UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EDJANE OLIVEIRA DOS SANTOS

SOLUÇÕES DE ENERGIA MÍNIMA PARA SISTEMAS ELÍPTICOS NO PLANO

Recife
2019

EDJANE OLIVEIRA DOS SANTOS

SOLUÇÕES DE ENERGIA MÍNIMA PARA SISTEMAS ELÍPTICOS NO PLANO

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó
Co-orientador: Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo

Recife
2019

Catalogação na fonte
Bibliotecária Mariana de Souza Alves CRB4-2105

S237s Santos, Edjane Oliveira dos
Soluções de energia mínima para sistemas elípticos no plano/ Edjane Oliveira dos Santos – 2019.
73 f.

Orientador: João Marcos Bezerra do Ó
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática. Recife, 2019.
Inclui referências e apêndices.

1. Análise. 2. Soluções de energia mínima. 3. Sistemas elípticos. 4. Crescimento crítico exponencial. I. Ó, João Marcos Bezerra do (orientador). II. Título.

515 CDD (22. ed.) UFPE-MEI 2019-164

EDJANE OLIVEIRA DOS SANTOS

SOLUÇÕES DE ENERGIA MÍNIMA PARA SISTEMAS ELÍPTICOS NO PLANO

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise

Trabalho aprovado. Recife, 29 de agosto de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó
(Orientador) Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. José Carlos de A. de Melo Júnior
(Examinador Interno) Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva
(Examinador Externo) Universidade Federal de Goias

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros
(Examinador Externo) Universidade Federal da Paraiba

Prof. Dr. Elisandra de Fátima Gloss de Morais
(Examinador Externo) Universidade Federal da Paraiba

Dedico este trabalho aos meus pais, ao meu esposo e a Matheus.

AGRADECIMENTOS

A Deus acima de tudo, pois Ele supriu todas as minhas necessidades e me fez alcançar mais essa vitória. Ao meu orientador, João Marcos Bezerra do Ó, que contribuiu de forma essencial na minha formação acadêmica. Ao meu coorientador, Uberlandio Batista Severo, pela paciência e incentivo a continuar os estudos na matemática, pelos conselhos de amigo e excelente orientação. A minha família que sempre apoiou as minhas decisões e ao meu esposo, pela paciência, companheirismo e incentivo na busca dos meus sonhos. Ao programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPE, por ter me concedido a oportunidade de participar do doutorado. Agradeço também aos funcionários da UFPB pela atenção e cordialidade. Aos amigos de hoje e sempre, Debóra, Argemiro, Nivaldo, Claudinha, que sempre me incentivaram a progredir academicamente. Aos meus amigos de doutorado, Pádua, Renato, Thiago, Marcos, entre outros, pelo incentivo, risadas e convivência. Sucesso a todos! Enfim, à Capes pelo suporte financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas à existência de soluções de energia mínima para uma classe de sistemas elípticos não-lineares, em todo o $\mathbb{R}^2$, envolvendo não linearidades com crescimento crítico exponencial no sentido de Trundiger-Moser. Para obtenção dos nossos resultados, utilizamos métodos variacionais, tais como o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange e o Teorema do Passo da Montanha.

Palavras-chave: Soluções de energia mínima. Sistemas elípticos. Crescimento crítico exponencial. Métodos minimax.

ABSTRACT

In this work, we have studied questions related to the existence of minimum energy solutions for a class of nonlinear elliptic systems in all the $\mathbb{R}^2$, involving nonlinearities with exponential critical growth, in the sense of Trundiger-Moser. To obtain our results, we used variational methods, such as the Lagrange Multipliers Theorem and the Mountain Pass Theorem.

Keywords: Least energy solution. Elliptic systems. Exponential critical growth. Minimax methods.

LISTA DE SÍMBOLOS

$B(y,r)$ denota a bola aberta de centro y e raio r;

$\rightharpoonup$ denota convergência fraca;

$\to$ denota convergência forte;

$\hookrightarrow$ indica imersão;

f' denota a derivada de Gâteaux e derivada de Fréchet da função f;

$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é o subespaço das funções radiais de $H^1(\mathbb{R}^N)$;

$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)^2 = H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$;

C denota uma constante cujo valor pode mudar de linha para linha;

$\langle .,. \rangle$ denota o produto interno no espaço E;

$q.t.p.$ quase todo ponto;

F_u representa a derivação parcial $\frac{\partial F}{\partial u}$;

$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{mensuravel} : \int_\Omega |u|^p < \infty\}$, em que $1 \leqslant p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um aberto conexo, com norma dada por

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p};$$

$C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço de funções reais infinitamente diferenciáveis cujo suporte é compacto;

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ é o gradiente de u;

$\Delta u = \sum_i^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o laplaciano de u;

$O(N)$ é o grupo das transformações lineares ortogonais de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^N$;

$\text{supp} f$ denota o suporte da função f;

$\blacksquare$ denota o final da demonstração;

$|A|$ denota a medida de Lebesgue de um subconjunto A em $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$;

$|.|$ denota a norma Euclidiana em $\mathbb{R}^N$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho, estamos interessados em estudar a existência de soluções de energia mínima para três classes de sistemas elípticos em todo o $\mathbb{R}^2$. Na busca de soluções para tais sistemas, aplicamos métodos variacionais, ou seja, analisamos o funcional energia associado ao sistema no que concerne à existência de pontos críticos que serão as soluções do sistema. Esta tese está dividida em três capítulos e um apêndice, que descreveremos a seguir.

O primeiro capítulo é dedicado a estudar a seguinte classe de sistemas acoplados, envolvendo equações de Schrödinger não-lineares:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f_1(u) + \lambda v, & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ -\Delta v + v = f_2(v) + \lambda u, & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e λ é uma constante no intervalo $(0, 1)$. Neste capítulo, provamos a existência de soluções de energia mínima para (1.1) quando as não-linearidades $f_1(s), f_2(s)$ têm crescimento crítico exponencial motivado por uma desigualdade Trudinger-Moser introduzida por Cao e J. M. do Ó (veja (1)).

Tal classe de sistemas surge em vários ramos da Física-Matemática e Óptica não-linear (*veja* (2)). Soluções do sistema (1.1) estão relacionados com soluções do tipo ondas estacionárias do seguinte sistema de duas componentes de equações de Schrödinger não-linear:

$$\begin{cases} -i\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta\psi - \psi + f_1(\psi) + \lambda(x)\phi, & x \in \mathbb{R}^2, \ t \geqslant 0 \\ -i\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \Delta\phi - \phi + f_2(\phi) + \lambda(x)\psi, & x \in \mathbb{R}^2, \ t \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

em que i denota a unidade imaginária. Para o sistema (1.2), uma solução da forma $(\psi(x,t), \phi(x,t)) = (e^{-it}u(x), e^{-it}v(x))$ é chamada de onda estacionária. Supondo que $f_1(e^{i\theta}u) = e^{i\theta}f_1(u)$ e $f_2(e^{i\theta}v) = e^{i\theta}f_2(v)$, para $u, v \in \mathbb{R}$, é bem conhecido que (ψ, ϕ) é uma solução de (1.2) se, e somente se, (u, v) resolve o sistema (1.1). O sistema (1.2) está relacionado com a existência de soluções de ondas solitárias para equações de Schrödinger não-lineares e equações Klein-Gordon (veja (3),(4).)

Equações de Schrödinger não-lineares têm sido amplamente investigadas em muitos aspectos. A existência de soluções para o caso escalar $-\Delta u + V(x)u = f(x, u)$ em $\mathbb{R}^N$ tem sido extensivamente estudada sob diferentes hipóteses sobre a não-linearidade $f(x, u)$ e sobre o potencial $V(x)$, veja por exemplo (3), (5) e (6). Para o caso de sistemas linearmente acoplados, existem várias classes que podem ser consideradas. Sistemas acoplados de equações de Schrödinger não-lineares do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = (1 + a(x))|u|^{p-1}u + \lambda v, & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + \nu v = (1 + b(x))|v|^{q-1}v + \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1.3}$$

foram estudados por Ambrosetti (7) em dimensão $N = 1$ e Ambrosetti (8) com $N \geqslant 2$. Em (8), foi obtida a existência de solução positiva e energia mínima quando $\mu = \nu = 1$ e $\lambda > 0$, para o crescimento subcrítico, mais especificamente, $1 < p = q < 2^* - 1$, em que $2^* = 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev. Chen and Zou (9) estenderam e completaram alguns resultados em (8), estudando estimativas de energia para a energia mínima e dando uma descrição do comportamento do limite de energia mínima quando o parâmetro λ vai para zero. Além disso, eles estudaram o sistema (1.1) quando $0 < \lambda < 1, N \geqslant 3$ e para não-linearidades subcríticas, satisfazendo as seguintes hipóteses para $i = 1, 2$

(F_1) f_i é ímpar e $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{f_i(s)}{s} = 0$;

(F_2) $\lim\limits_{s \to +\infty} \dfrac{f_i(s)}{s^{2^*-1}} = 0$;

(F_3) Existe $s_0 > 0$ tal que $\max\{F_1(s_0), F_2(s_0)\} > \frac{1}{2}s_0^2$.

Os autores em (10) provaram a existência de solução de solução de energia mínima para sistemas acoplados críticos do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = |u|^{p-1}u + \lambda v, & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + \nu v = |v|^{2^*-1}v + \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1.4}$$

em que $0 < \lambda < \sqrt{\mu\nu}, 1 < p < 2^* - 1$ e $N \geqslant 3$. Li e Tang (11) provaram a existência de solução de energia mínima para o sistema (1.4) quando $\mu = a(x)$, $\nu = b(x)$ e $\lambda = \lambda(x)$ são funções contínuas, 1-periódicas em cada $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$ e em $\lambda(x) < \sqrt{a(x).b(x)}$. Note que, em todos esses trabalhos, foram apenas consideradas não-linearidades envolvendo crescimento polinomial de tipo subcrítico ou crítico em termos da imersão de Sobolev.

Nos problemas elípticos não-lineares envolvendo crescimento crítico do tipo Trudinger-Moser, remetemo-nos a (12)-(13) e referências neles. Embora tenha havido alguns trabalhos sobre a existência de energia mínima para sistemas envolvendo não-linearidades com esse tipo de crescimento, pouco se fez para a classe de sistemas acoplados (1.1). Em (14), foi estudado um sistema semelhante ao sistema (1.1), no qual usaram uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser para estabelecer a existência de energia mínima positiva, baseada na técnica de minimização sobre variedades de Nehari.

A principal contribuição deste capítulo corresponde ao estudo de uma classe de sistemas linearmente acoplados em que precisamos que as não-linearidades $f_1(s)$ e $f_2(s)$ não sejam de classe C^1. Logo, não precisamos usar variedades de Nehari, como feito em (14). Aqui, usamos variedades de Pohozaev. Além disso, não usamos a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, que é frequentemente usada em vários trabalhos e também usada em (14). No primeiro capítulo da tese, apresentamos e provamos os resultados preliminares para o problema (1.1), em seguida mostramos que

$$A = \inf\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2; \int_{\mathbb{R}^2} G(u,v) = 0 \;\; e \;\; (u,v) \in E\right\}$$

é atingido, isto é, que existe $(u, v) \in E$ tal que

$$A = \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \;\; e \;\; \int_{\mathbb{R}^2} G(u, v) = 0,$$

em que $G(u, v) = F_1(u) + F_2(v) - \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} + \lambda uv$. E, com base nestes resultados, provamos que (1.1) possui uma solução de energia mínima via Multiplicadores de Lagrange.

Para o Sistema (1.1) assumimos as seguintes hipóteses sobre $f_i(i = 1, 2)$:

(H_1) $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \frac{f_i(s)}{s} = 0;$

(H_2) $\displaystyle\lim_{s\to +\infty} \frac{f_i(s)}{e^{\alpha s^2}} = 0 \text{ se } \alpha > 4\pi$ e $\displaystyle\lim_{s\to +\infty} \frac{f_i(s)}{e^{\alpha s^2}} = +\infty \text{ se } \alpha < 4\pi;$

(H_3) $f_i(s)s - 2F_i(s) \geqslant 0$ para todo $s \geqslant 0;$

(H_4) Existem $\mu_i > 0$ e $q \in (2, +\infty)$ tais que $f_i(s) \geqslant \mu_i s^{q-1}$ para todo $s \geqslant 0$.

Os principais resultados deste capítulo são os seguintes:

Proposição 1.0.1 *Suponha que f_i satisfaz (H_1), (H_2), (H_3) e (H_4) com*

$$\mu_i > \frac{1}{2}\left(\frac{q-2}{q}\right)^{\frac{q-2}{2}} {\zeta_q}^{q/2} \;\; (i = 1, 2),$$

em que ζ_q é a melhor constante da imersão $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2), \;\; \text{para} \;\; q \in (2, +\infty)$. Então o ínfimo A é atingido.

Teorema 1.0.2 *Sob as condições da Proposição* 1.01 *o problema (1.1) possui uma solução de energia mínima.*

No segundo capítulo, usando método variacional baseado em Espaços de Orlicz, podemos encontrar condições suficientes para a existência de soluções de energia mínima para um sistema de equações de Schröndiger quasilineares da forma

$$\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u - \Delta(u^2)u = h(x, u, v), \;\; \text{em} \;\; \mathbb{R}^2 \\ -\Delta v + V_2(x)v - \Delta(v^2)v = g(x, u, v), \;\; \text{em} \;\; \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{1.5}$$

em que as funções $h, g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e $V_1, V_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções chamadas de potenciais.

Tais equações surgem em vários ramos da Física-Matemática e têm sido objeto de extensivo estudo nos recentes anos. Parte do interesse se deve ao fato de que soluções de (1.5) estão relacionadas à existência de soluções de ondas solitárias para equações de Schrödinger quasilineares da forma

$$i\delta_t\psi = -\Delta_x\psi + W(x)\psi - \widetilde{h}(x, |\psi|^2)\psi - k[\Delta\rho(|\psi|^2)]\rho'(|\psi|^2)\psi, \tag{1.6}$$

em que $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, F \in \mathbb{R}, W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é um potencial dado, $\widetilde{h} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções apropriadas.

Motivado por esses aspectos físicos, o sistema (1.5) tem atraído a atenção de pesquisadores e alguns resultados de existência e de multiplicidade de soluções foram obtidos. Existe uma vasta literatura que aborda a existência de soluções para

$$-\Delta u + V(x)u - k[\Delta(u^2)]u = \eta(u) \;\; x \in \mathbb{R}^N,$$

em que $V(x)$ é um potencial, η é uma não-linearidade. Entre eles, podemos citar , (15), (16), (17), (18), (19) e (20).

do Ó, Miyagaki e Soares em (17) estudaram para $N = 2$ equações de Schröndiger quasilineares da forma:

$$i\psi_t = -\Delta\Psi + W(x)\psi - h(|\psi|^2)\psi - k[\Delta(|\psi|^2)](|\psi|^2)\psi,$$

usando métodos variacionais, em que $W(x)$ é uma função potencial, k é uma constante positiva e h é o termo não-linear. Neste trabalho, eles mostraram a existência de solução estacionária para esta equação. Souza, Severo e Viera em (16), estudaram para $N = 2$, a existência e multiplicidade de soluções para equações quasilineares não-homogêneas e singulares da forma

$$-\Delta u + V(x)u - k\Delta(u^2)u = \frac{g(x,u)}{|u|^a} + h(x) \;\text{ em }\; \mathbb{R}^2$$

em que $a \in [0, 2)$ e $V(x)$ é um potencial contínuo positivo e $g(x, s)$ tem crescimento crítico exponencial. Severo e Silva (21) estudaram o sistema (1.7) para $N \geqslant 3$ usando métodos variacionais baseados nos Espaços de Orlicz, para mostrar a existência de soluções fracas.

$$\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u - \Delta(u^2)u = h(x,u,v), \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + V_2(x)v - \Delta(v^2)v = g(x,u,v), \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.7}$$

Guo e Tang em (22) estudaram o sistema (1.7) para $N \geqslant 3$ quando os potenciais $V_1(x) = \lambda a(x) + 1$ e $V_2(x) = \lambda b(x) + 1$, em que λ é um parâmetro positivo e quando as não-linearidades são da forma:

$$h(x,u,v) = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-2}|v|^{\beta}u \;\text{ e }\; g(x,u,v) = \frac{2\beta}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v,$$

com $\alpha, \beta > 2$ e $\alpha - \beta < 2$. Usando variedade de Nehari e o princípio de concentração de compacidade, eles provaram a existência de uma solução de energia mínima. Uma das principais dificuldades para lidar com (1.5), do ponto de vista variacional, é que não há espaço adequado no qual o funcional energia esteja bem definido e seja de classe C^1, exceto pelo caso unidimensional (veja (20)).

