Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

WASTHENNY VASCONCELOS CAVALCANTE

ESTIMATIVAS DE NORMAS PARA FORMAS E POLINÔMIOS EM C_0 E L_0

Recife

2019

WASTHENNY VASCONCELOS CAVALCANTE

ESTIMATIVAS DE NORMAS PARA FORMAS E POLINÔMIOS EM C_0 E L_0

Este trabalho foi apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Núñez Alarcón

Coorientador: Prof. Dr. Daniel M. Pellegrino

Recife

2019

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

C376e Cavalcante, Washenny Vasconcelos
Estimativas de normas para formas e polinômios em C_0 e L_0 / Wasthenny Vasconcelos Cavalcante. – 2019.
86 f.: il., fig.

Orientador: Daniel Núñez Alarcón.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2019.
Inclui referências.

1. Análise. 2. Polinômios. I. Alarcón, Daniel Núñez (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2020 - 65

WASTHENNY VASCONCELOS CAVALCANTE

ESTIMATIVAS DE NORMAS PARA FORMAS E POLINÔMIOS EM C_0 E L_0

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 15/02/2019

BANCA EXAMINADORA

Ao meu avô Jesse Florêncio Cavalcante (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a minha família por sempre estarem presente e me auxiliarem quando necessitei durante a minha vida.

Aos meus amigos Cássio, Tarciany, Emanuelle e Hector com quem vivenciei diversas situações que me ajudaram a conhecer como pessoa.

Aos meus orientadores professor Doutor Daniel Núñez Alarcón e o professor Doutor Daniel Marinho Pellegrino que me ajudaram com o desenvolvimento deste trabalho e meu futuro como jovem pesquisador.

A professora Maria Pilar Rueda Segado e toda sua família que durante minha estância na Espanha ajudaram-me com tudo que precisei.

Aos meus amigos Charles, Islanita e Serginei com que passei bons momentos durante o doutorado.

Aos amigos que fiz na Espanha.

Wasthenny Vasconcelos Cavalcante

RESUMO

Na década dos anos 30, os matemáticos Bohnenblust, Hardy, Hille e Littlewood, provaram uma série de resultados que estabelecem uma interessante comparação, via constantes, entre a sup-norma e a ℓ_q-norma dos coeficientes das formas multilineares (respectivamente polinômios) em certos espaços de sequências. As constantes envolvidas no resultado de Bohnenblust–Hille, apesar de ainda serem desconhecidas, têm particular interesse devido às suas diversas aplicações em várias áreas da matemática, como Análise Harmônica e Teoria dos Números, e inclusive em Teoria da Informação Quântica. As constantes estudadas por Hardy e Littlewood, ainda desconhecidas, funcionam como ferramentas para aplicações nas áreas da matemática. Neste trabalho, obtemos vários resultados que fornecem novas informações sobre as constantes, e também os resultados de Bohnenblust, Hille, Hardy e Littlewood. Para facilitar a leitura o capítulo 2 trata de estudar formas bilineares e polinômios 2-homogêneos. A partir do capítulo 3 estudamos as propriedades das constantes e apresentamos algumas estimativas para elas. Em seguida, percebemos a dificuldade de determinar o valor exato das constates. Então fornecemos um método de busca para tais constantes que faz uso do estudo da geometria dos espaços $\mathcal{L}(^m c_0)$. O trabalho é finalizado com algumas aplicações sobre as constantes de Bohnenblust e Hille.

Palavras-chave: Desigualdades. Constantes. Formas. Polinômios.

ABSTRACT

In the 1930s, mathematicians Bohnenblust, Hardy, Hille and Littlewood, proved a series of results that establish an interesting comparison, via constants, between the sup-norm and the ℓ_q -norm of the coefficients of the multilinear forms (respectively polynomials) in certain sequence spaces. The constants involved in the Bohnenblust - Hille result, although still unknown, are of particular interest due to their diverse applications in various areas of mathematics, such as Harmonic Analysis and Number Theory, and even in Quantum Information Theory. The constants studied by Hardy and Littlewood, still unknown, work as tools for applications in the areas of mathematics. In this work, we obtain several results that provide new information about the constants, as well as the results of Bohnenblust, Hille, Hardy and Littlewood. To make reading easier, chapter 2 deals with studying bilinear forms and 2-homogeneous polynomials. From chapter 3 we study the properties of the constants and present some estimates for them. Then, we realized the difficulty of determining the exact value of the findings. Then we provide a search method for such constants that makes use of the study of the geometry of the spaces $\mathcal{L}(^m c_0)$. The work ends with some applications on the Bohnenblust and Hille constants.

Keywords: Inequalities. Constants. Forms. Polynomials.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É difícil dizer quais são as principais razões para justificar o, não pouco, interesse que existe em matemática para estudar polinômios. Provavelmente os dois motivos principais são os seguintes: o primeiro é que, sem dúvida alguma, eles fazem um papel intermediário importante entre as funções lineares e as funções contínuas (diferenciáveis ou não). O segundo motivo, não menos importante, é que os polinômios são mais manejáveis que as funções que eles aproximam.

Para deixarmos claro ao leitor a afirmação do parágrafo anterior, vejamos o seguinte:

Sejam E e F espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Para definirmos um polinômio sobre E, devemos primeiro relembrarmos algumas noções relacionadas aos operadores multilineares.

Definição 1.0.1. *(a) Dado $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(^mE, F)$ denota o espaço de todos os operadores m-lineares contínuos $Q : E^m \to F$. Verifica-se facilmente que*

$$\|Q\| := \sup\{\|Q(x_1, \ldots, x_m)\| : x_1, \ldots, x_m \in B_E\}$$

define uma norma (chamada $\sup$-norma) completa em $\mathcal{L}(^mE, F)$.

(b) Um operador m-linear contínuo $Q \in \mathcal{L}(^mE, F)$, será chamado simétrico se

$$Q(x_1, \ldots, x_m) = Q(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_m \in E$ e toda permutação σ dos primeiros m inteiros positivos. Denotaremos o espaço dos operadores m-lineares simétricos por $\mathcal{L}_s(^mE, F)$.

(c)Para $m \in \mathbb{N}$, seja

$$\mathcal{P}(^mE, F) = \{P : E \to F : \exists A \in \mathcal{L}(^mE, F),\ tal\ que\ P(x) = A(x, \ldots, x), \forall x \in E\}.$$

Este é o espaço dos polinômios m-homogêneos, o qual é um espaço de Banach com a norma

$$\|P\| := \sup\{\|P(x)\| : x \in B_E\}. \tag{1.1}$$

Diremos que P é um polinômio sobre E, e escrevemos $P \in \mathcal{P}(E, F)$, se P é uma soma finita de polinômios homogêneos.

Denotemos por $\widehat{A}$ a restrição de A a diagonal de E^m. Dado um polinômio homogêneo P, existe um único operador m-linear simétrico A tal que $\widehat{A} = P$. De fato, não é difícil verificar que $\mathcal{P}(^mE, F)$ e o espaço dos operadores m-lineares simétricos $\mathcal{L}_s(^mE, F)$ são isomorfos, como espaços de Banach.

Obviamente, partindo do operador m-linear simétrico A, é fácil obter o polinômio m-homogêneo P associado. O caso contrário não é tão imediato e é um resultado que se conhece como "Fórmula de Polarização", a qual enunciaremos a seguir (em versão probabilística):

Teorema 1.0.2 (Fórmula de Polarização)**.** *Seja $s_1, ..., s_m$ uma sequência de variáveis de Bernoulli. Sejam $x_1, ..., x_m \in E$ e $P \in \mathcal{P}(^m E, F)$. Então o operador m-linear simétrico A, associado ao P, vem dado pela expressão:*

$$A\left(x_1, ..., x_m\right) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{s_j=\pm 1 \\ j=1,...,m}} s_1 \cdots s_m P\left(\sum_{j=1}^{m} s_j x_j\right).$$

O seguinte corolário exibe uma relação entre as normas de A e P.

Corolário 1.0.3. *Seja $P \in \mathcal{P}(^m E, F)$ cujo operador m-linear simétrico associado é A. Então*

$$\|A\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P\|.$$

Demonstração. Aplicando o teorema anterior aos vetores unitários $x_1, ..., x_m \in E$ obtemos

$$\|A\left(x_1, ..., x_m\right)\| \leq \frac{1}{m!} \sup_{s_j=\pm 1} \left\|P\left(\sum_{j=1}^{m} s_j x_j\right)\right\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P\|$$

pois cada $\sum_{j=1}^{m} s_j x_j$ tem norma, no máximo, m. □

Observemos a seguinte pergunta:

Seja E um espaço de Banach. Qual é o completamento de $\mathcal{P}(E, \mathbb{K})$?

A resposta a esta pergunta, para o caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. É obtida a partir da seguinte definição:

Definição 1.0.4. *Seja U um subconjunto aberto, não vazio e próprio de um espaço de Banach complexo de E. Diz-se que uma função $f : U \to \mathbb{C}$ é análitica (ou holomorfa) em U se uma das seguintes condições equivalentes é satisfeita:*

(a) A função f é diferenciável no sentido de Fréchet em todo ponto $z \in U$.

(b) Para todo $z \in U$, existe a expansão de Taylor em z que converge para f em torno de z. É dizer que, para todo x em alguma vizinhança de z, podemos escrever

$$f\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(b\right)}{n!} \left(x - b\right),$$

onde cada $f^{(n)}(b) \in \mathcal{P}(^n E, \mathbb{K})$.

Como de costume denotamos por $\mathcal{H}(U)$ o espaço de funções holomorfas sobre U. Uma observação importante, se $\dim E = \infty$, existem muitas funções $f \in \mathcal{H}(E)$ tais que $sup_{x \in B_E}|f(x)| = \infty$. Por exemplo, se $E = c_0$ ou ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, a função $g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^i$ não é limitada na bola unitária B_E. Seja $\mathcal{H}_b(E)$ o conjunto de funções $f \in \mathcal{H}(E)$ tais que $\sup_{\|x\| \leq k} |f(x)| < \infty$, para todo $k > 0$, munido da métrica natural induzida pela família $f \to \sup_{\|x\| \leq k} |f(x)| < \infty$. A seguinte proposição é uma velha conhecida dos cursos de Análise complexa em dimensão infinita e justifica, em boa parte, o que foi dito no primeiro parágrafo desta introdução:

Proposição 1.0.5. *Se E é um espaço de Banach complexo, então o completamento dos espaços de polinômios complexos $\mathcal{P}(E, \mathbb{C})$ é $\mathcal{H}_b(E)$.*

Demonstração. Basta verificar os seguintes fatos:

1) $\mathcal{H}_b(E)$ é completo.

2) Dado $f \in \mathcal{H}_b(E)$, a série de Taylor $x \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)$ converge uniformemente a f em qualquer bola de E. □

Uma prova detalhada desta proposição, assim como outros resultados relacionados à estrutura dos espaços $P(E; \mathbb{K})$. Pode ser encontrada em (DINEEN, 2012).

Os polinômios sobre espaços de dimensão infinita possuem várias formas de serem introduzidos e estudados. Por exemplo, através de operadores multilineares, produtos tensoriais, cálculo diferencial, restrições a espaços de dimensão finita, etc. Neste trabalho, longe de pretendermos fazer um estudo profundo sobre polinômios, exibiremos alguns resultados que nos fornecem ferramentas no momento de estimar a norma do supremo de um polinômio (ou forma multilinear) sobre alguns espaços clássicos de sequências com valores em $\mathbb{K}$, dado que, em geral, estas normas são dificílimas de serem calculadas, ao tempo que um resultado conhecido diz que polinômios m-homogêneos e operadores m-lineares são contínuos sobre E se, e somente se, eles são limitados na bola unitária B_E ou $(B_E)^m$, respectivamente.

Para entendermos melhor o contexto em que trabalharemos, observemos as seguintes restrições a espaços de dimensão finita. Começaremos relembrando que quando $E = \mathbb{K}^n$, o polinômio m-homogêneo P pode ser escrito como

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha, \tag{1.2}$$

com $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ e $x^\alpha = x_1^{\alpha_n} ... x_n^{\alpha_n}$.

Além disso, quando o espaço de Banach possui dimensão finita, é possível definir em $\mathcal{P}(^m E)$ a seguinte norma (Lembremos que se a dimensão de E é n, podemos identificar E por $\mathbb{K}^n$).

Definição 1.0.6. *Seja $P \in \mathcal{P}\left({}^{m}E\right)$ e $q \geq 1.$ A l_q norma de P (também conhecida como l_q-norma dos coeficientes de P) denotada por $\left|\cdot\right|_q$ é:*

$$\left|P\right|_q := \left(\sum_{|\alpha|=m} \left|a_\alpha\right|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

onde P está sendo considerado como em (1.2).

Assim, se E possui dimensão finita, é conhecido que a norma do supremo $\|\cdot\|$ e a ℓ_q-norma de P são equivalentes. Isto é, existem constantes $d_{m,n}$ e $D_{m,n}$, tais que

$$d_{m,n} \left|P\right|_q \leq \|P\| \leq D_{m,n} \left|P\right|_q, \tag{1.3}$$

para todo $P \in \mathcal{P}\left({}^{m}E\right)$, onde n é a dimensão de E.

O problema mais interessante e difícil é determinar $d_{m,n} \geq 1$, para o qual $d_{m,n} \left|P\right|_q \leq \|P\|$, ou $\left|P\right|_q \leq d_{m,n}^{-1} \|P\|$, para todo polinômio $P \in \mathcal{P}\left({}^{m}E\right)$.

Observemos também o seguinte panorama. Consideremos $E = \left(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty\right)$, onde

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = \sup_i |x_i|.$$

Por estas condições, o *Princípio do Módulo Máximo* nos permite concluir que:

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} \left|a_\alpha\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|P\|$$

para todo polinômio $P \in \mathcal{P}\left({}^{m}E\right)$, da forma $P\left(x\right) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha$.

Além disso, a monotonicidade da l_q norma nos diz que se $q \geq 2$, então

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} \left|a_\alpha\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{|\alpha|=m} \left|a_\alpha\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|P\| \tag{1.4}$$

para todo polinômio $P \in \mathcal{P}\left({}^{m}E\right)$, da forma $P\left(x\right) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha$.

Como a constante, neste caso particular, independe de n, este resultado pode ser estendido ao seguinte caso de dimensão infinita:

Seja $c_0(\mathbb{C})$ o espaço de Banach das sequências complexas que convergem a zero, munido com a norma $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_i |x_i|$. Considere $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e, como de costume, defina $|\alpha| = \sum \alpha_j$; neste caso também denotaremos $\mathbf{x}^\alpha := \prod_j x_j^{\alpha_j}$, onde $\mathbf{x}$ é uma sequência em c_0. Desta forma, um polinômio m-homogêneo $P : c_0 \to \mathbb{C}$ pode ser denotado por

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha.$$

Assim, a estimativa (1.4) se transforma em:

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|P\|$$

para todo polinômio $P \in \mathcal{P}\left({}^m c_0(\mathbb{C})\right)$, da forma $P(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$, se $q \geq 2$.

Pergunta: Qual é o menor valor que q pode tomar, de tal forma que exista uma constante $D(m)$, de maneira que

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq D(m) \|P\|$$

para todo polinômio $P \in \mathcal{P}\left({}^m c_0(\mathbb{C})\right)$, da forma $P(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$?

A resposta deste problema foi dada em 1931 por Henric Bohnenblust e Einar Hille, no célebre trabalho intitulado *"On the absolute convergence of Dirichlet series"*, ao demostrar que o menor valor para tal q é exatamente $\frac{2m}{m+1}$. De fato, a desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille (BOHNENBLUST; HILLE, 1931) afirma que, dado m inteiro positivo, existe uma constante $D(m) > 0$ tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq D(m) \|P\|$$

para todo polinômio $P \in \mathcal{P}\left({}^m c_0(\mathbb{K})\right)$, da forma $P(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$. Ademais, o exponente $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo.

Obviamente, é de se esperar que uma versão análoga seja válida para formas $m-$lineares simétricas e contínuas. Com efeito, vale uma versão ainda mais geral, a qual evita a condição da simetria.

No caso de formas multilineares, queremos uma desigualdade que compare a $\sup -$norma e a "l_q-norma" dos coeficientes das formas $m-$lineares contínuas. Lembremos que dada uma forma $T \in \mathcal{L}\left({}^m c_0, \mathbb{K}\right)$, esta deve vir dada pela expressão

$$T\left(x^{(1)}, ..., x^{(m)}\right) = \sum_{i_1,...,i_m=1}^{\infty} a_{i_1 \cdots i_m} x_{i_1}^{(1)} ... x_{i_m}^{(m)},$$

onde os escalares $a_{i_1 \cdots i_m}$ são conhecidos como coeficientes de T e são dados pela fórmula $T\left(e_{i_1}, ..., e_{i_m}\right) = a_{i_1 \cdots i_m}$, para todo $i_j \in \mathbb{N}$.

Por exemplo, definamos por indução para cada inteiro $m \geq 2$, a seguinte forma $m-$linear $T_m \in \mathcal{L}\left({}^m c_0, \mathbb{R}\right)$:

$$\begin{aligned} T_2(x^{(1)}, x^{(2)}) =& x_1^{(1)} x_1^{(2)} + x_1^{(1)} x_2^{(2)} + x_2^{(1)} x_1^{(2)} - x_2^{(1)} x_2^{(2)} \\ T_m\left(x^{(1)}, ..., x^{(m)}\right) =& (x_1^{(m)} + x_2^{(m)}) T_{m-1}(x^{(1)}, ..., x^{(m-1)}) \\ &+ (x_1^{(m)} - x_2^{(m)}) T_{m-1}(B^{2^{m-2}}(x^{(1)}), B^{2^{m-2}}(x^{(2)}), \ldots, B^2(x^{(m-1)})), \end{aligned}$$

onde $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_n \in c_0$ para cada $1 \leq k \leq m$, e B é o operador *backward shift* em c_0.

É conhecido que

$$\left(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{\infty} \left| T_m(e_{i_1}, ..., e_{i_m}) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} = \left(4^{m-1}\right)^{\frac{m+1}{2m}} = 2^{\frac{m-1}{m}} \|T_m\|.$$

Em geral, é válida a seguinte desigualdade para toda forma $T \in \mathcal{L}\left({}^m c_0, \mathbb{K}\right)$:

Teorema (Desigualdade Multilinear de Bohnenblust–Hille). Seja $m \geq 2$ um inteiro positivo. Existe uma constante $C\left(m\right) \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C\left(m\right) \|T\|,$$

para toda forma $T \in \mathcal{L}\left({}^m c_0, \mathbb{K}\right)$.

Na desigualdade anterior, o expoente $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo e $\|T\|$ está denotando a $\sup -$norma da forma T . Também, o exemplo anterior nos diz que, para o caso de escalares reais, temos $C\left(m\right) \geq 2^{\frac{m-1}{m}}$ para todo $m \geq 2.$ Esta estimativa, assim como a forma $m-$linear T_m dada acima, foi definida pela primeira vez (pelo menos neste contexto) em (DINIZ et al., 2014a).

Como foi dito antes, conhecer estimativas das constantes $D\left(m\right)$ e $C\left(m\right)$ é útil no momento de querer obter informação da respectiva $\sup -$norma. Além disso, possuir boas estimativas para $D\left(m\right)$ e $C\left(m\right)$ são cruciais para aplicações (por exemplo, para determinar o valor assintótico exato do crescimento do *Raio de Bohr*, ver (BAYART; PELLEGRINO; SEOANE-SEPÚLVEDA, 2014)). Por outro lado, estas desigualdades (e suas constantes) permeiam em várias áreas da matemática, como Análise de Fourier, Teoria dos Números, Probabilidade, Teoria de Operadores, e incluso em Teoria da Informação Quântica, ver (MONTANARO, 2012).

A Desigualdade Multilinear de Bohnenblust–Hille foi demonstrada originalmente em 1931 com constantes de crescimento exponencial. Foi somente em 2012 que Núñez-Alarcón, Pellegrino, Seoane-Sepúlveda e Serrano-Rodríguez, baseados em um trabalho de Defant, Popa e Schwarting, proporcionaram (surpreendentemente) constantes com crescimento sub-polinomial (veja (DEFANT; POPA; SCHWARTING, 2010; ALARCÓN et al., 2013)).

Para o caso polinomial, a seguinte tabela mostra como as estimativas superiores para $D\left(m\right)$ foram evoluindo:

Autores	Ano	Estimativa
Bohnenblust e Hille	1931	$D\left(m\right)\leq m^{\frac{m+1}{2m}}\left(\sqrt{2}\right)^{m-1}$
Defant, Frerick, Ortega-Cerdá, Ounaïes, e Seip	2011	$D\left(m\right)\leq\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\sqrt{m}\left(\sqrt{2}\right)^{m-1}$
Bayart, Pellegrino, e Seoane-Sepúlveda	2013	$D\left(m\right)\leq\kappa(\varepsilon)\left(1+\varepsilon\right)^{m}$,

onde, no diagrama anterior, $\kappa(\varepsilon)\left(1+\varepsilon\right)^{m}$ se traduz que dado $\varepsilon>0$, existe uma constante $\kappa\left(\varepsilon\right)>0$ tal que $D\left(m\right)\leq\kappa(\varepsilon)\left(1+\varepsilon\right)^{m}$ para todo m.

Todas estas ideias possuem sua versão análoga para quando em $\mathbb{K}^n$ se usa a seguinte norma:

$$\left\|(x_1,...,x_n)\right\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

onde p é um valor real maior ou igual a 1. No caso infinito dimensional, o seguinte resultado é verdadeiro devido a Hardy–Littlewood, Praciano-Pereira e Dimant–Sevilla-Peris:

Teorema (Desigualdade de Hardy–Littlewood polinomial). Para $m<p\leq\infty$, existe uma constante $D_{\mathbb{K},m,p}\geq 1$ tal que

$$\begin{array}{rcll}\left(\sum\limits_{|\alpha|=m}|a_\alpha|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} & \leq & D_{\mathbb{K},m,p}\,\|P\|, & \text{se } m<p\leq 2m,\\ \left(\sum\limits_{|\alpha|=m}|a_\alpha|^{\frac{2mp}{mp+p-2m}}\right)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}} & \leq & D_{\mathbb{K},m,p}\left\|P\right\|, & \text{se } p\geq 2m\end{array}\tag{1.5}$$

para todo polinômio m-homogêneo $P:\ell_p\to\mathbb{K}$ dado por

$$P(x)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha\mathbf{x}^\alpha.$$

Além disso, o expoente $\frac{2mp}{mp+p-2m}$ (respectivamente $\frac{p}{p-m}$) é ótimo.

Para formas multilineares, as desigualdades válidas são:

Teorema (Desigualdade de Hardy–Littlewood multilinear). Para $m<p\leq\infty$,

existe uma constante $C_{\mathbb{K},m,p} \geq 1$ tal que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^{\frac{p}{p-m}} \right)^{\frac{p-m}{p}} &\leq C_{\mathbb{K},m,p} \|T\|, \quad \text{se } m < p \leq 2m, \\ \left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^{\frac{2mp}{mp+p-2m}} \right)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}} &\leq C_{\mathbb{K},m,p} \|T\|, \quad \text{se } p \geq 2m, \end{aligned} \tag{1.6}$$

para quaisquer forma m-linear $T : \ell_p \times \cdots \times \ell_p \to \mathbb{K}$. Além disso, o expoente $\frac{p}{p-m}$ (respectivamente $\frac{2mp}{mp+p-2m}$) é ótimo.

O presente trabalho é devotado, principalmente, ao cálculo e estudo das constantes $C_{\mathbb{K},m,p}$ e $D_{\mathbb{K},m,p}$ da desigualdade polinomial e multilinear de Hardy–Littlewood. Em geral, devido à dificuldade intrínseca do problema de estimar estas constantes, nós não trabalharemos diretamente nos espaços $\mathcal{P}(^m\ell_p)$ e $\mathcal{L}(^m\ell_p)$ respectivos se não nos seus truncamentos. Isto é, nos espaços $\mathcal{P}(^m\ell_p^n)$ e $\mathcal{L}(^m\ell_p^n)$. Pode ser observado facilmente, que na medida em que for aumentado tanto o grau da linearidade (ou homogeneidade), quanto a dimensão dos espaços de sequências, irá aumentando também a dificuldade e complexidade do respectivo problema. Nós começaremos trabalhando com $m = n = 2$ e obteremos, usando diferentes técnicas, alguns resultados ótimos. Depois iremos aumentando o grau de linearidade (ou homogeneidade) e mudando as técnicas para obter nova, e cada vez mais limitada, informação. Finalmente, focaremos nosso esforço em $\mathcal{L}(^m c_0^n)$, que é a desigualdade de Bohneblust–Hille, e resolveremos o problema, formalmente, para quaisquer valores de m e n.

O trabalho encontra-se organizado da seguinte forma: No capítulo 1, trabalharemos com formas bilineares e polinômios 2- homogêneos. Iniciaremos o trabalho explorando os expoentes ótimos nas desigualdades de Hardy e Littlewood e tentaremos explicar porque há uma perda de suavidade no expoente ótimo quando se passa de um caso para o outro. Em seguida dedicamos uma seção para falarmos sobre estimativas ótimas nas desigualdades de Littlewood e Orlicz em $\mathcal{L}(^2c_0^2(\mathbb{C}))$ e na desigualdade de Hardy–Littlewood em $\mathcal{P}(^2\ell_p^2(\mathbb{R}))$. Por último, discutiremos sobre a relação existente entre as desigualdades de Hardy e Littlewood e a Teoria de Operadores Absolutamente Somantes.

