



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E  
TECNOLÓGICA  
CURSO DE MESTRADO

THAYRINE FARIAS CAVALCANTE

**CONCEPÇÕES DE FUNÇÕES NO SOFTWARE FUNCTION STUDIUM: um estudo  
com o Modelo cKc**

Recife  
2019

THAYRINE FARIAS CAVALCANTE

**CONCEPÇÕES DE FUNÇÕES NO SOFTWARE FUNCTION STUDIUM: um estudo  
com o Modelo cKc**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

**Área de concentração:** Ensino de Ciências e Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain.

Recife

2019

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Amanda Ganimó, CRB-4/1806

C376c Cavalcante, Thayrine Farias.  
Concepções de funções no software function studium: um estudo com o modelo CKC / Thayrine Farias Cavalcante. – Recife, 2019.  
117 f. : il.

Orientador: Franck Gilbert René Bellemain .  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE.  
Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2019.  
Inclui Referências e Apêndices

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Function Studium (Software). 3. Funções (Matemática). 4. UFPE - Pós-graduação. I. Bellemain, Franck Gilbert René (Orientador). II. Título.

372.7 (23. ed.) UFPE (CE2019-056)

THAYRINE FARIAS CAVALCANTE

**CONCEPÇÕES DE FUNÇÕES NO SOFTWARE FUNCTION STUDIUM: um estudo  
com o Modelo cKc**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 17/04/2019

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain (Orientador e Presidente)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof<sup>a</sup>. Dra. Iranete Maria da Silva Lima (Examinadora Interna)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof<sup>a</sup>. Dra. Marilena Bittar (Examinadora Externa)  
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

## RESUMO

Esta pesquisa objetiva mapear no Function Studium, a presença de cinco concepções do Estudo de Funções, buscando entender como estas são articuladas no software. Para elucidar o termo concepção, recorreremos à definição proposta por Balacheff (1995), quando descreve o Modelo cK $\Phi$  como sendo a articulação entre o conceito, conhecimento e concepção. Este último, os autores propõem defini-lo como a formação de quatro conjuntos (P, R, L,  $\Sigma$ ) – P são os problemas, R representa os operadores, L o sistema de representação e  $\Sigma$  a estrutura de controle. Ancorados nos três principais sistemas de representação que perpassam na história do Conceito de Função – função como uma lei de correspondência, como expressões simbólicas e como objeto gráfico – e em sua definição proposta para o termo concepção, Balacheff (2001) e Gaudin (2005) propõem a Concepção Tabela, Concepção Curva, Concepção Algébrica, Concepção Relação e Concepção Objeto. As concepções foram estudadas e pensadas na maneira como estas seriam diagnosticadas no Function Studium. Para isso, foi realizada uma intervenção com estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática da UFPE. Nesse momento, propusemos uma atividade com três situações criadas pelos autores, na possibilidade de mapearmos as concepções que os estudantes articulam, e quais ferramentas disponíveis no software foram utilizadas para essa articulação. Além da intervenção, também foi realizada uma análise – utilizando a atividade – nos softwares Casyopée, GeoGebra e Modellus. As situações da atividade foram respondidas pelos estudantes apenas no Function Studium, por este ser o software desenvolvido no grupo LEMATEC do Programa EDUMATEC da UFPE. Na análise nos demais softwares, apenas o GeoGebra apresentou pelo menos um processo resolutivo para cada situação. Na análise da intervenção, foram analisadas as respostas de três grupos de estudantes utilizando o Function Studium. No geral, estes não apresentaram dificuldades para determinarem processos resolutivos para as situações. Não poder utilizar e representar expressões algébricas como entrada na tabela e diferença entre ponto e vírgula nos números decimais, foram algumas das limitações diagnosticadas no software Function Studium durante a intervenção. A análise nos softwares Casyopée, GeoGebra e Modellus, alinhada à análise da intervenção, permitiu que alguns requisitos fossem pontuados para serem incrementados nas próximas atualizações do software Function Studium.

**Palavras-chave:** Modelo cK $\Phi$ . Concepções do Estudo das Funções. Análise de softwares. Function Studium.

## ABSTRACT

This research aims to list in Function Studium the presence of five conceptions related to the notion of function, and to understand how they are articulated in the software. To elucidate the term conception, we use the definition proposed by Balacheff (1995), when he describes the cK $\Phi$  model as an articulation between concept, knowledge and conception, the latter being proposed by the authors as the junction of four sets (P, R, L,  $\Sigma$ ) where P represents the problems, R the operators, L the representation system and  $\Sigma$  the control structure. Anchored in the three main systems of representation that permeate the history of the concept of function – law of correspondence, symbolic expressions and graphic object, Balacheff (2001) e Gaudin (2005) propose for the characterization of the design Function: Table design, algebraic design, relationship design and object design. The designs have been studied and thought out so that they can be observed in Function Studium. For this, an intervention was carried out with students of the course of Licenciatura of Mathematics of the UFPE. We proposed an activity with three situations created by the authors, in order to list the conceptions articulated by the students and the tools of the software used for this articulation. In addition to the intervention, a software analysis of Casyopée, GeoGebra and Modellus was also carried out, using the activities. The students did not respond to the activity situations using Function Studium, because it is the software developed in the LEMATEC group of the EDUMATEC program of UFPE. In the analysis of other software, only GeoGebra presented at least one resolution process for each situation. For the analysis of the intervention, the responses of three groups of students using Function Studium were used. In general, they did not encounter any difficulties in answering the questions. Not being able to use representative algebraic expressions as a table entry and the difference between points and commas for decimals were some of the limitations diagnosed in the Function Studium software during the intervention. The analysis of the Casyopée, GeoGebra and Modellus software, in parallel with the analysis of the intervention, made it possible to identify certain needs for the next updates of the Function Studium software.

**Keywords:** cK $\Phi$  model. Conception of Fonction. Software evaluation. Function Studium.

## RESUMÉ

Cette recherche vise à répertorier dans Function Studium, la présence de cinq conceptions relatives à la notion de fonction, et à comprendre comment elles sont articulées dans le logiciel. Pour élucider le terme conception, nous utilisons la définition proposée par Balacheff (1995), lorsqu'il décrit le modèle cK $\Phi$  comme une articulation entre concept, connaissance et conception, celle-ci étant proposée par les auteurs comme la jonction de quatre ensembles (P, R, L,  $\Sigma$ ) où P représente les problèmes, R les opérateurs, L le système de représentation et  $\Sigma$  la structure de contrôle. Ancrés dans les trois principaux systèmes de représentation qui imprègnent l'histoire du concept de fonction - loi de correspondance, expressions symboliques et objet graphique, Balacheff (2001) et Gaudin (2005) proposent, à propos de la notion de Fonction, la conception Table, la conception algébrique, la conception relation et la conception objet. Les conceptions ont été étudiées pour pouvoir être observées dans Function Studium. Pour cela, une intervention a été réalisée auprès d'étudiants du cours de Licence de Mathématiques de l'UFPE. Nous avons proposé une activité avec trois situations créées par les auteurs, dans le but de répertorier les conceptions articulées par les étudiants et les outils du logiciel utilisés pour cette articulation. En plus de l'intervention, une analyse des logiciels Casyopée, GeoGebra et Modellus a également été réalisée, utilisant ces activités. Les étudiants n'ont répondu aux situations d'activité que en utilisant Function Studium, car il s'agit du logiciel développé dans le groupe LEMATEC du programme EDUMATEC de UFPE. Dans l'analyse des autres logiciels, seul GeoGebra a présenté au moins un processus de résolution pour chaque situation. Pour l'analyse de l'intervention, les réponses de trois groupes d'étudiants utilisant Function Studium ont été utilisées. En général, ceux-ci n'ont pas rencontré de difficultés pour répondre aux questions. Ne pas pouvoir utiliser des expressions algébriques représentatives en tant qu'entrée de table et la différence entre points et virgule pour les nombres décimaux étaient quelques-unes des limitations diagnostiquées dans le logiciel Function Studium au cours de l'intervention. L'analyse des logiciels Casyopée, GeoGebra et Modellus, en parallèle avec l'analyse de l'intervention, a permis de dégager certains besoins pour les prochaines mises à jour du logiciel Function Studium.

**Mots clefs:** Modèle cK $\Phi$ . Conception de fonction. Analyse de logiciels. Function Studium.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                  |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Figura 1</b> - Esquema que relaciona conceito, conhecimento e concepção.....                  | 18 |
| <b>Figura 2</b> - Diferentes representações para o Conceito de Função propostas por Sfard. ....  | 26 |
| <b>Figura 3</b> - Diferentes posições da parábola no Cabri. ....                                 | 32 |
| <b>Figura 4</b> - Manipulação da dupla André/Rémi. ....                                          | 34 |
| <b>Figura 5</b> - Marcos do Conceito de Função na História da Matemática. ....                   | 36 |
| <b>Figura 6</b> - Tela inicial do software Casyopée Álgebra – Gráfica. ....                      | 45 |
| <b>Figura 7</b> - Tela inicial do software Casyopée Geometria – Cálculos Geométricos.....        | 46 |
| <b>Figura 8</b> - Tela inicial do software Function Studium.....                                 | 47 |
| <b>Figura 9</b> - Tela inicial do software GeoGebra. ....                                        | 49 |
| <b>Figura 10</b> - Comando do uso da planilha no software GeoGebra. ....                         | 50 |
| <b>Figura 11</b> - Tela inicial do software Modellus. ....                                       | 52 |
| <b>Figura 12</b> - Botão de Tabela no software Modellus. ....                                    | 52 |
| <b>Figura 13</b> - Quantitativo de publicações científicas por site. ....                        | 56 |
| <b>Figura 14</b> - Banda de Jazz. ....                                                           | 59 |
| <b>Figura 15</b> - Relação entre figuras planas e espaciais. ....                                | 60 |
| <b>Figura 16</b> - Situação problema proposta na oficina.....                                    | 63 |
| <b>Figura 17</b> - Operador utilizado pelo aluno. ....                                           | 63 |
| <b>Figura 18</b> - Concepção envolvida na estratégia do aluno sem o uso do Geogebra. ....        | 64 |
| <b>Figura 19</b> - Resolução do problema utilizando o GeoGebra. ....                             | 65 |
| <b>Figura 20</b> - Concepção envolvida na estratégia do aluno com o uso do Geogebra. ....        | 65 |
| <b>Figura 21</b> - Situação problema envolvendo o lançamento de um projétil. ....                | 66 |
| <b>Figura 22</b> - Resolução do aluno ao problema do lançamento do projétil. ....                | 67 |
| <b>Figura 23</b> - Concepção da estratégia do aluno.....                                         | 67 |
| <b>Figura 24</b> - Possível representação gráfica para a situação 2. ....                        | 72 |
| <b>Figura 25</b> - Possível representação gráfica para a situação 3. ....                        | 73 |
| <b>Figura 26</b> - Recorte da função $1.5x^2-3$ no software Casyopée. ....                       | 78 |
| <b>Figura 27</b> - Recorte da função $1.5x^2-3$ no software GeoGebra. ....                       | 79 |
| <b>Figura 28</b> - Recorte da função $1.5x^2-3$ no software Modellus. ....                       | 80 |
| <b>Figura 29</b> - $f(x)=2.5x^2-1.3x-5$ obtida pelo ajuste polinomial no software GeoGebra. .... | 83 |
| <b>Figura 30</b> - Situação 3 no software GeoGebra. ....                                         | 85 |

|                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Figura 31</b> - Recorte da situação 1 resolvida pelo G3 no Function Studium.....         | 88  |
| <b>Figura 32</b> - Letra b da situação 1 resolvida pelo grupo G3. ....                      | 88  |
| <b>Figura 33</b> - Recorte da situação 1 resolvida pelo grupo G6. ....                      | 89  |
| <b>Figura 34</b> - Recorte da resposta do grupo G11 na situação 1 no Function Studium. .... | 91  |
| <b>Figura 35</b> - Recorte da situação 2 resolvida pelo grupo G3 no Function Studium. ....  | 94  |
| <b>Figura 36</b> - Recorte da situação 2 resolvida pelo grupo G6 no Function Studium. ....  | 96  |
| <b>Figura 37</b> - Recorte da situação 2 resolvida pelo grupo G11 no Function Studium. .... | 97  |
| <b>Figura 38</b> - Recorte da situação 3 resolvida pelo grupo G3 no Function Studium. ....  | 100 |
| <b>Figura 39</b> - Recorte da situação 3 resolvida pelo grupo G6 no Function Studium. ....  | 102 |
| <b>Figura 40</b> - Recorte da situação 3 resolvida pelo grupo G11 no Function Studium. .... | 103 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Tabela 1</b> - Síntese da evolução do conceito de Função. ....                        | 43  |
| <b>Tabela 2</b> - Organização dos alunos no momento da intervenção. ....                 | 74  |
| <b>Tabela 3</b> - Concepções presentes nos softwares na situação 1. ....                 | 80  |
| <b>Tabela 4</b> - Concepções presentes nos softwares na situação 2. ....                 | 83  |
| <b>Tabela 5</b> - Concepções presentes nos softwares na situação 3. ....                 | 85  |
| <b>Tabela 6</b> - Concepções identificadas nas resoluções dos grupos na situação 1. .... | 92  |
| <b>Tabela 7</b> - Concepções identificadas nas resoluções dos grupos na situação 2. .... | 98  |
| <b>Tabela 8</b> - Concepções identificadas nas resoluções dos grupos na situação 3. .... | 104 |

## SUMÁRIO

|          |                                                                              |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO .....</b>                                                      | <b>12</b>  |
| <b>2</b> | <b>REFERENCIAL TEÓRICO.....</b>                                              | <b>15</b>  |
| 2.1      | Modelo cK $\Phi$ : definindo o termo concepção .....                         | 15         |
| 2.2      | Concepções de Função.....                                                    | 21         |
| 2.3      | As concepções do Estudo das Funções, situadas na História da Matemática..... | 36         |
| <b>3</b> | <b>CONHECENDO O DESENVOLVIMENTO DOS SOFTWARES .....</b>                      | <b>44</b>  |
| 3.1      | Sobre o Casyopée.....                                                        | 44         |
| 3.2      | Sobre o Function Studium .....                                               | 46         |
| 3.3      | Sobre o GeoGebra.....                                                        | 48         |
| 3.4      | Sobre o Modellus .....                                                       | 51         |
| <b>4</b> | <b>REVISÃO DE LITERATURA .....</b>                                           | <b>54</b>  |
| 4.1      | Mapeando o aprendizado de funções com o uso de softwares .....               | 55         |
| 4.2      | Analizando softwares a luz de teorias .....                                  | 58         |
| 4.3      | Utilizando softwares na perspectiva do Modelo cK $\Phi$ .....                | 60         |
| <b>5</b> | <b>CAMINHOS METODOLÓGICOS .....</b>                                          | <b>69</b>  |
| 5.1      | Situações que envolvem a construção de tabela e ajuste polinomial.....       | 69         |
| 5.2      | Descrevendo o momento da intervenção .....                                   | 74         |
| 5.3      | Justificando os softwares Casyopée, GeoGebra e Modellus.....                 | 76         |
| <b>6</b> | <b>ANÁLISE DOS SOFTWARES CASYOPÉE, GEOGEBRA E MODELLUS ..</b>                | <b>78</b>  |
| 6.1      | Criação de tabelas em diferentes softwares .....                             | 78         |
| 6.2      | Ajuste polinomial na função de grau 2 .....                                  | 82         |
| 6.3      | Ajuste polinomial na função de grau 3 .....                                  | 84         |
| <b>7</b> | <b>ANÁLISE DA INTERVENÇÃO .....</b>                                          | <b>87</b>  |
| 7.1      | Situação 1: criando uma tabela .....                                         | 87         |
| 7.2      | Situação 2: ajustando um polinômio de grau 2 .....                           | 94         |
| 7.3      | Situação 3: ajustando um polinômio de grau 3 .....                           | 99         |
| <b>8</b> | <b>CONSIDERAÇÕES SOBRE A INVESTIGAÇÃO .....</b>                              | <b>106</b> |
| 8.1      | Sobre a pesquisa, softwares e concepções .....                               | 106        |
| 8.2      | Pensando nas próximas atualizações do software Function Studium .....        | 108        |
|          | <b>REFERÊNCIAS .....</b>                                                     | <b>112</b> |
|          | <b>APÊNDICE A – RESPOSTAS DO GRUPO G3 DA ATIVIDADE .....</b>                 | <b>115</b> |

|                                                               |            |
|---------------------------------------------------------------|------------|
| <b>APÊNDICE B – RESPOSTAS DO GRUPO G6 DA ATIVIDADE .....</b>  | <b>116</b> |
| <b>APÊNDICE C – RESPOSTAS DO GRUPO G11 DA ATIVIDADE .....</b> | <b>117</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

A sociedade atual se encontra cada vez mais circundada pela tecnologia. Em diversos ambientes, sejam em casas, nas ruas, lojas, consultórios, escolas, em qualquer ambiente, a tecnologia se faz presente, auxiliando e coadjuvando no desenvolvimento de uma sociedade cada vez mais tecnológica.

Com o crescimento e a evolução da tecnologia, o ensino e aprendizagem perpassam por caminhos semelhantes aos da sociedade: um ensino onde a integração da tecnologia em sala de aula se encontra cada vez mais presente com o uso de datashow, lousa digital, computadores, softwares educacionais, robótica e outros.

Nesse sentido, considerando o uso de softwares educacionais no ensino e na aprendizagem, a pesquisa discorre sobre a análise de concepções no software Function Studium, identificando o potencial e limitações dessa ferramenta, na intenção de gerar novos requisitos para as próximas atualizações do software.

O software Function Studium é fruto das pesquisas de Tibúrcio (2016) e Silva (2016) em nível de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC), que articulam as múltiplas representações de uma função.

A motivação para mapear concepções no software surgiu da linhagem de pesquisas que o grupo Laboratório de Ensino da Matemática e Tecnologia (LEMATEC) vem desenvolvendo no Programa EDUMATEC com pesquisas em nível de Mestrado e de Doutorado.

Para mapear as concepções no software Function Studium, a pesquisa recorre a definição do termo concepção proposto no Modelo cK $\Phi$  (BALACHEFF, 1995). No modelo, uma concepção (C) é definida como sendo a união e a articulação de quatro conjuntos, (P, R, L,  $\Sigma$ ), onde P representa o conjunto dos problemas, R o conjunto dos operadores, L são os sistemas de representações, e  $\Sigma$  a estrutura de controle.

Fundamentado na definição, a presente pesquisa buscou mapear a Concepção Tabela, Concepção Curva, Concepção Algébrica, Concepção Relação (BALACHEFF, 2001) e Concepção Objeto (GAUDIN, 2005) no software Function Studium. As concepções são resultados de diversos estudos realizados pelos autores na história do estudo das funções, buscando identificar os diversos sistemas de representação da função durante a história. Tais estudos resultaram na caracterização das cinco concepções mencionadas, que foram apresentadas e caracterizadas na seção 2.

Para o mapeamento das concepções, estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) responderam três situações no software Function Studium.

Além da intervenção, as situações também foram manipuladas no Casyopée, GeoGebra e Modellus, na possibilidade de compreender como as ferramentas disponíveis nos softwares apresentam processos resolutivos para as três situações.

Durante a pesquisa, justificamos nossa escolha a respeito dos softwares escolhidos e o motivo pelo qual todos não fazem parte do processo de intervenção.

Como objetivo geral, a pesquisa buscou mapear, à luz do Modelo cK $\Phi$ , como as cinco concepções mencionadas estão presentes no software Function Studium, compreendendo como elas são articuladas diante de um problema de concepção e quais limitações as ferramentas do software podem apresentar nas articulações.

Sobre os objetivos específicos, a pesquisa buscou:

- Compreender como as ferramentas disponíveis no software Function Studium articulam as concepções;
- Diagnosticar possíveis limitações no Function Studium para expressar as concepções;
- Elaborar levantamentos de processos resolutivos das situações da atividade nos softwares Casyopée, GeoGebra e Modellus e
- Produzir requisitos, baseados na intervenção e análise dos softwares, para implementar nas próximas versões do software Function Studium.

Panoramicamente, a presente escrita se divide em 8 seções. A seção 2 é composta por três subseções, e apresenta o quadro teórico-metodológico norteador da pesquisa. Nessa seção, apresentamos o conceito da Função em uma perspectiva da História da Matemática, o Modelo cK $\Phi$  e as concepções para o Conceito de Função.

A seção 3, intitulado *Conhecendo o desenvolvimento dos softwares*, está dividido em quatro seções, apresentando o desenvolvimento dos softwares Casyopée, Function Studium, GeoGebra e Modellus, bem como suas funcionalidades e ícones disponíveis nas ferramentas.

A seção 4, intitulado de *Revisão de Literatura*, se divide em três seções, apresentando trabalhos científicos semelhantes a esta pesquisa.

Já a seção 5 apresenta os caminhos metodológicos da pesquisa, descrevendo os objetos utilizados para o momento da intervenção e descrição do momento, bem como justificativas para análises nos demais softwares. Este se divide em quatro seções.

Na seção 6, apresentamos a análise da atividade nos softwares Casyopée, GeoGebra e Modellus. A seção 7 apresenta a análise da intervenção com os estudantes do curso de

Licenciatura em Matemática, utilizando o software Function Studium. Para finalizar, na seção 8, encontra-se a conclusão deste estudo.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção, apresentamos o quadro teórico-metodológico norteador da pesquisa, discutindo a definição do termo concepção no Modelo cK $\Phi$ , apresentando as concepções de função, e o levantamento de uma abordagem histórica do Conceito de Função. Para isso, a seção se divide em três subseções.

A primeira subseção, intitulada por *Modelo cK $\Phi$ : definindo o termo concepção*, discute o surgimento, definição e caracterização do termo concepção como sendo o *quadruplet*<sup>1</sup> (S, R, I,  $\Sigma$ ), proposto por Balacheff (1995).

A segunda subseção, *Concepções de Função*, apresenta a Concepção Tabela, Concepção Curva, Concepção Algébrica (BALACHEFF, 2001), Concepção Relação (BALACHEFF; GAUDIN, 2002) e Concepção Objeto (GAUDIN, 2005).

Por fim, na subseção *As concepções do Estudo das Funções, situadas na História da Matemática*, apresentamos as mudanças e avanços do Conceito de Função durante a história, bem como o resgate das concepções incorporadas em uma perspectiva histórica.

### 2.1 Modelo cK $\Phi$ : definindo o termo concepção

Ao situar essa escrita na perspectiva do mapeamento de concepções no software Function Studium, inicialmente faz-se necessário discutir sobre o termo concepção e o modelo das concepções proposto por Balacheff (1995).

Nesse sentido, essa subseção apresenta como o termo concepção tem sido empregado em diferentes aportes teóricos utilizados na Educação Matemática, bem como a definição e caracterização do *quadruplet* proposto por Balacheff (1995) para definir uma concepção.

O termo concepção, empregado nos trabalhos acadêmicos, foi adotado da linguagem corrente sem o carecer prévio de formular uma definição para ele.

Com a necessidade, por parte de alguns autores, de esclarecer este termo, uma definição para concepção pode ter uma relação de dependência com o uso desta na escrita. Em alguns casos, este termo pode continuar sem definição, em outros, esta palavra pode ser caracterizada com o status de noção teórica (CAVALCANTI; CÂMARA DOS SANTOS, 2010).

---

<sup>1</sup> Palavra francesa utilizada por Balacheff (1995), para indicar os quatro conjuntos que caracterizam uma concepção.

Possibilidade de diferentes olhares possíveis para um mesmo objeto matemático e flexibilidade para moldar-se às classes de problemas, podem ser considerados como indícios do uso exagerado do termo concepção em trabalhos acadêmicos (ARTIGUE, 1990).

Porém, parece-lhe que o uso do termo concepção, de alguma maneira, normalmente converge para a compreensão da relação entre sujeito e objeto, seja o sujeito aluno ou professor, e o objeto como sendo o conceito matemático.

Retomando a discussão, as diversas facetas que o termo concepção pode assumir em diferentes noções teóricas. Na Teoria das Situações, o termo concepção é descrito como sendo: “Conjuntos de conhecimento e saberes frequentemente solicitados juntos para resolver situações, empiricamente como padrões de respostas consistentes, dados por uma parte importante dos tópicos sobre uma classe de situação<sup>2</sup>.” (BROUSSEAU, 1997, p. 18, tradução nossa).

Quando discutido o olhar do Brousseau, na perspectiva de conceitualizar o termo concepção, também vale ressaltar sua preocupação com as concepções errôneas que podem gerar o erro. Para o autor, algumas concepções são resistentes, não desaparecendo ou sendo modificadas de imediato. Em algumas situações, essas concepções podem ser encaradas como a constituição de um obstáculo que pode gerar o erro. “Em vista disso, esse autor sugere que cabe ao pesquisador identificar esses erros resistentes e mostrar que eles se agrupam em torno de concepções” (NOVAES, 2011, p. 43).

O termo concepção também se faz presente na Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (2009). Para o autor,

Um campo conceitual é ao mesmo tempo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribui com o domínio dessas situações (VERGNAUD, 2009, p. 29 apud NOVAES, 2011, p. 44).

Segundo Novaes (2011, p. 45), para Vergnaud, “cada concepção tem um Campo Conceitual, ou seja, o conjunto de problemas em cuja solução ela está envolvida”. Em sua teoria, Vergnaud descreve a tríade para definir um conceito matemático.

O grande cerne da Teoria dos Campos Conceituais está na relação do sujeito com o objeto, no qual “apresenta ‘concepção’ como noção associada” (NOVAES, 2011, p. 47) a esta

---

<sup>2</sup>...comme des ensembles de connaissances et de savoir fréquemment sollicités ensemble pour résoudre des situations, empiriquement comme des patrons de réponses cohérents donnés par une partie importante des sujets sur une classe de situation.

relação. A tríade (S, I, L), pensada por Vergnaud (1991) para representar o conceito, é composta por significados (S), invariantes (I) e representações simbólicas (L).

Para Vergnaud, este modelo de representação para o conceito, “utilizado de várias formas por muitos autores desde Aristóteles, é muito estático e não proporciona muitos *insights* sobre as representações de relações, ao passo que muitos dos conceitos científicos são relacionais” (NOVAES, 2011, p. 52).

Ou seja, para Vergnaud, a tríade é insuficiente para investigar a relação entre sujeito e objeto quando inseridos em uma situação.

Na perspectiva de enriquecer a tríade proposta por Vergnaud, considerando que “os invariantes operatórios não são redutíveis aos significados da linguagem, ou seja, à forma predicativa” (NOVAES, 2011, p. 52), Balacheff (1995) incorpora o quarto conjunto na tríade proposta por Vergnaud. A estrutura de controle, representada pela letra grega  $\Sigma$ , subsidia o *quadruplet* para a formalização de uma concepção.

Para esta escrita, adotamos a nomenclatura proposta por Balacheff (1995) para representar uma concepção (C), pelo *quadruplet* (P, R, L,  $\Sigma$ ).

Os conjuntos P e R têm relação com os conjuntos S e I, respectivamente, da Teoria dos Campos Conceituais. “Este modelo difere do de Vergnaud na dissociação operador e estrutura de controle”<sup>3</sup> (MIYAKAWA, 2005, p. 9, tradução nossa). Para Balacheff e Gaudin (2002), a necessidade da ampliação do modelo proposto por Vergnaud se deu:

Esta formalização deve ser uma maneira de superar a **contradição apontada acima**, a saber, que a multiplicidade dos conhecimentos de um sujeito pode ser contraditória em relação a alguma referência dada. Então, também propomos definições para os termos “conhecimento” e “conceito” como entidades abstratas cujas diferenças residem em suas funções e relações. Chamamos a concepção C de um *quadruplet* (P, R, L,  $\Sigma$ ) em que: P é um conjunto de problemas; R é um conjunto de operadores; L é um sistema de representação e  $\Sigma$  é uma estrutura de controle (p. 7, tradução nossa, grifo nosso)<sup>4</sup>.

“Contradição apontada acima”, termo destacado na citação, corresponde às discussões já realizadas no início da subseção, a necessidade de definir o termo concepção. Balacheff e Gaudin (2002) pontuam que viram a chance de enriquecer a tríade de Vergnaud, também

<sup>3</sup> Ce modèle se différencie de celui de Vergnaud par la dissociation de l’opérateur et de la structure de contrôle.

<sup>4</sup> This formalization should be a way to overcome the contradiction pointed out above, namely that the multiplicity of a subject’s knowings can prove contradictory with respect to some given reference. So, we will also propose definitions of the terms “knowing” and “concept” as abstract entities whose differences lie in their functions and relations. We call conception C a quadruplet (P, R, L,  $\Sigma$ ) in which: P is a set of problems; R is a set of operators; L is a representation system;  $\Sigma$  is a control structure.

pensando no pesquisador em Educação Matemática, em relacionar teoria formalizada com a realidade enfrentada.

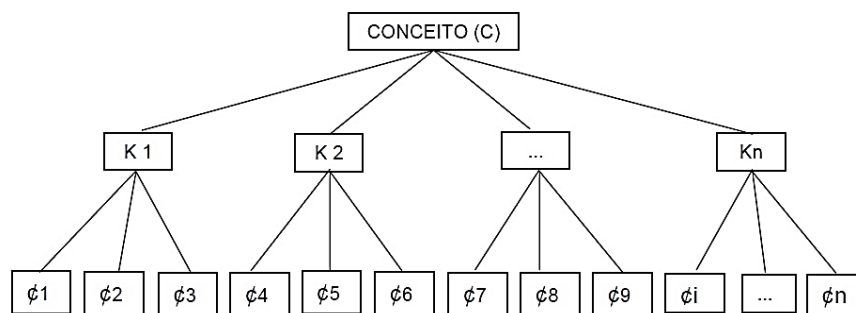
Relacionando os diversos olhares propostos para o termo concepção nas noções teóricas apresentadas, há uma semelhança entre o que Brousseau entende por concepção e o que Balacheff compreende sobre o mesmo termo. Mas, suas ideias divergem quando pensamos na forma em que a concepção se expressa.

Para Brousseau, a concepção é um conjunto de conhecimentos, conjuntos estes que poderão ser acessados ou não, a depender do problema enfrentado pelo sujeito. Balacheff prefere adotar uma posição pragmática e empírica para este termo, onde, inserido no *quadruplet*, o conjunto P caracteriza-se em situações que permitam diagnosticar as concepções do sujeito.

Outro ponto a considerar como divergência entre as teorias mencionadas, está no olhar para o conjunto dos problemas. Balacheff e Gaudin (2002), apontam que Brousseau (1997) considera “um conjunto finito de problemas com a ideia de que outros problemas resultarão deles”<sup>5</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2002, p. 8, tradução nossa), deixando em “aberta a questão de estabelecer que um conjunto gerador de problemas pode ser construído para qualquer concepção”<sup>6</sup> (ibid., 2002, p. 8, tradução nossa).

A partir do panorama sobre o termo concepção e as diversas vertentes empregadas a esse termo, por concordar com seus pensamentos, para a escrita nos fundamentamos, como noção teórica, no *quadruplet* proposto por Balacheff (1995), o Modelo cK $\phi$ .

**Figura 1** - Esquema que relaciona conceito, conhecimento e concepção.



**Fonte:** Oliveira (2010, p. 43) baseado em Balacheff (1995).

O Modelo cK $\phi$ , também chamado em alguns trabalhos como Teoria cK $\phi$ , Teoria das concepções ou Modelo das concepções, está moldado na conexão entre a noção de conceito, conhecimento e concepção.

<sup>5</sup> A finite set of problems with the idea that other problems will derive from them

<sup>6</sup> Leaves open the question of establishing that a generative set of problems can be constructed for any conception.

Para melhor exemplificar a ligação entre essas três noções, Oliveira (2010) apresenta um esquema (Figura 1), onde “neste esquema,  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$  constituem o conjunto de concepções que forma o conjunto de conhecimentos  $K_1, K_2, \dots, K_n$ , que forma o conceito” (p. 44). Ou seja, “o conjunto de todas as concepções que um estudante tem de determinado conteúdo forma um conhecimento e o conjunto de todos os conhecimentos forma o conceito” (ibid., p. 43).

Como descrito, o Modelo cK $\phi$  está pautado na conexão de três noções. Mas, para a escrita, delineamos apenas a definição de concepção e caracterização de seus conjuntos, pois foi o que utilizamos como aporte teórico-metodológico e ferramenta de análise.

No *quadruplet*, Balacheff e Gaudin (2002) afirmam ser uma tarefa difícil caracterizar o conjunto dos problemas (P). Nesse sentido, os autores optaram por “adotar uma posição pragmática, derivando a descrição de P, de forma empírica, da caracterização de situações que permitem diagnosticar as concepções dos alunos”<sup>7</sup> (p. 8, tradução nossa). Ou seja, P propõe uma abordagem voltada à ação do sujeito. Este conjunto é composto por problemas específicos de uma esfera do conhecimento, que dão significado à concepção.

Segundo Fornaza (2016), na Teoria dos Campo Conceituais, Vergnaud (1996) sugere como caracterização para esse conjunto, “considerar todos os problemas para os quais a concepção considerada fornece ferramentas eficientes para elaborar uma solução” (FORNAZA, 2016, p. 23). Mas, segundo Balacheff e Gaudin (2002), essa caracterização é insuficiente e, na maioria das vezes, fora do alcance.

Seguindo com a caracterização do *quadruplet*, Balacheff e Gaudin (2002) apontam que a caracterização do conjunto dos operadores (R) é mais clássico. Este se caracteriza pelas ferramentas que geram a ação do sujeito e a relação dele com o *milieu*<sup>8</sup>.

Um operador é relevante para um problema quando pode ser mobilizado em um dos procedimentos de resolução de problemas, ou então transforma o problema em outro problema que faz sentido para o aprendiz<sup>9</sup> (WEBBER, 2003, p. 39, tradução nossa).

Ainda: “os operadores podem ser “concretos”, permitindo realizar ações em um *milieu* material, ou “abstrato”, permitindo transformar representações linguísticas, simbólicas ou

<sup>7</sup> Adopt a pragmatic position, deriving the description of P, in an empirical way, from the characterization of situations allowing to diagnose students' conceptions.

<sup>8</sup> “A noção de “milieu” foi introduzida por Brousseau para analisar, de um lado, as relações entre os alunos, os conhecimentos ou saberes e as situações e, por outro lado, as relações entre os próprios conhecimentos e entre as situações” (Almouloud, 2007, p. 42 *apud* Novaes, 2011, p. 48).

<sup>9</sup> Un opérateur est pertinent par rapport à un problème posé lorsqu'il peut être mobilisé dans une des procédures de résolution de ce problème, ou bien qu'il transforme le problème en un autre problème qui a un sens pour l'apprenant.

gráficas”<sup>10</sup> (BALACHEFF; GAUDIN 2002, p. 8, tradução nossa). Nesse sentido, o operador pode assumir diversas funcionalidades, seja na interface de um software, na transformação de uma expressão algébrica, ou na forma de um teorema.

O sistema de representação (L) consiste em expor a conexão entre o sujeito e *milieu*. Segundo Novaes (2011, p. 53), na Teoria dos Campos Conceituais, “Vergnaud (1996), designa o conjunto de representações simbólicas utilizadas pelo aluno na manipulação do conceito”.

Na caracterização deste sistema, Balacheff e Gaudin (2002) propõem um significado semelhante. Para os autores, este conjunto “deve ser adequado para dar conta dos problemas e permitir o desempenho dos operadores”<sup>11</sup> (p. 8, tradução nossa).

Este conjunto representa um objeto ou um pensamento na relação do sujeito com o *milieu*. Ela pode ser ou não de natureza linguística. “Apenas para mencionar alguns exemplos: linguagem algébrica, desenho geométrico, linguagem natural, mas também interfaces de software matemático e calculadoras são exemplos de sistemas de representação”<sup>12</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2002, p. 8, tradução nossa).

O último conjunto de uma concepção, a estrutura de controle ( $\Sigma$ ), “permite a decisão e a escolha de operações ou ações, e a validação do resultado em relação ao problema proposto”<sup>13</sup> (MIYAKAWA, 2005, p. 12, tradução nossa). O autor ainda descreve que:

Do ponto de vista do observável, os elementos da concepção nem sempre são explícitos. Em geral, o operador é mais acessível, enquanto a estrutura de controle é menos acessível. De fato, o operador que manipula o problema é frequentemente explícito na operação real dos objetos matemáticos, enquanto o controle que direciona a operação é bastante implícito e muitas vezes só é acessível a partir da análise dos outros elementos e a resposta dada. A estrutura de controle, portanto, geralmente tem um status hipotético<sup>14</sup> (MIYAKAWA, 2005, p. 13, tradução nossa).

Como Miyakawa (2005) descreve, na resolução de um problema em uma concepção, a estrutura de controle frequentemente é um conjunto implícito na ação do sujeito, que

---

<sup>10</sup> Operators could be “concrete”, allowing to perform actions on a material milieu, or “abstract”, allowing to transform linguistic, or symbolic, or graphical representations.

<sup>11</sup> Must be adequate to give account of the problems and to allow performing operators.

<sup>12</sup> Just to mention few examples: algebraic language, geometrical drawing, natural language, but also interfaces of mathematical software and calculators are all examples of representation systems.