Até onde sabemos, os primeiros resultados de existência para problemas quase-lineares do tipo (1.5), envolvendo métodos variacionais, foram devido a (20), para o caso unidimensional ou V sendo radialmente simétrico, para dimensões altas, usando um argumento de minimização restrito (veja também (15) para o caso mais geral). Depois deles, algumas idéias e abordagens foram desenvolvidas para superar as dificuldades (veja (15), (23)).

A principal contribuição deste trabalho corresponde ao estudo de uma classe de sistemas de Schröndiger quasilineares. Ao abordar o sistema (1.5), utilizamos métodos variacionais, isto é, analisamos o funcional energia associado ao problema (1.5) no que diz respeito à obtenção de pontos críticos. Em seguida, introduzimos uma mudança de variável adequada a fim de obter um novo funcional que esteja bem definido nos espaços de Banach que consideraremos e, assim, relacionamos os pontos críticos deste funcional com as soluções de (1.5).

As hipóteses referentes ao sistema (1.5) são as seguintes:

(H_1) Existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{u,v\to+\infty} \frac{|h(x,u,v)|}{e^{\alpha(u^2+v^2)^2}} = \begin{cases} 0, \\ +\infty, \end{cases}$$

$\forall\ \alpha > \alpha_0$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^2$, e

$$\lim_{u,v\to+\infty} \frac{|g(x,u,v)|}{e^{\alpha(u^2+v^2)^2}} = \begin{cases} 0, \\ +\infty. \end{cases}$$

$\forall\ \alpha > \alpha_0$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^2$.

(H_2) Existe $\theta > 4$ tal que

$$\theta F(x,u,v) \leqslant U\nabla F(x,u,v)\ \ \forall\ U = (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e }\ x \in \mathbb{R}^2 \ \text{ em que }\ (h,g) = \nabla F;$$

(H_3) $\displaystyle\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{h(x,u,v)}{|(u,v)|} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{g(x,u,v)}{|(u,v)|} = 0, \ \text{ uniformemente em }\ x \in \mathbb{R}^2.$

(H_4) Existem $\xi > 0$ e $q > 2$ tais que

$$F(x,t,t) \geqslant \xi t^q \ \text{ para todo }\ t \geqslant 0.$$

Os potenciais $V_1, V_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e satisfazem as condições:

(ν_1) $0 < V_0 := \min\{\inf_{\mathbb{R}^2} V_1, \inf_{\mathbb{R}^2} V_2\}$;

(ν_2) Existe $M_0 > 0$ tal que, para todo $M \geqslant M_0$,

$$|(\{x \in \mathbb{R}^2; V_i(x) \leqslant M\})| < \infty, \ \ i = 1, 2,$$

em que $||$ denota a medida de Lebesgue.

Os resultados principais deste capítulo são:

Teorema 1.0.3 *Suponha que* $(\nu_1) - (\nu_2)$ *e* $(H_1) - (H_4)$ *sejam satisfeitas. Então, o Sistema* (1.5) *tem uma solução fraca não-trivial.*

Teorema 1.0.4 *Sob as hipóteses do Teorema* 1.0.3, *se supomos, além disso, a condição*

(H_5) *Para cada* $x \in \mathbb{R}^2$ *e* $t > 0$, $\frac{h(x,s,t)}{s^3}$ *é não-decrescente em* s *positivo e , para cada* $x \in \mathbb{R}^2$ *e* $s > 0$, $\frac{g(x,s,t)}{t^3}$ *é não-decrescente em* t *positivo.*

Então a solução obtida no Teorema 1.0.3 *é uma solução de energia mínima.*

Finalmente, no terceiro capítulo, estudamos a existência de soluções de energia mínima para a seguinte classe de sistemas gradientes envolvendo as equações de Kirchhoff-Schrödinger

$$\begin{cases} m\left(\|u\|^2\right)[-\Delta u + u] = \lambda F_u(u,v), \;\; x \in \mathbb{R}^2 \\ l\left(\|v\|^2\right)[-\Delta v + v] = \lambda F_v(u,v), \;\; x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{1.8}$$

em que $\lambda > 0, m, l : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ são funções contínuas, $\|.\|$ denota a norma usual do Espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^2)$ e existe $F \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $\nabla F = (F_u, F_v)$. Nosso principal objetivo, aqui, é estudar a existência e multiplicidade de soluções para o Sistema (1.8), quando os termos não-lineares F_u, F_v têm crescimento crítico exponencial do tipo Trudinger-Moser.

Recentemente, muitos autores têm estudado o problema elíptico

$$\begin{cases} -\left(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u = f(x,u), \;\; x \in \Omega \\ u = 0, \;\; x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado. Essa classe de problema está relacionada com o problema estacionário de um modelo introduzido por Kirchhoff (24) no estudo da seguinte equação hiperbólica:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1.10}$$

em que ρ é a densidade da massa, P_0 é a tensão inicial, h é a área da seção transversal, L é o comprimento da corda e E é o módulo Young do material. A equação (1.10) é uma generalização da equação clássica de d'Alembert, considerando os efeitos das mudanças no comprimento das cordas durante as vibrações. Também referimos as obras clássicas de S. Bernstein (25), S. Pohozaev (26) e J.-L. Lions (27). Em (27), J.-L. Lions introduziu uma abordagem de Análise Funcional para estudar uma classe de problemas semelhantes a (1.10). Motivado pelo interesse físico e impulsionado pela estrutura abstrata proposta por J.-L. Lions, muitas classes de problemas Kirchhoff foram estudadas por muito autores nos últimos anos, veja, por exemplo, os artigos (28), (29), (30), (31), (11) e (32).

O estudo de equações tipo-Kirchhoff podem, naturalmente, estender a seguinte classe de equações

$$\begin{cases} -m\left(\|\nabla u\|_2^2\right)\Delta u = f(x,u), \;\; x \in \Omega \\ u = 0, \;\; x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.11}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio e $m(t) \geqslant m_0 > 0$ para todo $t \geqslant 0$. É bem conhecido que, se $N \geqslant 3$, então o crescimento máximo sobre o termo não-linear $f(x,u)$ que permite tratar as equações elípticas variacionalmente em $H^1(\Omega)$ é dado por $|u|^{2^*-1}$, quando $|u| \to +\infty$, em que $2^* = 2N/N-2$ é o expoente crítico de Sobolev. Se $N=2$, então $H^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,\infty)$, mas não está imerso em $L^\infty(\Omega)$. Nesse caso, o crescimento máximo que permite tratar equações elípticas de forma variacional é motivado pela Desigualdade de Trudinger-Moser. Veja(33), cujo enunciado é:

Teorema 1.0.5 *Existe uma constante $C>0$ tal que*

$$\sup_{\{u\in W_0^{1,2}(\Omega):\|\nabla u\|_2\leq 1\}} \int_\Omega e^{\alpha u^2}\,\mathrm{d}x \leq C|\Omega|, \quad \forall \alpha \leq 4\pi.$$

Além disso, 4π é a melhor constante, isto é,o sumpremo acima é $+\infty$ se $\alpha > 4\pi$.

Embora existam alguns trabalhos sobre existência de soluções de energia mínima para sistemas com termos não-lineares de crescimento polinomial, pouco foi feito quando os termos não-lineares possuíam crescimento exponencial. Por exemplo, em (30) os autores estudaram a existência de soluções de energia mínima positiva para (1.8), quando Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^2$ e os termos não-lineares têm crescimento exponencial motivado pela Desigualdade de Trudinger-Moser (Teorema 1.0.5). Mais precisamente, os autores assumiram que existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{|f(x,u)|}{e^{\alpha(u^2)}} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \text{se} \quad \alpha < \alpha_0. \end{cases}$$

uniformemente em $x \in \Omega$. Para tanto, os autores utilizaram técnicas de minimax combinadas com Teorema 1.0.5. No entanto, o domínio limitado desempenha um papel muito importante no resultado dele, uma vez que isso implica a imersão compacta $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ para $p \in [1,\infty)$. Assim, inspirado por (30), nosso primeiro propósito é considerar uma classe de equações de Kirchhoff-Schrödinger definida em todo espaço euclidiano, envolvendo não-linearidades com crescimento crítico exponencial. No caso, $\Omega = \mathbb{R}^2$, o conceito de criticalidade é motivado pela Desigualdade de Trudinger-Moser que foi considerada pela D.M. Cao, veja (1).

Teorema 1.0.6 *Se $\alpha > 0$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Além disso, se $0 < \alpha < 4\pi$, $\|\nabla u\|_2 \leq 1$, $\|u\|_2 \leq \tilde{C}$, então existe uma constante $C = C(\alpha, \tilde{C}) > 0$, dependendo somente de α e $\tilde{C}$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1)\,\mathrm{d}x \leq C. \tag{1.12}$$

Motivado pelo Teorema $1.0.6$, vamos supor que as não-lineariedades $F_u, F_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ têm crescimento crítico exponencial. Mais pecisamente, suponhamos que exista $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{u,v\to+\infty} \frac{|F_u(u,v)|}{e^{\alpha(u^2+v^2)}} = \begin{cases} 0, & \forall \quad \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \forall \quad \alpha < \alpha_0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{(u,v)\to+\infty} \frac{|F_v(u,v)|}{e^{\alpha(u^2+v^2)}} = \begin{cases} 0, & \forall \quad \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \forall \quad \alpha < \alpha_0. \end{cases}$$

A principal contribuição deste trabalho corresponde ao estudo de uma classe de sistemas gradientes envolvendo equações de Kirchhoff-Schrödinger e não linearidades com crescimento exponencial. Devido ao crescimento crítico exponencial dos termos não lineares $F_u F_v$ e do domínio ilimitado $\mathbb{R}^2$, nos deparamos com a "falta de compacidade". Para superar essa dificuldade, o Teorema 1.0.6 desempenha um papel crucial. Além disso, mencionamos que as equações no Sistema (1.8) são chamadas não-locais devido à presença das funções de Kirchhoff $m\left(\|u\|^2\right)$ e $l\left(\|v\|^2\right)$. Esse tipo de equações "cuida" do comportamento da solução em todo o espaço, o que implica que as equações não são mais igualdades pontuais. Essas características dão origem a dificuldades adicionais que tornam o problema mais interessante de um ponto de vista matemático. Por estas razões, podemos considerar hipóteses adequadas para tratar o Sistema (1.8) de forma variada. Até onde sabemos, não há trabalho na literatura lidando com a existência e multiplicidade de soluções para sistemas de Kirchhoff e envolvendo funções não-lineares do tipo Trudinger-Moser.

Sejam $M(t) := \int_0^t m(s)\,\mathrm{d}s$ e $L(t) := \int_0^t \ell(s)\,\mathrm{d}s$. As hipóteses sobre m e l são as seguintes: Com respeito às funções $F_u, F_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, requeremos as seguintes hipóteses:

(F_0) Existe $\alpha_0 > 0$ tal

$$\lim_{u,v\to+\infty} \frac{|F_u(u,v)|}{e^{\alpha(u^2+v^2)}} = \begin{cases} 0, \ \forall\, \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, \ \forall\, \alpha < \alpha_0, \end{cases} \text{ e } \lim_{u,v\to+\infty} \frac{|F_v(u,v)|}{e^{\alpha(u^2+v^2)}} = \begin{cases} 0, \ \forall\, \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, \ \forall\, \alpha < \alpha_0; \end{cases}$$

(F_1) $$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{F_u(u,v)}{|(u,v)|} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{F_v(,u,v)}{|(u,v)|} = 0;$$

(F_2) Existe $\theta > 4$ tal que

$$\theta F(u,v) \leqslant U\nabla F(u,v) \ \ \forall \ U = (u,v) \in \mathbb{R}^2;$$

(F_3) Existem $\xi > 0$ e $q > 2$ tais que $F(t,t) \geqslant \xi t^q, \quad \forall t \in [0,1]$.

Os resultados principais deste capítulo são os seguintes:

Teorema 1.0.7 *Suponha que (H_1), (H_2), $(F_1)-(F_3)$ sejam satisfeitas e F_u, F_v tenham crescimento crítico exponencial. Então, para cada $\lambda > 0$, o Sistema (1.8) admite, pelo menos, uma solução não-trivial, desde que $\xi > 0$, dada em (F_3), seja suficientemente grande.*

Também estamos preocupados com a existência de soluções de energia mínima, isto é, soluções nas quais a energia é mínima entre todas as energias de soluções não-triviais. Para isto, substituímos a hipótese (H_2) por uma hipótese mais forte.

$(\widehat{H_2})$ M, L são funções convexas e $\frac{m(t)}{t}, \frac{l(t)}{t}$ são não-crescentes para $t > 0$.

Além disso, assumimos a seguinte hipótese adicional sobre as funções não-lineares:

(F_4) Para cada $(u,v) \neq (0,0)$, a aplicação $t \longmapsto \frac{\nabla F(tu,tv)(u,v)}{t^3}$ é não-decrescente para $t > 0$.

Teorema 1.0.8 *Suponha que* (H_1), $(\widehat{H_2})$, $(F_1) - (F_4)$ *são satisfeitas e* F_u, F_v *tenham crescimento crítico exponencial. Então, para todo* $\lambda > 0$, *o Sistema* (1.8) *admite, pelo menos, uma solução de energia mínima, desde que* $\xi > 0$, *dada em* (F_3), *seja suficientemente grande.*

Teorema 1.0.9 *Suponha que* (H_1), (H_2), $(F_1) - (F_3)$ *são satisfeitas e* F_u, F_v *são funções ímpares com crescimento crítico exponencial. Então, para todo* $m \in \mathbb{N}$, *existe* $\Lambda_m > 0$ *tal que o Sistema* (1.8) *admite, pelo menos,* m *pares de soluções não-triviais, desde que* $\lambda > \Lambda_m$.

2 SISTEMAS LINEARMENTE ACOPLADOS COM CRESCIMENTO CRÍTICO EXPONENCIAL

2.1 Introdução

Neste capítulo, nosso objetivo é estabelecer a existência de uma solução de energia mínima para o sistema elíptico linearmente acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f_1(u) + \lambda v, & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ -\Delta v + v = f_2(v) + \lambda u, & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $0 < \lambda < 1$ e a função $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(i = 1, 2)$, é contínua. Além disso, vamos assumir as seguintes hipóteses sobre f_i, $(i = 1, 2)$:

(H_1) $\lim\limits_{s \to 0^+} \dfrac{f_i(s)}{s} = 0;$

(H_2) $\lim\limits_{s \to +\infty} \dfrac{f_i(s)}{e^{\alpha s^2}} = 0 \text{ se } \alpha > 4\pi$ e $\lim\limits_{s \to +\infty} \dfrac{f_i(s)}{e^{\alpha s^2}} = +\infty \text{ se } \alpha < 4\pi;$

(H_3) $f_i(s)s - 2F_i(s) \geqslant 0$ para todo $s \geqslant 0$, em que $F_i(s) := \int_0^s f_i(t)dt;$

(H_4) Existem $\mu_i > 0$ e $q \in (2, +\infty)$ tais que $f_i(s) \geqslant \mu_i s^{q-1}$ para todo $s \geqslant 0$.

Aqui,

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^2) := \{u \in H^1(\mathbb{R}^2); u(Sx) = u(x) \text{ para todo } S \in O(2)\}.$$

Vamos considerar o espaço $E = H^1_{rad}(\mathbb{R}^2) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$ munido com o seguinte produto interno:

$$\langle (u, v), (w, z) \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla w + uw + \nabla v \nabla z + vz),$$

e a norma induzida $\|(u, v)\|^2 = \langle (u, v), (u, v) \rangle$. Associado ao Sistema (2.1), consideremos o funcional energia $I : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u, v) = \frac{1}{2}\left(\|(u, v)\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^2} uv \right) - \int_{\mathbb{R}^2} [F_1(u) + F_2(v)]. \tag{2.2}$$

Usando as hipóteses sobre f_i e a Desigualdade de Trudinger-Moser, prova-se que I está bem definido. Ademais, mostramos (veja Lema B_1) que o funcional I é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$\langle I'(u, v), (\phi, \psi) \rangle = \langle (u, v), (\phi, \psi) \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} [f_1(u)\phi + f_2(v)\psi] - \lambda \int_{\mathbb{R}^2} (u\psi + v\phi),$$

para $(u, v) \in E$. Dizemos que $(u, v) \in E$ é uma solução fraca do problema (2.1) se

$$\langle (u, v), (\phi, \psi) \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} (f_1(u)\phi + f_2(v)\psi) - \lambda \int_{\mathbb{R}^2} (u\psi + v\phi) = 0,$$

para todo $(\phi, \psi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Assim, os pontos críticos de I são precisamente as soluções fracas do problema (2.1).

Definição 2.1.1 *Dizemos que um par* $(u,v) \in E\backslash\{(0,0)\}$ *é uma solução de energia mínima de (2.1), se* (u,v) *é uma solução de (2.1) e sua energia é a menor entre todas as soluções não-triviais de (2.1), isto é,* $I(u,v) \leq I(w,z)$ *para qualquer outra solução não-trivial* $(w,z) \in E$.