No capítulo 2, iniciaremos exibindo estimativas superiores para a desigualdade de Bohnenblust–Hille em $\mathcal{L}(^m c_0(\mathbb{R}))$. Em seguida apresentamos propriedades de monotonicidade das constantes da desigualdade de Hardy–Littlewood em $\mathcal{L}(^m\ell_p(\mathbb{K}))$. Dedicamos a terceira seção deste capítulo para darmos estimativas numéricas na desigualdade de Hardy–Littlewood em $\mathcal{P}(^m\ell_m^2(\mathbb{R}))$. Finalizamos o capítulo explorando um novo tipo de desigualdade que chamamos de Hardy–Littlewood em $\mathcal{P}(^m\ell_m(\mathbb{K}))$.

No capítulo 3, estudaremos a geometria do espaço das formas m-lineares definidas sobre $c_0^n(\mathbb{R})$. Iniciamos com algumas propriedades algébricas que serão posteriormente usadas para obter resultados de caracterização dos pontos extremos das formas m-lineares sobre $c_0^n(\mathbb{R})$. Além disso, exibiremos um processo construtivo em tempo finito para calcular tais pontos extremos, e finalizaremos com alguns exemplos.

Para finalizar nosso trabalho o último capítulo exibe aplicações do algoritmo fornecido no capítulo 3 para obter as constantes ótimas da desigualdade de Bohnenblust e Hille para formas m-lineares em $c_0^n(\mathbb{R})$ verificando que tais constantes são algébricas. Finalmente, abordamos a relação do algoritmo anterior com uma famosa desigualdade de Grothendieck.

Os resultados deste trabalho fazem parte dos artigos:

(CAVALCANTE, 2018) Cavalcante, W. V. Some applications of the regularity principle in sequence spaces, Positivity, v. 22, p. 191–198, 2018.

(CAVALCANTE; NÚÑEZ-ALARCÓN, 2016) Cavalcante, W.; Núñez-Alarcón, D. Remarks on Inequality of Hardy and Littlewood, Quaestiones Mathematicae, v. 29, p. 1101–1131, 2016.

(CAVALCANTE; NÚÑEZ-ALARCÓN; PELLEGRINO, 2016) Cavalcante, W.; Núñez-Alarcón, D.; Pellegrino, D. New lower bounds for the constants in the real polynomial Hardy–Littlewood inequality, Numerical Functional Analysis and Optimization, v. 37, p. 927–937, 2016.

(CAVALCANTE; NÚNEZ-ALARCÓN; PELLEGRINO, 2015) Cavalcante, W.; Núñez-Alarcón, D.; Pellegrino, D. The optimal Hary–Littlewood constants for 2-homogeneus polynomials on $\ell_p\left(\mathbb{R}^2\right)$ for $2 < p \leq 4$ are $2^{\frac{2}{p}}$, arXiv:1507.02984v1 [math.FA], 2015.

(CAVALCANTE; PELLEGRINO, 2019) Cavalcante, W. V.; Pellegrino, D. Bohnenblust–Hille inequalities: analytical and computational aspects, AABC, 2018.

(CAVALCANTE; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2019) Cavalcante, W. V.; Pellegrino, D.; Teixeira, E. V. On the Geometry of Multilinear Forms, arXiv:1612.08397, 2017. Aparecerá em Communications in Contemporary Mathematics.

Notações e Terminologia:

Em todo esse texto, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Os espaços vetoriais sempre serão considerados sobre $\mathbb{K}$.

Chamaremos $\ell_p^n(\mathbb{K})$ o espaço $\mathbb{K}^n$ com a norma $\|\cdot\|_p$ para $1 \leq p < \infty$, onde

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $p = \infty$, denotamos por $c_0^n(\mathbb{K})$ o espaço $\mathbb{K}^n$ com a norma

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Se E é qualquer espaço de Banach, denotaremos o seu espaço dual topológico por E^*. Denotamos por B_E a bola unitária fechada $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ de um espaço de Banach E.

Denotamos por $\mathcal{L}(X_1, X_2, \ldots, X_m, Y)$ o espaço de Banach de todos os operadores m-lineares contínuos de $X_1 \times \ldots \times X_m$ em Y. Além disso, denotamos a norma de $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2, \ldots, X_m, Y)$ por

$$\|T\| = \sup_{\|x^{(1)}\|, \ldots, \|x^{(m)}\| \leq 1} \left\| T\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}\right) \right\|.$$

Quando $X_1 = \ldots = X_m = X$, denotamos por $\mathcal{L}(^m X, Y)$ ao invés de $\mathcal{L}(X, X, \ldots, X, Y)$.

Para todo $p \geq 1$, o número real p^* denota o conjugado desse número, isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1.$$

Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, definimos $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Por $\mathbf{x}^\alpha$ devemos denotar o monômio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ para qualquer $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

2 FORMAS BILINEARES E POLINÔMIOS 2-HOMOGÊNEOS: AS DESIGUALDADES CLÁSSICAS DE HARDY, LITTLEWOOD E ORLICZ

A desigualdade $4/3$ de Littlewood (LITTLEWOOD, 1930) (veja também (GARLING, 2007)) afirma que, existe uma constante ótima $L_{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |U(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \leq L_{\mathbb{K}} \|U\|$$

para toda forma bilinear contínua $U : c_0 \times c_0 \to \mathbb{K}$. Esta desigualdade é um dos pontos de partida da Teoria de Operadores Multilineares Múltiplo Somantes em espaços de Banach e, segundo os especialistas, é provavelmente uma das mais importantes desigualdades em Análise do século XX. É bastante conhecido que o expoente $4/3$ é ótimo e que $L_{\mathbb{K}} \leq \sqrt{2}$. Em 2012, por meio da forma bilinear

$$U(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2 \tag{2.1}$$

definida em $c_0 \times c_0$ (na verdade em $c_0^2 \times c_0^2$) foi demonstrado por Diniz, Muñoz-Fernández, Pellegrino e Seoane-Sepúlveda (veja (DINIZ et al., 2012)) que a constante ótima $L_{\mathbb{R}}$ é $\sqrt{2}$. Para escalares complexos é conhecido que $L_{\mathbb{C}} \leq 2/\sqrt{\pi}$.

Se substituirmos $4/3$ por $r > 4/3$, não é difícil provar que existe uma constante ótima $L_{\mathbb{K},r} \geq 1$ que satisfaz

$$\left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |U(e_i, e_j)|^{r}\right)^{\frac{1}{r}} \leq L_{\mathbb{K},r} \|U\|$$

para toda forma bilinear contínua $U : c_0 \times c_0 \to \mathbb{K}$. Segue trivialmente que $L_{\mathbb{K},r}$ é menor que $\sqrt{2}$ (caso real) e $2/\sqrt{\pi}$ (caso complexo). Em 2013, Núñez-Alarcón, Pellegrino e Seoane-Sepúlveda mostraram a seguinte estimativa ótima (veja (NUÑEZ-ALARCÓN; PELLEGRINO; SEOANE-SEPÚLVEDA, 2013)):

$$L_{\mathbb{R},r} = \begin{cases} 2^{\frac{2-r}{r}}, \text{ se } r \in \left[\frac{4}{3}, 2\right) \\ 1, \text{ se } r \geq 2. \end{cases}$$

Além disso, foi mostrado também no mesmo trabalho que, para o caso de escalares complexos, vale a estimativa:

$$L_{\mathbb{C},r} \leq \begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{4-2r}{r}}, \text{ se } r \in \left[\frac{4}{3}, 2\right) \\ 1, \text{ se } r \geq 2. \end{cases}$$

No entanto, até agora não foi possível concluir se estas estimativas são ótimas para $r \in \left[\frac{4}{3}, 2\right)$.

A desigualdade $4/3$ de Littlewood foi quase imediatamente generalizada em duas direções: Bohnenblust e Hille deram em 1931 uma extensão para formas $m-$lineares sobre c_0 e por outro lado Hardy e Littlewood provaram em 1934 um resultado análogo para formas bilineares sobre $\ell_p \times \ell_q$. O resultado de Hardy e Littlewood pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 2.0.1. *[Hardy–Littlewood, (HARDY; LITTLEWOOD, 1934, Teoremas 1, 2 e 4)] Sejam $p, q \geq 2$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. Existe uma constante $C_{p,q}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{j,k=1}^{\infty} |A(e_j, e_k)|^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} \leq C_{p,q}^{\mathbb{K}} \|A\|$$

para toda forma bilinear contínua $A : \ell_p \times \ell_q \to \mathbb{K}$, com

$$\rho = \frac{4pq}{3pq - 2p - 2q} \text{ quando } 0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$$

e

$$\rho = \frac{pq}{pq - p - q} \text{ quando } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1.$$

Ademais, o expoente ρ é ótimo em cada caso respectivo.

Se $p = \infty$ e/ou $q = \infty$, consideramos c_0 ao invés de ℓ_∞, e no expoente consideramos o caso limite. Por outro lado, se $p = q$, a desigualdade pode ser reescrita da seguinte forma:

Teorema 2.0.2 (Hardy–Littlewood, (HARDY; LITTLEWOOD, 1934, Teoremas 1, 2 e 4))**.** *Seja $p > 2$. Existe uma constante $C_p^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{j,k=1}^{\infty} |A(e_j, e_k)|^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} \leq C_p^{\mathbb{K}} \|A\|$$

para toda forma bilinear contínua $A : \ell_p \times \ell_p \to \mathbb{K}$, com

$$\rho = \frac{4p}{3p - 4} \text{ quando } p \geq 4$$

e

$$\rho = \frac{p}{p - 2} \text{ quando } 2 < p \leq 4.$$

Ademais, o expoente ρ é ótimo em cada caso respectivo.

As estimativas superiores conhecidas para $C_{p,q}^{\mathbb{K}}$ e $C_p^{\mathbb{K}}$ são:

$$\sqrt{2} \text{ quando } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

e

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \text{ quando } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Para o caso de estimativas inferiores, a única informação conhecida é a que foi fornecida por Araújo e Pellegrino em (ARAÚJO; PELLEGRINO, 2014): $C_{p,p}^{\mathbb{R}} \geq 2^{\frac{p-4}{2p}}$, para todo $4 < p < \infty$.

Como o Teorema 2.0.2 está enunciado para formas bilineares sobre $\ell_p \times \ell_p$, é natural nos indagar pela sua versão correspondente para polinômios 2-homogêneos, a qual podemos enunciar da seguinte maneira:

Teorema 2.0.3 (Hardy–Littlewood, (HARDY; LITTLEWOOD, 1934, Teoremas 1, 2 e 4))**.** *Seja $p > 2$. Existe uma constante $D_p^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{|\alpha|=2} |c_\alpha|^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \leq D_p^{\mathbb{K}} \|P\|$$

para todo polinômio $P \in \mathcal{P}\left({}^2\ell_p\right)$ da forma $P(x) = \sum_{|\alpha|=2} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$, com

$$\rho = \frac{4p}{3p-4} \text{ quando } p \geq 4$$

e

$$\rho = \frac{p}{p-2} \text{ quando } 2 < p \leq 4.$$

Ademais, o expoente ρ é ótimo em cada caso respectivo.

As estimativas superiores conhecidas para $D_p^{\mathbb{K}}$ são:

$$4\sqrt{2} \text{ quando } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

e

$$4\frac{2}{\sqrt{\pi}} \text{ quando } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Já para estimativas inferiores, a informação que conhecemos é $D_p^{\mathbb{C}} \geq 2^{\frac{2}{p}}$, para todo $2 < p < \infty$ (ver Araújo e Pellegrino (2015)).

Observação 2.0.4. *1) Notamos, ao observar os 3 teoremas acima, notamos que a expressão $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ ($p = 4$ respectivamente) separa em duas expressões diferentes o expoente ótimo ρ. Por que acontece esta perda de suavidade?*

2) Como foi dito, a forma (1.4) foi utilizada para encontrar a constante ótima $L_{\mathbb{K}}$. Essa forma bilinear somente precisa ser definida em c_0 truncado a partir da segunda coordenada (c_0^2) para obter a estimativa (inferior) ótima de $L_{\mathbb{K}}$. Por este motivo, e dada a dificuldade inerente de calcular a respectiva $\sup -$norma, é natural, num primeiro passo, tentar obter estimativas inferiores com dependência do número de variáveis.

Estes dois itens serão abordados no restante deste capítulo. Além disso, estudaremos o problema proposto por R. Blei Blei (2001) que é o de determinar a constante ótima para as seguintes situações:

Para cada inteiro positivo n, seguindo a notação usada por Blei (2001), sejam $\kappa_O^{\mathbb{C}}(n)$, $\kappa_L^{\mathbb{C}}(n)$, $\kappa_{4/3}^{\mathbb{C}}(n)$ as constantes ótimas das desigualdades a seguir:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|T(e_i,e_j)|\right)^2\right)^{1/2} \leq \kappa_O^{\mathbb{C}}(n)\,\|T\|\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{1/2} \leq \kappa_L^{\mathbb{C}}(n)\,\|T\|\,,$$

e

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|T(e_i,e_j)|^{4/3}\right)^{3/4} \leq \kappa_{4/3}^{\mathbb{C}}(n)\,\|T\|$$

para todas as formas bilineares $T\colon c_0^n(\mathbb{C}) \times c_0^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$.

Para o estudo de tal problema faremos uso do conceito de C^* álgebra. Ao usarmos tal conceito, podemos reformular o problema proposto por R. Blei, como problemas de otimização para usarmos programas de computação numérica e solucionar o problema no espaço $c_0^2(\mathbb{C})$. Também mostraremos algumas conexões dos Teoremas de Hardy–Littlewood com a Teoria dos Operadores Absolutamente Somantes.

2.1 Sobre a perda de suavidade no expoente ρ

Como foi dito, ao observar ambas as desigualdades do Teorema 2.0.1, surge uma questão natural: Por que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$ separa duas expressões diferentes para expoentes ótimos do Teorema 2.0.1? Nesta seção vamos revisitar as desigualdades de Hardy–Littlewood para justificar a perda de suavidade. De fato, vamos mostrar que, em um sentido mais preciso (o que deverá se tornar mais claro na Observação 2.1.2) o expoente $\frac{pq}{pq-p-q}$ do Teorema 2.0.1 não é ótimo. Apresentaremos versões de “otimalidade"e “suavidade” (Teorema 2.1.3) para os Teoremas de Hardy–Littlewood.

Precisaremos da seguinte versão geral da desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund (ver Albuquerque et al. (2014), Lema 6.2):

Lema 2.1.1 (Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund)**.** *Sejam* $m, N \geq 1$*,* $p_1,\ldots,p_m \in [1,\infty]$ *e, para* $p \geq 1$*,*

$$\alpha(p) = \begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{1}{p} & \textit{se } p \geq 2 \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Existe uma aplicação m-linear $A : \ell_{p_1}^N \times \ldots \times \ell_{p_m}^N \to \mathbb{K}$ da forma

$$A(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} \pm z_{i_1}^{(1)} \cdots z_{i_m}^{(m)},$$

para uma escolha adequada de "+" e "-", tal que

$$\|A\| \leq C_m N^{\frac{1}{2}+\alpha(p_1)+\ldots+\alpha(p_m)}$$

para uma constante $C_m > 0$.

Ao observar em ((HARDY; LITTLEWOOD, 1934), Teorema 2.0.2) podemos perceber ((HARDY; LITTLEWOOD, 1934), p. 247) que de fato os autores provaram que, para $\frac{1}{2} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$, existe uma constante $C \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |A(e_j, e_k)|^2 \right)^{\frac{\lambda}{2}} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq C\|A\|, \tag{2.2}$$

com $\lambda = \frac{pq}{pq-p-q}$, para toda forma bilinear contínua $A : \ell_p \times \ell_q \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Observemos primeiro o caso em que $\lambda > 2$. Hardy e Littlewood usam a monotonicidade da ℓ_r–norma para concluir, de (2.2), que

$$\left(\sum_{j,k=1}^{\infty} |A(e_j, e_k)|^{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq C\|A\|, \tag{2.3}$$

com $\lambda = \frac{pq}{pq-p-q}$ e para toda forma bilinear contínua $A : \ell_p \times \ell_q \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). A demonstração de que o expoente $\frac{pq}{pq-p-q}$ em (2.3) é ótimo é bastante simples. É suficiente considerar a forma bilinear $A_n : \ell_p \times \ell_q \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) dada por $A_n(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ e usar a desigualdade de Hölder. De fato, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{\lambda} = 1$, temos

$$\|A_n\| \leq n^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{2.4}$$

Se (2.3) mantém-se para algum r ao invés de λ, combinada com (2.4) deveríamos obter

$$n^{\frac{1}{r}} \leq C n^{\frac{1}{\lambda}}$$

para todo n, e assim

$$r \geq \lambda = \frac{pq}{pq-p-q}.$$

Em realidade, mesmo se considerarmos somas em apenas um índice (i.e. $j = k$), o expoente $\frac{pq}{pq-p-q}$ em (2.3) é ainda ótimo (Note que A_n são tipos de formas diagonais). Contudo, o que significa $\frac{pq}{pq-p-q}$ ser ótimo em (2.3) no sentido clássico? Isto significa (no sentido de (HARDY; LITTLEWOOD, 1934))) que, para ambos os índices j, k não podemos tomar simultaneamente expoentes menores que $\frac{pq}{pq-p-q}$. Em outras palavras, ao reescrever (2.3) como

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}|A(e_j,e_k)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right)^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq C\|A\|$$

não podemos ter $r = s < \frac{pq}{pq-p-q}$. Mas, uma questão diferente, motivada por (2.2), deveria ser: É possível encontrar (r,s) que satisfaçam a desigualdade acima com $r = 2$ e $s < \frac{pq}{pq-p-q}$ ou $r < 2$ e $s = \frac{pq}{pq-p-q}$? Ademais, surge outra pergunta: É (2.2) ótimo neste novo sentido? Salientamos o fato básico de que

$$\left(\sum_{j,k=1}^{\infty}|A(e_j,e_k)|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|A(e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}\right)^{\frac{1}{\lambda}},$$

mais o fato que o expoente $\lambda = \frac{pq}{pq-p-q}$ ser ótimo em (2.2) no sentido clássico não garante que os expoentes λ ou 2 em (2.2) são ótimos no novo sentido: Para esta tarefa precisaremos da desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund. De fato, se

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}|A(e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq C\|A\|$$

para toda forma bilinear contínua $A : \ell_p \times \ell_q \to \mathbb{K}$, ao usar a forma bilinear fornecida pelo Lema 2.1.1, temos para todo N,

$$\left(N\left(N^{\frac{1}{2}}\right)^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq CN^{\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})},$$

e assim

$$N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{s}} \leq CN^{\frac{3}{2}-\frac{q}{p}-\frac{1}{q}},$$

ou seja,

$$s \geq \lambda.$$

No caso em que o expoente $\lambda = \frac{pq}{pq-p-q}$ é fixado, mostra-se que o expoente 2 não pode ser melhorado usando um argumento similar.

Observação 2.1.2. *Em nosso sentido "mais preciso"de otimalidade, o expoente* $\frac{pq}{pq-p-q}$ *em (2.3) não é ótimo, porque o primeiro expoente* $\lambda = \frac{pq}{pq-p-q}$ *pode ser melhorado para* 2.

Agora, no caso em que $\lambda < 2$ do Teorema 2.0.2 temos que, se $0 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|A(e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq C\|A\| \tag{2.5}$$

para $\frac{pq}{pq-p-q}$ e toda forma bilinear contínua $A : \ell_p \times \ell_q \to \mathbb{K}$.

Para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$, temos $\lambda < 2$, e como existe uma simetria óbvia entre j e k, uma consequência da desigualdade de Minkowski nos permite mudar as posições de 2 e λ obtendo

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |A(e_j, e_k)|^{\lambda} \right)^{\frac{2}{\lambda}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|A\|.$$

Usando a desigualdade de Hölder para somas mistas com $(\lambda, 2)$, $(2, \lambda)$ e $\theta = \frac{1}{2}$, obtemos o resultado do Teorema 2.0.1 com expoente ótimo $\frac{pq}{pq-p-q}$ como corolário.

Novamente, como consequência da desigualdade de Kahane–Salem-Zygmund afirmamos que os expoentes de (2.5) são ótimos (no sentido que λ não pode ser melhorado ao manter fixo o expoente 2, e vice-versa). Então, a partir de (2.2) e (2.5) podemos reescrever, em uma forma ótima e unificada, os resultados de Hardy e Littlewood como a seguir:

Teorema 2.1.3 (Hardy-Littlewood–Revisitado)**.** *Se $p, q \geq 2$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$, então existe uma constante $C \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |A(e_j, e_k)|^{2} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq C\|A\| \tag{2.6}$$

para $\lambda = \frac{pq}{pq-p-q}$, para todas as formas bilineares contínuas $A : \ell_p \times \ell_q \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Consideramos c_0 ao invés de ℓ_∞ quando $p = \infty$. Os expoentes são ótimos no sentido que λ não pode ser melhorado ao se manter o expoente 2 ou o expoente 2 não pode ser melhorado ao se manter o expoente λ.

Observação 2.1.4. *Para $\frac{1}{2} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$, temos $2 < \lambda$ e não podemos usar resultados do tipo Minkowski ((ALBUQUERQUE et al., 2015), Lema 1.3) para mudar a posição de 2 e λ. A razão é bem simples: Se isso fosse possível, por interpolação os expoentes resultantes $(2, \lambda)$ e $(\lambda, 2)$ com $\theta = \frac{1}{2}$, ou quando usamos a desigualdade de Hölder para somas mistas (BLASCO et al., 2011), deveríamos obter uma melhoria de (2.3) (No sentido clássico, ou seja, um expoente menor deveria ser válido para todos os índices), e sabemos que isto não é possível.*

Observação 2.1.5. *O fato que 2 e λ não podem ser trocados quando $\frac{1}{2} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ é certamente a razão da ausência da perda de suavidade do expoente ρ do Teorema 2.1.3.*

2.2 Constantes ótimas

A busca pelas constantes ótimas nas desigualdades de Hardy–Littlewood é uma tarefa altamente difícil. Nos últimos anos, devido a essa dificuldade, a busca de estimativas para tais constantes foi feita levando em consideração a quantidade de variáveis (por exemplo, (CAMPOS et al., 2015; HUA et al., 2015; JAMESON, 1994; JIMÉNEZ-RODRÍGUEZ et al., 2016)). Nesta seção forneceremos novas estimativas para as constantes ótimas, em dependência do número de variáveis, nas desigualdades de Hardy–Littlewood e em uma desigualdade devida a Orlicz.

2.2.1 Desigualdades de Littlewood e Orlicz em $\mathcal{L}(^2c_0^2(\mathbb{C}))$

Para cada inteiro positivo n, seguindo a notação usada por (BLEI, 2001), sejam $\kappa_O^{\mathbb{C}}(n)$, $\kappa_L^{\mathbb{C}}(n)$, $\kappa_{4/3}^{\mathbb{C}}(n)$ as constantes ótimas das desigualdades a seguir:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|T(e_i,e_j)|\right)^2\right)^{1/2} \leq \kappa_O^{\mathbb{C}}(n)\,\|T\|\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{1/2} \leq \kappa_L^{\mathbb{C}}(n)\,\|T\|\,,$$

e

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|T(e_i,e_j)|^{4/3}\right)^{3/4} \leq \kappa_{4/3}^{\mathbb{C}}(n)\,\|T\|$$

para toda forma bilinear $T\colon c_0^n(\mathbb{C})\times c_0^n(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$. Desigualdades clássicas, veja (BLEI, 2001; LITTLEWOOD, 1930; ORLICZ, 1933), devido a Orlicz e Littlewood, temos que

$$\kappa_O^{\mathbb{C}}(\infty) := \lim_{n\to\infty}\kappa_O^{\mathbb{C}}(n) < \infty,$$
$$\kappa_L^{\mathbb{C}}(\infty) := \lim_{n\to\infty}\kappa_L^{\mathbb{C}}(n) < \infty,$$
$$\kappa_{4/3}^{\mathbb{C}}(\infty) := \lim_{n\to\infty}\kappa_{4/3}^{\mathbb{C}}(n) < \infty.$$

R. Blei em seu livro, Analysis in integer and fractional dimensions ((BLEI, 2001), p. 31), faz o seguinte questionamento: Quais são os valores exatos de $\kappa_O^{\mathbb{C}}(n)$, $\kappa_L^{\mathbb{C}}(n)$ e $\kappa_{4/3}^{\mathbb{C}}(n)$?. Aqui resolvemos este problema para o caso $n=2$, com adição de técnicas desenvolvidas por Jameson, (JAMESON, 1994).

Teorema 2.2.1. $\kappa_O^{\mathbb{C}}(2)=\kappa_L^{\mathbb{C}}(2)=\kappa_{4/3}^{\mathbb{C}}(2)=1.$

Para provarmos o teorema acima precisamos saber as seguintes noções sobre C^*-álgebras e pontos extremos de um conjunto convexo:

Definição 2.2.2. *Uma C^* álgebra A é uma álgebra de Banach sobre o corpo dos complexos, juntamente, com uma operação $*: A\to A$. Onde podemos denotar x^* a imagem do elemento x de A. A aplicação $*$ possui as seguintes propriedades:*

(i) $x^{**}=(x^*)^*=x$, para todo $x\in A$.