<sup>13</sup> ...permet la décision et le choix d’opérations ou actions, et la validation de résultat par rapport au problème posé.

<sup>14</sup> Ce quadruplet permet de décrire une conception de l’élève qui intervient dans la résolution de problèmes. Mais, du point de vue de l’observable, les éléments de conception ne sont pas toujours explicites. D’une façon générale, l’opérateur est plus accessible alors que la structure de contrôle est moins accessible. En effet, l’opérateur qui manipule le problème est souvent explicite dans l’opération effective des objets mathématiques, alors que le contrôle qui dirige l’opération est plutôt implicite et n’est souvent accessible qu’à partir de l’analyse des autres éléments et de la réponse donnée. La structure de contrôle a donc souvent un statut hypothétique.

geralmente requer uma análise mais ampla da resposta dada. Sobre a natureza muitas vezes implícita de  $\Sigma$ , Balacheff e Gaudin (2002) descrevem como o controle se encontra em outras pesquisas.

Essa dimensão é muitas vezes **deixada implícita**, embora se possa perceber que os critérios que permitem decidir se uma ação é relevante ou não, ou que um problema seja resolvido, é um conjunto crucial da compreensão de um conceito matemático<sup>15</sup> (p. 8, tradução nossa, grifo nosso).

No trecho destacado, os autores sugerem que em outras teorias, a estrutura de controle muitas vezes é deixada implícita na ação do sujeito. Como citado por eles, no proposto por Vergnaud, “a estrutura de controle está implícita em sua referência a teoremas em ação ou inferência”<sup>16</sup> (VERGNAUD, 1991, p. 141-142 apud BALACHEFF; GAUDIN, 2002, p. 8, tradução nossa).

Elencando outras pesquisas que também deixaram implícita a estrutura de controle, Balacheff e Gaudin (2002) descrevem que:

Schoenfeld (1985 pp. 97-143) mostrou o papel crucial do controle na resolução de problemas. Mais recentemente, Robert (1993) enfatizou o papel do meta-conhecimento demonstrando a necessidade de tratar as estruturas de controle como tais<sup>17</sup> (p. 8, tradução nossa).

Os autores propõem que o  $\Sigma$  vai além do que já está implícito. A estrutura de controle designa a tomada de ações, decisões e escolhas realizadas pelo sujeito.

Na próxima subseção, apresentamos as cinco concepções de função, que deram suporte à análise da intervenção no Function Studium e dos demais softwares.

## 2.2 Concepções de Função

As concepções de função propostas para análises, “podem ser vistas como invariantes na literatura de Educação Matemática”<sup>18</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2002, p. 9, tradução nossa) e correspondem aos três principais sistemas de representação para uma função, que perpassa desde os estudos da História da Matemática, até as pesquisas mais recentes.

<sup>15</sup> This dimension is often left implicit although one may realize that the criteria which allow to decide whether an action is relevant or not, or that a problem is solved, is a crucial element of the understanding of a mathematical concept.

<sup>16</sup> The control structure is implied by his reference to theorems-in-action or to inference.

<sup>17</sup> Schoenfeld (1985 pp. 97-143) has shown the crucial role of control in problem solving. More recently, Robert (1993) emphasized the role of meta-knowledge demonstrating the need to treat control structures as such.

<sup>18</sup> Can be seen as invariant in the mathematics education literature.

Assim, a presente subseção apresenta a Concepção Tabela, Concepção Curva, Concepção Algébrica, Balacheff (2001), Concepção Relação, Balacheff e Gaudin (2002, 2009) e Concepção Objeto, Gaudin (2005), para função. À luz das concepções citadas, analisamos a intervenção realizada com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFPE utilizando o software Function Studium, e os softwares Casyopée, Modellus e GeoGebra.

As concepções<sup>19</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2009, p. 21, tradução nossa) citadas podem ser representadas pelo *quadruplet* apresentado na subseção anterior. São elas:

- Concepção Tabela:  $C_T = (P_T, R_T, \text{Tabela}, \Sigma_T)$ ;
- Concepção Curva:  $C_C = (P_C, R_C, \text{Curva}, \Sigma_C)$ ;
- Concepção Algébrica<sup>20</sup>:  $C_A = (P_A, R_A, \text{Álgebra}, \Sigma_A)$ ;
- Concepção Relação:  $C_R = (P_R, R_R, L_R, \Sigma_R)$ .

Os autores relatam que as concepções emergiram da análise de obras clássicas de vários historiadores (EDWARDS, 1979; KLEINER, 1989; KLINE, 1972; SMITH, 1958) que pesquisam sobre a História da Matemática. No material lido por Balacheff e Gaudin (2002), as “formas clássicas de categorizar as concepções de Função”<sup>21</sup> (p. 18, tradução nossa) são:

- Função como “lei” correspondente (uma função expressa a correspondência entre dois conjuntos, um elemento do primeiro conjunto associado a um elemento exclusivo do segundo conjunto);
- Função como expressões simbólicas (uma fórmula, uma expressão algébrica...) e
- Função como um objeto gráfico<sup>22</sup> (ibid., p. 18, tradução nossa).

As duas primeiras foram formuladas por Vinner e Dreyfus (1989). Na história, outras concepções também são atribuídas à função, tais como: a relação de dependência, proporção, dependência funcional, regra ou processos. Porém, Balacheff e Gaudin (2009) diz que, “essas categorias podem ser vistas como refinamentos dos mais gerais **mencionados acima**”<sup>23</sup> (p. 19, tradução nossa, grifo nosso). “Mencionados acima” corresponde às três formas clássicas já apresentadas.

<sup>19</sup> Table conception:  $C_T = (P_T, R_T, \text{Table}, \Sigma_T)$ ; Curve conception:  $C_C = (P_C, R_C, \text{Curve}, \Sigma_C)$ ; Analytic conception:  $C_A = (P_A, R_A, \text{Algebra}, \Sigma_A)$  e Relation conception:  $C_R = (P_R, R_R, L_R, \Sigma_R)$ .

<sup>20</sup>No artigo Balacheff (2001), a concepção  $C_A$  é chamada de Conception Algébrique. Já nos artigos Balacheff e Gaudin (2002, 2009), essa concepção é chamada de Analytic conception. Para esta escrita, adotamos a nomenclatura mencionada na escrita de 2001.

<sup>21</sup> Classical ways to categorize conceptions of Function.

<sup>22</sup> - Function as a correspondence “law” (a function expresses the correspondence between two sets, an element of the first set being associated with a unique element of the second set); - Function as symbolic expressions (a formula, an algebraic expression...) e - Function as a graphical object.

<sup>23</sup> These categories can be seen as refinements of the more general ones mentioned above.

Quando descrevemos as concepções  $C_T$  e  $C_C$ , algumas semelhanças são encontradas na caracterização de seus conjuntos. Já a concepção  $C_A$ , é considerada de natureza diferente das demais. Para Balacheff e Gaudin (2002, p. 10, tradução nossa), a Concepção Algébrica “introduz uma ruptura na epistemologia das funções”<sup>24</sup>.

Iniciamos a discussão pela  $C_R$ . Para Balacheff e Gaudin (2009), esta concepção surge da necessidade de desenvolver novas formas de representação no conjunto  $L_R$ , e novas estruturas de controle ( $\Sigma_R$ ), para uma função. Os autores propõem essa concepção “para definir o que tais funções poderiam ser e para trabalhar com elas sem qualquer referência a uma representação analítica”<sup>25</sup> (p. 11, tradução nossa).

Em seus artigos, Balacheff e Gaudin aprofundam suas escritas nas demais concepções. A seguir, delineamos as discussões, apresentando a caracterização de cada conjunto nas demais concepções.

Os conjuntos  $P_T$  e  $P_C$  são dominados por perguntas práticas. Na esfera da prática, a validade da solução de um problema no conjunto  $P_T$  “dependia de forma essencial da qualidade das produções concretas e das ações necessárias para coletar e tratar dados”<sup>26</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2009, p. 22, tradução nossa). O mesmo se aplica a  $P_C$ , por também corresponder à esfera de prática.

Já a  $C_A$ , por ter natureza diferente das demais (como já mencionado), os autores acreditam que:

Uma função definida por uma expressão algébrica não precisa se referir a um campo experimental (fenômeno natural ou desenhos mecânicos). Pode ser estudada por si mesma, como fez Euler, apresentando funções como objeto de estudo<sup>27</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2009, p. 23, tradução nossa).

O conjunto operador da Concepção Tabela desempenha um papel parecido com esse mesmo conjunto na Concepção Curva. O “ $R_T$ , bem como  $R_C$ , inclui – mas não exclusivamente – técnicas de medida, de computação e de desenho”<sup>28</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2009, p. 23,

---

<sup>24</sup> Introduces a rupture in the epistemology of functions.

<sup>25</sup> To define what such functions could be and in order to work with them without any reference to an analytical representation.

<sup>26</sup> Did depend in an essential manner on the quality of rather concrete productions and of actions necessary to collect and treat data.

<sup>27</sup> A function defined by an analytical expression does not need to refer to an experimental field (either of natural phenomena or of mechanical drawings). It can be studied for itself, as Euler did by presenting functions as the object of study.

<sup>28</sup>  $R_T$ , as well as  $R_C$ , included—but not exclusively—techniques of measurement, computation, and drawing.

tradução nossa). Ainda vale ressaltar que, para  $R_T$ , também inclui operadores matemáticos e operadores específicos para coleta de dados a serem preenchidos na tabela.

Na Concepção Algébrica, seus operadores são ferramentas algébricas (BALACHEFF, 2017). Como exemplo para  $R_A$ , podemos citar o propósito da análise no século XVIII. As Equações Funcionais tiveram grande importância na Física. Na solução dessas equações, o desenvolvimento em séries infinitas desempenhou um papel central como operador  $R_A$ .

A Tabela, a Curva e a Álgebra são os sistemas de representação (L) correspondentes à Concepção Tabela, à Concepção Curva e à Concepção Algébrica, respectivamente. Esse conjunto é considerado pelos autores o mais prático de determinar em uma concepção, pois “são caracterizados por suas regras sintáticas específicas e seus próprios critérios de validade”<sup>29</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2009, p. 22, tradução nossa).

Devemos notar o fato de que cada Sistema de Representação que consideramos, tomado por si (com suas características semióticas) tem um poder de exibição diferente (que pode ser definido como a capacidade de mostrar o que deve ser mostrado, ou possivelmente ocultar)<sup>30</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2002, p. 11, tradução nossa).

Os autores ainda acrescentam que, se olharmos apenas para o  $L_T$ , o  $L_C$  e  $L_A$ , pode ser que a distinção entre as concepções não esteja tão clara. A diferença entre elas pode ser melhor compreendida, quando também consideramos o conjunto Operador (R) e o Sistema de Controle ( $\Sigma$ ), correspondentes a cada concepção.

O cerne das concepções está em verificar se os conjuntos P, R e  $\Sigma$  apresentam diferenças significativas, inseridos no que cada um propõe examinar em  $C_T$ ,  $C_C$  e  $C_A$ . Balacheff e Gaudin (2009, p. 22, tradução nossa) consideram “essas diferenças a partir do ponto de vista das Estruturas de Controle”<sup>31</sup>.

O conjunto Estrutura de Controle ( $\Sigma$ ), quando caracterizado na Concepção Tabela ( $C_T$ ), possui “bases essencialmente empíricas”<sup>32</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2002, p. 10, tradução nossa) e “a validade de uma tabela depende da precisão de medição e dos cálculos relacionados com os requisitos de uma dada circunstância”<sup>33</sup> (ibid., p. 10, tradução nossa).

<sup>29</sup> That are characterized by their specific syntactic rules and their own criteria for validity.

<sup>30</sup> We must notice the fact that each representation system we consider, taken for itself (with its semiotic characteristics) has a different displaying power (which can be defined as the capacity to show what should be shown, or possibly to hide).

<sup>31</sup> These differences from the point of view of the control structures.

<sup>32</sup> Essentially empirical foundations.

<sup>33</sup> The validity of a table depends on the precision of measurement and of the related computations against the requirements of a given circumstances.

Na  $C_C$  “a validade deve ser avaliada em relação à qualidade das interpolações e previsões permitidas pela elipse”<sup>34</sup> (ibid., p. 10, tradução nossa). Como as concepções possuem bases na História da Matemática, a Concepção Curva, em alguns escritos, associa-se bastante à ideia de elipse.

Assim, a Estrutura de Controle  $\Sigma_T$  e  $\Sigma_C$  é fundamentalmente de natureza empírica. Estas devem fornecer subsídios necessários “que permitam verificar a precisão das tabelas ou das curvas com referência às observações e na medida em que foram realizadas”<sup>35</sup> (ibid., p. 10, tradução nossa).

A Estrutura de Controle  $\Sigma_A$  depende das características específicas da álgebra como o Sistema de Representação e dos operadores que permitem implementar. Balacheff e Gaudin (2002) ressaltam que “as expressões simbólicas computacionais e a prova matemática são as ferramentas-chave para decidir se uma declaração é válida ou não”<sup>36</sup> (p. 10, tradução nossa).

A Concepção Objeto, discutida por Gaudin (2005), “pode assumir todos os problemas em que está envolvido o conceito de função”<sup>37</sup> (p. 97, tradução nossa). Para a formalização da concepção, a autora baseia-se no trabalho de Sfard (1991; 1992) “que destaca um aspecto particular no conhecimento da função: a função como um objeto”<sup>38</sup> (ibid., p. 2, tradução nossa).

Em seu trabalho, Sfard (1991) propõe olhar para um conceito matemático a partir de duas concepções, a Concepção Estrutural e a Concepção Operacional. Nessa perspectiva, Sfard retoma as discussões para o caso da representação do Conceito de Função, “para que o sujeito consiga construir um significado nesse conceito e acesse a resolução de certos tipos de problemas”<sup>39</sup> (GAUDIN, 2005, p. 322, tradução nossa), à luz das duas concepções citadas.

Baseada em Sfard (1991), Gaudin (2005) diz que “os diferentes modos de representação de uma função provavelmente se referem a um caráter operacional ou estrutural”<sup>40</sup> (p. 22, tradução nossa).

---

<sup>34</sup> The validity must be evaluated against the quality of the interpolations and predictions that the ellipse allowed.

<sup>35</sup> That allow verifying the precision of tables or of curves with reference to the observations and to the measurements, which have been carried out.

<sup>36</sup> Computation of symbolic expressions and mathematical proof are the key tools to decide whether a statement is valid or not.

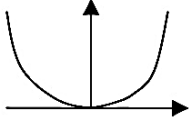
<sup>37</sup> Peut se saisir de l'ensemble des problèmes dans lesquels est engagé le concept de fonction.

<sup>38</sup> Qui pointe un aspect particulier des connaissances de fonction: la fonction comme objet.

<sup>39</sup> D'une fonction pour qu'un sujet parvienne à construire du sens sur ce concept et accède à la résolution de certains types de problèmes.

<sup>40</sup> Les différents modes de représentations d'une fonction sont susceptibles de renvoyer à un caractère opératoire ou structurel.

**Figura 2** - Diferentes representações para o Conceito de Função propostas por Sfard.

| Graph                                                                             | Algebraic expression | Computer program                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------|
|  | $y = 3x^4$           | <pre> INPUT X Y = 1 FOR I = 1 TO 4 Y = Y*X NEXT I Y = 3*Y </pre> |

**Fonte:** Gaudin (2005, p. 23).

As representações mencionadas por Sfard estão apresentadas na Figura 2. A autora explica que

O *computer program* parece corresponder a uma Concepção Operacional ao invés de uma Estrutural, uma vez que apresenta a Função como um processo computacional, não como uma entidade unificada. Na representação *graph*, por outro lado, os vários componentes infinitos da Função são combinados em uma linha suave, para que possam ser integrados juntos; o gráfico, portanto, incentiva uma abordagem estrutural. O *algebraic expression* pode ser explicada operacionalmente, uma descrição concisa de alguma computação, ou estruturalmente, como uma relação estática entre magnitudes (este termo é usado nas seguintes palavras: “=” pode ser considerado como um símbolo de identidade, ou como um “comando” para executar as operações que aparecem no seu lado direito)<sup>41</sup> (SFARD, 1991, p. 9 apud GAUDIN, 2005, p. 23, tradução nossa).

As discussões de Sfard giram em torno das duas concepções mencionadas, e como estas se articulam dentro do Conceito de Função e seus modos de representação. Apropriando-se dessas discussões, Gaudin (2005) formaliza a Concepção Objeto. Em seu escrito, a autora não descreve essa concepção com a nomenclatura utilizada por Balacheff e Gaudin (2002), apenas apresenta como cada conjunto se caracteriza.

Para Gaudin (2005, p. 322, tradução nossa), “essa concepção torna possível tomar decisões sobre o objeto além das contingências das diferentes representações, propriedades e cálculos sobre essas representações”<sup>42</sup>. Ou seja, para a Concepção Objeto é relevante levarmos em consideração a forma como o Conceito da Função está representado.

<sup>41</sup> The computer program seems to correspond to an operational conception rather than to a structural, since it presents the function as a computational process, not as an unified entity. In the graphic representation, on the other and, the infinitely many components of the function are combined onto a smooth line, so they can be grasped simultaneously as an integrated whole; the graph therefore encourage a structural approach. The algebraic representation can easily be interpreted both ways: it may be explained operationally, as a concise description of some computation, or structurally, as a static relation between magnitudes (this duality of interpretation corresponds to the already widely noticed and discussed dual meaning of the equality sign: “=” can be regarded as a symbol of identity, or as a “command” for executing the operations appearing at its right side.

<sup>42</sup> Cette conception permet de prendre des décisions sur l’objet dépassant les contingences des différentes représentations, des propriétés et des calculs sur ces représentations.

Seguindo o padrão de formalização, descrevemos a Concepção Objeto ( $C_O$ ) como sendo:

- Concepção Objeto:  $C_O = (P_O, R_O, L_O, \Sigma_O)$ .

Para o conjunto  $P_O$  “veremos que o espaço dos problemas em que a “função” funciona como objeto é um espaço privilegiado para a expressão dos meios de validação que regem esse conceito”<sup>43</sup> (GAUDIN, 2005, p. 2, tradução nossa). Como mencionado anteriormente, essa concepção envolve um amplo campo de problemas a serem assumidos. Porém,

[...] alguns problemas não favorecem o engajamento da Concepção Objeto ou, em vez disso, não promovem o envolvimento do elemento determinante dessa concepção (por exemplo, um problema que requer a computação dos valores de uma função polinomial de que se conhece uma representação analítica)<sup>44</sup> (GAUDIN, 2005, p. 97, tradução nossa).

O Sistema de Representação da Concepção Objeto ( $L_O$ ) pode lidar com as diferentes formas de representar uma função (GAUDIN, 2005). Como vimos anteriormente, esta concepção possui bases no estudo de Sfard, e em seu estudo, a autora aborda os diferentes tipos de representações para uma função como sendo objeto. Nessa perspectiva, para caracterizar o  $L_O$ , Gaudin (2005) traz essa formalização para a concepção.

Considerando apenas o Sistema de Representação, nas concepções anteriormente apresentadas, entendemos a particularidade no conjunto  $L$  de cada. Essa singularidade está ausente na Concepção Objeto, permitindo que esta concepção assuma uma representação gráfica, analítica, computacional e outras.

Nessa perspectiva, certificamos a importância da formalização e caracterização de cada conjunto que compõe uma concepção, para que possamos reconhecer suas originalidades incorporadas no Conceito da Função.

Retomando a caracterização de cada conjunto da Concepção Objeto, quando Gaudin (2005) discute sobre o Sistema de Representação dessa concepção, intrinsecamente a autora também aborda o  $R_O$ . Os operadores que envolvem esta concepção são ferramentas que possibilitam analisar e caracterizar as propriedades de uma função e manipular o objeto da função. “[...] Verificar a regularidade de uma função, avaliar a distância entre funções, etc”<sup>45</sup>

<sup>43</sup> Nous verrons que l’espace des problèmes dans lesquels «fonction» joue comme objet est un espace privilégié pour l’expression des moyens de validation régissant ce concept.

<sup>44</sup> Bien sûr, certains problèmes ne favorisent pas l’engagement de la conception objet ou, plutôt, ne favorisent pas l’engagement d’élément déterminant de cette conception (par exemple un problème demandant le calcul des valeurs d’une fonction polynomiale dont on connaît une représentation analytique).

<sup>45</sup> Vérifier la régularité d’une fonction, évaluer une distance entre fonctions, etc.

(ibid., p. 97 – 98, tradução nossa) são alguns exemplos de operadores nessa perspectiva. Gaudin (2005) também diz que “esses operadores eventualmente mobilizaram as representações formais de análise como quantificadores, limites e ferramentas de medição de função (normas, integrais, ...). Há também operadores para processar representações de uma função (gráfica e analítica)”<sup>46</sup> (p. 98, tradução nossa).

Gaudin (2005) acentua “a forte interdependência de operadores e controles que parecem não funcionar um sem o outro”<sup>47</sup> (p. 322, tradução nossa). Considerando  $R_O$ ,  $L_O$  e  $\Sigma_O$ :

A concepção objeto possui operadores que podem lidar com diferentes representações de uma função. Possui operadores que possibilitam estabelecer relações entre essas diferentes operações e controles que atestam que essas representações são representações do mesmo objeto<sup>48</sup> (ibid., p. 95, tradução nossa)

Alguns esclarecimentos importantes sobre as concepções e seus conjuntos não foram mencionadas durante o texto. Pontuamos essas informações a seguir:

- Para o caso  $C_T$ , representar uma função na forma de Tabela é uma maneira bastante particular, pois não consta nada além de valores exibidos por ela;
- Balacheff e Gaudin (2002, p. 14, tradução nossa) ressaltam que

As tabelas desempenham um papel muito limitado, nesse caso, nas situações envolvendo funções: se elas estiverem presentes, é em relação as situações concretas em que o objetivo é menos analisar uma função do que analisar os dados (a função é vista como uma ferramenta para análise de dados)<sup>49</sup>.

- “A curva não era a representação gráfica do que reconhecemos hoje como sendo o gráfico de uma função considerada como uma relação entre entidades (números ou mesmo quantidades)”<sup>50</sup> (ibid., 2002, p. 10, tradução nossa);
- A Concepção Curva é vista como a trajetória de um ponto móvel;

<sup>46</sup> Ces opérateurs vont éventuellement mobiliser les représentations formelles de l’analyse comme les quantificateur, les limites, les outils de mesure de fonctions (normes, intégrales, ...). On trouve également les opérateurs de traitement des représentations d’une fonction (graphique et analytique).

<sup>47</sup> L’interdépendance forte des opérateurs et des contrôles, qui ne semblent pas pouvoir fonctionner l’un sans l’autre.

<sup>48</sup> La conception objet comporte des opérateurs qui permettent de traiter différentes représentations d’une fonction. Elle possède des opérateurs qui permettent d’établir des relations entre ces différentes opérations et des contrôles qui attestent que ces représentations sont des représentations du même objet.

<sup>49</sup> It is also striking that tables play a very limited role if at all in the situations involving functions: if they are present it is in relation to concrete situations in which the aim is less to analyze a function than to analyze the data (the function is seen as a tool for data analysis).

<sup>50</sup> A curve was not the graphical representation of what we acknowledge nowadays as being the graph of a function considered as a relationship between entities (numbers or even quantities).

- Considerando a Concepção Objeto, “[...] os problemas de aproximação envolvem elementos [...]”<sup>51</sup> (GAUDIN, 2005, p. 108, tradução nossa) desta concepção. A autora ainda pontua que

A escolha de uma aproximação é sustentada pela construção de critérios de aproximação: esses critérios não dizem respeito às características das representações, mas ao uso de critérios para comparar funções (distâncias de duas funções) e nas regularidades das funções<sup>52</sup> (ibid., p. 108, tradução nossa).

- Para uma Função na  $C_A$ , Balacheff e Gaudin (2002) diz que:

Pode ser associado um gráfico, que é um conjunto de pares  $(x, y)$  no plano cartesiano (onde  $y$  é o valor da função para um dado  $x$ ). Esta possibilidade sugere, muitas vezes, relacionamentos próximos entre  $C_C$  e  $C_A$  que levanta a questão da relação entre gráfico e curva<sup>53</sup> (p. 10, tradução nossa).

Mas, os autores pontuam a diferença entre gráfico e curva como sendo:

Enquanto o gráfico é uma possível representação de uma Função, exibindo fenômenos que as expressões algébricas não demonstram facilmente (por exemplo, a interseção de duas linhas), uma curva é mais uma evocação da trajetória de um ponto móvel ou de um objeto geométrico<sup>54</sup> (p. 10, tradução nossa).

- Sobre a validade de uma Tabela, precisamos também pontuar que, “a estrutura de controle  $\sum_T$  depende fortemente da relação com um domínio externo à matemática para o qual a concepção considerada dá os meios para modelagem”<sup>55</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2002, p. 11, tradução nossa).

A discussão sobre como se caracteriza uma concepção  $C$  (subseção anterior), Balacheff e Gaudin (2002, 2009) utilizam para analisar a coleta de dados de sua pesquisa realizada com estudantes do 12<sup>th</sup> grade (último ano do Ensino Médio no Sistema Educacional da França). A seguir, apresentamos métodos e resultados dessa pesquisa.

<sup>51</sup> [...] Les problèmes d’approximation engagent des éléments [...].

<sup>52</sup> Le choix d’une approximation est sous tendu par la construction de critères d’approximation: ces critères ne portent pas sur les caractéristiques des représentations mais sur l’utilisation de critères de comparaison de fonctions (distances de deux fonctions) et sur les régularités des fonctions.

<sup>53</sup> Can be associated a graph, that is a set of pairs  $(x, y)$  in the Cartesian plane (where  $y$  is the value of the function for a given  $x$ ). This possibility suggests often close relationships between  $C_C$  and  $C_A$  that raises the question of the relationship between graph and curve.

<sup>54</sup> While the graph is a possible representation of a function, displaying phenomena that algebraic expressions do not easily demonstrate (for example the intersection of two lines), a curve is rather an evocation of the trajectory of a mobile point or of a geometrical object [...].

<sup>55</sup> The control structure "T heavily depends on the relation to a domain exterior to mathematics for which the considered conception gives the means for modeling.

As concepções<sup>56</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2002, p. 12, tradução nossa) observadas pelos autores foram:

- Concepção Algébrica-Curva:  $C_{GA} = (P_{GA}, R_{GA}, \text{Algébrica} - \text{Gráfica}, \Sigma_{GA})$ ;
- Concepção Gráfica-Algébrica:  $C_{AG} = (P_{AG}, R_{AG}, \text{Gráfica} - \text{Algébrica}, \Sigma_{AG})$ .

Para a escolha delas, os autores apoiam-se no estudo de Vinner (1992), que identificou oito características de funções em um estudo realizado em Jerusalém. No estudo realizado por Tall (1996), essas características citadas por Vinner foram observadas que são comuns a qualquer estudante em qualquer parte do mundo (BALACHEFF; GAUDIN, 2002). As características são:

- A correspondência que constitui a Função deve ser sistemática, deve ser estabelecida por uma regra, e a própria regra deve ter suas próprias regularidades; - Uma Função deve ser um termo algébrico; - Uma Função é identificada com uma de suas representações gráficas ou simbólicas; - Uma Função deve ser dada por uma regra; - A Função pode ter diferentes regras de correspondência para domínios disjuntos, desde que esses domínios sejam domínios regulares (como meia linhas ou intervalos); - Uma regra de correspondência que não é uma regra algébrica, é uma Função apenas se, a comunidade matemática anunciou oficialmente como uma Função; - O gráfico de uma Função deve ser regular e sistemático; e - Uma Função é uma correspondência um-para-um<sup>57</sup> (VINNER, 1992, p. 200 apud BALACHEFF; GAUDIN, 2002, p. 12, tradução nossa).

Porém, essas características não estão na forma de concepção, pois “faltam indicações sobre seu domínio de validade, bem como sobre a forma como podem ser implementadas em situações de resolução de problemas”<sup>58</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2002, p. 12, tradução nossa).

Outro ponto mencionado pelos autores é que, das características propostas por Vinner, boa parte delas estão relacionadas com a parte algébrica ou gráfica das funções. Por esses motivos apresentados anteriormente, Balacheff e Gaudin consideraram as representações como subsídios para caracterizar as concepções.

---

<sup>56</sup> - Curve-Algebraic conception:  $C_{GA} = (P_{GA}, R_{GA}, \text{Graphic} - \text{Algebraic}, \Sigma_{GA})$  e - Algebraic-Graph conception:  $C_{AG} = (P_{AG}, R_{AG}, \text{Algebraic} - \text{Graphic}, \Sigma_{AG})$ .

<sup>57</sup> - The correspondence which constitutes the Function should be systematic, should be established by a rule and the rule itself should have its own regularities; - A Function must be an algebraic term; - A Function is identified with one of its graphical or symbolic representations; - A Function should be given by one rule; - Function can have different rules of correspondence for disjoint domains provided that these domains are regular domains (like half lines or intervals); - A rule of correspondence which is not an algebraic rule is a Function only if the mathematical community officially announced it as a Function; - The graph of a Function should be regular and systematic; e - A Function is a one-to-one correspondence.

<sup>58</sup> One misses indications about their domain of validity as well as about the way they could be implemented in a problem-solving situations.

As duas concepções a serem manipuladas pelos autores compartilham do mesmo Sistema de Representação (L) – Algébrico e Gráfico – mas, esses sistemas possuem diferentes graus de importância quando inseridos em sua respectiva concepção.

No caso da Concepção Algébrica-Curva, o critério é que a curva deve ter uma representação algébrica. Para a Concepção Gráfica-Algébrica, o critério é que a representação algébrica deve ser associada a um gráfico que deve ser capaz de *plot*.

Porém, os autores ressaltam que, para diferenciar as concepções, não terá como base o seu Sistema de Representação, mas sim os tipos de ferramentas e controles envolvidos na situação-problema.

Mas, antes de apresentarmos dados que envolvam a análise das concepções nas respostas dos alunos, discutiremos alguns pontos importantes.

Balacheff e Gaudin (2002) apontam que: (I) “A caracterização de uma concepção não deve ser separada da caracterização da situação-problema que permitiu evidenciá-la”<sup>59</sup> (p. 13, tradução nossa). E, (II) o resultado do problema deve ser analisado levando em consideração a situação em que este foi produzido. “Podemos até mesmo afirmar que concepções e problemas são entidades duplas (BALACHEFF, 1995)”<sup>60</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2002, p. 14, tradução nossa). Ou seja, para caracterizar as concepções do sujeito, precisam-se considerar problemas significativos, de modo que as ferramentas utilizadas pelo sujeito e a “natureza do controle que eles envolvem na tarefa”<sup>61</sup> (ibid., 2002, p. 14, tradução nossa) fiquem claras.

Considerando o que foi exposto, apresentaremos resultados do artigo desenvolvido por Balacheff e Gaudin (2002). Todos os sujeitos participantes da pesquisa possuem algum conhecimento algébrico. O *software* utilizado na pesquisa foi *Cabri-Geometry II*, por permitir “construir curvas e exibir a relação dinâmica entre seus gráficos e suas representações algébricas”<sup>62</sup> (p. 15, tradução nossa).

Inicialmente, os pesquisadores apresentaram uma parábola e seu sistema de coordenadas. O vértice da parábola podia ser movimentado. Quando manipulado, a equação associada a ela era atualizada dinamicamente. A partir dessa situação, foi solicitado que os sujeitos desenhasssem a tangente no ponto  $M_0$  e informem à equação dela (Figura 3).

---

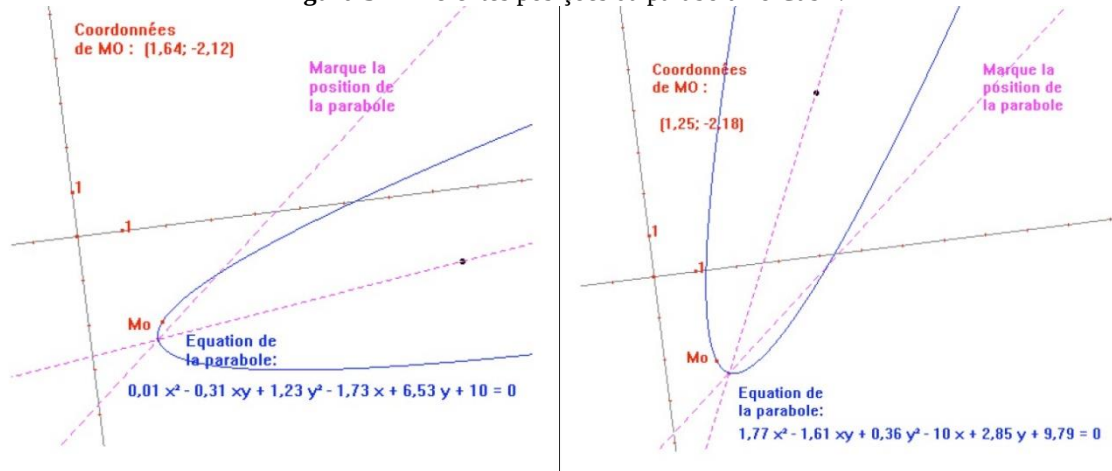
<sup>59</sup> The characterization of a conception should not be separated from the characterization of the problem situation which allowed to evidence it.

<sup>60</sup> We may even go farther claiming that conceptions and problems are dual entities (Balacheff 1995).

<sup>61</sup> The nature of the control they involve in the task.

<sup>62</sup> Can construct curves and display the dynamical relation between their graphical and their algebraic representations.

**Figura 3 - Diferentes posições da parábola no Cabri.**



**Fonte:** Balacheff e Gaudin (2002, p. 15).

Os pesquisadores pontuaram duas situações importantes para a resolução do problema proposto: (I) Agarrando o ponto preto do eixo da parábola, a parábola pode ser manipulada. Esse movimento faz com que o sujeito alcance uma posição quase vertical para a parábola. Nesta posição, o sujeito obtém o gráfico de uma Função Quadrática. (II) A única restrição imposta pelos pesquisadores no movimento da parábola, é que ela não poderia ser virada completamente ao redor do vértice, para que não fosse possível obter uma Função Quadrática “familiar”. Nessa perspectiva, não era possível atingir a posição vertical da parábola.

Os conhecimentos que os sujeitos da pesquisa precisam mobilizar para a resolução do problema são:

- Que uma parábola cuja equação é  $y = ax^2 + bx + c$  é o gráfico da Função  $f$  definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ; - que uma equação da tangente ao gráfico de uma Função  $f$  no ponto  $M_0(x_0; y_0)$  é  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ,  $f'$  sendo a derivada de  $f$ ; - algumas regras de diferenciação; e - nada sobre cônicas<sup>63</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2002, p. 16, tradução nossa).

Para as situações mencionadas anteriormente, Balacheff e Gaudin (2002), esboçam estratégias de soluções esperadas em ambas as situações. Para a I, tem-se:

- Um controle sobre a posição da parábola permite atingir a posição vertical para obter o gráfico de uma Função Quadrática  $f$ . Sua representação algébrica é  $f(x) = (1/2.36)(3.32x^2 - 10x + 1.56)$ ; - A propriedade “Uma equação da tangente de um gráfico de uma função  $f$  no ponto  $M_0(x_0; y_0)$  é  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ,  $f'$  é a derivada de  $f$ ” é um operador que processa a expressão algébrica de  $f$ ; e - Obter a equação da tangente

<sup>63</sup> - That a parabola which equation is  $y = ax^2 + bx + c$  is the graph of the function  $f$  defined by  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ; - that an equation of the tangent to the graph of a function  $f$  at point  $M_0(x_0; y_0)$  is  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ,  $f'$  being the derivative of  $f$ ; - some rules of differentiation; e - nothing about conics.

da parábola ( $y = -1,01x - 1,17$ ) e desenhar a tangente com *Cabri*<sup>64</sup> (p. 16, tradução nossa).

