que na superfície plana? Qual o limite máximo do 3º ângulo, se os outros dois forem ângulos retos? Existe algum limite para a soma dos ângulos neste caso?
- c) O que você pode afirmar sobre a forma do mundo de Anselmo?

Referências:

ANTUNES, Marcelo Carvalho. Uma possível inserção das Geometrias não-Euclidianas no Ensino Médio. 54 f. Monografia (TTC) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: 2009.

PETIT, Jean-Pierre. *As Aventuras de Anselmo Curioso – Os Mistérios da Geometria*, traduzido por Luís Pignatelli, Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1982.

- AE IV – A Terra de Anselmo não é Plana?



A partir da investigação proposta por Anselmo e com o auxílio de uma bola de isopor, responda:

- 1- Tomando dois pontos sobre a superfície esférica, como você determinaria a distância entre eles? Qual a unidade de medida que você usaria para medir essa distância?
- 2- Na superfície esférica que você possui, faça o esboço de duas retas (circunferências máximas).
 - a) Quantos são os pontos de intersecção entre duas retas? Quantos são os arcos determinados por esses pontos?
 - b) Você identifica algum ângulo na figura que você fez na superfície esférica? Quantos?
 - c) Qual a unidade de medida que você pode utilizar para medir a abertura de um ângulo esférico? Você conhece algum instrumento que poderia auxiliar para obter a medida do ângulo esférico?
- 3- Marque, sobre a bola de isopor, 2 pontos que pertençam a um mesmo diâmetro. Qual a distância entre estes dois pontos em graus?
- 4- Na bola de isopor, coloque dois alfinetes de modo que a distância entre eles seja de 60° . Justifique.
- 5- Vamos realizar um experimento para compreendermos melhor a formação de ângulos e triângulos esféricos.
 - Construção de um transferidor esférico.

REFERÊNCIAS:

ANDRADE, Maria Lúcia Torelli Doria de. Geometria esférica: uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no ensino básico. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2011.

PETIT, Jean-Pierre. *As Aventuras de Anselmo Curioso – Os Mistérios da Geometria*, traduzido por Luís Pignatelli, Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1982.

• AE 5 – Outros espaços?





Figura: Material adaptado de “As aventuras de Anselmo curioso: os mistérios da Geometria”

Fonte: http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/alice/OS_MISTERIOS_DA_GEOMETRIA.pdf

1. Sobre uma superfície hiperbólica, representado por uma corneta, construa com fitas adesivas dois triângulos de maneira que um fique dentro do outro e com um transferidor estime seus ângulos.
 - a) Na Geometria Euclidiana a soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a 180° . O que você pode dizer da soma dos ângulos internos de um triângulo numa superfície Hiperbólica após a realização do experimento?
 - b) Represente por meio de desenho este fato.
2. Sobre uma superfície hiperbólica, representado por uma corneta, construa com fitas adesivas uma reta r e um ponto P fora dela. Logo após, construa duas retas, q e s , que passam pelo ponto P e responda:
 - a) Houve alguma deformação em relação ao Postulado das paralelas de Euclides?
 - b) Na superfície hiperbólica, que conclusão podemos fazer acerca do paralelismo entre retas?

Referências:

BONETE, Izabel Passos. As Geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura: algumas experiências. 219f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas/Universidade Estadual do Centro-Oeste, Campinas/Guarapuava, 2000.

NASCIMENTO, Anna Karla Silva do. Geometrias não-euclidianas como anomalias: implicações para o ensino de geometria e medidas. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Natal, 2013.

- AE 6 – É uma questão de curvatura?

ATIVIDADE 6 – É UMA QUESTÃO DE CURVATURA?

CURVATURA:

Uma superfície curva é uma superfície onde os teoremas euclidianos não funcionam. A curvatura pode ser positiva ou negativa.

Sobre uma superfície de CURVATURA POSITIVA, a soma dos ângulos dum triângulo é superior a 180° . Se se traça uma circunferência de raio ℓ , a área do círculo é inferior a $\pi \ell^2$ e o seu perímetro inferior a $2\pi \ell$.

Sobre uma superfície de CURVATURA NEGATIVA, a soma dos ângulos dum triângulo é inferior a 180° . Se se traça uma circunferência de raio ℓ , a área do círculo é superior a $\pi \ell^2$ e o seu perímetro superior a $2\pi \ell$.

Há momentos, Anselmo constata que ao tentar REVESTIR uma esfera, superfície de curvatura positiva, com um elemento plano, as peças apareciam. O revestimento duma superfície de curvatura negativa com um plano é igualmente impossível: os rasgos acontecem. Este teste da embalagem é o mais simples para determinar se a curvatura é positiva ou negativa.



Figura: Material adaptado de “As aventuras de Anselmo curioso: os mistérios da Geometria”
Fonte: http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/alice/OS_MISTERIOS_DA_GEOMETRIA.pdf

1. A partir dos conhecimentos assimilados até o momento e da análise da figura abaixo, complete o quadro pontuando as similaridades e divergências entre as Geometrias.

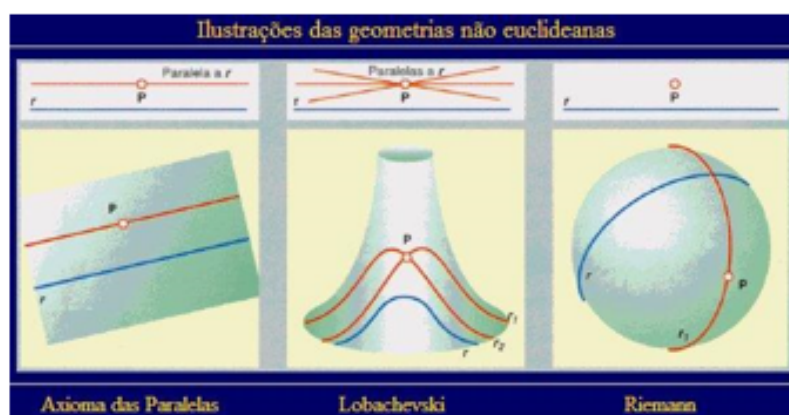


Figura: ilustrações das geometria não euclidianas – Euclides, o pai da Geometria.
Fonte: <http://beafemika.blogspot.com/>

GEOMETRIA EUCLIDIANA	GEOMETRIA ESFERICA	GEOMETRIA HIPERBOLICA
Plano euclidiano		
Ponto		
Reta		
Segmento de reta		
Dois pontos determinam uma reta.		
Por dois pontos passam uma única reta.		
Existem retas paralelas.		
Soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.		
A reta é infinita.		

Referências:

BONETE, Izabel Passos. As Geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura: algumas experiências. 219f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas/Universidade Estadual do Centro-Oeste, Campinas/Guarapuava, 2000.

BRUM, Wanderley Pivatto. Abordagem de conceitos de Geometria Esférica e Hiperbólica no ensino médio usando uma sequência didática. 171 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Regional de Blumenau. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Blumenau, 2013.

NASCIMENTO, Anna Karla Silva do. Geometrias não-euclidianas como anomalias: implicações para o ensino de geometria e medidas. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Natal, 2013.

6.2.7 Diário de Campo

Durante o processo de intervenção foram registradas algumas observações captadas a partir do que ouvimos, vimos, sentimos e vivenciamos no cenário de pesquisa (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Algumas anotações foram realizadas *in loco* no instante em que ocorreram, e outras, foram concebidas algumas horas depois do término dos encontros da proposta de intervenção. As reflexões geradas por meio das anotações complementaram as análises dos dados dessa pesquisa, já que as mesmas permitiram compreender os relatos dos participantes da pesquisa e os recortes que seriam utilizados.

6.2.8 Observação participante

Lüdke e André (1986) dissertam que a observação é um instrumento de investigação qualitativa que ocupa um lugar privilegiado nas pesquisas educacionais pois possibilita um contato pessoal e estreito do pesquisador com o fenômeno em estudo. A observação direta permite a aproximação do observador com as ‘perspectivas dos sujeitos’, ou seja, o observador ao acompanhar *in loco* a interação dos participantes da pesquisa pode apreender o significado que esses atribuem à realidade em que estão inseridos, bem como o significado das ações desenvolvidas pelos mesmos.

Para que a observação se torne um instrumento válido e fidedigno de investigação científica, o mesmo precisa ser cuidadosamente planejado pelo pesquisador de modo que permita ser controlado e sistematizado. É nesse processo de planejamento que o pesquisador a partir do quadro teórico que construiu irá determinar os aspectos específicos a serem captados no estudo. Nesse sentido, Ludke e André (2013, p. 29) propõem que “[...] a observação precisa ser antes um planejamento cuidadoso do trabalho e uma preparação rigorosa do observador”.

Pelos estudos de Bogdan e Biklen (1994) o observador-participante deve coletar os dados a partir de conteúdos observáveis que envolvem uma parte descritiva e uma parte mais reflexiva. Quanto ao registro da parte descritiva destacam a: descrição dos sujeitos; reconstrução de diálogos; descrição dos locais; descrição dos eventos especiais; descrição das atividades; os comportamentos do observador (LUDKE; ANDRÉ, 1986).

A parte reflexiva da observação inclui as observações pessoais do pesquisador, a partir de suas especulações, sentimentos, problemas, ideias, impressões, dúvidas, incertezas, surpresas e decepções. Quanto ao registro da parte reflexiva destacam: reflexões analíticas; reflexões metodológicas; dilemas éticos e conflitos; mudanças de perspectiva do observador; esclarecimentos necessários (LUDKE; ANDRÉ, 1986).

As observações foram ponderadas durante a aplicação do projeto de intervenção, contabilizando 7 encontros com a duração de 3 horas cada. O pesquisador buscou mediar junto aos participantes as Atividades Ensino, auxiliando-os nas dificuldades apresentadas a partir das hipóteses e conjecturas construídas pelos mesmos.

Nesse sentido, construímos um roteiro de observação (APÊNDICE F) que foi organizado a partir dos eixos de interesse considerados para a investigação:

- Planejamento (interação mediada entre os participantes e o conteúdo);
- Instrumentos pedagógicos (procedimentos metodológicos e materiais manipulados utilizados);
- Mediação (interação mediada entre professor e participantes e entre participantes);
- Conhecimento geométrico do participante (formação de conceitos e a produção de significados).

O registro das observações foi realizado a partir de anotações escritas e por meio da transcrição de áudio gravações realizadas durante a proposta de intervenção.

7 RESULTADOS DA PESQUISA: ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Este capítulo destina-se à análise e discussão dos dados obtidos por meio de investigações realizadas nos currículos das Licenciaturas em Matemática, nos documentos curriculares voltados para a Educação Básica (nacionais e estaduais) e no desenvolvimento de uma proposta de intervenção realizada com futuros professores de Matemática. Dessa maneira, as seções a seguir se dedicam à apresentação e interpretação do material constituídos a partir dos objetivos específicos traçados para a pesquisa com o foco em alcançar o nosso objetivo principal que é analisar a produção de significados de futuros professores de Matemática acerca do estudo de Geometrias não Euclidianas (GNE).

7.1 Identificação e análise do ensino de Geometrias não Euclidianas a partir dos documentos de referência

7.1.1 O que dizem os documentos curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática

Analizamos então a proposta curricular (PC) e o projeto político pedagógico (PPP) de cada instituição pública de ensino superior que oferta o curso de Licenciatura em Matemática na modalidade presencial. O mapeamento buscou identificar a presença das Geometrias não Euclidianas no currículo das instituições de Ensino Superior brasileiras, de modo a analisar os valores atribuídos pelos currículos ao estudo de diferentes modelos geométricos na formação docente.

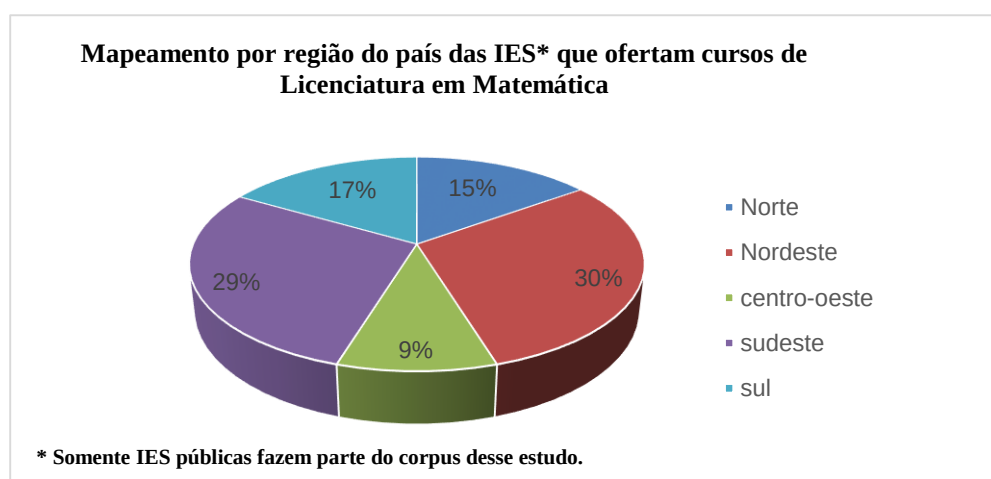
O PPP é o documento norteador das ações que devem ocorrer em uma instituição de ensino. Ele expressa as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes. Neste documento estão descritos cada componente curricular do curso quanto à carga horária, ementa, objetivos, metodologias, avaliações e referências bibliográficas. Nesse sentido, uma das características do PPP é organizar os saberes curriculares que “[...] correspondem aos discursos, objetivos, conteúdos e métodos a partir dos quais a instituição escolar categoriza e apresenta os saberes sociais por ela definidos” (TARDIF, 2014, p. 38).

Veiga (2000) assinala que por meio do PPP são apresentados “[...] os focos decisórios do currículo”, desvelando o perfil profissional que se deseja formar. Para a autora, não há neutralidade na construção do currículo, pois é na sua intencionalidade que encontraremos a concepção de currículo que subsidiará o PPP em relação a identidade que se pretende formar.

A partir do exposto, localizamos e quantificamos os cursos de Licenciatura em Matemática nas instituições públicas, presenciais e autorizadas pelo MEC em todo o território nacional. Dessa forma, realizamos o download do relatório do MEC (e-MEC, 2017) com a informação dos cursos de Licenciatura em Matemática autorizados, contabilizando 372 cursos em atividade, que tiveram suas propostas curriculares e projetos políticos-pedagógicos analisados.

As variáveis identificadas e analisadas consistem na distribuição das instituições de Ensino Superior por região e seus respectivos estados, bem como a distribuição dos cursos de Licenciatura em Matemática que ofertam o ensino de GNE por região. O mapeamento realizado nos permitiu perceber que a maioria das instituições públicas de Ensino Superior que oferta o curso de Licenciatura em Matemática encontram-se na região nordeste com 30% das instituições, como é possível ver no Gráfico 1.

Gráfico 1 - Mapeamento por região do país das IES que ofertam cursos de Licenciatura em Matemática

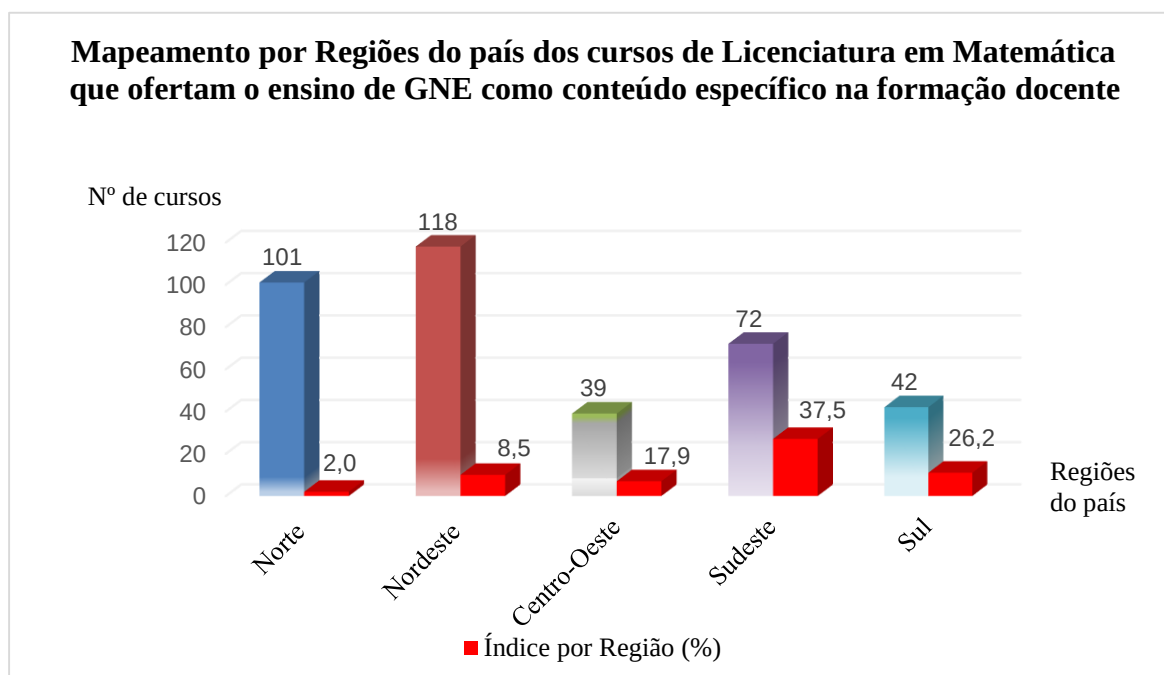


Fonte: Portal do e-mec (2018).

Após a triagem das IES públicas do país que ofertam o curso de Licenciatura em Matemática de modo presencial e autorizados pelo MEC, iniciamos o levantamento do número de cursos de Licenciatura em Matemática que ofertam o ensino de GNE como conteúdo específico da área do conhecimento geométrico. Foram identificados 372 cursos de Licenciatura em Matemática vinculados a 126 IES, dos quais 57 cursos ofertam o ensino de GNE como conteúdo específico para a formação de professores de Matemática.

No Gráfico 2 apresentamos os percentuais contendo o número de cursos por região com os cursos que ofertam o ensino de GNE como conteúdo específico.

Gráfico 2 - Mapeamento dos cursos de Licenciatura em Matemática que ofertam o ensino de GNE



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Quando analisamos a distribuição dos cursos em relação a oferta do ensino de GNE, as regiões Sudeste e Sul apresentam índices maiores em relação as outras regiões do país. Apesar dos dados indicarem a inserção das GNE de maneira modesta nas IES, percebe-se no movimento de análise dos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática, representados no Gráfico 2, o entendimento dos colegiados ou departamentos de Matemática acerca das disciplinas necessárias (in)diretamente à formação do profissional que se deseja. Nessa perspectiva, as disciplinas expressas nos PPP e/ou nas PC evidenciam que há interesse maior por parte das regiões Sudeste e Sul pelo ensino de modelos geométricos diferentes do euclidiano na formação do futuro professor de Matemática.

Assis (2017, p. 394) profere que “[...] os currículos expressam os valores defendidos pelos sujeitos que os constituíram e revelam os saberes que devem ser explorados e aqueles que devem ser suprimidos”. Partindo dessa ideia, entendemos que os dados analisados refletem um momento de transição paulatina do conhecimento geométrico, que busca na pluralidade dos modelos geométricos um caminho para a construção de conceitos geométricos na formação do professor de Matemática.

Nas condições apresentadas, buscamos na construção do mapeamento denotar os dados a partir da distribuição das variáveis encontradas por região e por estados, vinculando aos

mesmos as IES, os cursos de Licenciatura em Matemática e os cursos que ofertam o ensino de GNE. Conforme é possível observar no quadro abaixo.

Quadro 12 - Mapeamento sobre o ensino de GNE nos cursos de Licenciatura em Matemática nas IES

Região	NORTE							TOTAL	NORDESTE									TOTAL	CENTRO-OESTE				TOTAL	SUDESTE				TOTAL	SUL			TOTAL
Estado	AC	AM	AP	PA	RO	RR	TO		AL	BA	CE	MA	PA	PE	PI	RN	SE		DF	GO	MT	MS		ES	MG	SP	RJ		PR	RS	SC	
IES	2	3	2	5	2	3	2	19	3	8	7	3	4	5	3	3	2	38	2	4	3	3	12	2	18	8	8	36	10	7	4	21
Curso de Licenciatura	16	40	4	28	4	3	6	101	6	18	13	22	10	8	28	10	3	118	2	16	12	9	39	5	34	19	14	72	20	15	7	42
Nº de cursos que ofertam o ensino de GNE	0	0	1	0	1	0	0	2	0	4	1	0	1	1	1	1	1	10	1	2	3	1	7	4	7	9	7	27	9	1	1	11

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Analisando o quadro 12 constatamos que na região Sudeste, nos estados de São Paulo e Rio de Janeiro, o número de cursos que ofertam o ensino de GNE como conteúdo específico compreende cerca de 50% dos cursos de Licenciatura e no estado do Espírito Santo essa porcentagem é bem expressiva correspondendo a 80% dos cursos. Quanto à região Sul, o estado do Paraná assume destaque no mapeamento por também ter um percentual próximo de 50% dos cursos de formação de professores de Matemática abordarem o conhecimento em questão.

Esses dados se tornam relevantes para a pesquisa, uma vez que o Brasil é um país de dimensões continentais e a diversidade que constitui cada região do país, seja de vertente política, econômica e/ou social pode refletir na configuração do perfil do educador matemático que se pretende formar. Conhecer a realidade das IES no que tange a construção do conhecimento geométrico nos cursos de formação de professores de Matemática pode promover reflexões e discussões acerca da relevância da inserção de conteúdos de GNE no campo de estudo da Geometria, tanto na educação superior quanto na Educação Básica.

Todos os 372 cursos analisados apresentam indícios em alguns componentes curriculares do tratamento lógico-formal dos conteúdos relacionados à Geometria Euclidiana, a estrutura desses componentes sugerem o desenvolvimento do pensamento geométrico apoiados em processos dedutivos, com linguagem específica que expressa certo rigor para alcançar o nível abstração desejado com aquele objeto geométrico em estudo.

Em apenas 57 cursos, que corresponde a 15,32% do total de cursos analisados, foram identificadas disciplinas que abordam o estudo de GNE como conteúdo específico para a formação do professor de Matemática. Durante a análise percebemos que as GNE são ofertadas nos cursos como conteúdo específico da área de Geometria por meio de componentes curriculares obrigatórios ou em componentes curriculares optativos. Em alguns casos, há a

incidência de serem ofertadas tanto como componente obrigatório como optativo. No quadro abaixo, apresentamos a distribuição das IES em relação a situação de oferta dos componentes curriculares que propõem o ensino de conteúdos relacionados à GNE em seus ementários.

Quadro 13 - Situação das componentes curriculares das IE que propõem o estudo de GNE

REGIONAL	INSTITUIÇÃO	COMPONENTE CURRICULAR	SITUAÇÃO
Norte	UNIFAP	Geometria Hiperbólica - 60h	Optativa
	UNIR	Geometria não Euclidiana - 80h	Optativa
Nordeste	IFBA	Geometria Não Euclidiana - 60h	Optativa
	UFBA	Lab. de Ensino de Matemática II - 68h / Lab. de Ensino de Matemática IV - 68h	Obrigatória/Obrigatória
	UESB	Prática como componente Curricular - 120h / Geometria Não Euclidiana - 60h	Obrigatória/Optativa
	IFCE	Geometria Não Euclidiana - 96h / Geometria Projetiva Plana 64h	Optativa/Optativa
	IFPB	Geometria Euclidiana Plana - 80h	Obrigatória
	IFPE	Geometria Avançada - 72h	Obrigatória
	UFPI	Geometria Contemporânea - 60h	Optativa
	UFRN	Geometria Não Euclidiana - 60h	Optativa
	UFS	Tópicos de Geometria e Topologia - 60h	Optativa
Centro-oeste	UNB	Geometria 1 / Geometria para o ensino 1 - 60h	Obrigatória/Obrigatória
	IFGoiano	Geometria Não Euclidiana - 68h	Obrigatória
	UFG	Fundamentos da Geometria	Obrigatória
	IFMT	Geometria Não Euclidiana - 60h	Optativa
	UNEMAT	Geometria Não Euclidiana - 60h	Obrigatória
	UEMS	Geometria - 136h	Obrigatória
Sudeste	IFES	Tópicos Especiais em Matemática - 60h	Obrigatória
	UFES	Geometria não Euclidiana - 60h	Obrigatória
	UNIFEI	Introdução à Geometria Projetiva	Optativa
	UFLA	Introdução à Geometria Hiperbólica	Optativa
	UFSJ	Geometria Fractal - 72h / Geometria não Euclidiana - 72h	Optativa/Optativa
	UFU	Geometria não Euclidiana - 60h	Optativa
	UFV	Geometria não Euclidiana - 60h / Geometria Hiperbólica - 60h	Optativa/Optativa
	IFF	Introdução à Geometria não Euclidiana - 60h	Obrigatória
	UERJ	Geometria não Euclidiana - 60h	Optativa
	UENF	Geometria não Euclidiana - 68h	Obrigatória
	UFRJ	Geometria não Euclidiana - 60h	Optativa
	UFF	Fractais e Caos I - 60h/ Fractais e Caos II - 60 h	Optativa/Optativa
	UFABC	Geometria não Euclidiana - 60 h	Optativa
	IFSP	Geometria não Euclidiana - 63 h	Obrigatória
	USP	Geometria para a Licenciatura - 60 h	Obrigatória
	UNESP	Geometria Euclidiana - 120 h	Obrigatória
	UEL	Geometria e Desenho - 136h	Obrigatória

Sul	UEM	Introdução à Geometria não Euclidiana - 68h	Obrigatória
	UEPG	Geometria Espacial - 68h / Tópicos de Geometria - 68h	Obrigatória/Optativa
	UENP	Geometria Plana - 120h / Geometria Espacial - 60h	Obrigatória/Obrigatória
	UNIESPAR	Geometria Euclidiana e Tópicos de Geometria não Euclidiana - 144h	Obrigatória
	UFPR	Geometria Euclidiana e não Euclidiana - 60h	Obrigatória
	UTFPR	Geometria não Euclidiana - 60h	Optativa
	FURG	Geometria 1 - 60h	Obrigatória
	UFSC	Geometria Diferencial - 108h	Optativa

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Na Quadro 13 é possível constatar que das 42 IES que oferecem o estudo das GNE, 21 o fazem por meio de componentes curriculares obrigatórios, 19 IES promovem o estudo desse conhecimento geométrico em componentes curriculares optativos e 2 IES ofertam as duas formas. Assim, notamos que foram nomeadas 51 disciplinas que apresentam em seus ementários conteúdos específicos sobre as GNE.

É possível perceber um equilíbrio no que diz respeito a situação de oferta de componentes curriculares que abordam o estudo das GNE, apesar de considerarmos essa pequena vantagem percentual dos componentes obrigatórios como um ponto positivo, que pondera as intenções da comunidade acadêmica em relação a importância desse conhecimento na formação do professor de Matemática. Outro aspecto relevante para a nossa pesquisa, e de cunho pessoal, é que ainda se fortalecem as crenças da comunidade acadêmica acerca do ensino de GNE está relacionado a disponibilização de mais de um componente curricular, em algumas IES, para tratar da construção desse conhecimento geométrico. Algumas IES buscam dentro de suas propostas curriculares criarem outros espaços para os discentes refletirem sobre os conceitos geométricos não euclidianos, podendo explorá-los com outra perspectiva e com níveis diferenciados de aprofundamento.

Assim, ao analisarmos os componentes curriculares, enquanto denominação e ementa, constatamos que alguns deles são explícitos em relação as intenções que os constituíram, enfatizando o conteúdo específico como sua maior contribuição na formação docente, tais como: Geometria não Euclidiana, Geometria Hiperbólica, Geometria 1, Tópicos de Geometria não Euclidiana, entre outros, sugerem que o aprofundamento do conteúdo específico pelo licenciando trará solidez e segurança para o exercício da docência. Já as disciplinas Laboratório de Ensino de Matemática, Geometria Contemporânea, Tópicos Especiais em Matemática, Fractais e Caos e Geometria para a Licenciatura, propõem como contribuição para a formação docente considerar a abordagem como meio para apropriação desse conteúdo específico.

A análise nos permite inferir que há um movimento de reestruturação nos currículos dos cursos de Licenciaturas em Matemática quanto ao ensino de Geometria, na qual as GNE estão sendo aos poucos inseridas na formação do professor, seja com uma proposta volta para a aquisição de um novo saber a partir do domínio de conteúdo específico geométrico não euclidiano, ou por meio de disciplinas que incorporam conteúdos relacionados à GNE como uma abordagem para o ensino de Geometria.

O cenário que temos delineado pelo mapeamento nos indica que a GE na maioria dos currículos acadêmicos é ofertada como a única tornando-se diante de tal fator, um modelo ideal para o professor de Matemática, capaz de suprimir todas as necessidades humanas no que tange a compreensão e explicação do mundo em que vivemos. Entretanto, a presença de conteúdos relacionados a modelos geométricos não euclidianos nos currículos acadêmicos de 57 cursos de Licenciatura em Matemática tem demonstrado o interesse dos colegiados e departamentos de Matemática em desconstruir a visão de um único modelo geométrico, dando indícios da importância do estudo de diversos modelos geométricos na formação de professores de Matemática.

Martins (2009) expende que o currículo do curso de Licenciatura em Matemática tem dado pouca ênfase a diversidade dos modelos geométricos, o que fortalece a crença na existência de apenas um modelo geométrico e, conseqüentemente, a tomada de consciência por parte dos futuros professores sobre outros modelos causa espanto e a impressão que o estudo desses modelos exigem conhecimentos que vão além do nível universitário. Martins (2009, p. 8) então elabora sobre a questão:

É fato que o estudo das geometrias não euclidianas normalmente não é abordado nos cursos de Licenciatura Matemática, o que explica o espanto de muitos professores ao tomarem conhecimento dessa nova geometria, já que a geometria de Euclides é aprendida e ensinada como única e absoluta geometria existente.

O mapeamento das IES indicou que apenas 15,32% dos cursos de Licenciatura em Matemática apresentam em suas PC ou em seus PPP disciplinas que abordam o estudo de GNE na formação docente. O baixo índice apresentado sugere que a inserção das GNE no currículo dos cursos de Licenciatura em Matemática não é uma vertente consolidada na formação de professores, e, por esse motivo, há pouco envolvimento do futuro professor com essas Geometrias, contribuindo para que o licenciando construa sua relação com o espaço a partir de um único modelo geométrico, podendo fortalecer somente o ensino da Geometria Euclidiana na Educação Básica.

Acreditamos que a inserção de diferentes modelos geométricos no currículo da Licenciatura pode contribuir para o desenvolvimento de competências e habilidades que permitam o futuro professor ampliar sua visão sobre o campo de estudo da Geometria, possibilitando criar novas conexões com o espaço em que vivemos e pode adaptá-las à sua prática docente futura.

7.1.2 O que dizem os documentos nacionais e estaduais sobre o ensino de sistemas geométricos diferentes do Euclidiano na Educação Básica

Nessa etapa, investigamos nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental – PCN (BRASIL, 1998), nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000), nas Orientações Curriculares Estaduais e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017) indícios que norteiam o ensino de GNE na Educação Básica. A inserção de conteúdos relacionados às GNE nas orientações curriculares pode motivar o futuro professor a estudar conceitos geométricos não euclidianos.

Os PCN – Matemática (1998) consideram a relevância do ensino de modelos geométricos diferentes do euclidiano na Educação Básica pela sua importância histórica na produção de conhecimentos, destacando no surgimento das GNE o fato de superarmos enquanto sociedade a visão de uma única Geometria do real e os avanços decorrentes dessa ruptura nas ciências e na tecnologia.

[...] a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico (BRASIL, 1998, p. 25).

Pode-se atestar que os PCN – Matemática (1998) preconizam que para desenvolver o pensamento geométrico é recomendado a exploração de situações de aprendizagem que levem o estudante a resolver situações problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas e saber usar diferentes unidades de medida. Assim, as situações de aprendizagem devem desenvolver nos estudantes a autonomia necessária para estabelecer diferenças entre objetos a partir de diferentes modelos geométricos.

Brum e Schuhmacher (2014, p. 260) colocam que para estabelecer diferenças entre objetos geométricos, de acordo com as orientações do PCN, é necessário:

[...] Identificar uma pluralidade de modelos geométricos na natureza que pode ser pelo estudo das navegações, no sistema de localização por GPS (Sistema de Posicionamento Global), em aulas de Geografia ao tratar sobre o planeta Terra, na Física para compreensão do comportamento da luz no espaço, em objetos comuns do nosso cotidiano, como trompetes, batatas enlatadas, cornetas, ondas do mar, poltronas, garrafas de vinhos e outros que transitam nas diversas áreas do conhecimento

Desse modo, é na compreensão da multiplicidade de sistemas matemáticos que percebemos que não há um único caminho relacionando a Matemática e a realidade que vivemos. A compreensão de diferentes modelos geométricos nos permite diferenciar os objetos geométricos a partir das suas propriedades e formas, constituindo modelos logicamente consistentes para explicar a realidade física.

Os PCN+ (2002) propõem o ensino de diferentes modelos geométricos no Ensino Médio ao afirmar que “[...] é especialmente adequado mostrar diferentes modelos explicativos do espaço e suas formas numa visão sistematizada da Geometria, com linguagens e raciocínios diferentes daqueles apreendidos no ensino fundamental com a Geometria clássica euclidiana” (BRASIL, 2002, p. 125). As orientações presentes nesse documento sugerem que o estudante ao vivenciar situações didáticas envolvendo diferentes modelos geométricos poderá compreender o processo de construção do conhecimento matemático, além de permitir uma articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos acerca dos objetos geométricos.

Do ponto de vista dos estados, especificamente, Ceará, Espírito Santo, Rondônia, Santa Catarina, São Paulo e Paraná mencionaram em suas Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE) a existência de modelos geométricos diferentes do euclidiano.