(ii) $(x+y)^* = x^* + y^*$ *e* $(xy)^* = x^*y^*$*, para todos* $x, y \in A$*.*

(iii) Dados $t \in \mathbb{C}$ *e* $x \in A$*, temos* $(tx)^* = \bar{t}x^*$*.*

(iv) Para todo $x \in A$*, temos* $\|xx^*\| = \|x\|\|x^*\|$*.*

Dizemos que A *possui identidade, se existe* $y \in A$ *tal que* $yx = xy = x$*. Denotamos a identidade de* A *por* e_A*.*

Definição 2.2.3. *Sejam* A *e* B C^**-álgebras complexas com identidades* e_A *e* e_B*. De acordo com (JAMESON, 1994) dizemos que uma forma bilinear* $V : A \times B \to \mathbb{C}$ *é unital se*

$$V(e_A, e_B) = \|V\| = 1.$$

Definição 2.2.4. *Sejam* E *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *e* M *um subconjunto convexo de* E*. Um ponto* x *de* M *é chamado ponto extremo de* M *se* x *não é ponto médio de nenhum segmento de reta contido em* M*. O conjunto de todos os pontos extremos de* M *será denotado por* $extM$*.*

Teorema 2.2.5. *(Minkowski/Krein-Milman) Se* E *é um espaço normado de dimensão finita e* K *é um subconjunto convexo, compacto e não vazio de* E*, então* K *possui ao menos um ponto extremo e* $K = conv(extK)$*, onde* $extK$ *é o conjunto de todos os pontos extremos de* K *e* $conv(A)$ *denota a envoltória convexa de* A*.*

Demonstração do Teorema 2.2.1. Note que se A, B são espaços de dimensão finita e T é uma forma bilinear com $\|T\| = 1$, então devem existir vetores unitários $x_0 \in A, y_0 \in B$ tais que $T(x_0, y_0) = 1$, e então uma forma unital V é obtida definindo

$$V(x, y) = T(x_0x, y_0y). \tag{2.7}$$

De fato, temos

$$V(e_A, e_B) = T(x_0e_A, y_0e_B) = T(x_0, y_0) = 1,$$

e também,

$$\|V(x, y)\| = \|T(x_0x, y_0y)\| \leq \|T\| \, \|x_0x\| \, \|y_0y\| \leq \|T\| \, \|x\| \, \|y\|$$

e assim $V(e_A, e_B) = \|V\| = 1$.

Observe que $\mathbb{C}^2$ é uma C^*-álgebra com produto $xy = (x_1x_2, y_1y_2)$ e unidade $e = e_1 + e_2$. Seja $T\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ uma forma bilinear com $\|T\| = 1$. Então, pelo Teorema de Krein - Milman 2.2.5, existem pontos extremos da bola unitária fechada de ℓ^2_∞, denotados por $x_0 = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $y_0 = (\beta_1, \beta_2) \in \ell^2_\infty$ tais que

$$T(x_0, y_0) = \|T\| = 1.$$

Sabemos que os pontos extremos da bola unitária fechada de $\mathbb{C}^2$ possuem todas as coordenadas com módulo 1, veja por exemplo (DIESTEL; JARCHOW; TONGE, 1995, page 384). Assim, $|\alpha_i| = |\beta_j| = 1$, para todos $i, j \in \{1, 2\}$.

Definiremos a forma unital V por

$$V(x, y) = T(x_0 x, y_0 y).$$

Nota-se que

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}|V(e_i, e_j)|^2\right)^{1/2} = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}|T(e_i, e_j)|^2\right)^{1/2}. \tag{2.8}$$

De fato

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}|V(e_i, e_j)|^2\right)^{1/2} &= \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}|T(x_0 e_i, y_0 e_j)|^2\right)^{1/2} \\ &= \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}|\alpha_i\beta_j T(e_i, e_j)|^2\right)^{1/2} = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}|T(e_i, e_j)|^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Igualmente, de (2.8), combinada com argumentos anteriores, temos que

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}|T(e_i, e_j)|^2\right)^{1/2} \leq C\,\|T\|,$$

para todas as formas bilineares $T\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ com$\|T\| = 1$ se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}|V(e_i, e_j)|^2\right)^{1/2} \leq C\,\|V\|$$

para toda forma unital $V\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dada pelo método (2.7). Em conclusão, para entender o problema da constante ótima - objetivo do estudo atual - basta restringir-se a análise das formas bilineares unitais. Em seguida, recordamos duas proposições importantes, nomeadas (JAMESON, 1994, Lema 2.3) e (JAMESON, 1994, Teorema 1), listadas abaixo para facilitar a leitura:

(1) Qualquer forma bilinear unital $T\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ é da forma

$$T(x, y) = (a + ih)\,x_1y_1 + (b - ih)\,x_1y_2 + (c - hi)x_2y_1 + (d + hi)x_2y_2,$$

onde cada $a + b, c + d, a + c, b + d, a + d, b + c$ são não negativos e $a + b + c + d = 1$;

(2) Seja $T\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ uma forma bilinear dada

$$T(x, y) = (a + ih)\,x_1y_1 + (b - ih)\,x_1y_2 + (c - hi)x_2y_1 + (d + hi)x_2y_2.$$

Então T é unital se, e só se, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $a + b + c + d = 1$;

(ii) Os valores $a + b, c + d, a + c, b + d, a + d, b + c$ são não negativos;

(iii) $h^2 \leq bcd + acd + abd + abc$.

Os resultados acima nos permitem reformular o problema de determinar $\kappa_L^{\mathbb{C}}(2)$, como um problema de otimização definido da seguinte forma:

Maximizar a função $f\colon \mathbb{R}^5 \to [0, \infty)$ dada por

$$f(a,b,c,d,h) = \left(a^2 + b^2 + 2h^2\right)^{1/2} + \left(c^2 + d^2 + 2h^2\right)^{1/2}$$

sujeita as restrições

$$\begin{array}{rcccl} g_1(a,b,c,d,h) & = & -a-b & \leq & 0, \\ g_2(a,b,c,d,h) & = & -c-d & \leq & 0, \\ g_3(a,b,c,d,h) & = & -a-c & \leq & 0, \\ g_4(a,b,c,d,h) & = & -b-d & \leq & 0, \\ g_5(a,b,c,d,h) & = & -a-d & \leq & 0, \\ g_6(a,b,c,d,h) & = & -b-c & \leq & 0, \\ g_7(a,b,c,d,h) & = & h^2 - (bcd + acd + abd + abc) & \leq & 0, \\ t(a,b,c,d,h) & = & a+b+c+d-1 & = & 0. \end{array}$$

Modelamos o problema anterior para usarmos softwares de computção numérica (com pacotes de otimização), para determinarmos que máximo de f sobre o conjunto de restrições é 1, provando que

$$\kappa_L^{\mathbb{C}}(2) = 1. \tag{2.9}$$

Como

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|T(e_i,e_j)|\right)^2\right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{1/2},$$

por (2.9) e simetria, segue que

$$1 \leq \kappa_O^{\mathbb{C}}(2) \leq \kappa_L^{\mathbb{C}}(2) \leq 1. \tag{2.10}$$

Como vale

$$\left(\sum_{i,j=1}^{2}|T(e_i,e_j)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \leq \left(\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left(\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{2}|T(e_i,e_j)|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

combinada com (2.10), segue que

$$\kappa_{4/3}^{\mathbb{C}}(2) = 1,$$

o que finalmente prova o Teorema 2.2.1. $\square$

2.2.2 Desigualdade de Hardy-Littlewood em $\mathcal{P}(^2\ell_p^2(\mathbb{R}))$, com $2 < p \leq 4$

A desigualdade de Hardy-Littlewood para polinômios 2-homogêneos em espaços $\ell_p^n(\mathbb{R})$ afirma que, para qualquer $P(x) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha x^\alpha$ definido em $\ell_p^n(\mathbb{R})$, com $2 < p \leq 4$, existe uma constante $C_{2,n,p}^{pol} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|=2} |a_\alpha|^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}} \leq C_{2,n,p}^{pol}\|P\|.$$

Além disso, o expoente $\frac{p}{p-2}$ é otimo.

Nesta subseção apresentamos a seguinte estimativa ótima:

Teorema 2.2.6. *Se $2 < p \leq 4$, então as constantes ótimas de Hardy-Littlewood para polinômios 2-homogêneos reais em $\ell_p^2(\mathbb{R})$ são $2^{\frac{2}{p}}$.*

Para demonstrá-lo usaremos o resultado a seguir, devido a Grecu (GRECU, 2002), e este será crucial.

Teorema 2.2.7 (Grecu, (GRECU, 2002))**.** *Para $p > 2$, um polinômio 2-homogêneo P de norma 1 é ponto extremo da bola unitária de $\mathcal{P}(^2\ell_p^2(\mathbb{R}))$ se, e somente se,*

(i) $P(x,y) = ax^2 + cy^2$, com $ac > 0$ e $\|(a,c)\|_{\frac{p}{p-2}} = 1$ ou

(ii) $P(x,y) = \pm\left(\frac{a^p-b^p}{a^2+b^2}(x^2-y^2) + 2ab\frac{a^{p-2}+b^{p-2}}{a^2+b^2}xy\right)$, com $a,b > 0$ e $\|(a,b)\|_p = 1$.

Sabemos que para qualquer polinômio 2-homogêneo $P : \ell_p^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ dado por

$$P(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha x^\alpha,$$

a fórmula

$$|P|_q = \left(\sum_{|\alpha|=2} |a_\alpha|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

define uma norma para todo $q \geq 1$. Como $\ell_p^n(\mathbb{R})$ possui dimensão finita, as normas $\|\cdot\|$ e $|\cdot|_q$ são equivalentes. Assim, existem constantes $C_{2,n,p,q} > 0$ tais que

$$|P|_q \leq C_{2,n,p,q}\|P\| \tag{2.11}$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^2\ell_p^n(\mathbb{R}))$. Buscaremos informação sobre $C_{2,n,p,q}$ para o caso particular em que $n = 2$, $p > 2$ e $q \geq 1$, isto é, devemos investigar $C_{2,2,p,q}$ (quando $p > 2$ e $q \geq 1$).

A igualdade

$$C_{2,2,p,q} = \max_{a\in[0,1]}\left[\left(2\left|\frac{2a^p-1}{a^2+(1-a^p)^{\frac{2}{p}}}\right|^q + \left(2a(1-a^p)^{\frac{1}{p}}\frac{a^{p-2}+(1-a^p)^{\frac{p-2}{p}}}{a^2+(1-a^p)^{\frac{2}{p}}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{2.12}$$

é devido a Araujo et al (ARAÚJO et al., 2017).

Demonstração do Teorema 2.2.6. Afirmamos que

$$C_{2,2,p,2} \leq 2^{\frac{2}{p}}.$$

De fato, definindo para cada $2 < p \leq 4$ a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(a) = \left(2\left| \frac{2a^p - 1}{a^2 + (1-a^p)^{\frac{2}{p}}} \right|^2 + \left(2a(1-a^p)^{\frac{1}{p}} \frac{a^{p-2} + (1-a^p)^{\frac{p-2}{p}}}{a^2 + (1-a^p)^{\frac{2}{p}}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e calculando sua derivada, temos

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{-8(a^p(1-a^p)^{\frac{4}{p}} + a^{p+4} - a^4)(a^p(-a^p+1)^{\frac{2}{p}}(p - a^p p + 2a^p - 1)}{a^3((1-a^p)^{\frac{2}{p}} + a^2)^3(a^p - 1)(1-a^p)^{\frac{2}{p}}} \\ &\quad - \frac{a^2(a^p-1)(a^p p - 2a^p + 1))}{a^3((1-a^p)^{\frac{2}{p}} + a^2)^3(a^p - 1)(1-a^p)^{\frac{2}{p}}}. \end{aligned}$$

Note que $g'(a)$ está bem definida para todo $a \in (0,1)$, e além disso tem precisamente um zero em $(0,1)$, e este zero é atingindo em $2^{-1/p}$. De fato, se $a \neq 0$ e $a \neq 2^{-1/p}$, então $g'(a) = 0$ se, e só se,

$$a^p(-a^p+1)^{\frac{2}{p}}(p - a^p p + 2a^p - 1) - a^2(a^p - 1)(a^p p - 2a^p + 1) = 0$$

e este nunca se anula em $(0,1)$, pois neste intervalo

$$a^p(-a^p+1)^{\frac{2}{p}}(p - a^p p + 2a^p - 1) - a^2(a^p - 1)(a^p p - 2a^p + 1) > 0 \tag{2.13}$$

Para se convencer de (2.13), devemos observar que a desigualdade é equivalente a provar que

$$a^p(-a^p+1)^{\frac{2}{p}}(p - a^p p + 2a^p - 1) > a^2(a^p - 1)(a^p p - 2a^p + 1)$$

e, esta desigualdade é equivalente a mostrar que

$$-a^p(-a^p+1)^{\frac{2-p}{p}}(p - a^p p + 2a^p - 1) < a^2(a^p p - 2a^p + 1).$$

Mas esta desigualdade é verdade, pois o lado esquerdo é sempre negativo enquanto que o lado direito é sempre positivo em $(0,1)$, para $p > 2$. Assim, concluímos que $g'(a)$ possui exatamente um zero no intervalo $(0,1)$, e este zero é $2^{-1/p}$. Como

$$\begin{aligned} g(0) &= 2, \\ g(1) &= 2, \\ g(2^{-1/p}) &= 2^{\frac{4}{p}}, \end{aligned}$$

e $2^{\frac{4}{p}} > 2$ quando $2 < p \leq 4$, podemos finalmente concluir que

$$\max_{a\in[0,1]} \left\{ \left(2\left| \frac{2a^p - 1}{a^2 + (1-a^p)^{\frac{2}{p}}} \right|^2 + \left(2a(1-a^p)^{\frac{1}{p}} \frac{a^{p-2} + (1-a^p)^{\frac{p-2}{p}}}{a^2 + (1-a^p)^{\frac{2}{p}}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \leq 2^{\frac{2}{p}}.$$

Agora, provaremos que
$$C_{2,2,p,q} \leq 2^{\frac{2}{p}}.$$
Com efeito, se $q > 2$, então $|\cdot|_q \leq |\cdot|_2$ e

$$\begin{aligned} &C_{2,2,p,q} \\ &= \max_{a\in[0,1]} \left\{ \left(2\left| \frac{2a^p-1}{a^2+(1-a^p)^{\frac{2}{p}}} \right|^q + \left(2a(1-a^p)^{\frac{1}{p}} \frac{a^{p-2}+(1-a^p)^{\frac{p-2}{p}}}{a^2+(1-a^p)^{\frac{2}{p}}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ &\leq \max_{a\in[0,1]} \left\{ \left(2\left| \frac{2a^p-1}{a^2+(1-a^p)^{\frac{2}{p}}} \right|^2 + \left(2a(1-a^p)^{\frac{1}{p}} \frac{a^{p-2}+(1-a^p)^{\frac{p-2}{p}}}{a^2+(1-a^p)^{\frac{2}{p}}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Dessa forma $C_{2,2,p,q} \leq 2^{\frac{2}{p}}$.

Para verificarmos que
$$C_{2,2,p,q} = 2^{\frac{2}{p}}.$$
Basta observar que
$$\begin{aligned} &\left(2\left| \frac{2(2^{-1/p})^p-1}{(2^{-1/p})^2+(1-(2^{-1/p})^p)^{\frac{2}{p}}} \right|^q + \left(2(2^{-1/p})(1-(2^{-1/p})^p)^{\frac{1}{p}} \frac{(2^{-1/p})^{p-2}+(1-(2^{-1/p})^p)^{\frac{p-2}{p}}}{(2^{-1/p})^2+(1-(2^{-1/p})^p)^{\frac{2}{p}}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= 2^{\frac{2}{p}} \end{aligned}$$
□

2.3 Conexões com operadores absolutamente somantes

A Teoria dos Operadores Absolutamente Somantes nasceu (em 1935) com o seguinte questionamento sobre a Teoria dos espaços de Banach. Existe, em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita, uma série incondicionalmente que não é absolutamente convergente?

Quinze anos depois, A. Dvoretzky e C. A. Rogers (DVORETZKY; ROGERS, 1950) deram a resposta (veja o Teorema 2.3.2). Tal resultado atraiu o interesse de Alexander Grothendieck. Este último deu uma nova demonstração do Teorema de Dvoretzky–Rogers, em (GROTHENDIECK, 1956), com a qual temos o início da Teoria dos Operadores Absolutamente Somantes.

O conceito de operador linear absolutamente somante não foi introduzido por Grothendieck, pelo menos não da forma como conhecemos atualmente. Apenas em 1966, B. Mitiagin, A. Pelczyński e A. Pietsh introduziram o conceito de operador linear absolutamente $(q;p)$-somante. Em 1968, J. Lindenstrauss e A. Pelczyński apresentaram esta teoria de forma mais acessível.

A seguir iremos apresentar as definições básicas da teoria, assim como alguns resultados que nos permitiram relacionar as desigualdades de Hardy–Littlewood aos operadores absolutamente somantes.

Definição 2.3.1. *(a) Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é chamada absolutamente somável, se a sequência de escalares $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ pertence a ℓ_1.*

(b) Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é chamada incodicionalmente somável, se $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge (para o mesmo limite), sempre que $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seja uma bijeção.

Teorema 2.3.2 (Dvoretzky–Rogers)**.** *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Então para qualquer escolha $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ em ℓ_2, existe uma sequência incondicionalmente somável $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E com $\|x_n\| = |\lambda_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, ao escolher $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 - \ell_1$, obtemos uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável.*

Definição 2.3.3. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e E um espaço de Banach. Dizemos que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é fortemente p-somável se a sequência de escalares correspondentes $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ estiver em ℓ_p.*

O espaço vetorial de todas as sequências fortemente p-somáveis em E, com as operações usuais, será denotado por $\ell_p(E)$. A seguinte norma

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

torna o espaço $\ell_p(E)$ um espaço de Banach. Se $p = \infty$, definimos

$$\ell_\infty(E) = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} : \sup_n \|x_n\| < \infty\right\}$$

e, munido da norma

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_n \|x_n\|$$

torna $\ell_\infty(E)$ um espaço de Banach.

Definição 2.3.4. *Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é fracamente p-somável se a sequência de escalares $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ para todo $\varphi \in E^*$.*

Denotamos por $\ell_p^w(E)$ o conjunto de todas as sequências p-somáveis e, com a norma,

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

o espaço $\ell_p^w(E)$ é de Banach.

Definição 2.3.5. *Se $1 \leq q \leq p \leq \infty$, dizemos que um operador linear contínuo $u : E \to F$ é absolutamente $(p;q)$-somante, se $(u(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$ sempre que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$.*

O próximo resultado é bem conhecido na literatura.

Proposição 2.3.6. *As afirmações abaixo são equivalentes para* $1 \leq p \leq q < \infty$*.*

(i) A inclusão canônica $inc : \ell_p \to \ell_q$ *é absolutamente* $(r;s)$*-somante com constante* C*.*

(ii)

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|A(e_i,e_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}r}\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\|A\|$$

para toda forma bilinear contínua $A : \ell_{s^*} \times \ell_{p^*} \to \mathbb{K}$*.*

Demonstração. $(ii) \Rightarrow (i)$ Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(\ell_p)$. Segundo Diestel (DIESTEL; JARCHOW; TONGE, 1995) existe um isomorfismo isométrico $\Psi : \mathcal{L}(\ell_{s^*}, \ell_p) \to \ell_s^w(\ell_p)$ dado por $\Psi(v) = (v(e_j))_{j=1}^{\infty}$. Assim, existe um operador linear contínuo $v : \ell_{s^*} \to \ell_p = (\ell_{p^*})^*$ tal que $v(e_j) = x_j$ para todo j. Então

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|_{\ell_q}^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|v(e_i)(e_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}r}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Relembrando que $\mathcal{L}(\ell_{s^*}, \ell_{p^*}, \mathbb{K}) = \mathcal{L}(\ell_{s^*}, \ell_p)$ isometricamente, existe uma forma bilinear $A \in \mathcal{L}(\ell_{s^*}, \ell_{p^*}, \mathbb{K})$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|_{\ell_q}^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|A(e_i,e_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}r}\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\|A\| = C\|v\| = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,s}.$$

$(i) \Rightarrow (ii)$ É apenas usar o isomorfismo isométrico em sentido inverso. □

Em (PELLEGRINO et al., 2017), foi provado que se $q, r > 0$ e $u, v \geq 2$ são tais que

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} < 1,$$

então

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|A(e_i,e_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}r}\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\|A\| \tag{2.14}$$

para toda forma bilinear contínua $A : \ell_u \times \ell_v \to \mathbb{K}$ se, e somente se,

$$\begin{cases} q \geq \frac{v}{v-1} \\ r \geq \frac{uv}{uv-u-v} \\ \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{3}{2} - (\frac{1}{u} + \frac{1}{v}). \end{cases}$$

Também é conhecido que se

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \geq 1,$$

então a desigualdade (2.14) é sempre impossível. Assim, pela Proposição 2.3.6 concluímos que se $1 \leq p, s \leq 2$, então $inc : \ell_p \to \ell_q$ (com $p < q$) é $(r; s)$-absolutamente somante se, e só se,

$$\begin{cases} q \geq \frac{p^*}{p^*-1} = p \\ r \geq \frac{p^* s^*}{p^* s^* - p^* - s^*} = \frac{ps}{p+s-ps} \\ \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{3}{2} - (\frac{1}{u} + \frac{1}{v}) = \frac{3}{2} - (\frac{1}{p^*} + \frac{1}{s^*}) \\ \frac{1}{s^*} + \frac{1}{p^*} < 1, \text{ i.e., } s < p^*, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} r \geq \max\left\{\frac{2pqs}{2qs-2ps+2pq-pqs}, \frac{ps}{p+s-ps}\right\}, \\ s < p^*. \end{cases}$$

Com isso, temos recuperado as desigualdades de (BENNETT et al., 1977) a respeito de inclusão de normas somantes.

Teorema 2.3.7. *Considere a inclusão canônica* $inc : \ell_p \to \ell_q$ *(com* $p < q$*). Se* $1 \leq p, s \leq 2$*,* inc *é* $(r; s)$*-absolutamente somante se, e somente se,*

$$\begin{cases} r \geq \max\left\{\frac{2pqs}{2qs-2ps+2pq-pqs}, \frac{ps}{p+s-ps}\right\}, \\ s < p^*. \end{cases}$$

Quando $s = 1$ recuperamos o resultado de (BENNETT, 1973).

Teorema 2.3.8. *Considere a inclusão canônica* $inc : \ell_p \to \ell_q$ *(com* $p < q$*). Se* $1 \leq p \leq 2$*,* inc *é* $(r; 1)$*-absolutamente somante se, e somente se,*

$$\begin{cases} r \geq p \text{ quando } q \leq 2, \\ r \geq \frac{2pq}{2q-2p+pq} \text{ quando } q \geq 2. \end{cases}$$

Observação 2.3.9. *Nosso resultado afirma que quando* $p = s = 1$ *o valor ótimo da constante para o caso de escalares reais é* $\sqrt{2}$*.*

3 M-LINEARIDADE E M-HOMOGENEIDADE: OUTRAS DESIGUALDADES CLÁSSICAS

Em 10 de abril de 1930, John Edensor Littlewood apresentou sua desigualdade $4/3$ para formas bilineares sobre c_0 (e polinômios $2-$homogêneos). No dia 12 de dezembro, do mesmo ano, H. F. Bohnenblust e E. Hille anunciaram (Bull. Amer. Math. Soc. Abstracts of papers 37-1, no. 91) ter estendido o trabalho de Littlewood de formas bilineares para formas $m-$lineares sobre c_0 (e polinômios $m-$homogêneos). Nesse momento, as ditas estensões, foram introduzidas como ferramentas auxilares para solucionar o famoso problema da convergência absoluta de Bohr (1913), e apenas tinham proveito na solução do problema. O trabalho de Bohnenblust e Hille foi publicado em 1931 na prestigiosa revista Annals of Mathematics e somente nos anos 70, depois de mais de quarenta anos de “pouca utilidade”, aquelas extensões retornaram à cena e desde então têm ganhado relevância e destaque em diversas áreas da matemática, tais como Análise de Fourier, Análise Complexa, Teoria Analítica dos Números, Teoria dos Operadores, Teoria da Informação Quântica. A seguir apresentamos as versões $m-$linear e $m-$homogênea dadas por Bohnenblust e Hille.

A desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille afirma que, para todo inteiro $m \geq 1$, existe uma constante $B_m^{\mathbb{K}}(\infty) \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \left| T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m}) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_m^{\mathbb{K}}(\infty) \|T\| \tag{3.1}$$

para toda forma m-linear contínua $T : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{K}$ e qualquer inteiro positivo n.

Por outro lado, a desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille garante que para cada m existe uma constante $D_m^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que para todo polinômio $m-$homogêneo $P(z) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha$ em c_0, tem-se

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq D_m^{\mathbb{K}} \|P\| .$$

Em ambos os casos o expoente $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo.

Podemos dar as seguintes informações sobre as constantes $B_m^{\mathbb{K}}$. A constante $B_2^{\mathbb{R}} = \sqrt{2}$ (provada em (DINIZ et al., 2014b)). A tabela a seguir mostra estimativas superiores e inferiores para as constantes $B_m^{\mathbb{K}}$.

m	Constante	Estimativa Superior	Estimativa Inferior
$3 \leq m < \infty$	$B_m^{\mathbb{R}}$	$km^{0.36482}$	$2^{1-\frac{1}{m}}$
$2 \leq m < \infty$	$B_m^{\mathbb{C}}$	$km^{0.211392}$	$1,$

onde k é uma constante. Além disso, os autores Pellegrino e Teixeira, (PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2018), conjecturaram que a constante $B_m^{\mathbb{R}}$ é menor ou igual a $2^{1-\frac{1}{m}}$.