E para a II:

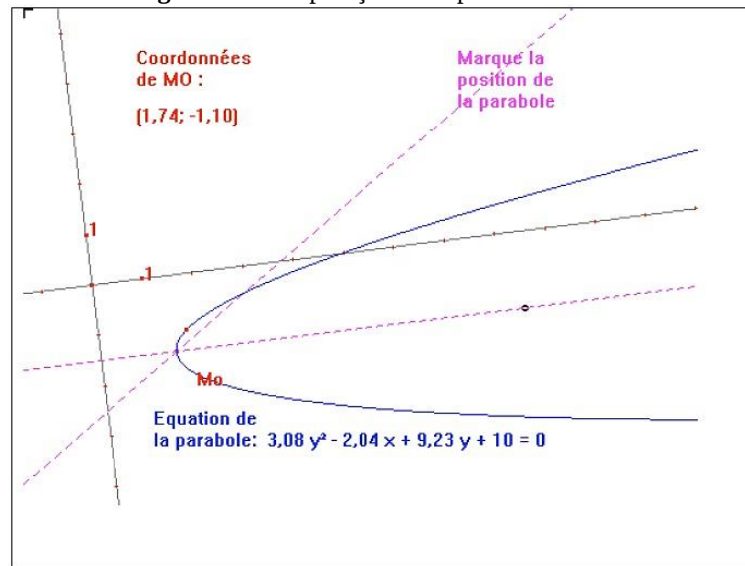
- A parábola não pode mais alcançar a posição vertical, mas, na posição horizontal, obtém o gráfico de uma Função Quadrática em outro sistema de coordenadas, definido pela mesma origem, o ponto (0; -1) como a unidade no eixo x e o ponto (1; 0) à medida que a unidade está ligada o eixo y; - o novo sistema está associado à mudança da variável  $X = -y$  e  $Y = x$ . Essa mudança é uma ferramenta para conhecer a equação  $3,08X^2 - 2,04Y - 9,23X + 10 = 0$  da parábola no novo sistema, e para obter a representação algébrica  $f(X) = (1 / 2,04) (3,08X^2 - 9,23X + 10)$  da função onde a parábola é um gráfico no novo sistema; e - como na situação I, a propriedade “Uma equação da tangente de um gráfico de uma função  $f$  no ponto  $M_0(x_0; y_0)$  é  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ,  $f'$  é a derivada de  $f$ , e um operador que processa a expressão algébrica de  $f$ . Obter a equação da tangente da parábola ( $Y = -1,20X + 3,06$ ). A mudança da variável  $X = -y$  e  $Y = x$  é uma ferramenta para conhecer a equação da tangente no sistema inicial de coordenadas:  $1,20y - x + 3,06 = 0$ . Desenhar a tangente com *Cabri*<sup>65</sup> (p. 16 – 17, tradução nossa).

Mas, o desenho de uma parábola no *software Cabri*, pode ser caracterizado como um gráfico ou uma curva? Para essa pergunta, os autores dizem que em um sistema de coordenadas, o conjunto de pontos  $(x, f(x))$  pode ser considerado como o gráfico de uma função. A curva é um objeto geométrico que independe de um sistema de coordenadas para obter seu desenho (BALACHEFF; GAUDIN, 2002).

Para a análise, os autores consideraram a resposta de duas duplas (André/Rémi ou Loïc/Sylvain), uma para cada concepção. Utilizaram como critério de escolha, aquelas duplas que melhor ilustram as concepções.

<sup>64</sup> - A control on the position of the parabola allows reaching the vertical position to get the graph of a quadratic function  $f$ . Its algebraic representation is  $f(x) = (1/2,36) (3,32x^2 - 10x + 1,56)$ ; - The property “An equation of the tangent of a graph of a function  $f$  at point  $M_0(x_0; y_0)$  is  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ,  $f'$  is the derivative of  $f$ ” is an operator which processes the algebraic expression of  $f$ ; - One gets the equation of the tangent of the parabola ( $y = -1,01x - 1,17$ ) and draws the tangent with *Cabri*.

<sup>65</sup> - The parabola can not reach the vertical position anymore, but, in the horizontal, position it is the graph of a quadratic function in another system of coordinates defined by the same origin, the point (0; -1) as the unit on the x axis and the point (1; 0) as the unit on the y axis; - The new system is associated to the change of variable  $X = -y$  and  $Y = x$ . This change is a tool to know the equation  $3,08X^2 - 2,04Y - 9,23X + 10 = 0$  of the parabola in the new system and to get the algebraic representation  $f(X) = (1/2,04) (3,08X^2 - 9,23X + 10)$  of the function of which the parabola is a graph in the new system; e - Like in situation I, the property “An equation of the tangent of a graph of a function  $f$  at point  $M_0(x_0; y_0)$  is  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ,  $f'$  is the derivative of  $f$ ” is an operator which processes the algebraic expression of  $f$ . One gets the equation of the tangent of the parabola ( $Y = -1,20X + 3,06$ ). The change of variable  $X = -y$  and  $Y = x$  is a tool to know the equation of the tangent in the initial system of coordinates:  $1,20y - x + 3,06 = 0$ . One draws the tangent with *Cabri*.

**Figura 4** - Manipulação da dupla André/Rémi.

Fonte: Balacheff e Gaudin (2002, p. 16).

Para estabelecer uma equação derivável, as duplas realizaram os procedimentos relatados a seguir. André/Rémi mexeram no eixo até encontrar uma função que seja derivável. Nesse momento, o xy desapareceu (Figura 4). A equação obtida pela dupla levou o nome de “equação organizada”. Por sua vez, Sylvain/Loïc acharam a equação que já estava plotada bem complicada. Essa equação não era a representação de uma função, pois x estava obtendo dois valores. Com isso, os estudantes começaram a mexer verticalmente na linha que movimenta a parábola para que xy e  $y^2$  desapareçam e determinem a função.

Balacheff e Gaudin (2002) apontam que:

As ações de ambos os pares de estudantes na situação I são as mesmas: mover a parábola para a posição vertical e obter a equação da tangente conforme descrito na estratégia esperada. Mas os controles e o sistema de representação associada difere de forma importante<sup>66</sup> (p. 18, tradução nossa).

Para o controle, André/Rémi apropriam-se essencialmente do Sistema de Representação algébrico. Já a outra dupla recorre ao Sistema de Representação gráfico e algébrico. Mas, a partir do movimento realizado pelas duplas, ambas perceberam que a parábola não pode alcançar a posição vertical. Com isso, ambas as duplas mudaram suas estratégias. A dupla André/Rémi:

Decidiram mover a parábola para a posição horizontal porque a equação pareceu ser a mais simples que eles poderiam obter ( $3.08y^2 - 2.04x + 9.23y + 10 = 0$ ). Mas esta equação não foi ainda de acordo com a regra da diferenciação, e os alunos propuseram mudar x com y e y com x. Mais uma vez, o controle é essencialmente algébrico. Eles duvidaram da legitimidade de tal mudança, e então propuseram mudar o sistema de

<sup>66</sup> The actions of both student pairs in situation 1 are the same: moving the parabola to the vertical position and getting the equation of the tangent as described in the expected strategy.

coordenadas [...] para [...]:  $X = -y$  e  $Y = x$  (que é quase o sugerido por mudar  $x$  com  $y$  e  $y$  com  $x$ ). Eles obtiveram uma expressão que poderiam derivar ( $f(x) = (1/2.04)(3.08X^2 - 9.23X + 10)$ ) - pode-se notar que eles escreveram “ $x$ ” e não “ $X$ ”, em “ $f(x)$ ”. O ponto importante está no significado que os alunos atribuem à mudança de sistema. A dupla não relatou essa mudança para os outros objetos da situação: eles usaram a coordenada inicial  $M_0$  no operador “se  $f$  é uma função de  $x$  então a equação da tangente no ponto  $M(x_0, f(x_0))$  é  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ”, a equação da tangente não foi reescrita no sistema inicial antes de desenhar a tangente [...], assim, a tangente foi invalidada. Claramente, a mudança do sistema não foi associada a um controle no sistema de representação gráfica<sup>67</sup> (p. 18, tradução nossa).

A segunda dupla realizou o seguinte procedimento:

Loïc moveu a parábola para a horizontal porque esta posição pareceu ser a melhor. Sylvain não considerou esta posição como a melhor para resolver o problema. [...] Ele propôs alterar o sistema de coordenadas: o novo sistema proposto, a parábola satisfaz o teste da linha vertical e, portanto, a parábola era o gráfico de uma função. Diferente da dupla anterior, o controle no Sistema de Representação utilizado pela dupla, é gráfica, levando a escolher um novo sistema de coordenadas. Este controle permitiu um gráfico/curva de distinção mais eficaz do que “obter uma equação”. “Mais eficaz” significa que este controle foi associado para novas ferramentas utilizadas pelos alunos: lendo as coordenadas de  $M_0$  no novo sistema, obtendo a equação da tangente na qual a parábola é um gráfico, e depois escrevendo esta equação no sistema inicial para desenhar a tangente<sup>68</sup> (p. 18, tradução nossa).

É possível identificar as concepções mobilizadas pelos sujeitos, através da Estrutura de Controle e os Sistemas de Representação. No caso da Concepção Algébrica-Curva, o controle associado à equação da tangente é algébrico. O cálculo se resume em transformações simbólicas. À Concepção Gráfica-Algébrica, prevalece o controle gráfico. Nessa perspectiva, o cálculo está baseado em variáveis ligadas a uma equação e/ou um gráfico.

<sup>67</sup> Decided to move the parabola to the horizontal position because the equation appeared then to be the simplest one they could expect. The obtained equation ( $3.08y^2 - 2.04x + 9.23y + 10 = 0$ , see Figure 5) was described as “nice”, as “the best”. But this equation was not yet in accordance with the rule of differentiation and students proposed to change  $x$  with  $y$  and  $y$  with  $x$ . Again, the control is essentially algebraic. They doubted the legitimacy of such a change, and then, they proposed to change the system of coordinates into the new one according to the mapping of variables:  $X = -y$  and  $Y = x$  (which is almost the one suggested by changing  $x$  with  $y$  and  $y$  with  $x$ ). They got an expression that they could derive ( $f(x) = (1/2.04)(3.08X^2 - 9.23X + 10)$ ) - one can notice that they wrote “ $x$ ” and not “ $X$ ”, in “ $f(x)$ ”. The important point here is the meaning students ascribed to the change of system. They did not relate this changing to the other objects of the situation: they used the initial coordinate of  $M_0$  in the operator “if  $f$  is a function of  $x$  then the equation of the tangent at the point  $M(x_0, f(x_0))$  is  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ”, the equation of the tangent was not rewritten in the initial system prior to drawing the tangent (as described by the “expected” strategies), thus the tangent was invalidated. Clearly, the change of system was not associated to a control in the graphical representation system.

<sup>68</sup> Loïc moved the parabola to the horizontal because this position appeared to him to be better than any position. Sylvain did not consider this position as a better one to solve the problem. [...] He proposed to change the system of coordinates: the new proposed system being the one in which the parabola satisfied the vertical line test, and so, the one in which the parabola was the graph of a function. Thus, unlike the other student pair, it was a control in the graphical representation system which led to choose the new system of coordinate. This control allowed a distinction graph/curve more effective than “getting a nice equation”. “More effective” means that this control was associated to new tools used by the students: reading the coordinates of  $M_0$  in the new system, getting the equation of the tangent in which the parabola is a graph, and then writing this equation in the initial system to draw the tangent.

Por fim, os autores invocam que, com tudo que foi apresentado em sua escrita, não há espaço suficiente para detalhar todos os benefícios que se espera da definição proposta por eles para concepção. Ainda diz que é necessário apresentar a relação entre concepções, pois permite presenciar a passagem do nível concepção para o nível conhecimento.

Na próxima subseção, apresentamos o Conceito de Função em uma perspectiva histórica, e reconhecemos as concepções *Tabela*, *Curva*, *Algébrica*, *Relação* e *Objeto* inseridas na história.

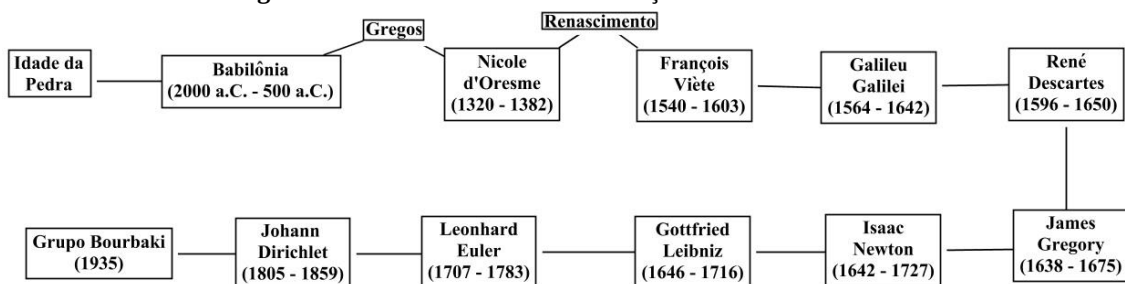
### 2.3 As concepções do Estudo das Funções, situadas na História da Matemática

Na Matemática, o Conceito de Função é um dos mais relevantes e muitas vezes encarado como pensamento base para outros conteúdos matemáticos, como é o caso das componentes curriculares de Cálculo Diferencial e Integral, ministradas no Ensino Superior pelos cursos da Área de Exatas. Porém, durante um período da História da Matemática, o conteúdo base para o Cálculo não era a Função, mas sim as Curvas.

Nesta perspectiva, a presente subseção apresenta os primeiros indícios e as mudanças deste conceito ao longo da história.

O conceito de Função que hoje é conhecido e lecionado nas Redes de Ensino, passou por diversas mudanças ao longo da História da Matemática. Vázquez, Rey e Boubée (2008) e Maciel (2011), baseados em Youschkevitch (1976), descrevem a história deste conceito dividida em três etapas: Período Antigo, Idade Média e Período Moderno. Estas etapas são marcadas por vários filósofos matemáticos (Figura 5) que contribuíram para o avanço deste conceito e, também, são marcadas por eventos históricos da humanidade que influenciaram no avanço do conceito.

**Figura 5** - Marcos do Conceito de Função na História da Matemática.



**Fonte:** Os autores.

O **Período Antigo**, contado pelos autores, é marcado inicialmente pela Idade da Pedra. Intuitivamente, via-se a noção de Função no controle da caça. Com a necessidade de comercialização, os homens utilizavam a ideia de contagem para a repartição do que haviam

caçado, associando animais a pedras. “A contagem implica uma correspondência entre um determinado conjunto de objetos e uma sequência de números a contar”<sup>69</sup> (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p. 2, tradução nossa). Nesta perspectiva, tem-se o conjunto de objetos como sendo os animais de cada espécie e os números a contar equivalem às pedras.

Quando a contagem por pedras não era suficiente, os homens utilizavam marcas em toras de madeiras. Com isso, o primeiro indício da função na História da Matemática, tem-se com o conceito do número, empregando a correspondência biunívoca entre animais e algum método de contagem utilizado na época.

Manifestações do conceito de Função também podem ser vistos nas tabelas do período Babilônico (2000 a. C. – 500 a. C.). Nestas, tinham-se valores escritos em suas colunas. Com as operações realizadas na associação destes valores, dava-se a ideia implícita da existência do conceito de Função. Nestas operações, via-se o cálculo da multiplicação, divisão, a potenciação envolvendo o expoente quadrático e cúbico, e o cálculo de raízes quadradas e cúbicas.

Durante a cultura Helênica (500 a.C. – 500 d.C.) “as mudanças aparecem nos conteúdos que trazem consigo estudos voltados para a Geometria”<sup>70</sup> (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p. 3, tradução nossa).

No período helenista, um dos grandes matemáticos gregos – Ptolomeu (100 d.C. – 170 d.C.) – divulgou, compilado em tabelas numéricas, os resultados de seu estudo sobre a mudança das posições dos planetas. “As tabelas vão com a localização de um número isolado por outro número (ou quantidades) [...]”<sup>71</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2002, p. 8, tradução nossa).

A forma como a tabela era usada antigamente, Balacheff e Gaudin (2002) resgatam esse tratamento e incorporam na Concepção Tabela. Os autores dizem que “uma tabela é uma maneira bastante particular de representar uma função na medida em que não diz nada além dos valores que ela exibe”<sup>72</sup> (p. 10, tradução nossa).

Além do que já foi apresentado, nesse período tem-se também o surgimento de problemas clássicos da Geometria, a criação de diferentes curvas por povos gregos, os problemas que implicam implicitamente a noção de Função e o marco do início da trigonometria. Embora estudos desenvolvidos nessa data não tenham sido voltados

---

<sup>69</sup> El conteo implica una correspondencia entre un conjunto dado de objetos y una secuencia de números para contar.

<sup>70</sup> Aparecen cambios en los contenidos que traen aparejados consigo un mayor estudio de la Geometría.

<sup>71</sup> Tables go with locating an isolated number by another number (or quantities) [...]

<sup>72</sup> A table is a rather particular way to represent a function insofar as it does not tell anything beyond the values that it displays.

explicitamente para o conceito de Função, os eventos aqui listados contribuíram para o desenvolvimento deste conceito (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008).

A **Idade Média** “começa com a queda de Roma no ano 476, e finaliza no ano 1453 com a queda de Constantinopla”<sup>73</sup> (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p. 4, tradução nossa). Nesta etapa, “a noção de função está ligada às representações geométricas e mecânicas” (MACIEL, 2011, p. 22). Os estudos desenvolvidos por parte dos filósofos matemáticos e físicos na Idade Média estavam voltados para fenômenos naturais, como: luz, calor, cor, velocidade e distância.

Segundo Vázquez, Rey e Boubée (2008) e Maciel (2011), um dos matemáticos que marcou o desenvolvimento do conceito da Função neste período chama-se Nicole d’Oresme. Em seus escritos, d’Oresme retrata as mudanças das propriedades dos objetos a partir de sua representação gráfico-geométrica. Estas mudanças foram expressadas por sua longitude e latitude que, após anos, viriam a ser equivalentes a abscissa e ordenada.

Embora o estudo das coordenadas tenha acontecido no Período Antigo, “Oresme percebeu o princípio fundamental de representar uma função variável como uma curva e, no entanto, a preocupação dele era em determinar a área sob a curva” (MACIEL, 2011, p. 24).

A Idade Média foi um período importante e com diversos marcos na História da Matemática, como o nascimento das bases da Álgebra Matemática pelos povos árabes. Mas, no desenvolvimento no conceito de Função, esta etapa não teve grandes significados.

O quadro histórico muda juntamente com as transformações sociais, culturais e políticas ocorridas no período Renascentista, iniciando assim o **Período Moderno**. Esta etapa teve seu início no final do século XVI. No século seguinte, a partir das contribuições do matemático François Viète (1540 – 1603), a Álgebra passa a ter grandes marcos na História da Matemática, deixando de ser uma subordinada da Geometria (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008).

Viète, além de utilizar a “Álgebra para tratar a igualdade e a proporção entre magnitudes”<sup>74</sup> (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p. 5, tradução nossa), também foi o primeiro matemático a propor o uso de letras para representar variáveis. Nesta mesma época, Galileu Galilei (1564 – 1642) contribuiu para o uso de números em representações gráficas.

René Descartes (1596 – 1650) foi um dos grandes nomes a contribuir na ideia da construção das curvas. Com seus escritos, Descartes descreve que basta uma equação algébrica para que possa estabelecer uma curva. Este filósofo francês “foi o primeiro a desenvolver a

---

<sup>73</sup> La Edad Media comienza con la caída de Roma en el año 476, y finaliza en el año 1453, con la caída de Constantinopla.

<sup>74</sup> Álgebra para tratar la igualdad y la proporción entre magnitudes.

ideia de introduzir uma função em forma analítica”<sup>75</sup> (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p. 5, tradução nossa).

Ainda sobre Descartes, Vázquez, Rey e Boubée (2008) dizem que

Descartes queria reduzir a solução de todos os problemas algébricos e de equações, a um procedimento padrão que permitiria você encontrar as raízes. Este matemático foi o primeiro a deixar claro que uma equação em  $x$  e  $y$  é uma forma de mostrar uma dependência entre quantidades variáveis, de modo que os valores de um deles poderiam ser calculados a partir dos valores correspondentes na outra variável (p. 5-6, tradução nossa)<sup>76</sup>.

Na situação anterior, identificamos a preocupação do Descartes em encontrar um padrão para os problemas algébricos. O cuidado que este filósofo teve, podemos comparar com o procedimento que hoje utilizamos para obter as raízes de uma equação, por exemplo, do 2º grau.

Ao longo do desenvolvimento da história do conceito da Função, muitos artigos associam sua existência e desenvolvimento a ações realizadas no decorrer da História. Essas ações, muitas vezes, dependiam da necessidade do homem daquele determinado período.

Com o avanço da Geometria Analítica e o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, “as variáveis são introduzidas e as expressões de relacionamento começam a serem usadas entre variáveis por meio de equações”<sup>77</sup> (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p. 7, tradução nossa).

Decorrente das ideias propostas por Descartes, o astrônomo matemático James Gregory (1638 – 1675), em 1667 definiu explicitamente uma Função como sendo: “Uma quantidade que é obtida de outras quantidades mediante uma sucessão de operações algébricas ou mediante qualquer outra operação imaginável”<sup>78</sup> (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p. 6, tradução nossa).

Neste mesmo período, o filósofo alemão Gottfried Leibniz (1646 – 1716) se destaca por ser “o primeiro matemático a usar a palavra função em 1692”<sup>79</sup> (STRUIK, 1969 apud

---

<sup>75</sup> Fue quien desarrolló la idea de introducir una función en forma analítica.

<sup>76</sup> Él quería reducir la solución de todos los problemas algebraicos y de ecuaciones, a un procedimiento estándar que le permitiera encontrar las raíces. Este matemático fue el primero en poner en claro que una ecuación en  $x$  e  $y$  es una forma de mostrar una dependencia entre cantidades variables, de modo que los valores de una de ellas pudieran calcularse a partir de los correspondientes valores en la otra variable.

<sup>77</sup> Se introducen las variables y se comienzan a utilizar expresiones de relaciones entre variables por medio de ecuaciones.

<sup>78</sup> Una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable.

<sup>79</sup> El primer matemático en utilizar la palabra función en 1692

VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p. 5, tradução nossa). O matemático utilizou este termo referindo-se à porção que varia de um ponto para outro em uma curva. O termo Função utilizado por Leibniz, não foi da mesma forma que utilizamos hoje.

Durante o século XVII, vários autores estudaram e aperfeiçoaram o cálculo da posição dos planetas e dados astronômicos, a partir do objeto de estudo mais utilizado naquela época, a curva. Balacheff e Gaudin (2002) dizem que “A validade das trajetórias conjecturadas foi essencialmente relacionada à precisão da medida das posições do planeta e à escolha de um objeto geométrico familiar, a elipse, que permitiu descrever o universo com leis matemáticas simples<sup>80</sup>” (p. 9, tradução nossa).

Na história do Conceito de Função, o astrônomo Isaac Newton (1642 – 1727), mais conhecido por suas contribuições na Física (a lei da gravitação, as três leis de Newton e outros), foi “o primeiro matemático a mostrar que uma função poderia ser descrita como uma série de potência e foi ele quem introduziu o termo “variável independente” (MACIEL, 2011, p. 26).

No século XVII, a maioria das Funções foram estudadas como sendo curvas. Nessa perspectiva, Balacheff e Gaudin (2002, p. 10, tradução nossa), fundamentados em Kline (1972), afirmam que “a concepção de curva como trajetória de um ponto, é atribuída a Newton”<sup>81</sup>.

As contribuições de Newton para o conceito de Função são de fundamental importância, por exemplo, quando tratamos de uma função do 2º grau, tendo uma variável elevada à potência dois. Considerando a Concepção Curva, as ideias propostas por Newton foram fundamentais para o entendimento do Sistema de Representação desta concepção.

No século seguinte, os estudos do Conceito de Função foram bastante influenciados pelo problema das navegações de longa distância e o problema da corda vibrante.

Balacheff e Gaudin (2005), apontam que: “[...] No início do século XVIII, um importante problema era o da navegação de longa distância, as costas ficando fora de vista”<sup>82</sup> (p. 9, tradução nossa). Tais estudos influenciaram na caracterização do conjunto problema na Concepção Tabela e Curva. Os autores apontam que “o conjunto de problemas  $P_T$ , bem como

---

<sup>80</sup> The validity of the conjectured trajectories was then essentially related to the precision of the measurement of the planet positions and to the choice of a familiar geometrical object, the ellipse that permitted to describe the universe with simple mathematical laws.

<sup>81</sup> The conception of curves as trajectories of a point, ascribed to Newton.

<sup>82</sup> [...] In the beginning of the XVIII century an importante problem was that of long distance navigation, coasts being out of sight.

$P_C$ , foram dominados por questões práticas e  $R_T$ , bem como  $R_C$ , incluído – mas não exclusivamente – técnicas de medida, de computação e de desenho”<sup>83</sup> (p. 9, tradução nossa).

O problema da corda vibrante diz que “Dada uma corda elástica com extremidades fixas, ela é deformada de maneira inicial e solta para que vibre. O problema consiste em determinar a função que descreve a forma da corda em cada instante” (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p. 8, tradução nossa)<sup>84</sup>.

Nesse mesmo século, as ideias propostas por Leonhard Euler (1707 – 1783) foram significativas para o desenvolvimento do conceito de Função. Em seus escritos, Euler passa a utilizar a identificação  $f(x)$  para representar a função de  $x$ . Segundo Vázquez, Rey e Boubée (2008), em 1755, o matemático suíço define uma Função como sendo uma expressão analítica onde “A função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer maneira a partir dessa quantidade variável e de números ou quantidades constantes (RUTHING, 1984 apud, VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p. 8, tradução nossa)”<sup>85</sup>.

Avançando em seus estudos, Euler incorpora uma nova cara à função, que até então era vista como uma ferramenta para resolver problemas, principalmente problemas relacionados à Física. Com a ideia proposta por Euler – a Função é uma entidade matemática – esta passa a ser vista e estudada como um objeto matemático.

Mesmo com as contribuições significativas apresentadas por Euler, o matemático não foi o responsável por originar o conceito de Função. Porém, ele foi aquele que tratou a Função como sendo um cálculo (MACIEL, 2011).

As ideias que transcenderam durante a história a respeito do conceito de Função, era pensando na Função como sendo expressões analíticas ou curvas. Johann Dirichlet (1805 – 1859) foi o primeiro matemático a definir formalmente uma Função. O mesmo considerava “a noção de função como uma “correspondência arbitrária” e explicitamente restrito a um intervalo, o domínio de uma função”<sup>86</sup> (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p. 10, tradução nossa).

---

<sup>83</sup> Thus the set of problems  $P_T$ , as well as  $P_C$ , were dominated by practical questions and  $R_T$ , as well as  $R_C$ , included – but not exclusively – techniques of measurement, of computation and of drawing.

<sup>84</sup> Dada una cuerda elástica con extremos fijos se la deforma de alguna manera inicial y se la suelta para que vibre. El problema consiste en determinar la función que describe la forma de la cuerda en cada instante.

<sup>85</sup> La función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes.

<sup>86</sup> La noción de función como una “correspondencia arbitraria”. Y restringió explícitamente a un intervalo, el dominio de una función.

O matemático alemão, amparado no estudo físico de Fourier sobre a propagação do calor, dá uma roupagem Matemática para tal escrito e descobre que a afirmação feita por Fourier sobre toda Função poder ser representada por uma expansão em série, é falsa. Nesta perspectiva, segundo Vázquez, Rey e Boubée (2008), Dirichlet define Função como sendo “Y é uma função da variável x, definida no intervalo  $a < x < b$ , se para cada valor da variável x nesse intervalo, corresponde a um valor determinado da variável y. Além disso, é irrelevante como se estabelece a correspondência<sup>87</sup>” (p. 10, tradução nossa).

Após quase um século, o Grupo Bourbaki (criado em 1935) definiu em 1939, uma Função de forma semelhante a Dirichlet. O Grupo diz que:

Sejam E e F dois conjuntos, que podem ou não ser diferentes. Uma relação entre um elemento variável x de E e um elemento variável y de F, é chamada de relação funcional em y, se para todo x em E, existe um único y em F que está relacionado com x. Damos o nome da função para a operação que, dessa forma, associe cada elemento x em E com o elemento y em F que está relacionado ao x, diz que y é o valor da função no elemento x e y é a função definida pela relação dada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p. 12, tradução nossa).<sup>88</sup>

Para alcançarmos o conceito de Função que hoje é utilizado, outros conceitos precisaram ser definidos paralelamente ao longo da História da Matemática, havendo uma contribuição entre seus desenvolvimentos.

No decorrido anteriormente, passando pelas três etapas propostas por Youschkevitch (1976), vê-se a importância de cada fato e definições traçadas por grandes matemáticos na gênese do conceito da Função.

As tabelas babilônicas, descritas no Período Antigo, podem ser assimiladas às tabelas de valores que utilizamos atualmente. As curvas desenvolvidas pelos gregos, entre a etapa do Período Antigo e a Idade Média podemos interpretar como as primeiras representações gráficas de uma Função.

---

<sup>87</sup> Y es una función de la variable x, definida en el intervalo  $a < x < b$ , si para todo valor de la variable x en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y. Además, es irrelevante como se establece esa correspondencia.

<sup>88</sup> Sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F, se llama relación funcional en y, si para todo x en E, existe un único y en F el cual está en la relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia cada elemento x en E con el elemento y en F que está en relación con x, se dice que y es el valor de la función en el elemento x, y se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función.

Na sequência, expomos a Tabela 1, que apresenta em síntese o desenvolvimento do conceito de Função ao longo dos séculos. A tabela é originalmente dos autores Vázquez, Rey e Boubée (2008), mas foi traduzida por Maciel (2011).

**Tabela 1** - Síntese da evolução do conceito de Função.

| <b>Época</b>        | <b>Definição</b>                                                                                                 |
|---------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Século XVII</b>  | Qualquer relação entre variáveis.                                                                                |
|                     | Uma quantidade obtida de outras quantidades mediante operações algébricas ou qualquer outra operação imaginável. |
|                     | Qualquer quantidade que varia de um ponto a outro em uma curva.                                                  |
|                     | Quantidades formadas usando expressões algébricas e transcendentais de variáveis e constantes.                   |
| <b>Século XVIII</b> | Quantidades que dependem de uma variável.                                                                        |
|                     | Função de algumas variáveis, como quantidade, que é composta, de alguma forma, de variáveis e constantes.        |
|                     | Qualquer expressão útil para calcular.                                                                           |
| <b>Século XIX</b>   | Correspondência entre variáveis.                                                                                 |
|                     | Correspondência entre um conjunto A e os números reais.                                                          |
|                     | Correspondência entre os conjuntos.                                                                              |

**Fonte:** Maciel (2011, p. 33).

Na próxima seção, apresentamos os softwares utilizados para essa escrita, bem como seus processos de criação e análises de algumas ferramentas disponíveis neles.

### 3 CONHECENDO O DESENVOLVIMENTO DOS SOFTWARES

A seção 3 apresenta a história e principais ferramentas dos softwares a serem utilizados na análise.

A seção se divide em quatro subseções, sendo cada subseção destinada à apresentação dos softwares Casyopée, GeoGebra, Modellus e Function Studium. Nas seções, os softwares são apresentados na ordem alfabética.

#### 3.1 Sobre o Casyopée

O desenvolvimento do software Casyopée iniciou no ano de 2006 com o propósito de “ajudar os alunos a ter sentido das representações matemáticas existentes com o suporte do computador”<sup>89</sup> (LAGRANGE, 2014, p. 1, tradução nossa).

Sua preocupação estava na ênfase das representações algébricas de papel/lápis, tornando essencial uma atenção maior por parte do sujeito no momento da manipulação.

Como o Casyopée foca no Conceito de Função, Lagrange (2014) pontua três objetos relacionados ao software:

(a) Letras identificam a variável, funções e parâmetros; (b) gráficos e representações tabulares de funções complementam expressões simbólicas; e (c) as equações correspondem à busca de um valor da variável para um determinado valor da função ou eles podem ser sobre a igualdade de duas funções, ou a busca de um valor de um parâmetro<sup>90</sup> (HOYLES; NOSS, 2006, p. 276, apud, p. 3, tradução nossa).

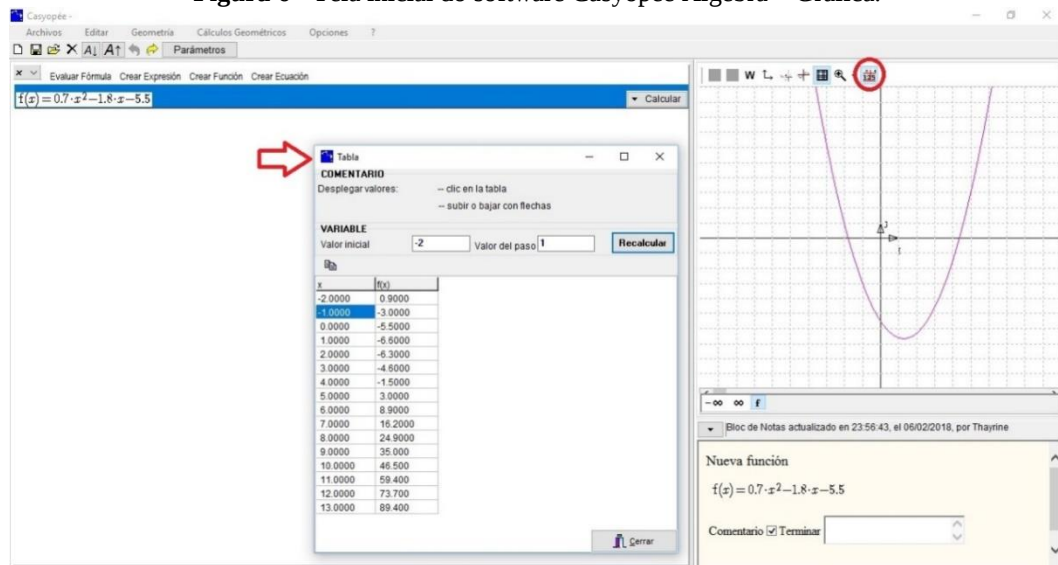
Nessa perspectiva, os escritos de Duval (1999) foram importantes para Lagrange, na compreensão e aprimoramento da representação matemática no software.

---

<sup>89</sup>Was designed to help students to make sense of existing mathematical representations with the support of the computer.

<sup>90</sup> (a) letters identify the variable, functions and parameters; (b) graphs and tabular representations of functions complement symbolic expressions; e (c) equations correspond to the search for a value of the variable for a given value of the function or they can be about the equality of two functions, or the search for a value of a parameter.

**Figura 6 - Tela inicial do software Casyopée Álgebra – Gráfica.**



**Fonte:** Os autores.

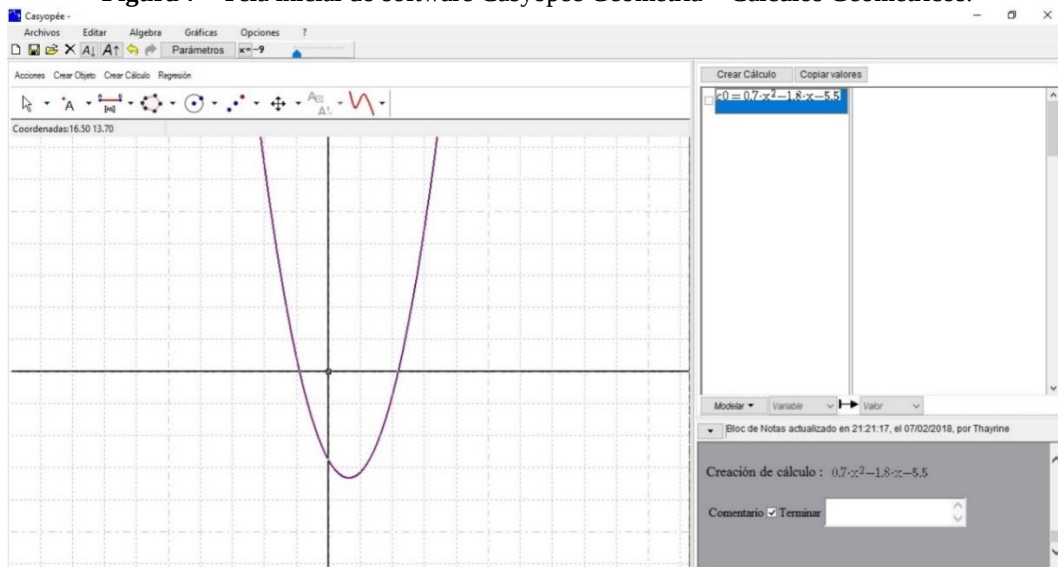
A Figura 6 representa a tela inicial do Casyopée com a função  $f(x) = 0.7x^2 + (-1.8)x + (-5.5)$  plotada.

O software está traduzido para quatro idiomas (inglês, francês, espanhol e alemão) e disponível para *download* na *web*. Na parte superior da sua tela inicial, pode ser escolhido onde será plotado cada tipo de representação. Por exemplo, na Figura 6, a representação algébrica está configurada no lado esquerdo do software, e a representação gráfica no lado direito.

Encontramos configuração diferente na Figura 7. A parte Geométrica está representada no lado esquerdo, e a entrada de cálculos geométricos é encontrada no lado direito do software.

Além disso, os comandos do software são diferentes entre as figuras 6 e 7. Para a Figura 7, quando selecionamos a geometria no lado esquerdo, são apresentados nove botões que agrupam vários comandos para o uso geométrico do software, que lembra muito o GeoGebra (Figura 7). Alguns comandos encontrados são: marcar ponto, segmento, perpendicular, bissetriz, polígonos, círculo, mostrar curvas e outras possibilidades.

**Figura 7** - Tela inicial do software Casyopée Geometria – Cálculos Geométricos.



**Fonte:** Os autores.

Por fim, para a construção de uma tabela no software, utilizando a representação “cálculos geométricos” no lado direito, a última opção apresentada em cima do gráfico na Figura 6 (círculo vermelho) indica a opção tabela. Clicando nela, abrirá a tabela (seta vermelha na Figura 6) e basta selecionar o valor inicial e a variação das coordenadas associadas a x.

