



Pós-Graduação em Ciência da Computação

Lucas Rodolfo Celestino de Farias

**Algoritmo Evolucionário para Muitos Objetivos Baseado em Decomposição Com
Divisão do Espaço Objetivo e Atualização de Pesos Quando Requerida**



Universidade Federal de Pernambuco
posgraduacao@cin.ufpe.br
<http://cin.ufpe.br/~posgraduacao>

Recife
2019

Lucas Rodolfo Celestino de Farias

**Algoritmo Evolucionário para Muitos Objetivos Baseado em Decomposição Com
Divisão do Espaço Objetivo e Atualização de Pesos Quando Requerida**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Ciência da Computação do Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação.

Área de Concentração: Inteligência Computacional

Orientador: Prof. Dr. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo

Recife
2019

Catálogo na fonte
Bibliotecária Mariana de Souza Alves CRB4-2105

F224a	Farias, Lucas Rodolfo Celestino de Algoritmo evolucionário para muitos objetivos baseado em decomposição com divisão do espaço objetivo e atualização de pesos quando requerida/ Lucas Rodolfo Celestino de Farias – 2019. 90 f., fig.; tab. Orientador: Aluizio Fausto Ribeiro Araújo. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CIn, Ciência da Computação. Recife, 2019. Inclui referências e apêndices. 1. Inteligência Computacional. 2. Otimização. 3. Computação Evolucionária. 4. Decomposição. I. Araújo, Aluizio Fausto Ribeiro (orientador). II. Título. 006.31 CDD (22. ed.) UFPE-CCEN 2020-05
-------	---

Lucas Rodolfo Celestino de Farias

“Algoritmo Evolucionário para Muitos Objetivos Baseado em Decomposição Com Divisão do Espaço Objetivo e Atualização de Pesos Quando Requerida”

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Aprovado em: 08 de agosto de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo
Centro de Informática / UFPE
(Orientador)

Prof. Dr. Frederico Gadelha Guimarães
Departamento de Engenharia Elétrica/UFMG

Prof. Dr. Carmelo José Albanez Bastos Filho
Escola Politécnica/UPE

Dedico este trabalho a minha família, especialmente aos meus pais Egenilton e Nadja, aos meus amigos, a todos os professores que passaram na minha vida e dividiram um pouco de seus conhecimentos comigo, e não menos importante: a ciência, pois tudo isso ocorre devido ao desejo de contribuir cada vez mais para seu avanço.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades. A meu orientador Aluizio, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos. Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional. Aos meus professores e aos meus colegas do meio acadêmico e profissional que nunca mediram esforços para prestar ajuda, a fim de que eu pudesse chegar até aqui. E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

RESUMO

Ao lidar com algoritmos evolucionários baseados em decomposição, um conjunto apropriado de pesos pode melhorar a qualidade da solução final. Um conjunto de pesos uniformemente distribuídos geralmente leva a soluções bem distribuídas em uma frente de Pareto. No entanto, existem duas dificuldades principais nesta abordagem. Em primeiro lugar, pode falhar dependendo da geometria do problema. Em segundo lugar, o tamanho da população não é flexível quando se lida com problemas de muitos objetivos. Nesta dissertação, é proposto o MOEA/D com Atualização de pesos quando Requerida (MOEA/D-UR) que lida com essas limitações usando método de geração de pesos aleatoriamente uniforme, adaptação de pesos baseada na dispersão populacional e uma métrica de melhoria para determinar quando ajustar pesos acompanhada por uma abordagem de divisão do espaço objetivo para aumentar a diversidade. Resultados experimentais usando problemas de mundo real e as classes de problemas WFG1-WFG9, DTLZ1-DTLZ7 e IDTLZ1-2 com 3, 5, 8, 10 e 15 objetivos, mostram que a proposta é competitiva quando comparada com os métodos de ponta da literatura.

Palavras-chaves: Inteligência Computacional. Otimização. Computação Evolucionária. Decomposição.

ABSTRACT

In dealing with evolutionary algorithms based on decomposition, an appropriate set of weights can improve the quality of the final solution. A uniformly distributed set of weights generally leads to well-distributed solutions on a Pareto front. However, there are two major difficulties in this approach. Firstly, it may fail depending on the geometry of the problem. Secondly, population size is not flexible when dealing with many goal problems. In this dissertation, we propose the MOEA/D with Update when Required (MOEA/D-UR) that deals with these limitations using a uniform randomly weights generation method, weight adaptation based on population sparsity and an improvement metric to determine when to adjust weights accompanied by a division approach of objective space to increase diversity. Experimental results using real-world problems and the problem classes WFG1-WFG9, DTLZ1-DTLZ7 and IDTLZ1-2 with 3, 5, 8, 10 and 15 objectives show that the proposal is competitive when compared to the literature.

Keywords: Computational Intelligence. Optimization. Evolutionary Computation. Decomposition.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Fluxograma de execução do MOEA/D (ZHANG; LI, 2007).	24
Figura 2 – Ilustração da abordagem PBI.	26
Figura 3 – Visão geral das modificações no design do MOEA/D	27
Figura 4 – Exemplo do método de geração de vetores de peso de duas camadas, com $H_1 = 2$ para a camada limite e $H_2 = 1$ para a camada interna	29
Figura 5 – Exemplo de conjuntos de vetores de pesos gerados pelo modelo MOEA/D. N é o tamanho da população e m é o número dos objetivos.	37
Figura 6 – Exemplo de conjuntos de vetores de pesos gerados pela abordagem UR. N é o tamanho da população e m é o número dos objetivos.	38
Figura 7 – Soluções finais obtidas pelo MOEA/D usando abordagem DD no problema DTLZ1. N é o tamanho da população e m é o número dos objetivos.	38
Figura 8 – Soluções finais obtidas pelo MOEA/D usando abordagem DD no problema DTLZ7. N é o tamanho da população e m é o número dos objetivos.	39
Figura 9 – Distribuição de soluções obtidas pelo MOEA/D-URAW para problemas regulares e irregulares, com 2 e 3 objetivos.	41
Figura 10 – Distribuição final dos vetores de peso do MOEA/D-URAW no problema DTLZ7, com 2 e 3 objetivos.	41
Figura 11 – Limitação do MOEA/D-GR em PFs Desconectadas.	42
Figura 12 – Fluxograma do MOEA/D-UR.	44
Figura 13 – Uma ilustração da atualização da população externa.	46
Figura 14 – Ilustração da adaptação baseada em esparsidade.	47
Figura 15 – Exemplo da abordagem de divisão do espaço com dois objetivos.	49
Figura 16 – Resultado obtido pela LHS de 500 configurações paramétricas.	56
Figura 17 – Distribuição de soluções obtidas pelo melhor HV e melhor IGD no problema WFG5 de 3 objetivos	60
Figura 18 – PF mediana dos resultados de HV dos MaOEAs no MOTSP com 5 objetivos.	62
Figura 19 – PF mediana dos resultados de HV dos MaOEAs no MOKP com 5 objetivos.	63
Figura 20 – PF mediana dos resultados de HV dos MaOEAs no problema de mundo-real WRP. É apresentado o HV normalizado obtido em cada objetivo.	64
Figura 21 – Conceituação do sistema de drenagem de águas pluviais de uma sub-bacia.	80

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1	– Estrutura Geral do MOEA/D	25
Algoritmo 2	– MOEA/D (LI; ZHANG, 2009)	36
Algoritmo 3	– MOEA/D-UR	51
Algoritmo 4	– Atualização da EP	52
Algoritmo 5	– Adaptação dos Pesos	52
Algoritmo 6	– Divisão do Espaço Objetivo	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Intervalo paramétrico para MOEA/D-UR.	55
Tabela 2 – Configurações do número de objetivos (m), variáveis de decisão (d) e avaliações de aptidão máxima (FE) para cada problema.	57
Tabela 3 – A referência, complexidade computacional e configuração paramétrica dos onze algoritmos selecionados. N é o tamanho da população e m é o número dos objetivos.	58
Tabela 4 – HV obtido em PF Regulares. Resultados destacados indicam melhor média.	65
Tabela 5 – HV obtido em PF Irregulares. Resultados destacados indicam melhor média.	66
Tabela 6 – IGD obtido em PF Regulares. Resultados destacados indicam melhor média.	67
Tabela 7 – IGD obtido em PF Irregulares. Resultados destacados indicam melhor média.	68
Tabela 8 – HV obtido em problemas de mundo-real. Melhores médias destacadas. . . .	69
Tabela 9 – Desvio padrão referente a Tabela 4.	86
Tabela 10 – Desvio padrão referente a Tabela 5.	87
Tabela 11 – Desvio padrão referente a Tabela 6.	88
Tabela 12 – Desvio padrão referente a Tabela 7.	89
Tabela 13 – Desvio padrão referente a Tabela 8.	90

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

θ-DEA	<i>θ-Dominance based Evolutionary Algorithm</i>
ACO	<i>Ant Colony Optimization</i>
APD	<i>Angle Penalized Distance</i>
APS	<i>Adaptive Penalty Scheme</i>
AWA	<i>Adaptive Weight Adjustment</i>
CMA-ES	<i>Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy</i>
DD	<i>Das and Dennis</i>
DE	<i>Differential Evolution</i>
EA	<i>Evolutionary Algorithm</i>
EP	<i>External Population</i>
FE	<i>Fitness Evaluation</i>
GD	<i>Generational Distance</i>
GR	<i>Global Replacement</i>
HV	<i>Hypervolume</i>
IBEA	<i>Indicator-based Evolutionary Algorithm</i>
IGD	<i>Inverse Generational Distance</i>
IM	<i>Improvement Metric</i>
IPBI	<i>inverted Penalty-Based Boundary Intersection</i>
KnEA	<i>Knee point-driven Evolutionary Algorithm</i>
LHS	<i>Latin Hypercube Sample</i>
MaOEA	<i>Many-Objective Evolutionary Algorithm</i>
MaOP	<i>Many-Objective Optimization Problem</i>
MOEA	<i>Multiobjective Evolutionary Algorithm</i>
MOEA/AD	<i>MOEA based on Adversarial Decomposition</i>
MOEA/D	<i>Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition</i>
MOEA/D-GR	<i>MOEA/D with Global Replacement</i>
MOEA/D-CMA	<i>MOEA/D with CMA-ES</i>
MOEA/D-ACO	<i>MOEA/D with Ant Colony Optimization</i>

MOEA/D-DE	<i>MOEA/D with Differential Evolution</i>
MOEA/D-GRA	<i>MOEA/D with Generalized Resources Allocation</i>
MOEA/D-MR	<i>MOEA/D with Multiple Reference points</i>
MOEA/D-AWA	<i>MOEA/D with Adaptive Weight Adjustment</i>
MOEA/DD	<i>MOEA based on Dominance and Decomposition</i>
MOEA/D-DRA	<i>MOEA/D with Dynamical Resource Allocation</i>
MOEA/D-UR	<i>Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition with Update when Required</i>
MOEA/D-URAW	<i>Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition with Uniform Randomly Adaptive Weights</i>
MOEA/D-M2M	<i>Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition MOP to MOP</i>
MOKP	<i>Mutliobjective Knapsack Problem</i>
MOP	<i>Multiobjective Optimization Problem</i>
MOTSP	<i>Multiobjective Traveling Salesman Problem</i>
NS	<i>Neighborhood Size</i>
NSGA-II-DE	<i>Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II with Differential Evolution</i>
NSGA-III	<i>Non-dominated Sorting Genetic Algorithm III</i>
NSGA-II	<i>Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II</i>
NUS	<i>Number of Updated Subproblems</i>
OFRA	<i>OFfline Resource Allocation</i>
ONRA	<i>ON-line Resource Allocation</i>
paλ-MOEA/D	<i>MOEA/D with Pareto-Adaptive Weight vectors</i>
PBI	<i>Penalty-Based Boundary Intersection</i>
PF	<i>Pareto front</i>
PoI	<i>Probability of Improvement</i>
PS	<i>Pareto Set</i>
RVEA	<i>Reference Vector guided Evolutionary Algorithm</i>
SBX	<i>Simulated Binary Crossover</i>
SDE	<i>Shift-based Density Estimation</i>
SL	<i>Sparsity Level</i>
SPEA2	<i>Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2</i>

SPEA2+SDE	<i>Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2 with Shift-based Density Estimation</i>
SPS	<i>Subproblems penalty Scheme</i>
TCH	<i>Tchebycheff</i>
TP	<i>Two Phases</i>
Two_Arch2	<i>Two-Archive algorithm 2</i>
UR	<i>Uniform Random</i>
WRP	<i>Water Resource Planning</i>
WS	<i>Weighted Sum</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

δ	delta: parâmetro que determina a probabilidade de selecionar indivíduos da vizinhança ou de toda a população na etapa de reprodução
ρ	rho: parâmetro que define o limiar de mudança significativa na população
λ	lambda: conjunto de vetores de peso ou subproblemas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	MOTIVAÇÃO	18
1.2	APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA E OBJETIVO GERAL	19
1.3	CONTRIBUIÇÕES	20
1.4	BREVE RELATO DOS EXPERIMENTOS	20
1.5	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO	21
2	FUNDAMENTAÇÃO	22
2.1	CONCEITOS BÁSICOS	22
2.2	MULTIOBJECTIVE EVOLUTIONARY ALGORITHM BASED ON DECOM- POSITION (MOEA/D)	23
2.2.1	Estrutura do MOEA/D	23
2.2.2	Métodos de Decomposição	25
2.3	HISTÓRICO DAS MELHORIAS DO MOEA/D	27
2.3.1	Vetores de Peso	27
2.3.2	Abordagens de Decomposição	30
2.3.3	Alocação Dinâmica de Recursos	32
2.3.4	Operadores de Reprodução	34
2.3.5	Seleção e Mecanismos de Substituição	35
2.4	PERSPECTIVAS DE FUTURAS MELHORIAS	36
2.5	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	37
3	MOEA/D COM ATUALIZAÇÃO QUANDO REQUERIDA	43
3.1	GERAÇÃO DOS SUBPROBLEMAS	44
3.2	FUNÇÃO DE NÍVEL DE ESPARSIDADE	45
3.3	ATUALIZAÇÃO DA POPULAÇÃO EXTERNA	46
3.4	ADAPTAÇÃO DOS SUBPROBLEMAS	46
3.5	ADAPTAÇÃO QUANDO REQUERIDA	47
3.6	ABORDAGEM DE DIVISÃO DO ESPAÇO OBJETIVO	47
3.7	PSEUDO-CÓDIGOS	48
3.8	COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL	49
3.9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
4	VALIDAÇÃO DO MODELO	54
4.1	CONFIGURAÇÃO EXPERIMENTAL	54
4.2	AJUSTE PARAMÉTRICO	54

4.3	CONFIGURAÇÃO PARAMÉTRICA	56
4.4	MÉTRICAS DE DESEMPENHO	58
4.5	VALIDAÇÃO E COMPARAÇÕES	58
4.6	EMPREGO PARA PROBLEMAS REAIS	60
5	CONCLUSÃO	70
5.1	SUMÁRIO DO TRABALHO	70
5.2	PRINCIPAIS CONQUISTAS E LIMITAÇÕES DO MOEA/D-UR	71
5.3	TRABALHOS FUTUROS	72
	REFERÊNCIAS	73
	APÊNDICE A – APLICAÇÕES DE MUNDO-REAL	79
	APÊNDICE B – OS 10 MAOEA INVESTIGADOS	82
	APÊNDICE C – DESVIO-PADRÃO DAS TABELAS 4-8	85

1 INTRODUÇÃO

Otimização é o processo de determinação, utilizando métodos computacionais, da solução mais eficaz sob um determinado ponto de vista em um conjunto de possíveis soluções para um problema. Em problemas de otimização com dois ou mais objetivos que são conflitantes muito frequentemente é preciso identificar um conjunto de soluções ótimas. Por exemplo, um indivíduo gostaria de encontrar o conjunto ótimo de carreiras que maximizam a chance de ser saudável e rico enquanto continua tendo diversão e tempo para a família e amigos. Um engenheiro de software está interessado em encontrar o conjunto ótimo de pacotes de teste que minimizam o preço e maximizam a cobertura total (por exemplo, cobertura de declaração, cobertura de agência e cobertura de decisão). Ao prescrever a radioterapia a um paciente com câncer, o médico deseja ter acesso a um conjunto ótimo de tratamentos para o ataque ao tumor, o impacto potencial em órgãos saudáveis e o estado geral do paciente. Nestes casos temos um *Multiobjective Optimization Problem* (MOP) (KALYANMOY, 2001).

Nos MOPs, devido à natureza conflitante dos objetivos, normalmente não há uma solução ótima única, mas sim um conjunto de soluções de compromisso entre os objetivos, conhecidas como soluções ótimas de Pareto. Essas soluções são ótimas no sentido de que não há outras soluções no espaço de busca que sejam superiores para todos os objetivos considerados (TRIVEDI et al., 2017).

Evolutionary Algorithm (EA) é uma classe de métodos úteis para otimização estocástica que simulam o processo de evolução natural. *Multiobjective Evolutionary Algorithm* (MOEA) tem sido reconhecido como sendo adequado para os MOPs (COELLO et al., 2007) devido às suas características (TRIVEDI et al., 2017) de:

1. Baixa demanda de conhecimento das propriedades do problema;
2. Capacidade de lidar com espaços de busca grandes e altamente complexos;
3. Propriedades baseadas na população que buscam um conjunto de soluções durante cada única execução do algoritmo, cada solução representando um *trade-off* entre os objetivos.

Como uma subcategoria de MOPs, *Many-Objective Optimization Problem* (MaOP) refere-se a um problema de otimização com quatro ou mais objetivos. Durante a última década, MaOPs vêm ganhando crescente atenção na comunidade de computação evolucionária (LI et al., 2018), fortalecida por uma ampla variedade de aplicações do mundo real (LI et al., 2015a). Li et al. (2015a) destaca as seguintes aplicações: problema de gerenciamento de recursos hídricos com 5 objetivos (MUSSELMAN; TALAVAGE, 1980), problema de projeto de aeronaves de aviação geral com 10 objetivos (SIMPSON et al., 1996), problema de projeto da forma da onda de radar com 9 objetivos (HUGHES, 2007), problema de projeto de trajetória espacial com 6 objetivos (JAIMES;

OYAMA; FUJII, 2013), problema da mochila 0/1 com muitos objetivos (ZITZLER; THIELE, 1999) e problema do viajante com muitos objetivos (CORNE; KNOWLES, 2007).

É importante salientar que há diferenças entre otimização de muitos objetivos e otimização de dois ou três, múltiplos, objetivos. As distinções acarretam desafios atuais muitos dos quais decorrentes das limitações de comportamento que os MOEAs apresentam ao lidar com MaOPs. Nesta dissertação, é apresentada uma abordagem com foco de lidar com limitações de um modelo MOEA para lidar com MaOPs.

Neste capítulo, apresenta-se inicialmente a motivação e o problema que levaram ao desenvolvimento desta pesquisa. Em seguida, as principais contribuições deste trabalho e um breve relato dos experimentos. Conclui-se o capítulo, apresentando a estrutura geral desta dissertação.

1.1 MOTIVAÇÃO

O objetivo final da otimização multiobjetivo é obter um conjunto de soluções não-dominadas com boa convergência e bem distribuídas para aproximar a frente de Pareto, do inglês *Pareto front* (PF). Para alcançar este objetivo, numerosos MOEAs foram propostos ao longo das últimas décadas. De acordo com seus mecanismos de seleção, os MOEAs podem ser classificados em três categorias principais: métodos baseados em Pareto, métodos baseados em indicadores e métodos baseados em decomposição (ZHOU et al., 2011). Os MOEAs mostraram um grande potencial para resolver os MOPs com dois ou três objetivos. No entanto, para os MOPs com mais de três objetivos, geralmente conhecidos como MaOPs, eles encontram dificuldades substanciais (ISHIBUCHI et al., 2011; ISHIBUCHI; AKEDO; NOJIMA, 2014).

No contexto de MOEAs, para métodos baseados em Pareto, como *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II) (DEB et al., 2002a) e *Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2* (SPEA2) (ZITZLER; LAUMANN; THIELE, 2001), os critérios de seleção (isto é, a seleção baseada em Pareto e a seleção baseada em diversidade) podem perder sua eficácia para direcionar a população em direção à PF. Isto ocorre porque a quantidade de soluções não-dominadas aumenta drasticamente com o aumento do número de objetivos. Como resultado, a seleção que seja baseada em Pareto (primária) não consegue determinar diferenças entre os indivíduos na população. Sob essa condição, a seleção baseada em diversidade (secundária) terá um papel importante no processo de seleção. A seleção secundária pode tornar a população bem distribuída sobre o espaço objetivo; no entanto, a população tende a se afastar da PF desejada devido à negligência da aptidão dos indivíduos da população (TRIVEDI et al., 2017).

Com relação aos métodos baseados em indicadores (BADER; ZITZLER, 2011) e em decomposição (ZHANG; LI, 2007; ZHANG et al., 2008), eles não sofrem com as questões de pressão de seleção, uma vez que não dependem da dominância de Pareto para evoluir a população. No entanto, eles enfrentam seus próprios desafios.

Nos métodos baseados em indicadores, os MOEAs usam um indicador como função de avaliação. O *Indicator-based Evolutionary Algorithm* (IBEA) (ZITZLER; KÜNZLI, 2004) é o primeiro MOEA baseado em indicadores. Embora tenha um bom desempenho em termos de

convergência em MaOPs, possui baixa diversidade devido à falta de manutenção da diversidade em seu indicador. Portanto, alguns pesquisadores enfocam MOEAs baseados em *Hypervolume* (HV) (BADER; ZITZLER, 2011; BADER; ZITZLER, 2010) para MaOPs, porque o HV é uma métrica para avaliar a convergência e a diversidade (ZITZLER; THIELE, 1999). Entretanto, a literatura sugere que eles se caracterizam por alta complexidade de tempo computacional (WAGNER; NEUMANN, 2013).

Os métodos baseados em decomposição, utilizam vetores de peso, também conhecidos como subproblemas, para selecionar soluções no espaço objetivo. O conjunto final de soluções depende da maneira como esses vetores de peso estão distribuídos. Assim, métodos baseados em decomposição têm o desafio de lidar com a complexidade de se atribuir estes vetores de peso no espaço objetivo de alta dimensão (ISHIBUCHI et al., 2017; WANG; JIAO; YAO, 2014).

Desde o início dos anos 90, os MOEAs demonstraram sua eficácia na solução de vários problemas de otimização com dois ou três objetivos. No entanto, na prática, não é incomum enfrentar um problema de otimização com quatro ou mais objetivos (LI et al., 2015a). Assim, parece ser implicação direta que lidar com MaOPs seja um tópico pujante de pesquisas na área da computação evolucionária nos últimos anos e que ainda possui itens a serem explorados (MANE; RAO, 2017). Dentre as três abordagens da literatura: Pareto, indicadores e decomposição; esta dissertação, adota a trilha de estender MOEAs baseados decomposição para problemas envolvendo muitos objetivos, devido a estes não necessitarem usar a seleção baseada em dominância e não possuírem alto custo computacional.

1.2 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA E OBJETIVO GERAL

O Algoritmo Evolucionário Multiobjetivo baseado em Decomposição, do inglês *Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition* (MOEA/D) (ZHANG; LI, 2007) usa a abordagem Das e Dennis (DAS; DENNIS, 1998), conhecida como o método de projeto *simplex-lattice*, para gerar vetores de peso uniformemente distribuídos. Neste método, o tamanho da população cresce drasticamente à medida que o número de objetivos aumenta. Outro método de geração de vetores de peso amplamente empregado em variantes do MOEA/D (ZHANG; LIU; LI, 2009; FARIAS et al., 2018) é baseado em um paradigma de amostragem aleatória uniforme (JASZKIEWICZ, 2002). A vantagem do último sobre o antigo método de amostragem é a configuração flexível do tamanho da população, ou seja, definir a quantidade de vetores de peso, torna-se uma tarefa independente do número de objetivos do problema.

Um conjunto de pesos uniformemente distribuídos geralmente leva a soluções bem distribuídas em uma PF. No entanto, este conjunto de pesos pode falhar dependendo da geometria do problema. Ao lidar com uma PF mais complexa (por exemplo, desconectada, degenerada, mal dimensionada ou invertida), o conjunto de soluções final pode apresentar resultados opostos às expectativas iniciais (ISHIBUCHI et al., 2017). Para lidar com tais limitações, vários estudos na literatura adaptam os vetores de peso ao MOP atual. Por exemplo, em (LI; LANDA-SILVA, 2011) os autores ajustaram periodicamente cada peso para aumentar a distância de suas soluções cor-

respondentes a outras. Gu, Liu e Tan (2012) usaram a interpolação equidistante para atualizar periodicamente os vetores de peso na frente estimada de Pareto. Liu et al. (LIU et al., 2016; LIU et al., 2018) propuseram uma atualização de pesos adaptativa no *Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition MOP to MOP* (MOEA/D-M2M) para PF degeneradas de acordo com o ângulo entre as soluções na população. Farias et al. (2018) propuseram um método chamado *Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition with Uniform Randomly Adaptive Weights* (MOEA/D-URAW) que combina o paradigma de amostragem aleatória uniforme com a adaptação de vetores de peso baseado no nível de dispersão da população. Embora existam várias abordagens para adaptação dos vetores de peso na literatura, não há consenso quanto ao momento de adaptação, uma vez que a frequência é pré-definida (FARIAS et al., 2018).

Com isso em mente, o objetivo da presente dissertação é propor um modelo da família MOEA/D, que permita adaptar os vetores de peso durante sua execução para diminuir sua convergência para ótimos locais. Para atingir este objetivo, é definido as seguintes metas:

- Levantar as modificações e limitações propostas no arcabouço do MOEA/D;
- Propor modelo que gere subproblemas em quantia flexível e os adapte quando requerido;
- Validar o modelo proposto no contexto de MaOPs, simulados e mundo-real.

1.3 CONTRIBUIÇÕES

Nesta dissertação, o modelo proposto baseado em decomposição, denominado *Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition with Update when Required* (MOEA/D-UR), que melhora a abordagem proposta no início deste mestrado, o MOEA/D-URAW (FARIAS et al., 2018). Estas abordagens combinam o paradigma de amostragem aleatória uniforme com a adaptação de vetores de peso baseados no nível de esparsidade da população. Permitindo definir a quantidade de soluções na população independente do número de objetivos, sem prejuízo na convergência das soluções devido ao uso da adaptação dos vetores de peso. Além dessas, o MOEA/D-UR têm as seguintes contribuições: proposição de uma métrica para determinar quando os vetores de peso apresentam sinais de convergência para realizar a adaptação e uma abordagem de divisão do espaço objetivo para aumentar a diversidade.

1.4 BREVE RELATO DOS EXPERIMENTOS

A validação do método proposto é conduzido através de experimentos usando os problemas de mundo real Vendedor Viajante Multiobjetivo, do inglês *Multiobjective Traveling Salesman Problem* (MOTSP) (CORNE; KNOWLES, 2007), Mochila Multiobjetivo, do inglês *Multiobjective Knapsack Problem* (MOKP) (ZITZLER; THIELE, 1999) e Planejamento de Recursos Hídricos, do inglês *Water Resource Planning* (WRP) (MUSSELMAN; TALAVAGE, 1980) e as classes de

problemas WFG1-WFG9 (HUBAND et al., 2006), DTLZ1-DTLZ7 (DEB et al., 2005) e IDTLZ1-2 (JAIN; DEB, 2013) com 3, 5, 8, 10 e 15 objetivos, os resultados sob as perspectivas das métricas de *Inverse Generational Distance* (IGD) e HV indicam que a proposta é competitiva quando comparada com 10 *Many-Objective Evolutionary Algorithm* (MaOEA) estado-da-arte.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

A presente dissertação está organizada como se segue: no Capítulo 2 estão fundamentos sobre MOEA/D e alguns outros algoritmos provenientes deste. No Capítulo 3 é apresentado o algoritmo proposto MOEA/D-UR. O Capítulo 4 realiza a validação do modelo proposto, a partir de problemas simulados e reais da literatura. Por último, no Capítulo 5 podem ser vistas as conclusões obtidas a partir do estudo realizado, bem como a projeção para realização de trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO

A ideia de algoritmos evolucionários baseados em decomposição se tornou popular com a proposição do MOEA/D feita por Zhang e Li (2007). O MOEA/D emprega funções de decomposição para converter o MOP em subproblemas de otimização com objetivo único. Assim, a estrutura do MOEA/D se caracteriza por: selecionar soluções através de um valor agregado de aptidão, possuir uma relação de vizinhança definida entre os subproblemas com base na distância entre seus vetores de peso e implementar a substituição local de maneira estável.

Neste capítulo, a Seção 2.1 apresenta conceitos básicos em otimização multiobjetivo que são seguidos pela descrição da estrutura do MOEA/D original, na Seção 2.2. Na sequência, a revisão de literatura de cada linha de pesquisa é apresentada na Seção 2.3. A Seção 2.4 destaca perspectivas de futuras melhorias nos modelos baseados em decomposição. Finalmente, na Seção 2.5, há a definição do problema central tratado nesta dissertação.

2.1 CONCEITOS BÁSICOS

Em geral, um **problema de otimização multiobjetivo** é caracterizado pela existência de dois ou mais objetivos potencialmente conflitantes para serem otimizados simultaneamente. Um MOP pode ser formulado da seguinte maneira (KALYANMOY, 2001):

$$\begin{aligned} \text{minimize } \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}) \dots f_m(\mathbf{x}))^T, \\ \text{sujeito a } \mathbf{x} &\in \Omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{x}=(x_1 \dots x_n)^T$ é um vetor de decisão n -dimensional no espaço $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é um vetor objetivo m -dimensional no espaço objetivo $\mathbb{R}^m$. $\Omega \in \mathbb{R}^n$ determina a região viável das variáveis de decisão. Um problema de otimização com mais de três objetivos é conhecido como um problema de otimização de muitos objetivos.

Dominância de Pareto: Para duas variáveis de decisão $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$ é dito que domina $\mathbf{y}$ (denotado como $\mathbf{x} < \mathbf{y}$), se e somente se

$$\begin{aligned} \forall i \in (1 \ 2 \dots m) : f_i(\mathbf{x}) &\leq f_i(\mathbf{y}) \\ \exists j \in (1 \ 2 \dots m) : f_j(\mathbf{x}) &< f_j(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

portanto, uma solução é sempre preferível a outra solução se a primeira domina a segunda. Por conseguinte, as soluções que não são dominadas por qualquer outra solução são rotuladas como Pareto-ótima. As soluções ótimas de Pareto são caracterizadas pelo fato de que melhorar em qualquer objetivo significa piorar ao menos um outro objetivo. O conjunto de soluções ótimas de Pareto no espaço de decisão é denotado como o conjunto de Pareto, e o conjunto correspondente de vetores objetivos é denotado como a frente de Pareto. Os conceitos formais vêm a seguir.

Otimidade de Pareto: Uma solução $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é considerada Pareto-ótima se, e somente se, $\nexists \mathbf{y} \in \Omega, \mathbf{y} < \mathbf{x}$.

Conjunto de Pareto, do inglês *Pareto Set* (PS), é definido como o conjunto de todas as soluções Pareto-ótimas, ou seja, $PS = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \nexists \mathbf{y} \in \Omega, \mathbf{y} < \mathbf{x}\}$.

A **frente de Pareto** é definida como o conjunto de todos os vetores objetivos correspondentes às soluções no PS, a saber: $PF = \{(f_1(\mathbf{x}) \dots f_m(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in PS\}$.

Note que o tamanho das soluções Pareto-ótimas pode ser infinito e muitas vezes é inviável obter toda a frente de Pareto. Na prática, deseja-se obter uma aproximação da frente de Pareto que contenha tanta informação quanto possível da frente de Pareto, então o tomador de decisão pode escolher um componente da aproximação como a solução final, ou usar esta informação para especificar preferências que ajudam a procurar e encontrar uma solução satisfeita.

2.2 MULTIOBJECTIVE EVOLUTIONARY ALGORITHM BASED ON DECOMPOSITION (MOEA/D)

MOEA/D (ZHANG; LI, 2007) é um dos algoritmos mais populares entre os MOEA baseados em decomposição. Ele decompõe o MOP em vários problemas de otimização de objetivo único usando um conjunto de vetores de peso ou subproblemas. Esta seção inicialmente apresenta a estrutura do MOEA/D, seguido da Seção 2.2.2 que apresenta as 3 abordagens de decomposição utilizadas no MOEA/D original, isto é, Soma Ponderada, do inglês *Weighted Sum* (WS), *Tchebycheff* (TCH) e Interseção de Limites com base em Penalidade, do inglês *Penalty-Based Boundary Intersection* (PBI).

2.2.1 Estrutura do MOEA/D

Seja λ um vetor de peso ou subproblema, onde $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_m)^T$, $\sum_i^m \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, para todo $i \in 1, \dots, m$, e m é o número de objetivos.

O bem conhecido MOEA/D (ZHANG; LI, 2007) decompõe o MOP em N subproblemas de otimização escalar de objetivo único. Cada subproblema i está associado a um vetor de peso λ^i e o conjunto de todos os vetores de peso é $\{\lambda^1 \dots \lambda^N\}$.

As relações de vizinhança entre esses subproblemas são definidas com base na distância euclidiana entre eles. No MOEA/D, uma vizinhança do vetor de peso λ^i é definida como um conjunto de seus vários vetores de peso mais próximos em $\{\lambda^1 \dots \lambda^N\}$. A vizinhança para cada subproblema i , é denotada como $B(i) = \{i_1 \dots i_T\}$, onde T é o tamanho da vizinhança. Qualquer informação (soluções) do problema dos T vetores de peso próximos de λ^i deve ser útil para melhorar o resultado da decomposição $g(\mathbf{x} | \lambda^i)$, onde $\mathbf{x}$ é a solução associada ao subproblema λ^i . Esta é a principal motivação por trás do MOEA/D (ZHANG; LI, 2007).

$B(i)$ é usado para a seleção de soluções pais e a atualização das soluções atuais. O tamanho da vizinhança T , usado para seleção e atualização, desempenha um papel vital no MOEA/D para trocar informações entre os subproblemas. Além disso, o *trade-off* entre diversidade e

Figura 1 – Fluxograma de execução do MOEA/D (ZHANG; LI, 2007).



Fonte: O autor (2019).

convergência pode ser controlado pelos diferentes mecanismos e parâmetros do algoritmo (LI; ZHANG, 2009; WANG et al., 2014; LI et al., 2015; SOUZA, 2017).

A Figura 1 esboça em alto nível as principais etapas da versão original MOEA/D (ZHANG; LI, 2007): inicialização, reprodução, reposição e critério de parada. O Algoritmo 1 apresenta com mais detalhes essa versão MOEA/D, seu passo-a-passo é descrito a seguir.

Inicialização (linhas 1-3): Os N vetores de peso uniformemente distribuídos $\lambda^1 \dots \lambda^N$ são instanciados. Normalmente, como em (ZHANG; LI, 2007) os vetores de peso são gerados usando um parâmetro de controle H , onde um elemento de cada vetor de peso (λ_j^i) é um dos $\{0/H1/H...H/H\}$ e N é definido de acordo com a estrutura combinatória $C_{H+m-1}^{m-1} = N$. Então, a distância euclidiana entre quaisquer pares de vetor de pesos λ^i e λ^j é calculada. Para cada subproblema i , o conjunto de vizinhos $B(i)$ é inicializado com os T vizinhos mais próximos. A população inicial $Pop = (x^1 \dots x^N)$ é gerada aleatoriamente ou por um método específico do problema. Então, suas funções de aptidão correspondentes $F(x^1) \dots F(x^N)$ são computados. A *External Population* (EP) é inicializada com as soluções não-dominadas da população inicial Pop .

Reprodução (linha 6): Para cada subproblema i , a reprodução é realizada usando $B(i)$ como a população selecionada. O MOEA/D convencional seleciona duas soluções pai $p_1, p_2 \in B(i)$ e aplica os operadores genéticos (*Simulated Binary Crossover* (SBX) e mutação polinomial) para gerar o descendente y .