As DCE, nas palavras de Assis (2017) são documentos que cada estado constrói para orientar o processo educacional quanto aos conteúdos, metodologias e avaliações empregados nos componentes curriculares da Educação Básica. As inspirações para a construção das DCE encontram apoio nas Leis de Diretrizes e Bases da Educação (LDB, 1996) que regulamenta os aspectos qualitativos da Educação Básica e nos PCN's (1998) que orientam a prática educativa ao articular conteúdos e objetivos com questões relativas a o que e como avaliar.

Esses documentos de âmbito nacional não correspondem a uma diretriz obrigatória, a ideia é de que as ações se tornem fleíveis no currículo, estabelecendo situações de adaptações entre tais documentos e práticas já existentes.

As DCE do Ceará (2008), Rondônia (2013) e Santa Catarina (2014) apenas mencionam a existência de GNE como um conteúdo a ser trabalhado na Educação Básica, sem apresentar orientações acerca do ensino de GNE. Assim, as DCE desses estados chegam a mesma vertente dos PCN's ao apenas citarem as GNE como possível assunto a ser explorado na Educação Básica, o que desarticula o ensino de GNE como uma proposta para a compreensão dos objetos geométricos e dá margem para o entendimento que o professor irá trabalhar apenas um conteúdo a mais do campo geométrico.

Destacam-se abaixo as únicas menções presentes nos DCE's do estado do Ceará, Rondônia e Santa Catarina.

[...] uma discussão referente à geometria e suas partes, onde se destacariam a Euclidiana Plana e a **Não-Euclidiana**, a Espacial, a Métrica e a Descritiva (CEARÁ, 2008, p. 18, grifo nosso).

Grandezas e Medidas – contemplam as noções e os seguintes conceitos científicos: medidas (massa, áreas e volumes, informática, energias, grandezas vetoriais) e trigonometria, orientam progressivamente na interpretação e compreensão de ideias abstraídas da natureza e contribuem para o entendimento das diferentes culturas e a valorização da inter-relação de seus conhecimentos com outros conhecimentos da disciplina. Este tema envolve os seguintes conteúdos: geometria (plana, espacial e analítica) e **noções básicas de geometria não euclidiana** (RONDÔNIA, 2013, p. 116, grifo nosso).

No processo de elaboração conceitual, seja ele aritmético (número real e estatística), geométrico (geometria plana e espacial, **não euclidiana**) ou algébrico (sequências, equações, funções e matrizes), as grandezas contínuas e discretas se constituem em ponto de partida e de chegada, atribuindo significados ao trazer elementos importantes que irão compor um sistema mais amplo (SANTA CATARINA, 2014, p. 168, grifo nosso).

Já as DCE do estado do Espírito Santo (2009), São Paulo (2011) e Paraná (2008, 2018) recomendam a inserção das GNE no processo educativo. Ver-se que essa perspectiva se difere das discutidas anteriormente por encontrar no estudo do objeto geométrico à necessidade de noções dos conceitos geométricos não euclidianos como um meio de apropriação de suas propriedades e formas, deslocando a percepção do objeto geométrico das aplicações no âmbito euclidiano para aplicações em outros modelos geométricos.

Nesse sentido, as DCE do estado do Espírito Santo (DCE – ES, 2009) apresentam no eixo norteador “Geometria, Grandezas e Medidas” a abordagem de um modelo geométrico diferente do euclidiano, nomeando como um conteúdo – A geometria dos fractais. No documento, o referido conteúdo é proposto no 2º ano do Ensino Médio e tem como objeto geométrico o estudo das figuras geométricas e suas transformações geométricas.

O quadro abaixo apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas a partir do conteúdo – A Geometria dos fractais.

Quadro 14 - A Geometria dos fractais – competências e habilidades

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES
• Perceber a beleza das construções matemáticas, muitas vezes expressa na simplicidade, na harmonia e na organicidade de suas construções. • Reconhecer relações entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana.	• Identificar transformações geométricas e ter sensibilidade para relacionar a geometria com as artes e com as diferentes culturas. • Perceber a beleza dos fractais e seu uso em problemas atuais, entendendo suas construções. • Utilizar modelos geométricos na resolução de problemas do cotidiano.

Fonte: DCE-ES (2009).

Para Souza e Leivas (2018, p 2) o estudo da Geometria Fractal pode ser abordado em vários conteúdos estudados ao longo do ensino médio:

Vários tópicos estudados ao longo do Ensino Médio podem trazer para a sala de aula as noções de fractais, como por exemplo: funções, sequências e progressões aritméticas e geométricas, **formas geométricas**, perímetro, área e volume, simetria e noções de limites, entre outros. A abordagem da Geometria Fractal pode acontecer de inúmeras formas e, por sua diversidade de formas e cores, pode ser associada ao uso do computador o que, geralmente, desperta o interesse, a curiosidade e a atenção dos alunos (Grifo nosso).

As DCE – ES (2009) utilizam a Geometria Fractal como um conteúdo associado ao estudo das formas geométricas com o interesse de desenvolver no educando algumas competências, dentre elas, destacam-se: identificar transformações geométricas e ter sensibilidade para relacionar a Geometria com as artes e com as diferentes culturas; perceber a beleza dos fractais e seu uso em problemas atuais, entendendo suas construções. Essas competências podem ser vislumbradas a partir dos dizeres de Barbosa (2002, p. 19) sobre o uso da Geometria Fractal na sala de aula:

Conexões com várias ciências; deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza, desde que é, em geral apenas apropriada para formas do mundo oriundas do humano, como construções de casas, prédios, pontes, estradas, máquinas etc.; os objetos naturais são com frequência mais complicados e exigem uma Geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que ocorram nos diversos ambientes; difusão e acesso aos computadores e a tecnologia da informática nos vários níveis de escolarização; existência do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais, entendendo-se arte como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade; sensação de surpresa diante da ordem na desordem.

Dessa forma, compreendemos que as DCE – ES (2009) justificam a inserção da Geometria Fractal no Ensino Médio, devido a suas inúmeras aplicações nas diferentes áreas do conhecimento, podendo direcionar a percepção do professor para práticas de ensino que promovam a interdisciplinaridade e a contextualização dos conceitos relacionados às figuras geométricas e suas transformações.

As DCE do estado de São Paulo (DCE – SP, 2011) não introduziram nominalmente noções de GNE como tema específico para a Educação Básica, mas sugere que uma reflexão sobre as diversas formas de conceber o espaço pode motivar algumas noções a respeito desse tema.

Assim, as DCE – SP (2011) propõem que:

Quanto à lista de conteúdos a serem estudados em cada uma das séries/anos, em sintonia com o fato de que nenhum tema das disciplinas da escola básica é um fim em si mesmo, procuramos recorrer aos assuntos usuais nos diversos programas e materiais didáticos existentes, não introduzindo nominalmente temas distanciados da prática dos professores, como seriam, por exemplo, noções de cálculo diferencial e integral ou de **geometrias não euclidianas**.

Entretanto, apostamos em uma forma de tratamento dos temas usuais que pode ser inovadora, o que abre as portas para a exploração, por parte do professor, de assuntos de seu interesse, como o estudo das taxas de variação em funções de 1º grau. O destaque dado às taxas de variação pode servir de base para uma apresentação das primeiras noções de cálculo, assim como uma reflexão sobre as diversas formas de conceber o espaço pode inspirar algumas noções de **geometrias não euclidianas** (SÃO PAULO, 2011, p. 38, grifos nossos).

No contexto percorrido compreendemos que as DCE – SP (2011) não apenas mencionam as GNE em sua proposta, mas recomendam que por meio de um processo reflexivo sobre as diferentes formas de conceber o espaço pode desencadear algumas noções de GNE. O documento concede autonomia ao professor frente ao currículo prescrito para realizar intervenções que relacionem os conteúdos propostos com alguns conceitos oriundos de modelos geométricos não euclidianos.

Assim, de maneira implícita, as DCE – SP (2011) ressaltam a importância das GNE para o processo educativo e visualizam, nos saberes do docente, a possibilidade de constituir novos modos de pensar o ensino de Geometria.

As GNE ocupam um lugar de destaque na DCE do estado do Paraná (DCE – PR, 2008) e o ensino desses conhecimentos geométricos contemplam todas as modalidades da Educação Básica, do Fundamental ao Ensino Médio. O documento organiza o conhecimento geométrico

em um eixo denominado Conteúdo Estruturante²⁴ Geometrias, que se desdobra nos seguintes conteúdos: Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica; noções básicas de Geometrias não Euclidianas.

A primeira ação proposta pelas DCE – PR (2008) para justificar o ensino das GNE está na importância desse conhecimento para resolver problemas cotidianos e do mundo científico.

Muitos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas *geometrias não-euclidianas*. Um exemplo são os estudos que resultaram na *Teoria da Relatividade*, em que a geometria do espaço, usada por Albert Einstein, foi uma *geometria não-euclidiana*, de modo que conceitos, como “a luz se propaga ao longo de geodésicas e a curvatura do espaço é determinada pela natureza da matéria que o preenche” (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 276), foram fundamentais (PARANÁ, 2008, p. 56, grifos do autor).

Em busca de nortear as práticas docentes quanto ao ensino de GNE, as DCE – PR (2008) no Conteúdo Estruturante Geometrias, descreve para cada modalidade de ensino os objetivos e os conteúdos a serem abordados a respeito desse tema. O quadro abaixo apresenta os objetivos e os conteúdos por modalidade de ensino.

Quadro 15 - Proposta de ensino do conteúdo GNE na educação básica do estado do Paraná

ENSINO FUNDAMENTAL		ENSINO MÉDIO	
Orientação	Noções de Geometrias não Euclidianas	Orientação	Noções de Geometrias não Euclidianas
Tem o espaço como referência, de modo que o aluno consiga analisa-lo e perceber seus objetos para, então, representa-lo.	• Geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); • Geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados); • Noção de geometria dos fractais.	Garantir ao aluno o aprofundamento dos conceitos da geometria plana, espacial e das noções das geometrias não-euclidianas em um nível de abstração mais complexo.	• Geometria dos fractais - explorar o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades; • Geometria hiperbólica – abordar os conceitos elementares da geometria hiperbólica, uma possibilidade é através do postulado de Lobachevsky (partindo do conceito de pseudo-esfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos); • Geometria elíptica - fundamentar através do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésica; círculos máximos e

²⁴ Entende-se por *Conteúdos Estruturantes* os conhecimentos de grande amplitude, os conceitos e as práticas que identificam e organizam os campos de estudos de uma disciplina escolar, considerados fundamentais para a sua compreensão. Constituem-se historicamente e são legitimados nas relações sociais (PARANÁ, 2008, p. 49).

			círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto à medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: polos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento.
--	--	--	---

Fonte: Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (2008).

As DCE – PR (2008) afirmam que os conceitos destes conteúdos são fundamentais para que o aluno da Educação Básica desenvolva e amplie seu conhecimento e pensamento geométrico. Dessa forma, as abordagens das GNE não se encerram, unicamente, nos conteúdos propostos, o professor tem a liberdade de investigar e realizar outras abordagens desde que explore os conceitos básicos.

Outro fator importante, diz respeito à distribuição dos conteúdos geométricos não euclidianos na matriz curricular a partir da seriação em que se encontra o estudante. Esse fator pode contribuir para a prática docente, orientando sobre o que significa o ato de ensinar, como deve ser direcionar este ensinar e o nível de aprofundamento que o professor deve propor em suas aulas.

Para compreendermos melhor a proposta de inserção das GNE na rede estadual de educação do Paraná, apresentamos no Quadro 16 parte da matriz curricular e a série que os conceitos não euclidianos devem ser trabalhados segundo as DCE – PR (2008).

Quadro 16 - Matriz curricular da Educação Básica do estado do Paraná

Ensino Fundamental	Conteúdo Estruturante	Conteúdos Básicos
7º Ano	Geometrias	• Geometria Plana; • Geometria Espacial; • Geometriasnão-Euclidianas.
8º Ano	Geometrias	• Geometria Plana; • Geometria Espacial; • Geometria Analítica; • Geometriasnão-Euclidianas.
9º Ano	Geometrias	• Geometria Plana; • Geometria Espacial; • Geometria Analítica; • Geometriasnão-Euclidianas.
Ensino Médio	Conteúdo Estruturante	Conteúdos Básicos
Não especifica	Geometrias	• Geometria Plana; • Geometria Espacial; • Geometria Analítica; • Geometriasnão-Euclidianas.

Fonte: Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (2008).

O currículo proposto apresenta no Conteúdo Estruturante Geometrias uma conexão entre os conceitos geométricos euclidianos e não euclidianos.

Cavichiolo (2011, p. 125) conclui, no estudo das Geometrias, que:

O estudo dessas geometrias conduz à reflexão sobre a natureza e os processos de construção da Matemática, mostrando-a como constructo intelectual dinâmico e, portanto, passível de mudanças decorrentes das necessidades do homem de resolver determinados problemas em diferentes épocas, quer sejam internos da Matemática ou da própria realidade social.

Em relação aos documentos, a nossa última análise se refere à Base Nacional Comum Curricular – (BNCC, 2017) que teve sua versão final homologada dia 21/12/2017 cumprindo a exigência constitucional, o artigo 26 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB-9394/96) instituindo que “[...] os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade” (BRASIL, 1996, p.19).

Em nossa análise da BNCC (2017) constatamos que não há referências em nenhuma modalidade de ensino da Educação Básica sobre a inserção das GNE no processo de ensino de Matemática. O tratamento dado ao campo da Geometria sugere que o modelo euclidiano é único e, a partir dele, o professor conduzirá as relações necessárias para a compreensão do objeto geométrico em estudo.

Dessa forma, consideramos que o documento ao tratar o campo geométrico no singular – Geometria e, não no plural – Geometrias, reduz o campo de estudo e normatiza que a GE se estabelece como única, direcionando práticas de ensino que apresentam o pensamento euclidiano como uma verdade absoluta e capaz de explicar na completude os objetos geométricos presentes no mundo em que vivemos.

Compreendemos que por se tratar de um documento de base comum, os conteúdos a serem estudados na Educação Básica são flexíveis e dependem do olhar do corpo técnico administrativo, dos professores, coordenadores pedagógicos, entre outros, para que determinados aspectos sejam contemplados pelo currículo escolar. O documento apresenta retrocesso no que diz respeito ao ensino de Geometria em relação aos PCN (1998) ao não recomendar ou mencionar a existência de modelos geométricos diferentes do euclidiano, podendo vir a ser um obstáculo para práticas de ensino que favoreçam a exploração de conceitos geométricos contemporâneos, criando uma lacuna entre a Geometria e sua aplicação em outras áreas, tais como: na arquitetura, nas ciências, na tecnologia, etc.

Compete ressaltar que as secretarias de educação dos estados brasileiros estão buscando o alinhamento das suas propostas curriculares com as normatizações descritas na BNCC (2017) a fim de que atinjam um patamar comum que viabilizem a efetivação de um ensino de qualidade que possa atender as suas especificidades em relação ao processo educacional.

Como desdobramento desse processo, o estado do Paraná publicou em 2018 um referencial voltado para o ensino fundamental buscando um alinhamento com a BNCC (2017). O material se apoiou nos descritores propostos pela BNCC e os articulou com os Conteúdos Estruturantes presentes nas DCE – PR (2008). Assim, o Referencial Curricular do Paraná: princípios, direitos e orientações (RCPR – 2018) como fora intitulado pela Secretaria de Educação do Estado do Paraná, renomeia o Conteúdo Estruturante Geometrias como Unidade Temática Geometrias, mantendo o ensino de conhecimentos geométricos euclidianos e não euclidianos a partir de habilidades exigidas pela BNCC para o ensino fundamental.

No Quadro 17 apresentamos os conhecimentos geométricos não euclidianos abordados na RCPR (2018) em relação às habilidades da Unidade Temática Geometria propostas pela BNCC (2017), destacando o ano, o conteúdo não euclidiano proposto e a habilidade a ser desenvolvida pelo educando.

Quadro 17 - Conteúdos de GNE presentes no RCPR (2018) em relação às habilidades da Unidade Temática Geometria da BNCC (2017)

Ensino Fundamental	Unidade Temática	Objetos de Conhecimento	Objetivos de Aprendizagem	
			Habilidades - BNCC (2017)	Objetivos - RCPR (2018)
6º Ano	Geometrias	Geometrias não Euclidianas	(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.	Compreender as noções topológicas através dos conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados.
9º Ano	Geometrias	Geometrias não Euclidianas	(EF09MA17) Reconhecer e compreender vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.	Compreender os conceitos básicos de geometria projetiva; Identificar formas fractais e as características de autossimilaridade e complexidade infinita.

Fonte: Referencial Curricular do Paraná (2018).

A partir das informações presentes no quadro acima, compreendemos que é possível construir um currículo que atenda as especificidades das regiões ou estados brasileiros considerando as intenções educacionais das comunidades locais, sem deixar de contemplar no

processo de formação dos educandos as habilidades mínimas comuns descritas pela BNCC (2017). Assim sendo o RCPR (2018) considerou o ensino de diferentes modelos geométricos no ensino fundamental a partir dos objetos geométricos em estudo, considerando as habilidades mínimas descritas na BNCC (2017).

Contudo, aproximadamente 23% dos estados brasileiros mencionam as GNE em suas propostas curriculares, dos quais, aproximadamente 50% recomendam e direcionam o ensino de GNE na Educação Básica. Nesse cenário, consideramos o RCPR (2018) um instrumento importante para a inserção das GNE na Educação Básica, podendo ser um material de apoio para a construção dos currículos de outros estados criando contextos múltiplos para ressignificações e profundas reflexões acerca da importância dos conhecimentos geométricos não euclidianos para o processo de ensino e aprendizagem.

7.2 Aspectos constitutivos da produção de significados geométricos sobre o estudo de diferentes Geometrias

Aportando-se em uma leitura cuidadosa, analítica e aprofundada do material das observações, do registro escrito produzido pelos participantes e das transcrições dos eventos ocorridos nos encontros, realizamos o agrupamento das informações por meio de conteúdos semelhantes, complementares ou contraditórios, de maneira a apreender a produção de significados dos futuros professores de Matemática sobre conceitos fundamentais das GNE.

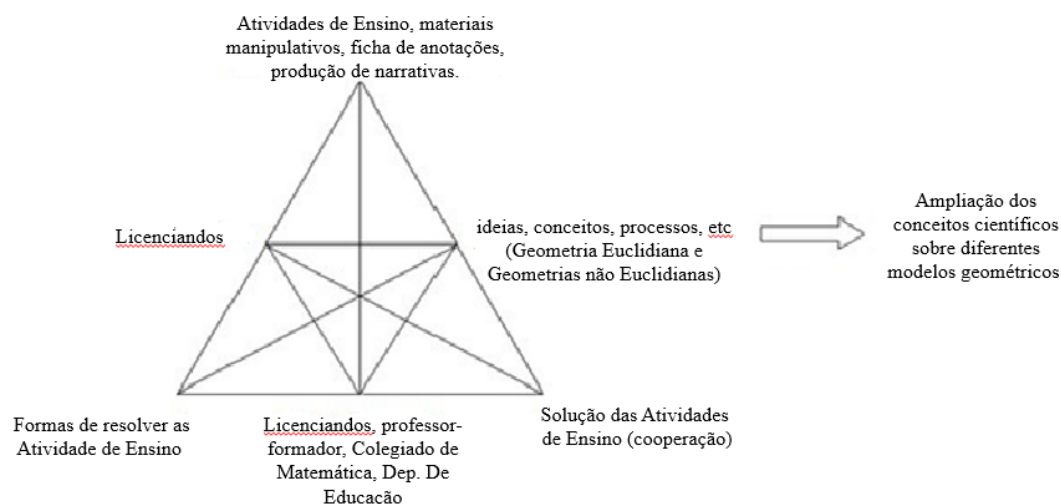
As informações encontradas no processo foram organizadas em duas etapas.

Na primeira etapa, estabelecemos categorias a partir da leitura dos relatórios individuais produzidos pelos participantes como meio para emergir significados sobre o conhecimento geométrico em estudo.

Já a segunda etapa, se caracterizou pela utilização das categorias estabelecidas anteriormente, com o intuito de identificar e analisar a produção de significados dos futuros professores presentes nas áudio-gravações das discussões coletivas durante os encontros da proposta de intervenção. Nessa etapa, apresentaremos recortes da transcrição das áudio-gravações para ilustrar os eventos ocorridos.

Durante o processo de intervenção apossamo-nos da afirmativa de que os participantes desenvolveram ações que constituem um Sistema de Atividade de Formação sobre diferentes modelos geométricos. A Figura 13 apresenta o Sistema de Atividade de Formação elaborado para a proposta de intervenção a partir do modelo de Sistema de Atividade proposto por Engeström.

Figura 13 - Representação esquemática do Sistema de Atividade de Formação desenvolvida no projeto de intervenção



Fonte: Construída a partir do Sistema de Atividade de Engeström (1987).

As informações produzidas no Sistema de Atividade de Formação desenvolvidas durante a proposta de intervenção foram tratadas e analisadas sob a luz da Teoria Histórico-Cultural de Vygotsky.

As interações entre pesquisador-participante, participante-participante e participante-artefatos foram representadas no Sistemas de Atividade de Formação (Figura 13, p. 157), na qual compreendemos que o processo de aprendizagem e a construção de conhecimentos por parte dos envolvidos são constituídos na interação e comunicação entre os mesmos. Ou seja, os aspectos interacionais destacados desenvolvidos para essa pesquisa constituíram as situações de aprendizagem, em que a internalização dos conceitos geométricos abordados ocorreu nos processos comunicativos que envolveram negociação de significados e aprendizagem.

Para Vygotsky (2007), o conceito de Zona de Desenvolvimento Próximo (ZDP) possibilita compreender o processo de internalização (reconstrução interna, apropriação) dos sujeitos nas interações sociais, se tornando um conceito fundamental na relação desenvolvimento-aprendizagem. Assim, nas interações mediadas representadas nos Subsistemas de Atividades analisamos os diálogos, as trocas de experiências, a diversidade de signos e linguagem como condições importantes para a produção de significados sobre GNE pelos participantes no desenvolvimento das AE.

Em suma, compreende-se que as AE criadas por nós foram pertinentes para a produção de significados acerca do conhecimento geométrico não euclidiano, uma vez que as situações vivenciadas pelos participantes nos permitiram atuar na ZDP's dos mesmos para potencializar

ações que não conseguiam realizar sozinhos. No capítulo posterior analisamos a produção de significados dos participantes durante o estudo de diferentes modelos geométricos.

Para identificar no processo de categorização a origem dos dados dessa pesquisa, denotamos a seguinte codificação: L (acompanhado da letra do grupo e o número) – Licenciando e o grupo que pertence; RI (acompanhado do número) – relatório individual; AE (acompanhado do número) – Atividade de Ensino, PP – professor-pesquisador, PO (acompanhado do número) – professor-observador.

7.2.1 Movimento de constituição das categorias de análise

A leitura flutuante realizada sobre os relatórios individuais (RI) tiveram como fonte de dados as seis AE desenvolvidas durante os encontros. Durante a leitura flutuante dos RI foram destacados recortes nos textos produzidos que originaram as unidades de análise a partir da semelhança, contradição ou complementação de ideias presentes em um ou mais excertos, relacionando-os com os significados que os comportam em nossa compreensão.

Assim, estabelecemos as seguintes unidades de análise: a existência de um único modelo geométrico, conhecimento prévio, dúvida, formação de conceitos a partir do modelo euclidiano, formação de conceitos a partir da aceitação de modelos geométricos diferentes do euclidiano e objeto de interesse. As unidades de análise emergiram durante a análise dos RI e são excludentes entre si, isto é, cada excerto do RI pode ser encontrado em apenas uma unidade de análise.

Para a análise dos relatórios individuais estabelecemos as unidades de análise utilizando como estratégia cores diferentes para denotar os excertos provenientes dos relatórios. No quadro a seguir, apresentamos um exemplo da fragmentação dos textos e da separação dos excertos em pré-categorias. A seguir, o Quadro 18 indica como se deu a criação de pré-categorias em meio a leitura flutuante.

Quadro 18 - Descrição da estratégia para a criação de unidades de análise

Escreva sobre as ações vivenciadas no segundo encontro considerando os conceitos da Geometria Euclidiana e da Geometria Esférica abordados (relacione os conhecimentos geométricos que você possuía antes do encontro com os que foram adquiridos durante o encontro).	
Relatório Individual 2 (RI 2) – Participante (LB 3)	Unidades de análise
O segundo encontro aconteceu no dia 27 (sábado) de abril de 2019, tendo como tema “ Construção de conceitos básicos sobre Geometria esférica ”. O que já chamou minha atenção, pois até então a geometria mais estudada por nós desde o primeiro contato com a geometria até hoje era a Geometria Euclidiana.	Excertos do relatório que fazem parte da unidade de análise: objeto de interesse.

Começamos o curso às 9h20min, retomando os postulados de Euclides, dando uma pincelada no que havíamos visto e vendo se existia alguma dúvida sobre o que foi discutido no primeiro encontro. Nesse momento falei sobre como os postulados tinham sido apresentado pra gente, pois eu e alguns colegas ficamos pensativos sobre como trataríamos as informações que tínhamos já que eram na verdade consequência dos cinco postulados.

No segundo momento a sala foi dividida em grupos com quatro componentes, eu em particular era integrante do grupo BETA, nesse momento fora nos apresentados o Anselmo um carinha bem curioso e que foi protagonista da historinha que nos trouxe duvidas e vísas para discussão “As aventuras de Anselmo curioso: os mistérios da Geometria” nos acompanhou até o fim do encontro, e pela fala do professor Clovis ele vai nos acompanhar até o final do curso.

Nosso primeiro contato com Anselmo foi quando ele resolveu ver se Euclides estava mesmo com essa bola toda, foi ai que ele construiu uma reta, partindo do primeiro postulado, “por dois pontos passam uma única reta” junto com Anselmo afirmamos que uma reta é a menor distância entre dois pontos. Anselmo trouxe um nome diferente para nós “Geodésica” eu nunca tinha escutado esse termo antes, mas aprendemos com o Anselmo que a menor distancia entre dois pontos é sempre uma geodésica. Logo em seguida Anselmo constrói um triângulo no ar para conferir se a soma dos ângulos internos desse triangulo é igual a 180° , daí começaram as indagações sobre a construção do triangulo em outras perspectivas e também sobre a soma de seus ângulos internos. Houve bastante discussão do meu grupo em relação aos anseios e duvidas de Anselmo, falamos sobre a noção da construção de um plano e discutimos sobre isso, nunca tínhamos parado para analisar os postulados e suas consequências tentando construir e ver se realmente a Geometria Euclidiana era valido em alguns ambientes, eu particularmente sempre foquei em ambientes planos, numa folha de papel, nunca tinha pensado em construir um triangulo como o de Anselmo e verificar se realmente a soma seria de 180° .

A primeira atividade com Anselmo termina com um questionamento “o que aconteceria se eu fosse sempre em frente com essa geodésica, afinal a geodésica é uma reta, o que será que aconteceria?”.

Esse questionamento para o meu grupo era claro, pois estávamos com a geometria plana na mente, e nas nossas discussões afirmamos que ele descobriria o segundo postulado que é “toda reta é infinita”.

Ao finalizar essa primeira atividade foi aberto uma discussão pra sala na qual compartilhávamos as nossas respostas, duvidas, e íamos construindo um novo olhar para a geometria através das duvidas do Anselmo.

Excertos do relatório que fazem parte da unidade de análise:

formação de conceitos a partir do modelo euclidiano.

Excertos do relatório que fazem parte da unidade de análise:

formação de conceitos a partir da aceitação de modelos geométricos diferentes do euclidiano.

Excertos do relatório que fazem parte da unidade de análise:

dúvida.

Excertos do relatório que fazem parte da unidade de análise:

conhecimento prévio.

Excertos do relatório que fazem parte da unidade de análise:

existência de um único modelo geométrico.

Nesse mesmo encontro recebemos outra atividade, e o Anselmo continuava a indagação do que aconteceria se ele seguisse sempre em frente, então decidiu fincar uma estaca no chão e seguir, foi ai que depois de um tempo seguindo em frente algo extraordinário aconteceu, o Anselmo deu de cara com a estaca fincada por ele. Foi ai que as dúvidas de Anselmo começaram a ser as minhas, pois na geometria plana isso é absurdo já que a reta é infinita e ilimitada, ou seja, impossível esse encontro. Acredito que como eu o Anselmo começou a entender que já não eram suficientes os conhecimentos da geometria plana, afinal estávamos em uma superfície diferente. Nesse momento houve uma discussão entre meu grupo, pois estávamos tão fincados na geometria plana que não conseguíamos assimilar o que estava acontecendo, eu particularmente entendia que ia se encontrar por conta da superfície, mas não conseguia me desprender dos conceitos da geometria plana.

Para melhor visualização recebemos uma bola de isopor, alfinetes e fitas adesivas, que foram utilizados para construir uma reta, construímos o caminho de Anselmo numa folha de papel e também na bola de isopor, o que me chamou a atenção foi o erro cometido pelo meu grupo, por conta do apego as notações da geometria plana, construímos uma reta numa folha de papel fizemos com que ela se encontrasse, pois a gente conseguia ver que realmente ele iria encontrar a estaca fincada, mas esquecemos do principal objeto de estudo, que era a superfície. Na bola de isopor, conseguimos ter uma visão mais próxima do que aconteceu com Anselmo, e ai entendemos que estávamos numa superfície esférica, onde dois pontos determinam uma reta, que na geometria esférica seria tratada como geodésica, e essa geodésica diferente da reta no plano ela era ilimitada e finita. Ao abrir a discussão para toda turma, aprendemos que as geodésicas são os arcos maiores da esfera e afrontamos o primeiro postulado de Euclides onde afirma que por dois pontos passam uma única reta, percebemos que se pegarmos dois pontos nos extremos da superfície esférica passará mais de uma geodésica. Nesse momento um dos nossos colegas o LG1 fez um levantamento interessante, pois havíamos chegado à conclusão que por dois pontos passam infinitas geodésicas, o mesmo pegou outros dois pontos e não conseguia visualizar essas infinitas geodésicas, foi algo que particularmente me deixou com um pouco de dúvidas, mas que depois eu entendi que esses pontos precisariam estar nos extremos, e como existem dois pontos que passam infinitas retas, já furou o postulado.

Por fim esse segundo encontro me fez desconstruir muitas coisas que eu acreditava que daria certo, pois ao me apegar as noções da geometria plana eu acabava cometendo equívocos, querendo aplicar os conceitos da mesma na geometria esférica.

Desse modo, compreendemos que a construção dos relatórios individuais se tornou uma prática reflexiva que nos orientou acerca das ações desenvolvidas pelo participante durante os encontros, evidenciando os aspectos que constituem o Sistema de Atividade de Formação desenvolvido para esse estudo.

O próximo passo traçado para a pesquisa se constituiu a partir da releitura aprofundada dos dados, relacionando os conteúdos que constavam no questionário diagnóstico, no diário de bordo, nos relatórios individuais, nas áudio-gravações e nas AE com as unidades de análise. A triangulação dos dados fez emergir as seguintes categorias de análise: “Conflito – da validade lógica à validade empírica” e “Ruptura – do espaço euclidiano para outros espaços”.

O Quadro 19 apresenta a síntese das categorias que emergiram a partir dos relatos escritos dos licenciandos.

Quadro 19 - Descrição da síntese das categorias de análise

PROTOCOLO DE ANÁLISE DOS RELATÓRIOS INDIVIDUAIS - RI		
EXCERTO	UNIDADE DE ANÁLISE	CATEGORIA
1- “Estávamos tão fincados na geometria plana que não conseguíamos assimilar o que estava acontecendo, eu particularmente entendia que ia se encontrar por conta da superfície, mas não conseguia me desprender dos conceitos da geometria plana.” (A2, LB 3)	A existência de um único modelo geométrico	<i>Conflito – da validade lógica à validade empírica</i>
2- “Só existe retas paralelas na geometria esférica se levarmos em consideração que retas coincidentes são paralelas” e como até então eu acreditava e já havia aprendido e até ensinado que retas coincidentes são paralelas disse que sim, existia retas paralelas na geometria esférica.” (A3, LO 4)	Conhecimento prévio	
3- “Anselmo continuava a indagação do que aconteceria se ele seguisse sempre em frente, então decidiu fincar uma estaca no chão e seguir, foi aí que depois de um tempo seguindo em frente algo extraordinário aconteceu, o Anselmo deu de cara com a estaca fincada por ele. Foi aí que as dúvidas de Anselmo começaram a ser as minhas, pois na geometria plana isso é absurdo já que a reta é infinita e ilimitada, ou seja, impossível esse encontro.” (A2, LB 3)	Dúvida	
4- “Na segunda atividade a curiosidade de Anselmo persistia, mas dessa vez ele decidiu fincar a estaca no chão e andar sempre em frente, formando uma geodésica, por muito e muito tempo... foi aí que o inesperado aconteceu: ele deu de cara com a estaca. Eu comecei a tomar ciência ali de que estávamos lidando com outro tipo de Geometria.” (A2, LB 4)	Formação de conceitos a partir do modelo euclidiano	
5- “Na bola de isopor, conseguimos ter uma visão mais próxima do que aconteceu com Anselmo, e aí entendemos que estávamos numa superfície esférica, onde dois pontos determinam uma reta, que na geometria esférica seria tratada como geodésica, e essa geodésica diferente da reta no plano ela era ilimitada e finita.” (R2, LB 3)	Formação de conceitos a partir da aceitação de modelos geométricos diferentes do euclidiano	<i>Ruptura – do espaço euclidiano</i>

6- “... é de suma importância para desenvolvimento de várias ramificações da tecnologia que utilizamos em nossas atividades cotidianas, fica aberta uma janela para aprofundamento acerca do assunto e aplicação nas séries do ensino fundamental, para que seja contemplado todo o ensino de geometria, transpassando a Geometria Euclidiana.” (A6, LG 4)	Objeto de interesse	<i>para outros espaços</i>
--	---------------------	----------------------------

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A organização das categorias de análise procedeu através da articulação entre as unidades de análise, considerando os conteúdos temáticos que apresentavam semelhança, complementaridade e/ou contradição. As unidades de análise deverão como critério central para a organização das categorias de análise revelar aspectos importantes do sujeito que possam contribuir para a compreensão da realidade investigada pela pesquisa.

