Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Estevan Luiz da Silva

Desigualdades do tipo Caffarelli-Kohn-Nirenberg

Recife

2019

Estevan Luiz da Silva

Desigualdades do tipo Caffarelli-Kohn-Nirenberg

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos parciais para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Recife
2019

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586d Silva, Estevan Luiz da
Desigualdades do tipo Caffarelli-Kohn-Nirenberg / Estevan Luiz da Silva. – 2019.
125 f.: il., fig., tab.

Orientador: João Marcos Bezerra do Ó.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2019.
Inclui referências e apêndices.

1. Matemática. 2. Análise geométrica. 3. Funções extremais. I. Ó, João Marcos Bezerra do (orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2019-123

ESTEVAN LUIZ DA SILVA

DESIGUALDADE DO TIPO CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos parciais para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 26/02/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Diego Araujo de Souza (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba

AGRADECIMENTOS

À Deus, Santíssima Trindade, fonte de toda Ciência e Sabedoria, pelo Dom da Vida. A este Deus maravilhoso que têm cuidado de mim, e de minha família desde sempre.

À minha esposa, Ana Beatriz (Bê), por sua paciência e dedicação, e por suportar minha ausência durante as longas horas de trabalho, durante vários feriados, durante vários momentos. Agradeço muito a esta pessoa maravilhosa por todo o seu amor, que tem me acompanhado desde os tempos de graduação, que na época era minha namorada, hoje minha eterna namorada.

À minha mãe, Marilene Maria, pelo seu grande esforço em criar eu e meus irmãos no caminho do Senhor, pelo grande incetivo nos estudos. Ao meu pai, Antônio Luiz por sempre se esforçar em trazer o sustento para a casa, pelo exemplo de responsabilidade. Aos meus irmãos Silas e Joel por estarem sempre me apoiando em tudo.

À igreja de Cristo em Peixinhos, aos irmãos ali presentes, por todas as orações feitas a mim e a minha família.

Ao meu amigo e companheiro de curso Augusto Evaristo pelos estudos e pelos conselhos. Agradeço também pela sua família que com muito carinho acolheu a mim e a minha esposa. Assim, tornanram-se mais que amigos, tornaram-se padrinhos!

Aos meus amigos do DMAt, de modo especial por todas as discussões e estudos, agradeço a Michelle, Ana Cristina, Willikat, Ricardo (Ricardon), Tiago, André Pacheco, Mauri (Máuri), Victor, Jaime, João Gondim, Luiz Silva e Gabriel Carvalho. Aos professores do DMAt com os quais cursei excelentes cursos, Henrique Vitório, Marco Barone, Francisco Britto, Sérgio Santa Cruz, Eudes, Tony, César Castilho, Fernando Souza, Ricardo Bortolotti, e Eduardo Leandro. E aos funcionários do DMAt, pela acolhida, pelo apoio, e pelos serviços prestados, de modo especial, a Nilza.

Aos professores William Roqueta, coordenador dos professores Substitutos, e Miguel Loayza, coordenador da Pós-graduação, que sempre me auxiliaram em consiliar as disciplinas de Mestrado e os cursos que ministrei na área 2.

Ao professor Henrique Araújo, em especial, por todas as discussões durante este mestrado, por ter me ajudado a preparar o sexto capítulo desta dissertação, também agradeço pela valiosa inspiração e pelo incentivo que me permitiram decidir por esta excelente carreira.

Aos professores Diego Araújo de Souza (DMAt-UFPE) e Damião Júnio Gonçalves Araújo (DM - UFPB) por aceitarem participar da minha banca de avaliação.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Marcos, pela escolha do tema, pelas valiosas discussões, pela paciência e incentivo neste estudo.

À todas as pessoas que participaram de modo direto ou até indireto desta minha jornada.

À CNPq, pelo apoio financeiro integral a este trabalho.

RESUMO

Considere as seguintes desigualdades estabelecidas por Caffarelli, Kohn e Nirenberg [1],

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x\right)^{2/p} \leq C_{a,b} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x$$

onde $N \geq 3$, $-\infty < a < (N-2)/2$, $a \leq b \leq a+1$, e $p = 2N/(N-2+2(b-a))$. Neste trabalho estudamos algumas questões fundamentais sobre essas desigualdades, como as melhores constantes de mergulho, a existência e não-existência de funções extremais e suas propriedades qualitativas. Enquanto o caso $a \geq 0$ foi estudado extensivamente e uma solução completa é conhecida, pouco se sabe sobre o caso $a < 0$. Nossos resultados para o caso $a < 0$ revelam alguns novos fenômenos que estão em contraste marcante com aqueles para o caso um $a \geq 0$. Finalmente, também provamos resultados de rigidez: uma variedade Riemanniana aberta e completa M com curvatura de Ricci não-negativa, de dimensão $N \geq 3$, na qual desigualdades do tipo Caffarelli–Kohn-Nirenberg são satisfeitas está *próxima* do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^N$.

Palavras-chave: Desigualdades Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Funções Extremais. Variedades Completas. Curvatura de Ricci Não-Negativa.

ABSTRACT

Consider the folling inequalities due to Caffarelli, Kohn, and Nirenberg [1]

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x\right)^{2/p} \leq C_{a,b} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x$$

where $N \geq 3$, $-\infty < a < (N-2)/2$, $a \leq b \leq a+1$, and $p = 2N/(N-2+2(b-a))$. In this work, we study some fundamental questions concerning these inequalities such as the best embedding constants, the existence and nonexistence of extremal functions, and their qualitative properties. While the case $a \geq 0$ has been studied extensively and a complete solution is known, little has been known for the case $a < 0$. Our results for the case $a < 0$ reveal some new phenomena which are in striking contrast with those for the case $a \geq 0$. Finally, we also proved a rigidity results: a complete open Riemannian manifods M with non-negative Ricci curvature of dimension $N \geq 3$ in which some Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities are satisfied are *close* to the Euclidean space $\mathbb{R}^N$.

Keywords: Caffarelli-Kohn-Nirenberg Inequalities. Extremal Functions. Complete Manifolds. Non-Negative Ricci Curvature.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Antes de enunciarmos as Desigualdades de *Caffarelli-Kohn-Nirenberg*, abreviamente CKN, vejamos um pouco sobre a desigualdade de Hardy. A desiguadade de Hardy[1] afirma que para qualquer *domínio* dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$ e $u \in C_0^\infty(\Omega)$, tem-se

$$K^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \tag{1.1}$$

onde $K = \frac{N-2}{2}$. Embora a constante K^2 seja a melhor constante, no sentido que

$$K^2 = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \mathrm{d}x},$$

o ínfimo nunca é atingido. Este fato acarretou numa busca para se *melhorar* essa desigualdade de várias maneiras. Por exemplo, Brezis e Vázquez, em [3] mostraram que se Ω é limitato, então para algum $\gamma > 0$, temos

$$\gamma \left(\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x \right)^{2/p} + K^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x, \quad 1 \leq p < \frac{2N}{N-2}. \tag{1.2}$$

Uma consequência de (1.2) é que o operador

$$P := -\Delta - \frac{\mu}{|x|^2}$$

é *coercivo* em $L^2(\Omega)$, no sentido que

$$\inf_{\|u\|_{L^2(\Omega)}=1} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \mu \frac{u^2}{|x|^2} \right) \mathrm{d}x > 0, \quad \text{sempre que } \mu \leq K^2.$$

Para outras melhorias da desigualdade de Hardy (1.1) veja apêndice A do livro [4]. De modo paralelo a esta busca por melhorias da desigualdade de Hardy, em [1], entra uma família muito mais geral de desigualdades, Caffarelli, Kohn, e Nirenberg estabeleceram as seguintes desigualdades: existe uma constante $C > 0$ tal que para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp} |u|^p \mathrm{d}x \right)^{2/p} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \tag{1.3}$$

onde $N \geq 3$,

$$-\infty < a < \frac{N-2}{2}, \quad a \leq b \leq a+1, \quad \text{e} \quad p = \frac{2N}{N-2+2(b-a)}. \tag{1.4}$$

[1] Em [2], G. H. Hardy estabeleceu desigualdades para funções reais, conhecidas como ‘Desigualdades de Hardy’.

As desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (1.3) contém como caso particular a desigualdade de Hardy, pois se escolhemos $a = 0$, $b = 1$, teremos $p = 2$, e assim a desigualdade (1.3) fica da forma
$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2}|u|^2 \mathrm{d}x \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x.$$
Também a desigualdade CKN contém como caso particular a desigualdade de Sobolev, pois se escolhemos $a = b = 0$, teremos $p = 2^*$ e assim a desigualdade (1.3) fica da forma
$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} \mathrm{d}x\right)^{2/2^*} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x.$$

Uma vez provada a desigualdade CKN, podemos nos perguntar sobre várias questões:

- Melhores constantes (como definir?).
- Funções extremais (existência e/ou não-existência). Claro que a essa pergunta está embutida uma outra: em que espaço procurar estas funções?
- Caso haja funções extremais, quais são as suas propriedades?

As perguntas anteriores são de interesse puramente *analítico*. No entanto há também perguntas a se fazerem de outros interesses, como a seguinte: "$\mathbb{R}^N$ é a única variedade Riemanniana onde vale uma desigualdade do tipo CKN?" Claro que está pergunta está muito vaga, senão mal formulada, porém tornando mais preciso a ideia por trás desta pergunta, provaremos que: Toda variedade Riemanniana aberta e completa, com curvatura de Ricci não-negativa, na qual é satisfeita uma desigualdade do tipo CKN está *"próxima"* do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$, quando dizemos "próximo", queremos dizer que M é difeomorfa (ou até mesmo isométrica) ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^N$.

Os casos $N = 2$ e $N = 1$ não serão tratados nesta dissertação. As condições para estes casos são, para $N = 2$,
$$-\infty < a < 0\,, \quad a < b \leq a + 1\,, \quad \text{e} \quad p = \frac{2}{b-a}\,,$$
e para $N = 1$,
$$-\infty < a < -\frac{1}{2}\,, \quad a + \frac{1}{2} < b \leq a + 1\,, \quad \text{e} \quad p = \frac{2}{-1 + 2(b-a)}\,.$$

Este trabalho é constituído de 6 capítulos (5 sem a introdução). No *Capítulo 2* estabelecemos todos os resultados preliminares para o estudo e compreensão do tema aqui abordado. Faremos uma breve revisão de Análise Funcional e conceitos relacionados, bem como uma estensão revisão de conceitos de Geometria necessários (principalmente para o capítulo 6). Também definimos os espaços de Sobolev, e discutimos rapidamente resultados de regularidade. No *Capítulo 3* fornecemos uma prova direta das Desigualdades CKN com apenas ferramentas analíticas. A prova será bem simples: basea-se num argumento de interpolação. No *Capítulo 4* fornecemos uma prova da desigualdade CKN diferente da apresentada no capítulo. Faremos uso de vários resultados e conceitos de Análise e de Geometria. Também neste capítulo é introduzido conceitos que serão usados largamente no capítulo 5. No *Capítulo 5* iniciamos o estudo da busca pelas melhores constantes para desigualdade CKN, bem como a busca por resultados que garantam a existência e não-existência de funções extremais. De fato, mostra-se que as funções extremais são soluções não-negativas de energia mínima da seguinte equação:

$$-\mathrm{div}(|x|^{-2a}\nabla u) = |x|^{-bp}|u|^{p-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

ou seja, as funções extremais para CKN são soluções de energia mínima da equação

$$-\mathrm{div}(|x|^{-2a}\nabla u) = |x|^{-bp}u^{p-1}, \quad u \geq 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Mostraremos que as soluções da equação acima possui simetrias e algumas propriedades especiais. Por fim, no *Capítulo 6*, sendo $S(a,b)$ a *melhor* constante de CKN para certos parâmetros a, b satisfazendo (1.4) e $V_0(r)$ o volume da r-bola em $\mathbb{R}^N$, o objetivo principal deste capítulo é provar o seguinte teorema:

Teorema 1.0.1. *Seja $C \geq S(a,b)^{-1/2}$ uma constante. Seja M uma variedade Riemanniana aberta e completa, de dimensão $N = \dim M \geq 3$, com a curvatura de Ricci não-negativa. Fixado um ponto $x_0 \in M$ e denotando por ρ a função distância em M de x_0. Seja $B(x,r)$ a bola geodésica de centro $x \in M$ eraio r. Assumindo que para toda $u \in C_0^\infty(M)$, nós temos*

$$\left(\int_M \rho^{-bp}|u|^p \mathrm{d}V\right)^{1/p} \leq C\left(\int_M \rho^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}V\right)^{1/2}$$

Então para todo $x \in M$, vale

$$\mathrm{vol}[B(x,r)] \geq (C^{-1}S(a,b)^{-1/2})^{\frac{N}{1-(b-a)}} V_0(r), \quad \forall r > 0\ .$$

Note que a desigualdade de integrais acima é a desigualdade CKN no caso $M = \mathbb{R}^N$. Este resultado tem algumas consequências para variedades com curvatura de Ricci não-negativa. Por exemplo, combinado este resultado com o famoso teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov, concluímos que nas mesmas hipóteses do teorema 1.0.1, que se $C = S(a,b)^{-1/2}$, então M é isométrica ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^N$.

2 PRELIMINARES DE ANÁLISE E GEOMETRIA

2.1 Espaços de Hilbert

Suporemos que o leitor esteja familiarizado com os conceitos de espaços métricos: extensões de aplicações uniformemente contínuas em espaços métricos completos, completamento de espaços métricos. Para uma referência sobre este tema, veja [5], capítulo 7.
Para os conceitos abordados aqui usaremos como referência principal o livro [6], e o apêndice em [7].

Definição 2.1.1. *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial (real ou complexo) H equipado com um produto interno tal que H é completo na norma $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$.*

Uma sequência $\{e_n\}$ em H é dita uma *base ortonormal* de H se satisfaz as seguintes propriedades:

a) $\|e_n\| = 1$ para todo n e $(e_n, e_m) = 0$ se $m \neq n$;

b) O subespaço linear gerado por $\{e_n\}$ é denso em H.

Teorema 2.1.1. *Seja $\{e_n\}$ uma base ortonormal. Então $\forall u \in H$, temos*

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}(u, e_k)e_k, \ i.e \ \ u = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(u, e_k)e_k,$$

e $\|u\|^2 = \sum |(u, e_k)|^2$.

Sejam agora D um subespaço denso de H e $f : D \to \mathbb{R}$ um funcional linear. A norma de f é definida por:

$$\|f\| := \sup_{x\in D\setminus\{0\}} \frac{f(x)}{\|x\|}.$$

O funcional de f é dito *limitado* se $\|f\| < \infty$. Se f é limitado, então f é uniformemente contínua, donde f se estende, unicamente, a um funcional também denotado por f definido em todo H com a mesma norma.

Teorema 2.1.2 (Representação de Riez)**.** *Para todo funcional linear limitado f em H, existe um único $v \in H$ tal que $f(x) = (x, v)$ $\forall x \in H$. Além disso, $\|f\| = \|v\|$.*

Introduziremos agora conceitos de convergência fraca.
Uma sequência $\{x_k\}$ em um espaço de Hilbert converge *fracamente* a x se para todo $y \in H$,

$$(x_k, y) \to (x, y)$$

Neste caso escrevemos $x_k \rightharpoonup x$. Se $x_k \to x$, isto é $\|x_k - x\| \to 0$, então $x_k \rightharpoonup x$. Desse modo, a noção de convergência (dita convergência forte) implica *convergência fraca*. A topologia gerada por esta noção de convegência (fraca) é dita a *topologia fraca* de H, veja [6], capítulo 3. A *topologia forte* de H é a topologia usual, gerada pela norma de H.

Dizemos que um subconjunto $A \subset H$ é *fracamente limitado* em H se para todo $y \in H$, o conjunto $\{(x, y) : x \in A\}$ é limitado em $\mathbb{R}$. O seguinte teorema estabelece que limitação de um subconjunto, no sentido fraco, é equivalente a limitação no sentido forte.

Proposição 2.1.1 (Princípio da limitação Uniforme)**.** *Todo subconjunto fracamente limitado em um espaço de Hilbert é fortemente limitado, isto é limitado na norma.*

Dizemos que um subconjunto $K \subset H$ é *fracamente compacto* se toda sequência $\{x_k\} \subset K$ contém uma subsequência $\{x_{k_i}\}$ que converge fracamente para algum $x \in K$.

Proposição 2.1.2 (Compacidade fraca da bola unitária)**.** *Em todo espaço de Hilbert H, a bola unitária $B = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ é fracamente compacta.*

Assim sendo, toda sequência limitada num espaço de Hilbert H admite uma subsequência fracamente convergente. Vale mencionar que a bola unitária B é compacta, no sentido forte, se, e só se, $\dim H < \infty$.

2.1.1 Operadores Unitários

Um *operador* T em um espaço de Hilbert H é uma mapa linear $T : D \to H$, onde D é um subespaço linear de H, chamado de *domínio* de T e denotado por $\mathrm{dom}(T)$. Dizemos que T é *densamente definido* se $\mathrm{dom}(T)$ é denso em H. Definimos a *norma* do operador T por

$$\|T\| := \sup_{x \in \mathrm{dom}(T) \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\ .$$

A finitude da norma de T é equivalente a continuidade uniforme de T. Logo, se T é densamente definido e $\|T\| < \infty$, então o operador T se estende unicamente a um operador definido em H, com a mesma norma. Um operador T é dito *limitado* se $\mathrm{dom}(T) = H$ e $\|T\| < \infty$.

Agora sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert munidos de produto interno $(\cdot, \cdot)_1$ e $(\cdot, \cdot)_2$ respectivamente.

Um *operador unitário* (ou transformação unitária) de H_1 para H_2 é uma aplicação linear inversível $U : H_1 \to H_2$ que preserva o produto interno: $(Ux, Uy)_2 = (x, y)_1$ para todo $x, y \in H_1$. Tomando $y = x$, obtemos que todo operador unitário é uma *isometria*: $\|Ux\|_2 = \|x\|$. Reciprocamente, pode-se mostrar que toda isometria sobrejetiva entre espaços de Hilbert é um operador unitário. A norma de um operador unitário é sempre igual a 1.

Os operadores unitários desempenham o papel de "isomorfismo" na categoria dos espaços de Hilbert; eles não só preservam a estrutura linear e topológica, mas também preservam a estrutura métrica.

2.1.2 Diferenciabilidade de funcionais

Usaremos como referência o capítulo 1 de [8].

Definição 2.1.2 (Diferenciabilidade à Gâteaux)**.** *Seja $F : U \to \mathbb{R}$ onde U é um aberto num espaço de Banach X. O funcional F tem derivada de Gâteaux $A \in X^*$ em $u \in X$ se, $\forall h \in X$,*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[F(u+th) - F(u) - \langle A, th\rangle\right] = 0 \,, \quad \textit{onde } t \in \mathbb{R}.$$

A derivada de Gâteaux em u é denotada por $F'(u)$.

Definição 2.1.3. *O funcional F tem derivada de Fréchet $A \in X^*$ em $u \in X$ se*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|} \left[F(u+h) - F(u) - \langle A, h\rangle\right] = 0 \,.$$

Dizemos que um funcional F está em $C^1(U, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet existe e é contínua em U.
Seja $X = H$ um espaço de Hilbert. Pelo teorema da Representação de Riez, existe um único vetor $\nabla F(u) \in H$, dito o *gradiente* de F em u, tal que $\forall h \in H$,

$$(\nabla F(u), h) = F'(u)h \,.$$

Observação 2.1.1. *a) A derivada de Gâteaux é dada por*

$$F'(u)h = \langle F'(u), h\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{F(u+th) - F(u)}{t} \,.$$

b) Toda derivada de Fréchet é uma derivada de Gâteaux. Usando o teorema do valor médio, pode-se mostrar o seguinte resultado

Proposição 2.1.3. *Se F tem derivada de Gâteaux em U contínua, então $F \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Muitas esquações da Física-Matemática podem ser escritas na forma $F'(u) = 0$ em algum espaço de HIlbert apropriado H. A equação $F'(u) = 0$ é dita *Equação de Euler-Lagrange* do funcional $F : H \to \mathbb{R}$. A soluções dessas equações são assumidas no sentido fraco, isto é

$$(\nabla F(u), h) = 0 \quad \forall h \in H \,.$$

2.2 Geometria Riemanniana

Nesta seção faremos uma revisão de ferramentas de geometria necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Usaremos como referência os livros [9–12]

Definição 2.2.1. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M, de dimensão n, é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno g_p, no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $x : U \subset M \to x(U) \subset \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, então para todo $q \in U$, a função $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n) := g_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(q), \frac{\partial}{\partial x^j}(q)\right)$ é diferenciável para todo i, j, onde $q = (x^1, \ldots, x^n)$.*

Definição 2.2.2. *Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana é chamada variedade Riemanniana, e escrevemos (M, g) para especificar qual a métrica riemanniana estamos considerando.*

Exemplo 2.2.1. *Tomando $M = \mathbb{R}^n$ com $\frac{\partial}{\partial x^i} = e_i$, onde e_i é o i-ésimo vetor da base canônica, a métrica dada por $g_{ij} = \delta_i^j$ torna M uma variedade riemanniana.*

Denotaremos a métrica g por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ quando estiver claro a métrica com a qual estivermos trabalhando. Por simplicidade, denotaremos os campos coordenandos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ por ∂_i. Adotaremos a convenção de Einstein para índices: omitiremos o símbolo de somatório e interpretamos índices repetidos no mesmo termo como indicador desse somatório.

Denotemos por TM o fibrado tangente de M, $\Gamma(TM)$ o espaços do campos vetoriais suaves em M e por $C^\infty(M)$ o anel das funções reais suaves definidas em M.

Definição 2.2.3. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \nabla : TM \times \Gamma(TM) &\to TM \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1) Se $X \in T_pM$,então $\nabla_X Y \in T_pM$.

2) Para todo $Y \in \Gamma(TM)$, a aplicação $\nabla_. Y$ é $C^\infty(M)$-linear em TM.

3) Para todo $p \in M$, a restrição de ∇ em $T_pM \times \Gamma(TM)$ é bilinear.

4) Se f é uma função diferenciável, então $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

Veremos a seguir que a métrica Riemanniana determina de maneira única a escolha de uma conexão Riemanniana para a variedade M. Para isto precisamos dos seguintes conceitos.

Definição 2.2.4. *Uma conexão é dita*

(a) ***compatível*** *com a métrica g, se é válida a relação*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM)\,.$$

***(b) simétrica** (ou livre de torção) quando $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$,*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]\ .$$

Teorema 2.2.1 (Levi-Civita). *Em toda variedade Riemanniana M existe uma única conexão afim ∇ em M simétrixa e compatível com a métrica Riemanniana.*

Demonstração. Veja por exemplo [10]. □

Observação 2.2.1. *A conexão dado pelo teorema acima é chamada conexão Riemanniana de M, ou conexão L-C de M. A menos de menção explícita, toda variedade estará munida com a conexão L-C.*

Especificaremos agora a conexão em termos de coordenadas. Sejam $(U, (x^i))$ um sistema de coordenadas, e os campos coordenados $X_i = \partial_i$ em U. Podemos escrever, desse modo, $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$. Os coeficientes Γ_{ij}^k são chamados símbolos de Chrisoffel da conexão. Quando trabalharmos com a conexão Riemanniana, podemos obter uma expressão clássica dos símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da métrica Riemanniana dada por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m \{\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij}\} g^{mk}. \tag{2.1}$$

Fixe ∇ conexão riemanniana em M, introduziremos agora o conceito de paralelismo.

Proposição 2.2.1. *Sejam $c : I \to M$ uma curva, e V um campo vetorial ao longo de c. Então existe uma única correspondência que associa V a um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V aolongo de c, tal que:*

a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *onde f é uma função diferenciável em I.*

c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \Gamma(TM)$, i.e $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt}(t) = \nabla_{c'(t)} Y$

Definição 2.2.5. *Sejam M uma variedade riemanniana e ∇ a conexão riemanniana de M. Um campo vetorial ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado de paralelo se $\frac{DV}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.*

Proposição 2.2.2. *Seja $c : I \to M$ uma curva diferenciável em M, e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, i.e $V_0 \in T_{c(t_0)}M$. Então existe um único campo vetorial paralelo V ao longo de c tal que $V(t_0) = V_0$. Denotamos por $V(t)$ o transporte paralelo de V_0 ao longo de c.*

Demonstração. Veja [10], capítulo 2. □

Considere a aplicação

$$P = P_{c,t_0,t} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t)}M$$

definida por: $P(v)$ é o transporte paralelo do vetor v ao longo da curva c. É possível mostrar que se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal em $T_{c(t_0)}M$, então $\{E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ é uma base ortonormal ao longo de $c(t)$ para todo t, onde $E_i(t) := P_{t_0,t}(e_i)$. Desse modo, o transporte paralelo é uma isometria linear.

2.2.1 Aplicação Exponencial: geodésicas, raio de injetividade e completude

Introduziremos a seguir a noção de geodésicas como curvas de aceleração nula. É possível verificar que tais curvas possuem a propriedade de minimizar comprimentos para pontos "suficientemente próximos", e além disso, se uma curva é *minimizante*, então, necessariamente, deverá ser uma geodésica.

Definição 2.2.6. *Uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma geodésica se $\gamma'(t)$ é um campo paralelo ao longo de $\gamma(t)$, a saber $\frac{D}{dt}\gamma' \equiv 0$.*

A proposição a seguir afirma que se a velocidade v é suficientemente pequena, existe uma única geodésica passando por um ponto q, com velocidade v, definida para um certo intervalo $(-\delta, \delta)$.

Proposição 2.2.3. *Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset M, p \in V$, números $\delta, \epsilon > 0$ e uma aplicação suave*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \to M, \; \textit{onde}\, \mathcal{U} := \{(q, v) : q \in V \textit{ e } v \in T_qM \textit{ com } |v| < \epsilon\}$$

tais que a curva $t \mapsto \gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v, para cada $q \in V$ e cada $v \in T_qM$ com $|v| < \epsilon$.

É possível aumentar a velocidade da geodésica diminuindo seu intervalo de definição ou vice-versa. Tal fato é decorrente do seguinte lema.

Lema 2.2.1 (Homogeneidade de uma geodésica)**.** *Se a geodésica $\gamma(t, q, v)$ está definida no intervalo $(-\delta, \delta)$, então a geodésica $\gamma(t, q, av)$, $a > 0$, está definida no intervalo $\left(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}\right)$, e vale*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v) \; .$$

Desse modo, pela proposição anterior e pelo lema de homogeneidade, podemos tornar o intervalo da geodésica uniformemente grande em uma vizinhança de p. Mais precisamente, obtemos:

Proposição 2.2.4. *Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M, um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação suave*

$$\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \to M, \text{ onde } \mathcal{U} := \{(q, w) : q \in V \text{ e } w \in T_qM \text{ com } |w| < \epsilon\}$$

tais que a curva $t \mapsto \gamma(t, q, w)$ é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v, para cada $q \in V$ e cada $w \in T_qM$ com $|w| < \epsilon$.

A proposição acima nos permite introduzir o conceito de aplicação exponencial. Consideremos $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ aberto como na proposição anterior. Então a aplicação exponencial será definida como

$$\exp(q, v) := \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right).$$

Podemos considerar a aplicação exponencial restrita a um aberto do espaço tangente T_qM, isto é, definimos

$$\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_qM \to M$$

por $\exp_q(v) = \exp(q, v)$. Geometricamente, $\exp_q(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de q, sobre a geodésica que passa por q com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$. Por simplicidade, denotamos $\gamma_v(t)$ a geodésica partindo por p com velocidade v, a saber $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, com $v \in T_pM$.

Proposição 2.2.5. *Dado $q \in M$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_qM \to M$ é um difeomorfismo de $B_\epsilon(0)$ sobre um aberto de M.*

Se $\exp_p$ é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem de T_pM, $U = \exp_p(V)$ é chamada uma vizinhança normal de p. Se $B_r(0)$ é tal que $\overline{B_r(0)} \subset V$, chamamos $B_r(p) := \exp_p(B_r)(0)$ a *bola normal* de centro p e raio $r > 0$.

Uma vez que a exponencial é um difeomorfismo local em cada ponto, é possível induzir através da aplicação um sistema de coordenadas natural na variedade M da seguinte maneira: Fixemos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM e isomorfismo de $E : \mathbb{R}^n \to T_pM$, dado por $E(x^1, \ldots, x^n) := x^i e_i$. Se V é uma vizinhança normal de p, então

$$\varphi := E^{-1} \circ (\exp_p)^{-1} : V \to \mathbb{R}^n$$

é um sistema de coordenadas, dito *coordenandas normais em torno de p.*

Proposição 2.2.6 (Propriedades de coordenadas normais)**.** *Seja $(U, (x^i))$ um sistema de coordenadas normais em torno de p.*

(a) Para todo $v = a^i \partial_i \in T_pM$, a geodésica γ_v, é representada nesse sistema de coordenadas pelo segmento radial

$$\gamma_v(t) = \left(ta^1, \ldots, ta^n\right)$$

desde que $\gamma_v(t) \subset V$.

(b) As coordenadas de p *são* $(0, \dots, 0)$.

(c) A componentes da métrica em p *satisfazem:* $g_{ij}(p) = \delta^i_j$ *para todo* i, j. *Além disso,* $\partial_k g_{ij}(p) = 0$ *para todo* i, j, k *(em particular* $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$*).*

Agora, introduziremos uma *distância* numa variedade riemanniana M. Suponha M uma variedade riemanniana conexa. Considere $p, q \in M$ dois pontos. Dizemos que uma curva $\alpha : [a, b] \to M$ ligando p a q é *admissível* se α é C^1 por partes, com $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = q$. Para toda curva α admissível ligando $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$, definmos o comprimento de α, $L(\alpha)$ por

$$L(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)| \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{g(\alpha'(t), \alpha'(t))} \mathrm{d}t.$$

Dados $p, q \in M$, definimos a distância entre p e q, $d(p, q)$ por

$d(p, q) = \inf L(\alpha)$, onde o ínfimo é tomado sobre todas as curvas admissíveis ligando p a q.

Um curva $\alpha : [a, b] \to M$ ligando p a q é dita *minimizante* se $L(\alpha) = d(p, q)$.

Teorema 2.2.2. (M, d) *é um espaço métrico.*

Fixado um ponto $p \in M$, a função $r : M \to \mathbb{R}$ dada por $r(q) = d(p, q)$ é uma função de Lipschitz. A função r é dita a função *distância radial* em p. Num sistema de coordenadas normais U em torno de p a função distância radial r é diferenciável em $U \setminus \{p\}$, de fato todo pondo $q \in U$, é da forma $q = \exp_p(v)$ para algum $v \in B_\epsilon(0) \subset T_pM$. Assim, $q = \gamma(1)$, onde $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ é uma geodésica minimizante $|t| < \epsilon$. Logo, $d(p, q) = L(\gamma) = |v|$, e vale

$$r(q) = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}, \quad \textit{se } q = (x^1, \dots, x^n) \in U$$

O *campo radial unitário*, ou *campo radial* $\frac{\partial}{\partial r}$ é o campo definido em $U \setminus \{p\}$ por

$$\frac{\partial}{\partial r}(\exp_p(v)) = \gamma'_{\frac{v}{|v|}}(|v|)\ .$$

Num sistema de coordenadas normais,

$$\frac{\partial}{\partial r}(x) = \sum \frac{x^i}{r(x)} \partial_i\ .$$

Lema 2.2.2. *O campo gradiente de* r *coincide com o campo radial, isto é*

$$\mathrm{grad} r = \frac{\partial}{\partial r}.$$

Em particular, $\mathrm{grad} r$ *é um campo unitário.*

Para tratarmos da completude de (M, d), vejamos a seguinte definição.

Definição 2.2.7. *Uma variedade Riemanniana* M *conexa é geodesicamente completa se para toda geodésica maximal* $\gamma : I \to M$*, tivermos* $I = \mathbb{R}$. *A saber,* M *é geodesicamente completa se* $\exp_p$ *está definida em todo* T_pM *para todo* $p \in M$.

O teorema a seguir é um resultado chave para o estudo de variedades Riemannianas, uma vez que um dos aspectos mais interessantes da Geometria é compreender a ligação entre propriedades locais e propriedades globais da variedade.

Teorema 2.2.3 (Hopf-Rinow). *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) A variedade Riemanniana M é completa como espaço métrico;

(2) Para algum ponto $p \in M$, todas as geodésicas partindo de p são infinitamente estendíveis;

(3) Todas as geodésicas são infinitamente estendíveis (i.e M é geodesicamente completa);

(4) Todo subconjunto fechado e limitado de M é compacto;

(5) Sendo M conexa e completa, então todo par de pontos (p, q) de M pode ser interligado por uma geodésica cujo comprimento de arco é igual a $d(p, q)$, a saber γ é minimizante.

De acordo com o teorema acima sabemos que $\exp_p(rX)$, com $\|X\| = 1$, está definidade para todo $r \in \mathbb{R}$ e $X \in S^{n-1}$. Sabemos que também a aplicação exponencial é diferenciável. Desta forma, considere a aplicação: $\mu : S^{n-1} \to (0, \infty]$, onde $\mu(X) = \sup\{r > 0 : \gamma(s) = \exp_p(sX),\ s \in [0, r],\ \text{é minimizante}\}$. É possível mostrar que aplicação μ é uma aplicação contínua, veja por exemplo [10], cápitulo 13.

Definição 2.2.8 (Raio de injetividade). *O número $\delta_p := \inf\{\mu(X) : X \in S^{n-1} \subset T_pM\}$ é chamado de raio de injetividade em p. O raio de injetividade de M é definido como $\delta := \inf\{\delta_p : p \in M\}$.*

Desse modo, $\delta_p > 0$ para todo $p \in M$, e assim $\delta \geq 0$. É possível mostrar que toda variedade compacta M possui raio de injetividade positivo, $\delta > 0$.

2.2.2 Curvaturas, Isometrias

Definição 2.2.9 (Curvatura de Riemann). *O tensor curvatura de Riemann R, ou tensor curvatura R, de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada para $X, Y \in \Gamma(TM)$ uma aplicação $R(X, Y) : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \Gamma(TM),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Exemplo 2.2.2. *Se $M = \mathbb{R}^n$, então $R \equiv 0$, veja [10].*

O tensor de curvatura R é $C^\infty(M)$-trilinear. O tensor de curvatura satisfaz as seguintes propriedades:

a) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$;

b) $R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$;

c) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$

d) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$

Observe que por (c), para cada $p \in M$, fixado $X \in T_pM$, a aplicação $R(X,\cdot)X : T_pM \to T_pM$ é auto-adjunta.
Relacionado com o tensor de curvatura de Riemann está a curvatura seccional (ou Riemanniana), que passamos a definir.

Proposição 2.2.7. *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e seja, $X, Y \in \sigma$ dois vetores L.I. Então a quantidade*

$$K(X,Y) := \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle}$$

não depende da escolha dos vetores $X, Y \in \sigma$.

Definição 2.2.10 (Curvatura seccional)**.** *Dados um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$ o número ral $K(X,Y) =: K(\sigma)$, onde $\{X,Y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado curvatura seccional de σ em p.*

É possível mostrar que aplicação K é "diferenciável". Veremos no último capítulo desta dissertação que além do fato que a curvatura seccional tem interessantes interpretações geométricas, sua importância provém do fato de que o conhecimento de $K(\sigma)$, para todo σ, determina completamente a curvatura R. Finalizamos esta seção tratando do conceito de *isometria*.

Definição 2.2.11 (Isometria local)**.** *Sejam M, N variedades riemannianas e $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Se para todo $p \in M$, $u, v \in T_pM$, vale*

$$\langle D_pF(u), D_pF(v)\rangle_{F(p)} = \langle u, v\rangle_p \ ,$$

então F é dita uma isometria local.

Pelo Teorema de Função Inversa, se uma aplicação diferenciável F entre variedades riemannianas é uma *isometria local*, então F é um difeomorfismo local. Se F é um difeomorfismo e isometria local, então F é dita uma *isometria* global.

Proposição 2.2.8 (Naturalidade da conexão L-C)**.** *Seja $F : (M,g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ uma isometria local. Sejam ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões L-C de M e $\tilde{M}$ respectivamente. Então* *a) Se $X, Y \in \Gamma(TM)$, então*

$$DF(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{DF(X)} DF(Y).$$

b) Se $c : I \to M$ é uma curva suave e X é um campo veotrial ao longo de c, então $DF(X)$ é um campo vetorial ao longo de c e

$$DF\left(\frac{D}{dt}X\right) = \frac{\tilde{D}}{dt} DF(X).$$

c) F mapea geodésicas em geodésicas: se γ é uma geodésica em M com ponto inicial p e velocidade inicial V, então $F \circ \gamma$ é uma geodéscia em $\tilde{M}$ com ponto inicial $F(p)$ e velocidade inicial $D_pF(V)$.

d) Se R e $\tilde{R}$ é o tensor de curvatura de M e $\tilde{M}$ respectivamente, então para todo $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, tem-se

$$\tilde{R}(DF(X), DF(Y))DF(Z) = DF(R(X,Y)Z), \quad i.e. \quad F^*\tilde{R} = R.$$

*e) Se $X, Y \in T_pM$ são **L.I**, então $K(X,Y) = \tilde{K}(DF(X), DF(Y))$, a saber a curvatura seccional é invariante por isometrias locais.*

Demonstração. Para uma prova de a), b), c), veja proposição 5.6 em [11]. E d), e) seguem diretamente dos itens anteriores. □

Proposição 2.2.9 (Naturalidade da aplicação Exponencial)**.** *Seja $F : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ uma isometria local. Então, para todo $p \in M$, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc}
T_pM & \xrightarrow{DF} & T_{F(p)}\tilde{M} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \exp_p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \exp_{F(p)}} \\
M & \xrightarrow[F]{} & \tilde{M}
\end{array}$$

Demonstração. Veja proposição 5.9 em [11]. □

2.2.3 A Medida Riemanniana e a Forma Volume

Usaremos dois resultados gerais sobre variedades que se encontra no livro [13], capítulos 5 e 6.

Lema 2.2.3. *Seja M uma variedade diferencial, de dimensão n. Sejam $(U, (x^i))$ sistema da coordenadas em M, e $f^1, \ldots, f^n$ funções suaves em U. Então*

$$df^1 \wedge \ldots \wedge df^n = \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n .$$

Demonstração. Ver livro [13], capítulo 5, seção 18. □

Lema 2.2.4. *Sejam agora M_1 e M_2 variedades diferenciais, com mesma dimensão n. Seja $F : M_1 \to M_2$ um difeomorfismo, considere (x^i) e (y^i) sistema de coordenadas em torno de $p \in M_1$ e $F(p) \in M_2$. Então:*

$$F^* dy(p) = \det(D_p F) dx(p), \quad \forall p \in M_1 \tag{2.2}$$

onde $F^* dy$ é a $n-$forma pull-back da $n-$forma dy, que está definida numa vizinhaça de $F(p)$.

Demonstração. Sendo $(x^1, \ldots, x^n)$ e $(y^1, \ldots, y^n)$ cartas em torno de p e $F(p)$ respectivamente, locamente temos: $F((x^1, \ldots, x^n)) = (F^1, \ldots, F^n)$, onde $F^i := y^i \circ F\ (= F^* y^i)$. Daí,

$$\begin{aligned} F^* dy(p) &= F^*(dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n)(p) \\ &= (dF^* y^1 \wedge \ldots \wedge dF^* y^n)(p) \\ &= dF^1 \wedge \ldots \wedge dF^n(p) \\ &= \det(D_p F) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n(p) \ , \end{aligned}$$

onde na última igualdade usa-se o lema anterior. □

Agora, no contexto do lema anterior, sejam ω_1 e ω_2 $n-$formas de suporte compacto em M_1 e M_2 respectivamente. Sabe-se que $\int_{M_1} \omega_1$ e $\int_{M_2} \omega_2$ estão bem definidas (ver [13], capítulo 6). Logo, por cálculo avançado e pelo lema anterior,

$$\int_{M_1} F^* \omega_2 = \pm \int_{M_2} \omega_2$$

onde o sinal é $+1$ se F preserva orientação, i.e $\det D_p F > 0$, e -1 se inverte orientação, i.e $\det D_p F < 0$.

Seja (M, g) uma variedade riemanniana de dimensão n, e seja $K \subset M$ subconjunto compacto contido em algum sistema de coordenadas $(U, (x^i))$, tal que $x(K) \subset \mathbb{R}^n$ é *mensurável* (*à Lebesgue*).

Definição 2.2.12. *O volume de K é*

$$\mathrm{Vol}(K) = \int_{x(K)} \sqrt{g \circ x^{-1}} \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n \quad ,$$

onde $g = \det(g_{ij})$, $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ e $\mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n$ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.2.5. *A definição acima não depende do sitema de coordenadas adotado*

Demonstração. Seja $(\hat{U}, (y^i))$ um outro sistema de coordenadas que contém K, então denotando ∂_i^xe ∂_i^y os i-ésimos campos coordenados nos sitemas de coordenadas (x^i) e (y^i), temos que: dado $p \in U \cap \hat{U}$, $\partial_i^x|_p = J_i^k|_{x(p)} \partial_k^y|_p$, onde $J_i^k = \frac{\partial(y^k \circ x^{-1})}{\partial x^i}$ provém do Jacobiano de $y \circ x^{-1} : x(U) \to y(\hat{U})$.

Desse modo, $(g^x_{ij}) = J^T(g^y_{kl})J$ (conta imediata), onde J^T denota a matriz transposta de J. Logo, obtem-se: $\sqrt{g^x(p)} = |\det J|\sqrt{g^y(p)}$, e assim
$\sqrt{g^y \circ y^{-1}}\mathrm{d}y^1 \ldots \mathrm{d}y^n = \sqrt{g^y \circ y^{-1}(y \circ x^{-1})}|\det J|\mathrm{d}y^1 \ldots \mathrm{d}y^n = \sqrt{g^x \circ x^{-1}}\mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n$. Na penúltima igualdade foi usado *mudança de variáveis*. □

Observação 2.2.2 (Caso mais geral)**.** *Seja $A \subset M$ subconjunto mensurável, a saber para qualquer sistema de coordenadas $(U,(x))$, a imagem por (x) de $A \cap U$ é uma conjunto mensurável em $\mathbb{R}^n$. Sejam, desse modo, $\{(U_\alpha,(x_\alpha))\}$ atlas localmente finito, e $\{\rho_\alpha\}$ partição da unidade subordinada a este atlas. Definimos:*

$$\mathrm{vol}(A) = \sum_\alpha \int_{x_\alpha(A\cap U_\alpha)} (\rho_\alpha\sqrt{g}) \circ (x_\alpha)^{-1}\mathrm{d}x^1_\alpha \ldots \mathrm{d}x^n_\alpha \,.$$

Pode-se verificar que $\mathrm{vol}(A)$ *não depende da partição $\{\rho_\alpha\}$, também verifica-se que tal definição não depende da escolha de atlas localmente finito. Caso a soma divirja, dizemos que o volume de A é infinito.*

Definição 2.2.13. *O elemento volume Riemanniano (ou desnidade de volume riemanniano) em (M,g) é*

$$\mathrm{d}V_g := \sum_\alpha (\rho_\alpha\sqrt{g}) \circ (x_\alpha)^{-1}\mathrm{d}x^1_\alpha \ldots \mathrm{d}x^n_\alpha \,.$$

Até agora, não assumimos que M é uma variedade *orientada*. Seja M uma variedade orientada.
Seja $\{E_i\}$ um referencial ortonormal em torno de uma vizinhaça de $p \in M$. Trocando, se necessário, E_1 por $-E_1$, podemos obter um referencial ortonormal *orientado* em uma vizinhaça de $p \in M$.