Reposição (linha 8): A nova solução y é usada para atualizar a população no qual foi gerada, isto é $B(i)$. y substitui as soluções atuais x_r (onde r é um subproblema de índice de $B(i)$) se y

tiver um valor de função de decomposição melhor ($g(\mathbf{y}|\lambda^r, \mathbf{z}^*)$) que ($g(\mathbf{x}^r|\lambda^r, \mathbf{z}^*)$).

Atualização da EP (linha 10): A EP é usado para manter todas as soluções não-dominadas encontradas até o momento durante a busca. Este passo remove da EP todas as soluções dominadas por $\mathbf{y}$ e adiciona $\mathbf{y}$ se nenhuma solução a dominar.

Para otimizar o tempo de execução, o uso da EP pode ser opcional. Assim, o resultado do algoritmo pode ser as soluções finais da população. Se o conjunto de vetores de peso estiver bem distribuído ao longo da PF do problema, o algoritmo poderá encontrar soluções distribuídas distintas que cubram a PF.

Algoritmo 1 Estrutura Geral do MOEA/D

- 1: Inicialize os N vetores de peso $\lambda = (\lambda^1 \dots \lambda^N)$ e cada vizinhança $B(i)$
 - 2: Inicialize a população $Pop = (\mathbf{x}^1 \dots \mathbf{x}^N)$ e calcule todas as aptidões $F(\mathbf{x}^i)$
 - 3: Inicialize a População Externa EP com as soluções não-dominadas de Pop
 - 4: **enquanto** uma condição de término não é atendida **faça**
 - 5: **para** cada subproblema $i \leftarrow 1$ **até** N **faça**
 - 6: $\mathbf{y} \leftarrow \text{Reprodução}(B(i))$
 - 7: Calcule $F(\mathbf{y})$
 - 8: $\text{Reposição}(B(i), \mathbf{y})$
 - 9: **fim para**
 - 10: AtualizarEP(Pop, EP)
 - 11: **fim enquanto**
 - 12: Retorne Pop, EP
-

2.2.2 Métodos de Decomposição

Várias funções de agregação podem ser usadas na abordagem de decomposição. No trabalho de Zhang e Li (2007) é apresentado a combinação do MOEA/D com as seguintes três abordagens: WS, TCH e PBI. A seguir, essas abordagens de decomposição são descritas:

Abordagem WS: A solução ideal para o seguinte problema de otimização de objetivo único é definida como:

$$\begin{aligned} \text{minimize } g^{WS}(\mathbf{x}|\lambda) &= \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a } \mathbf{x} &\in \Omega \end{aligned} \tag{2.3}$$

no qual $g^{WS}(\mathbf{x}|\lambda)$ deve ser minimizado se o MOP é minimização, e $g^{WS}(\mathbf{x}|\lambda)$ deve ser maximizado se o MOP for maximização.

Para obter um conjunto com soluções ótimas de Pareto diferentes, é utilizado vetores de peso λ distintos. Para um conjunto bem distribuído de vetores de peso, e uma PF com formato côncavo para minimização ou convexo para maximização, esta abordagem pode funcionar bem (ZHANG; LI, 2007), isto é, obter soluções bem distribuídas no espaço objetivo.

Abordagem Tchebycheff: Tendo o indivíduo $\mathbf{x}$, um vetor de peso λ e o ponto de referência $\mathbf{z}^*$ (também chamado de ponto utópico), o problema de otimização escalar TCH é definido:

$$\begin{aligned} \text{minimize } g^{TCH}(\mathbf{x}|\lambda, \mathbf{z}^*) &= \max_{1 \leq j \leq m} (\lambda_j |f_j(\mathbf{x}) - z_j^*|) \\ \text{sujeito a } \mathbf{x} &\in \Omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde o ponto de referência $\mathbf{z}^* = (z_1 \dots z_m)^T$ e contém os menores valores encontrados pela população **Pop** até o momento para cada objetivo, i.e., $z_j = \min \{f_j(\mathbf{Pop}) | \mathbf{Pop} \in \Omega\}$ para cada objetivo $j = 1, \dots, m$. Para cada solução Pareto ótima $\mathbf{x}$ existe um vetor de peso λ tal que $\mathbf{x}$ é a solução ótima da Equação 2.4, e cada solução ótima da Equação 2.4 é uma solução ótima de Pareto do MOP (ZHANG; LI, 2007).

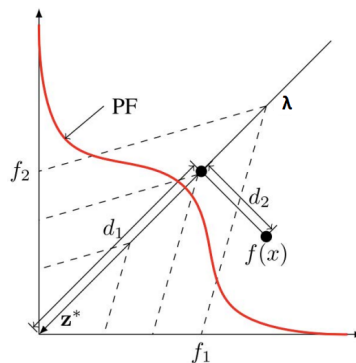
A abordagem PBI é uma variante do método de interseção de limite normal, onde a restrição de igualdade é manipulada por uma função de penalidade. Esta abordagem é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{minimize } g^{PBI}(\mathbf{x}|\lambda, \mathbf{z}^*) &= d_1 + \theta d_2 \\ \text{sujeito a } \mathbf{x} &\in \Omega \\ \text{onde} \\ d_1 &= \frac{\|(F(\mathbf{x}) - \mathbf{z}^*)^T \lambda\|}{\|\lambda\|} \\ d_2 &= \|F(\mathbf{x}) - (\mathbf{z}^* - d_1 \frac{\lambda}{\|\lambda\|})\| \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $\mathbf{z}^*$ é o ponto de referência, e $\theta \geq 0$ é um parâmetro de penalidade definido pelo usuário.

Na abordagem PBI, apresentado na Figura 2, d_1 é usado para avaliar a convergência de $\mathbf{x}$ ao ponto de referência $\mathbf{z}^*$ e d_2 mensura a diversidade desta solução (LI et al., 2015). O equilíbrio entre d_1 e d_2 é controlado por θ , isto é, θ controla o contorno e os *trade-offs*. Li et al. (2015) apresentam os diferentes comportamentos de busca do PBI em relação ao parâmetro θ . Quando θ está muito próximo de zero (por exemplo, $\theta = 0.1$), ele funciona como abordagem WS. Quando $\theta = 1.0$, o PBI funciona de maneira semelhante ao Tchebycheff.

Figura 2 – Ilustração da abordagem PBI.

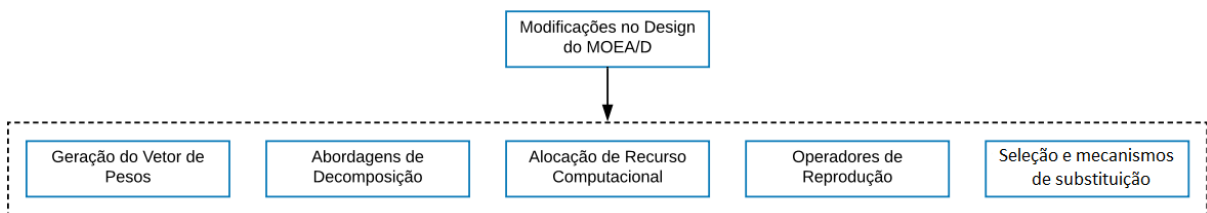


Fonte: Adaptado de Zhang e Li (2007).

2.3 HISTÓRICO DAS MELHORIAS DO MOEA/D

Desde a proposição da estrutura MOEA/D original (ZHANG; LI, 2007), muitos estudos têm sido conduzidos na literatura motivados por superar limitações estruturais, melhorar performance e apresentar MOEA baseados em novas decomposições. Assim, estudos sobre MOEA/D foram realizados para incorporar novos métodos de geração de vetores de peso (ZHANG; LIU; LI, 2009; QI et al., 2014; LI et al., 2015; LI; YAO, 2017), incluir métodos de decomposição aprimorados (SATO, 2014; YANG; JIANG; JIANG, 2017; JIANG; YANG, 2016), integrar estratégias eficientes de alocação de recursos computacionais (ZHANG; LIU; LI, 2009; ZHOU; ZHANG, 2016; QI et al., 2014), modificar os operadores de reprodução (LI; ZHANG, 2009; KE; ZHANG; BATTITI, 2013; LI; ZHANG; DENG, 2017), melhorar a seleção e mecanismos de substituição (LI; ZHANG, 2009; WANG et al., 2014). Para a conveniência dos leitores, as diferentes linhas de pesquisa das modificações da família MOEA/D são apresentadas na Figura 3.

Figura 3 – Visão geral das modificações no design do MOEA/D



Fonte: Adaptado de Trivedi et al. (2017).

Esta seção apresenta modificações propostas na estrutura MOEA/D proposta por Zhang e Li (2007) divididas nas seguintes categorias: vetores de peso, abordagens de decomposição, alocação dinâmica de recursos, operadores de reprodução e mecanismos para seleção e substituição.

2.3.1 Vetores de Peso

Na versão original do MOEA/D (ZHANG; LI, 2007), os vetores de peso são gerados usando o método *simplex lattice* (DAS; DENNIS, 1998) explicado na Seção 2.2.1, para facilitar este método será chamado de *Das and Dennis* (DD). As principais desvantagens deste método são: o tamanho da população aumenta não linearmente com o aumento do número de objetivos, ou seja, o tamanho da população não pode ser livremente ajustado (TAN et al., 2013) e a distribuição dos vetores de peso resultantes não é uniforme para três ou mais objetivos (TAN et al., 2013). Motivados a superar essas limitações, vários estudos foram conduzidos em métodos de geração de vetores de peso nos MOEA baseados em decomposição.

A primeira maneira alternativa de geração é empregada no *MOEA/D with Dynamical Resource Allocation* (MOEA/D-DRA) (ZHANG; LIU; LI, 2009). Esta abordagem é baseada no paradigma de amostragem aleatória uniforme, do inglês *Uniform Random* (UR) (JASZKIEWICZ, 2002). A vantagem do método de amostragem aleatória uniforme sobre o método *simplex-*

lattice é que a definição do tamanho da população é flexível. Os passos abaixo descrevem como um conjunto de N vetores de pesos λ são gerados:

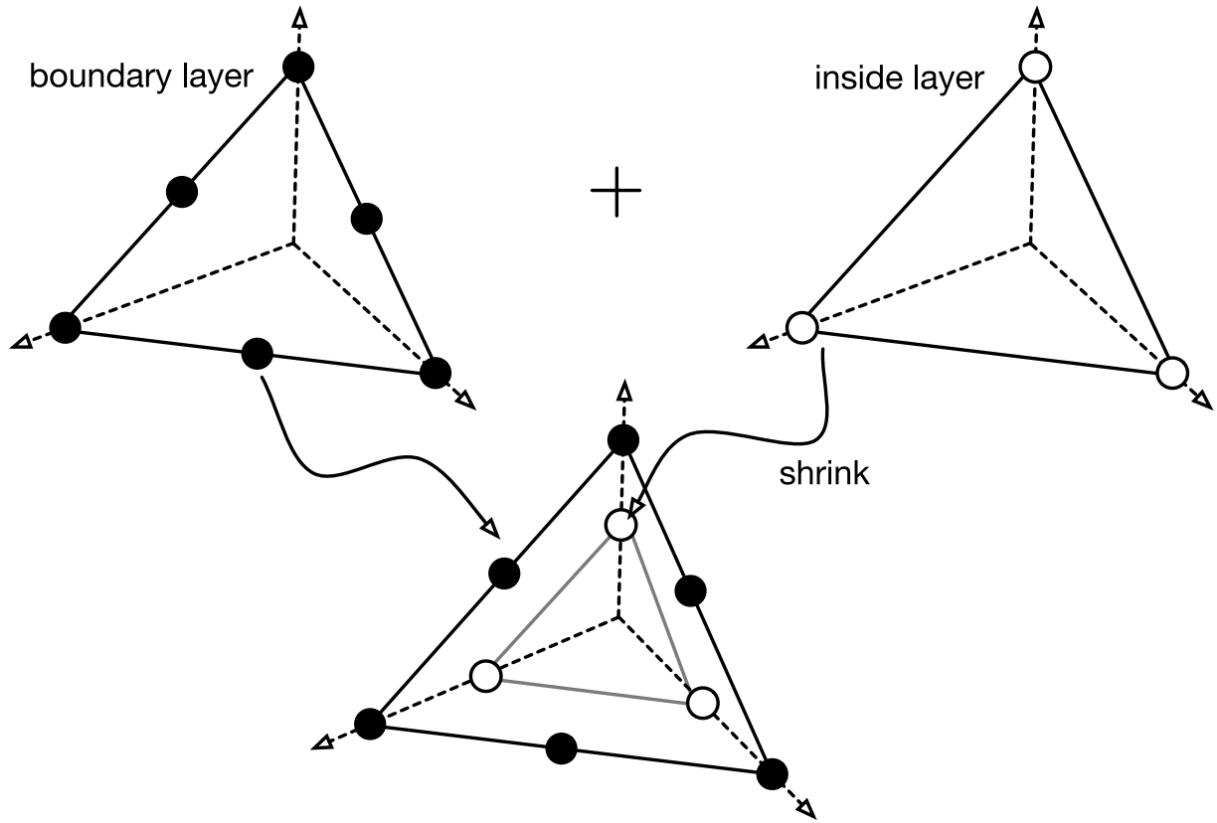
1. De maneira aleatória uniforme gere 5000 vetores de peso para construir o conjunto λ_1 . λ é inicializado como o conjunto contendo todos os vetores de peso $(1 \ 0 \dots 0 \ 0)$, $(0 \ 1 \dots 0 \ 0)$, ..., $(0 \ 0 \dots 0 \ 1)$.
2. Encontre o vetor de pesos em λ_1 com a maior distância para λ , então, transfira-o de λ_1 para λ .
3. Pare e retorne λ se o tamanho de λ for N . Caso contrário, vá para o segundo item e repita o processo.

Qi et al. (2014) propuseram o *MOEA/D with Adaptive Weight Adjustment* (MOEA/D-AWA) que utiliza um novo método de inicialização vetorial de peso, denominado transformação WS, baseado na relação geométrica entre os vetores de peso e as soluções ótimas correspondentes sob a abordagem Tchebycheff. Os autores ilustraram que quando a forma da PF está próxima do hiperplano $\sum_{i=1}^m f_i = 1$, os MOEA/D devem adotar vetores de mapeamento de solução uniformemente distribuídos que resultam da transformação WS aplicada a vetores de peso uniformemente distribuídos. O estudo experimental em três problemas objetivos DTLZ1 – DTLZ4 (DEB et al., 2002b) (que têm formatos de PF simples) demonstrou que a técnica de transformação WS ajuda o MOEA/D a obter soluções de Pareto ótimas muito melhor distribuídas uniformemente. Conforme a Equação 2.6, dado um conjunto λ de vetores de peso gerado pelo *simplex lattice*, λ' é o resultado da aplicação da transformação WS.

$$\lambda' = WS(\lambda) = \left(\frac{\frac{1}{\lambda_1}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i}}, \dots, \frac{\frac{1}{\lambda_m}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i}} \right) \quad (2.6)$$

Li et al. (2015) apresentaram o *MOEA based on Dominance and Decomposition* (MOEA/DD) que tem um método de geração de vetores de peso em duas camadas para MaOPs. Neste método um conjunto de vetores de peso N_1 e N_2 são gerados separadamente para as camadas na fronteira e interna, respectivamente, usando o método de projeto *simplex-lattice* (tal que $N_1 + N_2 = N$). Posteriormente, usando a transformação de coordenadas, as coordenadas dos vetores de peso na camada interna são reduzidas. O conjunto de vetores de peso para a fronteira e a camada interna são então combinados para representar o conjunto de vetores de peso final. O método de geração de vetores de peso de duas camadas supera a limitação do método de projeto *simplex-lattice* na geração de um número relativamente pequeno de vetores de peso uniformemente distribuídos para MaOP. Note-se que o método de geração de vetores de peso de duas camadas tem sido empregado em MOEA baseados em decomposição, como (LI et al., 2015; DEB; JAIN, 2014; YUAN et al., 2016a) para MaOP. A Figura 4 demonstra esta abordagem.

Figura 4 – Exemplo do método de geração de vetores de peso de duas camadas, com $H_1 = 2$ para a camada limite e $H_2 = 1$ para a camada interna



Fonte: Adaptado de Li et al. (2015).

Outra abordagem de inicialização é baseada na função de decomposição Tchebycheff (LI; YAO, 2017). Dado um ponto de referência, z^* , o vetor de peso ótimo para uma solução em relação à função de decomposição Tchebycheff pode ser facilmente gerado. Esta é uma abordagem frequente para gerar novos vetores de peso durante a adaptação dos mesmos (GU; LIU; TAN, 2012; QI et al., 2014; LI; YAO, 2017; FARIAS et al., 2018). Formalmente, seja $z^* = (z_1^* \dots z_m^*)^T$ o ponto de referência e $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m)^T$ seja o vetor de peso ideal para uma solução q . Então a Equação 2.7 é definida:

$$\frac{f_1(q) - z_1^*}{\lambda_1} = \frac{f_2(q) - z_2^*}{\lambda_2} = \dots = \frac{f_m(q) - z_m^*}{\lambda_m} \quad (2.7)$$

Uma vez que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$, tem-se que:

$$\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_m)^T = \left(\frac{f_1(q) - z_1^*}{\sum_{i=1}^m f_i(q) - z_i^*} \dots \frac{f_m(q) - z_m^*}{\sum_{i=1}^m f_i(q) - z_i^*} \right)^T \quad (2.8)$$

Conforme Tian et al. (2018), vetores de peso ou subproblemas também podem ser denominados como vetores de referência em alguns MOEAs baseados em decomposição. Ele também agrupa os métodos de adaptação de vetores de referência em duas categorias.

A primeira categoria de métodos ajusta os vetores de referência de acordo com a distribuição de soluções candidatas na população atual em cada geração. Dois métodos representativos

pertencentes a esta categoria foram propostos no *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm III* (NSGA-III) (JAIN; DEB, 2013) e *Reference Vector guided Evolutionary Algorithm* (RVEA) (CHENG et al., 2016), onde os autores denominaram os algoritmos com adaptação do ponto de referência como A-NSGA-III e RVEA. Em A-NSGA-III, o método de adaptação consiste em duas operações: 1) excluir cada ponto de referência adicionado com um nicho vazio e 2) adicionar aleatoriamente novos pontos de referência dentro de cada ponto de referência lotado com uma alta contagem de nicho. No RVEA (CHENG et al., 2016), existem dois conjuntos de vetores de referência, um dos quais permanece uniformemente distribuído e o segundo é adaptativamente ajustado. A adaptação dos vetores de referência consiste em duas operações: 1) excluir cada vetor de referência que especifica um subespaço vazio e 2) adicionar aleatoriamente novos vetores de referência dentro da *hyperbox* especificada pelo ponto nadir e o ponto ideal da população atual.

A segunda categoria de métodos ajusta os vetores de referência de acordo com a distribuição de soluções candidatas armazenadas em um arquivo externo. Dois métodos representativos ao longo desta linha foram desenvolvidos em *MOEA/D with Pareto-Adaptive Weight vectors* (paλ-MOEA/D) (SIWEI et al., 2011) e *MOEA/D-AWA* (QI et al., 2014), respectivamente. Em paλ-MOEA/D (SIWEI et al., 2011), a área de soluções não dominadas no arquivo é calculada primeiramente para estimar o parâmetro p da frente de Pareto $f_1^p + \dots + f_m^p = 1$, onde m é o número de objetivos. Então, os pontos de interseção entre as linhas do gradiente de $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ e a frente são automaticamente ajustados até que um valor máximo da métrica de hipervolume para esses pontos seja atingido. Os pontos de interseção com o valor máximo de hipervolume são usados como pontos de referência em cada geração (SIWEI et al., 2011). No MOEA/D-AWA (QI et al., 2014), um arquivo é usado para fornecer uma orientação de adição e remoção de pontos de referência para melhor diversidade populacional. Se uma solução não-dominada no arquivo estiver localizada em uma região com soluções candidatas esparsas, essa solução será adicionada a população e um novo vetor de referência será gerado de forma correspondente; caso a solução da população esteja em uma região com baixa esparsidade, o vetor de referência associado à esta solução será excluído.

2.3.2 Abordagens de Decomposição

O estudo original do MOEA/D (ZHANG; LI, 2007) investigou três abordagens de decomposição - WS, TCH e PBI. No entanto, essas abordagens tradicionais de decomposição apresentam deficiências tais como desempenho em MaOP (SATO, 2014), tratamento de problemas com objetivos de escala reduzida (ZHANG; LI, 2007) e associação da mesma solução com vários subproblemas diferentes (WANG et al., 2016). Além disso, a escolha do método de decomposição é crítica para o desempenho do MOEA/D em um problema particular (ZHANG; LI, 2007) e não é uma tarefa fácil selecionar um método apropriado para diferentes problemas (ISHIBUCHI et al., 2010). Para superar essas deficiências, vários estudos foram realizados sobre métodos de decomposição.

Sato (2014) argumentou que as abordagens de decomposição convencionais encontram di-

ficuldades em aproximar PF amplamente espalhadas em alguns problemas como os MOKP. Para superar esse problema e projetar um método de decomposição efetivo para MaOP, Sato (2014) estendeu a abordagem convencional PBI e propôs o método de decomposição *inverted Penalty-Based Boundary Intersection* (IPBI). Nos métodos convencionais de decomposição, como o TCH e o PBI, as soluções são evoluídas em direção ao ponto de referência $\mathbf{z}$, minimizando o valor da função de decomposição. Pelo contrário, na abordagem do IPBI, as soluções são desenvolvidas a partir do ponto de referência com pior valor, maximizando o valor da função de decomposição. Isso é feito com o objetivo de tornar as soluções na população o mais afastado possível do ponto de referência nadir. O estudo experimental sobre o problema dos MOKP e WFG4 (HUBAND et al., 2006), com 2–8 objetivos, ilustrou que a abordagem do IPBI pode se aproximar da PF amplamente espalhada em comparação com outras abordagens de decomposição. A limitação da abordagem IPBI, assim como a abordagem PBI, é que ela envolve o parâmetro θ , que precisa ser apropriadamente ajustado. A abordagem é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{maximize } g^{IPBI}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}^{na}) = d_1 + \theta d_2 \\
 & \text{subject to } \mathbf{x} \in \Omega \\
 & \text{onde} \\
 & d_1 = \frac{\|(\mathbf{z}^{na}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda}\|}{\|\boldsymbol{\lambda}\|} \\
 & d_2 = \|(\mathbf{z}^{na} - \mathbf{F}(\mathbf{x})) - d_1 \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\|\boldsymbol{\lambda}\|}\|
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $\mathbf{z}^{na}$ é o ponto de referência nadir (isto é, o máximo valor dos objetivos, considerando apenas os não-dominados da população atual), e $\theta \geq 0$ é um parâmetro de penalidade definido pelo usuário.

Uma das principais desvantagens da abordagem de decomposição PBI é que não existe uma configuração única do parâmetro de penalidade θ que funciona bem em diferentes tipos de problemas com diferentes números de objetivos (MOHAMMADI et al., 2015). Yang, Jiang e Jiang (2017) sugeriram dois novos esquemas de penalidade, ou seja, o *Adaptive Penalty Scheme* (APS) e o *Subproblems penalty Scheme* (SPS), para definir o valor do parâmetro θ . Na APS, θ é linearmente aumentado com o número de gerações de $\theta_{min}(= 1)$ a $\theta_{max}(= 10)$. Um pequeno valor de θ é adotado inicialmente para enfatizar a convergência e direcionar a busca da PF o mais rápido possível. O valor de θ é aumentado gradualmente de modo a enfatizar a diversidade em direção ao estágio de busca posterior. No esquema SPS, cada subproblema recebe um valor de penalidade diferente (mas fixo). Em particular, os subproblemas extremos (que se espera que representem as porções extremas do PF) recebem um valor de penalidade maior, isto é, mais rigoroso em comparação com os subproblemas intermediários. O estudo experimental sobre os MOPs F1–F6 (YANG; JIANG; JIANG, 2017) demonstrou que ambos os esquemas de penalidade ajudam a melhorar o desempenho do MOEA/D usando PBI, particularmente em termos de melhor cobertura do PF. Além disso, o esquema SPS apresenta melhor desempenho do que o

esquema APS.

Jiang e Yang (2016) propuseram uma estratégia em duas fases, do inglês *Two Phases* (TP) para o MOEA/D com o objetivo de resolver problemas com PF convexas, com pico agudo e cauda baixa. Na primeira fase, um percentual $M_r\%$ de todos os *Fitness Evaluation* (FE) são dedicados ao MOEA/D com a abordagem TCH. No final da primeira fase, a uniformidade das soluções é avaliada usando um método baseado em aglomeração para determinar se o problema é provavelmente convexo. Se o problema é convexo, na segunda fase, a abordagem de TCH reversa é adotada, o que é mais adequado para problemas de otimização convexa. Na abordagem TCH reversa, as soluções são desenvolvidas a partir do ponto nadir n maximizando o valor da função de decomposição. O estudo experimental sobre problemas de dois e três objetivos com PF convexas, com pico acentuado e cauda baixa confirmou a eficácia da estratégia TP.

O MOEA/D original (ZHANG; LI, 2007) utiliza apenas o ponto de referência ideal, i.e., $z_j^* = \min\{f_j(x) | x \in \Omega\}$ para cada $j = 1, \dots, m$ objetivos. Wang et al. (2017) propõem o *MOEA/D with Multiple Reference points* (MOEA/D-MR), neste modelo é utilizado simultaneamente na seleção o ponto de referência ideal e nadir, i.e., $z_j^* = \max\{f_j(x) | x \in \Omega\}$ para cada $j = 1, \dots, m$ objetivos. Os autores com o objetivo de melhorar a diversidade do MOEA/D discutem que o uso simultâneo desses pontos são complementares, pois o ponto de referência ideal apresenta melhor diversidade nas soluções finais quando a PF tem formato côncavo enquanto que o ponto de referência nadir na PF convexa.

Recentemente, Wu et al. (2018) propuseram o *MOEA based on Adversarial Decomposition* (MOEA/AD), nesta abordagem são mantidas duas populações em co-evolução simultaneamente, cada população utiliza uma função de decomposição diferente, uma orientada a convergência e a outra orientada para a diversidade. O MOEA/AD é comparado com nove MaOEA estado-da-arte em 130 instâncias de problemas, sendo eficaz e competitivo na resolução de MaOP com várias características e formatos de PF.

2.3.3 Alocação Dinâmica de Recursos

No MOEA/D (ZHANG; LI, 2007), todos os subproblemas são tratados igualmente e recebem esforço computacional (FE) uniforme a cada geração. No entanto, algumas regiões da PF podem ser mais difíceis de aproximar do que as outras (ZHANG; LIU; LI, 2009). Além disso, o original MOEA/D (ZHANG; LI, 2007) adota um conjunto constante de vetores de peso uniformemente distribuídos para cada problema, independentemente das características da PF. No entanto, vetores de peso uniformemente distribuídos não podem produzir soluções Pareto ótimas uniformemente distribuídas quando a PF é complexa (QI et al., 2014) ou irregular (LI et al., 2015b). Assim, não é vantajoso investir FE em subproblemas que não contribuem para melhorar a qualidade das soluções na população. Nesta Subseção é apresentado estudos que investigaram o emprego de estratégias eficientes de alocação de recursos computacionais nos MOEA/D.

Zhang, Liu e Li (2009) propuseram uma versão do MOEA/D, denominada MOEA/D-DRA, baseada na alocação dinâmica de recursos computacionais para diferentes subproblemas. No

MOEA/D-DRA, uma função de utilidade é usada para representar a melhoria relativa da função de decomposição para cada subproblema, e é calculada no intervalo de cada 50 gerações para cada subproblema. Além disso, uma etapa de seleção com torneio de tamanho 10 é introduzida para selecionar um conjunto I de subproblemas. Na seleção de torneio, o subproblema com o valor mais alto da função de utilidade entre os dez subproblemas selecionados aleatoriamente entra no conjunto I para exploração do espaço de busca. Assim, os recursos computacionais são alocados dinamicamente para os subproblemas para os quais a função de utilidade é maior. Vale a pena notar que o MOEA/D-DRA é o vencedor da competição MOEA sem restrições no CEC 2009 (ZHANG et al., 2008).

Zhou e Zhang (2016) estenderam o trabalho em MOEA/D-DRA (ZHANG; LIU; LI, 2009) e apresentaram *MOEA/D with Generalized Resources Allocation* (MOEA/D-GRA). Nesta proposta cada subproblema está associado a um vetor *Probability of Improvement* (PoI). Em cada geração, os recursos computacionais são atribuídos a alguns subproblemas selecionados de acordo com o vetor PoI. Os autores introduziram a estratégia de alocação de recursos *offline* e *on-line* no MOEA/D, denominados como *Offline Resource Allocation* (OFRA) e *ON-line Resource Allocation* (ONRA), respectivamente. O estudo experimental sobre alguns problemas de teste selecionados demonstrou primeiramente que a estratégia da ONRA é superior a OFRA e NORA (nenhuma estratégia de alocação de recursos). Os autores denominaram *MOEA/D with Differential Evolution* (MOEA/D-DE) com a estratégia ONRA como MOEA/D-GRA. O estudo experimental nos exemplos de teste F1–F9 (LI; ZHANG, 2009) e UF1–UF10 (ZHANG et al., 2008) demonstrou que o MOEA/D-GRA supera significativamente tanto o MOEA/D-DE (LI; ZHANG, 2009) quanto o MOEA/D-DRA (ZHANG; LIU; LI, 2009) na maioria das instâncias de teste.

Qi et al. (2014) argumentaram que vetores de peso uniformemente distribuídos no MOEA/D não podem assegurar distribuição uniforme das soluções Pareto ótimas quando a PF é complexa (ou seja, PF descontínuo ou PF com pico agudo ou cauda baixa). Assim, Qi et al. (2014) propuseram uma estratégia *Adaptive Weight Adjustment* (AWA), para MOP com PF complexas e integraram a estratégia dentro do MOEA/D-DRA (ZHANG; LIU; LI, 2009). O algoritmo resultante, denominado como MOEA/D-AWA, é baseado em uma estratégia de dois estágios em que, a princípio (até 80% do processo evolucionário), um conjunto de vetores de peso predeterminados (gerados pelo método *simplex lattice*) é empregado até que o algoritmo converge para uma certa extensão. Posteriormente (os 20% restantes do processo evolucionário), os vetores de peso são ajustados de forma que alguns subproblemas sejam removidos das partes demasiadamente cheias da PF, e alguns subproblemas novos são adicionados em regiões esparsas, em vez das regiões pseudo-esparsas ou descontínuas da PF. O MOEA/D-AWA utiliza uma população externa para armazenar as soluções não-dominadas visitadas e para guiar o algoritmo na remoção e adição de subproblemas. O estudo experimental demonstrou que o MOEA/D-AWA supera vários MOEA em MOP com PF descontínuos (ZDT3 de dois objetivos e DTLZ6 de três objetivos), e dois MOP recém-construídos com ponta e cauda baixas afiadas (F1 com dois objetivos e F2 com três objetivos). Além disso, o estudo experimental em dois MaOP com 6 objetivos, DTLZ5

(SAXENA; DEB, 2007) e sua variação DTLZ4, ilustrou que o MOEA/D-AWA é capaz de lidar com as MaOP também.

2.3.4 Operadores de Reprodução

No MOEA/D original (ZHANG; LI, 2007), os operadores SBX e de mutação polinomial, isto é, os operadores genéticos são incorporados como operadores de variação. Para melhorar o desempenho do MOEA/D, vários estudos tentaram substituir os operadores genéticos por outros operadores de reprodução, nesta Subseção são apresentados o *Differential Evolution* (DE) (LI; ZHANG, 2009), *Ant Colony Optimization* (ACO) (KE; ZHANG; BATTITI, 2013) e *Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy* (CMA-ES) (LI; ZHANG; DENG, 2017).

Li e Zhang (2009) propuseram uma versão aprimorada do MOEA/D usando o DE, denominado MOEA/D-DE, para lidar com formatos complicados de espaço de decisão. Os autores introduziram nove instâncias de teste (F1-F9) com espaços de decisão complicados para investigar a eficiência do MOEA/D-DE. O estudo experimental demonstrou que o MOEA/D-DE supera significativamente o *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II with Differential Evolution* (NSGA-II-DE) em todas as instâncias de teste. Zapotecas-Martínez et al. (2015) propuseram a integração da DE geométrica ao arcabouço do MOEA/D. Moraglio, Togelius e Silva (2013) propõem a generalização discreta de DE na estrutura MOEA/D para a resolução de MOP combinatórios. Huang e Li (2010) investigaram a influência do uso de diferentes esquemas DE no MOEA/D (LI; ZHANG, 2009).

Uma combinação do algoritmo ACO e MOEA/D, denominado *MOEA/D with Ant Colony Optimization* (MOEA/D-ACO), foi proposta por Ke, Zhang e Battiti (2013) para resolver problemas de otimização combinatória. O estudo experimental investigou exaustivamente a eficiência do MOEA/D-ACO em MOKP e MOTSP. Os resultados experimentais sugeriam que o MOEA/D-ACO supera o MOEA/D (ZHANG; LI, 2007) com operadores genéticos convencionais e um operador de busca local (JASZKIEWICZ, 2002) em várias instâncias de teste de MOKP, e o algoritmo ACO (IREDI; MERKLE; MIDDENDORF, 2001) em várias instâncias do MOTSP com dois objetivos.

Li, Zhang e Deng (2017) lidou com o recurso de polarização em MOP. Os autores argumentaram que, para lidar com a característica de polarização, um algoritmo deveria ser capaz de equilibrar exploração e exploração. Assim, os autores propuseram uma variante MOEA/D, denominada *MOEA/D with CMA-ES* (MOEA/D-CMA), na qual ambos CMA-ES e DE são usados como operadores de variação. Para reduzir a complexidade computacional, o MOEA/D-CMA agrupa os subproblemas em vários grupos e emprega o CMA-ES para apenas um subproblema de cada grupo em cada geração. Os demais subproblemas são otimizados por DE. Os autores propuseram um conjunto de nove novas instâncias de teste multiobjetivo com viés, denominadas BT1-BT9, e demonstraram a eficácia do MOEA/D-CMA em lidar com a característica de polarização nos MOP.

2.3.5 Seleção e Mecanismos de Substituição

A estrutura de vizinhança, bem como seu tamanho, do inglês *Neighborhood Size* (NS), desempenham um papel importante no MOEA/D (ZHANG; LI, 2007). Na versão original MOEA/D, a vizinhança de cada subproblema é determinada no espaço vetorial de ponderação antes da execução do algoritmo e, posteriormente, a vizinhança e o NS permanecem constantes para cada subproblema ao longo do processo evolucionário (GIAGKIOZIS; PURSHOUSE; FLEMING, 2014; ZHAO; SUGANTHAN; ZHANG, 2012). Além disso, no original MOEA/D, uma única solução com bom valor na função de decomposição pode substituir várias soluções vizinhas inferiores que podem resultar na deterioração da diversidade populacional (WANG et al., 2016). Assim, existem várias deficiências no mecanismo de seleção e substituição do original MOEA/D. Nesta seção, são apresentados dois estudos que visaram modificações nesses aspectos.

No MOEA/D (ZHANG; LI, 2007), o número de soluções consideradas para reprodução e reposição correspondentes a um subproblema i é o mesmo, i.e. NS. No estudo sobre MOEA/D-DE, Li e Zhang (2009) argumentaram que, para manter a diversidade populacional, o tamanho da vizinhança usado na reposição deveria ser menor que o tamanho da vizinhança usado na reprodução, em outras palavras, o tamanho da vizinhança usado na reposição é ajustado para 2 no estudo experimental. No entanto, os autores não apresentaram um estudo experimental para demonstrar que esse ajuste é apropriado para todos os problemas sob investigação. O Algoritmo 2 apresenta com mais detalhes o passo-a-passo desta versão. As 2 etapas: reprodução (linhas 7-12) e reposição (linhas 14-22) são modificadas em relação ao modelo MOEA/D original (ZHANG; LI, 2007). Há dois parâmetros neste modelo, δ e nr . δ indica a probabilidade de onde selecionar os pais, da população P ou da vizinhança $B(i)$; nr indica o número máximo de soluções a serem atualizadas por uma solução descendente, que tenha melhor resultado de função de decomposição.