7.2.2 A produção de Significados dos participantes da pesquisa

Nesta etapa apresentaremos em forma de episódios alguns momentos dos encontros formativos cuja discussão coletiva sobre o estudo de GNE se fez presente. A análise do movimento dos participantes quanto a produção de significados sobre diferentes modelos geométricos foi direcionada pelas categorias de análises: “Conflito – da validade lógica à validade empírica” e “Ruptura– do espaço Euclidiano para outros espaços”. Os episódios por serem extensos foram subdivididos em cenas de modo a explicitar as categorias de análise que emergiram durante a análise de cada episódio.

Compreendemos que a construção de conhecimentos geométricos não euclidianos foi possível a partir das interações mediadas que mudaram as operações psicológicas dos participantes possibilitando o desenvolvimento e aprendizagem de todos. O processo de internalização dos conceitos geométricos foram captados e analisados a partir das categorias “Conflito” emergido da validade lógica à validade empírica e no processo de “Ruptura” do espaço Euclidiano para outros espaços, os quais os participantes podem retomar um mesmo ponto em cada revolução, em um formato espiralado, a fim de compreendermos como se deu o processo de apropriação dos objetos geométricos em estudo, analisando a produção de significados dos participantes quanto a formação de conceitos geométricos euclidianos e/ou não euclidianos nas AE propostas.

Na figura 14, representamos o movimento de produção de significados dos participantes acerca dos conhecimentos geométricos durante a pesquisa.

Figura 14 - Produção de significados dos participantes da pesquisa



Fonte: Próprio autor (2019).

Para Vygotsky é na relação entre pensamento e linguagem que se constitui o processo de desenvolvimento e aprendizagem. O autor afirma que “[...] o aprendizado desperta vários processos internos de desenvolvimento, que são capazes de operar somente quando o sujeito interage com pessoas em seu ambiente e quando em cooperação com seus companheiros”. (VYGOTSKY, 2003, p. 117-118).

Assim, os significados conferidos pelo sujeito são constituídos nas interações mediadas culturalmente entre as pessoas. E a linguagem tem o papel fundamental na constituição do sujeito como ser histórico e cultural, pois atribui significados aos eventos, aos objetos, aos seres, nos autorizando a considerar o significado como um fenômeno do pensamento (COSTAS; FERREIRA, 2011).

A categoria “Conflito – da validade lógica à validade empírica” se manifesta primeiramente no conhecimento prévio do participante, quando este assume a Geometria Euclidiana como um sistema logicamente consistente, considerando-o como a única forma de interpretar e representar o espaço físico real. E se completa quando o participante compreende que a validade empírica do conhecimento geométrico euclidiano depende do contexto em que é utilizado.

Em nossa compreensão, essa categoria considera o movimento dos participantes no processo de construção do saber, pois está diretamente ligada aos significados que os mesmos atribuíam ao conhecimento geométrico que os conduziu à (re)significar conceitos geométricos euclidianos e a formalizar conceitos geométricos não euclidianos.

Já a categoria “Ruptura – do espaço euclidiano para outros espaços” se manifesta quando há o rompimento do paradigma de uma única Geometria, ou seja, na aceitação de modelos geométricos não euclidianos e no movimento de construção de novos conhecimentos a partir dessa compreensão. Essa categoria está diretamente ligada aos significados que os licenciandos atribuem aos conceitos geométricos quando buscam dá coerência aos mesmos, após terem consciência do sistema geométrico não euclidiano em estudo.

A seguir iremos apresentar o processo de análise da produção de significados dos participantes da pesquisa a partir das categorias propostas para esse fim.

7.2.2.1 Episódio 1: o que diz Euclides?

O episódio 1 é um recorte do segundo encontro da aplicação da proposta de intervenção que aconteceu no dia 27 de abril de 2019, na qual os participantes foram distribuídos em quatro grupos de trabalho para discutir conceitos fundamentais da Geometria Euclidiana com o intuito de explorar os conhecimentos prévios dos participantes a respeito desses conceitos. As AE foram pensadas pelo professor-pesquisador e seguiu os moldes da AOE, destacando em sua constituição o personagem Anselmo que passa a conduzir uma história virtual para introduzir o problema desencadeador de aprendizagem.

O episódio 1 se constitui no momento da plenária, em que cada grupo expôs as possíveis respostas para as situações vivenciadas na AE I e buscam na discussão formalizar a solução mais adequada para a situação vivenciada.

Quadro 20 - Episódio 1: Discussão dos participantes sobre a AE I

PP – Suponha que Anselmo fincasse uma estaca no chão e fosse desenrolando um fio bem esticado e fosse em frente sempre em frente, o mais longe possível. Do ponto de vista geométrico o que poderíamos dizer sobre essa construção? Desenhe o caminho percorrido por Anselmo. O que podemos dizer sobre essa construção?

LB 3 – Uma semirreta.

PP – Alguém colocou alguma coisa diferente? Algum outro grupo? Qual é a característica dessa semirreta?

LB 3 – Porque olha só... A gente sabe se alguém olhasse essa semirreta que ele construiu em algum momento iria achar que era uma reta. Mas, nós sabemos que ele fincou, que ele tem um ponto de partida. Então no caso semirreta porque semirreta tem uma origem, só não tem no caso o fim dela, tende ao infinito.

LB 2 – Colocar uma ideia... que assim... do grupo. A gente está falando de plano, né. Mas, se a gente for olhar em relação a ... o espaço! Aí já não seria ... já uma ... Se ele seguisse reto, aí seria uma curva. Aí ficou essa dúvida se é uma curva? Se é uma reta?

PP – Se é uma curva ou uma reta?

LB 2 – Porque ele vai andando o mais longe que puder...

LB 3 – Mas, a gente sabe que a Terra, ela é um círculo. Porque você vai andando, andando... Como seria isso?

LB 2 – Porque se olhar de perto seria uma reta e se olhar de longe seria uma curva.

PP – Se você pudesse estar bem longe possível. Entendi! Se você pudesse ampliar seu campo de visão o máximo possível ela não seria a reta como idealizamos. Mais ou menos isso?

Todos – Isso!

LG 4 – Nós concluímos o mesmo que... que seria com início e não teria fim.

LO 4 – A gente colocou como uma reta infinita né. Ela não teria fim definido. Mas, a gente entrou nessa discussão que não seria reta, que seria curva. Então tem esse debate aí.

PP – Aí vocês colocaram como reta né?

LO 4 – Sim.

PP – E o grupo de lá (LB) como uma semirreta. Tem um ponto de origem e não tem fim.

LB 3 – Sim.

PP – Só que vocês trouxeram elementos que trazem um certo conflito aí... Se você olhar bem próximo você tem a ideia de reta né. Mas, aí vocês pensando no espaço, espaço diferenciado, que a superfície pode ser ou não. Vocês falaram assim... Nao! Talvez essa reta para gente não é bem uma reta... ela pode se estruturar em uma curva.

PP – Tem uma outra pergunta que segue a mesma ideia. Ele fala bem assim... Uma geodésica é uma reta. Ele afirma – Anselmo. O que quer dizer Anselmo sobre essa afirmação?

LB 3 – A gente chegou que ele teria conhecimento dos postulados no caso. Ele foi lá e fez essa reta. Ele percebeu que essa reta é a menor distância entre esses dois pontos. Então, a geodésica seria a menor distância entre esses dois pontos.

PP – Ótimo! Então a menor distância entre dois pontos seria a ideia de geodésica. Alguém já tinha ouvido falar de geodésica antes?

Todos – Não!

Fonte: Elaborado pelo pesquisador a partir da transcrição das áudio-gravações do encontro em 27/04/2019.

Na discussão apresentada no Episódio 1 podemos observar que a ideia da AE I foi propor através do personagem Anselmo que os licenciandos revisitassem conceitos geométricos euclidianos a partir de alguns questionamentos do personagem acerca da aplicação desses conhecimentos no mundo em que vive (QUADRO 20).

Dito isto, destacamos no Episódio 1 as ações desenvolvidas pelos participantes que denotaram significados produzidos acerca do conceito de semirreta, reta e geodésica, destacando no processo os conceitos que os licenciandos possuíam e os que foram formalizados a partir dos conflitos gerados ao aplicarem conceitos geométricos básicos em situações cotidianas.

Quadro 21 - Cena 1: Discussão sobre o experimento de Anselmo na construção de uma semirreta

LB 3 – Porque olha só... A gente sabe se alguém olhasse essa semirreta que ele construiu em algum momento iria achar que era uma reta. Mas, nós sabemos que ele fincou, que ele tem um ponto de partida. Então no caso semirreta porque semirreta tem uma origem, só não tem no caso o fim dela, tende ao infinito.

LB2 – Colocar uma ideia... que assim... do grupo. A gente está falando de plano, né. Mas, se a gente for olhar em relação a ... o espaço! Aí já não seria ... já uma ... Se ele seguisse reto, aí seria uma curva. Aí ficou essa dúvida se é uma curva? Se é uma reta?

PP – Se é uma curva ou uma reta?

LB2 – Porque ele vai andando o mais longe que puder...

LB3 – Mas, a gente sabe que a Terra, ela é um círculo. Porque você vai andando, andando... Como seria isso?

LB2 – Porque se olhar de perto seria uma reta e se olhar de longe seria uma curva.

Fonte: Dados da pesquisa – Episódio 1.

Na discussão exposta na Cena 1 (QUADRO 21) o grupo Beta (LB) ao explicar o conceito de semirreta “Semirreta tem uma origem, só não tem no caso o fim dela, tende ao infinito.” (LB 3, Episódio, 2019) expressam no primeiro momento significados provenientes

do pensamento geométrico euclidiano, como algo determinado e incapaz de ser modificado, associando a ideia de semirreta como uma parte de uma reta “*A gente sabe se alguém olhasse essa semirreta que ele construiu em algum momento iria achar que era uma reta*” (LB 3, Episódio, 2019). Mas, os participantes colocaram em xeque este conceito ao questionarem o tipo de superfície em que o personagem Anselmo realizou o seu experimento.

Na discussão, o grupo LB transcende os conceitos de uma Geometria absoluta (Euclidiana) ao propor que a materialização de uma semirreta pelo personagem Anselmo desarticulou a ideia de que ao esticarmos uma linha indefinidamente teríamos uma reta. Na situação, o grupo LB compartilha por meio de suas reflexões os significados que possuíam sobre o conceito de semirreta, relacionando-o aos conceitos geométricos básicos desenvolvidos por Euclides. Mais adiante, o grupo promove novas reflexões que se modificam a partir de suas experiências, construindo um olhar diferenciado ao questionarem o espaço em que o personagem Anselmo se encontra “*Mas, a gente sabe que a Terra, ela é um círculo. Porque você vai andando, andando... Como seria isso?*” (LB 3, Episódio 1, 2019) e produzem um novo significado para o comportamento da reta quando chegam a uma generalização e a estabilização do conteúdo das ações ao afirmar “*Porque se olhar de perto seria uma reta e se olhar de longe seria uma curva.*” (LB 2, Episódio 1, 2019). De maneira intuitiva, os participantes apontam uma característica importante para a construção do pensamento geométrico ao constatar que os conceitos da Geometria Euclidiana atendem satisfatoriamente o nosso mundo físico quando utilizada em situações bem determinadas.

Nesse contexto, compreendemos que os significados produzidos acerca do conceito de semirreta despontaram inicialmente através do “conflito” entre a validade lógica do sistema euclidiano internalizado pelos licenciandos e a validade empírica vivenciada pelos mesmos ao verificarem que o conceito de reta está atrelado ao tipo de superfície em estudo, afirmando nesse caso que a trajetória descrita por Anselmo pode ser uma reta quando analisamos uma região delimitada ou uma curva quando ampliamos nosso campo de visão. A ideia principal da AE I foi criar condições para que os licenciandos pudessem compreender que a superfície em que Anselmo se encontra não é plana, mas sim, esférica.

No registro realizado pelo grupo Beta na AE I, sobre a construção da semirreta no experimento de Anselmo podemos perceber que o grupo se restringe somente a representação gráfica da situação, como podemos ver na Figura 15.

Figura 15 - Representação gráfica da construção de uma semirreta em relação ao experimento de Anselmo



Fonte: Dados da pesquisa – Grupo Beta - AE I, produzido em 27/04/2019.

Nas análises realizadas, perscrutamos que os grupos no registro escrito se limitaram a responder o questionamento de Anselmo acerca da construção de uma semirreta apenas por meio de sua representação gráfica, o que limitaria a nossa análise nesse estudo apenas ao conhecimento geométrico euclidiano dos participantes. As ações dos participantes captadas no momento da discussão foram imprescindíveis para a apreensão de significados diferenciados que extrapolaram o conhecimento geométrico euclidiano dos mesmos sobre o conceito de semirreta e reta.

Seguindo com a análise do Episódio 1 selecionamos a fala da participante LB 3 na tentativa de aproximação do conceito de geodésica ao considerar a afirmação do personagem Anselmo de que uma geodésica é uma reta. Essa situação constitui a cena 2 dessa análise (QUADRO 22).

Quadro 22 - Cena 2: Aproximação do conceito de geodésica

PP – Tem uma outra pergunta que segue a mesma ideia. Ele fala bem assim... Uma geodésica é uma reta. Ele afirma – Anselmo. O que quer dizer Anselmo sobre essa afirmação?
LB3 – A gente chegou que ele teria conhecimento dos postulados no caso. Ele foi lá e fez essa reta. Ele percebeu que essa reta é a menor distância entre esses dois pontos. Então, a geodésica seria a menor distância entre esses dois pontos.
PP – Ótimo! Então a menor distância entre dois pontos seria a ideia de geodésica. Alguém já tinha ouvido falar de geodésica antes?
Todos – Não!

Fonte: Dados da pesquisa – Episódio 1.

Na Cena 2 captamos na discussão que o termo geodésica era desconhecido pelos participantes da pesquisa e compreendemos que não houve resistência por parte dos licenciandos em aceitar essa nova terminologia, uma vez que este termo emergiu em meio ao conflito gerado ao verificarem que o conceito de reta está relacionado ao tipo de superfície em estudo. Em nossa análise, a aceitação do conceito de geodésica se deve a necessidade que os participantes tiveram para justificar o comportamento da reta em um espaço não plano.

Na fala de LB 3 exposta na cena 2 podemos constatar que o grupo LB busca construir o conceito de geodésica a partir de significados atribuídos a ideia de reta que foram formalizados pela Geometria Euclidiana “A gente chegou que ele teria conhecimento dos postulados no caso.

Ele foi lá e fez essa reta. Ele percebeu que essa reta é a menor distância entre esses dois pontos.” (LB 3, Episódio, 2019). A participante LB 3 propõem um conceito para geodésica ao enunciar que *“Então, a geodésica seria a menor distância entre esses dois pontos.”* (LB 3, Episódio 1, 2019), o que demonstra a atribuição de novo significado para descrever a trajetória entre dois pontos em diferentes espaços geométricos.

O conceito de geodésica proposto pelo o grupo LB se estabeleceu a partir dos conhecimentos prévios dos participantes e pela compreensão de que o espaço vivenciado pelo personagem Anselmo não é plano. Esse movimento conduziu os licenciandos a formação de um novo conceito científico para expressar a menor distância entre dois pontos em qualquer superfície.

7.2.2.2 Episódio 2: questionando Euclides?

Este Episódio é o recorte do terceiro encontro da aplicação da proposta de intervenção que aconteceu no dia 04 de maio de 2019, na qual os participantes foram distribuídos em quatro grupos de trabalho para discutir conceitos fundamentais da Geometria da superfície esférica. O Episódio 2, explicitado no Quadro 23, tem sua estrutura captada no momento da plenária da AE II e destacamos o movimento dos licenciandos que os conduziram a compreensão de que o espaço em que o personagem Anselmo vive se aproxima de uma esfera.

Quadro 23 - Episódio 2: Discussão dos participantes sobre a AE II

PP - Pessoal vamos abrir na plenária para a gente discutir naquela mesma vertente que a gente fez no primeiro momento. Se Anselmo saísse a partir da estaca e caminhasse 10 km ao sul. Depois virasse ao oeste e caminhasse por mais 10 km. E virasse novamente e caminhasse 10 km ao Norte. É possível Anselmo encontrar o ponto de partida?

LO 4 – Nós colocamos assim ... É possível. Basta caminhar 10 km a leste.

PP – A leste?

LO 4 – A leste.

PP – Mas como é que ficaria o desenho?

LO 4 – A construção? A construção de um quadrado.

PP – Dá a ideia de um quadrado.

LB 3 – Sem andar a leste no caso não teria possibilidade.

PP – Sem andar a leste não teria possibilidade?

Todos – Concordam que não.

LO 4 – (A participante foi até quadro descrever o pensamento do grupo LO).

PP – Eu entendi o que a amiga fez no quadro. Mas, a gente só tinha três dados.

LB 4 – Só três dados.

PP – Então para Anselmo conseguir chegar no local, ele tem que ter uma condição aí. Que é andar 10 km a leste.

PP – Alguém pensou diferente?

LG 1 – Meu grupo. Como se fosse um triângulo equilátero. Ele andaria para o sul e faria uma curva de 30°, seguia para o oeste e depois para o norte com uma curva de 30°.

PP – Entendi. Mas... O que a gente vai ter que lembrar é que Norte, Sul, Leste e Oeste, qual é o ângulo que a gente forma de... de intersecção aí?

LD 3 – 90°!

PP – 90° né. Então não vou ter essa amplitude de 30° que o grupo quis manifestar. Vamos ter que respeitar o andar de Anselmo...

LD 3 – Ele andou 10 km para o sul, para o oeste e depois para o norte.

LB 4 – A gente pensou também na bússola! Mas, mesmo assim não tem como.

PP – Ótimo! Vamos pensar na bússola. Ela sempre aponta para o Norte. Mas, porque o Norte? Ela funciona para atender uma condição do nosso planeta, planeta Terra, que tem polos magnéticos. Então, qual é a ideia de superfície que ela atende?

LO 4 – Esférica.

PP – A gente usa a bússola pelas condições que a gente tem da superfície da Terra, que não é esférica, mas que a esfera aproxima muito.

LO 4 – Porque naquela construção ali (apontando para a representação no quadrado) estamos considerando a terra como Plana. E a terra não é plana.

PP – Ótimo! Agora, pensando na esfera... Vamos ver se tem uma possibilidade de fazer isso. Lembrem-se uma esfera. Se ele andar 10 km para o sul, depois 10 km para o oeste e, depois ele andasse 10 km para o Norte. Ele iria conseguir encontrar o ponto de partida?

LO 4 – Sim.

PP – Porque não sei se vocês foram vendo a ilustração, tem uma hora que ele encontra, ele chega lá e encontra a estaca. Só que não foi permitido isso dentro da GE. Ele vai ter que transcender a GE. A Geometria que a gente está trabalhando agora. Ela vai se chamar Geometria esférica. Ela já tem esse nome... Geometria elíptica ou esférica.

LD 4 – É... quando a gente estava desenhando ali a primeira questão aquela lá (apontando para a representação no quadro), a gente atentou... não tem como pensando por esse ângulo, na superfície plana. Mas, depois que a gente foi para a esfera, a gente ficou até assim ... Não acredito! Tem como! Porque a gente só pensa na superfície plana. O tempo todo. E aí, em nenhum momento vem a ideia de uma esfera ou de outra figura geométrica.

PP – Quando você percebe as limitações da GE. Por exemplo, como é um voo de uma avião, o lançamento de um foguete? Surgiu até no grupo (LO) essa pergunta. Se um avião voar reto, se tiver tangente a superfície, o que acontece com o voar reto, se ele descrever uma tangente a esse ponto aqui. Se ele for reto ele se perde. Ele tem que seguir a órbita da Terra senão ele se desprende.

LD 4 – Se ele chegar a essa perspectiva... Ai meu Deus! De que o lugar que ele está não é plano.

PP – A superfície para ele... Ele está reconhecendo que ela é o que?

LD 4 – Esférica.

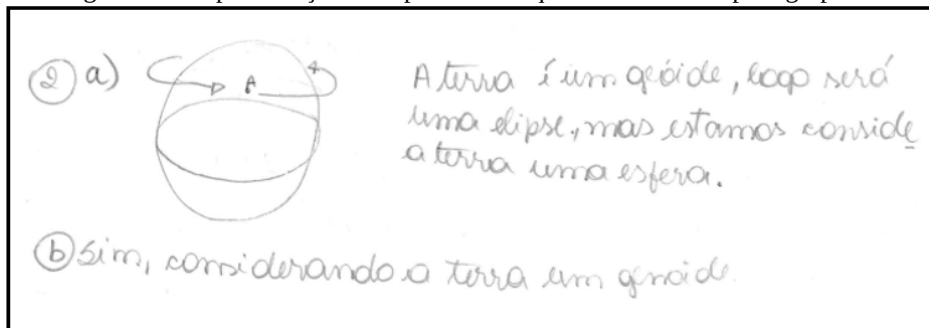
Fonte: Elaborado pelo pesquisador a partir da transcrição das áudio-gravações do encontro em 04/05/2019.

Na AE II, intitulada “Questionando Euclides?”, esperávamos que os participantes reconhecessem com facilidade que o experimento de Anselmo os conduzia a um espaço não euclidiano, pois na AE I foi discutido junto aos participantes o comportamento de uma reta quando a superfície não era plana, na qual denominamos a reta como geodésica. Acreditávamos que os conceitos trabalhados na AE I dariam suporte para os participantes realizarem a AE II, direcionando-os a questionarem a construção de conceitos euclidianos nas situações cotidianas apresentadas por Anselmo.

Mas, o movimento realizado pelos participantes durante a realização das AE II aponta que os conhecimentos geométricos dos mesmos estão fortemente ligados a ideia de um único modelo geométrico que tem como superfície de estudo o plano, mesmo demonstrando terem consciência que habitam em uma superfície que denotaram como uma geoide, ainda assim, continuaram empregando os conceitos geométricos de uma superfície plana em um espaço que compreendiam não ser plano, e sim, próximo de uma superfície esférica. Essa situação pode ser

observada na Figura 16 idealizada pelo grupo LO para representar o espaço geométrico onde vive o personagem Anselmo.

Figura 16 - Representação da superfície em que Anselmo vive pelo grupo LO



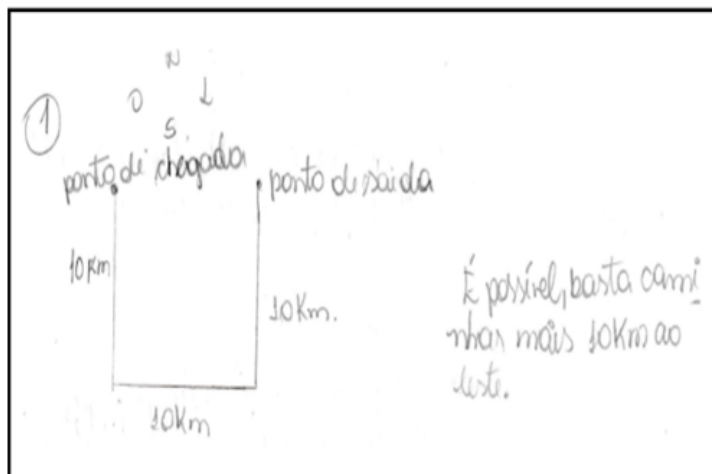
Fonte: Dados da pesquisa (LO, AE II, 2019).

O objetivo da AE II foi o de compreender que a superfície em que o personagem Anselmo se encontra é esférica. Para tanto, propõe-se o experimento de Anselmo que finca uma estaca no chão e caminha 10 km ao Sul, depois 10 km a Oeste e, por fim, 10 km ao Norte. Após a construção desse trajeto, os participantes são questionados se é possível Anselmo encontrar a estaca que tinha fincado no chão no início do trajeto.

A maioria dos grupos afirmaram que seria impossível encontrar o ponto de partida pois ao seguirem as informações disponibilizadas na situação, o formato do trajeto era de uma figura próximo a um quadrado. Para que tal situação se concretizasse, ou seja, para que Anselmo retornasse ao ponto de partida era necessário mais um dado, como coloca a participante “*Sem andar a leste no caso não teria possibilidade*” (LB 3, 2019).

A participante LO 4 constrói a representação na lousa, reforçando o pensamento proposto pelo grupo LB. Na figura 17, está a representação do grupo LO e ao lado a resposta que construíram na AE.

Figura 17 - Representação da solução da situação problema 1 da AE II realizada pelo grupo do LO



Fonte: Dados da pesquisa (04/05/2019).

Outra tentativa visando resolver a questão foi apresentada pelo grupo LG ao sugerir que o retorno de Anselmo ao ponto de partida está condicionado a um trajeto que descreva um triângulo equilátero com uma amplitude angular de 30° , como podemos verificar na fala do participante “*Meu grupo. Como se fosse um triângulo equilátero. Ele andaria para o sul e faria uma curva de 30° , seguia para o oeste e depois para o norte com uma curva de 30°* ” (LG 1, Episódio 2, 2019).

A solução apresentada pelo grupo LG é facilmente refutada na discussão pelo professor-pesquisador quando questiona o valor do ângulo formado pela intersecção das orientações dos pontos cardeais: Leste, Oeste, Norte e Sul. Assim, o professor-pesquisador questiona “*Entendi. Mas... O que a gente vai ter que lembrar é que Norte, Sul, Leste e Oeste, qual é o ângulo que a gente forma de... de intersecção aí?*” (PP, Episódio 2, 2019). A resposta a tal questionamento surge imediatamente na afirmação da participante do grupo LD “noventa graus.” (LD 3, Episódio 2, 2019).

Ao investigarmos as estratégias desenvolvidas pelos participantes aclaramos a crença dos mesmos na existência de um único modelo geométrico, considerando-o como uma verdade absoluta incapaz de ser questionada. Os significados atribuídos ao trajeto desenvolvido por Anselmo foram constituídos considerando que a superfície que Anselmo se encontra era plana, pois o emprego dos pontos cardeais conduziu os participantes a considerarem a bússola como um instrumento adequado para aferir a situação proposta por Anselmo “*A gente pensou também na bússola! Mas, mesmo assim não tem como*” (LB 4, Episódio 2, 2019). Mas, fica claro nos dizeres da participante LB 4 que mesmo considerando a bússola não foi suficiente para modificar o pensamento construído como resolução da situação.

Em nossa análise a AE II possibilitou atuarmos nas Zonas de Desenvolvimento Próximo (ZDP's) dos participantes, uma vez que evidenciou durante a discussão a assimetria entre o que os participantes conseguiam realizar sozinhos e o que potencialmente poderiam realizar com o auxílio de um pessoa mais experiente. Desse modo, destacamos o surgimento da bússola na discussão como um termo carregado de significados que permitiu ao professor-pesquisador atuar na ZDP's dos participantes como mediador a partir dos seguintes dizeres:

Ótimo! Vamos pensar na bússola. Ela sempre aponta para o Norte. Mas, porque o Norte? Ela funciona para atender uma condição do nosso planeta, planeta Terra, que tem polos magnéticos. Então, qual é a ideia de superfície que ela atende? (PP, Episódio 2, 2019).

Nesse momento, os participantes foram provocados a pensarem em um espaço físico diferente do plano e passaram a atribuir novos significados para o trajeto realizado pelo personagem Anselmo, como podemos observar na Cena 1.

Quadro 24 - Cena 1: Compreensão que a superfície em que Anselmo está é esférica

PP – Ótimo! Vamos pensar na bússola. Ela sempre aponta para o Norte. Mas, porque o Norte? Ela funciona para atender uma condição do nosso planeta, planeta Terra, que tem polos magnéticos. Então, qual é a ideia de superfície que ela atende?

LO 4 – Esférica.

PP – A gente usa a bússola pelas condições que a gente tem da superfície da Terra, que não é esférica, mas que a esfera aproxima muito.

LO 4 – Porque naquela construção ali (apontando para a representação na lousa-figura 20) estamos considerando a terra como Plana. E a terra não é plana.

PP – Ótimo! Agora, pensando na esfera... Vamos ver se tem uma possibilidade de fazer isso. Lembrem-se uma esfera. Se ele andar 10 km para o sul, depois 10 km para o oeste e, depois ele andasse 10 km para o Norte. Ele iria conseguir encontrar o ponto de partida?

LO 4 – Sim.

Fonte: Dados da pesquisa – Episódio 2.

Na Cena 1 (QUADRO 24) podemos observar que a participante LO 4 internaliza que o personagem Anselmo somente encontraria o ponto de partida se estiver em uma superfície esférica. Nesse contexto, acreditamos que a AE II se configurou em um ambiente de investigação, onde os participantes construíram novos significados para o trajeto realizado por Anselmo a partir do conflito gerado entre a consistência lógica do sistema euclidiano e a sua aplicação empírica.

É... quando a gente estava desenhando ali a primeira questão aquela lá (apontando para a representação na lousa), a gente atentou... não tem como pensando por esse ângulo, na superfície plana. Mas, depois que a gente foi para a esfera, a gente ficou até assim ... Não acredito! Tem como! Porque a gente só pensa na superfície plana. O tempo todo. E aí, em nenhum momento vem a ideia de uma esfera ou de outra figura geométrica (LO 4, Episódio 2, 2019, nosso grifo).

Nos dizeres da participante LO 4 constatamos que os licenciandos construíram novos significados para a trajetória descrita pelo personagem Anselmo a partir da compreensão que os conceitos geométricos euclidianos atendem determinados contexto da nossa realidade. Ao relacionarem o espaço em que vivem com uma superfície esférica, os participantes da pesquisa modificaram o modo de pensar e agir, passando a articular os conhecimentos geométricos ao tipo de superfície em estudo e dessa maneira atribuindo significados diferenciados para os conceitos geométricos a partir de sua aplicação em situações de deslocamento no mundo em que vivem.

Compreendemos que a situação descrita na Cena 1 sugere que o “conflito” como categoria de análise se estabeleceu na crença dos participantes na existência de um único modelo geométrico – o Euclidiano, pois acreditamos que o desconhecimento de modelos geométricos diferentes do euclidiano é uma tendência presente na comunidade acadêmica em que o participante está inserido. Isto é, compreendemos que é na comunidade (departamento, colegiado de Matemática, professor-formador) onde se encontra o amparo científico para a escolha do conteúdo considerado mais adequado na formação de professores de Matemática.

No capítulo anterior, apresentamos as análises sobre as propostas curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática que ofertam o ensino de GNE como disciplina específica e o curso em que os participantes desta pesquisa estão matriculados não apresentam em sua Proposta Curricular ou no Projeto Político de Curso indícios que sugerem o ensino de modelos geométricos diferentes do euclidiano. Outro fator que vincula o conhecimento de um único modelo geométrico por parte dos participantes à comunidade acadêmica em que estão inseridos encontra-se na legitimidade dos dizeres dos próprios licenciandos.

Falar de Geometria para mim sempre se restringia a Geometria Euclidiana, já que é ela que vivenciamos durante toda nossa vida na educação básica, e até mesmo agora na vida acadêmica (LD 2, RI 1, 2019).

[...] aprendemos desde sempre que a Geometria Euclidiana é a correta e não costumamos questionar (LO 4, RI 2, 2019).

Nunca tínhamos parado para analisar os postulados e suas consequências tentando construir e ver se realmente a Geometria Euclidiana era válida em alguns ambientes, eu particularmente sempre foquei em ambientes planos, numa folha de papel (LB 3, RI 2, 2019).

Observou-se durante o desenvolvimento da AE II que os participantes buscavam soluções a partir dos conhecimentos geométricos euclidianos mesmo identificando que a superfície que estava em estudo não fosse plana. Assim, compreende-se que os participantes

apresentaram ações sistematizadas para a resolução da AE II, limitando-os a uma forma única de representar e imaginar soluções para a situação problema em questão.

Nesse sentido, concordamos com Leivas (2009) quando sugere que uma boa formação inicial de professores deve apresentar o conhecimento geométrico de maneira mais abrangente, moderno, com uma visão diversificada, que a partir da apropriação de conceitos geométricos o professor possa desenvolver habilidades diferenciadas. Assim, sugere o ensino de GNE na formação inicial como uma forma de estimular a curiosidade, o espírito de investigação e a capacidade de resolver situações problemas diferenciadas. O Ensino de GNE poderá permitir ao professor “[...] a leitura e compreensão de mundo de forma mais atual”. (LEIVAS, 2009, p. 241).

7.2.2.3 Episódio 3: questionando Euclides?

Este Episódio é o recorte do terceiro encontro da aplicação da proposta de intervenção que aconteceu no dia 04 de maio de 2019. O episódio 3 tem sua estrutura captada no momento da plenária da AE II e destacamos o movimento dos licenciandos para formalizar o conceito de retas paralelas e retas coincidentes tanto na Geometria Euclidiana quanto na Geometria Esférica.