Proposição 2.2.10. *Suponha (M,g) variedade riemanniana orientada de dimensão n. Então, existe uma única n-forma Ω diferencial tal que*

$$\Omega(E_1,\ldots,E_n) = 1 \,,$$

para cada $\{E_i\}$ referencial ortonormal orientado.

Observação 2.2.3. *A $n-$forma Ω cuja existência e unicidade é garantida por esta proposição é dita forma volume Riemanniano. Denotamos Ω por* $\mathrm{d}V_g$.

Demonstração da proposição 2.2.14. Unicidade: Suponha inicialmente que tal Ω exista. Se $(E_1,\ldots,E_n)$ é um dado referencial ortonormal orientado, e $(\epsilon^1,\ldots,\epsilon^n)$ é o correfencial dual (métrico), então podemos escreer $\Omega = f\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^n$ localmente para alguma função f. Por hipótese de existência de Ω, devemos ter $\Omega = \epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^n$. Logo, Ω está unicamente determinada.

Existência: Defina Ω localmente por $\Omega = \epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^n$. Se $(\tilde{E_1},\ldots,\tilde{E_n})$ é outro referencial ortonormal orientado, com correferencial $(\tilde{\epsilon_1},\ldots,\tilde{\epsilon_n})$, seja, então, $\tilde{\Omega} = \tilde{\epsilon_1} \wedge \ldots \tilde{\epsilon_n}$. Assim, onde estiver definido, podemos escrever $\tilde{E}_i = A_i^j E_j$ onde (A_i^j) é uma matriz C^∞. Como os referenciais são ortonormais, segue-se $(A_i^j(p))$ é uma matriz ortogonal em todo ponto onde estiver definida, logo $\det(A_i^j) = 1$ pois as bases são orientadas positivamente. Desse modo, $\Omega(\tilde{E}_1 \ldots \tilde{E}_n) = \Omega(A_1^j E_j, \ldots, A_n^j E_j) = \det(A_i^j)\Omega(E_1, \ldots, E_n) = 1 \cdot 1 = \tilde{\Omega}(\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n)$. Assim, $\tilde{\Omega} = \Omega$. Portanto, Ω está globalmente definida. □

Lema 2.2.6. *Seja (M, g) variedade riemanniana orientada. Então em qualquer sistema de coordenadas (num atlas compatível com a orientação) (x^i), a forma volume tem expressão local:*

$$\mathrm{d}V_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n, \quad \textit{onde } g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)\ .$$

Demonstração. Sejam $(U, (x^i))$ uma carta orientada em $p \in M$. Temos $\mathrm{d}V_g = f\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$ para alguma $f \in C^\infty(M)$.
Sejam (E_i) referencial ortonormal orientado, numa vizinhaça de p, e (ϵ^i) o correferencial dual. Então, nessa vizinhaça de p, tem-se $\partial_i = A_i^j E_j$, e
$f = \mathrm{d}V_g(\partial_1, \ldots, \partial_n) = \epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^n(\partial_1, \ldots, \partial_n) = \det(A_i^j)$. Por outro lado, $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \langle A_i^k E_k, A_j^l E_l \rangle = A_i^k A_j^l \langle E_k, E_l \rangle = A_i^k A_j^l \delta_k^l = \sum_k A_i^k A_j^k$.
A última expressão acima é a $(i, j)-$entrada da matriz $A^T A$, onde $A = (A_i^j)$. Assim,

$$\det(g_{ij}) = \det(A^T A) = (\det A)^2.$$

Logo, $f = \det(A) = \pm\sqrt{\det(g_{ij})}$. Como ambos os referenciais (∂_i) e (E_j) são orientados, tem-se $f = +\sqrt{\det(g_{ij})}$. □

Desse modo, sendo M orientada, e escolhendo um sistema de coordenadas que preserva a orientação, então a *densidade de volume* é a $n-$*forma volume*.

2.3 O operador de Laplace-Beltrami

Como g é métrica riemanniana, introduzimos o isomorfismo $\flat : TM \to T^*M$ dado por $\flat(X) = g(\cdot, X)$. Esse isomorfismo é chamado de *isomorfismo musical*, denotamos $\flat^{-1}$ por $\sharp$. É comum denotar $\flat(X)$ por $X^\flat$.
Localmente, temos $\flat(a^j \partial_j) = g_{ij} a^j dx^i$, e $\sharp(b_i dx^i) = g^{ij} b_i \partial_j$. Tal isomorfismo é caracterizado pela relação

$$\forall \omega \in T^*M, X \in TM,\ vale\ \ g(\sharp(\omega), X) = \omega(X)\ (ou\ g^{-1}(\omega, X^\flat) = \omega(X))\ .$$

Seja $f \in C^1(M)$. Então df é uma $1-$forma em M.

Definição 2.3.1. *O campo gradiente de f é o campo vetorial dado por:*

$$\mathrm{grad} f := df^\sharp\ .$$

Isto é, $\mathrm{grad}(f)$ *é o único campo tal que* $\forall p \in M$, $g(\mathrm{grad} f(p), X) = df_p(X)\ \forall X \in T_p M$

Em um sistema de coordenadas locais $(U,(x^i))$, temos $df = \partial_i f dx^i$, logo localmente temos

$$\mathrm{grad} f = (g^{ij}\partial_i f)\partial_j \ . \tag{2.3}$$

Em particular, para $M = \mathbb{R}^n$ munido da métrica euclidiana, (2.3) é o gradiante conhecido de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.3.2. *Dado X campo diferenciável em M, o divergente de X é a função:*

$$\mathrm{div}X(p) = \mathrm{tr}\{Y \mapsto \nabla_Y X(p)\},$$

onde ∇ é a conexão L-C.

Proposição 2.3.1. *Dado $(U,(x^i))$ sistema de coordenadas. Se $X = X^i\partial_i$, então:*

$$\mathrm{div}X = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_i \partial_i\left(X^i\sqrt{g}\right) \ .$$

Demonstração. Para uma prova desta proposição veja capítulo 1 de [14]. □

O cálculo do divergente de um campo X tem uma expressão mais simples se considera-mos um referencial ortonormal $\{E_i\}$. De fato, sendo $\{E_i\}$ referencial ortonormal ao longo de um aberto U, então

$$\mathrm{div}X = \sum_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i\rangle$$

Consequentemente, para toda $f \in C^1(M)$,

$$\mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div}X + \langle \mathrm{grad}f, X\rangle \ .$$

Da seção anterior, com a medida volume $\mathrm{d}V_g$, podemos integrar funções de suporte compacto em (M,g). Seja $C_0(M)$ o espaço das funções contínuas de suporte compacto em M. Então $\forall f \in C_0(M)$, definimos (mantendo a notação da seção anterior)

$$\int_M f\mathrm{d}V_g = \sum_\alpha \int_{x_\alpha(U_\alpha)\cap \mathrm{supp} f} f\circ (x^\alpha)^{-1}(\rho_\alpha\sqrt{g^\alpha})\circ(x^\alpha)^{-1}\mathrm{d}x^1\ldots\mathrm{d}x^n \ .$$

É possível mostrar que a integral está bem definida, e satisfaz todas as propriedades que a integral usual de Lebesgue deve satisfazer.

Teorema 2.3.1 (Divergência)**.** *Seja $X \in \Gamma_0(TM)$, então*

$$\int_M \mathrm{div}X\mathrm{d}V_g = 0 \ . \tag{2.4}$$

Demonstração. Podemos supor que $\mathrm{supp}X \subset U$, onde $(U,(x^i))$ é um sistema de coordenadas. Daí,

$$\begin{aligned}\int_M \mathrm{div}X\mathrm{d}V_g &= \int_M \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_i \partial_i\left(X^i\sqrt{g}\right)\mathrm{d}V_g \\ &= \int_{x(\mathrm{supp}X)} \partial_i(X^i\sqrt{g})\circ x^{-1}\mathrm{d}x \\ &= 0 \ . \quad \text{(análise no } \mathbb{R}^n\text{)}\end{aligned}$$

□

Definição 2.3.3. *Dado $f \in C^2(M)$, definimos o operador de Laplace-Beltrami de f por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \ .$$

Pela expressão local do divergente, localmente Δf é dado por

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \partial_j \left(\sqrt{g} g^{ij} \partial_i f \right) \ . \tag{2.5}$$

Observemos que no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, Δ é o laplaciano usual.

Teorema 2.3.2 (Fórmula de Green)**.** *Sejam f, h funções diferenciáveis em M com uma delas de suporte compacto. Então:*

$$-\int_M f \Delta h \mathrm{d}V_g = \int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle \mathrm{d}V_g = -\int_M h \Delta f \mathrm{d}V_g \ . \tag{2.6}$$

Demonstração. Temos que $\operatorname{div}(f \nabla h) = f \Delta h + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle$. Como $f \nabla h$ tem suporte compacto, pelo Teorema da Divergência (2.4), segue o resultado. □

Em particular, quando M é uma variedade compacta, toda função tem suporte compacto. Se M é uma variedade compacta, então da Fórmula de Green (2.6) concluímos que o operador $-\Delta$ satisfaz $\forall f, h$,

$$(i) \ \int_M f(-\Delta h) \mathrm{d}V_g = \int_M h(-\Delta f) \mathrm{d}V_g \ , \quad (ii) \ \int_M f(-\Delta f) \mathrm{d}V_g \geq 0 \ .$$

Observação 2.3.1. *O cálculo do operador de Laplace se torna mais simples usamos referenciais ortonormais. De fato, sendo $\{E_i\}$ um referencial ortonormal ao longo de um aberto U, então*

$$\Delta f\Big|_U = \sum_i \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i \rangle \ .$$

Lema 2.3.1. *Sejam f e h funções diferenciáveis em M. Então*

(a) $\operatorname{grad}(f + h) = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(h)$, $\Delta(f + h) = \Delta f + \Delta h$;

(b) $\Delta(fh) = h\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle + f \Delta h$.

Agora exiberemos uma expressão para o operador de Laplace em variedades *produto*. Sejam X, Y variedades diferenciáveis de dimensão n e m respectivamente, e seja $M = X \times Y$ a variedade produto: se $(p, q) \in M$ e (x^i) e (y^j) são coordenadas em torno de p e q respectivamente, então $((x^i), (y^j))$ são coordenadas (em M) em torno de (p, q).
Identificamos $T_{(x,y)}M \cong T_x X \oplus T_y Y$. Se (X, g_X)e (Y, g_Y) são variedades riemannianas, então definimos a métrica g em M como:

$$g = g_X + g_Y$$

A variedade (M, g) é dita *variedade Riemanniana produto* de (X, g_X) e (Y, g_Y).

Lema 2.3.2. *Seja (M, g) a variedade Riemanniana produto de (X, g_X) e (Y, g_Y). Então:*

a) $\det g = \det g_X \det g_Y$*;*

b) Se $\mathrm{d}V_X$ e $\mathrm{d}V_Y$ são as medidas riemannianas em X e Y respectivamente, então a medida riemanniana $\mathrm{d}V_g$ em (M, g) é dada por $\mathrm{d}V_g = \mathrm{d}V_x\mathrm{d}V_Y$ (medida produto);

c) O operador de Laplace-Beltrami em (M, g) é dado por

$$\Delta = \Delta_X + \Delta_Y \ .$$

Demonstração. Veja [7], capítulo 3. □

2.4 Espaços de Sobolev $H^{k,p}(M)$

Trataremos com a definição apresentada nos livros [15, 16], pode-se consultar também o apêndice do livro [7].
Fixemos (M, g) uma variedade riemanniana com conexão riemanniana ∇. Seja $B(M)$ a menor σ-álgebra contendo todos os abertos. Seja $\Lambda(M)$ a família de todos os conjuntos *mensuráveis*. Daí, $\Lambda(M)$ forma uma σ-álgebra, e $B(M) \subset \Lambda(M)$. Logo, a medida $\mathrm{d}V_g$ é uma medida em $\Lambda(M)$, desse modo $(M, \Lambda(M), \mathrm{d}V_g)$ é um espaço de medida, e podemos definir os espaços L^p como de costume.

Seja $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p(M)$ consiste (da classe de equivalência *q.t.p*) das funções *mensuráveis* tais que $\|f\|_{L^p} < \infty$ onde

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_M |f|^p \mathrm{d}V_g \right)^{1/p} .$$

O espaço $L^p_{\mathrm{loc}}(M)$ consiste das funções f tais que $f \in L^p(\Omega)$ para todo Ω aberto em M com fecho compacto.

Proposição 2.4.1. *O espaço $C_0^\infty(M)$ é denso em L^p, $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Veja [7], capítulo 4. □

Agora, para cada $k = 1, 2, 3, \ldots$, e $u \in C^\infty(M)$, denotamos $\nabla^k u$ a $k-$ésima *derivada covariante* ($\nabla^0 u = u$). Temos por exemplo, $\nabla^1 u = \nabla u = du$, e em coordenadas (x^i), as componentes de ∇u são dadas por $(\nabla u)_i = \partial_i u$, isto é $\nabla u = (\nabla u)_i dx^i$. Já $\nabla^2 u$ por exemplo, as componentes em coordenadas são dadas por $(\nabla u)_{ij} = \partial_i \partial_j u - \Gamma^k_{ij} \partial_k u$.
Observemos que ∇u é a $1-$forma du, e $\langle \nabla u, \nabla u \rangle := \langle du, du \rangle$. Usando o isomorfismo musical, $du^\sharp = \mathrm{grad} u$, temos que $\langle \nabla u, \nabla u \rangle = \langle \mathrm{grad} u, \mathrm{grad} u \rangle$. Logo, $|\nabla u| = |\mathrm{grad} u|$, onde ∇u é a

primeira derivada covariante.
Para toda $u \in C^\infty(M)$, definimos, para $k \in \mathbb{N}$, em coordenadas locais, a norma

$$|\nabla^k u|^2 := g^{i_1 j_1} \cdot \ldots \cdot g^{i_k j_k} (\nabla^k u)_{i_1 \ldots i_k} \cdot (\nabla^k u)_{j_1 \ldots j_k} .$$

Se $k = 1$, $|\nabla^1 u|^2 = |\mathrm{grad} u|^2$ como já tínhamos.

Observação 2.4.1. *$|\nabla^k u|^2$ está bem definida, isto é não depende do sistema de coordenadas adotado, (veja [15]).*

Dados $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ real, seja

$$C^{k,p}(M) = \{u \in C^\infty(M), \forall j = 0, \ldots, k, \int_M |\nabla^j u|^p \mathrm{d}V_g < \infty\} .$$

Notemos que $C_0^\infty(M) \subset C^{k,p}(M)$. Para $u \in C^{k,p}(M)$, definimos a norma

$$\|u\|_{H^{k,p}} := \sum_{j=0}^{k} \left(\int_M |\nabla^j u|^p \mathrm{d}V_g \right)^{1/p} .$$

Definição 2.4.1. *O espaço de Sobolev $H^{k,p}(M)$ é definido como o completamento de $C^{k,p}(M)$ com respeito a norma $\| \cdot \|_{H^{k,p}}$.*

Observação 2.4.2.

a) Esta definição depende da métrica g. Caso M seja compacta, é possível mostrar que $H^{k,p}(M)$, definido anteriormente, não depende da métrica [15].

b) Podemos ver $H^{k,p}(M)$ como subespaço de $L^p(M)$. De fato, seja $\| \cdot \|_p$ a norma de L^p definida como antes. Podemos checar: (1) Toda sequência de Cauchy em $(C^{k,p}(M), \| \cdot \|_{H^{k,p}})$ é uma sequência de Cauchy em $(L^p(M), \| \cdot \|_p)$ e;
(2) Toda sequência de Cauchy em $(C^{k,p}(M), \| \cdot \|_{H^{k,p}})$ que converge para 0 no espaço $(L^p(M), \| \cdot \|_p)$, também converge para 0 em $(C^{k,p}(M), \| \cdot \|_{H^{k,p}})$.
Desse modo, podemos ver $H^{k,p}(M)$ como subespaço de $L^p(M)$ constituído das funções $u \in L^p(M)$ que são limites em $(L^p(M), \| \cdot \|_p)$ de sequências de Cauchy em $\{u_m\}$ em $(C^{k,p}(M), \| \cdot \|_{H^{k,p}})$, e definimos $\|u\|_{H^{k,p}}$ como antes, onde $|\nabla^j u|$, para $0 \leq j \leq k$, são agora limites em $(L^p(M), \| \cdot \|_p)$ das sequências de Cauchy $\{|\nabla^j u_m|\}$.

c) O espaço $H^k(M) = H^{k,2}(M)$ é um espaço de Hilbert com produto interno proveniente da norma $\| \cdot \|_{H^{k,2}}$. Quando $k = 1$, o produto interno em $H^1(M)$ fica da forma:

$$(u, v)_{H^1} = \int_M u \cdot v + \langle \nabla u, \nabla v \rangle \mathrm{d}V_g.$$

Em particular, $L^p(M) = H^{0,p}(M)$. Pela observação (b), para toda $u \in H^1$, $\mathrm{grad}u$ está bem derinido, e em coordenadas locais, tem a expressão: $\mathrm{grad}u = (g^{ij}(\nabla u)_i)\partial_j$. Assim sendo, o produto interno em $H^1(M)$ pode se visto como

$$(u, v)_{H^1} = \int_M u \cdot v + \langle \mathrm{grad}u, \mathrm{grad}v \rangle \mathrm{d}V_g.$$

Para mais detalhes sobre esta definição, veja por exemplo [15, 16].

Proposição 2.4.2. *Sejam (M, g) uma variedade completa, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Lipschitz (ou seja diferenciável em quase todo ponto), e $u \in H^{1,p}(M)$, $p \geq 1$. Se $h \circ u \in L^p(M)$, então $h \circ u \in H^{1,p}(M)$ e*

$$|\nabla(h \circ u)(x)| = |h'(u(x))| \cdot |\nabla u(x)|$$

para quase todo $x \in M$. Em particular, para todo $u \in H^{1,p}(M)$, $|u| \in H^{1,p}(M)$, e $|\nabla|u|| = |\nabla u|$ em quase todo ponto.

Demonstração. Veja [16], proposição 2.5. □

Definição 2.4.2. *O conjunto $H_0^{k,p}(M)$ é definido como o fecho de C_0^∞ em $H^{k,p}(M)$.*

Proposição 2.4.3. *Se M é completa, então $H_0^{1,p}(M) = H^{1,p}(M)$. A saber, se M é completa, então $C_0^\infty(M)$ é denso em $H^{1,p}(M)$.*

Demonstração. Veja [16], capítulo 2. □

2.4.1 Mergulho de Sobolev: resultados principais

A seguir apresentaremos os teoremas fundamentais sobre espaços de Sobolev, de modo que possamos ter ferramentas para as próximas discussões a serem feitas nesta dissertação.

Teorema 2.4.1 (Imersão de Sobolev)**.** *Sejam k e l inteiros com $k > l \geq 0$, p e q dois números reais satisfazendo $1/p = 1/q - (k - l)/n$. O teorema de imersão de Sobolev assegura que para $\mathbb{R}^n$, $H^{k,p} \hookrightarrow H^{l,p}$ continuamente.*

Teorema 2.4.2 (Mergulho de Sobolev)**.** *Se $1 < q < n$, então para toda $u \in H^{1,q}(\mathbb{R}^n)$*

$$\|u\|_p \leq K(n, q) \|\nabla u\|_q \ ,$$

com $1/p = 1/q - 1/n$

$$K(n, q) = \frac{q - 1}{n - 1} \left[\frac{n - q}{n(q - 1)} \right]^{1/q} \left[\frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n/q)\Gamma(n - n/q + 1)\sigma_{n-1}} \right] .$$

Assim, $K(n, q)$ é a melhor constante de mergulho $H^{1,q} \subset L^p$. Além disso, as funções que atingem a igualdade são da forma

$$u_\lambda(x) = (\lambda + |x|^{q/(q-1)})^{1-\frac{n}{q}}, \quad \lambda > 0 \, .$$

Teorema 2.4.3. *O teorema do mergulho de Sobolev é válido para toda variedade completa M com curvatura (seccional) limitada e raio de injetividade $\delta > 0$. A saber, existe $C = C(n, q)$ tal que*

$$\forall u \in H^{1,q}, \|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^q} \ .$$

Assim sendo, o mergulho de Sobolev é válido em toda variedade compacta. A seguir veremos uma versão do Teorema de Rellich-Kondrakok no caso em que a variedade é compacta. No entanto, antes relembremos de um resultado para o caso euclidiano.

Teorema 2.4.4 (Kondrakov). *Seja $k \geq 0$ um inteiro, p e q números reais satisfazendo $1 \geq 1/p > 1/q - k/n > 0$. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e limitado e tem fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 (ou lipschitziana), então a seguinte imersão é compacta*

$$H^{k,q}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \ .$$

Isto é, toda sequência limitada em $H^{k,q}(\Omega)$, admite subsequência convergente em $L^p(\Omega)$.

Uma consequência desse teorema é que caso a variedade M não seja *compacta*, ainda assim, ganhamos o seguinte resultado: se $\{v_n\}$ é uma sequência limitada em $H^{k,q}$, então $\{v_n\}$ admite uma subsequência convergente em $L^p_{\text{loc}}(M)$.

Teorema 2.4.5. *O teorema de Kondrakok é válido para variedades Riemannianas compactas M. Assim, a seguinte imersão é compacta:*

$$H^{k,q}(M) \hookrightarrow L^p(M), \ onde \ 1 \geq 1/p > 1/q - k/n > 0 \ .$$

2.4.2 Mergulho de Sobolev em $H^1(\mathcal{C})$

Um exemplo importante a ser usado nos capítulos posteriores é a variedade riemanniana $(\mathcal{C}, g)$, onde $\mathcal{C} = \mathbb{R} \times S^{n-1}$ é o cilindro, e g é a métrica induzida da métrica euclidiana em $\mathbb{R}^{n+1}$. Vale salientar que a métrica no cilindro é a métrica produto de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$, a saber $g = g_{\mathbb{R}} + g_{S^{n-1}}$, pois a métrica em S^{n-1} é a métrica induzida da métrica de $\mathbb{R}^n$.
Como g é a métrica produto, segue-se que as geodésicas $\gamma(t)$ em $\mathcal{C}$ são da forma

$$\gamma(t) = (at + b, \beta(t))$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $\beta(t)$ é geodésica em S^{n-1}, que ou é constante igual a um ponto ou é um *grandes circulos*.

Proposição 2.4.4. *$(\mathcal{C}, g)$ é uma variedade riemanniana completa, com cuvatura limitada e raio de injetividade $\delta > 0$. Portanto, vale o mergulho de Sobolev.*

Demonstração. Para usar o mergulho de Sobolev, precisamos verificar as hipóteses geométricas: completude, raio de injetividade positivo e curvatura limitada.

Completude: Como S^{n-1} é completa, segue-se que toda geodésica $\gamma(t)$ pode ser definida em todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, por Hopf-Rinow, $\mathcal{C}$ uma variedade completa.
Raio injetivo: Para mostra que o raio de injetividade δ é positivo, observemos que o raio de injetividade da esfera é $\delta_{S^{n-1}} = \pi$, pois $\forall p \in S^{n-1}$, $\delta_p = \pi$. Portanto, pela definição de geodésicas em $\mathcal{C}$, toda geodésica $\gamma(t)$ é mínima para $t \in [0, \pi]$, isto é o raio de injetividade do cilindro $\delta_{\mathcal{C}} = \pi > 0$.
Curvatura limitada: Fixado $t_0 \in \mathbb{R}$, a aplicação $F_{t_0}(t, \theta) = (t + t_0, \theta)$ é uma isometria em $\mathcal{C}$, pois $DF = Id$ (identidade) e a métrica g é a métrica produto.
Como a curvatura seccional $K_{\mathcal{C}}$ é invariante por isometria, para cada (t, θ) ponto, $K_{\mathcal{C}}(t, \theta) = K_{\mathcal{C}}(0, \theta)$, basta usar a isometria F_{-t}. A saber, com a métrica produto g, a curvatura seccional do cilindro é constante ao longo das retas $\gamma(t) = (t, \theta)$ (θ fixado). Por compacidade de S^{n-1}, $K_{\mathcal{C}}(0, \theta)$ é limitada. Portanto, vale o mergulho de Sobolev $H^{1,q}(\mathcal{C}) \subset L^p(\mathcal{C})$. □

2.5 Regularidade

Nesta seção veremos brevemente resultados de *regularidades* e um resultado do tipo *princípio do mínimo*. Usamos com referência principal os livros [7, 17].

Seja (M, g) variedade riemanniana. Assuma que M seja completa. Considere o problema

$$-\Delta u + \alpha u = f \ , \quad \text{em } M,$$

onde Δ é o operador de Laplace em M, α é uma constante, e $f \in L^2(M)$.

Teorema 2.5.1 (Regularidade)**.** *Seja u uma solução fraca da equação $-\Delta u + \alpha u = f$ em $H^1(M)$. Se $f \in C^\infty(M)$, então $u \in C^\infty(M)$.*

Demonstração. Veja [7], corolário 7.3. □

Agora trataremos de um princípio do mínimo.

Definição 2.5.1. *Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in C^2(M)$, u é dita*

a) $\alpha-$superharmônica em M se $-\Delta u + \alpha u \geq 0$;

b) $\alpha-$subharmônica em M se $-\Delta u + \alpha u \leq 0$;

c) $\alpha-$harmônica em M se $-\Delta u + \alpha u = 0$.

Quando $\alpha = 0$ na definição acima, o prefixo " α " é omitido, obtendo assim a definição usual de função harmônica, subharmônica e superharmônica.

Proposição 2.5.1 (Princípio do mínimo forte)**.** *Suponha que M seja conexa, e u uma função não-negativa $\alpha-$superharmônica em M, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $u(x_0) = 0$ em algum ponto $x_0 \in M$, então $u \equiv 0$ em M.*

Demonstração. Veja [7], corolário 8.14. □

2.5.1 Regularidade de $H^1(\mathbb{R})$

Verificaremos que toda função $f \in H^1(\mathbb{R})$ é *contínua*. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado e $0 < \alpha \leq 1$. Dizemos que uma função $u : U \to \mathbb{R}$ é *Hölder-contínua de expoente* α (em U) se a quantidade:

$$[u]_{\alpha,U} := \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \quad \text{é finita} .$$

Definição 2.5.2. *O espaço de Hölder $C^{k,\alpha}(\overline{U})$ consiste de todas as funções $u \in C^k(\overline{U})$ com a norma*

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}} := \sum_{|\beta| \leq k} \|D^\beta u\|_{C^k} + \sum_{|\beta| = k} [D^\beta u]_{\alpha,U} ,$$

onde $\|D^\beta u\|_{C^k} := \sup_{x \in \overline{U}} |D^\beta u(x)|$.

Ou seja, o espaço $C^{k,\alpha}(\overline{U})$ consiste de todas as funções u que são $k-$vezes diferenciáveis e que tem a $k-$ésima derivada parcial Hölder contínua com expoente α (em U). Caso U não seja limitado, dizemos que uma função $u : U \to \mathbb{R}$ é *localmente Hölder contínua com expoente α em U* se u é Hölder contínua com expoente em cada subconjunt $\Omega \subset U$, com $\overline{\Omega} \subset$.

Definição 2.5.3. *O espaço $C^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\overline{U})$ consiste de todas a funções $u \in C^k(\overline{U})$ cujas $k-$ésimas derivadas parciais são localmente Hölder contínuas em U e para todo $|\beta| \leq k$, $\sup_{\overline{U}} |D^\beta u| < \infty$.*

A seguir enunciaremos uma versão do teorema de Imersão de Sobolev.

Teorema 2.5.2. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, com ∂U de classe C^1. Assuma que $u \in H^k(U)$, com $k \geq 1$. Se $k > n/2$, então $u \in C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1,\alpha}(\overline{U})$ onde*

$$\alpha = \begin{cases} \left[\frac{n}{2}\right] + 1 - \frac{n}{2}, & \textit{se } n/2 \textit{ não é inteiro} \\ \textit{qualquer número positivo} < 1, & \textit{se } n/2 \textit{ é inteiro}. \end{cases}$$

Além disso, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1,\alpha}} \leq C\|u\|_{H^k} .$$

Demonstração. Uma prova para este teorema pode ser encontrada em [17], capítulo 5. □

Uma consequência desse teorema é que quando $n = 1$ e $f \in H^1(\mathbb{R})$, tem-se $f \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. De fato, $f \in H^1(\mathbb{R})$ implica $f \in H^1(U)$ para $U \subset \mathbb{R}$ aberto limitado. Como $k = 1 > 1/2$, pelo teorema anterior $f \in C^{0,\alpha}(\overline{U})$. Desse modo, $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ para algum $\alpha \in (0, 1)$. Em particular, f é contínua.

3 A DESIGUALDADE CKN: UMA PROVA ANALÍTICA

Iremos neste presente capítulo nos basear no artigo feito por Aldo Bazan e Wladimir Neves em [18]. Provaremos as desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN) por um argumento de interpolação conveniente. Primeiro provaremos um lema, consistindo da desigualdade CKN para o caso $b = a + 1$, utilizando um campo vetorial apropriado, onde na demonstração obtemos uma *boa constante* para a desigualdade (para este caso $b = a + 1$). Depois, provaremos um segundo lema (que será o caso $b = a$), onde a desigualdade de *Sobolev* é usada para uma função conviniente e, no fim, aplicaremos o que foi provado no lema anterior. O caso geral da desigualdade CKN será provada, como já dito, por um argumento de interpolação entre os dois casos anteriores, i.e. $b = a + 1$ e $b = a$. O enunciado das desigualdades CKN é o seguinte Teorema

Teorema 3.0.1. *Existe uma constante $C > 0$ tal que para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x\right)^{2/p} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x \tag{3.1}$$

onde $N \geq 3$,

$$-\infty < a < \frac{N-2}{2}, \quad a \leq b \leq a+1, \ e \quad p = \frac{2N}{N-2+2(b-a)}$$

Observação 3.0.1. *Quando $a = b = 0$, a desigualdade CKN é na realidade a desigualdade de Sobolev, pois $p = 2^*$. Quando $a = 0$ e $b = 1$, a desigualdade CKN é a desigualdade de Hardy, pois $p = 2$.*

Antes de demonstrarmos, iremos introduzir algumas notações e a *Desigualdade de Young*. Denotaremos por $\mathrm{d}x =$ medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$; $|\cdot|$ denota a norma Euclidiana em $\mathbb{R}^N$ e o valor absoluto em $\mathbb{R}$, dependendo do contexto obviamente; e por fim $V \cdot W$ denota o produto interno (euclidiano) de V com W

Lema 3.0.1 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam p e q números reais positivos tais que $1/p+1/q = 1$. Então para quaisquer números reais positivos a e b, temos:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,. \tag{3.2}$$

Equivalentemente:

$$\forall \lambda \in (0,1),\ a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b\,.$$

Em particular, temos: $\forall \alpha > 0$, $V, W \in \mathbb{R}^N$

$$V \cdot W \leq \alpha^{-p}\frac{|V|^p}{p} + \alpha^q \frac{|W|^q}{q}\ ,$$

onde $p, q \geq 1$ *são tais que* $1/p + 1/q = 1$.

Agora provaremos o teorema. Começemos provando dois lemas, casos: $b = a + 1$ e $b = a$. A demonstração da desigualdade CKN será provada por um argumento de interpolação.

Lema 3.0.2 (Caso $b = a + 1$)**.** *Sejam* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$*,* $N \geq 3$*,*

$$-\infty < a < \frac{N-2}{2},\ b = a+1,\ p = \frac{2N}{N-2+2\cdot 1} = 2\ .$$

Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2b}} \mathrm{d}x \leq c_{a+1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u(x)|^2}{|x|^{2a}} \mathrm{d}x\ , \tag{3.3}$$

onde

$$c_{a+1} = \frac{4}{(N-2-2a)^2}$$

é uma boa constante.

Demonstração. Seja $F : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^N$ campo vetorial dado por:

$$F(x) = \frac{1}{2b-N} \frac{x}{|x|^{2b}}\ .$$

Como $a < \frac{N-2}{2}$, tem-se $2b - N < 0$, e segue que F está bem definido.
Calculando o divergente de F, temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div} F(x) &= \frac{1}{2b-N} \mathrm{div}[|x|^{-2b} x] \\
&= \frac{1}{2b-N} \left(|x|^{-2b} \mathrm{div}[x] + \nabla |x|^{-2b} \cdot x \right) \\
&= \frac{1}{2b-N} \left(|x|^{-2b} N - 2b(x_1^2 + \cdots + x_N^2)(x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{-b-1} \right) \\
&= \frac{1}{2b-N} \left(|x|^{-2b} N - 2b|x|^{-2b} \right) \\
&= -|x|^{-2b}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^{2b}} \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \mathrm{div} F \mathrm{d}x\ .$$

Então, aplicando o teorema Green (2.6), e usando a desigualdade de Young, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2b}} \mathrm{d}x &= 2 \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|u(x)| F(x)}{|x|^{-a}} \right) \cdot \left(\frac{\nabla |u(x)|}{|x|^a} \right) \mathrm{d}x \\
&\leq \alpha^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2 |F|^2}{|x|^{-2a}} \mathrm{d}x + \alpha^{-2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2a}} \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde usamos o fato de $|\nabla |u|| = |\nabla u|$ (q.t.p), e $\alpha > 0$. Agora observemos que $b = a + 1$ implica

$$\frac{|F|^2}{|x|^{-2a}} = \frac{|x|^2}{(2b-N)^2 |x|^{4a+4}} |x|^{2a} = \frac{1}{(N-2-2a)^2} \frac{1}{|x|^{2b}}\ .$$

Portanto, de (3.4) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2b}}\mathrm{d}x \leq \frac{\alpha^2}{(N-2-2a)^2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^{2b}}\mathrm{d}x + \alpha^{-2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2a}}\mathrm{d}x\ ,$$

o que implica

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{(N-2-2a)^2}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2b}}\mathrm{d}x \leq \alpha^{-2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2a}}\mathrm{d}x\ .$$

E assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2b}}\mathrm{d}x \leq f(\alpha; N, a)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2a}}\mathrm{d}x\ ,$$

onde

$$f(\alpha; N, a) = \frac{(N-2-2a)^2}{\alpha^2(N-2-2a)^2 - \alpha^4}\ .$$

Pelo Teste da Segunda Derivada, o ponto de mínimo para f, com $\alpha =$ variável, é $\alpha = \frac{N-2-2a}{\sqrt{2}}$.
Logo,

$$f\left(\frac{N-2-2a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{(N-2-2a)^2}$$

é o valor mínimo para f. Desse modo, tome $c_{a+1} = \frac{4}{(N-2-2a)^2}$ □

Lema 3.0.3 (Caso $b = a$)**.** *Sejam* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$

$$-\infty < a < \frac{N-2}{2}\ ,\ b = a,\ \ p = \frac{2N}{N-2} = 2^*\ .$$

Então:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{2/p} \leq c(N, a)\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x\ , \tag{3.5}$$

onde $c(N, a)$ *é uma constante positiva que depende de* N *e* a*.*

Demonstração. Vamos usar a *Desigualdade de Sobolev* para a função: $f(x) = |x|^{-a}u(x)$. De fato, pela hipótese do parâmetro a, $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ (veja lema A.0.1 no apêndice).
Assim,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{2/2^*} \leq K^2(N, 2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(|x|^{-a}u)|^2\mathrm{d}x\ .$$

Vamos agora calcular $|\nabla(|x|^{-a}u)|$, temos

$$\nabla(|x|^{-a}u) = |x|^{-a}\left(\nabla u - (a|x|^{-2}u)x\right).$$

Assim,

$$|\nabla(|x|^{-a}u)|^2 = |x|^{-2a}\left(|\nabla u|^2 - 2(au|x|^{-2})x\cdot\nabla u + a^2|x|^{-2}|u|^2\right)\ .$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(|x|^{-a}u)|^2\mathrm{d}x\ &=\ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u(x)|^2}{|x|^{2a}}\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} a^2\frac{|u(x)|^2}{|x|^{2(a+1)}}\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2au(x)}{|x|^{2(a+1)}}x\cdot\nabla u(x)\mathrm{d}x \\ &=\ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u(x)|^2}{|x|^{2a}}\mathrm{d}x + I_2 + I_3\ .\end{aligned}$$

Vamos estimar as integrais I_2 e I_3. Para I_2, pelo lema anterior (caso $b = a+1$), temos que

$$I_2 \leq a^2 c_{a+1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u(x)|^2}{|x|^{2a}} \mathrm{d}x \, .$$

Para I_3, pela desigualdades de Young ($\lambda = 1$), tem-se:

$$\begin{aligned} I_3 &\leq 2|a| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{2a+2}} \left(\frac{|u|^2}{2} + \frac{|x|^2 |\nabla u|^2}{2} \right) \mathrm{d}x \\ &= |a| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^{2a+2}} \mathrm{d}x + |a| \int \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2a}} \mathrm{d}x \\ &\leq |a|(c_{a+1} + 1) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2a}} \mathrm{d}x \, . \end{aligned}$$

Daí, combinando os resultados obtidos, tem-se:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(|x|^{-a} u)|^2 \mathrm{d}x \leq (1 + a^2 c_{a+1} + |a| + |a| c_{a+1}) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u(x)|^2}{|x|^{2a}} \mathrm{d}x \, .$$

Portanto,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |u|^p \mathrm{d}x \right)^{2/2^*} \leq c(N,a) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u(x)|^2}{|x|^{2a}} \mathrm{d}x \, ,$$

onde

$$c(N,a) := K^2(N,2) \left[1 + |a| + (a^2 + |a|) c_{a+1} \right]$$

□

Agora estamos em condições de provar o caso mais geral, pois obteremos a desigualdade CKN por interpolação dos dois lemas anteriores. Antes, precisaremos do seguinte lema

Lema 3.0.4. *Se* $p = 2(1-\theta) + 2^*\theta$*, com* $\theta \in (0,1)$*, então*

$$b - a = 1 - \frac{\theta N}{N - 2 + 2\theta} \, , \quad bp = 2(1-\theta)(a+1) + 2^*\theta a \, .$$

Demonstração. Se $p = 2(1-\theta) + 2^*\theta$, então pode-se verificar imediatamente que

$$p = \frac{2(N-2) + 4\theta}{N-2} \, .$$

Mas $p = 2N/(N - 2 + 2(b-a))$, donde

$$\frac{2N}{N - 2 + 2(b-a)} = \frac{2(N-2) + 4\theta}{N-2}$$

o que implica

$$\begin{aligned} 2N(N-2) &= [2(N-2) + 4\theta][N - 2 + 2(b-a)] \\ &= 2(N-2)^2 + 4(N-2)(b-a) + 4\theta(N-2) + 8\theta(b-a). \end{aligned}$$

Desse modo,

$$2N^2 - 4N = 2N^2 - 8N + 8 + 4\theta(N-2) + [4(N-2) + 8\theta](b-a)$$

Assim,

$$\begin{aligned} 4[(N-2) + 2\theta](b-a) &= 2N^2 - 4N - 2N^2 + 8N - 8 - 4\theta(N-2) \\ &= 4[(N-2)\theta(N-2)] \end{aligned}$$

Logo

$$b - a = 1 - \frac{N\theta}{N-2+2\theta}.$$

Agora, temos

$$p = 2(1-\theta) + 2^*\theta \quad \text{e} \quad b = a + 1 - \frac{N\theta}{N-2+2\theta},$$

daí

$$bp = 2(1-\theta)(a+1) + 2^*\theta + [\dagger]$$

Onde

$$\begin{aligned} \dagger &= 2^*\theta - 2(1-\theta)\frac{N\theta}{N-2+\theta} - 2^*\frac{N\theta^2}{N-2+2\theta} \\ &= \frac{2N\theta(N-2+2\theta) - 2(1-\theta)N\theta(N-2) - 2N^2\theta^2}{(N-2)(N-2+2\theta)} \\ &= \frac{2N^2\theta - 4N\theta + 4N\theta^2 - 2(1-\theta)N^2\theta + 4N\theta(1-\theta) - 2N^2\theta^2}{(N-2)(N-2+2\theta)} \\ &= \frac{2N^2\theta - 4N\theta + 4N\theta^2 - 2N^2\theta + 2N^2\theta^2 + 4N\theta - 4N\theta^2 - 2N^2\theta^2}{(N-2)(N-2+2\theta)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.0.2. *Seja u uma função em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $N \geq 3$ e assuma que*

$$-\infty < a < \frac{N-2-}{2}\ , \ \ a \leq b \leq a+1\ , \ \ e\ \ p = \frac{2N}{N-2+2(b-a)}\ .$$

Então existe uma constante positiva $C = C(N,a)$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x\right)^{2/p} \leq C\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2a}}\mathrm{d}x\ .$$

Demonstração. Inicialmente, notemos que sob as hipóteses do Teorema (3.0.2), $p \in [2, 2^*]$, pois $0 \leq b-a \leq 1$. Os casos $p = 2$ e $p = 2^*$ foram verificados nos dois lemas anteriores. Assim, consideremos o caso mais geral $0 < b-a < 1$, e seja $\theta \in (0,1)$ tal que

$$p = 2(1-\theta) + 2^*\theta$$

Tal θ existe pois: $0 < b - a < 1 \Rightarrow 2 < p < 2^*$. Como $p = \frac{2N}{N-2+2(b-a)}$, segue pelo lema anterior que

$$b = a + 1 - \frac{N\theta}{N - 2 + 2\theta}$$

e também

$$bp = 2(1-\theta)(a+1) + 2^*\theta a\ .$$

Desse modo, para cada $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{bp}} &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{2(1-\theta)+2^*\theta}}{|x|^{2(1-\theta)(a+1)+2^*\theta a}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2(a+1)}} \mathrm{d}x \right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{2^*}}{|x|^{2^* a}} \right)^{\theta} , \end{aligned}$$

onde aqui usamos a Desigualdade de Hölder com exponetes $\hat{p} = 1/(1-\theta)$ e $\hat{q} = 1/\theta$. Como o resultado é válido para cada uma das integrais do membro direito da desigualdade acima (casos: $b = a + 1$ e $b = a$), segue-se o desejado! $\square$

4 A DESIGUALDADE CKN: UMA PROVA "GEOMÉTRICA"

Iremos neste capítulo e no próximo nos basear em tópicos discutidos no excelente artigo de Florin Catrina e Zhi-Qiang Wang [19]. Neste capítulo provaremos a desigualdade CKN por uma abordagem diferente daquela apresentada no capítulo anterior. Começaremos introduzindo uma família de transformações que converterão nosso problema original em um problema definido em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1}$, o cilindro. Os dois problemas serão mostrados como equivalentes em um sentido que será especificado com precisão.