Estabeleceremos a existência de uma solução de energia mínima para o Sistema (2.1) via Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (veja apêndice, Teorema $A.6$), considerando

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right);\int_{\mathbb{R}^2} G(u,v) = 0\right\}, \tag{2.3}$$

em que $G(u,v) = F_1(u) + F_2(v) - \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} + \lambda uv$. Para isto, vamos empregar a seguinte notação:

$$A = \inf\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2;\int_{\mathbb{R}^2} G(u,v) = 0 \;\; e \;\; (u,v) \in E\backslash\{0,0\}\right\} \tag{2.4}$$

Também introduzimos o seguinte valor minimax :

$$c = \inf_{(0,0)\neq(u,v)\in E}\max_{t\geq 0} I(tu,tv), \tag{2.5}$$

e apresentamos o conjunto

$$\wp = \left\{(u,v) \in E\backslash\{(0,0)\};\int_{\mathbb{R}^2} G(u,v) = 0\right\}, \tag{2.6}$$

chamado de Variedade de Pohozaev.
Os principais resultados deste capítulo são os seguintes:

Proposição 2.1.2 *Se* f_i *satisfaz* (H_1), (H_2), (H_3) *e* (H_4) *com*

$$\mu_i > \frac{1}{2}\left(\frac{q-2}{q}\right)^{\frac{q-2}{2}}{\zeta_q}^{q/2} \;\; (i = 1,2),$$

em que ζ_q *é a melhor constante da imersão* $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2), \;\; \text{para} \;\; q \in (2,+\infty)$ *então o ínfimo* A *é atingido.*

Teorema 2.1.3 *Sob as condições da Proposição* $1.1.2$, *o problema (2.1) possui uma solução de energia mínima.*

Observação 2.1.4 *Um exemplo típico de termo não-linear satisfazendo as condições* (H_1), (H_2), (H_3) *e* (H_4) *é dada por* $f_i(s) = \mu_i e^{4\pi s^2}(qs^{q-1} + 8\pi s^{q+1})$ *se* $s \geqslant 0$ *e* $f(s) = 0$ *se* $s < 0$, *em que* $q > 2$ *e* $\mu_i > \frac{1}{2}\left(\frac{q-2}{q}\right)^{\frac{q-2}{2}}{\zeta_q}^{q/2}, \;\; (i = 1,2).$

2.2 Resultados Preliminares

Nosso primeiro resultado desta seção será uma condição suficiente sobre uma sequência $\{(w_n,z_n)\}$ em E para obter as convergências $F(w_n) \to F(w) \;\text{ em }\; L^1(\mathbb{R}^2)$ e $F(z_n) \to F(z) \;\text{ em }\; L^1(\mathbb{R}^2)$.

Lema 2.2.1 *Assuma que f_i $(i=1,2)$ satisfaz (H_1), (H_2) e seja (w_n, z_n) uma sequência em E tal que*

$$\sup_n(\|\nabla w_n\|_2^2 + \|\nabla z_n\|_2^2) := \rho < 1$$

e

$$\sup_n(\|w_n\|_2^2 + \|z_n\|_2^2) := M < \infty.$$

Então $\int_{\mathbb{R}^2} F_1(w_n) \to \int_{\mathbb{R}^2} F_1(w)$ e $\int_{\mathbb{R}^2} F_2(z_n) \to \int_{\mathbb{R}^2} F_2(z)$, para algum $(w,z) \in E$.

Demonstração. Como (w_n) e (z_n) são limitadas em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$, a menos de subsequência, podemos supor que $w_n \rightharpoonup w$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$, $z_n \rightharpoonup z$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$, $w_n(x) \to w(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, $z_n(x) \to z(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$ e devido ao Lema Radial (veja Apêndice A, Lema $A.5$), $\lim_{|x|\to+\infty} w_n(x) = 0$ uniformemente em n, $\lim_{|x|\to+\infty} z_n(x) = 0$ uniformemente em n.
Usando a desigualdade de Trudinger-Moser, devido a Cao (veja Apêndice A, Lema $A.2$), sabemos que para cada $m \in (0,1)$ e $M > 0$ existe $C(m,M) > 0$ tal que

$$\sup_{u\in\beta} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi u^2} - 1) \leqslant C(m,M), \tag{2.7}$$

em que $\beta = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^2); \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 \leqslant m \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2} u^2 \leq M\right\}$. Agora, escolha $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $m = \frac{\rho}{(1-\varepsilon)^2} \in (0,1)$ e $\alpha = \frac{4\pi}{(1-\varepsilon)^2} > 4\pi$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha w_n^2} - 1) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha(1-\varepsilon)^2\left(\frac{w_n}{1-\varepsilon}\right)^2} - 1\right) \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi\left(\frac{w_n}{1-\varepsilon}\right)^2} - 1).$$

Desde que $\frac{w_n}{1-\varepsilon} \in \beta$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha w_n^2} - 1) \leqslant \sup_{u\in\beta} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi u^2} - 1) = C(m,M) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Agora, sejam $P_i(s) = F_i(s)$ e $Q(s) = e^{\alpha s^2} - 1$, $(i = 1,2)$. P_i e Q satisfazem as hipóteses do Lema de Compacidade de Strauss (veja Apêndice A, Lema $A.1$).
Com efeito, para $\alpha > 4\pi$ e por (2.7), (H_1), (H_2) segue que

$$\lim_{s\to 0} \frac{P_i(s)}{Q(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{f_i(s)}{e^{\alpha s^2} 2s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{e^{\alpha s^2}} \frac{f_i(s)}{s} = 0,$$

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{P_i(s)}{Q(s)} = \lim_{s\to+\infty} \frac{f_i(s)}{e^{\alpha s^2} 2s} = \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{2s} \frac{f_i(s)}{e^{\alpha s^2}} = 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Q(w_n)| < +\infty.$$

Além disso, $P_i(w_n(x)) \to P_i(w(x))$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$ quando $n \to +\infty$. Portanto, aplicando o Lema de Compacidade de Strauss, segue que $P_i(w_n)$ converge para $P_i(w)$ em $L^1(\mathbb{R}^2)$. Analogamente, $P_i(z_n)$ converge para $P_i(z)$ em $L^1(\mathbb{R}^2)$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^2} F_1(w_n) \to \int_{\mathbb{R}^2} F_1(w) \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2} F_2(z_n) \to \int_{\mathbb{R}^2} F_2(z),$$

o que demonstra o nosso resultado. ■

Agora, vejamos um lema técnico que relaciona os níveis A e c, dados em (16) e (17).

Lema 2.2.2 *Os números A e c satisfazem a desigualdade $A \leqslant c$.*

Demonstração. Para cada $(w,z) \in E\backslash\{(0,0)\}$ com $w^+ = \max\{w,0\} \neq 0$ ou $z^+ = \max\{z,0\} \neq 0$, definimos a função $h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$h(t) := \int_{\mathbb{R}^2} G(tw,tz) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[F_1(tw) + F_2(tz) - \frac{t^2w^2}{2} - \frac{t^2z^2}{2} + \lambda t^2 wz\right].$$

Por (H_1), (H_2) e (H_3) segue que $h(t) < 0$ para t suficientemente pequeno.
De fato, temos que

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[F_1(tw) + F_2(tz) - \frac{t^2w^2}{2} - \frac{t^2z^2}{2} + \lambda t^2 wz\right] \\ \frac{h(t)}{t^2} &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{F_1(tw)}{t^2} + \frac{F_2(tz)}{t^2}\right] - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} w^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} z^2 + \lambda \int_{\mathbb{R}^2} wz \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{F_1(tw)}{t^2} + \frac{F_2(tz)}{t^2}\right] - \frac{\lambda-1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} w^2 - \frac{\lambda-1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} z^2 < 0, \end{aligned}$$

pois $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F_1(tw)}{t^2} = 0$. Com efeito, temos que $\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{f_i(s)}{s} = 0$ e $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{f_i(s)}{e^{\alpha s^2}} = 0$ se $\alpha > 4\pi$. Em vista disso, dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$f_1(s) \leqslant \varepsilon s + C_\varepsilon s^2(e^{\alpha s^2} - 1) \;\; \forall s \geqslant 0.$$

Logo, integrando tem-se

$$F_1(s) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}s^2 + \overline{C}_\varepsilon s^3(e^{\alpha s^2} - 1)$$

de onde obtemos

$$0 \leqslant F_1(tw) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}t^2w^2 + \overline{C}_\varepsilon t^3 w^3(e^{\alpha t^2 w^2} - 1) \;\; \forall \;\; 0 < t \leqslant 1,$$

o que implica

$$0 \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F_1(tw)}{t^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^2} w^2 + \overline{C}_\varepsilon t \int_{\mathbb{R}^2} w^3(e^{\alpha w^2} - 1).$$

Aplicando o $\limsup$, temos que

$$0 \leqslant \limsup_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F_1(tw)}{t^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^2} w^2 \;\; \forall \varepsilon > 0,$$

o que implica

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F_1(tw)}{t^2} = 0.$$

Analogamente, tem-se $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{F_2(tz)}{t^2} = 0$. De forma similar, prova-se que $h(t) > 0$ para t suficientemente grande. Desta forma, existe $t_0 > 0$ tal que $h(t_0) = 0$, isto é, $(t_0 w, t_0 z) \in \wp$. Assim,

$$A \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla(t_0 w)|^2 + |\nabla(t_0 z)|^2\right) = I(t_0 w, t_0 z) \leqslant \max_{t\geqslant 0} I(tw,tz).$$

Por outro lado, uma vez que $f_i(s)=0$ para todo $s\leqslant 0$, se $(w,z)\in E\backslash\{(0,0)\}$ com $w^+=0$ e $z^+=0$, temos que

$$\begin{aligned}\max_{t\geqslant 0} I(tw,tz) &= \frac{t^2}{2}\left(\|(w,z)\|^2-2\lambda\int_{\mathbb{R}^2} wz\right)\\ &\geqslant \frac{t^2}{2}(1-\lambda)\|(w,z)\|^2\to+\infty.\end{aligned}$$

Logo $A\leqslant c$, o que demonstra o nosso lema. ∎

Lema 2.2.3 *O número A dado por (2.4) é positivo, isto é, $A>0$.*

Demonstração. Claramente $A\geqslant 0$. Assuma, por contradição, que $A=0$ e seja (u_n,v_n) uma sequência minimizante em E para A, isto é,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2)\to A=0,$$

com $\int_{\mathbb{R}^2} G(u_n,v_n)=0$. Para cada $\lambda_n>0$, as funções $w_n(x)=u_n\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$ e $z_n(x)=v_n\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$ satisfazem

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla w_n|^2+|\nabla z_n|^2)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2)$$

e $\int_{\mathbb{R}^2} G(w_n,z_n)=0$. Desde que

$$\int_{\mathbb{R}^2}(|w_n|^2+|z_n|^2)={\lambda_n}^2\int_{\mathbb{R}^2}(|u_n|^2+|v_n|^2),$$

escolhemos

$${\lambda_n}^2=\frac{1}{\int_{\mathbb{R}^2}(|u_n|^2+|v_n|^2)}.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^2}(|w_n|^2+|z_n|^2)=1.$$

Sob essas circunstâncias, temos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla w_n|^2+|\nabla z_n|^2)\to A=0,\quad \int_{\mathbb{R}^2}(|w_n|^2+|z_n|^2)=1$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(w_n,z_n)=0.$$

Como $(w_n),(z_n)$ são limitadas em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$, a menos de subsequência, temos $w_n\rightharpoonup w$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$ e $z_n\rightharpoonup z$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$. Pelo Lema 2.2.1

$$\int_{\mathbb{R}^2} F_1(w_n)\to\int_{\mathbb{R}^2} F_1(w)\ \text{ e }\ \int_{\mathbb{R}^2} F_2(z_n)\to\int_{\mathbb{R}^2} F_2(z).$$

Note que

$$\begin{aligned}0=\int_{\mathbb{R}^2} G(w_n,z_n) &= \int_{\mathbb{R}^2}[F_1(w_n)+F_2(z_n)]-\frac{1}{2}+\lambda\int_{\mathbb{R}^2} w_nz_n\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^2}[F_1(w_n)+F_2(z_n)]-\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2}\end{aligned}$$

o que implica que $\int_{\mathbb{R}^2}(F_1(w)+F_2(z)) \geqslant \frac{1-\lambda}{2} > 0$. Logo, $w \neq 0$ ou $z \neq 0$. Por outro lado, pelas convergências fracas $w_n \rightharpoonup w$ e $z_n \rightharpoonup z$, temos

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla w_n|^2 + |\nabla z_n|^2) \geqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla w|^2 + |\nabla z|^2).$$

Mas

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla w_n|^2 + |\nabla z_n|^2) = A = 0,$$

de onde obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla w|^2 + |\nabla z|^2) = 0,$$

e, assim, $w = z = 0$, o que é um absurdo. Então, $A > 0$. ∎

Lema 2.2.4 *Se*

$$\mu_i > \frac{1}{2}\left(\frac{q-2}{q}\right)^{\frac{(q-2)}{2}} {\zeta_q}^{q/2}, \quad q \in (2, +\infty) \tag{2.8}$$

em que ζ_q é a melhor constante da imersão $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$, para $q \in (2,+\infty)$, *então $c < \frac{1}{2}$.*

Demonstração. Tome $(\psi_1, \psi_2) \in E$, $\psi_1 \geqslant 0$, $\psi_2 \geqslant 0$, verificando $|\psi_1|_q^2 = \zeta_q^{-1}$ $\quad |\psi_2|_q^2 = \zeta_q^{-1}$, com $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$. De (H_4) e (2.5), temos que

$$\begin{aligned}
c &\leqslant \max_{t>0} I(t\psi_1, t\psi_2) \\
&\leqslant \max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} - \mu_1\frac{t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^2}{\psi_1}^q - \mu_2\frac{t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^2}{\psi_2}^q\right\} \\
&= \frac{(q-2)}{2q}{\mu_1}^{\frac{-2}{q-2}}|\psi_1|_q^{\frac{-2q}{q-2}} + \frac{(q-2)}{2q}{\mu_2}^{\frac{-2}{q-2}}|\psi_2|_q^{\frac{-2q}{q-2}} \\
&= \frac{(q-2)}{2q}{\mu_1}^{\frac{-2}{q-2}}\zeta_q^{\frac{q}{q-2}} + \frac{(q-2)}{2q}{\mu_2}^{\frac{-2}{q-2}}\zeta_q^{\frac{q}{q-2}}.
\end{aligned}$$

Esta última desigualdade combinada com (2.8) fornece

$$c < \frac{1}{2}\frac{(q-2)}{2q}{\mu_1}^{\frac{-2}{q-2}}\zeta_q^{\frac{q}{q-2}} + \frac{1}{2}\frac{(q-2)}{2q}{\mu_2}^{\frac{-2}{q-2}}\zeta_q^{\frac{q}{q-2}} < \frac{1}{2}.$$

∎

2.3 Resultados Principais

Para provar os teoremas principais deste capítulo, precisamos de alguns resultados, os quais apresentamos a seguir.

Lema 2.3.1 *Sejam $u_t(x) = u\left(\frac{x}{t}\right)$ e $v_t(x) = v\left(\frac{x}{t}\right)$ para $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^2$, em que $(u,v) \in E$ é um ponto crítico não-trivial de I. Então, para qualquer $t > 0$, temos*

(i) $\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_t|^2+|\nabla v_t|^2)=\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)$;

(ii) $\int_{\mathbb{R}^2} G(u_t,v_t)=0$;

(iii) $I(u_t,v_t)=I(u,v)$;

(iv) $\int_{\mathbb{R}^2}(f_1(u_t)u_t+f_2(v_t)v_t-(u_t^2+v_t^2)+2\lambda u_tv_t)=t^2\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)$.