O Casyopée é um software que tem como propósito a ampliação das diversas representações de funções. Nessa perspectiva, o sujeito é introduzido em sistemas de representação convencionais, aprimorados e conectados para uma rede mais ampla de significados. A seguir, apresentamos o software Function Studium.

### 3.2 Sobre o Function Studium

O Function Studium é um software de acesso via plataforma web<sup>91</sup> e idealizado no objetivo de duas pesquisas de Mestrado da UFPE:

- Integração da Engenharia de Softwares e Engenharia Didática – Engenharia Didático-Informática (EDI) – para a construção, análise e validação no processo de desenvolvimento de um micromundo (TIBÚRCIO, 2016) e;
- “Prototipação e validação de um software para a abordagem da taxa de variação de funções, orientado pelo quadro teórico-metodológico da Engenharia Didático-Informática” (SILVA, 2016, p. 17).

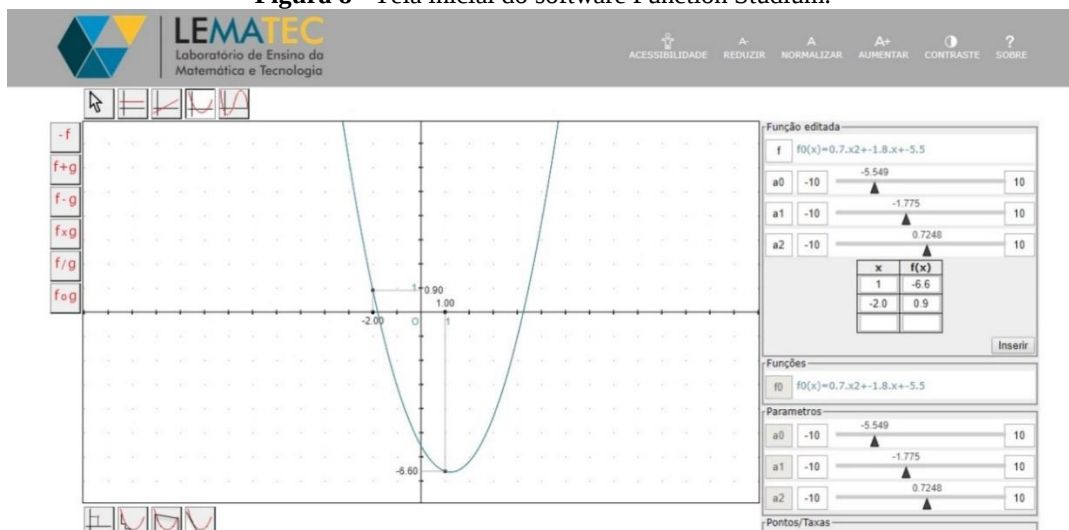
<sup>91</sup>Endereço de acesso: <http://lematecstudium.net.br/function/>

Sua produção iniciou no ano de 2014 e finalizou sua ideia inicial no ano de 2017. Durante esse período, seu desenvolvimento consiste na articulação de seis fases (Delimitação do campo, Análises preliminares, Análise de requisitos, Análise a priori e prototipação, Fase experimental e Análise a posteriori e validação).

Na primeira fase, foi delimitada, como campo de conceito matemático, a taxa de variação em uma perspectiva covariacional no contexto das funções reais. Na segunda fase, a de Análises preliminares, foi realizada uma revisão de literatura sobre a delimitação do campo. Os resultados delas baseiam-se nas quatro dimensões da Engenharia Didático-Informática (epistemológica, didática, cognitiva e informática).

A terceira fase, Análise de requisitos, trata “os resultados das análises preliminares, para definir os requisitos do sistema (SILVA, 2016, p. 25). Na quarta fase, inicia o desenvolvimento do protótipo e a análise das situações e atividades possíveis com a ferramenta. Para traçar esboços preliminares do software, os pesquisadores utilizaram ferramentas do software GeoGebra equivalentes às que pretendiam obter. Além disso, também construíram simulações da tela do software utilizando um software de apresentação de slides.

**Figura 8** - Tela inicial do software Function Studium.



**Fonte:** Os autores.

Na fase experimental, o software foi testado por duas duplas de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFPE. Os sujeitos foram submetidos a duas atividades sobre a taxa de variação das funções afim e quadrática. Por fim, a sexta fase teve como objetivo analisar a fase anterior, reconhecendo as contribuições e limitações do software Function Studium.

As funções que podem ser obtidas no software estão restringidas à função do 1º grau, 2º grau e 3º grau, e aquelas obtidas por meio da operação de adição, subtração, produto, quociente e composição, com as funções anteriormente citadas.

Na Figura 8, temos a tela inicial do software. Para exemplificar na apresentação, plotamos a função quadrática  $f(x) = 0.7x^2 + (-1.8)x + (-5.5)$ . À esquerda do campo para plotagem do gráfico, além das operações básicas que podem ser realizadas com funções, também temos a opção “Função oposta”. Já em cima do campo para a plotagem do gráfico, encontramos quatro tipos de função, a constante, a afim, quadrática e a polinomial de grau três.

Na parte inferior, temos os comandos de marcar ponto, a taxa de variação, a representação da reta secante e da tangente. Por fim, no lado direito do campo para a plotagem do gráfico, encontra-se o espaço onde registra todos os passos e procedimentos realizados no software.

Várias são as formas de definir uma função no software. Por exemplo, para o caso da tabela (Figura 8), no campo “Função editada” do lado direito, podemos encontrar a representação de uma tabela. Para definir a função a partir de seus pontos insira as coordenadas na tabela e depois basta solicitar a plotagem do gráfico. Ou pode estar usando a função ponto do software, definir os pontos no campo de plotagem do gráfico e solicitar o gráfico e a função dos pontos.

Por fim, apresentamos a função rastro do software. Nas reuniões online para o processo de criação do software, os autores relatam “Rastro: permitir uma forma alternativa de traçar o gráfico da função, com base na covariação. Ao definir a função, o gráfico é traçado simultaneamente ao “deslize” do ponto no eixo x, numa forma de rastro” (TIBÚRCIO, 2016, p. 79).

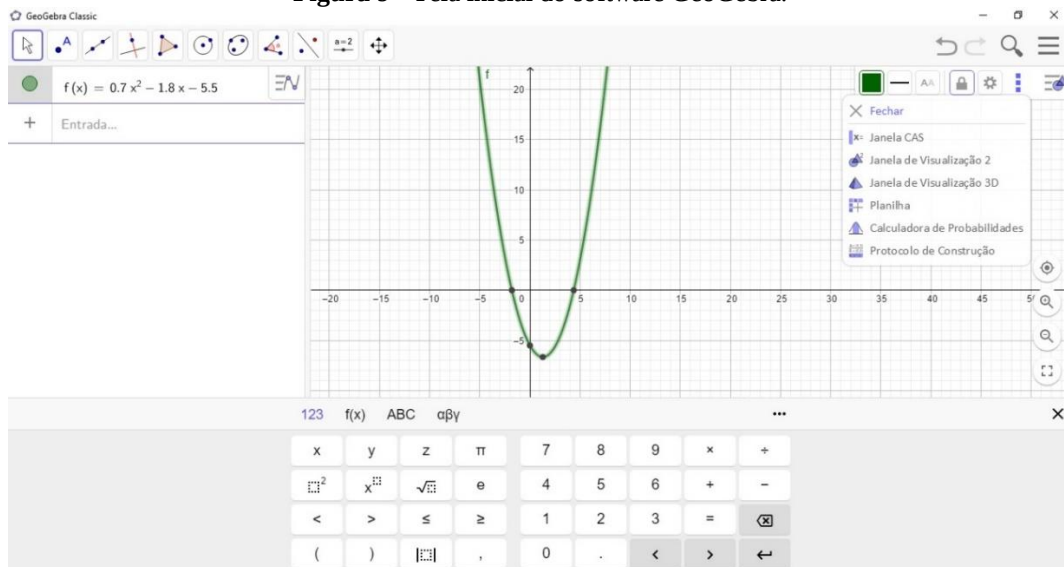
Em seus escritos, os autores pretendem dar continuidade no desenvolvimento e aprimoramento do Function Studium, desenvolvendo versões do software com a implementação de novas ferramentas e outras possibilidades. A seguir, apresentamos o software GeoGebra.

### 3.3 Sobre o GeoGebra

Assim como o Function Studium, o GeoGebra também foi fruto de um projeto de Mestrado desenvolvido na University de Salzburg no ano de 2002. Atualmente o software é encontrado em mais de 50 idiomas (HOHENWARTER, 2013).

O GeoGebra objetiva articular “a álgebra e a geometria dinâmica, com múltiplas representações conectadas dinamicamente” (SILVA, 2016, p. 72). Seu acesso pode ser via plataforma *web*<sup>92</sup>, *download* para desktop, App Store, Google Play e Windows Store.

**Figura 9** - Tela inicial do software GeoGebra.



**Fonte:** Os autores.

Porém, diferentemente dos outros softwares, o GeoGebra foi idealizado na dinâmica algébrica-geométrica. Como afirma Silva (2016):

[...] Um ponto que, na visão do **autor**, restringe esse software no aspecto funcional é justamente o fato de não ser um software com foco a priori em funções, e sim na articulação álgebra-geometria dinâmica, o que faz com que aspectos puramente funcionais não tenham maior foco no ambiente, como a definição do domínio ou de um intervalo específico, a dependência entre variáveis ou a construção do gráfico variacionalmente (p. 73).

No grifo realizado, a palavra “autor” refere-se ao autor idealizador do software. Nessa perspectiva, o software pode não apresentar comandos essenciais para o Estudo das Funções.

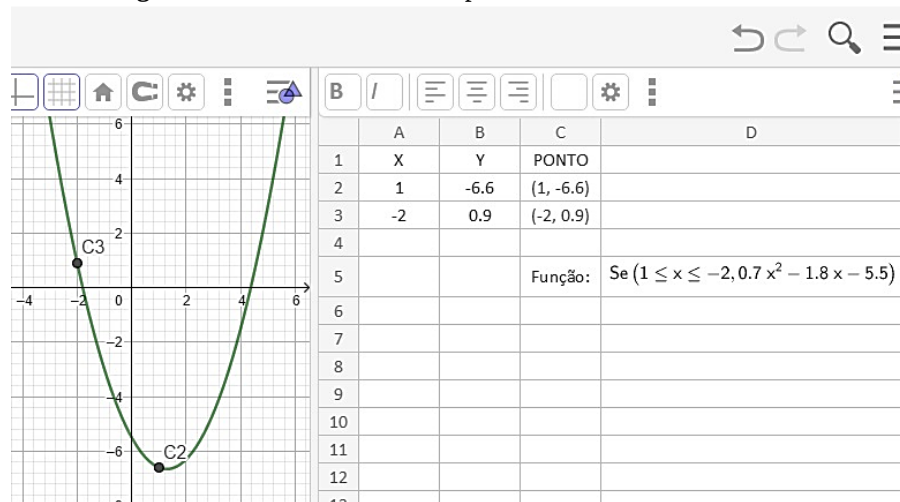
Na Figura 9, encontramos na tela inicial do software GeoGebra com a função quadrática  $f(x) = 0.7x^2 - 1.8x - 5.5$  plotada. Para essa figura, foi utilizada a versão download para desktop do software.

Sua tela inicial possui três ambientes. Na parte inferior, se encontra um teclado de números, tipos de funções, alfabeto e o alfabeto grego. No lado esquerdo, está o espaço onde registra todos os passos e procedimentos realizados no software. E no centro do software, temos a área para plotagem de gráficos.

<sup>92</sup>Endereço de acesso: <https://www.geogebra.org/classic>

Como o GeoGebra é um software direcionado para a geometria dinâmica, seus botões de função (encontrados na parte superior do software) são mais voltados para a Geometria. No total são encontrados 11 botões de comando com mais de 50 funcionalidades agrupadas entre eles. Algumas destas são: marcar ponto, ponto médio, reta, reta perpendicular, reta paralela, bissetriz, segmento, vetor, polígono, círculo, hipérbole, elipse, parábola, ângulo, área e outras possibilidades.

**Figura 10** - Comando do uso da planilha no software GeoGebra.



**Fonte:** Os autores.

No GeoGebra, o comando planilha pode estar sendo utilizado para a construção de uma tabela. No lado direito da Figura 9 pode ser encontrado o comando indicado.

A planilha inserida no software GeoGebra é semelhante à construção da planilha no *Excel*. Nessa perspectiva, compreendendo os comandos utilizados no *Excel*, podemos estar fazendo de maneira semelhante no GeoGebra. Na Figura 10, indicamos a construção de uma tabela com pontos da função  $f(x) = 0.7x^2 - 1.8x - 5.5$ .

Além da tabela, a planilha também pode ser utilizada como entrada direta para a lei de uma Função, pontos na forma (x, y) escrita em uma célula, vetor e outras funcionalidades. Mas, como já mencionado, a entrada dos comandos da tabela no GeoGebra se assemelha aos comandos da tabela no *Excel*. Por exemplo: definindo o valor relacionado a “x”, para determinar o “f(x)” na tabela representada na Figura 10, basta escrever na célula B2, o comando f(A2).

Se percebermos, na tabela apresentada, os valores para “x” estão representados por “X”, e para “y”, estão representados por “Y”. A escolha dessa representação aconteceu porque, quando inserido apenas o “x” na planilha, o software reconhece como sendo uma função e executa a plotagem do gráfico que representa. Se digitarmos “f(x)” em “y”, o software

reconhece a função já representada e apresenta a lei de formação da função. Nessa perspectiva, optamos pela escrita “X” e “Y”.

Como citado no software anterior, o GeoGebra também possui a opção de rastro de um ponto. Nessa possibilidade, para pontos móveis podemos “agarrá-lo” e movê-lo para que seu rastro seja formado.

Por fim, o GeoGebra é um software que subsiste em constante processo de versões e melhoramentos de suas funcionalidades. Esse processo também reflete na quantidade de pesquisas na Educação Matemática que apresentam dados mostrando a potencialidade do software para o ensino.

Seguindo com as discussões dos softwares a serem mapeados, apresentamos, na próxima subseção, o Modellus.

### 3.4 Sobre o Modellus

O software Modellus tem como objetivo a modelação e experimentação da Física e da Matemática. A princípio, sua idealização foi fundamentada no currículo da Física. Porém, a utilização não está limitada apenas a essa área científica.

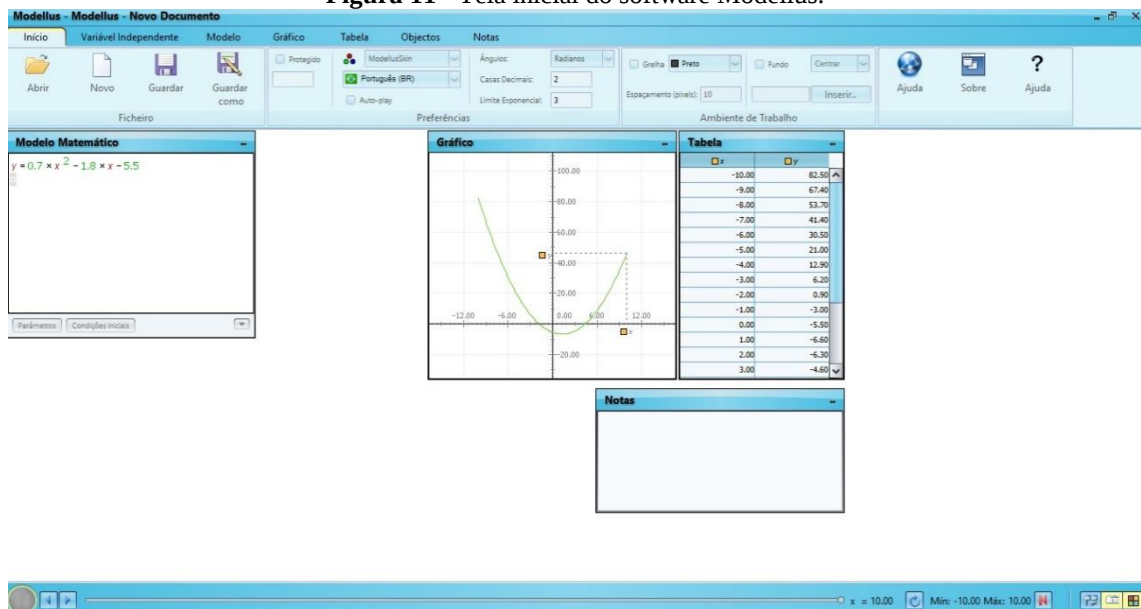
Para a formalização deste pensamento, o autor recorre à história. Para ele, a Física e Matemática deveriam ser estudadas de maneira integrada, “[...] tal como foram inicialmente desenvolvidas desde Galileu e Netwon – antes do aparecimento da elevada especialização na ciência, iniciada no princípio do século XX” (TEODORO, 2002, p. 15).

O software Modellus traz a proposta da utilização da “modelação matemática, no início da aprendizagem da Física e Matemática” (TEODORO, 2002, p. 15) de um sujeito. Teodoro (2002) ainda diz que “Os diferentes passos de construção e exploração de modelos com o Modellus podem ser feitos quer a partir de dados e registos físicos, de experiências reais, quer apenas a partir de um ponto de vista exclusivamente matemático” (p. 16).

Definindo o software, o autor completa que:

Modellus é uma ferramenta cognitiva para auxiliar a internalização de conhecimento simbólico, preferencialmente em contexto de actividades de grupo e de classe, em que a discussão, a conjectura e o teste de ideias são actividades dominantes, por oposição ao ensino directo por parte do professor (TEODORO, 2002, p. 21).

**Figura 11** - Tela inicial do software Modellus.



**Fonte:** Os autores.

O software está traduzido para 10 idiomas e seu download é disponível gratuitamente na Internet. Na Figura 11, encontramos a tela inicial do Modellus com a função quadrática  $f(x) = 0.7x^2 - 1.8x - 5.5$  plotada.

Sua tela inicial possui quatro ambientes – Modelo Matemático, Gráfico, Tabela e Notas – e sete botões de comando, com diversas funcionalidades agrupadas entre eles.

Por exemplo, diferentemente dos demais softwares, o Modellus possui um botão de comando chamado *Tabela* (Figura 12), que permite definir as variáveis que se deseja expor na tabela. Porém, distinto do Function Studium e GeoGebra, a tabela do Modellus não permite que o usuário edite seus valores.

**Figura 12** - Botão de Tabela no software Modellus.



**Fonte:** Os autores.

Para a construção da tabela de uma função no software, basta escrever a função no campo *Modelo Matemático* e, em seguida, no botão *Variável Independente*, definir qual será essa variável e seu intervalo.

Na representação gráfica da função, comumente encontramos nos softwares o comando que destaca um ponto específico no gráfico. No Modellus, diferentemente dos demais softwares, a opção de realizar determinada ação está ausente.

Podemos levantar como hipótese para essa ausência, por se tratar de um software com bases curriculares na Física.

Outro ponto a se destacar e que foi citado na apresentação dos softwares nas seções anteriores, o Modellus não permite a visualização do rastro de um ponto móvel.

Por fim e como já citado, o software objetiva trabalhar a modelação e experimentação da Física e Matemática. Nessa perspectiva, o design adotado pelo criador permite que o sujeito construa modelos o mais próximo possível do modo como se constrói esse mesmo modelo sem o uso do computador.

Na próxima seção, apresentamos a revisão de literatura.

## 4 REVISÃO DE LITERATURA

Com a criação e extensão dos Programas de Pós-Graduação, Grupos de Pesquisa, Congressos, Encontros e Simpósios, na intenção de reunir uma comunidade de pesquisadores que possuem interesses em comum, há um crescimento acelerado de publicações de produções científicas. Atualmente, apenas no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, tem-se mais de 330 mil<sup>93</sup> arquivos disponíveis.

Paralelo ao quantitativo de trabalhos que podem ser encontrados em bases de trabalhos científicos, nos deparamos com o significado de reunir produções científicas semelhantes em interesse de pesquisa, na finalidade de conhecer e compreender o atual cenário das pesquisas desenvolvidas. Neste panorama de ideias, Vosgerau e Romanowski (2014) pontuam que:

Com efeito, **esses estudos** favorecem examinar as contribuições das pesquisas, na perspectiva da definição da área, do campo e das disciplinas que os constituem, avaliação do acumulado da área, apontando as necessidades de melhoria do estatuto teórico metodológico, e mesmo as tendências de investigação (p. 3, grifo nosso).

“Esses estudos”, termo destacado na citação, refere-se às revisões, levantamento bibliográfico, estado da arte, mapeamento e meta-análise.

Na presente subseção, delinearemos nossa revisão para o tipo revisão de literatura, esta que faz parte de um grupo de revisões que mapeiam outras pesquisas (VOSGERAU; ROMANOWSKI, 2014).

A revisão de literatura, também chamada de revisão bibliográfica, enviesa com duas finalidades: “a construção de uma contextualização para o problema, e a análise das possibilidades presentes na literatura consultada para a concepção do referencial teórico da pesquisa” (VOSGERAU; ROMANOWSKI, 2014, p. 6).

Assim, a seção se divide em três subseções, se beneficiando da revisão de literatura para apresentar e/ou discutir o atual cenário de produções científicas na perspectiva em que cada uma se propõe.

Na subseção um, apresentamos trabalhos que utilizaram algum desses métodos de acúmulo de trabalhos para descrever o conceito de função com o uso de softwares. Na subseção dois, apresentamos produções científicas que se apropriaram do olhar analítico, para observar softwares em uma perspectiva educacional. Na última subseção, apresentamos trabalhos que

<sup>93</sup>[http://analisevisual.capes.gov.br/SASVisualAnalyticsViewer/VisualAnalyticsViewer\\_guest.jsp?reportName=Banco+de+Teses+e+Dissertações+-+Informações+quantitativas&reportPath=/DTI/Banco\\_de\\_teses\\_e\\_dissertacoes/Relatorios&reportViewOnly=false&appSwitcherDisabled=true](http://analisevisual.capes.gov.br/SASVisualAnalyticsViewer/VisualAnalyticsViewer_guest.jsp?reportName=Banco+de+Teses+e+Dissertações+-+Informações+quantitativas&reportPath=/DTI/Banco_de_teses_e_dissertacoes/Relatorios&reportViewOnly=false&appSwitcherDisabled=true)

utilizaram o Modelo cK $\Phi$  como norteador teórico na análise de softwares. Todas as seções têm como norte os softwares Casyopée, Function Studium, GeoGebra e Modellus.

#### 4.1 Mapeando o aprendizado de funções com o uso de softwares

Nesta subseção elencamos trabalhos que realizaram mapeamento, revisão ou outros métodos de agrupamento de produções científicas em uma mesma escrita, na intenção de entender, a partir dessas produções, como se encontra o cenário de trabalhos que fizeram uso do Casyopée, Function Studium, GeoGebra ou Modellus para o ensino de Função.

A produção científica discutida nesta subseção é fruto de um mapeamento realizado por Amaral, Frango e Curi (2013), na intenção de verificar o “ensino e aprendizado de funções no ensino médio brasileiro com o uso do software GeoGebra” (p. 1). Também foram encontradas mais duas produções científicas (AMARAL; FRANGO, 2013, 2014), porém todas versam sobre o mesmo estudo.

Fundamentados em outros autores e nos Parâmetros Curriculares, Amaral, Frango e Curi (2013), evidenciam a importância do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) no ensino de Ciências e Matemática. Tecnologias como instrumento de mediação da aprendizagem, melhores representações gráficas a partir do uso da tecnologia e o computador como sendo uma ferramenta com potencial para a verificação de ideias ou hipóteses, são alguns dos pensamentos que os autores elencam em concordância na sua escrita.

Para a seleção dos trabalhos, os autores utilizaram as palavras-chave “ensino de funções”, “ensino médio brasileiro” e “GeoGebra”, que foram buscadas no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, Periódicos CAPES, Biblioteca Digital de Teses e Dissertações e o site Domínio Público.

**Figura 13** - Quantitativo de publicações científicas por site.

| Site                                            | ANO  | Quantidade de Trabalhos | Total                             |
|-------------------------------------------------|------|-------------------------|-----------------------------------|
| http://www.periodicos.capes.gov.br              | 2010 | 1                       | <del>3</del><br>descartados       |
|                                                 | 2011 | 1                       |                                   |
|                                                 | 2012 | 1                       |                                   |
|                                                 | 2008 | 1                       |                                   |
| http://www.capes.gov.br/servicos/banco-de-teses | 2009 | 4                       | <del>17</del>                     |
|                                                 | 2010 | 6                       |                                   |
|                                                 | 2011 | 5                       |                                   |
|                                                 | 2012 | 1                       |                                   |
| http://www.dominiopublico.gov.br                | 2009 | 1                       | <del>2</del><br>repetidos         |
|                                                 | 2010 | 1                       |                                   |
|                                                 | 2008 | 1                       |                                   |
|                                                 | 2009 | 4                       |                                   |
| http://bdtd.ibict.br                            | 2010 | 4                       | <del>13</del><br>10 são repetidos |
|                                                 | 2011 | 2                       |                                   |
|                                                 | 2012 | 2                       |                                   |
|                                                 |      |                         |                                   |
| Totais                                          |      | 35                      | <del>35</del> <b>20</b>           |

**Fonte:** Amaral, Frango e Curi (2013, p. 3) – adaptações nossas nas cores azul e vermelha.

Como mostra na Figura 13, no total foram encontradas 35 produções científicas nas quatro bases mencionadas. Porém, quando realizada a “leitura flutuante” e cruzados os trabalhos encontrados, alguns foram descartados por não estarem escritos no Português do Brasil (escolha dos autores), ou por serem trabalhos repetidos. Por fim, os autores ficaram com 20 produções científicas como espaço amostral para sua análise.

Todas as produções mapeadas eram do tipo **dissertação**. Após seleção, os autores iniciaram a leitura do resumo de cada trabalho, na finalidade de classificar os trabalhos a partir do “objetivo, foco temático das defesas e contribuição para a área” (p. 4). Em sua classificação, as produções que atendem os três quesitos fariam parte do conjunto A1, quando atendem parcialmente, são categorizados no conjunto A2, e quando não atendem os pontos mencionados, fazem parte do conjunto A3.

Além dessa classificação realizada em uma planilha no software Excel, os autores também quantificaram a “data, tipo do programa, instituição, título, autores, orientadores, área do conhecimento, objetivos, procedimentos metodológicos, referenciais teóricos, resultados e contribuições” (p. 4).

Sobre o ano de publicação das dissertações, Amaral, Frango e Curi (2013) ressaltam que as maiores concentrações foram encontradas nos anos de 2009, 2010 e 2011, não sendo encontrada nenhuma produção científica anterior a 2008.

Como possível indicador desse dado, os autores ressaltam a posição social desfavorecida que uma massa da sociedade brasileira.

Isso pode ser explicado pelo motivo de que só recentemente a população mais carente e escolas de ensino médio no Brasil, puderam ter um acesso maior a computadores com a publicação da Medida Provisória nº 252, de 15 de junho 2005, chamada de “Computador para todos” (p. 4).

Enveredando para a área do conhecimento, os autores encontraram o esperado. As áreas de conhecimento são: “Matemática”, “Ensino de Ciência e Matemática”, “Geometria, Topologia e Matemática” e “Educação”.

Com relação a “onde essa dissertação foi produzida?”, os autores ressaltam que apenas uma produção foi desenvolvida em uma universidade da Região Nordeste. As demais foram desenvolvidas em universidades situadas nas regiões Sul e Sudeste.

Sobre essa informação, Amaral, Frango e Curi (2013) dizem que

Esse dado é preocupante, principalmente considerando a necessidade da democratização, do **ensino através do acesso aos recursos digitais** e do uso de softwares educacionais. Isso pode refletir na qualidade do ensino e aprendizado de funções matemáticas, e também, no ensino de Ciências e Matemática, no Brasil, de forma igualitária, pois, os resultados de investigações no âmbito da pós-graduação podem contribuir significativamente para essa área de ensino, em especial, nos contextos em que elas são desenvolvidas (p. 4, grifo nosso).

O trecho destacado mostra a preocupação dos autores com relação à igualdade nas escolas. Artigos, planos de aulas, dissertações, teses e outros tipos de trabalhos, estão disponíveis na rede para que o professor possa ter acesso a qualquer momento.

Se a intenção do professor for reproduzir em sala de aula a escrita de um trabalho acadêmico, e a escola não oferecer o mínimo de acesso aos recursos digitais necessários, a intenção do professor poderá ser fragilizada. Por isso, a importância destacada pelos autores à democratização da tecnologia.

Por fim, os autores refletem sobre a importância do uso de softwares na Educação, e atenção ao papel do docente como mediador na relação entre aluno, computador e conhecimento. Além disso, Amaral, Frango e Curi (2013) também ressaltam a importância da publicação de produções científicas para elevar “a qualidade do Ensino de Matemática, principalmente de funções” (p. 7), nas regiões onde viu-se uma escassez de trabalhos.

Do mapeamento analisado concluíram que o quantitativo de publicações com o olhar para o Ensino de Funções utilizando o GeoGebra, está crescendo. Com relação à forma como o software está sendo utilizado nas publicações mapeadas, o GeoGebra é trazido como um mediador entre o aluno e a Matemática, para atender o que é proposto em uma sequência didática. E mais, a forma como Função é abordada no artigo, deixa espaço para o leitor que não

fez uma leitura atenta dele, pensar que a escrita não aborda Função Matemática, por se tratar de um artigo com abordagem muito ampla na Matemática.

A seguir continuamos nossas discussões adentrando na subseção dois, apresentando produções científicas que realizaram um estudo analítico dos softwares, em uma perspectiva educacional.

#### 4.2 Analisando softwares a luz de teorias

Nesta subseção, elencamos produções científicas que analisaram os softwares *Casyopée*, *Function Studium*, *GeoGebra* ou *Modellus*, à luz da teoria proposta no próprio artigo.

O trabalho de Barros e Stivam (2012), se fundamenta em duas pesquisas em nível de Mestrado. O artigo objetiva analisar o software GeoGebra, “sob uma perspectiva construcionista” (p. 185), na problemática se o software pode e como, permitir a construção de um micromundo, contribuindo para a aprendizagem da Matemática.

Para isso, os autores realizam uma “análise teórica do software GeoGebra” (p. 185), ressaltando o aluno como um formulador e validador de suas próprias conjecturas. Para analisar o software, os autores se baseiam em micromundos que propiciam a manipulação da geometria dinamicamente.

A partir do construcionismo proposto por Papert (1994), o artigo discute a importância da construção do conhecimento pelo sujeito, inserido em um ambiente que propicie a interação dele com o computador.

Antes de apresentarmos a visão construcionista discutida por Barros e Stivam (2012) no artigo, entendamos como as autoras discutem o micromundo.

Apoiando-se no matemático Seymour Papert, as autoras argumentam que em 1972, Papert apresenta pela primeira vez um micromundo, a partir da interação da criança com a linguagem Logo.

Assim, Barros e Stivam (2012, p. 188) tomam como noção que “[...] o termo micromundo consiste na ideia de mundos autocontidos, em que os alunos podem transferir seus hábitos de exploração da vida pessoal para o ambiente que propicia a construção do conhecimento científico”.

Na perspectiva de micromundo, o aluno pode estar sendo inserido em um ambiente de transferências, onde suas “habilidades já existentes na sua vida pessoal sejam exploradas e transferidas para o domínio mais científico” (p. 189). As autoras também ressaltam que no

micromundo, a linguagem de programação permitirá “a criação de objetos que poderão ser modificados pelo aluno” (p. 189). Isto é, inseridos em um ambiente que propicie “a investigação e a reflexão” (p. 188). No artigo, esse ambiente é proposto como sendo o software GeoGebra, onde as autoras sugerem uma aprendizagem construcionista inserida neste micromundo.

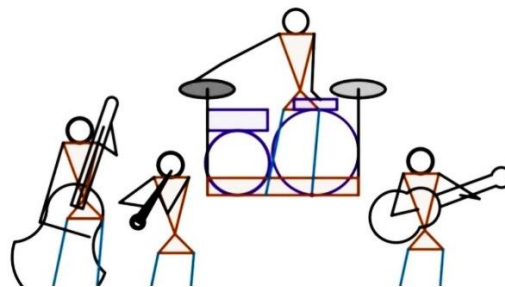
Como já mencionado anteriormente, o construcionismo proposto por Papert (1994) considera “o papel da construção do conhecimento como uma etapa muito importante que ocorre com o uso do computador” (BARROS; STIVAM, 2012, p. 185 – 186). Ou seja, o sujeito é o principal construtor de seu conhecimento em um ambiente onde haja interação entre ele e o computador. Com relação ao papel do professor, as autoras ressaltam que:

As ações do professor nesse processo de descoberta devem ser cautelosas, para que o seu auxílio no direcionamento do aluno não o impeça de descobrir estratégias e formular hipóteses, enquanto faz comparações e relações dos fatos, dos objetos e das ideias (BARROS; STIVAM, 2012, p. 186).

É essencial a presença do professor neste cenário, como mediador entre o conhecimento e as ações realizadas pelo aluno imerso no micromundo.

Na intenção de analisar e caracterizar o software GeoGebra como sendo um micromundo, Barros e Stivam (2012) propõem a discussão de duas atividades com o software, que proporciona a manipulação da geometria dinamicamente.

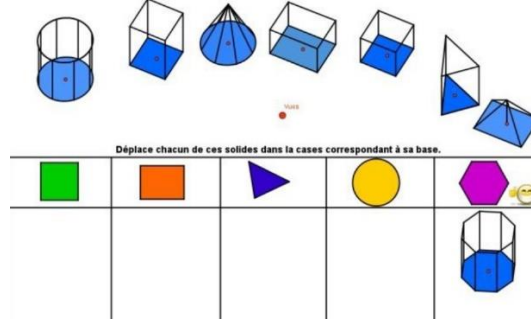
**Figura 14** - Banda de Jazz.



**Fonte:** Barros e Stivam (2012, p. 190).

O primeiro micromundo (Figura 14) proposto pelas autoras, “possui cor, movimento e som” (p. 190). A construção de um micromundo como a Banda de Jazz, envolve conceitos e elementos matemáticos para obter o resultado final. Nele, o aluno estará utilizando a Matemática para alcançar o objetivo proposto, nesse caso, a construção de uma banda.

**Figura 15** - Relação entre figuras planas e espaciais.



**Fonte:** Barros e Stivam (2012, p. 191).

O segundo micromundo discutido pelas autoras (Figura 15) relaciona figuras planas e espaciais. Com a identificação de “deslocar cada um dos conjuntos sólidos nos casos correspondentes à base”<sup>94</sup> (BARROS; STIVAM, p. 191, tradução nossa), esse micromundo propõe reconhecer as figuras planas presentes nas bases das figuras espaciais, e arrastá-las para suas respectivas posições.

Assim como a Banda de Jazz, este micromundo também permite que o estudante se envolva tanto na sua construção, como também na sua manipulação.

Com as discussões destes micromundos, e outros entendimentos acerca do software que puderam ser observados e conjecturados, as autoras afirmam que:

Em uma perspectiva construcionista, podemos concluir que o software GeoGebra pode ser usado na composição de ambientes caracterizados micromundos. Dessa forma, a exploração do software, nesses ambientes, contribui com o processo de construção do conhecimento (p. 193).

A seguir, iniciamos a última subseção, apresentando produções científicas que utilizaram um dos softwares citados e o Modelo cK $\Phi$  proposto por Balacheff (1995).

#### 4.3 Utilizando softwares na perspectiva do Modelo cK $\Phi$

Nesta subseção, apresentamos produções científicas que utilizaram os softwares Casyopée, Function Studium, GeoGebra ou Modellus, a luz do Modelo cK $\Phi$  de Balacheff (1995), em problemas matemáticos propostos para um determinado grupo de sujeitos.

Diferentemente do que foi apresentado anteriormente, nesta subseção apresentamos duas produções científicas.

<sup>94</sup> Déplace chacun de ces solides dans la case correspondant à sa base.

O artigo de Velandia e Leal (2015b) apresenta como objetivo “identificar algumas estratégias que emergem da resolução de problemas de variação e mudança, com estudantes que participam do curso de pré-cálculo da UIS”<sup>95</sup> (p. 2, tradução nossa).

No ano de 2013, a Universidad Industrial de Santander (UIS) começou a oferecer o curso de pré-cálculo para alunos que ingressam na universidade para os diversos cursos de Engenharia disponíveis na Instituição. A motivação para essa postura por parte da Universidade, tem a ver com o relato que “[...] o curso de Cálculo I (Cálculo Diferencial) está localizado no primeiro e segundo lugar em termos de falha, cancelamento e repetição nos estudantes que recém ingressam na UIS”<sup>96</sup> (BOTELLO, 2013 apud VELANDIA; LEAL, 2015b, p. 2, tradução nossa).

Pensando em diminuir o quantitativo de falhas, cancelamentos e repetições nos cursos, a Universidade disponibiliza a disciplina de pré-cálculo para ser cursada antes de os alunos ingressarem na disciplina de Cálculo I.

A disciplina de pré-cálculo tem por objetivo, “[...] favorecer o desenvolvimento do pensamento variacional nos estudantes através da resolução de problemas de variação e mudança com o uso da tecnologia (GeoGebra)”<sup>97</sup> (p. 2, tradução nossa). A disciplina conta com 15 oficinas que vão desde o estudo dos números reais, até derivada.