4.1 Preliminares

Seja $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, defina as normas,

$$\|u\|_{L_b^p} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \; e \;\; \|u\|_{\mathfrak{D}_a^{1,2}} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

onde $N \geq 3$,

$$-\infty < a < \frac{N-2}{2}, \quad a \leq b \leq a+1, \; e \quad p = \frac{2N}{N-2+2(b-a)} \; .$$

Pelas escolhas dos parâmetros a, b e p, as normas dadas acima estão bem definidas (veja lema A.2.1). Desse modo, as desigualdades CKN podem ser reescritas como: $\exists C > 0 : \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\|u\|_{L_b^p}^2 \leq C\|u\|_{\mathfrak{D}_a^{1,2}}^2. \tag{4.1}$$

Seja $L_b^p(\mathbb{R}^N)$ o *completamento* de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma $\|\cdot\|_{L_b^p}$, e seja $\mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ o *completamento* de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito ao produto interno:

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}\nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x \; .$$

Note que a norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{D}_a^{1,2}}$ provém do produto interno acima. Precisaremos do seguinte lema.

Lema 4.1.1. *Para $a < (N-2)/2$, $a \leq b \leq a+1$ e $p = \frac{2N}{N-2+2(b-a)}$ vale:*

$$\mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})}^{\|\cdot\|_{\mathfrak{D}_a^{1,2}}}$$

e também

$$L_b^p(\mathbb{R}^N) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})}^{\|\cdot\|_{L_b^p}}.$$

Demonstração. Pela definição de $\mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, é suficiente mostrarmos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})}^{\|\cdot\|}$. Seja $\rho(t)$ uma função *lombada* tal que

$$\begin{cases} \rho(t) = 1\,; & t \geq 2 \\ \rho(t) = 0\,; & 0 \leq t \leq 1\,. \end{cases}$$

Seja $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dado, e defina

$$u_\epsilon(x) := \rho(|x|/\epsilon)u(x)\,.$$

Por construção, $\{u_\epsilon : \epsilon > 0\}$ é uma sequência de funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, pois para $|x| \leq \epsilon$, $u_\epsilon(x) = 0$, logo $\operatorname{supp}(u_\epsilon) \subset \{x : |x| > \epsilon\}$ para todo $\epsilon > 0$.
Notemos que $u_\epsilon \to u$ quando $\epsilon \to 0$, e

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon - u\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla(u_\epsilon - u)|^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\rho'(|x|/\epsilon)}{\epsilon}\frac{u}{|x|}x + (\rho(|x|/\epsilon) - 1)\nabla u \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0} \|u_\epsilon - u\|^2 &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla(u_\epsilon - u)|^2 \mathrm{d}x \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}\left|\left(\frac{\rho'(|x|/\epsilon)}{\epsilon}\frac{u}{|x|}x + (\rho(|x|/\epsilon) - 1)\nabla u\right)\right|^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}\left|\left(\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\rho'(|x|/\epsilon)}{\epsilon}\frac{u}{|x|}x + (\rho(|x|/\epsilon) - 1)\nabla u\right)\right)\right|^2 \mathrm{d}x \quad (*) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Portanto $u_\epsilon \to u$, na norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{D}_a^{1,2}}$, quando $\epsilon \to 0$. Em $(*)$ usamos o Teorema da Convergência Dominada (TCD), veja apêncide A.4.

Analogamente, para mostrarmos que $L_b^p(\mathbb{R}^N)$ também é o completamento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ sob a norma $\|\cdot\|_{L_b^p}$ é suficiente mostrarmos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})}^{\|\cdot\|_{L_b^p}}$. De fato, dado $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, considere u_ϵ como antes. Então,

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon - u\|_{L_b^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u_\epsilon - u|^p \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p|\rho(|x|/\epsilon) - 1|^p \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Como $\rho(|x|/\epsilon) \to 1$ (quando $\epsilon \to 0$) $\forall x$, segue-se, pelo TCD, que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0} \|u_\epsilon - u\|_{L_b^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \lim_{\epsilon\to 0}|\rho(|x|/\epsilon) - 1|^p \mathrm{d}x \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Logo, $u \in \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})}^{\|\cdot\|_{L_b^p}}$. $\square$

Seja agora $(\mathcal{C}, g)$ a variedade Riemanniana, onde $\mathcal{C} = \mathbb{R} \times S^{N-1}$ $(\subset \mathbb{R}^{N+1})$ é o cilindro, com g a métrica induzida pela métrica euclidiana em $\mathbb{R}^{N+1}$. Mostraremos que o problema (4.1), isto é as desigualdades CKN, em $\mathbb{R}^N$ é *equivalente* a um problema modelado em $\mathcal{C}$ num sentido que será dado em breve. Veremos no próximo capítulo que tal formulação acarretará em muitas consequências.

Adotaremos a seguinte nomeclatura: por $\mathrm{d}\mu$ denotaremos o elemento de volume Riemanniano em $\mathcal{C}$; e para pontos em $\mathcal{C}$, usaremos ou a notação y, identificando como um ponto de $\mathbb{R}^{N+1}$, ou (t, θ), para indicar $t \in \mathbb{R},\ \theta \in S^{N-1}$.

Dado $v \in C_0^\infty(\mathcal{C})$, defina $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ por

$$u(x) = |x|^{-\frac{N-2-2a}{2}} v\left(-\ln|x|, \frac{x}{|x|}\right) . \tag{4.2}$$

Observe que tal relação (4.2) é bijetiva. A saber, dado $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, defina $v \in C_0^\infty(\mathcal{C})$ por

$$v(t, \theta) = e^{-\frac{N-2-2a}{2}t} u(e^{-t}\theta) .$$

Considere a seguinte aplicação

$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \longrightarrow \mathcal{C} \\ F(x) = \left(-\ln|x|, \frac{x}{|x|}\right) . \end{cases}$$

Claramente F é uma aplicação suave. De fato, F é um difeomorfismo que inverte a *orientação*.

Lema 4.1.2. $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\det(D_x F) = -|x|^{-N}$.

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, escolha a base ortonormal em $\{\frac{\partial}{\partial r}, v_1, \ldots, v_{N-1}\}$, onde $\frac{\partial}{\partial r}(x) = x/|x|$ (vetor radial na direção de x) e $v_1, \ldots, v_{N-1}$ são vetores tangentes à S_x, a esfera de raio $|x|$, de centro 0.
Recordemos que para se calcular $D_x F(v)$, escolhemos $\alpha(t)$ curva em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha'(0) = v$ e fazemos $D_x F(v) = (F \circ \alpha)'(0)$. Assim, para calcularmos $D_x F(\frac{\partial}{\partial r})$, escolhemos a curva $\alpha(t) = x + \frac{x}{|x|}t$.
Logo,

$$\begin{aligned} F(\alpha(t)) &= \left(-\ln\left|\left(1 + \frac{t}{|x|}\right)x\right|, \frac{x}{|x|}\right) \\ &= \left(-\ln\left|\left(1 + \frac{t}{|x|}\right)x\right|, \frac{x}{|x|}\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$(F \circ \alpha)'(t) = \left(-\frac{1}{1 + t/|x|}\frac{1}{|x|}, 0\right).$$

Ou seja,

$$(F \circ \alpha)'(0) = \left(-|x|^{-1}, 0\right) .$$

Agora, para calcular $D_xF(v_i)$, escolhemos uma curva $\beta_i(t)$ sobre a esfera S_x com $\beta_i(0) = x$ e $\beta_i'(0) = v_i$.
Desse modo, $F(\beta_i(t)) = \left(-\ln|x|, \frac{\beta_i(t)}{|x|}\right)$, donde

$$(F \circ \beta_i)'(0) = \left(0, \frac{v_i}{|x|}\right).$$

Assim, concluímos que

$$(F \circ \alpha)'(0) = -\frac{1}{|x|}(1,0)\,, \text{ e } (F \circ \beta_i)'(0) = \frac{1}{|x|}(0, v_i)\,.$$

Portanto

$$\det D_xF = -|x|^{-N}\,.$$

□

Lema 4.1.3. *Para todo $v \in C_0^\infty(\mathcal{C})$, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} v(F(x))|x|^{-N}\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{C}} v\mathrm{d}\mu\,.$$

Demonstração. Sendo $\mathrm{d}x$ a forma volume em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e $\mathrm{d}\mu$ a forma volume em $\mathcal{C}$, então $F^*\mathrm{d}\mu = -|x|^{-N}\mathrm{d}x$ (veja 2.2).
Logo, vale

$$\int_{\mathbb{R}^N} v(F(x))(-1)|x|^{-N}\mathrm{d}x = -\int_{\mathcal{C}} v\mathrm{d}\mu\,.$$

□

4.2 Demonstação geométrica para CKN

Comecemos observando a seguinte proposição.

Proposição 4.2.1. *Dado $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, temos*

$$(1) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{C}} |\nabla_\theta v|^2 + v_t^2 + \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2 v^2\mathrm{d}\mu.$$

$$(2) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{C}} |v|^p\mathrm{d}\mu.$$

Onde a, b e p satisfazem as hipóteses CKN, u e v satisfazem (4.2)

Demonstração. Fixe u e v relacionados por (4.2), ou seja:

$$u(x) = |x|^\gamma v(F(x))$$

onde $\gamma = -\frac{N-2-2a}{2}$ e $F(x) = (-\ln|x|, \frac{x}{|x|})$. Vamos agora calcular $|\nabla u|$ com u dado acima. Seja $\{\frac{d}{dt}, e_1, \ldots, e_{N-1}\}$ um referencial ortonormal local em $\mathcal{C}$. Denotamos $\mathrm{grad}(v)$ por ∇v. Assim, localmente,

$$\nabla v = \left\langle \nabla v, \frac{d}{dt} \right\rangle \frac{d}{dt} + \sum_{i=1}^{N-1} \langle \nabla v, e_i \rangle\, e_i\,.$$

Logo, $|\nabla v|^2 = \left\langle \nabla v, \frac{d}{dt} \right\rangle^2 + |\nabla_\theta v|^2$, onde $\nabla_\theta v = \sum_{i=1}^{N-1} \langle \nabla v, e_i \rangle e_i$. Note que, por definição de gradiente, $\left\langle \nabla v, \frac{d}{dt} \right\rangle = dv(\frac{d}{dt}) = \frac{d}{dt} v = v_t$. Portanto,

$$|\nabla v|^2 = {v_t}^2 + |\nabla_\theta v|^2 .$$

Agora, como na demontração do lema 4.1.2, seja $\{\frac{\partial}{\partial r}, v_2, \ldots, v_N\}$ base ortonormal em $T_x(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^N$, onde $\frac{\partial}{\partial r}$ é o vetor radial na direção de x, e $v_i \in T_x(S_x)$, sendo S_x a esfera de raio $|x|$ centrada na origem. Podemos escolher $v_2 = e_1, \ldots, v_N = e_{N-1}$. Temos $u(x) = |x|^\gamma v(-\ln|x|, \frac{x}{|x|})$, daí sendo $r = |x|$ e $t = -\ln r$, segue-se:

$$\frac{\partial}{\partial r} u = \gamma r^{\gamma-1} v(-\ln r, x/r) + r^\gamma \frac{dv}{dt}\left(-\frac{1}{r}\right)$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = r^{\gamma-1}\left(-v_t + \gamma v\right).$$

Para calcular $\langle \nabla u, v_i \rangle$, procedemos da seguinte forma: seja $\alpha(t)$ curva em S_x com $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = v_i$, daí $F(\alpha(t)) = \beta(t)$, onde $\beta(t) = (-\ln|x|, \frac{\alpha(t)}{|x|})$. Desse modo, $\beta'(0) = \frac{v_i}{|x|} = \frac{e_{i-1}}{r}$ e

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, v_i \rangle &= \frac{d}{dt} u(\alpha(t))\Big|_{t=0} \\ &= r^\gamma \frac{d}{dt} v(\beta(t))\Big|_{t=0} \\ &= r^\gamma \langle \nabla v, \beta'(0) \rangle \\ &= \frac{r^\gamma}{r} \langle \nabla v, e_{i-1} \rangle . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\nabla u|^2 &= r^{2(\gamma-1)}\left(\frac{\partial u}{\partial r}^2 + |\nabla_\theta v|^2\right) \\ &= r^{2(\gamma-1)}\left[(-v_t + \gamma v)^2 + |\nabla_\theta v|^2\right] \\ &= r^{-(N-2-2a)-2}\left[\left(-v_t - \frac{N-2-2a}{2} v\right)^2 + |\nabla_\theta v|^2\right] \\ &= |x|^{-N+2a}\left[\left(v_t + \frac{N-2-2a}{2} v\right)^2 + |\nabla_\theta v|^2\right]. \end{aligned}$$

Na expressão acima, recorde que v está sendo calculado em $F(x)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a} |x|^{-N+2a}\left(\left(v_t + \frac{N-2-2a}{2} v\right)^2 + |\nabla_\theta v|^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-N}\left(\left(v_t + \frac{N-2-2a}{2} v\right)^2 + |\nabla_\theta v|^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathcal{C}}\left(\left(v_t + \frac{N-2-2a}{2} v\right)^2 + |\nabla_\theta v|^2\right) \mathrm{d}\mu \ \ \text{(pelo lema 4.1.3)} \\ &= \int_{\mathcal{C}} v_t^2 + \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2 v^2 + |\nabla_\theta v|^2 \mathrm{d}\mu + (N-2-2a)^2 \int_{\mathcal{C}} v v_t \mathrm{d}\mu . \end{aligned}$$

Mas a segunda integral acima é zero, pois, como $v \in C_0^\infty(\mathcal{C})$, segue-se

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} v v_t \mathrm{d}\mu &= \int_{\mathrm{supp}(v)} v v_t \mathrm{d}\mu \\ &= -\int_{\mathrm{supp}(v)} v_t v \mathrm{d}\mu \,.\end{aligned}$$

Onde da penúltima integral à última integral, utiliza-se integração por partes. Portanto, a parte (1) está provada.

Por fim provaremos agora a parte (2). Note que

$$\begin{aligned}|x|^{-bp}|u|^p &= |x|^{-bp}|x|^{-\frac{N-2-2a}{2}p}|v|^p \\ &= |x|^{\alpha}|v|^p.\end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned}\alpha &= \left(-b - \frac{N-2-2a}{2}\right)p \\ &= -\frac{2b+N-2-2a}{2}p \\ &= -\frac{N-2+2(b-a)}{2}p \,.\end{aligned}$$

Como $p = \frac{2N}{N-2+2(b-a)}$, segue-se que $\alpha = -N$. Assim $|x|^{-bp}|u|^p = |x|^{-N}|v(F(x))|^p$, e pelo lema (4.1.3)

$$\int_{\mathcal{C}} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{C}} |v|^p \mathrm{d}\mu \,.$$

□

Consideremos, agora para cada a, b parâmetros da hipótese CKN, a família de transformações definidas por

$$\begin{cases} \Phi : C_0^\infty(\mathcal{C}) \longrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \\ \Phi(v) = u, \quad \text{onde } u \text{ e } v \text{ são relacionados por (4.2) .} \end{cases}$$

Uma vez que $\mathcal{C}$ é variedade Riemanniana completa, $C_0^\infty(\mathcal{C})$ é denso em $H^1(\mathcal{C})$, sob a norma provinda do produto interno $(\cdot,\cdot)$, dado por:

$$(v, w) = \int_{\mathcal{C}} \nabla v \cdot \nabla w + vw \mathrm{d}\mu \,,$$

segue que $C_0^\infty(\mathcal{C})$ também é denso em $H^1(\mathcal{C})$ sob a norma, provinda do produto interno

$$(v, w) = \int_{\mathcal{C}} \nabla v \cdot \nabla w + \frac{(N-2-2a)^2}{2} vw \mathrm{d}\mu \,,$$

que é equivalente ao anterior, já que $\frac{(N-2-2a)^2}{2} > 0$. Dessa forma, consideramos o espaço de *Sobolev* $H^1(\mathcal{C})$, munido do produto interno acima. Pela proposição anterior, o mapa Φ é um operador *contínuo* entre os espaços $(C_0^\infty(\mathcal{C}), \|\cdot\|_{H^1})$ e $\left(C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}), \|\cdot\|_{\mathfrak{D}_a^{1,2}}\right)$. Por definição de $\mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e pela densidade de $C_0^\infty(\mathcal{C})$ em $H^1(\mathcal{C})$, segue-se que o mapa Φ se *estende* a um mapa contínuo entre os espaços de Hilbert $H^1(\mathcal{C})$ e $\mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, de fato a estensão de Φ é uma isomorfismo de espaços de Hilbert. Denotaremos tal extensão por Φ também. Em resumo temos o seguinte proposição:

Proposição 4.2.2. *O mapa $\Phi : H^1(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ dado anteriormente é um isomorfismo de espaços de Hilbert, onde o produto interno em $H^1(\mathcal{C})$ é:*

$$(v, w) = \int_{\mathcal{C}} \nabla v \cdot \nabla w + \frac{(N-2-2a)^2}{2} vw \mathrm{d}\mu \ .$$

Observemos que seguindo um raciocínio análogo, a proposição (4.2.1) implica também que o mapa Φ se estende a uma *isometria* sobrejetiva entre os espaços de Banach $L^p(\mathcal{C})$ e $L_b^p(\mathbb{R}^N)$, que também denotaremos tal extensão por Φ.

Como observado em (2.4.4), pela geometria de $\mathcal{C}$ vale o mergulho de Sobolev: $H^1(\mathcal{C}) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathcal{C})$. Como $H^1(\mathcal{C}) \subset L^2(\mathcal{C})$, então $H^1(\mathcal{C})$ pode ser visto como um subespaço de $L^2(\mathcal{C}) \cap L^{2^*}(\mathcal{C})$.

Lema 4.2.1. *Se $1 < r < s < t$, então $L^r \cap L^t \subset L^s$*

Demonstração. Veja proposição 6.10 em [20] □

Pela hipótese sobre os parâmetros a e b, temos $2 \leq p \leq 2^*$. Logo, $L^2(\mathcal{C}) \cap L^{2^*}(\mathcal{C}) \subset L^p(\mathcal{C})$. Assim, a inclusão $\Im : H^1(\mathcal{C}) \hookrightarrow L^p(\mathcal{C})$ é contínuo. Em resumo temos o seguinte diagrama de operadores contínuas

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\ \Im\ } & L^p(\mathcal{C}) \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ \mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N) & & L_b^p(\mathbb{R}^N) \ . \end{array}$$

Teorema 4.2.1 (Prova geométrica para CKN)**.** *Existe uma constante $C > 0$, tal que $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,*

$$\|u\|_{L_b^p}^2 \leq C\|u\|_{\mathfrak{D}_a^{1,2}}^2$$

Demonstração. Pelo mergulho de Sobolev, temos que existe $C > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^p}^2 \leq C\|v\|_{H^1}^2 \quad \forall v \in H^1(\mathcal{C}) \ .$$

Via o isomorfismo de Hilbert Φ, $\|u\|_{\mathfrak{D}_a^{1,2}} = \|v\|_{H^1}$ onde $u = \Phi(v)$, e também vale $\|u\|_{L_b^p} = \|v\|_{L^p}$. Portanto,

$$\|u\|_{L_b^p}^2 \leq C\|u\|_{\mathfrak{D}_a^{1,2}}^2 \ ,$$

o que finaliza a prova da desigualdade (4.1). Observe também que a constante C depende das normas dos espaços $L^p(\mathcal{C})$ e $H^1(\mathcal{C})$ cujas respectivas normas dependem dos paramêtros a, b e p. □

5 MELHORES CONSTANTES, EXISTÊNCIA E NÃO-EXISTÊNCIA DE FUNÇÕES EXTREMAIS PARA A DESIGUALDADE CKN

Aqui fixaremos os parâmetros, para $N \geq 3$,

$$-\infty < a < \frac{N-2}{2}, \quad a \leq b \leq a+1, \;\; e \quad p = \frac{2N}{N-2+2(b-a)} \, . \tag{5.1}$$

Uma vez provado a desigualdade CKN, vale o mergulho $\mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_b^p(\mathbb{R}^N)$ contínuo. Considere o seguinte conjunto

$$D = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -\infty < a < \frac{N-2}{2}, \; a \leq b \leq a+1\right\} \, . \tag{5.2}$$

Assim, a desigualdade CKN implica que a quantidade

$$S(a,b) := \inf_{u \in \mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} E_{a,b}(u) \quad \text{é } \textit{positiva} \text{ para } (a,b) \in D.$$

onde

$$E_{a,b}(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x\right)^{2/p}}, \quad \text{com } p = \frac{2N}{N-2+2(b-a)} \, .$$

Temos que $S(a,b)$ é a melhor constante de mergulho para CKN:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x\right)^{2/p} \leq S(a,b)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x \, .$$

Definição 5.0.1. *Uma função $u_0 \in \mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é dita extremal para $S(a,b)$, se $E_{a,b}(u_0) = S(a,b)$.*

Veremos que as funções *extremais* para $S(a,b)$, são soluções que *minimizam* a *energia* da seguinte equação diferencial parcial, dita equação de Euler-Lagrange:

$$-\mathrm{div}\left(|x|^{-2a}\nabla u\right) = |x|^{-bp}u^{p-1}, \quad u \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N. \tag{5.3}$$

Essa equação é considerada como um protótipo de equações elípticas degeneradas não-lineares que modelam fenômenos físicos (veja por exemplo [21] e suas referências, ou também veja [8], capítulo 1). Para as desigualdades CKN (4.1) e a equação (5.3) iremos associar um problema de *minimização* equivalente a equação de Euler modelada em $\mathcal{C}$, o cilindro que foi estudado no capítulo anterior.

Recorde que as desigualdades CKN (4.1) contém a desigualdade clássica de Sobolev $(a = b = 0)$ e a desigualdade de Hardy $(a = 0, \; b = 1)$ como casos especiais, que desevolveram importantes resultados em muitas aplicações em virtude do conhecimento sobre:

- As melhores constantes.

- Funções *extremais* e suas propriedades qualitativas.

Sobre as questões acima, veja [22, 23], [1] e [24–27], para ter mais detalhes. Desse modo, podemos fazer estas mesmas perguntas para (4.1), isto é:

- Qual é a melhor constante (explicitamente)?

- Existe, ou não existe funções extremais?

- Caso existam, quais as propriedades qualitativas das funções extremais de (4.1)?

É claro que tais perguntas estão baseadas nos parâmetros a, b variando na região (5.2), quando $N \geq 3$. Neste capítulo responderemos a tais perguntas. Observemos inicialmente a *homogeneidade* de CKN, isto é se uma função u satisfaz

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x\right)^{2/p} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x \ ,$$

então

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|cu|^p \mathrm{d}x\right)^{2/p} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla (cu)|^2 \mathrm{d}x \quad \forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ .$$

Muito progresso foi feito para (a, b) variando na região particular

$$0 \leq a < \frac{N-2}{2} \ , \quad a \leq b \leq a+1 \ ,$$

a qual nos referimos como a região "a-não-negativo" em (5.2). De fato, para a desigualdade de Sobolev $(a = b = 0)$, foi provado por Aubin [22] e Talenti [23] que

$$S(0,0) = N(N-2)\left(\frac{N\omega_N \Gamma^2(N/2)}{2\Gamma(N)}\right)^{2/N}$$

onde ω_N é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$, e a família da funções extremais para este caso são múltiplos das funções

$$u(x) = \frac{1}{(\lambda + |x|^2)^{(N-2)/2}}, \quad \lambda > 0 \ .$$

Em [26], Lieb considerou o caso $a = 0$, $0 < b < 1$, provando que a melhor constante é dada por:

$$S(0,b) = (N-2)(N-bp)\left(\frac{N\omega_N \Gamma^2((N-bp)/(2-bp))}{(2-bp)\Gamma((2N-2bp)/(2-bp))}\right)^{(2-bp)/(N-bp)} ,$$

e a família de funções extremais é:

$$u(x) = \frac{1}{(\lambda + |x|^{2-bp})^{(N-2)/(2-bp)}}, \quad \lambda > 0 \ .$$

Em [27], Chou e Chu consideraram toda região a-não-negativo: $a \geq 0$, $a \leq b < a+1$, e provaram que a melhor constante é

$$S(a,b) = (N-2-2a)(N-bp)\left(\frac{N\omega_N\Gamma^2((N-bp)/(2-bp+2a))}{(2-bp+2a)\Gamma((2N-2bp)/(2-bp+2a))}\right)^{\frac{2(N-bp)}{2-bp+2a}},$$

e que, para $a > 0$, as funções extremais são múltiplos das funções

$$u(x) = \frac{1}{(\lambda + |x|^{2-bp+2a})^{\frac{N-2-2a}{2-bp+2a}}}, \quad \lambda > 0\,.$$

O objetivo deste capítulo é discutir o estudo desenvolvido por F. Catrina e Z.-Q. Wang, em [19], visando a reobtenção dos resultados listados acima, bem como resultados semelhantes aos citados para a região "negativa": $a < 0$ e $a \leq b \leq a+1$. Além disso, discutiremos propriedades qualitativas das soluções da equação de Euler (5.3), como *invariâncias* e *simetrias*, entre outros.

A abordagem do problema em [19], o qual nos baseamos, é bem diferente daquela usada nos artigos citados anteriormente, [22, 23, 26, 27], nos quais o problema (4.1) é trabalhado diretamente com o espaço $\mathfrak{D}^{1,2}_a(\mathbb{R}^N)$. Recorde que fizemos um 'desvio' para converter o problema (4.1) em um problema equivalente definido em $H^1(\mathcal{C})$, no capítulo anterior, via (4.2). Seguiremos esta mesma ideia aqui, trabalharemos principalmente com o problema equivalente em $H^1(\mathcal{C})$. Esta reformulação do problema CKN (4.1) nos permite fazer uso de ferramentas analíticas, como um argumento de compacidade por exemplo.

5.1 Preliminares

5.1.1 Desigualdade CKN e a Equação de *Euler*

Vamos relacionar as funções extremais de CKN com as *ground states solutions* da equação de Euler. Antes vamos definir alguns conceitos. Recordemos que a, b são parâmetros na região

$$D = \{(a,b) : -\infty < a \leq (N-2)/2,\ \ a \leq b \leq a+1\} \text{ e } p = \frac{2N}{N-2+2(b-a)}\,.$$

Uma solução do equação Euler-Lagrange (5.3), é uma função não-negativa satisfazendo: $L'(u) = 0$, onde o funcional *energia* L é:

$$L(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x\,.$$

Definição 5.1.1. *Uma solução u_0 da equação (5.3) é dita ser de energia mínima (ground state) se $u_0 > 0$ e vale $0 < L(u_0) < L(u)$ para toda u solução de (5.3).*

Procuramos soluções de (5.3) no espaço $\mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Observe que $H^1(\mathbb{R}^N) \subset \mathfrak{D}_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Considere o problema

$$(P) : \begin{cases} -\mathrm{div}(|x|^{-2a}\nabla u) = |x|^{-bp}u^{p-1}, \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in \mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N), \;\; u \geq 0 \end{cases}$$

Fixado $u \neq 0$ em $\mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, defina, para $t > 0$

$$\phi_u(t) := L(tu) = \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x \,.$$

Daí,

$$\phi_u'(t_*) = 0 \Leftrightarrow t_* = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{p-2}} .$$

Lema 5.1.1.

$$\phi_u(t_*) = \frac{1-(b-a)}{N}\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x)^{2/p}}\right)^{\frac{p}{p-2}} .$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\phi_u(t_*) &= L(t_* u) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\int |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{\int |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x}\right)^{\frac{2}{p-2}} \int |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x \\
&\quad -\frac{1}{p}\left(\frac{\int |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{\int |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x}\right)^{\frac{p}{p-2}} \int |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\int |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{\int |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x}\right)^{\frac{2}{p-2}} \left(\int |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-2}{p-2}} \\
&\quad -\frac{1}{p}\left(\frac{\int |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{\int |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x}\right)^{\frac{p}{p-2}} \left(\int |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-2}{p-2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(\int |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x)^{\frac{p}{p-2}}}{(\int |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x)^{\frac{2}{p-2}}} - \frac{1}{p}\frac{(\int |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x)^{\frac{p}{p-2}}}{(\int |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x)^{\frac{2}{p-2}}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(\int |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x)^{\frac{p}{p-2}}}{((\int |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x)^{2/p})^{\frac{p}{p-2}}} - \frac{1}{p}\frac{(\int |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x)^{\frac{p}{p-2}}}{((\int |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x)^{2/p})^{\frac{p}{p-2}}} \\
&= \left(\frac{\int |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{(\int |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x)^{2/p}}\right)^{\frac{p}{p-2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) .
\end{aligned}$$

Recorde $p = \frac{2N}{N-2+2(b-a)}$, daí

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{p} = \frac{1-(b-a)}{N} .$$

Logo,

$$\phi_u(t_*) = \frac{1-(b-a)}{N}\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x)^{2/p}}\right)^{\frac{p}{p-2}} .$$

□

Por outro lado, observemos que se u satisfaz a desigualdade CKN, então $|u|$ também satisfaz, pois $|\nabla|u|| = |\nabla u|$ q.t.p. Desse modo, se u é uma função extremal, então $|u|$ também é uma função extremal. Portanto, o ínfimo na definição de $S(a,b)$ pode ser tomado apenas com $u \geq 0$ em $\mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$; e assim do lema anterior, tem-se

$$\begin{aligned} \inf_{u\in\mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N),\ u\geq 0} L(t_* u) &= \inf_{u\in\mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N),\ u\geq 0} \phi_u(t_*) \\ &= \frac{1-(b-a)}{N} \inf_{u\in\mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N),\ u\geq 0} \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x)^{2/p}} \right)^{\frac{p}{p-2}} . \end{aligned}$$

Observação 5.1.1. *O caso $b = a + 1$ implica que $\phi_u(t_*) = 0\ \forall u \in \mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Veremos posteriormente que este caso não admite funções extremais.*

Logo, o ínfimo

$$\inf_{u\in\mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N),\ u\geq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x)^{2/p}}$$

é atingido por u_0 se, e somente se, $t_* u_0$ é uma solução de energia *mínima* de (P), onde $t_* = t_*(u_0)$. Logo, provamos

Proposição 5.1.1. *As soluções de (P) de energia mínima estão relacionadas biunivocamente com as funções extremais de CKN (4.1), exceto o caso $b = a + 1$.*

5.1.2 Resultados preliminares

Para a, b, p em (5.1), definimos o *funcional* $F_{a,b}(v)$ em $H^1(\mathcal{C}) \setminus \{0\}$ por

$$F_{a,b}(v) = \frac{\int_{\mathcal{C}} |\nabla v|^2 + \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2 v^2 \mathrm{d}\mu}{(\int_{\mathcal{C}} |v|^p \mathrm{d}\mu)^{2/p}} ,$$

onde $\nabla = \frac{d}{dt} + \nabla_\theta$ é o operador gradiente em $\mathcal{C}$. Observe que $F_{a,b}$ é um funcional *contínuo* em $H^1(\mathcal{C})$, já que $H^1(\mathcal{C}) \hookrightarrow L^p(\mathcal{C})$. Recordemos do operador Φ, definido no capítulo 4,

$$\Phi : H^1(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N) \quad \text{(isomorfismo de espaços de Hilbert)},$$

onde se $v \in C_0^\infty(\mathcal{C})$, $u = \Phi(v) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ são relacionados por (4.2).
Como Φ é uma isometria entre os espaços $L^p(\mathcal{C})$ e $L_b^p(\mathbb{R}^N)$, segue que se $u \in \mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $v \in H^1(\mathcal{C})$ são relacionados por Φ, então $E_{a,b}(u) = F_{a,b}(v)$, onde

$$E_{a,b}(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x)^{2/p}} .$$

Ou seja, provamos

Proposição 5.1.2. *Sejam $u \in \mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $v \in H^1(\mathcal{C})$ tais que $u = \Phi(v)$. Então*

$$E_{a,b}(u) = F_{a,b}(v) .$$

Um resultado que será utilizado com frequência sobre o mapa Φ é o seguinte lema

Lema 5.1.2. *Dado $v \in H^1(\mathcal{C})$. Sendo $u(x) = \Phi(v)(x)$, vale*

$$u(x) = |x|^{-\frac{N-2-2a}{2}} v\left(-\ln|x|, \frac{x}{|x|}\right) .$$

Demonstração. Dado $v \in H^1(\mathcal{C})$, existe $\{v_n\} \subset C_0^\infty(\mathcal{C})$ sequência de Cauchy em $H^1(\mathcal{C})$ tal que, para μ-q.t.p, tem-se $v(t,\theta) = \lim_n v_n(t,\theta)$. Logo, se $u(x) = \Phi(v)(x)$, então

$$\begin{aligned} u(x) &= \Phi(v)(x) \quad \text{(definição } \Phi\text{)} \\ &= \lim_n \Phi(v_n)(x) \quad \text{(continuidade de } \Phi\text{)} \\ &= \lim_n \left(|x|^{-\frac{N-2-2a}{2}}\right) v_n \circ F(x) \quad (v_n \in C_0^\infty(\mathcal{C})) \\ &= |x|^{-\frac{N-2-2a}{2}} \left(\lim_n v_n\right) \circ F(x) . \end{aligned}$$

Desse modo,

$$u(x) = |x|^{-\frac{N-2-2a}{2}} v(F(x)) ,$$

onde $F(x) = (-\ln|x|, x/|x|)$. □

A seguinte proposição relaciona a equação (5.3) com uma equação elíptica no cilindro $\mathcal{C}$.

Proposição 5.1.3. *Se u é solução não-negativa de*

$$-\mathrm{div}\left(|x|^{-2a}\nabla u\right) = |x|^{-bp}u^{p-1}$$

em $\mathbb{R}^N$, então v, com $u = \Phi(v)$, satisfaz:

$$-v_{tt} - \Delta_\theta v + \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2 v = v^{p-1}$$

com $v \geq 0$ em $\mathcal{C}$, onde $t = -\ln|x|$ e Δ_θ é o operador de Laplace em S^{N-1}.

Demonstração. De fato, se u é solução (fraca) da equação acima, então u é ponto crítico do funcional energia associado à equação, e então $\forall w \in \mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$,

$$L'(u)w = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}\nabla u \cdot \nabla w \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}u^{p-1}w \mathrm{d}x = 0 .$$

Como Φ é um isomorfismo entre os espaços de Hilbert $\mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $H^1(\mathcal{C})$, segue-se que para $u = \Phi(v)$ e $w = \Phi(v_0)$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}\nabla u \cdot \nabla w \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{C}} \nabla v \cdot \nabla v_0 + \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2 v\, v_0 \mathrm{d}\mu .$$

Por outro lado, pela definição de Φ e do lema anterior (5.1.2), temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp} u^{p-1} w \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp} \left(|x|^{-\frac{N-2-2a}{2}} v(F(x))\right)^{p-1} \left(|x|^{-\frac{N-2-2a}{2}} v_0(F(x))\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp} |x|^{-\frac{N-2-2a}{2}(p-1)} |x|^{-\frac{N-2-2a}{2}} \left(v^{p-1} v_0\right) (F(x)) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-N} \left(v^{p-1} v_0\right) (F(x)) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathcal{C}} v^{p-1} v_0 \mathrm{d}\mu \,.\end{aligned}$$

Agora, note que o funcional energia associado a equação $-v_{tt} - \Delta_\theta v + \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2 v = v^{p-1}$, para $v \geq 0$ em $H^1(\mathcal{C})$ é

$$L_{\mathcal{C}}(v) = \int_{\mathcal{C}} |\nabla v|^2 + \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2 v^2 \mathrm{d}\mu - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{C}} |v|^p \mathrm{d}\mu \,.$$

As soluções em $H^1(\mathcal{C})$ da equação são os pontos críticos de $L_{\mathcal{C}}$, isto é

$$L'_{\mathcal{C}}(v) v_0 = \int_{\mathcal{C}} \nabla v \cdot \nabla v_0 + \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2 v\, v_0 \mathrm{d}\mu - \int_{\mathcal{C}} v^{p-1} v_0 \mathrm{d}\mu = 0 \,.$$

Pelas observações feitas até aqui e pela bijeção de Φ, segue-se o resultado desejado. $\square$

Desse modo, coletando essas proposições, obtemos o seguinte teorema

Teorema 5.1.1. *Com a, b e p em (5.1), temos*

a) Se $u \in \mathfrak{D}^{1,2}_a(\mathbb{R}^N)$ e $v \in H^1(\mathcal{C})$ são relacionados por Φ, então $E_{a,b}(u) = F_{a,b}(v)$.

b)
$$S(a,b) = \inf_{v \in H^1(\mathcal{C}) \setminus \{0\}} F_{a,b}(v) \,.$$

c) As soluções dos problemas abaixo estão em bijeção (5.3) e

$$\begin{cases} -\Delta v + \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2 v^2 = v^{p-1}, \\ v \in H^1(\mathcal{C}), \quad v \geq 0 \,. \end{cases} \tag{5.4}$$

5.2 Invariância do Problema

A fim de estudarmos as propriedades simétricas das soluções deste problema (5.3), iremos examinar a invarância do problema sob a operador Φ. No caso $a = b = 0$, $p = 2^*$ e o problema (5.3) fica:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{p-1} \,, \\ u \in \mathfrak{D}^{1,2}_0(\mathbb{R}^N), \quad u \geq 0 \,. \end{cases}$$

Neste caso (e único), o grupo de *movimentos rígidos* em $\mathbb{R}^N$, é um grupo de *simetria* para (5.3) no seguinte sentido: se $T(x) = Ux + y$ é um movimento rígido ($U \in O(N)$, $y \in \mathbb{R}^N$) e u é uma solução, então $u \circ T$ é solução. De fato dado $v \in \mathfrak{D}_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u \circ T)(x) \cdot \nabla v(x) \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(z) \cdot \nabla v(T^{-1}(z))|\det U| dz \quad \text{(mudança de variável)}\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u^{p-1}(z) v(T^{-1}(z)) \mathrm{d}z \quad \text{(pois } u \text{ é solução de 5.3)}\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u^{p-1}(T(x)) v(x) \mathrm{d}x \quad \text{(também mudança de variável).}\end{aligned}$$

Agora, retornemos ao caso mais geral. Considere o problema (5.4) equivalente ao problema (5.3).

Proposição 5.2.1 (Invariância por dilatações)**.** *Se u é solução de (5.3), então*

$$u_\tau(x) := \tau^{\frac{N-2-2a}{2}} u(\tau x)$$

é solução de (5.3), $\forall \tau > 0$.

Demonstração. Seja $v \in H^1(\mathcal{C})$ tal que $u = \Phi(v)$. Como u é solução de (5.3), v é solução de (5.4) pelo Teorema 5.1.1. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} u_\tau(x) &= \tau^{\frac{N-2-2a}{2}} u(\tau x)\\ &= \tau^{\frac{N-2-2a}{2}} |\tau x|^{-\frac{N-2-2a}{2}} v(-\ln|\tau x|, \tau x/|\tau x|) \quad \text{(Lema 5.1.2)}\\ &= |x|^{-\frac{N-2-2a}{2}} v(-\ln|x| - \ln\tau, x/|x|)\ . \end{aligned}$$

Ou seja, se $u_\tau = \Phi(v_\tau)$, então $v_\tau(t, \theta) = v(t - \ln\tau, \theta)$. Sendo v uma solução de (5.4), claramente v_τ satisfaz (5.4). Logo segue que u_τ satisfaz (5.3). □

Assim, "dilatar", no sentido acima, em $\mathbb{R}^N$ corresponde a "transladar" em $\mathcal{C}$ na direção t.

Proposição 5.2.2 (Invariância por inversão)**.** *Se u é solução de (5.3), então*

$$\bar{u}(x) := |x|^{-(N-2-2a)} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

é solução de (5.3).

Demonstração. Seja $v \in H^1(\mathcal{C})$, tal que $u = \Phi(v)$, então

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= |x|^{-(N-2-2a)} \left|\frac{x}{|x|^2}\right|^{-\frac{N-2-2a}{2}} v\left(-\ln\left|\frac{x}{|x|^2}\right|, \frac{x}{|x|}\right) \quad \text{(Lema 5.1.2)}\\ &= |x|^{-\frac{N-2-2a}{2}} v\left(\ln|x|, \frac{x}{|x|}\right)\ . \end{aligned}$$

Ou seja, se $\bar{u} = \Phi(\bar{v})$, então $\bar{v}(t, \theta) = v(-t, \theta)$, onde $v = \Phi(u)$. Por hipótese, u é solução de (5.3), logo v é solução de (5.4). Notemos que $\bar{v}$ é também solução de (5.4), portanto $\bar{u}$ é solução de (5.3). □

5.3 Soluções Radiais

Seja $\mathfrak{D}^{1,2}_{a,R}(\mathbb{R}^N)$ o subespaço de $\mathfrak{D}^{1,2}_{a}(\mathbb{R}^N)$ constituindo de funções *radiais*, a saber $\mathfrak{D}^{1,2}_{a,R}(\mathbb{R}^N)$ é constituido das funções $u \in \mathfrak{D}^{1,2}_{a}(\mathbb{R}^N)$ tais que $u(x) = u(|x|)$. Definimos

$$R(a,b) := \inf_{u \in \mathfrak{D}^{1,2}_{a,R}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} E_{a,b}(u) \ .$$

Pela teorema (5.1.1), temos que

$$R(a,b) = \inf_{v \in H^1_R(\mathcal{C})\setminus\{0\}} F_{a,b}(v) \ .$$

onde $H^1_R(\mathcal{C})$ consiste das funções v que não depende de $\theta \in S^{n-1}$.