Demonstração. Como $\nabla u_t(x)=\frac{1}{t}\nabla u\left(\frac{x}{t}\right)$ e $\nabla v_t(x)=\frac{1}{t}\nabla v\left(\frac{x}{t}\right)$, fazendo a mudança de variável $y=\frac{x}{t}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_t|^2+|\nabla v_t|^2) &= \int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_t(x)|^2+|\nabla v_t(x)|^2)dx\\ &= \frac{1}{t^2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u\left(\frac{x}{t}\right)|^2+|\nabla v\left(\frac{x}{t}\right)|^2\right)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u(y)|^2+|\nabla v(y)|^2\right)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right),\end{aligned}$$

o que prova (i). Agora, seja

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} G(u_t,v_t) &= \int_{\mathbb{R}^2} G(u_t(x),v_t(x))dx=\int_{\mathbb{R}^2} G\left(u\left(\frac{x}{t}\right),v\left(\frac{x}{t}\right)\right)dx\\ &= t^2\int_{\mathbb{R}^2} G(u(y),v(y))dy=t^2\int_{\mathbb{R}^2} G(u,v)=0,\end{aligned}$$

o que prova (ii). De (i) e (ii), temos

$$\begin{aligned}&I(u_t,v_t)=\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u_t|^2+|\nabla v_t|^2\right)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(u_t^2+v_t^2\right)-\int_{\mathbb{R}^2}(F_1(u_t)+F_2(v_t))-\lambda\int_{\mathbb{R}^2}u_tv_t\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u_t|^2+|\nabla v_t|^2\right)-\int_{\mathbb{R}^2}G(u_t,v_t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right)-\int_{\mathbb{R}^2}G(u,v)=I(u,v),\end{aligned}$$

pois $\int_{\mathbb{R}^2} G(u,v)=0$, o que prova (iii). Para provar (iv), como (u,v) é ponto crítico de I, temos

$$I^{'}(u,v)(u,v)=0.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}\left[f_1(u_t)u_t+f_2(v_t)v_t-(u_t^2+v_t^2)+2\lambda u_tv_t\right]=\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\left[f_1\left(u\left(\frac{x}{t}\right)\right)u\left(\frac{x}{t}\right)+f_2\left(v\left(\frac{x}{t}\right)\right)v\left(\frac{x}{t}\right)+2\lambda u\left(\frac{x}{t}\right)v\left(\frac{x}{t}\right)\right]dx\\ &= t^2\int_{\mathbb{R}^2}\left[f_1(u(y))u(y)+f_2(v(y))v(y)-(u^2(y)+v^2(y))+2\lambda u(y)v(y)\right]dy\\ &= t^2\int_{\mathbb{R}^2}\left[f_1(u)u+f_2(v)v-(u^2+v^2)+2\lambda uv\right]\\ &= t^2\int_{\mathbb{R}^2}\left[|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right],\end{aligned}$$

como afirmamos. ■

Usamos o lema anterior para provar o próximo resultado.

Proposição 2.3.2 *Assuma* (H_1) *e* (H_2) *e que* $G(s_1, s_2) > 0$ *para algum* $s_1 > 0$ *e* $s_2 > 0$. *Seja* (u, v) *um ponto crítico do funcional* I *associado ao problema* (2.1) *com* $u(x) > 0$ *e* $v(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^2$. *Então, existe um caminho* $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in C([0,1], H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)) \times C([0,1], H^1_{rad}(\mathbb{R}^2))$ *tal que* $\gamma_1(t)(x) > 0$ *e* $\gamma_2(t)(x) > 0$ *para todo* $(t, x) \in (0,1] \times \mathbb{R}^2$, $\gamma(0) = (\gamma_1(0), \gamma_2(0)) = (0,0)$, $I(\gamma(1)) = I(\gamma_1(1), \gamma_2(1)) < 0$, $(u, v) \in (\gamma_1([0,1]), \gamma_2([0,1]))$ *e*

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = I(u, v).$$

Em particular, para qualquer solução de energia mínima $w = (w_1, w_2)$ *de* (2.1), *temos*

$$\inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leqslant I(w_1, w_2),$$

em que

$$\begin{aligned}\Gamma = \{\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^2)) \times C([0,1], H^1(\mathbb{R}^2));\\ \gamma(0) = (\gamma_1(0), \gamma_2(0)) = (0,0);\;\; I(\gamma_1(1), \gamma_2(1)) < 0\}.\end{aligned}$$

Demonstração. De (H_1) e (H_2), dados $\varepsilon > 0$ e $\alpha > 4\pi$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$f_i(s) \leqslant \varepsilon|s| + C|s|^3(e^{\alpha s^2} - 1), \;\; \forall s \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Consideremos $\theta \in [0,1]$ e observemos que

$$\begin{aligned} I(\theta u_t, \theta v_t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(\theta u_t)|^2 + |\nabla(\theta v_t))|^2) - \int_{\mathbb{R}^2} G(\theta u_t, \theta v_t) \\ &= \frac{\theta^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(u_t)|^2 + |\nabla(v_t))|^2) - \int_{\mathbb{R}^2} G(\theta u_t, \theta v_t). \end{aligned}$$

Usando (2.9) e o item (i) do Lema 2.3.1, segue que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\theta} I(\theta u_t, \theta v_t) \\ = \;& \theta \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_t|^2 + |\nabla v_t|^2) - \int_{\mathbb{R}^2} \left[f_1(\theta u_t)u_t + f_2(\theta v_t)v_t - \theta(u_t^2 + v_t^2) + 2\lambda\theta u_t v_t\right] \\ \geqslant \;& \theta \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_t|^2 + |\nabla v_t|^2) - \varepsilon\theta\int_{\mathbb{R}^2} (u_t^2 + v_t^2) - C\theta^3 \int_{\mathbb{R}^2} u_t^4(e^{\alpha\theta^2 u_t^2} - 1) \\ - \;& C\theta^3 \int_{\mathbb{R}^2} v_t^4(e^{\alpha\theta^2 v_t^2} - 1) + \theta\int_{\mathbb{R}^2} (u_t^2 + v_t^2) - \lambda\theta \int_{\mathbb{R}^2} (u_t^2 + v_t^2) \\ > \;& \theta \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) - C\theta \int_{\mathbb{R}^2} [u_t^4(e^{\alpha u_t^2} - 1) + v_t^4(e^{\alpha v_t^2} - 1)] \\ + \;& [\theta(1 - \lambda - \varepsilon)] \int_{\mathbb{R}^2} (u_t^2 + v_t^2) \\ > \;& \theta \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) - Ct^2\theta \int_{\mathbb{R}^2} [u^4(e^{\alpha u^2} - 1) + v^4(e^{\alpha v^2} - 1)]. \end{aligned}$$

Aqui usamos o fato de que a exponencial é uma função crescente ($\theta \in [0,1]$, $\lambda \in (0,1)$ e escolhemos $0 < \varepsilon < 1-\lambda$). Tomando $t_0 \in (0,1)$ suficientemente pequeno tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) - Ct_0^2 \int_{\mathbb{R}^2} [u^4(e^{\alpha u^2} - 1) + v^4(e^{\alpha v^2} - 1)] > 0,$$

temos, para este t_0,

$$\frac{d}{d\theta} I(\theta u_{t_0}, \theta v_{t_0}) \geqslant 0, \ \ \forall \theta \in [0,1],$$

de onde segue que $I(\theta u_{t_0}, \theta v_{t_0})$ é uma função não decrescente para $\theta \in [0,1]$ e, assim,

$$I(\theta u_{t_0}, \theta v_{t_0}) \leqslant I(u_{t_0}, v_{t_0}) = I(u,v) \ \ \forall \theta \in [0,1].$$

Observe também que, por $iii)$ em Lema 0.1.9, temos $I(u,v) = I(u_t, v_t)$, para todo $t \in [t_0, t_1]$.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=1} I(\theta u_{t_1}, \theta v_{t_1}) \\ = \ & \theta \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_{t_1}|^2 + |\nabla v_{t_1}|^2) - \int_{\mathbb{R}^2} [f_1(\theta u_{t_1})u_{t_1} + f_2(\theta v_{t_1})v_{t_1} - \theta(u_{t_1}^2 + v_{t_1}^2) + \lambda\theta(u_{t_1}^2 + v_{t_1}^2)] \\ = \ & \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) - t_1^2 \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) < 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=1} \int_{\mathbb{R}^2} G(\theta u_{t_1}, \theta v_{t_1}) \\ = \ & \int_{\mathbb{R}^2} [f_1(\theta u_{t_1})u_{t_1} + f_2(\theta v_{t_1})v_{t_1} - \theta(u_{t_1}^2 + v_{t_1}^2) + \lambda\theta(u_{t_1}^2 v_{t_1}^2)]|_{\theta=1} \\ = \ & t_1^2 \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) > 0. \end{aligned}$$

Logo, para um $\theta_1 \in (1,\infty)$ suficientemente próximo de 1 segue por (ii) e (iii) do Lema 2.3.1 que

$$I(\theta u_{t_1}, \theta v_{t_1}) \leqslant I(u_{t_1}, v_{t_1}) = I(u,v) \ \ \forall \theta \in [1, \theta_1]$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(\theta_1 u_{t_1}, \theta_1 v_{t_1}) > \int_{\mathbb{R}^2} G(u_{t_1}, v_{t_1}) = 0.$$

Considerando, agora, $(\theta_1 u_{t_1})_t = \theta_1 u_{t_1 t}$ e $(\theta_1 v_{t_1})_t = \theta_1 v_{t_1 t}$ para $t \geqslant 1$ e usando (i) do Lema 2.3.1, temos

$$\begin{aligned} & I(\theta_1 u_{t_1 t}, \theta_1 v_{t_1 t}) = \\ = \ & I((\theta_1 u_{t_1})_t, (\theta_1 v_{t_1})_t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(\theta_1 u_{t_1})_t|^2 + |\nabla(\theta_1 v_{t_1})_t|^2) - t^2 \int_{\mathbb{R}^2} G((\theta_1 u_{t_1})_t, (\theta_1 v_{t_1})_t) \\ = \ & \frac{\theta_1^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(u_{t_1})|^2 + |\nabla(v_{t_1})|^2) - t^2\theta_1^2 \int_{\mathbb{R}^2} G((u_{t_1}, v_{t_1}) \to -\infty \end{aligned}$$

quando $t \to \infty$. Desse modo, existe $t_2 > 1$ suficientemente grande tal que

$$I(\theta_1 u_{t_1 t_2}, \theta_1 v_{t_1 t_2}) < 0.$$

Mas, ainda,

$$\frac{d}{d\theta} I(\theta_1 u_{t_1 t}, \theta_1 v_{t_1 t}) = -2t \int_{\mathbb{R}^2} G(\theta_1 u_{t_1}, \theta_1 v_{t_1}) < 0$$

para $t \geqslant 1$. Assim, $I(\theta_1 u_{t_1 t}, \theta_1 v_{t_1 t})$ é uma função decrescente para $t \geqslant 1$ e usando (i) do Lema 2.3.1

$$I(\theta_1 u_{t_1 t}, \theta_1 v_{t_1 t}) \leqslant I(\theta_1 u_{t_1}, \theta_1 v_{t_1}) \leqslant I(u, v)$$

para todo $t \geqslant 1$. Aqui, escolhemos $t_0 \in (0,1)$, $t_1 \in (1,\infty)$, $\theta_1 > 1$, $t_2 > 1$ e considerar a composição adequada dos caminhos $\widehat{\gamma_1} : [0,1] \times [0,1] \to E$, $\widehat{\gamma_2} : [t_0, t_1] \times [t_0, t_1] \to E$, $\widehat{\gamma_3} : [1, \theta_1] \times [1, \theta_1] \to E$ e $\widehat{\gamma_4} : [1, t_2] \times [1, t_2] \to E$, para obter o caminho $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ desejado (para maiores detalhes, veja (34)) . ■

O seguinte lema é fundamental para demonstrar a próxima proposição.

Lema 2.3.3 *Sob a hipótese (H_1), existe $\rho_0 > 0$ tal que para $(u,v) \in \{H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)\} \times \{H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)\}$ com $0 < \|u\|_\infty, \|v\|_\infty \leq \rho_0$ tem-se*

$$P(u,v) = -2 \int_{\mathbb{R}^2} G(u,v) > 0.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
\frac{G(s,t)}{s^2+t^2} &= \frac{F_1(s)}{s^2+t^2} + \frac{F_2(t)}{s^2+t^2} - \frac{s^2}{2(s^2+t^2)} - \frac{t^2}{2(s^2+t^2)} + \frac{\lambda st}{s^2+t^2} \\
&\leqslant \frac{F_1(s)}{s^2} + \frac{F_2(t)}{t^2} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda st}{s^2+t^2} \\
&\leqslant \frac{F_1(s)}{s^2} + \frac{F_2(t)}{t^2} + \frac{\lambda - 1}{2} < 0,
\end{aligned}$$

se t e s forem pequenos. Logo, existe $\rho_0 > 0$ tal que se $0 < s, t < \rho_0$, então $-G(s,t) > 0$. Portanto, $P(u,v) > 0$, se $0 < \|u\|_\infty, \|v\|_\infty \leq \rho_0$. ■

Proposição 2.3.4 *Seja*

$$\begin{aligned}
\Gamma = \{\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^2)) \times C([0,1], H^1(\mathbb{R}^2));\\
\gamma(0) = (\gamma_1(0), \gamma_2(0)) = (0,0);\ \ I(\gamma_1(1), \gamma_2(1)) < 0\}.
\end{aligned}$$

Então, $\gamma([0,1]) \cap \wp \neq \emptyset$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Demonstração. Seja $P(u,v) = -2 \int_{\mathbb{R}^2} G(u,v)$, em que $G(u,v) = F_1(u) + F_2(v) - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \lambda uv$. Escolha $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\rho(x) \geq 0 \ \ \forall \ x \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x) = 1.$$

Para $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$ e $\varepsilon > 0$, definamos

$$\gamma_\varepsilon(t)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\gamma(t)(y)dy = \int_{\mathbb{R}^2} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)(\gamma_1(t)(y), \gamma_2(t)(y))dy.$$

Então, pode-se provar o seguinte:

1. Para $\varepsilon > 0$ e $t \in [0,1]$, $\gamma_\varepsilon(t) = (\gamma_{1,\varepsilon}(t), \gamma_{2,\varepsilon}(t)) \in \{H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)\} \times \{H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)\}$;

2. $\gamma_\varepsilon : [0,1] \times [0,1] \to L^\infty(\mathbb{R}^2) \times L^\infty(\mathbb{R}^2)$ é contínuo;

3. $\max\limits_{t\in[0,1]} \|\gamma_\varepsilon(t) - \gamma(t)\|_E^2 \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Sabemos que

$$2I(u,v) = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 - 2\int_{\mathbb{R}^2} G(u,v).$$

Desde que $I(\gamma_1(1), \gamma_2(1)) < 0$, pelo item (iii), temos que $I(\gamma_{1,\varepsilon}(1), \gamma_{2,\varepsilon}(1)) < 0$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Portanto,

$$P(\gamma_{1,\varepsilon}(1), \gamma_{2,\varepsilon}(1)) \leqslant 2I(\gamma_{1,\varepsilon}(1), \gamma_{2,\varepsilon}(1)) < 0.$$

Além disso, temos que

$$(\gamma_{1,\varepsilon}(0), \gamma_{2,\varepsilon}(0)) = (0,0).$$

Pelos itens (ii) e (iii) e pelo Lema 2.3.3, segue que

$$\begin{aligned}
& P(\gamma_{1,\varepsilon}(t), \gamma_{2,\varepsilon}(t)) \\
= \; & -2\int_{\mathbb{R}^2} G(\gamma_{1,\varepsilon}(t), \gamma_{2,\varepsilon}(t)) \\
= \; & -2\left[\int_{\mathbb{R}^2} (F_1(\gamma_{1,\varepsilon}(t)) + F_2(\gamma_{2,\varepsilon}(t))) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \left((\gamma_{1,\varepsilon}(t))^2 + (\gamma_{2,\varepsilon}(t))^2\right) + \lambda \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_{1,\varepsilon}(t)\gamma_{2,\varepsilon}(t)\right] \\
\geq \; & -2\int_{\mathbb{R}^2} (F_1(\gamma_{1,\varepsilon}(t)) + F_2(\gamma_{2,\varepsilon}(t))) + \frac{(1-\lambda)}{2}\int_{\mathbb{R}^2} ((\gamma_{1,\varepsilon}(t))^2 + (\gamma_{2,\varepsilon}(t))^2)) > 0,
\end{aligned}$$

para $\varepsilon > 0$ e $t > 0$ suficientemente pequenos. Assim, podemos tomar $t_\varepsilon \in [0,1]$ tal que $P(\gamma_{1,\varepsilon}(t_\varepsilon), \gamma_{2,\varepsilon}(t_\varepsilon)) = 0$. Em particular $(\gamma_{1,\varepsilon}(t_\varepsilon), \gamma_{2,\varepsilon}(t_\varepsilon)) \in \wp$. Extraindo uma subsequência, se necessário, seja $\varepsilon_n \to 0$ tal que $t_{\varepsilon_n} \to t_0 \in [0,1]$ quando $n \to \infty$. Pelos itens (ii) e (iii) desta proposição, temos

$$\|\gamma_{1,\varepsilon_n}(t_0) - \gamma_1(t_0)\|_{H^1}^2 + \|\gamma_{2,\varepsilon_n}(t_0) - \gamma_2(t_0)\|_{H^1}^2 \to 0,$$

ou seja, $P(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) = 0$. Só nos resta mostrar que $(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \neq (0,0)$. Como $(\gamma_{1,\varepsilon_n}(t_{\varepsilon_n}), \gamma_{2,\varepsilon}(t_{\varepsilon_n})) \in \wp$ então para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla \gamma_{1,\varepsilon_n}(t_{\varepsilon_n})|^2 + |\nabla \gamma_{2,\varepsilon_n}(t_{\varepsilon_n})|^2) \geqslant 2A.$$

Tomando o limite nesta desigualdade, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla \gamma_1(t_0)|^2 + |\nabla \gamma_2(t_0)|^2\right) \geqslant 2A,$$

de onde segue que $(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \neq (0,0)$ e isto finaliza o resultado. ∎

Agora, finalmente, vamos apresentar e demonstrar os principais resultados deste capítulo.