Motivados a identificar as estratégias utilizadas pelos alunos na disciplina de pré-cálculo, Velandia e Leal (2015b), contam com 30 estudantes como sujeitos de pesquisa. Para desenvolver a pesquisa, os autores incorporam como norteador e metodologia de pesquisa: a resolução de problemas, pensamento variacional, identificação de estratégias, Modelo cK $\phi$  e triangulação dos dados. No discorrer de seu estudo, os autores pontuam a importância de suas escolhas para o desenvolvimento da pesquisa e escrita.

Sobre o pensamento variacional, os autores adotam como caracterização, que o pensamento

pode ser descrito como uma maneira de pensar dinamicamente, tentando produzir mentalmente sistemas que relacionam suas variáveis internas de tal maneira que covariam de forma semelhante aos padrões de covariação de quantidades das mesmas

---

<sup>95</sup> Identificar algunas estrategias que emergen en la resolución de problemas de variación y cambio, en los estudiantes que realizan el curso de precálculo de la UIS.

<sup>96</sup> Se reporta que el curso Cálculo I (Cálculo Diferencial) se ubica en el primer y segundo lugar en cuanto a reprobación, cancelación y repitencia en los estudiantes que recién ingresan a la universidad.

<sup>97</sup> Favorecer el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes a través de la resolución de problemas de variación y cambio con el uso de la tecnología (GeoGebra).

ou diferentes magnitudes nos subprocessos cortados da realidade<sup>98</sup> (BASCO, 2010 apud VELANDIA; LEAL, 2015b, p. 3, tradução nossa).

Com relação a resolução de problemas, os autores evidenciam que essa abordagem deveria “[...] ser vivida como um processo de ensino-aprendizagem e não como método de avaliação ou resultado”<sup>99</sup> (p. 3, tradução nossa), pois possibilita o aluno realizar suas próprias conjecturas e descobrir ou reinventar a Matemática.

Inseridos na perspectiva da resolução de problemas, os autores sugerem o resolver problema, como sendo a articulação de estratégias utilizadas pelo aluno, quando confrontado com a problemática. Caracterizando uma estratégia, os autores a concebem como sendo:

Um processo de tomada de decisão, consciente e intencional, que consiste em selecionar conhecimento conceitual, processual e atitudinal, necessário para atingir um certo objetivo, sempre em função das condições da situação em que a ação ocorre<sup>100</sup> (MONEREO, 2001 apud VELANDIA; LEAL, 2015b, p. 4, tradução nossa).

Incorporados no cenário da resolução de problemas e articulação de estratégias por parte dos alunos, Velandia e Leal (2015b), propõem identificar tais estratégias, a partir da caracterização proposta por Balacheff para o termo concepção. Para o artigo, os autores adotam que:

[...] a caracterização da concepção para este trabalho corresponde ao trio (R, L,  $\Sigma$ ) a que o interesse é contribuir para o conhecimento de estratégias e concepções que os alunos usam ao resolver problemas típicos do curso de pré-cálculo da UIS. Queremos enfatizar, para finalizar, que a concepção é o componente que está subjacente à estratégia<sup>101</sup> (VELANDIA; LEAL, 2015b, p. 5, tradução nossa).

Para identificar as estratégias dos alunos, das 15 oficinas dispostas na disciplina, os autores selecionaram duas para a análise: *Análisis de Información* e *La Derivada como Razón de Cambio*, por ser uma das primeiras e uma das últimas, respectivamente, oficinas realizadas nas aulas da disciplina.

Na coleta de dados, Velandia e Leal (2015b) utilizaram filmadora, nota de campo e recolha de material com as ações realizadas pelos alunos. Com os dados sistematizados, os

<sup>98</sup> Puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocessos recortados de la realidad.

<sup>99</sup> [...] se debe vivir como un proceso de enseñanza-aprendizaje y no como método de evaluación o un resultado.

<sup>100</sup> Un proceso de toma de decisiones, consciente e intencional, que consiste en seleccionar los conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales, necesarios para alcanzar un determinado objetivo, siempre en función de las condiciones de la situación en que se produce la acción.

<sup>101</sup> [...] la caracterización de la concepción para este trabajo corresponde a la tripleta (R, L,  $\Sigma$ ) ya que el interés está en aportar al conocimiento de estrategias y concepciones que emplean los estudiantes al resolver problemas propios de curso de pre-cálculo de la UIS. Queremos enfatizar, para finalizar, en que la concepción es el componente que subyace a la estrategia.

autores realizaram a triangulação entre “[...] os dados coletados, o quadro conceitual e a interpretação do pesquisador para deixar à luz as concepções utilizadas pelos alunos nas estratégias empregadas na resolução dos problemas”<sup>102</sup> (p. 6, tradução nossa).

**Figura 16** - Situação problema proposta na oficina.

La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina en litros, de un vehículo Toyota Corolla que recorre la ciudad de Bogotá en las horas pico.

**Tabla 1: Rendimiento Toyota Corolla**

|                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Recorrido (Km) | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   |
| Consumo (Lt)   | 0.14 | 0.21 | 0.31 | 0.46 | 0.55 | 0.64 | 0.78 | 0.83 | 0.99 | 1.10 | 1.20 | 1.33 | 1.43 | 1.52 | 1.67 |

**Contesta las siguientes preguntas en tu hoja de trabajo. Justifica tu respuesta.**

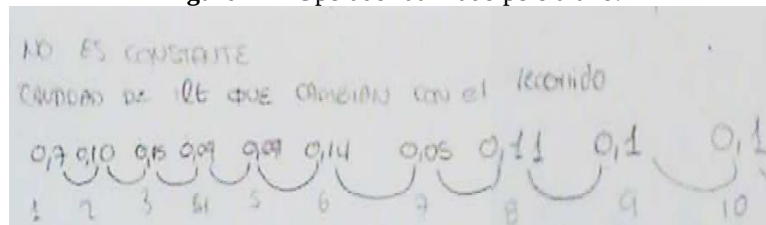
1. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico?
2. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 20 km en hora pico?
3. Realice un gráfico con la información suministrada en la tabla 1.
4. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer  $x$  km en hora pico?

**Fonte:** Velandia e Leal (2015b, p. 6).

Mesmo os autores deixando claro que duas oficinas seriam analisadas no artigo, na subseção que discute os resultados, é abordada apenas a oficina *Análisis de Información* (Figura 16) sendo desenvolvida em duas estratégias, sem o uso do GeoGebra e com o uso do software. A seguir, apresentamos os principais resultados trazidos pelos autores.

Sem o uso do GeoGebra, inicialmente a estratégia utilizada pelo aluno foi determinar o padrão no consumo de gasolina nos Km informados na tabela. Descobrimos este padrão, o aluno definiria o consumo de gasolina para 17 km e 20 km.

**Figura 17** - Operador utilizado pelo aluno.



**Fonte:** Velandia e Leal (2015b, p. 6).

Na Figura 17, o aluno realiza a operação de subtração entre os dados informados na tabela referentes ao consumo de gasolina para definir seu padrão. Porém, o aluno nota que:

[5] Eu só queria saber se o consumo era o mesmo e adicionar isso para 17 e 20 [apontando para os últimos dados da tabela de dados], mas percebo que ele não

<sup>102</sup> [...] los datos recolectados, el marco conceptual y la interpretación del investigador para dejar a la luz las concepciones utilizadas por los estudiantes en las estrategias empleadas en la resolución de los problemas.

consume de modo constante, se não for contínuo, como posso saber o quanto ele aumentaria? [Está dizendo que  $\Delta y$  não é constante se não variável]<sup>103</sup> (VELANDIA; LEAL, 2015b, p. 7, tradução nossa).

Em sua fala, o aluno diz que “[...] não sei o que faço para 17 e 20”<sup>104</sup> (p. 7, tradução nossa), pois sua estratégia adotada não atendeu à expectativa do que o aluno pretendia descobrir como resultado.

**Figura 18** - Concepção envolvida na estratégia do aluno sem o uso do Geogebra.

| OPERADORES                                                                                                                                                               | SISTEMA DE REPRESENTACIÓN                    | ESTRUCTURA DE CONTROL                                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| $R_1$ : Hallar la diferencia del consumo, $\Delta y$ (Ilustración 3) [3], [5], [7]<br>$R_2$ : Sí $\Delta x = k \Rightarrow \Delta y = k_1$ , con $k, k_1$ constantes [5] | $L_1$ : Esquema-Numérico [7] (Ilustración 3) | $\Sigma_1$ : Numérico: $\Delta y$ no es constantes [7] |
| <b>Concepción:</b> Proporcionalidad directa                                                                                                                              |                                              |                                                        |

**Fonte:** Velandia e Leal (2015b, p. 7).

Analisando a situação à luz do Modelo cK $\Phi$ , os autores descrevem (Figura 18) a tripla envolvida na estratégia do aluno. Na tabela, Velandia e Leal (2015b) associam os operadores, sistema de representação e estrutura de controle, as falas do aluno. Para que a tabela fique melhor compreendida, as falas [3], [5] e [7]<sup>105</sup> deixamos como nota de rodapé.

A luz do Modelo cK $\Phi$ , os autores descrevem que:

O aluno percebe que a diferença entre os quilômetros percorridos é constante ( $\Delta x = 1$ ), e espera que a diferença entre o consumo de combustível ( $\Delta y$ ) também seja ( $R_2$ ), por isso encontra vários  $\Delta y$  ( $R_1$ ) para assim, verificar sua conjectura ( $\Sigma_1$ ). O aluno faz uso da sua razão covariacional ao analisar a variação através das diferenças. O sistema de representação é um esquema numérico que destaca o consumo de combustível de um quilômetro para outro ( $L_1$ ). Este esquema ajuda você a exercer controle sobre sua concepção e como obter os resultados esperados, abandona a estratégia<sup>106</sup> (VELANDIA; LEAL, 2015b, p. 7 – 8, tradução nossa).

<sup>103</sup> [5] Es que quería saber si el consumo era igual y sumarle eso hasta llegar a 17 y 20 [señalando el último dato de la tabla de datos], pero noto que consume no en modo constante, si no discontinuo y así cómo puedo saber cuánto aumentaría [Está diciendo que  $\Delta y$  no es constante si no variable].

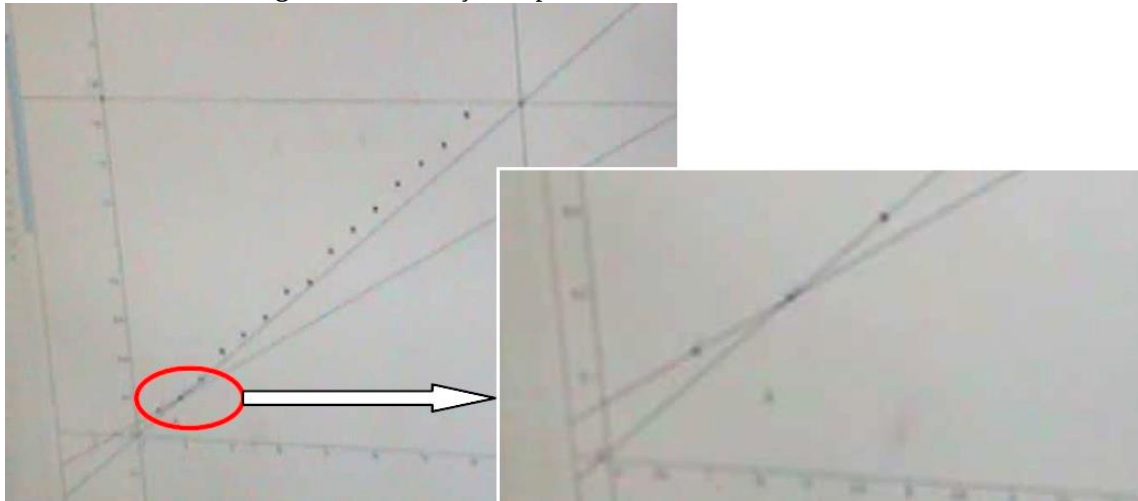
<sup>104</sup> [...]no sé qué hacer para 17 y 20.

<sup>105</sup> [3] Es la diferencia que hay entre los litros, respectivo a los kilómetros, por ejemplo de 1 a 2 km, cuantos litros de gasolina ha consumido el vehículo; [5] descrita na última citação da página anterior desta escrita; e [7] Pues, para el primer km gastó 0.14 litros de gasolina, después de haber hecho 2 km el gasto es de 0.21 pero ya al tercer km gasta 0.31 o sea ya gasta 10 litros más respecto al principio y por ejemplo cuando recorre 10 km gasta 0,1 litros respecto a los primeros km, pero si usted mira siempre recorre 1 km, pero como le decía no consume siempre en modo continuo así que no sé qué hacer para 17 y 20.

<sup>106</sup> El estudiante percibe que la diferencia entre los kilómetros recorridos es constante ( $\Delta x = 1$ ), y espera que la diferencia entre el consumo de combustible ( $\Delta y$ ) también lo sea ( $R_2$ ), por esto halla varios  $\Delta y$  ( $R_1$ ) para así poder verificar su conjetura ( $\Sigma_1$ ). El estudiante hace uso de su razonamiento covariacional al analizar la variación a través de las diferencias. El sistema de representación es un esquema numérico en el que resalta el consumo de combustible de un kilómetro a otro ( $L_1$ ). Este esquema le sirve para ejercer el control a su concepción y como no obtiene los resultados esperados abandona la estrategia.

Porém, as estratégias utilizadas pelo aluno mudam quando passa a manipular o GeoGebra na resolução do problema.

**Figura 19** - Resolução do problema utilizando o GeoGebra.



**Fonte:** Velandia e Leal (2015b, p. 7).

Inicialmente (Figura 19), o aluno marca o ponto do quilômetro um, dois e traça uma reta passando pelos dois pontos. Em seguida, o aluno marca os pontos do quilômetro dois, três e passa uma segunda reta que contém tais pontos. Quando marcados os demais pontos disponíveis na tabela do problema, o aluno percebe que a segunda reta se aproxima mais desses pontos. Com isso, o aluno constrói o gráfico que representa o problema e define o consumo de combustível para 17 km e 20 km.

**Figura 20** - Concepção envolvida na estratégia do aluno com o uso do Geogebra.

| OPERADORES                                                                                                                                          | SISTEMA DE REPRESENTACIÓN | ESTRUCTURA DE CONTROL                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|-----------------------------------------------------|
| $R_1$ : Recta que pasa por el segundo y el tercer punto [2].<br>$R_2$ : Punto de intersección entre la recta inicial $R_1$ y la recta $x = 17$ [10] | $L_1$ : Geométrico        | $\Sigma_1$ : Analítico: intersección de dos rectas. |
| <b>Concepción:</b> Intersección entre las rectas $R_1$ y $x = 17$                                                                                   |                           |                                                     |

**Fonte:** Velandia e Leal (2015b, p. 7).

Analisando a estratégia do aluno à luz do Modelo cK€, Velandia e Leal (2015b) constroem a tabela representada na Figura 20. Para melhor compreensão, elencamos como nota de rodapé as falas [2] e [10]<sup>107</sup> do aluno.

Sobre a estratégia do aluno, os autores pontuam que

<sup>107</sup>[2] Pues yo estoy haciendo una recta que pase por lo puntos 2 y 3, que es la como hizo la compañera antes, porque si hago la que pasa por 1 y 2 tocaría empezar con 1 y mire lo que pasa, [la estudiante está observando el monitor y ve que la recta que ella escogió pasa más cerca a los demás puntos, lo que no sucede si escoge la otra recta (que pasa por el primer y el segundo punto) ya que esta se aleja de los demás puntos]; e [10] Trazo una recta vertical por acá y miro cuando se encuentre con esta. [El estudiante hace una recta que pasé por 17 pero la ubica a ojo y busca donde se corta con la recta que había hecho antes] O sea busco el punto de intersección y miro cuál es la coordenada en y.

O sistema de representação que mobiliza a estratégia é geométrico porque no procedimento se utiliza o GeoGebra ( $L_1$ ) e, como você pode perceber, isso é suficiente para que o estudante se convença do que faz, uma vez que consegue dar uma solução ao problema de prever o consumo de combustível, encontrando a interseção entre a linha construída (que passa por dois pontos) e a linha que passa por  $x = 17$  ( $\Sigma_1$ )<sup>108</sup> (VELANDIA; LEAL, 2015b, p. 9, tradução nossa).

Como citado anteriormente, os autores não discutem as estratégias dos alunos para a oficina *La Derivada como Razón de Cambio*. O único resultado trazido pelos autores para essa oficina, é que os mesmos diagnosticaram 12 estratégias utilizadas pelos sujeitos. Para a primeira oficina, os autores pontuam 13 estratégias.

A partir da análise, os autores compreendem que as estratégias utilizadas pelos alunos, fortemente são influenciadas pelas concepções existentes no sujeito. Também foi verificada a importância da estrutura de controle ( $\Sigma$ ) na “[...] validade, coerência e eficácia da concepção utilizada”<sup>109</sup> (p. 9, tradução nossa).

A segunda produção científica que apresentamos nesta subseção é dos mesmos autores do artigo anteriormente apresentado, Velandia e Leal (2015a). Neste trabalho, os autores continuam suas discussões sobre as concepções emergidas a partir da investigação de estratégias na resolução de problemas de uma turma de alunos da disciplina de pré-cálculo da UIS.

**Figura 21** - Situação problema envolvendo o lançamento de um projétil.

|                                                                                                                                                                                                           |      |      |       |       |       |       |       |      |      |      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
| En un laboratorio de física, se realizó un experimento que consistió en lanzar un proyectil verticalmente hacia arriba. En la siguiente tabla se muestran las alturas registradas en diferentes momentos. |      |      |       |       |       |       |       |      |      |      |
| Lanzamiento de un proyectil                                                                                                                                                                               |      |      |       |       |       |       |       |      |      |      |
| Tiempos (S)                                                                                                                                                                                               | 1    | 2    | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   |
| Altura (Cm)                                                                                                                                                                                               | 48.3 | 79.5 | 107.4 | 120.8 | 127.7 | 124.9 | 113.5 | 84.5 | 55.5 | 10.7 |

**Fonte:** Velandia e Leal (2015a, p. 333).

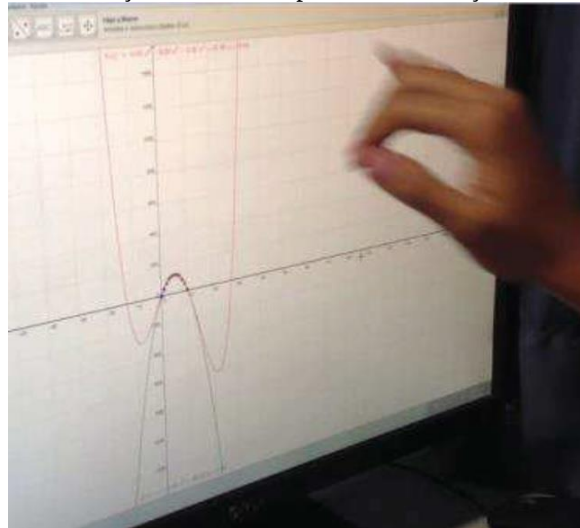
Neste artigo, os autores também mencionam que serão analisadas duas oficinas da disciplina, porém, nos resultados, os autores apenas discutem uma das situações problema (Figura 21) desenvolvida na oficina *Análisis de Información*. Outro ponto a ser destacado antes de apresentarmos a produção científica, é que os autores não deixam claro qual a intenção do problema citado na Figura 21. No artigo, eles mostram a situação (Figura 21), transcrevem o diálogo entre o estudante e investigador, mostram como o aluno construiu a representação

<sup>108</sup> El sistema de representación que moviliza la estrategia es geométrico ya que en el procedimiento se utiliza GeoGebra ( $L_1$ ) y, como se puede percibir, esto es suficiente para que el estudiante se convenza de lo que hace, ya que logra darle solución al problema de predecir el consumo del combustible, hallando la intercepción entre la recta construida (la hace pasar por dos puntos) y la recta que pasa por  $x = 17$  ( $\Sigma_1$ ).

<sup>109</sup> [...]validez, coherencia y eficacia de la concepción utilizada.

geométrica do problema no Geogebra (Figura 22) e discutem as estratégias do aluno na perspectiva do Modelo cK $\Phi$ . Nesse sentido, apresentamos os resultados de acordo com as discussões dos autores.

**Figura 22** - Resolução do aluno ao problema do lançamento do projétil.



Fonte: Velandia e Leal (2015a, p. 334).

Para a resolução do problema (Figura 21), o aluno construiu duas curvas que passam (acreditamos) nos pontos indicados na situação. A parábola está na cor verde e o gráfico que representa o polinômio de grau 4 na cor vermelha. Não se informa no artigo como surgiu tal construção.

Após construção, o investigador conversa com o estudante para entender qual das curvas, o sujeito acredita ser a representação gráfica que melhor define a situação proposta. Como resposta, o aluno afirma a parábola.

**Figura 23** - Concepção da estratégia do aluno.

| OPERADORES                                                                                                                       | SISTEMA DE REPRESENTACIÓN | ESTRUCTURA DE CONTROL                                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $R_1$ : Modelo Polinomial de grado 2. [2], [4], [6]<br>$R_2$ : Modelo Polinomial de grado 4 [6]<br>$R_3$ : Raíces del polinomio. | $L_1$ : Grafico           | $\Sigma_1$ : Análisis de las gráficas[6], [8]<br>$\Sigma_2$ : El modelo de la gráfica debe ser acorde a la situación [6] |
| Concepción: Gráfica que se ajuste al contexto del problema                                                                       |                           |                                                                                                                          |

Fonte: Velandia e Leal (2015a, p. 334).

Como adicionado anteriormente, para melhor compreensão da Figura 23, acrescentamos como nota de rodapé as falas [2], [4], [6] e [8]<sup>110</sup> do aluno.

<sup>110</sup>[2] La que está en verde; [4] Es polinómica de segundo grado; [6] Porque... digamos acá, esta es la roja y es la de grado 4, esta es verde y es la de grado 2 [señalando con los dedos las gráficas en la pantalla]. Entonces como se puede ver, la de grado 2 toca dos veces el eje x y según el ejercicio el proyectil se dispara, y es decir, va a estar en el punto (0,0) y va a llegar a un punto en el que va a tocar el eje x cuando termina su impulso y entonces va a hacer 2 cortes con el eje x. Mientras que acá el polinomio de grado 4 hace cuatro cortes, cosa que el ejercicio no da a entender, entonces por eso la de grado 2 es la más conveniente. [El estudiante hace zoom y ve el número de cortes que hacen las gráficas con el eje x] e; [8] También vemos que la de grado 4 vuelve a subir y en la situación el proyectil no vuelve a subir, sube y baja una sola vez.

Sobre a estratégia do aluno, os autores pontuam:

A dificuldade em escolher o modelo que melhor se adequa à situação é que existem vários que parecem idênticos, então a estratégia do aluno se concentra em buscar um critério de seleção utilizando as ferramentas do GeoGebra para visualizar os dois gráficos e compará-los ( $L_1$ ) para logo tomar uma decisão sobre qual escolher entre um polinômio de grau 2 ( $R_1$ ) e um de grau 4 ( $R_2$ ). Então, para esta tarefa, emprega o zoom ( $\Sigma_1$ ) e vê que o polinômio de grau 2 toca duas vezes o eixo  $x$ , e o de grau quatro, toca quatro vezes o eixo  $x$ , o que o influencia para a tomada de decisões que enfrenta: usa o eixo  $x$  como critério de seleção uma vez que compreende que o projétil só toca o eixo  $x$  duas vezes, quando é lançado e quando ele chega de volta a terra ( $\Sigma_2$ ) e o polinômio de grau quatro o toca quatro vezes. O raciocínio do aluno é adequado para resolver a situação, pois ele mobiliza uma representação geométrica que é analisada com o uso de zoom<sup>111</sup> (VELANDIA; LEAL, 2015a, p. 334, tradução nossa).

A partir da análise das estratégias dos alunos, as conclusões trazidas pelos autores foram as mesmas do artigo apresentado anteriormente.

Destaquemos alguns pontos a partir das apresentações dos artigos desta subseção:

O primeiro está relacionado à importância na escolha do problema a ser investigado com o conjunto da Concepção proposta por Balacheff e Gaudin (2002). O problema é o primeiro conjunto da concepção, a partir dele surgirá a interação do sujeito com o meio e decisões em suas tomadas de ação (operadores). No processo resolutivo do problema, o estudante escolherá a melhor forma de representá-lo, ou seja, o sistema de representação. Por fim, o aluno refletirá a veracidade da resolução para o problema, ou seja, a estrutura de controle.

Outro ponto a ser destacado está na importância da análise da concepção do estudante. No momento em que o sujeito responde um problema, ele não está apenas realizando o ato de responder o que foi proposto. Nesse processo, o aluno também estará refletindo e manifestando suas crenças acerca de um determinado assunto. Nessa perspectiva, o investigador poderá refletir a respeito de quais concepções o aluno possui sobre aquele assunto, qual prevalece e por que, para determinadas concepções, houve ou não dificuldades para serem emergidas.

Na próxima seção, descrevemos o momento da intervenção, bem como o planejamento necessário para esse momento.

---

<sup>111</sup> La dificultad para escoger el modelo que mejor se ajusta a la situación es que hay varios que se ven idénticos, por ello la estrategia del estudiante se enfoca en buscar un criterio de selección utilizando las herramientas de GeoGebra para visualizar las dos gráficas y compararlas ( $L_1$ ) para luego tomar una decisión sobre cuál escoger entre un polinomio de grado 2 ( $R_1$ ) y uno de grado 4 ( $R_2$ ). De modo que, para esta tarea, emplea el zoom ( $\Sigma_1$ ) y ve que la de grado dos toca dos veces el eje  $x$  y la de grado cuatro toca cuatro veces el eje  $x$ , lo cual lo influencia para la toma de decisiones a la que se enfrenta: utiliza este hecho como criterio de selección ya que comprende que el proyectil solo toca dos veces el eje  $x$ , cuando es lanzado y cuando llega de nuevo a la tierra ( $\Sigma_2$ ) y el polinomio de grado cuatro lo toca cuatro veces. Vemos que el razonamiento del estudiante es adecuado para darle solución a la situación pues él se moviliza sobre una representación geométrica que es analizada con el uso del zoom.

## 5 CAMINHOS METODOLÓGICOS

Nesta seção, descrevemos o passo a passo executado para alcançar os objetivos propostos na pesquisa. Para isto, dividimos a seção em três subseções. A primeira apresenta as situações propostas para a coleta de dados. A segunda descreve a intervenção com a utilização do software Function Studium<sup>112</sup> e os materiais necessários para este momento. E a última traz apontamentos sobre como se deu a análise dos softwares Casyopée, GeoGebra e Modellus.

### 5.1 Situações que envolvem a construção de tabela e ajuste polinomial

Esta subseção é dedicada a apresentar as situações propostas na intervenção. Para isso, descrevemos cada situação, possíveis processos resolutivos para elas, e como algumas das concepções possivelmente estão implicadas nas situações.

Mas, antes de apresentá-las, é válido comentar que nosso escopo está em verificar como as concepções podem estar presentes no software Function Studium. Como não íamos fazer o estudo de concepções utilizando apenas o software como objeto de análise, validamos nosso objetivo analisando situações resolvidas por graduandos do curso de Licenciatura em Matemática.

As situações permitiram compreender como o software, quando manipulado pelos sujeitos, pode revelar a Concepção Tabela, Curva, Algébrica, Relação ou Objeto. Esperamos que as situações permitam mapear possíveis entraves para expressar as concepções, e verificar como ocorre a articulação entre concepções.

A seguir, são descritas as três situações, apresentando uma possível resolução para cada uma e discutidas possíveis concepções a serem reveladas por elas.

#### **Situação 1**

No software, crie uma tabela inserindo valores para  $x$ ,  $f(x)$  e responda:

- a.** Para a construção foi utilizado algum critério de escolha para os valores? Descreva.
- b.** A partir dos valores inseridos na tabela, uma função foi obtida. Qual é a sua expressão algébrica? E qual é a sua representação gráfica?
- c.** A curva passa pelos pontos inseridos na tabela? Os pontos introduzidos na tabela verificam a expressão algébrica apresentada? Justifique suas respostas.

<sup>112</sup> <http://lematecstudium.net.br/functionstudium/#>

A primeira situação tem como objetivo entender os critérios de escolhas utilizadas pelos sujeitos para a composição de uma tabela. A Concepção Tabela é a concepção que maior circunda a situação descrita.

Para que a tabela esteja disponível no software Function Studium, o sujeito precisa escolher entre Função constante, Função do primeiro grau, Função do segundo grau ou Função do terceiro grau. Escolhida a função, o sujeito inicia o preenchimento da tabela.

Com a tabela pronta e, conseqüentemente, a representação gráfica e a expressão algébrica apresentadas no software, o sujeito refletirá sobre as diversas representações presentes, respondendo as letras a, b e c da situação.

Nosso objetivo é entender quais os critérios utilizados pelos sujeitos para determinar valores de  $x$  e  $f(x)$ , e como as diversas representações podem refletir os dados da tabela.

Como primeira possibilidade de resolução para a situação, (I) o sujeito pode inserir números aleatórios na tabela, sem considerar o fato dela estar diretamente ligada às múltiplas representações que o software permite para uma função. Em um determinado momento, os pontos que estão sendo inseridos aleatoriamente não mais refletiram as representações que estão sendo exibidas no software.

Outra possibilidade de resolução (II) é o sujeito definir uma expressão algébrica, e utilizar a expressão como critério para construção da tabela, inserindo valores de  $x$  e  $f(x)$  achados a partir da expressão.

Para problemas que envolvam tabela e expressão algébrica, na perspectiva da Concepção Tabela, a expressão algébrica é encarada como uma ferramenta de análise para os dados presentes na tabela. (BALACHEFF; GAUDIN, 2002).

Na perspectiva na Concepção Objeto, considerando a resolução (II), a expressão algébrica ou a representação gráfica, podem ser vistas como objetos matemáticos a serem manipulados para dar sentido, percepção e criação da tabela.

### Situação 2

A tabela abaixo apresenta pontos que provêm de uma função polinomial de grau 2. Utilizando o ícone “Ponto” do Function Studium, insira no gráfico os pontos indicados abaixo.

|       |       |      |       |      |
|-------|-------|------|-------|------|
| $x_i$ | 1.43  | 2.03 | -1.80 | 2.40 |
| $y_i$ | -1.66 | 2.25 | 4.85  | 6.40 |

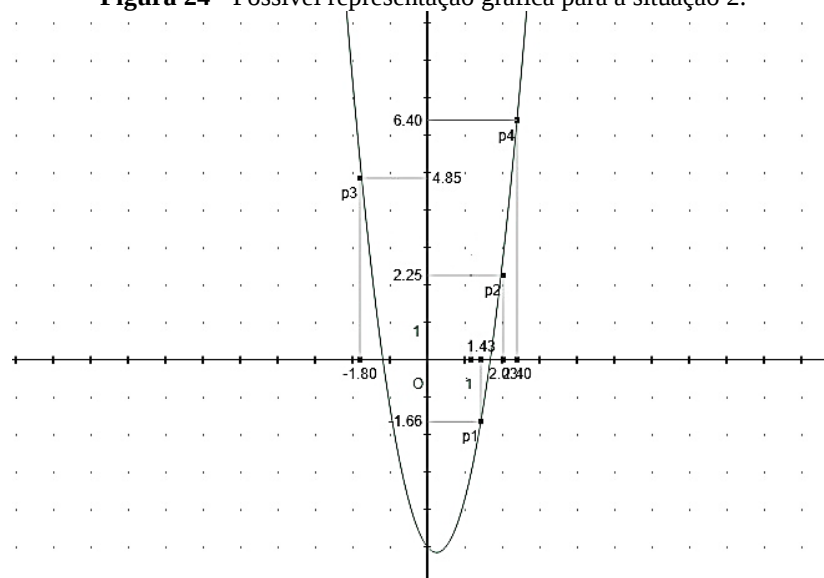
Com os pontos já marcados, insira a função  $f(x) = x^2$ . Varie os coeficientes da função na aba “Função editada”, de modo que o gráfico se aproxime dos pontos inseridos anteriormente. Que relação você observou entre a variação dos coeficientes e a variação do gráfico da função?

A situação 2 implica no ajuste polinomial a partir de pontos que pertencem à função. Diferentemente da anterior, a situação 2 aponta o passo a passo a ser realizado pelo sujeito, de modo que reduz a tentativa de seguir outros caminhos, como por exemplo, o uso da tabela para apresentar os pontos no ambiente gráfico do software.

Essa situação foi inspirada na Tese de Gaudin (2005). Em sua tese, Gaudin propõe uma situação de ajuste polinomial, a qual possui uma tabela com coordenadas para vinte pontos. Em nossa situação, optamos por uma tabela menor, sem que afete o escopo da situação, considerando o tempo disponível para o momento de intervenção, o quantitativo de situações a serem trabalhadas neste período e a premissa de que, com três ou mais pontos, é possível definir o gráfico da função de grau 2.

A primeira (I) possível resolução para a situação 2 é utilizar o ícone “Ponto”, do Function Studium, para marcar os pontos da tabela no software. Em seguida, no ícone “Função do Segundo Grau”, utilizar os controles deslizantes, aproximando a função de grau 2 aos pontos marcados inicialmente. Nesse processo resolutivo, o sujeito obterá uma expressão algébrica próxima de  $f(x) = 2.5x^2 - 1.3x - 5.0$ , com representação gráfica semelhante à Figura 24.

**Figura 24** - Possível representação gráfica para a situação 2.



**Fonte:** Os autores.

Outra possível resolução (II) é o sujeito utilizar os pontos apresentados na situação 2, obter uma expressão algébrica a partir destes pontos e plotar as informações obtidas no Function Studium.

Esse processo resolutivo não coincide com o passo a passo indicado na situação 2. Mesmo assim, não descartamos a possibilidade de uma possível resolução seguindo caminhos semelhantes à resolução (II).

Na perspectiva da situação 2 em discutir o ajuste de um polinômio a um conjunto de pontos, a Concepção Curva possivelmente será a mais presente na situação. Como citado anteriormente, a  $C_C$  envolve a interpolação polinomial (ou ajuste polinomial). Nesse sentido, a interpolação consiste em: dada a função  $f(x)$ , aproximamos essa função ao conjunto de pontos, utilizando uma  $g(x)$ . No geral, a  $g(x)$  é um polinômio mais simples, que coincide com  $f(x)$  no conjunto de pontos indicados.

A Concepção Algébrica também pode ser encontrada nessa situação, principalmente se o processo resolutivo for semelhante à resolução (II) quando trata de procedimentos algébricos para determinar uma expressão que represente os pontos presentes na tabela.

### Situação 3

Na tabela a seguir, os pontos provêm de uma função polinomial do grau 3. Retomando o passo a passo realizado anteriormente, utilize o ícone “Ponto” para marcar os pontos no software.

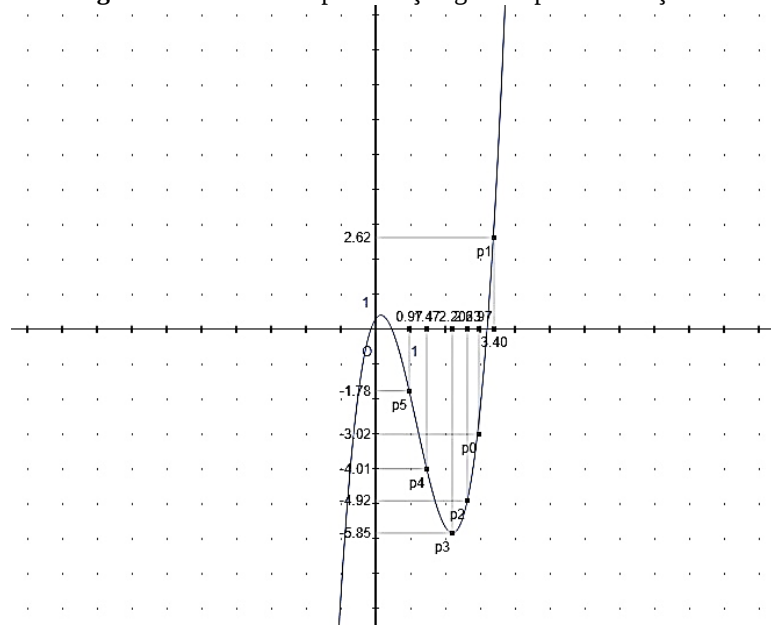
|       |       |      |       |       |       |       |
|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|
| $x_i$ | 2.97  | 3.40 | 2.63  | 2.20  | 1.47  | 0.97  |
| $y_i$ | -3.02 | 2.62 | -4.92 | -5.85 | -4.01 | -1.78 |

Com os pontos já marcados, insira a função  $f(x)=x^3$  e varie os coeficientes na aba “Função editada” para encontrar uma representação gráfica que melhor se aproxima dos pontos já marcados. Que relação você observou entre a variação dos coeficientes e a variação do gráfico da função?

A situação 3 percorre caminhos semelhantes à situação 2. Sua diferença está no grau da função a ser obtida. Nesse sentido, faremos comentários breves sobre a situação 3.