O objetivo dessa seção é encontrar um valor exato para $R(a,b)$, e uma forma exata das soluções *radiais* que alcançam $R(a,b)$ quando $a \leq b < a+1$. Para estudar as soluções radiais de (5.3), estudamos as soluções positivas de

$$-v_{tt} - \Delta_\theta v + \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2 v = v^{p-1}$$

com $v(t,\theta) = v(t)$. Ou seja, procuramos soluções da EDO de segunda ordem:

$$(*):\ -v'' + \lambda^2 v = v^{p-1}\ , \quad v \in H^1(\mathbb{R}), v > 0$$

com $p > 2$, pois $b < a+1$. Antes de tudo, procuremos por soluções v de $(*)$ positivas que sejam de classe C^2 e estejam em $H^1(\mathbb{R})$. Considerando a EDO $(*)$, chamemos $w = \frac{d}{dt}v$. Assim, pela regra da cadeia

$$v'' = \frac{d}{dt}w = \frac{dw}{dv}\frac{dv}{dt}\ .$$

Substituindo em $(*)$ a expressão acima, considerando $v =$ variável, temos

$$-w\frac{dw}{dv} + \lambda^2 v = v^{p-1},$$

logo obtemos a seguinte equação *separável*

$$wdw = (\lambda^2 v - v^{p-1})dv.$$

Logo,

$$\frac{w^2}{2} = \frac{\lambda^2}{2}v^2 - \frac{1}{p}v^p \ \Leftrightarrow\ w^2 = \lambda^2 v^2 - \frac{2}{p}v^p.$$

Como queremos $v \in H^1(\mathbb{R})$, devemos ter v decrescente (em módulo) para $|t|$ suficientemente grande, para que assim tenhamos também

$$\frac{\lambda^2}{2}v^2 - \frac{1}{p}v^p > 0.$$

Assim, escolhemos

$$w = -\sqrt{\frac{\lambda^2}{2}v^2 - \frac{1}{p}v^p} \qquad \text{(o sinal “$-$” é para termos v decrescente).}$$

Ou seja,

$$\frac{dv}{dt} = -\sqrt{\lambda^2 v^2 - \frac{2}{p} v^p}$$

se, e somente se,

$$\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 v^2 - \frac{2}{p} v^p}} dv}_{=I} = -t + C. \tag{5.5}$$

Usando o $\boxed{\textit{Wolfram Alpha}}$ para calcular a integral acima, obtemos:

$$(I) = -\frac{2i}{\lambda(p-2)} \arcsin\left(\lambda\left(\frac{p}{2}\right)^{1/2} v^{-(p-2)/2}\right), \quad \text{onde } i = \sqrt{-1}.$$

Como $\arccos'(z) = -\arcsin'(z)$, segue $\arcsin(z) = -\arccos(z) + C$, $C =$ constante. Logo,

$$(I) = \frac{2i}{\lambda(p-2)} \left[\arccos\left(\lambda\left(\frac{p}{2}\right)^{1/2} v^{-(p-2)/2}\right) + C\right].$$

Daí, substituindo (I) em (5.5):

$$\frac{2i}{\lambda(p-2)} \arccos\left(\lambda\left(\frac{p}{2}\right)^{1/2} v^{-(p-2)/2}\right) = -t + C'$$

$$\therefore$$

$$\arccos\left(\lambda\left(\frac{p}{2}\right)^{1/2} v^{-(p-2)/2}\right) = \frac{\lambda(p-2)}{2}(t + C')i .$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lambda\left(\frac{p}{2}\right)^{1/2} v^{-(p-2)/2} &= \cos\left[\frac{\lambda(p-2)}{2}(t + C')i\right] \\ &= \cosh\left[\frac{\lambda(p-2)}{2}(t + C')\right]. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} v^{-(p-2)/2} &= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{2}{p}\right)^{1/2} \cosh\left[\frac{\lambda(p-2)}{2}(t + C')\right] \\ &\therefore \\ v &= \left(\frac{\lambda^2 p}{2}\right)^{1/(p-2)} \left(\cosh\left(\frac{\lambda(p-2)}{2}(t + C')\right)\right)^{-2/(p-2)}. \end{aligned}$$

Lema 5.3.1. *A função*

$$v(t) = \left(\frac{\lambda^2 p}{2}\right)^{1/(p-2)} \left(\cosh\left(\frac{\lambda(p-2)}{2} t\right)\right)^{-2/(p-2)}$$

é positiva, e está em $H^1(\mathbb{R})$.

Demonstração. Escreva $v(t) = A(\cosh(Bt))^{-2/(p-2)}$, onde $A = (\lambda^2 p/2)^{1/(p-2)} > 0$ e $B = \lambda(p-2)/2 > 0$. Claramente $v > 0$. Agora, devemos mostrar que $v, v' \in L^2(\mathbb{R})$. Observe que $\cosh(Bt) \leq e^{Bt}$ para todo $t \geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} v^2(t)\mathrm{d}t &= 2\int_0^\infty v^2(t)\mathrm{d}t \qquad \text{(paridade de } v^2(t))\\ &\leq A^2\int_0^\infty e^{-4B/(p-2)}\mathrm{d}t < \infty.\end{aligned}$$

Desse modo, $v \in L^2(\mathbb{R})$. Agora, observe que

$$\begin{aligned}v'(t) &= -\frac{2}{p-2}A(\cosh(Bt))^{-p/(p-2)}B\sinh(Bt)\\ &= C(\cosh(Bt))^{-p/(p-2)}\sinh(Bt) \quad \text{onde } C = -2AB/(p-2).\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}(v'(t))^2 &= C^2(\cosh(Bt))^{-2p/(p-2)}\sinh^2(Bt)\\ &= C^2(\cosh(Bt))^{-2p/(p-2)}(\cosh^2(t)-1)\\ &= C^2\left((\cosh(Bt))^{-2/(p-2)} - (\cosh(Bt))^{-2p/(p-2)}\right).\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}(v'(t))^2\mathrm{d}t &= 2\int_0^\infty (v'(t))^2\mathrm{d}t \qquad \text{(paridade de } (v'(t))^2)\\ &= 2C^2\left[(I)-(II)\right].\end{aligned}$$

onde

$$(I) = \int_0^\infty (\cosh(Bt))^{-2/(p-2)}\mathrm{d}t \leq \int_0^\infty e^{-2B/(p-2)}\mathrm{d}t < \infty .$$

e

$$(II) = \int_0^\infty (\cosh(Bt))^{-2p/(p-2)}\mathrm{d}t \leq \int_0^\infty e^{-2B/(p-2)}\mathrm{d}t < \infty .$$

Logo, $v' \in L^2(\mathbb{R})$. Portanto $v \in H^1(\mathbb{R})$. □

Observação 5.3.1. *Vale salientar que há um passo crucial no cálculo da integral* (I)*: a substituição "*$\arcsin(z) = -\arccos(z) + C$*". Se não fosse feito esta substituição, encontraríamos a função*

$$y(t) = \left(\frac{\lambda^2 p}{2}\right)^{1/(p-2)}\left(\sinh\left(\frac{\lambda(p-2)}{2}(t+C')\right)\right)^{-2/(p-2)}$$

que está definida para $t \neq -C'$. *Note que esta função* $y(t)$ *é positiva e não pertence à* $L^2(\mathbb{R})$. *Uma vez que queriámos soluções positivas em* $H^1(\mathbb{R})$ *(que estão associadas as funções extremais) se fez necessário a substituição de arcosseno para arcocosseno.*

Proposição 5.3.1. *As soluções positivas de* $(*)$ *que estão em* $H^1(\mathbb{R})$ *são exatamente as translações da função*

$$v(t) = \left(\frac{\lambda^2 p}{2}\right)^{1/(p-2)}\left(\cosh\left(\frac{\lambda(p-2)}{2}t\right)\right)^{-2/(p-2)}.$$

Demonstração. Seja $u \in H^1(\mathbb{R})$ uma solução de $(*)$ positiva. Pela regularidade de $H^1(\mathbb{R})$, temos que $u \in H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R})$. Por $(*)$, $u'' = \lambda^2 u - u^{p-1}$, logo $u'' \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R})$, e em particular, $u \in C^2(\mathbb{R})$. Desse modo, u é uma solução positiva *clássica* de $(*)$. Assim, pela observação anterior, devemos ter $u(t)$ como uma translação de

$$t \mapsto \left(\frac{\lambda^2 p}{2}\right)^{1/(p-2)} \left(\cosh\left(\frac{\lambda(p-2)}{2}t\right)\right)^{-2/(p-2)} .$$

$\square$

Concluímos portanto que as únicas soluções radiais positivas em $H^1(\mathcal{C})$ de

$$-v_{tt} - \Delta_\theta v + \lambda^2 v = v^{p-1}$$

são translações em t de

$$v(t) = \left(\frac{\lambda^2 p}{2}\right)^{1/(p-2)} \left(\cosh\left(\frac{\lambda(p-2)}{2}t\right)\right)^{-2/(p-2)} \tag{5.6}$$

onde $p = \frac{2N}{N-2+2(b-a)}$ e $\lambda = \frac{N-2-2a}{2}$, com $a \leq b < a+1$. Logo, $v(t)$ são as soluções radiais de energia mínima. Agora, vamos explicitar a função v em termos dos parâmetros a, b e p. Por um cálculo direto, temos que

$$\frac{p-2}{p} = \frac{2(1-(b-a))}{N} , \quad \frac{\lambda^2 p}{2} = \frac{N(N-2-2a)^2}{4(N-2+2(b-a))} .$$

Assim, substituindo esses valores em (5.6), obtemos

$$\begin{aligned} v(t) \quad &= \quad \left(\frac{N(N-2-2a)^2}{4(N-2+2(b-a))}\right)^{\frac{N-2+2(b-a)}{4(1-(b-a))}} \times \\ &\quad \left(\cosh\left(\frac{4(1-(b-a))}{2(N-2+2(b-a))}\frac{N-2-2a}{2}t\right)\right)^{-\frac{2(N-2+2(b-a))}{4(1-(b-a))}} . \end{aligned}$$

Portanto

$$v(t) = \left(\frac{N(N-2-2a)^2}{4(N-2+2(b-a))}\right)^{\frac{N-2+2(b-a)}{4(1-(b-a))}} \left(\cosh\left(\frac{(N-2-2a)(1-(b-a))}{N-2+2(b-a)}t\right)\right)^{-\frac{(N-2+2(b-a))}{2(1-(b-a))}} .$$

Retornando a $\mathbb{R}^N$, a solução radial $u(x)$ em $\mathbb{R}^N$ de (5.3) correspontende por Φ a esta $v(t)$ é

$$u(x) = \Phi(v)(x) = |x|^{-\frac{N-2-2a}{2}} v(-\ln|x|) .$$

Chamando

$$\alpha = \frac{(N-2-2a)(1-(b-a))}{N-2+2(b-a)} , \quad \beta = \left(\frac{N(N-2-2a)^2}{4(N-2+2(b-a))}\right)^{\frac{N-2+2(b-a)}{4(1-(b-a))}}$$

e

$$\gamma = \frac{(N-2+2(b-a))}{2(1-(b-a))}\ ,$$

tem-se

$$\begin{aligned} u(x) &= \beta|x|^{-\frac{N-2-2a}{2}}\left(\cosh\left(-\alpha \ln|x|\right)\right)^{-\gamma} \\ &= \beta|x|^{-\frac{N-2-2a}{2}} \frac{2^{\gamma}}{(|x|^{-\alpha}+|x|^{\alpha})^{\gamma}} \\ &= \beta\frac{|x|^{-\frac{N-2-2a}{2}}|x|^{\alpha\gamma}2^{\gamma}}{(1+|x|^{2\alpha})^{\gamma}}\ . \end{aligned}$$

Daí, substituindo os valores de $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ na expressão acima, temos

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(\frac{N(N-2-2a)^2}{4(N-2+2(b-a))}\right)^{\frac{N-2+2(b-a)}{4(1-(b-a))}} |x|^{-\frac{N-2-2a}{2}}|x|^{\frac{N-2-2a}{2}} \times \\ &\quad 2^{\frac{N-2+2(b-a)}{2(1-(b-a))}} \frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{2(1-(b-a))(N-2-2a)}{N-2+2(b-a)}}\right)^{\frac{N-2+2(b-a)}{2(1-(b-a))}}}\ . \end{aligned}$$

Simplificando, obtem-se finalmente que

$$u(x) = \left(\frac{N(N-2-2a)^2}{(N-2+2(b-a))}\right)^{\frac{N-2+2(b-a)}{4(1-(b-a))}} \frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{2(1-(b-a))(N-2-2a)}{N-2+2(b-a)}}\right)^{\frac{N-2+2(b-a)}{2(1-(b-a))}}}\ . \tag{5.7}$$

Observação 5.3.2. *Como as soluções radiais positivas de (5.4) são translações de (5.6), pela proposição (5.2.1) segue que as soluções positivas, radiais, de (5.3) são as dilatações, no sentido da proposição (5.2.1), de (5.7).*

Vamos agora calcular a energia $R(a,b)$ das soluções radiais em $H^1(\mathcal{C})$. Como a função v dada em (5.6) é solução de $-v''+\lambda^2 v = v^{p-1}$, segue-se por integração por partes que

$$\int_{\mathbb{R}} {v_t}^2 + \lambda^2 v^2 \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} v^p \mathrm{d}t\ .$$

Logo para $v(t)$ dada por (5.6), vale

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\mathbb{R}} {v_t}^2+\lambda^2v^2\mathrm{d}t}{(\int_{\mathbb{R}} v^p\mathrm{d}t)^{2/p}} &= \frac{\int_{\mathbb{R}} v^p\mathrm{d}t}{(\int_{\mathbb{R}} v^p\mathrm{d}t)^{2/p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} v^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-2}{p}}\ . \end{aligned} \tag{5.8}$$

Para calcular esta última integral, denote por $c = \left(\frac{\lambda^2 p}{2}\right)^{p/(p-2)}$, $m = \frac{(p-2)\lambda}{2}$ e $n = \frac{2p}{p-2}$, então v^p se escreve como

$$v^p(t) = c\left(\cosh(mt)\right)^{-n}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}} v^p\mathrm{d}t = c\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\cosh^n(mt)}\mathrm{d}t\ .$$

Faça a mudança de variável $x = e^{mt}$, daí $\mathrm{d}x = me^{mt}\mathrm{d}t$, ou seja $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{mx}$, e também

$$\cosh^n(mt) = \left(\frac{e^{mt} + e^{-mt}}{2}\right)^n = \frac{e^{-m\cdot nt}}{2^n}\left(1 + (e^{mt})^2\right)^n = \frac{x^{-n}}{2^n}\left(1 + x^2\right)^n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} v^p \mathrm{d}t &= c\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\frac{2^n x^n}{mx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{c}{m}\underbrace{\int_0^\infty \frac{2^n x^{n-1}}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x}_{I}.\end{aligned}$$

Usando novamente o $\boxed{\text{Wolfram Alpha}}$ para calcular I, temos,

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}2^{-n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \quad \text{onde } \Gamma(s) \text{ é a função gamma.}$$

Substituindo este valor em (5.8), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} v^p \mathrm{d}t = \frac{c\sqrt{\pi}}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \tag{5.9}$$

Usando o fato de, para $2z \neq 0, -1, -2\ldots$, $\Gamma(z) = \pi^{-1/2}2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$, assim

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n)}{2^{n-1}\Gamma(n/2)}.$$

Logo, substituindo a igualdade acima em (5.9), obtem-se

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} v^p \mathrm{d}t &= \frac{c\sqrt{\pi}}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}} \\ &= \frac{c2^{n-1}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{m\Gamma(n)}.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Assim, substituindo os valores

$$c = \left(\frac{\lambda^2 p}{2}\right)^{p/(p-2)}, \quad m = \frac{(p-2)\lambda}{2}, \text{ e } \quad n = \frac{2p}{p-2}$$

em (5.10), obtem-se finalmente que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} v^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{p-2}{p}} &= \frac{\lambda^2 p}{2}\left(\frac{2^{(p+2)/(p-2)}\Gamma^2\left(\frac{p}{p-2}\right)}{\frac{\lambda(p-2)}{2}\Gamma\left(\frac{2p}{p-2}\right)}\right)^{\frac{p-2}{p}} \\
&= \frac{\lambda^2 p}{2}\frac{2^{(p+2)/p}\,2^{(p-2)/p}}{(p-2)^{(p-2)/p}\lambda^{(p-2)/p}}\left(\frac{\Gamma^2\left(\frac{p}{p-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2p}{p-2}\right)}\right)^{\frac{p-2}{p}} \\
&= \frac{2^{\frac{p+2}{2}}2^{\frac{p-2}{2}}}{2}\frac{\lambda^2}{\lambda^{\frac{p-2}{p}}}\frac{p}{(p-2)^{(p-2)/p}}\left(\frac{\Gamma^2\left(\frac{p}{p-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2p}{p-2}\right)}\right)^{\frac{p-2}{p}} \\
&= \frac{2^{2p/p}}{2}\lambda^{2-(p-2)/p}\frac{p}{(p-2)^{(p-2)/p}}\left(\frac{\Gamma^2\left(\frac{p}{p-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2p}{p-2}\right)}\right)^{\frac{p-2}{p}} \\
&= 2p\frac{\lambda^{(p+2)/p}}{(p-2)^{(p-2)/p}}\left(\frac{\Gamma^2\left(\frac{p}{p-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2p}{p-2}\right)}\right)^{\frac{p-2}{p}}.
\end{aligned}$$

Agora, retornemos ao cálculo de $R(a,b)$. Como $v(t)$ é uma solução de energia mínima, segue que

$$\begin{aligned}
R(a,b) &= F_{a,b}(v) \\
&= \frac{\int_{\mathcal{C}} {v_t}^2 + \lambda^2 v^2 \mathrm{d}t}{\left(\int_{\mathcal{C}} v^p \mathrm{d}t\right)^{2/p}} \\
&= \frac{\sigma_{N-1}}{(\sigma_{N-1})^{2/p}}\frac{\int_{\mathbb{R}} {v_t}^2 + \lambda^2 v^2 \mathrm{d}t}{\left(\int_{\mathbb{R}} v^p \mathrm{d}t\right)^{2/p}} \\
&= (\sigma_{N-1})^{(p-2)/p}\, 2p\frac{\lambda^{(p+2)/p}}{(p-2)^{(p-2)/2}}\left(\frac{\Gamma^2\left(\frac{p}{p-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2p}{p-2}\right)}\right)^{\frac{p-2}{p}}.
\end{aligned}$$

Aqui, denotamos $\sigma_{N-1} = \sigma(S^{N-1})$, onde $\mathrm{d}\sigma$ é a medida de S^{N-1} e denotando ω_N o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$, usando coordenadas polares, verifica-se $\sigma(S^{N-1}) = N\omega_N$. Reescreveremos $R(a,b)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
R(a,b) &= 2p\lambda\lambda^{2/p}\left(\frac{\sigma_{N-1}\Gamma^2\left(\frac{p}{p-2}\right)}{(p-2)\Gamma\left(\frac{2p}{p-2}\right)}\right)^{\frac{p-2}{p}} \\
&= 2(p\lambda)\lambda^{2/p}\frac{\lambda^{(p-2)/2}}{\lambda^{(p-2)/2}}\left(\frac{N\omega_N\Gamma^2\left(\frac{p}{p-2}\right)}{(p-2)\Gamma\left(\frac{2p}{p-2}\right)}\right)^{\frac{p-2}{p}} \\
&= 2\lambda\,(p\lambda)\left(\frac{N\omega_N\Gamma^2\left(\frac{p}{p-2}\right)}{\lambda(p-2)\Gamma\left(\frac{2p}{p-2}\right)}\right)^{\frac{p-2}{p}}.
\end{aligned}$$

Substituindo em $R(a,b)$ os valores $\lambda = (N-2-2a)/2$, $p = 2N/(N-2+2(b-a))$, temos enfim

$$R(a,b) = \frac{N(N-2-2a)^2}{N-2+2(b-a)} \left(\frac{N\omega_N \Gamma^2\left(\frac{N}{2(1-(b-a))}\right)}{\frac{2(1-(b-a))(N-2-2a)}{N-2+2(b-a)} \Gamma\left(\frac{N}{(1-(b-a))}\right)} \right)^{\frac{2(1-(b-a))}{N}} . \tag{5.11}$$

Portanto, organizando estes resultados obtidos, tem-se

Proposição 5.3.2. *A menos de uma dilação, no sentido da proposição (5.2.1), todas as soluções radiais em $\mathbb{R}^N$ de (5.3) são explicitamente dadas por (5.7), e $R(a,b)$ é dado por (5.11).*

Forneceremos uma expreção explícita para as "dilatações", no sentido da proposição (5.2.1), de (5.7). Recorde que as "dilatações" (5.2.1) em $\mathbb{R}^N$ correspondentes as translações $v(t,\theta) \mapsto v(t+C,\theta)$ são da forma:

$$u(x) \mapsto u_\tau(x) := \tau^{\frac{N-2-2a}{2}} u(\tau x)\ , \quad \text{onde } \tau = e^{-C} > 0\ .$$

Logo, as dilatações de (5.7) são da forma

$$u_\tau(x) = \left(\frac{N(N-2-2a)^2}{(N-2+2(b-a))} \right)^{\frac{N-2+2(b-a)}{4(1-(b-a))}} \frac{\tau^{(N-2-2a)/2}}{\left(1+|\tau x|^{\frac{2(1-(b-a))(N-2-2a)}{N-2+2(b-a)}}\right)^{\frac{N-2+2(b-a)}{2(1-(b-a))}}} .$$

Chamando

$$\alpha = \frac{2(1-(b-a))(N-2-2a)}{N-2+2(b-a)}\ , \quad \beta = \frac{N-2+2(b-a)}{2(1-(b-a))}$$

temos que $\alpha \cdot \beta = N-2-2a$, e assim

$$\begin{aligned} u_\tau(x) &= \left(\frac{N(N-2-2a)^2}{(N-2+2(b-a))} \right)^{\frac{N-2+2(b-a)}{4(1-(b-a))}} \frac{\tau^{(N-2-2a)/2}}{(1+|\tau x|^\alpha)^\beta} \\ &= \left(\frac{N(N-2-2a)^2}{(N-2+2(b-a))} \right)^{\frac{N-2+2(b-a)}{4(1-(b-a))}} \frac{\tau^{\frac{N-2-2a}{2}}}{\tau^{\alpha\beta}(\tau^{-\alpha}+|x|^\alpha)^\beta} \\ &= \left(\frac{N(N-2-2a)^2}{(N-2+2(b-a))} \right)^{\frac{N-2+2(b-a)}{4(1-(b-a))}} \frac{\tau^{-\frac{N-2-2a}{2}}}{(\tau^{-\alpha}+|x|^\alpha)^\beta} . \end{aligned}$$

Desse modo, substituindo os valores de α, β e trocando τ por τ^{-1}, obtemos finalmente

$$u_\tau(x) = \left(\frac{N(N-2-2a)^2}{(N-2+2(b-a))} \right)^{\frac{N-2+2(b-a)}{4(1-(b-a))}} \frac{\tau^{\frac{N-2-2a}{2}}}{\left(\tau^{\frac{2(1-(b-a))(N-2-2a)}{N-2+2(b-a)}} + |x|^{\frac{2(1-(b-a))(N-2-2a)}{N-2+2(b-a)}}\right)^{\frac{N-2+2(b-a)}{2(1-(b-a))}}} . \tag{5.12}$$

Observação 5.3.3.

1. No caso $a > 0$, $a \leq b < a+1$, $R(a,b)$ é exatamente a *melhor constante* encontrada por Chou e Chu em [27]. De fato, como comentando no início deste capítulo, Chou e Chu

encontraram

$$S(a,b) = (N-2-2a)(N-bp)\left(\frac{N\omega_N\Gamma^2\left(\frac{N-bp}{2-bp+2a}\right)}{(2-bp+2a)\Gamma\left(\frac{2(N-bp)}{2-bp+2a}\right)}\right)^{\frac{2-bp+2a}{N-bp}}$$

daí, basta observar (veja apêndice A) que

$$(N-2-2a)(N-bp) = 2\left(\frac{N-2-2a}{2}\right)\left(\frac{N(N-2-2a)}{N-2+2(b-a)}\right),$$

$2-bp+2 = \frac{(N-2-2a)(p-2)}{2}$, e $(N-bp)/(2-bp+2a) = p/(p-2)$. Assim, $S(a,b) = R(a,b)$. Analogamente, no caso $a = 0$, $0 \leq b < 1$, $R(a,b)$ é exatamente a melhor constante encontrada por Lieb em [26], i.e. $S(0,b) = R(0,b)$.

2. No caso $a \geq 0$, $a \leq b < a+1$, a menos de uma dilatação (e também translação no caso $a = b = 0$) a expressão (5.7) fornece todas as soluções de energia mínima para (5.3), que alcançam a *igualdade* nas desigualdades CKN. Observe que a menos de uma constante não-nula, as funções $u_\tau(x)$ em (5.12) são as funções extremais de CKN encontradas por Chou e Chu, no caso $a > 0$, e por Lieb, no caso $a = 0$.

5.4 A não-existência de Funções Extremais e Melhores Constantes

Usaremos a relação entre os espaços $\mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $H^1(\mathcal{C})$ via o isomorfismo Φ, e também a relação entre as soluções de (5.3) e as soluções positivas de (5.4) para estabelecer os resultados desta seção. O teorema principal desta seção é

Teorema 5.4.1.

(I) $S(a,b)$ *é contínua em (5.2).*

(II) Para $b = a+1$, *temos*

$$S(a,a+1) = \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2$$

e $S(a,a+1)$ *nunca é atingida.*

(III) Para $a < 0$ *e* $b = a$, *temos* $S(a,a) = S(0,0)$ *(onde* $S(0,0)$ *é a melhor constante de Sobolev). E, também,* $S(a,a)$ *nunca é atingida, isto é não existe função extremal para* $S(a,a)$.

Observação 5.4.1. *De (II) concluímos um fato observado na introdução da dissertação. Recorde que se* $a = 0$, *a desigualdade CKN (4.1) é a desigualdade de Hardy, com* $p = 2$. *Logo (II) implica que não existe função extremal para a desigualdade de Hardy.*

Para provar este teorema, precisaremos de dois lemas.

Lema 5.4.1. *Fixados* $(a_0, b_0) \in D$*, então*

$$\limsup_{(a,b)\to(a_0,b_0)} S(a,b) \leq S(a_0,b_0)\ .$$

Demonstração. Sabemos que $S(a,b) = \inf F_{a,b}(v)$, com $v \in H^1(\mathcal{C})$, $v \neq 0$.
Antes de tudo, como $C_0^\infty(\mathcal{C})$ é denso em $H^1(\mathcal{C})$, dados $v \in H^1(\mathcal{C})$ e $\delta > 0$, existe $v_0 \in C_0^\infty(\mathcal{C})$, tal que $\|v_0 - v\|_{H^1} < \delta$.
Seja $\epsilon > 0$ dado. Pela continuidade de $F_{a,b}$ em $H^1(\mathcal{C})$, tome $v_0 \in C_0^\infty(\mathcal{C})$, tal que $F_{a_0,b_0}(v_0) \leq S(a_0,b_0) + \epsilon/2$. Podemos supor $v_0 > 0$, pois caso contrário, trocando v por $|v|$, temos $F_{a,b}(|v|) = F_{a,b}(v)$, pois $|\nabla|v|| = |\nabla v|$ μ-q.t.p.

Como $p = 2N/(N-2+2(b-a))$, segue que $(a,b) \to (a_0,b_0)$ implica $p \to p_0$, onde $p_0 = 2N/(N-2+2(b_0-a_0))$. Daí, pontualmente em $\mathcal{C}$, temos que $\forall y \in \mathcal{C}$, vale $v_0^p(y) \to v_0^{p_0}(y)$. Para todo $p \in [2, 2^*]$, $v_0^p(y) \leq v_0^2(y)$ se $v_0(y) < 1$, e $v_0^p(y) \leq v_0^{2^*}(y)$ se $v_0(y) \geq 1$. Como $v_0^2(y)$ e $v_0^{2^*}(y)$ são integráveis, pelo Teorema da Convergência Dominda, segue:

$$\lim_{(a,b)\to(a_0,b_0)} \int_{\mathcal{C}} v_0^p \mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{C}} v_0^{p_0} \mathrm{d}\mu\ .$$

A função $\lambda(a) := \frac{N-2-2a}{2}$ é contínua em a, segue que existe $\delta > 0$, tal que se $|(a,b)-(a_0,b_0)| < \delta$, temos pelo "limite" acima que $F_{a,b}(v) \leq F_{a_0,b_0}(v) + \epsilon/2$, $\forall v \in H^1(\mathcal{C})$.
Daí, para $|(a,b)-(a_0,b_0)| < \delta$, $S(a,b) \leq F_{a,b}(v_0) \leq F_{a_0,b_0}(v_0) + \epsilon/2$.
Logo, $S(a,b) \leq S(a_0,b_0) + \epsilon/2 + \epsilon/2 = S(a_0,b_0) + \epsilon$. Portanto, fazendo $\epsilon \to 0$,

$$\limsup_{(a,b)\to(a_0,b_0)} S(a,b) \leq S(a_0,b_0)\ .$$

□

Lema 5.4.2. *Sejam* $p = 2N/(N-2+2(b-a))$*, e* $\{p_n\} \subset [2, 2^*]$ *uma sequência que converge para* p*. Se uma sequência* $\{u_n\}$ *é uniformemente limitada em* $H^1(\mathcal{C})$ *por* $M > 0$*, então:*

(i) se $p \in (2, 2^*)$*, então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{C}} ||u_n|^{p_n} - |u_n|^p| \mathrm{d}\mu = 0\ .$$

(ii) se $p = 2$ *ou* $p = 2^*$*, então*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathcal{C}} (|u_n|^{p_n} - |u_n|^p) \mathrm{d}\mu \leq 0\ .$$

Recordemos que $\{u_n\}$ é *uniformemente limitada* por $M > 0$ em $H^1(\mathcal{C})$ se $\|u_n\|_{H^1} \leq M$ para todo n.

Demonstração do Lema 5.4.2, parte (i). Para $\xi \in [2, 2^*]$, considere a função

$$f(\xi) = \int_{\mathcal{C}} ||u_n(y)|^{\xi} - |u_n(y)|^p|\mathrm{d}\mu \,.$$

Note que pelo Teorema da Convergência Dominada, f é diferenciável, e vale

$$f'(c) = \int_{\mathcal{C}} ||u_n|^c \ln |u_n||\mathrm{d}\mu \,.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Médio, existem funções $\xi_n : \mathcal{C} \to (2, 2^*)$, para cada n, tais que

$$|f(p_n) - f(p)| = |p_n - p| \int_{\mathcal{C}} ||u_n|^{\xi_n(y)} \ln |u_n||\mathrm{d}\mu \,.$$

Como $f(p) = 0$, segue da igualdade acima que

$$\int_{\mathcal{C}} ||u_n|^{p_n} - |u_n|^p|\mathrm{d}\mu = |p_n - p| \int_{\mathcal{C}} ||u_n|^{\xi_n(y)} \ln |u_n||\mathrm{d}\mu \,.$$

Sejam $p \in (2, 2^*)$, $\epsilon > 0$ tais que $[p - \epsilon, p + \epsilon] \subset (2, 2^*)$, e seja n_ϵ tal que para todo $n \geq n_\epsilon$, tem-se $|p_n - p| < \epsilon$. Logo, $p - \epsilon < \xi_n < p + \epsilon$ se $n \geq n_\epsilon$.
Como $|\ln |u_n|| = \ln |u_n|$ se $|u_n| > 1$, e $|\ln |u_n|| = \ln \frac{1}{|u_n|}$ se $0 < |u_n| < 1$, segue-se portanto,

$$\int_{\mathcal{C}} ||u_n|^{p_n} - |u_n|^p|\mathrm{d}\mu \leq |p_n - p| \left(\int_{|u_n|>1} |u_n|^{p+\epsilon} \ln |u_n|\mathrm{d}\mu + \int_{0<|u_n|<1} |u_n|^{p-\epsilon} \ln \frac{1}{|u_n|}\mathrm{d}\mu \right) \,.$$

Agora, para concluirmos, precisamos mostrar que as duas últimas integrais são limitadas quando $n \to \infty$.
Como $(\ln x)/x^r \to 0$ quando $x \to \infty$ $(r > 0)$, segue-se que existe $C > 0$ tal que $\ln x \leq Cx^r$ para todo $x > 1$. Logo,

$$\ln u(x) \leq Cu(x)^{2^*-(p+\epsilon)} \quad \text{para todo } x, \text{ com } u(x) > 1$$

e

$$\ln \frac{1}{u(x)} \leq C \frac{1}{u(x)^{p-\epsilon-2}} \quad \text{para todo } x, \text{ com } 0 < u(x) < 1.$$

Seja agora

$$S_p(\mathcal{C}) := \inf_{u \in H^1(\mathcal{C}) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathcal{C}} |\nabla u|^2 + u^2 \mathrm{d}\mu}{(\int_{\mathcal{C}} |u|^p \mathrm{d}\mu)^{2/p}} \,.$$

Pelo Mergulho de Sobolev (2.4.4), $S_p(\mathcal{C}) > 0$, e então obtemos que

$$\int_{|u_n|>1} |u_n|^{p+\epsilon} \ln |u_n|\mathrm{d}\mu \leq C \int_{\mathcal{C}} |u_n|^{2^*} \mathrm{d}\mu \leq C \left(\frac{M}{S_{2^*}(\mathcal{C})} \right)^{2^*/2}$$

e

$$\int_{0<|u_n|<1} |u_n|^{p-\epsilon} \ln 1/|u_n|\mathrm{d}\mu \leq C \int_{\mathcal{C}} |u_n|^2 \mathrm{d}\mu \leq C \left(\frac{M}{S_{2^*}(\mathcal{C})} \right) \,.$$

Portanto, quando $p_n \to p$,

$$\int_{\mathcal{C}} ||u_n|^{p_n} - |u_n|^p|\mathrm{d}\mu \to 0.$$

□

Demonstração do Lema 5.4.2, parte (ii). Usa-se o mesmo método anterior.

Para $p = 2$, $p_n \to p$ implica $p_n > 2$, daí para $0 < |u_n| < 1$, tem-se $|u_n|^{p_n} - |u|^2 < 0$. Como

$$\int_{\mathcal{C}} |u_n|^{p_n} - |u|^2 \mathrm{d}\mu = \int_{|u_n|>1} |u_n|^{p_n} - |u|^2 \mathrm{d}\mu + \int_{0<|u_n|<1} |u_n|^{p_n} - |u|^2 \mathrm{d}\mu$$

segue-se

$$\int_{\mathcal{C}} |u_n|^{p_n} - |u|^2 \mathrm{d}\mu \leq \int_{|u_n|>1} |u_n|^{p_n} - |u|^2 \mathrm{d}\mu.$$

Agora, aplicamos o Teorema do Valor Médio e um raciocínio análogo ao caso *(i)*, e concluí-se que 0 é uma cota superior para o conjunto

$$\left\{ \int_{|u_n|>1} |u_n|^{p_n} - |u|^2 \mathrm{d}\mu \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Assim, $\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathcal{C}} |u_n|^{p_n} - |u|^2 \mathrm{d}\mu \leq 0$.

Para $p = 2^*$, se $p_n \to p$, então $p_n < p$, logo de $|u_n| > 1$, tem-se $|u_n|^{p_n} - |u_n|^p < 0$. Daí,

$$\int_{\mathcal{C}} |u_n|^{p_n} - |u|^{2^*} \mathrm{d}\mu \leq \int_{0<|u_n|<1} |u_n|^{p_n} - |u|^{2^*} \mathrm{d}\mu,$$

e o raciocínio é análogo ao que já foi feito. □

Demonstração do Teorema 5.4.1, parte (I). De acordo com Lema (5.4.1), é suficiente mostrarmos que:

$$\liminf_{(a,b)\to(a_0,b_0)} S(a,b) \geq S(a_0,b_0).$$

Mostremos este fato por *contradição*. Assuma que existe subsequência $(a_n, b_n) \to (a_0, b_0)$ tal que $\lim S(a_n, b_n) < S(a_0, b_0)$. Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $n \geq n_0$ tal que $S(a_n, b_n) < S(a_0, b_0) - \epsilon$. Para este $\epsilon > 0$, considere a sequência $\{v_n\} \subset H^1(\mathcal{C})$ tal que $S(a_n, b_n) + \epsilon/2 > F_{a_n,b_n}(v_n)$, a saber cada v_n pertence ao espaço $L^{p_n}(\mathcal{C})$, com $p_n = 2N/(N - 2 + 2(b_n - a_n))$. Por abuso de notação, estamos usando o mesmo n para indexar a sequência. Podemos supor

$$\int_{\mathcal{C}} |v_n|^{p_n} \mathrm{d}\mu = 1.$$

Daí, $F_{a_n,b_n}(v_n) < S(a_n, b_n) + \epsilon/2 < S(a_0, b_0) - \epsilon + \epsilon/2$, logo $F_{a_n,b_n}(v_n) < S(a_0, b_0) - \epsilon/2$. Desse modo, como $\|v_n\|_{p_n} = 1$ para todo n e $F_{a_n,b_n}(v_n) < S(a_0, b_0) - \epsilon/2$ para todo n, segue-se que $\{v_n\}$ é uma sequência *uniformente limitada* em $H^1(\mathcal{C})$. Do lema 5.4.2, obtemos

$$\int_{\mathcal{C}} |v_n|^{p_n} \mathrm{d}\mu \to \int_{\mathcal{C}} |v_n|^{p_0} \mathrm{d}\mu \quad \text{se } n \to \infty \text{, pois } p_n \to p.$$

Assim

$$F_{a_n,b_n}(v_n) \to F_{a_0,b_0}(v_n) \geq S(a_0,b_0), \quad \text{ou seja } F_{a_n,b_n}(v_n) + O(1) \geq F_{a_0,b_0}(v_n) \geq S(a_0,b_0).$$

Logo, acabamos de verificar que existe sequência $\{v_n\} \subset H^1(\mathcal{C})$ tal que $F_{a_n,b_n}(v_n) \geq S(a_0, b_0)$. Portanto, $S(a_n, b_n) \geq S(a_0, b_0)$, o que é uma contradição. □

Observação 5.4.2. Uma prova similar mostra que $R(a,b)$ é contínua para todo (a,b) em (5.2), incluindo a borda superior $\{b = a+1\}$ para a qual não existe solução radial.

Demonstração do teorema 5.4.1, parte (II). Se $b = a+1$, então $p = 2$, e

$$\begin{aligned} F_{a,a+1}(v) &= \frac{\int_{\mathcal{C}} |\nabla v|^2 + \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2 v^2 \mathrm{d}\mu}{\int_{\mathcal{C}} v^2 \mathrm{d}\mu} \\ &= \frac{\int_{\mathcal{C}} |\nabla v|^2 \mathrm{d}\mu}{\int_{\mathcal{C}} v^2 \mathrm{d}\mu} + \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Logo, para todo $v \in H^1(\mathcal{C})$, temos

$$F_{a,a+1}(v) \geq \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2, \quad \text{ou seja } S(a,a+1) \geq \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2.$$

Passo 1. Existe sequência $\{v_n\} \subset H^1(\mathcal{C})$ tal que:

(i) v_n não dependede θ, isto é v_n é uma função radial para todo n;

(ii) $F_{a,a+1}(v_n) \to [(N-2-2a)/2]^2$ quando $n \to \infty$.

Consequentemente

$$S(a,a+1) = \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2.$$

Prova do Passo 1. Considere a sequência de funções reais $f_n(x) = \exp(-\frac{x}{n})\, \chi_{[0,\infty)}(x)$, onde χ é a função característica. Fixado n, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} {f_n}^2 \mathrm{d}x &= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2x}{n}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{n}{2} \int_0^\infty \exp(-u) \mathrm{d}u \\ &= n \times \text{constante}. \end{aligned}$$

e também

$$f_n'(x) = -\frac{\exp(-x/n)}{n} \chi_{[0,\infty)}(x).$$

Como $f_n'(x) \leq 1/(1+x^2)$, que é integrável, segue-se pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (f_n'(x))^2 \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\exp(-x/n)}{n} \chi_{[0,\infty)}(x)\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, existe $n_0 > 0$, tal que para todo $n \geq n_0$ tem-se

$$\int_{\mathbb{R}} (f_n')^2 \mathrm{d}x \leq 1.$$

Agora, definindo $v_n : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, por $v_n(t,\theta) = f_n(t)$. Temos que v_n não depende de θ e que $v_n \in H^1(\mathcal{C})$. Assim,

$$\frac{\int_{\mathcal{C}} |\nabla v_n|^2 \mathrm{d}\mu}{\int_{\mathcal{C}} v^2 \mathrm{d}\mu} = \frac{\int_{\mathbb{R}} (v_t)^2 \mathrm{d}t}{\int_{\mathbb{R}} v^2 \mathrm{d}t} \leq \frac{1}{n} \quad \text{para } n > n_0.$$

Pontanto,

$$F_{a,a+1}(v_n) \leq \frac{1}{n} + \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2.$$

e assim, $F_{a,a+1}(v_n) \to \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2$.

Passo 2. Não existe $v \in H^1(\mathcal{C})$ tal que $F_{a,a+1}(v) = S(a,a+1)$, de fato não existe função extremal para $S(a,a+1)$.

Prova do Passo 2. Notemos inicialmente que para $\lambda \geq 1$, a equação $-\Delta v + \lambda^2 v = v$ não admite solução não-nula. De fato, se $v \in H^1(\mathcal{C})$ é uma solução da equação acima, então

$$\int_{\mathcal{C}} |\nabla v|^2 \mathrm{d}\mu = \underbrace{(1-\lambda^2)}_{\leq 0} \int_{\mathcal{C}} v^2 \mathrm{d}\mu.$$

Logo, $|\nabla v| = 0$ μ-q.t.p. Daí, v é constante, donde $v = 0$ (pois é a única função constante integrável em $\mathcal{C}$).

Consideremos então o caso $0 < \lambda < 1$. Assim, fazendo $\lambda = \frac{N-2-2a}{2}$, obtemos

$$\frac{N-4}{2} < a < \frac{N-2}{2}.$$

Agora, suponhamos, por contradição, que $S(a,a+1)$ seja alcançda por alguma função $v \in H^1(C)$, i.e. $F_{a,a+1}(v) = S(a,a+1)$. A menos de uma constante multiplicativa, v é solução não-negativa de (5.4) para $(N-4)/2 < a < (N-2)/2$. Pelo princípio do mínimo, $v > 0$ (ver Proposição 2.5.1). Seja agora $f(t)$ a média de v na esfera com t constante, a saber

$$f(t) = \frac{1}{\sigma_N} \int_{S^{N-1}} v(t,\theta) \mathrm{d}\sigma(\theta),$$

onde $\sigma_N = \sigma(S^{N-1})$ é a área da esfera. Como $v > 0$, devemos ter $f(t) > 0$ q.t.p.

Afirmação: $f \in H^1(\mathbb{R})$.

De fato, precisamos verificar: $f \in L^2(\mathbb{R})$ e f' existe e está em $L^2(\mathbb{R})$, onde f' denota a derivada fraca de f.