Wang et al. (2014) argumentaram que a nova solução x_i^{new} do subproblema i pode não ser a solução mais adequada para seus subproblemas vizinhos $B(i)$. Assim, os autores propuseram um esquema *Global Replacement* (GR) para o MOEA/D e nomearam o algoritmo resultante como *MOEA/D with Global Replacement* (MOEA/D-GR). Neste estudo, duas vizinhanças diferentes, isto é, vizinhança de acasalamento (de tamanho T_m) e vizinhança de substituição (de tamanho T_r), são consideradas para cada subproblema i , e o efeito de T_r sobre o desempenho do MOEA/D é investigado. No esquema GR, correspondente a uma solução recém-gerada x_i^{new} , o subproblema mais apropriado j é determinado. Posteriormente, os subproblemas T_r mais próximos do subproblema j são selecionados para formar a vizinhança de substituição, ou seja, $B_r(j)$. Finalmente, as soluções de subproblemas pertencentes a $B_r(j)$ são atualizadas pela solução recém-gerada x_i^{new} . O estudo experimental sobre a incorporação do esquema GR em MOEA/D indicou que o NS de substituição adequada, isto é, T_r é geralmente distinta para problemas diferentes.

Algoritmo 2 MOEA/D (LI; ZHANG, 2009)

```

1: Inicialize a população  $P$  e o conjunto de subproblemas  $\lambda$ ;
2: Determine a vizinhança  $B(i)$  de cada subproblema  $i \in \lambda$ ;
3: Calcule o ponto de referência ideal  $z^*$ ;
4:  $Gen \leftarrow 0$ ;
5: enquanto  $Gen < Gen_{max}$  faça
6:   para cada subproblema  $i \leftarrow 1$  até  $N$  faça
7:     se  $valorAleatorioEntre(0, 1) < \delta$  então
8:        $E \leftarrow B(i)$ ;
9:     senão
10:       $E \leftarrow \{1, ..., N\}$ ;
11:    fim se
12:    Selecione aleatoriamente 2 soluções de  $E$  para gerar um descendente  $\bar{x}$ , Avalie  $F(\bar{x})$ ;
13:     $z^* \leftarrow \min(z^*, F(\bar{x}))$ ;
14:     $update \leftarrow 0$ ;
15:    enquanto  $update < nr$  and  $E \neq \emptyset$  faça
16:       $j \leftarrow$  Um índice de  $E$  aleatoriamente;
17:      Remova o índice atribuído a  $j$  de  $E$ ;
18:      se  $g^{TCH}(\bar{x}|\lambda^j, z^*) \leq g^{TCH}(x^j|\lambda^j, z^*)$  então
19:         $x^j \leftarrow \bar{x}$ ;
20:         $update \leftarrow update + 1$ ;
21:      fim se
22:    fim enquanto
23:  fim para
24:   $Gen \leftarrow Gen + 1$ ;
25: fim enquanto
26: retorne  $P$ ;

```

2.4 PERSPECTIVAS DE FUTURAS MELHORIAS

Desde a proposição do MOEA/D, muitos MOEA baseados em decomposição foram propostos na literatura. As principais motivações das pesquisas realizadas foram: superar limitações, melhorar o desempenho, apresentar novos MOEA/D e estender os MOEA/D para outros tipos de problemas (TRIVEDI et al., 2017). Atualmente existem direções para pesquisas que lidem com questões em aberto que sejam desafiadoras e promissoras no MOEA/D. Destacam-se as seguintes direções a serem consideradas:

1. Atualmente, apenas o estudo de Yang, Jiang e Jiang (2017) investigou métodos para evitar o ajuste do parâmetro θ na abordagem PBI. No entanto, este estudo testou a eficácia dos esquemas de penalidade de APS e SPS propostos apenas em poucos MOPs selecionados. Assim, uma investigação completa de APS e SPS em outros MOPs, MaOPs e introdução de novos métodos para controlar de forma adaptativa o parâmetro θ pode ser uma direção frutífera.
2. O impacto de modificar o comportamento da abordagem de decomposição durante o processo evolucionário, isto é, combinar (usar mais de uma abordagem simultaneamente) ou

adaptar (selecionar dinamicamente uma abordagem que seja apropriada ao MOP) pode ser mais estudado (WANG et al., 2017; WU et al., 2018).

3. No contexto de alocação de recurso computacional, os pontos de referência podem ser usados para orientar como distribuir o esforço de busca (WANG et al., 2017).
4. O uso de pontos de referência globais e locais pode ser útil em MaOPs. Os pontos de referência globais podem ajudar a dar uma visão global da PF e os locais podem ajudar a refinar a busca por algumas áreas preferidas pelo tomador de decisão (WANG et al., 2017).
5. Segundo Trivedi et al. (2017) em seu *survey*, mais estudos devem ser realizados para desenvolver estratégias de adaptação de vetores de peso para o arcabouço baseado em decomposição.
6. O papel da estrutura e tamanho de vizinhança tanto para reprodução quanto substituição em um MOEA/D pode ser mais estudado no contexto de MaOP.

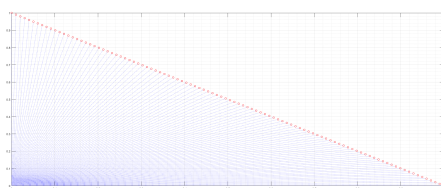
A escolha dos vetores de peso determina diretamente a qualidade das soluções finais de um processo evolucionário, reconhecendo isso, esta dissertação tem o foco direcionado à 5ª e 6ª trilha. A próxima seção acrescenta mais detalhes nestas direções escolhidas.

2.5 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

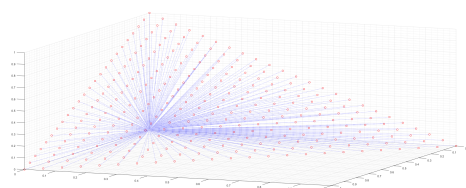
Conforme apresentado na Seção 2.2.1, o modelo MOEA/D (ZHANG; LI, 2007) utiliza a abordagem *simplex lattice* (DAS; DENNIS, 1998) para gerar subproblemas uniformemente distribuídos no espaço objetivo. A Figura 5 apresenta dois conjuntos de vetores de peso gerados para 2 e 3 objetivos usando este método.

Uma limitação desta abordagem, é que para problemas com um número de objetivos acima de três, a definição da quantidade de vetores de peso não pode assumir todos valores inteiros para N , por exemplo, para 3 objetivos, após um $N = 300$, o próximo valor permitido é $N = 325$. Para contornar esta limitação, uma abordagem que gera subproblemas aproximadamente uniformes, chamada de *Uniform Randomly* (ZHANG; LIU; LI, 2009; FARIAS et al., 2018) permite

Figura 5 – Exemplo de conjuntos de vetores de pesos gerados pelo modelo MOEA/D. N é o tamanho da população e m é o número dos objetivos.



(a) DD; $m=2$; $N=100$

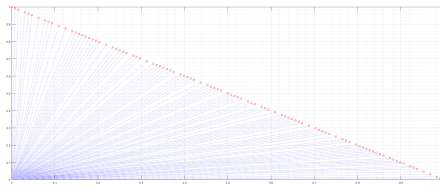


(b) DD; $m=3$; $N=300$

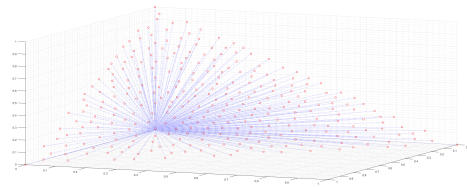
Fonte: O autor (2019).

que a quantidade de subproblemas seja determinada, independente do número de objetivos. A Figura 6 apresenta conjuntos de pesos gerados por este método, com 2 e 3 objetivos. O valor de $N = 301$ para 3 objetivos, foi escolhido para demonstrar a flexibilidade do método.

Figura 6 – Exemplo de conjuntos de vetores de pesos gerados pela abordagem UR. N é o tamanho da população e m é o número dos objetivos.



(a) UR; $m=2$; $N=100$



(b) UR; $m=3$; $N=301$

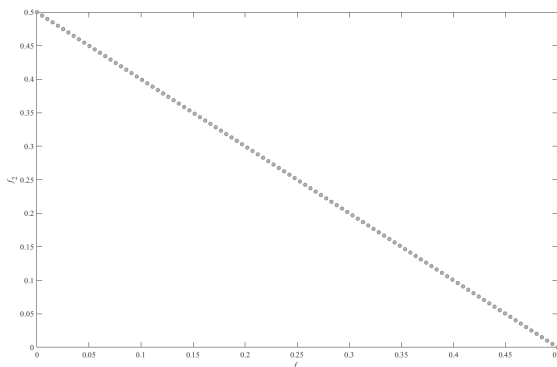
Fonte: O autor (2019).

Quando se tem problemas com frentes de Pareto com características regulares, a abordagem *simplex lattice* frequentemente produz soluções bem distribuídas no espaço objetivo. A Figura 7 apresenta este caso, no problema DTLZ1 com 2 e 3 objetivos, a PF deste problema é caracterizado por ser linear.

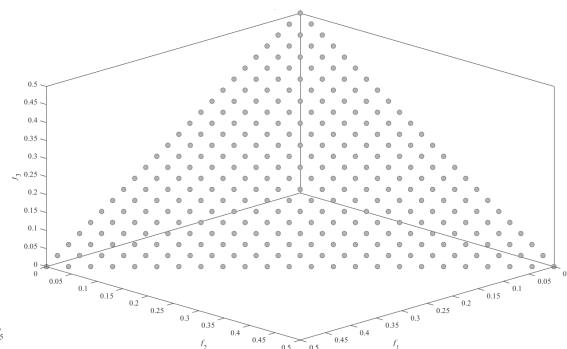
Por outro lado, quando se está lidando com PFs complexas ou irregulares, isto é particionada, degenerada, mal dimensionada ou invertida, esta abordagem pode não alcançar PFs com uma distribuição uniforme no espaço objetivo. A Figura 8 apresenta dois exemplos no problema DTLZ7 (PF desconectada), com 2 e 3 objetivos; neste caso, a abordagem *simplex lattice* produz um conjunto de soluções finais com distribuição menos uniforme que no exemplo anterior.

Para superar a limitação de alcançar soluções finais com distribuição mais próxima possível da uniforme em PFs complexas, a literatura sugere a utilização de adaptação dos vetores de peso. Um modelo que combina o tamanho flexível de população e a adaptação de pesos, foi proposto em estágio mais inicial deste mestrado, chamado MOEA/D-URAW (FARIAS et al., 2018). A Figura 9 apresenta as soluções finais deste modelo, para problemas com PFs regulares

Figura 7 – Soluções finais obtidas pelo MOEA/D usando abordagem DD no problema DTLZ1. N é o tamanho da população e m é o número dos objetivos.



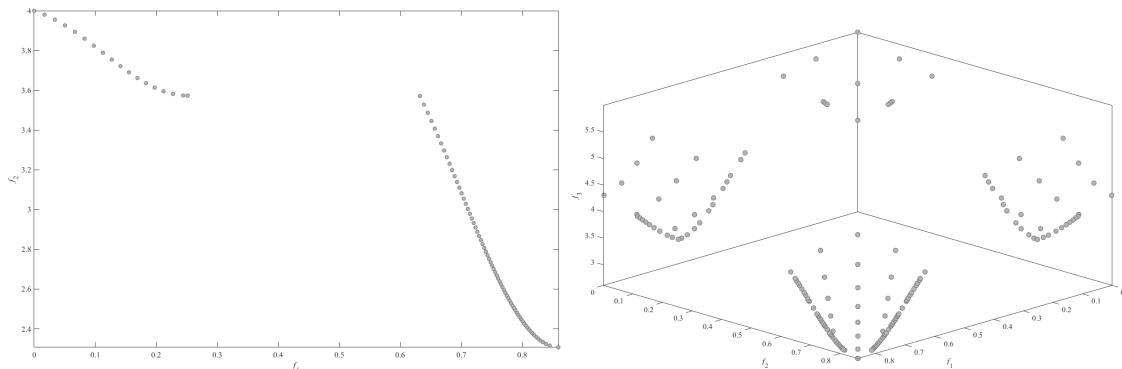
(a) MOEA/D em DTLZ1; $m=2$; $N=100$



(b) MOEA/D em DTLZ1; $m=3$; $N=300$

Fonte: O autor (2019).

Figura 8 – Soluções finais obtidas pelo MOEA/D usando abordagem DD no problema DTLZ7. N é o tamanho da população e m é o número dos objetivos.



(a) MOEA/D em DTLZ7; $m=2$; $N=100$

(b) MOEA/D em DTLZ7; $m=3$; $N=300$

Fonte: O autor (2019).

e irregulares. O uso da adaptação permite alcançar distribuições mais próximas da uniforme no espaço de objetivos, em especial no caso de PFs irregulares, enquanto que no caso da PF regular, onde geralmente não se faz necessário alterar um conjunto fixo de pesos uniformemente distribuídos, a adaptação realiza um ajuste fino nos pesos aleatórios. Para gerar as soluções do problema DTLZ7, o MOEA/D-URAW adaptou os vetores de peso apresentados na Figura 6 para os apresentados na Figura 10.

Apesar de haver na literatura várias abordagens que realizam adaptação dos subproblemas, o momento de efetuar esta adaptação é pré-fixado. O momento adotado pela literatura, para a adaptação de subproblemas, está resumido abaixo:

- pa λ -MOEA/D (SIWEI et al., 2011): apenas uma vez em todo o processo evolucionário, quando o tamanho da população externa é maior ou igual a duas vezes o tamanho da população evolutiva.
- A-NSGA-III (JAIN; DEB, 2013): todas as gerações.
- MOEA/D-AWA (QI et al., 2014): iniciando em 80% do processo evolucionário, de acordo com o parâmetro wag (o padrão PlatEMO (TIAN et al., 2017) é 100) a cada 20 gerações.
- RVEA (CHENG et al., 2016): a cada 10% do processo evolucionário.
- MOEA/D-AWG (WU et al., 2017): entre 30% e 70% do processo evolucionário, a cada 20 gerações.
- g-DBEA (ASAFUDDOULA; SINGH; RAY, 2017): a cada 10 gerações.
- MOEA/D-AM2M (LIU et al., 2018): a cada 100 gerações.
- AdaW (LI; YAO, 2017) e MOEA/D-URAW (FARIAS et al., 2018): A cada 5%, até 90% do processo evolucionário.

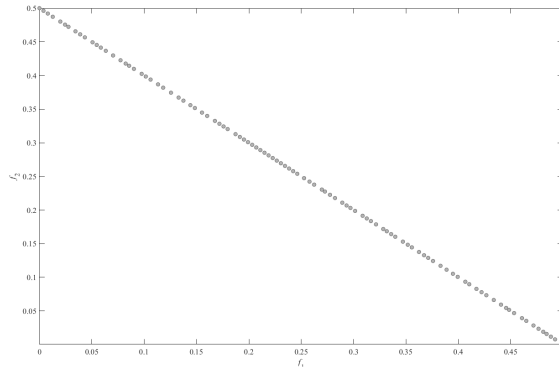
há uma grande variedade de momentos de adaptação na literatura, de apenas uma única vez para todas as gerações. Ampla (a cada 100 gerações) e outras faixas estreitas (a cada 10 gerações). Assim, não há consenso sobre o momento apropriado para se adaptar, isso inclui o MOEA/D-URAW (FARIAS et al., 2018). Isso significa, que a adaptação pode não estar sendo executada no momento mais adequado do processo evolucionário. Com o objetivo de definir este momento, é proposto uma métrica que é acoplada ao modelo proposto nesta dissertação, MOEA/D-UR.

A 6ª trilha aborda o mecanismo de substituição da população, a respeito disso, Wang et al. (2014) propuseram o GR, usado no MOEA/D-GR. Esta proposta tem o objetivo de sempre atribuir o novo indivíduo na vizinhança onde se tem o melhor resultado da função de decomposição, deste modo, caso o novo indivíduo seja gerado numa posição do espaço objetivo com péssimo resultado da função de decomposição, não seja descartado. No entanto, ao lidar com PFs desconectadas, o GR permite indivíduos dominados em sua população. Esta limitação ocorre devido aos vetores de peso serem fixos durante todo o processo evolucionário e a dinâmica de comportamento do próprio GR. É apresentada na Figura 11 as PFs de dois problemas desconectados e as soluções finais do MOEA/D-GR para esses problemas.

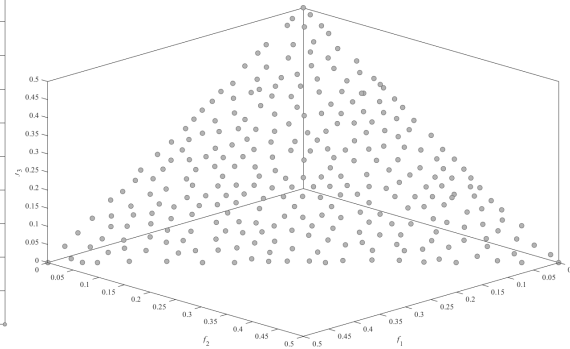
Há no modelo MOEA/D (ZHANG; LI, 2007), a possibilidade de que uma solução filha substitua todos os indivíduos em sua vizinhança. Esta limitação foi amenizada com o modelo MOEA/D-DE de Li e Zhang (2009), onde a solução filha pode substituir no máximo 2 indivíduos da vizinhança. Ainda assim, no final do processo evolucionário, pode haver indivíduos no espaço objetivo com os mesmos valores de função.

Com o objetivo de melhorar a diversidade e a convergência da população, isto é, remover indivíduos que sejam dominados ou repetidos, é proposto uma técnica de divisão do espaço objetivo. No próximo capítulo é apresentado em detalhes o modelo proposto, MOEA/D-UR.

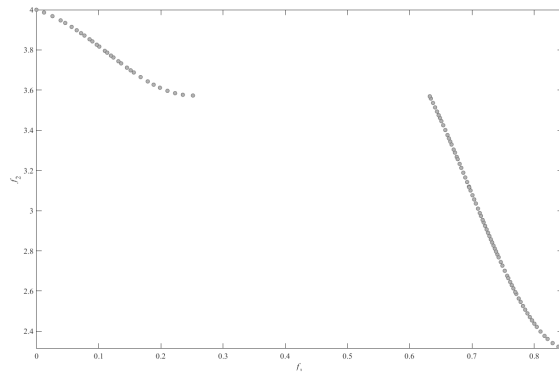
Figura 9 – Distribuição de soluções obtidas pelo MOEA/D-URAW para problemas regulares e irregulares, com 2 e 3 objetivos.



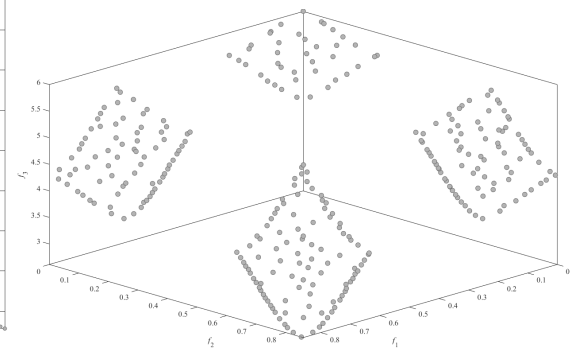
(a) MOEA/D-URAW em DTLZ1



(b) MOEA/D-URAW em DTLZ1



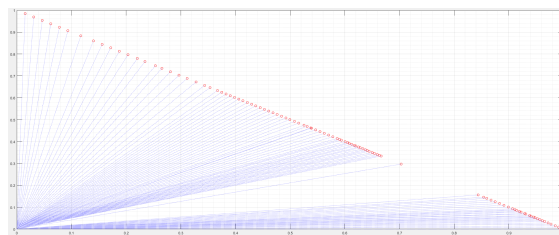
(c) MOEA/D-URAW em DTLZ7



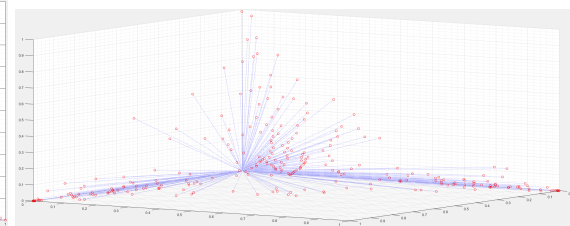
(d) MOEA/D-URAW em DTLZ7

Fonte: O autor (2019).

Figura 10 – Distribuição final dos vetores de peso do MOEA/D-URAW no problema DTLZ7, com 2 e 3 objetivos.



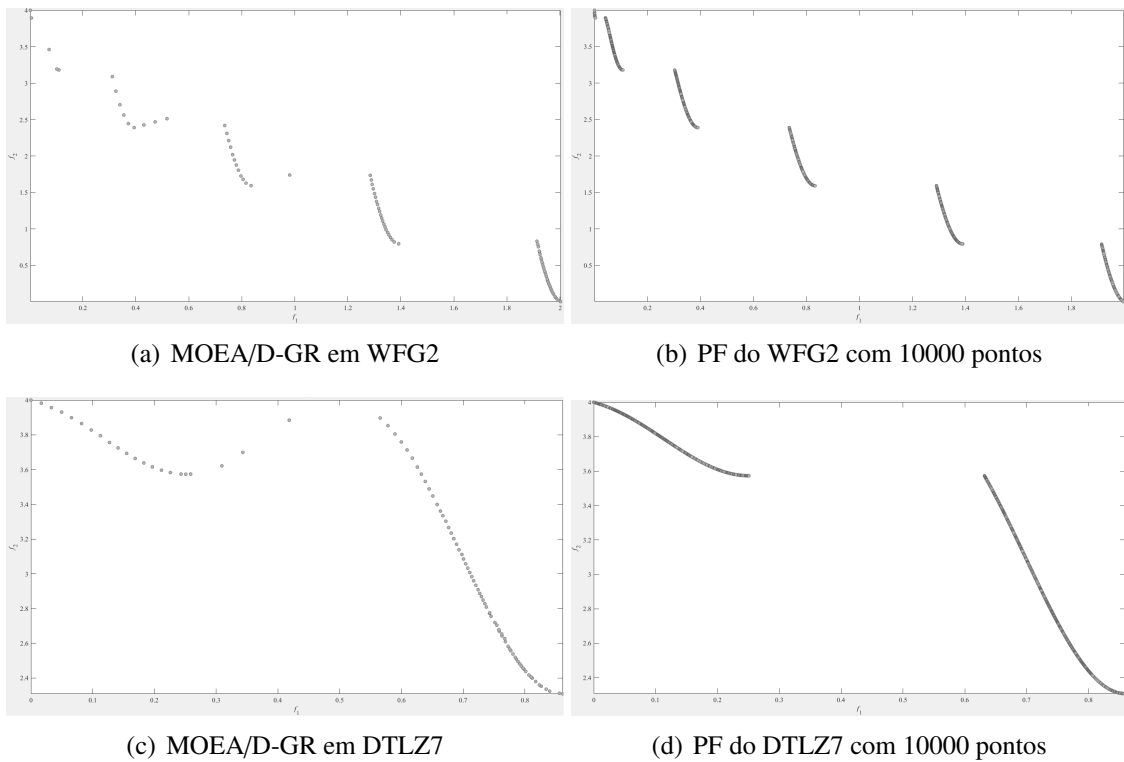
(a) MOEA/D-URAW em DTLZ7; $m=2$; $N=100$



(b) MOEA/D-URAW em DTLZ7; $m=2$; $N=300$

Fonte: O autor (2019).

Figura 11 – Limitação do MOEA/D-GR em PFs Desconectadas.



Fonte: O autor (2019).

3 MOEA/D COM ATUALIZAÇÃO QUANDO REQUERIDA

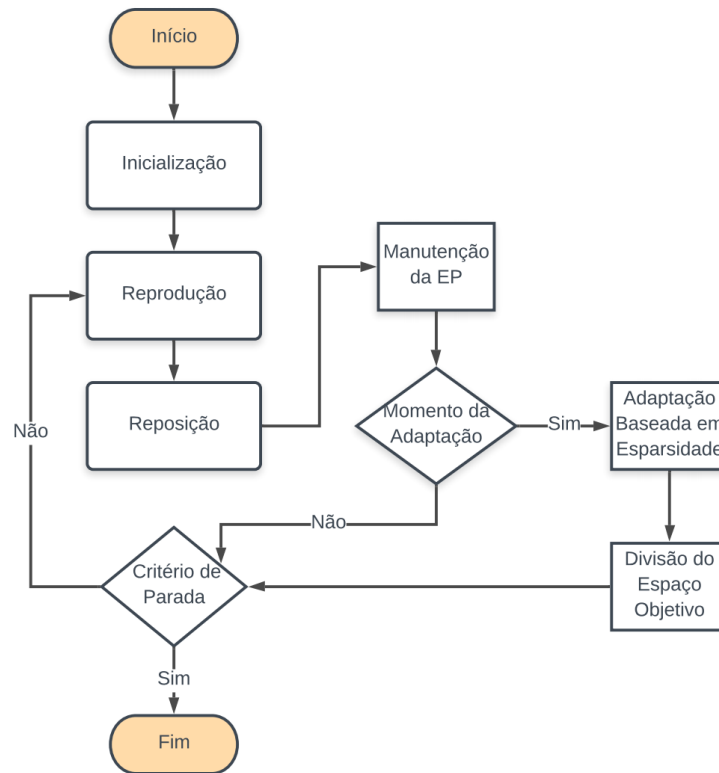
O Capítulo 2 evidenciou que na última década houve muitas propostas para melhorar o desempenho do MOEA/D (ZHANG; LI, 2007). Não obstante, o uso e apresentação dos benefícios da abordagem UR (ZHANG; LIU; LI, 2009) para geração de subproblemas, combinada com um método para adaptação (QI et al., 2014) durante o processo evolucionário, está proposto somente a partir do primeiro algoritmo desenvolvido ao longo deste mestrado a esta dissertação, o MOEA/D-URAW (FARIAS et al., 2018).

MOEA/D com atualização quando requerida (MOEA/D-UR) é uma extensão do MOEA/D-URAW, pois mantém as técnicas de geração (Sessão 3.1) e de adaptação (Sessões 3.2 a 3.4) dos subproblemas ao mesmo tempo que adiciona os métodos de adaptação quando requerida (Sessão 3.5) e de divisão do espaço objetivo (Sessão 3.6). Este capítulo também apresenta detalhes do modelo proposto através de 3 pseudo códigos, na Sessão 3.7. Por último é feita a análise da complexidade computacional do MOEA/D-UR na Sessão 3.8.

A Sessão 2.5 do Capítulo 2, apresenta limitações em abordagens baseadas em decomposição. A determinação do momento de adaptação é pré-fixado e o mecanismo de reposição permite repetições, em especial, a técnica GR permite soluções dominadas em sua população. Com objetivo de lidar com essas limitações, é proposto o modelo MOEA/D-UR. Uma representação em alto nível é apresentado na Figura 12 e seus componentes são descritos a seguir.

- **Inicialização:** Como a maioria dos MOEA/Ds, nesta etapa são definidos os indivíduos da população P , vetores de pesos λ e o ponto de referência z^* . Os vetores de peso são gerados através do método UR ou aproximadamente uniforme ao invés do *simplex lattice*; além disso, a transformação WS é aplicada para esses vetores, mais detalhes na Seção 3.1;
- **Reprodução:** Para aumentar a diversidade na população, os mesmos autores do primeiro MOEA/D (ZHANG; LI, 2007), propõem que a seleção de pais seja probabilisticamente realizada a partir de uma de duas origens: vizinhança do vetor de pesos ou toda população, detalhes sobre esta reprodução (LI; ZHANG, 2009) é descrita na Seção 2.3.4;
- **Reposição:** O primeiro MOEA/D (ZHANG; LI, 2007) permitia que uma solução descendente substitui-se todas as soluções na vizinhança, caso esta melhorasse o resultado da função de decomposição aplicada, causando queda significativa dos níveis de diversidade do modelo original. Para evitar tal consequência, Li e Zhang (2009) propuseram que uma nova solução só pode repor no máximo duas soluções existentes, esta modificação está descrita na Seção 2.3.5.
- **Atualização da EP:** Há uma população externa contendo apenas indivíduos não-dominados, seu tamanho é limitado a duas vezes o tamanho da população do MOEA/D-UR.

Figura 12 – Fluxograma do MOEA/D-UR.



Fonte: O autor (2019).

O nível de esparsidade (Seção 3.2) dos indivíduos na frente do Pareto é considerado para remover a quantidade excedente (Seção 3.3).

- **Adaptação Baseada em Esparsidade:** A esparsidade dos indivíduos influencia a adição e remoção de subproblemas, estes procedimentos são detalhados na Seção 3.4;
- **Determinação do Momento da Adaptação:** Para decidir quando ocorre adaptação, verifica-se se ocorreu convergência das soluções aos seus subproblemas com base em métrica de melhoria das soluções dos subproblemas como detalhada na Seção 3.5;
- **Divisão do Espaço Objetivo:** Ocorre com o objetivo de melhorar a diversidade e convergência dos indivíduos na frente do Pareto, sendo executado após a adaptação como descrito na Seção 3.6.
- **Crítério de Parada:** É utilizado o número de gerações ou quantidade de avaliações de função.

3.1 GERAÇÃO DOS SUBPROBLEMAS

MOEA/D-UR usa o método UR (ZHANG; LIU; LI, 2009; FARIAS et al., 2018) para gerar subproblemas, seguido da transformação WS (QI et al., 2014). Os passos abaixo descrevem como um conjunto de N vetores de peso $\lambda \in \mathbb{R}^m$ (m é o número de objetivos) são gerados:

1. A partir de uma distribuição uniforme, gere 5000 vetores de peso para construir o conjunto λ_1 , conforme feito por Zhang, Liu e Li (2009). Além disso, λ é inicializado como o conjunto contendo todos os vetores de peso apresentados na matriz identidade m -dimensional.
2. Encontre o vetor de peso em λ_1 com a maior das menores distâncias euclidiana em relação aos vetores de peso em λ (ZITZLER; LAUMANN; THIELE, 2001), então, transfira-o de λ_1 para λ .
3. Pare e retorne λ se o tamanho de λ for N . Caso contrário, vá para o segundo item e repita o processo.

Após a geração de N vetores de peso λ , aplica-se em cada vetor de peso a transformação WS que é descrita na Equação a seguir:

$$\lambda' = WS(\lambda) = \left(\frac{\frac{1}{\lambda_1}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i}} \quad \cdots \quad \frac{\frac{1}{\lambda_m}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i}} \right) \quad (3.1)$$

Nesta abordagem, a quantidade de subproblemas gerados é flexível, ou seja não é determinada pelo número de objetivos. No entanto, manter um conjunto de subproblemas sem mudanças ao longo do processo evolucionário significa assumir que a PF segue uma dada geometria. Essa opção pode ser ineficaz pois o emprego de um conjunto de subproblemas fixos (estáticos) pode não levar a produzir soluções bem distribuídas para todos os formatos de PF. A adaptação dos subproblemas ajuda a lidar com essa limitação (QI et al., 2014; LI; YAO, 2017; WU et al., 2017; FARIAS et al., 2018) uma vez que reposiciona o subproblema para uma região de relevância ao formato da PF. Um método de adaptação baseado na esparsidade dos indivíduos é apresentado nas seções seguintes.

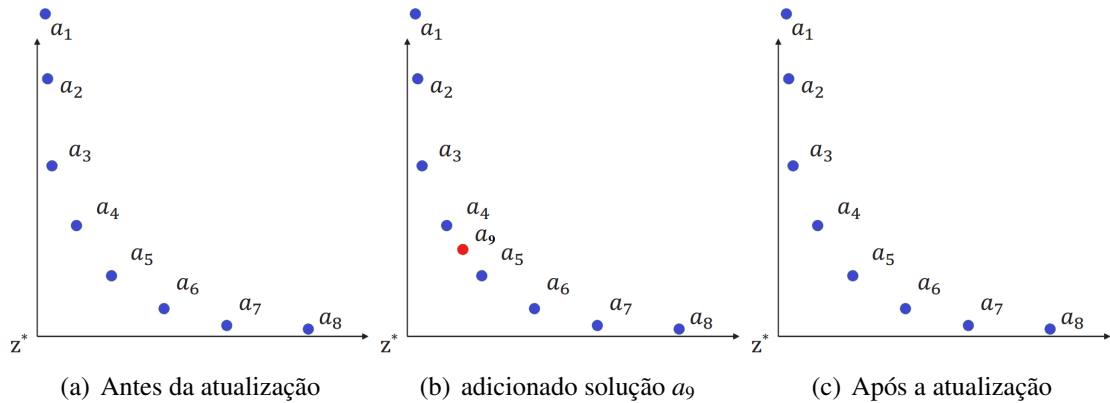
3.2 FUNÇÃO DE NÍVEL DE ESPARSIDADE

O nível de esparsidade, do inglês *Sparsity Level* (SL), entre indivíduos de uma população indica qual subproblema deve ser selecionado para ser removido ou adicionado. O SL é baseado em uma distância de vizinhança (KUKKONEN; DEB, 2006) definida da seguinte forma:

$$SL(ind^j, pop) = \prod_{i=1}^m L_2^{NN_i^j} \quad (3.2)$$

onde $L_2^{NN_i^j}$ é a distância euclidiana da aptidão do j -th indivíduo, ind^j , para seu i -th vizinho mais próximo da população pop . As m (número de objetivos) distâncias euclidianas mais próximas são usadas no cálculo deste produto (QI et al., 2014; FARIAS et al., 2018).

Figura 13 – Uma ilustração da atualização da população externa.



Fonte: Adaptado de Li e Yao (2017).

3.3 ATUALIZAÇÃO DA POPULAÇÃO EXTERNA

O objetivo de usar a EP é armazenar as soluções não-dominadas visitadas e fornecer uma orientação para adicionar e remover subproblemas na população em evolução atual para obter uma melhor diversidade.

No MOEA/D-UR, a capacidade limite é até duas vezes o tamanho da população evolucionária (LI; YAO, 2017). Quando o número de soluções na EP excede a capacidade, é utilizado o SL (Equação 3.2) para remover as soluções excedentes com má distribuição, ou menos esparsas. A Figura 13 apresenta esse procedimento. Tendo-se uma EP de capacidade máxima 8, ao adicionar uma nova solução não-dominada, excedendo a capacidade limite, é verificado a esparsidade e o menos esperso é removido.

3.4 ADAPTAÇÃO DOS SUBPROBLEMAS

O número de subproblemas atualizados, do inglês *Number of Updated Subproblems* (NUS), neste modelo é 5% do tamanho total da população, ou seja, 5% dos subproblemas são removidos da população e outros 5% de novos subproblemas são criados e em seguida adicionados à população (QI et al., 2014; FARIAS et al., 2018).

O indivíduo com o menor SL é removido da população junto com o subproblema associado a ele. No início da adaptação, o nível de esparsidade de cada indivíduo na população é calculado usando a Equação 3.2. Enquanto não forem removidos NUS subproblemas, os passos calcular o SL e remover o de menor valor são repetidos (QI et al., 2014; FARIAS et al., 2018).