Contrário ao caso de formas e polinômios sobre c_0, as versões bilinear e polinomial das desigualdades de Hardy–Littlewood de 1934, enunciadas para espaços arbitrários de sequências ℓ_p, tardaram meio século em serem estendidas ao caso $m-$linear e $m-$homogêneo. De fato, somente foi em 1981 que Tarcisio Praciano Pereira conseguiu dar a respectiva extensão em espaços ℓ_p, para quando $p \geq 2m$. O outro caso, $m < p \leq 2m$, somente foi conseguido no ano 2016 por Verónica Dimant e Pablo Sevilla Peris. Indistintamente, as desigualdades obtidas por estes autores, são conhecidas na literatura como desigualdades de Hardy–Littlewood, e possuem o seguinte enunciado:

Teorema (Desigualdade de Hardy–Littlewood polinomial). Para $m < p \leq \infty$, existe una constante $D_{m,p}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} &\leq D_{m,p}^{\mathbb{K}} \|P\|, \quad \text{se } m < p \leq 2m, \\ \left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{2mp}{mp+p-2m}}\right)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}} &\leq D_{m,p}^{\mathbb{K}} \|P\|, \quad \text{se } p \geq 2m \end{aligned} \tag{3.2}$$

para todo polinômio m-homogêneo $P : \ell_p \to \mathbb{K}$ dado por

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha.$$

Além disso, o expoente $\frac{2mp}{mp+p-2m}$ (respectivamente $\frac{p}{p-m}$) é ótimo.

Contrário ao caso de Bohnenblust–Hille, onde existem vários trabalhos devotados às estimativas das constantes nas desigualdades de Hardy–Littlewood, a informação sobre as constantes é escassa. A seguinte tabela resume as estimativas conhecidas para as constantes $C_{m,p}^{\mathbb{K}}$ e $D_{m,p}^{\mathbb{K}}$.

p	Constante	Estimativa Superior	Estimativa Inferior
$2m \leq p < \infty$	$C_{m,p}^{\mathbb{R}}$	$(\sqrt{2})^{\frac{2m(m-1)}{p}} (B_m^{\mathbb{R}})^{\frac{p-2m}{p}}$	$2^{\frac{mp+2m-2m^2-p}{mp}}$
$2m \leq p < \infty$	$C_{m,p}^{\mathbb{C}}$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{2m(m-1)}{p}} (B_m^{\mathbb{C}})^{\frac{p-2m}{p}}$	1
$m < p < 2m$	$C_{m,p}^{\mathbb{R}}$	$2^{\frac{(m-1)(p-m)}{p}}$	1
$m < p < 2m$	$C_{m,p}^{\mathbb{C}}$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{2(m-1)(p-m)}{p}}$	1
$m \leq p < \infty$	$D_{m,p}^{\mathbb{R}}$	$C_{m,p}^{\mathbb{R}} \frac{m^m}{(m!)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}}}$	1
$m \leq p < \infty$	$D_{m,p}^{\mathbb{C}}$	$C_{m,p}^{\mathbb{C}} \frac{m^m}{(m!)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}}}$	$2^{\frac{m-1}{p}}$.

Neste capítulo forneceremos nova informação sobre as constantes $C_{m,p}^{\mathbb{K}}$ e $D_{m,p}^{\mathbb{K}}$.

3.1 Desigualdade de Bohnenblust–Hille em $\mathcal{L}(^m c_0(\mathbb{R}))$: estimativas superiores

Mostraremos que ao considerar formas m-lineares contínuas definidas sobre $c_0(\mathbb{R}) \times c_0(\mathbb{R}) \times c_0^2(\mathbb{R}) \times \ldots \times c_0^2(\mathbb{R})$, as constantes ótimas são de fato algébricas e iguais a $2^{1-\frac{1}{m}}$. Nossa prova é baseada nas desigualdades mista de Littlewood e de Khinchin. Lembraremos de tais desigualdades para facilitar a leitura:

Desigualdade mista de Littlewood. Para todas formas $(m+1)$–lineares contínuas $T\colon c_0(\mathbb{R}) \times \cdots \times c_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, temos

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{\infty} \left(\sum_{j_{m+1}=1}^{\infty} \left| T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_{m+1}}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq M_{m+1} \left\| T \right\| \tag{3.3}$$

e

$$M_{m+1} < \infty.$$

Desigualdade de Khinchin (veja (DIESTEL; JARCHOW; TONGE, 1995)). Para qualquer $0 < q < \infty$, existem constantes positivas A_q, B_q tais que

$$A_q \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n} a_j r_j(t) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq B_q \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

para todo inteiro positivo n e qualquer sequência de escalares $(a_j)_{j=1}^n$. Aqui r_j denota as funções de Rademacher. As melhores constantes A_q são (veja (DIESTEL; JARCHOW; TONGE, 1995)):

$$A_q = \sqrt{2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{q}} \text{ if } 2 > q \geq q_0 \cong 1.8474;$$
$$A_q = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \text{ if } q < q_0.$$

O número q_0 acima é o único escalar real satisfazendo $\Gamma\left(\frac{q_0+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

A desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille afirma que, para todo inteiro $m \geq 1$, existe uma constante $B_m^{\mathbb{R}}(n) \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \left| T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_m^{\mathbb{R}}(n) \|T\| \tag{3.4}$$

para toda forma m-linear contínua $T : c_0^n(\mathbb{R}) \times \cdots \times c_0^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e qualquer inteiro positivo n, e

$$B_m^{\mathbb{R}}(\infty) = \sup_n B_m^{\mathbb{R}}(n) < \infty.$$

De agora em diante, por uma questão de simplicidade, devemos escrever $B_m(n)$ e B_m ao invés de $B_m^{\mathbb{R}}(n)$ e $B_m^{\mathbb{R}}(\infty)$.

Lema 3.1.1. *Sejam* $m \geq 1$ *e* $n \geq 2$ *inteiros positivos. Para todas as formas* $(m+1)-$ *lineares contínuas* $T : c_0(\mathbb{R}) \times \cdots \times c_0(\mathbb{R}) \times c_0^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*, temos*

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \left(\sum_{j_{m+1}=1}^{2} \left| T(e_{j_1},...,e_{j_{m+1}}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq 2^{\frac{1}{2m}} B_m \left\| T \right\| \tag{3.5}$$

e a constante $2^{\frac{1}{2m}} B_m$ *é ótima.*

Demonstração. A desigualdade

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{\infty} \left(\sum_{j_{m+1}=1}^{2} \left| T(e_{j_1},...,e_{j_{m+1}}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq A_{\frac{2m}{m+1}}^{-1} B_m \left\| T \right\| \tag{3.6}$$

é uma consequência direta da desigualdade de Khinchin. Aqui $A_{\frac{2m}{m+1}}$ são as constantes associadas à desigualdade de Khinchin. Como para qualquer $1 \leq p \leq 2$ o máximo de

$$f(a,b) = \frac{\left(a^2+b^2\right)^{1/2}}{\left(\frac{1}{2}\left|a+b\right|^p + \frac{1}{2}\left|a-b\right|^p\right)^{1/p}}$$

é $2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$, é atingido quando $|a| = |b| > 0$, em nosso caso as constantes da desigualdade de Khinchin podem ser trocadas por $2^{\frac{m+1}{2m}-\frac{1}{2}}$, i.e., $2^{\frac{1}{2m}}$ (relembramos que lidamos com formas $(m+1)$-lineares contínuas $T : c_0(\mathbb{R}) \times \cdots \times c_0(\mathbb{R}) \times c_0^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$). Assim

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{\infty} \left(\sum_{j_{m+1}=1}^{2} \left| T(e_{j_1},...,e_{j_{m+1}}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq 2^{\frac{1}{2m}} B_m \left\| T \right\|.$$

Apenas precisamos mostrar que $2^{\frac{1}{2m}} B_m$ é ótima.

De agora em diante, para qualquer forma m-linear contínua $T_m : c_0(\mathbb{R}) \times \cdots \times c_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definimos

$$\widetilde{T_m}(x^{(1)},...,x^{(m)}) = T_m(z^{(1)},...,z^{(m)}),$$
$$\widetilde{\widetilde{T_m}}(x^{(1)},...,x^{(m)}) = T_m(w^{(1)},...,w^{(m)}),$$

onde, para todo $k = 1,....,m$, consideramos

$$z^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_3^{(k)}, x_5^{(k)},...),$$
$$w^{(k)} = (x_2^{(k)}, x_4^{(k)}, x_6^{(k)},...).$$

Note que

$$\left\| \widetilde{\widetilde{T_m}} \right\| = \left\| \widetilde{T_m} \right\| = \left\| T_m \right\|.$$

Sejam $\varepsilon > 0$ e $T_m : c_0(\mathbb{R}) \times \cdots \times c_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tais que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T_m(e_{j_1}, ..., e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} > (B_m - \varepsilon) \|T_m\| . \tag{3.7}$$

Defina o operador $m+1$-linear $R_{m+1} : c_0 \times \cdots \times c_0 \times c_0^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} R_{m+1}(x^{(1)}, ..., x^{(m+1)}) &= \left(x_2^{(m+1)} - x_1^{(m+1)} \right) \widetilde{T_m}(x^{(1)}, ..., x^{(m)}) \\ &\quad + \left(x_2^{(m+1)} + x_1^{(m+1)} \right) \widetilde{\widetilde{T_m}}(x^{(1)}, ..., x^{(m)}). \end{aligned}$$

Pela definição de R_{m+1}, temos

$$\|R_{m+1}\| = \|2T_m\|$$

também notamos que para todo $e_{j_1,\ldots,e_{j_m}}$, vale

$$|R_{m+1}(e_{j_1}, ..., e_{j_m}, e_1)| = |R_{m+1}(e_{j_1}, ..., e_{j_m}, e_2)| .$$

Note que

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \left(\sum_{j_{m+1}=1}^{2} \left| R_{m+1}(e_{j_1}, ..., e_{j_{m+1}}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \\ &= 2^{\frac{m+1}{2m} - \frac{1}{2}} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in\{(1,-1),(1,1)\}} \frac{1}{2} |R_{m+1}(e_{j_1}, ..., e_{j_m}, \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \\ &= 2^{\frac{1}{2m}} \left(\frac{1}{2} \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \left| 2\widetilde{\widetilde{T_m}}(e_{j_1}, ..., e_{j_m}) \right|^{\frac{2m}{m+1}} + \frac{1}{2} \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \left| 2\widetilde{T_m}(e_{j_1}, ..., e_{j_m}) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} . \end{aligned}$$

É obvio que ambos $2\widetilde{\widetilde{T_m}}$ e $2\widetilde{T_m}$ satisfazem (3.7). Assim

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \left(\sum_{j_{m+1}=1}^{2} \left| R_{m+1}(e_{j_1}, ..., e_{j_{m+1}}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \\ &> 2^{\frac{1}{2m}} \left(\frac{1}{2} \left((B_m - \varepsilon) \|2T_m\| \right)^{\frac{2m}{m+1}} + \frac{1}{2} \left((B_m - \varepsilon) \|2T_m\| \right)^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \\ &= 2^{\frac{1}{2m}} \left(\frac{1}{2} \left((B_m - \varepsilon) \|R_{m+1}\| \right)^{\frac{2m}{m+1}} + \frac{1}{2} \left((B_m - \varepsilon) \|R_{m+1}\| \right)^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \\ &= 2^{\frac{1}{2m}} (B_m - \varepsilon) \|R_{m+1}\| . \end{aligned}$$

Ao fazer $\varepsilon \to 0$, concluímos que $2^{\frac{1}{2m}} B_m$ é ótimo. $\square$

Denotaremos as constantes ótimas de Bohnenblust–Hille para formas m-lineares contínuas definidas em $c_0(\mathbb{R}) \times c_0(\mathbb{R}) \times c_0^2(\mathbb{R}) \times \cdots \times c_0^2(\mathbb{R})$ por K_m.

De maneira análoga ao Lema 3.1.1, podemos concluir que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{m-1}=1}^{\infty} \left(\sum_{j_m=1}^{2} |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}\frac{2m-2}{m}} \right)^{\frac{m}{2m-2}} \leq 2^{\frac{1}{2m-2}} K_{m-1} \|T\| \tag{3.8}$$

para toda forma m–linear contínua $T : c_0(\mathbb{R}) \times c_0(\mathbb{R}) \times c_0^2(\mathbb{R}) \times \cdots \times c_0^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Usaremos os seguintes fatos, a desigualdade de Hölder para somas mistas com $(1, 2, 2, \ldots, 2)$ e $(2, \frac{2m-2}{m}, \ldots, \frac{2m-2}{m})$ combinada com (3.8), mais a seguinte desigualdade simples:

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{m-1}=1}^{\infty} \left(\sum_{j_m=1}^{2} |T(e_{j_1}, ..., e_{j_m})|^1 \right)^{\frac{1}{1}2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\, \|T\| \tag{3.9}$$

para toda forma m–linear contínua $T : c_0(\mathbb{R}) \times c_0(\mathbb{R}) \times c_0^2(\mathbb{R}) \times \cdots \times c_0^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, para provarmos que as constantes satisfazem $K_m \leq 2^{1-\frac{1}{m}}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{\infty} |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} &\leq (2^{\frac{1}{2}}\|T\|)^{\frac{1}{m}} (2^{\frac{1}{2m-2}} K_{m-1} \|T\|)^{\frac{m-1}{m}} \\ &= 2^{\frac{1}{m}} K_{m-1}^{\frac{m-1}{m}} \|T\|, \end{aligned}$$

para toda forma m–linear contínua $T : c_0(\mathbb{R}) \times c_0(\mathbb{R}) \times c_0^2(\mathbb{R}) \times \cdots \times c_0^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Portanto,

$$K_m \leq 2^{\frac{1}{m}} K_{m-1}^{\frac{m-1}{m}}.$$

Como $K_2 = \sqrt{2}$, segue que

$$\begin{aligned} K_3 &\leq 2^{\frac{1}{3}} (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = 2^{1-\frac{1}{3}}, \\ K_4 &\leq 2^{\frac{1}{4}} (2^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} = 2^{1-\frac{1}{4}}, \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ K_m &\leq 2^{\frac{1}{m}} (2^{\frac{m-2}{m-1}})^{\frac{m-1}{m}} = 2^{\frac{m-1}{m}} = 2^{1-\frac{1}{m}}. \end{aligned}$$

Pelo que já foi provado, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.1.2. *Seja $m \geq 2$ inteiro positivo. Para qualquer forma m-linear contínua $T : c_0(\mathbb{R}) \times c_0(\mathbb{R}) \times c_0^2(\mathbb{R}) \times \ldots \times c_0^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, temos*

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{\infty} |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq K_m \|T\|$$

e

$$K_m = 2^{1-\frac{1}{m}}.$$

Demonstração. De fato, como

$$K_m \leq 2^{1-\frac{1}{m}}.$$

Para obter a seguinte constante ótima devemos considerar as formas m-lineares contínuas usadas na prova de (PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2018, Teorema 4.1), definidas da seguinte forma:

$$S_2(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$$

e

$$S_3(x,y,z) = (z_1+z_2)(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2) + (z_1-z_2)(x_3y_1 + x_3y_2 + x_4y_1 - x_4y_2).$$

A construção pode ser feita por indução para cada forma m-linear da seguinte forma

$$\begin{aligned} &S_m(x^{(1)},\ldots,x^{(m)}) \\ &= (x_1^{(m)}+x_2^{(m)})S_{m-1}(x^{(1)},\ldots,x^{(m)}) + (x_1^{(m)}-x_2^{(m)})S_{m-1}(B^{2^{m-1}}(x^{(1)}),x^{(2)},\ldots,x^{(m)}), \end{aligned}$$

onde

$$B^{2^{m-1}}(x^{(1)}) = (x^{(1)}_{2^{m-1}+1}, x^{(1)}_{2^{m-1}+2},\ldots).$$

□

3.2 Desigualdade de Hardy–Littlewood em $\mathcal{L}(^m\ell_p(\mathbb{K}))$: monotonicidade das constantes

Nesta seção, para obtermos informação sobre a monotonicidade das constantes, utilizaremos um resultado de inclusão da Teoria de Operadores Múltiplo Somantes. Dessa forma, precisaremos do conceito de cotipo de espaços de Banach que será usado nesta seção.

As funções de Rademacher são definidas por

$$r_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

$$r_n(t) = sign(\sin(2^n\pi t))$$

e possuem a propriedade de ortogonalidade, isto é, se $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ e $p_1,\ldots,p_k \geq 0$ são inteiro, então

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t)\cdot\ldots\cdot r_{n_k}^{p_k}(t)dt = \begin{cases} 1, & \text{se cada } p_j \text{ é par,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 3.2.1. *Dizemos que um espaço de Banach E possui cotipo q se existe uma constante $C > 0$ tal que, para qualquer escolha finita de vetores $x_1,\ldots,x_n$ em E, temos*

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde para cada i número natural r_i denota a função de Rademacher.

Quando $q=\infty$, substituímos $(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^q)^{\frac{1}{q}}$ por $\max_{i=1,\ldots,n}\|x_i\|$. O ínfimo das constantes C da Definição 3.2.1, será denotado por $C_q(E)$ e chamaremos de constante de cotipo.

Observação 3.2.2. *É conhecido na literatura que (ver, por exemplo (GARCÍA, 2004)), para $1\leq p<\infty$, tem-se*

$$C_p(\ell_p)=1.$$

Para falarmos do Teorema de Inclusão precisamos enunciar a seguinte definição.

Definição 3.2.3. *Se $1\leq p_1,\ldots,p_n\leq q<\infty$, um operador $T\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n,F)$ é chamado operador múltiplo $(q;p_1,\ldots,p_n)$- somante se existe uma constante $C>0$, tal que*

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\|T(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)})\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\prod_{k=1}^{n}\|(x_j^{(k)})_{j=1}^m\|_{w,p_k}$$

para todo $m\in\mathbb{N}$, $x_j^{(k)}\in E_k$, $j=1,\ldots,m$ e $k=1,\ldots,n$.

Neste caso dizemos que $T\in\prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^{n}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Quando $E_1=\ldots=E_n=E$, denotamos $\prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^{n}(E_1,\ldots,E_n;F)$ por $\prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^{n}({}^nE;F)$.

A seguir apresentaremos um resultado de (PELLEGRINO et al., 2017) (demonstrado recentemente de maneira independente por F. Bayart (BAYART, 2018)), que será usado várias vezes nesta seção.

Proposição 3.2.4. *((PELLEGRINO et al., 2017), Teorema de Inclusão) Sejam m um inteiro positivo e $1\leq s\leq u<\frac{mrs}{mr-s}$. Então para quaisquer espaços de Banach $E_1,\ldots,E_m,F$, temos*

$$\Pi_{(r;s)}^{m}(E_1,\ldots,E_m;F)\subset\Pi_{\left(\frac{rsu}{su+mrs-mru};u\right)}^{m}(E_1,\ldots,E_m;F)$$

e a inclusão possui norma 1.

Para qualquer inteiro $m\geq 2$, existem constantes ótimas $C_{\mathbb{K},m,p}^{mult}\geq 1$ tais que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n}|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{\frac{2mp}{mp+p-2m}}\right)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}}\leq C_{m,p}^{\mathbb{K}}\|T\|, \tag{3.10}$$

quando $2m\leq p\leq\infty$, e

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n}|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}}\leq C_{m,p}^{\mathbb{K}}\|T\|, \tag{3.11}$$

quando $m<p<2m$, para todas formas m- lineares $T:\ell_p^n\times\ldots\times\ell_p^n\to\mathbb{K}$ e qualquer inteiro positivo n.

É conhecido na literatura que, na terminologia dos operadores múltiplos somantes, a desigualdade de Hardy–Littlewood com $2m \leq p < \infty$ é equivalente ao seguinte resultado de coincidência

$$\Pi_{\left(\frac{2mp}{mp+p-2m};p^*\right)}(^m E;\mathbb{K}) = \mathcal{L}(^m E;\mathbb{K}) \tag{3.12}$$

para todo espaço de Banach E. E para $m < p < 2m$, ela é equivalente a

$$\Pi_{\left(\frac{p}{p-m};p^*\right)}(^m E;\mathbb{K}) = \mathcal{L}(^m E;\mathbb{K}) \tag{3.13}$$

para todo espaço de Banach E (veja, por exemplo, (DIMANT; SEVILLA-PERIS et al., 2016)).

No caso $p = 2m$ a desigualdade (3.10) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}(^m \ell_{2m}, \mathbb{K}) = \Pi^m_{(2;(2m)^*)}(^m \ell_{2m}, \mathbb{K}). \tag{3.14}$$

Isso diz que todas as formas m-lineares contínuas são múltiplo $(2;(2m)^*)$-somantes. Pela Proposição 3.2.4 sabemos que todo operador múltiplo $(2;(2m)^*)$-somante é múltiplo $\left(\frac{p}{p-m}, p^*\right)$-somante, quando $m < p \leq 2m$ com dominação padrão de normas. Isto significa que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} \leq C^{\mathbb{K}}_{m,2m}\|T\|$$

para toda forma m-linear $T : \ell_p^n \times \ldots \times \ell_p^n \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. Em outras palavras, temos provado (3.11), como consequência de ()3.14).

Observação 3.2.5. *Como o expoente $\frac{p}{p-m}$ na desigualdade de Hardy–Littlewood é ótimo, nossa prova da desigualdade de Hardy–Littlewood também mostra que (3.2.4) é ótima. Isto é observado ao usar uma técnica diferente em (BAYART, 2018).*

A seguir provaremos alguns resultados sobre monotonicidade das constantes da desigualdade (3.11), a partir da Proposição 3.2.4.