Como $\sigma(S^{N-1}) < \infty$, pela Proposição 6.12 em [20], existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\int_{S^{N-1}} v(t,\theta) \mathrm{d}\sigma\right)^2 \leq C \int_{S^{N-1}} v^2(t,\theta) \mathrm{d}\sigma.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f^2 \mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sigma_N} \int_{S^{N-1}} v(t,\theta) \mathrm{d}\sigma\right)^2 \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{C}{\sigma_N^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{S^{N-1}} v^2(t,\theta) \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t \\ &= \frac{C}{\sigma_N^2} \int_{\mathcal{C}} v^2 \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Onde na última integral acima usamos o Teorema de Fubini. Como $v \in H^1 \subset L^2$, segue-se portanto que $f \in L^2$. Uma vez exibido a derivada fraca f', a garantia de $f' \in L^2(\mathbb{R})$ seguirá de forma análoga ao que foi mostrado para concluir $f \in L^2(\mathbb{R})$.
Afirmamos.

$$f'(t) = \frac{1}{\sigma_N}\int_{S^{N-1}} \frac{dv}{dt}(t,\theta)\mathrm{d}\sigma \quad \text{q.t.p.}$$

De fato, dado $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}} f\varphi'\mathrm{d}t &= -\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sigma_N}\int_{S^{N-1}} v(t,\theta)\mathrm{d}\sigma(\theta)\right)\varphi'\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\sigma_N}\int_{\mathbb{R}}\int_{S^{N-1}} v(t,\theta)\varphi'\mathrm{d}\sigma(\theta)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\sigma_N}\int_{\mathcal{C}} \varphi' v(t,\theta)\mathrm{d}\mu \quad \text{(Teorema de Fubini)} \\
&= \frac{1}{\sigma_N}\int_{\mathcal{C}} \varphi\frac{dv}{dt}(t,\theta)\mathrm{d}\mu \quad \text{(definição de } v \in H^1\text{)} \\
&= \frac{1}{\sigma_N}\int_{\mathbb{R}}\int_{S^{N-1}} \varphi\frac{dv}{dt}(t,\theta)\varphi'\mathrm{d}\sigma(\theta)\mathrm{d}t \quad \text{(Teorema de Fubini)} \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sigma_N}\int_{S^{N-1}} \frac{dv}{dt}(t,\theta)\right)\varphi\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Por simplicidade, escrevemos

$$f'(t) = \frac{1}{\sigma_N}\int_{S^{N-1}} v_t(t,\theta)\mathrm{d}\sigma\ .$$

Observemos agora que esta função f satisfaz $-f'' = (1-\lambda^2)f$ em $H^1(\mathbb{R})$.
De fato, devemos mostrar

$$\int_{\mathbb{R}} f'g'\mathrm{d}t = (1-\lambda^2)\int_{\mathbb{R}} fg\mathrm{d}t\ , \quad \text{para todo } g \in H^1(\mathbb{R}).$$

Dado $g \in H^1(\mathbb{R})$, identificamos g como uma função em $\mathcal{C} = \mathbb{R}\times S^{N-1}$, onde pomos $g(t,\theta) := g(t)$, e também $g_t = g'$, por abuso de notação. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f'g'\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sigma_N}\int_{S^{N-1}} v_t\mathrm{d}\sigma\right)g'\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sigma_N}\int_{\mathcal{C}} v_t g'\mathrm{d}\mu \quad \text{(Teorema de Fubini)} \\
&= \frac{1}{\sigma_N}\int_{\mathcal{C}} \nabla v\cdot\nabla g\mathrm{d}\mu \quad \text{(pois } \nabla_\theta g = 0\text{)} \\
&= (1-\lambda^2)\frac{1}{\sigma_N}\int_{C} vg\mathrm{d}\mu \quad \text{(pois } v \text{ satisfaz (5.4))} \\
&= \int_{\mathbb{R}} fg\mathrm{d}t \quad \text{(Teorema Fubini, novamente).}
\end{aligned}$$

Logo, f satisfaz a EDO linear de segunda ordem $-f'' = (1-\lambda^2)f$. Para concluir a demonstração, é suficiente mostrarmos que $f = 0$ q.t.p, pois $f = 0$ implica $v = 0$, o que é uma contradição. De fato, como $f \in H^1(\mathbb{R})$, segue que $f \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R})$ pela regularidade de $H^1(\mathbb{R})$. Logo, $f'' =$

$(\lambda^2 - 1)f \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R})$, isto é $f \in C^{2,\alpha}_{loc}$. Em particular, $f \in C^2(\mathbb{R})$. Desse modo, f é uma solução clássica de $-f'' = (1-\lambda^2)f$. No entanto, as soluções clássicas da EDO acima são combinações lineares de "senos" e "cossenos" já que $\lambda^2 < 1$. Ou seja, existem $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(t) = C_1\cos(\sqrt{1-\lambda^2}t) + C_2\sin(\sqrt{1-\lambda^2}t)$. Entretanto, $f \in H^1$, logo devemos ter $f(t) \to 0$ quando $|t| \to \infty$. Isto é $C_1 = C_2 = 0$. Portanto, $f(t) = 0$ q.t.p., e assim encerramos a prova. □

Por fim provemos a última parte do Teorema (5.4.1).

Demonstração do teorema 5.4.1 parte (III). Se $b = a$, então $p = 2^*$. O caso $a = b = 0$ é bem conhecido pelo o que já discutimos na duas seções anteriores, a saber *"Invariância do Problema" e "Soluções Radias"*. As funções extremais de $S(0,0)$ são dadas unicamentes por

$$U_{\tau,y}(x) = C\frac{\tau^{(N-2)/2}}{(\tau^2+|x-y|^2)^{(N-2)/2}}\ , \quad \tau > 0,\ C \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^N.$$

Passo 1. Para $a \in \left(-\frac{N-2}{2}, \frac{N-2}{2}\right)$, $U_{\tau,y} \in \mathfrak{D}^{1,2}_a(\mathbb{R}^N)$.

Prova do Passo 1. Devemos mostrar que $\|U_{\tau,y}\|_{\mathfrak{D}^{1,2}_a} < \infty$ para todo $\tau > 0$, $y \in \mathbb{R}^N$. Escrevendo $U = U_{\tau,y}$ e $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ como a i-ésima derivada parcial, temos por um cálculo direto que

$$\partial_i U(x) = -\frac{C\tau^{(N-2)/2}(N-2)}{(\tau^2+|x-y|^2)^{N/2}}(x_i - y_i)$$

Daí

$$\nabla U(x) = C'\frac{1}{(\tau^2+|x-y|^2)^{N/2}}(x-y), \quad \text{onde } C' = -C\tau^{(N-2)/2}(N-2)$$

Logo

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathfrak{D}^{1,2}_a} &= \int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x \\ &= (C')^2\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2a}\frac{|x-y|^2}{(\tau^2+|x-y|^2)^N}\mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

Para calcular esta última integral, por causa da expressão $|x|^{-2a}$, dividimos a integral em outras duas, uma quando $|x|$ é menor que $R > 0$ e a outra quando $|x|$ é maior que R (para R sufientemente grande). Podemos supor, que $y = 0$, pois $y \neq 0$ não atrapalhará a análise desta integral.

Supondo $y = 0$, temos que analisar a integral

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x|^{-2a+2}}{(\tau^2+|x|^2)^N}\mathrm{d}x\ .$$

Para $|x|$ suficentemente grande, $(\tau^2+|x|^2)^{-N} = O(|x|^{-2N})$, isto é, existem $A > 0$ e $R > 0$ tais que

$$\frac{1}{(\tau^2+|x|^2)^N} \leq \frac{A}{|x|^{2N}}\ , \quad \text{para } |x| > R\ .$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^{-2a+2}}{(\tau^2+|x|^2)^N}\mathrm{d}x &= \int_{|x|<R} \frac{|x|^{-2a+2}}{(\tau^2+|x|^2)^N}\mathrm{d}x + \int_{|x|>R} \frac{|x|^{-2a+2}}{(\tau^2+|x|^2)^N}\mathrm{d}x \\ &\leq \underbrace{\int_{|x|<R} \frac{|x|^{-2a+2}}{(\tau^2+|x|^2)^N}\mathrm{d}x}_{=:I_1} + A \underbrace{\int_{|x|>R} \frac{|x|^{-2a+2}}{|x|^{2N}}\mathrm{d}x}_{=:I_2}.\end{aligned}$$

Para I_2, temos

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|x|>R} |x|^{-(2a-2+2N)}\mathrm{d}x \\ &= \sigma_N \int_R^{\infty} r^{-(2a-2+2N)} r^{N-1}\mathrm{d}r \quad \text{(coord. polares, v. [20])} \\ &= \sigma_N \int_R^{\infty} r^{-(2a-1+N)}\mathrm{d}r\,. \end{aligned}$$

A última integral converge se, e só se, $-(2a-1+N)+1<0$. Ou seja $a > -\frac{N-2}{2}$
Para I_1, temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|x|<R} \frac{|x|^{-2a+2}}{(\tau^2+|x|^2)^N}\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{\tau^{2N}} \int_{|x|<R} |x|^{-2a+2}\mathrm{d}x \quad \left(\text{pois } \frac{1}{(\tau^2+|x|^2)^N} \leq \frac{1}{\tau^{2N}}\right) \\ &= \frac{\sigma_N}{\tau^{2N}} \int_0^R r^{-2a+2} r^{N-1}\mathrm{d}r \quad \text{(coord. polares)} \\ &= \frac{\sigma_N}{\tau^{2N}} \int_0^R r^{-2a-1-N}\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

A última integral converge se, e só se, $-(2a-1-N)+1>0$. Ou seja, $a < \frac{N+2}{2}$. No entento, temos por hipótese do parâmetro a que $a < \frac{N-2}{2}$.
Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla U|^2\mathrm{d}x$$

converge se, e somente se,

$$a \in \left(-\frac{N-2}{2}, \frac{N-2}{2}\right).$$

Passo 2. Se $y \in S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$, $a \in (-(N-2)/2, 0)$, então

$$S(0,0) = \lim_{\tau\to 0} E_{a,a}(U_{\tau,y}).$$

Prova do Passo 2. Recordemos que pela observação 5.3.3, $S(0,0) = R(0,0)$, e também

$$R(0,0) = E_{0,0}(U_{\tau,y}) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |U_{\tau,y}|^{2^*}\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}}.$$

Explicitamente, sabemos que

$$
\begin{aligned}
E_{0,0}(U_{\tau,y}) &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |U_{\tau,y}|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\tau^{\frac{2^*(N-2)}{2}}}{(\tau^2+|x-y|^2)^{\frac{2^*(N-2)}{2}}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\tau^N}{(\tau^2+\tau^2|z|^2)^N}\tau^N\mathrm{d}z\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \qquad \text{(mudança de variável: } x = y+\tau z,\, \mathrm{d}x = \tau^N\mathrm{d}z) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\tau^{2N}}{\tau^{2N}(1+|z|^2)^N}\mathrm{d}z\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|z|^2)^N}\mathrm{d}z\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|z|^2)^N}\mathrm{d}z\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} = S(0,0).
$$

Por outro lado, para $a \in (-(N-2)/2, (N-2)/2)$, pelo Passo 1, $E_{a,a}(U_{\tau,y})$ está bem definido e temos que

$$
E_{a,a}(U_{\tau,y}) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla U_{\tau,y}|^2\mathrm{d}x}{(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2^*a}|U_{\tau,y}|^{2^*}\mathrm{d}x)^{2/2^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2^*a}\frac{\tau^N}{(\tau^2+|x-y|^2)^N}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}}.
$$

Fazendo a mudança de variável $x = y+\tau z$ ($\therefore\ \mathrm{d}x = \tau^N\mathrm{d}z$), obtemos

$$
E_{a,a}(U_{\tau,y}) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tau z+y|^{-2^*a}\frac{\tau^N\tau^N}{\tau^{2N}(1+|z|^2)^N}\mathrm{d}z\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tau z+y|^{-2^*a}\frac{1}{(1+|z|^2)^N}\mathrm{d}z\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}}.
$$

Desse modo,

$$
\begin{aligned}
(E_{a,a}(U_{\tau,y}))^{\frac{2^*}{2^*-2}} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\tau z+y|^{-2^*a}\frac{1}{(1+|z|^2)^N}\mathrm{d}z \\
&= \tau^{-2^*a}\int_{\mathbb{R}^N} |z|^{-2^*a}\frac{1}{(1+|z|^2)^N}\mathrm{d}z + |y|^{-2^*a}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|z|^2)^N}\mathrm{d}z + O(\tau).
\end{aligned}
$$

Então, fixando $y \in S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ e $-(N-2)/2 < a < 0$, tem-se $-2^*a > 0$ e

$$
\begin{aligned}
\lim_{\tau\to 0}(E_{a,a}(U_{\tau,y}))^{\frac{2^*}{2^*-2}} &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|z|^2)^N}\mathrm{d}z + \lim_{\tau\to 0}\left(\tau^{-2^*a}\int_{\mathbb{R}^N} |z|^{-2^*a}\frac{1}{(1+|z|^2)^N}\mathrm{d}z + O(\tau)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|z|^2)^N}\mathrm{d}z \\
&= S(0,0)^{\frac{2^*}{2^*-2}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, para $-\frac{N-2}{2} < a < 0$ e $|y| = 1$, temos que

$$
\lim_{\tau\to 0} E_{a,a}(U_{\tau,y}) = S(0,0)\ .
$$

Passo 3. $S(a,a) = S(0,0)$ para todo $a < 0$.

Prova do Passo 3. Por definição

$$S(a,a) = \inf_{u \in \mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} E_{a,a}(u)\ .$$

Do Passo 2 segue que $S(a,a) \leq S(0,0)$ para $a \in (-(N-2)/2, 0)$. Por outro lado, se $a < 0$, então $\forall v \in H^1(\mathcal{C})$,

$$F_{a,a}(v) = \frac{\int_{\mathcal{C}} |\nabla v|^2 + \left(\frac{N-2-2a}{2}\right)^2 v^2 \mathrm{d}\mu}{\left(\int_{\mathcal{C}} |v|^{2^*} \mathrm{d}\mu\right)^{2/2^*}} > \frac{\int_{\mathcal{C}} |\nabla v|^2 + \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 v^2 \mathrm{d}\mu}{\left(\int_{\mathcal{C}} |v|^{2^*} \mathrm{d}\mu\right)^{2/2^*}} = F_{0,0}(v)\ .$$

Logo, $a < 0$ implica $F_{a,a}(v) > F_{0,0}(v) \geq S(0,0)$ para todo $v \in H^1(\mathcal{C})$. Daí, $S(0,0) \geq S(a,a)$ para todo $a < 0$. Portanto, se $a \in \left(-\frac{N-2}{2}, 0\right)$, teremos $S(a,a) = S(0,0)$.

Desse modo, para concluir a demonstração, falta mostrarmos $S(a,a) = S(0,0)$ se $a \leq -\frac{N-2}{2}$. Para isso, fixemos inicialmente $a_1 \in \left(-\frac{N-2}{2}, 0\right)$. Como $S(a_1,a_1) = S(0,0)$, dado $\epsilon > 0$, existe $v \in H^1(\mathcal{C})$ tal que

$$F_{a_1,a_1}(v) \leq S(0,0) + \epsilon. \tag{5.13}$$

Denotando $\lambda(a) = (N-2-2a)/2$, observemos que podemos escrever para v acima,

$$\begin{aligned} F_{a_1,a_1}(v) &= \frac{\int_{\mathcal{C}} |\nabla v|^2 + \lambda(a_1)^2 v^2 \mathrm{d}\mu}{\left(\int_{\mathcal{C}} |v|^{2^*} \mathrm{d}\mu\right)^{2/2^*}} \\ &= \frac{\int_{\mathcal{C}} |\nabla v|^2 + \lambda(0)^2 v^2 \mathrm{d}\mu}{\left(\int_{\mathcal{C}} |v|^{2^*} \mathrm{d}\mu\right)^{2/2^*}} + (\lambda(a_1)^2 - \lambda(0)^2) \frac{\int_{\mathcal{C}} v^2 \mathrm{d}\mu}{\left(\int_{\mathcal{C}} |v|^{2^*}\right)^{2/2^*}} \\ &= F_{0,0}(v) + \underbrace{(\lambda(a_1)^2 - \lambda(0)^2)}_{\neq 0} \frac{\int_{\mathcal{C}} v^2 \mathrm{d}\mu}{\left(\int_{\mathcal{C}} |v|^{2^*}\right)^{2/2^*}}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Como $F_{0,0}(v) \leq F_{a_1,a_1}(v)$ e $S(0,0) \leq F_{0,0}(v)$, concluímos de (5.13) e (5.14) que

$$F_{0,0}(v) + (\lambda(a_1)^2 - \lambda(0)^2) \frac{\int_{\mathcal{C}} v^2 \mathrm{d}\mu}{\left(\int_{\mathcal{C}} |v|^{2^*} \mathrm{d}\mu\right)^{2/2^*}} \leq F_{0,0}(v) + \epsilon\ .$$

Logo,

$$\frac{\int_{\mathcal{C}} v^2 \mathrm{d}\mu}{\left(\int_{\mathcal{C}} |v|^{2^*} \mathrm{d}\mu\right)^{2/2^*}} \leq \frac{\epsilon}{\lambda(a_1)^2 - \lambda(0)^2}\ .$$

Agora, dado $a < -\frac{N-2}{2}$, para esta v, tem-se

$$\begin{aligned} F_{a,a}(v) &= F_{a_1,a_1}(v) + (\lambda(a)^2 - \lambda(a_1)^2) \frac{\int_{\mathcal{C}} v^2 \mathrm{d}\mu}{\left(\int_{\mathcal{C}} |v|^{2^*} \mathrm{d}\mu\right)^{2/2^*}} \\ &\leq S(0,0) + \epsilon + \frac{\epsilon(\lambda(a)^2 - \lambda(a_1)^2)}{\lambda(a_1)^2 - \lambda(0)^2} \\ &= S(0,0) + \epsilon \left(1 + \frac{\lambda(a)^2 - \lambda(a_1)^2}{\lambda(a_1)^2 - \lambda(0)^2}\right) \\ &= S(0,0) + \epsilon \left(\frac{\lambda(a)^2 - \lambda(0)^2}{\lambda(a_1)^2 - \lambda(0)^2}\right)\ . \end{aligned}$$

Como $a < a_1 < 0$,

$$\frac{\lambda(a)^2 - \lambda(0)^2}{\lambda(a_1)^2 - \lambda(0)^2} < 1\,, \quad \text{pois } \lambda(x) \text{ cresce na medida em que } x < 0 \text{ decresce.}$$

Desse modo, $F_{a,a}(v) \leq S(0,0) + \epsilon$. Daí, $S(a,a) < S(0,0) + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Logo, $S(a,a) \leq S(0,0)$. Portanto, $S(a,a) = S(0,0)$ para todo $a < -\frac{N-2}{2}$.

Passo 4. Não existe função $v \in H^1(\mathcal{C})$ tal que $F_{a,a}(v) = S(a,a)$ para todo $a < 0$.

Prova do Passo 4. Suponha, por contradição, que para algum $a < 0$ e $v \in H^1(\mathcal{C})$, tenhamos $F_{a,a}(v) = S(a,a)$. No entanto, devemos ter $F_{a,a}(v) > F_{0,0}(v) \geq S(0,0)$. Logo $S(a,a) > S(0,0)$, o que é uma contradição. □

5.5 A existência de Funções Extremais

Nesta seção, provamos a existência de funções extremais para $a < 0$ e $a < b < a+1$. Enunciaremos inicialmente resultados necessários para o desenvolvimento desta seção. Precisaremos dos seguintes lemas

Lema 5.5.1 (Brezis-Lieb)**.** *Sejam $1 < p < \infty$ e $\{v_n\} \subset L^p(\mathcal{C})$. Se $\{v_n\}$ é uma sequência limitada em $L^p(\mathcal{C})$ e $v_n \to v$ ($\mu-$q.t.p) em $\mathcal{C}$, então*

$$\lim_{n\to\infty} (\|v_n\|^p_{L^p} - \|v_n - v\|^p_{L^p}) = \|v\|^p_{L^p}.$$

Demonstração. A demonstração é similar a prova do lema 1.32 feito em [28]. Omitimos esta prova aqui. □

Observação 5.5.1.

a) O lema anterior é um refinamento do Lema de Fatou.

b) Em todo espaço de Hilbert,

$$u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\|u_n\|^2 - \|u_n - u\|^2) = \|u\|^2.$$

De fato, note que $\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 - 2(u_n, u) + \|u\|^2$. Logo, $\|u_n\|^2 - \|u_n - u\|^2 = 2(u_n, u) - \|u\|^2$, e assim

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 - \|u_n - u\|^2 = 2\lim_{n\to\infty}(u_n, u) - \|u\|^2 = \|u\|^2.$$

Lema 5.5.2 (Lema de Localização)**.** *Seja M uma variedade diferenciável. Dado $u \in L^1_{\text{loc}}(M)$,*

$$u \equiv 0 \Leftrightarrow \int_M u\varphi = 0, \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(M)\,.$$

Isto é, uma função L^1_{loc} é nula se, e somente se, é nula no sentido das distribuições.

Demonstração. Veja lema 4.1 em [7]. □

A demonstração do próximo lema é similar a prova do lema 1.21 em [28].

Lema 5.5.3 (Lema Lions)**.** *Seja $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se $\{w_n\} \subset H^1(\mathcal{C})$ é uma sequência limitada e se*

$$\sup_{y\in\mathcal{C}} \int_{B_r(y)\cap\mathcal{C}} |w_n|^q \mathrm{d}\mu \to 0 \quad \textit{quando } n \to \infty,$$

então $w_n \to 0$ em $L^p(\mathcal{C})$ para todo $2 < p < 2^*$. Aqui $B_r(y)$ denota a bola em $\mathbb{R}^{N+1}$ com raio r e centro y.

Demonstração. Veja apêndice (A.5) desta dissertação. □

Um resultado útil, que também será utilizado, é a seguinte proposição.

Proposição 5.5.1. *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e seja $T : H_1 \to H_2$ um operador linear. Se T é contínuo no sentido forte, então T é contínuo no sentido fraco.*

Demonstração. Veja [6], capítulo 3. □

Agora, enunciaremos o teorema principal desta seção.

Teorema 5.5.1 (Existência de Funções Extremais)**.** *Para $a < 0$ e $a < b < a + 1$, $S(a, b)$ é sempre alcançada.*

Demonstração. A prova deste teorema será dada por um argumento de *compacidade*. Fixemos $a < 0$ e $a < b < a + 1$, daí $2 < p < 2^*$. Considere uma sequência minimizante $\{w_n\} \subset H^1(\mathcal{C})$ para $S(a, b)$, a saber

$$S(a, b) = \lim_{n\to\infty} F_{a,b}(w_n).$$

Podemos supor que

$$\int_{\mathcal{C}} |w_n|^p \mathrm{d}\mu = 1 \quad \forall n \geq 1,$$

e assim $\|w_n\|_{H^1} \to S(a, b)$, isto é

$$\int_{\mathcal{C}} |\nabla w|^2 + \left(\frac{N - 2 - 2a}{2}\right)^2 {w_n}^2 \mathrm{d}\mu \to S(a, b) \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Claramente, $\{w_n\}$ é limitada em $H^1(\mathcal{C})$ para n suficientemente grande. De acordo com o Lema de Lions (5.5.3), como $\int |w_n|^p \mathrm{d}\mu = 1$, existe $\delta > 0$ tal que, para $r > 0$ fixado, tem-se

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\sup_{y\in\mathcal{C}} \int_{B_r(y)\cap\mathcal{C}} |w_n|^2 \mathrm{d}\mu \right) = \delta > 0 \; .$$

Ou seja, existe uma subsequência $\{w_{n_j}\}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{y\in\mathcal{C}} \int_{B_r(y)\cap\mathcal{C}} |w_{n_j}|^2 \mathrm{d}\mu = \delta \; .$$

Daí, existe $\{y_i\} \subset \mathcal{C}$ tal que

$$\lim_j \left(\lim_i \int_{B_r(y_i)\cap\mathcal{C}} |w_{n_j}|^2 \mathrm{d}\mu \right) = \delta \ .$$

Portanto, passando a uma subsequência, podemos afirmar que existem $\{y_n\} \subset \mathcal{C}$ e $\{w_n\}$ tais que, para n suficientemente grande,

$$\int_{B_r(y_n)} |w_n|^2 \mathrm{d}\mu > \delta/2 \ .$$

Defina agora $v_n(y) := w_n(y + y_n)$ para $y \in \mathcal{C}$ desde que $y + y_n \in \mathcal{C}$. Precisamente, considere a aplicação $T : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^{N+1}$ dada por $T(y) = y + y_n$ onde $y_n \in \mathcal{C}$. Desse modo, consideremos a retrição de T ao cilindro,

$$T\Big|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to (T\Big|_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})) \ .$$

Seja $A = \{y \in \mathcal{C} \ : y + y_n \in \mathcal{C}\}$, então $A = (T\Big|_{\mathcal{C}})^{-1}(\mathcal{C})$. Sendo T uma bijeção, $T\Big|_{\mathcal{C}}$ também o é, assim segue que $A = \mathcal{C}$, e também vale $T\Big|_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Daí $v_n = w_n \circ T\Big|_{\mathcal{C}}$. Observemos também que $\det(DT\Big|_{\mathcal{C}}) = 1$ e notemos que para $y_n \in \mathcal{C}$, $T(B_r(0)) = B_r(y_n)$. Assim,

$$B_r(y_n) \cap \mathcal{C} = T(B_r(0) \cap \mathcal{C}) = T\Big|_{\mathcal{C}}(B_r(0)) \ .$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{B_r(y_n)\cap\mathcal{C}} |w_n|^2 \mathrm{d}\mu &= \int_{T(B_r(0)\cap\mathcal{C})} |w_n|^2 \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{B_r(0)\cap\mathcal{C}} {w_n}^2(y + y_n) \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{B_r(0)\cap\mathcal{C}} {v_n}^2 \mathrm{d}\mu \ . \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\int_{B_r(0)\cap\mathcal{C}} {v_n}^2 \mathrm{d}\mu > \delta/2 \ .$$

Escolha $y_0 \in \mathcal{C}$ e $R > r > 0$, tais que $B_r(0) \cap \mathcal{C} \subset B_R(y_0) \cap \mathcal{C}$, e assim

$$\int_{B_R(y_0)\cap\mathcal{C}} {v_n}^2 \mathrm{d}\mu > \frac{\delta}{2} \ . \tag{5.15}$$

Claramente,

$$\int_{\mathcal{C}} |v_n|^p \mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{C}} |w_n|^p \mathrm{d}\mu = 1$$

e

$$\int_{\mathcal{C}} |\nabla v_n|^2 + \left(\frac{N - 2 - 2a}{2} \right)^2 {v_n}^2 \mathrm{d}\mu \to S(a, b), \quad n \to \infty. \tag{5.16}$$

De (5.16), para n suficientemente grande, a sequência $\{v_n\}$ é limitada em $H^1(\mathcal{C})$.

Por um lado, como $H^1(\mathcal{C})$ é espaço de Hilbert, então a sequência possui uma subsequência fracamente convergente, a saber existe $v \in H^1(\mathcal{C})$ tal que $v_{n_j} \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathcal{C})$. Por outro lado, pelo Teorema de Kondrakov,$\{v_n\}$ possui uma subsequência convergente (no sentido forte) em

L^2_{loc}, isto é existe $v_0 \in L^2_{\text{loc}}(\mathcal{C})$ tal que $v_{n_k} \to v_0$ em $L^2_{\text{loc}}(\mathcal{C})$.

Afirmação. $v = v_0$ *q.t.p.*
Prova da Afirmação. De fato, notemos inicialmente que $L^2(\mathcal{C}) \subset L^2_{\text{loc}}(\mathcal{C}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathcal{C})$.
Como $v_{n_j} \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathcal{C})$, e $H^1(\mathcal{C}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{C})$ continuamente, segue que $v_{n_j} \rightharpoonup v$ em $L^2(\mathcal{C})$. Em particular, $v_n \rightharpoonup v$ em $L^2_{\text{loc}}(\mathcal{C})$. Por outro lado, temos também que $v_{n_k} \rightharpoonup v_0$ em $L^2_{\text{loc}}(\mathcal{C})$. Logo, por unicidade de limite fraco, segue-se $v = v_0$ q.t.p.

Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $v_n \rightharpoonup v$ em $L^2_{\text{loc}}(\mathcal{C})$, desse modo existe subsequência $\{v_{n_j}\}$ de $\{v_n\}$ tal que $v_{n_j} \to v$ q.t.p. Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor

$$\begin{array}{rcll} v_n & \rightharpoonup & v & \text{fracamente em } H^1(\mathcal{C}), \\ v_n & \to & v & \text{em } L^2_{\text{loc}}(\mathcal{C}), \\ v_n & \to & v & \text{em q.t.p em } \mathcal{C}. \end{array}$$

Queremos mostrar que $S(a,b) = \|v\|_{H^1}$.
Como $\int_{\mathcal{C}} |v_n|^p \mathrm{d}\mu = 1$ para todo n, de acordo com o Lema de Brezis-Lieb (5.5.1), temos que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|^p_{L^p} + \|v\|^p_{L^p} = 1 \ . \tag{5.17}$$

Note também que para $v_n, v \in H^1(\mathcal{C})$, vale a desigualdade (4.1) CKN

$$\|v\|^2_{L^p} S(a,b) \leq \|v\|^2_{H^1} \quad \text{e} \quad \|v_n - v\|^2_{L^p} S(a,b) \leq \|v_n - v\|^2_{H^1}.$$

Recorde que se $v_n \rightharpoonup v$, então $\lim(\|v_n\|^2_{H^1} - \|v_n - v\|^2_{H^1}) = \|v\|^2_{H^1}$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} S(a,b) & = & \lim\limits_{n\to\infty} \|v_n\|^2_{H^1} \\ & = & \|v\|^2_{H^1} + \lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v\|^2_{H^1} \\ & \geq & S(a,b) \left[\|v\|^2_{L^p} + \lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v\|^2_{L^p} \right] \\ & = & S(a,b) \left[(\|v\|^p_{L^p})^{2/p} + (1 - \|v\|^p_{L^p})^{2/p} \right]. \end{array}$$

Daí, obtem-se a seguinte desigualdade

$$(\|v\|^p_{L^p})^{2/p} + (1 - \|v\|^p_{L^p})^{2/p} \leq 1. \tag{5.18}$$

Devemos mostrar que $\|v\|^p_{L^p} = 1$ para assim obtermos $S(a,b) = \|v\|^2_{H^1}$.

Afirmação. $\|v\|^p_{L^p} = 1$.
Prova da Afirmação. Pelo lema de Fatou, $\|v\|^p_{L^p} \leq 1$. Suponha, por contradição, que $\|v\|^p_{L^p} = C < 1$. Então, de (5.18), $1 \geq C^{2/p} + (1-C)^{2/p}$.
Pelas propriedades de potência, sendo $t, r \in \mathbb{R}$ tais que $0 < t < 1$ e $r < 1$, vale $t^r > t$.
De (5.15), temos que $C > 0$, pois $v \neq 0$. Como $C < 1$ e $(1-C) < 1$, segue-se que $C^{2/p} > C$ e

$(1-C)^{2/p} > 1-C$ uma vez que $\frac{2}{p} < 1$. Daí, combinado (5.18) com as desigualdades acima, obtemos

$$1 \geq C^{2/p} + (1-C)^{2/p} > C + 1 - C = 1,$$

o que é uma contradição, logo devemos ter $\|v\|_{L^p}^p = 1$.

Portanto, $\|v\|_{H^1}^2 = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{H^1}^2 = S(a,b)$, provando assim que existe uma função extremal para $S(a,b)$ se $a < 0$ e $a < b < a+1$. □

5.6 Quebra de Simetria: Funções extremais não-radiais

O objetivo desta seção é concluir um fenômeno interessante sobre a região negativa $a < 0$. Vimos que na região $a \geq 0$, $S(a,b) = R(a,b)$. No entanto, estabeleceremos que dentro da região negativa $a < 0$, poderá ocorrer $S(a,b) < R(a,b)$ com $a < b < a+1$. De acordo com o teorema 5.5.1, $S(a,b)$ é sempre alcançado para $a < 0$ e $a < b < a+1$. Logo, se $S(a,b) < R(a,b)$, então a função extremal necessariamente será uma função não-radial.

Teorema 5.6.1 (Quebra de Simetria). *(I) Existe $a_0 < 0$ e uma função $h(a)$ definada para $a \leq a_0$, satisfazendo $h(a_0) = a_0$, $a < h(a) < a+1$ para $a < a_0$, e $a + 1 - h(a) \to 0$ quando $-a \to \infty$, tal que para cada (a,b) satisfazendo $a < a_0$ e $a < b < h(a)$, a função extremal para $S(a,b)$ é não-radial.*

(II) Existe um subconjunto aberto H dentro da região a-negativa contendo o conjunto $\{(a,a) \in \mathbb{R}^2 : \ a < 0\}$, tal que para todo $(a,b) \in H$ com $a < b$, a função extremal para $S(a,b)$ é não-radial.

Os resultados de *(I)* e *(II)* serão provados por ideias diferentes. Para *(I)* a ideia é usar uma técnica de bifurcação e mostrar que para certos (a,b) na região $a < 0$, por uma pertubação de uma solução radial v_a dada em (5.6), existem *direções* em que a energia $F_{a,b}$ decresce. Como $S(a,b)$ é atingido, a função extremal deve ser não-radial. Por outro lado, para *(II)*, iremos *comparar* $S(a,b)$ com $R(a,a)$, e a conclusão seguirá por um argumento de continuidade.

Primeiro faremos a prova de *(I)*. Aqui trabalharemos diretamente com $H^1(\mathcal{C})$. A linearização de (5.4) em torno de uma solução radial v_a, (5.6), decompõe a equação (5.4), por separação de variáveis, em muitas EDOs.

Denotaremos por $\alpha_k = k(N-2+k)$ o k-ésimo autovalor de $-\Delta_\theta$ em S^{N-1}, e por φ_k a autofunção associada a α_k, veja [29] capítulo 5, seção 4 para mais detalhes. Para cada k considere o problema de autovalor em μ abaixo

$$-f_{tt} + \lambda^2 f + \alpha_k f - (p-1){v_a}^{p-2} f = \mu f \quad \text{em } H^1(\mathbb{R})$$

Notemos por um lado que a expressão "$-f_{tt} + \lambda^2 f + \alpha_k f - (p-1){v_a}^{p-2} f$" é a linearização da equação (5.4) em torno de v_a na direção $w(t,\theta) = f(t)\varphi_k(\theta)$, e por outro lado, o problema de autovalor também é na direção de $w(t,\theta)$. Este problema de autovalor é bem definido pois $v_a(t) \to 0$ quando $|t| \to \infty$. Denotemos por μ_k e f_k o primeiro autovalor e a autofunção correspondente (positiva) do problema de autovalor descrito acima.

Primeiro mostraremos que existem $a_0 < 0$ e uma função $a < h(a) < a+1$ definida para $a < a_0$ tal que $a < a_0$ e $a < b < h(a)$ implica $\mu_1 < 0$. De fato, para cada $k \geq 0$,

$$\mu_k = \inf_{f \in H^1(\mathbb{R})\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}} f_t^2 + \lambda^2 f^2 + \alpha_k f^2 - (p-1){v_a}^{p-2} f^2 \mathrm{d}t}{\int_{\mathbb{R}} f^2 \mathrm{d}t} .$$

Como $v_a \in H^1(\mathbb{R})$, temos que

$$\begin{aligned} \mu_k &\leq \frac{\int_{\mathbb{R}} {v_{a,t}}^2 + \lambda^2 {v_a}^2 + \alpha_k {v_a}^2 - (p-1){v_a}^{p-2}{v_a}^2 \mathrm{d}t}{\int_{\mathbb{R}} {v_a}^2 \mathrm{d}t} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}} {v_{a,t}}^2 + \lambda^2 {v_a}^2 + \alpha_k {v_a}^2 - (p-1){v_a}^{p} \mathrm{d}t}{\int_{\mathbb{R}} {v_a}^2 \mathrm{d}t} . \end{aligned}$$

Como v_a é uma solução radial de (5.4), segue-se que $\int_{\mathbb{R}} {v_{a,t}}^2 + \lambda^2 {v_a}^2 \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} {v_a}^p \mathrm{d}t$, e assim

$$\begin{aligned} \mu_k &\leq \frac{\int_{\mathbb{R}} {v_a}^p - (p-1){v_a}^p \mathrm{d}t}{\int_{\mathbb{R}} {v_a}^2 \mathrm{d}t} + \alpha_k \\ &= -(p-2)\frac{\int_{\mathbb{R}} {v_a}^p \mathrm{d}t}{\int_{\mathbb{R}} {v_a}^2 \mathrm{d}t} + \alpha_k . \end{aligned} \tag{5.19}$$

Para $\alpha_0 = 0$, claramente temos $\mu_0 < 0$. Sendo v_a dado por (5.6), pelo lema (5.6.2), que se encontra no final desta seção, obtem-se

$$(p-2)\frac{\int_{\mathbb{R}} {v_a}^p \mathrm{d}t}{\int_{\mathbb{R}} {v_a}^2 \mathrm{d}t} = \frac{N(1-(b-a))(N-2-2a)^2}{(N-2+2(b-a))(N-1+(b-a))} .$$

Logo, para $\alpha_1 = N-1$, temos

$$\mu_1 \leq -\frac{N(1-(b-a))(N-2-2a)^2}{(N-2+2(b-a))(N-1+(b-a))} + N - 1 .$$

Queremos mostrar que existe $a_0 < 0$ e uma função $a < h(a) < a+1$ definida para $a < a_0$ tal que para $a < b < h(a)$, tem-se $\mu_1 < 0$. De fato, $\mu_1 < 0 \Leftrightarrow$

$$-\frac{N(1-(b-a))(N-2-2a)^2}{(N-2+2(b-a))(N-1+(b-a))} + N - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{N(1-(b-a))(N-2-2a)^2}{(N-2+2(b-a))(N-1+(b-a))} > N - 1 . \qquad (*)$$

Como $b-a > 0$, tem-se $-(b-a) < 0$ e

$$\frac{N(1-(b-a))(N-2-2a)^2}{(N-2+2(b-a))(N-1+(b-a))} < \frac{N(N-2-2a)^2}{(N-2+2(b-a))(N-1+(b-a))} ,$$

$N-2+2(b-a) > N-2$ e $N-1+(b-a) > N-1$, portanto

$$\frac{1}{N-2+2(b-a)} < \frac{1}{N-2}, \text{ e } \quad \frac{1}{N-1+(b-a)} < \frac{1}{N-1} .$$

Logo,

$$\frac{N(1-(b-a))(N-2-2a)^2}{(N-2+2(b-a))(N-1+(b-a))} < \frac{N(N-2-2a)^2}{(N-2)(N-1)} \, . \qquad (**)$$

Assim, de $(*)$ e $(**)$ obtemos

$$\frac{N(N-2-2a)^2}{(N-2)(N-1)} > N-1$$

$$\therefore$$

$$(N-2-2a)^2 > (N-1)^2 + \frac{N-2}{N}$$

$$\therefore$$

$$-2a > -(N-2) + (N-1)\sqrt{\frac{N-2}{N}} \Leftrightarrow a < \frac{N-2}{2} - \frac{N-1}{2}\sqrt{\frac{N-2}{N}} \, . \qquad (***)$$

Defina $a_0 := \frac{N-2}{2} - \frac{N-1}{2}\sqrt{\frac{N-2}{N}}$. Como $N \geq 3$, segue que $a_0 < 0$, e de $(***)$, segue que $\mu_1 < 0$ se $a < a_0$. Agora vamos definir $h(a)$ para $a < a_0$. Procedendo de modo similar, encontramos $\mu_1 < 0$ se, e somente se,

$$a < b < h(a) := 1 + a - \frac{2N}{l(a) + \sqrt{l(a)^2 - 8}}$$

onde $l(a) = \frac{(N-2-2a)^2}{N-1} + 3$. Logo, $\mu_1 < 0$ é negativo para (a,b) na região $\{(a,b) \;:\; a < a_0, \; a < b < h(a)\}$. Notemos que $a + 1 - h(a) \to 0$ quando $-a \to \infty$.

As quantidades a_0 e $h(a)$ dadas anteriormente mostrarão a propriedade afirmada em (5.6.1), parte *(I)*.