O processo resolutivo é semelhante à situação anterior. A situação 3 também aponta o passo a passo para uma possível resolução, que envolve a marcação dos pontos no Function Studium e ajustar o polinômio na função  $f(x)=x^3$ , para que esse melhor represente os pontos marcados.

**Figura 25** - Possível representação gráfica para a situação 3.



**Fonte:** Os autores.

A Figura 25 apresenta uma possível representação gráfica para a situação 3, a qual possui  $f(x)=1.4x^3-5.1x^2+1.4x+0.3$  como uma possível expressão algébrica que melhor representa os pontos indicados na tabela.

Na próxima subseção, apresentamos o momento em que se deu a intervenção, bem como ocorreu este momento, e o que foi necessário para isso.

## 5.2 Descrevendo o momento da intervenção

Nesta subseção, apresentamos a coleta dos dados. Aqui, apontamos os materiais utilizados para a coleta, recorte dos dados para análise, justificativas de nossas escolhas e descrevemos como o momento da intervenção esteve organizado.

A intervenção se deu com 24 estudantes da disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática III, do Curso de Licenciatura em Matemática da UFPE. Escolhemos essa turma por se tratar de alunos do quarto período, que passaram por disciplinas que apresentam como ementa a Matemática Básica, Cálculo I, II e III e uso da tecnologia para a educação.

Os estudantes da disciplina de Metodologia III já estavam familiarizados com o uso de softwares na Matemática, pois o professor da disciplina, durante o semestre, apresentou diferentes softwares (GeoGebra, Apprenti Géomètre e outros) que podem ser trabalhados em sala de aula em diversos contextos matemáticos.

Para a intervenção, optamos pelo uso do Function Studium, uma atividade com as três situações apresentadas na subseção anterior, folha rascunho, laboratório de informática, *notebooks*, software para a captura de tela, datashow para uma breve apresentação do Function, filmadora e celulares para captura de voz.

Inicialmente, realizamos uma breve apresentação do software, pontuando sua origem, a perspectiva de trabalhar com múltiplas representações, botões disponíveis, suas funcionalidades e seu potencial para o estudo das funções. Enquanto finalizamos a organização da sala, os sujeitos puderam familiarizar com as ferramentas disponíveis no software.

Para a coleta de dados, havia 23 alunos presentes, dispostos individualmente, em duplas ou em trios. No processo de coleta de dados, um sujeito não estava presente e enviou por e-mail as situações resolvidas por ele. No total, 24 alunos da disciplina de Metodologia III participaram deste momento, mas para a escrita, realizamos um recorte nos dados, o que será apresentado posteriormente.

A intervenção estava organizada como mostra na Tabela 2.

**Tabela 2** - Organização dos alunos no momento da intervenção.

|              | Individual | Duplas    | Trios      |
|--------------|------------|-----------|------------|
| Quantitativo | 2          | 5         | 4          |
| Escrita      | G1 e G2    | G3 até G7 | G8 até G11 |

**Fonte:** Os autores.

Em nossa escrita, tratamos todos os quantitativos como sendo grupos (G1 até G11). Nesse sentido, a coleta de dados contou com onze grupos, um computador ou *notebook* disponível para cada e o software *aTube Catcher* realizando a captura de tela.

Dos onze grupos, não temos acesso à captura de tela do G2, o grupo que entregou a atividade por e-mail, o G8 por não conseguir encontrar o vídeo da captura no computador do laboratório, e o G10 pelo fato da barra de rolagem do vídeo não funcionar, e a captura de tela aconteceu apenas no papel de parede do computador.

A dupla G5, além da gravação de tela, também utilizou a filmadora para gravar a interação entre os sujeitos.

Como a disponibilidade era de apenas uma filmadora, gravamos apenas a interação de um grupo. A escolha deste foi realizada voluntariamente.

Além da captura de tela e filmadora, também utilizamos celulares para a captura de voz. No total, sete grupos utilizaram seus celulares ou o microfone do *notebook* para a captura. Das sete gravações, temos acesso a apenas cinco delas. As demais, os grupos não enviaram para nossos e-mails.

Como o Function Studium se encontra no processo de aperfeiçoamento e mudanças de seu código, alguns bugs podem ser encontrados em sua estrutura. Um dos maiores bugs encontrados pelos grupos estava no botão “inserir” pois, quando pressionado, o gráfico não era inserido na aba da representação gráfica. Para vencer este bug, os grupos foram instruídos a: partindo da escolha da função e tendo mexido nos controles deslizantes, pressionariam o ícone de “inserir” e, em seguida, pressionariam o ícone “ponto” do software. Fazendo isto, o gráfico plotaria.

Sobre a atividade, alguns grupos solicitaram ajuda na situação 1 e 2. A situação 3 não levantou questionamentos por parte dos sujeitos, pois já estavam familiarizados com o modelo de resposta na situação 2. Na situação 1, alguns grupos não compreenderam como seria a construção da tabela. Então, foi informado a eles que, para a construção, primeiro precisariam escolher a função e, em seguida, inserir valores na tabela, ficando a critério do grupo como esses números seriam inseridos.

Para a situação 2, alguns grupos estavam entendendo que, para a situação, bastava inserir no Function Studium os pontos e a expressão algébrica informada, sem se atentar à necessidade da variação dos coeficientes para que a representação gráfica se aproxime dos pontos já marcados. Para estes grupos, foi lido o enunciado com eles, enfatizando a necessidade da variação.

Na escrita utilizamos dados obtidos de três grupos, o G3 (atividade, tela e áudio), G6 (atividade e tela) e G11 (atividade, tela e áudio). Para a escolha dos sujeitos, realizamos uma leitura nas atividades, onde todos os grupos apresentaram processos resolutivos semelhantes para a situação 2 e 3. Nesta perspectiva, utilizamos a situação 1 como um dos filtros de escolha.

Na primeira situação, dentre onze grupos, quatro atribuíram valores aleatórios, e perceberam que em dado momento, os números que estavam sendo atribuídos às coordenadas dos pontos não mais satisfaziam a expressão algébrica. Os demais utilizaram estratégias como: definir a expressão algébrica e atribuir valores para  $x$ , manipular as raízes de uma expressão de grau 2 e utilizar a equação da reta.

Após a leitura das atividades, assistimos às oito capturas de tela. Dessas, encontramos processos resolutivos semelhantes em muitos grupos. Porém, os grupos G3, G6 e G11 apresentaram detalhes diferentes em algumas de suas resoluções, que puderam enriquecer nossas discussões sobre as concepções, tais como: uso de expressões algébricas na tabela, ajuste polinomial a partir de um gráfico e utilizar a parte inteira dos números decimais.

Na próxima subseção, apontamos justificativas para as escolhas e análises dos softwares Casyopée, GeoGebra e Modellus.

### 5.3 Justificando os softwares Casyopée, GeoGebra e Modellus

A última subseção apresenta uma breve justificativa da escolha dos softwares Casyopée, GeoGebra e Modellus, como ocorrerá a análise neles, e o motivo pelo qual essa análise está presente em nossa escrita.

Para a escolha dos softwares utilizamos a seguinte abordagem: o Casyopée, por ser um software desenvolvido para o ensino da Matemática, especificamente para o conteúdo de Função. O Modellus, por ser um software desenvolvido para o ensino da Física, mas que também permite trabalhar com modelos matemáticos. E o GeoGebra, por ser um dos softwares mais utilizados por professores de Matemática, pesquisas na Educação Matemática e seu desenvolvimento se baseia na geometria dinâmica.

Acreditamos ser interessante observar os dois últimos softwares mencionados, na intenção de mapear como softwares que foram criados para diferentes finalidades podem manipular o conceito de Função.

Inicialmente, a pesquisa estava pautada na utilização dos quatro softwares em todas as etapas de nossa escrita. A princípio, mapeamos as concepções nos softwares, e em seguida

faríamos a intervenção. Quando começamos o planejamento da intervenção, percebemos que o número de dados coletados para os quatro softwares seria absurdo.

Na perspectiva de afunilar a pesquisa, decidimos utilizar apenas o Function Studium para a coleta de dados, por ser o software originalizado na articulação de múltiplas representações de uma função e desenvolvido no grupo LEMATEC da UFPE.

Para a análise dos softwares Casyopée, GeoGebra e Modellus, utilizamos como critério as três situações da atividade. Com os softwares, apresentamos possíveis processos resolutivos, utilizando-os e destacando as concepções que podem estar presentes nas resoluções.

Por fim, além da análise nos mostrar como outros softwares articulam as situações da atividade, ela também permitirá realizarmos possíveis melhorias no Function Studium.

Na próxima página, inicia a seção 6, que apresenta a análise nos softwares Casyopée, GeoGebra e Modellus.

## 6 ANÁLISE DOS SOFTWARES CASYOPÉE, GEOGEBRA E MODELLUS

A presente seção se divide em três seções, objetivando apresentar as análises realizadas nos softwares Casyopée, GeoGebra e Modellus.

Esta seção objetiva analisar como outros softwares podem manipular as situações apresentadas na seção anterior, pontuando suas limitações e ferramentas necessárias para apresentar resoluções para cada situação.

### 6.1 Criação de tabelas em diferentes softwares

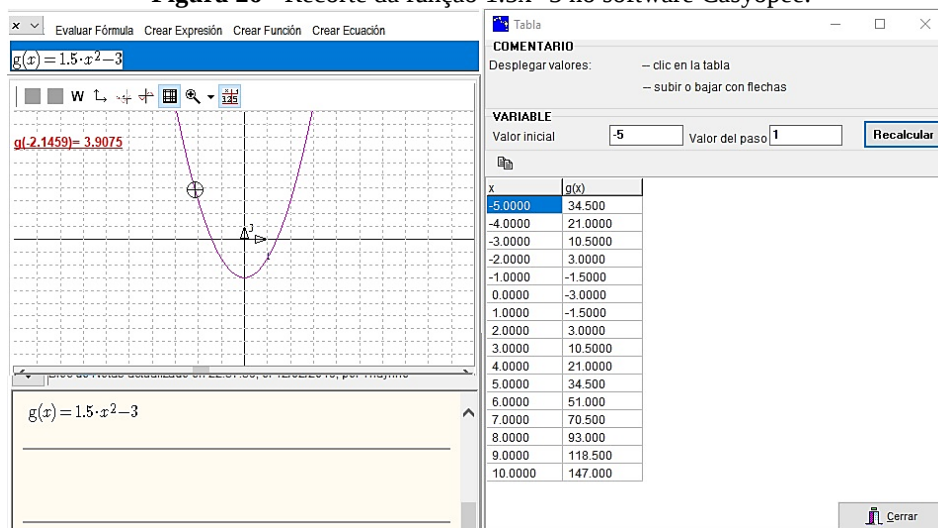
Essa subseção apresenta resoluções para a primeira situação descrita na subseção 5.1, utilizando os três softwares mencionados.

**A primeira situação aborda a criação de uma tabela, questionando critérios utilizados para a criação e reflexões entre as múltiplas representações da função obtida.**

No **Casyopée**, para que uma tabela seja criada, é necessário ter uma expressão algébrica plotada no software. Nesse sentido, a expressão pode ser caracterizada como um objeto a ser manipulado para obter a tabela. As únicas mudanças que o sujeito pode realizar na tabela são: definir o valor inicial e a variação de  $x$ . No total, a tabela apresenta coordenadas para 16 pontos.

No comando “crear función” inserimos a expressão algébrica  $g(x)=1.5x^2-3$ . Em seguida, plotamos a representação gráfica, e por fim escolhemos o valor inicial para  $x$  (-5) e optamos por 1, como sendo o intervalo entre os valores a serem atribuídas para  $x$ .

**Figura 26 - Recorte da função  $1.5x^2-3$  no software Casyopée.**



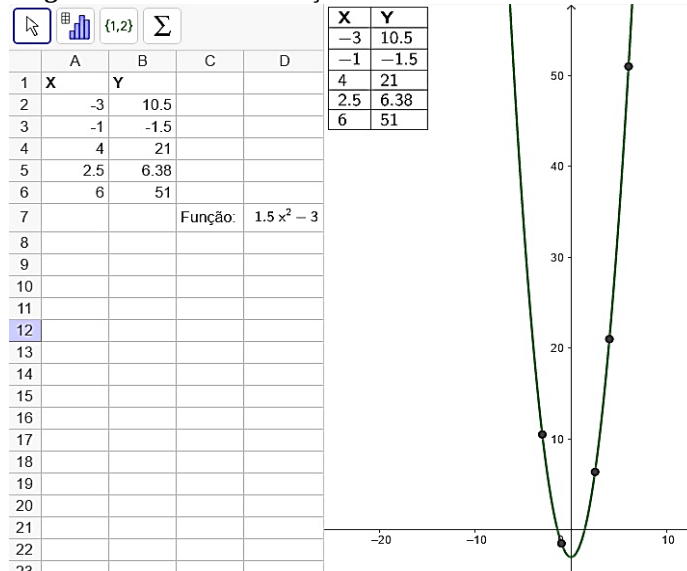
Fonte: Os autores.

A Figura 26 apresenta o passo a passo no software Casyopée: expressão algébrica  $g(x)=1.5x^2-3$ , a representação gráfica de  $g(x)$ , uma tabela com  $x$  variando em  $-5 \leq x \leq 10$  e o ponto  $(-2.1459, 3.9075)$  destacado no gráfico.

O **GeoGebra**, diferente do software discutido anteriormente, permite manipular a tabela que se apresenta no formato de uma planilha, semelhante ao *Excel*.

Para inserir valores na tabela, o sujeito precisa de um critério, ou seja, de uma expressão algébrica. Caso contrário, o software não articula a plotagem do gráfico.

**Figura 27** - Recorte da função  $1.5x^2-3$  no software GeoGebra.



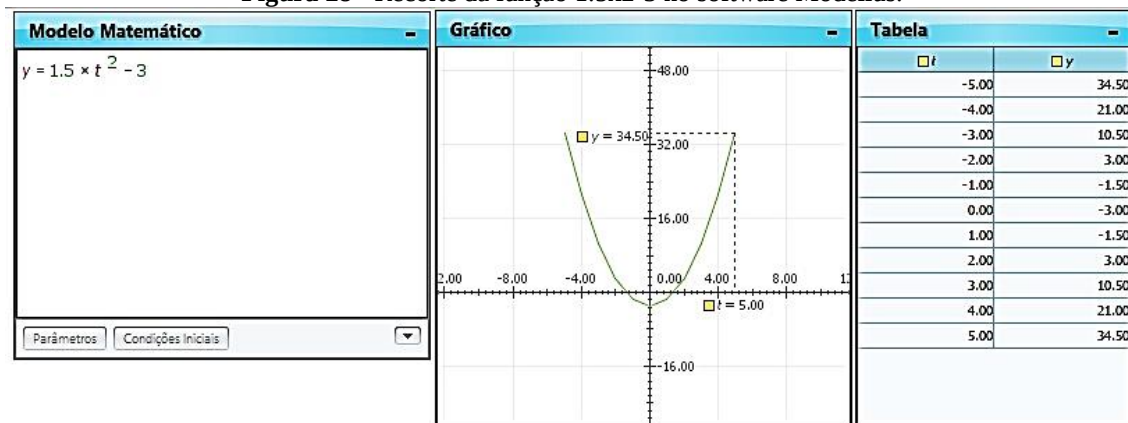
**Fonte:** Os autores.

A Figura 27 apresenta a construção de uma tabela utilizando como critério a expressão algébrica  $f(X) = 1.5x^2 - 3$ . Inicialmente, escolhemos valores aleatórios para  $X$ . Em seguida, para a construção da coluna  $Y$ , utilizamos o comando  $1.5(A_n)^2 - 3$ . Com esses dois processos a tabela foi criada, plotamos os pontos no espaço destinado para a representação gráfica e finalizamos com a plotagem do gráfico da função  $f(X)$  também no mesmo espaço.

O software **Modellus** apresenta uma articulação da tabela semelhante ao Casyopée. As únicas opções editáveis na tabela são: as letras atribuídas às variáveis da função, o intervalo para a variável independente e o incremento para os valores atribuídos para essa variável.

Na situação 1 resolvida no Modellus, adotamos o critério de utilizar a expressão algébrica  $y = 1.5t^2 - 3$  para obter a tabela. Inserimos  $y$  no campo “Modelo Matemático” e, em seguida, na aba “Variável Independente”, atribuímos o “Passo ( $\Delta t$ )” a 1, com  $t$  variando em  $-5 \leq t \leq 5$  e demos *play* no software, obtendo a Figura 28.

**Figura 28** - Recorte da função  $1.5x^2-3$  no software Modellus.



Fonte: Os autores.

A situação 1 nos softwares Casyopée e Modellus requer algumas mudanças na sua parte literária. Como os softwares não permitem preencher a tabela manualmente, o sujeito não poderia inserir valores para  $x$  e  $f(x)$ , como solicita a situação.

Na perspectiva da Concepção Tabela ( $C_T$ ), criar uma tabela, utilizando ou não critérios para o preenchimento de suas linhas, caracteriza o conjunto problema ( $P$ ) de uma concepção.

Para condensar o processo resolutivo dos três softwares mencionados na perspectiva da  $C_T$ , a Tabela 3 descreve o conjunto dos operadores ( $R$ ), identificando as ferramentas que levaram à ação (BALACHEFF; GAUDIN, 2002), o conjunto do sistema de representação ( $L$ ), seja “linguístico ou não, permitindo expressar os conjuntos de  $P$  e  $R$ ”<sup>113</sup> (BALACHEFF, 2001, p. 6, tradução nossa), e a estrutura de controle ( $\Sigma$ ), validando a problemática e “garantindo a não contradição de  $C$ ”<sup>114</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2002, p. 6, tradução nossa).

**Tabela 3** - Concepções presentes nos softwares na situação 1.

| Software | Concepção (C) | Operadores (R)                                                                                                                                                      | Sistema de representação (L)                                 | Estrutura de Controle ( $\Sigma$ )                                                                                                                                                 |
|----------|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Casyopée | Tabela        | $R_{T1}$ : definir a expressão algébrica $1.5x^2-3$ ;<br><br>$R_{T2}$ : definir o valor inicial da variável independente;<br><br>$R_{T3}$ : definir o incremento da | $L_{T1}$ : tabela com $x$ variando em: $-5 \leq x \leq 10$ . | $\Sigma_{T1}$ : definir expressão algébrica e variação de $x$ como critérios para validação de uma tabela;<br><br>$\Sigma_{T2}$ : tabela da expressão algébrica: $g(x)=1.5x^2-3$ . |

<sup>113</sup> L est un système de représentation langagier ou non, qui permet d'exprimer les éléments de  $P$  et de  $R$ .

<sup>114</sup> [...]elle assure la non-contradiction de  $C$ .

| Software | Concepção (C) | Operadores (R)                                                                                                                                                                                   | Sistema de representação (L)                              | Estrutura de Controle ( $\Sigma$ )                                                                                                                                            |
|----------|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          |               | variável independente na tabela.                                                                                                                                                                 |                                                           |                                                                                                                                                                               |
| GeoGebra | Tabela        | $R_{T4}$ : assumir valores aleatórios para X;<br><br>$R_{T5}$ : determinar que $f(X)=1.5(A_n)^2-3$ .                                                                                             | $L_{T2}$ : tabela.                                        | $\Sigma_{T3}$ : comando “lista de pontos” para plotar os pontos;<br><br>$\Sigma_{T4}$ : plotar $f(X)=1.5x^2-3$ e justificar que a parábola contém os pontos.                  |
| Modellus | Tabela        | $R_{T1}$ : definir a expressão algébrica $1.5t^2-3$ ;<br><br>$R_{T6}$ : definir o intervalo da variável independente;<br><br>$R_{T3}$ : definir o incremento da variável independente na tabela. | $L_{T3}$ : tabela com t variando em: $-5 \leq t \leq 5$ . | $\Sigma_{T1}$ : definir expressão algébrica e variação de x como critérios para validação de uma tabela;<br><br>$\Sigma_{T2}$ : tabela da expressão algébrica: $y=1.5t^2-3$ . |

**Fonte:** Os autores.

A Concepção Tabela se encontra presente nos três softwares, mas cada um possui suas particularidades para expressar a  $C_T$ .

O GeoGebra acompanha a perspectiva da construção de uma tabela pelo próprio usuário com a ajuda de uma planilha. Já os demais softwares apresentam uma tabela não editável, mas que também não é apenas uma representação estática de uma função, com finalidades apenas para observar ou confirmar algumas informações.

Nos softwares Casyopée e Modellus, para obter a tabela exatamente com os dados desejados, é necessário utilizar a expressão algébrica que se associa a ela, e manipular as ferramentas disponíveis no software para obter a tabela. Já no GeoGebra, também é necessário

utilizar a expressão algébrica, com o diferencial de que os valores da tabela podem ser editados pelo usuário.

Balacheff e Gaudin (2002) pontuam que em situações envolvendo diferentes representações para uma função, na perspectiva da Concepção Tabela, as demais representações são vistas como ferramentas para análise dos dados obtidos na tabela.

Nesse sentido, podemos reconhecer a expressão  $1.5x^2-3$  como uma ferramenta para a criação e análise das tabelas obtidas nos diferentes softwares.

Por fim, o Casyopée e Modellus não permite visualizar os pontos da tabela no plano cartesiano e a representação gráfica, simultaneamente. Nesse sentido, em outras situações, o usuário pode vir a se questionar se os pontos verificam ou não o gráfico obtido.

A próxima subseção traz uma análise da situação 2 nos softwares Casyopée, GeoGebra e Modellus.

## 6.2 Ajuste polinomial na função de grau 2

Esta seção apresenta resoluções para a segunda situação descrita na subseção 5.1, utilizando os softwares Casyopée, GeoGebra e Modellus.

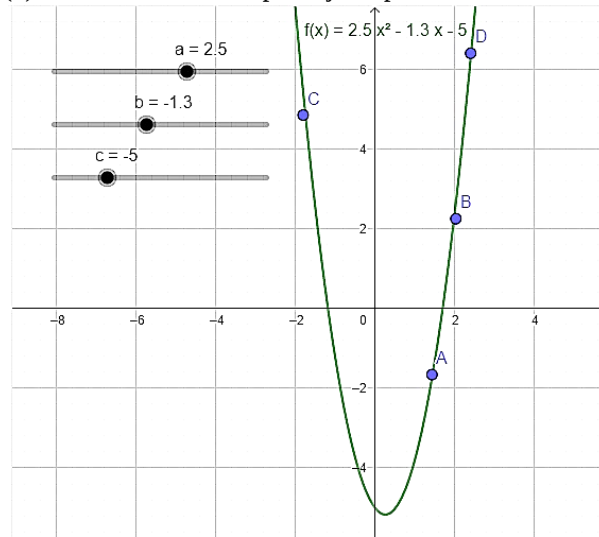
**A situação 2 apresenta uma tabela com coordenadas para quatro pontos e solicita o ajuste polinomial da expressão algébrica  $f(x)=x^2$ , determinando a curva que melhor se aproxime dos pontos (1.43, -1.66); (2.03, 2.25); (-1.80, 4.85) e (2.40, 6.40).**

No **Casyopée** não encontramos ferramentas que nos permitam realizar o ajuste polinomial. Acompanhando o passo a passo descrito na situação, inserimos os pontos da tabela, plotamos a função  $f(x)=x^2$ , mas não encontramos controles que ajustem a função  $f(x)$ .

Para o **GeoGebra**, apresentaremos dois processos resolutivos. Como as situações 2 e 3 são semelhantes, abordamos o primeiro processo resolutivo para a situação 2 e o outro processo na situação 3.

Na primeira possibilidade, inserimos os quatro pontos na janela de gráfico (A, B, C e D), criamos controles deslizantes para cada coeficiente (a, b e c) de um polinômio de grau 2, com intervalos de -10 até 10 e incremento de 0,1, e associamos os controles à expressão algébrica  $f(x)=ax^2+bx+c$ . A partir da função  $f(x)=x^2+0x$ , utilizamos os controles deslizantes para obter a expressão algébrica  $f(x)=2.5x^2-1.3x-5$ , como mostra a Figura 29.

**Figura 29** -  $f(x)=2.5x^2-1.3x-5$  obtida pelo ajuste polinomial no software GeoGebra.



Fonte: Os autores.

No software **Modellus**, assim como o Casyopée, também não encontramos subsídios suficientes para o ajuste polinomial. A princípio, buscamos maneiras de realizar uma interpolação polinomial. Sem sucesso, procuramos meios algébricos, manipulando  $f(x) = ax^2+bx+c$ , os pontos indicados na tabela e até mesmo um possível sistema linear, para obter o valor dos coeficientes, ou manipular os coeficientes, mas também não encontramos subsídios suficientes oferecidos pelo software.

Nesse sentido, a Tabela 4 apresenta a descrição da concepção no software GeoGebra. A validação da  $C_C$  está relacionada à interpolação polinomial e conjecturas permitidas a partir dela (BALACHEFF; GAUDIN, 2002).

**Tabela 4** - Concepções presentes nos softwares na situação 2.

| Software | Concepção (C) | Operadores (R)                                                                                                                                                                                                                                         | Sistema de representação (L)                      | Estrutura de Controle ( $\Sigma$ )                                           |
|----------|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| Casyopée | x             | x                                                                                                                                                                                                                                                      | x                                                 | x                                                                            |
| GeoGebra | Curva         | <p><math>R_{C1}</math>: inserir no gráfico os pontos da tabela;</p> <p><math>R_{C2}</math>: definir controles deslizantes para cada coeficiente de <math>f(x)=ax^2+bx+c</math>;</p> <p><math>R_{C3}</math>: utilizar os controles deslizantes para</p> | $L_{C1}$ : curva aproximada aos pontos da tabela. | <p><math>\Sigma_{C1}</math>: a expressão algébrica:</p> $f(x)=2.5x^2-1.3x-5$ |

| Software | Concepção (C) | Operadores (R)               | Sistema de representação (L) | Estrutura de Controle ( $\Sigma$ ) |
|----------|---------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------------|
|          |               | aproximar $f(x)$ aos pontos. |                              |                                    |
| Modellus | x             | x                            | x                            | x                                  |

Fonte: Os autores.

O software GeoGebra não apresentou complexidades no processo resolutivo da situação 2. Uma manipulação necessária para atender o passo a passo proposto na situação foi transformar  $f(x)=ax^2+bx+c$  em  $f(x)=x^2+0x$ , utilizando os controles deslizantes. Porém, se tal manipulação não for realizada, não influenciaria no resultado obtido.

A seguir, apresentamos a última subseção, discutindo a situação 3 da atividade.

### 6.3 Ajuste polinomial na função de grau 3

Esta subseção apresenta resoluções para a terceira situação descrita na subseção 5.1, utilizando os três softwares mencionados.

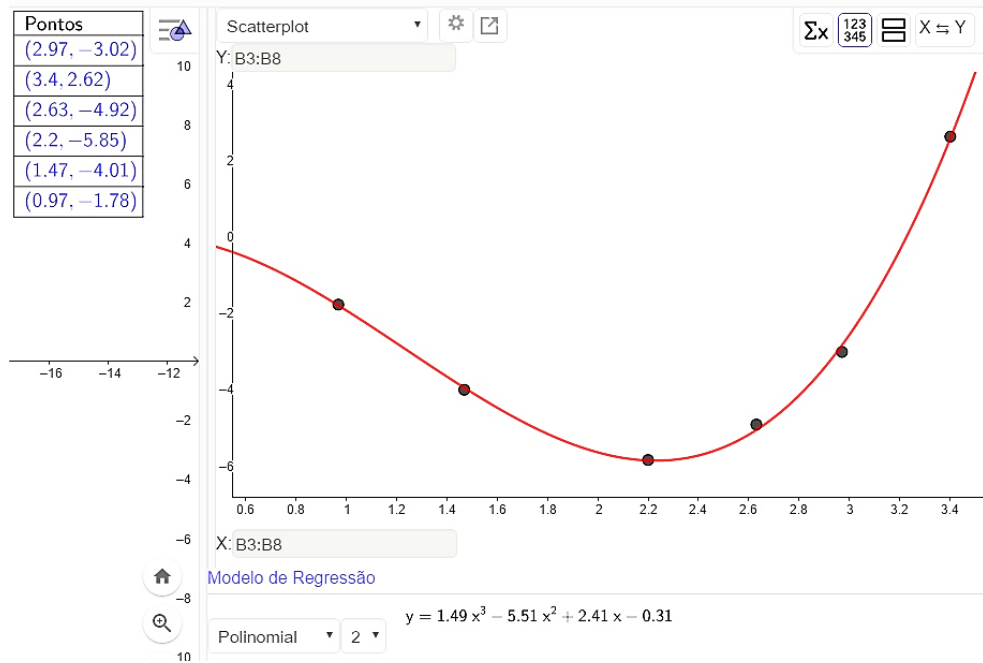
A última situação se diferencia da situação 2, pois se trata da manipulação de um polinômio de grau 3. **Essa apresenta uma tabela com coordenadas para seis pontos, e solicita o ajuste polinomial da expressão algébrica  $f(x)=x^3$ , determinando a curva que melhor se aproxime dos pontos.**

No **Casyopée** ocorreu o mesmo da situação 2 na subseção anterior. Como ambas as situações não possuem processos resolutivos no software, optamos por não descrever concepções nela.

Nesse caso, utilizando o software Casyopée, reconhecemos a existência de ajustes na descrição das situações, e também reconhecemos possíveis limitações no software mencionado.

Para o **GeoGebra**, como mencionado na subseção anterior, utilizamos outra maneira de fazer o ajuste polinomial, sem que seja com os controles deslizantes.

Utilizando a planilha, inserimos os pontos na forma  $(x, f(x))$ . Após inserir os seis pontos, utilizamos a ferramenta “análise bivariada” e marcamos os pontos em uma nova janela de gráfico. Em seguida, selecionamos a opção “Polinomial” e plotamos um polinômio de grau 3 com a expressão algébrica  $f(x)=1.49x^3-5.51x^2+2.41x-0.31$ , como mostra a Figura 30.

**Figura 30** - Situação 3 no software GeoGebra.

**Fonte:** Os autores.

A ferramenta “análise bivariada” disponibiliza polinômios de grau até 9. Curiosamente, experimentando os demais graus na situação 3, e identificamos um polinômio de grau 5 que se aproxima de forma quase “perfeita” dos pontos inseridos. Esse polinômio é:  $f(x)=1.14x^5-12.25x^4+52.02x^3-104.8x^2+94.75x-32.7$ .

Por fim, no software **Modellus**, assim como foi descrito da subseção anterior, também não encontramos ferramentas que nos deem subsídios para apresentar um processo resolutivo na situação 3.

A Tabela 5 apresenta a caracterização da Concepção Objeto na situação 3 e resolvida no software GeoGebra.

**Tabela 5** - Concepções presentes nos softwares na situação 3.

| Software | Concepção (C) | Operadores (R)                                                                                                                                                    | Sistema de representação (L)                                                          | Estrutura de Controle ( $\Sigma$ )                                                                                                                        |
|----------|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Casyopée | x             | x                                                                                                                                                                 | x                                                                                     | x                                                                                                                                                         |
| GeoGebra | Objeto        | <p>R<sub>O1</sub>:inserir os pontos na forma (x, y) na planilha;</p> <p>R<sub>O2</sub>:utilizar a análise bivariada para determinar o polinômio de grau 3 que</p> | L <sub>O1</sub> :gráfico de um polinômio de grau 3 que melhor se aproxima dos pontos. | <p><math>\Sigma_{O1}</math>:gráfico da curva;</p> <p><math>\Sigma_{O2}</math>:expressão algébrica:<br/> <math>f(x)= 1.49x^3-5.51x^2+2.41x-0.31</math></p> |

| Software | Concepção (C) | Operadores (R)                 | Sistema de representação (L) | Estrutura de Controle ( $\Sigma$ ) |
|----------|---------------|--------------------------------|------------------------------|------------------------------------|
|          |               | melhor se aproxima dos pontos. |                              |                                    |
| Modellus | x             | x                              | x                            | x                                  |

**Fonte:** Os autores.

Tivemos dúvidas para identificar a concepção que melhor se encontra presente no processo resolutivo apresentado. Acreditamos na Concepção Objeto, por tratar da manipulação de objetos matemáticos – coordenadas de pontos (x, y) – e objetos computacionais presentes no software GeoGebra.

A seguir iniciamos a análise da intervenção, apresentando discussões sobre as resoluções dos grupos G3, G6 e G11, as situações da atividade com o Function Studium.

## 7 ANÁLISE DA INTERVENÇÃO

A presente seção se divide em três subseções, objetivando apresentar dados coletados de três grupos na intervenção, G3, G6 e G11.

Inicialmente, as subseções seriam divididas por grupos. Porém, havendo a possibilidade de encontrarmos processos resolutivos semelhantes entre eles, decidimos analisar por situação.

Para análise, dispomos da captura de tela do software Function Studium dos três grupos, captura de voz de dois grupos e rascunho feito à mão dos três grupos (apêndices A, B e C). O material foi analisado à luz do Modelo cK $\Phi$  de Balacheff (1995) e suas concepções para o estudo das Funções.

Todos os operadores, sistemas de representação e estruturas de controles das concepções, foram enumerados na seção anterior, e essa numeração foi continuada na presente seção, na perspectiva de esclarecer e simplificar as intersecções entre os conjuntos e grupos.

### 7.1 Situação 1: criando uma tabela

Essa subseção apresenta a análise dos grupos G3, G6 e G11 na primeira situação.

Como já mencionado anteriormente, a situação diz que: No software, crie uma tabela inserindo valores para  $x$ ,  $f(x)$  e responda: **a.** Para a construção, foi utilizado algum critério de escolha para os valores? Descreva.

O grupo G3 respondeu que *“Não, pois achávamos que não teria graça. Mas depois de dois pontos, quando plotou a reta, colocamos um ponto fora da reta e ele ficou cinza como fosse errado.*

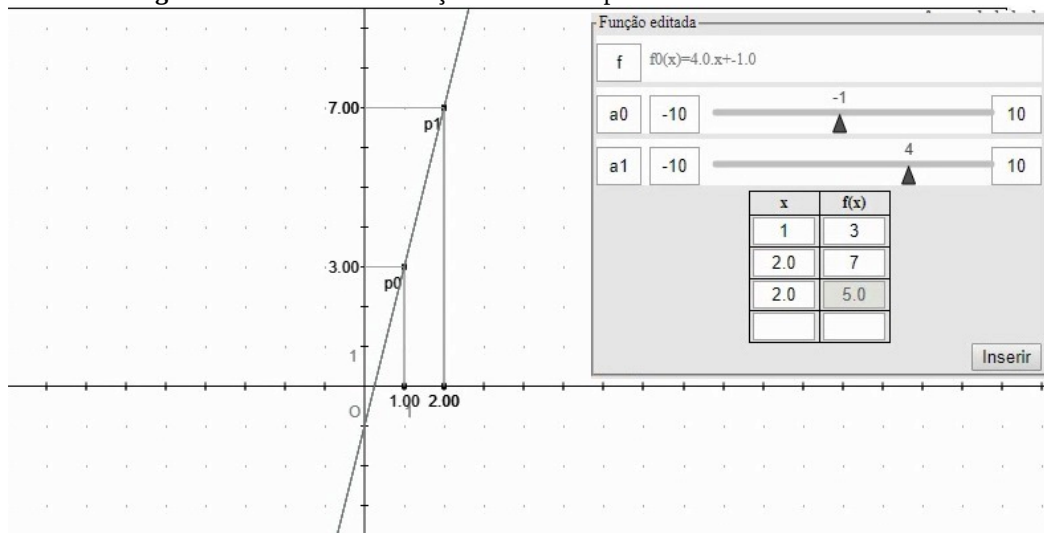
De fato, na captura de tela do grupo G3 (Figura 31), a dupla utilizou valores aleatórios no software. Inicialmente, o grupo faz uma série de tentativas com coordenadas de pontos. Primeiro (1, 5) e (2, 12), em seguida (1, 3) e (2, 4), até que inserem os pontos (1, 3) e (2, 7) e obtêm uma tabela, a expressão algébrica e representação gráfica. Na tabela obtida, o grupo insere o ponto (2, 5) e conclui que o último ponto inserido não faz parte da reta já obtida como representação gráfica.

Analisando a resposta do grupo e a captura de tela, os sujeitos acreditam que a coordenada de  $f(x)$  ficou cinza (o número 5), pois o ponto não pertence à reta. De fato, a coordenada fica cinza no software, mas não pelo motivo que a dupla acredita.

O grupo G3 escolheu a função de grau 1. Para determinar o gráfico de uma função do 1º grau, basta marcar dois pontos no plano cartesiano e traçar a reta que representa sua representação gráfica.

O Function Studium é articulado dessa forma. Quando o grupo G3 inseriu os dois primeiros pontos na tabela, o software automaticamente determinou a expressão algébrica e sua representação gráfica, de modo que, o software cria uma espécie de “trava” nos próximos valores inseridos em  $f(x)$ , seja uma coordenada pertencente ou não à representação gráfica já traçada.