Teorema 3.2.6. *Se $m < p_1 \leq p_2 \leq 2m$, então $C^{\mathbb{K}}_{m,p_1} \leq C^{\mathbb{K}}_{m,p_2}$.*

Demonstração. Se

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{\frac{p_2}{p_2-m}}\right)^{\frac{p_2-m}{p_2}} \leq C^{\mathbb{K}}_{m,p_2}\|T\|$$

para quaisquer forma m-linear $T : \ell_{p_2}^n \times \ldots \times \ell_{p_2}^n \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n, sabemos que toda forma m-linear contínua é $\left(\frac{p_2}{p_2-m}; p_2^*\right)$-múltiplo somante com norma dominada por $C^{\mathbb{K}}_{m,p_2}$. Pela Proposição 3.2.4, e como

$$\frac{\left(\frac{p_2}{p_2-m}\right)\left(\frac{p_2}{p_2-p1}\right)\left(\frac{p_1}{p_1-m}\right)}{\left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right) + m\left(\frac{p_2}{p_2-m}\right)\left(\frac{p_2}{p_2-1}\right) - m\left(\frac{p_2}{p_2-m}\right)\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)} = \frac{p_1}{p_1-m}$$

e

$$p_1^* < \frac{m\left(\frac{p_2}{p_2-m}\right)\left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)}{m\left(\frac{p_2}{p_2-m}\right)-\left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)} = m^* \Leftrightarrow p_1 > m,$$

concluímos que toda forma m-linear $\left(\frac{p_1}{p_1-m}; p_1^*\right)$-múltiplo somante com norma dominada por $C_{m,p_2}^{\mathbb{K}}$. Assim,

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{\frac{p_1}{p_1-m}}\right)^{\frac{p_1-m}{p_1}} \leq C_{m,p_2}^{\mathbb{K}}\|T\|$$

para quaisquer forma m-linear $T : \ell_{p_1}^n \times \ldots \times \ell_{p_1}^n \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. Logo

$$C_{m,p_1}^{\mathbb{K}} \leq C_{m,p_2}^{\mathbb{K}}.$$

□

Teorema 3.2.7. *Sejam m um inteiro positivo e $m+1 < p \leq 2m$. Então*

$$C_{m+1,p}^{\mathbb{K}} \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}}.$$

Demonstração. Se $m < p \leq 2m$, então

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}}\|T\|$$

para quaisquer formas m-lineares $T : \ell_p^n \times \ldots \times \ell_p^n \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. Como

$$\frac{p}{p-m} \geq 2,$$

podemos provar que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m,j_{m+1}=1}^{n} |T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m},x_{j_{m+1}})|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}}\|T\| \sup_{\varphi\in B_{E^*}} \sum_{j_{m+1}=1}^{n} |\varphi(x_{j_{m+1}})|$$

para quaisquer formas m-lineares $T : \ell_p^n \times \ldots \times \ell_p^n \times E \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. De fato, para todo inteiro positivo n, definimos o operador linear

$$u_n : E \to \ell_{\frac{p}{p-m}}$$

definido por

$$u_n(x) = (T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m},x))_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n}.$$

Como $\frac{p}{p-m} \geq 2$, segue $\ell_{\frac{p}{p-m}}$ tem constante de cotipo $\frac{p}{p-m}$. Pela Observação 3.2.2, segue que

$$C_{\frac{p}{p-m}}\left(\ell_{\frac{p}{p-m}}\right) = 1.$$

Portanto, pela Definição 3.2.1, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j_{m+1}=1}^{n}\|u_n(x_{j_{m+1}})\|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} &\leq C_{\frac{p}{p-m}}\left(\ell_{\frac{p}{p-m}}\right)\left(\int_{[0,1]}\left\|\sum_{j_{m+1}=1}^{n} r_j(t)u_n(x_{j_{m+1}})\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \max_{t\in[0,1]}\left\|\sum_{j_{m+1}=1}^{n} r_{j_{m+1}}(t)u_n(x_{j_{m+1}})\right\| \\
&\leq \sup_{\omega\in B_{\ell_{\frac{p}{p-m}}}}\sum_{j_{m+1}=1}^{n}\left|\omega(u_n(x_{j_{m+1}}))\right| \\
&\leq \|u_n\|\sup_{\varphi\in B_{E^*}}\sum_{j_{m+1}=1}^{n}\left|\varphi(x_{j_{m+1}})\right| \\
&\leq \sup_{\|x\|\leq 1}\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{m+1}=1}^{n}|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m},x)|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} \times \\
&\quad \times \sup_{\varphi\in B_{E^*}}\sum_{j_{m+1}=1}^{n}\left|\varphi(x_{j_{m+1}})\right| \\
&\leq \sup_{\|x\|\leq 1} C_{m,p}^{\mathbb{K}}\|T(\cdot,\ldots,\cdot,x)\|\sup_{\varphi\in B_{E^*}}\sum_{j_{m+1}=1}^{n}\left|\varphi(x_{j_{m+1}})\right| \\
&\leq C_{m,p}^{\mathbb{K}}\|T\|\sup_{\varphi\in B_{E^*}}\sum_{j_{m+1}=1}^{n}\left|\varphi(x_{j_{m+1}})\right|.
\end{aligned}$$

Como

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{m+1}=1}^{n}|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m},x_{j_{m+1}})|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} = \left(\sum_{j_{m+1}=1}^{n}\|u_n(x_{j_{m+1}})\|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}},$$

segue que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{m+1}=1}^{n}|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m},x_{j_{m+1}})|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}}\|T\|\sup_{\varphi\in B_{E^*}}\sum_{j_{m+1}=1}^{n}|\varphi(x_{j_{m+1}})|. \tag{3.15}$$

Afirmamos que, para $p>m+1$,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_{m+1}=1}^{n}\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m},x_{j_{m+1}})|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}\times\frac{p}{p-(m+1)}}\right)^{\frac{p-(m+1)}{p}} \\
&\qquad \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}}\|T\|\left(\sup_{\varphi\in B_{E^*}}\sum_{j_{m+1}=1}^{n}|\varphi(x_{j_{m+1}})|\right)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

para todo n. Com efeito, note que (3.15) é equivalente a

$$\left(\sum_{j_{m+1}=1}^{n}\|u_n(x_{j_{m+1}})\|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}}\|T\|\sup_{\varphi\in B_{E^*}}\sum_{j_{m+1}=1}^{n}|\varphi(x_{j_{m+1}})|.$$

Defina $\lambda_{j_{m+1}} = \|u_n(x_{j_{m+1}})\|^{\frac{1}{p-(m+1)}}$. Então

$$\left(\sum_{j_{m+1}=1}^{n} \|u_n(x_{j_{m+1}})\|^{\frac{p}{p-(m+1)}}\right)^{\frac{p-m}{p}} = \left(\sum_{j_{m+1}=1}^{n} \|u_n(\lambda_{j_{m+1}} x_{j_{m+1}})\|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}}.$$

Assim,

$$\left(\sum_{j_{m+1}=1}^{n} \|u_n(x_{j_{m+1}})\|^{\frac{p}{p-(m+1)}}\right)^{\frac{p-m}{p}} \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}} \|T\| \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{j_{m+1}=1}^{n} |\varphi(\lambda_{j_{m+1}} x_{j_{m+1}})|.$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j_{m+1}=1}^{n} \|u_n(x_{j_{m+1}})\|^{\frac{p}{p-(m+1)}}\right)^{\frac{p-m}{p}} &\leq C_{m,p}^{\mathbb{K}} \|T\| \left(\sum_{j_{m+1}=1}^{n} \|u_n(x_{j_{m+1}})\|^{\frac{p}{p-(m+1)}}\right)^{\frac{1}{p}} \times \\ &\times \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{j_{m+1}=1}^{n} |\varphi(x_{j_{m+1}})|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\sum_{j_{m+1}=1}^{n} \|u_n(x_{j_{m+1}})\|^{\frac{p}{p-(m+1)}}\right)^{\frac{p-(m+1)}{p}} \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}} \|T\| \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{j_{m+1}=1}^{n} |\varphi(x_{j_{m+1}})|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Como $|\cdot|_{\frac{p}{p-1}} \leq |\cdot|_1$, segue que

$$\left(\sum_{j_{m+1}=1}^{n} \|u_n(x_{j_{m+1}})\|^{\frac{p}{p-(m+1)}}\right)^{\frac{p-(m+1)}{p}} \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}} \|T\| \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{j_{m+1}=1}^{n} |\varphi(x_{j_{m+1}})|.$$

Finalmente, escolhendo $E = \ell_p$ e, como

$$\sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{j_{m+1}=1}^{n} |\varphi(e_{j_{m+1}})| = 1$$

e

$$\frac{p}{p-m} \leq \frac{p}{p-(m+1)}$$

concluímos que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{m+1}=1}^{n} |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_{m+1}})|^{\frac{p}{p-(m+1)}}\right)^{\frac{p-(m+1)}{p}} \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}} \|T\|$$

para toda forma m-linear $T : \ell_p^n \times \ldots \times \ell_p^n \to \mathbb{K}$ e qualquer inteiro positivo n. Portanto

$$C_{m+1,p}^{\mathbb{K}} \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}}.$$

$\square$

Se denotarmos por

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} : n < x\},$$

temos o seguinte corolário:

Corolário 3.2.8. *Seja* $p \in (3, \infty)$*. A sucessão finita*

$$\left(C_{m,p}^{\mathbb{K}}\right)_{m=p/2}^{\lfloor p-1 \rfloor}$$

é decrescente.

3.3 Desigualdade de Hardy–Littlewood em $\mathcal{P}({}^m\ell_{2m}^2(\mathbb{R}))$: estimativas numéricas

Lembremos que a desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille afirma que, dados $m, n \geq 1$, existe uma constante $D_m^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq D_m^{\mathbb{K}} \|P\|$$

para qualquer polinômio m-homogêneo $P : c_0^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ dado por

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha,$$

onde $\|P\| = \sup_{x \in B_{\ell_\infty^n(\mathbb{K})}} |P(x)|$.

Quando trocamos c_0^n por ℓ_p^n, a extensão da desigualdade de Bohnenblust–Hille é chamada desigualdade de Hardy–Littlewood e o expoente ótimo $\frac{2mp}{mp+p-2m}$ para $2m \leq p \leq \infty$ e $\frac{p}{p-m}$ para $m < p \leq 2m$. Mais precisamente, dados $m, n \geq 1$, existe uma constante $D_{m,p}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{2mp}{mp+p-2m}}\right)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}} \leq D_{m,p}^{\mathbb{K}} \|P\|$$

para qualquer polinômio m-homogêneo P definido em ℓ_p^n, quando $2m \leq p \leq \infty$, dado por

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha.$$

Quando $m < p \leq 2m$, temos

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} \leq D_{m,p}^{\mathbb{K}} \|P\|,$$

onde $\|P\| = \sup_{x\in B_{\ell_p^n(\mathbb{K})}} |P(x)|$.

A busca por estimativas precisas nas desigualdades polinomiais e multilineares de Bohnenblust–Hille tem sido feita por diversos autores (veja (BAYART; PELLEGRINO; SEOANE-SEPÚLVEDA, 2014; DEFANT et al., 2011; NÚÑEZ-ALARCÓN, 2013; ALARCÓN et al., 2013; SERRANO-RODRI et al., 2013) e suas referências) e é importante por diversas razões, além do desafio matemático intrínseco, é um ponto crucial em várias aplicações (ver (BAYART; PELLEGRINO; SEOANE-SEPÚLVEDA, 2014; DEFANT et al., 2011; JIMÉNEZ-RODRÍGUEZ et al., 2016)).

Em (JIMÉNEZ-RODRÍGUEZ et al., 2016), foram apresentados alguns tipos de polinômios usados para determinar estimativas inferiores para a desigualdade polinomial de Bohnenblus–Hille. Aqui usaremos tais tipos de polinômios, pois eles melhoravam as estimativas inferiores da desigualdade mencionada. A seguir apresentamos os tipos de polinômios:

$$P_3(x,y) = ax^3 + bx^2y + bxy^2 + ay^3,$$

$$P_5(x,y) = ax^5 - bx^4y - cx^3y^2 + c^2y^3 + bxy^4 - ay^5,$$

$$P_6(x,y) = ax^5y + bx^3y^3 + axy^5,$$

$$P_7(x,y) = -ax^7 + bx^6y + cx^5y^2 - dx^4y^3 - dx^3y^4 + cx^2y^5 + bxy^6 - ay^7,$$

$$P_8(x,y) = -ax^7y + bx^5y^3 - bx^3y^5 + axy^7,$$

$$P_{10}(x,y) = ax^9y + bx^7y^3 + x^5y^5 + bx^3y^7 + axy^9.$$

Nesta seção, apresentamos novas cotas inferiores para as constantes da desigualdade polinomial de Hardy–Littlewood para o caso de escalares reais para certos valores de p e m. Em certo sentido, há uma grande diferença entre as desigualdades de Hardy–Littlewood e Bohnenblust–Hille. Enquanto na desigualdade de Bohnenblust–Hille o domínio c_0^n permanece inalterado, na desigualdade de Hardy–Littlewood a variável p em ℓ_p^n depende do grau de homogeneidade. Nesta seção, obteremos estimativas nas constantes da desigualdade polinomial para o caso $p = 2m$, que é um caso diferenciado, pois além de ser o ponto que divide as desigualdades de Praciano–Pereira e Dimant–Sevilla-Peris, foi mostrado na seção anterior que a desigualdade de Dimant–Sevilla-Peris pode ser obtida a partir do caso $p = 2m$. Ademais, o caso $p = 2m$ é um tipo de versão dual da desigualdade de Bohnenblust–Hille, no sentido que nos pares de parâmetros $\left(\frac{2mp}{mp+p-2m}; p^*\right)$ em (3.13), cada caso possui uma coordenada que mantém-se constante (em localização invertida). Mais precisamente, na terminologia dos operadores múltiplos somantes, a desigualdade de Bohnenblust–Hille equivalente a

$$\Pi_{\left(\frac{2m}{m+1};1\right)}(^mE;\mathbb{K}) = \mathcal{L}(^mE;\mathbb{K})$$

para todo espaço de Banach E. Por outro lado, quando $p = 2m$, a desigualdade de

Hardy–Littlewood é equivalente a

$$\Pi_{\left(2;\frac{2m}{2m-1}\right)}(^mE;\mathbb{K}) = \mathcal{L}(^mE;\mathbb{K})$$

para todo espaço de Banach E.

Para estudarmos as estimativas inferiores das constantes da desigualdade de Hardy–Littlewood quando $p = 2m$ (pesquisas similares podem ser feitas para os demais casos) fizemos uso da computação assistida para facilitar os cálculos e na busca dos coeficientes polinomiais para melhorarmos tais cotas inferiores. Para isso, estimamos as normas polinomiais, sabendo que o domínio é $\ell_{2m}^2(\mathbb{R})$. Assim, a norma deverá ser calculada usando a seguinte expressão $\|P\| = \sup_{x\in B_{\ell_{2m}^2(\mathbb{R})}} |P(x)|$.

Para realizarmos a tarefa de determinar estimativas inferiores usamos softwares de computação numérica, para calcularmos as melhores escolhas para a, b, c e d, respectivamente, em P_m com $m = 3, 5, 6, 7, 8, 10$, de tal forma que $|P_m|_2/\|P_m\|$ seja o maior possível (veja por exemplo os gráficos (1) e (2)).

Os melhores parâmetros a, b, c, d dos polinômios são:

$P_3(x, y) \to a = 1, b = -2$

$P_5(x, y) \to a = 0.104245, b = 0.333366, c = 0.541712$

$P_6(x, y) \to a = 1, b = -2.363681$

$P_7(x, y) \to a = 0.0555555, b = 0.2444444, c = 0.5555555, d = 0.8000000$

$P_8(x, y) \to a = 0.210344, b = 0.896551$

$P_{10}(x, y) \to a = 0.085714, b = -0.577551.$

A seguinte tabela mostra a sup–norma dos polinômios em $\ell_{2m}^2(\mathbb{R})$.

Polinômio P_m	Norma de P_m
P_3	$1.414213,$
P_5	$0.147219,$
P_6	$0.258967,$
P_7	$0.078601,$
P_8	$0.041048,$
P_{10}	$0.014151.$

Agora, podemos enunciar nosso resultado sobre estimativas inferiores para a constante $D_{m,2m}^{\mathbb{R}}$.

Proposição 3.3.1. *As constantes reais da desigualdade de Hardy–Littlewood satisfa-*

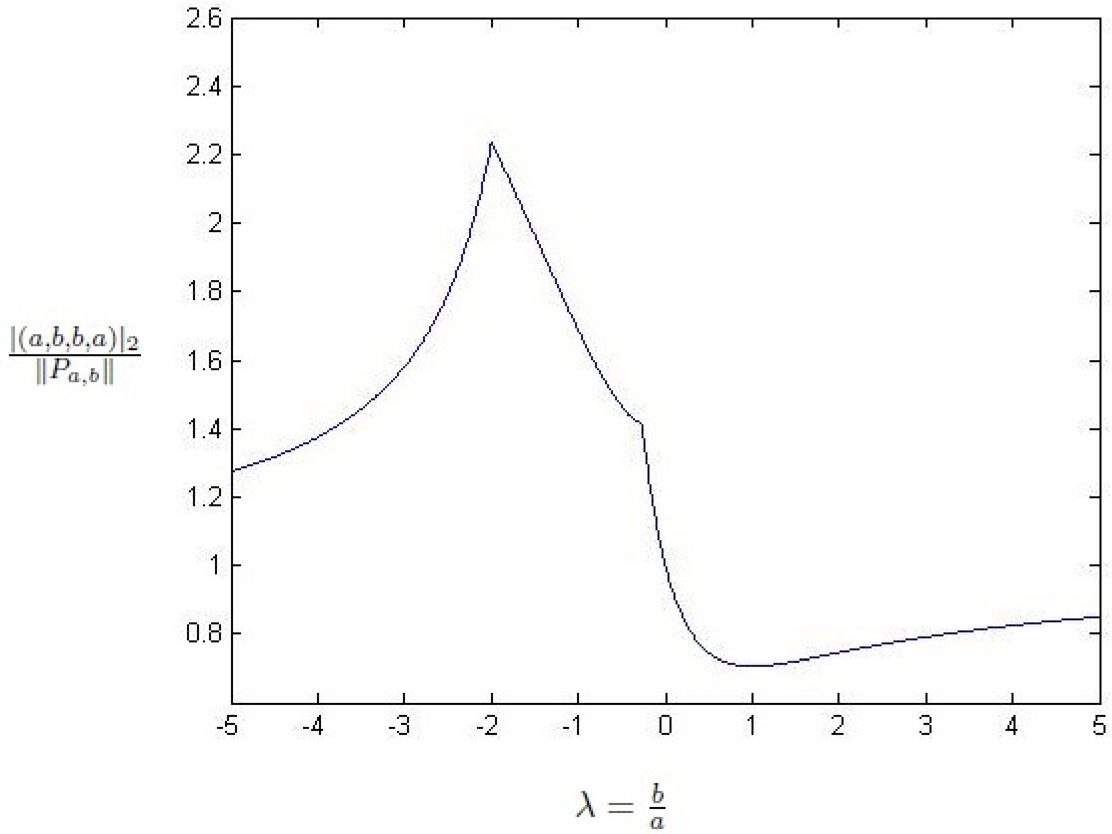

Figura 1 – O gráfico do quociente $\frac{|(a,b,b,a)|_2}{\|P_3\|}$ como função de $\lambda = \frac{b}{a}$.

zem:

$$\begin{array}{rcl} D_{2,4}^{\mathbb{R}} & \geq & \sqrt{2}, \\ D_{3,6}^{\mathbb{R}} & \geq & 2.236067 \approx \sqrt{5}, \\ D_{5,10}^{\mathbb{R}} & \geq & 6.191704, \\ D_{6,12}^{\mathbb{R}} & \geq & 10.636287, \\ D_{7,14}^{\mathbb{R}} & \geq & 18.095148, \\ D_{8,16}^{\mathbb{R}} & \geq & 31.727174, \\ D_{10,20}^{\mathbb{R}} & \geq & 91.640152. \end{array}$$

3.4 Desigualdade de Hardy-Littlewood em $\mathcal{P}(^m\ell_m(\mathbb{K}))$: um domínio inexplorado

A desigualdade de Hardy–Littlewood polinomial é válida para espaços de sequências ℓ_p com $m < p \leq \infty$. Nesta seção, apresentaremos a versão ótima desta desigualdade para quando $p = m$. Além disso, faremos algumas estimativas para as constantes envolvidas.

Começaremos com o seguinte lema que é uma consequência da desigualdade

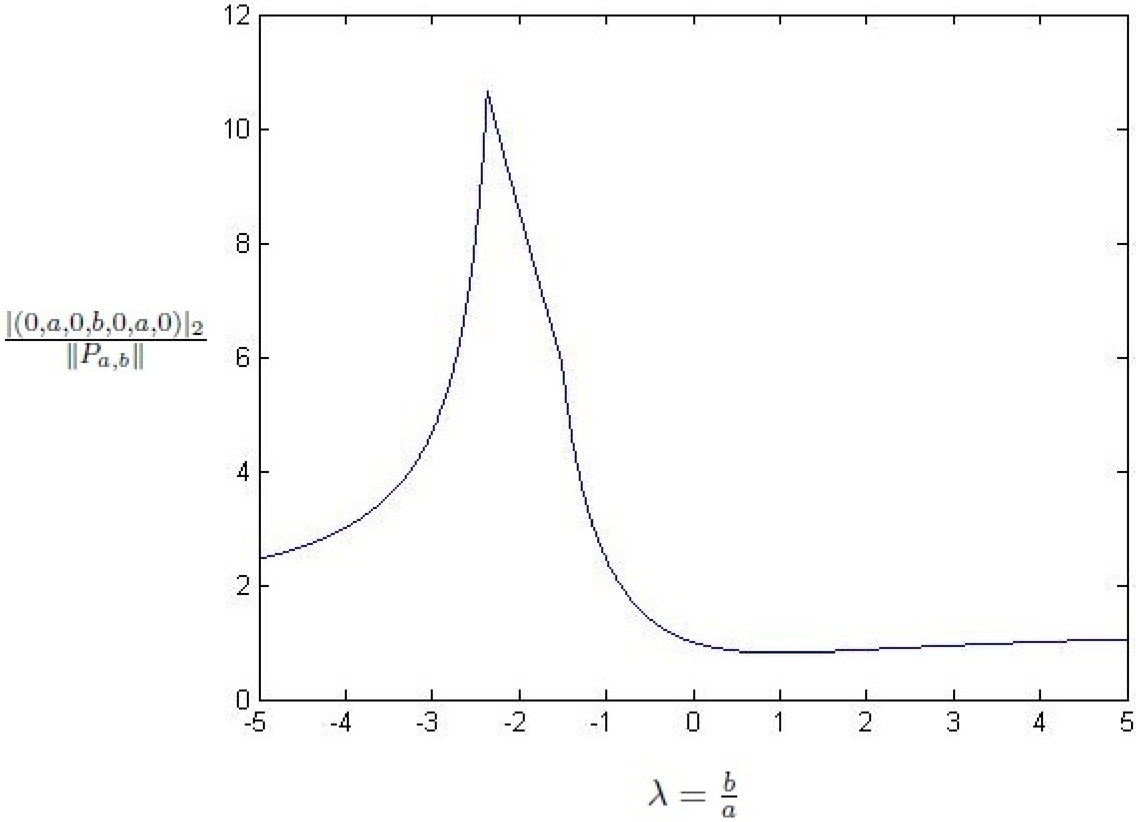

Figura 2 – O gráfico do quociente $\frac{|(0,a,0,b,0,a,0)|_2}{\|P_6\|}$ como função de $\lambda = \frac{b}{a}$.

de Hardy-Littlewood devido a Dimant-Sevilla-Peris (DIMANT; SEVILLA-PERIS et al., 2016), apresentaremos tal demonstração para completude do nosso argumento.

Lema 3.4.1. *Se P é um polinômio homogêneo de grau m sobre ℓ_p^n, de modo que $m < p < 2m$, dado por $P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha$, então*

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{p}{p-m}} \right)^{\frac{p-m}{p}} \leq D_{m,p}^{\mathbb{K}} \|P\|$$

com

$$D_{m,p}^{\mathbb{K}} \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}} \frac{m^m}{(m!)^{\frac{p-m}{p}}}.$$

Demonstração. Seja L a forma m-linear simétrica associada a P. Quando usamos um argumento combinatório, temos

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{p}{p-m}} &= \sum_{|\alpha|=m} \left(\binom{m}{\alpha} |L(e_1^{\alpha_1}, \ldots, e_n^{\alpha_n})| \right)^{\frac{p}{p-m}} \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha}^{\frac{p}{p-m}} |L(e_1^{\alpha_1}, \ldots, e_n^{\alpha_n})|^{\frac{p}{p-m}}. \end{aligned}$$

Para todo α, o termo $|L(e_1^{\alpha_1},\ldots,e_n^{\alpha_n})|^{\frac{p}{p-m}}$ aparece $\binom{m}{\alpha}$ vezes em

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}|L(e_{i_1},\ldots,e_{e_{i_m}})|^{\frac{p}{p-m}}.$$

Consequentemente

$$\sum_{|\alpha|=m}\binom{m}{\alpha}^{\frac{p}{p-m}}|L(e_1^{\alpha_1},\ldots,e_n^{\alpha_n})|^{\frac{p}{p-m}}=\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}\binom{m}{\alpha}^{\frac{p}{p-m}}\frac{1}{\binom{m}{\alpha}}|L(e_{i_1},\ldots,e_{e_{i_m}})|^{\frac{p}{p-m}}$$

e, como $\binom{m}{\alpha}\leq m!$ segue-se que

$$\sum_{|\alpha|=m}\binom{m}{\alpha}^{\frac{p}{p-m}}|L(e_1^{\alpha_1},\ldots,e_n^{\alpha_n})|^{\frac{p}{p-m}}\leq(m!)^{\frac{p}{p-m}-1}\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}|L(e_{i_1},\ldots,e_{e_{i_m}})|^{\frac{p}{p-m}}.$$

Assim, da desigualdade de Hardy-Littlewood para formas m-lineares segue que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{|\alpha|=m}|a_\alpha|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} &\leq \left((m!)^{\frac{p}{p-m}-1}\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}|L(e_{i_1},\ldots,e_{e_{i_m}})|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}}\\ &= (m!)^{1-\frac{p-m}{p}}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}|L(e_{i_1},\ldots,e_{e_{i_m}})|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}}\\ &\leq (m!)^{1-\frac{p-m}{p}}C_{m,p}^{\mathbb{K}}\|L\|.\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Corolário 1.0.3, temos

$$\|L\|\leq\frac{m^m}{m!}\|P\|.$$

Portanto

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{|\alpha|=m}|a_\alpha|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}}\\ &\qquad\leq\left((m!)^{1-\frac{p-m}{p}}\frac{m^m}{m!}\right)C_{m,p}^{\mathbb{K}}\|P\|=\left(\frac{m^m}{(m!)^{\frac{p-m}{p}}}\right)C_{m,p}^{\mathbb{K}}\|P\|.\end{aligned}$$

□

Agora podemos enunciar e demonstrar nosso primeiro resultado:

Proposição 3.4.2. *Para todo inteiro positivo n, temos*

$$\max_{|\alpha|=2}|a_\alpha|\leq 4\sqrt{2}\|P\|$$

para qualquer $P=\sum_{|\alpha|=2}a_\alpha x^\alpha$ contido em $\mathcal{P}(^2\ell_2^n(\mathbb{R}))$. Além disso, este resultado é ótimo no sentido que a norma do supremo usada do lado esquerdo não pode ser trocada por nenhuma ℓ_r-norma sem manter a constante independente de n.