Observe que função $w_k(t,\theta) := f_k(t)\varphi_k(\theta)$ satisfaz a seguinte equação

$$-\Delta w_k + \lambda^2 w_k - (p-1){v_a}^{p-2} w_k = \mu_k w_k \, . \qquad (5.20)$$

De fato,

$$-\Delta w_k = -f_k''\varphi_k + \alpha_k f_k \varphi_k \, , \;\; \lambda^2 w_k = \lambda^2 f_k \varphi_k \, .$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\Delta w_k + \lambda^2 w_k - (p-1){v_a}^{p-2} w_k &= -f_k''\varphi_k + \alpha_k f_k\varphi_k + \lambda^2 f_k\varphi_k - (p-1){v_a}^{p-2} f_k\varphi_k \\ &= \left(-f_k'' + \alpha_k f_k + \lambda^2 f_k - (p-1){v_a}^{p-2} f_k\right)\varphi_k \\ &= \mu_k f_k \varphi_k = \mu_k w_k \, . \end{aligned}$$

Precisaremos do seguinte lema:

Lema 5.6.1. *Para s suficientemente pequeno, existe $\delta = \delta(s)$ tal que $\delta(0) = \delta'(0) = 0$ e*

$$\int_{\mathcal{C}} |v_a + \delta(s)w_0 + sw_1|^p \mathrm{d}\mu = 1 \, .$$

Além disso, se (a,b) é tal que $\mu_1 < 0$, que vale para $a < a_0$ e $a < b < h(a)$, então para s suficientemente pequeno,

$$F_{a,b}(v_a + \delta(s)w_0 + sw_1) < F_{a,b}(v_a) \, . \qquad (5.21)$$

Prova do teorema 5.6.1, parte I. Pelo lema anterior, para s pequeno, $|v_a+\delta(s)w_0+sw_1|_{L^p}=1$. Então, de (5.21) temos que $F_{a,b}(v_a+\delta(s)w_0+sw_1)<F_{a,b}(v_a)=R(a,b)$ se (a,b) é tal que $\mu_1<0$. Portanto, para estes (a,b), tem-se $S(a,b)<R(a,b)$. Pelo teorema 5.5.1, $S(a,b)$ é sempre alcançado, e assim a função extremal deve ser não-radial. □

Prova do lema 5.6.1. Antes de tudo, podemos supor $|v_a|_{L^p}=1$. Defina

$$G(\delta,s)=\int_{\mathcal{C}}|v_a+\delta w_0+sw_1|^p\mathrm{d}\mu.$$

Recordemos que para cada $k\geq 0$, $w_k=f_k(t)\varphi_k(\theta)$, onde φ_0 é apenas uma função constante positiva, e φ_1 é o primeiro *harmônico* na esfera. Temos que $G(0,0)=\int_{\mathcal{C}}|v_a|^p\mathrm{d}\mu=1$, e pelo T.C.Dominada vale

$$\frac{\partial G}{\partial\delta}(0,0)=\int_{\mathcal{C}}\frac{\partial(|v_a+\delta w_0+sw_1|^p)}{\partial\delta}\bigg|_{(\delta,s)=(0,0)}\mathrm{d}\mu=p\int_{\mathcal{C}}{v_a}^{p-1}w_0\mathrm{d}\mu>0\quad(\text{pois } w_0>0).$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existe $\epsilon>0$ tal que para $|s|<\epsilon$, $\delta=\delta(s)$ é diferenciável, com $\delta(0)=0$ e

$$G(\delta(s),s)=1\quad\text{para } |s|<\epsilon. \tag{5.22}$$

Diferenciando (5.22) com respeito a s, tem-se:

$$\frac{\partial G}{\partial\delta}(\delta(s),s)\cdot\delta'(s)+\frac{\partial G}{\partial s}(\delta(s),s)=0\quad\text{para } |s|<\epsilon. \tag{5.23}$$

Por outro lado, observemos que como $\varphi_1(-\theta)=-\varphi_1(\theta)$ (veja [29]), temos pelo T.C.Dominada que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial s}(0,0) &= p\int_{\mathcal{C}}{v_a}^{p-1}w_1\mathrm{d}\mu\\
&= p\int_{\mathcal{C}}{v_a}^{p-1}f_1\varphi(\theta)\mathrm{d}\mu\\
&= -p\int_{\mathcal{C}}{v_a}^{p-1}f_1\varphi(-\theta)\mathrm{d}\mu\\
&= -p\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{S^{N-1}}\varphi(-\theta)\mathrm{d}\sigma\right){v_a}^{p-1}f_1\mathrm{d}t\quad(\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}t\times\mathrm{d}\sigma)\\
&= -p\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{S^{N-1}}\varphi(\theta)|(-1)^{N-1}|\mathrm{d}\sigma\right){v_a}^{p-1}f_1\mathrm{d}t\\
&= -p\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{S^{N-1}}\varphi(\theta)\mathrm{d}\sigma\right){v_a}^{p-1}f_1\mathrm{d}t\\
&= -p\int_{\mathcal{C}}{v_a}^{p-1}f_1\varphi(\theta)\mathrm{d}\mu\quad(\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}t\times\mathrm{d}\sigma)\\
&= -p\int_{\mathcal{C}}{v_a}^{p-1}w_1\mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\frac{\partial G}{\partial s}(0,0)=0$. Logo, de (5.23), temos

$$\frac{\partial G}{\partial\delta}(0,0)\cdot\delta'(0)+\frac{\partial G}{\partial s}(0,0)=0,$$

o que implica $\delta'(0) = 0$. Então a função $\delta(s)$, definida em $|s| < \epsilon$, é tal que $\delta(0) = \delta'(0) = 0$ e por (5.22),

$$\int_{\mathcal{C}} |v_a + \delta w_0 + s w_1|^p \mathrm{d}\mu = 1 \quad \text{para } |s| < \epsilon.$$

Para mostrar (5.21), precisamos conhecer $\delta''(0)$. Diferenciando (5.23) com respeito a s novamente, temos

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s \partial \delta}(\delta(s), s) \cdot \delta'(s) + \frac{\partial G}{\partial \delta}(\delta(s), s) \cdot \delta''(s) + \frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(\delta(s), s) + \frac{\partial G}{\partial s}(\delta(s), s) \cdot \delta'(s) = 0\ .$$

Fazendo $s = 0$ na expressão acima, como $\delta'(0) = 0$, segue

$$\frac{\partial G}{\partial \delta}(0,0) \cdot \delta''(0) + \frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(0,0) = 0.$$

Temos pelo T.C.Dominada novamente

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(0,0) = p(p-1) \int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-2} {w_1}^2 \mathrm{d}\mu.$$

Como $\frac{\partial G}{\partial \delta}(0,0) = p \int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-1} w_0 \mathrm{d}\mu > 0$, segue

$$\delta''(0) = -\frac{p(p-1) \int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-2} {w_1}^2 \mathrm{d}\mu}{p \int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-1} w_0 \mathrm{d}\mu}.$$

Agora, sabendo que $\lambda = \lambda(a) = (N-2-2a)/2$ e denotando, por simplicidade, $F_{a,b} = F_{a,b}(v_a + \delta(s) w_0 + s w_1)$, tem-se

$$\begin{aligned}
F_{a,b} &= \frac{\int_{\mathcal{C}} |\nabla(v_a + \delta(s) w_0 + s w_1)|^2 + \lambda^2 (v_a + \delta(s) w_0 + s w_1)^2 \mathrm{d}\mu}{\left(\int_{\mathcal{C}} |v_a + \delta(s) w_0 + s w_1|^p \mathrm{d}\mu\right)^{2/p}} \\
&= \frac{\int_{\mathcal{C}} |\nabla(v_a + \delta(s) w_0 + s w_1)|^2 + \lambda^2 (v_a + \delta(s) w_0 + s w_1)^2 \mathrm{d}\mu}{1} \qquad \text{por (5.22)} \\
&= \int_{\mathcal{C}} |\nabla(v_a + \delta(s) w_0 + s w_1)|^2 + \lambda^2 (v_a + \delta(s) w_0 + s w_1)^2 \mathrm{d}\mu \\
&= \underbrace{\int_{\mathcal{C}} |\nabla v_a|^2 + \lambda^2 (v_a)^2 \mathrm{d}\mu}_{=F_{a,b}(v_a)} + \delta(s)^2 \int_{\mathcal{C}} |\nabla w_0|^2 + \lambda^2 {w_0}^2 \mathrm{d}\mu \\
&\quad + s^2 \int_{\mathcal{C}} |\nabla w_1|^2 + \lambda^2 {w_1}^2 \mathrm{d}\mu + 2\delta(s) \int_{\mathcal{C}} \nabla v_a \cdot \nabla w_0 + \lambda^2 (v_a w_0) \mathrm{d}\mu \\
&\quad + 2s \int_{\mathcal{C}} \nabla v_a \cdot \nabla w_1 + \lambda^2 v_a w_1 \mathrm{d}\mu + 2s\delta(s) \int_{\mathcal{C}} \nabla w_0 \cdot \nabla w_1 + \lambda^2 w_0 w_1 \mathrm{d}\mu \\
&= F_{a,b}(v_a) + s^2 \int_{\mathcal{C}} |\nabla w_1|^2 + \lambda^2 {w_1}^2 \mathrm{d}\mu + \delta(s)^2 \int_{\mathcal{C}} |\nabla w_0|^2 + \lambda^2 {w_0}^2 \mathrm{d}\mu \\
&\quad + 2\delta(s) \int_{\mathcal{C}} \nabla v_a \cdot \nabla w_0 + \lambda^2 (v_a w_0) \mathrm{d}\mu + 2s \int_{\mathcal{C}} \nabla v_a \cdot \nabla w_1 + \lambda^2 v_a w_1 \mathrm{d}\mu \\
&\quad + 2s\delta(s) \int_{\mathcal{C}} \nabla w_0 \cdot \nabla w_1 + \lambda^2 w_0 w_1 \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Como $\delta(0) = \delta'(0) = 0$, segue-se que $\delta(s) = O(s^2)$ quando $s \to 0$. Daí, $\delta^2(s) = O(s^2)$ e $s\delta(s) = O(s^2)$. Logo,

$$\begin{aligned}
F_{a,b}(v_a + \delta(s) w_0 + s w_1) &= F_{a,b}(v_a) + s^2 \int_{\mathcal{C}} |\nabla w_1|^2 + \lambda^2 {w_1}^2 \mathrm{d}\mu + 2s \int_{\mathcal{C}} \nabla v_a \cdot \nabla w_1 + \lambda^2 v_a w_1 \mathrm{d}\mu \\
&\quad + 2\delta(s) \int_{\mathcal{C}} \nabla v_a \cdot \nabla w_0 + \lambda^2 v_a w_0 \mathrm{d}\mu + O(s^2)\ .
\end{aligned}$$

Recordemos por um lado que v_a é uma solução radial de (5.4), logo

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla v_a \cdot \nabla w_0 + \lambda^2 v_a w_0 \mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-1} w_0 \mathrm{d}\mu \;\text{ e }\; \int_{\mathcal{C}} \nabla v_a \cdot \nabla w_1 + \lambda^2 v_a w_1 \mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-1} w_1 \mathrm{d}\mu.$$

Mas

$$\int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-1} w_1 \mathrm{d}\mu = \frac{1}{p}\frac{\partial G}{\partial s}(0,0) = 0,$$

logo

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla v_a \cdot \nabla w_1 + \lambda^2 v_a w_1 \mathrm{d}\mu = 0.$$

Por outro lado, de (5.20) tem-se:

$$\int_{\mathcal{C}} |\nabla w_1|^2 + \lambda^2 {w_1}^2 \mathrm{d}\mu = (p-1)\int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-2} {w_1}^2 \mathrm{d}\mu + \mu_1 \int_{\mathcal{C}} {w_1}^2 \mathrm{d}\mu.$$

Desse modo

$$\begin{aligned} F_{a,b}(v_a + \delta(s) w_0 + s w_1) &= F_{a,b}(v_a) + s^2\left[(p-1)\int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-2} {w_1}^2 \mathrm{d}\mu + \mu_1 \int_{\mathcal{C}} {w_1}^2 \mathrm{d}\mu\right] + 2s\cdot 0 \\ &\quad + 2\delta(s)\int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-1} w_0 \mathrm{d}\mu + O(s^2)\ . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} F_{a,b}(v_a + \delta(s) w_0 + s w_1) &= F_{a,b}(v_a) + s^2\left[(p-1)\int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-2} {w_1}^2 \mathrm{d}\mu + \mu_1 \int_{\mathcal{C}} {w_1}^2 \mathrm{d}\mu\right] \\ &\quad + 2\delta(s)\int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-1} w_0 \mathrm{d}\mu + O(s^2)\ . \end{aligned}$$

Usando a igualdade acima e o fato de

$$\delta(s) = -\frac{(p-1)\int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-2} {w_1}^2 \mathrm{d}\mu}{2\int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-1} w_0 \mathrm{d}\mu} s^2 + o(s^2)\ ,$$

nós obtemos para s suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} F_{a,b}(v_a + \delta(s) w_0 + s w_1) &= F_{a,b}(v_a) + s^2(p-1)\int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-2} {w_1}^2 \mathrm{d}\mu + s^2\mu_1 \int_{\mathcal{C}} {w_1}^2 \mathrm{d}\mu \\ &\quad - s^2(p-1)\int_{\mathcal{C}} {v_a}^{p-2} w_1 \mathrm{d}\mu + O(s^2) \\ &= F_{a,b}(v_a) + s^2\mu_1 \int_{\mathcal{C}} {w_1}^2 \mathrm{d}\mu + O(s^2)\ . \end{aligned}$$

Portanto, se (a, b) é tal que $\mu_1 < 0$, então

$$F_{a,b}(v_a + \delta(s) w_0 + s w_1) < F_{a,b}(v_a)$$

o que conclui a prova do lema. □

Prova do Teorema 5.6.1, parte II. Antes de tudo, notemos que $R(a,a) > S(a,a) = S(0,0)$ para $a < 0$. De fato, recorde que pela observação (5.3.3), $S(0,0) = R(0,0)$. Da expressão (5.11), obtemos

$$\begin{aligned} R(0,0) &= \frac{N(N-2)^2}{N-2}\left(\frac{N\omega_N \Gamma^2(\frac{N}{2})}{\frac{2(N-2)}{N-2}\Gamma(N)}\right)^{\frac{2}{N}} \\ &= N(N-2)\left(\frac{N\omega_N \Gamma^2(\frac{N}{2})}{2\Gamma(N)}\right)^{\frac{2}{N}}. \end{aligned}$$

e também

$$R(a,a) = \frac{N(N-2-2a)^2}{N-2}\left(\frac{N\omega_N\Gamma^2(\frac{N}{2})}{\frac{2(N-2-2a)}{N-2}\Gamma(N)}\right)^{\frac{2}{N}} .$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{R(a,a)}{S(0,0)} &= \frac{R(a,a)}{R(0,0)} \\
&= \frac{\frac{N(N-2-2a)^2}{N-2}\left(\frac{N\omega_N\Gamma^2(\frac{N}{2})}{\frac{2(N-2-2a)}{N-2}\Gamma(N)}\right)^{\frac{2}{N}}}{N(N-2)\left(\frac{N\omega_N\Gamma^2(\frac{N}{2})}{2\Gamma(N)}\right)^{\frac{2}{N}}} \\
&= \frac{(N-2-2a)^2}{(N-2)^2}\frac{1}{\left(\frac{(N-2-2a)}{N-2}\right)^{2/N}} \\
&= \left(\frac{N-2-2a}{N-2}\right)^{\frac{2(N-1)}{N}} .
\end{aligned}$$

Logo, para $a < 0$, temos que

$$\frac{R(a,a)}{S(0,0)} = \left(\frac{N-2-2a}{N-2}\right)^{\frac{2(N-1)}{N}} > \left(\frac{N-2}{N-2}\right)^{\frac{2(N-1)}{N}} = 1 .$$

Portanto, para $a < 0$, $R(a,a) > S(0,0)$.

Mostremos agora que para todo $a_0 < 0$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $|(a,b)-(a_0,a_0)| < \epsilon_0$ com $a < b$, $S(a,b)$ é atingido por uma função não-radial, para que assim exista um subconjunto aberto H contendo a região $\{(a_0,a_0) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a_0 < 0\}$, tal que $S(a,b) < R(a,b)$ para todo $(a,b) \in H$, com $a < b$.

Pela continuidade de $R(a,b)$ em (5.2), quando $(a,b) \to (a_0,a_0)$, temos que $R(a,b) \to R(a_0,a_0) > S(a_0,a_0) = S(0,0)$. Por outro lado, pela continuidade de $S(a,b)$, temos $S(a,b) \to S(a_0,a_0)$ quando $(a,b) \to (a_0,a_0)$. Portanto, para todo $a_0 < 0$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $S(a,b) < R(a,b)$ se $|(a,b)-(a_0,a_0)| < \epsilon_0$ com $a \leq b$. Pelo teorema 5.5.1, $S(a,b)$ é atingido, e devido a desigualdade estrita $S(a,b) < R(a,b)$, a função extremal deve ser não-radial. □

Lema 5.6.2. *Se $v = v_a$ dado em (5.6), então*

$$(p-2)\frac{\int_{\mathbb{R}} v^p \mathrm{d}t}{\int_{\mathbb{R}} v^2 \mathrm{d}t} = \frac{N(1-(b-a))(N-2-2a)^2}{(N-2+2(b-a))(N-1+(b-a))} .$$

Demonstração. Denote por

$$c = \left(\frac{\lambda^2 p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}} , \; n = \frac{2p}{p-2} , \; m = \frac{\lambda(p-2)}{2} \; \text{ e } \; k = \frac{4}{p-2} ,$$

então podemos escrever

$$v^p(t) = c^p \frac{1}{\cosh^n(mt)} \quad \text{e} \quad v^2(t) = c^2 \frac{1}{\cosh^k(mt)} .$$

Pela fórmula (5.9), temos que

$$\int_{\mathbb{R}} v^p \mathrm{d}t = \frac{c^p\sqrt{\pi}}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} v^2 \mathrm{d}t = \frac{c^2\sqrt{\pi}}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\,.$$

Agora, observemos que:

$$\frac{k}{2}+1 = \frac{2}{p-2}+1 = \frac{p}{p-2} = \frac{n}{2}$$

e

$$\frac{k+1}{2}+1 = \frac{\frac{4}{p-2}+1}{2}+1 = \frac{p+2}{2(p-2)}+1 = \frac{3p-2}{2(p-2)} = \frac{(n+1)}{2}\,.$$

Assim, pela propriedade da função Gamma: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, temos

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right) = \frac{k}{2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$$

e

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}+1\right) = \frac{k+1}{2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\,.$$

Diante disso,

$$\begin{aligned}(p-2)\frac{\int_{\mathbb{R}} v^p \mathrm{d}t}{\int_{\mathbb{R}} v^2 \mathrm{d}t} &= (p-2)c^{p-2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \\ &= (p-2)c^{p-2}\frac{\frac{k}{2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \\ &= (p-2)c^{p-2}\frac{k}{k+1}\,.\end{aligned}$$

Substituindo os valores $c = \left(\frac{\lambda^2 p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}}$ e $k = \frac{4}{p-2}$ na expressão acima, obtem-se

$$(p-2)\frac{\int_{\mathbb{R}} v^p \mathrm{d}t}{\int_{\mathbb{R}} v^2 \mathrm{d}t} = (p-2)\left(\frac{\lambda^2 p}{2}\right)\frac{\frac{4}{p-2}}{\frac{4}{p-2}+1} = \frac{\lambda^2 p}{2}\cdot\frac{4}{p+2}\,.$$

Recorde que $\lambda = (N-2-2a)/2$ e $p = 2N/(N-2+2(b-a))$. Assim, $p-2 = \frac{4(1-(b-a))}{N-2+2(b-a)}$, $p+2 = \frac{4(N-1+(b-a))}{N-2+2(b-a)}$ e finalmente obtemos

$$\begin{aligned}(p-2)\frac{\int_{\mathbb{R}} v^p \mathrm{d}t}{\int_{\mathbb{R}} v^2 \mathrm{d}t} &= \frac{4(1-(b-a))(N-2-2a)^2(2N)(N-2+2(b-a))}{2(N-2+2(b-a))^2 4(N-1+(b-a))} \\ &= \frac{N(1-(b-a))(N-2-2a)^2}{(N-2+2(b-a))(N-1+(b-a))}\,.\end{aligned}$$

$\square$

6 DESIGUALDADES CKN E VARIEDADES RIEMANNIANAS: A INFLUÊNCIA DA CURVATURA

Neste capítulo abordaremos exclisuvamente a discussão feita no artigo do Manfredo P. do Carmo e Changyu Xia em [30]. Nesse artigo, prova-se que uma variedade riemanniana, aberta, completa M de dimensão n, maior ou igual a três, com curvatura de Ricci não-negativa na qual desigualdades do tipo Caffarelli-Kohn-Nirenberg são satisfeitas, está *próxima* do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

6.1 Teorema principal

Vamos fixar algumas notações para este capítulo. Seja $n \geq 3$ inteiro. Consideremos os parâmetros a, b e p tais que

$$0 \leq a < \frac{n-2}{2}\,, \quad a \leq b < a+1\,, \quad p = \frac{2n}{n-2+2(b-a)}.$$

No contexto do capítulo anterior, estamos considerando (a, b) em (5.2), com $a \geq 0$. Defina $K_{a,b} := S(a, b)^{-1/2}$, ou seja

$$K_{a,b}^{-1} = \inf_{u \in \mathfrak{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}}\,.$$

Seja M variedade riemanniana de dimensão n. Denotaremos por $\mathrm{d}V_g$ o elemento de *volume* em M, e ∇ pelo *gradiente* em M, ou seja $\nabla = \mathrm{grad}$. Por $B(x, r)$ denotamos a bola *geodésica* de centro $x \in M$ e raio $r > 0$, e por $\mathrm{vol}[B(x, r)]$ o volume de $B(x, r)$. Nosso propósito é provar o seguinte Teorema.

Teorema 6.1.1. *Sejam $C \geq K_{a,b}$ uma constante e M uma variedade riemanniana aberta completa com curvatura de Ricci não-negativa. Fixado um ponto $x_0 \in M$, denote por $\rho(\cdot) = \mathrm{dist}(\cdot, x_0)$ a função distância em M de x_0. Assuma que se $u \in C_0^\infty(M)$, tem-se*

$$\left(\int_M \rho^{-bp}|u|^p \mathrm{d}V_g\right)^{1/p} \leq C\left(\int_M \rho^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}V_g\right)^{1/2}. \tag{6.1}$$

Então para todo $x \in M$, temos $\forall r > 0$,

$$\mathrm{vol}[B(x, r)] \geq \left(C^{-1}K_{a,b}\right)^{\frac{n}{1-(b-a)}} V_0(r)\,,$$

onde $V_0(r)$ é o volume da bola euclidiana de raio r em $\mathbb{R}^n$.

Observação 6.1.1.

1. Este Teorema possui várias consequências para variedades com a curvatura de *Ricci* não-negativa. Consequências de natureza *Geométrica* e *Topológica*.

2. O *Teorema da Comparação de Bishop-Gromov*, (veja [9], capítulo 3, seção 4), nos diz que se M é uma variedade riemanniana completa com curvatura de *Ricci* não-negativa, então para todo $x \in M$, vale $\mathrm{vol}[B(x,r)] \leq V_0(r)$, com igualdade valendo se, e só se, $B(x,r)$ é isométrico a bola de raio r em $\mathbb{R}^n$. Precisaremos deste teorema neste capítulo também. Forneceremos uma demonstração desse teorema.

A demonstração do teorema principal desse capítulo, (6.1.1), será feita após enunciarmos resultados e definições preliminares. Iremos na próxima seção enunciar conceitos e resultados para entrarmos na discussão e no contexto do teorema (6.1.1). Será adotado como referência os livros [9, 10, 12, 31].

6.2 Preliminares

Eses preliminares não foram abordados no capítulo 2, pois não havia a necessidade dos seguintes resultados para o desenvolvimento da teoria dos capítulos anteriores.

6.2.1 Campos de Jacobi e Espaços de curvatura constante

Os campos de Jacobi são desenvolvidos como uma forma de relacionar ao conceito de curvatura a noção de geodésica. Abordaremos nesta seção apenas sua definição e resultados que serão relevantes para o desenvolvimento deste capítulo. Fixe (M, g) variedade riemanniana, com $\dim M \geq 2$.

Definição 6.2.1. *Um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica γ é um campo vetorial Y ao longo de γ, satisfazendo a equação de Jacobi:*

$$Y'' + R(\gamma', Y)\gamma' = 0 \ ,$$

onde R é o tensor de curvatura de Riemann, $Y' = \frac{D}{dt}Y$ e $Y'' = \frac{D^2}{dt^2}Y$.

Proposição 6.2.1 (Existência e Unicidade)**.** *Seja $\gamma : [0, L] \to M$ uma geodésica. Então, dados $u, v \in T_{\gamma(0)}M$, existe um único campo de Jacobi Y tal que $Y(0) = u$ e $Y'(0) = v$, definido em $[0, L]$.*

Demonstração. Veja [10]. $\square$

Observação 6.2.1. *Pode-se mostrar que se $Y(0)$ e $Y'(0)$ são ortogonais à $\gamma'(0)$, então $Y(s)$ é ortogonal a $\gamma'(s)$ para todo s.*

Proposição 6.2.2. *Seja $\gamma : [0, L] \longrightarrow M$ uma geodésica, e $H : [0, L] \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ uma variação por geodésicas de γ (isto é, $H(s, 0) = \gamma(s)$, e para cada $s = s_0$ fixado, $H(s_0, t)$ é uma geodésica em M). Então:*

$$Y(s) := \frac{\partial H}{\partial t}(s, 0)$$

é um campo de Jacabi ao longo de γ. Reciprocamente, todo campo de Jacobi pode ser gerado por uma variação por geodésicas H (no sentido acima).

Demonstração. Ver, por exemplo, [10], capítulo 5. □

Uma consequência dessa proposição é:

Corolário 6.2.1. *Sejam $p \in M$, $u, v \in T_pM$. Seja γ a geodésica dada por $\gamma(s) = \exp_p(sv)$, e Y o campo de Jacobi tal que $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = u$. Então vale*

$$D_{sv}(\exp_p)(su) = Y(s).$$

Observação 6.2.2. *Em outras palavras, a derivada do mapa exponencial é descrita por campos de Jacobi ao longo de geodésicas radias.*

Demonstração do corolário 6.2.1. Em T_pM com a métrica euclidiana g_p, o campo de Jacobi X ao longo da geodésica $s \mapsto sv$ tal que $X(0) = 0$ e $X'(0) = u$ é apenas $X(s) = su$. Assim, o campo de Jacobi X é gerado pela variação $(s, t) \mapsto s(v + tu)$. Como todas as curvas nesta variação são geodésicas radias, a variação, em M, de γ, dada por $H(s, t) := \exp_p(s(v + tu))$ é uma variação por geodésicas. Esta variação gera o campo de Jacobi:

$$Y(s) = D_{sv}(\exp_p)(X(s)).$$

Temos que $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = D_0(\exp_p)(X'(0)) = u$. □

Definição 6.2.2. *Seja γ uma geodésica em M, um ponto $\gamma(t_1)$ é dito ser conjugado a $\gamma(t_0)$ ao longo de γ se existe campo de Jacobi Y, $Y \neq 0$, tal que $Y(t_0) = Y(t_1) = 0$.*

Observação 6.2.3. *Pode-se verificar que se uma geodésica não pode minimizar após o seu primeiro ponto conjugado (veja [10], capítulo 5). É possível mostrar que se um campo de Jacobi Y satisfaz $Y(t_0) = Y(t_1) = 0$, então $Y(t) \perp \gamma'(t)$ para todo t.*

Agora trataremos do conceito de *espaços de curvatura constante*.

Definição 6.2.3. *Dizemos que uma variedade riemanniana M tem curvatura seccional contante $\kappa \in \mathbb{R}$, se*

$$K(X, Y) = \kappa$$

para todo $\{X, Y\} \subset T_pM$ L.I, e para todo $p \in M$, onde K é a curvatura seccional de M.

Exemplo 6.2.1. *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ tem curvatura $K \equiv 0$. A esfera unitária $\mathbb{S}^n$, munida da métrica induzida da métrica em $\mathbb{R}^{n+1}$, tem curvatura K constante igual a* 1.

Proposição 6.2.3. *Uma variedade riemanniana M tem curvatura seccional constante κ se, e somente se, para todo $p \in M$, $X, Y, Z \in T_pM$, temos:*

$$R(X,Y)Z = \kappa\{\langle X, Z\rangle Y - \langle Z, Y\rangle X\}\ .$$

Demonstração. Veja [10] capítulo 4. □

Definiremos agora o tensor de *Ricci*.

Definição 6.2.4. *Dado $p \in M$, definimos o tensor de Ricci, $Ric : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, como*

$$Ric(X,Y) = \operatorname{tr}\{Z \mapsto R(X,Z)Y\}.$$

Pelas propriedades do tensor de curvatura de Riemann, o tensor de Ric é simétrico, isto é $Ric(X,Y) = Ric(Y,X)$. Numa base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormal de T_pM, Ric tem a seguinte expressão

$$Ric(X,Y) = \sum_j \langle R(X, e_j)Y, e_j\rangle.$$

Denotamos por M_κ uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante κ.

Proposição 6.2.4. *Em M_κ, $Ric(X,Y) = \kappa(n-1)g(X,Y)$ para todo $X, Y \in TM$.*

Demonstração. Pela proposição anterior, $R(U,V)W = \kappa\{\langle U, W\rangle V - \langle W, V\rangle U\}$. Fixado um referencial ortonormal $\{E_i\}$, temos

$$\begin{aligned}
Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, E_i)Y, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \kappa\{\langle X, Y\rangle E_i - \langle Y, E_i\rangle X\}, E_i\rangle \\
&= \kappa \sum_{i=1}^{n} \{\langle X, Y\rangle \langle E_i, E_i\rangle - \langle Y, E_i\rangle\langle X, E_i\rangle\} \\
&= \kappa \sum_{i=1}^{n} \{\langle X, Y\rangle - \langle X, E_i\rangle\langle Y, E_i\rangle\} \\
&= \kappa n \langle X, Y\rangle - \kappa \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle X, E_i\rangle\langle Y, E_i\rangle}_{\langle X, Y\rangle} \\
&= \kappa(n-1)\langle X, Y\rangle.
\end{aligned}$$

□

Agora, mostraremos que variedades de mesma dimensão, e de mesma curvatura seccional contante são localmente isométricas.

Sejam M e $\tilde{M}$ duas variedades de mesma dimensão. Sejam $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Fixe uma isometria linear $i : T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. Seja $V \subset M$ uma vizinhaça normal de p tal que $\exp_{\tilde{p}}$ esteja definida em $i \circ {\exp_p}^{-1}(V)$. Defina a aplicação

$$F : V \to \tilde{M}, \quad \text{por } F(q) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ {\exp_p}^{-1}(q).$$

Dado $q \in V$, existe uma única geodésica p.c.a em M tal que $\gamma : [0, L] \to M$, com $\gamma(0) = p$, $\gamma(L) = q$. Indequemos por $P_{0,t}$ o transporte paralelo ao longo de γ de $\gamma(0)$ a $\gamma(t)$.

Defina $\phi_t : T_{\gamma(t)}M \to T_{\tilde{\gamma}(t)}\tilde{M}$ por $\phi_t(v) = \tilde{P}_{0,t} \circ i \circ {P_{0,t}}^{-1}(v)$, onde $\tilde{P}_{0,t}$ é o transporte paralelo ao longo da geodésica, p.c.a, $\tilde{\gamma} : [0, L] \to \tilde{M}$ dada por $\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$. Observe que como $P_{0,t}$ é uma isometria segue que ϕ_t é isometria. Finalmente, indequemos por R e $\tilde{R}$ as curvaturas de M e $\tilde{M}$ respectivamente.

Teorema 6.2.1 (Cartan)**.** *Com as notações acima, se para todo $q \in V$, $\forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in T_qM$, tem-se*

$$\langle R(v_1, v_2)v_3, v_4\rangle_q = \langle \tilde{R}(\phi_t(v_1)\phi_t(v_2))\phi_t(v_3), \phi_t(v_4)\rangle_{F(q)}$$

então $F : V \to F(V)$ é uma isometria (local) com $DF_p = i$.

A demonstração apresentada aqui é baseada na que foi feita em [10], capítulo 8. Precisaremos dessa demonstração pois nela há uma ideia que será utilizada em breve.

Demonstração. Queremos mostrar que $\forall w \in T_qV$, $\|DF_q(W)\| = \|w\|$ para todo $q \in V$.
Como $\exp_p\big|_V$ é um difeomorfismo, existe campo de Jacobi Y ao longo de γ tal que $Y(0) = 0$ e $Y(L) = w$, a saber $Y(t) = D_{tv}(\exp_p)(tw_0)$ para algum $w_0 \in T_pM$.
Pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} DF(Y(t)) &= D(\exp_{\tilde{p}}) \circ i \circ D(\exp_p)^{-1} \circ D(\exp_p)(tw_0) \\ &= D(\exp_{\tilde{p}})(ti(w_0)) \\ &=: \tilde{Y}(t). \end{aligned}$$

Observemos que $\tilde{Y}$ é campo de Jacobi ao longo de $\tilde{\gamma}(t) = \exp_{\tilde{p}}(ti(w_0))$ satisfazendo $\tilde{Y}(0) = 0$ e $\tilde{Y}'(0) = i(w_0)$.
Afirmação: $\phi_t(Y(t)) = \tilde{Y}(t)$. Se provarmos essa afirmação, então, como ϕ_t é isometria, teremos $\|\tilde{Y}(t)\| = \|Y(t)\|$, e sabemos que $\|\tilde{Y}(t)\| = \|DF(Y(t))\|$, donde F será uma isometria local.

Prova da afirmação. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM, com $e_1 = \gamma'(0)$. Sejam $\{E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ o transporte paralelo ao longo de γ dessa base $(E_1(t) = \gamma'(t))$. Logo

$Y(t) = \sum_i y_i(t)E_i(t)$. Como $Y(t)$ é campo de Jacobi, segue-se

$$\begin{aligned} 0 &= Y''(t) + R(\gamma'(t), Y(t))\gamma'(t) \\ &= \sum_i y_i''(t)E_i(t) + \sum_i y_i R(E_1(t), E_i(t))E_1(t). \end{aligned}$$

Pelas propriedades do tensor R, o operador $R_{\gamma'} := R(\gamma'(t), \cdot)\gamma'(t) : T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma(t)}M$ é auto-adjunto. Logo, $R_{E_1(t)}(E_j(t)) = \sum_k \langle R_{E_1}(E_j), E_k\rangle E_k(t)$ para todo j. Ou seja,

$$R(E_1, E_j)E_1 = \sum_k \langle R(E_1, E_j)E_1, E_k\rangle E_k \quad \text{ao longo de } \gamma(t).$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_k y_k'' E_k(t) + \sum_{i,k} \langle R(E_1, E_i)E_1, E_k\rangle E_k(t) \\ &= \sum_k \left[y_k'' + \sum_i \langle R(E_1, E_i)E_1, E_k\rangle \right] E_k(t). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Por outro lado, pela linearidade do transporte paralelo, $\phi_t(Y(t)) = \sum_j y_j(t)\phi_t(E_j(t))$. Por hipótese, $\langle R(E_1, E_j)E_1, E_k\rangle = \langle \tilde{R}(\phi_t(E_1), \phi_t(E_j))\phi_t(E_1), \phi_t(E_k)\rangle$ para todo j, k. Portanto $\phi_t(Y(t))$ satisfaz (6.2), a saber $\phi_t(Y(t))$ é campo de Jacobi. Além disso, $\phi_t(Y(t))$ satisfaz as mesmas condições inicias de $\tilde{Y}(t)$. Por unicidade de campos de Jacobi $\phi_t(Y(t)) = \tilde{Y}(t)$. □

Assim, finalizamos a prova do teorema. □

Observação 6.2.4.

a) *Vale salientar que nessa demonstração, poderíamos substituir a hipótese pela seguinte propriedade:*

$$\langle R(\gamma', v)\gamma', w\rangle = \langle \tilde{R}(\tilde{\gamma}', \tilde{v})\tilde{\gamma}', \tilde{w}\rangle \qquad (*)$$

para todo $q \in V$, $v, w \in T_qM$, e $\tilde{v}, \tilde{w} \in T_{F(q)}\tilde{M}$, onde $\tilde{\gamma} = F(\gamma)$. Mas a expressão $(*)$ é simétrica em v e w, logo propriedade $(*)$ é equivalente a

$$\langle R(\gamma', v)\gamma', v\rangle = \langle \tilde{R}(\tilde{\gamma}', \tilde{v})\tilde{\gamma}', \tilde{v}\rangle \qquad (**)$$

que é equivalente a curvatura seccional satisfazer

$$K(\gamma', v) = \tilde{K}(\tilde{\gamma}', \tilde{v}) \tag{6.3}$$

para todo $v \in T_qM$ e $\tilde{v} \in T_{F(q)}\tilde{M}$, de modo que $\{v, \gamma'\}$ seja L.I. Pelas propriedades do tensor de curvatura, basta considerar $v \in [\gamma']^\perp$ em (6.3). Desse modo, se $K(\gamma', \cdot) = \tilde{K}(\tilde{\gamma}', \cdot)$, então uma mesma prova mostra que a aplicação F é uma isometria local.

b) A mesma prova do Teorema de Cartan (6.2.1) mostra que se $\exp_p$ *e* $\exp_{\tilde{p}}$ *são difeomorfismos, então nas condições do Teorema de Cartan,* F *está definida em todo* M *e é uma isometria (global).*

Corolário 6.2.2. *Sejam* M_κ *e* $\tilde{M}_\kappa$ *variedades de mesma dimensão, e mesma curvatura seccional constante. Sejam* $p \in M$ *e* $\tilde{p} \in \tilde{M}$*. Então fixado uma isometria linear entre* T_pM *e* $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$*, existem vizinhanças* V *de* p *e* $\tilde{V}$ *de* $\tilde{p}$ *e uma isometria (local)* $F : V \to \tilde{V}$*.*

As variedades completas que possuem curvatura seccional constante, simplesmente conexa são chamadas *formas espaciais*. Em breve, trabalharemos com bolas geodésicas neste tipo de variedade. A seguir apresentamos o *Teorema de Classificação de Cartan*, o qual afirma que essencialmente as únicas variedades riemannianas completas, simplesmente conexas, com curvatura seccional constante κ são o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, a esfera redonda, de raio R, $\mathbb{S}^n_R$ e o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n_R$, de raio R. Para uma definição desses espaços, e uma demonstração do seguinte teorema, veja [10], capítulo 8, e [9], capítulo 2.

Teorema 6.2.2. *Seja* M_κ *uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa de curvatura seccional constante. Então* M_κ *é isométrica a:*

a) $\mathbb{R}^n$*, se* $\kappa = 0$*;*

b) $\mathbb{S}^n_R$*, se* $\kappa > 0$*, onde* $R = 1/\sqrt{\kappa}$*;*

c) $\mathbb{H}^n_R$*, se* $\kappa < 0$*, onde* $R = 1/\sqrt{-\kappa}$*.*

Finalizaremos esta esta discussão exibindo os campos de Jacobi num espaço M_κ. Dado $\kappa \in \mathbb{R}$, seja $S_\kappa(t)$ a solução da EDO

$$X'' + \kappa X = 0,$$

satisfazendo $X(0) = 0$ e $X'(0) = 1$. Pela teoria geral de EDOs lineares, sabemos que:

$$S_\kappa(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{\kappa}\sin(\sqrt{\kappa}t), & \kappa > 0 \\ t, & \kappa = 0 \\ 1/\sqrt{-\kappa}\sinh(\sqrt{-\kappa}t), & \kappa < 0. \end{cases}$$

Seja γ uma geodésica p.c.a em M_κ. Pela expressão do tensor de curvatura R no espaço M_κ, o campos de Jacobi ortogonais a γ' satisfazem a equação:

$$Y'' + \kappa Y = 0.$$

Desse modo, dado condições iniciais $Y(0) = 0$, $Y'(0) = \xi \in [\gamma'(0)]^\perp$, a solução da equação acima é

$$Y(t) = S_\kappa(t)P_{0,t}(\xi) \tag{6.4}$$

onde $P_{0,t} : T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(t)}M$ é o transporte paralelo ao longo de γ.

Proposição 6.2.5. *Se M tem curvatura seccional constante κ ao longo de uma geodésica p.c.a $\gamma : \mathbb{R} \to M$, então $\gamma(0)$ tem um ponto conjugado ao longo de γ se, e só se, $\kappa > 0$, que neste caso $\gamma(L\pi/\sqrt{\kappa})$ é o ponto conjugado a $\gamma(0)$ para toda inteiro L. Além disso, estes são os únicos pontos conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ.*

Demonstração. Veja a expressão (6.4). □

6.2.2 Coordenadas normais maximal e o Volume Riemanniano

Supohamos agora que (M, g) seja uma variedade Riemanniana completa. Seja $p \in M$ fixado, defina $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, p)\ \forall x \in M$, onde $\mathrm{dist}(\cdot, \cdot)$ denota a distância geodésica em M. Então $\rho(x)$ é uma função contínua e de *Lipschitz* em M, e assim ρ é diferenciável em *q.t.p.*

Para cada $p \in M$, a aplicação exponencial $\exp_p : T_pM \to M$ é diferenciável. Dado $X \in T_pM$, seja $\gamma(t)$ a única geodésica partindo de p na direção X. Então $\exp_p(tX) = \gamma(t)$ para todo $t \geq 0$. Quando t é *pequeno*, γ é a única geodésica *mínima* partindo de p a $\exp_p(tX)$, isto é $\rho(\gamma(t)) = \|\gamma'(t)\| = \|X\|$. Vale ressaltar que este fato pode ser violado se t não for suficientemente pequeno. Seja $t_0 := \sup\{t > 0 : \gamma|_{[0,t]}$ é a única geodésica minimizante partindo de p a $\gamma(t)\}$. Pelo Teorema de Hopf-Rinow, t_0 está bem definido, isto é o supremo existe.

Definição 6.2.5. *Se $t_0 < \infty$, então $\gamma(t_0)$ é dito um cut-point (ponto de corte) de p. A saber, $\gamma(t)$ é minimal até o instante $t = t_0$, em $\gamma(t_0)$.*

Observação 6.2.5. *É possível mostrar que se $\gamma(t)$ é minimal até t_0, então $D_{tX}(\exp_p)$ é inversível para $t \in (0, t_0)$ (veja [10]).*

Definição 6.2.6. *(Cut-Locus). O conjunto de todos os cut-point de p é chamado de Cut-Locus, e é denotado por $Cut(p)$.*

Seja $\mathbb{S}^{n-1} = \{X \in T_pM :\ \|X\| = 1\}$ esfera unitária em T_pM. Dado $X \in \mathbb{S}^{N-1}$, por definição, existe no máximo, um *cut-point* na geodésica $\exp_p(tX)$, $t > 0$. Se $\exp_p(t_0X) = q$ é o *cut-point* de p, então pomos $\mu(X) := \mathrm{dist}(p, q)$. Se não existe um *cut-point*, isto é $t_0 = \infty$, pomos $\mu(X) = \infty$. Pode-se mostrar que a função $\mu : S_p \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é contínua em $\mathbb{S}^{n-1}$ para todo $p \in M$, onde em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ considermos uma topologia conveniente (v. [10], cápitulo 13). Dizemos que $\mu(X)$ é o *cut-locus* a p na direção de X.

Com a notação aqui introduzida, temos pela expressão (6.4) e pela observação (6.2.3) a seguinte proposição

Proposição 6.2.6. *Se M tem curvatura seccional constante κ ao longo de uma geodésica p.c.a $\gamma : \mathbb{R} \to M$, então se $\kappa \leq 0$, γ não tem cut-locus, i.e $\mu(\gamma'(0)) = \infty$; se $\kappa > 0$, $\mu(\gamma'(0)) = \pi/\sqrt{\kappa}$.*

Considere agora $E_p = \{tX : 0 \leq t < \mu(X), X \in \mathbb{S}^{n-1}\}$. Pela definição da aplicação exponencial $\exp_p$, temos que

Lema 6.2.1. $\exp_p : E_p \to \exp_p(E_p)$ *é um difeomorfismo.*

Demonstração. Pela observação (6.2.5), $\exp_p$ é um difeomorfismo local em E_p. Por unicidade de geodésica minimizante e pela definição de E_p, segue-se que $\exp_p$ é injetiva em E_p. Portanto, $\exp_p|_{E_p}$ é um difeomorfismo. □

Por construção, temos que $Cut(p) = \exp_p(\partial E_p)$ e vale

Corolário 6.2.3. $\forall p \in M,\ M = \exp_p(E_p) \cup Cut(p)$, *e a união é dijunta.*

Desse modo, $\exp_p : E_p \longrightarrow M \setminus Cut(p)$ origina um sistema de *coordenadas normais maximal* em torno de p.

Lema 6.2.2. *Para todo* $p \in M$, $Cut(p)$ *tem medida nula.*

Demonstração. Pela continuidade de μ, μ é integrável em $\mathbb{S}^{n-1}$, logo seu gráfico, ∂E_p, tem medida nula em T_pM. Como $\exp_p$ é de classe C^1, segue que $\exp_p(\partial E_p)$ tem medida nula. □

Agora recorde que para calcular $D_{tv}(\exp_p)(u)$ com $t > 0$, consideramos $Y(t)$ campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ tal que $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = u$, e assim

$$D_{tv}(\exp_p)(u) = \frac{Y(t)}{t} \,.$$

Diante disso, do corolário (6.2.3) e do lema (6.2.2), temos

$$\mathrm{vol}(M) = \int_M \mathrm{d}V_g = \int_{E_p} {\exp_p}^* \mathrm{d}V_g \,.$$

Vamos calcular esta última integral em termos de campos de Jacobi. Como feito anteriormente, tome $\gamma(t) = \exp_p(tu)$ geodésica partindo p, e considere uma base ortonormal $\{u, e_2, \ldots, e_n\}$ em T_pM. Sejam Y_i campos de Jacobi tais que $Y_i(0) = 0$ e $Y_i'(0) = e_i$ Em particular, Y_i é ortogonal a γ' para todo i. Daí, temos que $D_{tu}(\exp_p)(u) = \gamma'(t)$ e $D_{tu}(\exp_p)(e_i) = t^{-1}Y_i(t)$.