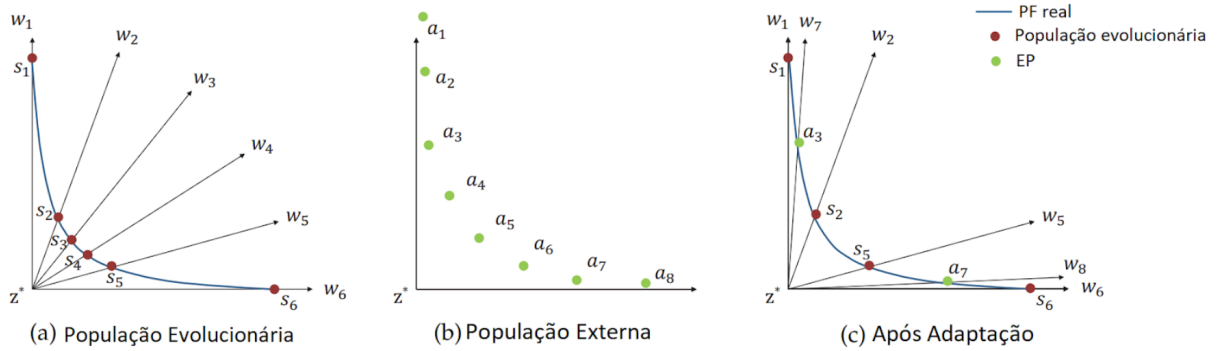
Além da população que evolui por gerações, o MOEA/D-UR faz uso de uma população externa, **EP**, que armazena soluções não-dominadas encontradas durante a simulação da evolução. O procedimento para criar novos subproblemas, consiste em calcular o SL de cada indivíduo da **EP** em relação à população atual, usando a Equação 3.2. Em seguida, é criado um novo subproblema usando o indivíduo x^{sp} que possui o maior SL de todos os indivíduos da **EP** em relação a população. O vetor de pesos λ^{sp} do novo subproblema construído é calculado considerando

$F(\mathbf{x}^{sp}) = (f_1^{sp} \dots f_m^{sp})$ e o ponto de referência da população atual $\mathbf{z}^*$:

$$\lambda^{sp} = \left(\frac{\frac{1}{f_1^{sp} - z_1^*}}{\sum_{k=1}^m \frac{1}{f_k^{sp} - z_k^*}} \dots \frac{\frac{1}{f_m^{sp} - z_m^*}}{\sum_{k=1}^m \frac{1}{f_k^{sp} - z_k^*}} \right) \quad (3.3)$$

Por fim, a solução $\mathbf{x}^{sp}$ é associada ao recém-construído subproblema λ^{sp} e adicionada à população atual. O processo é repetido até que os NUS subproblemas sejam adicionados à população (QI et al., 2014; FARIAS et al., 2018). A Figura 14 ilustra o procedimento de adição e remoção de subproblemas.

Figura 14 – Ilustração da adaptação baseada em esparsidade.



Fonte: Adaptado de Li e Yao (2017).

3.5 ADAPTAÇÃO QUANDO REQUERIDA

O uso da Métrica de Melhoria (IM), Equação (3.4), visa detectar a tendência de convergência das soluções populacionais para os vetores de peso, expressa por pequena variação nos valores médios da função Tchebycheff.

$$IM = média(1 - \frac{I_{new}}{I_{old}}), \quad (3.4)$$

onde, I_{new} e I_{old} são vetores com os valores obtidos na função de decomposição Tchebycheff (Equação (2.4)), de cada solução de população em momentos diferentes.

A atualização do peso ocorre quando o valor absoluto da métrica de melhoria (IM) é menor ou igual ao parâmetro ρ . Quanto à periodicidade, são utilizados três parâmetros: *start*, *end* e *period*, respectivamente, o intervalo ao longo do processo evolucionário que é interessante para iniciar e finalizar a verificação da adaptação do vetor de peso; e a diferença entre os cheques medidos em gerações.

3.6 ABORDAGEM DE DIVISÃO DO ESPAÇO OBJETIVO

A divisão espacial no espaço dos objetivos sucede a adaptação dos subproblemas, e visa inserir diversidade ao processo evolucionário. Os pontos da frente do Pareto são divididas em grupos e

cada um deles é tratado como um problema separado, permitindo a desconcentração de pontos na região mais central da fronteira do Pareto. O algoritmo *k-means* (LLOYD, 1982) é empregado para dividir o espaço objetivo em grupos, totalizando número de objetivos + 1 grupos. Para cada grupo, N (tamanho da população em vigor) subproblemas são gerados pelo método UR. A Figura 15 ilustra este passo com um exemplo de tamanho da população 100 e um problema com 2 objetivos.

O conjunto R é formado contendo indivíduos presentes na EP e população atual. Em seguida, é verificado para cada subproblema de cada grupo, qual o indivíduo em R possui o melhor resultado da função de decomposição TCH para associá-los. O próximo passo é gerar para cada grupo, descendentes, utilizando os mesmos operadores genéticos aplicados à população em vigor.

Depois de gerados $2N$ descendentes no total para todos os grupos, faz-se uma seleção dos indivíduos distintos e apenas estes são mantidos em R . Por último, é verificado para cada subproblema da população em vigor qual indivíduo em R tem o melhor resultado de decomposição TCH. Se este indivíduo do conjunto R não estiver presente na população e tiver resultado de decomposição TCH melhor que o indivíduo já associado ao subproblema da população em vigor, ele é associado a este subproblema.

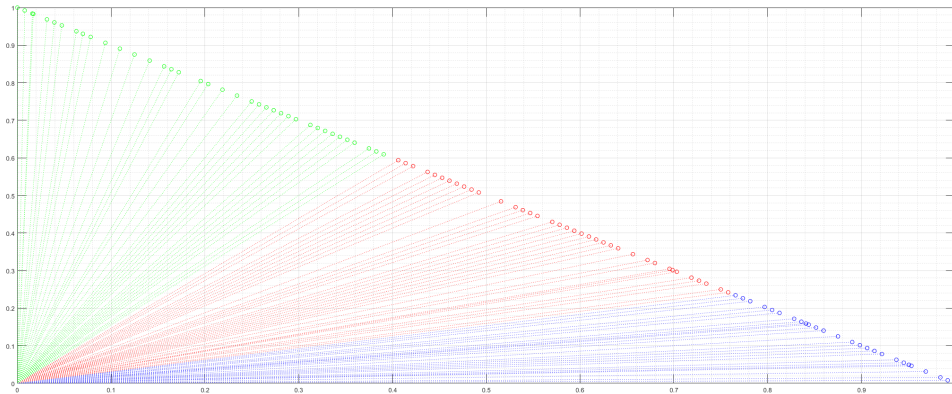
3.7 PSEUDO-CÓDIGOS

O pseudo código do MOEA/D-UR é apresentado no Algoritmo 3, integrado com o algoritmo do MOEA/D (LI; ZHANG, 2009). No início do algoritmo, o conjunto de vetores de peso iniciais λ é gerado usando o método UR (linha 2), sendo aplicada a transformação-WS em λ logo após (linha 3). Então, a estrutura da vizinhança $B(i)$ de cada subproblema λ_i é inicializada (linha 4). O ponto de referência ideal z^* é calculado com o menor valor de cada objetivo encontrado atualmente na população (linha 5).

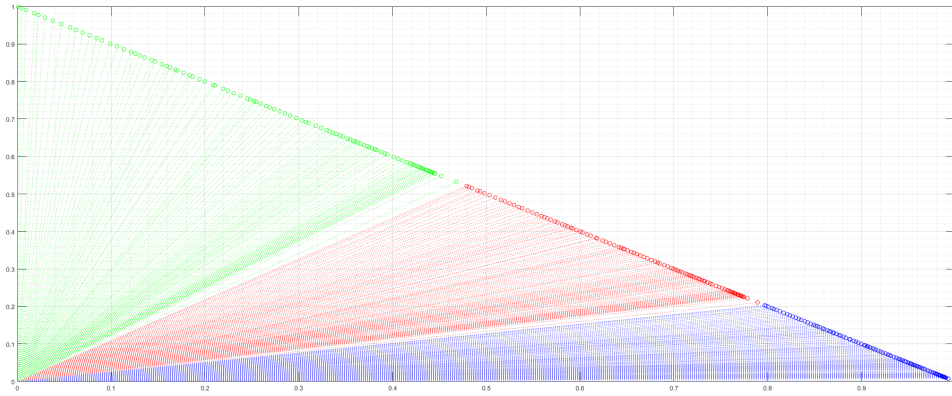
Em cada geração, um conjunto para reprodução E é construído para cada subproblema, seja com indivíduos de sua vizinhança ou de toda a população, para gerar um descendente $\bar{x}$ através dos operadores genéticos SBX e mutação polinomial. A probabilidade de selecionar soluções pai dentro da vizinhança é controlada por δ (linha 10-16). O descendente $\bar{x}$ atualiza a solução atual x^j de um subproblema λ^j em E se a função de decomposição de TCH puder ser melhorado (linha 19-27). Se a prole $\bar{x}$ é não-dominada em relação à EP , a EP recebe a prole $\bar{x}$, causando a remoção da EP , qualquer solução q que seja dominada pelo descendente $\bar{x}$. Se o tamanho da EP é 2 vezes maior que o tamanho da população, o indivíduo mais esparsa na EP é removido (Algoritmo 4).

Finalmente, a partir de *inicio* até *fim* do processo evolucionário, a cada *periodo* gerações, o MOEA/D-UR usa a *Improvement Metric* (IM) para verificar se deve atualizar os subproblemas da população, este passo é apresentado no Algoritmo 5, seguido da execução de divisão do espaço objetivo presente em Algoritmo 6 (linhas 32-41). O MOEA/D-UR para quando o número máximo de gerações é atingido.

Figura 15 – Exemplo da abordagem de divisão do espaço com dois objetivos.



(a) Conjunto de 100 subproblemas da população atual dividido em 3 grupos



(b) Conjunto de 300 subproblemas durante a abordagem de divisão espacial (cada grupo está associado a 100)

Fonte: O autor (2019).

3.8 COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL

O Algoritmo 3 fornece as etapas principais do MOEA/D-UR. Como pode ser visto, além da atualização da EP (linhas 29-37) e adaptação dos subproblemas (linhas 38-47), as etapas restantes são etapas comuns em um algoritmo genético de múltiplos objetivos baseado em decomposição. A implementação deste mestrado se baseia em uma versão MOEA/D amplamente utilizada (LI; ZHANG, 2009) cuja complexidade computacional é $O(mTN)$; onde, m é o número de objetivo; T , o tamanho da vizinhança; e N , o tamanho da população.

Para realizar a atualização da EP é requerido a complexidade computacional de $O(m(N_{ext})^2)$, onde N_{ext} representa o tamanho da EP (QI et al., 2014). Assumindo que $N_{ext} = 2N$, tem-se que $O((N_{ext})^2) = O(4N^2) = O(N^2)$, logo, a complexidade da atualização da EP é $O(mN^2)$.

A adaptação dos subproblemas, tem 4 etapas, remoção, adição, atualização da vizinhança e divisão espacial. A complexidade computacional para remover os subproblemas baseado em esparsidade é $O((NUS)mN^2)$, enquanto que para adicionar os subproblemas requer o esforço de

$O((NUS)mN(N_{ext}))$ ou $O((NUS)mN^2)$. A complexidade do tempo para atualizar a vizinhança é $O(mTN^2)$. Na etapa de divisão espacial, o algoritmo *k-means* requer $O(m^2N)$; a reprodução e a realocação dos novos descendentes na população requer $O(mN^2)$. Assim, a complexidade computacional da adaptação é $O(mTN^2)$.

Sendo assim, o custo da execução do MOEA/D-UR é igual ao custo computacional do modelo base + atualização da EP + adaptação dos pesos; $O(mTN) + O(mN^2) + O(mTN^2)$; Logo, a complexidade computacional do modelo MOEA/D-UR é igual a $O(mTN^2)$.

3.9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresentou o modelo proposto, MOEA/D-UR, inicialmente considerando as suas diferenças estruturais com relação ao modelo MOEA/D (LI; ZHANG, 2009), delineando cada um destes componentes que o diferem e, em seguida fazendo uma análise da complexidade computacional de pior caso. A validação desta proposição é feita no capítulo seguinte considerando-se um conjunto de problemas simulados e reais.

Algoritmo 3 MOEA/D-UR

```

1:  $EP \leftarrow \emptyset$ ;
2: Inicialize a população  $P$  e o conjunto de subproblemas  $\lambda$ ;
3: Aplique a transformação WS no conjunto  $\lambda$ ;
4: Determine a vizinhança  $B(i)$  de cada subproblema  $i \in \lambda$ ;
5: Calcule o ponto de referência ideal  $z^*$ ;
6:  $Gen \leftarrow 0$ ;
7:  $I_{old} \leftarrow g^{TCH}(P|\lambda, z^*)$ ;
8: enquanto  $Gen < Gen_{max}$  faça
9:    $O \leftarrow \emptyset$ ;
10:  para cada subproblema  $i \leftarrow 1$  até  $N$  faça
11:    se  $valorAleatorioEntre(0, 1) < \delta$  então
12:       $E \leftarrow B(i)$ ;
13:    senão
14:       $E \leftarrow \{1, \dots, N\}$ ;
15:    fim se
16:    Selecione aleatoriamente soluções de  $E$  para gerar um descendente  $\bar{x}$ , Avalie  $F(\bar{x})$ ;
17:     $z^* \leftarrow \min(z^*, F(\bar{x}))$ ;
18:     $O \leftarrow O \cup \bar{x}$ ;
19:     $update \leftarrow 0$ ;
20:    enquanto  $update < nr$  and  $E \neq \emptyset$  faça
21:       $j \leftarrow$  Um índice de  $E$  aleatoriamente;
22:      Remova o índice atribuído a  $j$  de  $E$ ;
23:      se  $g^{TCH}(\bar{x}|\lambda^j, z^*) \leq g^{TCH}(x^j|\lambda^j, z^*)$  então
24:         $x^j \leftarrow \bar{x}$ ;
25:         $update \leftarrow update + 1$ ;
26:      fim se
27:    fim enquanto
28:  fim para
29:  se  $Gen \leq Gen_{max} \times fim$  então
30:    Realize a atualização na  $EP$  através do Algoritmo 4;
31:  fim se
32:  se  $(inicio \leq Gen/Gen_{max} \leq fim \text{ E } \text{mod}(Gen, \text{período}) = 0)$  então
33:     $I_{new} \leftarrow g^{TCH}(P|\lambda, z^*)$ ;
34:    Calcule  $IM$  usando a Equação 3.4;
35:     $I_{old} \leftarrow I_{new}$ ;
36:    se  $abs(IM) \leq \rho$  então
37:      Atualize os subproblemas  $\lambda$  e a população  $P$  usando o Algoritmo 5;
38:      Atualize a população  $P$  usando o Algoritmo 6;
39:    fim se
40:  fim se
41:   $Gen \leftarrow Gen + 1$ ;
42: fim enquanto
43: retorne  $P$ ;

```

Algoritmo 4 Atualização da EP

- 1: Requer: O (conjunto de descendentes), N (tamanho da população), e EP (população externa)
 - 2: **para** $o \leftarrow 1$ **até** O **faça**
 - 3: **se** $\nexists q \in EP, q < o$ **então**
 - 4: $EP \leftarrow EP \cup o$;
 - 5: $EP \leftarrow EP \setminus \{q \in EP \mid o < q\}$;
 - 6: **fim se**
 - 7: **fim para**
 - 8: **enquanto** $|EP| > 2N$ **faça**
 - 9: Remova da EP o indivíduo com menor esparsidade usando a Equação 3.2;
 - 10: **fim enquanto**
 - 11: **retorne** EP ;
-

Algoritmo 5 Adaptação dos Pesos

- 1: Requer: P (população), λ (vetores de peso), N (tamanho da população), e EP (população externa)
 - 2: $NUS \leftarrow 0.05N$
 - 3: $adjust \leftarrow 0$
 - 4: **enquanto** $adjust < NUS$ **faça**
 - 5: Calcule a esparsidade de cada indivíduo na população P entre P pela Equação 3.2;
 - 6: Remova o indivíduo com o menor nível de esparsidade;
 - 7: $adjust \leftarrow adjust + 1$;
 - 8: **fim enquanto**
 - 9: **enquanto** $adjust > 0$ **faça**
 - 10: Calcule a esparsidade de cada indivíduo na EP em relação a população P pela Equação 3.2;
 - 11: Gere um novo subproblema λ^{sp} pela Equação 3.3 usando o indivíduo x^{sp} que possui o maior nível de esparsidade da EP ;
 - 12: Adicione o novo subproblema construído λ^{sp} ao conjunto λ , associado com o indivíduo x^{sp} a população corrente P ;
 - 13: $adjust \leftarrow adjust - 1$;
 - 14: **fim enquanto**
 - 15: Atualize os vizinhos de cada vetor de peso λ ;
 - 16: **retorne** P, λ ;
-

Algoritmo 6 Divisão do Espaço Objetivo

- 1: Requer: P (população), λ (vetores de peso), N (tamanho da população), EP (população externa), z^* (ponto de referência) e m (número de objetivos)
 - 2: Inicialize um conjunto de N vetores de peso λ_g usando o método UR;
 - 3: Use k -means para dividir o espaço dos objetivos em $m + 1$ grupos;
 - 4: $R \leftarrow P \cup EP$;
 - 5: **para** cada grupo $i \leftarrow 1$ **até** $m+1$ **faça**
 - 6: $tamanho_grupo_original \leftarrow tamanho_grupo(i)$
 - 7: λ_i recebe λ_g normalizado com os valores max-min dos vetores de peso λ dos indivíduos no grupo i ;
 - 8: Atribua a cada vetor de pesos em λ_i o indivíduo de R com o melhor resultado g^{TCH} ;
 - 9: $O \leftarrow \emptyset$;
 - 10: **enquanto** $|O| < 2 \times tamanho_grupo_original$ **faça**
 - 11: Selecione soluções de acasalamento do grupo i para gerar uma prole $\bar{x}$;
 - 12: Avalie $F(\bar{x})$;
 - 13: $z^* \leftarrow \min(z^*, F(\bar{x}))$;
 - 14: $O \leftarrow O \cup \bar{x}$;
 - 15: Faça $\bar{x}$ substituir os indivíduos do grupo i que têm pior g^{TCH} ;
 - 16: **fim enquanto**
 - 17: Atualize a EP usando o conjunto de descendentes O ;
 - 18: $R \leftarrow R \cup O$;
 - 19: **fim para**
 - 20: Para cada vetor de peso λ da população atual, verifique qual indivíduo em R tem o melhor resultado de decomposição tchebycheff. Se esse indivíduo não estiver presente na população e melhorar o resultado da decomposição TCH, ele é atribuído ao vetor de peso da população atual;
 - 21: **retorne** P ;
-

4 VALIDAÇÃO DO MODELO

Os testes apresentados neste Capítulo tem por objetivo validar o MOEA/D-UR, analisando sob a perspectiva de métricas de qualidade e testes estatísticos as soluções obtidas por ele, comparando-as com algoritmos evolucionários que são o atual estado-da-arte na área de MaOP.

Neste Capítulo são apresentados os resultados obtidos com o algoritmo proposto para sua validação. As seções que formam este capítulo compreendem as definições das configurações experimentais utilizadas (Seção 4.1); o ajuste paramétrico do MOEA/D-UR (Seção 4.2); os setups paramétricos dos problemas e dos MaOEA (Seção 4.3); e as métricas utilizadas nos experimentos (Seção 4.4). Em seguida, são apresentados os resultados simulados e suas análises (Sessão 4.5) e, por último os resultados para problemas do mundo real (Sessão 4.6).

4.1 CONFIGURAÇÃO EXPERIMENTAL

O algoritmo proposto foi implementado na plataforma PlatEMO (TIAN et al., 2017) baseada no MATLAB na qual os 10 MaOEAs usados para comparação já estavam implementados. O modelo proposto em estágio inicial deste mestrado, MOEA/D-URAW, está incluindo entre os MaOEAs. A máquina em que foram executados estes algoritmos e os testes estatísticos possui 16 gigabytes de memória RAM e processador Intel Core i5-8400 de 3.80GHz, com 6 núcleos e 6 Threads.

Os códigos fontes dos dois modelos propostos nesta dissertação estão acessíveis em:

- MOEA/D-UR: "github.com/fariaslrc/MOEA-D-UR";
- MOEA/D-URAW: "github.com/fariaslrc/MOEA-D-URAW".

Para cada um dos problemas, 30 testes independentes foram executados para cada algoritmo, e a média e o desvio padrão de cada métrica considerada são registrados. Como não é trivial determinar de qual distribuição provêm os resultados obtidos, é escolhido um teste estatístico não-paramétrico. Portanto, considerando-se que as amostras são independentes e as comparações são realizadas par a par, optou-se por utilizar o teste estatístico da soma de postos de Wilcoxon com um nível de significância de 5% ($\alpha = 0.05$). Na análise dos resultados experimentais, os símbolos "+", "-" e " $\approx$ " indicam que o resultado de outro MaOEA é significativamente melhor, significativamente pior e estatisticamente semelhante ao obtido pelo MOEA/D-UR, respectivamente (TIAN et al., 2017).

4.2 AJUSTE PARAMÉTRICO

O MOEA/D-UR têm vários parâmetros e ajustá-los não é uma tarefa fácil. Portanto, a metodologia adotada para ajuste é baseada em técnicas de projeto experimental (SALTELLI et al., 2008).

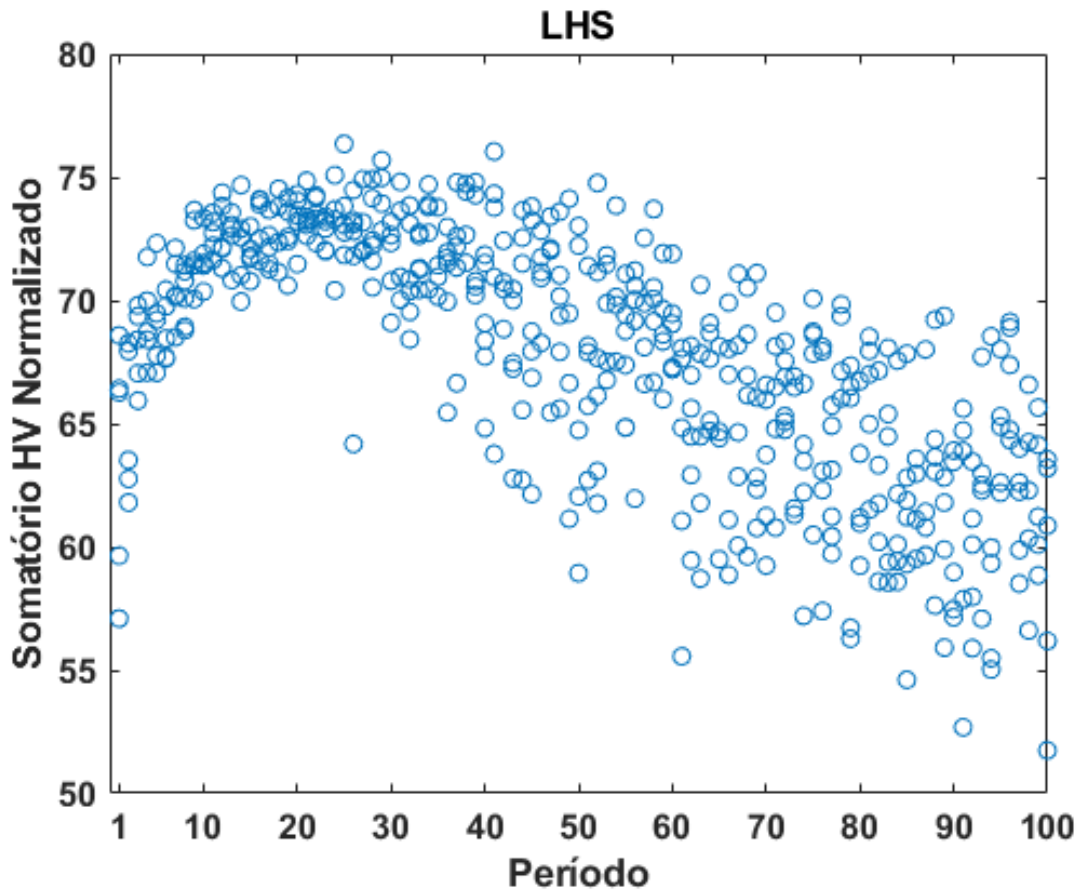
Tabela 1 – Intervalo paramétrico para MOEA/D-UR.

Parâmetros	min	max
<i>inicio</i>	0	0.3
<i>fim</i>	0.7	1
<i>periodo</i>	1	100
ρ	0.01	0.1
Fonte: O autor (2019).		

Assim, cada problema foi executado 500 vezes com diferentes parâmetros amostrados dentro de um intervalo previamente estabelecido, de acordo com a Amostragem de Hipercubo Latino, do inglês *Latin Hypercube Sample* (LHS) (HELTON; DAVIS; JOHNSON, 2005) e é escolhido o conjunto que obteve o maior somatório de HV normalizado (normalizado entre 0 e 1 para cada problema), considerando os 101 problemas. A LHS garante uma cobertura completa do espaço de parâmetros evitando que fiquem regiões grandes sem amostras. Mais especificamente, o intervalo de cada parâmetro é dividido em 500 intervalos de igual probabilidade e um único valor é amostrado aleatoriamente dentro de cada intervalo.

Os intervalos de parâmetros para *inicio*, *fim*, *periodo* e ρ são mostrados na Tabela 1. Estes intervalos são adequados considerando o que a literatura pré-define como momento de adaptação (JAIN; DEB, 2013; LI; YAO, 2017; LIU et al., 2018; QI et al., 2014; CHENG et al., 2016; WU et al., 2017; ASAFUDDOULA; SINGH; RAY, 2017; LIU et al., 2018). Após a execução das 500 configurações paramétricas em cada um dos 101 problemas desta dissertação, conforme a Figura 16 que está ordenada pelo parâmetro *periodo*, a tupla que obteve maior pontuação é selecionada, i.e., *inicio*, *fim*, *periodo* e ρ é, respectivamente, 0.3, 0.85, 25 e 0.1.

Figura 16 – Resultado obtido pela LHS de 500 configurações paramétricas.



Fonte: O autor (2019).

4.3 CONFIGURAÇÃO PARAMÉTRICA

Nos experimentos, 21 problemas são utilizados para validar o desempenho dos 11 MaOEAs: WFG1 - WFG9 (HUBAND et al., 2006), DTLZ1-7 (DEB et al., 2005), IDTLZ1-2 (JAIN; DEB, 2013). Outros três casos, problemas do mundo real, são empregados para testes: vendedor viajante multiobjetivo (MOTSP) (CORNE; KNOWLES, 2007), mochila multiobjetivo (MOKP) (ZITZLER; THIELE, 1999) e planejamento de recursos hídricos (WRP) (MUSSELMAN; TALAVAGE, 1980) cujas configurações de número de objetivos, variáveis de decisão, avaliações de função e característica da PF são informadas na Tabela 2. Neste trabalho, as PFs são classificadas em regulares e irregulares. PFs regulares se referem àquelas que são lisas, contínuas e bem difundidas e as irregulares referem-se àquelas que são degeneradas, desconectadas, invertidas ou com pontas afiadas. A descrição detalhada dos problemas de mundo real estão apresentadas no Apêndice A. O PlatEMO define todos os problemas como minimização (TIAN et al., 2017).

Com exceção do problema planejamento de recursos hídricos, todos os problemas possuem um número escalável de objetivos. IDTLZ1 e IDTLZ2 denotam os problemas DTLZ1 e DTLZ2 invertidos, respectivamente, onde as PFs regulares de DTLZ1 e DTLZ2 são invertidas e, assim, tornam-se irregulares (ISHIBUCHI et al., 2017). Dentre os problemas de teste considerados

Tabela 2 – Configurações do número de objetivos (m), variáveis de decisão (d) e avaliações de aptidão máxima (FE) para cada problema.

Problema de Referência	m	d	FE	frente de Pareto	Fonte:
PF Regular					
DTLZ1	3,5,8,10,15	$m-1+5$	60000	Linear	
DTLZ2-4	3,5,8,10,15	$m-1+10$	60000	Côncava	
WFG4-9	3,5,8,10,15	$m-1+10$	60000	Côncava	
PF Irregular					
DTLZ5-6	3,5,8,10,15	$m-1+10$	60000	Principalmente degenerado	
DTLZ7	3,5,8,10,15	$m-1+20$	60000	Desconectado	
IDTLZ1	3,5,8,10,15	$m-1+5$	60000	Invertida	
IDTLZ2	3,5,8,10,15	$m-1+10$	60000	Invertida	
WFG1	3,5,8,10,15	$m-1+10$	60000	Caudas afiadas	
WFG2	3,5,8,10,15	$m-1+10$	60000	Desconectado	
WFG3	3,5,8,10,15	$m-1+10$	60000	Principalmente degenerado	
MOTSP	3,5,8,10,15	30	60000	mundo real	
MOKP	3,5,8,10,15	250	60000	mundo real	
WRP	5	3	60000	mundo real	
O autor (2019).					

neste trabalho, é feito uma separação destes em PFs regulares e PFs irregulares. Os problemas DTLZ5–DTLZ7, IDTLZ1, IDTLZ2, WFG1–WFG3 estão categorizados como PFs irregulares, e os demais problemas estão como PFs regulares.

O tamanho máximo da população é 120 para todas as funções de testes. Como consequência, o modo de inicialização dos vetores de peso, vetores de referência ou subproblemas dos MaOEAs: NSGA-III, MOEA/D-AWA, MOEA/DD, θ -DEA e RVEA, considerando 3, 5, 8, 10 e 15 objetivos, o tamanho de suas populações são determinados, respectivamente, como 120, 105, 120, 110 e 120. As referências, complexidade computacional e parâmetros de cada algoritmo são apresentadas na Tabela 3. Cada MaOEA comparado é descrito no Apêndice B.

Os operadores de variação para problemas de ponto flutuante são SBX (DEB, 2001) e mutação polinomial (DEB; GOYAL, 1996), com ambos os índices de distribuição definidos como 20 e probabilidade de recombinação e mutação, respectivamente, definidos como 1 e $1/d$ (com d denotando o número de variáveis de decisão). Os operadores de variação nos problemas combinatórios são: recombinação de um ponto, do inglês *one point crossover*, e mutação bit a bit, do inglês *bitwise mutation*, para o MOKP (ISHIBUCHI; AKEDO; NOJIMA, 2014); e cruzamento de ordem, do inglês *order crossover*, e mutação ligeira, do inglês *slight mutation*, para o MOTSP (FOGEL, 1988).

4.4 MÉTRICAS DE DESEMPENHO

A qualidade das soluções geradas por cada algoritmo é avaliada a partir da perspectiva de duas métricas de desempenho amplamente utilizadas: IGD e o HV.

IGD: Seja P^* um conjunto de pontos de referência distribuídos uniformemente na frente de Pareto e P seja o conjunto de soluções. O valor IGD de P pode ser definido da seguinte forma:

$$IGD(P, P^*) = \frac{\sum_{v \in P^*} d(v, P)}{|P^*|} \quad (4.1)$$

onde $d(v, P)$ é a distância euclidiana do ponto $v \in P^*$ até o ponto mais próximo em P . $|P^*|$ é a cardinalidade de P^* . Com exceção dos problemas de mundo real, todos os experimentos computacionais empregaram 10.000 pontos de referência (TIAN et al., 2017). Quanto menor for o IGD, melhor será a qualidade de P para aproximar toda a PF.

HV: Seja $y^* = (y_1^* \dots y_m^*)$ um ponto de referência na espaço objetivo dominado por todas as soluções ótimas de Pareto. A métrica HV mede o tamanho da região dominada por P tendo y^* como referência. Dado um ponto de referência y^* , um valor maior de HV indica melhor desempenho. Normalmente, os autores recomendam um ponto de referência y^* ligeiramente maior que o valor máximo de cada objetivo para enfatizar o equilíbrio entre convergência e diversidade. Os experimentos computacionais usam o ponto de referência definido como 10% maior que o limite superior da PF.

Tabela 3 – A referência, complexidade computacional e configuração paramétrica dos onze algoritmos selecionados. N é o tamanho da população e m é o número dos objetivos.

Referência	Algoritmo	Complexidade	Parâmetros do PlatEMO
(DEB; JAIN, 2014)	NSGAIII	$O(N^2 \log^{m-2} N)$	
(QI et al., 2014)	MOEA/D-AWA	$O(mTN^2)$	$rate_update: 0.05, rate_evol: 0.8, wag: 100$
(LI; YANG; LIU, 2014)	SPEA2+SDE	Não Informado	
(WANG; JIAO; YAO, 2014)	Two_Arch2	$O(N^2 \log^{m-2} N)$	$Csize: N, p: 1/m$
(LI et al., 2015)	MOEA/DD	Não Informado	$\delta: 0.9$
(ZHANG; TIAN; JIN, 2015)	KnEA	$O(mN^2)$	$rate: 0.5$
(YUAN et al., 2016b)	θ -DEA	$O(mN^2)$	
(CHENG et al., 2016)	RVEA	$O(mN^2)$	$\alpha: 2, f_r: 0.1$
(FARIAS et al., 2018)	MOEA/D-URAW	$O(mTN^2)$	$\delta: 0.8, nr: 2, rate_update_weight: 0.05$
(TIAN et al., 2018)	AR-MOEA	Não Informado	
Esta dissertação	MOEA/D-UR	$O(mTN^2)$	$inicio = 0.3, fim = 0.85, periodo = 25, \rho = 0.1$

Fonte: O autor (2019).

4.5 VALIDAÇÃO E COMPARAÇÕES

As Tabelas 4, 5, 6 e 7 apresentam os resultados experimentais obtidos pelo MOEA/D-UR e dez MaOEAs estado-da-arte, denominados NSGA-III, MOEA/D-AWA, *Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2 with Shift-based Density Estimation* (SPEA2+SDE), *Two-Archive algorithm 2* (Two_Arch2), MOEA/DD, *Knee point-driven Evolutionary Algorithm* (KnEA), θ -Dominance

based Evolutionary Algorithm (θ -DEA), RVEA, MOEA/D-URAW e AR-MOEA em DTLZ1-DTLZ7, IDTLZ1, IDTLZ2 e WFG1-WFG9 com três, cinco, oito, dez e quinze objetivos. Para facilitar a visualização, o desvio padrão de cada Tabela pode ser visto no Apêndice C.

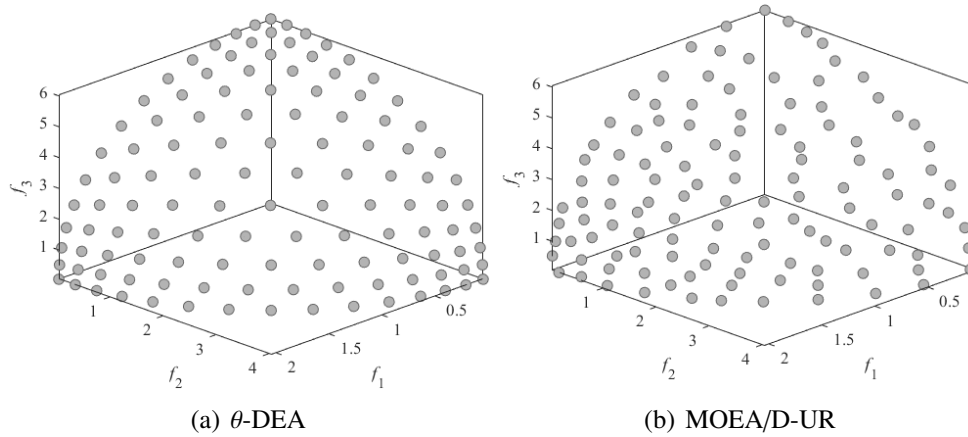
Nas Tabelas 4 e 5 os resultados dos valores de HV estão divididos em frentes regulares e irregulares de Pareto, em geral, o método proposto obteve a maior média em 18 de 90 instâncias. Do ponto de vista das frentes regulares de Pareto, o MOEA/D-UR apresenta desempenho significativamente melhor que seis MaOEAs; e desempenho equivalente ao RVEA. Os resultados também indicam que não alcançou um bom desempenho de HV quando comparado ao NSGA-III, θ -DEA e AR-MOEA. Em frentes de Pareto irregulares, o MOEA/D-UR apresentou-se numericamente melhor que todos os MaOEAs.

As Tabelas 6 e 7 apresentam os valores do IGD, também sob a perspectiva das frentes regulares e irregulares de Pareto, o MOEA/D-UR obteve a melhor média em 22 das 90 instâncias. No cenário de frentes regulares, o MOEA/D-UR têm resultados comparáveis apenas ao MOEA/D-URAW; em todos os outros, o número de vitórias é consideravelmente maior. Para as frentes irregulares de Pareto, o método proposto têm melhores resultados do que todos os MaOEAs, com exceção do MOEA/D-URAW.