Quadro 25 - Episódio 3: Discussão dos participantes sobre a AE II

PP – Duas retas são paralelas se estão, no mesmo plano e não possuem nenhum ponto em comum. Na superfície esférica existe retas paralelas? LB 3 – Então... Nosso grupo foi uma briga danada, rrsrrsrs.... Mas a gente mediu certinho a distância entre as retas foi de 2,5 cm mais não com circunferências máximas. LB 4 – A gente consegue fazer várias retas paralelas só que com circunferências menores. LB 3 – Mas elas terão a mesma distância entre elas. LB 3 – Logo existe! LO 4 – A gente também discutiu bastante... A nossa dúvida inicialmente era referente a retas coincidentes, se retas coincidentes eram paralelas. Porque na Geometria esférica, a reta ou geodésica, ela só é se ela passa pela circunferência maior. Então, se for ter retas coincidentes você tem retas paralelas. Porém a gente definiu que retas coincidentes não são paralelas, para a nossa discussão aqui não existe retas paralelas na esférica. LB 3 – Não entendi ainda. Porque na esférica as retas coincidentes não seriam paralelas? LO 4 – As retas coincidentes não são paralelas nem na Geometria Plana. LB 3 – Mas, a gente considera paralela as retas coincidentes porque tem a mesma distância. A distância é zero! Se a distância é zero elas são paralelas. Porque... porque fala que dado dois pontos os pontos precisam ter a mesma distância. LO 4 – viu que não era a única que achava isso. (Risos) PP – Então vamos lá para o V postulado de Euclides. LO 3 – Mas são duas condições para serem paralelas. LO 4 – Isso que causou uma confusão em minha cabeça porque retas coincidentes eram paralelas. Mas, pela definição retas paralelas não podem ter pontos em comum, e se elas são coincidentes, elas têm todos os pontos em comum. LB 3 – Então ... elas não podem ter pontos em comum, mas se tiver elas são coincidentes.

PP – Vamos lá então! O V postulado que a gente trabalha hoje na educação básica, que é uma transformação do postulado de Euclides, uma das ideias é que dado uma reta e um ponto fora desta reta, pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada. Então, você tem que ter de certa forma um ponto fora dessa reta.

LB 3 – Mas não fala que não pode ter ... dado apenas um ponto fora dela. Não fala isso! Deixa viés...

PP – Então a gente chega em duas análises aí... primeiro a distância de cada ponto nas retas tem que ser igual (ponto a ponto) e depois, que a reta formada entre esses pontos formam ângulos de 90 graus com as retas dadas. Para que você mantenha o paralelismo.

LO 3 – Você tem que ter um triângulo entre essas retas paralelas como consequência. (a soma dos ângulos do triângulo na Geometria Euclidiana é igual a 180°).

PP – Isso mesmo.

LB 3 – Ohhh! É ... porque eu aprendi desse jeito. No meu curso todo e até nos minicursos que eu fiz a gente aprendeu que retas coincidentes são retas paralelas.

LB 2 – Estou com o pensamento da LO 4, as retas não podem ter pontos em comum... Se forem em comum já elimina a chance de ser paralelas.

PP – Eu concordo com LO 4 quando ela chega ali. Pois temos V postulado, formulado por Playfair, que dado uma reta e um ponto fora dela, você tem que ter o ponto fora da reta para ter o conceito de paralelismo.

LB 3 – E se o ponto for nela? Porque ele não dá aval para isso, porque ele afirma que existe retas coincidentes são retas paralelas está no livro isso porque a gente leu.

LB 4 – Isso!

PP – A ideia de paralelismo para mim está na ideia do V postulado, que você tem que ter um ponto fora dessa reta dada.

LB 3 – Você usa a ideia de perpendicularismo para medir a distância entre as retas, mas se a distância é zero... eu não preciso do perpendicularismo. Se elas tem as mesmas distâncias (ponto a ponto) elas são paralelas.

PO – Vocês estão misturando dois conceitos em um mesmo momento. O conceito de retas distintas paralelas e de retas paralelas coincidentes. As condição para que as retas sejam distintas paralelas ou retas paralelas coincidentes são diferentes.

PP – Então vamos pensar... Para que que eu abriria a ideia de paralelismo entre retas coincidentes?

LO 3 – Não sei ...

PP – Nós temos que sair daqui com o conceito redondo... construído aqui.

LO 3 – Até porque se existir retas coincidentes paralelas na GE, então teremos retas coincidentes paralelas nessa daqui também (mostrando a bola de isopor). Por isso temos que definir se coincidentes são paralelas ou não, porque se eu passo aqui a minha geodésica todas as vezes que for dar voltas ela será paralela a ela mesma.

LO 4 – Se considerar retas coincidentes paralelas aí vai existir.

PP – Uma das ideias de paralelismo que vimos na apresentação do curso, uma das consequências é que todo o triângulo euclidiano, a soma dos ângulos é igual a 180° . Se tivermos retas coincidentes paralelas essa consequência cai.

LB 3 – Eu vou ficar com PO que disse que nós estamos confundindo retas paralelas distintas de retas paralelas coincidentes.

PP – O que a gente determinou aqui... Se existir retas coincidentes na Geometria Euclidiana então vai existir também retas paralelas na Geometria Esférica somente no caso particular, quando forem retas paralelas coincidentes.

LO 4 – Só nesse caso de coincidente.

PP – Então não pode ser só para um caso particular.

LO 4 – Tanto que a gente colocou assim... na esférica só consideramos que existe retas coincidentes e as concorrentes, apenas a não ser que você considere coincidentes como paralelas.

PP – Está buscando ajuda nos meios tecnológicos LB3?

LB 3 – Eu estou sim. Rsrssrsrsrsrs.... O pior que é mesmo ... ô que desgrama... Eu vou chorar ... O teorema fala que duas retas paralelas são coplanares e não tem nenhum ponto em comum. Pronto! Já mataria o meu discurso.

LB 2 – Isso!

PO – Reta distintas!

PP – Eu já ouvi a terminologia de retas paralelas coincidentes.

PO – Retas paralelas coincidentes serve apenas para esclarecer que existe uma infinidade de retas, porque na verdade a gente só consegue representar uma única reta, mas na verdade tem uma infinidade de retas.

PP – Eu não concordo e prefiro usar retas coincidentes do que retas coincidentes paralelas porque você acaba mexendo com um outro conceito. Você acaba criando um caso particular.

LB 3 – Gente! Gente! É inapropriado. (Realizaram buscas em artigos na internet pelo celular)

LB 4 – No Brasil, muitos textos didáticos apresentam uma terminologia inapropriada - retas paralelas coincidentes. Apesar disso, por exemplo o termo retas coincidentes é correto mas carrega uma confusão, dá a

impressão que seria considerada mais de uma reta, repare: se r e s são retas coincidentes porque representam o mesmo conjunto de pontos não importa que são dados vários nomes, r e s está na mesma reta.

LB 3 – *E fala que não existe paralelismo em retas coincidentes. Ensinei errado!*

Fonte: Elaborado pelo pesquisador a partir da transcrição das áudio-gravações do encontro em 04/05/2019.

No Episódio 3 destacamos o movimento dos licenciandos durante a discussão acerca da construção do conceito de paralelismo entre retas em uma superfície esférica a partir do uso de material manipulativo. Assim, cada grupo recebeu um kit contendo os seguintes materiais: bola de isopor, fitas adesivas de cores diferentes, tesoura, canetas coloridas, borrachinha de dinheiro (elástico), régua e alfinetes (QUADRO 25).

Nessa etapa da AE II, esperávamos que os participantes cientes que a superfície em estudo era esférica buscassem construir o conceito de paralelismo considerando as noções de deslocamento e o conceito de geodésica em uma superfície esférica. Na Cena 1 observamos que há aceitação por parte dos participantes da existência do modelo geométrico esférico e analisamos a atribuição de significados dos mesmos para o conceito de paralelismo a partir da categoria nomeada de “Ruptura – do espaço euclidiano para outros espaços.”

Quadro 26 - Cena 1: Discussão acerca do paralelismo entre retas na superfície esférica

PP – *Duas retas são paralelas se estão, no mesmo plano e não possuem nenhum ponto em comum. Na superfície esférica existe retas paralelas?*

LB 3 – *Então... Nosso grupo foi uma briga danada (risos). Mas a gente mediu certinho a distância entre as retas foi de 2,5 cm mais não com circunferências máximas.*

LB 4 – *A gente consegue fazer várias retas paralelas só que com circunferências menores.*

LB 3 – *Mas, elas terão a mesma distância entre elas. Logo existe!*

LO 4 – *A gente também discutiu bastante... A nossa dúvida inicialmente era referente a retas coincidentes, se retas coincidentes eram paralelas. Porque na Geometria esférica, a reta ou geodésica, ela só é se ela passa pela circunferência maior. Então, se for ter retas coincidentes você tem retas paralelas. Porém a gente definiu que retas coincidentes não são paralelas, para a nossa discussão aqui não existe retas paralelas na esférica.*

LB 3 – *Não entendi ainda. Porque na esférica as retas coincidentes não seriam paralelas?*

LO 4 – *As retas coincidentes não são paralelas nem na Geometria Plana.*

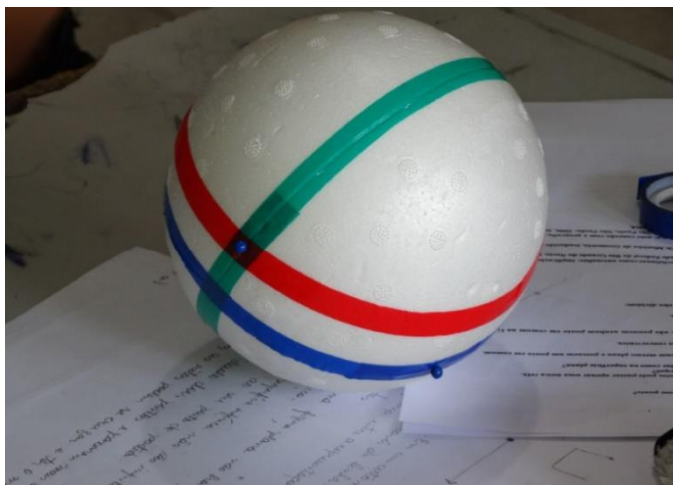
LB 3 – *Mas, a gente considera paralela as retas coincidentes porque tem a mesma distância. A distância é zero! Se a distância é zero elas são paralelas. Porque... porque fala que dado dois pontos os pontos precisam ter a mesma distância.*

Fonte: Dados da pesquisa – Episódio 3.

Na discussão presente na Cena 1 (QUADRO 26) inquiremos que o grupo LB propõem a existência de paralelismo entre retas na Geometria Esférica relacionando esse conceito com a ideia de distância entre as retas, ou seja, tem-se paralelismo entre retas quando a distância entre os pontos de uma reta a outra forem da mesma medida sucessivamente, como sugere LB 3 “Então... Nosso grupo foi uma briga danada (risos). Mas, a gente mediu certinho a distância entre as retas foi de 2,5 cm mais não com circunferências máximas.” (LB 3, Episódio 3, 2019).

Na Figura 18 apresentamos a construção realizada pelo grupo LB de retas paralelas na bola de isopor para justificar a existência desse conceito na Geometria Esférica.

Figura 18 - Construção de retas paralelas na bola de isopor



Fonte: Dados da pesquisa (04/05/2019).

A representação proposta pelo grupo LB na Figura 18 sugere que as fitas azul e vermelha representam duas geodésicas que são paralelas por manterem uma distância de 2,5 cm entre elas no transcorrer de suas finitudes. Observa-se que o grupo LB procura dar coerência ao conceito de paralelismo na superfície esférica a partir de uma das consequências do Postulado das Paralelas de Euclides que sugere a existência de um par de retas equidistantes. Nesse contexto, analisamos que há uma ruptura por parte dos participantes em relação à existência de um único modelo geométrico ao aceitarem a ideia de paralelismo na superfície esférica e que os mesmos atribuem significados para esse novo conceito considerando apenas a equidistância entre retas como juízo de valor para a formalização desse conceito.

A ideia construída pelo grupo LB é refutada pela participante LO 4 quando sinaliza que *“na Geometria Esférica, a reta ou geodésica, ela só é se ela passa pela circunferência maior”* (LO 4, Episódio 3, 2019), o que evidencia um erro conceitual cometido pelo grupo LB ao proporem que existe paralelismo na superfície esférica por admitirem que a fita vermelha descreve uma geodésica na representação exposta na Figura 18. Em nossa análise, a participante LO 4 não só rompe com a ideia de um único modelo geométrico por meio da aceitação do modelo esférico, como transcende o conceito de paralelismo ao internalizar o conceito de geodésica em uma superfície esférica, produzindo novos significados, tornando-os capazes de questionar a existência de paralelismo na superfície esférica ao dizer que *“Porque na Geometria esférica, a reta ou geodésica, ela só é se ela passa pela circunferência maior. Então,*

se for ter retas coincidentes você tem retas paralelas. Porém a gente definiu que retas coincidentes não são paralelas, para a nossa discussão aqui não existe retas paralelas na esférica” (LO 4, Episódio 3, 2019).

O movimento realizado pelos participantes no Episódio 3 se manifestou no primeiro momento por meio da “ruptura” do paradigma da existência de um modelo geométrico único, capaz de representar a realidade física em sua totalidade. Assim, os participantes ao constatarem algumas limitações no modelo geométrico euclidiano para modelar as diversas situações que emergem numa superfície não plana passaram a atribuir novos significados para o conceito de paralelismo, na qual o conhecimento geométrico não se apresenta mais como algo pronto e acabado e sim como algo plenamente vivo e passivo de ser construído e/ou reconstruído.

Dito isto, compreendemos que os participantes ao romperem com a ideia de uma única Geometria do real ao longo do processo interativo apresentado na Cena 1 foram refinando seu processo de pensamento e tomando decisões que os levaram a afirmar corretamente que na Geometria Esférica não existe paralelismo entre geodésicas. Essa afirmação foi proposta pelo grupo LO, que condicionou a existência de paralelismo entre geodésicas na superfície esférica ao propor como verdadeira a premissa de que retas coincidentes não se constituem em retas paralelas.

No diálogo apresentado pelos participantes na Cena 1 notamos que a premissa proposta por LO 4 “As retas coincidentes não são paralelas nem na Geometria Plana.” (Episódio 3, 2019) gerou uma espécie de *conflito* para os participantes que defendiam a existência de paralelismo entre geodésicas na superfície esférica. A participante LB 3 confronta os dizeres de LO 4 ao propor que “*Mas, a gente considera paralela as retas coincidentes porque tem a mesma distância. A distância é zero! Se a distância é zero elas são paralelas. Porque... porque fala que dado dois pontos os pontos precisam ter a mesma distância.*” (LB 3, Episódio 3, 2019).

Em nossa análise, os dizeres da participante LB 3 expressam que os participantes desse grupo atribuem significados para o paralelismo entre retas na Geometria Euclidiana considerando a equidistância entre os pontos pertencentes as retas como o único aspecto necessário para determinar o paralelismo entre retas. Assim, compreendemos que os integrantes do grupo LB não internalizaram o conceito de paralelismo entre retas a partir do entendimento do Postulado das Paralelas aceito atualmente para a Geometria Euclidiana – *dado uma reta e um ponto fora dela existe apenas uma única reta paralela à reta dada*, mas sim, a partir de uma das consequências imposta pelo Postulado das Paralelas que resulta na equidistância entre retas.

Nesse contexto, atribuímos as dificuldades dos participantes em verificar a existência de paralelismo na Geometria Esférica ao fato de não terem internalizado o conceito de

paralelismo na Geometria Euclidiana e que a formação deficitária desse conhecimento contribuiu para a consolidação de um erro conceitual quando propõem que retas coincidentes são retas paralelas.

Na Cena 2 destacamos a atribuição de significados dos participantes para retas coincidentes a partir da aceitação de que há paralelismo entre essas retas coincidentes. A ideia de retas coincidentes atrelada ao conceito de paralelismo é aos poucos desconstruída pelos participantes, no momento que recorrem ao Postulado das Paralelas como proposto por Playfair e utilizado atualmente - dado uma reta e um ponto fora dela, pode-se traçar por este ponto uma única reta paralela à reta dada (QUADRO 27).

Quadro 27 - Cena 2 : Discussão acerca do paralelismo a partir do Postulado das Paralelas

PP – Então, vamos lá para o V postulado de Euclides.

LO 3 – Mas são duas condições para serem paralelas.

LO 4 – Isso que causou uma confusão em minha cabeça porque retas coincidentes eram paralelas. Mas, pela definição retas paralelas não podem ter pontos em comum, e se elas são coincidentes, elas têm todos os pontos em comum.

PP – Vamos lá então! O V postulado que a gente trabalha hoje na educação básica, que é uma transformação do postulado de Euclides, uma das ideias é que dado uma reta e um ponto fora desta reta, pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada. Então, você tem que ter de certa forma um ponto fora dessa reta.

LB 3 – Ohhh! É ... porque eu aprendi desse jeito. No meu curso todo e até nos minicursos que eu fiz a gente aprendeu que retas coincidentes são retas paralelas.

LB 2 – Estou com o pensamento da LO 4, as retas não podem ter pontos em comum... Se forem em comum já elimina a chance de ser paralelas.

Fonte: Dados da pesquisa – Episódio 3.

Na Cena 2 observamos o movimento da participante LO 4 para desconstruir a ideia de que retas coincidentes são retas paralelas. A participante assume o *conflito* como um caminho para questionar algo que lhe parecia verdadeiro e definido ao dizer que “*Isso que causou uma confusão em minha cabeça porque retas coincidentes eram paralelas.*” (LO 4, Episódio 3, 2109). Nos dizeres da participante LB 3 encontramos indícios de que esse erro conceitual foi propagado durante o curso superior “*É ... porque eu aprendi desse jeito. No meu curso todo e até nos minicursos que eu fiz a gente aprendeu que retas coincidentes são retas paralelas*” (LB 3, Episódio 3, 2019). Nesse contexto, compreendemos que os participantes se apropriaram de maneira equivocada do conceito de paralelismo entre retas e que os estudos realizados durante o curso de Licenciatura em Matemática não foram suficientes para a compreensão da dimensão conceitual que envolve a ideia de paralelismo.

O movimento dos participantes para a construção do conceito de paralelismo na superfície esférica motivou os licenciandos a repensarem o conceito de paralelismo na Geometria Euclidiana, na qual a existência de paralelismo na Geometria é algo aceito e

consolidado. A aceitação desse conceito pelos participantes suscitou a busca por pelo menos um caso particular para validar a ideia de paralelismo, considerando a existência desse conceito independentemente do tipo de superfície em estudo.

Outro aspecto salutar para a construção de conhecimentos geométricos foi constatado no processo de desenvolvimento da AE II, que diz respeito ao modo de pensar e agir dos participantes ao buscarem na definição do conhecimento de paralelismo argumentos para atribuir significados para o conceito de paralelismo na superfície esférica, como podemos observar nos dizeres de LO 4 e LB 2:

“[...] pela definição retas paralelas não podem ter pontos em comum, e se elas são coincidentes, elas têm todos os pontos em comum.” (LO 4, Episódio 3, 2019).

“Estou com o pensamento da LO 4, as retas não podem ter pontos em comum. Se forem em comum já elimina a chance de ser paralelas.” (LB 2, Episódio 3, 2019).

Observamos que os participantes ao refletirem sobre a definição de paralelismo na Geometria Euclidiana para construírem o conceito de paralelismo na Geometria Esférica passam a reconhecer o conhecimento geométrico como uma atividade humana que se transforma gradativamente por meio de um processo histórico e cultural no qual estabelece significados de acordo com as necessidades dos homens. Essa visão pode ampliar o entendimento dos licenciandos sobre o conhecimento geométrico a partir da diversidade de contextos de sua aplicação em nosso cotidiano, podendo atribuir novos significados para o seu estudo durante a formação inicial do professor de Matemática.

Na cena 3 evidenciamos, a partir da inferência do professor observador (PO 2), um novo “conflito” ao propor durante a discussão que os participantes estão misturando o conceito de retas distintas paralelas e retas paralelas coincidentes. Essa afirmação sugere que PO 2 tem o paralelismo entre retas coincidentes como uma verdade e que este conceito é válido pela organização lógica do sistema geométrico Euclidiano (QUADRO 28).

Quadro 28 - Cena 3: Discussão acerca da existência de paralelismo entre retas coincidentes

PO 2 – Vocês estão misturando dois conceitos em um mesmo momento. O conceito de retas distintas paralelas e de retas paralelas coincidentes. As condição para que as retas sejam distintas paralelas ou retas paralelas coincidentes são diferentes.

PP – Nós temos que sair daqui com o conceito redondo... construído aqui.

LO 3 – Até porque se existir retas coincidentes paralelas na GE, então teremos retas coincidentes paralelas nessa daqui também (mostrando a bola de isopor). Por isso temos que definir se coincidentes são paralelas ou não, porque se eu passo aqui a minha geodésica todas as vezes que for dar voltas ela será paralela a ela mesma.

LO 4 – Se considerar retas coincidentes paralelas aí vai existir.

PP – Uma das ideias de paralelismo que vimos na apresentação do curso, uma das consequências é que todo o triângulo euclidiano, a soma dos ângulos é igual a 180° . Se tivermos retas coincidentes paralelas essa consequência cai.

LB 3 – Eu vou ficar com PO 1 que disse que nós estamos confundindo retas paralelas distintas de retas paralelas coincidentes.

PP – O que a gente determinou aqui... Se existir retas coincidentes na Geometria Euclidiana então vai existir também retas paralelas na Geometria Esférica somente no caso particular, quando forem retas paralelas coincidentes.

LO 4 – Só nesse caso de coincidente.

PP – Então não pode ser só para um caso particular.

LO 4 – Tanto que a gente colocou assim... na esférica só consideramos que existe retas coincidentes e as concorrentes, apenas a não ser que você considere coincidentes como paralelas.

PP – Está buscando ajuda nos meios tecnológicos LB 3?

LB 3 – Eu estou sim (Risos). O pior que é mesmo ... Eu vou chorar ... O teorema fala que duas retas paralelas são coplanares e não tem nenhum ponto em comum. Pronto! Já mataria o meu discurso.

LB 2 – Isso!

PO 2 – Reta distintas!

PO 2 – Retas paralelas coincidentes serve apenas para esclarecer que existe uma infinidade de retas, porque na verdade a gente só consegue representar uma única reta, mas na verdade tem uma infinidade de retas.

PP – Eu não concordo e prefiro usar retas coincidentes do que retas coincidentes paralelas porque você acaba mexendo com um outro conceito. Você acaba criando um caso particular.

LB 3 – Gente! Gente! É inapropriado. (Realizaram buscas em artigos na internet)

LB 4 – No Brasil, muitos textos didáticos apresentam uma terminologia inapropriada - retas paralelas coincidentes. Apesar disso, por exemplo o termo retas coincidentes é correto mas carrega uma confusão, dá a impressão que seria considerada mais de uma reta, repare: se r e s são retas coincidentes porque representam o mesmo conjunto de pontos não importa que são dados vários nomes, r e s está na mesma reta.

LB 3 – E fala que não existe paralelismo em retas coincidentes. Ensinei errado!

Fonte: Dados da pesquisa – Episódio 3.

A intervenção realizada pelo PO 2 durante a discussão conduz os participantes a analisarem o paralelismo entre retas coincidentes como um caso particular na Geometria Euclidiana na qual a sua validade lógica se estabelece também na Geometria Esférica, conduzindo os licenciandos a ideia de existência de paralelismo na superfície esférica a partir da aceitação de um caso particular “Se considerar retas coincidentes paralelas aí vai existir.” (LO 4, 2019, Episódio 3).

O PO 2 realiza uma nova intervenção para defender o paralelismo entre retas coincidentes ao argumentar que “Retas paralelas coincidentes serve apenas para esclarecer que existe uma infinidade de retas, porque na verdade a gente só consegue representar uma única reta, mas na verdade tem uma infinidade de retas.” (PO 2, 2019, Episódio 3). Em nossa análise o PO 2 sentiu-se incomodado com a discussão, pois acredita que retas coincidentes é um caso particular de paralelismo na Geometria Euclidiana e apresenta um conceito para retas coincidentes a fim de validar o seu posicionamento frente a existência de paralelismo na superfície esférica.

Nesse momento, observamos que os grupos encontram-se divididos quanto à aceitação de paralelismo entre retas coincidentes e ao acessarem trabalhos acadêmicos por meio de dispositivos eletrônicos (notebook e celulares) encontram discussões que sugerem o

paralelismo entre retas coincidentes como um erro conceitual. A participante LB 4 se dispõe a ler para os colegas um trecho de um artigo que grupo encontrou durante a investigação.

“No Brasil, muitos textos didáticos apresentam uma terminologia inapropriada - retas paralelas coincidentes. Apesar disso, por exemplo o termo retas coincidentes é correto mas carrega uma confusão, dá a impressão que seria considerada mais de uma reta, repare: se r e s são retas coincidentes porque representam o mesmo conjunto de pontos não importa que são dados vários nomes, r e s está na mesma reta.” (LB 4, Episódio 4, 2019).

A participante LB 3 complementa os dizeres da participante LB 4 ao mencionar que as publicações consultadas sugerem que não existe paralelismo entre retas coincidentes, conduzindo-a a refletir sobre sua prática quanto ao ensino desse conceito *“E fala que não existe paralelismo em retas coincidentes. Ensinei errado!”* (LB 3, 2019, Episódio 3).

O movimento realizado pelos participantes e pelo PO 2 na busca da construção do conceito de paralelismo na superfície esférica nos revela a atribuição de significados dos mesmos para o conceito de paralelismo, uma vez que atribuíram significados para este conceito a partir da análise da distância entre as retas, desconsiderando no momento de construção desse saber o Postulado das Paralelas como proposto por Playfair e aceito atualmente na Geometria Euclidiana - dado uma reta e um ponto fora dela, pode-se traçar por este ponto uma única reta paralela à reta dada. Esse movimento conduziu os participantes e o PO 2 ao erro conceitual de considerar retas coincidentes como um caso particular de paralelismo tanto na Geometria Euclidiana quanto na Geometria Esférica:

“Eu sempre acreditei que retas coincidentes eram paralelas, em todas as disciplinas que cursei, em todas as demonstrações e provas que necessitei fazer até esse dia, considere esse fato. O que acontece é que quando fomos debater sobre retas coincidentes (afirmando serem paralelas) nos deparamos com o professor Clovis tratando retas coincidentes como apenas coincidentes sem paralelismo, mas como isso poderia acontecer? Como de costume, fiquei muito confusa e fui pesquisar na internet com meu grupo (não que estivéssemos duvidando do professor), pegamos um livro sobre geometria euclidiana e, pelas pesquisas, verificamos que no Brasil realmente há uma forma de tratar coincidentes como paralelas de forma equivocada, já que o conceito de paralelismo é: as retas são paralelas quando a interseção entre elas é vazia”. (LD 4, RI 3, 2019).

Nesse contexto, compreendemos que os participantes ao estudarem o conceito de paralelismo na superfície esférica romperam com a consistência lógica do modelo geométrico Euclidiano ao verificarem que não existe paralelismo entre geodésicas na Geometria Esférica e passaram a atribuir novos significados para o conceito de paralelismo na Geometria Euclidiana ao compreenderem que retas coincidentes não podem ser consideradas retas paralelas.

Quanto à formação geométrica dos participantes no curso de Licenciatura em Matemática, os indícios captados durante a AE II nos possibilitou concluir que há forte crença por parte dos professores formadores na construção do conceito de paralelismo arregimentados na aceitação de que retas coincidentes são um caso particular de paralelismo no modelo geométrico euclidiano. A esse respeito o grupo LB expõe que *“O problema é que vários professores da Uneb... Eles batem na mesma tecla... que retas coincidentes são paralelas e usam até para provar que outras retas são paralelas a elas.”* (LB, Episódio 3, 2019). Assim, acreditamos que o estudo de modelos geométricos não euclidianos na formação inicial pode contribuir para o enriquecimento das discussões acerca dos conceitos geométricos concebidos pela Geometria Euclidiana ao analisarmos como se comportam esses conceitos em superfícies não planas.

Como havíamos mencionado antes, as categorias de análise de produção de significados dos participantes elas emergem em um processo espiralado por meio de revoluções, onde a internalização dos conceitos podem ser captados por meio do “conflito” entre a consistência lógica da Geometria Euclidiana e sua aplicação empírica, podendo conduzir ou não a “ruptura” do paradigma de um único modelo geométrico. Ressaltamos também que a produção dos significados dos participantes foi captada em nossa pesquisa por meio de um processo em espiral segundo a qual a ordem das categorias não se amarra à maneira fixa e pré-definida, onde a “ruptura” pode conduzir ao surgimento de novos “conflitos” e vice-versa.

Nessa perspectiva, observamos no Episódio 3 que a produção de significados ocorreu a partir da aceitação da existência de diferentes modelos geométricos, direcionando os participantes a romperem com a ideia de paralelismo entre retas como formalizado pela Geometria Euclidiana. Assim, os participantes são conduzidos a um conflito ao compreenderem que a existência de paralelismo entre geodésicas na superfície esférica está condicionada a ideia de paralelismo entre retas coincidentes. E produzem significados diferenciados para o conceito de paralelismo tanto na Geometria Euclidiana quanto na Geometria Esférica ao concluírem que retas coincidentes não são paralelas entre si.

O movimento realizado pelos participantes representam o processo de análise constituído para a pesquisa, em que a categoria “ruptura – do espaço euclidiano para outros espaços” provocou o surgimento de um novo “conflito” que foi analisado pela categoria “conflito – da validade lógica à validade empírica”.

7.2.2.4 Episódio 4: a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180° ?

Este episódio é um recorte do terceiro encontro da aplicação da proposta de intervenção que aconteceu no dia 11 de maio de 2019. O episódio 4 tem sua estrutura captada no momento da plenária da AE III e destacamos o movimento dos licenciandos na construção de triângulos na superfície esférica.

Quadro 29 - Episódio 4: Discussão dos participantes sobre a AE III

PP – Considerando a situação vivenciada por Anselmo, explique o que pode estar ocorrendo com conceitos de Euclides, sobre a soma dos ângulos internos do triângulo para que não funcione no mundo de Anselmo.

LO 4 – A gente colocou que a demonstração de Euclides é feita no plano e Anselmo está fazendo na Terra, né. Então vai dar diferença já que é uma esfera.

LB 3 – O porquê a gente não conseguiu. Mas fizemos um monte de triângulos (na bola de isopor) que a soma dos ângulos deram duzentos e tantos graus. Que deu assim ... 80° num vértice, 80° no outro e 90° .

PP – O que o grupo LG respondeu?

LG 1 – Que a soma sempre está dando maior que 180° .

PP – Então, dar sempre maior que 180° é um furo na consequência do V postulado de Euclides, da dedução do Postulado de Euclides que diz que a soma dos ângulos interno de um triângulo tem que dar 180° .

PP – Vocês realizaram dois experimentos. A primeira oficina vocês montaram um triângulo qualquer. Qual é a conclusão que vocês chegaram sobre a soma dos ângulos internos do triângulo em uma folha de papel?

LB 1 – Que a soma dá um ângulo raso.

LO 4 – A soma dos ângulos internos vai dar sempre 180° .

LB 3 – Chegamos até na ideia de retas paralelas.

LO 4 – A gente percebeu que são duas paralelas (mostrando a construção do triângulo realizado pelo grupo na folha de papel). Colocamos assim: qualquer triângulo construído entre duas paralelas a gente tem a soma dos ângulos internos igual a 180° . A gente tem isso como consequência do V postulado de Euclides.

PP – Utilizando a bola de isopor construa três triângulos esféricos um dentro do outro. O que vocês perceberam? A soma dos ângulos internos do triângulo foram iguais, menores ou maiores de 180° ?

Todos – Maiores.

PP – O que seria um triângulo esférico?

LB 3 – Três geodésicas que se interceptam.

PP – Na verdade elas sempre vão se interceptar. Então é a região formada por três geodésicas distintas.

PP – O que podemos afirmar do mundo de Anselmo?

LB 3 – Que o mundo dele não é plano.

LO 4 – Que é esférico.

PP – Mesmo que ele não tenha a certeza que ele é esférico, ele tem a certeza que não é plano. Eu queira perguntar para vocês... A medida que o triângulo vai crescendo na Geometria esférica os ângulos vão ...

LO 4 – aumentando também.

PP – A área dele aumenta também?

LO 4 – A área?

LO 1 – A área aumenta.

PP – Tem alguma relação com a Geometria plana?

Todos – Concordam que não.

PP – Esta pode ser uma das percepções de Anselmo que indica que não está no plano e sim numa esfera.

Fonte: Elaborado pelo pesquisador a partir da transcrição do áudio-gravações do encontro em 11/05/2019.

No Episódio 4 observamos que a categoria “ruptura” é a primeira a se manifestar, uma vez que fica claro no movimento realizado pelos participantes ao desenvolverem a AE III que houve a aceitação por parte dos mesmos da existência de modelo geométrico não euclidiano e passam a construir novos conceitos geométricos não somente considerando as limitações dos

conhecimentos geométricos euclidianos, como também relacionando seus conhecimentos geométricos diretamente com a superfície em estudo. A aceitação do modelo geométrico esférico evidencia o rompimento com a estrutura lógica da Geometria Euclidiana, exigindo dos participantes novas formas de pensar e agir no processo de construção de conceitos geométricos (QUADRO 29).

Na Cena 1 apresentamos o movimento dos licenciandos ao verificarem que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° (QUADRO 30).

Quadro 30 - Cena 1: Discussão sobre a construção de triângulo esférico

PP – Considerando a situação vivenciada por Anselmo, explique o que pode estar ocorrendo com conceitos de Euclides, sobre a soma dos ângulos internos do triângulo para que não funcione no mundo de Anselmo.
LO 4 – A gente colocou que a demonstração de Euclides é feita no plano e Anselmo está fazendo na Terra, né. Então vai dar diferença já que é uma esfera.
LB 3 – O porquê a gente não conseguiu. Mas fizemos um monte de triângulos (na bola de isopor) que a soma dos ângulos deram duzentos e tantos graus. Que deu assim ... 80° num vértice, 80° no outro e 90° .
PP – O que o grupo LG respondeu?
LG 1 – Que a soma sempre está dando maior que 180° .
PP – Então, dar sempre maior que 180° é um furo na consequência do V postulado de Euclides, da dedução do Postulado de Euclides que diz que a soma dos ângulos interno de um triângulo tem que dar 180° .