Proposição 2.3.5 *Se f_i satisfaz (H_1), (H_2), e (H_4) com*

$$\mu_i > \frac{1}{2}\left(\frac{q-2}{q}\right)^{\frac{q-2}{2}} {\zeta_q}^{q/2} \ \ (i = 1, 2),$$

então o ínfimo A é atingido.

Demonstração. Precisamos provar que A é atingido, isto é, que existe $(u, v) \in E$ tal que

$$A = \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) \ \ e \ \ \int_{\mathbb{R}^2} G(u, v) = 0.$$

Seja (u_n, v_n) uma sequência minimizante em E para A, isto é,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2) \to A \ \ e \ \ \int_{\mathbb{R}^2} G(u_n, v_n) = 0. \tag{2.10}$$

Argumentando como no Lema 2.2.3, podemos assumir que $\int_{\mathbb{R}^2} \left(|u_n|^2 + |v_n|^2\right) = 1$. Combinando (2.10) com os Lemas 2.2.2 e 2.2.4, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right) \leqslant 2A \leqslant 2c < 1.$$

Em vista do Lema 2.2.1,

$$\int_{\mathbb{R}^2} F_1(u_n) \to \int_{\mathbb{R}^2} F_1(u) \ \text{ e } \ \int_{\mathbb{R}^2} F_2(v_n) \to \int_{\mathbb{R}^2} F_2(v), \tag{2.11}$$

em que u e v são limites fracos de (u_n) e (v_n) em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$. Por (2.10) e (2.11) temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^2} G(u_n, v_n) = \int_{\mathbb{R}^2} F_1(u_n) + \int_{\mathbb{R}^2} F_2(v_n) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} ({u_n}^2 + {v_n}^2) + \lambda \int_{\mathbb{R}^2} u_n v_n \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} F_1(u) + \int_{\mathbb{R}^2} F_2(v) - \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} + o_n(1). \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (F_1(u) + F_2(v)) \geq \frac{1-\lambda}{2} > 0,$$

o que implica que $u \neq 0$ ou $v \neq 0$ e

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) \leqslant A.$$

Nosso objetivo é provar que $\int_{\mathbb{R}^2} G(u, v) = 0$. Para isto, lembremos que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left(|u_n|^2 + |v_n|^2\right) \geqslant \int_{\mathbb{R}^2} \left(|u|^2 + |v|^2\right),$$

de onde segue que $\int_{\mathbb{R}^2} \left(|u|^2 + |v|^2\right) \leqslant 1$. Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(u,v) = \int_{\mathbb{R}^2} F_1(u) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} F_2(v) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |v|^2 + \lambda \int_{\mathbb{R}^2} uv \geqslant 0.$$

Suponhamos que $\int_{\mathbb{R}^2} G(u,v) \neq 0$, então, necessariamente, $\int_{\mathbb{R}^2} G(u,v) > 0$. Consideremos $h(t) = \int_{\mathbb{R}^2} G(tu,tv)$ como na prova do Lema 0.1.6. Pela Desigualdade de Trundiger-Moser, temos que $h(t) < 0$ para t suficientemente pequeno. Por outro lado,

$$h(1) = \int_{\mathbb{R}^2} G(u,v) > 0.$$

Assim, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $h(t_0) = 0$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(t_0u, t_0v) = 0. \tag{2.12}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(t_0u)|^2 + |\nabla(t_0v)|^2) = \frac{{t_0}^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \leqslant {t_0}^2 A < A,$$

o que é um absurso, desde que (2.12) implica que $(t_0u, t_0v) \in \wp$ e, dessa forma,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(t_0u)|^2 + |\nabla(t_0v)|^2) \geqslant A.$$

Logo, devemos ter $\int_{\mathbb{R}^2} G(u,v) = 0$, de onde segue que A é atingido. ■

Para provar o outro resultado principal, vamos usar a Proposição 2.3.2 e a Proposição 2.3.4.

Teorema 2.3.6 *O Sistema (2.1) possui uma solução de energia mínima.*

Demonstração. Seja

$$\overline{m} = \inf\{I(u,v); (u,v) \in E\backslash\{(0,0)\} \text{ é solução de } (2.1)\}.$$

Queremos mostrar que $\overline{m} = c = A$. Pela proposição 2.3.5, existe $(u,v) \in E\backslash\{(0,0)\}$ tal que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) = A \;\; e \;\; \int_{\mathbb{R}^2} G(u,v) = 0.$$

Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v \nabla \psi = \theta \left[\int_{\mathbb{R}^2} (f_1(u)\varphi + f_2(v)\psi) - \int_{\mathbb{R}^2} (u\varphi + v\psi) + \lambda \int_{\mathbb{R}^2} (v\varphi + u\psi)\right] \tag{2.13}$$

para todo $(\varphi, \psi) \in E$. Fazendo $\varphi = u$ e $\psi = v$, obtemos

$$\begin{aligned} \|(u,v)\|^2 &= \theta\left[\int_{\mathbb{R}^2} f_1(u)u + f_2(v)v + 2\lambda \int_{\mathbb{R}^2} uv\right] \\ &\leqslant \theta\left[\int_{\mathbb{R}^2} (f_1(u)u + f_2(v)v) + \int_{\mathbb{R}^2} \left(u^2 + v^2\right)\right], \end{aligned}$$

e daí temos

$$\theta \geqslant \frac{\|(u,v)\|^2}{\int_{\mathbb{R}^2}(f_1(u)u + f_2(v)v) + \int_{\mathbb{R}^2}(u^2+v^2)} > 0, \text{ pois } f_i(s)s \geq 0 \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Agora defina o par reescalonado $(u_\theta, v_\theta) : u_\theta(x) := u\left(\frac{x}{\sqrt{\theta}}\right)$ e $v_\theta(x) := v\left(\frac{x}{\sqrt{\theta}}\right)$ de modo que $u(x) = u_\theta(\sqrt{\theta}x)$ e $v(x) = v_\theta(\sqrt{\theta}x)$ com u e v sendo dadas pela Proposição 2.3.5. Logo, pelo Teorema da Mudança de Variável, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(x)\nabla\varphi(x)dx + \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v(x)\nabla\psi(x)dx \\
= \;& \sqrt{\theta}\left[\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_\theta(\sqrt{\theta}x)\nabla\varphi(x) + \nabla v_\theta(\sqrt{\theta}x)\nabla\psi(x)\right]dx \\
= \;& \sqrt{\theta}\left[\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_\theta(y)\nabla\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{\theta}}\right) + \nabla v_\theta(y)\nabla\psi\left(\frac{y}{\sqrt{\theta}}\right)\right]\frac{1}{\theta}dy \\
= \;& \frac{\sqrt{\theta}^2}{\theta}\left[\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_\theta\nabla\overline{\varphi} + \nabla v_\theta\nabla\overline{\psi}\right] \\
= \;& \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_\theta\nabla\overline{\varphi} + \nabla v_\theta\nabla\overline{\psi},
\end{aligned}$$

em que $\overline{\varphi}(y) = \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{\theta}}\right)$, $\overline{\psi}(y) = \psi\left(\frac{y}{\sqrt{\theta}}\right)$ e $\varphi, \psi \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$.

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^2}(f_1(u(x))\varphi(x) + f_2(v(x))\psi(x))dx - \int_{\mathbb{R}^2}(u(x)\varphi(x) + v(x)\psi(x))dx \\
+ \;& \lambda\int_{\mathbb{R}^2}(v(x)\varphi(x) + u(x)\psi(x))dx \\
= \;& \int_{\mathbb{R}^2}(f_1(u_\theta(\sqrt{\theta}x))\varphi(x) + f_2(v_\theta(\sqrt{\theta}x))\psi(x))dx - \int_{\mathbb{R}^2}(u_\theta(\sqrt{\theta}x)\varphi(x) + v_\theta(\sqrt{\theta}x)\psi(x))dx \\
+ \;& \lambda\int_{\mathbb{R}^2}\left(v_\theta(\sqrt{\theta}x)\varphi(x)dx + u_\theta(\sqrt{\theta}x)\psi(x)\right)dx \\
= \;& \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^2}\left[f_1(u_\theta(y))\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{\theta}}\right) + f_2(v_\theta(y))\psi\left(\frac{y}{\sqrt{\theta}}\right)\right]dy - \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^2}\left[u_\theta(y)\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{\theta}}\right) + v_\theta(\sqrt{\theta}x)\psi)\right]dy \\
+ \;& \frac{\lambda}{\theta}\int_{\mathbb{R}^2}\left[v_\theta(y)\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{\theta}}\right) + u_\theta(y)\psi\left(\frac{y}{\sqrt{\theta}}\right)\right]dy \\
= \;& \frac{1}{\theta}\left[\int_{\mathbb{R}^2}\left(f_1(u_\theta)\overline{\varphi} + f_2(v_\theta)\overline{\psi}\right) - \int_{\mathbb{R}^2}\left(u_\theta\overline{\varphi} + v_\theta\overline{\psi})\right) + \lambda\int_{\mathbb{R}^2}\left(v_\theta\overline{\varphi} + u_\theta\overline{\psi}\right)\right],
\end{aligned}$$

para $\overline{\varphi}, \overline{\psi} \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$, o que mostra, em vista de (2.13) e do Princípio da Criticalidade Simétrica (veja Apêndice A, Teorema $A.4$) que (u_θ, v_θ) é uma solução fraca do Sistema (2.1). Ademais,

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u_\theta|^2 + |\nabla v_\theta|^2\right) = \int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) = 2A \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2} G(u_\theta, v_\theta) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\overline{m} \leqslant I(u_\theta, v_\theta) \;&=\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_\theta|^2 + |\nabla v_\theta|^2) - \int_{\mathbb{R}^2} G(u_\theta, v_\theta) \\
&=\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) = A,
\end{aligned}$$

isto é

$$\overline{m} \leqslant A. \tag{2.14}$$

Para cada $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$, pela Proposição $2.3.4$, tem-se $\gamma([0,1]) \cap \wp \neq \emptyset$. Daí, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\gamma(t_0) \in \wp$ e, então,

$$A \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \gamma(t_0)|^2 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \gamma(t_0)|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} G(\gamma(t_0)) = I(\gamma(t_0)).$$

Assim,

$$A \leqslant I(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \leqslant \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leqslant c,$$

ou seja,

$$A \leqslant c. \tag{2.15}$$

De (2.14) e (2.15), segue que $\overline{m} \leqslant A \leqslant c$. Só nos resta mostrar que $\overline{m} \geqslant c$. Para toda solução não-trivial $w = (w_1, w_2)$ do Sistema (2.1), pela Proposição $2.3.2$, existe um caminho $\gamma_w \in \Gamma$ tal que $(w_1, w_2) \in \gamma_w([0,1])$ e

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma_w(t)) = I(w_1, w_2).$$

Consequentemente, $c \leqslant I(w_1, w_2)$. Portanto, $c \leqslant \overline{m}$, de onde segue que $\overline{m} = A = c$ e, portanto (u_θ, v_θ) é uma solução de energia mínima do Sistema (2.1). ■

3 SISTEMAS DE SCHRÖDINGER QUASILINEARES ENVOLVENDO CRESCIMENTO CRÍTICO EXPONENCIAL

3.1 Introdução

O principal objetivo deste capítulo é mostar que, usando metódos variacionais baseados em espaços de Orlicz, podemos encontrar condições suficientes para existência de soluções de energia mínima para um sistema de Schröndiger quasilinear da forma

$$\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u - \Delta(u^2)u = h(x,u,v), & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ -\Delta v + V_2(x)v - \Delta(v^2)v = g(x,u,v), & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{3.1}$$

Aqui, as funções $h, g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e satisfazem as seguintes condições:

(H_1) Existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{u,v\to+\infty} \frac{|h(x,u,v)|}{e^{\alpha(u^2+v^2)^2}} = \begin{cases} 0, \\ +\infty, \end{cases}$$

$\forall\ \alpha > \alpha_0$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^2$, e

$$\lim_{u,v\to+\infty} \frac{|g(x,u,v)|}{e^{\alpha(u^2+v^2)^2}} = \begin{cases} 0, \\ +\infty, \end{cases}$$

$\forall\ \alpha > \alpha_0$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^2$.

(H_2) Existe $\theta > 4$ tal que

$$\theta F(x,u,v) \leqslant U\nabla F(x,u,v) \ \ \forall\ U = (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

em que $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $\nabla F = (h, g)$.

(H_3) $\displaystyle\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{h(x,u,v)}{|(u,v)|} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{g(x,u,v)}{|(u,v)|} = 0.$

(H_4) Existem $\xi > 0$ e $q > 2$ tais que

$$F(x,t,t) \geqslant \xi t^q \ \text{ para todo } t \geqslant 0 \text{ e, para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

Agora, vejamos as seguintes condições sobre os potenciais contínuos $V_1, V_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

(ν_1) $0 < V_0 := \min\{\inf_{\mathbb{R}^2} V_1, \inf_{\mathbb{R}^2} V_2\}$

(ν_2) Existe $M_0 > 0$ tal que para todo $M \geqslant M_0$,

$$\Big|\{x \in \mathbb{R}^2; V_i(x) \leqslant M\})\Big| < \infty, \ \ i = 1, 2,$$

lembramos que $|A|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto A.

Como exposto na Introdução do trabalho, os próximos teoremas contém os resultados principais deste capítulo.

Teorema 3.1.1 *Suponha que* $(\nu_1)-(\nu_2)$ *e* $(H_1)-(H_4)$ *sejam satisfeitas. Então, o Sistema* (3.1) *tem uma solução fraca não-trivial.*

No presente capítulo também estamos interessados na existência de soluções de energia mínima, isto é, uma solução em que a energia é mínima dentre todas as outras energias de soluções não-trivias. Para tanto, precisamos da hipótese (H_5) descrita abaixo:

(H_5) Para cada $x \in \mathbb{R}^2$ e $t > 0$, $\frac{h(x,s,t)}{s^3}$ é não-decrescente em $s > 0$ e, para cada $x \in \mathbb{R}^2$ e s positivo $\frac{g(x,s,t)}{t^3}$ é não-decrescente em t positivo.