**Figura 31** - Recorte da situação 1 resolvida pelo G3 no Function Studium.

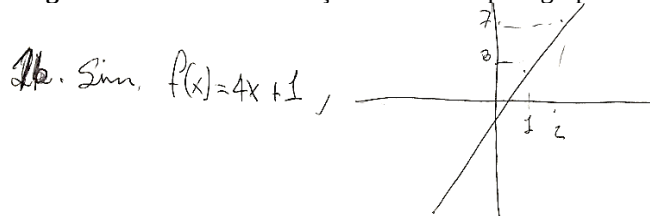


Fonte: Os autores.

No item b da situação é solicitado o seguinte: **b.** A partir dos valores inseridos na tabela, uma função foi obtida. Qual é a sua expressão algébrica? E qual é a sua representação gráfica?

Na captura de vídeo e voz, o grupo G3 permanece em silêncio entre a letra **a** e **b**, e logo voltam a falar, já discutindo a letra **c** da situação. A Figura 32 apresenta a resposta do grupo G3.

**Figura 32** - Letra b da situação 1 resolvida pelo grupo G3.



Fonte: Os autores.

A última letra da situação diz que: **c.** A curva passa pelos pontos inseridos na tabela? Os pontos introduzidos na tabela verificam a expressão algébrica apresentada? Justifique suas respostas.

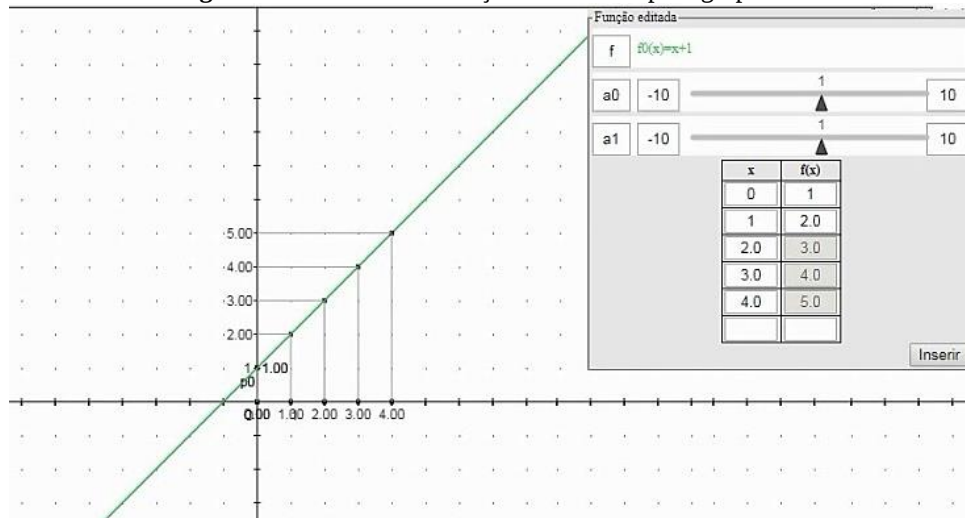
O grupo G3 responde “Respondido na a” e segue para a situação 2.

Analisando a captura de tela e voz do grupo G3, não tivemos sinais de limitações, seja na descrição da situação, na articulação dos objetos matemáticos, ou nas ferramentas dos softwares, além dos bugs já apresentados na subseção anterior.

Como já mencionado anteriormente, a concepção que maior circunda a situação 1 é a Concepção Tabela ( $C_T$ ). Porém, na resolução do grupo G3, acreditamos que a concepção mais presente é a Concepção Objeto ( $C_O$ ), pelo fato da dupla manipular vários objetos matemáticos (coordenadas de pontos, expressão algébrica e representação gráfica) para obter uma tabela. Ou seja, o sistema de representação da  $C_O$ .

O grupo G6 é uma dupla e não tivemos acesso à sua captura de voz. Para a letra **a** da situação, a dupla respondeu “*Fizemos a escolha da função e utilizamos os valores de  $x=0, 1, 2, 3, 4$  para construção da nossa tabela*”.

**Figura 33** - Recorte da situação 1 resolvida pelo grupo G6.



**Fonte:** Os autores.

Mas, antes da dupla apresentar um processo resolutivo (Figura 33) para a situação, o grupo G6 experimentou outros caminhos para obter uma resposta.

Inicialmente, a dupla tentou inserir os seguintes pontos na tabela (0,  $x+1$ ) e/ou (1,  $x+1$ ). Sem sucesso, a dupla solicitou nossa ajuda e informamos que a tabela não reconhece o tipo de “valor” que estavam tentando inserir. A partir da informação, o grupo G6 assumiu como critério utilizar a expressão algébrica  $f(x)=x+1$ , e inseriu os pontos (0, 1); (1, 2); (2, 3) e (3, 4) na tabela.

Na letra **b** a dupla diz que: “*Expressão Algébrica:  $F(x)=x+1$ . Representação gráfica: Uma reta começando do ponto (0, 1)*”. E para a letra **c** descrevem: “*Não há uma curva. Sim, vimos que os pontos coincidem com a função (expressão gráfica) e representação gráfica*”.

Analisando a resolução do grupo G6 para a situação 1, não encontramos obstáculos na descrição da situação. Sobre a Matemática, apontamos alguns possíveis entraves ou falta de

atenção nas seguintes frases: “uma reta começando do ponto (0, 1)” no caso, a dupla poderia indicar como uma semi-reta. E na frase “... com a função (expressão gráfica) e representação gráfica”, nesse caso, supomos falta de atenção na escrita em trocar expressão algébrica por expressão gráfica.

Por fim, entendemos que o software Function Studium, inicialmente trouxe limitações para a dupla. Na tabela do software, não é possível a entrada de expressões algébricas, nesse sentido, a dupla precisou mudar sua estratégia resolutiva, para obter uma resposta para a situação 1.

Na resolução do grupo G6 identificamos a Concepção Tabela ( $C_T$ ) presente. A dupla utiliza critérios (expressão algébrica e coordenadas de pontos) para obter a tabela com valores desejados.

O último grupo a ser analisado, o G11, é formado por um trio e temos acesso a sua captura de voz e tela.

Para a construção da tabela, o trio utilizou a função do 2º grau e iniciaram as discussões com o seguinte discurso:

**Estudante 1:** Valor arbitrário a gente escolhe, né?

**Estudante 2:** É.

**Estudante 3:** Não. Bora fazer aquele negócio de -1 a 2.

Com a escolha da função de grau 2 no software, automaticamente o Function Studium apresenta a função  $f(x)=x^2$  e o grupo G11 trabalha nessa função como critério para inserir valores em sua tabela.

Eles iniciam inserindo os seguintes pontos (2, 4); (0, 0); (1, 1); (3, 9) e (0.5, 0.25). Quando inserem o último ponto, o grupo percebe que na tabela ficaram apenas as partes inteiras (0, 0), e continuam fazendo esse tipo de teste no software, inserindo valores decimais e frações, para identificar como o software se comporta. (1/5, 1/25) se transforma em (1, 1); (-0.5, 0.25) se transforma em (0, 0) e (2.5, 4.25) em (2, 4). Foi então que o grupo iniciou o diálogo seguinte:

**Estudante 3:** Pelo jeito não pega decimais não.

**Estudante 1:** É, não pega.

**Estudante 3:** Só pega inteiros. Eu acho que pega o primeiro inteiro, não pega o decimal não. Vamos fazer o teste? (2.5, 4.25). Pega só a parte inteira.

**Estudante 1:** É só a parte inteira mais próxima. Pera aí, mas vamos ver um que seja mais próximo de ser só. “Ser só” que eu falo é o inteiro.

**Estudante 3:** Então vamos ver (0.9, 0.81). Só pega a parte inteira.

A Figura 34 apresenta a resolução do G11.

Para a letra **a**, o grupo responde que “*Escolhemos valores inteiros no início e depois começamos a colocar números racionais*”. Na letra **b**, o trio diz que: “ $F(x)=x^2$ /Parábola.”. E

por fim, na letra **c** descrevem que “Quando inserimos valores para  $x$  sendo racionais, os mesmos foram modificados e o software só considerou as partes inteiras dos números. Ex:  $x=0.9 \rightarrow x=0$ . Nas partes inteiras, sim”.

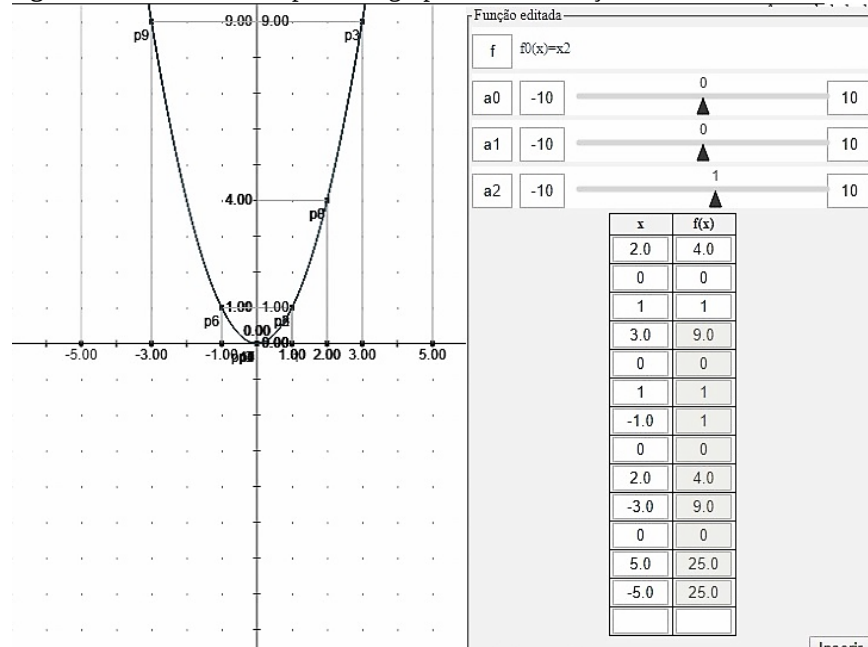
Na resolução da letra **c** da situação, os sujeitos discutem que:

**Estudante 3:** Diz que não passa exatamente porquê só pegou as partes inteiras.

**Estudante 2:** Não. Os que tão aí passa? (Os valores da tabela)

**Estudante 3:** Os que estão aqui. Mas não foi os pontos que a gente colocou, tá ligado?

**Figura 34** - Recorte da resposta do grupo G11 na situação 1 no Function Studium.



**Fonte:** Os autores.

Analisando a resolução do grupo G11, no tocante à descrição da situação, o trio não apresentou dificuldades.

Sobre a Matemática, na captura de tela identificamos uma coisa. Quando o grupo assume  $x = 2.5$ , utilizando a expressão  $f(x) = x^2$ , o trio assume que  $f(2.5) = 4.25$ . No processo resolutivo, é perceptível que os sujeitos multiplicaram partes inteiras e partes decimais de 2.5. Sabendo que  $2.5^2 = 6.25$ , e que os sujeitos são professores em formação, podemos sugerir que esse erro foi gerado por falta de atenção do trio.

No Function Studium, podemos apontar a ausência de números decimais como uma possível limitação do software. Porém, analisando a captura de tela dos outros grupos, identificamos que os demais conseguiram inserir valores decimais. Nesse sentido, a limitação não se encontrava no software, mas sim na mecânica do grupo, ou na ausência de tal informação ser passada para o G11. No lugar de inserir o valor com ponto, o grupo inseria com vírgula.

Além dos números decimais, também identificamos a entrada de números fracionados pelo grupo G11. De fato, o Function Studium não reconhece número fracionado na tabela. Isso

pode ser identificado como uma limitação do software, destacando que nem todo número que pertence ao conjunto dos números reais, pode ser inserido na tabela do software.

Na resolução do grupo G11, identificamos que a Concepção Tabela presente, por motivos semelhantes ao grupo G6, utilizou critérios (expressão algébrica e coordenadas de pontos) para obter a tabela com valores desejados.

Durante nossa discussão sobre as resoluções de cada grupo, apontamos as concepções que melhor se apresentaram nas resoluções de cada, porém não caracterizamos cada conjunto da concepção. A Tabela 6 apresenta a caracterização de cada conjunto da concepção presente na resolução dos grupos.

**Tabela 6** - Concepções identificadas nas resoluções dos grupos na situação 1.

| Grupo | Concepção (C) | Operadores (R)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Sistema de representação (L)                                                                                             | Estrutura de controle ( $\Sigma$ )                                                                                                                                                                                 |
|-------|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| G3    | Objeto        | <p>R<sub>O3</sub>: escolher função do 1º grau;</p> <p>R<sub>O4</sub>: não utilizar critério para inserir valores de x e f(x);</p> <p>R<sub>O5</sub>: inserir valores naturais, inteiros e/ou racionais por meio de tentativas.</p> <p>R<sub>O6</sub>: primeira tentativa de inserir valores (1, 5) e (2, 12);</p> <p>R<sub>O7</sub>: segunda tentativa (1, 3) e (2, 7).</p> | <p>L<sub>T2</sub>: tabela;</p> <p>L<sub>O2</sub>: expressão algébrica;</p> <p>L<sub>O3</sub>: representação gráfica.</p> | <p><math>\Sigma_{O3}</math>: inserir os pontos (1, 3) e (2, 7) validando uma função, bem como suas representações;</p> <p><math>\Sigma_{O4}</math>: testar o ponto (2, 5) e perceber que ele não está na reta.</p> |
| G6    | Tabela        | <p>R<sub>T7</sub>: escolher função do 1º grau;</p> <p>R<sub>T8</sub>: utilizar a expressão algébrica <math>x+1</math> como critério para obter os</p>                                                                                                                                                                                                                       | <p>L<sub>T2</sub>: tabela;</p> <p>L<sub>O3</sub>: representação gráfica.</p>                                             | <p><math>\Sigma_{T5}</math>: reta passando pelos valores inseridos na tabela (Figura 33).</p>                                                                                                                      |

| Grupo | Concepção (C) | Operadores (R)                                                                                                                                                                                                                                        | Sistema de representação (L)                                | Estrutura de controle ( $\Sigma$ )                                                                                                                                                                   |
|-------|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|       |               | valores a serem inseridos na tabela;<br>$R_{T9}$ : inserir os pontos, a partir da expressão algébrica, (0, 1); (1, 2); (2, 3) e (3, 4) na tabela.                                                                                                     |                                                             |                                                                                                                                                                                                      |
| G11   | Tabela        | $R_{T10}$ : escolher função do 2º grau;<br><br>$R_{T11}$ : assumir como critério a expressão algébrica $f(x)=x^2$ para determinar valores de x e $f(x)$ ;<br><br>$R_{T5}$ : inserir valores naturais, inteiros e/ou racionais por meio de tentativas. | $L_{T2}$ : tabela;<br><br>$L_{O3}$ : representação gráfica. | $\Sigma_{T6}$ : entender o comportamento do Function Studium, a partir da tentativa de assumir valores para x e $f(x)$ ;<br><br>$\Sigma_{T7}$ : parábola passando pelos valores inseridos na tabela. |

**Fonte:** Os autores.

Analisando a situação 1 à luz do Modelo cK $\Phi$ , observamos que para o mesmo problema (P), várias concepções podem estar presentes. Essa diversidade pode depender das técnicas utilizadas, dos conhecimentos e conceitos consultados e da Matemática que permeia a resolução.

O grupo G6 e G11 apresentaram a Concepção Tabela em sua resolução, porém os operadores e validação da concepção avançaram por caminhos distintos. O grupo G11, baseado no seu critério de expressão, utilizou mais técnicas de tentativas para inserir valores. Já o grupo G6, também utilizando seu critério de expressão, assumiu x como sendo valores do conjunto dos naturais, e encontrou valores para  $f(x)$ .

Já o grupo G3, sem a utilização de critérios, construiu uma tabela apenas inserindo valores aleatórios para x e  $f(x)$ . Para a construção, os alunos utilizaram coordenadas de pontos

aleatórios e ferramentas do software Function Studium. Por esse motivo, acreditamos que a Concepção Objeto é aquela que melhor se apresenta na resolução do grupo.

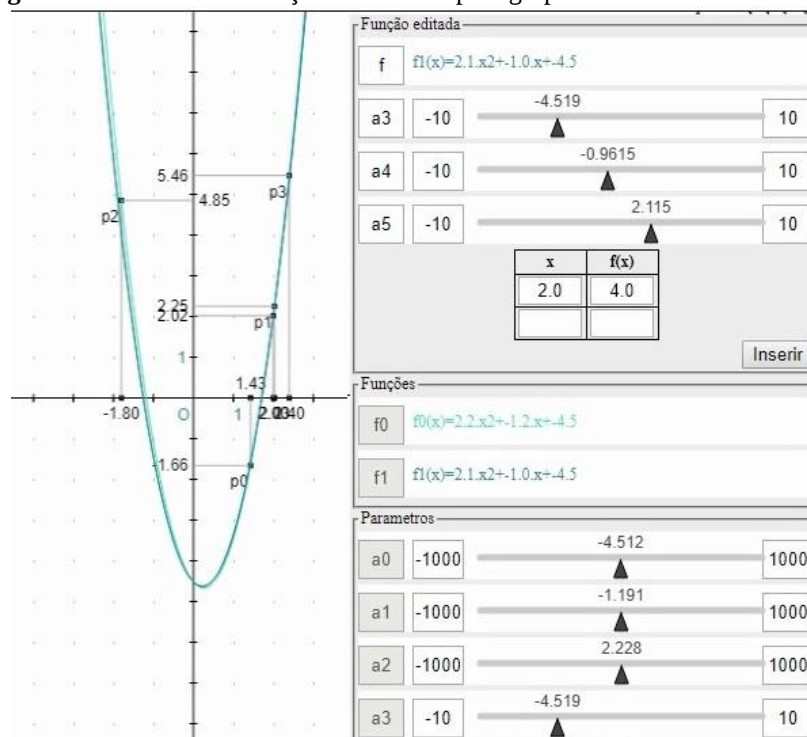
Na próxima subseção, discutimos a situação 2 resolvida pelos três grupos.

## 7.2 Situação 2: ajustando um polinômio de grau 2

A presente subseção apresenta a análise das respostas dos grupos G3, G6 e G11 da situação 2 da atividade.

Como já apresentado anteriormente, a situação diz que: A tabela abaixo apresenta pontos que provêm de uma função polinomial de grau 2. Utilizando o ícone “Ponto” do Function Studium, insira no gráfico os pontos indicados abaixo: (1.43, -1.66); (2.03, 2.25); (-1.80, 4.85) e (2.40, 6.40). Com os pontos já marcados, insira a função  $f(x) = x^2$ . Varie os coeficientes da função na aba “Função editada”, de modo que o gráfico se aproxime dos pontos inseridos anteriormente. Que relação você observou entre a variação dos coeficientes e a variação do gráfico da função?

**Figura 35** - Recorte da situação 2 resolvida pelo grupo G3 no Function Studium.



Fonte: Os autores.

Para a situação 2, o grupo G3 utiliza um processo resolutivo (Figura 35) diferente do passo a passo descrito na situação.

Inicialmente, utilizando a função do 2º grau, a dupla insere os valores na tabela e plota a representação gráfica da expressão algébrica  $f_0(x) = 2.2x^2 - 1.2x - 4.5$  (azul claro da Figura 35).

Em seguida, quando a dupla continua lendo a situação, surge a dúvida sobre como inserir a função  $f(x)=x^2$ . Primeiro o grupo procurou algum campo de digitação, sem sucesso; os sujeitos inserem uma segunda função do 2º grau (azul escuro) e, na aba “Função editada”, movimentam os controles deslizantes, de modo que a representação gráfica de cor azul escuro sobrepujasse na representação gráfica de cor azul claro.

A segunda expressão gráfica obtida pelo grupo G3 foi  $f_1(x)=2.1x^2-1.0x-4.5$  (azul claro da Figura 35).

Sobre a variação dos coeficientes e a variação gráfica, os alunos descrevem que:

*O coeficiente “c”, chamado de “a<sub>0</sub>” no programa, desloca o gráfico verticalmente, definindo a intersecção com o eixo “y”. O coeficiente “b” (chamado “a<sub>1</sub>”) desloca horizontalmente e define em que trecho (crescente/decrecente) o gráfico corta o eixo “y”. E o coeficiente “a” (chamado “a<sub>2</sub>”) define a abertura da parábola do gráfico (escrito do grupo G3).*

Analisando a resolução da dupla, no tocante à descrição da situação, os sujeitos apresentaram dificuldades no momento em que avançaram por caminhos opostos à descrição da situação. Porém, comparando o G3 aos outros grupos, concluímos que os demais apresentaram um processo resolutivo semelhante ao enunciado da situação 2, indicando uma possível falta de atenção por parte do grupo G3.

Mesmo com o ocorrido, a dupla conseguiu resolver a situação sem dificuldades, e nos apresentou um novo olhar para a situação.

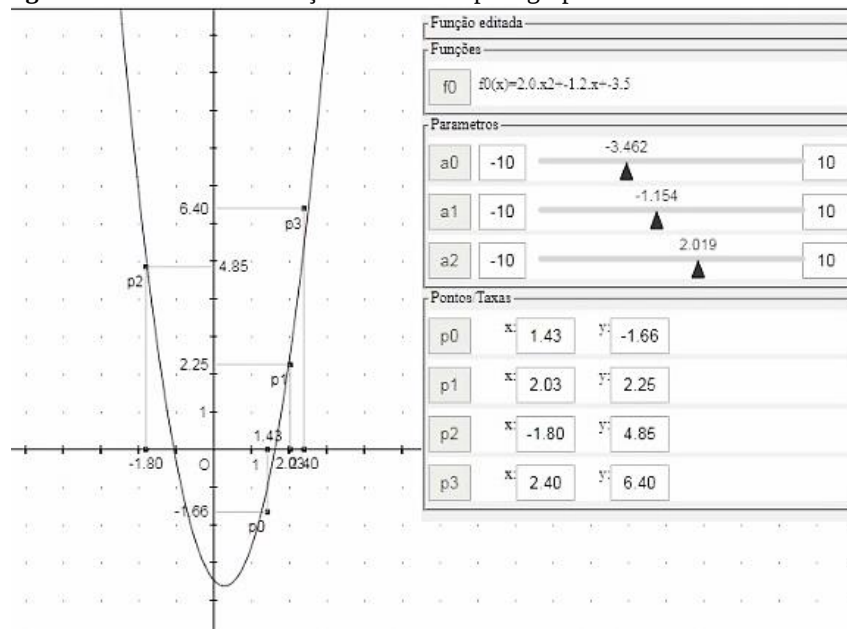
Sobre a Matemática, o grupo não apresentou dificuldades. E por fim, sobre o Function Studium, podemos indicar uma pequena dificuldade, mas logo vencida, quando os sujeitos procuram um campo de digitação no software e não encontram.

À luz do Modelo cKc, identificamos a Concepção Curva (Cc) no processo resolutivo do grupo, no momento em que a dupla manipula os coeficientes da função para conseguir o ajuste polinomial. O ajuste consiste em: conhecendo a função  $f_1(x)$  obtida e o conjunto de pontos informados na situação, a dupla aproximará  $f_1(x)$  aos pontos, utilizando um polinômio mais simples, o  $f_0(x)$ . Em um determinado momento,  $f_0(x)$  coincide com  $f_1(x)$ .

Outro ponto a se destacar na resolução do grupo G3, é a diferença entre gráfico e curva. A representação gráfica da função  $f_0(x)$  é um gráfico. Ou seja, um conjunto de pontos do tipo  $(x, y)$  no plano cartesiano, que se caracteriza como mais uma possível representação para uma função. Já a curva, podemos observar na representação gráfica da função  $f_1(x)$ , pois trata de trajetórias e ajuste de um polinômio (BALACHEFF; GAUDIN, 2002).

No dia da intervenção, muitos grupos tentaram redefinir os limites dos controles deslizantes no software Function Studium. Analisando a captura de tela do grupo G3, a dupla conseguiu vencer esse pequeno bug no software, modificando o intervalo de alguns controles.

**Figura 36** - Recorte da situação 2 resolvida pelo grupo G6 no Function Studium.



**Fonte:** Os autores.

A Figura 36 apresenta a resolução do grupo G6. Analisando a captura de tela, a dupla seguiu o passo a passo indicado na situação. Inicialmente a dupla apresenta dificuldade para inserir o gráfico no Function Studium. Porém, após orientação sobre como poderiam inserir o gráfico, a dupla conseguiu apresentar uma resolução para a situação, sem muitas dificuldades no ajuste polinomial.

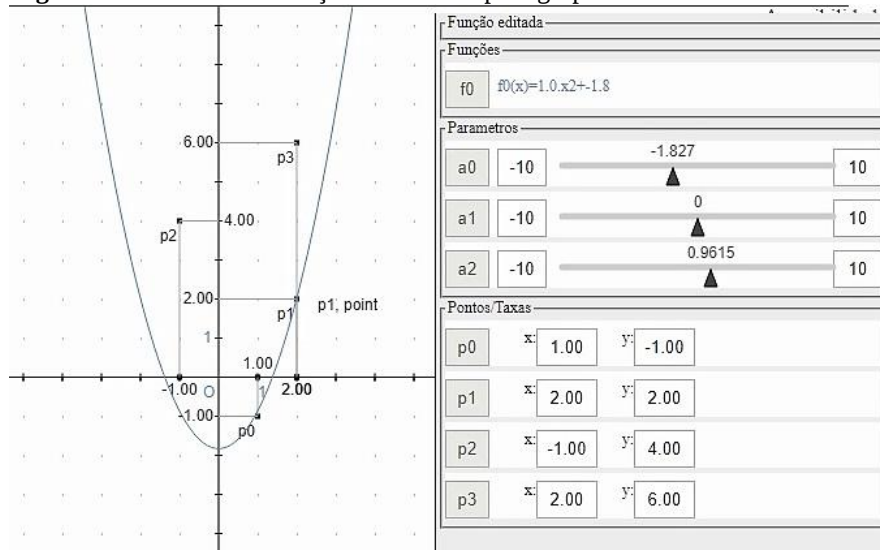
Sobre a variação dos coeficientes e a variação do gráfico, a dupla descreveu que:

*Função:  $2x^2 - 1.2x - 3.5$ . Coeficientes  $a=2$ ,  $b=-1.2$ ,  $c=3.5$ . O parâmetro  $a_0$  muda o deslocamento vertical; (o  $c$  da função). O parâmetro  $a_1$  faz um movimento de um semi-círculo (o  $b$  da função). O parâmetro  $a_2$  altera a concavidade e/ou transforma a função em 1º grau quando o  $a=0$  (escrito do grupo G6).*

Analisando a resolução do grupo G6, não identificamos dificuldades na parte descritiva da situação, na Matemática e também no uso das ferramentas do software Function Studium.

À luz das concepções, também identificamos a Concepção Curva na resolução da dupla, a partir do ajuste polinomial para determinar a parábola que melhor se aproxima dos pontos marcada. Ou seja, com os pontos marcados, a dupla utilizou a função  $f(x) = x^2$ , função essa mais simples, para determinar a função  $f_0(x) = 2x^2 - 1.2x - 3.5$ , a partir do ajuste dos controles deslizantes.

**Figura 37** - Recorte da situação 2 resolvida pelo grupo G11 no Function Studium.



**Fonte:** Os autores.

O grupo G11 apresentou um processo resolutivo semelhante ao grupo G6. Inicialmente, a dificuldade do trio também era inserir o gráfico na aba da representação gráfica. Quando informados do procedimento para inserir gráfico, a dificuldade foi vencida e apresentaram a resolução da Figura 37.

Diferente dos outros dois grupos aqui analisados, o grupo G11 não tentou aproximar a curva aos pontos marcados. Na sua captura de tela, podemos observar que os sujeitos utilizaram os controles deslizantes para entender o significado de cada coeficiente no conceito de função. Eles escrevem que:

*Se  $a_0 > 0$ , o gráfico de  $f$  é translado em relação ao eixo  $y$  para cima, e se  $a_0 < 0$ , o gráfico de  $f$  é translada para baixo.  $a_1$  faz com que o gráfico de  $f$  seja transladado em relação ao eixo  $x$ .  $a_2$  indica para onde estará voltada a concavidade da parábola. Se  $a_2 < 0$  (concavidade para baixo) e se  $a_2 > 0$  (concavidade para cima) (escrito do grupo G11).*

Analisando a resolução do grupo G11, no tocante à descrição da situação, o trio não apresentou dificuldades. Sobre a Matemática, também não foram apresentadas dificuldades. Por fim, sobre o software Function Studium, mais uma vez o grupo utiliza vírgula no lugar de ponto para representar um número decimal.

Uma dúvida que às vezes surgia no grupo, era identificar na janela da representação gráfica os pontos que foram marcados. Como as coordenadas dos pontos no eixo  $x$  no software também ficam destacadas por pontos mais escuros, o trio algumas vezes confundia pontos e coordenadas.

Sobre a concepção que melhor representa o processo resolutivo do trio, acreditamos que pelo fato do grupo G11 não utilizar manipulações na curva e a definição do ajuste polinomial, a Concepção Curva não se encontra tão presente em sua resolução.

Nesse sentido, acreditamos que a Concepção Algébrica ( $C_A$ ) se faz presente no processo resolutivo do grupo, por se tratar de manipulações nos coeficientes da expressão algébrica, para compreender o comportamento da variação dos coeficientes e a variação do gráfico.

Balacheff e Gaudin (2009) apontam que a  $C_A$  não precisa se referir propriamente a um campo experimental, a própria função pode ser objeto de estudo nessa concepção. Outro apontamento dos autores se refere ao conjunto L da concepção. Uma função na  $C_A$ , “pode ser associado um gráfico, que é um conjunto de pares (x, y) no plano cartesiano”<sup>115</sup> (BALACHEFF; GAUDIN, 2002, p. 10, tradução nossa).

A tabela (Tabela 7) abaixo apresenta a caracterização de cada conjunto da concepção presente na resolução dos grupos.

**Tabela 7** - Concepções identificadas nas resoluções dos grupos na situação 2.

| Grupo | Concepção (C) | Operadores (R)                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Sistema de representação (L)                                                                                                                                                                                  | Estrutura de controle ( $\Sigma$ )                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| G3    | Curva         | <p><math>R_{C4}</math>: utilizar a tabela da função do 2 grau para marcar os pontos;</p> <p><math>R_{C5}</math>: plotar a função <math>f_0(x)</math> a partir dos pontos marcados;</p> <p><math>R_{C6}</math>: utilizar a função <math>f_1(x)</math> para se aproximar dos pontos e da função <math>f_0(x)</math>.</p> | <p><math>L_{C2}</math>: representação gráfica e expressão algébrica da função <math>f_0(x)</math>;</p> <p><math>L_{C3}</math>: representação gráfico e expressão algébrica da função <math>f_1(x)</math>.</p> | <p><math>\Sigma_{C2}</math>: representação gráfica da função <math>f_0(x)</math> passando pelos pontos da tabela;</p> <p><math>\Sigma_{C3}</math>: representação gráfica da função <math>f_1(x)</math> sobreposta por aproximação à representação gráfica da função <math>f_0(x)</math>;</p> <p><math>\Sigma_{C4}</math>: expressão algébrica <math>f_1(x)</math>.</p> |
| G6    | Curva         | <p><math>R_{C7}</math>: diversas tentativas para inserir o gráfico devido o bug do software;</p> <p><math>R_{C8}</math>: utilizar o ícone “ponto” para marcar os pontos;</p> <p><math>R_{C9}</math>: plotar a função <math>f(x)=x^2</math>;</p>                                                                        | <p><math>L_{C4}</math>: representação gráfica e expressão algébrica da função <math>f_0(x)</math> a partir da aproximação.</p>                                                                                | <p><math>\Sigma_{C5}</math>: representação gráfica da função <math>f_0(x)</math> se aproximando dos pontos;</p> <p><math>\Sigma_{C6}</math>: expressão algébrica <math>f_0(x)</math>.</p>                                                                                                                                                                              |

<sup>115</sup> Can be associated a graph, that is a set of pairs (x, y) in the Cartesian plane.

| Grupo | Concepção (C) | Operadores (R)                                                                                                                                                                                                                                                     | Sistema de representação (L)                         | Estrutura de controle ( $\Sigma$ )                                                                                                          |
|-------|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|       |               | R <sub>C3</sub> : utilizar os controles deslizantes para aproximar $f(x)$ aos pontos.                                                                                                                                                                              |                                                      |                                                                                                                                             |
| G11   | Algébrica     | R <sub>C8</sub> : utilizar o ícone “ponto” para marcar os pontos;<br><br>R <sub>C9</sub> : plotar a função $f(x)=x^2$ ;<br><br>R <sub>A1</sub> : utilizar os controles deslizantes para mudar a curva e interpretar as diversas mudanças da representação gráfica. | L <sub>A1</sub> : mudanças da representação gráfica. | $\Sigma_{A1}$ : mapear e interpretar acontecimentos relacionados a variação dos coeficientes da função e variação da representação gráfica. |

**Fonte:** Os autores.

Analisando a situação 2 à luz do Modelo cK $\Phi$ , observamos diferentes concepções presentes. Sobre a análise, deixemos claro que ela se volta mais para a manipulação do software, do que para o material descritivo dos grupos sobre a variação dos coeficientes.

Na resolução dos grupos G3 e G6 esteve presente a Concepção Curva. Ambos realizaram o ajuste do polinômio  $x^2$ , porém as técnicas e ferramentas utilizadas no software foram diferentes.

Por fim, o fato do grupo G11 não apresentar uma resolução para a situação, nos oportunizou observar a Concepção Algébrica presente em sua resolução. Caso o grupo tivesse ajustado a curva para melhor se aproximar dos pontos inseridos, poderia ser que a concepção  $C_A$  não estivesse tão presente em sua resolução.

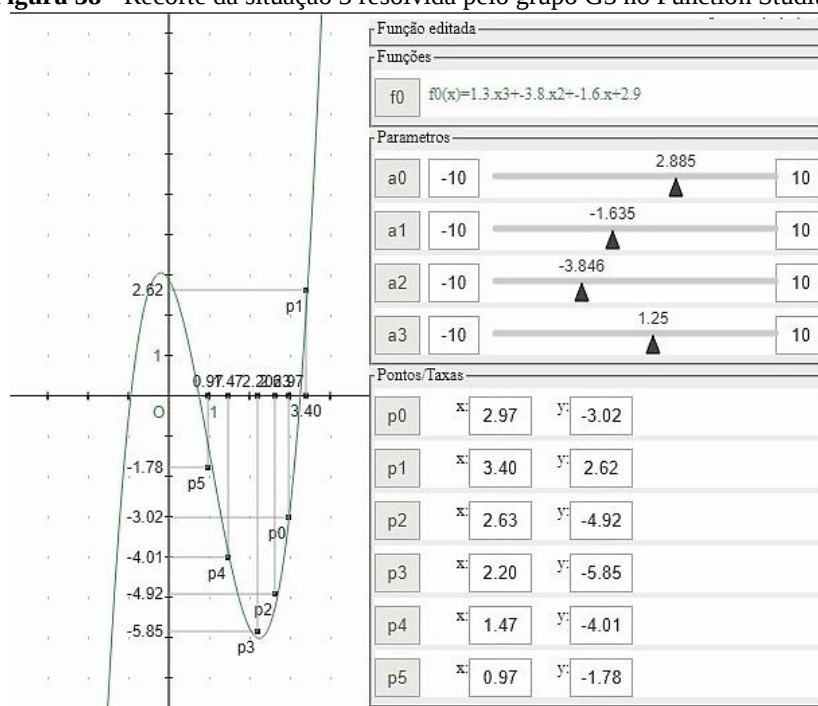
A próxima subseção discute a resposta dos grupos à situação 3 da atividade.

### 7.3 Situação 3: ajustando um polinômio de grau 3

Essa subseção, à luz do Modelo cK $\Phi$  e concepções para o estudo de funções, apresenta a análise das respostas dos grupos G3, G6 e G11 a situação 3 da atividade.

A situação 3 diz que: Na tabela a seguir, os pontos provêm de uma função polinomial do grau 3. Retomando o passo a passo realizado anteriormente, utilize o ícone “Ponto” para marcar os pontos no software. (2.97, -3.02); (3.40, 2.62); (2.63, -4.92); (2.20, -5.85); (1.47, -4.01) e (0.97, -178). Com os pontos já marcados, insira a função  $f(x) = x^3$ , e varie os coeficientes na aba “Função editada” para encontrar uma representação gráfica que melhor se aproxima dos pontos já marcados. Que relação você observou entre a variação dos coeficientes e a variação do gráfico da função?

**Figura 38** - Recorte da situação 3 resolvida pelo grupo G3 no Function Studium.



Fonte: Os autores.

A Figura 38 apresenta a resolução do grupo G3 para a situação 3. Para alcançar o ajuste polinomial desejado, a dupla inicia experimentando um caminho resolutivo semelhante à situação 2 resolvida pelo grupo, ou seja: utilizam a tabela, preenchem com os pontos indicados na situação e plotam o gráfico da função.

Porém, curiosamente, enquanto a dupla inseria os valores na tabela, o intervalo dos coeficientes da expressão algébrica,  $a_0, a_1, a_2$  e  $a_3$ , mudavam para  $-1000 \leq \text{coeficientes} \leq 10000$ . O grupo G3 utilizou esse processo três vezes, e em cada um determinaram uma expressão algébrica diferente.