Demonstração. Seja $2 < p < 4$. É bem conhecido da desigualdade de Hardy–Littlewood (ver (DIMANT; SEVILLA-PERIS et al., 2016)) para formas bilineares $T : \ell_p^n \times \ell_p^n \to \mathbb{K}$, que

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |T(e_i, e_j)|^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}} \leq \sqrt{2}\|T\|. \tag{3.17}$$

Do lema anterior, segue que para $Q = \sum_{|\alpha|=2} c_\alpha x^\alpha$ em $\mathcal{P}(^2\ell_p^n)$, temos

$$\left(\sum_{|\alpha|=2} |c_\alpha|^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}} \leq 2^{\frac{p+2}{p}}\sqrt{2}\|Q\|.$$

Dado $P = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha x^\alpha$ um polinômio em $\mathcal{P}(^2\ell_2^n)$. Para todo $p \in (2,4)$, consideramos $P_p \in \mathcal{P}(^2\ell_p^n)$ pela mesma regra de formação de P. Assim

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\alpha} |a_\alpha|^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}} &\leq 2^{\frac{p+2}{p}}\sqrt{2}\sup\left\{|P_p(x_1,\ldots,x_n) : \sum |x_i|^p\right\} \\ &= 2^{\frac{p+2}{p}}\sqrt{2}\sup\left\{|P(x_1,\ldots,x_n) : \sum |x_i|^p\right\}.\end{aligned}$$

Ao fazer $p \to 2$, obtemos

$$\max_{|\alpha|=2} |a_\alpha| \leq 4\sqrt{2}\|P\|.$$

Agora provamos a otimalidade. Suponha que existem um $r < \infty$ e uma constante $C \geq 1$ (não dependente de n) a satisfazer

$$\left(\sum_{|\alpha|=2} |a_\alpha|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\|P\|$$

para qualquer $P = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha x^\alpha \in \mathcal{P}(^2\ell_2^n)$ e todo n. Dado $p \in (2,4)$ de modo que

$$r < \frac{p}{p-2}.$$

Sejam $R = \sum_{|\alpha|=2} \beta_\alpha x^\alpha$ um polinômio em $\mathcal{P}(^2\ell_p^n)$ e R_2 o mesmo polinômio com domínio em ℓ_2^n. Assim,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{|\alpha|=2} |\beta_\alpha|^r\right)^{\frac{1}{r}} &\leq C\sup\{R_2(x_1,\ldots,x_n) : \sum |x_i|^2 \leq 1\} \\ &= C\sup\{R(x_1,\ldots,x_n) : \sum |x_i|^2 \leq 1\} \\ &\leq C\sup\{R(x_1,\ldots,x_n) : \sum |x_i|^p \leq 1\}\end{aligned}$$

para todo n e esta é a contradição em vista da otimalidade do expoente $\frac{p}{p-2}$ na desigualdade clássica de Hardy–Littlewood. $\square$

Definição 3.4.3. *Recordamos a definição de constante de polarização para polinômios em ℓ_p:*

$$\mathbb{K}(m,p) := \inf\{M > 0 : \|L\| \leq M\|P\|\}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os polinômios $P \in \mathcal{P}(^m\ell_p^n)$ e L é a única forma m-linear simétrica associada a P.

Observação 3.4.4. *Pelo Corolário 1.0.3, temos que em geral*

$$\|L\| \leq \frac{m^m}{m!}\|P\|$$

mas para espaços ℓ_p as estimativas superiores podem ser melhoradas se usamos $\mathbb{K}(m,p)$. Por exemplo, um resultado devido a Harris (HARRIS, 1972) afirma que

$$\mathbb{C}(m,p) \leq \left(\frac{m^m}{m!}\right)^{\frac{|p-2|}{p}},$$

para todo $p \geq 1$, sempre que m é uma potência de 2. Em particular, se $m = 2$ e $p > 2$, temos, da demonstração do Lema 3.4.1,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{|\alpha|=2} |a_\alpha|^{\frac{p-2}{p}}\right)^{\frac{p-2}{p}} &\leq \left(2^{1-\frac{p-2}{p}}\left(\frac{2^2}{2!}\right)^{\frac{|p-2|}{p}}\right) C_{2,p}^{\mathbb{C}}\|P\| \\ &= 2C_{2,p}^{\mathbb{C}}\|P\|\end{aligned}$$

para todos polinômios P sobre ℓ_p^n, quando trabalhamos com escalares complexos.

No caso de escalares complexos pode-se trocar $\sqrt{2}$ por $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ em (3.17), veja (DIMANT; SEVILLA-PERIS et al., 2016); e obtemos assim:

Proposição 3.4.5. *Para todo $n \geq 1$, temos*

$$\max_{|\alpha|=2} |a_\alpha| \leq \frac{4}{\sqrt{\pi}}\|P\|$$

para qualquer $P = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha x^\alpha$ contido em $\mathcal{P}(^2\ell_2^n)$ sobre o corpo de escalares complexos. Além disso, este resultado é ótimo no sentido da Proposição 3.4.2.

Uma simples adaptação da demonstração da Proposição 3.4.2 combinada com a versão m-linear da desigualdade de Hardy–Littlewood devido a Dimant e Sevilla–Peris para $m < p < 2m$.

Fornece a seguinte versão geral para o caso m–linear.

Teorema 3.4.6. *Seja $m \geq 2$ inteiro positivo. Dado $n \geq 1$, existe uma constante ótima $M_m^{\mathbb{K}} \geq 1$ (independente de n) a satisfazer*

$$\max_{|\alpha|=m} |a_\alpha| \leq D_{m,m}^{\mathbb{K}}\|P\|$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^m\ell_m^n)$, com

$$D_{m,m}^{\mathbb{R}} \leq (\sqrt{2})^{m-1} m^m,$$

$$D_{m,m}^{\mathbb{C}} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} m^m.$$

Além disso, este resultado é ótimo no sentido que a norma do supremo não pode ser trocada por uma ℓ_r-norma sem manter a constante independente de n.

Observação 3.4.7. *Ao observar as melhores constantes podemos escrever as estimativas acima dependente das constantes de polarização. Assim,*

$$D_{m,m}^{\mathbb{R}} \leq (\sqrt{2})^{m-1} \mathbb{R}(m,m)$$

e

$$D_{m,m}^{\mathbb{C}} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} \mathbb{C}(m,m).$$

Provamos uma generalização da desigualdade de Hardy-Littlewood para polinônimios m-homogênenos em espaços ℓ_m. Agora, faremos uma busca da menor constante da desigualdade de Hardy-Littlewood $\mathcal{P}(^2\ell_2^2)$.

Para todo $n \geq 1$ fixado, definimos por $D_{2,2}^{\mathbb{R}}(n)$ a menor constante que satisfaz

$$\max_{|\alpha|=2} |a_\alpha| \leq D_{2,2}^{\mathbb{R}}(n) \|P\|$$

para qualquer $P : \ell_2^n \to \mathbb{K}$. É de fácil verificação que $D_{2,2}^{\mathbb{R}}(n) \geq 2$. De fato, o polinômio 2-homogêneo

$$P : \ell_2^n \to \mathbb{R}$$

dado por

$$P(x,y) = xy$$

possui norma igual a $1/2$. De

$$\max_{|\alpha|=2} |a_\alpha| \leq D_{2,2}^{\mathbb{R}}(n) \|P\|,$$

concluímos que

$$D_{2,2}^{\mathbb{R}}(n) \geq 2.$$

A seguir mostraremos precisamente que $D_{2,2}^{\mathbb{R}}(2)$ é 2. Para isto usaremos a expressão dos polinômios extremais da bola unitária de $\mathcal{P}(^2\ell_2^2)$. Tal resultado é devido a Choi e Kim (CHOI; KIM, 1998).

Teorema 3.4.8 (Choi-Kim, (CHOI; KIM, 1998))**.** *Para $p = 2$, um polinômio 2-homogêneo de norma 1 da forma $P(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$ é um ponto extremo da bola unitária de $\mathcal{P}(^2\ell_2^2)$ se, e somente se,*

(i) $|a| = |b| = 1, c = 0$ *ou*

(ii) $a = -b$, $0 < |c| \geq 2$ *e* $4a^2 = 4 - c^2$.

Demonstração. Para todos os polinômios que são pontos extremos dados pelo teorema anterior, temos
$$\max\{|a|,|b|,|c|\} \leq D^{\mathbb{R}}_{2,2}(2)\|P\| = D^{\mathbb{R}}_{2,2}(2).$$
Neste caso (i) temos $D^{\mathbb{R}}_{2,2}(2) \geq 1$ e no caso (ii) temos
$$2 = \max\{|a|, \sqrt{4-4a^2} : 0 \leq a \leq 1\} \leq D^{\mathbb{R}}_{2,2}(2)\|P\| = D^{\mathbb{R}}_{2,2}(2),$$
e assim a constante ótima é 2. $\square$

De acordo com o Teorema 2.2.5, a constante ótima será encontrada em um ponto extremo da bola unitária de $\mathcal{P}(^2\ell_2^2)$. Assim, provamos o nosso resultado sobre otimalidade das constantes.

Teorema 3.4.9. *Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, a constante ótima para a desigualde de Hardy–Littlewood para polinômios 2-homogêneos em $\ell_2^2(\mathbb{R})$ é 2.*

4 A GEOMETRIA DOS ESPAÇOS $\mathcal{L}(^{M}C_0^N(\mathbb{R}))$

Na geometria elementar, dizemos que um conjunto é convexo se ele contém ao longo de todos os pares de seus pontos x e y, o segmento de reta ligando estes pontos. De forma mais geral, a definição de convexidade é a seguinte:

Definição 4.0.1. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.*

(a) Dados $x, y \in E$. O conjunto

$$[x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}$$

é chamada um segmento de reta com extremos x e y.

(b) Um subconjunto M de E é dito ser convexo, se dados $x, y \in M$ tem-se $[x, y] \subset M$.

(c) Dado M um subconjunto de E, definimos a envoltória convexa de M, por

$$conv(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} t_i x_i : t_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^{m} t_i = 1, x_i \in M \text{ e } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ao considerar-se conjuntos convexos existem elementos especiais dentro deles que são os chamados pontos extremos, os quais são definidos da seguinte forma:

Definição 4.0.2. *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e M um subconjunto convexo de E. Um ponto x de M é chamado ponto extremo de M se, x não é ponto médio de nenhum segmento de reta contido em M. O conjunto de todos os pontos extremos de M será denotado por $extM$.*

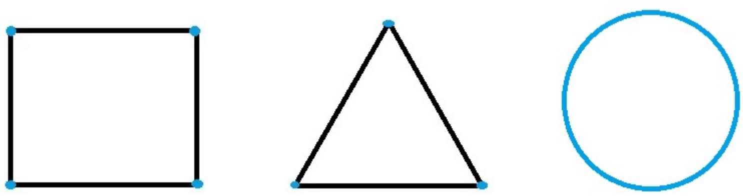

Figura 3 – Os pontos marcados em azul são os pontos extremos dos conjuntos convexos acima.

Um resultado que relaciona compacidade e convexidade com a definição de pontos extremos, é o Teorema de Minkowski/Krein–Milman. Este afirma que, se E é um espaço normado de dimensão finita e K é um subconjunto convexo, compacto e não vazio de E, então K possui ao menos um ponto extremo e $K = conv(extK)$.

Os pontos extremos são importantes na teoria de otimização de funções contínuas e convexas dentro de conjuntos convexos e compactos, pela fato que o máximo de tais funções se encontra dentro do conjuntos dos pontos extremos.

Expliquemos melhor: Se $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e convexa ($f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ para $t \in [0,1]$) sobre o conjunto K compacto e convexo, então o máximo de f sobre K é atingido em algum ponto extremo de K.

Com efeito, seja $k_0 \in K$ o ponto que atinge o máximo de f. Pelo Teorema de Minkowski/Krein–Milman, existem $t_1, \ldots, t_m \in [0,1]$ com $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ e $x_1, \ldots, x_m \in ext(K)$, tais que

$$k_0 = \sum_{i=1}^m t_i x_i.$$

Se o máximo de f não é atingido em algum ponto extremo de K, então

$$f(k_0) = f\left(\sum_{i=1}^m t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m t_i f(x_i) < \sum_{i=1}^m t_i f(k_0) = f(k_0),$$

uma contradição.

Neste capítulo, estudaremos os espaços $\mathcal{L}({}^m c_0^n(\mathbb{R}))$ e provaremos alguns resultados sobre este tipo de pesquisa. O leitor interessado, pode encontrar mais informação nesta linha de pesquisa em (CHOI; KIM, 1998; KIM, 2018; GRECU, 2002; GRZĄŚLEWICZ; JOHN, 1988).

4.1 Resultados auxiliares

Nesta seção, apresentaremos um conjunto de resultados e definições que serão usados no decorrer deste capítulo.

Consideraremos o espaço $\mathbb{R}^n$ munido da norma do supremo. Dada uma matriz M, denotamos por M^t a sua matriz transposta. O conjunto $\{1, \ldots, n\}$ deverá ser representado por $[n]$. Para $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_m) \in [n]^m$, definimos

$$x^{\mathbf{j}} = \prod_{i=1}^m x_i^{(j_i)} \in \mathbb{R},$$

onde $x_i^{(j_i)}$ denota a j_i-ésima entrada do vetor x_i. Também definimos

$$\omega(x) = (x^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in [n]^m} \in \mathbb{R}^{n^m},$$

usando a ordem lexicográfica.

Por exemplo, consideremos os vetores $x_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)})$ e $x_1 = (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)})$, e assim construir o vetor $\omega(x_1, x_2)$ que pode ser descrito como

$$(x_1^{(1)}x_2^{(1)}, x_1^{(1)}x_2^{(2)}, x_1^{(1)}x_2^{(3)}, x_1^{(2)}x_2^{(1)}, x_1^{(2)}x_2^{(2)}, x_1^{(2)}x_2^{(3)}, x_1^{(3)}x_2^{(1)}, x_1^{(3)}x_2^{(2)}, x_1^{(3)}x_2^{(3)}).$$

Se m, n são inteiros positivos, considere o conjunto

$$V_m^n := \{\omega(x) : x = (x_1, \ldots, x_m) \text{ e } x_i \in ext(B_{\mathbb{R}^n}) \forall i \in [m]\}.$$

Lema 4.1.1. *(Minkowski/Krein-Milman) Se E é um espaço normado de dimensão finita e K é um subconjunto convexo, compacto e não vazio de E, então K possui ao menos um ponto extremo e $K = conv(extK)$.*

O seguinte resultado é uma consequência direta do Teorema de Krein-Milman.

Lema 4.1.2. *Existe uma base de $\mathbb{R}^n$ composta por vetores de $ext\left(B_{c_0^n(\mathbb{R})}\right)$,*

Demonstração. É uma consequência do lema anterior. $\square$

Lema 4.1.3. *Sejam $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Então*

$$\langle \omega(u), \omega(v) \rangle = \prod_{i=1}^{m} \langle u_i, v_i \rangle,$$

onde $u = (u_1, \ldots, u_m), v = (v_1, \ldots, v_m)$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\langle \omega(v), \omega(u) \rangle &= \sum_{\mathbf{k} \in [n]^m} v^{\mathbf{k}} u^{\mathbf{k}} \\
&= \sum_{\mathbf{k} \in [n]^m} (v_1^{(k_1)} \cdots v_m^{(k_m)})(u_1^{(k_1)} \cdots u_m^{(k_m)}) \\
&= \sum_{\mathbf{k} \in [n]^m} (v_1^{(k_1)} u_1^{(k_1)}) \cdots (v_m^{(k_m)} u_m^{(k_m)}) \\
&= \left(\sum_{k_1 \in [n]} v_1^{(k_1)} u_1^{(k_1)} \right) \left(\sum_{k_2 \in [n]} v_2^{(k_2)} u_2^{(k_2)} \right) \cdots \left(\sum_{k_m \in [n]} v_m^{(k_m)} u_m^{(k_m)} \right) \\
&= \prod_{i=1}^{m} \langle v_i, u_i \rangle.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposição 4.1.4. *Para todo $i \in [m]$, seja*

$$\beta_i = \{v_{i,1}, \ldots, v_{i,n}\}$$

um conjunto de vetores não nulos em $\mathbb{R}^n$. As afirmações a seguir são equivalentes:

(i) β_i é base de $\mathbb{R}^n$ para todo $i \in [m]$.

(ii) $\Lambda_m(\beta_1, \ldots, \beta_m) := \{\omega(x) : x = (x_i)_{i=1}^m \in \Pi_{i \in [m]} \beta_i\}$ é base de $\mathbb{R}^{n^m}$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Para todo $i \in [m]$ existe uma base $\gamma_i = \{u_{i,1}, \ldots, u_{i,n}\}$ de $\mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$\langle v_{i,r}, u_{i,s} \rangle = \delta^i_{rs},$$

onde δ^i_{rs} é o delta de Kronecker e $r, s \in [n]$.

Dado $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m)$ e $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_m) \in [n]^m$, considere

$$v_{\mathbf{j}} = (v_{1,j_1}, \ldots, v_{m,j_m})$$

e

$$u_{\mathbf{j}} = (u_{1,j_1}, \ldots, u_{m,j_m}).$$

Logo, pelo Lema 4.1.3, temos

$$\delta_{\mathbf{ij}} := \Pi_{s\in[m]} \delta^s_{j_s i_s} = \Pi_{s\in[m]} \langle v_{s,j_s}, u_{s,i_s} \rangle = \langle \omega(v_{\mathbf{j}}), \omega(u_{\mathbf{i}}) \rangle,$$

conforme o requisitado.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponha que (i) não é verdadeiro. Assim, existe $j_0 \in [m]$ tal que β_{j_0} não é base de $\mathbb{R}^n$, i.e., existe $k_0 \in [n]$ tal que

$$v_{j_0,k_0} = \sum_{i \neq k_0} \alpha_i v_{j_0,i}$$

para certos escalares α_i, $i \neq k_0$, e asiim, é imediato que $\Lambda_m(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ não é composto por uma combinação linearmente independente de vetores. □

Corolário 4.1.5. *Se β é uma base de $\mathbb{R}^n$, então*

$$\Lambda_m(\beta) := \Lambda_m(\beta, \ldots, \beta)$$

é uma base de $\mathbb{R}^{n^m}$.

Ao combinar o Lema 4.1.2 com o Corolário 4.1.5 temos de forma imediata a seguinte consequência:

Corolário 4.1.6. *Existe uma base de $\mathbb{R}^{n^m}$ contida em V^n_m.*

Denotamos por $O(n^m)$, o conjunto de todas as matrizes ortogonais $n^m \times n^m$. Dado $(c_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$, definimos $diag(c_i)_{i\in[m]}$ a matriz diagonal $m \times m$ cujas entradas são c_i.

Seja

$$G^n_m := \left\{ diag(x^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m} \in O(n^m) : x = (x_i)_{i=1}^m \text{ and } x_i \in ext\,(B_{\mathbb{R}^n}) \text{ for all } i \in [m] \right\},$$

e também usamos a ordem lexicográfica.

Antes de enunciar o próximo resultado, precisaremos lembrar as seguintes definições:

Definição 4.1.7. *Seja $(G,*)$ um grupo. Se H é um subconjunto de G, dizemos que H é subgrupo de G se,*

(i) $H \neq \emptyset$;

(ii) Se $a,b \in H$, então $a * b \in H$;

(iii) Se $a \in H$, então $a^{-1} \in H$.

Definição 4.1.8. *Sejam $(G,*)$ um grupo e X um conjunto. Uma ação de G em X é uma aplicação $\phi : G \times X \to X$ tal que*

(i) $\phi(e,x) = x,\ \forall x \in X$, onde e é a identidade de G;

(ii) $\phi(g,\phi(h,x)) = \phi(g * h, x)$, $\forall g,h \in G$ e $\forall x \in X$.

Além disso, ϕ é dito ser uma ação livre (à esquerda) se,

(iii) Dados $x,y \in X$, existe $g \in G$ tal que $\phi(g,x) = y$.

Agora podemos enunciar nosso resultado sobre grupos que será usado para construirmos as bases de $\mathbb{R}^{n^m}$ contidas em V_m^n.

Proposição 4.1.9. *Sejam m,n inteiros positivos. Então*

(i) G_m^n é um subgrupo de $O(n^m)$;

(ii) A aplicação $\phi : G_m^n \times V_m^n \to V_m^n$ dada por

$$\phi\left(g,\omega(x)\right) \mapsto \omega(x) \cdot g,$$

onde $x = (x_1,\ldots,x_m)$ e $x_1,\ldots,x_m \in ext(B_{\mathbb{R}^n})$ esta bem definida;

(iii) ϕ é um ação de grupo livre (à esquerda).

Demonstração. (i) A identidade pertence a G_m^n; De fato, apenas precisamos considerar $x_1 = \cdots = x_m = (1,1,\ldots,1) \in ext\left(B_{\mathbb{R}^n}\right)$. Se $g \in G_m^n$, então

$$g^{-1} = g^t = g \in G_m^n.$$

Mostraremos agora que G_m^n é fechado para multiplicação. Dados $g,h \in G_m^n$ existem $x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_m \in ext\left(B_{\mathbb{R}^n}\right)$ tais que

$$g = diag(x^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m} \text{ and } h = diag(y^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m}.$$

Defina $z_i = (x_i^{(s)}y_i^{(s)})_{s\in[n]} \in ext\left(B_{\mathbb{R}^n}\right)$, $i = 1,\ldots,m$.

Assim

$$g \cdot h = diag(x^{\mathbf{j}}y^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m} = diag(z^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m} \in G_m^n.$$

(ii) Mostraremos que ϕ esta bem definida, i.e., ϕ não depende do representante e $\phi\left(G_m^n, V_m^n\right)$ esta contido em V_m^n.

Primeiramente, verificaremos que ϕ não depende do representante. Suponha que $g \in G_m^n$ é representado por

$$diag(a^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m} = diag(b^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m}$$

onde $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in ext\,(B_{\mathbb{R}^n})$ e $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m \in ext\,(B_{\mathbb{R}^n})$ são tais que

$$\omega(x) = \omega(y).$$

Então

$$a^{\mathbf{j}} = b^{\mathbf{j}} \text{ e } x^{\mathbf{j}} = y^{\mathbf{j}}$$

para todo $\mathbf{j} \in [n]^m$, e assim,

$$\omega(x) \cdot diag(a^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m} = (x^{\mathbf{j}} a^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m} = (y^{\mathbf{j}} b^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m} = \omega(y) \cdot diag(b^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m}.$$

Concluímos que ϕ não depende do representante.

Para concluir a prova de (ii) devemos verificar que $\omega(x) \cdot g \in V_m^n$, onde $x = (x_1, \ldots, x_m)$ e $x_1, \ldots, x_m \in ext(B_{\mathbb{R}^n})$. O qual segue do fato que, se

$$g = diag(a^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m}$$

com $a_1, \ldots, a_m \in ext\,(B_{\mathbb{R}^n})$, então

$$\omega(x) \cdot g = (x^{\mathbf{j}} a^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m} = \omega(y),$$

com $y_i = (a_i^{(s)} x_i^{(s)})_{s\in[n]} \in ext(B_{\mathbb{R}^n})$.

Assim $\omega(x) \cdot g \in V_m^n$.

(iii) Vejamos que ϕ é uma ação de grupo.

Seja I a identidade de G_m^n. Logo

$$\omega(x) \cdot I = \omega(x),$$

e além disso, se $g, h \in G_m^n$, então

$$\begin{aligned}
\phi(g \cdot h, \omega(x)) &= \omega(x) \cdot (g \cdot h) \\
&= (\omega(x) \cdot g) \cdot h \\
&= \phi\,(h, \omega(x) \cdot g) \\
&= \phi\,(h, \phi\,(g, \omega(x)))\,.
\end{aligned}$$

Finalmente, provaremos que ϕ é uma ação livre. Com efeito, dados $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m \in ext\,(B_{\mathbb{R}^n})$, defina

$$g = diag(z^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m},$$

onde $z_i = (x_i^{(s)} y_i^{(s)})_{s\in[n]}$. Assim

$$\phi(g, \omega(x)) = \omega(x) \cdot g = \omega(y).$$

$\square$

Particularmente, temos o seguinte:

Corolário 4.1.10. *Dado* $u \in V_m^n$*, existe uma base de* $\mathbb{R}^{n^m}$*,* $\beta \subseteq V_m^n$*, tal que* $u \in \beta$*. Mais precisamente, se* γ *é uma base de* $\mathbb{R}^{n^m}$ *contida em* V_m^n*, então*

$$\eta = \{\phi(g, v) : v \in \gamma\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^{n^m}$ *contida em* V_m^n *para todo* $g \in G_m^n$*.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.1.6, existe uma base $\varrho = \{v_1, ..., v_{n^m}\}$ de $\mathbb{R}^{n^m}$ tal que $\varrho \subseteq V_m^n$. Desde que $\phi : G_m^n \times V_m^n \to V_m^n$ é uma ação de grupo livre (à esquerda), existe um $g_1 \in G_m^n$ tal que

$$v_1 \cdot g_1 = \phi(g_1, v_1) = u.$$

Como

$$v \cdot g = \phi(g, v) \in V_m^n$$

para todo $g \in G_m^n$ e qualquer $v \in V_m^n$ e g_1 is invertível,

$$\beta := \{v \cdot g_1 : v \in \varrho\} = \{\phi(g_1, v) : v \in \varrho\} \subseteq V_m^n$$

é uma base de $\mathbb{R}^{n^m}$ obviamente contém u. □

4.2 Resultados de Caracterização:

A partir do Teorema de Krein–Milman (Lema 4.1.1), para caracterizarmos a geometria do espaço das formas m-lineares em $c_0^n(\mathbb{R})$ munido da norma do supremo, devemos estudar os seus pontos extremos. Nesta seção obteremos resultados de caracterização dos pontos extremos do espaço $\mathcal{L}({}^m c_0^n(\mathbb{R}))$.

Descrevemos como principais resultados desta seção o Teorema 4.2.5 e o Teorema 4.2.7. Eles fornecem uma construção elementar da caracterização dos pontos extremos da bola unitária fechada de $\mathcal{L}({}^m c_0^n(\mathbb{R}))$.

4.2.1 Primeiro resultado: Caso pontual

Dado uma forma multilinear $T \in \mathcal{L}({}^m c_0^n(\mathbb{R}))$, podemos representá-la por

$$T(y) = \sum_{\mathbf{i} \in [n]^m} a_{\mathbf{i}} y^{\mathbf{i}},$$

e assim

$$T(y) = \langle a^T, \omega(y) \rangle,$$

onde

$$a^T = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in [n]^m}.$$

Por simplicidade iremos algumas vezes denotar T por a^T.