Teorema 3.1.2 *Sob as hipóteses do Teorema* $3.1.1$, *se supomos, além disso, a condição* (H_5), *então a solução obtida no Teorema* $3.1.1$ *é uma solução de energia mínima.*

3.2 Resultados Preliminares

Pelas condições (H_1) e (H_3), temos que dados $\varepsilon > 0$, $q > 2$ e $\alpha > \alpha_0$, existe $C = C(\varepsilon, q, \alpha) > 0$ tal que

$$|h(x,u,v)| + |g(x,u,v)| \leqslant \varepsilon|(u,v)|^2 + C|(u,v)|^{q-1}(e^{\alpha(u^2+v^2)^2} - 1) \tag{3.2}$$

e, consequentemente,

$$F(x,u,v) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|(u,v)|^2 + C|(u,v)|^q(e^{\alpha(u^2+v^2)^2} - 1) \tag{3.3}$$

para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Note que, se $1/p + 1/q = 1$, então

$$ab - 1 \leqslant \frac{1}{p}(a^p - 1) + \frac{1}{q}(b^q - 1), \text{ para todo } a, b > 0. \tag{3.4}$$

Em virtude da Desigualdade de Trudinger-Moser (veja apêndice A, Lema $A.2$) e (3.4) temos

$$\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha(u^2+v^2)^2} - 1) \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(e^{8\alpha u^2} - 1) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(e^{8\alpha v^2} - 1) < \infty. \tag{3.5}$$

Aqui, $H^1(\mathbb{R}^2)$ denota o espaço de Sobolev usual e consideramos $E := H^1(\mathbb{R}^2) \times H^1(\mathbb{R}^2)$ munido da norma

$$\|(u,v)\|_E = (\|u\|_{1,2}^2 + \|v\|_{1,2}^2)^{\frac{1}{2}},$$

em que $\|u\|_{1,2} := (\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2)^{1/2}$ é a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^2)$. Dizemos que (u,v) é uma solução fraca para o Sistema (28) se $(u,v) \in E \cap [L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2)]^2$ e, para todo $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ vale

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2}\left[(1+2u^2)\nabla u\nabla\varphi + (1+2v^2)\nabla v\nabla\psi + 2u|\nabla u|^2\varphi + 2v|\nabla v|^2\psi + V_1(x)u\varphi + V_2(x)v\psi\right] \\ = & \int_{\mathbb{R}^2}[h(x,u,v)\varphi + g(x,u,v)\psi]. \end{aligned}$$

Associado ao Sistema (2.1), consideremos o funcional energia $I : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}[(1+2|u|^2)|\nabla u|^2+(1+2|v|^2)|\nabla v|^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}V_1(x)u^2+V_2(x)v^2]-\int_{\mathbb{R}^2}F(x,u,v),$$

em que $\nabla F(x,u,v) = (h(x,u,v), g(x,u,v))$. Note que este funcional não está bem definido em E, pois não necessariamente as integrais $\int_{\mathbb{R}^2}(|u|^2|\nabla u|^2)$ e $\int_{\mathbb{R}^2}(|v|^2|\nabla v|^2)$ são finitas se $(u,v) \in E$. Para contornar esta dificuldade, como em (34), fazemos o uso da mudança de variável $z = f^{-1}(u)$ e $w = f^{-1}(v)$ em que f é definido por

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{[1+2f^2(t)]^{\frac{1}{2}}} \ \ t \in [0,+\infty) \\ f(t) &= -f(-t) \ \ t \in (-\infty,0]. \end{aligned}$$

Assim, obtemos um novo funcional, a saber:

$$\begin{aligned} J(z,w) &:= I(f(z), f(w)) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla z|^2 + |\nabla w|^2) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(z) + V_2(x)f^2(w)) \\ &- \int_{\mathbb{R}^2}F(x, f(z), f(w)), \end{aligned}$$

o qual está bem definido no espaço de Orlicz

$$W = \{(z,w) \in E; \int_{\mathbb{R}^2}[V_1(x)f^2(z) + V_2(x)f^2(w)] < \infty\},$$

sob as hipóteses (H_1) e (H_3). W é um espaço de Banach munido da norma (veja Proposição 3.3.5)

$$\|(z,w)\|_W = \|z\| + \|w\|, \ \ (z,w) \in W,$$

em que

$$\|z\| := \|\nabla z\|_2 + \inf_{\xi>0}\frac{1}{\xi}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^2}V_1(x)f^2(\xi z)\right]. \tag{3.6}$$

e

$$\|w\| := \|\nabla w\|_2 + \inf_{\xi>0}\frac{1}{\xi}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^2}V_2(x)f^2(\xi w)\right]. \tag{3.7}$$

Além disso, prova-se como em (21) que o funcional J tem as seguintes propriedades:

(1) J está bem definido em W;

(2) J é contínuo em W;

(3) J é Gateaux diferenciável em W e para $(z,w), (\varphi,\psi) \in W$ sua derivada de Gateaux é dada por

$$\begin{aligned} \langle J'(z,w), (\phi,\psi)\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2}[\nabla z\nabla\phi + \nabla w\nabla\psi] + \int_{\mathbb{R}^2}\left[V_1(x)f(z)f'(z)\phi + V_2(x)f(w)f'(w)\psi\right] \\ &- \int_{\mathbb{R}^2}[(h(x,f(z),f(w))\phi + g(x,f(z),f(w))\psi)]; \end{aligned}$$

(4) Para $(z,w) \in W, J^{'}(z,w) \in W^{'}$ e se $(z_n,w_n) \to (z,w)$ em W então $J^{'}(z_n,w_n) \rightharpoonup J^{'}(z,w)$ na topologia fraca* de $W^{'}$, isto é, para cada $(\varphi,\psi) \in W$ temos

$$J^{'}(z_n,w_n).(\varphi,\psi) \to J^{'}(z,w).(\varphi,\psi).$$

Observe que $J(z,w)$ é o funcional de Euler-Lagrange associado ao seguinte sistema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta z + V_1(x)f(z)f^{'}(z) = h(x,f(z),f(w))f^{'}(z), \ \text{em } \mathbb{R}^2 \\ -\Delta w + V_2(x)f(w)f^{'}(w) = g(x,f(z),f(w))f^{'}(w), \ \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{3.8}$$

Dizemos que $(z,w) \in W$ é uma solução fraca do Sistema (3.8) se

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla z \nabla \phi + \nabla w \nabla \psi] + \int_{\mathbb{R}^2} \left[V_1(x)f(z)f^{'}(z)\phi + V_2(x)f(w)f^{'}(w)\psi\right] \\ - \int_{\mathbb{R}^2} [h(x,f(z),f(w))\phi + g(x,f(z),f(w))\psi] = 0$$

para todo $(\phi,\psi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Assim, os pontos críticos de J são precisamente as soluções fracas do Sistema (3.8). Ademais, pode-se mostrar que se $(z,w) \in W$ é um ponto crítico de J então (u,v), em que $u = f(z)$ e $v = f(w)$, é uma solução fraca do Sistema (28) (veja Proposição 2.5 de (21)).

Para uma fácil referência, colecionamos aqui algumas propriedades da função f.

Lema 3.2.1 *A função $f(t)$ e sua derivada gozam das seguintes propriedades:*

(1) *f é uma função C^∞, unicamente definida e invertível;*

(2) $|f'(t)| \leqslant 1$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$;

(3) $|f(t)| \leqslant t$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$;

(4) $\frac{f(t)}{t} \to 1$ *quando* $t \to 0$;

(5) $\frac{f(t)}{\sqrt{t}} \to 2^{1/4}$ *quando* $t \to +\infty$;

(6) $\frac{f(t)}{2} \leqslant tf'(t) \leqslant f(t)$ *para todo* $t \geqslant 0$ *e* $\frac{f^2(t)}{2} \leqslant tf(t)f^{'}(t) \leqslant f^2(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$;

(7) $|f(t)| \leqslant 2^{1/4}|t|^{1/2}$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$;

(8) *A função $f^2(t)$ é estritamente convexa;*

(9) *Existe uma constante positiva C tal que*

$$|f(t)| \geqslant \begin{cases} C|t|, |t| \leqslant 1; \\ C|t|^{1/2}, |t| \geqslant 1; \end{cases} \tag{3.9}$$

(10) *Existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que*

$$|t| \leqslant C_1|f(t)| + C_2|f(t)|^2 \ \ para \ \ todo \ \ t \in \mathbb{R};$$

(11) $|f(t)f'(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$;

(12) $f^2(\rho t) \leqslant \rho^2 f^2(t)$ *para todo* $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ *e* $t \in \mathbb{R}$;

(13) $f^2(\rho t) \leqslant \rho f^2(t)$ *para todo* $\rho \geqslant 1$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

Note que, como consequência imediata de (12) e (13) do Lema $3.2.1$, temos

$$\min\{\rho, \rho^2\} f^2(t) \leqslant f^2(\rho t) \leqslant \max(\rho, \rho^2) f^2(t), \ \ \forall \ t \geqslant 0. \tag{3.10}$$

Além disso, tomando $t = 1$ no item (6) acima, temos $f^2(1) \geqslant [f'(1)]^2 = 1/(1 + 2f^2(1))$, isto é, $2f^4(1) + f^2(1) \geqslant 1$. Desde que $f(1) > 0$, um cálculo simples mostra que $f(1) \geqslant 1/\sqrt{2}$ e é imediato verificar por (6) que $f(t)/t$ é decrescente. Portanto,

$$f(t) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} t, \ \ \forall \ t \in [0, 1]. \tag{3.11}$$

3.3 Algumas Propriedades do Espaço W

Nesta seção, apresentamos propriedades do espaço W que são de suma importância em nossos argumentos para provarmos a existência de soluções fracas para (3.1). Primeiramente, consideramos o espaço de funções

$$X = \left\{ (u, v) \in E; \int_{\mathbb{R}^2} [V_1(x) u^2 + V_2(x) v^2] < \infty \right\},$$

que é um espaço de Hilbert munido com o produto interno dado por

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_1 \nabla u_2 + \nabla v_1 \nabla v_2 + V_1(x) u_1 u_2 + V_2(x) v_1 v_2),$$

cuja norma correspondente é

$$\|(u, v)\|_X^2 = \int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + V_1(x) u^2 + V_2(x) v^2], (u, v) \in X.$$

As conclusões obtidas nos próximos resultados são essenciais para o desenvolvimento dos resultados posteriores.

Proposição 3.3.1 *1. W é um espaço vetorial normado com respeito à norma dada em* (3.6);

2. *Existe uma constante positiva C tal que para todo $(u, v) \in W$,*

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^2} (V_1(x) f^2(u) + V_2(x) f^2(v))}{1 + [\int_{\mathbb{R}^2} V_1(x) f^2(u) + V_2(x) f^2(v)]^{\frac{1}{2}}} \leqslant C \|(u, v)\|; \tag{3.12}$$

3. *Se $(u_n, v_v) \to (u, v)$ em W, então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} V_1(x) |f^2(u_n) - f^2(u)| + \int_{\mathbb{R}^2} V_2(x) |f^2(v_n) - f^2(v)| \to 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} V_1(x) |f(u_n) - f(u)|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} V_2(x) |f(v_n) - f(v)|^2 \to 0;$$

4. Se $u_n \to u$ e $v_n \to v$ quase sempre e

$$\int_{\mathbb{R}^2} (V_1(x) f^2(u_n) + V_2(x) f^2(v_n)) \to \int_{\mathbb{R}^2} (V_1(x) f^2(u) + V_2(x) f^2(v)).$$

então

$$\inf_{\xi > 0} \frac{1}{\xi} \left[1 + \int_{\mathbb{R}^2} V_1(x) f^2(\xi(u_n - u)) + V_2(x) f^2(\xi(v_n - v)) \right] \to 0.$$

Demonstração. Por (4) e (5) do Lema $3.2.1$, f tem o seguinte comportamento assintótico:

$$f^2(s) \sim \begin{cases} s^2, & \text{para } |s| \text{ pequeno} \\ C|s|, & \text{para } |s| \text{ grande.} \end{cases}$$

Em particular, para algum $C_0 > 0$, temos

$$f^2(2s) \leqslant C_0 f^2(s), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Para provar (i), observamos que claramente $(0,0) \in W$. Dados $(u,v) \in W$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|\alpha|}{2^k} \in (0,1)$. Usando a estimativa (3.13) e que f^2 é convexa, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \left[V_1(x) f^2(\alpha u) + V_2 f^2(\alpha v) \right] &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[V_1(x) f^2 \left(2^k \frac{|\alpha| u}{2^k} \right) + V_2(x) f^2 \left(2^k \frac{|\alpha| v}{2^k} \right) \right] \\ &\leqslant C_0^k \int_{\mathbb{R}^2} \left[V_1(x) f^2 \left(2^k \frac{|\alpha| u}{} \right) + V_2(x) f^2 \left(\frac{|\alpha| v}{2^k} \right) \right] \\ &\leqslant C_0^k \frac{|\alpha|}{2^k} \int_{\mathbb{R}^2} \left[V_1(x) f^2(u) + V_2(x) f^2(v) \right] < \infty. \end{aligned}$$

Logo, $(\alpha u, \alpha v) \in W$. Agora, sejam $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in W$ e usando mais uma vez que f^2 é convexa, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \left[V_1(x) f^2(u_1 + u_2) + V_2 f^2(v_1 + v_2) \right] &\leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[V_1(x) f^2(2u_1) + V_1(x) f^2(2u_2) \right] \\ + \quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[V_2(x) f^2(2v_1) + V_2(x) f^2(2v_2) \right] &< \infty, \end{aligned}$$

em que $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) \in W$. Portanto, W é um espaço vetorial. É padrão checar que (3.6) e $(3.2.1)$ são normas em W (veja (21))). Agora, provemos a propriedade (ii). Para $(u,v) \in W$ e $\xi > 0$, definamos

$$A_\xi := \{x \in \mathbb{R}^2; \xi |u(x)| \leqslant 1 \text{ e } \xi |v(x)| \leqslant 1\}.$$

Pelas propriedades (3) e (7) do Lema $(3.2.1)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} (V_1(x) f^2(u) + V_2(x) f^2(v)) \\ = \quad & \int_{A_\xi} (V_1(x) f^2(u) + V_2(x) f^2(v)) + \int_{A_\xi^c} (V_1(x) f^2(u) + V_2(x) f^2(v)) \\ \leqslant \quad & \int_{A_\xi} (V_1(x) |f(u)||u| + V_2(x) |f(v)||v|) + C \int_{A_\xi^c} (V_1(x)|u| + V_2(x)||v|). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Usando a desigualdade de Hölder e (9) do Lema $3.2.1$, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{A_\xi}(V_1(x)|f(u)||u|+V_2(x)|f(v)||v|)\leqslant\\
\leqslant\ &\left[\int_{A_\xi}(V_1(x)f^2(u)+V_2(x)f^2(v))\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{A_\xi}(V_1(x)u^2+V_2(x)v^2)\right]^{\frac{1}{2}}\\
\leqslant\ &\left[\int_{\mathbb{R}^N}(V_1(x)f^2(u)+V_2(x)f^2(v))\right]^{1/2}\frac{C}{\xi}\left[\int_{A_\xi}(V_1(x)f^2(\xi u)+V_2(x)f^2(\xi v))\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3.15)\\
\leqslant\ &\left[\int_{\mathbb{R}^N}(V_1(x)f^2(u)+V_2(x)f^2(v))\right]^{\frac{1}{2}}\frac{C}{\xi}\left[1+\int_{A_\xi}(V_1(x)f^2(\xi u)+V_2(x)f^2(\xi v))\right],
\end{aligned}
$$

em que, na última estimativa, usamos a desigualdade $s^{1/2}\leqslant 1+s$ para todo $s\geqslant 0$. Pela estimativa (9) do Lema $3.2.1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{A_\xi}(V_1(x)|u|+V_2(x)|v|) &= \frac{C}{\xi}\int_{A_\xi}[V_1(x)|\xi u|+V_2(x)|\xi v|]\\
&\leqslant \frac{C}{\xi}\left[1+\int_{A_\xi}(V_1(x)f^2(\xi u)+V_2(x)f^2(\xi v))\right]. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Logo, de (3.14) e (3.16) concluímos que para todo $\xi>0$,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u)+V_2(x)f^2(v))\leqslant\\
&\left[\left(\int_{\mathbb{R}^2}V_1(x)f^2(u)+V_2(x)f^2(v)\right)^{1/2}+1\right]\frac{C}{\xi}\left[1+\int_{\mathbb{R}^2}\big(V_1(x)f^2(\xi u)+V_2(x)f^2(\xi v)\big)\right]
\end{aligned}
$$

donde segue a propriedade (ii).

Para provarmos o item (iii), note que se $(u_n,v_n)\to(u,v)$ em W então por (3.12) devemos ter

$$\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_n-u)+V_2(x)f^2(v_n-v))\to 0. \qquad (3.17)$$

Em particular,

$V_1(x)f^2(u_n-u)\to 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$ e $V_2(x)f^2(v_n-v)\to 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$.