1º tentativa:  $f_0(x) = -13.9x^3 + 121.2x^2 - 3.38.4x + 300.7$  (o primeiro ponto da tabela, os sujeitos inseriram com vírgula);

2º tentativa: Sem inserir valores na tabela, a dupla utiliza os controles deslizantes para entender o comportamento do gráfico com o seguinte diálogo:

**Estudante 1:** Isso daqui é o coeficiente, tá ligado? (*Mexendo nos controles deslizantes*).

**Estudante 2:** É.

**Estudante 1:** É o coeficiente que vai ficar, mano. Olha ele aumentando aqui o termo independente. Aí tipo, os outros três definem a fórmula, tá ligado. Mano, esse daqui é o único sem significado, tá ligado? (*Se referindo a  $a_0$* ).

3º tentativa: inseriu os pontos na tabela e obteve a expressão algébrica  $f(x)=6.4x^3-46.2x^2+113.3x-99.5$ .

4º tentativa: a mesma coisa da anterior. Expressão:  $f(x)=4.4x^3-30.2x^2+70.1x-61.2$ .

Com a nossa ajuda, os sujeitos foram instruídos a utilizar o ícone “Ponto” do software, inserir os pontos da tabela e utilizar a função  $f(x)=x^3$  para determinar uma representação gráfica que melhor se aproximasse dos pontos inseridos, obtendo o recorte da Figura 38.

Para a variação dos coeficientes e variação da representação gráfica, a dupla descreve que:

*O coeficiente “ $a_0$ ” é o termo independente e desloca o gráfico verticalmente. O “ $a_1$ ” deixa o gráfico mais próximo de uma reta de acordo com o seu aumento. O “ $a_2$ ” acentua a abertura das curvas de acordo com o módulo do seu valor. O “ $a_3$ ” dá a forma de função do terceiro grau, caso seu valor seja 0, o gráfico é uma parábola (escrito do grupo G3).*

Analisando a resposta do grupo, no tocante à descrição da situação, a dupla apresentou dificuldade para determinar uma expressão algébrica, sendo necessário passar algumas instruções para o grupo. Acreditamos que essa dificuldade foi causada por falta de atenção da dupla, pois os demais grupos não apresentaram dúvidas na situação.

Sobre a Matemática, os sujeitos não apresentaram dificuldades. Por fim, sobre o software, acreditamos que a mudança do intervalo dos coeficientes acabou se tornando uma dificuldade para o grupo, pois como o intervalo estava enorme, os mesmos não alcançavam precisão nos movimentos dos controles deslizantes. Não sabemos explicar o que causou a mudança nos intervalos. Na captura de tela dos demais grupos, não encontramos esse tipo de bug.

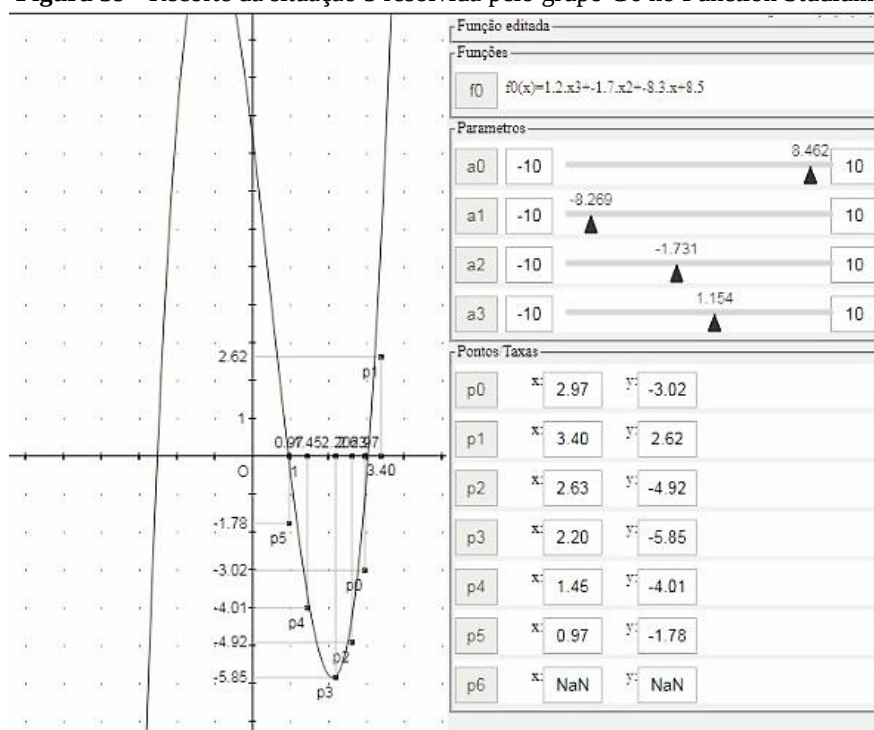
À luz da teoria que norteia esta escrita, a concepção mais presente na resolução do grupo G3 é a Concepção Curva, por motivos semelhantes aos já apresentados anteriormente: o ajuste da função  $f(x)=x^3$ , para determinar a expressão algébrica  $f_0(x)=1.3x^3-3.8x^2-1.6x+2.9$ , com representação gráfica que melhor se aproxima do conjunto de pontos. O diálogo (diálogo 1) a seguir mostra a fala dos sujeitos quando determinaram a representação gráfica apresentada na Figura 39.

Diálogo 1:

**Estudante 1:** C\*\*, cheguei muito perto.

**Estudante 2:** Chegou, chegou.

**Figura 39** - Recorte da situação 3 resolvida pelo grupo G6 no Function Studium.



**Fonte:** Os autores.

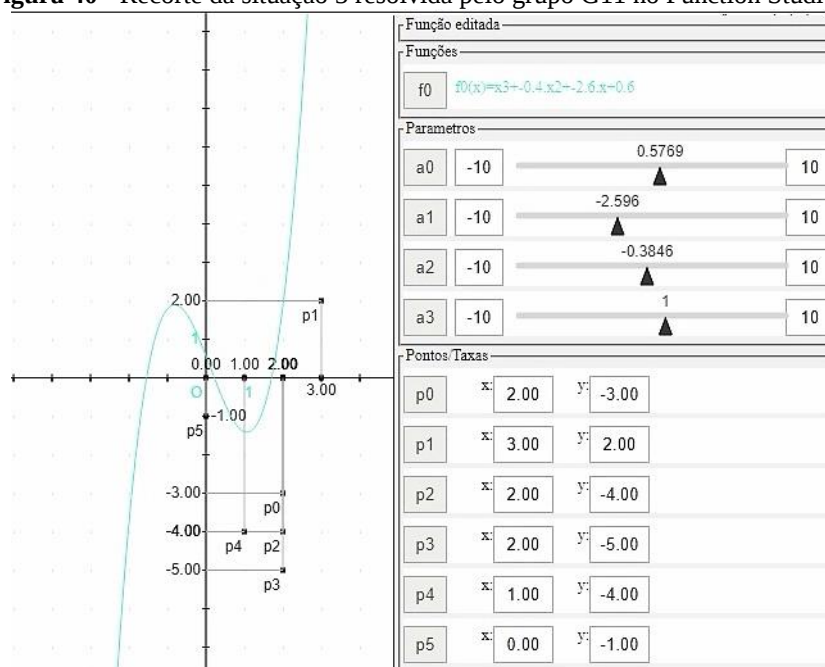
A Figura 39 apresenta a resolução do grupo G6. Para a resolução, o grupo utilizou o passo a passo descrito na situação. Por estarem familiarizados após resolver a situação 2, na situação 3 a dupla rapidamente inseriu os pontos na janela de representação gráfica, e começou a movimentar os controles deslizantes, determinando a expressão  $f_0(x) = 1.2x^3 - 1.7x^2 - 8.3x + 8.5$ .

Sobre a variação dos coeficientes e a variação gráfica, o grupo G6 diz que:

Função:  $1.2x^3 - 1.7x^2 + 8.3x + 8.6$ . Coeficientes:  $a_0=d$ ;  $a_1=c$ ;  $a_2=b$ ;  $a_3=a$ .  $a_0$  podemos observar a movimentação vertical.  $a_0=0$ ;  $a_1=0$ ;  $a_2=0$ ;  $a_3=0 \rightarrow$  ponto.  $a_1$  mudança da concavidade voltada para baixo.  $a_1=0$ ;  $a_2=0$ ;  $a_3=0 \rightarrow$  constante.  $a_2$  mudança das duas concavidades  $a_2=0$ ;  $a_3=0 \rightarrow$  função 1º grau.  $a_3$  ele faz a inversão das concavidades.  $a_3=0 \rightarrow$  função 2º grau (escrito do grupo G6).]

Analisando a resolução da dupla, não encontramos dificuldades na parte descritiva da situação, na Matemática e no software Function Studium. À luz do Modelo cKc, acreditamos que a Concepção Curva se encontra melhor presente na resolução da dupla por motivos já mencionados anteriormente.

**Figura 40** - Recorte da situação 3 resolvida pelo grupo G11 no Function Studium.



Fonte: Os autores.

O último grupo a ser analisado, G11 também utilizou o passo a passo indicado na situação. Primeiro marcou os pontos utilizando o ícone “Ponto” do Function Studium, em seguida utilizou o ícone “Função do 3º grau” para plotar uma representação gráfica e movimentar os controles deslizantes para entender o comportamento do gráfico (Figura 40).

Sobre a variação dos coeficientes e variação da representação gráfica, o trio descreve que:

*$a_0$  = eixo y, quando os valores são positivos ela tende a subir, quando são negativos ela tende a descer.  $a_1$  = quanto maior for  $a_1$ , menor vai ser a curvatura, e o gráfico vai se aproximando de uma reta e quanto menor, maior é a curvatura do gráfico.  $a_2$  = quanto maior foi  $a_2$ , o gráfico se concentra mais nos quadrantes 1, 2 e 3, quanto maior, ele se concentra em 1, 3 e 4.  $a_3$  = define se a função é crescente ( $a_3 > 0$ ) e decrescente ( $a_3 < 0$ ) (escrito do grupo G11).*

Analisando a resposta do grupo, no tocante à Matemática, descrição da situação e uso do software, não identificamos dificuldades. À luz das concepções, mais uma vez acreditamos que a concepção melhor presente na resolução do grupo G11 é a Concepção Algébrica, por motivos semelhantes à situação 2. O grupo não determinou uma representação gráfica que melhor se aproxime do conjunto de pontos, e utilizou os controles deslizantes para entender o comportamento dos coeficientes de uma função de grau 3.

A tabela (Tabela 8) abaixo apresenta a caracterização de cada conjunto da concepção presente na resolução dos grupos.

**Tabela 8** - Concepções identificadas nas resoluções dos grupos na situação 3.

| Grupo | Concepção (C) | Operadores (R)                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Sistema de representação (L)                                                                                                                  | Estrutura de controle ( $\Sigma$ )                                                                                                                                                                                                                |
|-------|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| G3    | Curva         | <p>R<sub>C10</sub>: tentativas para resolver a situação;</p> <p>R<sub>C8</sub>: utilizar o ícone “ponto” para marcar os pontos;</p> <p>R<sub>C11</sub>: plotar a função <math>f(x)=x^3</math>;</p> <p>R<sub>C3</sub>: utilizar os controles deslizantes para aproximar <math>f(x)</math> aos pontos.</p> | <p>L<sub>C4</sub>: representação gráfica e expressão algébrica da função <math>f_0(x)</math> a partir da aproximação.</p> <p>(Figura 38).</p> | <p><math>\Sigma_{C5}</math>: representação gráfica da função <math>f_0(x)</math> se aproximando dos pontos;</p> <p><math>\Sigma_{C6}</math>: expressão algébrica <math>f_0(x)</math>.</p> <p><math>\Sigma_{C7}</math>: diálogo 1 do grupo G3.</p> |
| G6    | Curva         | <p>R<sub>C8</sub>: utilizar o ícone “ponto” para marcar os pontos;</p> <p>R<sub>C11</sub>: plotar a função <math>f(x)=x^3</math>;</p> <p>R<sub>C3</sub>: utilizar os controles deslizantes para aproximar <math>f(x)</math> aos pontos.</p>                                                              | <p>L<sub>C4</sub>: representação gráfica e expressão algébrica da função <math>f_0(x)</math> a partir da aproximação.</p> <p>(Figura 39).</p> | <p><math>\Sigma_{C5}</math>: representação gráfica da função <math>f_0(x)</math> se aproximando dos pontos;</p> <p><math>\Sigma_{C6}</math>: expressão algébrica <math>f_0(x)</math>.</p>                                                         |
| G11   | Algébrica     | <p>R<sub>C8</sub>: utilizar o ícone “ponto” para marcar os pontos;</p> <p>R<sub>C11</sub>: plotar a função <math>f(x)=x^3</math>;</p> <p>R<sub>A1</sub>: utilizar os controles deslizantes para mudar a curva e interpretar as diversas mudanças da representação gráfica.</p>                           | <p>L<sub>A1</sub>: mudanças da representação gráfica.</p>                                                                                     | <p><math>\Sigma_{A1}</math>: mapear e interpretar acontecimentos relacionados a variação dos coeficientes da função e variação da representação gráfica.</p>                                                                                      |

**Fonte:** Os autores.

Sobre as resoluções para a situação 3, esperávamos encontrar processos resolutivos semelhantes à situação 2, pois ambas as situações são semelhantes, mudando apenas o grau da função.

O grupo G3, comparando o processo resolutivo da situação 2 e 3, foi o único que apresentou uma resolução diferente em ambas. Porém as duas lhe permitiram apresentar a mesma concepção, a Concepção Curva.

À luz do Modelo cK $\Phi$ , acreditamos que as abordagens e justificativas apresentadas durante a presente escrita, nos permitiram justificar nossas escolhas e decisões acerca das concepções presentes nos processos resolutivos dos grupos, alcançando a problemática de pesquisa e os objetivos apresentados.

A seguir, apresentamos a última seção da presente escrita.

## 8 CONSIDERAÇÕES SOBRE A INVESTIGAÇÃO

Durante nossos estudos sobre a história do Conceito de Função (apresentados na subseção 2.3), são perceptíveis as mudanças deste conceito, descobertas e reinvenções de novas formas de representar, manipular e defini-lo. Também podemos evidenciar o impacto da sociedade e os problemas que nortearam cada período da história da humanidade, como possíveis impactadores na progressão deste conceito.

Sobre a matemática ensinada e a História da Matemática, concordamos com a fala de Cotret (1988) quando a autora sugere que

A matemática ensinada hoje é muitas vezes o resultado da evolução dos conceitos de mil anos de idade. No entanto, nem sempre levamos em conta essa evolução e muitas vezes nos contentamos em dar aos alunos o produto acabado sem significado e contexto<sup>116</sup> (p. 5, tradução nossa).

Partindo da importância da História da Matemática para a educação, deixamos registrado nessa escrita a relevância da presente pesquisa em analisar o software Function Studium, à luz do Modelo cKc (BALACHEFF, 1995), cujas concepções estão baseadas na história de um dos conceitos mais importantes e utilizados na Matemática: o conceito da Função.

O Function Studium é um software que foi desenvolvido para fins educacionais do conceito de Função. Reconhecer, a partir da análise da intervenção, que este também corresponde à história do conceito que ele propõe articular, faz dele uma grande ferramenta tecnológica para ser utilizada em sala de aula.

Nesse sentido, a presente seção foi dividida em duas subseções. A primeira subseção traz conclusões gerais da pesquisa, e a segunda subseção pontua possíveis aprimoramentos e requisitos para as próximas versões do software Function Studium.

### 8.1 Sobre a pesquisa, softwares e concepções

A presente subseção traz conclusões gerais sobre a pesquisa.

Retomando o escopo desta escrita, mapeamos as concepções Tabela, Curva, Algébrica, Relação e Objeto, nos softwares Casyopée, Function Studium, GeoGebra e Modélus.

---

<sup>116</sup> Les mathématiques que l'on enseigne aujourd'hui au secondaire sont souvent le résultat de l'évolution de concepts vieux de 1000 ans. Cependant, on ne tient pas toujours compte de cette évolution et on se contente souvent de donner aux élèves le produit fini dénué de son sens et de son contexte.

No software Function Studium, mapeamos as concepções a partir de uma intervenção com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática. Nos demais softwares, realizamos uma análise deles, considerando três situações que envolveram o conceito da Função.

As análises aqui registradas favoreceram a compreensão de como as ferramentas dos softwares permitem que as concepções possam ser articuladas nas situações propostas, quando o sujeito se encontra diante de um problema.

No processo de desenvolvimento da pesquisa, iniciamos nossos estudos com a apropriação da teoria que norteou o processo da escrita. Após essa etapa, identificamos os softwares que foram utilizados para análise. Identificados estes, partimos para o momento de familiarização das ferramentas disponíveis nos softwares. Com os softwares já familiarizados, decidimos utilizar apenas o software Function Studium para o momento da intervenção, por este ser desenvolvido pelo LEMATEC.

Na análise dos softwares Casyopée, GeoGebra e Modellus, percebemos uma grande limitação no primeiro e no último. Dentre algumas das possíveis justificativas para essa limitação, destacamos o período em que os softwares foram desenvolvidos e a periodização ou ausência de novas versões dos softwares.

Também podemos pontuar como limitação no Modellus, ter sido este software idealizado e desenvolvido na finalidade de modelar a Física. Mesmo que o software também permita modelar a Matemática, sua criação está fundamentada no currículo da Física.

Sobre o GeoGebra, alguns processos resolutivos foram interessantes de verificar nesse software. Por exemplo, na situação 1, para a criação da tabela, o software disponibiliza uma planilha semelhante ao Excel.

A planilha permite “modelar” a tabela de acordo com suas necessidades. Além disso, a tabela sendo criada em uma planilha, permite a “entrada” de expressões algébricas, coordenadas de pontos, números e outros. Por exemplo, no grupo G6, quando inseriram a função  $x+1$  no Function Studium, se o grupo tivesse acesso a uma tabela semelhante às funções de uma planilha, que permite a entrada de diversas representações matemáticas, o processo resolutivo apresentado pelo grupo na situação 1 da atividade poderia ser diferente.

Outro exemplo a ser citado está na resolução do GeoGebra na situação 3, na análise da subseção 7. Por um lado, utilizar a ferramenta “análise bivariada” permite que o sujeito possa verificar a curva que melhor se aproxima dos pontos já marcados. Por outro lado, se essa ferramenta fosse a única opção para obter o ajuste polinomial, ausentaria o sujeito de realizar esse processo pelos controles deslizantes e refletir sobre os coeficientes de uma função.

Sobre a atividade que contém as três situações, citamos na subseção 5.1 possíveis concepções que estão mais representadas em cada uma delas. Porém, nas análises realizadas nas seções 5 e 6, presenciamos e caracterizamos todas as concepções em nossas análises.

Na caracterização de cada conjunto de uma concepção, verificamos que alguns operadores (R), sistema de representação (L) ou estrutura de controle ( $\Sigma$ ), estão presentes em mais de uma concepção

Isso nos permitiu observar e concluir que alguns R, L ou  $\Sigma$  não estão limitados apenas a uma concepção. Essa observação também nos faz lembrar que o Modelo cK $\Phi$  articula o conceito, conhecimento e concepção, e que, por sua vez, quando há uma relação entre as concepções, podemos presenciar a passagem do nível de concepção para o nível conhecimento.

Na próxima e última subseção da escrita, pontuamos alguns requisitos para as próximas atualizações do Function Studium.

## 8.2 Pensando nas próximas atualizações do software Function Studium

Essa subseção pontua requisitos para as próximas atualizações do software Function Studium.

A partir da análise da intervenção e a análise nos demais softwares, podemos pontuar alguns requisitos para uma próxima atualização do software Function Studium. São elas:

- Incrementação na entrada da tabela.

Mudança da tabela, permitindo o sujeito utilizar como entrada uma expressão algébrica, coordenadas de pontos e outras representações matemáticas.

Na subseção 7.1, quando criamos uma tabela nos softwares Casyopée e Modellus, as tabelas não podiam ter editadas as suas células. Esse tipo de tabela limita a interação entre o sujeito e esse tipo de sistema de representação.

Na seção 8 que analisa o Function Studium, a tabela disponível no software permite que o sujeito preencha as células dela, porém aceitam como entrada apenas números. Essa tabela fez com que um dos grupos analisado na pesquisa, mudasse suas estratégias de resolução para se adequar à limitação do software.

Nesse sentido, para o Function Studium propomos uma tabela com funções semelhantes a uma planilha, porém mantendo o formato de uma tabela.

- Ajuste polinomial considerando “parâmetros” além dos conjuntos de pontos.

Esse requisito nos faz retomar a resolução do grupo G3 na situação 2. Inicialmente o grupo marca os pontos da tabela, plota a função  $x^2$  e, a partir desta, realiza o ajuste polinomial.

Como já mencionado anteriormente, o ajuste polinomial permite definir a função  $f(x)$ , aproximando essa função ao conjunto de pontos, utilizando uma  $g(x)$ . No geral, a  $g(x)$  é um polinômio mais simples, que coincide com  $f(x)$ , no conjunto de pontos indicados.

Porém, além do conjunto de pontos, podemos também utilizar a representação gráfica de  $g(x)$ , para definir a  $f(x)$ . Nesse sentido, propomos realizar ajustes polinomiais utilizando não só um conjunto de pontos, mas também uma representação gráfica, expressões e outros.

- Não haver diferenças entre ponto e vírgula para representar um número decimal.

Nos processos resolutivos do grupo G11, o uso da vírgula no lugar do ponto limitou o grupo a utilizar números decimais. Esse tipo de limitação apresentada pelo software fez com que o grupo utilizasse apenas a parte inteira dos números, modificando alguns processos resolutivos do grupo.

Nesse sentido, é interessante abordar como requisito o software deixar clara a diferença entre ponto e vírgula ou então não os diferenciar quando são manipulados números decimais.

- Manter a utilização dos controles deslizantes para definir uma expressão algébrica.

Na intervenção, muitos estudantes tentaram definir uma expressão algébrica manualmente (digitando). O Function Studium é um dos primeiros softwares a abordar de maneira diferente a definição de uma expressão. Como os estudantes estavam acostumados a digitar expressões, coordenadas de pontos e outros, inicialmente percebemos algumas limitações, que logo foram vencidas, para definir  $f(x)$ .

Definir uma expressão algébrica a partir dos controles deslizantes, nos permite refletir sobre a importância e a relação entre os coeficientes de uma função, sua expressão algébrica e a representação gráfica.

Por outro lado, no software Function Studium, quando mudamos o intervalo dos controles deslizantes, fica impossível determinar uma expressão algébrica quando esse intervalo é extremamente grande, pois é quase impossível obtermos valores decimais pequenos, por mais que o deslizamento do controle seja mínimo.

Nesse sentido, propomos um requisito onde a definição de uma expressão algébrica continue com o uso dos controles deslizantes, mas que, ao mudar o intervalo dos coeficientes, não haja dificuldades para o sujeito, quando utilizar os controles deslizantes.

- Mudar e realçar cores das representações gráficas e das expressões algébricas.

A paleta de cores do Function Studium sempre tende para tons mais azuis ou verdes, e bem semelhantes uns aos outros. Nesse sentido, se o software apresentar cores mais realçadas e distintas, nos permitirá melhor identificar e relacionar as diversas representações de uma função.

- Uma barra de rolagem à direita apenas para os dados e informações que estão sendo gerados pelo sujeito e no software.

Analizando todas as capturas de telas coletadas, vimos vários grupos gerando uma quantidade enorme de dados, de modo que, quando utilizavam a barra de rolagem para acessar os dados de baixo, não podiam mais visualizar o campo da representação gráfica, os ícones do software, os controles deslizantes e outras informações.

Nesse sentido, propomos como requisito uma barra de rolagem apenas para os dados e informações que estão sendo gerados, permitindo que o sujeito possa acessar qualquer dado, sem perder de vista as telas e ícones do software.

- Uma possível utilização do software em outras bases tecnológicas e no modo off-line.

Para utilizar o Function Studium, é necessário estar conectado à internet. Em ambientes que não possuem internet, é impossível utilizar o software.

Como requisito, propomos que nas próximas atualizações o software possa ser utilizado também sem o uso da internet, para que o software Function Studium alcance o maior número possível de usuários. Também propomos versões do software para outras bases tecnológicas, como por exemplo, app para celulares, tablets e outros.

- Ícones de compartilhamento rápido, desfazer e salvar

No momento da intervenção, uma das perguntas que os estudantes mais faziam era “como faço para desfazer esse último procedimento?”. Os sujeitos eram informados que, para desfazer, precisariam limpar todo o software e começar do zero.

Nesse sentido, propomos com o requisito para as próximas atualizações, alguns ícones de compartilhamentos rápidos, permitindo compartilhar o que foi construído no software para demais usuários, um botão de desfazer procedimentos recentes, permitindo o sujeito voltar para o estado desejado, e um botão de salvar o que foi construído no software.

Sobre o Function Studium, é interessante destacarmos que ele foi criado a partir do objetivo de duas pesquisas de mestrado que trabalharam com requisito de software, estudo covariacional, múltiplas representações e desenvolvimento de software. Porém, analisando o Function Studium de modo geral, o software apresentou um grande rendimento para o objetivo da nossa pesquisa, destacando-se sua potencialidade para o estudo das funções.

Para trabalhos futuros, propomos incrementar o Function Studium, aperfeiçoando seus ícones e suas funções, baseado no que conseguimos coletar na intervenção e na análise dos demais softwares. Também propomos ampliar o uso do Function, permitindo que este alcance o maior número de usuários.

No que concerne a esta pesquisa, reconhecemos que a ausência de uma retomada à turma de estudantes, com as situações incrementadas, ou seja, uma análise pós intervenção, pode ser destacado como um ponto negativo de nossa pesquisa.

Na atividade, destacamos que a situação 3 podia ser melhor articulada, pois nos dados gerados, a situação 2 influenciou nos processos resolutivos da situação 3.

A respeito do Modelo cK $\Phi$ , propomos para trabalhos futuros, aprofundarmos a teoria também no viés do conhecimento e conceito. Com isso, podemos identificar a articulação entre as concepções, a passagem do nível de concepção para conhecimento e o conceito presente nas articulações.

Por fim, sobre o software e a teoria, pretendemos continuar e aprofundar nossas pesquisas sobre o Modelo cK $\Phi$  e as concepções de funções, definindo novas concepções a serem mapeadas em softwares e gerando novos requisitos para o Function Studium, na intenção de melhorar e aperfeiçoar o software.

## REFERÊNCIAS

- AMARAL, M. P.; SILVEIRA, I. F.; CURI, E. **O uso do software GeoGebra na construção do conhecimento em funções matemáticas: um estudo sobre as pesquisas na área de ensino de Ciências e Matemática.** In: 4º Congresso Científico da Semana Nacional de Ciência e Tecnologia no IFSP, Bragança Paulista, 2013.
- AMARAL, M. P.; FRANGO, I. Um Mapeamento do número de pesquisas que mostram O uso do software GeoGebra para validar o tema: Contribuições do uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) na aprendizagem de funções matemáticas. **Revista Educação & Tecnologia**, Belo Horizonte. v. 18, n. 2, 2013.
- AMARAL, M. P.; FRANGO, I. Um levantamento sobre pesquisas com o uso do software geogebra no ensino de funções matemáticas. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Santa Catarina. v. 9, n. 1, 2014.
- ARTIGUE, M. Épistémologie et didactique. **Recherche en didactique des mathématiques**, vol. 10, n. 2.3. p. 241-286, 1990.
- BALACHEFF, N. **Conception, connaissance et concept.** Denise Grenier. Séminaire de l'équipe DidaTech, IMAG, 1995, Grenoble, France. IMAG Grenoble, 1995. <hal-01072247>
- BALACHEFF, N. Les connaissances, pluralité de conceptions – le cas des mathématiques. **Journées francophones d'ingénierie des connaissances.** Toulouse. 2001.
- BALACHEFF, N. CK $\phi$ , a model to understand learner's understanding: discussing the case of functions. **Revista El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática**, Cidade do México. v. 9, n. 8, 2017.
- BALACHEFF, N.; GAUDIN, N. Students conceptions: an introduction to a formal characterization. **Research report, "Les Cahiers Leibniz, n 65"**. 2002. <hal-00190425>.
- BALACHEFF, N.; GAUDIN, N. Modeling students' conceptions: The case of function. **CBMS Issues in Mathematics Education**, 2009.
- BARROS, A. P. R. M. de; STIVAM, E. P. O software GeoGebra na Concepção de Micromundo. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo.** v. 1, n. 1, 2012.
- BROUSSEAU, G. **La théorie des situations didactiques.** Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. A paraître dans "Interactions didactiques" (Genève). 1997. Disponível em: <<http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/Brousseau.pdf>>
- CAVALCANTI, J. D. B.; SANTOS, M. C. **Algumas considerações acerca da utilização do termo concepção como noção teórica nas pesquisas em Didática da Matemática.** In: V Congresso Internacional de Ensino da Matemática, Canoas, Rio Grande do Sul, 2010.

FORNAZA, Roseli. **Robótica educacional aplicada ao ensino de física**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPECiMa), Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2016.

GAUDIN, N. **Place de la validation dans la conceptualisation**: le cas du concept de fonction. 2005. Tese (Doutorado) Université Joseph Fourier - Grenoble 1, 2005.

HOHENWARTER, M. GeoGebra 4.4 – from Desktops to Tablets. **Revista Indagation Didactica**, Aveiro. v. 5, n. 1, 2013.

LAGRANGE, J. **New representational infrastructures**: broadening the focus on functions. Oxford: Oxford University Press, 2014.

LIMA, I. Conhecimentos de alunos da Educação Básica sobre a simetria de reflexão. **Educação Matemática em Revista**, v. 25, n. 25, 2008.

MACIEL, P. R. C. **A construção do conceito de função através da História da Matemática**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2011.

MIYAKAWA, T. **Une étude du rapport entre connaissance et preuve**: le cas de la notion de symétrie orthogonale. 2005. Tese - Doutorado na Université Joseph Fourier - Grenoble 1, 2005.

NOVAES, D. V. **Concepções de professores da Educação Básica sobre variabilidade estatística**. 2011. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

OLIVEIRA, P. G. de. **Probabilidade**: Concepções construídas e mobilizadas por alunos do Ensino Médio à luz da Teoria das Concepções (CK $\Phi$ ). 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SILVA, C. T. J. **A Engenharia Didática** – Informática na prototipação de um software para abordar o conceito de taxa de variação. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife, 2016.

TEODORO, V. D. **Modellus: Learning Physics with Mathematical Modelling**. 2002. Dissertação (Ciências da Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologia Universidade Nova de Lisboa, 2002.

TIBÚRCIO, R.S. **Processo de desenvolvimento de software educativo**: um estudo da prototipação de um software para o ensino de função. 2016. Dissertação (Mestrado em

Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife, 2016.

VÁZQUEZ, P. S.; REY, G.; BOUBÉE, C. El concepto de función a través de la Historia. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. nº 16, 2008.

VELANDIA, E. L.; LEAL, J. E. F. Estrategias que emergen en la resolución de problemas de variación y cambio. **Revista Colombiana de Matemática Educativa**. v. 1, n. 1, p. 330-335, 2015a.

VELANDIA, E. L.; LEAL, J. E. F. Aproximación a las concepciones usadas en la resolución de problemas de variación y cambio. In: Conferência Interamericana de Educación Matemática, 14, 2015b. Chiapas. **Anais...** México: CIAEM, 2015b.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en didactique des mathématiques**. V. 10 (2/3) p. 133-169, 1991.

VERGNAUD, G. La theorie des champs conceptuels. In: BRUN, J. (Org.). **Didactique des mathématiques**. Lausanne: Delachaux; Paris: Niestlé, 1996.

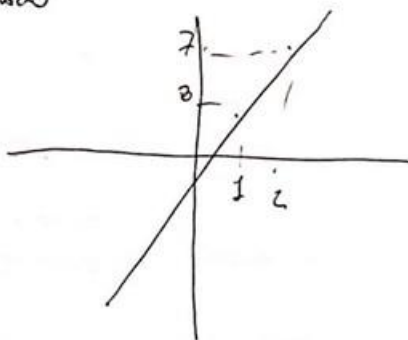
VOSGERAU, D. Sant'Anna R.; ROMANOWSKI, J. P. Estudos de revisão: implicações conceituais e metodológicas. **Revista Diálogo Educacional**, v. 14, n. 41, 2014.

WEBBER, C. **Modélisation informatique de l'apprenant**: Une approche basée sur le modèle CK $\phi$  et la théorie de l'émergence. Doutorado na Universidade Joseph Fourier - Grenoble 1, 2003.

## APÊNDICE A – RESPOSTAS DO GRUPO G3 DA ATIVIDADE

1a. Não, pois achávamos que não tinha graça. Mas depois de dois pontos quando plotou a reta, colocamos um ponto fora da reta e ele ficou cinza como fosse errado.

2a. Sim,  $f(x) = 4x + 1$ ,



3a. Respondido no a

2º) O coeficiente "C", chamado de "a<sub>0</sub>" no programa, desloca o gráfico verticalmente, definindo a interseção com o eixo "Y". O coeficiente "B" (chamado "a<sub>1</sub>") desloca horizontalmente e define em que trecho (crescente/decrecente) o gráfico corta o eixo "Y". E o coeficiente "A" (chamado "a<sub>2</sub>") define a abertura da parábola do gráfico.

3º) O coeficiente "a<sub>0</sub>" é o termo independente e desloca o gráfico verticalmente. O "a<sub>1</sub>" deixa o gráfico mais próximo de uma reta de acordo com o seu aumento. O "a<sub>2</sub>" aumenta a abertura das curvas de acordo com o módulo do seu valor. O "a<sub>3</sub>" dá a forma de função do terceiro grau, caso seu valor não 0, o gráfico é uma parábola.

## APÊNDICE B – RESPOSTAS DO GRUPO G6 DA ATIVIDADE

1) Função :  $x+1$

a) Fizemos a escolha da função e utilizamos os valores de  $x = 0, 1, 2, 3, 4$  para construção da nossa tabela.

b) Expressão Algébrica :  $F(x) = x+1$ .

Representação gráfica : Uma reta começando do ponto  $(0,1)$ .

c) Não há uma curva. Sim, vimos que os pontos coincidem com a função (expressão gráfica) e a representação gráfica.

2) Função :  $2x^2 - 1.2x - 3.5$

COEFICIENTES :  $a=2$  ,  $b=-1.2$  ,  $c=-3.5$

O parâmetro  $a_0$  muda o deslocamento vertical; ( $0$  e da função)

O parâmetro  $a_1$  faz um movimento de um semi-círculo. ( $0$  b da função)

O parâmetro  $a_2$  altera a concavidade e/ou transforma a função em 1º grau quando

o  $a=0$ .

3) Função :  $1.2x^3 - 1.7x^2 + 3.3x + 8.6$

COEFICIENTES :  $a_0 = d$  ;  $a_1 = c$  ;  $a_2 = b$  ;  $a_3 = a$

$a_0$  podemos observar a movimentação vertical.  $a_3=0$ ,  $a_2=0$ ,  $a_1=0$  e  $a_0=0 \Rightarrow$  ponto

$a_1$  mudança de concavidade voltada para baixo.  $a_3=0$  e  $a_2=0$  e  $a_1=0 \Rightarrow$  constante

$a_2$  mudança das duas concavidades.  $a_2=0$  e  $a_3=0 \Rightarrow$  função 1º grau

$a_3$  ele fez a inversão das concavidades.  $a_3=0 \Rightarrow$  função 2º grau

### APÊNDICE C – RESPOSTAS DO GRUPO G11 DA ATIVIDADE

(1) (a) Escolhemos valores inteiros no início e depois começamos a colocar números racionais.

(b)  $f(x) = x^2$  / Parábola

(c) Quando inserimos valores para  $x$  sendo racionais, os mesmos foram modificados e o software só considerou as partes inteiras dos números. Ex:  $x = 0,9 \rightarrow x = 0$

• Nas partes inteiras, sim.

(2) • Se  $a_1 > 0$ , o gráfico de  $f$  é traduzido em relação ao eixo  $y$  para cima, e se  $a_1 < 0$ , o gráfico de  $f$  é traduzido para baixo.

•  $a_1$  faz com que o gráfico de  $f$  seja traduzido em relação ao eixo  $x$ .

•  $a_2$  indica para onde estará voltada a concavidade da parábola.

Se  $a_2 < 0$  (concavidade para baixo) e se  $a_2 > 0$  (concavidade para cima).

(3)  $a_0$  = eixo  $y$ , quando os valores são positivos ela tende a subir, quando são negativos ela tende a descer.

$a_1$  = Quanto maior for  $a_1$ , menor vai ser a curvatura, e o gráfico vai se aproximando de uma reta e quanto menor, maior é a curvatura do gráfico.

$a_2$ : Quando maior foi o  $a_2$ , o gráfico se concentra mais nos quadrantes 1, 2 e 3, quanto maior, ele se concentra em 1, 3 e 4.

$a_3$ : Define se a função é crescente ( $a_3 > 0$ ) e decrescente ( $a_3 < 0$ ).