Lema 6.2.3. *(Lema de Gauss). Sejam* $u, v \in T_pM$ *e* γ *a geodésica dada por* $\gamma(t) = \exp_p(tv)$. *Então,*

$$\left\langle D_{tv}(\exp_p)u, D_{tv}(\exp_p)v \right\rangle_{\gamma(t)} = \langle u, v \rangle_p \,.$$

Demonstração. Veja [10]. □

Logo, pelo Lema de Gauss, o jacobiano, em termos da base fixada inicialmente, de $D_{tu}(\exp_p)$ é igual a $\sqrt{\det(A)}$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g(t^{-1}Y_2, t^{-1}Y_2) & g(t^{-1}Y_3, t^{-1}Y_2) & \dots & g(t^{-1}Y_n, t^{-1}Y_2) \\ 0 & g(t^{-1}Y_2, t^{-1}Y_3) & g(t^{-1}Y_3, t^{-1}Y_3) & \dots & g(t^{-1}Y_n, t^{-1}Y_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & g(t^{-1}Y_2, t^{-1}Y_n) & g(t^{-1}Y_3, t^{-1}Y_n) & \dots & g(t^{-1}Y_n, t^{-1}Y_n) \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Denotando $J(t,u)$ pelo jacobiado, tem-se

$$J(t,u) = t^{-(n-1)}\sqrt{\det g\,(Y_i, Y_j)}.$$

Dotando $T_pM \cong \mathbb{R}^n$ de coordenadas polares, temos que

$$(\exp_p)^* \mathrm{d}V_g = \underbrace{t^{n-1}J(t,u)}_{\sqrt{\det g(Y_i,Y_j)}}\mathrm{d}t\mathrm{d}u. \tag{6.5}$$

Observação 6.2.6. *$J(t,u)$ não depende da escolha de $\{e_2,\dots,e_n\}$ por causa do determinante da métrica, de fato se $\{e'_2,\dots,e'_n\}$ é uma outra base ortonormal em T_pM, então $\det(g(Y_i,Y_j)) = \det(g(Y'_i,Y'_j))$.*

Se $\mu(u)$ é a distância do *cut-locus* a p na direção de $u \in \mathbb{S}^{N-1}$, então pelo *Teorema de Fubini* tem-se

$$\mathrm{vol}(M) = \int_{S^{n-1}}\int_0^{\mu(u)} t^{n-1}J(t,u)\mathrm{d}t\mathrm{d}u.$$

Observação 6.2.7. *Em [12], calcula-se o volume via a fórmula acima de $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$, $(\mathbb{H}^n, \mathrm{can})$, $(\mathbb{CP}^n, \mathrm{can})$.*

Para integrais de funções reais, temos

$$\int_M f\mathrm{d}V_g = \int_{S^{n-1}}\int_0^{\mu(u)} f(\exp_p(tu))J(t,u)t^{n-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}u. \tag{6.6}$$

6.2.3 O Teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov: Curvatura de Ricci

Teorema 6.2.3 (Teorema de comparação de volume Bishop-Gromov)**.** *Seja M uma variedade riemanniana completa, com $\dim M = n \geq 2$, e $\kappa \in \mathbb{R}$ tais que $Ric_M(X,X) \geq \kappa(n-1)|X|^2$ para todo $X \in TM$. Então para todo $x \in M$, $R > 0$,*

$$\mathrm{vol}[B(x,r)] \leq V_\kappa(r).$$

Onde. $V_\kappa(r)$ denota o volume da bola geodésica de raio r no espaço M_κ. A igualdade vale para um r fixado se, e somente se, $B(x,r)$ é isométrica a bola de raio r no espaço M_κ.

Por simplicidade, escrevemos $Ric(M) \geq \kappa(n-1)$ para dizer $Ric_M(X,X) \geq \kappa(n-1)|X|^2$. Este teorema decorre de um resultado prévio, também devido a Bishop. Denotaremos por $\mathbb{S}(x,t)$ a fronteira da bola geodésica de centro x e raio t.

Teorema 6.2.4 (Bishop)**.** *Seja γ uma geodésica p.c.a em M tal que a curvatura de Ricci ao longo de γ é maior ou igual a $(n-1)\kappa$, isto é $Ric(\gamma'(t),\gamma'(t)) \geq (n-1)\kappa$, para alguma constante $\kappa \in \mathbb{R}$, para todo $t \in (0,\mu(u))$ com $u = \gamma'(0)$. Então*

$$\frac{(t^{n-1}J(t,u))'}{t^{n-1}J(t,u)} \leq (n-1)\frac{S'_\kappa(t)}{S_\kappa(t)}$$

em $(0,\mu(u))$, e também vale

$$t^{n-1}J(t,u) \leq S_\kappa^{n-1}(t), \quad \textit{para todo } t \in (0,\mu(u)] \tag{6.7}$$

onde

(1) se $\kappa > 0$, $S_\kappa(t) = \sin(\sqrt{\kappa}t)/\sqrt{\kappa}$, $0 \leq t \leq \pi/\kappa$

(2) se $\kappa = 0$, $S_0(t) = t$, $0 \leq t < \infty$

(3) se $\kappa < 0$, $S_\kappa(t) = \sinh(\sqrt{-\kappa}t)/\sqrt{-\kappa}$, $0 \leq t < \infty$.

A igualdade em (6.7) vale em $t = t_0 \in (0,\mu(u)]$ se, e somente se

$$R(\gamma'(t),\cdot)\gamma'(t) = \kappa I_{[\gamma'(t)]^\perp}$$

para todo $t \in (0,t_0]$. Desse modo, a igualdade acima vale se, e só se, $K(\gamma'(t),\cdot) = \kappa$ para todo $t \in (0,t_0]$, onde K é a curvatura seccional de M.

Observação 6.2.8.

a) Não será abordada a demonstração desse teorema, para não perdermos o foco deste capítulo, mas uma demonstração completa deste fato encontra-se em [9] capítulo 3 (teorema 3.4). Observe também que esse teorema implica o teorema de Bonnet-Myers (caso $\kappa > 0$).

b) A desigualdade

$$\frac{(t^{n-1}J(t,u))'}{t^{n-1}J(t,u)} \leq (n-1)\frac{S'_\kappa(t)}{S_\kappa(t)}, \quad t \in (0,\mu(u))$$

implica que a função

$$t \mapsto \frac{t^{n-1}J(t,u)}{S_\kappa^{n-1}(t)}$$

é não-crescente.

Observação 6.2.9. *Num sistema de coordenadas polares (t,u) em $S(t) = \{v \in T_xM : \|v\| = t\}$ a esfera centrada em $0 \in T_xM$ de raio t, o elemento de volume de $\mathbb{S}(x,t)$, é dado por $t^{n-1}J(t,u)\mathrm{d}u$, de fato*

$$\mathrm{vol}[\mathbb{S}(x,t)] = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} t^{n-1}J(t,u)\mathrm{d}u$$

onde $\mathrm{d}u$ é o elemento de área em $\mathbb{S}^{n-1}$. Agora, se M_κ é um espaço de curvatura seccional constante κ, então a função S_κ^{n-1} do teorema anterior é, na realidade, o elemento de volume de $B(x,t)$ em M_κ, veja [9], capítulo 3.

Demonstração do Teorema de Comparação Bishop-Gromov. Dados $r > 0$ e $p \in M$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}[B(p,r)] &= \int_{B(p,r)} \mathrm{d}V_g \\
&= \int_{E_p \cap B(r)} (\exp_p)^* \mathrm{d}V_g \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{\min\{\mu(u),r\}} t^{n-1}J(t,u)\mathrm{d}t\mathrm{d}u \\
&\leq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^r S_\kappa^{n-1}(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{vol}[\mathbb{S}^{n-1}] \int_0^r S_\kappa^{n-1}(t)\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{vol}(B_k(r)) = V_\kappa(r).
\end{aligned}$$

Se vale a igualdade $\mathrm{vol}[B(p,r)] = V_\kappa(r)$ para algum $r > 0$, então $B(p,r) \subset M \setminus Cut(p)$. Além disso, $t^{n-1}J(t,u) = S_\kappa^{n-1}(t)$ para todo $t \in (0,r]$, pela igualdade (6.7), temos que $K(\gamma'(t),\cdot) = \kappa$ para todo $t \in [0,r]$. Logo, pelo teorema 6.2.1, precisamente pela igualdade em (6.3), $B(p,r)$ é isométrica a $B_\kappa(r)$, a bola de raio r em M_κ. □

Finilizamos essa seção com uma consequência do teorema de Bishop. A consequência é a seguinte proposição

Proposição 6.2.7 (Gromov). *Seja $V(x,r) = \mathrm{vol}[B(x,r)]$. A função*

$$r \mapsto \frac{V(x,r)}{V_\kappa(r)}$$

é não-crescente.

Demonstração. Escrevendo $A_\kappa(t) := S_\kappa^{n-1}(t)$, o teorema de Bishop pode ser reescrito como

$$\frac{t^{n-1}J(t,u)}{A_\kappa(t)} \quad \text{é não-crescente em } t. \tag{6.8}$$

Se $\kappa > 0$, (6.8) vale para $t \in [0, \pi/\sqrt{\kappa}]$. Seja $S(t)$ a esfera em T_xM centrada em 0, de raio t. Então (6.8) implica

$$\frac{\int_{S(t)\cap E_x} t^{n-1}J(t,u)}{\int_{S(t)} A_\kappa(t)} \quad \text{é não-crescente em } t. \tag{6.9}$$

A possível existência de *cut-locus* de x (caso $E_x \neq T_xM$) não apresenta dificuldade aqui. Sejam, $f(t) = \int_{S(t)\cap E_x} t^{n-1}J(t,u)\mathrm{d}u$ e $g(t) = \int_{S(t)} A_\kappa(t)\mathrm{d}u$, então

$$\mathrm{vol}(B(x,r)) = \int_0^r f(t)\mathrm{d}t$$

e

$$V_\kappa(r) = \mathrm{vol}[B_\kappa(r)] = \int_0^r g(t)\mathrm{d}t$$

onde $B_\kappa(t) =$ bola geodésica de raio t no espaço M_κ.

Lema 6.2.4. *Sejam $f,\ g$ duas funções contínuas tais que $f(s) > 0$, $g(s) > 0$ e $f(s)/g(s)$ é não-crescente para $s > 0$. Sejam*

$$F(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$$

e

$$G(t) = \int_0^t g(s)\mathrm{d}s.$$

Então $F(t)/G(t)$ é não-crescente para $t > 0$.

Demonstração. Sejam $0 \leq r_0 < r_1 < r_2$. Temos que

$$\frac{F(r_1) - F(r_0)}{G(r_1) - G(r_0)} = \frac{\int_{r_0}^{r_1} f(s)\mathrm{d}s}{\int_{r_0}^{r_1} g(s)\mathrm{d}s} = \frac{\int_{r_0}^{r_1} \frac{f(s)}{g(s)} g(s)\mathrm{d}s}{\int_{r_0}^{r_1} g(s)\mathrm{d}s}.$$

Como $f(s)/g(s) \geq f(r_1)/g(r_1)$ para todo $s \in [r_0, r_1]$, segue-se que

$$\frac{F(r_1) - F(r_0)}{G(r_1) - G(r_0)} \geq \frac{f(r_1)}{g(r_1)}\ .$$

Analogamente, como $f(s)/g(s) \leq f(r_1)/g(r_1)$ para cada $s \in [r_1, r_2]$, tem-se

$$\frac{F(r_2) - G(r_1)}{G(r_2) - G(r_1)} \leq \frac{f(r_1)}{g(r_1)}.$$

Desse modo,

$$\frac{F(r_1) - F(r_0)}{G(r_1) - G(r_0)} \geq \frac{F(r_2) - G(r_1)}{G(r_2) - G(r_1)}.$$

Como $F(0) = G(0) = 0$, escolhendo $r_0 = 0$, segue-se que

$$\frac{F(r_1)}{G(r_1)} \geq \frac{F(r_2) - G(r_1)}{G(r_2) - G(r_1)}.$$

Logo,

$$\frac{F(r_1)}{G(r_1)} \geq \frac{F(r_2)}{G(r_2)}.$$

□

De (6.9) e pelo lema anterior, segue-se diretamente que

$$\frac{\mathrm{vol}[B(x,r)]}{V_\kappa(r)}$$

é não-crescente em $r > 0$. Portanto, concluímos a prova da proposição. □

6.3 Consequências do Teorema principal

6.3.1 Consequência Geométrica

Uma consequência de caráter geométrico do Teorema 6.1.1 é o seguinte corolário

Corolário 6.3.1. *Uma Variedade Riemanniana completa aberta M, de dimensão n, com curvatura de Ricci não-negativa, na qual a desigualdade*

$$\left(\int_M \rho^{-bp}|u|^p \mathrm{d}V_g\right)^{1/p} \leq K_{a,b}\left(\int_M \rho^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}V_g\right)^{1/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(M),$$

é satisfeita, é isométrica ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Do Teorema (6.1.1), temos que $\mathrm{vol}[B(x,r)] \geq V_0(r)$ para todo $r > 0$. Combinado isto com o Teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov, temos que $\mathrm{vol}[B(x,r)] = V_0(r)$ para todo $r > 0$. Assim, por esse mesmo teorema, $B(x,r)$ é isométrica a bola euclidiana de raio r. Denotemos a bola euclidiana de raio r por $B(r)$. A saber, a isometria é

$$F : B(x,r) \to B(r)$$

dada por $F := (\exp)_{\mathbb{R}^n} \circ i \circ (\exp_{x_0})^{-1}$, onde $(\exp)_{\mathbb{R}^n}$ é a aplicação exponencial de $\mathbb{R}^n$. Como a igualdade $\mathrm{vol}[B(x,r)] = V_0(r)$ vale para todo $r > 0$, segue que $Cut(x_0) = \varnothing$. Isto é, toda geodésica partindo de x_0 é minimizante e, portanto, $\exp_{x_0}$ é um difeomorfismo em $T_{x_0}M$. Pelo teorema de Hadamard (v. [10], capítulo 7), $(\exp)_{\mathbb{R}^n}$ é um difeomorfismo global em $T\mathbb{R}^n$. Logo, a aplicação F está globalemnte definida em M, isto é $F : M \to \mathbb{R}^n$, e portanto é uma isometria global. □

Desse modo, $\mathbb{R}^n$ é a única (a menos de uma isometria) Variedade Riemanniana aberta, completa, onde desigualdades do tipo Caffarelli-Kohn-Nirenberg são satisfeitas.

6.3.2 Consequências Topológicas

Trataremos aqui de conceitos de topologia algébrica, como *Grupo Fundamental* e *Espaço de Recobrimento*. Não enunciaremos tais conceitos para não deixar o capítulo extenso, apenas sugerimos excelentes livros para esse tema. Sobre a definição de Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento consulte [32], parte II, capítulo 9. Por exemplo, uma importante informação sobre o conhecimento do grupo fundamental de uma variedade M completa, $\pi_1(M)$, é que num sentido bem preciso, o grupo $\pi_1(M)$ age isometricamente em $\tilde{M}$ (o recobrimento universal de M), e a finitude do grupo $\pi_1(M)$ implica na finitude das *folhas* do espaço $\tilde{M}$. Para os detalhes precisos consulte [10], capítulo 8, seção 4.

Um teorema devido a Cheeger e Colding em [33] (seção 7, teorema 7.3) estabelece que dado $n \geq 2$, existe uma constante $\delta(n) > 0$ tal que em toda variedade M Riemanniana aberta completa, dimensão n, com curvatura de *Ricci* não-negativa onde vale:

$$\mathrm{vol}[B(p,r)] \geq (1-\delta(n))V_0(r)$$

para algum $p \in M$ e todo $r > 0$, é *difeomorfa* à $\mathbb{R}^n$.
Assim, combinando o Teorema 6.1.1 e o Teorema Cheeger-Colding, deduzimos o seguinte resultado de *rigidez topológica* para variedades com curvatura de Ricci não-negativa.

Corolário 6.3.2. *Dado $n \geq 3$, existe uma constante positiva $\epsilon = \epsilon(n,a,b)$ tal que toda variedade riemanniana completa aberta, de dimensão n, M com curvatura de Ricci não-negativa em que a desigualdade*

$$\left(\int_M \rho^{-bp}|u|^p \mathrm{d}V_g\right)^{1/p} \leq (K_{a,b}+\epsilon)\left(\int_M \rho^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}V_g\right)^{1/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(M),$$

é satisfeita, é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. De fato, se vale a desigualdade acima, então pelo Teorema (6.1.1), vale

$$\mathrm{vol}[B(x,r)] \geq (K_{a,b}/(K_{a,b}+\epsilon))V_0(r) \geq (1-\delta)V_0(r)$$

para todo $r > 0$ e algum $\delta > 0$. E concluí-se o desejado pelo Teorema Cheeger-Colding. $\square$

Logo, $\mathbb{R}^n$ é a única (a menos de um difeomorfismo) Variedade Diferenciável onde desigualdades do tipo CKN são satisfeitas.

Um outro resultado, devido a Li, em [34], e Anderson, em [35], estabelece que, se M é uma variedade completa com curvatura de Ricci não-negativa na qual a desigualdade

$$\mathrm{vol}[B(x,r)] \geq \alpha V_0(r)$$

vale para alguma constante $\alpha > 0$ e todo $x \in M$, e $r > 0$, então o grupo fundamental $\pi_1(M)$ é finito e a ordem de $\pi_1(M)$ é limitada por $1/\alpha$, isto é $|\pi_1(M)| \leq 1/\alpha$. Assim, combinando o Teorema Li-Anderson com o Teorema 6.1.1, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 6.3.3. *Seja $C \geq K_{a,b}$ uma constante e M uma variedade riemanniana aberta completa, de dimensão $n \geq 3$, com curvatura de Ricci não-negativa. Assuma que para todo $u \in C_0^\infty(M)$, tem-se*

$$\left(\int_M \rho^{-bp}|u|^p \mathrm{d}V_g\right)^{1/p} \leq C\left(\int_M \rho^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}V_g\right)^{1/2}.$$

Então M tem grupo fundamental finito e a ordem de $\pi_1(M)$ é limitada por $(K_{a,b}^{-1}C)^{n/(1-(b-a))}$.

Caso seja o interesse do leitor, existem vários resultados estabelecidos sobre a topologia de variedades completas com curvatura de Ricci não-negativa. Veja, por exemplo, [34–37] e suas referências.

6.4 Prova do Teorema principal

A demonstração dada por Manfredo, Xia em [30] é uma adaptação da demonstração do teorema principal de [38], que é um caso particular do teorema (6.1.1), a saber o caso $a = b = 0$. A demonstração se seguirá com argumentos simples, porém argumentos longos. Será necessário uma sequência de considerações.

Demonstração do Teorema (6.1.1). Inicialmente, notemos que, pelo Teorema da Comparação de Bishop-Gromov, para cada $x_0 \in M$, a função

$$r \mapsto \operatorname{vol}\left(B(x_0, r)\right)/V_0(r) \qquad \text{é não-crescente,}$$

e o limite

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{vol}[B(x_0, r)]}{V_0(r)}$$

existe, e não depende do ponto x_0, de fato veja o lema (6.4.3), logo após a presente demonstração. Consequentemente, se

$$\operatorname{vol}[B(x_0, r)] \geq \left(C^{-1}K_{a,b}\right)^{\frac{n}{1-(b-a)}} V_0(r)$$

vale para algum ponto $x_0 \in M$, então a desigualdade acima é satisfeita para todo $x \in M$. Vamos mostrar então que (6.1.1) vale para um ponto $x_0 \in M$. Fixe $x_0 \in M$.

Sejam

$$w = 2a - bp + 2, \text{ e } q = \frac{(n-2-2a)p}{w}.$$

Como $p = \frac{2n}{n-2+2(b-a)}$, temos que

$$\begin{aligned} q &= \frac{2n(n-2a-2)}{2an - 4a + 4a(b-a) - 2bn + 2n - 4 + 4(b-a)} \\ &= \frac{2n(n-2-2a)}{2(n-2-2a) + 2(b-a)(-n+2-2a)} \\ &= \frac{(n-2-2a)2n}{2(n-2-2a)(1-(b-a))} \\ &= \frac{n}{1-(b-a)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, $2p/(p-2) = n/(1-(b-a))$, veja apêndice A. Logo, $q = 2p/(p-2)$.

Agora, para $\lambda > 0$, defina

$$F(\lambda) = \frac{p-2}{p+2}\int_M \rho^{-bp}(\lambda + \rho^w)^{1-q} \mathrm{d}V_g$$

onde $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, x_0)$. Como consequência do Teorema de Fubini (veja apêndice B), temos que

$$F(\lambda) = \frac{p-2}{p+2}\int_0^\infty \operatorname{vol}\left\{x : \frac{1}{\rho^{bp} + (\lambda+\rho^w)^{q-1}} > s\right\} \mathrm{d}s.$$

Fazendo a mudança de variável $s = h^{-bp}(\lambda + h^w)^{-(q-1)}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= -\{bp(\lambda + h^w) + w(q-1)h^w\}h^{-bp-1}(\lambda + h^w)^{-q}\mathrm{d}h \\ &= -\{bp\lambda + [bp + w(q-1)]\, h^w\}h^{-bp-1}(\lambda + h^w)^{-q}\mathrm{d}h. \end{aligned}$$

Como $s \to 0^+$ implica $h \to +\infty$, e $s \to +\infty$ implica $h \to 0^+$, temos que

$$F(\lambda) = \frac{p-2}{p+2}\int_\infty^0 -\mathrm{vol}\{x \,:\, \rho(x) < h\} \times \{bp\lambda + [bp + w(q-1)]\, h^w\}h^{-bp-1}(\lambda + h^w)^{-q}\mathrm{d}h.$$

Logo,

$$F(\lambda) = \frac{p-2}{p+2}\int_0^\infty \mathrm{vol}\{x \,:\, \rho(x) < h\} \times \{bp\lambda + [bp + w(q-1)]\, h^w\}h^{-bp-1}(\lambda + h^w)^{-q}\mathrm{d}h. \tag{6.10}$$

Pelo Teorema da Comparação de Bishop, vale

$$F(\lambda) \leq \frac{\omega_n(p-2)}{p+2}\int_0^\infty \frac{[bp\lambda + (bp + w(q-1)h^w)]\, h^{n-bp-1}}{(\lambda + h^w)^q}\mathrm{d}h.$$

Pelo lema (6.4.4), que se encontra no final deste capítulo, temos que $F(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$, e assim pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \frac{p-2}{p+2}\int_M \left(\rho^{-bp}(\lambda + \rho^w)^{-(q-1)}\right)' \mathrm{d}V_g \\ &= -\frac{(p-2)(q-1)}{p+2}\int_M \rho^{-bp}(\lambda + \rho^w)^{-q}\mathrm{d}V_g \\ &= -\int_M \rho^{-bp}(\lambda + \rho^w)^{-q}\mathrm{d}V_g. \end{aligned}$$

Agora, considere a função $H_0 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$H_0(\lambda) = \frac{p-2}{p+2}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-bp}(\lambda + |x|^w)^{1-q}\mathrm{d}x.$$

Pelo mesmo argumento anterior,

$$H_0'(\lambda) = -\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-bp}(\lambda + |x|^w)^{-q}\mathrm{d}x.$$

Recorde que quando $C = K_{a,b}$ e $M = \mathbb{R}^n$, as funções extremais para a desigualdade CKN são dadas por $u_\lambda(x) = (\lambda + |x|^w)^{-q/p}$, $\lambda > 0$. (Veja capítulo 5, seção 4.) A saber,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-bp}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{2/p} = K_{a,b}^2\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2a}|\nabla u|^2\mathrm{d}x. \tag{6.11}$$

Como $u(x)$ é uma função radial, temos que

$$\nabla u(x) = -\frac{qw}{p}(\lambda + |x|^w)^{-(q/p+1)}|x|^{w-2}x.$$

Portanto

$$|\nabla u|^2 = \left(\frac{qw}{p}\right)^2 (\lambda + |x|^w)^{-(2q/p\ +2)}|x|^{2w-2}.$$

Desse modo, (6.11) pode ser reescrito da forma:

$$\begin{aligned}
(-H_0'(\lambda))^{2/p} &= \left(\int |x|^{-bp}(\lambda+|x|^w)^{-q}\right)^{2/p} \\
&= \left(\frac{(K_{a,b})qw}{p}\right)^2 \int |x|^{-2(a+1-w)}(\lambda+|x|^w)^{-2(1+q/p)}\mathrm{d}x. \qquad (6.12)
\end{aligned}$$

Como, $w = 2a - bp + 2$, segue $2(a+1-w) = bp - w$, e como $q = 2p/(p-2)$, segue $2 + 2q/p = 2p/(p-2) = q$. Desse modo, a expressão (6.12) pode ser reescrista como

$$(-H_0'(\lambda))^{2/p} = \left(\frac{(K_{a,b})qw}{p}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-(bp-w)}(\lambda+|x|^w)^{-q}\mathrm{d}x\ . \qquad (6.13)$$

Por outro lado, observemos que, para todo $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{p+2}{p-2}H_0(\lambda) + H_0'(\lambda) &= \int |x|^{-bp}(\lambda+|x|^w)^{1-q}\mathrm{d}x - \int |x|^{-bp}(\lambda+|x|^w)^{-q}\mathrm{d}x \\
&= \int |x|^{-bp}(\lambda+|x|^w)^{-q}\left(\lambda+|x|^w-1\right)\mathrm{d}x \\
&= \int |x|^{-(bp-w)}(\lambda+|x|^w)^{-q}\mathrm{d}x + (\lambda-1)\int |x|^{-bp}(\lambda+|x|^w)^{-q}\mathrm{d}x \\
&= \int |x|^{-(bp-w)}(\lambda+|x|^w)^{-q}\mathrm{d}x - \lambda H_0'(\lambda) + H_0'(\lambda).
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $\lambda > 0$ vale

$$\int |x|^{-(bp-w)}(\lambda+|x|^w)^{-q}\mathrm{d}x = \frac{p+2}{p-2}H_0(\lambda) + \lambda H_0'(\lambda).$$

Combinando a igualdade acima com (6.13), tem-se que a função $H_0(\lambda)$ satisfaz a seguinte EDO

$$(-H_0'(\lambda))^{2/p} = \left(\frac{(K_{a,b})qw}{p}\right)^2 \left(\frac{p+2}{p-2}H_0(\lambda) + \lambda H_0'(\lambda)\right), \quad \lambda > 0. \qquad (6.14)$$

Por um cálculo direto observamos que se u_λ é uma função extremal de CKN, então $\lambda^{-2/(p-2)}u_1(x)$ também o é. Desse modo, apliquemos a equação diferencial, que está descrita em (6.14), na função: $H(\lambda) := \lambda^{-2/(p-2)}H_0(1)$, para que assim obtenhamos um valor exato para $H_0(1)$. De fato, temos que

$$H'(\lambda) = -\frac{2}{p-2}\lambda^{-\frac{p}{p-2}}H_0(1)$$

e assim observemos que para todo $\lambda > 0$,

$$\lambda H'(\lambda) + \frac{p+2}{p-2}H(\lambda) = \left(-\frac{2}{p-2} + \frac{p+2}{p-2}\right)\lambda^{-2/(p-2)}H_0(1) = \frac{p}{p-2}\lambda^{-2/(p-2)}H_0(1)\ .$$

Logo, substituindo a expressão acima em (6.14), obtemos

$$\left(\frac{2}{p-2}\lambda^{-p/(p-2)}H_0(1)\right)^{2/p} = K^2\frac{p}{p-2}\lambda^{-2p/(p-2)}H_0(1)$$

onde $K = (qwK_{a,b})/p$. Desenvolvendo a equação acima, tem-se para todo $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{p-2}\right)^{2/p} \lambda^{-2/(p-2)} (H_0(1))^{2/p} &= K^2 \frac{p}{p-2} \lambda^{-2/(p-2)} H_0(1) \\
&\Leftrightarrow \\
\left(\frac{2}{p-2}\right)^{2/p} (H_0(1))^{2/p} &= K^2 \frac{p}{p-2} H_0(1) \\
(H_0(1))^{\frac{2}{p}-1} &= \left(\frac{2}{p-2}\right)^{-2/p} K^2 \frac{p}{p-2} \\
&\Leftrightarrow \\
(H_0(1))^{-\frac{(p-2)}{p}} &= \left(\frac{2}{p-2}\right)^{-2/p} K^2 \frac{p}{p-2} \\
&\Leftrightarrow \\
H_0(1) &= \left[\left(\frac{2}{p-2}\right)^{-2/p} K^2 \frac{p}{p-2}\right]^{-\frac{p}{p-2}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
H_0(1) &= \left(\frac{2}{p-2}\right)^{2/(p-2)} (p-2)^{p/(p-2)} \left(K^2 p\right)^{-p/(p-2)} \\
&= 2^{2/(p-2)} (p-2)^{-\frac{2}{p-2}} (p-2)^{\frac{p}{p-2}} \left(K^2 p\right)^{-p/(p-2)} \\
&= 2^{2/(p-2)} (p-2) \left(K^2 p\right)^{-p/(p-2)}.
\end{aligned}$$

Como $qw = (n-2-2a)p$, segue que $K = qwK_{a,b}/p = K_{a,b}(n-2-2a)$. Desse forma,

$$H_0(1) = 2^{2/(p-2)}(p-2)\left[p(n-2-2a)^2 K_{a,b}^2\right]^{-p/(p-2)}.$$

Feito estas considerações, agora vamos aplicar a desigualdade do tipo CKN (6.1) na função $f(x) = (\lambda + \rho^w(x))^{-q/p}$, $\lambda > 0$. Podemos de fato aplicar a desigualdade CKN em f, por um argumento de *regularização* (veja (6.4.1), no final desse capítulo). No caso $M = \mathbb{R}^n$, $f(x) = u_\lambda(x)$ é uma função extremal para CKN.

Recorde que pelo *isomorfismo musical*, $df(x)^\sharp = \nabla f(x)\ \forall x \in M$. Também, pela definição de $\rho(x)$, vale

$$d\rho(x)^\sharp = \frac{\partial}{\partial \rho}(x) \quad \forall x \in M,$$

onde $\frac{\partial}{\partial \rho}(x)$ é a direção radial em x, logo como $df(x) = \frac{\partial f}{\partial \rho}(x) d\rho(x)$, segue que

$$df(x) = -\frac{q}{p}\left(\lambda + \rho^w(x)\right)^{-\frac{(q+p)}{p}} w\rho^{w-1}(x) d\rho(x).$$

Assim,

$$\nabla f(x) = -\frac{q}{p}\left(\lambda + \rho^w(x)\right)^{-\frac{(q+p)}{p}} w\rho^{w-1}(x) \frac{\partial}{\partial \rho}(x).$$

Como $|\frac{\partial}{\partial \rho}| = 1$, segue-se que

$$|\nabla f(x)|^2 = \left(\frac{qw}{p}\right)^2 \rho^{2w-2}(\lambda + \rho^w)^{-2(q+p)/p}.$$

Daí, a desigualdade do tipo CKN (6.1) aplicado a f pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\left(\int_M \rho^{-bp}(\lambda+\rho^w)^{-q}\mathrm{d}V_g\right)^{2/p} &\leq \left(\frac{qwC}{p}\right)^2\int_M \rho^{-2a+2w-2}(\lambda+\rho^w)^{-2(q+p)/p}\mathrm{d}V_g\\ &= \left(\frac{qwC}{p}\right)^2\int_M \rho^{-2(a+w-1)}(\lambda+\rho^w)^{-2(q+p)/p}\mathrm{d}V_g\\ &= \left(\frac{qwC}{p}\right)^2\int_M \rho^{-(bp-w)}(\lambda+\rho^w)^{-2q}\mathrm{d}V_g.\end{aligned}$$

Seja $l=(qwC/p)^{-2}=(p/(qwC))^2$. Então, a função $F(\lambda)$ dada em (6.10), satisfaz a seguinte relação:

$$l(-F'(\lambda))^{2/p}-\lambda F'(\lambda)\leq\frac{p+2}{p-2}F(\lambda)\,. \tag{6.15}$$

A ideia agora é comparar as soluções de (6.15) com as soluções $H(\lambda)$ da seguinte equação diferencial:

$$l(-H'(\lambda))^{2/p}-\lambda H'(\lambda)=\frac{p+2}{p-2}H(\lambda). \tag{6.16}$$

Afirmação 6.4.1. *A função $H_1(\lambda):=A\lambda^{-2/(p-2)}$, $\lambda>0$, é solução de (6.16) se, e somente se,*

$$A=2^{2/(p-2)}(p-2)\left(\frac{l}{p}\right)^{p/(p-2)}.$$

A prova dessa afirmação encontra-se no final deste capítulo. Como $qw=(n-2-2a)p$, temos que

$$\begin{aligned}A &= 2^{2/(p-2)}(p-2)\left(\frac{l}{p}\right)^{p/(p-2)}\\ &= 2^{2/(p-2)}(p-2)\left(\frac{p^2}{p(qwC)^2}\right)^{p/(p-2)}\\ &= 2^{2/(p-2)}(p-2)\left(\frac{1}{p(n-2-2a)^2C^2}\right)^{p/(p-2)}\\ &= 2^{2/(p-2)}(p-2)\left((n-2-2a)^2pC^2\right)^{-p/(p-2)}\\ &= 2^{2/(p-2)}(p-2)\left((n-2-2a)^2pK_{a,b}^{-2}C^2K_{a,b}^2\right)^{-p/(p-2)}\\ &= \left(K_{a,b}C^{-1}\right)^{2p/(p-2)}2^{2/(p-2)}(p-2)\left((n-2-2a)^2pK_{a,b}^2\right)^{-p/(p-2)}.\end{aligned}$$

Recorde agora que $H_0(1)=2^{2/(p-2)}(p-2)\left(p(n-2-2a)^2K_{a,b}^2\right)^{-p/(p-2)}$. Logo,

$$\begin{aligned}A &= \left(C^{-1}K_{a,b}\right)^{2p/(p-2)}H_0(1)\\ &= \left(C^{-1}K_{a,b}\right)^{2p/(p-2)}\frac{p-2}{p+2}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-bp}(1+|x|^w)^{1-q}\mathrm{d}x\\ &= \left(C^{-1}K_{a,b}\right)^{\frac{n}{1-(b-a)}}\frac{p-2}{p+2}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-bp}(1+|x|^w)^{1-q}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Desse modo, a função $H_1(\lambda)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} H_1(\lambda) &= \left(\left(C^{-1}K_{a,b}\right)^{\frac{n}{1-(b-a)}} \frac{p-2}{p+2}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-bp}(1+|x|^w)^{1-q}\mathrm{d}x\right)\lambda^{-2/(p-2)} \\ &= \left(C^{-1}K_{a,b}\right)^{\frac{n}{1-(b-a)}} H_0(\lambda)\,. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Agora, para finalizarmos a demonstração do Teorema (6.1.1), precisaremos de dois lemas.

Lema 6.4.1. *Se para algum* $\lambda_0 > 0$*, tem-se* $F(\lambda_0) < H_1(\lambda_0)$*, então* $F(\lambda) < H_1(\lambda)$ *para todo* $\lambda \in (0, \lambda_0]$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que o lema seja *falso*, isto é: para cada $\lambda_0 > 0$, tal que $F(\lambda_0) < H_1(\lambda_0)$, existe $\lambda \in (0, \lambda_0]$ tal que $F(\lambda) = H_1(\lambda)$.
Seja, desse modo, $\lambda_0 > 0$ tal que $F(\lambda_0) < H_1(\lambda_0)$. Seja, então, $\lambda_1 := \sup\{\lambda < \lambda_0 \ : \ F(\lambda_0) = H_1(\lambda_0)\}$. A existência de λ_1 é garantida por hipótese. Considere, agora, a função $\varphi_\lambda : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_\lambda(s) = ls^{2/p} + \lambda s, \quad \lambda > 0.$$

Observe que φ_λ é uma função crescente, já que $\varphi_\lambda' = (2/p)ls^{-(p-2)/p} + \lambda > 0$. Como $F(\lambda)$ satisfaz (6.15), segue-se

$$\varphi_\lambda(-F'(\lambda)) \leq \left(\frac{p+2}{p-2}\right) F(\lambda),$$

o que implica

$$-F'(\lambda) \leq \varphi_\lambda^{-1}\left(\frac{p+2}{p-2}F(\lambda)\right),$$

ou seja

$$F'(\lambda) \geq -\varphi_\lambda^{-1}\left(\frac{p+2}{p-2}F(\lambda)\right).$$

Por outro lado, tem-se de (6.14) que

$$-H_1'(\lambda) = \varphi_\lambda^{-1}\left(\frac{p+2}{p-2}H_1(\lambda)\right).$$

Assim, no conjunto $\{\lambda > 0 \ : \ F(\lambda) \leq H_1(\lambda)\}$, temos:

$$F'(\lambda) - H'(\lambda) \geq \varphi_\lambda^{-1}\left(\frac{p+2}{p-2}H_1(\lambda)\right) - \varphi_\lambda^{-1}\left(\frac{p+2}{p-2}F(\lambda)\right).$$

Como $(F - H_1)\Big|_{[\lambda_1,\lambda_0]} \leq 0$, pela definição de λ_1, concluímos que $(F - H_1)' \geq 0$ em $[\lambda_1, \lambda_0]$, já que φ_λ é crescente.
Desse modo, $(F - H_1)$ é crescente em $[\lambda_1, \lambda_0]$, o que implica $(F - H_1)(\lambda_1) \leq (F - H)(\lambda_0)$.
Por continuidade de $(F - H_1)$, temos que $(F - H_1)(\lambda_1) = 0$. Assim, temos

$$0 = (F - H_1)(\lambda_1) \leq (F - H_1)(\lambda_0) < 0, \quad \text{o que nos leva a uma contradição.}$$

□

Lema 6.4.2.
$$\liminf_{\lambda\to 0} \frac{F(\lambda)}{H_0(\lambda)} \geq 1.$$

Demonstração. Fixe $\epsilon > 0$. Como
$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{vol}[B(x_0,h)]}{V_0(h)} = 1,$$
existe $\delta > 0$ tal que $\mathrm{vol}[B(x_0,h)] \geq (1-\epsilon)V_0(h)$ se $h \leq \delta$ (veja apêndice B). Recorde que
$$F(\lambda) = \frac{p-2}{p+2}\int_0^\infty \mathrm{vol}[B(x_0,h)]\frac{(bp\lambda + (bp+(q-1)w)h^w)}{h^{bp+1}(\lambda+h^w)^q}\mathrm{d}h.$$

Assim,
$$F(\lambda) \geq \frac{p-2}{p+2}(1-\epsilon)\int_0^\delta V_0(h)\frac{(bp\lambda + (bp+(q-1)w)h^w)}{h^{bp+1}(\lambda+h^w)^q}\mathrm{d}h.$$

Fazendo a mudança de variável $s = \lambda^{-1/w}h$, obtemos $\mathrm{d}s = \lambda^{-1/w}\mathrm{d}h$, isto é $\mathrm{d}h = \lambda^{1/w}\mathrm{d}s$. Mais precisamente, com esta mudança de variável, temos que

(i) $h = 0 \;\Rightarrow\; s = 0$, e $h = \delta \;\Rightarrow\; s = \lambda^{-1/w}\delta$,

(ii) $V_0(h) = \lambda^{n/w}V_0(s)$,

(iii) $(\lambda + h^w)^q = (\lambda + \lambda s^w)^q = \lambda^q(1+s^w)$,

(iv) $(bp\lambda + (bp+(q-1)w)h^w) = \lambda(bp + (bp+(q-1)w)s^w)$.

Escrevendo $(\star) = \frac{(bp\lambda+(bp+(q-1)w)h^w)}{h^{bp+1}(\lambda+h^w)^q}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta V_0(h)\cdot(\star)\mathrm{d}h &= \int_0^{(\lambda^{-1/w})\delta} \lambda^{n/w}V_0(h)\frac{\lambda(bp+(bp+(q-1)w)s^w)}{\lambda^{(bp+1)/w}s^{bp+1}\lambda^q(1+s^w)^q}\lambda^{1/w}\mathrm{d}s \\
&= \frac{\lambda^{n/w}\lambda\lambda^{1/w}}{\lambda^{bp/w}\lambda^{1/w}\lambda^q}\int_0^{(\lambda^{-1/w})\delta} V_0(s)\frac{(bp+(bp+(q-1)w)s^w)}{s^{bp+1}(1+s^w)^q}\mathrm{d}s \\
&= \lambda^{(n-bp)/w+1-q}\int_0^{(\lambda^{-1/w})\delta} V_0(s)\frac{(bp+(bp+(q-1)w)s^w)}{s^{bp+1}(1+s^w)^q}\mathrm{d}s \\
&= \lambda^{-2/(p-2)}\int_0^{(\lambda^{-1/w})\delta} V_0(s)\frac{(bp+(bp+(q-1)w)s^w)}{s^{bp+1}(1+s^w)^q}\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

A última igualdade acima vale porque como $(n-bp)/w = q/2$ (pela definição de q), segue-se que $(n-bp)/w - q + 1 = -q/2 + 1 = -2/(p-2)$.

Por outro lado, observemos que sendo
$$H_0(\lambda) = \frac{p-2}{p+2}\int_0^\infty V_0(h)\frac{(bp\lambda + (bp+(q-1)w)h^w)}{h^{bp+1}(\lambda+h^w)^q}\mathrm{d}h,$$

então pela mudança de variável $s = \lambda^{-1/w}h$ temos, de modo análogo ao que foi feito para $F(\lambda)$:

$$H_0(\lambda) = \frac{(p-2)\lambda^{-2/(p-2)}}{p+2} \int_0^\infty V_0(s) \frac{(bp + (bp + (q-1)w)s^w)}{s^{bp+1}(1+s^w)^q} \mathrm{d}s.$$

Logo,

$$\frac{F(\lambda)}{H_0(\lambda)} \geq (1-\epsilon) \frac{\int_0^{(\lambda^{-1/w})\delta} V_0(s) \frac{(bp+(bp+(q-1)w)s^w)}{s^{bp+1}(1+s^w)^q} \mathrm{d}s}{\int_0^\infty V_0(s) \frac{(bp+(bp+(q-1)w)s^w)}{s^{bp+1}(1+s^w)^q} \mathrm{d}s}.$$

Desse modo,

$$\liminf_{\lambda \to 0} \frac{F(\lambda)}{H_0(\lambda)} \geq (1-\epsilon).$$

Assim, fazendo $\epsilon \to 0$,

$$\liminf_{\lambda \to 0} \frac{F(\lambda)}{H_0(\lambda)} \geq 1.$$

□

Agora, continuaremos com a demonstração do Teorema (6.1.1). Dividiremos o restante da prova em dois casos.