Desde que $V_1(x),V_2(x)\neq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}^2$ e f^{-1} é contínua, segue que $u_n\to u$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$ e $v_n\to v$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Assim, pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u)+V_2(x)f^2(v))\leqslant\liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_n)+V_2(x)f^2(v_n))\leqslant C.$$

Por (3.17), existe $h\in L^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$V_1(x)f^2(u_n-u)+V_2(x)f^2(v_n-v)\leqslant h,$$

quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Portanto, a desigualdade (3.13) juntamente com a convexidade de f^2 implica que

$$\begin{aligned}
& V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n) \\
\leqslant \; & \frac{C_0}{2}\left[V_1(x)f^2(u_n - u) + V_2(x)f^2(v_n - v)\right] + \frac{C_0}{2}\left[V_1(x)f^2(u) + V_2(x)f^2(v)\right] \\
\leqslant \; & C_1(h + V_1(x)f^2(u) + V_2(x)f^2(v)).
\end{aligned}$$

Desde que $(h + V_1(x)f^2(u) + V_2(x)f^2(v)) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, os limites em (iii) são provados. Finalmente, indicamos que a propriedade (iv) pode ser provada como em (12) com algumas modificações. ■

Corolário 3.3.2 *A imersão $X \hookrightarrow W$ é contínua.*

Demonstração. Primeiramente, note, pelas definições de X e W, que X $\subset W$. Agora, seja $(u_n, v_n) \to (0,0)$ em X. Usando que $|f(s)| \leqslant |s|$ para todo $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n)) \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u_n^2 + V_2(x)v_n^2) \to 0.$$

Assim, da Proposição $3.3.1$, propriedade (4), concluímos que $(u_n, v_n) \to (0,0)$ em W, de onde segue o resultado desejado. ■

Proposição 3.3.3 *A aplicação $(u,v) \to (f(u), f(v))$ de W em $L^q(\mathbb{R}^2) \times L^q(\mathbb{R}^2)$ é contínua para $2 \leqslant q < \infty$.*

Demonstração. Para $(u,v) \in W$, segue, por definição, que $(f(u), f(v)) \in X$. Por (ν_1), a irmesão $X \hookrightarrow E$ é contínua. Consequentemente, a imersão

$$X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2) \times L^q(\mathbb{R}^2), \;\; 2 \leqslant q < \infty \tag{3.18}$$

é também contínua. Logo, para algum $C > 0$, temos

$$\begin{aligned}
& \|(f(u), f(v))\|_q \leqslant C\|(f(u), f(v))\|_X \qquad (3.19)\\
\leqslant \; & C\left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + V_1(x)f^2(u) + V_2(x)f^2(v)\right)\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Agora, seja (u_n, v_n) uma sequência em W tal que $(u_n, v_n) \to (u,v)$ em W. Por (3) da Proposição 3.3.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (V_1(x)|f(u_n) - f(u)|^2 + V_2(x)|f(v_n) - f(v)|^2) \to 0. \tag{3.20}$$

Segue também que

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right) \to \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \;\text{ em }\; L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2), \;\; i = 1, 2.$$

Portanto, a menos de subsequência, existem $h_i, \hat{h_i} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tais que

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| \leqslant h_i \text{ e } \left|\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right| \leqslant \hat{h_i},$$

quase sempre em $\mathbb{R}^2$, para $i = 1, 2$. Isto implica que

$$\left|\frac{\partial f(u_n)}{\partial x_i}\right| = \left|f^{'}(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| \leqslant h_i \text{ e } \left|\frac{\partial f(v_n)}{\partial x_i}\right| = \left|f^{'}(v_n)\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right| \leqslant \hat{h_i}.$$

Além disso,

$$\frac{\partial f(u_n)}{\partial x_i} = f^{'}(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to f^{'}(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f(u)}{\partial x_i} \text{ e } \frac{\partial f(v_n)}{\partial x_i} = f^{'}(v_n)\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \to f^{'}(v)\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial f(v)}{\partial x_i}$$

quase sempre em $\mathbb{R}^2$ para $i = 1, 2$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue

$$\|\nabla f(u_n) - \nabla f(u)\|_2 \to 0 \text{ e } \|\nabla f(v_n) - \nabla f(v)\|_2 \to 0.$$

Usando as imersões (3.19) e (3.20), concluímos

$$\begin{aligned} \|f(u_n) - f(v_n)\|_q^2 &\leqslant C\|\nabla f(u_n) - \nabla f(u)\|_2^2 + C\|\nabla f(v_n) - \nabla f(v)\|_2^2 \\ + \quad C &\int_{\mathbb{R}^2} (V_1(x)|f(u_n) - f(u)|^2 + V_2(x)|f(v_n) - f(v)|^2) \to 0 \end{aligned}$$

para $2 \leqslant q < \infty$. Assim, o resultado está provado. ■

Proposição 3.3.4 *Suponha que (ν_1) e (ν_2) sejam satisfeitas. Então, a aplicação $(u, v) \to (f(u), f(v))$ de W em $L^q(\mathbb{R}^2) \times L^q(\mathbb{R}^2)$ é compacta para $2 \leqslant q < \infty$.*

Demonstração. Seja $(u_n, v_n) \subset W$ uma sequência limitada em W. Então, $(\|\nabla u_n\|_2 + \|\nabla v_n\|_2)$ é limitada, e, por (3.12) segue que $\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n))$ é também limitada. Assim, $(f(u_n), f(v_n))$ é limitada em X e, desde que exista a imersão $X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2) \times L^q(\mathbb{R}^2)$, é compacta para $2 \leq p < \infty$ (veja (35)), a menos de subsequência, existe $(w_1, w_2) \in L^q(\mathbb{R}^2) \times L^q(\mathbb{R}^2)$ tal que $(f(u_n), f(v_n)) \to (w_1, w_2)$ em $L^q(\mathbb{R}^2) \times L^q(\mathbb{R}^2)$, e a prova está completa. ■

Proposição 3.3.5 *W é um espaço de Banach com respeito à norma $\|(u, v)\|_W = \|u\| + \|v\|$.*

Demonstração. Seja (u_n, v_n) uma sequência de Cauchy em W. Pela definição da norma em W, $(\nabla u_n, \nabla v_n)$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$. Logo, existem (u_1, v_1) e $(u_2, v_2) \in L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ tais que

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \frac{\partial v_n}{\partial x_1}\right) \to (u_1, v_1) \text{ e } \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2}, \frac{\partial v_n}{\partial x_2}\right) \to (u_2, v_2) \text{ em } L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2).$$

Usando (3.16), dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} (V_1(x)f^2(u_m - u_n) + V_2(x)f^2(v_m - v_n)) < \frac{\varepsilon^2}{2} \\ &\text{e} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_m - \nabla u_n|^2 + |\nabla v_m - \nabla v_n|^2) < \frac{\varepsilon^2}{2}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

para todo $m, n \geqslant n_0$. Logo, por (3.18) obtemos que

$$\|f(u_m - u_n)\|_2 + \|f(v_m - v_n)\|_2 < C\varepsilon.$$

Agora, usando (10) do Lema$3.2.1$ concluímos que (u_n, v_n) é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$. Portanto, existe $(u, v) \in L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $(u_n, v_n) \to (u, v)$ em $L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$. Para $i = 1, 2$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi \;\text{ e }\; \int_{\mathbb{R}^2} v_n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\psi$$

para todo $(\varphi, \psi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_{\mathbb{R}^2} w_i \partial\varphi \;\text{ e }\; \int_{\mathbb{R}^2} v \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\int_{\mathbb{R}^2} \overline{w_i} \partial\psi,$$

o que implica que u, v tem derivada fraca e $w_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\overline{w_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ para $i = 1, 2$. Assim, $(u, v) \in E$ e

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_2 + \|\nabla v_n - \nabla v\|_2 \to 0 \;\text{ quando }\; n \to \infty. \tag{3.22}$$

Como (u_n, v_n) é limitada em W, por (3.12) temos que $\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n))$ é também limitada. Pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u) + V_2(x)f^2(v)) \leqslant \int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n)) \leqslant C.$$

Consequentemente, $(u, v) \in W$. Fixando $m > n_0$ em (3.21), segue que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_m - u) + V_2(x)f^2(v_m - v)) \\ \leqslant \;& \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_m - u_n) + V_2(x)f^2(v_m - v_n)) < \frac{\varepsilon^2}{2} \end{aligned}$$

e isto mostra que, desde que $\varepsilon > 0$ é arbitrário,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_m - u) + V_2(x)f^2(v_m - v)) = 0.$$

Por um argumento similar a prova de (iii) da Proposição $3.3.1$, podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n)) \to \int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u) + V_2(x)f^2(v)).$$

Portanto, por (iv) da Proposição $3.3.1$, concluimos que

$$\inf_{\xi>0} \frac{1}{\xi}\left\{1 + \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)f^2(\xi(u_n - u)) + V_2(x)f^2(\xi(v_n - v))\right\} \to 0,$$

que, junto com (3.22), mostra que $\|u_m - u\| + \|v_m - v\| \to 0$, e isto finaliza a prova. ∎

3.4 Geometria do Passo da Montanha

Nesta seção, vamos mostrar que o funcional J possui a geometria do passo da montanha (veja Apêndice A, Teorema $A.3$). Antes disso, obteremos o seguinte resultado:

Lema 3.4.1 *Sob as hipóteses (H_1) e (H_3), dados $\alpha > \alpha_0$ e $q \geqslant 2$, para*

$$\|(u,v)\|_W \leqslant \rho < \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}},$$

temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha(|f(u)|^2+|f(v)|^2)^2} - 1)|(f(u),f(v))|^q \leqslant C\|(f(u),f(v))\|_X^q. \tag{3.23}$$

Demonstração. Aplicando (7) do Lema $3.2.1$, (3.5) e a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha(|f(u)|^2+|f(v)|^2)^2} - 1)|(f(u),f(v))|^q \\
\leqslant\ & \int_{\mathbb{R}^2} (e^{2\alpha(2|u|^2+2|v|^2)} - 1)|(f(u),f(v))|^q \\
\leqslant\ & \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\alpha(u^2+v^2)} - 1)\right]^{1/2} \left[\int_{\mathbb{R}^2} |(f(u),f(v))|^{2q}\right]^{1/2} \\
=\ & \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}(e^{8\alpha u^2} - 1) + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}(e^{8\alpha v^2} - 1)\right]^{1/2} \|(f(u),f(v))\|_{2q}^q \\
\leqslant\ & C_1 \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}(e^{8\alpha\|u\|^2\left(\frac{u}{\|u\|}\right)^2} - 1) + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}(e^{8\alpha\|v\|^2\left(\frac{v}{\|v\|}\right)^2} - 1)\right] \|(f(u),f(v))\|_X^q.
\end{aligned}$$

Desde que $8\alpha\|u\|^2 \leqslant 8\alpha\|(u,v)\|^2 \leqslant 8\alpha\rho^2 < 4\pi$ e, analogamente, $8\alpha\|v\|^2 < 4\pi$, pela Desigualdade de Trundinger-Moser e pela imersão (3.18), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{2\alpha(u^2+v^2)^2} - 1)|(f(u),f(v))|^q \leqslant C\|(f(u),f(v))\|_X^q.$$

■

Agora, para $\rho > 0$ consideremos o conjunto

$$S_\rho := \{(u,v) \in W; Q(u,v) = \rho^2\},$$

em que $Q : W \to \mathbb{R}$ é dada por

$$Q(u,v) = Q_1(u) + Q_2(v) = \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + V_1(x)f^2(u) + V_2(x)f^2(v)),$$

com $Q_1(u) = \int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u|^2 + V_1(x)f^2(u))$ e $Q_2(v) = \int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla v|^2 + V_2(x)f^2(v))$. Desde que $Q(u,v)$ é contínua, então S_ρ é um subconjunto fechado que desconecta o espaço W.

Proposição 3.4.2 *O funcional J satisfaz as seguintes condições:*

$i)$ Existem $\rho, \sigma_0 > 0$ tais que $J(u,v) \geq \sigma_0$ para todo $(u,v) \in S_\rho$;

$ii)$ *Existe* $(u_0, v_0) \in W$ *satisfazendo* $Q(u_0, v_0) > \rho^2$ *e* $J(u_0, v_0) < 0$.

Demonstração. Para $(u, v) \in S_\rho$ temos por (3.3), (ν_1) e o Lema 3.4.1 que

$$\begin{aligned} J(u,v) &\geqslant \frac{\rho^2}{2} - \frac{V_0}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(f^2(u)+f^2(v)) - C\int_{\mathbb{R}^2}\left(e^{\alpha(f^2(u)+f^2(v))^2}-1\right)|(f(u),f(v))|^q \\ &\geqslant \frac{\rho^2}{2} - \frac{V_0}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(f^2(u)+f^2(v)) - C_1\|(f(u),f(v))\|^q \geqslant \frac{1}{2}\rho^2 - C_1\rho^q \end{aligned}$$

com $q > 2$ e $\|(u,v)\| = \rho$ com $0 < \rho < \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$. Tomando $\sigma_0 = \frac{1}{4}\rho^2 - C_1\rho^q$, se $\rho > 0$ é suficientemente pequeno, obtemos $(u, v) \in S_\rho$ tal que

$$J(u,v) \geqslant \sigma_0 > 0, \ \ \forall \ (u,v) \in S_\rho.$$

Agora, mostraremos (ii). Pela condição (H_2), se $K \subset \mathbb{R}^2$ é um compacto, existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que

$$F(x,u,v) \geqslant C_1|(u,v)|^\theta - C_2 \ \ \forall \ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \ x \in K.$$

Sejam $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)\backslash\{0\}$ tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ e $\operatorname{supp}(\varphi) := K$. Assim, temos

$$J(t\varphi, t\varphi) \leqslant \frac{t^2}{2}\int_K 2|\nabla\varphi|^2 + [V_1(x)+V_2(x)]\varphi^2) - C_1\int_K |(f(t\varphi), f(t\varphi))|^\theta + C_2|K|.$$

Usando (6) do Lema 3.2.1, segue que $\frac{f(s)}{s}$ é decrescente para $s > 0$. Desde que $0 < t\varphi(x) \leqslant t$ para $t > 0$, obtemos $f(t\varphi(x)) \geqslant f(t)\varphi(x)$, que implica que

$$J(t\varphi, t\varphi) \leqslant \frac{t^2}{2}\left[\int_K (|\nabla\varphi|^2 + [V_1(x)+V_2(x)]\varphi^2) - C_3\frac{f(t)^\theta}{t^2}\int_K \varphi^\theta + \frac{C_2}{t^2}|K|\right] \to -\infty$$

quando $t \to +\infty$ desde que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)^\theta}{t^2} = \lim_{t\to\infty}\frac{f(t)^\theta}{\sqrt{t}^\theta}\frac{\sqrt{t}^\theta}{t^2} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{f(t)}{\sqrt{t}}\right)^\theta .t^{\frac{\theta-4}{2}} = +\infty,$$

que é uma consequência de $\theta > 4$ e a propriedade (5) do Lema 3.2.1. Tomando $(u_0, v_0) = (t\varphi, t\varphi)$ com t suficientemente grande, temos o resultado desejado. ■

3.5 Condição de Palais-Smale

Nesta seção, obteremos algumas propriedades da sequência $(PS)_c$ (veja Apêndice A, Definição $A.8$) associada ao funcional energia J.

Proposição 3.5.1 *Se* $(u_n, v_n) \subset W$ *é uma sequência de Palais-Smale para o funcional* J*, então* (u_n, v_n) *é limitada em* W*.*

Demonstração. Seja $(u_n, v_n) \subset W$ uma sequência de Palais Smale para J no nível C, isto é,

$$J(u_n, v_n) \to C \ \ e \ \ J^{'}(u_n, v_n) \to 0. \tag{3.24}$$

Assim,

$$|J^{'}(u_n, v_n)(u_n, v_n)| \leqslant \|J^{'}(u_n, v_n)\|\|(u_n, v_n)\|_W = o_n(1)\|(u_n, v_n)\|_W. \tag{3.25}$$

Por (6) do Lema $3.2.1$ e (H_2), temos que

$$\begin{aligned}
& J(u_n, v_n) - \frac{2}{\theta}J^{'}(u_n, v_n)(u_n, v_n) \\
\geqslant \ & \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n)) \\
& + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^2}[\nabla F(x, f(u_n), f(v_n))(u_n, v_n) - 2\theta F(x, f(u_n), f(v_n)] \qquad (3.26) \\
\geqslant \ & \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n)).
\end{aligned}$$

Por (3.25) e (3.26), temos

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n)) \\
\leqslant \ & C + o_n(1) + o_n(1)\|(u_n, v_n)\| \\
\leqslant \ & C + o_n(1) + o_n(1)\left(\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2)\right)^{\frac{1}{2}} + o_n(1)\int_{\mathbb{R}^2}V_1(x)f^2(u_n) \\
+ \ & o_n(1)\int_{\mathbb{R}^2}V_2(x)f^2(v_n),
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\theta} - o_n(1)\right)\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n)) \\
\leqslant \ & C + o_n(1) + o_n(1)\left(\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2)\right)^{1/2}. \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Assim, a sequência $\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2)$ é limitada. De novo, por (3.27) segue que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\theta} - o_n(1)\right)\int_{\mathbb{R}^2}\left[V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n)\right] \leqslant C + \left(\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2)\right)^{1/2}$$

e consequentemente $\left(\int_{\mathbb{R}^2}[V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n)]\right)$ é também limitada. Agora, desde que

$$\|(u_n, v_n)\|_W \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2)\right)^{1/2} + 1 + \int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n))$$

concluímos que (u_n, v_n) é limitada em W. ∎

Antes de provarmos a condição de Palais-Smale, mostremos os seguintes lemas:

Corolário 3.5.2 *Se $(u_n, v_n) \subset W$ é uma sequência de Palais-Smale para J no nível c, então*

$$Q(u_n, v_n) \leqslant \frac{4\theta}{\theta - 4}C + o_n(1). \tag{3.28}$$

Demonstração. Desde que (u_n, v_n) é limitada em W, por (3.27), obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n)) \leqslant C + o_n(1)$$

e, portanto,

$$Q(u_n, v_n) = \int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2) + \int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n)) \leqslant \frac{4\theta}{\theta - 4}C + o_n(1),$$

como afirmamos. ■

Lema 3.5.3 *Seja (u_n, v_n) uma sequência de Palais-Smale para J no nível $c \in \mathbb{R}$, com*

$$c < \frac{(\theta - 4)\pi}{2\alpha_0\theta}.$$

Se $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$ em W, então

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x, f(u_n), f(v_n))f'(u_n)(u_n - u) \to 0 \ \text{ e } \ \int_{\mathbb{R}^2} g(x, f(u_n), f(v_n))f'(v_n)(v_n - v) \to 0.$$