Para alguns problemas de teste, os resultados para a métrica IGD mostram um comportamento diferente em comparação com a métrica HV. Por exemplo, no problema WFG5 com 3 objetivos, em termos do valor de IGD, o MOEA/D-UR alcança um valor significativamente melhor para a maioria dos outros MaOEAs; mas quando se tem a perspectiva da métrica HV, ele perde significativamente para o NSGA-III, θ -DEA e AR-MOEA.

Os desempenhos por vezes não correlacionados das métricas HV e IGD podem ser explicados da seguinte forma. Se a convergência para a frente de Pareto de um problema de teste não for difícil, os resultados de comparação de desempenho são baseados principalmente na diversidade de soluções sobre a frente de Pareto. No entanto, o mecanismo de avaliação da diversidade da métrica HV difere da métrica IGD, como pode ser inferido a partir de suas fórmulas de cálculo. Para fornecer uma explicação mais intuitiva, a Figura 17 mostra as soluções de θ -DEA e MOEA/D-UR para o problema WFG5 de 3 objetivos. Para este problema, o θ -DEA alcança o melhor valor de HV porém um valor de IGD pior que o MOEA/D-UR, o contrário também é verdade. Os resultados mostram que as soluções dos dois algoritmos convergem bem (com valores de *Generational Distance* (GD) (VELDHUIZEN; LAMONT, 1998), uma métrica de convergência de 0.00664 e 0.00670, respectivamente). No entanto, eles mostram comportamentos obviamente diferentes na distribuição de soluções. O MOEA/D-UR tem o objetivo de maximizar a esparsidade entre as soluções ao realizar a adaptação dos subproblemas, favorecendo assim a métrica IGD. A PF do WFG5 tem formato côncavo, neste caso, a métrica HV prefere soluções localizadas nas regiões de borda; devido ao critério de esparsidade, o MOEA/D-UR não concentra mais soluções nesta região, tendo assim um desempenho de HV inferior. Portanto, para problemas em que a convergência de soluções para a frente de Pareto é relativamente fácil (como a maioria dos WFGs), a diferença nos mecanismos de avaliação de diversidade de HV e

Figura 17 – Distribuição de soluções obtidas pelo melhor HV e melhor IGD no problema WFG5 de 3 objetivos



Fonte: O autor (2019).

IGD é a principal razão para os desempenhos dissimilares destas métricas.

Os resultados apresentados, indicam a competitividade da proposição MOEA/D-UR ao estado-da-arte. A abordagem proposta adapta os subproblemas quando detecta sinais de convergência das soluções aos seus subproblemas. Tendo como perspectiva PF irregulares, os resultados indicam que o modelo proposto apresentou desempenho competitivo nesta classe de problemas. De modo geral, PF com características regulares, não necessitam de adaptação, pois os pesos uniformemente distribuídos já estariam adequados ao formato da PF, apesar disso, o ajuste fino, feito nos subproblemas gerados de maneira aproximadamente uniformes indicam a efetividade da abordagem proposta perante tais PFs.

4.6 EMPREGO PARA PROBLEMAS REAIS

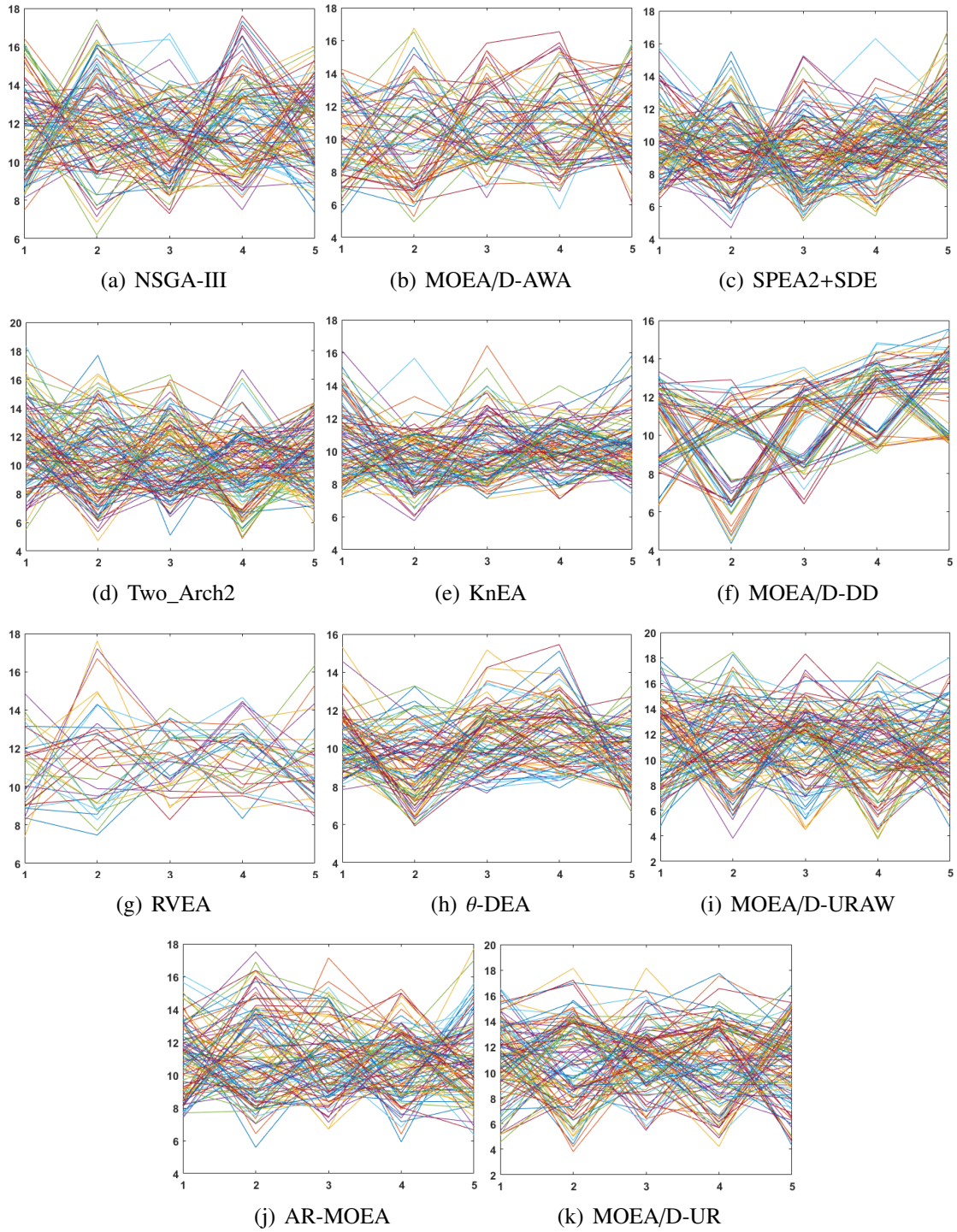
Nesta seção, o desempenho do algoritmo proposto, MOEA/D-UR é testado em três problemas do mundo real: cacheiro viajante multiobjetivo (MOTSP) (CORNE; KNOWLES, 2007), mochila multiobjetivo (MOKP) (ZITZLER; THIELE, 1999) e planejamento de recursos hídricos (WRP) (MUSSELMAN; TALAVAGE, 1980). Esses problemas são usados para mostrar a eficácia do MOEA/D-UR em problemas reais. Apenas a métrica HV é usada, devido ao desconhecimento da frente de Pareto verdadeira destes problemas.

Os 11 MaOEAs têm seus desempenhos apresentados na Tabela 8, observa-se nela os resultados da média e avaliações estatísticas da perspectiva da métrica HV. No geral, o algoritmo proposto MOEA/D-UR alcançou a melhor média em 5 das 11 instâncias. Ao ser comparado com cada MaOEA, a proposta obteve mais resultados significativamente melhores. O MaOEA SPEA2SDE tem desempenho bastante próximo ao MOEA/D-UR; especificamente, esse MaOEA apresenta melhor performance no problema MOTSP, enquanto que o MOEA/D-UR é melhor no MOKP. No problema não-escalável WRP, a proposta MOEA/D-UR apresenta desempenho melhor que sete MaOEAs estado-da-arte, porém seu desempenho é inferior ao NSGA-III,

o KnEA e o AR-MOEA.

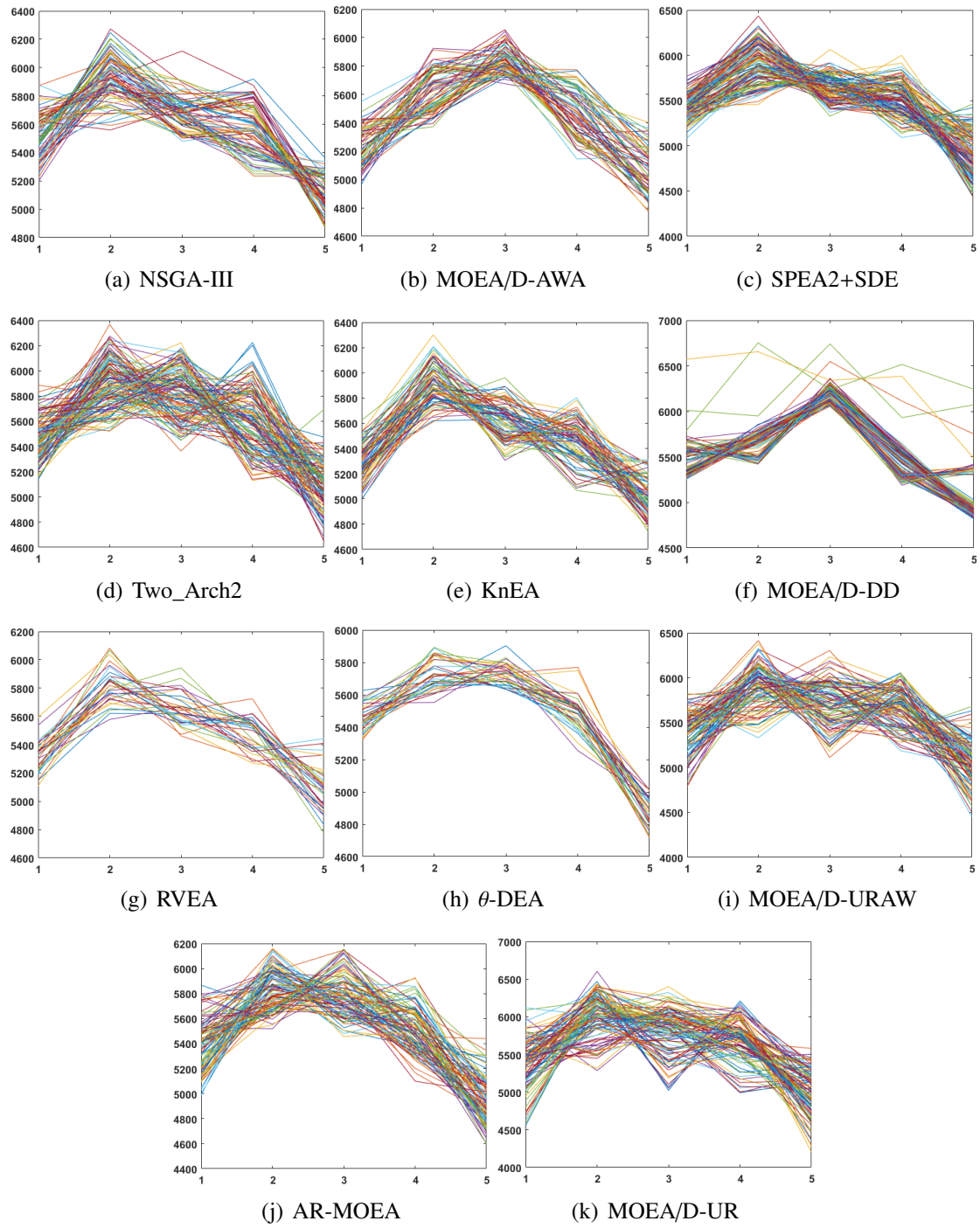
As Figuras 18, 19 e 20 apresentam as soluções finais dos MaOEAs em cada problema de mundo real com cinco objetivos. Os resultados de HV no problema MOTSP são próximos, resultando em conjuntos de Pareto semelhantes. Nos problemas MOKP e MOTSP, o MOEA/D-UR obteve a melhor média. Por último, no WRP, o MOEA/D-UR desempenhou-se com diferença significativa de HV em relação aos três melhores resultados, mas sendo estatisticamente melhor que sete MaOEAs estado-da-arte. O impacto observado na performance do MOEA/D-UR no problema WRP, ocorre porque este modelo não tem tratamento para lidar com restrições, resultando em manter soluções não viáveis em sua população.

Figura 18 – PF mediana dos resultados de HV dos MaOEAs no MOTSP com 5 objetivos.



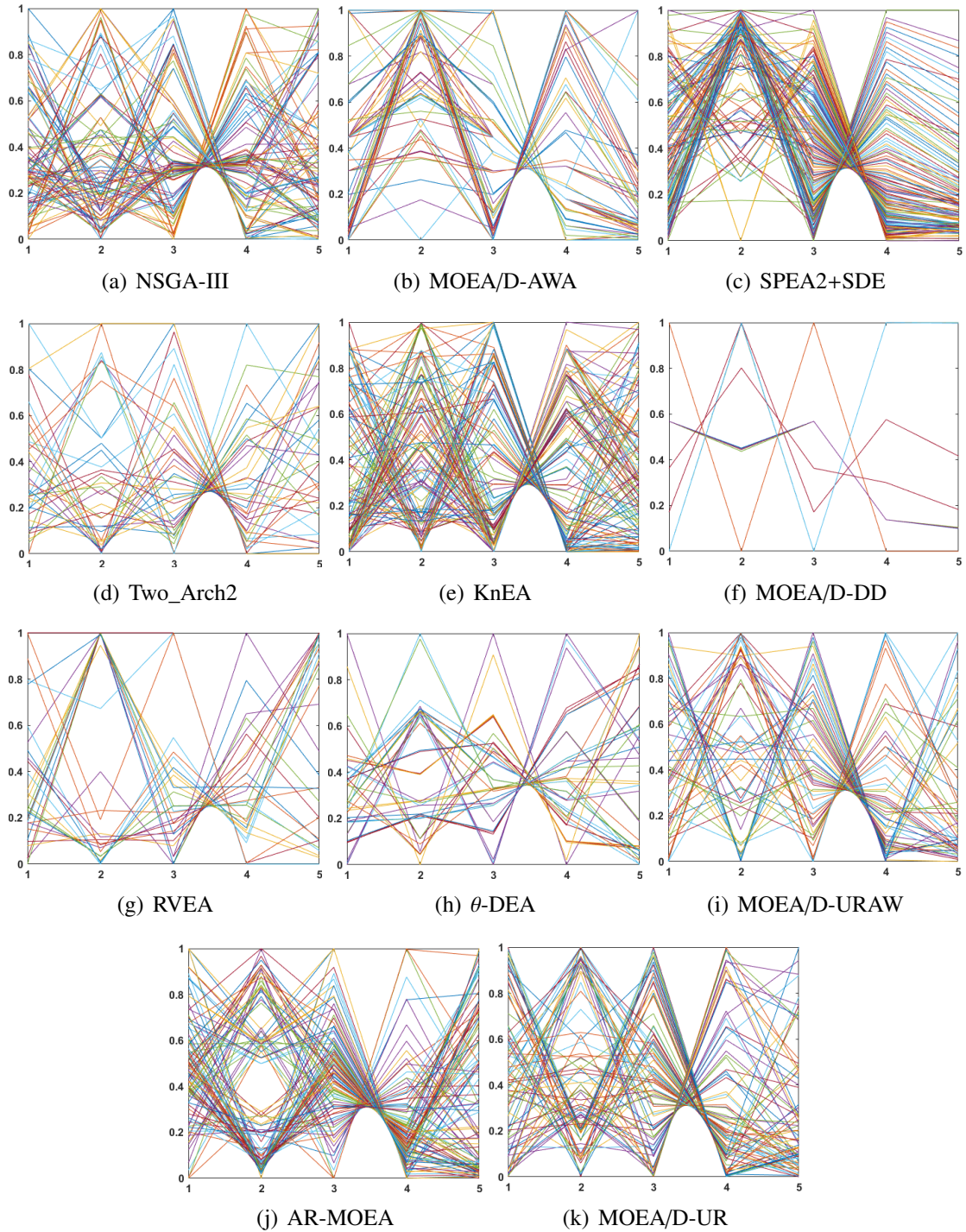
Fonte: O autor (2019).

Figura 19 – PF mediana dos resultados de HV dos MaOEAs no MOKP com 5 objetivos.



Fonte: O autor (2019).

Figura 20 – PF mediana dos resultados de HV dos MaOEAs no problema de mundo-real WRP. É apresentado o HV normalizado obtido em cada objetivo.



Fonte: O autor (2019).

Tabela 5 – HV obtido em PF Irregulares. Resultados destacados indicam melhor média.

Problem	M	NSGAIII	MOEA/D-AWA	SPEA2SDE	Two_Arch2	KnEA	MOEA/DD	RVEA	θ -DEA	MOEA/D-URAW	AR-MOEA	MOEA/D-UR
DTLZ5	3	1.9599e-1 –	1.9844e-1 –	2.0000e-1 –	2.0066e-1 +	1.9562e-1 –	1.8534e-1 –	1.5816e-1 –	1.8652e-1 –	2.0034e-1 +	2.0003e-1 –	2.0028e-1
	5	1.0265e-1 –	1.1936e-1 –	1.1068e-1 –	1.1459e-1 –	5.4968e-2 –	1.0700e-1 –	9.1480e-2 –	1.0359e-1 –	1.1943e-1 –	1.0754e-1 –	1.2195e-1
	8	8.8329e-2 –	9.0998e-2 –	9.2387e-2 –	9.2894e-2 –	3.9071e-2 –	9.4652e-2 –	9.3044e-2 –	9.1112e-2 –	9.9416e-2 –	8.3635e-2 –	1.0016e-1
	10	8.7217e-2 –	9.6806e-2 +	9.1065e-2 –	9.1171e-2 –	3.3072e-2 –	9.3999e-2 –	9.2108e-2 –	9.2310e-2 –	9.5038e-2 –	8.7991e-2 –	9.6343e-2
	15	8.4477e-2 –	9.1293e-2 –	9.0772e-2 –	9.0115e-2 –	1.8313e-2 –	9.1001e-2 –	9.1229e-2 –	8.8898e-2 –	9.0621e-2 –	8.5105e-2 –	9.3332e-2
DTLZ6	3	1.9317e-1 –	1.9843e-1 –	2.0004e-1 –	2.0079e-1 +	1.9382e-1 –	1.8469e-1 –	1.5738e-1 –	1.8457e-1 –	2.0035e-1 –	2.0023e-1 –	2.0041e-1
	5	9.4915e-2 –	1.1917e-1 –	1.0730e-1 –	1.0797e-1 –	6.8344e-2 –	1.0814e-1 –	9.4545e-2 –	9.2083e-2 –	1.1905e-1 –	1.0753e-1 –	1.2590e-1
	8	6.3670e-2 –	9.1184e-2 –	9.1203e-2 –	9.1203e-2 –	2.8903e-3 –	8.7713e-2 –	5.2683e-2 –	9.0933e-2 –	9.2938e-2 –	9.2192e-2 –	1.0409e-1
	10	3.0541e-2 –	9.6699e-2 –	9.1051e-2 –	9.0905e-2 –	0.0000e+0 –	9.2620e-2 –	9.1560e-2 –	9.0928e-2 –	9.0505e-2 –	9.1234e-2 –	9.8744e-2
	15	5.2437e-2 –	9.0942e-2 –	8.9700e-2 –	8.4817e-2 –	0.0000e+0 –	9.0429e-2 –	3.5879e-2 –	9.0915e-2 –	8.4788e-2 –	9.1207e-2 –	9.4309e-2
DTLZ7	3	2.7494e-1 –	2.6991e-1 –	2.7946e-1 +	2.7598e-1 –	2.7928e-1 +	2.1915e-1 –	2.6818e-1 –	2.6887e-1 –	2.8026e-1 +	2.7206e-1 –	2.7860e-1
	5	2.3940e-1 –	1.0592e-1 –	2.5340e-1 +	2.3260e-1 –	2.5001e-1 –	8.6682e-2 –	2.1145e-1 –	2.0764e-1 –	2.4936e-1 –	2.3535e-1 –	2.5149e-1
	8	1.7683e-1 –	1.4714e-1 –	8.2246e-2 –	1.3043e-1 –	1.1269e-1 –	1.2904e-2 –	1.3640e-1 –	1.7016e-1 –	1.8362e-1 +	1.5459e-1 –	1.7930e-1
	10	1.3470e-1 –	2.1675e-2 –	5.0235e-2 –	6.9876e-2 –	2.4035e-2 –	6.5853e-5 –	1.4227e-1 –	1.2121e-1 –	1.7200e-1 +	1.1452e-1 –	1.6055e-1
	15	1.3911e-1 –	4.2785e-5 –	2.4100e-3 –	5.5593e-3 –	5.9501e-4 –	8.8399e-13 –	1.1600e-1 –	1.4946e-1 +	1.3852e-1 –	2.9123e-3 –	1.4016e-1
IDTLZ1	3	2.1260e-1 –	2.2393e-1 –	2.2210e-1 –	2.2210e-1 –	1.5108e-1 –	2.0068e-1 –	1.8794e-1 –	1.9834e-1 –	2.2576e-1 –	2.2277e-1 –	2.2576e-1
	5	5.2951e-3 –	6.9467e-3 –	1.0621e-2 +	8.9887e-3 –	9.9489e-3 –	2.3438e-3 –	1.8275e-3 –	2.0132e-3 –	1.0055e-2 –	8.8291e-3 –	9.9517e-3
	8	2.5972e-5 +	5.6137e-6 –	2.0322e-5 +	1.8894e-5 +	2.3028e-5 +	8.6450e-6 –	2.5652e-6 –	2.1405e-5 +	1.6012e-5 –	2.2252e-5 +	1.5163e-5
	10	3.0947e-7 +	3.0620e-8 –	2.2757e-7 +	1.7668e-7 +	2.3197e-7 +	2.8092e-8 –	8.0638e-9 –	2.3420e-7 +	1.6574e-7 –	1.7520e-7 –	1.3916e-7
	15	3.8584e-12 +	1.3744e-13 +	7.7117e-13 +	8.3048e-13 +	6.1862e-13 +	1.3368e-13 +	1.2670e-13 +	3.9581e-12 +	0.0000e+0 –	1.1805e-12 +	4.6253e-14
IDTLZ2	3	5.2580e-1 –	5.3812e-1 –	5.3483e-1 –	5.4479e-1 +	5.3574e-1 –	5.3265e-1 –	5.2186e-1 –	5.2671e-1 –	5.4405e-1 –	5.3323e-1 –	5.4431e-1
	5	6.2711e-2 –	7.5616e-2 –	1.2151e-1 +	1.1339e-1 +	1.0789e-1 +	7.6240e-2 –	7.3718e-2 –	7.3268e-2 –	9.4928e-2 –	9.6661e-2 +	9.5576e-2
	8	1.7737e-3 +	5.1987e-4 –	4.6551e-3 +	2.6841e-3 +	2.0287e-3 +	2.2568e-3 +	1.4708e-3 +	2.9290e-3 +	1.1327e-3 +	1.2414e-3 +	1.0023e-3
	10	1.7131e-4 +	7.5947e-6 –	3.3838e-4 +	1.2822e-4 +	1.0410e-4 +	7.5214e-5 +	9.2103e-5 +	1.8440e-4 +	5.1341e-4 +	1.6882e-4 +	4.1324e-5
	15	1.3915e-7 +	9.9328e-11 –	1.7440e-7 +	9.5348e-10 –	1.3253e-9 +	6.0790e-8 +	7.0900e-8 +	2.1696e-7 +	4.8003e-9 –	1.6484e-7 +	2.3312e-10
WFG1	3	9.1473e-1 –	9.3732e-1 –	9.3812e-1 –	9.4598e-1 +	9.2795e-1 –	8.0125e-1 –	8.5152e-1 –	9.1648e-1 –	9.3753e-1 –	9.3838e-1 –	9.4319e-1
	5	8.1999e-1 –	9.9344e-1 +	9.9195e-1 +	9.7303e-1 –	9.2662e-1 –	5.9572e-1 –	8.7501e-1 –	8.9588e-1 –	9.9184e-1 +	8.6656e-1 –	9.9085e-1
	8	8.4277e-1 –	8.9743e-1 –	9.9549e-1 –	8.9340e-1 –	9.0890e-1 –	8.9114e-1 –	8.8132e-1 –	9.7692e-1 –	9.9892e-1 –	8.8174e-1 –	9.9945e-1
	10	8.7237e-1 –	9.3263e-1 –	9.9512e-1 –	8.6223e-1 –	9.0445e-1 –	8.2265e-1 –	8.6757e-1 –	9.7700e-1 –	9.9923e-1 –	8.6105e-1 –	9.9968e-1
	15	9.5682e-1 –	9.5105e-1 –	9.8861e-1 –	8.0278e-1 –	6.9179e-1 –	9.6681e-1 –	9.5235e-1 –	9.6896e-1 –	9.9963e-1 –	9.9271e-1 –	9.9977e-1
WFG2	3	9.3374e-1 –	9.2767e-1 –	9.3256e-1 –	9.3656e-1 +	9.3115e-1 –	9.2623e-1 –	9.2651e-1 –	9.3724e-1 +	9.3536e-1 –	9.3461e-1 –	9.3522e-1
	5	9.9213e-1 –	9.8231e-1 –	9.7729e-1 –	9.9195e-1 –	9.8795e-1 –	9.7022e-1 –	9.7924e-1 –	9.8764e-1 –	9.9419e-1 –	9.9243e-1 –	9.9430e-1
	8	9.9432e-1 –	9.8177e-1 –	9.8162e-1 –	9.9379e-1 –	9.8927e-1 –	9.4478e-1 –	9.7963e-1 –	9.8738e-1 –	9.9670e-1 +	9.9519e-1 –	9.9553e-1
	10	9.9289e-1 –	9.8308e-1 –	9.8547e-1 –	9.9381e-1 –	9.8753e-1 –	9.5603e-1 –	9.5104e-1 –	8.9711e-1 –	9.9565e-1 +	9.8964e-1 –	9.9474e-1
	15	9.9044e-1 –	9.8634e-1 –	9.8701e-1 –	9.9477e-1 +	9.6991e-1 –	9.1883e-1 –	9.5293e-1 –	9.5779e-1 –	9.8918e-1 –	9.9131e-1 –	9.8868e-1
WFG3	3	3.8949e-1 –	4.0564e-1 +	3.9971e-1 –	4.0226e-1 –	3.8013e-1 –	3.6258e-1 –	3.4395e-1 –	3.8828e-1 –	4.0250e-1 –	3.7943e-1 –	4.0126e-1
	5	1.6932e-1 –	1.8074e-1 –	8.5669e-2 –	1.8403e-1 –	6.0286e-2 –	1.0015e-1 –	1.2684e-1 –	1.6240e-1 –	2.0467e-1 +	1.0568e-1 –	1.8028e-1
	8	4.5533e-2 +	8.5795e-2 +	0.0000e+0 –	1.1946e-2 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	9.8739e-2 +	1.2470e-2 –	2.8389e-3 –	6.5116e-3
	10	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	3.1625e-4 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0
	15	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0 –	0.0000e+0
+/- / $\approx$		7/28/5	5/31/4	10/26/4	12/21/7	8/29/3	4/34/2	4/34/2	9/29/2	10/13/17	6/29/5	

Fonte: O autor (2019).

Tabela 6 – IGD obtido em PF Regulares. Resultados destacados indicam melhor média.

Problem	M	NSGIII	MOEA/D-AWA	SPEA2SDE	Two_Arch2	KnEA	MOEA/DD	RVEA	θ -DEA	MOEA/D-URAW	AR-MOEA	MOEA/D-UR
DTLZ1	3	1.7691e-2 +	1.7695e-2 +	1.8735e-2 –	1.9489e-2 –	4.3342e-2 –	1.7664e-2 +	1.7656e-2 +	1.7650e-2 +	1.8184e-2 –	1.7673e-2 +	1.7975e-2
	5	6.2975e-2 –	6.5186e-2 –	5.9081e-2 +	6.3218e-2 –	2.2125e-1 –	6.2868e-2 –	6.2911e-2 –	6.2984e-2 –	6.1607e-2 –	6.2980e-2 –	6.1836e-2
	8	1.8407e-1	1.5219e-1	1.0116e-1 +	1.0900e-1 +	1.1275e+0 –	1.2081e-1	1.2149e-1	1.1985e-1 –	1.1705e-1	1.2492e-1 –	1.1603e-1
	10	1.7881e-1 $\approx$	1.3690e-1 +	1.1464e-1 +	1.2904e-1 +	6.6509e+0 –	1.1359e-1 +	1.1688e-1 +	1.2663e-1 +	1.1598e-1 +	1.4595e-1 +	1.4649e-1
	15	2.7398e-1 –	1.9371e-1 $\approx$	1.3554e-1 +	1.7061e-1 +	1.0420e+1 –	1.3957e-1 +	1.8401e-1 $\approx$	2.5178e-1 –	1.9054e-1 $\approx$	1.8342e-1 +	1.8813e-1
DTLZ2	3	4.6738e-2 $\approx$	4.7240e-2 –	7.1614e-2 –	5.2955e-2 –	6.0855e-2 –	4.6734e-2 $\approx$	4.6750e-2 $\approx$	4.7433e-2 –	4.6755e-2 $\approx$	4.6819e-2	
	5	1.9561e-1 –	2.0211e-1 –	2.1939e-1 –	2.0046e-1 –	2.2091e-1 –	1.9563e-1 –	1.9564e-1 –	1.9559e-1 –	1.9352e-1 –	1.9563e-1 –	1.9139e-1
	8	3.8744e-1 –	4.0909e-1 –	3.8036e-1 –	3.9512e-1 –	4.0705e-1 –	3.6911e-1 –	3.6912e-1 –	3.7459e-1 –	3.7459e-1 –	3.6894e-1 –	3.6818e-1
	10	4.9561e-1 $\approx$	4.8436e-1 $\approx$	4.8946e-1 –	4.6732e-1 $\approx$	5.0561e-1 $\approx$	4.3972e-1 +	4.3711e-1 +	4.3663e-1 +	4.6974e-1 $\approx$	4.3885e-1 +	4.6637e-1
	15	6.5463e-1 +	7.3937e-1 –	6.1577e-1 +	6.4092e-1 +	6.2390e-1 +	6.3036e-1 +	6.3540e-1 +	6.3225e-1 +	7.1030e-1 +	6.3049e-1 +	6.8494e-1
DTLZ3	3	4.9245e-2 $\approx$	4.9008e-2 $\approx$	7.0454e-2 –	1.0804e-1 –	9.9128e-2 –	5.0020e-2 $\approx$	5.4951e-2 –	4.9759e-2 –	5.0702e-2 –	4.9483e-2 $\approx$	4.9172e-2
	5	4.9820e-1 –	2.2401e-1 –	2.2578e-1 –	3.0091e-1 –	6.2601e-1 –	2.8757e-1 $\approx$	2.3150e-1 –	2.0489e-1 $\approx$	2.4112e-1 –	2.0896e-1 $\approx$	2.0511e-1
	8	4.0764e+0 –	6.2595e-1 –	4.0392e-1 +	6.2738e-1 –	8.6520e+1 –	6.6570e-1 –	4.7171e-1 +	8.6918e-1 $\approx$	5.5958e-1 –	9.4876e-1 $\approx$	4.9324e-1
	10	5.0015e+0 –	5.6402e-1 +	5.1932e-1 +	1.8081e+0 –	3.0014e+2 –	5.4628e-1 +	6.5614e-1 –	8.4615e-1 $\approx$	7.1044e-1 –	7.3823e-1 –	6.3862e-1
	15	6.0974e+0 –	8.5914e-1 $\approx$	6.3909e-1 +	1.1638e-1 –	3.8813e+2 –	7.1348e-1 +	8.9050e-1 –	1.9439e+0 –	9.0281e-1 –	1.1135e+0 –	8.5735e-1
DTLZ4	3	1.1268e-1 +	1.5957e-1 +	1.3348e-1 +	8.1438e-1 +	5.9659e-2 +	7.9843e-2 +	4.6748e-2 +	1.7908e-1 +	1.7901e-1 +	3.2376e-1 $\approx$	1.9592e-1
	5	2.5274e-1 $\approx$	4.1031e-1 –	2.8789e-1 –	2.0127e-1 +	2.4800e-1 +	2.0331e-1 $\approx$	2.0307e-1 $\approx$	1.9554e-1 $\approx$	2.3846e-1 +	2.2476e-1 $\approx$	2.6154e-1
	8	4.4108e-1 $\approx$	5.1085e-1 –	3.9782e-1 $\approx$	3.9643e-1 $\approx$	3.7939e-1 $\approx$	3.7833e-1 –	3.7833e-1 –	3.6908e-1 +	4.1752e-1 $\approx$	3.6921e-1 +	4.1061e-1
	10	5.0652e-1 $\approx$	5.9483e-1 –	4.9797e-1 $\approx$	4.6792e-1 $\approx$	5.0177e-1 $\approx$	4.5054e-1 +	4.6527e-1 +	4.3638e-1 +	5.2362e-1 $\approx$	4.5369e-1 +	5.1429e-1
	15	6.5087e-1 $\approx$	6.7527e-1 –	6.1516e-1 +	6.1974e-1 +	6.2534e-1 +	6.4270e-1 $\approx$	6.3827e-1 $\approx$	6.3235e-1 $\approx$	6.5985e-1 –	6.3170e-1 +	6.4397e-1
WFG4	3	1.9007e-1 $\approx$	1.9733e-1 –	2.9785e-1 –	2.0462e-1 –	2.3089e-1 –	2.0810e-1 –	2.0429e-1 –	1.8982e-1 $\approx$	1.9007e-1 $\approx$	1.8964e-1 $\approx$	1.9007e-1
	5	1.1319e+0 –	1.2469e+0 –	1.3381e+0 –	1.1338e+0 –	1.2506e+0 –	1.3278e+0 –	1.1355e+0 –	1.1309e+0 –	1.0889e+0 $\approx$	1.1309e+0 –	1.0868e+0
	8	3.4624e+0 –	3.6790e+0 –	3.4616e+0 –	3.2982e+0 –	3.6282e+0 –	4.4503e+0 –	3.4482e+0 –	3.4683e+0 –	3.0672e+0 –	3.4656e+0 –	3.0579e+0
	10	5.1080e+0 –	4.5982e+0 +	5.2429e+0 –	4.7512e+0 +	5.4975e+0 –	6.4366e+0 –	5.0104e+0 –	5.0942e+0 –	4.7726e+0 –	5.1022e+0 –	4.7853e+0
	15	9.4198e+0 $\approx$	1.0760e+1 –	8.9050e+0 +	9.8199e+0 –	9.7117e+0 –	1.1687e+1 –	9.5655e+0 –	9.4455e+0 $\approx$	9.4019e+0 $\approx$	9.4396e+0 $\approx$	9.3846e+0
WFG5	3	2.0154e-1 –	2.0741e-1 –	3.0771e-1 –	2.1684e-1 –	2.4073e-1 –	2.1744e-1 –	2.0667e-1 –	2.0138e-1 –	1.9914e-1 $\approx$	2.0144e-1 –	1.9908e-1
	5	1.1263e+0 –	1.1951e+0 –	1.3384e+0 –	1.1224e+0 –	1.2302e+0 –	1.3002e+0 –	1.1307e+0 –	1.0653e+0 $\approx$	1.1253e+0 –	1.1258e+0 –	1.0674e+0
	8	3.4272e+0 –	3.8051e+0 –	3.4154e+0 –	3.2269e+0 –	3.5286e+0 –	4.0627e+0 –	3.4309e+0 –	3.4283e+0 –	3.0295e+0 $\approx$	3.4328e+0 –	3.0348e+0
	10	5.0804e+0 –	4.3923e+0 +	5.1935e+0 –	4.6311e+0 +	5.4573e+0 –	5.8690e+0 –	4.8849e+0 –	5.0733e+0 –	4.6650e+0 $\approx$	5.0640e+0 –	4.6618e+0
	15	9.3458e+0 –	1.0332e+1 –	1.2002e+1 –	8.6730e+0 +	9.3440e+0 –	1.3950e+1 –	9.4621e+0 –	9.3730e+0 –	8.8086e+0 +	9.4278e+0 –	9.1066e+0
WFG6	3	2.1258e-1 $\approx$	2.2413e-1 –	3.2213e-1 –	2.2496e-1 –	2.6755e-1 –	2.2731e-1 –	2.3304e-1 –	2.1034e-1 $\approx$	2.1359e-1 $\approx$	2.1713e-1 $\approx$	2.1348e-1
	5	1.1325e+0 –	1.2742e+0 –	1.3761e+0 –	1.1529e+0 –	1.2721e+0 –	1.3203e+0 –	1.1437e+0 –	1.1306e+0 $\approx$	1.0808e+0 $\approx$	1.1320e+0 –	1.0789e+0
	8	3.4220e+0 –	3.7604e+0 –	3.5464e+0 –	3.2628e+0 –	3.7038e+0 –	4.3753e+0 –	3.3653e+0 –	3.4209e+0 –	3.0643e+0 $\approx$	3.4244e+0 –	3.0708e+0
	10	5.2017e+0 –	4.4694e+0 +	5.3140e+0 –	4.6698e+0 +	5.8234e+0 –	6.5026e+0 –	5.5655e+0 –	5.0968e+0 –	4.7189e+0 +	5.0830e+0 –	4.7601e+0
	15	9.7042e+0 $\approx$	1.0264e+1 $\approx$	1.0589e+1 –	8.7052e+0 +	1.0149e+1 –	1.2598e+1 –	1.0506e+1 –	9.4310e+0 $\approx$	8.9869e+0 +	9.4382e+0 $\approx$	9.4532e+0
WFG7	3	1.9038e-1 –	1.9991e-1 –	3.0204e-1 –	2.0656e-1 –	2.2467e-1 –	2.1029e-1 –	2.0125e-1 –	1.9001e-1 $\approx$	1.9026e-1 $\approx$	1.9023e-1 $\approx$	1.8977e-1
	5	1.1374e+0 –	1.2160e+0 –	1.3678e+0 –	1.1257e+0 –	1.2470e+0 –	1.3263e+0 –	1.1431e+0 –	1.1334e+0 –	1.0901e+0 $\approx$	1.1380e+0 –	1.0893e+0
	8	3.4602e+0 –	3.5886e+0 –	3.3774e+0 –	3.2394e+0 –	3.9156e+0 –	3.4205e+0 –	3.4679e+0 –	3.0840e+0 $\approx$	3.4528e+0 –	3.4528e+0 –	3.0938e+0
	10	5.2766e+0 –	4.7921e+0 $\approx$	5.1745e+0 –	4.6195e+0 +	5.3403e+0 –	5.6321e+0 –	4.9369e+0 –	5.0763e+0 –	4.7484e+0 +	5.0683e+0 –	4.8409e+0
	15	9.4099e+0 $\approx$	9.9089e+0 $\approx$	9.4993e+0 –	8.5858e+0 +	9.2691e+0 $\approx$	9.2667e+0 $\approx$	9.3526e+0 $\approx$	9.4426e+0 $\approx$	9.1125e+0 +	9.4338e+0 –	9.3723e+0
WFG8	3	2.6869e-1 –	2.7457e-1 –	3.4485e-1 –	2.8541e-1 –	3.1326e-1 –	2.7005e-1 –	2.8748e-1 –	2.4735e-1 +	2.5630e-1 –	2.5630e-1 –	2.4976e-1
	5	1.1917e+0 –	1.3002e+0 –	1.3454e+0 –	1.2626e+0 –	1.3186e+0 –	1.1782e+0 –	1.1782e+0 –	1.1075e+0 $\approx$	1.1510e+0 –	1.1510e+0 –	1.1121e+0
	8	3.4499e+0 –	4.7323e+0 –	3.5346e+0 –	3.6375e+0 –	3.7433e+0 –	3.3096e+0 –	3.3096e+0 –	3.1619e+0 +	3.3382e+0 –	3.3382e+0 –	3.1933e+0
	10	5.3630e+0 –	5.2384e+0 –	5.2664e+0 –	5.2636e+0 –	6.3573e+0 –	5.3466e+0 –	5.3466e+0 –	4.8188e+0 +	5.1143e+0 –	4.8942e+0 –	4.8942e+0
	15	9.4363e+0 +	1.2177e+1 –	9.1925e+0 +	9.2428e+0 +	1.0080e+1 $\approx$	9.9703e+0 –	1.0006e+1 $\approx$	9.4257e+0 +	9.5040e+0 +	9.3927e+0 +	9.8553e+0
WFG9	3	1.9325e-1 +	2.0958e-1 –	2.8997e-1 –	2.0129e-1 –	2.0780e-1 –	1.9795e-1 –	1.9795e-1 –	1.8950e-1 +	1.9197e-1 $\approx$	1.9197e-1 $\approx$	1.9585e-1
	5	1.1194e+0 –	1.2388e+0 –	1.2775e+0 –	1.1066e+0 –	1.1863e+0 –	1.1232e+0 –	1.1232e+0 –	1.0697e+0 +	1.1238e+0 –	1.1238e+0 –	1.0768e+0
	8	3.2639e+0 –	3.9641e+0 –	3.3808e+0 –	3.2727e+0 –	3.4183e+0 –	4.2400e+0 –	3.3164e+0 –	3.1018e+0 +	3.3130e+0 –	3.3130e+0 –	3.1468e+0
	10	5.1116e+0 –	4.6445e+0 +	5.0931e+0 –	4.8326e+0 $\approx$	5.3305e+0 –	5.6676e+0 –	4.8576e+0 –	5.0466e+0 –	4.7375e+0 +	4.9852e+0 –	4.8098e+0
	15	8.8295e+0 +	1.0148e+1 –	9.2440e+0 $\approx$	9.0173e+0 $\approx$	9.0206e+0 $\approx$	1.1504e+1 –	9.5046e+0 –	8.8546e+0 +	8.9824e+0 $\approx$	9.1917e+0 –	9.0646e+0
+ / – / $\approx$		6/31/13	8/37/5	11/36/3	17/29/4	4/41/5	11/34/5	8/36/6	9/28/13	16/11/23	9/29/12	