Fonte: Dados da pesquisa – Episódio 4.

Na discussão o grupo LO coloca como perspectiva de análise inicial o tipo de superfície que está em jogo argumentando que “A gente colocou que a demonstração de Euclides é feita no plano e Anselmo está fazendo na Terra, né? Então vai dar diferença já que é uma esfera.” (LO 4, Episódio 4, 2019). Nesse momento compreendemos que os participantes não desenvolveram argumentos a partir do questionamento da ideia de que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer na superfície plana é sempre igual a 180° como demonstrado por Euclides. A aceitação do modelo geométrico esférico proporcionou aos licenciandos novas maneiras de pensar e agir durante a construção do saber, uma vez que possibilitou a atribuição de significados diferentes ao concluir que um triângulo esférico tem a soma dos seus ângulos internos maior do que 180° .

“O porquê a gente não conseguiu. Mas fizemos um monte de triângulos (na bola de isopor) que a soma dos ângulos deram duzentos e tantos graus. Que deu assim ... 80° num vértice, 80° no outro e 90° .” (LB 3, Episódio 4, 2019).

“Que a soma sempre está dando maior que 180° .” (LG 1, Episódio 4, 2019).

Na Figura 19 denotamos a construção - realizada pelo grupo LB - de triângulos esféricos na bola de isopor e o processo de aferição dos ângulos nesses objetos.

Figura 19 – Construção de triângulos em superfície esférica



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Na Cena 2 abordamos o movimento dos participantes na primeira parte da oficina de construção de um triângulo qualquer em uma folha de papel A4. O objetivo da realização desse experimento foi o de articular a construção de triângulos na superfície plana como uma consequência do paralelismo entre retas na Geometria Euclidiana.

Quadro 31 - Cena 2: Discussão sobre a construção de triângulos na superfície plana

PP – Vocês realizaram dois experimentos. A primeira oficina vocês montaram um triângulo qualquer. Qual é a conclusão que vocês chegaram sobre a soma dos ângulos internos do triângulo em uma folha de papel?
LB 1 – Que a soma dá um ângulo raso.
LO 4 – A soma dos ângulos internos vai dar sempre 180° .
LB 3 – Chegamos até na ideia de retas paralelas.
LO 4 – A gente percebeu que são duas paralelas (mostrando a construção do triângulo realizado pelo grupo na folha de papel). Colocamos assim: qualquer triângulo construído entre duas paralelas a gente tem a soma dos ângulos internos igual a 180° . A gente tem isso como consequência do V postulado de Euclides.

Fonte: Dados da pesquisa – Episódio 4.

Acreditamos que o primeiro experimento possibilitou que os licenciandos internalizassem -por meio de uma situação prática- o conceito de paralelismo na Geometria Euclidiana e atribuíssem significados para o conceito de paralelismo ao verificarem que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é uma das consequências do Postulado das Paralelas (QUADRO 31). Esse processo é constatado também através das falas dos participantes ao exporem que:

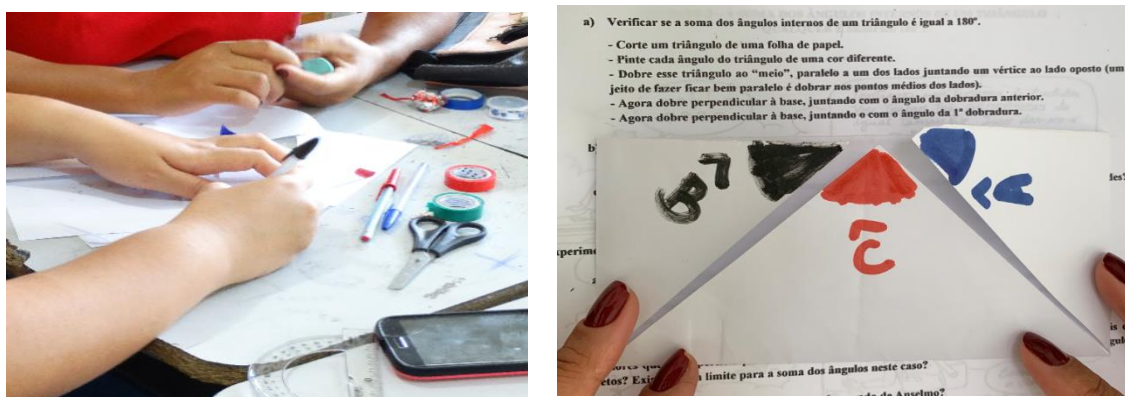
“A gente percebeu que são duas paralelas (mostrando a construção do triângulo realizado pelo grupo na folha de papel). Colocamos assim: qualquer triângulo construído entre duas paralelas a gente tem a soma dos ângulos internos igual a 180° .”

A gente tem isso como consequência do V postulado de Euclides”. (LO 4, Episódio 4, 2019).

“Como experimento o professor utiliza um bem clássico, que é pegar uma folha A4, recortar um triângulo qualquer e pintar seus ângulos internos com canetinhas por exemplo; eu conheço a forma que corta as medianas de cada lado, desconhecia a forma de dobraduras, que me surpreendeu bastante, pois podemos verificar o V Postulado de Euclides, mas ao final verificamos que a soma dos ângulos internos é 180° .” (LO 3, RI 3, 2019).

Na Figura 20 apresentamos imagens dos licenciandos desenvolvendo o experimento durante o encontro. Nesse dado momento eles buscaram demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Euclidiana é igual a 180° .

Figura 20 - Verificação da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer na superfície plana



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Logo, os participantes compreenderam que as dobraduras realizadas a partir das medianas do triângulo construído uniram os vértices na base do mesmo formando um ângulo raso e que a nova figura formada representa um quadrilátero onde a base e a parte de cima da figura são paralelas. Assim, os licenciandos conseguiram relacionar que a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Euclidiana é uma consequência do paralelismo entre retas.

O segundo experimento consistiu na construção de triângulos em uma bola de isopor com o uso de fitas adesivas coloridas para descrever as geodésicas que forma os mesmos. A partir dessa construção esperávamos que os participantes comparassem os triângulos esféricos com o triângulo construído na folha de papel A4 e, por meio de suas diferenças, estabelecessem aspectos que pudessem determinar o tipo de superfície em que Anselmo se encontra.

Para melhor compreensão da formação de ângulos internos de um triângulo esférico construímos, como parte do experimento II, um instrumento para medir ângulos em superfície

esférica. O transferidor esférico²⁵ é um instrumento que quando manuseado de maneira adequada auxilia na aferição dos ângulos proporcionando maior confiabilidade para os dados investigados.

A construção do transferidor esférico foi realizada pelos participantes da pesquisa durante o encontro como podemos observar na Figura 21.

Figura 21 - Construção do transferidor esférico



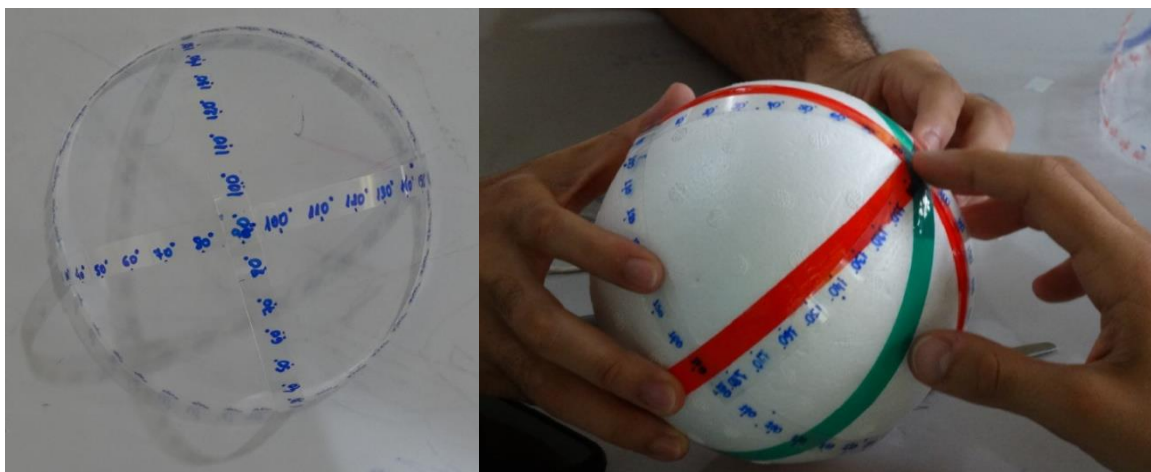
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A construção de um instrumento específico para a medição de ângulos na superfície esférica contribuiu para o entendimento dos participantes acerca da formação de ângulos em uma superfície esférica, uma vez que o manuseio do transferidor esférico proporcionou aos participantes certa segurança para afirmar que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° . Em nossa análise, a ideia de um instrumento específico para medir ângulos em superfície esférica foi também mais um aspecto relevante para a aceitação da existência de um modelo geométrico diferente do euclidiano.

Na Figura 22 apresentamos o transferidor esférico construído pelos participantes e uso do mesmo durante o desenvolvimento da AE III.

²⁵ As informações sobre o processo de construção e utilização de um transferidor esférico foram consultadas no livro Atividades experimentais de matemática nos anos finais do ensino fundamental de autoria de Carlos Eduardo de Souza Campos Granja e José Luiz Pastore Mello, publicado em São Paulo: Edições SM, 2012.

Figura 22 - O transferidor esférico e sua utilização durante o processo de formação



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Mediante aquilo que nossa compreensão abarcou temos que as ações realizadas pelos participantes durante a construção do transferidor esférico proporcionou a troca de conhecimentos geométricos entre os mesmos, à medida que foram desenvolvendo estratégias para recortar, enumerar e colar, estes passaram a estabelecer as relações de uso do instrumento com a forma e medidas da bola de isopor. Assim, consideramos que o participante também produziu significados sobre os conteúdos geométricos ao confeccionar o transferidor esférico, uma vez que a apropriação de conceitos e de significados ocorre da atividade coletiva para a individual (VYGOTSKI, 2001).

Podemos observar, nos dizeres dos participantes, o quanto se tornou significativo o processo de construção do transferidor esférico:

“Foi nos dado materiais para construção de um transferidor esférico e nos surpreendemos, pois nunca havíamos visto um e ainda mais construímos. Foi de grande experiência ter desenvolvido essa atividade com material concreto, pôr em prática todos os conceitos teóricos e nos fez ampliar a aprendizagem e vermos na prática como a geometria funciona”. (LD 3, RI 5, 2019).

“Com nossos transferidores construídos e colocando na prática na bola de isopor como figura esférica através de construções de outros triângulos, descobrimos como medir os ângulos internos de um triângulo esférico com o novo instrumento, contribuindo assim para um melhor desenvolvimento acadêmico e futura prática docente.” (LD 3, RI 5, 2019).

Já no recorte apresentado na Cena 3 observamos que os licenciandos ao construírem os triângulos esféricos na bola de isopor constataram que a medida em que os triângulos aumentam as suas dimensões os ângulos internos também aumentam e, conseqüentemente, aumentam a área dos mesmos (QUADRO 32).

Quadro 32 - Cena 3: Discussão sobre as características de um triângulo esférico

PP – Utilizando a bola de isopor construa três triângulos esféricos um dentro do outro. O que vocês perceberam? A soma dos ângulos internos do triângulo foram iguais, menores ou maiores de 180° ?
Todos – Maiores.
PP – O que seria um triângulo esférico?
LB 3 – Três geodésicas que se interceptam.
PP – Na verdade elas sempre vão se interceptar. Então é a região formada por três geodésicas distintas.
PP – O que podemos afirmar do mundo de Anselmo?
LB 3 – Que o mundo dele não é plano.
LO 4 – Que é esférico.
PP – Mesmo que ele não tenha a certeza que ele é esférico, ele tem a certeza que não é plano. Eu queira perguntar para vocês... A medida que o triângulo vai crescendo na Geometria esférica os ângulos vão ...
LO 4 – aumentando também.
PP – A área dele aumenta também?
LO 4 – A área?
LO 1 – A área aumenta.
PP – Tem alguma relação com a Geometria plana?
Todos – Concordam que não.
PP – Esta pode ser uma das percepções de Anselmo que indica que não está no plano e sim numa esfera.

Fonte: Dados da pesquisa – Episódio 4.

Em nossa compreensão, os participantes ao analisar a área e os ângulos internos de um triângulo esférico passaram a atribuir novos significados para a relação entre eles ao constatarem que à medida que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico aumenta sua área também aumenta, conduzindo-os a concluir que não há semelhança de triângulos na Geometria Esférica.

“Analisarmos a área e os ângulos do triângulo esféricos percebemos que quanto maior a área maior os ângulos, ao contrário do que acontece na plana que os ângulos matem se os mesmo sendo assim não tem semelhanças de triângulos na geometria esférica pois os ângulos mudam de acordo com a sua área.” (LD 2, RI 4, 2019).

“Dando sequência e analisando os triângulos percebemos também que não existe semelhança de triângulos na superfície esférica já que quanto maior for o triângulo, maior será os valor de seus ângulos internos, então para dois triângulos serem semelhantes eles tinha que ser iguais, ou seja, congruentes.” (LG 1, RI 4, 2019).

“A semelhança de triângulos na geometria euclidiana acontece quando ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais. O que acontece na geometria esférica, como já disse, é que quanto maior a área do triângulo, maior é a soma dos seus ângulos internos não tendo como existir semelhança de triângulos.” (LB 4, RI 4, 2019).

Nesse contexto, compreendemos que o movimento realizado pelos participantes no Episódio 4 foi caracterizado pela ruptura com a ideia de um único modelo geométrico, pois ao internalizarem que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° foi possível compreender a partir da relação entre área e ângulos internos de um triângulo, que o modelo geométrico mais adequado para representar o espaço físico em que vive o personagem Anselmo é constituído pela Geometria Esférica.

7.2.2.5 Episódio 5: outros espaços?

Este Episódio é o recorte do sexto encontro da aplicação da proposta de intervenção que aconteceu no dia 25 de maio de 2019. O Episódio 5 tem sua estrutura captada no momento da plenária da AE V e destacamos o movimento dos licenciandos em busca da compreensão de um outro espaço geométrico em que a superfície em estudo é conhecida como hiperbólica. Para a construção de alguns conceitos básicos inerentes a Geometria Hiperbólica, distribuimos para cada grupo os seguintes materiais: fitas adesivas de cores diferentes, transferidor plano, régua flexíveis, caneta permanente de cores diferentes, uma vuvuzela e uma corneta (QUADRO 33).

Quadro 33 - Episódio 5: Construção de conceitos básicos geométricos em uma superfície hiperbólica

PP – Pessoal! Na AE V o Anselmo percebeu que ... Ele está até doente... O Anselmo depois que começou a compreender a Geometria esférica, ele começou a perceber que o mundo que ele vivia não era o mundo como ele pensava que era. Então agora, ele está se lançando, não sei se vocês viram, ele falou assim: Então eu vou estudar as superfícies. Ele expandiu a maneira de ver o mundo e concluiu que não pode ficar preso a uma superfície só...

LG 1 – A gente percebeu que nos dois triângulos a soma era menor que 180° e que a soma dos ângulos do menor triângulo é maior do que a do maior.

LG 2 – A soma do verde (mostrando o triângulo na vuvuzela) é maior que a do vermelho (triângulo maior).

PP – E quais foram os valores que vocês encontraram?

LG 1 – Do triângulo maior a gente achou 55° , 53° e 75° .

PP – Que deu quanto a soma?

LG 1 – 178° . E o menor a gente achou 179° .

PP – Ou seja... Quando está reduzindo ele está se aproximando de que?

LG 1 – de 180° .

PP – Mais alguém teve essa visão também?

LD 3 – O triângulo menor foi 60, 85 e 47 graus que deu 192° .

PP – 192° ?

LD 3 – Isso! E o triângulo maior 87, 78 e 40 graus que deu a soma 205° . Deu a mesma situação que eles (LG). A soma dos ângulos internos do triângulo maior deu menor que o triângulo menor.

PP – Mas, deu uma coisa diferente de vocês. O limite máximo para eles (LG) não passou de 180° . Já o de vocês está acima de 180° . Então a gente tem um problema aí!

LO 4 – O nosso deu menores que 180° nos dois. Mas, bem próximo de 180° . Só que o maior deu 173° e o menor 171° .

PP – Porque será que alguns grupos... Ou melhor, no texto de Anselmo, ele propõem alguma coisa para a soma dos ângulos nessa superfície?

LB 3 – menor.

LB 4 – Ele fala que é menor que 180° .

LO 4 – Eu acho que o problema na medição deles é referente a fita, porque a gente fez com a caneta. E acaba que com a caneta é mais fina e fica mais fácil você saber onde começa e onde termina.

PP – Exatamente! Talvez o problema esteja na medição dos ângulos dos triângulos pois a ideia intuitiva aqui é que a soma dos ângulos internos do triângulo na superfície hiperbólica é menor que 180° . Olhem para a figura da menina que estava deitada... Olha a estrutura do corpo dela. Vocês estão vendo o que acontece com ela, pensando na estrutura dela, temos três superfícies... o 1º espaço que aparece está na mão dela que é o plano. Depois vem o hiperbólico no meio do corpo dela e no glúteo dela representa uma superfície que não vamos chamar de esférica, mas sim de elíptica. Porque a Geometria esférica é elíptica também. A gente estuda o mundo esférico pela facilidade de analisá-lo.

PP – Todo mundo conseguiu perceber que é menor que 180° ?

Todos – Sinalizam que entenderam.

PP – A ideia dessa superfície aqui (mostrando a corneta) é a representação de uma superfície hiperbólica. Na atividade dois a gente quer saber se existe paralelismo da forma que ocorre na Geometria Euclidiana. Quem quer começar?

LB 3 – Segundo o postulado de Euclides nós acreditamos que não existe.

LB 4 – A gente não conseguiu encontrar pontos equidistantes, em retas, mas ao mesmo tempo as retas não se encontram.

LB 3 – Não há paralelismo porque as retas não são equidistante.

PP – Sim. Mas o que Euclides diz sobre retas paralelas?

LB 4 – Que as retas tem que ser equidistante e sem pontos em comum.

PP – É isso que o postulado das paralelas fala?

LB 4 – Dada uma reta e um ponto fora dela conseguimos construir uma única reta paralela à reta dada.

PP – Essa definição é forte para a gente. A questão de equidistância é do postulado ou é uma consequência?

LO 4 – Consequência.

Todos – Sinalizam que concordam.

LO 4 – Mas, se ela não for equidistante em algum momento ela vai se cruzar.

PP – Essa consequência que vocês estão levantando não é o postulado é uma consequência do postulado na superfície plana. Ele não disse assim: postulo agora que toda a reta que é equidistante a uma outra são paralelas.

LB 3 – Ele postulou que dado uma reta e um ponto fora dela só existe uma única paralela.

PP – Que ocorre também que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer ser igual a 180° é consequência do paralelismo na euclidiana. Olha que massa! Estão vendo que o conhecimento elaborado se difere da bagagem que a gente carrega com a Geometria.

LB 3 – Muito bom mesmo.

PP – Aí, LB 4 fala que existe retas, geodésicas que não vão tocar e existe retas que vão tocar. Então ..., aí eu pergunto para LB 4 de novo: existe paralelismo ou não existe o que o grupo acha?

LB 4 – Existe.

PP – Alguém concorda ou não com a ideia?

LO 4 – A gente acha que existe paralelismo e acrescenta que na Geometria plana é uma única reta e na Geometria hiperbólica a gente abre para mais retas. Porque a gente conseguiu definir ali pelo desenho duas retas, mas pode existir mais.

PP - Pela extensão do exercício nós só representamos duas, mas eu posso ter mais.

LO 4 – que são paralelas a reta dada.

LB 3 – E que passam pelo ponto dado.

Fonte: Elaborado pelo pesquisador a partir da transcrição das áudio gravações do encontro em 25/05/2019.

No Episódio 5 analisamos que a AE V conduz os participantes a existência de uma outra superfície, denotando a vuvuzela e a corneta como materiais manipulativos que representam esse espaço geométrico denominado como hiperbólico. Assim, compreendemos que os licenciandos aceitam a existência de outro modelo geométrico, que difere em sua estrutura dos modelos geométricos -plano e esférico- na qual propomos formalizar os conceitos relacionados com a soma dos ângulos internos de um triângulo nesse tipo de superfície, bem como, verificar a existência de paralelismo na mesma.

Na Cena 1 ampliamos o olhar para o movimento dos licenciandos em compreender que a soma dos internos de um triângulo construído em uma superfície hiperbólica (vuvuzela) tem como resultado valores menores que 180° , tomando esse conceito como um aspecto relevante para diferenciar esse espaço geométrico dos demais estudados durante a nossa proposta de intervenção (QUADRO 34).

Quadro 34 - Cena 1: Discussão sobre a soma dos ângulos internos de triângulos hiperbólicos

PP – Pessoal! Na AE V o Anselmo percebeu que ... Ele está até doente... O Anselmo depois que começou a compreender a Geometria esférica, ele começou a perceber que o mundo que ele vivia não era o mundo como

ele pensava que era. Então agora, ele está se lançando, não sei se vocês viram, ele falou assim: Então eu vou estudar as superfícies. Ele expandiu a maneira de ver o mundo e concluiu que não pode ficar preso a uma superfície só...

LG 1 – *A gente percebeu que nos dois triângulos a soma era menor que 180° e que a soma dos ângulos do menor triângulo é maior do que a do maior.*

LG 2 – *A soma do verde (mostrando o triângulo na vuvuzela) é maior que a do vermelho (triângulo maior).*

PP – *E quais foram os valores que vocês encontraram?*

LG 1 – *Do triângulo maior a gente achou 50°, 53° e 75°.*

PP – *Que deu quanto a soma?*

LG 1 – *178°. E o menor a gente achou 179°.*

PP – *Ou seja... Quando está reduzindo ele está se aproximando de que?*

LG 1 – *de 180°.*

PP – *Mais alguém teve essa visão também?*

LD 3 – *O triângulo menor foi 60, 85 e 47 graus que deu 192°.*

PP – *192°?*

LD 3 – *Isso! E o triângulo maior 87, 78 e 40 graus que deu a soma 205°. Deu a mesma situação que eles (LG). A soma dos ângulos internos do triângulo maior deu menor que o triângulo menor.*

PP – *Mas, deu uma coisa diferente de vocês. O limite máximo para eles (LG) não passou de 180°. Já o de vocês está acima de 180°. Então a gente tem um problema aí!*

LO 4 – *O nosso deu menores que 180° nos dois. Mas, bem próximo de 180°. Só que o maior deu 173° e o menor 171°.*

PP – *Porque será que alguns grupos... Ou melhor, no texto de Anselmo, ele propõem alguma coisa para a soma dos ângulos nessa superfície?*

LB 3 – *menor.*

LB 4 – *Ele fala que é menor que 180°.*

LO 4 – *Eu acho que o problema na medição deles é referente a fita, porque a gente fez com a caneta. E acaba que com a caneta é mais fina e fica mais fácil você saber onde começa e onde termina.*

PP – *Exatamente! Talvez o problema esteja na medição dos ângulos dos triângulos pois a ideia intuitiva aqui é que a soma dos ângulos internos do triângulo na superfície hiperbólica é menor que 180°. Olhem para a figura da menina que estava deitada... Olha a estrutura do corpo dela. Vocês estão vendo o que acontece com ela, pensando na estrutura dela, temos três superfícies... o 1° espaço que aparece está na mão dela que é o plano. Depois vem o hiperbólico no meio do corpo dela e no glúteo dela representa uma superfície que não vamos chamar de esférica, mas sim de elíptica. Porque a Geometria esférica é elíptica também. A gente estuda o mundo esférico pela facilidade de analisá-lo.*

PP – *Todo mundo conseguiu perceber que é menor que 180°?*

Todos – *Sinalizam que entenderam.*

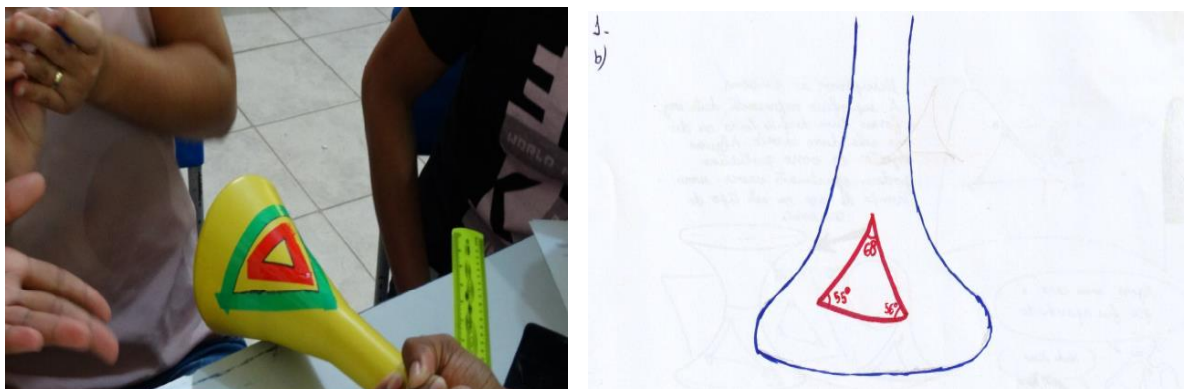
Fonte: Dados da pesquisa – Episódio 5.

Os participantes do grupo LG iniciam a discussão expondo que a soma dos ângulos internos de um triângulo construído em uma superfície hiperbólica é menor que 180°; não houve excitação em aceitar esse novo conhecimento na formação de triângulos naquele tipo de espaço geométrico, uma vez que a ruptura com um modelo único geométrico possibilitou aos participantes conjecturar novos conceitos e atribuir significados diferentes para o conhecimento geométrico ao considerar como ponto de partida o tipo de superfície que está sendo estudada.

A participante LO 4 ao colocar que “O nosso deu menores que 180° nos dois. Mas, bem próximo de 180°. Só que o maior deu 173° e o menor 171°.” (Episódio 5, 2019) evidencia um aspecto importante ao constatar que a soma dos ângulos se aproximam de 180° a medida que o triângulo diminui suas dimensões. Logo, a medida que diminuirmos as dimensões do triângulo na superfície hiperbólica mais próximo estaremos de uma região plana e, conseqüentemente, a soma dos ângulos internos desse triângulo se aproximará de 180°.

Na Figura 23, apresentamos os triângulos hiperbólicos construídos e a representação do triângulo feita pelos participantes no desenvolvimento da AE V.

Figura 23 - Construção do grupo LG de triângulos em superfície hiperbólica



Fonte: Dados da pesquisa (25/05/2019).

A respeito do tipo de curvatura das superfícies estudadas a participante LD 1 propõe que:

“Se perceber que enquanto na Geometria Plana a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° (curvatura nula), e na Geometria Esférica esta varia entre 180° e 540° (curvatura positiva), na Geometria Hiperbólica está é menor que 180° , devido ao fato de que a curvatura é negativa como foi definido por Gauss.” (LD 1, RI 6, 2019).

Nesse contexto, compreendemos que a participante LD 1 atribuiu novos significados para a construção geométrica de triângulos ao expor que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer está condicionado ao tipo de curvatura do espaço em estudo, podendo ser este nulo, positivo ou negativo.

Apenas o grupo LD não conseguiu no desenvolvimento da AE V estabelecer em sua construção que a soma dos ângulos internos do triângulo hiperbólico era menor que 180° . A participante LD 3 coloca que “O triângulo menor foi 60, 85 e 47 graus que deu 192° . E o triângulo maior 87, 78 e 40 graus que deu a soma 205° .” (LD 3, Episódio 5, 2019). Constatamos que os participantes do grupo LD tiveram dificuldades para aferir os ângulos dos triângulos produzidos na vuvuzela, devido à falta de habilidade em manipular o transferidor, causando distorções nas medidas dos ângulos e conduzindo-os a acreditar que a soma dos ângulos nessa superfície seria maior que 180° .

Nesse momento, a mediação do PP foi imprescindível para a formalização dos conceitos acerca da soma dos ângulos internos de um triângulo concebido em uma superfície hiperbólica ao sugerir uma análise mais aprofundada da AE V, percebidos na narrativa que segue:

“Talvez o problema esteja na medição dos ângulos dos triângulos, pois a ideia intuitiva aqui é que a soma dos ângulos internos do triângulo na superfície hiperbólica é menor que 180° . Olhem para a figura da menina que estava deitada... Olha a estrutura do corpo dela. Vocês estão vendo o que acontece com ela, pensando na estrutura dela, temos três superfícies... o 1º espaço que aparece está na mão dela que é o plano. Depois vem o hiperbólico no meio do corpo dela e no glúteo dela representa uma superfície que não vamos chamar de esférica, mas sim de elíptica. Porque a Geometria esférica é elíptica também. A gente estuda o mundo esférico pela facilidade de analisá-lo”. (PP, Episódio 5, 2019).

O PP para formalizar o conceito acerca da soma dos ângulos de um triângulo hiperbólico ter valores menores que 180° , utiliza as representações gráficas presentes na AE V como ferramenta de mediação e propõe a diferenciação entre os tipos de superfícies em estudo por meio da análise dessas representações gráficas.

Na Cena 2 observamos o movimento dos licenciandos para internalizar o conceito de paralelismo em uma superfície hiperbólica, destacando que esse processo se iniciou por meio do “conflito” entre a consistência lógica da equidistância entre retas como uma consequência do paralelismo na Geometria Euclidiana e a sua não aplicação na superfície hiperbólica (QUADRO 35).

Quadro 35 - Cena 2: Discussão acerca da existência de paralelismo entre retas em uma superfície hiperbólica

PP – A ideia dessa superfície aqui (mostrando a corneta) é a representação de uma superfície hiperbólica. Na atividade dois a gente quer saber se existe paralelismo da forma que ocorre na Geometria Euclidiana. Quem quer começar?

LB 3 – Segundo o postulado de Euclides nós acreditamos que não existe.

LB 4 – A gente não conseguiu encontrar pontos equidistantes, em retas, mas ao mesmo tempo as retas não se encontram.

LB 3 – Não há paralelismo porque as retas não são equidistantes.

PP – Sim. Mas o que Euclides diz sobre retas paralelas?

LB 4 – Que as retas tem que ser equidistante e sem pontos em comum.

PP – É isso que o postulado das paralelas fala?

LB 4 – Dada uma reta e um ponto fora dela conseguimos construir uma única reta paralela à reta dada.

PP – Essa definição é forte para a gente. A questão de equidistância é do postulado ou é uma consequência?

LO 4 – Consequência.

Todos – Sinalizam que concordam.

LO 4 – Mas, se ela não for equidistante em algum momento ela vai se cruzar.

PP – Essa consequência que vocês estão levantando não é o postulado é uma consequência do postulado na superfície plana. Ele não disse assim: postulo agora que toda a reta que é equidistante a uma outra são paralelas.

LB 3 – Ele postulou que dado uma reta e um ponto fora dela só existe uma única paralela.

PP – Que ocorre também que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer ser igual a 180° é consequência do paralelismo na euclidiana. Olha que massa! Estão vendo que o conhecimento elaborado se difere da bagagem que a gente carrega com a Geometria.

LB 3 – Muito bom mesmo.

PP – Aí, LB 4 fala que existe retas, geodésicas que não vão tocar e existe retas que vão tocar. Então ..., aí eu pergunto para LB 4 de novo: existe paralelismo ou não existe o que o grupo acha?

LB 4 – Existe.

PP – Alguém concorda ou não com a ideia?

LO 4 – *A gente acha que existe paralelismo e acrescenta que na Geometria plana é uma única reta e na Geometria hiperbólica a gente abre para mais retas. Porque a gente conseguiu definir ali pelo desenho duas retas, mas pode existir mais.*

PP – *Pela extensão do exercício nós só representamos duas, mas eu posso ter mais.*

LO 4 – *que são paralelas a reta dada.*

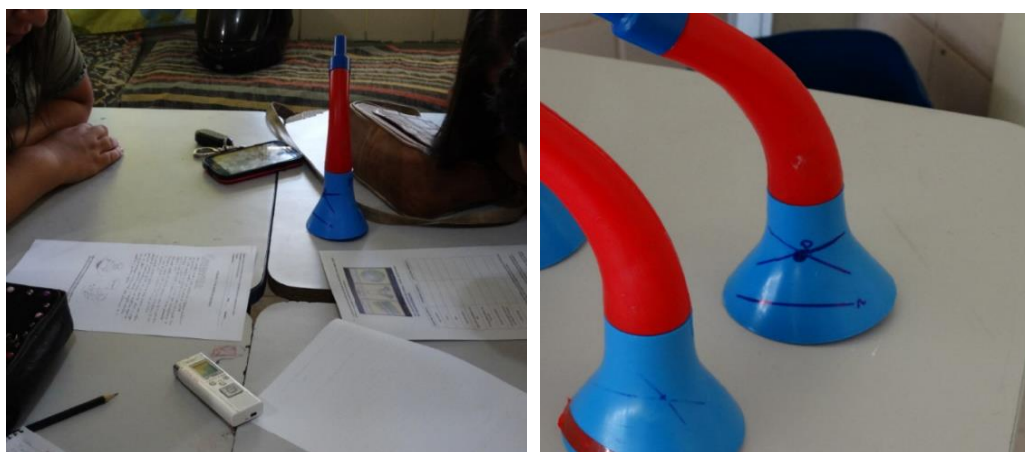
LB 3 – *E que passam pelo ponto dado.*

Fonte: Dados da pesquisa - Episódio 5.

A discussão presente na Cena 2 foi constituída a partir da investigação de paralelismo em uma superfície hiperbólica representada por uma corneta. Na corneta, cada grupo construiu uma reta r e um ponto P fora dessa reta, e em seguida, os grupos construíram duas retas, q e s , que passam pelo ponto P . O objetivo dessa parte da AE V era analisar, tendo como premissa essas construções, se existe paralelismo na Geometria Hiperbólica.