Caso 1. $C > K_{a,b}$. Sabemos de (6.17) que

$$H_1(\lambda) = \left(C^{-1}K_{a,b}\right)^{\frac{n}{1-(b-a)}} H_0(\lambda),$$

logo, do lema 6.4.2 segue que

$$\begin{aligned} \liminf_{\lambda \to 0} \frac{F(\lambda)}{H_1(\lambda)} &= \left(\frac{C}{K_{a,b}}\right)^{\frac{n}{1-(b-a)}} \liminf_{\lambda \to 0} \frac{F(\lambda)}{H_0(\lambda)} \\ &\geq \left(\frac{C}{K_{a,b}}\right)^{\frac{n}{1-(b-a)}} \\ &> 1. \end{aligned}$$

Combinando isso com o lema 6.4.1, concluímos que $F(\lambda) \geq H_1(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$. Isto é, para todo $\lambda > 0$, temos que $F(\lambda) - H_1(\lambda) \geq 0$. O que acarreta, pela definição de $F(\lambda)$ e $H_1(\lambda)$, na seguinte expressão

$$\int_0^\infty \left[\mathrm{vol}[B(x_0,h)] - \left(C^{-1}K_{a,b}\right)^{\frac{n}{1-(b-a)}} V_0(h)\right] \times \frac{bp\lambda + (bp+(q-1)w)h^w}{h^{bp+1}(\lambda + h^w)^q} \mathrm{d}h \geq 0. \quad (6.18)$$

Recordemos que o Teorema de Comparação de Bishop-Gromov nos diz que a função $s \mapsto \mathrm{vol}[B(x_0,s)]/V_0(s)$ é não-crescente. Sejam

$$d := \left(C^{-1}K_{a,b}\right)^{\frac{n}{1-(b-a)}}, \quad d_0 := \lim_{h \to \infty} \frac{\mathrm{vol}[B(x_0,h)]}{V_0(h)}.$$

A prova do Teorema (6.1.1) estará completa se mostrarmos que $d_0 \geq d$. De fato, para cada $h > 0$, $d_0 \leq \mathrm{vol}[B(x_0,h)]/V_0(h)$. Logo, $d_0 \geq d$ implica

$$\mathrm{vol}[B(x_0,h)] \geq d \cdot V_0(h).$$

Provaremos este fato por *contradição*. Suponha que $d_0 = d - \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$. Então, existe $N_0 > 0$ tal que

$$\frac{\mathrm{vol}[B(x_0,h)]}{V_0(h)} \leq d - \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall h > N_0.$$

Introduzindo a desigualdade acima em (6.18), temos que, para todo $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{vol}[B(x_0,h)]}{V_0(h)} - d\right) V_0(h) \times \frac{bp\lambda + (bp+(q-1)w)h^w}{h^{bp+1}(\lambda+h^w)^q}\mathrm{d}h \\ &= I_1 + I_2\,, \end{aligned} \tag{6.19}$$

onde

$$I_1 = \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{vol}[B(x_0,h)]}{V_0(h)}\right) V_0(h) \times \frac{bp\lambda + (bp+(q-1)w)h^w}{h^{bp+1}(\lambda+h^w)^q}\mathrm{d}h$$

e

$$I_2 = -d\int_0^\infty V_0(h) \times \frac{bp\lambda + (bp+(q-1)w)h^w}{h^{bp+1}(\lambda+h^w)^q}\mathrm{d}h.$$

Para simplificar as expressões, denotemos

$$(\star) := \frac{(bp\lambda + (bp+(q-1)w)h^w)}{h^{bp+1}(\lambda+h^w)^q}.$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{N_0} \frac{\mathrm{vol}[B(x_0,h)]}{V_0(h)} V_0(h)\cdot(\star)\mathrm{d}h + \int_{N_0}^\infty \frac{\mathrm{vol}[B(x_0,h)]}{V_0(h)} V_0(h)\cdot(\star)\mathrm{d}h \\ &\leq \int_0^{N_0} V_0(h)\cdot(\star)\mathrm{d}h + (d-\epsilon/2)\int_{N_0}^\infty V_0(h)\cdot(\star)\mathrm{d}h \\ &= \int_0^{N_0} V_0(h)\cdot(\star)\mathrm{d}h + (d-\epsilon/2)\left(\int_0^\infty - \int_0^{N_0}\right) V_0(h)\cdot(\star)\mathrm{d}h \quad \text{(abuso de notação)} \\ &= (1-d+\epsilon/2)\int_0^{N_0} V_0(h)\cdot(\star)\mathrm{d}h + d\int_0^\infty V_0(h)\cdot(\star)\mathrm{d}h - \frac{\epsilon}{2}\int_0^\infty V_0(h)\cdot(\star)\mathrm{d}h. \end{aligned}$$

Logo,

$$I_1 + I_2 = (1-d+\epsilon/2)\int_0^{N_0} V_0(h)\cdot(\star)\mathrm{d}h - \epsilon/2\int_0^\infty V_0(h)\cdot(\star)\mathrm{d}h\,.$$

Desse modo, de (6.19) segue

$$\begin{aligned} 0 &\leq (1-d+\epsilon/2)\int_0^{N_0} V_0(h)\cdot(\star)\mathrm{d}h - \frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{p+2}{p-2}H_0(\lambda) \\ &\leq (1-d+\epsilon/2)\lambda^{-1/q}\int_0^{N_0} \frac{\omega_n h^n(bp\lambda + (bp+(q-1)w)h^w)}{h^{bp+1}(\lambda+h^w)^q}\mathrm{d}h - \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{p+2}{p-2}\right)\lambda^{-2/(p-2)}H_0(1) \\ &= (1-d+\epsilon/2)\lambda^{-1/q}\left(\frac{bp\lambda N_0^{n-bp}}{n-bp} + \frac{(bp+(q-1)w)N_0^{n-bp+w}}{n-bp+w}\right) - \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{p+2}{p-2}\right)\lambda^{-2/(p-2)}H_0(1). \end{aligned}$$

O que implica que $\forall\ \lambda > 0$,

$$\frac{\epsilon}{2}\left(\frac{p+2}{p-2}\right)\lambda^{-2/(p-2)}\frac{H_0(1)}{(1-d+\epsilon/2)} \leq \lambda^{2/(p-2)-q}\left(\frac{\lambda\cdot(bpN_0^{n-bp})}{n-bp} + \frac{(bp+(q-1)w)N_0^{n-bp+w}}{n-bp+w}\right). \tag{6.20}$$

Como $q = 2p/(p-2)$, segue que

$$\frac{2}{p-2} - q = -\frac{2(p-1)}{p-2} < 0 \text{ e } \quad \frac{2}{p-2} - q + 1 = -\frac{p}{p-2} < 0.$$

Assim, fazendo $\lambda \to \infty$ em (6.20), tem-se

$$\frac{\epsilon}{2}\left(\frac{p+2}{p-2}\right)\frac{H_0(1)}{1-d+\epsilon/2} = 0,$$

mas essa igualdade só é possível se $\epsilon = 0$, uma *contradição*! Portanto, provamos que se $C > K_{a,b}$ em (6.1.1), então $d_0 \geq d$.

Caso 2. $C = K_{a,b}$. Neste caso, temos que $\forall \delta > 0$ fixado,

$$\left(\int_M \rho^{-bp}|u|^p \mathrm{d}V_g\right)^{1/p} \leq (K_{a,b} + \delta)\left(\int_M \rho^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}V_g\right)^{1/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Logo, do *Caso 1*, temos que $\forall x \in M$,

$$\mathrm{vol}[B(x,r)] \geq \left(\frac{K_{a,b}}{K_{a,b}+\delta}\right)^{\frac{n}{1-(b-a)}} V_0(r), \quad \forall r > 0.$$

Fazendo $\delta \to 0$, obtemos $\mathrm{vol}[B(x,r)] \geq V_0(r)$ para todo $r > 0$. Assim, provamos o Teorema (6.1.1) para o caso $C = K_{a,b}$.

Encerrando, portanto, a demonstração do Teorema (6.1.1) □

Uma vez concluido a prova do Teorema 6.1.1, dedicamos o final desta seção para demonstrarmos alguns resultados utilizados na demonstração do mesmo. Comecemos com o seguinte lema

Lema 6.4.3. *O limite*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{vol}[B(x_0,r)]}{V_0(r)}$$

existe, e não depende do ponto $x_0 \in M$.

Demonstração. De fato, pelo Teorema Bishop-Gromov, para todo $x \in M$, o limite

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{vol}[B(x,r)]}{V_0(r)}$$

existe, pois $\forall r > 0,\ \mathrm{vol}[(B(x,r))] \leq V_0(r)$ e função $r \mapsto \frac{\mathrm{vol}[B(x,r)]}{V_0(r)}$ é não-crescente. Agora, sejam $x_1,\ x_2 \in M$, e $d = \mathrm{dist}(x_1,x_2)$. Considere as funções

$$f(r) := \frac{\mathrm{vol}[B(x_1,r)]}{V_0(r)}, \quad g(r) := \frac{\mathrm{vol}[B(x_2,r)]}{V_0(r)}.$$

Queremos mostrar que os limites $L_1 := \lim_{r\to\infty} f(r)$ e $L_2 := \lim_{r\to\infty} g(r)$ são iguais.

Pela desigualdade triangular, $B(x_1,r) \subset B(x_2,r+d)$. Então,

$$g(r+d) \geq \frac{\mathrm{vol}[B(x_1,r)]}{(r+d)^n} = f(r)\frac{r^n}{(r+d)^n}$$

Logo, passando $r \to \infty$, tem-se $L_2 \geq L_1 \cdot 1 = L_1$. De modo análogo, concluímos $L_1 \geq L_2$. Portanto, $L_1 = L_2$. □

Lema 6.4.4. *Para todo $\lambda > 0$, temos que $0 \leq F(\lambda) < \infty$.*

Demonstração. Por definição, $F(\lambda) \geq 0$. Como visto,

$$F(\lambda) \leq \frac{\omega_n(p-2)}{p+2} \int_0^\infty \frac{[bp\lambda + (bp + (q-1)w)h^w]\, h^{n-bp-1}}{(\lambda + h^w)^q} \mathrm{d}h.$$

(i) Por um lado, temos:

$$w = \frac{2(n-2-2a)(1-(b-a))}{n-2+(b-a)} > 0,$$

já que $(b-a) < 1$ e $q = 2p/(p-2) > 0$. Logo

$$\frac{(\lambda + h^w)^{-q}}{h^{-wq}} \to 1 \quad \text{quando } h \to \infty.$$

Em particular, existem $C_1, R > 0$ tais que $(\lambda + h^w)^{-q} \leq C_1 h^{-wq}$ se $h \geq R$.

(ii) Por outro lado, observemos que $(\lambda + h^w)^{-q} \leq \lambda^{-q}$ já que $h \geq 0$, daí para todo $a > 0$,

$$\int_0^a h^{n-bp-1}(\lambda + h^w)^{-q} \mathrm{d}h \leq \lambda^{-q} \int_0^a h^{n-bp-1} \mathrm{d}h$$

e

$$\int_0^a h^{n-bp-1+w}(\lambda + h^w)^{-q} \mathrm{d}h \leq \lambda^{-q} \int_0^a h^{n-bp-1+w} \mathrm{d}h.$$

As integrais, do membro direito de cada desigualdade acima, convergem para todo $a > 0$ fixado pelo critério:

$$\int_0^a t^\alpha \mathrm{d}t < \infty \;\Leftrightarrow\; \alpha + 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha > -1$$

pois pelo apêndice A, $n - bp - 1 > -1$ e $n - bp - 1 + w > -1 + w > -1$.

Agora, tome $a = R$, daí

$$F(\lambda) \leq \frac{\omega_n(p-2)}{p+2} [I_1 + I_2]$$

onde

$$I_1 = bp\lambda \int_0^\infty h^{n-bp-1}(\lambda + h^w)^{-q} \mathrm{d}h$$

e

$$I_2 = (bp + w(q-1)) \int_0^\infty h^{n-bp-1+w}(\lambda + h^w)^{-q} \mathrm{d}h.$$

Por (i),

$$\int_0^R h^{n-bp-1} \mathrm{d}h < \infty$$

e

$$\int_0^R h^{n-bp-1+w} \mathrm{d}h < \infty\,.$$

E também, por (ii),

$$\int_R^\infty h^{n-bp-1}(\lambda + h^w)^{-q} \mathrm{d}h \leq C_1 \int_R^\infty h^{n-bp-1-qw} \mathrm{d}h$$

e

$$\int_R^\infty h^{n-bp-1+w}(\lambda+h^w)^{-q}\mathrm{d}h \leq C_1\int_R^\infty h^{n-bp-1+w(1-q)}\mathrm{d}h$$

Como $n-bp-w(1-q)-1<-1$ (apêndice A), e $n-bp-1-wq<-1$, ambas as integrais do membro direito das desigualdades acima convergem, pelo critério: fixado $a>0$

$$\int_a^\infty t^\alpha \mathrm{d}t<\infty \ \Leftrightarrow\ \alpha<-1$$

Portanto, $I_1<\infty$ e $I_2<\infty$, ou seja $\forall\lambda>0, F(\lambda)<\infty$. □

Proposição 6.4.1. *As desigualdades do tipo CKN assumidas em (6.1) podem ser aplicadas (isto é estendidas) as funções*

$$f(x)=(\lambda+\rho^w(x))^{-q/p}\ ,\ \textit{onde}\ \lambda>0\ \textit{e}\ \rho(x)=\mathrm{dist}(x,x_0).$$

Demonstração. Fixe $x_0\in M$. Como M é completa e aberta, para cada $j\in\mathbb{N}$, é possível escolher $u_j\in C_0^\infty(M)$, tal que :

$$(a)\ 0\leq u_j\leq 1 \text{ em } M,\qquad (b)\ u_j\equiv 1 \text{ em } B_j(x_0),$$
$$(c)\ u_j\equiv 0 \text{ em } M\setminus B_{2j}(x_0),\qquad (d)\ |\nabla u_j|\leq\frac{2}{j} \text{ q.t.p } M.$$

(Para uma construção dessa sequência, veja [39], Apêndice A.) Desse modo, a função $(u_j\cdot f)\in C_0^\infty(M)$, e vale

$$\left(\int_M\rho^{-bp}|u_jf|^p\mathrm{d}V_g\right)^{1/p}\leq C\left(\int_M\rho^{-2a}|\nabla(u_jf)|^2\mathrm{d}V_g\right)^{1/2}. \tag{6.21}$$

Como $u_j\leq u_{j+1}$ e $\lim u_j=1$ pontualmente, segue pelo Teorema da Convergência Monótona (v. apêndice A.4) que

$$\lim_{j\to\infty}\left(\int_M\rho^{-bp}|u_jf|^p\mathrm{d}V_g\right)^{1/p}=\left(\int_M\rho^{-bp}|f|^p\mathrm{d}V_g\right)^{1/p}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_M\rho^{-2a}|\nabla(u_jf)|^2\mathrm{d}V_g \ &\leq\ \int_M\rho^{-2a}(u_j)^2|\nabla f|^2\mathrm{d}V_g+\frac{4}{j^2}\int_M\rho^{-2a}f^2\mathrm{d}V_g\\ &\quad +2\int_M\rho^{-2a}fu_j\nabla f\cdot\nabla u_j\mathrm{d}V_g.\end{aligned}$$

Observe que a terceira integral do mebro direto acima tende a zero em módulo, quando $j\to\infty$. Logo, passando o limite quando $j\to\infty$ em (6.21) concluímos:

$$\left(\int_M\rho^{-bp}|f|^p\mathrm{d}V_g\right)^{1/p}\leq C\left(\int_M\rho^{-2a}|\nabla f|^2\mathrm{d}V_g\right)^{1/2}.$$

□

A construção das funções u_j's da demonstração anterior é bastente técnica, porém extremamente útil para muitas aplicações (v. [39], capítulo 3, e [16], capítulo 8). Finalizamos esta seção demonstrando a *afirmação* enunciada durante a demonstração do Teorema (6.1.1)

Prova da afirmação 6.4.1. Considere $H_1(\lambda) := A\lambda^{-2/(p-2)}$, onde $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Temos que por um cálculo direto $H_1'(\lambda) = -2/(p-2)A\lambda^{-p/(p-2)}$, e $-\lambda H_1'(\lambda) = 2/(p-2)A\lambda^{-2/(p-2)}$. Assim, $H_1(\lambda)$ é solução de (6.16) se, e só se, para todo $\lambda > 0$,

$$l(-H_1'(\lambda))^{2/p} - \lambda H_1'(\lambda) = \frac{p+2}{p-2} H_1(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$l\left(\frac{2}{p-2}A\lambda^{-p/(p-2)}\right)^{2/p} + \frac{2}{p-2}A\lambda^{-2/(p-2)} = \frac{p+2}{p-2}A\lambda^{-2/(p-2)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$l\left(\frac{2}{p-2}\right)^{2/p} A^{2/p}\lambda^{-2/(p-2)} + \frac{2}{p-2}A\lambda^{-2/(p-2)} = \frac{p+2}{p-2}A\lambda^{-2/(p-2)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$l\left(\frac{2}{p-2}\right)^{2/p} A^{2/p} + \frac{2}{p-2}A = \frac{p+2}{p-2}A$$

$$\Leftrightarrow$$

$$l\left(\frac{2}{p-2}\right)^{2/p} A^{-1+2/p} = \frac{p}{p-2}\ .$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} l\left(\frac{2}{p-2}\right)^{2/p} A^{-(p-2)/p} = \frac{p}{p-2} \quad &\Leftrightarrow \quad A^{-(p-2)/p} = l^{-1}\left(\frac{2}{p-2}\right)^{-2/p} \frac{p}{p-2} \\ &\Leftrightarrow \quad A = l^{p/(p-2)}\left(\frac{p}{p-2}\right)^{-p/(p-2)}\left(\frac{2}{p-2}\right)^{2/(p-2)} \\ &\Leftrightarrow \quad A = \left(\frac{l}{p}\right)^{p/(p-2)} (p-2)^{p/(p-2)}(p-2)^{-2/(p-2)}2^{2/(p-2)} \\ &\Leftrightarrow \quad A = 2^{2/(p-2)}(p-2)\left(\frac{l}{p}\right)^{p/(p-2)}. \end{aligned}$$

$\square$

REFERÊNCIAS

1 CAFFARELLI, L.; KOHN, R.; NIRENBERG, L. First order interpolation inequalities with weights. *Compositio Mathematica*, Martinus Nijhoff Publishers, v. 53, n. 3, p. 259–275, 1984. Citado 4 vezes nas páginas 7, 8, 10 e 49.

2 HARDY, G. H. Note on a theorem of hilbert. *Mathematische Zeitschrift*, Springer, v. 6, n. 3, p. 314–317, 1920. Citado na página 10.

3 BREZIS, H.; VáZQUEZ, J. L. Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, v. 10, n. 2, p. 443–469, 1997. Citado na página 10.

4 GHERGU, M.; RADULESCU, V. *Nonlinear PDEs: Mathematical models in biology, chemistry and population genetics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. Citado na página 10.

5 LIMA, E. L. *Espaços métricos*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983. v. 4. Citado na página 13.

6 BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 76.

7 GRIGORYAN, A. *Heat kernel and analysis on manifolds*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2009. v. 47. Citado 6 vezes nas páginas 13, 29, 33, 34, 75 e 123.

8 GROSSINHO, M. do R.; TERSIAN, S. A. *An introduction to minimax theorems and their applications to differential equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001. v. 52. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 48.

9 CHAVEL, I. *Riemannian geometry: a modern introduction*. [S.l.]: Cambridge university press, 2006. v. 98. Citado 5 vezes nas páginas 15, 88, 93, 97 e 98.

10 CARMO, M. P. D. *Geometria riemanniana*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988. Citado 11 vezes nas páginas 15, 17, 21, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 95 e 100.

11 LEE, J. M. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 176. Citado 3 vezes nas páginas 15, 23 e 120.

12 GALLOT, S.; HULIN, D.; LAFONTAINE, J. *Riemannian geometry*. [S.l.]: Springer, 1990. v. 3. Citado 3 vezes nas páginas 15, 88 e 96.

13 TU, L. *An Introduction to Manifolds, ch. 14*. [S.l.]: Springer, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

14 SANTOS, E. A. F. d. et al. O teorema de comparação de volume de bishop-gromov. Universidade Federal de Alagoas, 2009. Citado na página 27.

15 AUBIN, T. *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 31.

16 HEBEY, E. *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2000. v. 5. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31 e 113.

17 EVANS, L. C. Partial differential equations. American Mathematical Society, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.

18 BAZAN, A.; NEVES, W. The hardy and caffarelli-kohn-nirenberg inequalities revisited. *arXiv preprint arXiv:1007.2005*, 2010. Citado na página 35.

19 CATRINA, F.; WANG, Z.-Q. On the caffarelli-kohn-nirenberg inequalities: Sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal functions. *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, Wiley Online Library, v. 54, n. 2, p. 229–258, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 50.

20 FOLLAND, G. B. *Real analysis: modern techniques and their applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 47, 69 e 72.

21 BERESTYCKI, H.; ESTEBAN, M. J. Existence and bifurcation of solutions for an elliptic degenerate problem. *journal of differential equations*, Elsevier, v. 134, n. 1, p. 1–25, 1997. Citado na página 48.

22 AUBIN, T. et al. Problemes isopérimétriques et espaces de sobolev. *Journal of differential geometry*, Lehigh University, v. 11, n. 4, p. 573–598, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

23 TALENTI, G. Best constant in sobolev inequality. *Annali di Matematica pura ed Applicata*, Springer, v. 110, n. 1, p. 353–372, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

24 DAVIES, E. A review of hardy inequalities. In: *The Maz'ya anniversary collection*. [S.l.]: Springer, 1999. p. 55–67. Citado na página 49.

25 HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E.; PÓLYA, G. *Inequalities*. [S.l.]: Cambridge university press, 1952. Citado na página 49.

26 LIEB, E. H. Sharp constants in the hardy-littlewood-sobolev and related inequalities. In: *Inequalities*. [S.l.]: Springer, 2002. p. 529–554. Citado 3 vezes nas páginas 49, 50 e 64.

27 CHOU, K. S.; CHU, C. W. On the best constant for a weighted sobolev-hardy inequality. *Journal of the London Mathematical Society*, Wiley Online Library, v. 2, n. 1, p. 137–151, 1993. Citado 3 vezes nas páginas 49, 50 e 63.

28 WILLEM, M. *Minimax theorems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1997. v. 24. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 76.

29 CANZANI, Y. Analysis on manifolds via the laplacian. *Lecture Notes available at: http://www. math. harvard. edu/canzani/docs/Laplacian. pdf. Google Scholar*, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 79 e 82.

30 CARMO, M. P. D.; XIA, C. Complete manifolds with non-negative ricci curvature and the caffarelli–kohn–nirenberg inequalities. *Compositio Mathematica*, London Mathematical Society, v. 140, n. 3, p. 818–826, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 102.

31 SCHOEN, R.; YAU, S.-T. *Lectures on differential geometry*. [S.l.]: International press Cambridge, MA, 1994. v. 2. Citado na página 88.

32 MUNKRES, J. R. *Topology: a first course*. [S.l.]: Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1975. v. 23. Citado na página 100.

33 CHEEGER, J.; COLDING, T. H. et al. On the structure of spaces with ricci curvature bounded below. *J. Differential Geom*, v. 46, n. 3, p. 406–480, 1997. Citado na página 100.

34 LI, P. Large time behavior of the heat equation on complete manifolds with non-negative ricci curvature. *Annals of mathematics*, JSTOR, v. 124, n. 1, p. 1–21, 1986. Citado na página 101.

35 ANDERSON, M. T. On the topology of complete manifolds of non-negative ricci curvature. *Topology*, Pergamon, v. 29, n. 1, p. 41–55, 1990. Citado na página 101.

36 XIA, C. Open manifolds with nonnegative ricci curvature and large volume growth. *Commentarii Mathematici Helvetici*, Springer, v. 74, n. 3, p. 456–466, 1999. Citado na página 101.

37 CARMO, M. do; XIA, C. Ricci curvature and the topology of open manifolds. In: *Manfredo P. do Carmo–Selected Papers*. [S.l.]: Springer, 2012. p. 415–424. Citado na página 101.

38 LEDOUX, M. On manifolds with non-negative ricci curvature and sobolev inequalities. *Communications in Analysis and Geometry*, International Press of Boston, v. 7, n. 2, p. 347–353, 1999. Citado na página 102.

39 PIGOLA, S.; SETTI, A. G. Global divergence theorems in nonlinear pdes and geometry. *Ensaios Matemáticos*, v. 26, p. 1–77, 2014. Citado na página 113.

40 BARTLE, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2014. Citado na página 123.

41 SANTOS, E. O. d. et al. Existência de soluções simétricas e não-simétricas para uma classe de equações de schrödinger semilineares. Universidade Federal da Paraíba, 2011. Citado na página 124.

APÊNDICE A – CONTAS ENVOLVENDO OS PARÂMETROS

Afirmação A.0.1. *Para a, b e p definidos em (5.2), vale*

(1) $N - bp \geq 0$ *, se* $(b-a) \leq 1$*, com desigualdade estrita se* $(b-a) < 1$*;*

(2) $p/(p-2) = n/(2-2(b-a))$*;*

(3) $N - bp + w(q-1) < 0$*, se* $(b-a) < 1$*;*

(4) $q = 2p/(p-2)$*;*

(5) $2(N-bp) = qw$*, onde* $w = 2a - bp + 2$ *e* $q = (N-2-2a)p/w$*.*

Os itens (2), (3), (4) *e* (5) *são usados exclusivamente no capítulo* 6 *dessa dissertação.*

Demonstração. (1): Temos que

$$\begin{aligned} n - bp &= n - \frac{2nb}{n-2+2(b-a)} \\ &= \frac{n^2 - 2n + 2n(b-a) - 2bn}{n-2+2(b-a)} \\ &= \frac{n^2 - 2n - 2an}{n-2+2(b-a)} \\ &= \frac{n(n-2-2a)}{n-2+2(b-a)} \\ &> \frac{n(n-2-2a)}{n} \qquad \text{(se } (b-a) < 1\text{)} \\ &= n - 2 - 2a \geq 0. \qquad \text{(por definição do parâmetro } a\text{)} \end{aligned}$$

(2): É imediato de verificar que $p/(p-2) = n/(2-2(b-a))$.

(3): Temos que $1 - q = -(p+2)/(p-2)$. É fácil de verificar que

$$p + 2 = \frac{4(n-1+(b-a))}{n-2+2(b-a)}$$

e

$$p - 2 = \frac{4(1-(b-a))}{n-2+2(b-a)}.$$

Assim,

$$1 - q = -\frac{n-1+(b-a)}{1-(b-a)}.$$

Também temos que

$$\begin{aligned} w &= 2a - bp + 2 \\ &= 2a - \frac{2nb}{n-2+2(b-a)} + 2 \\ &= \frac{2an - 4a + 4a(b-a) - 2nb + 2n - 4 + 4(b-a)}{n-2+2(b-a)} \\ &= -\frac{n(-2+2(b-a)) + 2a(-2+2(b-a)) + 2(-2+2(b-a))}{n-2+2(b-a)} \\ &= \frac{2(n-2-2a)(1-(b-a))}{n-2+2(b-a)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$w(1-q) = -\frac{2(n-2-2a)(n-1+(b-a))}{n-2+2(b-a)}.$$

Por (1), $n - bp = n(n-2-2a)/(n-2+2(b-a))$. Desse modo,

$$\begin{aligned} n - bp + w(1-q) &= \frac{n(n-2-2a) - 2(n-2-2a)(n-1+(b-a))}{n-2+2(b-a)} \\ &= \frac{(n-2-2a)(n-2n+2-2(b-a))}{n-2+2(b-a)} \\ &= -\frac{(n-2-2a)(n-2+2(b-a))}{n-2+2(b-a)} \\ &= -(n-2-2a) < 0. \end{aligned}$$

(4): De (2) e o que foi feito no capítulo 6, seção 3, concluímos que $q = 2p/(p-2)$.

(5): Pela definição de q, temos que

$$qw = (n-2-2a)p = \frac{2n(n-2-2a)}{n-2+2(b-a)}.$$

Comparando a expressão acima com (1), concluí-se o desejado. $\square$

Lema A.0.1. *Para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\|u\|_{\mathfrak{D}_a^{1,2}} < \infty$ e $\|u\|_{b,p} < \infty$, a saber $\|\cdot\|_{\mathfrak{D}_a^{1,2}}$ e $\|\cdot\|_{b,p}$ definem uma norma em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde*

$$\|u\|_{\mathfrak{D}_a^{1,2}}^2 := \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x \quad e \quad \|u\|_{b,p}^p := \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x$$

com $a < (N-2)/2$ e $a \leq b \leq a+1$.

Demonstração. A demonstração é bem simples. Se $\mathrm{supp}(u)$ não contém a *origem*, a integral é facilmente estimada. Caso $\mathrm{supp}(u)$ contenha a *origem*, observe que pelas hipóteses, $-2a > 2-N$ e $-bp > -N$, daí o resultado segue-se por *coordenadas polares*. $\square$

APÊNDICE B – RESULTADOS AUXILIARES DE GEOMETRIA

Lema B.0.1. *Seja M uma variedade Riemanniana, de dimensão n. Para todo $p \in M$, tem-se*

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathrm{vol}(B(p,r))}{V_0(r)} = 1,$$

onde $V_0(r) = \omega_n r^n$.

Demonstração. Fixe $p \in M$. Tome *coordenadas normais* (U, φ) em torno de p. Assim, $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $g_{ij}(p) = \delta_i^j$ (*delta* de *Kronecker*) e $\nabla_{\partial_i}\partial_j(p) = 0$, veja [11].
Logo, os coeficientes admitem a seguinte expansão de Taylor (próximo de 0)

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(|x|^2).$$

Daí, $g(x) = \det(g_{ij}(x)) = 1 + O(|x|^{2n})$, isto é existe $C > 0$ tal que $|g - 1| \leq C|x|^{2n}$ se $|x| < \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$. Podemos supor que $U = B(p,r)$ com $0 < r < \epsilon$, então $\varphi(U) = B_r(0)$ em $\mathbb{R}^n$. Logo, $\forall x \in B_r(0)$, $|g - 1| \leq Cr^{2n}$. Como $|g - 1| = |\sqrt{g} - 1| \cdot |\sqrt{g} + 1|$, segue que $|\sqrt{g} - 1| < Cr^{2n}$ em $\varphi(U)$.
Desse modo,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{vol}(B(p,r))}{\omega_x r^n} - 1\right| &= \left|\frac{\int_{B_r(0)} \sqrt{g}\mathrm{d}x}{\omega_n r^n} - \frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B_r(0)} 1\mathrm{d}x\right| \\
&= \frac{1}{\omega_n r^n}\left|\int_{B_r(0)} (\sqrt{g} - 1)\mathrm{d}x\right| \\
&= \leq \frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B_r(0)} |\sqrt{g} - 1|\mathrm{d}x \\
&= \frac{Cr^2 n}{\omega_r r^n}\int_{B_r(0)} 1\mathrm{d}x \\
&= Cr^{2n} \to 0 \text{ , quando } r \to 0.
\end{aligned}$$

□

Agora, fixado $p \in M$, seja $u \in T_pM$, e defina

$$J_p(t,u) \begin{cases} t^{n-1}J(t,u), & 0 \leq t < \mu(u) \\ 0, & t \geq \mu(u). \end{cases}$$

Assim, $J_p(t,u)$ está definido para todo $t \geq 0$ e $u \in T_pM$ com $\|u\| = 1$, mas claramente J_p é descontínua em $t = \mu(u)$. No entanto, ainda assim tem-se

$$\mathrm{vol}[B_x(t)] = \int_{B_x(t)} \mathrm{d}V_g = \int_{E_x \cap B(0,t)} {\exp_x}^* \mathrm{d}V_g = \int_{S^{n-1}} \int_0^t J_x(t,u)\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma(u),$$

onde E_x é definido na seção 2 do capítulo 6, $\mathrm{d}\sigma$ é o *elemento de área* em S^{n-1}. A possível existência de *cut-locus* em x, isto é $E_x \neq T_xM$, não apresenta problema na integração, já que $J_x = 0$ se $t \geq \mu(u)$.
Assim, pelo teorema de Fubini, trocando a ordem de integração, tem-se

$$\mathrm{vol}[B_x(t)] = \int_0^t \left(\int_{S^{n-1}} J_x(t,u)\mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}t.$$

Logo, T.F.C implica

$$V'(r) = \int_{S^{n-1}} J(r,u),\ r > 0.$$

Agora, fixado $p \in M$, seja $\rho(x) = \mathrm{dist}(x,p)$ a função distância.

Lema B.0.2. *Seja f uma função diferenciável, e radial em p, isto é $f(x) = f(\rho(x))$. Então*

$$\int_M f\mathrm{d}V_g = f(r)V(r)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f'(r)V(r)dr,$$

onde no membro direito da igualdade, r é uma variável real positiva, $V(r) = \mathrm{vol}(B_p(r))$.

Demonstração. Como visto, temos que

$$\begin{aligned}
\int_M f(\rho)\mathrm{d}V_g &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r)J(r,u)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}r && \text{(Fubini)} \\
&= \int_0^\infty f(r) \left(\int_{S^{n-1}} J(r,u)\mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}r && \text{(Fubini, novamente)} \\
&= \int_0^\infty f(r)V'(r)\mathrm{d}r \\
&= f(r)V(r)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f'(r)V(r)dr.
\end{aligned}$$

□

Um caso particular a ser usado na demonstração do capítulo 6 (seção 3) é quando $f(\rho) = \rho^{-bp}(\lambda + \rho^w)^{-q+1}$.
Logo,

$$\int_M f(\rho)\mathrm{d}V_g = f(r)V(r)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f'(r)V(r)dr = I + II.$$

(I) : Quando $r \to 0$, $f(r)V(r) = \omega_n r^{n-bp}(\lambda + r^w)^{-q+1} \to 0$, pois $n - bp > 0$ e pelo Lema anterior vale: $V(r) \to \omega_n r^n$ (quando $r \to 0$). Recorde que pelo *Teorema da Comparação de Bishop*, $V(r) \leq \omega_x r^n$, logo $f(r)V(r) \leq \omega_n r^{n-bp}(\lambda + r^w)^{-q+1}$. Para $r \to \infty$,

$$\frac{r^{n-bp}}{(\lambda + r^w)^{q-1}} \to 0,\ \text{pois } n - bp - w(q-1) < 0.$$

Portanto, $(I) = 0$.
(II). Chame $y = f(r)$, logo $\mathrm{d}y = f'(r)\mathrm{d}r$. Note que $f(r)$ é uma função decrescente, de fato $f'(r) < 0$. Assim,

$$(II) = -\int_\infty^0 V(f^{-1}\{y\})\mathrm{d}y = \int_0^\infty V(y)\mathrm{d}y,$$

onde $V(y) = \mathrm{vol}\{x \mid \rho(x) < f^{-1}\{y\}\} = \mathrm{vol}\{x \mid f(\rho(x)) > y\}$.
Portanto,

$$\int_M \rho^{-bp}(\lambda + \rho^w)^{-q+1}\mathrm{d}V_g = \int_0^\infty \mathrm{vol}\{x \mid \mathrm{vol}\{x \mid \rho^{-bp}(\lambda + \rho^w)^{-q+1} > t\}\mathrm{d}t.$$

APÊNDICE C – RESULTADOS GERAIS DE TEORIA DA MEDIDA

Enunciaremos três importantes resultados sobre a passagem do limite sob o sinal da integral, cujas demonstrações podem ser vistas em [7], apêndice A.4. Seja $(M, \mathrm{d}\mu)$ um epaço de medida σ-finito.

Lema C.0.1 (Lema de Fatou)**.** *Se $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções não-negativas, então*

$$\int_M \liminf_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_M f_k \mathrm{d}\mu \,.$$

Teorema C.0.1 (Convergência Monótona)**.** *Se $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis não-negativas, e não-decrescentes, então*

$$\int_M \lim_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \mathrm{d}\mu \,.$$

Teorema C.0.2 (Convergência Dominada)**.** *Seja $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis satisfazendo as seguintes condições:*

- *existe uma função não-negativa integrável F tal que*

$$|f_k(x)| \leq F(x), \forall k \quad \textit{q.t.p}$$

- *o limite $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existe (q.t.p).*

Então vale

$$\int_M \lim_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \mathrm{d}\mu \,.$$

Para espaços de Lebesgue $L^p(M)$, $1 \leq p < \infty$, temos os seguintes fatos.

Teorema C.0.3 (Desigualdade de Hölder)**.** *Se p e q são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então para quaisquer funções mensuráveis f, g,*

$$\int_M |fg| \mathrm{d}\mu = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Proposição C.0.1. *Se $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções em $L^p(M)$ e $f_k \to f$ em $L^p(M)$, então existe uma subsequência $\{f_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{k_i} \to f$ q.t.p.*

Demonstração. Veja [40], capítulo 7. □

APÊNDICE D – LEMA DE LIONS

Provaremos aqui o Lema 5.5.3 do capítulo 5, conhecido como *Lema de Lions*. Para isso, iremos adaptar a demonstração do Lema de Lions em $\mathbb{R}^N$ feita em [41]. Para os dois próximos lemas, consulte [41] para ver uma prova.

Lema D.0.1. *Dado $r > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, existe uma cobertura enumerável de $\mathbb{R}^N$ por bolas bolas abertas de raio r tal que cada ponto de $\mathbb{R}^N$ está, no máximo, em 4^N bolas da cobertura. Em particular, como $\mathcal{C}$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^N$, então $\mathcal{C} \cong \mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^{N+1}$ e assim existe uma cobertura $(B_r(y) \cap \mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}^{N+1}$ com $y \in \mathcal{C}$ tal que cada ponto de $\mathcal{C}$ está no máximo em 4^N bolas desta cobertura.*

Na realidade, existe uma cobertura de $\mathbb{R}^N$ enumerável por bolas de raio r tal que cada ponto de $\mathbb{R}^N$ está, no máximo, em $N+1$ bolas da cobertura. Mas o lema anterior é suficiente para o que desejamos. Uma cobertura em $\mathbb{R}^N$ como a do lema anterior induz uma partição de $\mathbb{R}^N$, e em particular induz uma partição em $\mathcal{C}$. Vejamos o seguinte lema.

Lema D.0.2. *Seja $(B_r(x))_{x\in X}$ uma cobertura de $\mathbb{R}^N$ por bolas de raio r tal que cada ponto de $\mathbb{R}^N$ esteja, no máximo, em $K \in \mathbb{N}$ bolas. Então existe uma partição, de conjuntos abertos, enumerável $(P_z)_{z\in Z}$ de $\mathbb{R}^N$, tal que*

a) $P_z \cap B_r(x) = P_z$ ou $P_z \cap B_r(x) = \emptyset$ para todos $x \in X$ e $z \in Z$.

b) Para cada $z \in Z$, P_z está contido, no máximo, em K bolas da cobertura.

Em particular, por abuso de notação, (P_k) é uma partição de $\mathcal{C}$, satisfazendo (a) e (b).

Demonstração do lema de Lions 5.5.3. Sejam $y \in \mathcal{C}$, $q < s < 2^*$ e $u \in H^1(\mathcal{C})$. Pela desigualdade de Hölder,

$$\|u\|_{L^s(B_r(y)\cap\mathcal{C})} \leq \|u\|^{1-\lambda}_{L^q(B_r(y)\cap\mathcal{C})}\|u\|^{\lambda}_{L^{2^*}(B_r(y)\cap\mathcal{C})},$$

onde $\lambda \in (0,1)$ satisfaz

$$\frac{1}{s} = \frac{\lambda}{2^*} + \frac{1-\lambda}{q}, \quad \text{a saber } \lambda = \frac{2^*(s-q)}{s(2^*-q)}.$$

Pelo mergulho de Sobolev $H^1(B_r(y)\cap\mathcal{C}) \hookrightarrow L^{2^*}(B_r(y)\cap\mathcal{C})$, temos que

$$\|u\|_{L^s(B_r(y)\cap\mathcal{C})} \leq C\|u\|^{1-\lambda}_{L^q(B_r(y)\cap\mathcal{C})}\left[\int_{B_r(y)\cap\mathcal{C}} |\nabla u|^2 + \frac{(N-2-2a)^2}{4}|u|^2 \mathrm{d}\mu\right].$$

Escolhendo $s = \frac{2(2^*-q)}{2^*} + q$, temos que $s \in (q, 2^*)$, e assim $\lambda = \frac{2}{s}$. Logo,

$$\int_{B_r(y)\cap\mathcal{C}} |u|^s \mathrm{d}\mu \leq C_1\|u\|^{(1-\lambda)s}_{L^q(B_r(y)\cap\mathcal{C})}\int_{B_r(y)\cap\mathcal{C}}\left(|\nabla u|^2 + \frac{(N-2-2a)^2}{4}|u|^2\right)\mathrm{d}\mu\,. \tag{D.1}$$

Pelo lema (D.0.1), existe uma cobertura enumerável $(B_r(y_m)\cap\mathcal{C})_m$ de $\mathcal{C}$, com $y_m\in\mathcal{C}$, tal que cada ponto de $\mathcal{C}$ está no máximo em 4^{N+1} bolas da cobertura. Usando o lema (D.0.2), tome partição $(P_k\cap\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ tal que

a) $P_k\cap B_r(y_m)=P_k$ ou $P_k\cap B_r(y_m)=\emptyset$ para todos $m,k\in\mathbb{N}$;

b) para cada $k\in\mathbb{N}$, P_k está contido, no máximo, em 4^{N+1} bolas da cobertura.

Logo, de (D.1) se segue

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}}|u|^s\mathrm{d}\mu &\leq \sum_{m=1}^{\infty}\int_{B_r(y_m)\cap\mathcal{C}}|u|^s\mathrm{d}\mu\\
&\leq C_1\left(\sup_{y\in\mathcal{C}}\|u\|^{(1-\lambda)s}_{L^q(B_r(y)\cap\mathcal{C})}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\int_{B_r(y_m)\cap\mathcal{C}}\left(|\nabla u|^2+\frac{(N-2-2a)^2}{4}|u|^2\right)\mathrm{d}\mu\\
&= C_1\left(\sup_{y\in\mathcal{C}}\|u\|^{(1-\lambda)s}_{L^q(B_r(y)\cap\mathcal{C})}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_r(y)\cap P_k\cap\mathcal{C}}\left(|\nabla u|^2+\frac{(N-2-2a)^2}{4}|u|^2\right)\mathrm{d}\mu\\
&= C_1\left(\sup_{y\in\mathcal{C}}\|u\|^{(1-\lambda)s}_{L^q(B_r(y)\cap\mathcal{C})}\right)\sum_{k=1}^{\infty}4^{N+1}\int_{P_k\cap\mathcal{C}}\left(|\nabla u|^2+\frac{(N-2-2a)^2}{4}|u|^2\right)\mathrm{d}\mu\\
&= 4^{N+1}C_1\left(\sup_{y\in\mathcal{C}}\|u\|^{(1-\lambda)s}_{L^q(B_r(y)\cap\mathcal{C})}\right)\int_{\mathcal{C}}\left(|\nabla u|^2+\frac{(N-2-2a)^2}{4}|u|^2\right)\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathcal{C}}|u|^s\mathrm{d}\mu\leq 4^{N+1}C_1\left(\sup_{y\in\mathcal{C}}\|u\|^{(1-\lambda)s}_{L^q(B_r(y)\cap\mathcal{C})}\right)\|u\|^2_{H^1}.$$

Agora, usaremos as hipóteses do Lema de Lions 5.5.3. Seja $\{w_n\}\subset H^1(\mathcal{C})$ uma sequência limitada e satisfazendo

$$\sup_{y\in\mathcal{C}}\|w_n\|_{L^q(B_r(y)\cap\mathcal{C})}\to\infty\quad\text{quando }\ n\to\infty.$$

Logo,

$$\int_{\mathcal{C}}|w_n|^s\mathrm{d}\mu\to 0,\quad\text{isto é, } w_n\to 0 \text{ em } L^s(\mathcal{C}).$$

Queremos mostrar que para todo $p\in(2,2^*)$, $w_n\to 0$ em $L^p(\mathcal{C})$. Consideremos dois casos: $p\in(2,s)$ e $p\in(s,2^*)$.

Suponhamos $p\in(2,s)$. O caso $p\in(s,2^*)$ é tratado de modo análogo. Pela desigualdade de Hölder e mergulho de Sobolev novamente, tem-se

$$\begin{aligned}
\|w_n\|_{L^p} &\leq \|w_n\|^{1-\lambda}_{L^2}\|w_n\|^{\lambda}_{L^s}\\
&\leq (C_2\|w_n\|_{H^1})^{1-\lambda}\|w_n\|^{\lambda}_{L^s}\leq C\|w_n\|^{\lambda}_{L^s},
\end{aligned}$$

onde $\lambda=\frac{s(p-2)}{p(s-2)}$. Logo, $w_n\to 0$ em $L^p(\mathcal{C})$ para $2<p<s$, o que finaliza a prova. □