Fonte: O autor (2019).

Tabela 7 – IGD obtido em PF Irregulares. Resultados destacados indicam melhor média.

Problem	M	NSGAIII	MOEA/D-AWA	SPEA2SDE	Two_Arch2	KnEA	MOEA/DD	RVEA	#DEA	MOEA/D-URAW	AR-MOEA	MOEA/D-UR
DTLZ5	3	9.4496e-3 –	6.6323e-3 –	8.3873e-3 –	4.7010e-3 –	7.6569e-3 –	2.6701e-2 –	6.4325e-2 –	2.6089e-2 –	3.5397e-3 –	3.9730e-3 –	3.5141e-3
	5	1.2867e-1 –	6.8975e-2 –	6.7878e-2 –	7.2274e-2 –	2.5331e-1 –	1.0305e-1 –	3.6670e-1 –	1.3733e-1 –	3.6307e-2 ≈	7.3892e-2 –	3.1411e-2
	8	2.5904e-1 –	1.9163e-1 –	1.1955e-1 –	1.5514e-1 –	3.0568e-1 –	1.3459e-1 –	2.1045e-1 –	1.8699e-1 –	5.2798e-2 ≈	1.2248e-1 –	4.8290e-2
	10	3.0496e-1 –	7.2573e-2 –	1.4523e-1 –	2.1469e-1 –	3.6788e-1 –	1.9564e-1 –	5.1654e-1 –	1.9578e-1 –	4.7897e-2 ≈	1.2061e-1 –	5.3751e-2
	15	3.4295e-1 –	1.5770e-1 –	1.5751e-1 –	4.7917e-1 –	6.9656e-1 –	1.9325e-1 –	2.8893e-1 –	2.8659e-1 –	4.5713e-2 ≈	1.5289e-1 –	4.1524e-2
DTLZ6	3	1.4867e-2 –	6.6840e-3 –	8.7985e-3 –	5.0880e-3 –	1.0735e-2 –	2.8724e-2 –	6.3970e-2 –	3.1317e-2 –	3.5240e-3 ≈	3.6497e-3 –	3.5256e-3
	5	2.4592e-1 –	6.5484e-2 –	8.6716e-2 –	1.1625e-1 –	3.5499e-1 –	1.0507e-1 –	2.8267e-1 –	2.3814e-1 –	3.6962e-2 –	8.6453e-2 –	2.0660e-2
	8	5.2038e-1 –	2.0523e-1 –	2.0443e-1 –	3.7470e-1 –	1.0204e+0 –	1.3641e-1 –	1.8243e-1 –	3.0385e-1 –	6.0509e-2 –	1.3631e-1 –	3.2137e-2
	10	9.4360e-1 –	1.6839e-1 –	2.7510e-1 –	4.8905e-1 –	1.7156e+0 –	1.8951e-1 –	2.4019e-1 –	3.0205e-1 –	5.3168e-2 –	1.4275e-1 –	3.1708e-2
	15	5.9816e-1 –	2.1382e-1 –	3.2708e-1 –	6.9573e-1 –	2.0234e+0 –	1.9269e-1 –	3.2735e-1 –	3.5371e-1 –	6.0057e-2 –	1.1583e-1 –	3.1678e-2
DTLZ7	3	6.5054e-2 +	1.1594e-1 –	5.3029e-2 ≈	8.9649e-2 –	5.9940e-2 +	4.0208e-1 –	9.2040e-2 –	9.8078e-2 –	5.5253e-2 +	1.2110e-1 –	7.1846e-2
	5	3.4837e-1 –	5.5030e-1 –	3.1590e-1 –	3.3157e-1 –	3.4627e-1 –	2.7843e+0 –	4.5557e-1 –	4.3110e-1 –	2.8660e-1 –	3.2739e-1 –	2.7077e-1
	8	8.3673e-1 –	1.0415e+0 –	7.9845e-1 –	6.5356e-1 +	7.1096e-1 +	5.4051e+0 –	2.7366e+0 –	8.2238e-1 –	9.5374e-1 –	1.0348e+0 –	7.6412e-1
	10	1.5232e+0 ≈	1.1341e+0 +	1.0260e+0 +	9.3797e-1 +	1.0802e+0 +	2.4476e+0 –	1.8185e+0 –	1.4740e+0 ≈	1.7340e+0 –	2.2759e+0 –	1.4497e+0
	15	8.3856e+0 –	4.5225e+0 –	1.5647e+0 +	2.0831e+0 +	2.9477e+0 ≈	1.0909e+1 –	5.5520e+0 –	6.1159e+0 –	3.0503e+0 –	4.6248e+0 –	2.7927e+0
IDTLZ1	3	2.6154e-2 –	2.3896e-2 –	1.9141e-2 –	2.1272e-2 –	9.3207e-2 –	3.2742e-2 –	4.2451e-2 –	3.3946e-2 –	1.8488e-2 ≈	1.8841e-2 –	1.8437e-2
	5	1.0284e-1 –	8.7021e-2 –	6.3651e-2 +	8.9030e-2 –	7.1372e-2 –	1.4622e-1 –	1.7417e-1 –	1.8494e-1 –	6.5308e-2 ≈	7.0654e-2 –	6.5322e-2
	8	1.3693e-1 –	1.9980e-1 –	1.2236e-1 –	1.6267e-1 –	1.1972e-1 –	1.8698e-1 –	2.2885e-1 –	1.4568e-1 –	1.1755e-1 ≈	1.2004e-1 –	1.1841e-1
	10	1.5504e-1 –	2.4701e-1 –	1.5634e-1 ≈	1.9648e-1 –	1.4179e-1 ≈	2.4816e-1 –	2.7221e-1 –	1.6749e-1 –	1.3856e-1 ≈	1.4221e-1 ≈	1.4069e-1
	15	1.7052e-1 +	2.8403e-1 –	2.1703e-1 –	2.3689e-1 –	2.0227e-1 –	2.8296e-1 –	3.6638e-1 –	1.7141e-1 +	1.7239e-1 +	1.9992e-1 –	1.8340e-1
IDTLZ2	3	6.4105e-2 –	5.4482e-2 –	9.4268e-2 –	5.3009e-2 –	6.5900e-2 –	6.4975e-2 –	7.2969e-2 –	7.0376e-2 –	4.8370e-2 –	6.7575e-2 –	4.7629e-2
	5	2.5699e-1 –	2.3040e-1 –	2.6476e-1 –	2.0388e-1 –	2.2982e-1 –	2.4516e-1 –	3.0260e-1 –	2.9210e-1 –	1.9288e-1 –	2.1249e-1 –	1.9045e-1
	8	5.2033e-1 –	5.6837e-1 –	4.7500e-1 –	4.0296e-1 –	4.3391e-1 –	6.0685e-1 –	5.9603e-1 –	5.9586e-1 –	3.6114e-1 –	4.7462e-1 –	3.5999e-1
	10	6.7636e-1 –	7.4478e-1 –	5.2641e-1 –	4.8003e-1 –	5.5884e-1 –	7.4139e-1 –	7.5292e-1 –	6.9360e-1 –	4.4470e-1 ≈	5.7593e-1 –	4.4357e-1
	15	8.4398e-1 –	9.5096e-1 –	6.5087e-1 –	6.5150e-1 –	6.3137e-1 –	8.7637e-1 –	8.5895e-1 –	8.2359e-1 –	5.6942e-1 ≈	6.8850e-1 –	5.7436e-1
WFG1	3	1.7876e-1 –	1.7320e-1 –	1.6586e-1 –	1.3176e-1 +	1.9987e-1 –	3.4424e-1 –	2.9430e-1 –	1.8063e-1 –	1.6413e-1 –	1.4704e-1 ≈	1.5100e-1
	5	6.2654e-1 –	5.6672e-1 –	4.9815e-1 +	4.3737e-1 +	5.1369e-1 ≈	1.0948e+0 –	5.4715e-1 ≈	5.0749e-1 +	4.6393e-1 +	5.7509e-1 –	5.3822e-1
	8	1.1555e+0 +	1.8606e+0 –	1.0651e+0 +	9.7623e-1 +	1.0459e+0 +	1.3192e+0 ≈	1.1027e+0 +	9.3172e-1 +	1.0223e+0 +	1.0526e+0 +	1.2850e+0
	10	1.4856e+0 ≈	1.5418e+0 ≈	1.2909e+0 +	1.2484e+0 +	1.2818e+0 +	1.5812e+0 ≈	1.2424e+0 +	1.1613e+0 +	1.1980e+0 +	1.4176e+0 +	1.5525e+0
	15	2.1730e+0 ≈	2.6228e+0 –	1.9606e+0 +	1.9495e+0 +	2.3490e+0 ≈	2.4578e+0 –	1.9821e+0 +	2.0215e+0 +	1.8668e+0 +	2.0626e+0 +	2.2166e+0
WFG2	3	1.4013e-1 +	1.6806e-1 –	1.8843e-1 –	1.3964e-1 +	1.7354e-1 –	1.5858e-1 –	1.6838e-1 –	1.3457e-1 +	1.4628e-1 +	1.4009e-1 +	1.4887e-1
	5	4.5998e-1 +	6.5831e-1 –	5.8280e-1 –	4.3716e-1 +	5.4137e-1 –	5.6084e-1 –	4.5289e-1 +	4.4340e-1 +	4.8898e-1 +	4.5867e-1 +	4.9733e-1
	8	1.2443e+0 ≈	1.9839e+0 –	1.1505e+0 +	9.4841e-1 +	1.1241e+0 +	1.6921e+0 –	1.0621e+0 +	1.0525e+0 +	1.1465e+0 +	1.1196e+0 +	1.2290e+0
	10	1.3954e+0 +	1.4191e+0 +	1.3063e+0 +	1.1216e+0 +	1.3286e+0 +	1.3676e+0 +	1.3445e+0 +	2.6810e+0 –	1.3974e+0 +	1.1738e+0 +	1.4813e+0
	15	1.8837e+0 +	2.5423e+0 –	1.9328e+0 +	1.7206e+0 +	1.9743e+0 +	2.6829e+0 –	1.8440e+0 +	2.8690e+0 –	1.9806e+0 +	1.9162e+0 +	2.0581e+0
WFG3	3	9.6693e-2 –	5.5640e-2 +	6.1102e-2 +	6.6933e-2 –	9.9136e-2 –	1.6692e-1 –	1.9537e-1 –	1.1260e-1 –	5.8260e-2 +	1.1171e-1 –	6.4895e-2
	5	5.8175e-1 –	5.7946e-1 –	6.2642e-1 –	4.1461e-1 ≈	5.8997e-1 –	8.5226e-1 –	7.1029e-1 –	6.3768e-1 –	3.7957e-1 +	6.6901e-1 –	4.2520e-1
	8	7.2386e-1 +	3.0304e+0 –	1.7261e+0 –	1.0637e+0 +	1.5666e+0 –	2.1359e+0 –	2.6945e+0 –	1.0209e+0 +	1.0699e+0 +	2.1195e+0 –	1.1989e+0
	10	2.2858e+0 ≈	2.9938e+0 –	2.4895e+0 ≈	1.4193e+0 +	2.3883e+0 ≈	3.5981e+0 –	4.4858e+0 –	1.4766e+0 +	1.6762e+0 +	2.9639e+0 –	2.1579e+0
	15	2.5871e+0 +	6.3677e+0 –	7.5758e+0 –	2.6694e+0 +	4.5191e+0 +	1.4008e+1 –	9.1997e+0 –	2.7415e+0 +	3.2929e+0 +	6.2214e+0 –	5.3529e+0
+/-/ ≈		9/26/5	3/36/1	11/26/3	16/23/1	9/26/5	1/37/2	7/32/1	11/28/1	16/13/11	8/30/2	

Fonte: O autor (2019).

Tabela 8 – HV obtido em problemas de mundo-real. Melhores médias destacadas.

Problem	M	NSGAIII	MOEA/D-AWA	SPEA2SDE	Two_Arch2	KnEA	MOEA/DD	RVEA	θ -DEA	MOEA/D-URAW	AR-MOEA	MOEA/D-UR
MOTSP	3	5.9629e-1 –	6.3513e-1 $\approx$	6.1862e-1 –	6.1263e-1 –	5.5460e-1 –	4.8358e-1 –	5.8512e-1 –	5.9005e-1 –	6.3008e-1 –	6.037e-1 –	6.3664e-1
	5	2.2349e-1 –	3.2129e-1 –	3.5588e-1 –	3.4802e-1 –	3.0290e-1 –	2.5436e-1 –	2.3141e-1 –	2.8489e-1 –	3.5614e-1 –	2.8606e-1 –	3.6694e-1
	8	7.1414e-2 –	7.5976e-2 –	1.1415e-1 +	1.0482e-1 $\approx$	6.2886e-2 –	9.0698e-2 –	8.0563e-2 –	8.8095e-2 –	9.9017e-2 –	8.6332e-2 –	1.0565e-1
	10	2.1914e-2 –	2.6281e-2 –	4.3668e-2 +	3.6731e-2 $\approx$	1.7809e-2 –	3.0338e-2 –	2.1430e-2 –	2.9395e-2 –	3.4439e-2 –	2.8330e-2 –	3.6434e-2
	15	2.9066e-3 $\approx$	1.9889e-3 –	4.5185e-3 +	2.6679e-3 –	1.1752e-3 –	3.2000e-3 +	2.6588e-3 –	2.8792e-3 $\approx$	2.6825e-3 –	2.8112e-3 $\approx$	2.8691e-3
MOKP	3	3.2997e-1 –	3.5367e-1 +	3.3326e-1 –	3.2319e-1 –	3.1912e-1 –	2.8773e-1 –	3.3138e-1 –	3.2669e-1 –	3.4182e-1 –	3.2948e-1 –	3.4528e-1
	5	1.1392e-1 –	1.1966e-1 –	1.2564e-1 –	1.2173e-1 –	1.2118e-1 –	1.0944e-1 –	1.1535e-1 –	1.1372e-1 –	1.3168e-1 –	1.1978e-1 –	1.3419e-1
	8	2.1633e-2 –	2.0507e-2 –	2.4413e-2 –	2.3634e-2 –	2.1569e-2 –	2.0264e-2 –	2.1938e-2 –	2.2023e-2 –	2.4990e-2 –	2.2759e-2 –	2.5422e-2
	10	8.5008e-3 –	7.8708e-3 –	1.0233e-2 $\approx$	9.4172e-3 –	8.4908e-3 –	7.5355e-3 –	8.7399e-3 –	8.7658e-3 –	1.0134e-2 $\approx$	9.2631e-3 –	1.0241e-2
	15	4.5780e-4 –	3.4380e-4 –	5.6269e-4 +	4.9854e-4 –	3.6056e-4 –	4.0359e-4 –	4.7011e-4 –	4.7136e-4 –	5.1137e-4 $\approx$	4.8201e-4 –	5.2158e-4
WRP	5	9.6131e-2 +	7.2905e-2 –	3.4732e-2 –	9.0639e-2 –	9.8096e-2 +	2.5321e-2 –	5.5491e-2 –	8.1944e-2 –	9.2106e-2 –	9.4748e-2 +	9.3883e-2
+/-/ $\approx$		1/9/1	1/9/1	4/6/1	0/9/2	1/10/0	1/10/0	0/11/0	0/10/1	0/9/2	1/9/1	

Fonte: O autor (2019).

5 CONCLUSÃO

Neste capítulo, apresenta-se uma visão geral das contribuições desta dissertação. Primeiramente, na Seção 5.1, é sumarizado a pesquisa realizada neste trabalho. Seguido do destaque, na Seção 5.2, das conquistas e limitações do modelo proposto. Por último, discute-se algumas orientações para futuras pesquisas na Seção 5.3.

5.1 SUMÁRIO DO TRABALHO

Este estudo se propôs a construir um algoritmo evolucionário para múltiplos e muitos objetivos baseado em decomposição que possa contribuir para mitigar as limitações presentes nessa família de algoritmos. De forma geral, a família dos modelos MaOP possuem algumas características que acarretam algumas limitações importantes:

1. Não ter quantidade livremente ajustável de subproblemas;
2. Manter um conjunto de subproblemas com uma distribuição fixa mesmo quando lida com PFs complexas quando há aumento da repercussão negativa desta característica;
3. Não permitir determinação dinâmica do momento adequado para efetuar a adaptação dos subproblemas.

Considerando as limitações acima que tendem a empobrecer o desempenho da família MOEA/D em problemas com muitos objetivos, esta dissertação propõe o algoritmo MOEA/D-UR, que possui quatro novas características distintas do MOEA/D original:

1. Inicialização do conjunto de vetores de peso através da abordagem UR;
2. Adaptação dos subproblemas usando critério de esparsidade das soluções na população;
3. Procedimento para determinar dinamicamente o momento da adaptação dos subproblemas;
4. Procedimento de divisão do espaço objetivo para aumentar a diversidade da população.

A introdução destas modificações foram realizadas visando permitir ao modelo MOEA/D: ter livre ajuste de tamanho da população; moldar os subproblemas a PF do problema corrente; efetuar a adaptação somente quando é verificado que há pouco grau de melhora nas soluções da população; e remover soluções que sejam dominadas ou repetidas, melhorando sua diversidade e convergência.

Realizou-se um conjunto amplo de experimentos para validação e teste do MOEA/D-UR. Os resultados experimentais em 101 problemas (MOPs e MaOP)s simulados e de mundo-real,

analisados sob a perspectiva das métricas de desempenho HV e IGD, sugerem que o modelo proposto tem desempenho competitivo aos 10 MaOEA estado-da-arte. A melhoria de desempenho pode ocorrer sobretudo devido ao uso de esparsidade para reposicionar os subproblemas aplicado no momento apropriado.

5.2 PRINCIPAIS CONQUISTAS E LIMITAÇÕES DO MOEA/D-UR

O principal achado empírico é que o algoritmo proposto MOEA/D-UR supera significativamente o MOEA/D-AWA, que utiliza uma abordagem semelhante de adaptação dos subproblemas. As principais conquistas deste trabalho podem ser resumidas da seguinte forma:

- Viabilidade da combinação das abordagens de inicialização UR e adaptação baseada em esparsidade.
- Introdução de um mecanismo para detecção de convergência dos indivíduos da população aos seus subproblemas, e assim, efetuar a adaptação baseada em esparsidade, esta nova abordagem melhora a versão anterior, MOEA/D-URAW.
- Uso do algoritmo proposto para resolver problemas de otimização de mundo-real. Esses MaOPs de mundo-real são bastante explorados na literatura (MANE; RAO, 2017). Ao confrontar 10 glsmaoea estado-da-arte, o MOEA/D-UR, apresentou um desempenho competitivo, em especial, na classe de problemas combinatórios.

As primeiras versões do trabalho apresentado nesta dissertação resultaram nas seguintes publicações:

- FARIAS, L. R., BRAGA, P. H., BASSANI, H. F. and ARAÚJO, A. F. MOEA/D With Uniformly Randomly Adaptive Weights. In *GECCO'18: Proc. of the 19th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. ACM Press: p. 641-648. July 2018.
- FARIAS, L. R. and ARAÚJO, A. F. Many-Objective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition With Random and Adaptive Weights. In *SMC'19: Proc. of 2019 IEEE International Conference on Systems, Mans and Cybernetics*, accepted for publication.

Na primeira alternativa, referente ao primeiro artigo, o modelo proposto MOEA/D-URAW, se caracteriza por combinar a inicialização UR e a adaptação de subproblemas baseado em esparsidade. Sua performance é comparada com três técnicas de inicialização de subproblemas e validada em problemas de otimização com dois a seis objetivos.

Na segunda alternativa, referente ao segundo artigo, é proposto a troca do operador de reprodução DE para SBX, no algoritmo MOEA/D-URAW. Este artigo verifica que esta troca torna o algoritmo competitivo a quatro MaOEAs estado-da-arte em problemas de otimização com cinco, dez e quinze objetivos.

Apesar dos avanços, é possível observar limitações no modelo MOEA/D-UR. Em primeiro lugar, a abordagem de divisão espacial, tem o objetivo de inserir soluções não-dominadas na população e assim aumentar a qualidade das soluções na população, antes desta etapa, há a reprodução do conjunto formado por indivíduos da população e da EP, um estudo de melhores maneiras de utilizar esta reprodução pode melhorar a diversidade desta abordagem. Em segundo lugar, há um custo computacional considerável na maneira de tratar a remoção de soluções excedentes da EP, explorar maneiras mais eficientes de se utilizar uma população externa com indivíduos não-dominados, pode melhorar o custo computacional.

5.3 TRABALHOS FUTUROS

Atualmente, ainda existem algumas direções de pesquisa desafiadoras e promissoras no MOEA/D com atualização quando requerida.

- Investigar o algoritmo proposto para resolver outros problemas. Pode-se analisar o comportamento e performance do algoritmo em problemas: combinatórios, com restrição, alta dimensionalidade e de mundo-real.
- Vale investigar com mais detalhes, a extensibilidade da proposta IM em outros MOEA/D que possuem a adaptação de subproblemas pré-fixada.
- A divisão do espaço objetivo, divide o espaço em m (número de objetivos) + 1 grupos, com o objetivo de dividir as regiões de borda e região intermediária. Utilizar técnicas que definam dinamicamente o número de grupos pode melhorar a performance desta abordagem.

REFERÊNCIAS

- ASAFUDDOULA, M.; SINGH, H. K.; RAY, T. An enhanced decomposition-based evolutionary algorithm with adaptive reference vectors. *IEEE transactions on cybernetics*, IEEE, v. 48, n. 8, p. 2321–2334, 2017.
- BADER, J.; ZITZLER, E. A hypervolume-based optimizer for high-dimensional objective spaces. In: *New Developments in Multiple Objective and Goal Programming*. [S.l.]: Springer, 2010. p. 35–54.
- BADER, J.; ZITZLER, E. Hype: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization. *Evolutionary computation*, MIT Press, v. 19, n. 1, p. 45–76, 2011.
- CHENG, R.; JIN, Y.; OLHOFF, M.; SENDHOFF, B. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 20, n. 5, p. 773–791, 2016.
- COELLO, C. A. C.; LAMONT, G. B.; VELDHUIZEN, D. A. V. et al. *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. [S.l.]: Springer, 2007. v. 5.
- CORNE, D. W.; KNOWLES, J. D. Techniques for highly multiobjective optimisation: some nondominated points are better than others. In: *ACM. Proceedings of the 9th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. [S.l.], 2007. p. 773–780.
- DAS, I.; DENNIS, J. E. Normal-boundary intersection: A new method for generating the pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 8, n. 3, p. 631–657, 1998.
- DEB, K. *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001. v. 16.
- DEB, K.; GOYAL, M. A combined genetic adaptive search (geneas) for engineering design. *Computer Science and informatics*, COMPUTER SOCIETY OF INDIA, v. 26, p. 30–45, 1996.
- DEB, K.; JAIN, H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part i: Solving problems with box constraints. *IEEE Trans. Evolutionary Computation*, v. 18, n. 4, p. 577–601, 2014.
- DEB, K.; PRATAP, A.; AGARWAL, S.; MEYARIVAN, T. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE transactions on evolutionary computation*, IEEE, v. 6, n. 2, p. 182–197, 2002.
- DEB, K.; THIELE, L.; LAUMANN, M.; ZITZLER, E. Scalable multi-objective optimization test problems. In: *IEEE. Evolutionary Computation, 2002. CEC'02. Proceedings of the 2002 Congress on*. [S.l.], 2002. v. 1, p. 825–830.
- DEB, K.; THIELE, L.; LAUMANN, M.; ZITZLER, E. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization. In: *Evolutionary multiobjective optimization*. [S.l.]: Springer, 2005. p. 105–145.

- FARIAS, L. R. de; BRAGA, P. H.; BASSANI, H. F.; ARAÚJO, A. F. Moea/d with uniformly randomly adaptive weights. In: ACM. *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference*. [S.l.], 2018. p. 641–648.
- FOGEL, D. B. An evolutionary approach to the traveling salesman problem. *Biological Cybernetics*, Springer, v. 60, n. 2, p. 139–144, 1988.
- GIAGKIOZIS, I.; PURSHOUSE, R. C.; FLEMING, P. J. Generalized decomposition and cross entropy methods for many-objective optimization. *Information Sciences*, Elsevier, v. 282, p. 363–387, 2014.
- GU, F.; LIU, H.-L.; TAN, K. C. A multiobjective evolutionary algorithm using dynamic weight design method. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, ICIC International, v. 8, n. 5 (B), p. 3677–3688, 2012.
- HELTON, J. C.; DAVIS, F.; JOHNSON, J. D. A comparison of uncertainty and sensitivity analysis results obtained with random and latin hypercube sampling. *Reliability Engineering & System Safety*, Elsevier, v. 89, n. 3, p. 305–330, 2005.
- HUANG, W.; LI, H. On the differential evolution schemes in moea/d. In: IEEE. *Natural Computation (ICNC), 2010 Sixth International Conference on*. [S.l.], 2010. v. 6, p. 2788–2792.
- HUBAND, S.; HINGSTON, P.; BARONE, L.; WHILE, L. A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 10, n. 5, p. 477–506, 2006.
- HUGHES, E. J. Radar waveform optimisation as a many-objective application benchmark. In: SPRINGER. *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. [S.l.], 2007. p. 700–714.
- IREDI, S.; MERKLE, D.; MIDDENDORF, M. Bi-criterion optimization with multi colony ant algorithms. In: SPRINGER. *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. [S.l.], 2001. p. 359–372.
- ISHIBUCHI, H.; AKEDO, N.; NOJIMA, Y. Behavior of multiobjective evolutionary algorithms on many-objective knapsack problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 19, n. 2, p. 264–283, 2014.
- ISHIBUCHI, H.; AKEDO, N.; OHYANAGI, H.; NOJIMA, Y. Behavior of emo algorithms on many-objective optimization problems with correlated objectives. In: IEEE. *2011 IEEE Congress of Evolutionary Computation (CEC)*. [S.l.], 2011. p. 1465–1472.
- ISHIBUCHI, H.; SAKANE, Y.; TSUKAMOTO, N.; NOJIMA, Y. Simultaneous use of different scalarizing functions in moea/d. In: ACM. *Proceedings of the 12th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. [S.l.], 2010. p. 519–526.
- ISHIBUCHI, H.; SETOGUCHI, Y.; MASUDA, H.; NOJIMA, Y. Performance of decomposition-based many-objective algorithms strongly depends on pareto front shapes. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 21, n. 2, p. 169–190, 2017.
- JAIMES, A. L.; OYAMA, A.; FUJII, K. Space trajectory design: Analysis of a real-world many-objective optimization problem. In: IEEE. *2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. [S.l.], 2013. p. 2809–2816.

- JAIN, H.; DEB, K. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based nondominated sorting approach, part ii: handling constraints and extending to an adaptive approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 18, n. 4, p. 602–622, 2013.
- JASZKIEWICZ, A. On the performance of multiple-objective genetic local search on the 0/1 knapsack problem-a comparative experiment. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 6, n. 4, p. 402–412, 2002.
- JIANG, S.; YANG, S. An improved multiobjective optimization evolutionary algorithm based on decomposition for complex pareto fronts. *IEEE transactions on cybernetics*, IEEE, v. 46, n. 2, p. 421–437, 2016.
- KALYANMOY, D. Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. 2001. *West Sussex, England: John Wiley*, 2001.
- KE, L.; ZHANG, Q.; BATTITI, R. Moea/d-aco: A multiobjective evolutionary algorithm using decomposition and antcolony. *IEEE transactions on cybernetics*, IEEE, v. 43, n. 6, p. 1845–1859, 2013.
- KUKKONEN, S.; DEB, K. A fast and effective method for pruning of non-dominated solutions in many-objective problems. In: *PPSN*. [S.l.: s.n.], 2006. v. 4193, p. 553–562.
- LI, B.; LI, J.; TANG, K.; YAO, X. Many-objective evolutionary algorithms: A survey. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, ACM, v. 48, n. 1, p. 13, 2015.
- LI, H.; DING, M.; DENG, J.; ZHANG, Q. On the use of random weights in moea/d. In: *IEEE. Evolutionary Computation (CEC), 2015 IEEE Congress on*. [S.l.], 2015. p. 978–985.
- LI, H.; LANDA-SILVA, D. An adaptive evolutionary multi-objective approach based on simulated annealing. *Evolutionary Computation*, MIT Press, v. 19, n. 4, p. 561–595, 2011.
- LI, H.; ZHANG, Q. Multiobjective optimization problems with complicated pareto sets, moea/d and nsga-ii. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, IEEE, v. 13, n. 2, p. 284–302, 2009.
- LI, H.; ZHANG, Q.; DENG, J. Biased multiobjective optimization and decomposition algorithm. *IEEE transactions on cybernetics*, IEEE, v. 47, n. 1, p. 52–66, 2017.
- LI, K.; DEB, K.; ZHANG, Q.; KWONG, S. An evolutionary many-objective optimization algorithm based on dominance and decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 19, n. 5, p. 694–716, 2015.
- LI, K.; WANG, R.; ZHANG, T.; ISHIBUCHI, H. Evolutionary many-objective optimization: A comparative study of the state-of-the-art. *IEEE Access*, IEEE, v. 6, p. 26194–26214, 2018.
- LI, M.; YANG, S.; LIU, X. Shift-based density estimation for pareto-based algorithms in many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 18, n. 3, p. 348–365, 2014.
- LI, M.; YAO, X. What weights work for you? adapting weights for any pareto front shape in decomposition-based evolutionary multi-objective optimisation. *arXiv preprint arXiv:1709.02679*, 2017.