O seguinte resultado é uma consequência direta do Teorema de Krein-Milman (Lema 4.1.1):

Proposição 4.2.1. *Se* $a^{\mathbf{T}} \in \mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))$, *então*

$$\|a^{\mathbf{T}}\| = \max \left\{ |\langle a^{\mathbf{T}}, \omega(x)\rangle| : \ x = (x_1, \ldots, x_m) \text{ e } x_1, \ldots, x_m \in ext(B_{\mathbb{R}^n}) \right\}.$$

Os seguintes lemas podem ser facilmente verificados e assim omitimos suas provas.

Lema 4.2.2. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão* $m < \infty$. *Se* $\alpha = \{v_1, \ldots, v_k\}$ *é um conjunto linearmente independente de* V *com* $k < m$ *e* $\beta = \{u_1, \ldots, u_m\}$ *é uma base de* V, *então existe uma base* γ *de* V *tal que* $\alpha \subseteq \gamma$ *e* $\gamma \backslash \alpha \subseteq \beta$.

Lema 4.2.3. *Seja* V *um espaço vetorial. Se* $\Omega = \{v_1, ..., v_s\}$ *é um conjunto de vetores não nulos em* V, *então existe* $\alpha \subseteq \Omega$ *tal que* α *é um conjunto maximal linearmente independente e*

$$\Omega \subseteq span\,(\alpha)\,.$$

Usaremos também a seguinte observação, que enunciaremos como um lema para referência futura:

Lema 4.2.4. *Sejam* $v = (v_1, \ldots, v_n), \ u = (u_1, \ldots, u_n)$ *and* $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. *Se*

$$w = \frac{1}{2}(u + v),$$

então existe um $\alpha \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $u = w + \alpha$ *e* $v = w - \alpha$.

O Próximo resultado nos fornece uma caracterização instrumental dos pontos extremos da bola unitátia fechada do espaço das formas m-lineares:

Teorema 4.2.5. *Seja* $a^T \in B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $a^T \in ext\left(B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}\right)$

(ii) Existe $\beta \subseteq V_m^n$, *base de* $\mathbb{R}^{n^m}$, *tal que* $|\langle a^{\mathbf{T}}, u\rangle| = 1$ *para todo* $u \in \beta$.

Demonstração. Iniciaremos, provando que (ii) implica (i). Seja $\beta \subseteq V_m^n$ uma base de $\mathbb{R}^{n^m}$, tal que $|\langle a^{\mathbf{T}}, u\rangle| = 1$ para todo $u \in \beta$. Do Lema 4.2.4 é suficiente mostrar que dado $b \in \mathbb{R}^{n^m}$ tal que $a^{\mathbf{T}} + b, a^{\mathbf{T}} - b \in B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}$, temos $b = 0$.

Se $a^{\mathbf{T}} + b, a^{\mathbf{T}} - b \in B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}$, então

$$|\langle a^{\mathbf{T}} + b, u\rangle| \leq 1$$

e

$$|\langle a^{\mathbf{T}} - b, u\rangle| \leq 1$$

para todo $u \in \beta$.

Como $|\langle a^{\mathbf{T}}, u\rangle| = 1$ para todo $u \in \beta$, temos

$$\langle b, u\rangle = 0$$

para todo $u \in \beta$; portanto $b = 0$.

Agora provaremos que (i) implica (ii). Suponhamos, por absurdo, que para toda $\beta \subseteq V_m^n$, base de $\mathbb{R}^{n^m}$, existe $u_\beta \in \beta$ tal que $|\langle a^{\mathbf{T}}, u_\beta\rangle| < 1$. Note que

$$\Omega := \left\{u \in V_m^n : |\langle a^{\mathbf{T}}, u\rangle| = 1\right\}$$

não contém uma base $\beta \subseteq V_m^n$ de $\mathbb{R}^{n^m}$ e $card(\Omega) < \infty$.

Suponha que $\Omega \neq \emptyset$. Logo, pelo Lema 4.2.3 existe $\alpha = \{\eta_1, \ldots, \eta_k\} \subseteq \Omega$, um conjunto maximal linearmente independente, de modo que

$$\Omega \subseteq span\left(\alpha\right).$$

Pelo Lema 4.2.2 e Corolário 4.1.6, existe uma base $\gamma = \{\eta_1, \ldots, \eta_k, \xi_1, \ldots, \xi_{n^m-k}\}$ de $\mathbb{R}^{n^m}$ contida em V_m^n, com

$$\xi_j \in V_m^n \backslash \Omega$$

para todo $j = 1, ..., n^m - k$. De fato, se existisse algum ξ_j em Ω, então $\xi_j \in span(\alpha)$ e γ deveria ser linearmente dependente.

Seja

$$V_m^n \backslash \Omega := \{\zeta_1, \ldots, \zeta_s\}.$$

Para todo $i \in [s]$, existe $r_i > 0$ tal que

$$-1 < \langle a^{\mathbf{T}}, \zeta_i\rangle - r_i < \langle a^{\mathbf{T}}, \zeta_i\rangle < \langle a^{\mathbf{T}}, \zeta_i\rangle + r_i < 1.$$

Definindo $r = \min\{r_i : i \in [s]\}$, temos

$$-1 < \langle a^{\mathbf{T}}, \zeta_i\rangle - r < \langle a^{\mathbf{T}}, \zeta_i\rangle < \langle a^{\mathbf{T}}, \zeta_i\rangle + r < 1.$$

Por outro lado, para todo $i \in [s]$, existem únicos escalares reais $p_j^{\zeta_i}$ e $l_j^{\zeta_i}$ de modo que

$$\zeta_i = \sum_{j=1}^{n^m-k} p_j^{\zeta_i} \xi_j + \sum_{j=1}^{k} l_j^{\zeta_i} \eta_j.$$

Defina

$$p := \max\{|p_1^{\zeta_i}| : i = 1, \ldots, s\}.$$

Como $\xi_1 \in V_m^n \backslash \Omega$, segue que $p \geq 1$.

Como γ é base, existe um $0 \neq b \in \mathbb{R}^{n^m}$ tal que

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{n^m-k} \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_k \end{pmatrix} b^t = \begin{pmatrix} r/p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \langle\, a^{\mathbf{T}} \pm b, \zeta_i \rangle &= \langle\, a^{\mathbf{T}}, \zeta_i \rangle \pm \langle b, \zeta_i \rangle \\ &= \langle a^{\mathbf{T}}, \zeta_i \rangle \pm \langle b, \sum_{j=1}^{n^m-k} p_j^{\zeta_i} \xi_j + \sum_{j=1}^{k} l_j^{\zeta_i} \eta_j \rangle \\ &= \langle a^{\mathbf{T}}, \zeta_i \rangle \pm \langle b, p_1^{\zeta_i} \xi_1 \rangle \\ &= \langle a^{\mathbf{T}}, \zeta_i \rangle \pm p_1^{\zeta_i} \langle b, \xi_1 \rangle \\ &= \langle a^{\mathbf{T}}, \zeta_i \rangle \pm \frac{p_1^{\zeta_i} r}{p}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\left| \langle a^{\mathbf{T}} \pm b, \zeta_i \rangle \right| = \left| \langle a^{\mathbf{T}}, \zeta_i \rangle \pm \frac{p_1^{\zeta_i} r}{p} \right| \leq \left| \langle a^{\mathbf{T}}, \gamma_i \rangle \pm r \right| < 1.$$

Se $\upsilon \in \Omega$, então

$$|\langle a^{\mathbf{T}} \pm b, \upsilon \rangle| = |\langle a^T, \upsilon \rangle| = 1,$$

pois $\upsilon \in span(\alpha)$.

Concluímos $a^{\mathbf{T}} + b, a^{\mathbf{T}} - b \in B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}$, e como

$$a^{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} \left(a^{\mathbf{T}} + b + a^{\mathbf{T}} - b \right),$$

segue que $a^{\mathbf{T}}$ não é ponto extremo de $B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}$.

Finalmente, se $\Omega = \emptyset$, então $a^{\mathbf{T}}$ é um ponto interior de $B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}$, e a demonstração está completa. □

4.2.2 Segundo resultado: Caso geral

Seja

$$\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_s\} \tag{4.1}$$

o conjunto de todas as bases de $\mathbb{R}^{n^m}$ tais que $\beta_j \subseteq V_m^n$ para todo j e $\omega(e, e, \ldots, e) \in \beta_j$, onde $e = e_1 + \ldots + e_n$. Enumeramos $\beta_j = \{v_{j,1}, ..., v_{j,n^m}\}$ com $v_{j,1} = (1, \overset{n^m}{\ldots}, 1)$. Pelo Corolário 4.1.10, temos $\mathcal{B} \neq \varnothing$.

Para todo $i \in [s]$, defina a matriz H_{β_i} cujas linhas são os vetores de β_i, isto é,

$$H_{\beta_i} = \begin{pmatrix} v_{i,1} \\ \vdots \\ v_{i,n^m} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

é uma matriz $n^m \times n^m$.

Considere, para todo $i \in [s]$ e para qualquer $f \in ext\left(B_{c_0^{n^m}(\mathbb{R})}\right)$, o conjunto

$$\mathcal{A}_{i,f} = \{a^{\mathbf{T}} : H_{\beta_i}(a^{\mathbf{T}})^t = f^t\}$$

e

$$\mathcal{A}_{m,n} = \bigcup_{i \in [s], f \in ext(B_{\mathbb{R}^n})} \mathcal{A}_{i,f}. \tag{4.3}$$

Note que

$$card(\mathcal{A}_{m,n}) \leq card(\mathcal{B}) \cdot 2^{n^m} < \infty.$$

Defina, para qualquer $g \in G_m^n$,

$$\mathcal{C}_g = \left\{a^{\mathbf{T}} \cdot g : a^T \in \mathcal{A}_{m,n},\ |\langle a^{\mathbf{T}}, v\rangle| \leq 1 \ \forall\ v \in V_m^n\ \right\}$$

e

$$\mathcal{C}_{m,n} = \bigcup_{g \in G_m^n} \mathcal{C}_g. \tag{4.4}$$

Note também que

$$card(\mathcal{C}_{m,n}) \leq card(\mathcal{A}_{m,n}) \cdot card(G_m^n) < \infty.$$

Lema 4.2.6. *Seja* $a^{\mathbf{T}} = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in [n]^m}$, $g \in G_m^n$ *e* $\omega(x)$ *com* $x = (x_1, \ldots, x_m)$ *e* $x_1, \ldots, x_m \in ext(B_{\mathbb{R}^n})$. *Então*

$$\langle a^{\mathbf{T}} \cdot g, \omega(x)\rangle = \langle a^{\mathbf{T}}, \phi(g, \omega(x))\rangle.$$

Demonstração. Como $g \in G_m^n$, existem $b_1, \ldots, b_m \in ext(B_{c_0^n(\mathbb{R})})$ tais que

$$g = diag(b^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in [n]^m}.$$

Assim,

$$a^{\mathbf{T}} \cdot g = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in [n]^m} \cdot diag(b^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in [n]^m} = (a_{\mathbf{j}} b^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in [n]^m}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\langle a^{\mathbf{T}} \cdot g, \omega(x)\rangle &= \sum_{\mathbf{j}\in[n]^m} (a_{\mathbf{j}} b^{\mathbf{j}}) x^{\mathbf{j}} \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in[n]^m} a_{\mathbf{j}} (x^{\mathbf{j}} b^{\mathbf{j}}) \\
&= \langle (a_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m}, (x^{\mathbf{j}} b^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in[n]^m}\rangle \\
&= \langle a^{\mathbf{T}}, \omega(x)\cdot g\rangle \\
&= \langle a^{\mathbf{T}}, \phi(g, \omega(x))\rangle.
\end{aligned}$$

□

O próximo resultado é o mencionado teorema de caracterização geral, o qual nos mostra uma forma de como determinar todos os pontos extremos da bola unitária fechada do espaço $\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))$.

Teorema 4.2.7. $ext\left(B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}\right) = \mathcal{C}_{m,n}$.

Demonstração. Seja $T \in ext(B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))})$. Pelo Teorema 4.2.5, existe uma base $\beta \subset V_n^m$ de $\mathbb{R}^{n^m}$ tal que $|\langle a^T, v\rangle| = 1$ para todo $v \in \beta$. Para um $v_1 \in \beta$ fixado, como ϕ é uma ação livre, existe $g \in G_n^m$ tal que $v_1 \cdot g = (1, \overset{n^m}{\ldots}, 1)$. Por outro lado, segue do Corolário 4.1.10 que o conjunto $\{v \cdot g \in V_n^m : v \in \beta\}$ é uma base de $\mathbb{R}^{n^m}$ contendo $(1, \overset{n^m}{\ldots}, 1)$. Assim, existe um $j \in [s]$ tal que vale a igualdade dos conjuntos $\{v \cdot g \in V_n^m : v \in \beta\} = \beta_j$; note também que se chamarmos por β_s cada base ordenada, o primeiro elemento desses conjuntos coincide. A enumeração de β_j induz uma enumeração $\beta = \{v_1, ..., v_{n^m}\}$, onde $v_i \cdot g = v_{j,i}$, $i \in [n^m]$. Considere

$$H := \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & \cdots & v_1^{(n^m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n^m}^{(1)} & \cdots & v_{n^m}^{(n^m)} \end{pmatrix}$$

e

$$f := (\langle a^T, v_1\rangle, ..., \langle a^T, v_{n^m}\rangle).$$

Assim

$$H \cdot (a^T)^t = \begin{pmatrix} \langle a^T, v_1\rangle \\ \vdots \\ \langle a^T, v_{n^m}\rangle \end{pmatrix} = f^t \tag{4.5}$$

e

$$H_{\beta_i} = \begin{pmatrix} (v_1 \cdot g)^{(1)} & \cdots & (v_1 \cdot g)^{(n^m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_{n^m} \cdot g)^{(1)} & \cdots & (v_{n^m} \cdot g)^{(n^m)} \end{pmatrix} = H \cdot g. \tag{4.6}$$

Seja x uma solução de
$$H_{\beta_j} \cdot x^t = f^t.$$
Logo
$$\begin{aligned} x^t &= H_{\beta_j}^{-1} \cdot f^t \\ &= g^{-1} \cdot \left(H^{-1} \cdot f^t\right) \\ &= g \cdot (a^{\mathbf{T}})^t. \end{aligned}$$
Podemos desta forma concluir que
$$a^{\mathbf{T}} \cdot g = x \in \mathcal{A}_{j,f} \subseteq \mathcal{A}_{m,n}. \tag{4.7}$$
Por outro lado, dado $y = (y_1, \ldots, y_m)$ com $y_1, \ldots, y_m \in ext(B_{c_0^n(\mathbb{R})})$, pelo Lema 4.2.6, temos
$$|\langle x, \omega(y)\rangle| = |\langle a^{\mathbf{T}} \cdot g, \omega(y)\rangle| = |\langle a^{\mathbf{T}}, \phi(g, \omega(y))\rangle| \leq 1. \tag{4.8}$$
Assim, pela Proposição 4.2.1, temos $x \in B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}$ e finalmente, por (4.7) e (4.8) segue-se que
$$a^{\mathbf{T}} = x \cdot g \in \mathcal{C}_g \subseteq \mathcal{C}_{m,n},$$
i.e.,
$$ext\left(B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}\right) \subseteq \mathcal{C}_{m,n}.$$
Mostraremos agora que $\mathcal{C}_{m,n} \subseteq ext\left(B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}\right)$. Se $x \in \mathcal{C}_{m,n}$, então $x = a^{\mathbf{T}} \cdot g$ com $a^{\mathbf{T}} \in \mathcal{A}_{m,n}$ e $g \in G_m^n$, onde $|\langle a^{\mathbf{T}}, v\rangle| \leq 1$ para todo $v \in V_m^n$. Existem j e f tais que $a^{\mathbf{T}} \in \mathcal{A}_{j,f}$ e existe $\beta_j \in \mathcal{B}$ de modo que $|\langle a^{\mathbf{T}}, u\rangle| = 1$ para qualquer $u \in \beta_j$. Como g é invertível, segue que
$$\beta := \{\phi(g, u) : u \in \beta_j\}$$
é base de $\mathbb{R}^{n^m}$. Então, para qualquer $u \in \beta_j$, pelo Lema 4.2.6, temos
$$|\langle x, \phi(g, u)\rangle| = |\langle (a^{\mathbf{T}} \cdot g), \phi(g, u)\rangle| = |\langle a^{\mathbf{T}}, \phi(g \cdot g, u)\rangle| = |\langle a^{\mathbf{T}}, u\rangle| = 1.$$
Como $|\langle a^{\mathbf{T}}, v\rangle| \leq 1$ para todo $v \in V_m^n$, segue pelo Lema 4.2.6 que
$$|\langle x, \phi(g, v)\rangle| = |\langle (a^{\mathbf{T}} \cdot g), \phi(g, v)\rangle| = |\langle a^{\mathbf{T}}, \phi(g \cdot g, v)\rangle| = |\langle a^{\mathbf{T}}, v\rangle| \leq 1$$
para todo $v \in V_m^n$. Consequentemente $x \in B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}$, e assim, pelo Teorema 4.2.5, concluímos que $x \in ext\left(B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}\right)$. □

Corolário 4.2.8. *Para quaisquer inteiros positivos m, n, os coeficientes dos pontos extremos $T \in B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}$ são números racionais.*

Demonstração. Do Teorema 4.2.7, segue que $\mathcal{C}_{m,n}$ é o conjunto dos pontos extremos de $B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}$. Assim, se $T \in \mathcal{C}_{m,n}$, então para determinarmos os coeficientes de T resolvemos um sistema linear

$$Aa^{\mathbf{T}} = f,$$

onde A é uma matriz de ordem $n^m \times n^m$ cujas entradas são 1 ou -1 e f é um vetor com coordenadas 1 ou -1. Resolvemos o sistema linear anterior e a solução $a^{\mathbf{T}}$ possui todas as coordenadas racionais. □

4.3 Como capturar os pontos extremos

Um algoritmo de fácil implementação pode ser extraído das demonstrações das seções anteriores. Abaixo damos uma forma de como calcular os pontos extremos da bola unitária fechada do espaço $\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))$.

Passo 1: Determine todas as matrizes $n^m \times n^m$ cuja as linhas estão em V_m^n, e contém $\omega(e, \ldots, e)$. Note que usando as notações de (4.1) e (4.2) o conjunto de tais matrizes é

$$\mathcal{M} = \{H_{\beta_i} : \beta_i \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}\}$$

para um certo $\mathcal{D}$.

Passo 2: Para todas as escolhas de $f \in ext(B_{c_0^{n^m}(\mathbb{R})})$ e matriz H_{β_i} selecionadas no passo 1, resolvemos o sistema linear

$$H_{\beta_i} \cdot \left(a^{\mathbf{T}}\right)^t = f^t.$$

Passo 3: Dentre todas as soluções determinadas pelo passo anterior, verificaremos se as soluções satisfazem

$$|\langle a^{\mathbf{T}}, v\rangle| \leq 1$$

para todo $v \in V_m^n$.

Passo 4: Das soluções dos terceiro passo, calculamos

$$a^{\mathbf{T}} \cdot g$$

para todo $g \in G_m^n$. O conjunto de todas os $a^{\mathbf{T}} \cdot g$ é precisamente o conjunto de todos os extremos de $B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}$.

Observação 4.3.1. *O algoritmo acima foi implementado em (JÚNIOR, 2018), para espaço $\mathcal{L}(^3 c_0^3(\mathbb{R}))$, e obteve que a conjectura $B_3^{\mathbb{R}} \leq 2^{1-\frac{1}{3}}$ se mantém.*

4.3.1 Exemplos

Os seguintes são exemplos de pontos extremos obtidos com o algoritmo antes descrito. Uma ilustração de como estes valores podem ser obtidos se encontra na seguinte subseção, chamada O caso planar.

Exemplo 4.3.2. *Todos os extremos de $B_{\mathcal{L}(^2c_0^2(\mathbb{R}))}$ são:*

$$\begin{array}{cccc} \pm(0,0,0,1), & \pm\frac{1}{2}(1,1,1,-1), & \pm\frac{1}{2}(1,1,-1,1), & \pm\frac{1}{2}(1,-1,1,1), \\ \pm\frac{1}{2}(-1,1,1,1), & \pm(0,0,1,0), & \pm(0,1,0,0), & \pm(1,0,0,0). \end{array}$$

Exemplo 4.3.3. *Os vetores*

$$\pm(1,0,0,0,0,0,0,0), \quad \pm\tfrac{1}{4}(1,-1,-1,1,-1,1,1,3), \quad \pm\tfrac{1}{2}(0,0,0,0,-1,1,1,1),$$

são pontos extremos de $B_{\mathcal{L}(^3c_0^2(\mathbb{R}))}$

Exemplo 4.3.4. *Aqui temos alguns dos extremos de $B_{\mathcal{L}(^4c_0^2(\mathbb{R}))}$:*

$$\begin{aligned} &\pm(1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0), \\ &\pm\frac{1}{8}(-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,-1,1,1,7), \\ &\pm\frac{1}{4}(0,1,0,1,0,-1,0,1,0,-1,0,1,0,1,0,3), \\ &\pm\frac{1}{8}(1,1,1,-3,-1,-1,-1,3,-1,-1,-1,3,1,1,1,5,) \\ &\pm\frac{1}{2}(0,0,0,-1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1), \\ &\pm\frac{1}{4}(0,0,-1,-1,1,-1,0,2,0,0,1,1,-1,1,0,2). \end{aligned}$$

4.3.2 O caso planar

Um caso especial é quando $n = 2$, pois podemos simplificar o algoritmo de 4 passos para uma nova rotina com 2 passos. Tal fato ocorre porque no processo de determinar as bases somente temos uma base, e neste caso também não precisamos verificar se a norma dos pontos extremos é 1, isto ocorre porque estamos usando todos os vetores de V_m^2 na base. Assim

$$\|a^T\| = \max\left\{|\langle a^T, \omega(x_1,\ldots,x_m)\rangle| : x_1,\ldots,x_m \in \{(1,1),(-1,1)\}\right\},$$

para qualquer inteiro positivo arbitrário m. Sejam $x = (x_i)_{i=1}^m$ e $y = (y_i)_{i=1}^m$ tais que

$$x_i, y_i \in \{(1,1),(-1,1)\}$$

para todo $i \in [m]$. Como $x \neq y$, existe um $j_0 \in [m]$ tal que $x_{j_0} \neq y_{j_0}$. Assim, pelo Lema 4.1.3, temos

$$\langle \omega(x), \omega(y)\rangle = \Pi_{i=1}^m \langle x_i, y_i\rangle = 0.$$

Logo, podemos determinar os pontos extremos de $B_{\mathcal{L}(^m c_0^2(\mathbb{R}))}$ como a seguir:

Passo 1: Construa a matriz H tal que suas linhas são os vetores de $\Lambda_2(\beta)$, onde $\beta = \{(1,1),(-1,1)\}$.

Passo 2: Para cada vetor $f \in ext(B_{c_0^{2^m}(\mathbb{R})})$, Resolva o sistema linear

$$Hx^t = f^t.$$

Da rotina anterior temos o seguinte resultado:

Proposição 4.3.5. *Para todo inteiro positivo* m*,*

$$card(ext(B_{\mathcal{L}(^m c_0^2(\mathbb{R}))})) = 2^{(2^m)}.$$

5 APLICAÇÕES DO CAPÍTULO 4

Ao considerar-se funções convexas e contínuas definidas sobre um conjunto convexo e compacto em $\mathbb{R}^n$, um problema que pode ser abordado é determinar o máximo dessas funções. Para resolver este problema, uma das técnicas que podem ser utilizadas é a de estudar os pontos extremos.

Considere o conjunto

$$B = \left\{ (a_{j_1,\ldots,j_m}) \in \mathbb{R}^{n^m} : \max_{|x_{j_i}|=1} \left| \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} a_{j_1,\ldots,j_m} x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_m} \right| \leq 1 \right\}.$$

Dada uma função $f : B \to \mathbb{R}$ convexa e contínua, podemos escrever naturalmente o problema de maximizar f em B da seguinte forma

$$\max f((a_{j_1,\ldots,j_m})_{j_1,\ldots,j_m}) \tag{5.1}$$

sujeito a

$$\max_{|x_{j_i}|=1} \left| \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} a_{j_1,\ldots,j_m} x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_m} \right| \leq 1. \tag{5.2}$$

A condição (5.2) significa resolver o problema (5.1) definido sobre o conjunto B. Assim, do Teorema de Krein-Milman em sua versão para $\mathbb{R}^n$, a qual diz que todo subconjunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$ é exatamente a envoltória convexa dos seus pontos extremos, podemos procurar o máximo do problema (5.1) dentro do conjunto dos pontos extremos de B, pois a função objetivo é contínua e convexa.

Observemos que o conjunto B, apresentado acima, foi estudado no Capítulo 3 onde descrevemos uma rotina para calcular os pontos extremos de B.

Neste capítulo final, discutiremos brevemente como os teoremas de caracterização do Capítulo 3 podem auxiliar em nossa investigação, referente a estimar as constantes ótimas na desigualdade de Bohnenblust–Hille. De forma mais precisa, resolveremos formalmente o problema aberto de determinar ditas constantes ótimas na desigualdade de Bohnenblust-Hille para formas m-lineares, no caso de escalares reais. Finalizaremos fazendo alguns comentários sobre como os nossos teoremas de caracterização fornecem nova e valiosa informação no problema de determinar as constantes ótimas envolvidas em uma desigualdade famosa devida a Grothendieck.