Na Figura 24 apresentamos a construção de retas paralelas em uma corneta realizadas pelos participantes do grupo LD durante o desenvolvimento da AE V.

Figura 24 - Construção de retas paralelas em uma superfície hiperbólica



Fonte Dados da pesquisa (2019).

No início da discussão, a participante LB 3 coloca que para o grupo não existe paralelismo na superfície hiperbólica ao propor que: “segundo o postulado de Euclides nós acreditamos que não existe.” (LB 3, Episódio 5, 2019) e a participante LB 4 expõe o porquê de tal afirmação ao mencionar que “A gente não conseguiu encontrar pontos equidistantes, em retas, mas ao mesmo tempo as retas não se encontram.” (LB 4, Episódio 5, 2019). O fato de não haver equidistância entre os pontos das geodésicas construídas na corneta conduziu os participantes do grupo LB a concluírem que não há paralelismo na Geometria Hiperbólica “Não há paralelismo porque as retas não são equidistantes”. (LB 3, Episódio 5, 2019).

Acreditamos que o grupo LB não internalizou o conceito de paralelismo em uma superfície plana e compreende que uma das consequências do Postulado das Paralelas da

Geometria Euclidiana, no caso a equidistância entre retas, é a única forma para validar se há ou não paralelismo na superfície hiperbólica. Assim, a conclusão do grupo se estabelece por meio do “conflito” no qual os participantes buscam validar a existência de paralelismo em uma superfície não plana apenas a partir da verificação da equidistância entre geodésicas, desconsiderando a essência do conceito de paralelismo e, conseqüentemente, conduzindo-os a cometerem um erro conceitual quanto a existência de paralelismo na superfície hiperbólica.

Nesse momento, o PP interage com os participantes questionando se a equidistância é enunciada no Postulado das Paralelas, onde observamos um questionamento “*É isso que o Postulado das Paralelas fala?*” (PP, Episódio 5, 2019) e, rapidamente, a participante LB 3 responde que “*Dada uma reta e um ponto fora dela conseguimos construir uma única reta paralela à reta dada.*” (LB 3, Episódio 5, 2019). O PP ao mencionar sobre o Postulado das Paralelas fez com que a participante LB 3 expressasse corretamente o conceito de paralelismo na Geometria Euclidiana, mostrando que a participante pode ter memorizado o conceito de paralelismo, como algo mecânico, sem ter realizado reflexões aprofundadas sobre a aplicação do mesmo.

A discussão pertinente às conseqüências do Postulado das Paralelas trouxeram reflexões ao que tange à produção de conhecimentos geométricos, uma vez que colocou em evidência a importância da essência do conhecimento para a construção de novos conceitos. Nesse contexto, compreendemos que o estudo de modelos geométricos diferentes do Euclidiano possibilitou que os licenciandos atribuíssem significados diferentes para a determinação de paralelismo entre retas na Geometria Euclidiana, levando-os a internalizarem que a essência desse conceito está na compreensão do Postulado das Paralelas e não nas conseqüências produzidas pelo mesmo.

Nessa perspectiva, a participante LO 4 propõe a existência de paralelismo a partir da compreensão do Postulado das Paralelas e ao considerar o tipo de superfície em estudo sugere a existência de infinitas retas paralelas à reta dada.

“A gente acha que existe paralelismo e acrescenta que na Geometria plana é uma única reta e na Geometria hiperbólica a gente abre para mais retas. Porque a gente conseguiu definir ali pelo desenho duas retas, mas pode existir mais.” (LO 4, Episódio 5, 2019).

Nos dizeres de LO 4, observamos que os integrantes do grupo romperam com a ideia de um único modelo geométrico, pois internalizaram o conceito de paralelismo em uma superfície plana e ao analisarem a superfície hiperbólica representada pela corneta atribuíram novos significados para esse conceito, tornando logicamente consistente a ideia de paralelismo na

superfície hiperbólica ao conjecturarem que “*dado uma geodésica r e um ponto P , não pertencente a r , existem pelo menos duas geodésicas distintas paralelas a r passando por P .*”

Nesse contexto, entendemos que o movimento realizado pelos licenciandos durante o Episódio 5 foi captado a partir das categorias de análise sendo elas “ruptura” e “conflito”, na qual o conceito relacionado a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico foi concebido em meio a “ruptura” com a ideia de um modelo geométrico único, conduzindo os participantes a afirmarem que a soma dos ângulos internos do triângulo é menor que um ângulo raso. Já o “conflito” se manifestou a partir da análise entre a utilização de uma das consequências do Postulado das Paralelas na Geometria Euclidiana, o conceito de equidistância entre retas, como caminho para determinação de paralelismo na superfície plana e a insuficiência desse conceito para validar o paralelismo na superfície hiperbólica.

7.2.2.6 A produção de significados dos participantes: considerações finais

De modo geral, ficou tangível que o ambiente de aprendizagem construído por meio das AE promoveu momentos durante o processo formativo em que os licenciandos puderam explicitar suas dúvidas e os significados que dão aos conteúdos geométricos euclidianos e não euclidianos estudados em cada encontro. Assim, compreendemos que os licenciandos internalizaram os conceitos geométricos explorados, uma vez que os instrumentos psicológicos utilizados nas AE proporcionaram ações mediadoras que potencializaram modos de pensar e agir na formação de conceitos geométricos em diferentes superfícies, tais como: o comportamento da trajetória de retas (geodésicas), construção de triângulos, área de triângulos, retas coincidentes e retas paralelas. E, a partir da análise desses conceitos, terem condições de diferenciar e identificar o tipo de superfície que está em estudo, seja ela, plana, esférica ou hiperbólica.

Nos alinhavos de ideias de Libâneo (2004, p. 15), encontra-se a seguinte construção:

A interação sujeito–objeto implica o uso de mediações simbólicas (sistemas, esquemas, mapas, modelos, isto é, signos, em sentido amplo) encontradas na cultura e na ciência. A reconstrução e reestruturação do objeto de estudo constituem o processo de internalização, a partir do qual se reestrutura o próprio modo de pensar dos alunos, assegurando, com isso, seu desenvolvimento.

Acreditamos que a compreensão de diferentes modelos geométricos pode contribuir para a produção de novos significados sobre o conhecimento geométrico, podendo ser um aspecto que ressignifique a prática do futuro professor de Matemática ao estabelecer relações com os avanços tecnológicos, no que diz respeito a compreensão do uso do GPS e do

lançamento de foguetes, por exemplo, bem como com relação às produções artísticas como as obras produzidas por Escher.

Algumas das aplicações envolvendo conhecimentos acerca de diferentes modelos geométricos foram pontuadas pelos participantes como algo relevante e necessário, como podemos observar nos dizeres dos licenciandos LD 2 e LO 3.

“O que me deixou mais intrigado, que apesar de eu não ter tido contato antes com os conceitos, mas eles estão presentes em nosso cotidiano, até mais do que a plana. Logo, percebe-se que vivemos uma vida estudantil somente voltada para a geometria plana, e na nossa vida utilizamos mais das outras para o nosso desenvolvimento, tanto nos meios de locomoção quanto nas construções e objetos que construímos, além de que até onde vivemos não é totalmente plano.” (LD 2, RI 6, 2019).

“Lembro que o professor comentou da arte de Escher, aonde ele usa as geodésicas da superfície hiperbólica, portanto fui procurar; sabia quem era mas não sabia que ele utilizava tais conceitos, ao meu ver era apenas com o uso de compassos ou no máximo com círculos áureos utilizados na construção de logomarcas ou círculos concêntricos, algo que me surpreendeu e não tive oportunidade de compartilhar.” (LO 3, RI 6, 2019).

Encerramos essa seção, compreendendo que as categorias de análises nos permitiram acessar os diversos significados que os licenciandos produziram para os conteúdos geométricos estudados, dando condições para negociarmos novos significados em uma perspectiva Histórico-Cultural na qual a construção do conhecimento geométrico se manifestou como uma produção humana, resultado de uma ação compartilhada entre licenciando/licenciando e licenciando/professor-pesquisador.

Assim, entendemos que a apropriação de conceitos pelos participantes envolvidos não foi uma mera experiência direta com os modelos geométricos não Euclidianos, mas o desenvolvimento de um processo que ressignificou o modo como licenciandos anteriormente se relacionavam com o espaço em que vivem, atribuindo significados diferentes para os conceitos geométricos ao compreenderem que o estudo de um único modelo geométrico (o euclidiano) não é capaz de representar a realidade em sua totalidade, conduzindo-os a investigarem os modelos geométricos não Euclidianos como um conhecimento complementar e necessário para o desenvolvimento humano.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As experiências vivenciadas como professor formador de futuros professores de Matemática se apresentam num quadro que nos direcionaram aos motivos que subsidiaram o desenvolvimento desta pesquisa de doutorado. Uma das alavancas para impulso do estudo é aquela que move os modos de fazer e saber o conhecimento geométrico nos cursos de Licenciatura em Matemática. Assim, os motivos que nos impulsionaram a realizar este estudo transcendem a mera incorporação de conteúdos geométricos ao currículo dos cursos de Licenciatura em Matemática ou apenas atender ao desejo pessoal de apropriação de um determinado conjunto de saberes, mas sim, criar momentos de reflexão que revitalize a própria prática docente a partir de uma base de conhecimentos teóricos e práticos apropriados para o estudo de diferentes modelos geométricos na formação inicial de professores de Matemática.

Durante o período de estudos que permitiram a materialização da pesquisa apresentada neste texto, buscamos referenciais teóricos e metodológicos que justificassem a relevância de um trabalho pedagógico envolvendo o estudo de conceitos geométricos não euclidianos na formação inicial de professores de Matemática. Nessa perspectiva, acreditamos que a pesquisa avançou em seu propósito ao responder o seguinte questionamento: De quais formas os licenciandos do curso de Matemática compreendem e podem vir a compreender as Geometrias não Euclidianas?

O primeiro passo frente ao problema de pesquisa foi realizar um mapeamento dos cursos de Licenciatura em Matemática no país que ofertam disciplinas específicas para o ensino de GNE. Para tal, analisamos as Propostas Curriculares e os Projetos Políticos Pedagógicos de 57 instituições públicas de Ensino Superior, que possuem curso de Licenciatura em Matemática no formato presencial e que são reconhecidos pela Capes. O mapeamento foi realizado a partir da plataforma digital do Ministério da Educação no portal do e-MEC.

O mapeamento das IES indicou que apenas 15,32% dos cursos de Licenciatura em Matemática apresentam em suas Propostas Curriculares ou em seus Projetos Políticos Pedagógicos disciplinas que abordam o estudo de GNE na formação docente. O índice apresentado sugere que a inserção das GNE no currículo dos cursos de Licenciatura em Matemática não é uma vertente consolidada na formação de professores, e, por esse motivo, há pouco envolvimento do futuro professor com essas Geometrias, contribuindo para que o licenciando construa sua relação com o espaço a partir de um único modelo geométrico, podendo fortalecer somente o ensino da Geometria Euclidiana na Educação Básica.

Desse modo, concordamos com Cavichiolo (2011, p. 130) quando sustenta que há razões relevantes para a inclusão das GNE na formação inicial de professores, ao destacar que o estudo desse conhecimento pode “[...] ampliar a visão de Matemática dos licenciandos e a compreensão do fazer matemático como um processo que não se finda, que é passível de mudanças e, principalmente, que é produto da criação humana”.

O segundo passo realizado nesta pesquisa se constituiu pela busca de indícios da inserção de conteúdos relacionados às GNE nas orientações curriculares para o ensino de Matemática na Educação Básica. Logo, foram investigados os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental – PCN (BRASIL, 1998), os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000), as Orientações Educacionais Complementares dispostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCN+ (BRASIL, 2002), as Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017), por acreditarmos que os professores seguem as indicações curriculares presentes nesses documentos.

Em nossa análise, constatamos que tanto o PCN (BRASIL, 1998) quanto o PCN + (BRASIL, 2002) sugerem que os estudantes, ao vivenciarem situações didáticas envolvendo diferentes modelos geométricos, poderão compreender o processo de construção do conhecimento matemático, além de permitir uma articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos acerca do espaço em que vivem e objetos geométricos que se relacionam. Destacamos também, que dentre os 26 estados analisados, apenas as DCE do estado do Ceará, Espírito Santo, Rondônia, Santa Catarina, São Paulo e Paraná mencionam a existência de modelos geométricos diferentes do euclidiano.

As DCE do estado do Espírito Santo (2009), São Paulo (2011) e Paraná (2008, 2018) recomendam a inserção das GNE no processo educativo a partir de orientações e direcionamentos para sua abordagem. Essa perspectiva se difere por encontrar no estudo do objeto geométrico à necessidade de noções de conceitos geométricos não euclidianos como um meio de apropriação de suas propriedades e formas, deslocando a percepção do objeto geométrico das aplicações, no âmbito euclidiano, para aplicações em outros modelos geométricos.

Contudo, aproximadamente 23% dos estados brasileiros mencionam as GNE em suas propostas curriculares, dos quais, quase 50% recomendam e direcionam o ensino de GNE na Educação Básica. A partir desse cenário, consideramos o RCPR (2018) um instrumento importante para a inserção das GNE na educação básica, podendo ser um material de apoio para a construção dos currículos de outros estados e, conseqüentemente, promover reflexões acerca

da importância dos conhecimentos geométricos não euclidianos para o processo de ensino e aprendizagem.

Ressaltamos que a não menção sobre a existência de modelos geométricos diferentes do Euclidiano, a BNCC (2017) poderá consagrar um ensino deficitário e assim forjar-se em um obstáculo para práticas de ensino que favoreçam a exploração de conceitos geométricos contemporâneos, criando uma lacuna entre o conhecimento geométrico e sua aplicação em outras áreas do saber, tais como: na arquitetura, nas ciências, na tecnologia, nas artes, etc.

Em nossa compreensão, a inserção das GNE nos diferentes níveis de escolarização pode motivar a produção de práticas de ensino diferenciadas que venham potencializar as relações entre os sujeitos e os objetos geométricos em sua volta, conduzindo-os a outros modos de pensar e agir durante a construção do conhecimento geométrico.

Concluimos que ações desenvolvidas nesses dois primeiros passos foram importantes para o desenvolvimento da pesquisa, uma vez que foram encontrados indícios de como as políticas públicas sugerem e se posicionam em relação à inserção das GNE nos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática e da Educação Básica.

O último passo pensado, em relação ao problema de pesquisa, foi se reconfigurando a medida que estreitamos os laços com as pesquisas desenvolvidas acerca do ensino das GNE tanto na Educação Básica como nos cursos de Licenciatura em Matemática. Esse envolvimento nos conduziu a considerar que a simples inserção das GNE nos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática ou a mera experiência direta com os modelos geométricos não euclidianos, podem não serem suficientes para criar nos licenciandos a motivação necessária para a apropriação dos conceitos geométricos em estudo. Tal compreensão nos levou a refletir sobre a importância da organização do ensino para a construção de conceitos geométricos relacionados às GNE.

Para isso, retomamos o objetivo principal de nossa pesquisa que foi analisar o contexto do ensino e do estudo das Geometrias não Euclidianas no Brasil e a produção de significados de futuros professores de Matemática sobre esse tema. Assim, recorremos a THC como uma teoria do conhecimento capaz de direcionar nossas análises para a apropriação de conhecimentos científicos pelos participantes da pesquisa, uma vez que, coube ao professor-pesquisador ser principal seareiro na organização do ensino tendo em vista que os participantes se apropriassem dos conhecimentos geométricos Euclidianos e não Euclidianos produzidos historicamente pela humanidade (VYGOTSKY, 1987).

Logo, assumimos como ideia central da THC que o desenvolvimento das funções psíquicas superiores se dá na interação social e por intermédio do uso de instrumentos e signos.

Nesse contexto, o experimento didático proposto nessa pesquisa foi concebido na perspectiva Histórico-Cultural e nos pressupostos teóricos da Teoria da Atividade, em que o planejamento das estratégias foi desenvolvido considerando mediações pedagógicas em que sua orientação-execução-controle subsidiasse a formação de conceitos sobre diferentes modelos geométricos.

Nessa perspectiva, recorreremos ao princípio histórico-cultural da atividade como mecanismo teórico-metodológico para problematizar a prática pedagógica e, conseqüentemente, atribuir significados à atividade-ensino, tendo como unidade de investigação inicial a necessidade de organizar o trabalho pedagógico de “[...] maneira que os sujeitos interajam entre si e com o objeto de conhecimento” (MOURA, 2002, p. 159).

Moura (2002) propõe a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) como um caminho teórico-metodológico para a práxis pedagógica que visa o processo de aproximação constante dos sujeitos do objeto de conhecimento em estudo. Assim, utilizamos a AOE como um contexto para a negociação de significados sobre diferentes modelos geométricos, na qual se constituiu em um processo de mediação, ao configurar-se como um modo de realização de ensino para o professor-pesquisador e de aprendizagem para os sujeitos participantes da pesquisa que, ao interagirem neste espaço de aprendizagem, modificaram a forma como se relacionam com o espaço em que vivem, atribuindo assim, novos significados para os conceitos geométricos a partir da compreensão do tipo de superfície que está em estudo.

O movimento dos licenciandos, quanto a produção de significados acerca dos conceitos geométricos estudados nos encontros formativos, foram detalhados de episódio a episódio no corpo deste trabalho e analisados a partir das seguintes categorias: Conflito - da validade lógica à validade empírica; e Ruptura - do espaço euclidiano para outros espaços. A produção de significados dos participantes foi captada em nossa pesquisa por meio de um processo em espiral segundo a qual a ordem das categorias não se amarra à maneira fixa e pré-definida, onde a “ruptura” pode conduzir ao surgimento de novos “conflitos” e vice-versa.

De modo, no geral, compreendemos que as manifestações presentes nos episódios indicam que os sujeitos participantes das pesquisas desconhecem modelos geométricos diferentes do euclidiano, reconhecendo a Geometria Euclidiana como a única maneira para descrever e interpretar o espaço físico em que vivem. Além disso, constatamos que os licenciandos, ao aceitarem a existência de outros modelos geométricos, modificam a maneira como se relacionam com o espaço em que vivem e, assim, desenvolvem maior autonomia no processo de construção dos conceitos geométricos em estudo.

O primeiro episódio, “O que diz Euclides?” evidenciou que os participantes produziram significados acerca do conceito de semirreta, reta e geodésica, a partir dos conflitos gerados

entre a validade lógica do sistema euclidiano internalizado pelos licenciandos e a validade empírica vivenciada pelos mesmos ao verificarem que os conceitos de semirreta, reta e geodésica estão atrelados ao tipo de superfície em estudo.

O segundo e o terceiro episódio fazem parte da mesma Atividade de Ensino e foram denominados “Questionando Euclides?”. Nesses episódios foram trabalhados os conceitos: deslocamento, retas paralelas e retas coincidentes. No segundo episódio os participantes, ao relacionarem o espaço em que vivem com uma superfície esférica, passam a articular os conhecimentos geométricos ao tipo de superfície em estudo e, conseqüentemente, atribuem significados diferenciados para o conceito de deslocamento a partir da sua aplicação na superfície esférica. No terceiro, ao estudarem o conceito de paralelismo na superfície esférica, os estudantes romperam com a consistência lógica do modelo geométrico euclidiano quando verificaram que não existe paralelismo entre geodésicas na Geometria Esférica. Assim, passaram a atribuir novos significados para o conceito de paralelismo na Geometria Euclidiana ao compreenderem que retas coincidentes não podem ser consideradas retas paralelas.

No quarto episódio, “A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180° ?”, compreendemos que o movimento realizado pelos participantes foi caracterizado pela ruptura dos mesmos com a ideia de um único modelo geométrico. Pois, ao internalizarem que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° , os estudantes tiveram a condição de afirmar que o modelo geométrico mais adequado para representar o espaço físico em que vive o personagem Anselmo é constituído pela Geometria Esférica. Além disso, os participantes ao analisar a área e os ângulos internos de um triângulo esférico passaram a atribuir novos significados para a relação entre eles, ao constatarem que a medida que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico aumenta sua área também aumenta, conduzindo-os a concluírem que não há semelhança de triângulos na Geometria Esférica.

No quinto e último episódio, denominado “Outros Espaços?”, o movimento realizado pelos participantes foi captado pelas categorias – “ruptura” e “conflito”. O conceito relacionado a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico foi concebido em meio a “ruptura” com a ideia de um modelo geométrico único, conduzindo os participantes a afirmarem que a soma dos ângulos internos do triângulo é menor que um ângulo raso. Já o “conflito” se manifestou a partir da análise entre a utilização de uma das conseqüências do Postulado das Paralelas na Geometria Euclidiana - o conceito de equidistância entre retas paralelas e a insuficiência desse conceito para validar o conceito de paralelismo na superfície hiperbólica.

Nesse contexto, compreendemos que as AE criadas por nós e os materiais didáticos utilizados foram instrumentos mediadores da aprendizagem, tornando-os pertinentes para a

produção de significados acerca do conhecimento geométrico euclidiano e não euclidiano, uma vez que as situações de aprendizagem vivenciadas foram desenvolvidas na perspectiva da AOE, nos permitindo atuar na ZDP's dos futuros professores de Matemática e, assim, potencializar ações que não conseguiam realizar sozinhos.

Por tudo que foi exposto, compreendemos que a intervenção pedagógica realizada com os licenciandos foi constituída a partir dos princípios teórico-metodológicos da AOE, como um modo de organização do ensino, em que o seu principal conteúdo foi estudar conceitos geométricos não euclidianos. O objetivo foi aferir a constituição do pensamento teórico dos licenciandos no movimento de apropriação de conceitos geométricos (euclidianos e não euclidianos) a partir da verificação empírica dos mesmos em diferentes espaços geométricos.

Assim, a tese que defendemos é que o estudo de diferentes modelos geométricos na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino promove o desenvolvimento do pensamento teórico e prático do futuro professor de Matemática no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, em particular, das Geometrias não Euclidianas.

A partir desta pesquisa, recomendamos como objeto de interesse alguns desdobramentos a serem investigados em pesquisas futuras, no Ensino Superior com pesquisas acerca de reformulação da proposta curricular do curso de Licenciatura em Matemática para que seja ofertado o estudo de Geometrias não Euclidianas como conteúdo específico e a construção de um curso de formação sobre diferentes modelos geométricos para docentes do curso de Licenciatura em Matemática; e na Educação Básica com a construção de proposta de intervenção envolvendo conhecimentos geométricos não euclidianos na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino.

Por fim, acreditamos que, dentre as contribuições desta investigação, está a reflexão acerca da formação de futuros professores de Matemática no que diz respeito à apropriação de conhecimentos geométricos não euclidianos como uma possibilidade para modificar o modo como os professores entendem e realizam a prática de ensino de Geometria, criando condições para transformá-la e, conseqüentemente, atribuindo significados para o estudo de diferentes modelos geométricos na formação inicial do professor de Matemática.

REFERÊNCIAS

- ABREU, G. O papel mediador da cultura na aprendizagem da matemática: a perspectiva de Vygotsky. **Educação. Sociedade & Culturas**, nº 13, p. 105-117, 2000.
- ANDRADE, M. L. T. D. **Geometria esférica**: uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no ensino básico. 2011. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2011.
- ANTUNES, Marcelo Carvalho. **Uma possível inserção das Geometrias não-Euclidianas no Ensino Médio**. 54 f. Monografia (TTC) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: 2009.
- ALMEIDA, M. E. B. de. **Informática e Formação de professores**. Brasília: Ministério da Educação, 2000.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.
- AMOROSO COSTA, M. **As ideias fundamentais da Matemática**. Rio de Janeiro: Pimenta de Mello, 1929.
- ARAÚJO, Elaine Sampaio. **Da Formação e do Formar-se: a atividade de aprendizagem docente em uma escola pública**. 2003. 173 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- ASBAHR, F. S. F. **“Por que aprender isso, professora?” Sentido pessoal e atividade de estudo na Psicologia Histórico-Cultural**. 2011. 220 f. Tese (Doutorado em Psicologia. Área de concentração: Psicologia Escolar e do Desenvolvimento Humano) – Instituto de Psicologia da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.
- _____. Sentido pessoal, significado social e atividade de estudo: uma revisão teórica. **Revista Quadrimestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional**, São Paulo, v. 18, n. 2, ago. 2014.
- ASSIS, E. S. **A Geometria Hiperbólica nos currículos escolares e universitários**. Educação Matemática em Pesquisa, São Paulo, v.19, n. 3, p. 393-413, 2017.
- BALADÃO, P. O. **Geometrias não-Euclidianas**: o desenvolvimento da Geometria Hiperbólica. Disponível em: http://www2.mat.ufrgs.br/~mat01074/20072/paula/Geometrias_ao_euclidianas.pdf. Acesso em: 07 nov. 2017.
- BACHELARD, G. **A filosofia do não; O novo espírito científico; A poética do espaço**. São Paulo: Abril Cultural, 1978.
- BARBOSA, G. Hermenêutica e Geometria Não Euclidiana: Imre Toth e os instrumentos específicos de uma filologia matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, UFMS, v. 8, 2015.

BARBOSA, R. M. **Descobrimos a geometria fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Tradução Elza Gomide, Helena Castro. 2 ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BOGDAN, R.C; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto Editora, 1994.

BONETE, I. P. **As Geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura: algumas experiências**. 2000. 219f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas/Universidade Estadual do Centro-Oeste, Campinas/Guarapuava, 2000.

BRAIDA, F. C. **Interferência do enquadramento de trabalho nas representações sobre o ensino de leitura no contexto da formação inicial docente sob o entendimento da Teoria Holística da Atividade**. 2012, 226 f. Tese (Doutorado em Letras. Área de Concentração em Estudos Linguísticos) - Universidade Federal de Santa Maria, UFSM, 2012.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. **Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/04/BNCC_19mar2018_versaofinal.pdf>. Acesso em: 21 maio. 2019.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E.; DA SILVA, S. de C. R. A utilização de documentários enquanto organizadores prévios no ensino de Geometria não Euclidiana em sala de aula. **Acta Scientiarum**. Education (*online*), v. 38, p. 43-49, 2016.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E. Aprendizagem de Conceitos de Geometria Esférica e Hiperbólica no Ensino Médio sob a Perspectiva da Teoria da Aprendizagem Significativa Usando uma Sequência Didática. **Aprendizagem Significativa em Revista**. v3, p. 1-21, 2013.

BRUM, W. P.; SILVA, S. C. R. A História Da Matemática e os Conhecimentos Prévios dos Professores como Subsídios para o Planejamento de um Curso Sobre Geometria. **Itinerarius Reflectionis**, Jataí – GO, v. 10, n. 2, 2014.

_____. Livros didáticos de matemática: análise dos recursos didáticos auxiliares para a aprendizagem de conceitos elementares de geometria não euclidiana. **REFCale**. v. 2, n. 3, 2014.

_____. **Abordagem de conceitos de geometria esférica e hiperbólica no ensino médio usando uma sequência didática**. 2013. 171 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Regional de Blumenau, FURB, 2013.

CABARITI, E. A geometria hiperbólica na formação docente: possibilidades de uma proposta com o auxílio do cabri-géomètre. **III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, São Paulo, 2006.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. O Processo de Inserção das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Escola Paranaense: a visão dos professores participantes. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 42-63, abr. 2014.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa, 1951.

CASTORINA, J. A. O Debate Piaget-Vigotsky: a busca de um critério para uma avaliação. In: CASTORINA, J. A. et al. Piaget – Vigotsky: novas contribuições para o debate. São Paulo: Ática, 1996.

CEDRO, W. L.; MORAES, S. P. G.; ROSA, J. E. A atividade de ensino e o desenvolvimento do pensamento teórico em Matemática. **Ciência & Educação**, v. 16, n. 2, p. 427-445, 2010.

CHAIKLIN, S. A zona de desenvolvimento próximo na análise de Vigotski sobre aprendizagem e ensino. **Psicologia em Estudo**, Maringá, v. 16, n. 4, p. 659-675, out./dez. 2011.

COSTAS, F. A. T.; FERREIRA, L. S. Sentido, significado e mediação em Vygotsky: Implicações para a constituição do processo de leitura. **Revista Iberoamericana de Educación**, n. 55, p. 205-223, 2011.

COSTA, L. S.; PERES, T. F. C. A Teoria Histórico-Cultural e o ensino aprendizagem em Matemática. In: **A formação de professores: uma proposta de pesquisa a partir da reflexão sobre a prática docente**. II Congresso de Educação – UEG/UnU Iporá, 2012.

CURITIBA (Estado). Secretaria Municipal de Educação. **Currículo básico: uma contribuição para a escola pública brasileira**. Imprensa Oficial do Estado Paraná, 1988.

DANIELS, H. **Vygotsky e a Pedagogia**. São Paulo: Loyola, 2003.

ELHAMMOUMI, M. **O paradigma de pesquisa histórico-cultural de Vygotsky: a luta por uma nova psicologia**. Teoria histórico-cultural: questões fundamentais para a educação escolar. Organizadores: Maria Valéria Barbosa; Stela Miller; Suely Amaral Mello. – Marília: Oficina Universitária; São Paulo: Cultura Acadêmica, p. 25-36, 2016.

ENGSTRÖM, Y.; MIETTINEN, R.; PUNAMÄKI, R. L. (Eds.). **Perspectives on activity theory**. New York: Cambridge University Press, 1999.

ENGSTRÖM, Y. **Learning by expanding: an activity-theoretical approach to developmental research**. Helsinki: Orienta-Konsultit, 1987.

EUCLIDES. **Elementos de Geometria**. Versão latina de Frederico Commandino. (Biblioteca do Clube de Engenharia da Bahia). São Paulo: Edições Cultura, 1944.

FARIA, E. M. **A contribuição da teoria histórico-cultural de Vygotsky para o ensino e a aprendizagem de Algoritmo**. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2013.

FEITOSA, R. A.; BODIÃO, I. S. As teorias sobre o “professor reflexivo” e suas possibilidades para a formação docente na área de Ciências da Natureza. **Revista entreideias: educação, cultura e sociedade**, Salvador, v. 4, n. 1, p. 185-199, jan./jun. 2015.

FERREIRA, A. A. **A produção de significados matemáticos em um contexto de aulas exploratório-investigativas**. 2012. 250 f. Tese (Doutorado em Educação: Conhecimento e Inclusão Social) - Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG/FaE, 2012.

FERREIRA, L.; BARROS, R. M. O. Relações entre os objetos ostensivos e objetos não ostensivos durante o ensino da geometria do taxista com o software geogebra. **JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 6, n. 2, 2013.

FICHTNER, B. Introdução na abordagem histórico-cultural de Vygotsky e seus colaboradores. In: **Minicurso Introdução na abordagem histórico-cultural de Vygotsky e seus colaboradores**. Goiânia, Programa de Doutorado em Educação, PUC-Goiás, 2010.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 17. ed. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1987.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting mathematics education: China Lectures**. London: Kluwer Academic Publisher, 1973.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GARUTI, S. A. **Interações criança-criança e criança-adulto: negociações na construção da linguagem escrita**. 1995, 152 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia da Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1995.

GODOI, W. S. Problema das Ideias de Natureza Simples para a Geometria Não Euclidiana e para a Física Não newtoniana a Partir da Análise de Gaston Bachelard. Griot – **Revista de Filosofia**, Amargosa, Bahia, v.11, n.1, jun. 2015.

GONZÁLEZ, A. G. G.; MELLO, M. A. Vigotsky e a teoria histórico-cultural: bases conceituais marxistas. **Cadernos da Pedagogia**. São Carlos, Ano 7, v. 7, n. 14, p. 19-33, jan./jun. 2014.

GRYMUZA, A. M. G.; RÊGO, R. G. Teoria da Atividade: uma possibilidade no ensino de Matemática. **Revista Temas em Educação**, João Pessoa, v. 23, n. 2, p. 117-138, jul./dez. 2014.

JAPIASSÚ, H. **Introdução ao pensamento epistemológico**. 4. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KOZULIN, A. O conceito de atividade na psicologia soviética. In: DANIELS, H. **Vygotsky: uma introdução**. São Paulo: Loyola, p. 111-137, 2004.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática**. 2009. 294p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009.

_____. Educação Geométrica: reflexões sobre ensino e aprendizagem em geometria. **Educação Matemática em Revista**, v.1, n 13, p. 9-16, 2012.

_____. Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 647-670, 2013.

_____. Elipse, parábola e hipérbole em uma geometria que não é euclidiana. **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v. 9, n. 2, p. 189-209, 2014.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, conciencia y personalidad**. Buenos Aires: Ediciones Ciencias Del Hombre, 1978.

_____. **O Desenvolvimento do psiquismo**. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2004.

LEONTIEV, A. Et al. **Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem**. São Paulo: Icone, 1988.

LOPES, A. R. L. V. (2009). **Aprendizagem da docência em matemática: o Clube de Matemática como espaço de formação inicial de professores**. Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2009.

LOPES, A. R. L. V.; Et al.. Professoras que ensinam matemática nos anos iniciais e sua formação. **Linhas Críticas**, Brasília, v. 18, n. 35, 2012. Disponível em: <http://periodicos.unb.br/index.php/linhascriticas/article/view/6826/5496>. Acesso em: 14 abr. 2018.

LOPES, A. R. L. V.; VAZ, H. G. B. O Movimento de Formação Docente no Ensino de Geometria nos Anos Iniciais. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 39, n. 4, p. 1003-1025, 2014.

LOVIS, K. A. FRANCO, V. S. BARROS, R. M. O. Dificuldades e obstáculos apresentados por um grupo de professores de Matemática no estudo da geometria hiperbólica. **Zetetiké – FE/Unicamp**, v. 22, n. 42, 2014.

_____. As Concepções de Geometrias não Euclidianas de um Grupo de Professores de Matemática da Educação Básica. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 369-388, 2015.