- LIU, H.-L.; CHEN, L.; ZHANG, Q.; DEB, K. An evolutionary many-objective optimisation algorithm with adaptive region decomposition. In: IEEE. *2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*. [S.l.], 2016. p. 4763–4769.
- LIU, H.-L.; CHEN, L.; ZHANG, Q.; DEB, K. Adaptively allocating search effort in challenging many-objective optimization problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 22, n. 3, p. 433–448, 2018.
- LIU, J.; WANG, Y.; FAN, N.; WEI, S.; TONG, W. A convergence-diversity balanced fitness evaluation mechanism for decomposition-based many-objective optimization algorithm. *Integrated Computer-Aided Engineering*, IOS Press, n. Preprint, p. 1–26, 2019.
- LLOYD, S. Least squares quantization in pcm. *IEEE transactions on information theory*, IEEE, v. 28, n. 2, p. 129–137, 1982.
- MANE, S. U.; RAO, M. N. Many-objective optimization: Problems and evolutionary algorithms—a short review. *International Journal of Applied Engineering Research*, v. 12, n. 20, p. 9774–9793, 2017.
- MOHAMMADI, A.; OMIDVAR, M. N.; LI, X.; DEB, K. Sensitivity analysis of penalty-based boundary intersection on aggregation-based emo algorithms. In: IEEE. *Evolutionary Computation (CEC), 2015 IEEE Congress on*. [S.l.], 2015. p. 2891–2898.
- MORAGLIO, A.; TOGELIUS, J.; SILVA, S. Geometric differential evolution for combinatorial and programs spaces. *Evolutionary computation*, MIT Press, v. 21, n. 4, p. 591–624, 2013.
- MUSSELMAN, K.; TALAVAGE, J. A tradeoff cut approach to multiple objective optimization. *Operations Research*, INFORMS, v. 28, n. 6, p. 1424–1435, 1980.
- QI, Y.; MA, X.; LIU, F.; JIAO, L.; SUN, J.; WU, J. Moea/d with adaptive weight adjustment. *Evolutionary computation*, MIT Press, v. 22, n. 2, p. 231–264, 2014.
- SALTELLI, A.; RATTO, M.; ANDRES, T.; CAMPOLONGO, F.; CARIBONI, J.; GATELLI, D.; SAISANA, M.; TARANTOLA, S. *Global sensitivity analysis: the primer*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- SATO, H. Inverted pbi in moea/d and its impact on the search performance on multi and many-objective optimization. In: ACM. *Proceedings of the 2014 Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. [S.l.], 2014. p. 645–652.
- SAXENA, D. K.; DEB, K. Non-linear dimensionality reduction procedures for certain large-dimensional multi-objective optimization problems: Employing correntropy and a novel maximum variance unfolding. In: SPRINGER. *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. [S.l.], 2007. p. 772–787.
- SIMPSON, T. W.; CHEN, W.; ALLEN, J. K.; MISTREE, F. Conceptual design of a family of products through the use of the robust concept exploration method. In: *6th. AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. [S.l.: s.n.], 1996. p. 1535–1545.
- SIWEI, J.; ZHIHUA, C.; JIE, Z.; YEW-SOON, O. Multiobjective optimization by decomposition with pareto-adaptive weight vectors. In: IEEE. *2011 Seventh International Conference on Natural Computation*. [S.l.], 2011. v. 3, p. 1260–1264.

- SOUZA, M. Z. d. Innovative hybrid moea/ad variants for solving multi-objective combinatorial optimization problems. 2017.
- TAN, Y.-Y.; JIAO, Y.-C.; LI, H.; WANG, X.-K. Moea/d+ uniform design: A new version of moea/d for optimization problems with many objectives. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 40, n. 6, p. 1648–1660, 2013.
- TIAN, Y.; CHENG, R.; ZHANG, X.; JIN, Y. Platemo: A matlab platform for evolutionary multi-objective optimization [educational forum]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, IEEE, v. 12, n. 4, p. 73–87, 2017.
- TIAN, Y.; CHENG, R.; ZHANG, X.; CHENG, F.; JIN, Y. An indicator-based multiobjective evolutionary algorithm with reference point adaptation for better versatility. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 22, n. 4, p. 609–622, 2018.
- TRIVEDI, A.; SRINIVASAN, D.; SANYAL, K.; GHOSH, A. A survey of multiobjective evolutionary algorithms based on decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 21, n. 3, p. 440–462, 2017.
- VELDHUIZEN, D. A. V.; LAMONT, G. B. Evolutionary computation and convergence to a pareto front. In: *Late breaking papers at the genetic programming 1998 conference*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 221–228.
- WAGNER, M.; NEUMANN, F. A fast approximation-guided evolutionary multi-objective algorithm. In: *ACM. Proceedings of the 15th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. [S.l.], 2013. p. 687–694.
- WANG, H.; JIAO, L.; YAO, X. Two_arch2: An improved two-archive algorithm for many-objective optimization. *IEEE transactions on evolutionary computation*, IEEE, v. 19, n. 4, p. 524–541, 2014.
- WANG, L.; ZHANG, Q.; ZHOU, A.; GONG, M.; JIAO, L. Constrained subproblems in a decomposition-based multiobjective evolutionary algorithm. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 20, n. 3, p. 475–480, 2016.
- WANG, Z.; ZHANG, Q.; GONG, M.; ZHOU, A. A replacement strategy for balancing convergence and diversity in moea/d. In: *IEEE. Evolutionary Computation (CEC), 2014 IEEE Congress on*. [S.l.], 2014. p. 2132–2139.
- WANG, Z.; ZHANG, Q.; LI, H.; ISHIBUCHI, H.; JIAO, L. On the use of two reference points in decomposition based multiobjective evolutionary algorithms. *Swarm and evolutionary computation*, Elsevier, v. 34, p. 89–102, 2017.
- WU, M.; KWONG, S.; JIA, Y.; LI, K.; ZHANG, Q. Adaptive weights generation for decomposition-based multi-objective optimization using gaussian process regression. In: *ACM. Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference*. [S.l.], 2017. p. 641–648.
- WU, M.; LI, K.; KWONG, S.; ZHANG, Q. Evolutionary many-objective optimization based on adversarial decomposition. *IEEE transactions on cybernetics*, IEEE, 2018.
- YANG, S.; JIANG, S.; JIANG, Y. Improving the multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition with new penalty schemes. *Soft Computing*, Springer, v. 21, n. 16, p. 4677–4691, 2017.

- YUAN, Y.; XU, H.; WANG, B.; ZHANG, B.; YAO, X. Balancing convergence and diversity in decomposition-based many-objective optimizers. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 20, n. 2, p. 180–198, 2016.
- YUAN, Y.; XU, H.; WANG, B.; YAO, X. A new dominance relation-based evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 20, n. 1, p. 16–37, 2016.
- ZAPOTECAS-MARTÍNEZ, S.; DERBEL, B.; LIEFOOGHE, A.; AGUIRRE, H. E.; TANAKA, K. Geometric differential evolution in moea/d: a preliminary study. In: SPRINGER. *Mexican International Conference on Artificial Intelligence*. [S.l.], 2015. p. 364–376.
- ZHANG, Q.; LI, H. Moea/d: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, IEEE, v. 11, n. 6, p. 712–731, 2007.
- ZHANG, Q.; LIU, W.; LI, H. The performance of a new version of moea/d on cec09 unconstrained mop test instances. In: IEEE. *2009 IEEE congress on evolutionary computation*. [S.l.], 2009. p. 203–208.
- ZHANG, Q.; ZHOU, A.; ZHAO, S.; SUGANTHAN, P. N.; LIU, W.; TIWARI, S. Multiobjective optimization test instances for the cec 2009 special session and competition. *University of Essex, Colchester, UK and Nanyang technological University, Singapore, special session on performance assessment of multi-objective optimization algorithms, technical report*, v. 264, 2008.
- ZHANG, X.; TIAN, Y.; JIN, Y. A knee point-driven evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE transactions on evolutionary computation*, IEEE, v. 19, n. 6, p. 761–776, 2015.
- ZHAO, S.-Z.; SUGANTHAN, P. N.; ZHANG, Q. Decomposition-based multiobjective evolutionary algorithm with an ensemble of neighborhood sizes. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 16, n. 3, p. 442–446, 2012.
- ZHOU, A.; QU, B.-Y.; LI, H.; ZHAO, S.-Z.; SUGANTHAN, P. N.; ZHANG, Q. Multiobjective evolutionary algorithms: A survey of the state of the art. *Swarm and Evolutionary Computation*, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 32–49, 2011.
- ZHOU, A.; ZHANG, Q. Are all the subproblems equally important? resource allocation in decomposition-based multiobjective evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 20, n. 1, p. 52–64, 2016.
- ZITZLER, E.; KÜNZLI, S. Indicator-based selection in multiobjective search. In: SPRINGER. *International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*. [S.l.], 2004. p. 832–842.
- ZITZLER, E.; LAUMANN, M.; THIELE, L. Spea2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm. *TIK-report*, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich (ETH), Institut für Technische ..., v. 103, 2001.
- ZITZLER, E.; THIELE, L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength pareto approach. *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 3, n. 4, p. 257–271, 1999.

APÊNDICE A – APLICAÇÕES DE MUNDO-REAL

Nesta dissertação são usados três problemas de mundo real: vendedor ambulante multiobjetivo, mochila multiobjetivo 0/1 e planejamento de recursos hídricos. A seguir, é apresentada uma breve descrição e formulação dos problemas.

A formulação matemática do problema do vendedor ambulante multiobjetivo é a seguinte (CORNE; KNOWLES, 2007):

$$\text{minimize } \sum_{i=1}^{n-1} c_{R(i),R(i+1)}^k + c_{R(n),R(1)}^k \quad (\text{A.1})$$

onde, dado um conjunto de n cidades e um custo p, c_{ij}^k , onde $k = 1, 2, \dots, p$ (viagens da cidade i para j). O objetivo principal deste problema é encontrar um circuito, ou seja, uma permutação cíclica R de n cidades. Nesta dissertação, o parâmetro p (número de objetivos) é definido como 3, 5, 8, 10 e 15; e n (variáveis de decisão) são 30 para todos os objetivos.

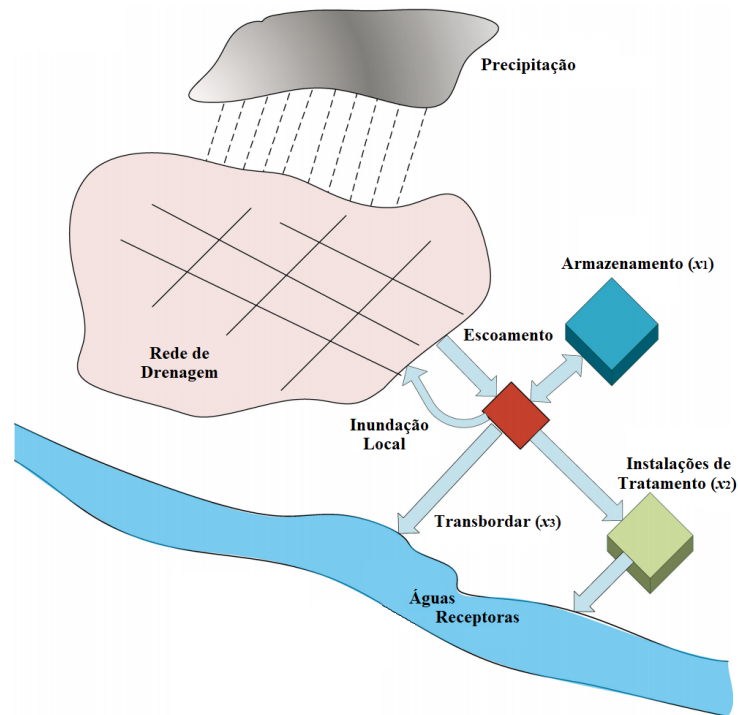
O problema da mochila multiobjetivo 0/1 é um problema de otimização combinatória. No problema da mochila multiobjetivo 0/1, há q mochilas e um conjunto de n itens. O objetivo deste problema é encontrar o vetor $z = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n) \in \{0, 1\}^n$, onde $z_j = 1$ indica que o item j está na mochila e $z_j = 0$ representa que o item j não está na mochila. A formulação matemática do problema de mochila multiobjetivo 0/1 é definida da seguinte forma (CORNE; KNOWLES, 2007):

$$\begin{aligned} \forall k \in \{1, 2, \dots, q\} : \text{maximize } f_k(z) &= \sum_{j=1}^n p_{kj} \times z_j \\ \text{sujeito a } \sum_{j=1}^n w_{kj} \times z_j &\leq c_k \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde p_{kj} é o lucro do item j colocado na mochila k , w_{kj} é o peso do item j colocado na mochila k , e c_k é a capacidade da mochila k . z_j é o item j selecionado na mochila. Segundo (CORNE; KNOWLES, 2007), o valor de p_{kj} e w_{kj} está no intervalo de $[10, 100]$.

O problema do planejamento de recursos hídricos foi proposto em Musselman e Talavage (1980) no contexto do planejamento urbano e emergiu do domínio da engenharia ambiental. Esse problema envolve o planejamento para sistemas de drenagem de águas pluviais em áreas urbanas. Para uma sub-bacia particular dentro de uma bacia hidrográfica, supondo que ela seja hidrologicamente independente de outras sub-bacias e tenha sua própria estação de tratamento, instalação de armazenamento de detenção no local, rede de drenagem e afluente a um corpo de água receptor. A ideia principal deste problema é examinar a sub-bacia em termos de suas necessidades de drenagem de águas pluviais, onde três variáveis de decisão são consideradas no sistema de drenagem de águas subterrâneas da sub-bacia. A Figura 21 apresenta as variáveis de projeto (denotada por x_1, x_2, x_3) deste problema e como elas se interligam conceitualmente,

Figura 21 – Conceituação do sistema de drenagem de águas pluviais de uma sub-bacia.



Fonte: Adaptado de Liu et al. (2019).

onde x_1 representa a capacidade de armazenamento de detenção local (bacia $\times$ polegadas), x_2 representa a taxa máxima de tratamento (bacia $\times$ polegadas / hora) e x_3 representa a taxa máxima de inundação permitida (bacia $\times$ polegadas / hora).

O problema de otimização consiste em encontrar os valores dessas três variáveis de decisão, de modo que os cinco objetivos a seguir sejam minimizados simultaneamente:

1. Custo de rede de drenagem
2. Custo de instalação de armazenamento
3. Custo de facilidade de tratamento
4. Custo esperado de danos causados pelas inundações
5. Perda econômica esperada devido a inundações

A formulação desse problema têm cinco objetivos e sete restrições, conforme descrito pelas Equações A.3 e A.4:

minimize

$$\begin{aligned}
 f_1(\mathbf{x}) &= 106780.37(x_2 + x_3) + 61704.67 \\
 f_2(\mathbf{x}) &= 3000x_1 \\
 f_3(\mathbf{x}) &= (305700)2289x_2/(0.06 \times 2289)^{0.65} \\
 f_4(\mathbf{x}) &= (250)2289\exp(-39.75x_2 + 9.9x_3 + 2.74) \\
 f_5(\mathbf{x}) &= 25[1.39/(x_1x_2) + 4940x_3 - 80]
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
 g_1(\mathbf{x}) &= 0.00139/(x_1x_2) + 4.94x_3 - 0.08 - 1 \leq 0 \\
 g_2(\mathbf{x}) &= 0.000306/(x_1x_2) + 1.082x_3 - 0.0986 - 1 \leq 0 \\
 g_3(\mathbf{x}) &= 12.307/(x_1x_2) + 49408.24x_3 + 4051.02 - 50000 \leq 0 \\
 g_4(\mathbf{x}) &= 2.098/(x_1x_2) + 8046.33x_3 - 696.71 - 16000 \leq 0 \\
 g_5(\mathbf{x}) &= 2.138/(x_1x_2) + 7883.39x_3 - 705.04 - 10000 \leq 0 \\
 g_6(\mathbf{x}) &= 0.417/(x_1x_2) + 1721.26x_3 - 136.54 - 2000 \leq 0 \\
 g_7(\mathbf{x}) &= 0.164/(x_1x_2) + 631.13x_3 - 54.48 - 550 \leq 0
 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 0.01 &\leq x_1 \leq 0.45; \quad 0.01 \leq x_2 \leq 0.10; \\
 0.01 &\leq x_3 \leq 0.10
 \end{aligned}$$

(A.4)

APÊNDICE B – OS 10 MAOEAs INVESTIGADOS

Os algoritmos considerados para comparação são apresentados em ordem cronológica.

- **NSGA-III** (DEB; JAIN, 2014) usa o framework do NSGA-II com modificações significativas em seu operador de distância de aglomeração para lidar com os MaOP. É uma abordagem elitista e o procedimento básico é semelhante ao NSGA-II: a população de pais e filhos é combinada, esta combinação é avaliada usando uma abordagem de rápida classificação de não-dominância e há um esquema eficiente de aglomeração. O operador de distância de superposição é substituído pelas seguintes abordagens. Em primeiro lugar, analogamente aos vetores de peso do MOEA/D, um número de pontos de referência bem espalhados é inserido para manter a diversidade da população. Cada membro da população é associado a um ponto de referência com base em sua distância perpendicular a uma linha de referência. Então, soluções não-dominadas próximas aos pontos de referência são priorizadas. Após a geração de soluções descendentes, o método de ordenação de não-dominância e o mecanismo de elitismo são empregados seguindo o procedimento do NSGA-II (LI et al., 2018).
- **MOEA/D-AWA** (QI et al., 2014) possui um esquema de ajuste de pesos adaptativo para alterar dinamicamente os pesos no estágio final da otimização. Periodicamente a partir de 80% do processo evolutivo, vetores de peso nas regiões densas são removidos e novos vetores de peso são gerados nas regiões esparsas. Para detectar as regiões densas e as regiões esparsas, uma população externa é mantida.
- Estimativa de densidade baseada em turnos, do inglês *Shift-based Density Estimation* (**SDE**) (LI; YANG; LIU, 2014) A ideia do algoritmo SDE é colocar indivíduos com baixa convergência em regiões lotadas. Assim, indivíduos que são pouco convergentes serão eliminados facilmente durante a evolução, pois receberão um valor de densidade mais alto. Mais especificamente, ao estimar a densidade de um indivíduo p , o SDE desloca as posições de outros indivíduos na população de acordo com a comparação de convergência entre esses indivíduos e p em cada objetivo. Se um indivíduo tiver um desempenho melhor que p para um objetivo, ele será deslocado para a mesma posição de p nesse objetivo; caso contrário, permanece inalterado. Esse processo atribuiria p a um valor de densidade mais alto se tivesse uma convergência ruim. Assim, somente o indivíduo com boa convergência e boa diversidade tem um baixo grau de ocupação no SDE (LI et al., 2018). Aqui, a aplicação de SDE no algoritmo SPEA2 (SPEA2+SDE) é selecionada para realizar experimentos.
- **Two_Arch2** (WANG; JIAO; YAO, 2014) é uma versão significativamente melhorada do algoritmo de dois arquivos, do inglês *two archives* (Two_Arch), que é um algoritmo

de baixa complexidade com dois arquivos que focam em convergência (CA) e diversidade (DA) separadamente. A estrutura básica do Two_Arch2 é semelhante a MaOEA gerais (reprodução e iteração). A principal diferença é que o conjunto de soluções não-dominadas é dividido em dois arquivos (CA e DA). Após a geração das crianças, a seleção ambiental é realizada pela CA e DA, separadamente. Diferente de Two_Arch, Two_Arch2 faz cruzamento entre CA e DA, mas mutação em CA apenas durante o processo de reprodução (LI et al., 2018).

- **KnEA** (ZHANG; TIAN; JIN, 2015) é um algoritmo evolucionário acionado por ponto de joelho para resolver problemas com muitos objetivos. No KnEA, as soluções para a próxima geração são primeiro selecionadas com base no critério de seleção de não-dominância, e os pontos de joelho são usados como critério de seleção secundária. O trabalho mostra que a preferência sobre os pontos do joelho pode ser vista, aproximadamente, como um viés no sentido de maior valor da métrica hipervolume, mantendo assim boa convergência e diversidade (LI et al., 2018).
- **MOEA/DD** (LI et al., 2015) é uma combinação de MOEA/D e NSGA-III para otimização de muitos objetivos, aproveitando as vantagens das abordagens baseadas em dominância e decomposição. Cada vetor de peso no MOEA/DD define um subproblema, ao mesmo tempo em que especifica uma sub-região única no espaço objetivo. Para manter a diversidade em um espaço objetivo de alta dimensão, a densidade de uma população é estimada pela contagem de nicho local de uma sub-região. No processo de atualização de população do MOEA/DD, apenas um descendente ou solução, é considerado a cada vez. Ou seja, várias rodadas desse procedimento de atualização são executadas se mais de uma solução de filhos tiver sido gerada. Após a atualização, a sub-região associada à solução da descendência x^c é identificada em primeiro lugar. Então, x^c é combinado com a população pai P para formar uma população híbrida P' (LI et al., 2018).
- **RVEA** (CHENG et al., 2016) aplica uma estrutura similar àquela do algoritmo NSGA-II, da qual o RVEA adota uma estratégia de elitismo, onde a população de descendentes é gerada usando operações genéticas tradicionais, e então as populações descendentes e parentais são combinadas para passar por uma seleção de elitismo. As principais novas contribuições do RVEA estão nos outros dois componentes, ou seja, na seleção guiada do vetor de referência e na adaptação do vetor de referência. O RVEA usa os vetores de referência para particionar o espaço objetivo em um número de subespaços, onde a seleção é executada separadamente. Para obter uma distribuição uniforme de soluções ótimas de Pareto, uma estratégia adaptativa de vetores de referência lida com funções objetivo que não são bem normalizadas. Além disso, o RVEA aplica uma abordagem de decomposição chamada distância penalizada pelo ângulo, do inglês *Angle Penalized Distance* (APD), para balancear dinamicamente a convergência e diversidade de soluções no espaço objetivo de alta dimensão (LI et al., 2018).

- **θ -DEA** (YUAN et al., 2016b) introduz uma nova relação de dominância, denominada dominância θ , para melhorar a convergência do NSGA-III pela referência ao procedimento do algoritmo MOEA/D, preservando a força do NSGA-III em sua manutenção de diversidade. Na dominância θ , dado um conjunto de pontos de referência bem distribuídos, as soluções são agrupadas em diferentes grupos, com cada grupo representado por um ponto de referência. Relações competitivas entre soluções só existem no mesmo *cluster*, onde uma função de adequação semelhante ao PBI é definida. Com base na relação dominância θ , a população combinada de filhos e pais é classificada em diferentes níveis de não dominância, e uma nova população é construída como no NSGA-III (LI et al., 2018).
- **MOEA/D-URAW** (FARIAS et al., 2018) O modelo usa o método de inicialização UR combinado com a adaptação de pesos para obter tanto o tamanho da população flexível quanto os conjuntos de soluções finais melhor adaptados a PFs complexas. O nível de dispersão determina as soluções que são removidas e adicionadas.
- **AR-MOEa** (TIAN et al., 2018) É um algoritmo evolucionário baseado em indicadores, especificamente o indicador IGD melhorado (IGD-NS). AR-MOEa possui adaptação dos pontos de referência para resolver MOPs e MaOPs com vários tipos de frentes de Pareto. Para melhorar a versatilidade do AR-MOEa proposto, foi desenvolvido um método de adaptação de pontos de referência sem parâmetros para ajustar os pontos de referência em cada geração para calcular o indicador. No método de adaptação proposto, os pontos de referência são adaptados com base em um ponto de referência inicializado juntamente com soluções candidatas armazenadas em um arquivo externo com base em suas contribuições para o indicador IGD-NS, levando assim tanto a distribuição uniforme quanto a aproximação da frente de Pareto em consideração.

APÊNDICE C – DESVIO-PADRÃO DAS TABELAS 4-8

Tabela 9 – Desvio padrão referente a Tabela 4.

Problem	M	NSGAIII	MOEA/D-AWA	SPEA2SDE	Two_Arch2	KnEA	MOEA/DD	RVEA	θ -DEA	MOEA/D-RAW	AR-MOEA	MOEA/D-UR
DTLZ1	3	(8.67e-4)	(2.77e-4)	(2.39e-3)	(8.14e-4)	(4.67e-2)	(6.33e-4)	(5.50e-4)	(5.06e-4)	(1.33e-3)	(5.95e-4)	(7.14e-4)
	5	(5.33e-4)	(4.94e-3)	(4.51e-3)	(1.19e-3)	(1.45e-1)	(3.05e-4)	(2.45e-4)	(6.31e-4)	(2.53e-3)	(3.07e-4)	(7.28e-4)
	8	(2.59e-1)	(1.23e-2)	(3.33e-3)	(1.46e-3)	(2.08e-1)	(7.91e-5)	(1.32e-4)	(1.29e-3)	(4.92e-3)	(1.35e-2)	(3.24e-3)
	10	(2.29e-1)	(2.16e-2)	(3.20e-3)	(1.35e-2)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(5.00e-3)	(6.25e-2)	(4.58e-3)	(9.05e-4)	(4.18e-3)
	15	(3.34e-1)	(2.84e-2)	(2.70e-3)	(9.69e-2)	(0.00e+0)	(1.29e-2)	(1.03e-3)	(1.83e-1)	(5.46e-3)	(6.71e-2)	(3.73e-3)
DTLZ2	3	(1.72e-5)	(1.77e-4)	(1.01e-3)	(7.20e-4)	(2.29e-3)	(2.19e-5)	(5.56e-3)	(8.72e-6)	(9.75e-4)	(1.14e-4)	(4.50e-4)
	5	(6.07e-4)	(1.65e-3)	(2.93e-3)	(5.00e-3)	(6.11e-3)	(3.93e-4)	(3.12e-4)	(4.51e-4)	(4.06e-3)	(4.81e-4)	(1.91e-3)
	8	(3.10e-2)	(4.24e-2)	(2.21e-3)	(2.41e-2)	(1.03e-2)	(3.17e-4)	(3.52e-4)	(3.07e-3)	(6.47e-3)	(5.76e-4)	(1.06e-2)
	10	(3.38e-2)	(4.38e-2)	(1.80e-3)	(1.84e-2)	(1.22e-2)	(2.96e-2)	(3.19e-4)	(2.82e-4)	(1.58e-2)	(8.08e-4)	(2.41e-2)
	15	(1.46e-2)	(6.05e-2)	(2.46e-3)	(3.20e-2)	(2.58e-3)	(1.74e-3)	(2.99e-3)	(8.50e-5)	(3.51e-2)	(2.39e-4)	(2.93e-2)
DTLZ3	3	(5.94e-3)	(5.95e-3)	(3.89e-3)	(1.00e-1)	(2.98e-2)	(9.68e-3)	(1.55e-2)	(9.13e-3)	(4.99e-3)	(8.18e-3)	(4.98e-3)
	5	(3.17e-1)	(2.13e-2)	(6.34e-3)	(1.29e-1)	(1.89e-1)	(2.34e-1)	(1.41e-1)	(3.57e-2)	(1.24e-2)	(3.60e-2)	(1.04e-2)
	8	(1.75e-1)	(1.58e-1)	(6.55e-3)	(2.38e-1)	(0.00e+0)	(3.59e-1)	(2.72e-1)	(3.65e-1)	(7.14e-2)	(4.18e-1)	(4.39e-2)
	10	(1.93e-1)	(6.29e-2)	(1.04e-2)	(1.39e-1)	(0.00e+0)	(2.62e-1)	(2.65e-1)	(3.87e-1)	(1.44e-1)	(3.21e-1)	(5.36e-2)
	15	(0.00e+0)	(1.65e-1)	(5.72e-3)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(2.80e-1)	(4.48e-1)	(3.97e-1)	(4.56e-2)	(4.37e-1)	(4.09e-2)
DTLZ4	3	(7.73e-2)	(1.16e-1)	(7.52e-2)	(8.65e-2)	(2.91e-3)	(6.04e-2)	(4.34e-5)	(1.07e-1)	(9.79e-2)	(1.28e-1)	(1.02e-1)
	5	(5.61e-2)	(1.04e-1)	(4.32e-2)	(1.24e-2)	(1.24e-1)	(2.05e-2)	(1.71e-2)	(5.35e-4)	(4.85e-2)	(3.12e-2)	(6.31e-2)
	8	(4.76e-2)	(3.92e-2)	(1.30e-2)	(1.49e-2)	(4.65e-3)	(1.35e-2)	(6.17e-3)	(2.70e-4)	(2.67e-2)	(2.61e-4)	(1.63e-2)
	10	(3.08e-2)	(4.42e-2)	(8.26e-3)	(1.72e-2)	(5.34e-3)	(9.63e-3)	(1.43e-2)	(3.32e-4)	(1.88e-2)	(1.98e-3)	(1.65e-2)
	15	(1.64e-2)	(1.91e-2)	(3.93e-3)	(2.39e-2)	(2.93e-3)	(3.49e-3)	(2.17e-3)	(1.26e-4)	(1.09e-2)	(2.31e-4)	(7.11e-3)
WFG4	3	(9.00e-4)	(1.34e-3)	(1.28e-3)	(1.05e-3)	(2.94e-3)	(1.02e-3)	(1.37e-3)	(5.32e-4)	(8.27e-4)	(5.64e-4)	(1.09e-3)
	5	(2.14e-3)	(6.75e-3)	(6.66e-3)	(4.09e-3)	(3.34e-3)	(4.52e-3)	(2.09e-3)	(1.40e-3)	(2.52e-3)	(2.15e-3)	(3.07e-3)
	8	(6.59e-3)	(2.63e-2)	(8.93e-3)	(9.44e-3)	(3.67e-3)	(2.23e-2)	(4.96e-3)	(3.26e-3)	(3.09e-3)	(2.70e-3)	(3.99e-3)
	10	(7.17e-3)	(1.09e-2)	(6.15e-3)	(1.01e-2)	(2.09e-3)	(2.47e-2)	(4.19e-3)	(7.68e-3)	(6.76e-3)	(6.47e-3)	(3.42e-3)
	15	(6.42e-3)	(2.64e-2)	(1.46e-2)	(1.98e-2)	(2.54e-3)	(1.51e-1)	(1.35e-2)	(2.95e-3)	(9.84e-3)	(6.18e-3)	(1.45e-2)
WFG5	3	(9.70e-5)	(3.73e-3)	(9.49e-4)	(1.30e-3)	(2.41e-3)	(1.39e-3)	(5.77e-4)	(1.57e-4)	(2.97e-3)	(1.96e-4)	(1.14e-3)
	5	(1.20e-3)	(8.16e-3)	(5.46e-3)	(5.45e-3)	(3.79e-3)	(6.46e-3)	(1.58e-3)	(2.17e-3)	(2.87e-3)	(2.57e-3)	(3.95e-3)
	8	(8.72e-4)	(1.34e-2)	(6.64e-3)	(8.30e-3)	(7.67e-3)	(1.26e-2)	(1.54e-3)	(6.85e-4)	(4.86e-3)	(1.98e-3)	(5.34e-3)
	10	(2.43e-3)	(1.11e-2)	(7.82e-3)	(1.66e-2)	(1.88e-3)	(1.69e-2)	(1.26e-3)	(2.61e-3)	(4.81e-3)	(3.31e-3)	(4.39e-3)
	15	(3.79e-3)	(9.25e-3)	(2.67e-2)	(2.50e-2)	(2.22e-3)	(3.76e-2)	(8.17e-4)	(8.16e-4)	(9.98e-3)	(2.53e-3)	(1.47e-2)
WFG6	3	(1.19e-2)	(1.39e-2)	(1.27e-2)	(1.26e-2)	(1.38e-2)	(1.50e-2)	(1.13e-2)	(1.19e-2)	(2.14e-2)	(1.22e-2)	(2.45e-2)
	5	(1.72e-2)	(3.55e-2)	(1.78e-2)	(1.54e-2)	(1.65e-2)	(1.68e-2)	(1.76e-2)	(1.29e-2)	(1.73e-2)	(1.53e-2)	(1.93e-2)
	8	(1.59e-2)	(4.31e-2)	(2.47e-2)	(1.71e-2)	(2.06e-2)	(2.07e-2)	(4.16e-2)	(1.61e-2)	(2.32e-2)	(1.80e-2)	(2.87e-2)
	10	(3.17e-2)	(3.27e-2)	(2.67e-2)	(2.71e-2)	(1.97e-2)	(7.25e-2)	(9.16e-2)	(1.45e-2)	(2.80e-2)	(2.23e-2)	(2.77e-2)
	15	(2.10e-2)	(4.45e-2)	(3.04e-2)	(2.76e-2)	(2.68e-2)	(1.56e-1)	(1.09e-1)	(1.92e-2)	(3.52e-2)	(2.41e-2)	(3.44e-2)
WFG7	3	(3.70e-4)	(1.62e-3)	(1.91e-3)	(9.63e-4)	(2.74e-3)	(1.66e-3)	(1.02e-3)	(3.69e-4)	(5.91e-4)	(5.28e-4)	(5.52e-4)
	5	(2.53e-3)	(1.36e-2)	(5.94e-3)	(3.95e-3)	(3.59e-3)	(8.60e-3)	(2.49e-3)	(1.00e-3)	(2.74e-3)	(3.45e-3)	(2.71e-3)
	8	(2.79e-3)	(2.01e-2)	(7.01e-3)	(1.11e-2)	(7.19e-3)	(2.00e-2)	(6.23e-3)	(1.20e-3)	(3.85e-3)	(2.33e-3)	(2.79e-3)
	10	(2.32e-2)	(4.55e-2)	(4.14e-3)	(1.48e-2)	(6.87e-3)	(4.38e-2)	(1.90e-2)	(4.08e-3)	(5.40e-3)	(4.77e-3)	(3.19e-3)
	15	(2.80e-3)	(9.03e-2)	(8.94e-3)	(2.32e-2)	(2.95e-3)	(1.07e-2)	(3.05e-1)	(1.43e-3)	(1.47e-2)	(3.79e-3)	(2.13e-2)
WFG8	3	(3.64e-3)	(1.37e-3)	(1.85e-3)	(1.86e-3)	(3.31e-3)	(2.51e-3)	(3.36e-3)	(1.43e-3)	(2.39e-3)	(1.47e-3)	(2.02e-3)
	5	(2.73e-3)	(9.76e-3)	(4.22e-3)	(7.39e-3)	(5.99e-3)	(1.85e-2)	(5.35e-3)	(3.23e-3)	(3.92e-3)	(2.67e-3)	(4.77e-3)
	8	(1.87e-2)	(2.66e-2)	(6.62e-3)	(1.56e-2)	(2.27e-2)	(6.32e-2)	(9.60e-2)	(2.34e-2)	(6.83e-3)	(1.63e-2)	(6.57e-3)
	10	(1.44e-2)	(4.79e-2)	(6.72e-3)	(1.83e-2)	(6.05e-2)	(9.35e-2)	(9.62e-2)	(1.48e-2)	(7.30e-3)	(3.94e-2)	(5.27e-3)
	15	(1.33e-2)	(3.21e-2)	(6.69e-3)	(4.21e-2)	(1.00e-1)	(2.03e-1)	(9.30e-1)	(9.30e-1)	(8.83e-3)	(2.29e-2)	(1.28e-2)
WFG9	3	(3.10e-3)	(3.20e-2)	(3.77e-3)	(2.69e-3)	(2.72e-3)	(2.31e-2)	(5.40e-3)	(3.01e-3)	(2.77e-3)	(3.91e-3)	(2.41e-2)
	5	(3.23e-2)	(4.91e-2)	(6.47e-3)	(6.75e-3)	(4.07e-3)	(2.44e-2)	(1.01e-2)	(1.32e-2)	(3.38e-2)	(1.23e-2)	(2.69e-2)
	8	(4.83e-2)	(7.09e-2)	(3.55e-2)	(1.69e-2)	(4.14e-2)	(3.40e-2)	(3.09e-2)	(2.63e-2)	(5.25e-2)	(2.03e-2)	(5.30e-2)
	10	(6.20e-2)	(5.24e-2)	(5.15e-2)	(2.40e-2)	(3.47e-2)	(4.94e-2)	(4.13e-2)	(4.26e-2)	(4.42e-2)	(4.48e-2)	(5.27e-2)
	15	(3.86e-2)	(8.64e-2)	(5.03e-2)	(3.79e-2)	(7.09e-2)	(1.95e-1)	(5.90e-2)	(1.92e-2)	(5.71e-2)	(4.47e-2)	(5.69e-2)

Fonte: O autor (2019).