5.1 As constantes ótimas na desigualdade de Bohnenblust–Hille

Lembremos que a desigualdade de Bohnenblust–Hille, (BOHNENBLUST; HILLE, 1931), afirma que existe uma constante ótima $B_m^{\mathbb{K}}(n) \geq 1,$ tal que

$$\left(\sum_{j_1,...,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1}, ..., e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_m^{\mathbb{K}}(n) \|T\|, \tag{5.3}$$

para toda forma m-linear $T\colon \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ e qualquer inteiro positivo n, e

$$B_m^{\mathbb{K}}(\infty) := \sup_n B_m^{\mathbb{K}}(n) < \infty. \tag{5.4}$$

Nesta seção aplicaremos os resultados do Capítulo 3 para mostrar como dados dois inteiros positivos m, n o valor preciso de $B_m^{\mathbb{R}}(n)$ pode ser totalmente determinado e formalmente calculado, em um número finito de passos elementares.

Os conjuntos $\mathcal{A}_{m,n}$ e $\mathcal{C}_{m,n}$, introduzidos em (4.3) e (4.4), serão utilizados no restante da seção.

Iniciamos com duas observações que, afirmamos como proposições para referências posteriores. A primeira é uma consequência direta do Teorema de Krein-Milman (Lema 4.1.1) combinada com o nosso Teorema 4.2.7:

Proposição 5.1.1. *Seja* $f\colon B_{\mathcal{L}\left({}^m c_0^n(\mathbb{R})\right)} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e convexa. Então*

$$\max_{T \in B_{\mathcal{L}\left({}^m c_0^n(\mathbb{R})\right)}} f(T) = \max \{f(T) : T \in \mathcal{C}_{m,n}\}.$$

O próximo resultado é uma consequência da Proposição 5.1.1, e é bastante útil para resoluções computacionais.

Proposição 5.1.2. *Seja* $1 \leq \lambda < \infty$. *Se* $f_\lambda\colon B_{\mathcal{L}({}^m c_0^n(\mathbb{R}))} \to \mathbb{R}$ *é*

$$f_\lambda(T) = \left(\sum_{\mathbf{i} \in [n]^m} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}},$$

então

$$\max_{T \in B_{\mathcal{L}({}^m c_0^n(\mathbb{R}))}} f_\lambda(T) = \max \left\{ f_\lambda(T) : T \in \mathcal{A}_{m,n} \cap B_{\mathcal{L}({}^m \mathbb{R}^n)} \right\}.$$

Demonstração. Pela Proposição 5.1.1, sabemos que

$$\max_{T \in B_{\mathcal{L}\left({}^m c_0^n(\mathbb{R})\right)}} f_\lambda(T) = \max \{f_\lambda(T) : T \in \mathcal{C}_{m,n}\},$$

i.e., existe um $T_0 \in \mathcal{C}_{m,n}$ tal que

$$\max_{T \in B_{\mathcal{L}\left({}^m c_0^n(\mathbb{R})\right)}} f_\lambda(T) = f_\lambda(T_0).$$

Uma vez que $T_0 = a^S \cdot g$ para $a^S \in \mathcal{A}_{m,n}$, $g \in G_m^n$ e

$$|\langle a^S, v\rangle| \leq 1$$

para todo $v \in V_m^n$. Vemos que

$$\begin{aligned}
\max\left\{f_\lambda(T) : T \in \mathcal{A}_{m,n} \cap B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}\right\} &\leq \max\left\{f_\lambda(T) : T \in \mathcal{C}_{m,n}\right\} \\
&= f_\lambda(T_0) \\
&= f_\lambda(a^S \cdot g) \\
&= f_\lambda(a^S) \\
&\leq \max\left\{f_\lambda(T) : T \in \mathcal{A}_{m,n} \cap B_{\mathcal{L}(^m c_0^n(\mathbb{R}))}\right\}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.1.3. *Da Proposição 5.1.1, temos a seguinte fórmula para a constante ótima* $B_m^{\mathbb{R}}(n)$:

$$B_m^{\mathbb{R}}(n) = \max\left\{\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} : T \in \mathcal{C}_{m,n}\right\}, \tag{5.5}$$

onde $\mathcal{C}_{m,n}$ *é um conjunto finito.*

Quando $m = 2$, a desigualdade (5.3) é a desigualdade $4/3$ de Littlewood, e é bem conhecido que $B_2^{\mathbb{R}}(\infty) = \sqrt{2}$. Para $m \geq 3$, o valor preciso das constantes ótimas $B_m^{\mathbb{K}}(\infty)$ ainda são desconhecidas, apesar de suas aplicações no caso de escalares reais, veja (MONTANARO, 2012).

Segue de (5.5), contudo, que dados dois inteiros positivos m, n o valor preciso de $B_m^{\mathbb{R}}(n)$ pode ser totalmente determinado e formalmente calculado pelo processo construtivo descrito anteriormente em um número finito de passos elementares.

O algoritmo pode ser facilmente extraído de nossa demonstração. Para ver como ele pode ser implementado, recomendamos a leitura do recente trabalho (JÚNIOR, 2018).

Em Nacib et al., (ALBUQUERQUE et al., 2014), foi demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 5.1.4. *Sejam* $m \geq 1$ *e* $q_1, \ldots, q_m \in [1,2]$*, com* $\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} \leq \frac{m+1}{2}$*, então existe uma constante* $B_{q_1\ldots q_m}^{\mathbb{K}}(n) \geq 1$ *tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\sum_{i_2=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_{m-1}=1}^{n}\left(\sum_{i_m=1}^{n}|A(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\right)^{\frac{q_{m-2}}{q_{m-1}}}\cdots\right)^{\frac{q_2}{q_3}}\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq B_{q_1\ldots q_m}^{\mathbb{K}}(n)\,\|A\|$$

para toda forma m-linear contínua $A : c_0^m(\mathbb{K}) \times \cdots \times c_0^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ e para todo n inteiro positivo. Além disso, $sup_{n\in\mathbb{N}} B^{\mathbb{K}}_{q_1\ldots q_m}(n) < \infty$.

Os autores de (ALBUQUERQUE et al., 2014), ainda provaram que a condição $\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} \leq \frac{m+1}{2}$ é ótima. Quando $q_1 = \ldots = q_m = \frac{2m}{m+1}$, recuperamos a desigualdade clássica de Bohnenblust–Hille.

O método que fornecemos anteriormente para determinar as constantes do caso clássico, pode ser imitado e assim fica determinado que dados $q_1, ..., q_m \in [1, 2]$, com $\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} \leq \frac{m+1}{2}$, temos $B^{\mathbb{K}}_{q_1\ldots q_m}(n)$ é igual ao máximo de

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\sum_{i_2=1}^{n}\left(\ldots\left(\sum_{i_{m-1}=1}^{n}\left(\sum_{i_m=1}^{n}\left|A\left(e_{i_1},...,e_{i_m}\right)\right|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\right)^{\frac{q_{m-2}}{q_{m-1}}}\cdots\right)^{\frac{q_2}{q_3}}\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

quando $T \in \mathcal{A}_{m,n}$.

É interessante observar que, segundo o Corolário 4.2.8 as coordenadas dos pontos extremos de $B_{\mathcal{L}\left({}^m c_0^n(\mathbb{R})\right)}$ são números racionais. Logo, podemos concluir facilmente que:

Proposição 5.1.5. *Para quaisquer inteiros positivos m, n, as constantes ótimas $B^{\mathbb{R}}_m(n)$ são números algébricos.*

Observação 5.1.6. *O resultado acima não pode ser estendido diretamente ao caso $n = \infty$, i.e., não podemos concluir $B^{\mathbb{R}}_m(\infty)$ são números algébricos.*

5.2 Sobre as constantes ótimas na desigualdade de Grothendieck

A desigualdade de Grothendieck ((GROTHENDIECK, 1956), 1953) afirma que, existe uma constante universal $k \geq 1$, tal que dados n e uma matriz $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ de escalares reais, tem-se

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle\right| \leq k \sup\left\{\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i r_j\right| : |s_i|, |r_j| \leq 1\right\}, \tag{5.6}$$

para qualquer espaço de Hilbert, e todos os vetores $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in B_H$.

A menor constante k que satisfaz a Desigualdade (5.6), será denotada por $k_G^{\mathbb{R}}$. Para $n \geq 1$ fixo, a menor constante que satisfaz a propriedade da Desigualdade (5.6), para todas as matrizes $n \times n$, também será chamada constante de Grothendieck e denotaremos por $k_G^{\mathbb{R}}(n)$.

Alexander Grothendieck provou as seguintes estimativas para $k_G^{\mathbb{R}}$:

$$1.5707 \approx \frac{\pi}{2} \leq k_G^{\mathbb{R}} \leq \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 2.3.$$

Em 1979 a estimativa superior, dada por Grothendieck, foi melhorada por Krivine em (KRIVINE, 1978) ao demonstrar que

$$k_G^{\mathbb{R}} \leq \frac{\pi}{2\ln(1+\sqrt{2})} \approx 1.7822.$$

Ainda no mesmo trabalho, Krivine conjecturou que dita cota superior era o valor exato de $k_G^{\mathbb{R}}$.

Por outro lado, a estimativa inferior foi melhorada em 1984 para 1.67696, por Davie em (DAVIE, 1985), e mais recentemente Braverman et. al, em ((BRAVERMAN et al., 2013), 2011), provaram que o valor da constante conjecturado por Krivine não é ótimo.

Tal como foi feito em páginas anteriores nas desigualdades de Hardy–Littlewood, se substituímos o espaço de Hilbert H da desigualdade de Grothendieck por um espaço euclideano de dimesão d, podemos falar das constantes $k_G^{\mathbb{R}}(n,d)$. Por $k_G^{\mathbb{R}}(\infty,d)$, entendemos

$$k_G^{\mathbb{R}}(\infty,d) = \lim_{n\to\infty} k_G^{\mathbb{R}}(n,d).$$

Chamamos atenção para o caso em que $d=2$, pois Clauser et al. ((CLAUSER et al., 1969), 1969), mostraram que uma estimativa inferior para $k_G^{\mathbb{R}}(n,2)$ é $\sqrt{2}$, e posteriormente Krivine em 1979 provou que $\sqrt{2}$ é o valor exato de $k_G^{\mathbb{R}}(n,2)$.

A seguir, apresentamos tabelas numéricas sobre estimativas inferiores, e superiores respectivamente, para $k_G^{\mathbb{R}}(n,d)$ que tem sido fornecidas por diversos autores ao longo do tempo.

d	Vértesi, 2008	Briët et al., 2011	Hua et al., 2015	Diviánszky et al., 2017
3	1.41724		1.41758	1.4359
4	1.44521		1.44566	1.4841
5	1.46007		1.46112	1.4841
6	1.46007		1.47017	1.4841
7		1.46286	1.47583	1.4841
8		1.47586	1.47972	1.4841
9		1.48608		

d	Rietz, 1974	Krivine, 1979	Braverman et al., 2011	Hirsch et al., 2016
3		1.5163		1.4644
4		1.5708		
8		1.6641		
∞	2.261	1.78221	$1.78221-\varepsilon$	

Para uma pesquisa detalhada e desenvolvimentos recentes sobre a desigualdade de Grothendieck veja (BRAVERMAN et al., 2013; PISIER, 2012). As constantes

$k_G^{\mathbb{R}}$, $k_G^{\mathbb{R}}(\infty, d)$ e $k_G^{\mathbb{R}}(n, d)$ são, em geral, desconhecidas (veja, por exemplo, (FINCH, 2003)) e importantes em problemas físicos (veja (HUA et al., 2015) e suas referências).

O problema de encontrar as constantes ótimas $k_G^{\mathbb{R}}(n, d)$ pode ser reescrito como

$$\max_{\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{S}^{d-1}} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| \leq k_G^{\mathbb{R}}(n, d) \max_{|s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} t_i s_j \right|, \tag{5.7}$$

onde $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d x_i^2 = 1\}$ e d é a dimensão do espaço de Hilbert.

Outra forma de interpretar (5.7) é dizendo que para quaisquer inteiros positivos n, d e qualquer forma bilinear $T : c_0^n(\mathbb{R}) \times c_0^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ temos

$$\max_{\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{S}^{d-1}} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T(e_i, e_j) \langle x_i, y_j \rangle \right| \leq k_G^{\mathbb{R}}(n, d) \|T\|, \tag{5.8}$$

com

$$\|T\| = \max_{|s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1} \left| T\left(\sum_{i=1}^n t_i e_i, \sum_{j=1}^n s_j e_j \right) \right| = \max_{|s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T\left(e_i, e_j\right) t_i s_j \right|.$$

Logo, de (5.8) segue que

$$k_G^{\mathbb{R}}(n, d) = \sup_{\|T\| \leq 1} \left(\max_{\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{S}^{d-1}} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T(e_i, e_j) \langle x_i, y_j \rangle \right| \right).$$

Resumindo, encontrar o valor ótimo $k_G^{(\mathbb{R}}(n, d)$ é equivalente a encontrar o máximo da função

$$\begin{aligned} f_{n,d} &: B_{\mathcal{L}(^2 c_0^n(\mathbb{R}))} \to \mathbb{R} \\ f_{n,d}(T) &= \max_{\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{S}^{d-1}} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T(e_i, e_j) \langle x_i, y_j \rangle \right|. \end{aligned}$$

Mas, pode ser verificado facilmente que dados n, d inteiros positivos, a função $f_{n,d}$ é continua e convexa. Além disso, $B_{\mathcal{L}(^2 c_0^n(\mathbb{R}))}$ é um conjunto convexo e compacto, e assim temos que é válida o seguinte resultado:

Proposição 5.2.1. *Para todos os inteiros positivos* n, d*,*

$$k_G^{\mathbb{R}}(n, d) = \max_{T \in \mathcal{C}_{m,n}} \left(\max_{\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{S}^{d-1}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T(e_i, e_j) \langle x_i, y_j \rangle \right)$$

e

$$k_G^{\mathbb{R}}(n, \infty) = \sup_n \left(\max_{T \in \mathcal{C}_{m,n}} \max_{\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{S}^{d-1}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T(e_i, e_j) \langle x_i, y_j \rangle \right).$$

Desde que $\mathcal{C}_{m,n}$ é finito e totalmente determinado, a tarefa de encontrar $k_G^{\mathbb{R}}(n,d)$ se reduz a calcular

$$\max_{\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{S}^{d-1}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_0(e_i, e_j)\langle x_i, y_j\rangle \tag{5.9}$$

para todo $T_0 \in \mathcal{C}_{m,n}$.

Pode ser observado que, para valores pequenos de n e d, podemos usar o método dos Multiplicadores de Lagrange para calcular (5.9).

Por exemplo, do capítulo anterior, sabemos que os pontos extremos de $B_{\mathcal{L}(^2c_0^2(\mathbb{R}))}$, são:

$$\begin{array}{cccc} \pm(0,0,0,1), & \pm\frac{1}{2}(1,1,1,-1), & \pm\frac{1}{2}(1,1,-1,1), & \pm\frac{1}{2}(1,-1,1,1), \\ \pm\frac{1}{2}(-1,1,1,1), & \pm(0,0,1,0), & \pm(0,1,0,0), & \pm(1,0,0,0). \end{array}$$

Assim, quando calculamos

$$f_{2,2}(T)$$

de modo que T é algum dos pontos extremos anteriores, vemos que $k_G^{\mathbb{R}}(2,2) = \sqrt{2}$.

REFERÊNCIAS

ALARCÓN, D. N. et al. There exist multilinear bohnenblust-hille constants (cn) n= 1 (infinity) with limn-> infinity (cn+ 1-cn)= 0. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 264, n. 2, p. 429–463, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 50.

ALBUQUERQUE, N. et al. Sharp generalizations of the multilinear bohnenblust–hille inequality. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 266, n. 6, p. 3726–3740, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 23, 77 e 78.

ALBUQUERQUE, N. et al. Absolutely summing multilinear operators via interpolation. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 269, n. 6, p. 1636–1651, 2015. Citado na página 26.

ARAÚJO, G. et al. Equivalent norms in polynomial spaces and applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 445, n. 2, p. 1200–1220, 2017. Citado na página 31.

ARAÚJO, G.; PELLEGRINO, D. Lower bounds for the constants of the hardy–littlewood inequalities. *Linear Algebra and its Applications*, Elsevier, v. 463, p. 10–15, 2014. Citado na página 22.

ARAÚJO, G.; PELLEGRINO, D. Lower bounds for the complex polynomial hardy–littlewood inequality. *Linear Algebra and its Applications*, Elsevier, v. 474, p. 184–191, 2015. Citado na página 22.

BAYART, F. Multiple summing maps: coordinatewise summability, inclusion theorems and p-sidon sets. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 274, n. 4, p. 1129–1154, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.

BAYART, F.; PELLEGRINO, D.; SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B. The bohr radius of the n-dimensional polydisk is equivalent to (logâ¡ n)/n. *Advances in mathematics*, Elsevier, v. 264, p. 726–746, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 50.

BENNETT, G. Inclusion mappings between lp spaces. *Journal of Functional Analysis*, Academic Press, v. 13, n. 1, p. 20–27, 1973. Citado na página 36.

BENNETT, G. et al. Schur multipliers. *Duke Mathematical Journal*, Duke University Press, v. 44, n. 3, p. 603–639, 1977. Citado na página 36.

BLASCO, O. et al. Summability of multilinear mappings: Littlewood, orlicz and beyond. *Monatshefte für Mathematik*, Springer, v. 163, n. 2, p. 131–147, 2011. Citado na página 26.

BLEI, R. *Analysis in integer and fractional dimensions*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. v. 71. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 27.

BOHNENBLUST, H. F.; HILLE, E. On the absolute convergence of dirichlet series. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 600–622, 1931. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 76.

BRAVERMAN, M. et al. The grothendieck constant is strictly smaller than krivineâs bound. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Forum of Mathematics, Pi*. [S.l.], 2013. v. 1. Citado na página 79.

CAMPOS, J. et al. Polynomial and multilinear hardy–littlewood inequalities: analytical and numerical approaches. *arXiv preprint arXiv:1503.00618*, 2015. Citado na página 27.

CAVALCANTE, W.; NÚNEZ-ALARCÓN, D.; PELLEGRINO, D. The optimal hardy–littlewood constants for 2-homogeneous polynomials on âp (r2) for 2< p< 4 are 22/p. *arXiv preprint arXiv:1507.02984*, 2015. Citado na página 18.

CAVALCANTE, W.; NÚÑEZ-ALARCÓN, D.; PELLEGRINO, D. New lower bounds for the constants in the real polynomial hardy–littlewood inequality. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, Taylor & Francis, v. 37, n. 8, p. 927–937, 2016. Citado na página 18.

CAVALCANTE, W.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. Geometry of multilinear forms. *Communications in Contemporary Mathematics*, World Scientific, p. 1950011, 2019. Citado na página 18.

CAVALCANTE, W. V. Some applications of the regularity principle in sequence spaces. *Positivity*, Springer, v. 22, n. 1, p. 191–198, 2018. Citado na página 18.

CAVALCANTE, W. V.; NÚÑEZ-ALARCÓN, D. Remarks on an inequality of hardy and littlewood. *Quaestiones Mathematicae*, Taylor & Francis, v. 39, n. 8, p. 1101–1113, 2016. Citado na página 18.

CAVALCANTE, W. V.; PELLEGRINO, D. M. Bohnenblust-hille inequalities: analytical and computational aspects. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, SciELO Brasil, v. 91, 2019. Citado na página 18.

CHOI, Y. S.; KIM, S. G. The unit ball of $p(^2l\_2 2)$. *Archiv der Mathematik*, Springer, v. 71, n. 6, p. 472–480, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 60.

CLAUSER, J. F. et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical review letters*, APS, v. 23, n. 15, p. 880, 1969. Citado na página 79.

DAVIE, A. Matrix norms related to grothendieck's inequality. In: *Banach spaces*. [S.l.]: Springer, 1985. p. 22–26. Citado na página 79.

DEFANT, A. et al. The bohnenblust-hille inequality for homogeneous polynomials is hypercontractive. *Annals of mathematics*, JSTOR, p. 485–497, 2011. Citado na página 50.

DEFANT, A.; POPA, D.; SCHWARTING, U. Coordinatewise multiple summing operators in banach spaces. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 259, n. 1, p. 220–242, 2010. Citado na página 15.

DIESTEL, J.; JARCHOW, H.; TONGE, A. *Absolutely summing operators*. [S.l.]: Cambridge university press, 1995. v. 43. Citado 3 vezes nas páginas 29, 35 e 39.

DIMANT, V.; SEVILLA-PERIS, P. et al. Summation of coefficients of polynomials on ℓ_p spaces. *Publicacions Matemàtiques*, Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Matemàtiques, v. 60, n. 2, p. 289–310, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 45, 53, 55 e 56.

DINEEN, S. *Complex analysis on infinite dimensional spaces*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 12.

DINIZ, D. et al. Lower bounds for the constants in the bohnenblust–hille inequality: the case of real scalars. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 142, n. 2, p. 575–580, 2014. Citado na página 15.

DINIZ, D. et al. Lower bounds for the constants in the bohnenblust–hille inequality: the case of real scalars. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 142, n. 2, p. 575–580, 2014. Citado na página 37.

DINIZ, D. et al. The asymptotic growth of the constants in the bohnenblust–hille inequality is optimal. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 263, n. 2, p. 415–428, 2012. Citado na página 20.

DVORETZKY, A.; ROGERS, C. A. Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, National Academy of Sciences, v. 36, n. 3, p. 192, 1950. Citado na página 33.

FINCH, S. R. *Mathematical constants*. [S.l.]: Cambridge university press, 2003. Citado na página 80.

GARCÍA, D. P. *Operadores multilineales absolutamente sumantes*. Tese (Doutorado) — Universidad Complutense de Madrid, 2004. Citado na página 44.

GARLING, D. J. *Inequalities: a journey into linear analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. Citado na página 20.

GRECU, B. C. Geometry of 2-homogeneous polynomials on âp spaces, 1< p<â. *Journal of mathematical analysis and applications*, Elsevier, v. 273, n. 2, p. 262–282, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 60.

GROTHENDIECK, A. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*. [S.l.]: Soc. de Matemática de São Paulo, 1956. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 78.

GRZĄŚLEWICZ, R.; JOHN, K. Extreme elements of the unit ball of bilinear operators onl 2 2. *Archiv der Mathematik*, Springer, v. 50, n. 3, p. 264–269, 1988. Citado na página 60.

HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E. Bilinear forms bounded in space [p, q]. *The Quarterly Journal of Mathematics*, Narnia, n. 1, p. 241–254, 1934. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 24.

HARRIS, L. A. Bounds on the derivatives of holomorphic functions of vectors. In: *Proc. Colloq. Analysis, Rio de Janeiro*. [S.l.: s.n.], 1972. v. 145, p. 163. Citado na página 56.

HUA, B. et al. Towards grothendieck constants and lhv models in quantum mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 48, n. 6, p. 065302, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 80.

JAMESON, G. A specific form of grothendieck's inequality for the two-dimensional case, with applications to c*-algebras. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, Cambridge University Press, v. 37, n. 3, p. 521–537, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 29.

JIMÉNEZ-RODRÍGUEZ, P. et al. Sharp values for the constants in the polynomial bohnenblust-hille inequality. *Linear and Multilinear Algebra*, Taylor & Francis, v. 64, n. 9, p. 1731–1749, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 50.

JÚNIOR, F. V. C. The optimal multilinear bohnenblust–hille constants: a computational solution for the real case. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, Taylor & Francis, v. 39, n. 15, p. 1656–1668, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 72 e 77.

KIM, S. G. The geometry of l (2l2â). *Kyungpook Math. J*, v. 58, n. 1, p. 47–54, 2018. Citado na página 60.

KRIVINE, J.-L. Constantes de grothendieck et fonctions de type positif sur les spheres. *Séminaire Analyse fonctionnelle (dit"Maurey-Schwartz")*, p. 1–17, 1978. Citado na página 79.

LITTLEWOOD, J. E. On bounded bilinear forms in an infinite number of variables. *The Quarterly Journal of Mathematics*, Narnia, n. 1, p. 164–174, 1930. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 27.

MONTANARO, A. Some applications of hypercontractive inequalities in quantum information theory. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 53, n. 12, p. 122206, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 77.

NÚÑEZ-ALARCÓN, D. On the growth of the optimal constants of the multilinear bohnenblust–hille inequality. *Linear Algebra and its Applications*, Elsevier, v. 439, n. 8, p. 2494–2499, 2013. Citado na página 50.

NUÑEZ-ALARCÓN, D.; PELLEGRINO, D.; SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B. On the bohnenblust–hille inequality and a variant of littlewoodÊ$\frac{1}{4}$s 4/3 inequality. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 264, n. 1, p. 326–336, 2013. Citado na página 20.

ORLICZ, W. Über unbedingte konvergenz in funktionenraümen (ii). *Studia Mathematica*, v. 4, n. 1, p. 41–47, 1933. Citado na página 27.

PELLEGRINO, D. et al. A regularity principle in sequence spaces and applications. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Elsevier, v. 141, n. 8, p. 802–837, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 44.

PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. V. Towards sharp bohnenblust–hille constants. *Communications in Contemporary Mathematics*, World Scientific, v. 20, n. 03, p. 1750029, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 43.

PISIER, G. Grothendieckâs theorem, past and present. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 49, n. 2, p. 237–323, 2012. Citado na página 79.

SERRANO-RODRI, D. M. et al. Improving the closed formula for subpolynomial constants in the multilinear bohnenblust–hille inequalities. *Linear Algebra and its Applications*, Elsevier, v. 438, n. 7, p. 3124–3138, 2013. Citado na página 50.