LUCCI, M. A. A proposta de Vygotsky: a psicologia sócio histórica. **Revista de currículum y formación del profesorado**, 2006.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MARCO, F. F. Atividade orientadora de ensino de matemática na formação inicial de professores. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 317-336, 2013.

MARTINS, L. C. B. **Implicações da organização da atividade didática com uso de tecnologias digitais na formação de conceitos em uma proposta de ensino híbrido**. 2016. 317 f. Tese (Doutorado em Psicologia) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

MARTINS, L. M. A internalização de signos como intermediação entre a psicologia histórico-cultural e a pedagogia histórico-crítica. In: BARBOSA, Maria Valéria; MILLER, Stela; MELLO, Suely Amaral (org). **Teoria histórico-cultural: questões fundamentais para a educação escolar**. Marília: Oficina Universitária. São Paulo: Cultura Acadêmica, p. 101-121, 2016.

MARINCEK, V.; CAVALCANTI, Z. **Aprender Matemática resolvendo Problemas**. Porto Alegre, Artmed Editora, 2001.

MOLON, S. I. **A questão da subjetividade e da constituição do sujeito nas reflexões de Vygotsky**, 1995. 110 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia: Psicologia Social) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1995.

MORETTI, V. D. **Professores de matemática em atividade de ensino. Uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente**. 2007. 208 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

_____. O problema lógico-histórico, aprendizagem conceitual e formação de professores de matemática. **Poiésis**, Tubarão, número especial, p. 29-44, 2014.

MOURA, M. O. **Controle da variação de quantidades: Atividades de ensino**. São Paulo: FEUSP, Textos para o Ensino das Ciências, n. 7, 1996.

_____. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. (Orgs.). **Ensinar a ensinar**. São Paulo: Thomson Learning, 2001.

_____. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. (Org.). **Ensinar a ensinar: didática para a escola fundamental e média**. São Paulo: Thomson Learning, 2002.

MOURA, M. O.; Et al. A atividade orientadora de ensino como unidade entre o ensino e a aprendizagem. In: M. O. Moura (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília, DF: Liber, 2010.

MOURA, O. M.; SFORNI, M. S. F.; ARAÚJO, E. S. Objetivação e apropriação de conhecimentos na atividade orientadora de ensino. **Revista Teoria e Prática da Educação**, v. 14, n. 1, p. 39-50, jan./abr. 2011.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. Campinas: Papirus, 1997.

MUNDIM, R. P. A Lógica Formal – princípios elementares. **Economia & gestão**, Belo Horizonte, v. 2, n. 3, p. 135-145, 2002.

NASCIMENTO, A. K. S. **Geometrias não-euclidianas como anomalias**: implicações para o ensino de geometria e medidas. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2013.

NASCIMENTO, C. P. **A organização do ensino e a formação do pensamento estético-artístico na teoria histórico-cultural**. 2010. 250 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação – USP, São Paulo, 2010.

NETO, J. D.; NOGUEIRA, C. M. I.; FRANCO, V. S. Geometrias na Segunda Fase do Ensino Fundamental: um estudo apoiado na epistemologia genética. **Zetetiké** – FE/Unicamp – v. 21, n. 40, jul./dez. 2013.

NUNES, C. B. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas**: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. 430f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

OLIVEIRA, P. R. S. **Interação dialética entre a metodologia de ensino e a aprendizagem**, 1996. 182 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Santa Catarina, 1996.

ONUCHIC, L.R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções & Perspectiva. São Paulo, SP: Editora UNESP, 1999.

PARANÁ (Estado). Superintendência de Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**. Curitiba, 2008.

PEREIRA, Y. C. C. **Concepção da relação aprendizagem e desenvolvimento subjacente a prática dos professores em ensino de ciências nas séries iniciais do 1º grau (1º a 4º séries)**, 1996. 220 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Santa Catarina, 1996.

PETIT, J. P. **As Aventuras de Anselmo Curioso – Os Mistérios da Geometria**. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1982.

PÉREZ, L.C.; CABRERA, C.R. **Curso especial Geometria y resolucion de problemas**. *In*: XIV RELME, Panamá, 2000.

PIAGET, J.W.F.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

POLYA, G. On Learning, Teaching and Learning Teaching. Trad. de Mosquito et al. *In* POLYA, G. **Mathematical Discovery**, cap XIV, 1962. Disponível em:

<http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/polya/tradu%e7%e3o.mht>. Acesso em: 14 abr. 2018.

PONTE, J. P. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

POZEBON, S.; LOPES, A. R. L. V.; FRAGA, L. P.; HUNDERTMARCK, J. A formação de futuros professores dos anos iniciais do ensino fundamental: uma discussão a partir de uma atividade de ensino de geometria. **Experiências em Ensino de Ciências**, v.8, n. 3, 2013.

POZO, J. I. **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Artmed, Porto Alegre, 1998.

PRESTES, I. C. R. **Geometria esférica: uma conexão com a geografia**. 2006. 201 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo: 2006.

REGO, T. C. **Vygotsky**: uma perspectiva histórico-cultural da Educação. Petrópolis: Vozes, 1995.

ROSA, J. E.; Et al. As Particularidades do Pensamento Empírico e do Pensamento Teórico na Organização do Ensino. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo (org.). **A Atividade Pedagógica na Teoria Histórico-Cultural**. Brasília: Líber, p. 67-80, 2010.

RUBTSOV, V. A atividade de aprendizado e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares. In: GARNIER, C. *et al.* (orgs.). **Após Vygotsky e Piaget**: perspectivas social e construtivista escolas russa e ocidental. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

SANTOS, T. S. **A inclusão das geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica**. 2009. 138 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

_____. **Atividade Orientadora de Ensino de geometrias na perspectiva lógico-histórica**: unidade entre ensino e aprendizagem na formação inicial de professores de matemática. 2016. 195f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, São Carlos, 2016.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. **Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas**. Proposta curricular para o ensino de Matemático 1.º grau. 4. ed. São Paulo: SE/CENP, 1991.

SARMENTO, D. F. **A teoria histórico-cultural de L. S. Vygotsky**: uma análise da produção acadêmica e científica no período de 1986 a 2001. 2006. 179 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

SAVIANI, D. **Educação: do senso comum à consciência filosófica**. 13. ed. Campinas: Autores Associados, 2000.

SFORNI, M. S. F. **Aprendizagem conceitual e organização do ensino:** contribuições da Teoria da Atividade. GT: Educação Fundamental, n. 13. Texto disponível em <http://26reuniao.anped.org.br/trabalhos/mmunarimantonio.rtf>.. Acesso em: 27 mar. 2018.

SONZA, A. P.; LEIVAS, J. C. P. Explorando a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio de uma oficina pedagógica. **Revista Thema**, Pelotas (RS), v. 15, n. 4, p. 1549-1561, 2018.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 17. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

TRACTENBERG, L. E. F. **Colaboração docente e ensino colaborativo na educação superior em ciências, matemática e saúde:** contexto, fundamentos e revisão sistemática. Tese (Doutorado em Tecnologia Educacional para a Saúde) - Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, 2011.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York, 4 ed., Logman, 2001.

VAZ, H. G. B. **A Atividade Orientadora de Ensino como organizadora do trabalho docente em matemática:** a experiência do Clube de Matemática na formação de professores dos anos iniciais. 2013. 153 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, Rio Grande do Sul-RS, 2013.

VEIGA, I. P. A. Projeto Político Pedagógico: Continuidade ou Transgressão para Acertar? *In*: CASTANHO, S.; CASTANHO, M. E. L.M. (orgs.). **O que há de novo na educação superior:** Do projeto pedagógico à prática transformadora – Campinas, SP: Papirus, 2000.

VIGOTSKY, L.S. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo, Martins Fontes, 1987.

_____. **El desarrollo de los procesos psicológicos superiores**. México: Crítica Grijalbo.1988.

_____. Pensamiento y palabra. *In*: **Obras escogidas**. v. 2. Madrid, España: Visor, 1993.

_____. Problemas de Psicología General. **Obras Escogidas**. Tomo II. Madrid: Visor Distribuciones, 1993.

_____. **A Construção do Pensamento e da Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

_____. **A Formação Social da Mente:** Desenvolvimento da Percepção e da Atenção. 6ª Edição. São Paulo: Ed. Martins Fontes, 2003.

_____. **La imaginación y el arte en la infancia**. Madrid: Ediciones Akal, 2006.

VOGELMANN, E. P. **A arte de ensinar e construir o conhecimento**. São Paulo: Saraiva, 2011.

WERTSCH, J. V. **Vygotsky and the Social Formation of Mind**. Cambridge, Massachussets, Harvard University Press, 1988.

APÊNDICE A- BUSCA EM PERIÓDICOS NACIONAIS A1, A2, B1 E B2

Para melhor compreensão da busca realizada apresentam-se em forma de quadros os periódicos consultados e as datas das consultas, bem como os descritores utilizados que contemplam os idiomas: Português, Espanhol e Inglês. Vale ressaltar que as expressões utilizadas nos periódicos foram extraídas das expressões aplicadas nas buscas realizadas na plataforma de periódicos da Capes que tiveram maior quantidade de artigos relacionados a elas.

Expressões de busca no periódico da BOLEMA

PROTOCOLO REVISÃO SISTEMÁTICA (BOLEMA/ISSN 1980-4415 / ISSN 0103-636X)	QUALIS/ÁREA 2014
	A1 - Educação
Ensino de Geometrias	17
Geometria não Euclidiana OR Geometrias	19
Teacher training AND Non-euclidean geometry	01
Teaching AND Geometries	03
Enseñanza AND La geometria no euclidiana	01
Enseñanza AND Geometrías	04
TOTAL	45

Fonte: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema>. Acesso em: 18 mar. 2020.

Expressões de busca no periódico da ACTA SCIENTIAE

PROTOCOLO REVISÃO SISTEMÁTICA (ACTA SCIENTIAE – Revista de Ensino de Ciências e Matemática - ULBRA/ 2178-7727)	QUALIS/ÁREA 2014
	B1 - Ensino
Ensino de Geometrias	01
Geometria não Euclidiana OR Geometrias	01
Teacher training AND Non-euclidean geometry	00
Teaching AND Geometries	00
Enseñanza AND La geometria no euclidiana	01
Enseñanza AND Geometrías	00
TOTAL	03

Fonte: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/index>. Acesso em: 18 mar. 2020.

Expressões de busca no periódico da EMP

PROTOCOLO REVISÃO SISTEMÁTICA (EMP - Educação Matemática Pesquisa (online) – SP /ISSN: 1983-3156)	QUALIS/ÁREA 2014
	B2 - Educação
Ensino de Geometrias	05
Geometria não Euclidiana OR Geometrias	05
Teacher training AND Non-euclidean geometry	00
Teaching AND Geometries	02
Enseñanza AND La geometria no euclidiana	00
Enseñanza AND Geometrías	00
TOTAL	12

Fonte: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/archive>. Acesso em: 18 mar. 2020.

Expressões de busca no periódico da EMR

PROTOCOLO REVISÃO SISTEMÁTICA (EMR - Educação Matemática em Revista – SP/ ISSN: 1517-3941)	QUALIS/ÁREA 2014
	B1 - Educação
Ensino de Geometrias	00
Geometria não Euclidiana OR Geometrias	01
Teacher training AND Non-euclidean geometry	00
Teaching AND Geometries	00
Enseñanza AND La geometria no euclidiana	00
Enseñanza AND Geometrías	00
TOTAL	01

Fonte: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/index>. Acesso em: 18 mar. 2020.

Expressões de busca no periódico da Educação Matemática em Revista-RS

PROTOCOLO REVISÃO SISTEMÁTICA (Educação Matemática em Revista-RS/ ISSN: 1518-8221)	QUALIS/ÁREA 2014
	B1 - Ensino
Ensino de Geometrias	00
Geometria não Euclidiana OR Geometrias	00
Teacher training AND Non-euclidean geometry	00
Teaching AND Geometries	00

Enseñanza AND La geometria no euclidiana	00
Enseñanza AND Geométrías	00
TOTAL	00

Fonte: <http://sbemrs.org/revista/index.php/index/index>. Acesso em: 18 mar. 2020.

Expressões de busca no periódico da JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática

PROTOCOLO REVISÃO SISTEMÁTICA (JIEEM / ISSN: 2176-5634)	QUALIS/ÁREA 2014
	B1 - Ensino
Ensino de Geometrias	00
Geometria não Euclidiana OR Geometrias	01
Teacher training AND Non-euclidean geometry	00
Teaching AND Geometries	00
Enseñanza AND La geometria no euclidiana	00
Enseñanza AND Geométrías	00
TOTAL	01

Fonte: <http://www.pgskroton.com.br/seer/index.php/jieem/index>. Acesso em: 18 mar. 2020.

Expressões de busca no periódico das Perspectivas da Educação Matemática (UFMS)

PROTOCOLO REVISÃO SISTEMÁTICA (Perspectivas da Educação Matemática (UFMS) / ISSN: 1982-7652)	QUALIS/ÁREA 2014
	B1 - Ensino
Ensino de Geometrias	00
Geometria não Euclidiana OR Geometrias	01
Teacher training AND Non-euclidean geometry	00
Teaching AND Geometries	00
Enseñanza AND La geometria no euclidiana	00
Enseñanza AND Geométrías	00
TOTAL	01

Fonte: <http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/index>. Acesso em: 18 mar. 2020.

Expressões de busca no periódico da Revemat

PROTOCOLO REVISÃO SISTEMÁTICA (Revemat : Revista Eletrônica de Educação Matemática/ ISSN: 1981-1322)	QUALIS/ÁREA 2014
	B1 - Ensino
Ensino de Geometrias	03
Geometria não Euclidiana OR Geometrias	03
Teacher training AND Non-euclidean geometry	00
Teaching AND Geometries	00
Enseñanza AND La geometria no euclidiana	00
Enseñanza AND Geometrías	00
TOTAL	06

Fonte: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/index>. Acesso em: 18 mar. 2020.

Expressões de busca no periódico da ZETETIKÉ

PROTOCOLO REVISÃO SISTEMÁTICA (ZETETIKÉ - Revista de Educação Matemática (online)/ ISSN: 2176-1744)	QUALIS/ÁREA 2014
	B1 - Ensino
Ensino de Geometrias	03
Geometria não Euclidiana OR Geometrias	05
Teacher training AND Non-euclidean geometry	00
Teaching AND Geometries	00
Enseñanza AND La geometria no euclidiana	00
Enseñanza AND Geometrías	00
TOTAL	08

Fonte: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/index>. Acesso em: 18 mar. 2020.

Expressões de busca no periódico da REMATEC

PROTOCOLO REVISÃO SISTEMÁTICA (Revista de Matemática, Ensino e Cultura (UFRN) / ISSN: 1980- 3141)	QUALIS/ÁREA 2014
	B2 - Ensino
Ensino de Geometrias	00
Geometria não Euclidiana OR Geometrias	00
Teacher training AND Non-euclidean geometry	00
Teaching AND Geometries	00

Enseñanza AND La geometria no euclidiana	00
Enseñanza AND Geometrías	00
TOTAL	00

Fonte: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/index>. Acesso em: 18 mar. 2020.

Expressões de busca no periódico da EM TEIA

PROTOCOLO REVISÃO SISTEMÁTICA (Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero- americana / ISSN: 2177-9309)	QUALIS/ÁREA 2014
	B2 - Ensino
Ensino de Geometrias	00
Geometria não Euclidiana OR Geometrias	01
Teacher training AND Non-euclidean geometry	00
Teaching AND Geometries	00
Enseñanza AND La geometria no euclidiana	00
Enseñanza AND Geometrías	00
TOTAL	01

Fonte: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/index>. Acesso em: 18 mar. 2020.

Expressões de busca no periódico da REVEDUC

PROTOCOLO REVISÃO SISTEMÁTICA (Revista Eletrônica de Educação - São Carlos / ISSN: 1982-7199)	QUALIS/ÁREA 2014
	B1 - Ensino
Ensino de Geometrias	00
Geometria não Euclidiana OR Geometrias	02
Teacher training AND Non-euclidean geometry	00
Teaching AND Geometries	00
Enseñanza AND La geometria no euclidiana	00
Enseñanza AND Geometrías	00
TOTAL	02

Fonte: <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/index>. Acesso em: 18 març. 2020.

Expressões de busca no periódico da RIPEM

PROTOCOLO REVISÃO SISTEMÁTICA (Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática / ISSN: 2238-0345)	QUALIS/ÁREA 2014
	B3 - Ensino
Ensino de Geometrias	00
Geometria não Euclidiana OR Geometrias	00
Teacher training AND Non-euclidean geometry	00
Teaching AND Geometries	00
Enseñanza AND La geometria no euclidiana	00
Enseñanza AND Geometrías	00
TOTAL	00

Fonte: <http://www.sbemrasil.org.br/ripen/index.php/ripen/index>. Acesso em: 18 mar. 2020.

Expressões de busca no periódico da RPEM

PROTOCOLO REVISÃO SISTEMÁTICA (Revista Paranaense de Educação Matemática / ISSN: 2238-5800)	QUALIS/ÁREA 2014
	B3 - Ensino
Ensino de Geometrias	01
Geometria não Euclidiana OR Geometrias	01
Teacher training AND Non-euclidean geometry	00
Teaching AND Geometries	00
Enseñanza AND La geometria no euclidiana	00
Enseñanza AND Geometrías	00
TOTAL	02

Fonte: <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/index>. Acesso em: 18 mar. 2020.

APÊNDICE B- DESCRIÇÃO DOS ESTUDOS SELECIONADOS

MURARI, Claudemir. Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática. Bolema . Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 187-211, dez. 2011.	
Tipo de Estudo	Ensaio Teórico
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	São Paulo – Universidade Estadual Paulista
Problema da pesquisa	Quais as possibilidades de inserção de materiais manipulativos, integrados a espelhos e caleidoscópios, em estudos das geometrias euclidiana e nãoeuclidiana, de modo a promover maior interesse e participação dos alunos no processo de ensino e aprendizagem?
Objetivo	Realizar um levantamento de pesquisas e experiências em salas de aula, trata de possibilidades do uso integrado de espelhos, caleidoscópios, materiais manipulativos e softwares de geometria dinâmica em estudos das geometrias euclidiana e não-euclidiana.
Métodos/Instrumentos	Pesquisa bibliográfica.
Sujeitos da Pesquisa	-----
Resultados	Sugere o uso de caleidoscópio, materiais manipulativo e softwares como instrumentos para o ensino de geometria.
Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Formação de professores
LEIVAS, José Carlos Pinto. Educação Geométrica: reflexões sobre ensino e aprendizagem em geometria. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA – RS . v. 1, n. 13, p. 9 -16, 2012.	
Tipo de Estudo	Ensaio Teórico
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Região Sul – Universidade Federal do Paraná
Problema da pesquisa	Como que a imaginação, intuição e visualização podem ser elementos norteadores do ensino de Geometrias na formação inicial de professores de matemática?
Objetivo	Tecer reflexões sobre o ensino de Geometrias não Euclidianas no curso de licenciatura em Matemática, em especial, a Geometria Fractal e Topológica.
Métodos/Instrumentos	Pesquisa bibliográfica.
Sujeitos da Pesquisa	-----
Resultados	O autor acredita que a imaginação, intuição e visualização podem ser objetos de transformação para a Educação Geométrica.
Aspectos relacionados à proposta de Ensino de Geometria	Formação de professores; Epistemologia; Inserção no currículo do Ensino Superior.
BRUM, Wanderley Pivatto, SCHUHMACHER, Elcio. Aprendizagem de conceitos de geometria esférica e hiperbólica no ensino médio sob a perspectiva da teoria da aprendizagem significativa usando uma sequência didática. Aprendizagem Significativa em Revista , v.3, n 2, p. 1-21, 2013.	
Tipo de Estudo	De Campo
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Região Sul – Florianópolis-SC
Problema da pesquisa	Como explorar os conceitos de Geometria Esférica e Hiperbólica no Ensino Médio, a fim de desenvolver a compreensão nos estudantes para a pluralidade de modelos geométricos no espaço em que vivem?
Objetivo	Analisar se a utilização de diferentes atividades, por meio de uma sequência didática para o ensino de Geometria Esférica e Hiperbólica, permite aos estudantes do Ensino Médio, compreender a existência de uma pluralidade de modelos geométricos no espaço em que vivem.
Métodos/Instrumentos	Pré-teste, sequência didática e pós-teste.
Sujeitos da Pesquisa	14 estudantes do 2º Ano do Ensino Médio
Resultados	Os resultados evidenciam que, após a sequência didática a maioria dos estudantes conseguiu assimilar, diferenciar e

	reconciliar conceitos de Geometria Euclidiana, Esférica e Hiperbólica, por ser um tema ainda novo nos bancos escolares, houve estudantes que permaneceram com um posicionamento euclidiano frente ao problema não euclidiano.
Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Epistemologia; Inserção no currículo.
FERREIRA, Luciano. BARROS, Rui Marcos de Oliveira. Relações entre os objetos ostensivos e objetos não ostensivos durante o ensino da geometria do taxista com o software geogebra. JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática . 31, v.6, n.2,2013.	
Tipo de Estudo	Estudo de campo
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Região Sul – Paraná
Problema da pesquisa	É possível manifestar obstáculos proveniente da constituição de conceitos euclidianos na aprendizagem de uma nova Geometria.
Objetivo	i) Verificar a possibilidade de aparecimento de conceitos não científicos (equivocados) advindos dos objetos ostensivos mostrados na tela do computador ao usar o software Geogebra ii) detectar manifestações de possíveis obstáculos provenientes da constituição de conceitos euclidianos na aprendizagem de uma nova Geometria.
Métodos/Instrumentos	Aplicação de atividades e construções geométricas por meio do Software Geogebra.
Sujeitos do Estudo	15 Alunos do 4º ano da licenciatura em Matemática.
Resultados	Concluíram que existe a possibilidade de aparecimento de conceitos não científicos (equivocados) advindos dos objetos ostensivos mostrados na tela do computador ao usar o software Geogebra e detectamos manifestações de possíveis obstáculos provenientes da constituição de conceitos euclidianos na aprendizagem de uma nova Geometria. Aparece o registro de que conceitos de Geometria Euclidiana podem ser caracterizados como obstáculos à construção de conceitos não euclidianos.
Aspectos relacionados à proposta de Ensino de Geometria	Formação de professores.
LEIVAS, José Carlos Pinto. Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v.15, n.3, p. 647-670, 2013.	
Tipo de Estudo	Estudo de campo.
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Região Sul – Rio Grande do Sul
Problema da pesquisa	Verificar se os alunos conseguem identificar as Geometrias em suas diferentes superfícies planas ou não planas.
Objetivo	Investigar o conhecimento sobre Geometrias Não-Euclidianas de alunos de graduação, mestrado e doutorado, que estudam em instituições gaúchas que oferecem Licenciatura em Matemática, mestrado e doutorado na área de ensino.
Métodos/Instrumentos	Questionário com 7 questões fechadas
Sujeitos do Estudo	44 sujeitos (graduandos, Mestrandos, Doutorandos e Professores atuantes)
Resultados	Comprova a hipótese de que nos cursos de formação de professores, no RS, há pouca informação a respeito de Geometrias Não-Euclidianas. Dessa forma, o docente que atua na escola básica não incorpora à sua prática outras noções a menos das euclidianas, não adquirindo uma formação mais ampla para seu exercício profissional.
Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Formação de professores; Inserção no currículo.
NETO, João Debastiani. NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. FRANCO, Valdeni Soliani. Geometrias na segunda fase do ensino fundamental: um estudo apoiado na epistemologia genética. Zetetiké – FE/Unicamp , v. 21, n. 40, jul./dez. 2013.	
Tipo de Estudo	Estudo de Campo

Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Região Sul – Maringá – PR
Problema da pesquisa	Como trabalhar pedagogicamente ideias básicas de geometrias, de maneira a favorecer a construção de conceitos geométricos mais complexos, sejam eles euclidianos ou não?
Objetivo	Investigar se crianças de 8 a 12 anos identificam, compreendem e mobilizam algumas ideias básicas (continuidade, vizinhança, projeções) para a construção de conceitos geométricos euclidianos ou não euclidianos.
Métodos/Instrumentos	Foram aplicadas cinco atividades compostas de situações-problema, que se constituíram nos instrumentos de apoio para as entrevistas clínicas. A pesquisa foi realizada com dez crianças de 8 a 12 anos de idade, em uma escola particular localizada no município de Maringá, norte do Paraná. Para melhor captação dos pormenores, todas as entrevistas e a aplicação dos exames piagetianos foram filmados, com autorização dos entrevistados e de seus responsáveis legais. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, na qual empregamos o Método Clínico Crítico Piagetiano e a entrevista semiestruturada, por entender esse encaminhamento como viável para a consecução dos objetivos.
Sujeitos do Estudo	10 Crianças de 8 a 12 anos
Resultados	Os autores constataram que é possível trabalhar as Geometrias não Euclidianas na Educação Básica, uma vez que, os sujeitos da pesquisa mobilizaram conceitos considerados importantes para a introdução desse tema, sem a necessidade de um aprofundamento teórico sobre o tema. Além disso, constataram que uma das explicações para a possível relutância dos professores no fazer pedagógico com as geometrias não euclidianas é o seu despreparo, conforme apontado por Santos (2009) e Lovis (2009), que constataram, inclusive, que professores do Ensino Fundamental, além de pouco conhecer as geometrias não euclidianas, possuem conhecimentos muito restritos sobre a geometria euclidiana. Assim, o problema com o ensino das geometrias não euclidianas envolve uma questão mais ampla, já que, de maneira geral, os professores poucas oportunidades possuem de estudar geometria (euclidiana ou não) em sua formação inicial ou continuada.
Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Inserção no Currículo; Formação de professores.
BRUM, Wanderley Pivatto. SILVA, Sani de Carvalho Rutz. A história da matemática e os conhecimentos prévios dos professores como subsídios para o planejamento de um curso sobre geometria. <i>Itinerarius Reflectionis</i> , Jataí (GO), v.10, n. 2, 2014.	
Tipo de Estudo	Estudo Teórico
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Região Sul – Ponta Grossa – PR
Problema da pesquisa	Como subsidiar a prática docente para introduzir conceitos elementares de geometria esférica e hiperbólica no ensino médio por meio dos pressupostos da TAS?
Objetivo	A proposta é subsidiar a ação docente, fornecendo elementos para a construção de atividades de ensino sobre conceitos elementares de geometria esférica e hiperbólica para estudantes de ensino médio baseado em pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa.
Métodos/Instrumentos	Curso de formação de professores. O curso é apresentado em quatro partes: 1) atividades introdutórias ou de reconhecimento, 2) atividades de conhecimento epistemológico/científico, 3) atividades de reflexão acerca dos referenciais teóricos utilizados sobre a aprendizagem significativa e aprendizagem em Matemática e 4) atividades de síntese das ideias debatidas.

Sujeitos do Estudo	Professores de matemática
Resultados	Acredita-se que o curso proposto neste trabalho incorpora os resultados de pesquisas recentes sobre os processos de ensino e aprendizagem em Matemática, sobre os conhecimentos prévios e sobre a utilização da história da Geometria no ensino de Matemática, buscando sintetizar tais elementos com a finalidade de contribuir na formação (inicial e/ou continuada) do professor de Matemática.
Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Formação de professores.
BRUM, Wanderley Pivatto. SILVA, Sani de Carvalho Rutz. LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA: análise dos recursos didáticos auxiliares para a aprendizagem de conceitos elementares de geometria não euclidiana. <i>REFCalE.</i> , v. 2, n. 3, s et./dez. 2014.	
Tipo de Estudo	Estudo Bibliográfico e Documental
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Região Sul – Florianópolis – SC
Problema da pesquisa	Como são estruturados os livros didáticos de matemática em relação ao conteúdo de Geometria não Euclidiana?
Objetivo	Analisar os recursos didáticos presentes em seis livros didáticos de Matemática, em relação ao conteúdo de Geometria não Euclidiana.
Métodos/Instrumentos	Pesquisa Documental / Análise de conteúdo / Livros didáticos
Sujeitos do Estudo	-----
Resultados	O conteúdo Geometria não Euclidiana está presente nos livros didáticos e sua exposição reproduz o modelo tradicional de ensino: leitura de textos e resolução de exercícios. De uma forma geral, não há incentivo à pesquisa e à educação científica e nem a preocupação em correlacionar conteúdos no campo da Geometria. Todos os livros discutem somente a questão das retas paralelas em objetos não euclidianos. Os autores sugerem que recursos didáticos diferenciais como a indicação de atividades práticas e de sites e a utilização de histórias em quadrinhos e charges são recursos valiosos para aproximar o aluno do conhecimento, visto que alguns destes recursos fazem parte do dia-a-dia do educando.
Aspectos relacionados à proposta de Ensino de Geometria	Inserção no currículo.
CALDATTO, Marlova Estela. PAVANELLO, Regina Maria. O Processo de Inserção das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Escola Paranaense: a visão dos professores participantes. <i>Bolema</i> , Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 42-63, abr. 2014.	
Tipo de Estudo	Estudo de Campo
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Região Sul – Maringá – PR
Problema da pesquisa	Como se deu o processo de inserção das Geometrias não Euclidianas no currículo de matemática na Educação Básica do Estado do Paraná?
Objetivo	Construir uma versão da história do processo de elaboração do currículo de matemática vigente no estado do Paraná – DCE-PR Matemática –, considerando especialmente como ocorreu a inserção das Geometrias Não Euclidianas.
Métodos/Instrumentos	Historia Oral e Pesquisa documental – Entrevistas
Sujeitos do Estudo	Professores de Matemática da rede estadual de ensino no Estado do Paraná.
Resultados	Os resultados evidenciaram que a participação dos professores não foi determinante para as decisões tomadas no processo de elaboração das Diretrizes Curriculares de Matemática e a inserção das Geometrias Não Euclidianas no documento decorreu da decisão de elemento(s) da equipe técnica de Matemática, não se sabe sob que influência.

Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Inserção no Currículo.
LEIVAS, José Carlos Pinto. Elipse, parábola e hipérbole em uma geometria que não é euclidiana. REVEMAT . Florianópolis (SC), v.9, n. 2, p. 189-209, 2014.	
Tipo de Estudo	Estudo de campo
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Região Sul – Florianópolis – SC
Problema da pesquisa	Como alunos de um mestrado profissionalizante em ensino de Matemática interpretam e representam elipses, parábolas e hipérbolas utilizando a métrica dos catetos?
Objetivo	Investigar como esses estudantes interpretam e representam elipses, parábolas e hipérbolas utilizando a métrica dos catetos, a qual está ligada a uma geometria que é não euclidiana – Geometria do Táxi ou Geometria Urbana.
Métodos/Instrumentos	Aplicação de problemas envolvendo cônicas na perspectiva da Geometria do Taxista para ser resolvido em duplas e trio. Folhas de papel sulfite e malha quadriculada. Tempo para desenvolvimento da atividade duas aulas. A atividade proposta faz parte do processo de avaliação de uma disciplina do Mestrado Profissional em Ensino de Física e Matemática.
Sujeitos do Estudo	Discentes do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Resultados	Os estudantes puderam perceber que há várias possibilidades de representação de um objeto geométrico, como os três aqui estudados, e não somente a euclidiana. Um dos fatores que caracterizam essa geometria é de que há uma dependência de “medidas” e, assim o sendo, o estudo de métricas é justificado na formação dos professores, seja ela inicial ou continuada, o que irá proporcionar visão de outras geometrias, além da euclidiana.
Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Formação de professores; inserção no currículo.
BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E.; DA SILVA, S. de C. R. As Geometrias Esférica e Hiperbólica em Foco: sobre a apresentação de alguns de seus conceitos elementares a estudantes do Ensino Médio. Bolema , Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, abr. 2015.	
Tipo de Estudo	Estudo Bibliográfico
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Região Sul - Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Problema da pesquisa	Inserção de conceitos elementares de Geometrias Esférica e Hiperbólica no Ensino Médio.
Objetivo	Refletir sobre a importância do Ensino das Geometrias Esférica e Hiperbólica no Ensino Médio.
Métodos/Instrumentos	Pesquisa bibliográfica
Resultados	O trabalho com conceitos elementares no campo das Geometrias Esférica e Hiperbólica busca contribuir, também, para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o estudante a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. A investigação do espaço esférico e hiperbólico por parte do professor pressupõe a exploração de situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. Este amálgama de conteúdos, ainda pouco explorado na escola, contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas à posição, à localização de figuras e aos deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas. Além disso, o espaço deve ser explorado a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao estudante estabelecer conexões entre as Geometrias Esférica e Hiperbólica com outras áreas do conhecimento.

Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Inserção no currículo.
LOVIS, Karla Aparecida. FRANCO, Valdeni Soliani. BARROS, Rui Marcos de Oliveria. Dificuldades e obstáculos apresentados por um grupo de professores de Matemática no estudo da geometria hiperbólica. <i>Zetetiké</i> – FE/Unicamp – v. 22, n. 42 – jul/dez-2014.	
Tipo de Estudo	Estudo Empírico
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Região Sul – Maringá – PR
Problema da pesquisa	Quais são as dificuldades e os obstáculos enfrentados por um grupo de professores de matemática da Educação Básica durante a participação em um minicurso introdutório sobre a Geometria Hiperbólica?
Objetivo	O objetivo deste artigo é descrever as dificuldades e os obstáculos apresentados por um grupo de professores de Matemática da Educação Básica observados durante um minicurso introdutório sobre a Geometria Hiperbólica.
Métodos/Instrumentos	Aplicação de Minicurso sobre o modelo de Poincaré por meio do software Geogebra; gravação em áudio e vídeo das falas dos professores e as atividades por eles realizadas; observação; e aplicação de questionário.
Sujeitos da Pesquisa	Professores de Matemática da Educação Básica
Resultados	O fato de a maioria dos professores conhecer somente a Geometria Euclidiana e acreditar que ela é a única possível tornou-se um obstáculo denominado de “conhecimento geral”. Observou-se ainda que os professores tiveram dificuldades em abandonar os conceitos e as definições da Geometria Euclidiana, como um conhecimento geral. Destaca-se que as representações de retas, triângulos, retas paralelas, ângulos, etc., na Geometria Hiperbólica, são diferentes da Geometria Euclidiana. Os professores estão familiarizados com as representações euclidianas, e uma “nova representação” apontou um obstáculo verbal: “um caso em que uma única imagem, ou até uma única palavra, constitui toda a explicação” (Bachelard, 1996, p. 91). O fato de os professores terem participado do minicurso não garante a compreensão e a aceitação das Geometrias não Euclidianas. Salienta-se que, para superar os obstáculos e as dificuldades, será necessária uma formação continuada adequada, na qual o professor possa rever e aprender novos conteúdos e metodologias.
Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Formação de Professores. Epistemologia.
BARBOSA, Gustavo. Hermenêutica e Geometria Não Euclidiana: Imre Toth e os instrumentos específicos de uma filologia matemática. <i>Perspectivas da Educação Matemática</i> – UFMS – v. 8, número temático – 2015.	
Tipo de Estudo	Ensaio teórico
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Região Sudeste -São Paulo – Rio Claro
Problema da pesquisa	Como contribuiu o matemático e filósofo Imre Toth para o desenvolvimento do campo geométrico?
Objetivo	Destacar alguns dos elementos hermenêuticos e metodológicos empregados por Imre Toth em sua pesquisa sobre o desenvolvimento da Geometria.
Métodos/Instrumentos	-----
Sujeitos do Estudo	-----
Resultados	Conclui-se que a pesquisa enfatiza a tendência hermenêutica inaugurada por Toth ao longo de toda a sua vida de estudos parece-nos apenas possível graças ao seu espírito polímata. E enaltece o seu trabalho relacionado ao desenvolvimento da Geometria.

Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Epistemologia.
GODOI, Willian dos Santos. Problema das ideias de natureza simples para a Geometria não Euclidiana e para a Física não Newtoniana a partir da análise de Gaston Bachelard. <i>Griot – Revista de Filosofia</i> , Amargosa, Bahia – Brasil, v.11, n.1, junho/2015. Disponível em: /www.ufrb.edu.br/griot.	
Tipo de Estudo	Ensaio Teórico
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Região Sul – PUCPR
Problema da pesquisa	Como as ideias de natureza simples podem contribuir para o desenvolvimento da Ciência na visão de Bachelard?
Objetivo	Apresentar o pensamento de Bachelard que criticava o método que visasse à acomodação da ciência em ideias (ou princípios) considerados simples e absolutos por meio do surgimento das Geometrias não Euclidianas e da Física não Newtoniana.
Métodos/Instrumentos	-----
Sujeitos do Estudo	-----
Resultados	Para Bachelard a ciência contemporânea está sempre em reformulação e por meio de questionamento das ideias simples a ciência rompe com fundamentos enraizados, os assimila e os complementa.
Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Epistemologia.
LOVIS, Karla Aparecida. FRANCO, Valdeni Soliani. As Concepções de Geometrias não Euclidianas de um Grupo de Professores de Matemática da Educação Básica. <i>Bolema</i> , Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 369-388, abr. 2015.	
Tipo de Estudo	Estudo de campo
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Região Sul – Estado do Paraná
Problema da pesquisa	A pesquisa propõe a investigação de fundamentos teóricos e de reflexões sobre o tema concepções e das questões que envolvem as Geometrias.
Objetivo	Identificar e analisar as concepções sobre Geometrias não Euclidianas de professores de Matemática, da Educação Básica, que atuam em escolas públicas do Estado do Paraná.
Métodos/Instrumentos	Aplicação de Questionário para escolher os participantes da pesquisa, realização de entrevistas Semiestruturadas e uso de 36 cartões com imagens que remetem aos tipos de Geometrias.
Resultados	Os autores evidenciam a importância de inserir o ensino de Geometrias não Euclidianas na Educação Básica, uma vez que essa temática proporcionou aos professores de matemática participante da pesquisa constituir novas reflexões sobre as Geometrias e, especificamente, sobre o ensino da Geometria Euclidiana. A pesquisa apontou também que os professores não integraram as Geometrias não Euclidianas na Educação Básica por não terem os conceitos de Geometria Euclidiana assimilados e acomodados.
Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Formação de professores, Epistemologia e Inserção no Currículo.
BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E.; DA SILVA, S. de C. R. A utilização de documentários enquanto organizadores prévios no ensino de Geometria não Euclidiana em sala de aula. <i>Acta Scientiarum</i> . Education (online), v. 38, p. 43-49, 2016.	
Tipo de Estudo	Estudo empírico
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Região Sul – Blumenau (SC) Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática - Universidade Regional de Blumenau (FURB)
Problema da pesquisa	O uso de documentários como organizadores prévios pode promover discussões e reflexões em professores sobre o ensino de Geometrias.

Objetivo	O objetivo deste artigo é demonstrar o potencial de filmes documentários como organizador prévio para a apresentação e reflexão acerca da Geometria não Euclidiana em sala de aula.
Métodos/Instrumentos	Método descritivo em que expõe os conteúdos de três documentários que podem ser utilizados no processo de ensino de conceitos sobre Geometria não Euclidiana. Sugere também uma proposta de uso dos documentários por meio de problemas.
Sujeitos da Pesquisa	-----
Resultados	O autor acredita que os documentários se caracterizam como uma ótima opção de organizadores prévios e os considera como potenciais recursos didáticos para o ensino quando se pensa em discutir temas no campo das geometrias e se busca a democratização do debate científico.
Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Formação de professores.
ARMELLA, Luis Moreno; RAMÍREZ, Rubén Elizondo. La Geometría al encuentro del aprendizaje. Educación Matemática. <i>Educación Matemática</i> , vol. 29, n. 1, 2017.	
Tipo de Estudo	Estudo empírico
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	-----
Problema da pesquisa	Como o desenvolvimento da intuição por meio de investigações do semi-plano de Poincaré pode ajudar a emergir uma nova geometria.
Objetivo	Estudar os recursos do software Geogebra para o ensino de conceitos não euclidianos e como estes afetam a aprendizagem.
Métodos/Instrumentos	Resolução de atividades com o uso do software Geogebra.
Sujeitos da Pesquisa	Docentes e discentes
Resultados	O uso do software Geogebra para investigar conceitos geométricos presentes no semi-plano de Poincaré contribuir para o entendimento de geometrias não Euclidianas.
Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Epistemologia
GUSMÃO, Nathan Lascoski; SAKAGUTI, Fernando Yudi; PIRES, Liceia Alves. A geometria do táxi: uma proposta da geometria não euclidiana na educação básica. <i>Educação Matemática Pesquisa</i> , São Paulo, v.19, n.2, p. 211-235, 2017.	
Tipo de Estudo	Estudo empírico
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Paraná – PR
Problema da pesquisa	A Geometria do Táxi possibilita a ligação com outros conteúdos da educação básica.
Objetivo	Introduzir a Geometria do Táxi para uma turma do ensino médio com o objetivo de acrescentar um conceito novo e poder relacioná-lo com seu dia a dia.
Métodos/Instrumentos	Aplicação de sequência didática envolvendo atividades sobre a Geometria do Táxi para serem resolvidas em duplas.
Sujeitos da Pesquisa	37 alunos
Resultados	As Geometrias não-Euclidianas devem estar presente, no currículo de nossos alunos, para que estes apliquem em situações do cotidiano.
Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Currículo
LEIVAS, José Carlos Pinto; PORTELLA, Hiago Portella; SOUZA, Helenara Machado. Geometrias Não-Euclidianas: uma investigação na escola básica no Brasil com utilização do Geogebra. <i>Revista Thema</i> , v. 14, n. 3, p. 210-221, 2017.	
Tipo de Estudo	Estudo empírico
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Rio Grande do Sul - Sul
Problema da pesquisa	Possibilidades de ensino de Geometrias não Euclidianas na educação básica por meio do software Geogebra.

Objetivo	Investigar como as tecnologias computacionais poderiam contribuir para aquisição de conhecimentos de Geometria Hiperbólica e Elíptica por estudantes da educação básica.
Métodos/Instrumentos	Resolver atividades por meio do software Geogebra.
Sujeitos da Pesquisa	Dois professores e seis alunos
Resultados	É possível introduzir conhecimentos de Geometria Hiperbólica e de Geometria Elíptica, na escola básica, fazendo uso das tecnologias computacionais, especificamente, com o GeoGebra
Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Currículo
LEIVAS, José Carlos Pinto; SOUZA, Aline Picoli. Explorando a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio de uma oficina pedagógica. Revista Thema , v. 15, n. 4, p. 1549-1561, 2018.	
Tipo de Estudo	Estudo empírico
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Rio Grande do Sul - Sul
Problema da pesquisa	Necessidade de se buscar métodos e metodologias de ensino que tornem a aprendizagem de Matemática mais atrativa.
Objetivo	Introduzir noções da Geometria Fractal em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio por meio de uma oficina a fim de que os alunos percebam a importância do seu estudo e possam, através da construção de fractais, identificar as características e algumas aplicações dos fractais no seu cotidiano.
Métodos/Instrumentos	Apresentação de objetos e imagens de fractais para a construções de fractais com papel quadriculado e realização das atividades propostas.
Sujeitos da Pesquisa	Estudantes do 3º Ano do Ensino Médio.
Resultados	Identificou-se que a abordagem da Geometria Fractal no Ensino Médio estimula à criatividade, ao raciocínio lógico, o aumento do interesse em aprender Matemática, a possibilidade de trabalho interdisciplinar, a relação com outros tópicos estudados, entre muitos outros.
Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Currículo
PENTEADO, Daniele Regina; PEREIRA, Ana Lúcia; BRANDT, Célia Finck. Geometria no ensino fundamental: das exigências legais às práticas cotidianas. Revista Paranaense de Educação Matemática , Campo Mourão, Pr, v.8, n.16, p.48-81, 2019.	
Tipo de Estudo	Ensaio teórico
Região do Brasil em que o estudo foi produzido	Paraná - PR
Problema da pesquisa	Que concepções têm os professores sobre o ensino de Geometrias e as avaliações internas e externas na educação.
Objetivo	Analisar as concepções que os professores apresentam sobre o ensino desse conteúdo.
Métodos/Instrumentos	Análise Documental / Aplicação de questionário.
Sujeitos da Pesquisa	8 Professores de Matemática
Resultados	Os professores reconhecem a relevância do conteúdo e a necessidade de seguir as recomendações oficiais, mas é de uso comum entre eles adiar os temas sobre geometria para o final do ano. E associam isso à “defasagem no processo de ensino e aprendizagem” dos alunos e as “lacunas” deixadas na formação.
Aspectos relacionados a proposta de Ensino de Geometria	Currículo

APÊNDICE C- TERMO ANUÊNCIA (INSTITUIÇÃO)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA



Autorização do diretor e da coordenadora do Colegiado de Matemática da UNEB/Campus X

A Universidade do Estado da Bahia – UNEB/Campus X vem por meio desta, concordar e autorizar o pesquisador Clovis Lisbôa dos Santos Jr realizar a pesquisa de seu projeto de doutorado vinculada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE intitulada “Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática: uma proposta para a produção de significados em Geometria” que pretende analisar a produção de sentidos e significados de licenciandos do curso de Matemática acerca do ensino de Geometrias não Euclidianas na Educação Básica. E a partir das ações teórico-metodológicas proposta pela Atividade Orientadora de Ensino (AOE) provocar reflexões em futuros professores que possam resignificar o ensino de Geometria na Educação Básica. A intervenção será realizada no 1º semestre do ano de 2019 por meio de um curso de extensão intitulado “O desenvolvimento lógico-histórico do conhecimento geométrico: perspectivas para o ensino na Educação Básica”, a ser ministrado pelo próprio pesquisador para licenciandos do curso de Matemática. O curso de extensão terá a duração de 15 horas presenciais e será ministrado aos sábados de acordo com o cronograma abaixo.

Descrição da proposta de intervenção

Encontro	Conteúdo	Objetivo	Ações a ser desenvolvidas	C.H.
1º 06/04/19	Discussão de aspectos de natureza histórico-epistemológica sobre os Postulados de Euclides.	Compreender o modelo geométrico euclidiano a partir dos postulados de Euclides.	- Aplicação de questionário diagnóstico; - Socialização das resoluções; - Análise e discussão dos Postulados de Euclides.	3h
2º 13/04/19	Construção de conceitos básicos sobre Geometria Esférica.	Identificar conceitos elementares de <i>Geometria Esférica</i> .	-Aplicação da Atividade de Ensino sobre Geometria Esférica; - Apresentação e discussão em plenária dos resultados desenvolvidos por cada grupo; - Análise de como ficaria o enunciado do Postulado das Paralelas na Geometria Esférica.	3h
3º 27/04/19	A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180°?	Diferenciar a Geometria Euclidiana da Geometria Esférica pela construção de triângulos.	-Aplicação da Atividade de Ensino sobre Geometria Esférica; - Apresentação e discussão em plenária dos resultados desenvolvidos por cada grupo;	3h

4º 04/05/19	A Geometria dos espaços curvos ou Geometria não Euclidiana.	Identificar conceitos elementares de <i>Geometria Hiperbólica</i> .	-Aplicação da Atividade de Ensino sobre Geometria Hiperbólica; - Apresentação e discussão em plenária dos resultados desenvolvidos por cada grupo; - Análise de como ficaria o enunciado do Postulado das Paralelas na Geometria Hiperbólica.	3h
5º 18/05/19	A Geometria dos Espaços ou Geometrias não Euclidianas	Diferenciar a Geometria Euclidiana da não-Euclidiana.	- Sistematização das Geometrias por meio de um quadro comparativo; - Socialização da atividade; - Confraternização.	3h

Teixeira de Freitas, 19 de Março de 2019.

Diretor da UNEB/CampusX

Coordenadora do Colegiado de Matemática

APÊNDICE D- TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
E TECNOLÓGICA



TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Solicitamos a sua autorização para participar, como voluntário (a), da pesquisa de doutorado intitulada “GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: uma proposta para a produção de significados em Geometria”. Esta pesquisa é da responsabilidade do pesquisador CLOVIS LISBÔA DOS SANTOS JR, residente à Avenida Kaikan, 512, Kaikan, Teixeira de Freitas/BA, CEP 45.992-246, fone (73) 98823- 5756, e-mail: prof.clovislisboa@gmail.com e está sob a orientação da Profª. Drª. LÍCIA DE SOUZA LEÃO MAIA, e-mail (liciaslm@hotmail.com).

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA

A pesquisa tem como objetivo principal analisar a produção de sentidos e significados atribuídos por discentes do curso de Licenciatura em Matemática sobre o ensino de Geometrias não Euclidianas na Educação Básica, a partir da vivência e exploração de atividades de ensino.

Você foi convidado(a) a participar de um curso de extensão por atender aos critérios de seleção da pesquisa, quais sejam: 1) Ser graduando do curso de Licenciatura em Matemática da UNEB/Campus X; 2) Está matriculado a partir do 3º semestre do curso de licenciatura em Matemática e ter cursado as seguintes disciplinas: Geometria Plana, Geometria Espacial e Geometria Analítica I.

Sua participação não é obrigatória e consistirá em responder a um questionário diagnóstico que tem como objetivo traçar o perfil dos participantes da pesquisa. Você também deverá participar de um curso de extensão de 24 horas com o intuito de investigar as potencialidades pedagógicas do ensino de conceitos básicos das Geometrias não Euclidianas para o desenvolvimento do pensamento geométrico, em particular, para ampliar a compreensão da Geometria Euclidiana na formação inicial de professores de Matemática.

Os dados da pesquisa serão construídos a partir das respostas obtidas por meio de questionários-diagnóstico, atividades de ensino, observação e entrevistas semiestruturadas. Além disso, serão utilizadas, quando necessário, gravações de voz para o fiel registro dos dados. As informações desta pesquisa serão confidenciais e divulgadas por meio de trabalhos apresentados em reuniões científicas, congressos, seminários, encontros, artigos, revistas científicas e da própria tese de doutorado, não havendo identificação dos participantes.

Assinatura do pesquisador

CONSENTIMENTO PARA A PARTICIPAÇÃO COMO VOLUNTÁRIO

Eu, _____, CPF _____, abaixo assinado, autorizo minha participação na pesquisa: “GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: uma proposta para a produção de significados em Geometria”, como voluntário (a). Fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pelo doutorando sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos e benefícios decorrentes da participação neste processo. Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade para mim.

Local e data

Assinatura do (a) Participante

APÊNDICE E- PROJETO DE INTERVENÇÃO

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO
COLEGIADO DE MATEMÁTICA**

PROJETO DE EXTENSÃO

**O DESENVOLVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO CONHECIMENTO
GEOMÉTRICO: PERSPECTIVAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA**

**Formação de Professores
Abril 2019**

PERSPECTIVA E DELIMITAÇÃO DA PROPOSTA

A Educação Matemática é uma área de conhecimento das ciências sociais ou humanas, que estuda o ensino e aprendizagem da Matemática em que “caracteriza-se como uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar” (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 5).

Dessa forma, acredita-se que uma das propostas da Educação Matemática é preparar os indivíduos para enfrentar problemas que estão presentes no cotidiano e que são muitas vezes conhecidos por um número expressivo de pessoas, mas que se tornar obscuro para uma parcela da sociedade. Além disso, a Educação Matemática também deve preparar os indivíduos para resolver problemas que já não são tão explícitos nos afazeres das pessoas e que muitas vezes é desconhecido por muitos.

Assim, no campo de pesquisa da Educação Matemática, os estudos devem se preocupar não só com o processo de instrumentação do sujeito, mas também desenvolver competências e habilidades que possam mobilizar conhecimentos para enfrentar situações-problema do cotidiano, com vistas na real inserção do mesmo na sociedade, garantindo-lhe condições de aprendizagem para enfrentar antigos e novos problemas.

É em torno do dilema, de compreender a Geometria Euclidiana como um conhecimento milenar e culturalmente aceito, considerada como a única maneira de representar o espaço no imaginário de algumas pessoas, que assumimos uma ação investigativa que busca compreender o espaço a partir de um conhecimento mais recente, exigindo um processo de instrumentação mais amplo em relação ao pensamento geométrico, capaz de resolver situações-problema novas onde o modelo geométrico euclidiano encontra limitações para solucioná-las, ao qual foi designado como sistemas de Geometria não Euclidiana.

Destarte, pretende-se institucionalizar a proposta de pesquisa desse estudo, não sobrepondo o conhecimento “novo” sobre o conhecimento considerado mais “antigo”, mas sim, ressaltar a importância da produção histórico-social de conhecimentos milenares para a produção de novos conhecimentos. Pontua-se que não é intenção da pesquisa hierarquizar os saberes, mas hastear em pé de igualdade todos os saberes, pois compilando as palavras do mestre Paulo Freire “Não há saber mais, nem saber menos, há saberes diferentes” (1987, p.68).

Acredita-se que a relevância de realizar estudos sobre o ensino de Geometrias não Euclidianas seja no âmbito do Ensino Superior nos cursos de Licenciatura em Matemática como

na Educação Básica, diz respeito à necessidade de compreensão por parte dos estudantes, de que a Geometria Euclidiana não é a única praticada no mundo em que vivemos e que muitos problemas relacionados ao homem e ao mundo científico encontram refúgio nos conhecimentos produzidos nas Geometrias não Euclidianas.

Além disso, as reflexões geradas pelo estudo de sistemas de diferentes Geometrias²⁶ podem romper com o pensamento geométrico culturalmente enraizado, onde o plano euclidiano é o espaço mais comum utilizado em Geometria, podendo vir a ser um obstáculo epistemológico para a compreensão dos avanços teóricos da Matemática e da Computação, uma vez que ele é real apenas no imaginário dos matemáticos (LEIVAS, 2013).

Contudo, a justificativa para a construção dessa proposta de intervenção se deve a necessidade do pesquisador em investigar as potencialidades pedagógicas do ensino de conceitos fundamentais das Geometrias não Euclidianas para o desenvolvimento do pensamento geométrico, em particular, para ampliar a compreensão da Geometria Euclidiana na formação inicial de professores de Matemática.

Algumas inquietações foram consideradas como agentes motivadores para a construção dessa proposta, a saber:

- Será o plano euclidiano o modelo geométrico mais adequado para representar o mundo em que vivemos?
- Sob a ótica da História da Matemática, como que os professores que lecionam Geometria veem a problemática gerada pelo Postulado das Paralelas?
- Que potencialidades o desenvolvimento lógico-histórico do conhecimento geométrico pode proporcionar para a formação de professores que ensinam matemática?
- De que maneira as Atividades de Ensino podem possibilitar a apropriação de novos domínios no campo do conhecimento geométrico, conduzindo o educador a reelaborar o seu pensar e, conseqüentemente, repensar sua prática pedagógica?

²⁶ O termo Geometrias é utilizado nessa obra com a proposta de fazer referências tanto a Geometria Euclidiana quanto a Geometrias não Euclidianas.

OBJETIVOS

Geral:

Investigar as potencialidades pedagógicas do ensino de conceitos básicos das Geometrias não Euclidianas para o desenvolvimento do pensamento geométrico, em particular, para ampliar a compreensão da Geometria Euclidiana na formação inicial de professores de Matemática. E a partir das ações teórico-metodológicas proposta pela Atividade Orientadora de Ensino (AOE) provocar reflexões em futuros professores sobre o ensino de Geometrias não Euclidianas na Educação Básica.

Específicos:

1. Colaborar com a formação de futuros professores de Matemática no que tange o desenvolvimento lógico histórico do pensamento geométrico;
2. Proporcionar aos participantes envolvidos questionamentos e reflexões acerca do ensino de Geometrias não Euclidianas na Educação Básica;
3. Estimular a organização e produção de Atividades de Ensino que possibilite a apropriação de domínios de modelos geométricos diferentes do modelo geométrico euclidiano;
4. Fazer emergir outras Geometrias e, portanto, novos conhecimentos que permitam solucionar problemas que a Geometria Euclidiana não consegue.

METODOLOGIA

A formação está prevista para o segundo semestre do ano letivo de 2019, com intuito promover com os futuros professores de Matemática momentos de reflexão acerca do ensino de conceitos fundamentais de Geometrias não Euclidianas na educação básica, ressaltando a importância da apropriação de diferentes modelos geométricos pelos estudantes para resolverem situações-problema em que modelo geométrico euclidiano encontra limitações para solucioná-las.

Essa formação é parte da pesquisa de doutorado intitulada “Geometrias não Euclidianas na Formação Inicial do Professor de Matemática: um caminho para o desenvolvimento do pensamento geométrico”, vinculada ao Programa de Pós-Graduação em

Educação Matemática e Tecnológica – Edumatec, que será ofertado no segundo semestre do ano letivo de 2019, em parceria com a Universidade do Estado da Bahia – Uneb. A proposta será desenvolvida a partir de um projeto de Extensão Universitária vinculado ao Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco com o intuito de promover junto a discentes do curso de Licenciatura em Matemática da Uneb a discussão sobre o ensino de Geometrias não Euclidianas a partir da vivência e exploração de Atividades de Ensino.

Para tanto, estão previstos 07 encontros presenciais entre os meses de abril, maio e junho de 2019, no formato de oficinas com temáticas que abordem as questões do ensino de Geometrias não Euclidianas na Educação Básica, perfazendo um total de 21 horas presenciais. Durante as oficinas os discentes irão vivenciar e explorar atividades de ensino sobre Geometrias não Euclidianas a partir dos pressupostos teórico-metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino (MOURA, 1996). Todas as atividades de ensino serão desenvolvidas em grupos formados por quatro discentes. Além disso, os discentes terão 9 horas para realizarem tarefas não presenciais que serão solicitadas ao longo do desenvolvimento da formação e deverão compor um portfólio como um dos instrumentos de avaliação de aprendizagem do curso. O portfólio será desenvolvido pelos discentes contendo todas as atividades desenvolvidas durante a formação.

Descrição da proposta de intervenção

Encontro	Conteúdo	Objetivo	Ações a ser desenvolvidas	C.H.
1º 13/04/19	Discussão de aspectos de natureza histórico-epistemológica sobre os Postulados de Euclides.	Compreender o modelo geométrico euclidiano a partir dos postulados de Euclides.	- Aplicação de questionário diagnóstico; - Socialização das resoluções; - Análise e discussão dos Postulados de Euclides.	3h
2º 27/04/19	Construção de conceitos básicos sobre Geometria Esférica.	Identificar conceitos elementares de <i>Geometria Esférica</i> .	- Realização da Atividade de Ensino sobre Geometria Esférica; - Apresentação e discussão em plenária dos resultados desenvolvidos por cada grupo; - Análise de como ficaria o enunciado do Postulado das Paralelas na Geometria Esférica.	3h
3º 04/05/19	A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.	Diferenciar a Geometria Euclidiana da Geometria Esférica pela construção de triângulos.	- Realização da Atividade de Ensino sobre Geometria Esférica; - Apresentação e discussão em plenária dos resultados desenvolvidos por cada grupo;	3h
4º 11/05/19	A Geometria do Globo Terrestre.	Aplicar os conceitos sobre <i>Geometria Esférica no globo terrestre e comparar a sua planificação com sua forma espacial</i> .	- Realização da Atividade de Ensino sobre a Geometria do Globo Terrestre; - Apresentação do Vídeo: As aventuras de Radix. - Apresentação e discussão em plenária dos resultados desenvolvidos por cada grupo;	3h

			- Análise de como ficaria o enunciado do Postulado das Paralelas na Geometria Esférica.	
5º 18/05/19	Construção de um transferidor esférico para mensurar ângulos formados por triângulos esféricos.	Investigar os ângulos formados em triângulos esféricos.	- Construção de um transferidor esférico; - Medir ângulos a partir de um transferidor esférico. - Atividade Individual para Institucionalização do saber.	3h
6º 25/05/19	Construção de triângulos e retas paralelas em superfícies hiperbólicas.	Investigar conceitos elementares da Geometria Hiperbólica.	- Realização da Atividade de Ensino sobre Geometria Hiperbólica; - Apresentação e discussão em plenária dos resultados desenvolvidos por cada grupo; - Análise de como ficaria o enunciado do Postulado das Paralelas na Geometria Hiperbólica.	3h
7º 01/06/19	A Geometria dos Espaços ou Geometrias não Euclidianas	Diferenciar a partir dos Postulados de Euclides a Geometria Euclidiana das Geometrias Esférica e Hiperbólica.	- Sistematização das Geometrias por meio de um quadro comparativo; - Socialização da atividade. - Atividade Individual para Institucionalização do saber. - Considerações finais.	3h

CONTEÚDOS

- Discussão de aspectos de natureza histórico-epistemológica dos Postulados de Euclides;
- Construção de conceitos básicos sobre Geometria Esférica;
- Construção de conceitos básicos sobre Geometria Hiperbólica.

PROGRAMAÇÃO

O curso será ministrado aos sábados das 08:00h à 11:00h na Universidade do Estado da Bahia – Uneb/BA, Campus X.

1º Encontro (13/04/19) – 3h00min (Postulados de Euclides)

- Apresentação do curso, metodologia, cronograma das propostas da formação e preenchimento do termo de participação;
- Aplicação de questionário para traçar o perfil dos participantes e atividade diagnóstica em grupo sobre conceitos geométricos;
- Socialização sobre as resoluções propostas pelos participantes para a atividade diagnóstica;
- Análise e discussão acerca dos Postulados de Euclides, em especial, o Postulado das Paralelas - como conhecido em seu contexto histórico.

2º Encontro (27/04/19) – 3h00min (Geometria Esférica)

- Roda de conversas – revisar as noções construídas no encontro anterior;

- Situação-problema desencadeadora de noções sobre Geometria Esférica;
- Desenvolvimento da Atividade de Ensino sobre Geometria Esférica (Atividade em Grupo);
- Apresentação e discussão em plenária dos resultados desenvolvidos por cada grupo;
- Análise de como ficaria o enunciado do Postulado das Paralelas na Geometria Esférica.

3º Encontro (04/05/19) – 3h00min - (Geometria Esférica)

- Roda de conversas – revisitar as noções construídas no encontro anterior;
- Situação-problema desencadeadora para diferenciar a Geometria Euclidiana da Geometria Esférica;
- Aplicação da Atividade de Ensino sobre Geometria Esférica (Atividade em Grupo);
- Apresentação e discussão em plenária dos resultados desenvolvidos por cada grupo e construção da solução matemática adequada em coletividade.

4º Encontro (11/05/19) - 3h00min (Geometria Hiperbólica)

- Roda de conversas – revisitar as noções construídas no encontro anterior;
- Situação-problema desencadeadora de noções sobre Geometria Hiperbólica;
- Desenvolvimento da Atividade de Ensino sobre Geometria Hiperbólica (Atividade em Grupo);
- Apresentação e discussão em plenária dos resultados desenvolvidos por cada grupo;
- Análise de como ficaria o enunciado do Postulado das Paralelas na Geometria Hiperbólica.

5º Encontro (18/05/19) - 3h00min – (Modelos Geométricos)

- Roda de conversas – revisitando as noções construídas no encontro anterior;
- Oficina: construção de um transferidor esférico;
- Atividade Individual para Institucionalização do saber.

6º Encontro (25/05/19) - 3h00min – (Modelos Geométricos)

- Roda de conversas – revisitando as noções construídas no encontro anterior;
- Realização da Atividade de Ensino sobre Geometria Hiperbólica;
- Apresentação e discussão em plenária dos resultados desenvolvidos por cada grupo;
- Análise de como ficaria o enunciado do Postulado das Paralelas na Geometria Hiperbólica.

7º Encontro (01/06/19) - 3h00min – (Modelos Geométricos)

- Apresentação dos modelos geométricos por meio de quadros comparativos;
- Atividade Individual para Institucionalização do saber.
- Encerramento: confraternização

Público Alvo

- Discentes do curso de Licenciatura em Matemática da Uneb-Câmpus X.
- Serão disponibilizadas 16 vagas para o curso.

Carga-Horária Total: 30 horas

- Encontros presenciais: 21 horas distribuídos em 7 encontros.

- Atividades não presenciais: 9 horas para o desenvolvimento de estudos individuais e coletivos; produção de portfólio do curso)

As atividades não presenciais serão solicitadas como requisito para a conclusão da formação.

Responsável

- **Clovis Lisboa dos Santos Jr.:** Pesquisador, professor de Matemática da Uneb/Câmpus X, Mestre em Educação em Ciências e Matemática, doutorando no Programa de Pós-graduação em Matemática e Tecnológica – Edumatec vinculado à Universidade Federal de Pernambuco – UFPE.

Contato: e-mail – prof.clovislisboa@gmail.com

Supervisão técnica-pedagógica

- **Profª. Drª. Lícia Leão de Souza Maia** – docente da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, pesquisadora colaboradora do programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC/UFPE.

Contato: e-mail: liciaslm@hotmail.com

- **Profª. Drª. Célia Barros Nunes** – docente da Universidade do Estado da Bahia – Uneb/Câmpus X, pesquisadora vinculada à UNESP/Rio Claro.

Contato: e-mail: celiabns@gmail.com

Realização

Universidade do Estado da Bahia – Uneb/Câmpus X
Colegiado de Matemática

Instituição Colaboradora

Universidade Federal de Pernambuco – UFPE
Centro de Educação - UFPE
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC/UFPE.

APÊNDICE F- ROTEIRO DE OBSERVAÇÃO

ROTEIRO DE OBSERVAÇÃO DA ATIVIDADE DE ENSINO

1. DADOS DE IDENTIFICAÇÃO

Nome do observador (a): _____

Grupo: _____ Turno: _____ Data da observação: __/__/____ Nº do encontro: _____

Tema do Encontro: _____

2. ASPECTOS A SEREM OBSERVADOS DURANTE A PROPOSTA DE INTERVENÇÃO

PLANEJAMENTO: A INTERAÇÃO MEDIADA ENTRE OS PARTICIPANTES E O CONTEÚDO

- A importância do conteúdo abordado na formação de futuros professores de Matemática.
- O clima motivacional dos participantes em relação ao conteúdo a ser aprendido.
- Os recursos utilizados nas investigações propostas no curso de formação.
- Adequação do tempo para os participantes fazerem anotações, exporem as dúvidas, debaterem e resolverem problemas durante a realização da Atividade de Ensino.

INSTRUMENTOS PEDAGÓGICOS: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E RECURSOS UTILIZADOS

- A abordagem dos conteúdos geométricos em relação com a realidade sócio-cultural dos participantes.
- Aspectos relevantes no desenvolvimento da prática pedagógica empregada pelo professor-formador do curso.
- De que maneira o material utilizado e a(s) intervenções do professor-formador do curso ajudou na realização das atividades pelos participantes?

MEDIAÇÃO: INTERAÇÃO MEDIADA ENTRE PROFESSOR E PARTICIPANTES

- A proposta de aprendizagem do conteúdo negociado no curso na visão dos participantes.
- Aspectos relativos às relações interpessoais entre o professor formador e os participantes.
- Aspectos relevante a respeito da organização do ambiente de investigação em relação a produção de conhecimento entre os participantes.
- Existe clima de cooperação entre os participantes? E como você avalia as relações interpessoais existentes entre os participantes?
- Os participantes se sentem à vontade para colocar suas hipóteses e opiniões na discussão? Comente.

CONHECIMENTO GEOMÉTRICO: FORMAÇÃO DE CONCEITOS CIENTÍFICOS

- Descreva aspectos relevantes (positivos e/ou negativos) presentes no desenvolvimento da Atividade de Ensino no que tange a formação de conceitos sobre os modelos geométricos abordados.
- Os participantes ao desenvolverem a Atividade de Ensino apresentaram dificuldades para reconhecer e construir conhecimentos sobre a Geometria não Euclidiana abordada? Se sim, quais foram essas dificuldades?