Tabela 10 – Desvio padrão referente a Tabela 5.

Problem	M	NSGAIII	MOEA/D-AWA	SPEA2SDE	Two_Arch2	KnEA	MOEA/DD	RVEA	θ -DEA	MOEA/D-URAW	AR-MOEA	MOEA/D-UR
DTLZ5	3	(7.78e-4)	(1.12e-4)	(2.02e-4)	(4.30e-5)	(1.19e-3)	(5.32e-4)	(7.56e-3)	(1.12e-3)	(1.22e-4)	(9.07e-5)	(1.14e-4)
	5	(9.66e-3)	(5.54e-4)	(3.93e-3)	(2.04e-3)	(3.51e-2)	(2.37e-3)	(1.47e-3)	(6.89e-3)	(3.09e-3)	(2.51e-3)	(2.70e-3)
	8	(1.81e-3)	(2.68e-4)	(1.14e-3)	(1.16e-3)	(2.57e-2)	(7.22e-4)	(1.64e-3)	(1.19e-3)	(1.60e-3)	(6.04e-3)	(1.37e-3)
	10	(3.07e-3)	(3.21e-4)	(5.47e-4)	(4.97e-4)	(2.62e-2)	(4.26e-4)	(1.53e-3)	(1.46e-3)	(2.01e-3)	(1.57e-3)	(4.65e-4)
	15	(4.89e-3)	(6.49e-4)	(2.80e-4)	(1.49e-3)	(3.02e-2)	(2.24e-4)	(4.61e-4)	(1.99e-3)	(4.71e-3)	(4.25e-3)	(5.18e-4)
DTLZ6	3	(1.38e-3)	(1.24e-4)	(1.82e-4)	(2.80e-5)	(7.61e-3)	(1.33e-4)	(9.01e-3)	(1.52e-3)	(1.85e-4)	(4.82e-5)	(3.76e-5)
	5	(6.59e-3)	(3.54e-4)	(5.04e-3)	(3.14e-3)	(3.61e-2)	(2.39e-3)	(4.93e-3)	(2.85e-3)	(5.57e-3)	(4.69e-3)	(1.12e-3)
	8	(4.15e-2)	(8.15e-4)	(6.49e-4)	(8.45e-4)	(1.10e-2)	(2.19e-2)	(4.40e-2)	(1.90e-4)	(1.51e-2)	(1.83e-3)	(7.26e-4)
	10	(4.39e-2)	(2.97e-4)	(3.12e-4)	(8.09e-5)	(0.00e+0)	(7.38e-3)	(6.44e-4)	(3.25e-4)	(1.09e-2)	(7.82e-4)	(9.06e-4)
	15	(4.24e-2)	(2.90e-4)	(7.12e-4)	(2.31e-2)	(0.00e+0)	(2.88e-3)	(4.48e-2)	(2.45e-4)	(1.55e-2)	(5.21e-4)	(4.44e-4)
DTLZ7	3	(1.07e-3)	(9.30e-3)	(6.17e-4)	(1.27e-2)	(1.15e-3)	(1.37e-2)	(2.87e-3)	(7.99e-3)	(7.53e-4)	(1.83e-2)	(9.21e-3)
	5	(3.74e-3)	(5.34e-2)	(5.69e-3)	(8.42e-3)	(1.03e-2)	(1.66e-2)	(6.23e-3)	(1.97e-2)	(3.35e-3)	(1.78e-3)	(2.50e-3)
	8	(5.37e-3)	(1.52e-2)	(4.95e-2)	(1.86e-2)	(2.80e-2)	(2.38e-2)	(1.90e-2)	(1.11e-2)	(5.35e-3)	(7.17e-3)	(6.27e-3)
	10	(3.36e-2)	(1.93e-2)	(3.43e-2)	(1.51e-2)	(2.85e-2)	(4.52e-5)	(1.51e-2)	(3.16e-2)	(5.08e-3)	(2.20e-2)	(5.18e-3)
	15	(1.15e-2)	(1.17e-4)	(3.49e-3)	(7.91e-3)	(1.83e-3)	(2.35e-12)	(1.29e-2)	(7.89e-3)	(6.06e-3)	(6.93e-3)	(8.82e-3)
IDTLZ1	3	(1.67e-3)	(6.26e-4)	(7.03e-4)	(2.97e-3)	(4.92e-2)	(2.15e-3)	(2.34e-2)	(9.17e-4)	(8.25e-4)	(1.65e-3)	(9.61e-4)
	5	(5.35e-4)	(3.14e-4)	(2.06e-4)	(1.83e-3)	(1.14e-3)	(2.94e-4)	(7.01e-4)	(9.43e-4)	(3.69e-4)	(5.00e-4)	(3.53e-4)
	8	(1.51e-6)	(1.56e-6)	(4.46e-6)	(7.58e-6)	(4.25e-6)	(2.00e-6)	(1.04e-6)	(2.12e-6)	(3.48e-6)	(5.80e-6)	(4.30e-6)
	10	(5.18e-8)	(1.53e-8)	(1.92e-7)	(1.36e-7)	(9.72e-8)	(1.22e-8)	(3.88e-9)	(3.75e-8)	(2.67e-7)	(2.71e-7)	(2.69e-7)
	15	(1.12e-12)	(5.25e-14)	(4.15e-13)	(7.87e-13)	(6.87e-13)	(7.57e-14)	(7.24e-14)	(1.01e-12)	(0.00e+0)	(2.89e-12)	(2.53e-13)
IDTLZ2	3	(2.49e-3)	(9.29e-4)	(3.33e-3)	(5.37e-4)	(2.57e-3)	(1.19e-3)	(2.95e-4)	(2.19e-3)	(3.40e-4)	(4.09e-4)	(2.80e-4)
	5	(4.54e-3)	(1.85e-3)	(1.61e-3)	(1.29e-3)	(3.11e-3)	(4.29e-3)	(8.16e-3)	(9.71e-3)	(1.38e-3)	(1.44e-3)	(1.32e-3)
	8	(1.89e-4)	(3.40e-4)	(1.64e-4)	(2.04e-4)	(2.79e-4)	(5.90e-5)	(1.97e-4)	(2.69e-4)	(1.98e-4)	(1.75e-4)	(1.26e-4)
	10	(9.21e-6)	(1.06e-5)	(2.19e-5)	(2.31e-5)	(3.17e-5)	(1.06e-5)	(3.09e-5)	(1.51e-5)	(1.39e-5)	(1.33e-5)	(1.09e-5)
	15	(4.74e-9)	(2.67e-10)	(2.61e-8)	(4.90e-9)	(2.59e-9)	(2.05e-8)	(1.13e-8)	(1.37e-8)	(2.20e-8)	(5.17e-8)	(8.87e-10)
WFG1	3	(1.33e-2)	(2.49e-3)	(2.56e-3)	(1.10e-3)	(4.20e-3)	(6.80e-2)	(2.17e-2)	(1.42e-2)	(4.04e-3)	(7.24e-3)	(3.03e-3)
	5	(4.54e-2)	(1.28e-3)	(1.25e-3)	(2.78e-2)	(2.92e-2)	(6.81e-2)	(4.43e-2)	(3.38e-2)	(1.25e-2)	(3.94e-2)	(1.59e-2)
	8	(5.30e-2)	(1.11e-1)	(1.19e-3)	(5.71e-2)	(6.70e-2)	(5.88e-2)	(7.56e-2)	(2.94e-2)	(4.54e-4)	(5.19e-2)	(2.65e-4)
	10	(7.07e-2)	(1.03e-1)	(3.76e-3)	(8.20e-2)	(1.01e-1)	(9.82e-2)	(9.85e-2)	(4.50e-2)	(2.95e-4)	(6.15e-2)	(1.78e-4)
	15	(6.83e-2)	(7.47e-2)	(3.05e-2)	(8.08e-2)	(2.76e-1)	(3.52e-2)	(8.39e-2)	(1.06e-1)	(2.00e-4)	(1.99e-2)	(1.70e-4)
WFG2	3	(6.30e-4)	(3.16e-3)	(2.50e-3)	(1.19e-3)	(2.37e-3)	(1.53e-3)	(1.51e-3)	(4.96e-4)	(8.11e-4)	(7.09e-4)	(6.50e-4)
	5	(1.22e-3)	(5.09e-3)	(4.91e-3)	(1.37e-3)	(1.49e-3)	(6.29e-3)	(6.24e-3)	(1.34e-3)	(7.72e-4)	(1.40e-3)	(8.72e-4)
	8	(2.17e-3)	(1.80e-2)	(4.29e-3)	(1.58e-3)	(2.02e-3)	(9.94e-3)	(4.21e-3)	(4.32e-3)	(1.22e-3)	(1.63e-3)	(1.48e-3)
	10	(2.47e-3)	(3.84e-3)	(2.73e-3)	(1.45e-3)	(5.82e-3)	(1.44e-2)	(9.80e-3)	(6.71e-2)	(2.95e-3)	(2.97e-3)	(1.76e-3)
	15	(4.70e-3)	(1.25e-2)	(2.54e-3)	(1.87e-3)	(2.33e-2)	(5.90e-3)	(2.84e-2)	(3.10e-2)	(1.11e-2)	(4.37e-3)	(7.20e-3)
WFG3	3	(4.57e-3)	(2.06e-3)	(3.64e-3)	(1.91e-3)	(5.69e-3)	(1.53e-2)	(4.75e-3)	(2.86e-3)	(2.55e-3)	(3.53e-3)	(3.47e-3)
	5	(2.41e-2)	(2.16e-2)	(3.84e-2)	(1.77e-2)	(2.25e-2)	(1.52e-2)	(2.24e-2)	(1.63e-2)	(1.75e-2)	(1.74e-2)	(2.67e-2)
	8	(2.25e-2)	(1.39e-2)	(0.00e+0)	(1.64e-2)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(1.53e-2)	(1.91e-2)	(9.75e-3)	(1.06e-2)
	10	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(1.73e-3)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)
	15	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)	(0.00e+0)

Fonte: O autor (2019).

Tabela 11 – Desvio padrão referente a Tabela 6.

Problem	M	NSGAIII	MOEA/D-AWA	SPEA2SDE	Two_Arch2	KnEA	MOEA/DD	RVEA	θ -DEA	MOEA/D-RAW	AR-MOEA	MOEA/D-UR
DTLZ1	3	(1.08e-4)	(3.02e-5)	(2.26e-4)	(5.86e-4)	(2.10e-2)	(6.35e-5)	(5.14e-5)	(4.92e-5)	(1.84e-4)	(6.22e-5)	(1.12e-4)
	5	(1.38e-4)	(9.31e-4)	(4.50e-4)	(1.58e-3)	(6.80e-2)	(9.55e-5)	(5.55e-5)	(1.37e-4)	(9.68e-4)	(1.09e-4)	(5.76e-4)
	8	(1.62e-1)	(2.08e-2)	(7.39e-4)	(3.17e-3)	(1.04e+0)	(9.25e-4)	(1.27e-3)	(5.73e-3)	(1.08e-2)	(1.46e-2)	(1.20e-2)
	10	(1.24e-1)	(8.38e-3)	(1.01e-3)	(7.83e-3)	(4.67e+0)	(8.36e-4)	(1.53e-2)	(1.52e-2)	(1.52e-2)	(4.00e-3)	(1.54e-2)
	15	(1.48e-1)	(1.47e-2)	(1.14e-3)	(3.00e-2)	(1.05e+1)	(9.93e-3)	(1.21e-2)	(5.95e-2)	(1.43e-2)	(3.08e-2)	(1.44e-2)
DTLZ2	3	(3.40e-6)	(2.06e-4)	(3.18e-3)	(1.59e-3)	(2.45e-3)	(1.33e-6)	(5.78e-5)	(1.70e-6)	(2.97e-4)	(3.58e-5)	(2.56e-4)
	5	(4.18e-5)	(1.08e-3)	(2.10e-3)	(2.57e-3)	(5.39e-3)	(1.32e-5)	(2.53e-5)	(1.56e-5)	(1.59e-3)	(8.43e-5)	(8.72e-4)
	8	(4.84e-2)	(6.30e-2)	(3.40e-3)	(4.14e-3)	(8.42e-3)	(2.29e-5)	(8.55e-6)	(3.34e-5)	(2.27e-3)	(2.14e-4)	(3.63e-3)
	10	(7.41e-2)	(5.23e-2)	(3.53e-3)	(5.16e-3)	(9.92e-3)	(1.78e-3)	(4.90e-4)	(3.99e-4)	(1.23e-2)	(1.17e-3)	(1.56e-2)
	15	(1.91e-2)	(5.60e-2)	(3.41e-3)	(1.12e-2)	(4.97e-3)	(1.42e-3)	(8.44e-3)	(3.25e-4)	(5.43e-2)	(1.46e-3)	(5.11e-2)
DTLZ3	3	(1.43e-3)	(1.29e-3)	(3.11e-3)	(1.73e-1)	(2.80e-2)	(3.21e-3)	(1.01e-2)	(2.89e-3)	(1.98e-3)	(2.22e-3)	(1.24e-3)
	5	(5.26e-1)	(2.52e-2)	(1.40e-2)	(1.62e-1)	(2.50e-1)	(2.13e-1)	(1.58e-1)	(1.29e-2)	(1.36e-2)	(1.68e-2)	(7.25e-3)
	8	(4.82e+0)	(1.63e-1)	(1.80e-2)	(2.58e-1)	(3.20e+1)	(6.30e-1)	(2.45e-1)	(6.23e-1)	(7.68e-2)	(8.38e-1)	(7.99e-2)
	10	(2.61e+0)	(5.13e-2)	(1.39e-2)	(8.30e-1)	(8.93e+1)	(2.52e-1)	(7.90e-1)	(5.06e-1)	(1.36e-1)	(7.33e-1)	(6.60e-2)
	15	(4.05e+0)	(1.28e-1)	(1.20e-2)	(9.59e+0)	(1.18e+2)	(2.14e-1)	(3.59e-1)	(1.29e+0)	(5.22e-2)	(8.89e-1)	(3.68e-2)
DTLZ4	3	(1.71e-1)	(2.38e-1)	(1.63e-1)	(1.63e-1)	(2.26e-3)	(1.26e-1)	(5.84e-5)	(2.23e-1)	(2.22e-1)	(2.73e-1)	(2.30e-1)
	5	(1.06e-1)	(1.77e-1)	(9.74e-2)	(2.91e-3)	(1.63e-1)	(4.22e-2)	(4.09e-2)	(4.13e-5)	(1.06e-1)	(7.54e-2)	(1.31e-1)
	8	(7.68e-2)	(7.49e-2)	(3.48e-2)	(3.98e-3)	(5.82e-3)	(3.14e-2)	(2.82e-2)	(3.16e-5)	(6.80e-2)	(7.27e-5)	(4.66e-2)
	10	(7.65e-2)	(7.19e-2)	(2.43e-2)	(2.95e-3)	(4.48e-3)	(2.82e-2)	(3.63e-2)	(5.83e-4)	(4.90e-2)	(7.27e-3)	(4.44e-2)
	15	(2.19e-2)	(3.88e-2)	(1.23e-2)	(5.29e-3)	(3.44e-3)	(1.23e-2)	(7.96e-3)	(3.86e-5)	(2.76e-2)	(5.15e-4)	(2.13e-2)
WFG4	3	(3.52e-4)	(2.35e-3)	(1.16e-2)	(4.36e-3)	(8.48e-3)	(1.10e-3)	(4.03e-3)	(2.02e-4)	(1.29e-3)	(3.23e-4)	(1.41e-3)
	5	(1.35e-3)	(2.52e-2)	(2.51e-2)	(1.17e-2)	(2.09e-2)	(1.61e-2)	(2.44e-3)	(7.44e-4)	(6.26e-3)	(9.79e-4)	(6.55e-3)
	8	(1.48e-2)	(2.21e-1)	(4.72e-2)	(3.52e-2)	(3.96e-2)	(1.47e-1)	(1.27e-2)	(3.48e-3)	(1.64e-2)	(2.49e-3)	(2.04e-2)
	10	(6.68e-2)	(8.02e-2)	(7.84e-2)	(3.67e-2)	(5.99e-2)	(2.09e-1)	(9.47e-2)	(3.99e-2)	(3.99e-2)	(2.81e-2)	(4.25e-2)
	15	(9.21e-2)	(3.65e-1)	(5.67e-1)	(7.55e-2)	(1.88e-1)	(1.84e+0)	(2.02e-1)	(2.69e-2)	(3.88e-1)	(2.80e-2)	(3.22e-1)
WFG5	3	(1.39e-4)	(2.34e-3)	(1.24e-2)	(2.60e-3)	(6.39e-3)	(2.24e-3)	(1.31e-3)	(8.76e-5)	(6.41e-4)	(1.39e-4)	(8.83e-4)
	5	(9.25e-4)	(1.44e-2)	(2.08e-2)	(1.18e-2)	(3.08e-2)	(1.49e-2)	(2.09e-3)	(1.65e-3)	(4.76e-3)	(1.25e-3)	(6.43e-3)
	8	(3.94e-3)	(8.93e-2)	(4.54e-2)	(3.27e-2)	(4.39e-2)	(1.27e-1)	(1.03e-2)	(3.28e-3)	(1.54e-2)	(1.65e-3)	(1.41e-2)
	10	(1.17e-2)	(3.63e-2)	(6.10e-2)	(2.71e-2)	(9.02e-2)	(1.16e-1)	(5.55e-2)	(1.08e-2)	(2.57e-2)	(3.95e-2)	(2.56e-2)
	15	(4.12e-2)	(2.69e-1)	(5.47e-1)	(8.68e-2)	(2.25e-1)	(1.33e-1)	(3.77e-2)	(1.38e-2)	(1.19e-1)	(3.91e-3)	(2.34e-1)
WFG6	3	(9.41e-3)	(1.17e-2)	(1.38e-2)	(1.04e-2)	(1.16e-2)	(1.05e-2)	(9.26e-3)	(9.99e-3)	(1.67e-2)	(1.06e-2)	(2.18e-2)
	5	(4.01e-3)	(5.38e-2)	(3.22e-2)	(1.80e-2)	(2.70e-2)	(1.60e-2)	(7.15e-3)	(1.73e-3)	(6.15e-3)	(2.38e-3)	(4.80e-3)
	8	(9.60e-3)	(3.30e-1)	(4.13e-2)	(3.25e-2)	(7.16e-2)	(1.53e-1)	(4.13e-2)	(9.42e-3)	(1.70e-2)	(9.92e-3)	(2.05e-2)
	10	(4.04e-1)	(7.22e-2)	(7.45e-2)	(3.70e-2)	(3.19e-1)	(3.50e-1)	(3.33e-1)	(1.15e-2)	(3.07e-2)	(4.46e-2)	(5.08e-2)
	15	(6.53e-1)	(6.83e-1)	(7.00e-1)	(7.29e-2)	(6.43e-1)	(1.91e+0)	(6.90e-1)	(8.70e-3)	(1.63e-1)	(1.52e-2)	(3.75e-1)
WFG7	3	(4.00e-4)	(3.76e-3)	(1.52e-2)	(5.63e-3)	(8.21e-3)	(1.32e-3)	(3.31e-3)	(2.85e-4)	(1.58e-3)	(2.39e-4)	(1.54e-3)
	5	(4.11e-3)	(3.82e-2)	(3.20e-2)	(1.47e-2)	(2.04e-2)	(1.82e-2)	(4.19e-3)	(1.26e-3)	(6.11e-3)	(2.05e-3)	(5.28e-3)
	8	(4.76e-3)	(2.04e-1)	(5.16e-2)	(3.30e-2)	(5.16e-2)	(1.76e-1)	(1.09e-2)	(3.10e-3)	(1.53e-2)	(3.39e-3)	(2.19e-2)
	10	(3.00e-1)	(2.08e-1)	(7.42e-2)	(3.47e-2)	(1.01e-1)	(2.20e-1)	(8.39e-2)	(2.78e-2)	(2.25e-2)	(2.71e-2)	(9.34e-2)
	15	(1.16e-1)	(5.09e-1)	(2.83e-1)	(6.39e-2)	(1.73e-1)	(4.03e-1)	(1.45e-1)	(3.37e-2)	(1.64e-1)	(3.41e-2)	(3.90e-1)
WFG8	3	(6.60e-3)	(4.03e-3)	(1.10e-2)	(4.79e-3)	(6.71e-3)	(2.10e-3)	(7.91e-3)	(2.09e-3)	(2.16e-3)	(2.36e-3)	(3.46e-3)
	5	(7.61e-3)	(1.85e-2)	(1.91e-2)	(1.40e-2)	(2.52e-2)	(1.34e-2)	(8.60e-3)	(6.11e-3)	(4.79e-3)	(2.02e-3)	(5.56e-3)
	8	(2.32e-1)	(1.84e-1)	(3.10e-2)	(3.92e-2)	(3.19e-2)	(3.90e-1)	(4.32e-2)	(2.59e-2)	(3.07e-2)	(1.83e-2)	(3.87e-2)
	10	(2.48e-1)	(3.25e-1)	(6.41e-2)	(4.30e-2)	(3.48e-1)	(3.31e-1)	(1.80e-1)	(4.42e-2)	(4.24e-2)	(5.26e-2)	(7.28e-2)
	15	(2.33e-1)	(8.29e-1)	(1.42e-1)	(6.18e-2)	(6.85e-1)	(1.56e+0)	(5.22e-1)	(1.95e-1)	(2.69e-1)	(3.96e-2)	(4.49e-1)
WFG9	3	(1.70e-3)	(3.37e-2)	(1.30e-2)	(3.72e-3)	(5.01e-3)	(2.47e-2)	(4.42e-3)	(1.40e-3)	(2.35e-3)	(1.62e-3)	(2.44e-2)
	5	(1.04e-2)	(2.13e-2)	(2.76e-2)	(1.23e-2)	(1.43e-2)	(1.58e-2)	(6.40e-3)	(3.20e-3)	(1.19e-2)	(4.18e-3)	(1.08e-2)
	8	(2.18e-2)	(8.33e-2)	(3.83e-2)	(3.25e-2)	(4.37e-2)	(1.46e-1)	(1.59e-2)	(1.52e-2)	(3.03e-2)	(2.27e-2)	(3.70e-2)
	10	(1.15e-1)	(2.76e-1)	(7.10e-2)	(5.19e-2)	(5.92e-2)	(1.07e-1)	(5.30e-2)	(4.40e-2)	(3.88e-2)	(4.14e-2)	(5.94e-2)
	15	(1.10e-1)	(1.99e-1)	(5.31e-1)	(1.30e-1)	(1.20e-1)	(1.96e+0)	(1.61e-1)	(7.51e-2)	(2.15e-1)	(5.65e-2)	(3.70e-1)

Fonte: O autor (2019).

Tabela 12 – Desvio padrão referente a Tabela 7.

Problem	M	NSGIII	MOEA/D-AWA	SPEA2SDE	Two_Arch2	KnEA	MOEA/DD	RVEA	θ -DEA	MOEA/D-URAW	AR-MOEA	MOEA/D-UR
DTLZ5	3	(1.20e-3)	(1.28e-4)	(9.00e-4)	(3.40e-4)	(9.99e-4)	(7.38e-4)	(8.91e-3)	(2.46e-3)	(3.80e-5)	(8.79e-5)	(3.09e-5)
	5	(4.57e-2)	(3.75e-3)	(1.24e-2)	(1.23e-2)	(1.11e-1)	(1.54e-2)	(6.57e-2)	(4.90e-2)	(1.17e-2)	(1.13e-2)	(9.35e-3)
	8	(4.76e-2)	(4.25e-2)	(2.27e-2)	(2.79e-2)	(8.56e-2)	(1.76e-3)	(3.90e-2)	(4.96e-2)	(1.12e-2)	(2.90e-2)	(1.14e-2)
	10	(1.03e-1)	(2.17e-2)	(2.82e-2)	(4.25e-2)	(9.55e-2)	(2.72e-2)	(2.50e-1)	(4.99e-2)	(7.82e-3)	(1.82e-2)	(1.45e-2)
	15	(4.72e-2)	(6.28e-2)	(3.14e-2)	(9.82e-2)	(2.59e-1)	(7.60e-4)	(1.59e-1)	(5.55e-2)	(1.21e-2)	(2.98e-2)	(1.19e-2)
DTLZ6	3	(2.13e-3)	(1.21e-4)	(1.00e-3)	(9.65e-5)	(9.02e-3)	(4.81e-4)	(1.22e-2)	(2.95e-3)	(2.86e-5)	(1.22e-4)	(2.42e-5)
	5	(8.63e-2)	(7.23e-3)	(1.96e-2)	(2.33e-2)	(1.25e-1)	(1.61e-2)	(6.66e-2)	(5.67e-2)	(1.37e-2)	(2.04e-2)	(3.58e-3)
	8	(3.86e-1)	(4.01e-2)	(5.77e-2)	(9.54e-2)	(4.82e-1)	(5.69e-3)	(6.37e-2)	(6.26e-2)	(2.80e-2)	(2.49e-2)	(1.17e-2)
	10	(5.46e-1)	(3.37e-2)	(6.82e-2)	(1.25e-1)	(4.57e-1)	(2.82e-2)	(8.60e-2)	(7.66e-2)	(2.18e-2)	(3.44e-2)	(5.85e-3)
	15	(2.93e-1)	(4.29e-2)	(4.47e-2)	(1.38e-1)	(5.22e-1)	(1.89e-3)	(1.55e-1)	(5.58e-2)	(2.07e-2)	(3.22e-2)	(1.11e-2)
DTLZ7	3	(2.10e-3)	(8.19e-2)	(2.19e-3)	(1.00e-1)	(3.79e-3)	(1.70e-1)	(2.41e-3)	(7.04e-2)	(3.07e-3)	(1.62e-1)	(7.49e-2)
	5	(2.34e-2)	(4.99e-2)	(4.79e-2)	(7.96e-2)	(2.23e-1)	(5.61e-1)	(1.92e-2)	(7.21e-2)	(1.31e-2)	(4.77e-3)	(4.59e-2)
	8	(3.38e-2)	(7.23e-2)	(4.57e-2)	(6.15e-3)	(2.12e-2)	(1.51e+0)	(3.10e-1)	(5.48e-2)	(1.62e-1)	(5.23e-2)	(7.44e-2)
	10	(4.03e-1)	(8.76e-2)	(2.46e-2)	(1.88e-2)	(2.89e-2)	(3.82e-1)	(2.70e-1)	(3.15e-1)	(2.85e-1)	(3.45e-1)	(3.00e-1)
	15	(4.21e-1)	(1.78e+0)	(2.79e-2)	(2.00e-1)	(4.12e-1)	(1.14e+0)	(1.01e+0)	(1.04e+0)	(5.10e-1)	(6.16e-1)	(5.07e-1)
IDTLZ1	3	(6.70e-4)	(2.98e-4)	(2.02e-4)	(2.26e-3)	(5.74e-2)	(1.16e-3)	(2.67e-2)	(4.68e-4)	(1.11e-4)	(2.43e-4)	(1.11e-4)
	5	(5.51e-3)	(2.34e-3)	(7.66e-4)	(3.49e-2)	(1.40e-2)	(5.24e-3)	(1.84e-2)	(3.43e-2)	(5.48e-4)	(1.44e-3)	(5.08e-4)
	8	(2.68e-3)	(1.64e-2)	(1.95e-2)	(3.96e-2)	(1.80e-2)	(9.98e-3)	(1.55e-2)	(5.23e-3)	(2.46e-3)	(1.41e-2)	(3.56e-3)
	10	(5.17e-3)	(2.27e-2)	(2.34e-2)	(4.47e-2)	(1.86e-2)	(2.39e-2)	(2.85e-2)	(5.35e-3)	(4.58e-3)	(1.32e-2)	(4.37e-3)
	15	(7.15e-3)	(1.70e-2)	(1.81e-2)	(3.13e-2)	(1.56e-2)	(2.86e-2)	(4.08e-1)	(5.15e-3)	(7.17e-3)	(1.67e-2)	(1.02e-2)
IDTLZ2	3	(2.71e-3)	(1.20e-3)	(1.08e-2)	(1.20e-3)	(8.03e-3)	(1.11e-3)	(5.78e-4)	(4.07e-3)	(3.25e-4)	(1.93e-4)	(2.45e-4)
	5	(1.90e-2)	(2.91e-3)	(1.19e-2)	(2.74e-3)	(1.50e-2)	(4.46e-3)	(1.82e-2)	(1.45e-2)	(1.11e-3)	(2.39e-3)	(8.48e-4)
	8	(9.62e-3)	(2.85e-2)	(1.26e-2)	(4.58e-3)	(2.37e-2)	(2.23e-3)	(5.48e-3)	(1.25e-2)	(1.03e-3)	(8.32e-3)	(1.47e-3)
	10	(1.18e-2)	(4.29e-2)	(9.75e-3)	(4.12e-3)	(3.81e-2)	(8.14e-3)	(3.40e-2)	(1.15e-2)	(2.27e-3)	(1.34e-2)	(2.59e-3)
	15	(6.42e-3)	(3.56e-2)	(8.40e-3)	(1.19e-2)	(4.19e-2)	(9.89e-3)	(7.50e-3)	(1.25e-2)	(1.42e-2)	(3.59e-2)	(2.15e-2)
WFG1	3	(1.98e-2)	(1.19e-2)	(1.85e-2)	(2.43e-3)	(2.01e-2)	(1.19e-1)	(3.53e-2)	(2.05e-2)	(2.20e-2)	(8.86e-3)	(1.85e-2)
	5	(7.47e-2)	(2.43e-2)	(2.17e-2)	(1.67e-2)	(1.82e-2)	(1.47e-1)	(5.75e-2)	(4.36e-2)	(2.24e-2)	(4.44e-2)	(5.60e-2)
	8	(8.11e-2)	(3.05e-1)	(4.69e-2)	(4.34e-2)	(7.41e-2)	(6.75e-2)	(6.10e-2)	(3.96e-2)	(5.46e-2)	(5.55e-2)	(1.62e-1)
	10	(9.23e-2)	(1.38e-1)	(5.10e-2)	(8.44e-2)	(1.18e-1)	(7.47e-2)	(6.00e-2)	(5.94e-2)	(3.90e-2)	(8.66e-2)	(1.52e-1)
	15	(1.48e-1)	(2.93e-1)	(1.14e-1)	(1.01e-1)	(5.40e-1)	(5.20e-2)	(8.83e-2)	(5.76e-1)	(1.04e-1)	(8.82e-2)	(1.35e-1)
WFG2	3	(9.02e-4)	(6.60e-3)	(7.53e-3)	(2.87e-3)	(6.91e-3)	(3.72e-3)	(6.38e-3)	(5.99e-4)	(1.83e-3)	(9.67e-4)	(1.66e-3)
	5	(3.23e-3)	(3.15e-2)	(2.29e-2)	(6.56e-3)	(2.07e-2)	(1.05e-2)	(1.05e-2)	(2.16e-3)	(1.24e-2)	(3.59e-3)	(1.00e-2)
	8	(1.44e-1)	(2.75e-1)	(4.11e-2)	(1.68e-2)	(3.83e-2)	(4.42e-2)	(3.01e-2)	(3.34e-2)	(3.19e-2)	(3.35e-2)	(6.28e-2)
	10	(1.75e-1)	(5.70e-2)	(5.43e-2)	(1.74e-2)	(9.65e-2)	(3.75e-2)	(5.24e-2)	(7.12e-1)	(6.35e-2)	(2.38e-2)	(8.73e-2)
	15	(1.66e-1)	(1.34e-1)	(4.80e-2)	(4.22e-2)	(2.56e-1)	(1.29e-2)	(1.03e-1)	(6.75e-1)	(1.16e-1)	(7.56e-2)	(1.14e-1)
WFG3	3	(9.97e-3)	(4.03e-3)	(6.37e-3)	(4.06e-3)	(8.87e-3)	(4.00e-2)	(1.07e-2)	(1.31e-2)	(2.97e-3)	(7.44e-3)	(4.64e-3)
	5	(7.47e-2)	(8.12e-2)	(2.27e-1)	(3.75e-2)	(8.22e-2)	(2.77e-2)	(4.40e-2)	(5.12e-2)	(3.88e-2)	(2.96e-2)	(4.51e-2)
	8	(3.16e-1)	(5.78e-1)	(6.22e-1)	(1.00e-1)	(3.68e-1)	(6.01e-2)	(5.29e-1)	(3.17e-1)	(1.20e-1)	(4.97e-2)	(1.52e-1)
	10	(6.41e-1)	(4.01e-1)	(1.09e+0)	(1.37e-1)	(5.44e-1)	(1.01e-1)	(1.04e+0)	(1.75e-1)	(1.81e-1)	(1.53e-1)	(3.36e-1)
	15	(7.68e-1)	(8.24e-1)	(2.60e+0)	(3.52e-1)	(8.68e-1)	(2.60e-1)	(2.17e+0)	(3.29e-1)	(4.35e-1)	(1.77e-1)	(5.41e-1)

Fonte: O autor (2019).

Tabela 13 – Desvio padrão referente a Tabela 8.

Problem	M	NSGAIII	MOEA/D-AWA	SPEA2SDE	Two_Arch2	KnEA	MOEA/DD	RVEA	θ -DEA	MOEA/D-URAW	AR-MOEA	MOEA/D-UR
MOTSP	3	(1.00e-2)	(1.04e-2)	(1.13e-2)	(1.03e-2)	(1.21e-2)	(2.41e-2)	(1.32e-2)	(1.00e-2)	(9.02e-3)	(9.46e-3)	(9.06e-3)
	5	(1.38e-2)	(7.10e-3)	(1.06e-2)	(7.60e-3)	(1.20e-2)	(1.42e-2)	(1.28e-2)	(1.14e-2)	(9.03e-3)	(9.54e-3)	(9.57e-3)
	8	(4.50e-3)	(3.82e-3)	(3.64e-3)	(3.46e-3)	(3.84e-3)	(3.52e-3)	(3.02e-3)	(3.22e-3)	(3.74e-3)	(4.44e-3)	(3.69e-3)
	10	(1.59e-3)	(1.68e-3)	(1.40e-3)	(1.29e-3)	(9.37e-4)	(1.49e-3)	(1.51e-3)	(1.58e-3)	(1.39e-3)	(1.70e-3)	(1.34e-3)
	15	(1.49e-4)	(1.80e-4)	(1.86e-4)	(1.41e-4)	(8.37e-5)	(1.30e-4)	(1.77e-4)	(1.79e-4)	(1.82e-4)	(1.70e-4)	(1.77e-4)
MOKP	3	(3.20e-3)	(6.20e-3)	(2.51e-3)	(3.77e-3)	(2.37e-3)	(3.95e-3)	(2.23e-3)	(2.57e-3)	(3.33e-3)	(2.56e-3)	(3.37e-3)
	5	(1.76e-3)	(1.94e-3)	(1.80e-3)	(1.62e-3)	(1.35e-3)	(2.01e-3)	(1.57e-3)	(1.83e-3)	(2.26e-3)	(1.21e-3)	(2.27e-3)
	8	(4.35e-4)	(6.92e-4)	(5.41e-4)	(5.53e-4)	(4.51e-4)	(5.00e-4)	(3.18e-4)	(3.75e-4)	(6.00e-4)	(4.03e-4)	(6.92e-4)
	10	(2.44e-4)	(2.76e-4)	(2.52e-4)	(2.33e-4)	(2.97e-4)	(2.67e-4)	(2.22e-4)	(2.35e-4)	(2.98e-4)	(2.28e-4)	(2.66e-4)
	15	(1.89e-5)	(2.87e-5)	(1.79e-5)	(1.67e-5)	(1.89e-5)	(2.21e-5)	(1.74e-5)	(1.52e-5)	(2.09e-5)	(1.84e-5)	(2.14e-5)
WRP	5	(4.48e-4)	(1.10e-2)	(5.01e-3)	(1.66e-3)	(8.73e-4)	(6.65e-3)	(1.32e-2)	(3.93e-3)	(2.16e-3)	(1.92e-3)	(2.17e-3)

Fonte: O autor (2019).