Demonstração. Vamos provar a primeira convergência, pois a segunda é análoga. Usando (H_1), (H_3) e (2), (7) e (11) do Lema 3.2.1, dados $\varepsilon > 0$ e $\alpha > \alpha_0$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^2} h(x, f(u_n), f(v_n))f'(u_n)(u_n - u)\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} |h(x, u_n, v_n)||f'(u_n)||u_n - u| \\
&\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |(f(u_n), f(v_n)||u_n - u| + C\int_{\mathbb{R}^2}(e^{2\alpha(f(u_n)^4 + f(v_n)^4)} - 1)|u_n - u| \\
&\leqslant \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(u_n), f(v_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_n - u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ C\left(\int_{\mathbb{R}^2}(e^{4\alpha r_1(u_n^2 + v_n^2)} - 1)\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_n - u|^{r_2}\right)^{\frac{1}{r_2}} \\
&\leqslant C\|u_n - u\|_2 + C\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(e^{8\alpha r_1 u_n^2} - 1) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(e^{8\alpha r_1 v_n^2} - 1)\right)^{\frac{1}{r_1}} \|u_n - u\|_{r_2},
\end{aligned} \tag{3.29}$$

em que $r_1, r_2 > 1$ com $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$. Se as sequências

$$\int_{\mathbb{R}^2}(e^{8r_1\alpha u_n^2} - 1) \ \text{ e } \ \int_{\mathbb{R}^2}(e^{8r_1\alpha v_n^2} - 1)$$

são limitadas, então por (3.29) concluímos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} h(x, f(u_n), f(v_n))f'(u_n)(u_n - u)\right| \to 0, \tag{3.30}$$

desde que $u_n \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$, par todo $q \geqslant 2$. Analogamente,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} g(x, f(u_n), f(v_n))f^{'}(v_n)(v_n - v)\right| \to 0.$$

Vamos provar a limitação da primeira integral em (3.30), a outra é análoga. Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2}(e^{8\alpha r_1 u_n^2} - 1) = \int_{\mathbb{R}^2}(e^{8\alpha r_1 Q_1(u_n)\widetilde{u}_n^2} - 1),$$

com $\widetilde{u}_n = \frac{u_n}{\sqrt{Q_1(u_n)}}$. Note que

$$\|\nabla \widetilde{u}_n\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \widetilde{u}_n|^2 = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} V_1(x) f^2(u_n)} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n|^2 \leqslant 1.$$

Além disso, $\|\widetilde{u}_n\|_2 \leq M < \infty$. De fato,

$$Q_1(\widetilde{u}_n) = \frac{1}{Q_1(u_n)} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} V_1(x) f^2\left(\frac{1}{\sqrt{Q_1(u_n)}} u_n\right).$$

De (3.10), obtemos

$$\begin{aligned}
Q_1(\widetilde{u}_n) &\leqslant \left(\frac{1}{Q_1(u_n)} + \frac{1}{\sqrt{Q_1(u_n)}}\right)\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n|^2 + \left(\frac{1}{Q_1(u_n)} + \frac{1}{\sqrt{Q_1(u_n)}}\right)\int_{\mathbb{R}^2} V_1(x) f^2(u_n) \\
&= \left(\frac{1}{Q_1(u_n)} + \frac{1}{\sqrt{Q_1(u_n)}}\right) Q_1(u_n) \\
&= 1 + \sqrt{Q_1(u_n)} \\
&\leqslant 1 + C.
\end{aligned}$$

Agora, por (3.19), com $v = 0$, temos que

$$\|f(u)\|_q \leqslant C\sqrt{Q_1(u)} \ \ \forall \ \ q \geqslant 2,$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ com $\int_{\mathbb{R}^2} V_1(x) f^2(u) < \infty$. Portanto,

$$\|f(\widetilde{u}_n)\|_q \leqslant C \ \ \forall \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Usando item (10) do Lema 3.2.1, concluímos que $\|\widetilde{u}_n\|_2 \leqslant C$. Agora, usando o Corolário $3.5.2$

$$Q_1(u_n)\widetilde{u}_n^2 \leqslant Q(u_n, v_n) \leqslant \frac{2\theta}{\theta - 4} c + o_n(1).$$

Como $c < \frac{(\theta-4)\pi}{4\alpha_0\theta}$, podemos escolher $\alpha > \alpha_0$, $\alpha \sim \alpha_0$, $r_1 > 1$, $r_1 \sim 1$, tal que

$$c\frac{\alpha}{\alpha_0} r_1 < \frac{(\theta - 4)\pi}{2\theta\alpha_0},$$

isto é, $c\alpha r_1 < \frac{(\theta-4)\pi}{4\theta\alpha_0}$. Para α e r_1, temos

$$8\alpha r_1 Q_1(u_n)\widetilde{u}_n^2 \leqslant 16\alpha\frac{\theta}{\theta - 4} r_1 c + o_n(1) < 4\pi$$

para n grande. Assim, pela Desigualdade de Trudinger-Moser, a limitação segue e a prova está concluída. ∎

Proposição 3.5.4 *O funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$, para todo $c < \frac{(\theta-4)\pi}{2\alpha_0\theta}$.*

Demonstração. Seja $(u_n, v_n) \in W$ uma sequência de Palais-Smale para J no nível c com $c < \frac{(\theta-4)\pi}{2\alpha_0\theta}$. Pelo Lema 3.5.1, (u_n, v_n) é limitada em W. Logo, a menos de subsequência, $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v) \in W$. Agora, aplicando o Lema 3.5.3, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x, f(u_n), f(v_n))f'(u_n)(u_n - u) \to 0 \ \text{ e } \ \int_{\mathbb{R}^2} g(x, f(u_n), f(v_n))f'(v_n)(v_n - v) \to 0. \tag{3.31}$$

Como f^2 é convexa, temos que $Q(u, v)$ é também convexo e, portanto,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}Q(u,v) - \frac{1}{2}Q(u_n, v_n) \geqslant \frac{1}{2}Q'(u_n, v_n)(u - u_n, v - v_n) \\ = \ & J'(u_n, v_n).(u - u_n, v - v_n) + \int_{\mathbb{R}^2} h(x, f(u_n), f(v_n))f'(u_n)(u_n - u) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} g(x, f(u_n), f(v_n))f'(v_n)(v_n - v). \end{aligned}$$

Assim, as convergências (3.31) e $\|J'(u_n, v_n)\| \to 0$ mostram que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right] + \int_{\mathbb{R}^2} \left[V_1(x)f^2(u) + V_2(x)f^2(v)\right] \\ \geqslant \ & \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left[|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right] + \int_{\mathbb{R}^2} \left[V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n)\right]. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Por outro lado, o Lema de Fatou implica que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (V_1(x)f^2(u) + V_2(x)f^2(v)) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n)), \tag{3.33}$$

e, desde que o funcional $\Phi =: \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2$ é fracamente semicontínua inferiormente, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2). \tag{3.34}$$

Por (3.32), (3.33) e (3.34), devemos ter, a menos de subsequência, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2) = \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (V_1(x)f^2(u_n) + V_2(x)f^2(v_n)) = \int_{\mathbb{R}^2} (V_1(x)f^2(u) + V_2(x)f^2(v)).$$

Assim, (iv) do Lema 3.3.1 implica que

$$\inf_{\xi > 0} \frac{1}{\xi} \left[1 + \int_{\mathbb{R}^2} V_1(x)f^2(\xi(u_n - u)) + V_2(x)f^2(\xi(v_n - v))\right] \to 0,$$

o que mostra que $(u_n, v_n) \to (u, v)$ em W e a prova está finalizada. ∎

3.6 Estimativa Minimax

Consideremos o nível minimax

$$c^* := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)),$$

em que

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E)) \times C([0,1], E); \gamma(0) = (0,0) \text{ e } J(\gamma(1)) < 0\}.$$

Nesta seção, vamos provar uma estimativa para o nível do passo da montanha. Mais precisamente, temos o seguinte lema:

Lema 3.6.1 *Suponha que em (H_4) tenhamos*

$$\xi \geqslant \max\left\{\xi_1, \frac{2\xi_1}{q}\left(\frac{4\xi_1(q-2)\alpha_0\theta}{2^{\frac{q}{2}}(\theta-4)q}\right)^{\frac{q-2}{2}}\right\}$$

em que $\xi_1 := 2^{\frac{q+2}{2}}(2 + M_1 + M_2)$, com $M_1 = \max_{x\in\overline{B_2(0)}} V_1(x)$ e $M_2 = \max_{x\in\overline{B_2(0)}} V_2(x)$. Então, o nível do passo da montanha c^* de J satisfaz

$$c^* < \frac{(\theta-2)\pi}{4\alpha_0\theta}.$$

Demonstração. Primeiro, seja $\varphi_0 \in C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^2)\backslash\{0\}$ tal que $0 \leqslant \varphi_0 \leqslant 1$, supp$\varphi_0 \subset B_2(0)$, $\varphi_0 \equiv 1$ em $B_1(0)$ e $|\nabla\varphi_0(x)| \leqslant 1$. Temos que se $\xi \geqslant \xi_1$, então, por (H_4), segue que

$$\begin{aligned} J(\varphi_0,\varphi_0) &< \frac{1}{2}\int_{B_2(0)}(2|\nabla\varphi_0|^2 + V_1(x)\varphi_0^2 + V_2(x)\varphi_0^2) - \xi_1\int_{B_2(0)} f^q(\varphi_0) \\ &\leqslant 4\pi + (M_1+M_2)2\pi - \frac{\xi_1\pi}{2^{\frac{q}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\frac{1}{2}\left(\int_{B_2(0)}(2|\nabla\varphi_0|^2 + V_1(x)\varphi_0^2 + V_2(x)\varphi_0^2)\right) \leqslant \frac{\xi\pi}{2^{q/2}}.$$

Dessa desigualdade e pela definição de φ_0 e a hipótese sobre ξ, um simples cálculo, mostra que

$$\begin{aligned} c^* &\leqslant \max_{t\in[0,1]} J(t\varphi_0, t\varphi_0) \\ &\leqslant \max_{t\in[0,1]}\left\{\left[\frac{t^2}{2}\left(\int_{B_2(0)}[2|\nabla\varphi_0|^2 + V_1(x)\varphi_0^2 + V_2(x)\varphi_0^2]\right)\right] - \xi\int_{B_2(0)} f^q(t\varphi_0)\right\} \\ &< \max_{t\in[0,1]}\left[\frac{\xi_1\pi t^2}{2^{q/2}} - \frac{\xi\pi t^q}{2^{q/2}}\right] \\ &\leqslant \frac{\pi}{2^{q/2}}\max_{t\in[0,1]}[\xi_1 t^2 - \xi t^q]. \end{aligned}$$

Calculando este máximo, obtemos

$$\frac{\pi}{2^{q/2}}\max_{t\geqslant 0}[\xi_1 t^2 - \xi t^q] = \frac{\pi}{2^{q/2}}\frac{\xi_1(q-2)}{q}\left(\frac{2\xi_1}{\xi q}\right)^{\frac{2}{q-2}}.$$

Observe que, se

$$\xi \geqslant \frac{2\xi_1}{q}\left[\frac{\xi_1(q-2)4\alpha_0\theta}{2^{q/2}q(\theta-4)}\right]^{\frac{q-2}{2}}$$

então concluímos que

$$c^* < \frac{(\theta-4)\pi}{4\alpha_0\theta}.$$

■

3.7 Prova do Teorema 3.1.1

Nesta seção, provamos o nosso primeiro resultado principal deste capítulo. Pelo Lema 3.4.2 e Proposição 3.5.4, mostramos que $J(u,v)$ possui a geometria do passo da montanha e satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo

$$c < (\theta-2)\pi/4\alpha_0\theta.$$

Uma vez que o nível do passo da montanha $c^* \in (0,(\theta-2)\pi/4\alpha_0\theta)$, então pelo Teorema do Passo da Montanha (veja Apêndice A, Teorema $A.3$) segue que J possui um ponto crítico $(z_0,w_0) \in W$ tal que $J(z_0,w_0) = c^*$. Portanto, $(u_0,v_0) \in E$, com $u_0 = f(z_0)$ e $v_0 = f(w_0)$ é uma solução não-trivial do Sistema (3.1).

3.8 Prova do Teorema 3.1.2

Vamos supor que a condição (H_5) é satisfeita, isto é, para cada $x \in \mathbb{R}^2$ e $t > 0$, $\frac{h(x,s,t)}{s^3}$ é não-decrescente em $s > 0$ e para, $x \in \mathbb{R}^2$ e $s > 0$, $\frac{g(x,s,t)}{t^3}$ é não-decrescente em $t > 0$. Sejam

$$b = \inf_{(u,v)\in S} J(u,v) \;\text{ e }\; S = \{(u,v) \in E; (u,v) \neq (0,0) \;\text{ e }\; J'(u,v) = 0\}.$$

Vamos mostrar que o nível minimax c^* de J satisfaz $c^* \leq b$. Seja $(u,v) \in S$ e defina $\xi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ por $\xi(t) = J(tu,tv)$. Temos que ξ é diferenciável e

$$\begin{aligned}
\xi'(t) &= J'(tu,tv).(u,v) = t\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f(tu)f'(tu)u + V_2(x)f(tv)f'(tv)v) \\
&- \int_{\mathbb{R}^2}\left[h(x,f(tu),f(tv))f'(tu)u + g(x,f(tu),f(tv))f'(tv)v\right].
\end{aligned}$$

Desde que, $J'(u,v).(u,v) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) &= -\int_{\mathbb{R}^2}(V_1(x)f(u)f'(u)u + V_2(x)f(v)f'(v)v) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2}[h(x,f(u),f(v))f'(u)u + g(x,f(u),f(v))f'(v)v]
\end{aligned}$$

e, usando as duas últimas igualdades, obtemos

$$\begin{aligned}\xi^{'}(t) = t\int_{\mathbb{R}^2} V_1(x)\left[\frac{f(tu)f^{'}(tu)}{tu} - \frac{f(u)f^{'}(u)}{u}\right]u^2 + V_2(x)\left[\frac{f(tv)f^{'}(tv)}{tv} - \frac{f(v)f^{'}(v)}{v}\right]v^2 \\ +t\left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{h(x,f(u),f(v))}{f^3(u)}\frac{f^3(u)f^{'}(u)}{u} - \frac{h(x,f(tu),f(tv))}{f^3(tu)}\frac{f^3(tu)f^{'}(tu)}{tu}\right]u^2 \\ +t\left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{g(x,f(u),f(v))}{f^3(v)}\frac{f^3(v)f^{'}(v)}{v} - \frac{g(x,f(tu),f(tv))}{f^3(tv)}\frac{f^3(tv)f^{'}(tv)}{tv}\right]v^2.\end{aligned}$$

Usando as propriedades de f, pode-se mostrar que $f(s)f^{'}(s).s^{-1}$ é decrescente para $s > 0$. Logo, pela hipótese (H_5), segue que $\xi^{'}(t) > 0$ para $0 < t < 1$, $\xi^{'}(t) < 0$ para $t > 1$ e $\xi^{'}(1) = 0$. Isto implica que

$$J(u,v) = \max_{t\geqslant 0} J(tu,tv).$$

Agora, defina $\gamma_0 : [0,1] \to W$, $\gamma_0(t) = (\gamma_1,\gamma_2)$ com $\gamma_1(t) = tt_0u$ e $\gamma_2(t) = tt_0v$, em que t_0 é tal que $J(t_0u,t_0v) < 0$, temos $\gamma_0 \in \Gamma$ e, portanto,

$$c^* \leqslant \max_{t\geqslant 0} J(\gamma_0(t)) \leqslant \max_{t\geqslant 0} J(tu,tv) = J(u,v).$$

Desde que $(u,v) \in S$ é arbitrário, temos $c^* \leqslant b$.

4 EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA SISTEMAS KIRCHHOFF-SCHRÖNDIGER COM CRESCIMENTO CRÍTICO EXPONENCIAL

4.1 Introdução

Neste capítulo, vamos estudar a existência de soluções de energia mínima para a seguinte classe de sistemas gradientes envolvendo equações Kirchhoff-Schrödinger

$$\begin{cases} m\left(\|u\|^2\right)[-\Delta u+u] = \lambda F_u(u,v), & x\in\mathbb{R}^2 \\ l\left(\|v\|^2\right)[-\Delta v+v] = \lambda F_v(u,v), & x\in\mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{4.1}$$

em que $\lambda > 0$, $m, l : [0,+\infty] \to [0,+\infty]$ são funções contínuas, $\|.\|$ denota a norma usual do Espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^2)$ e $F \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $\nabla F = (F_u, F_v)$. A seguir, vamos introduzir as hipóteses do nosso problema. Sejam $M(t) := \int_0^t m(s)ds$ e $L(t) := \int_0^t l(s)ds$. Vamos considerar as seguintes hipóteses sobre $m(t)$ e $l(t)$:

(H_1) Existem constantes $m_0, l_0 > 0$ tais que

$$m(t) \geqslant m_0 \text{ e } l(t) \geqslant l_0 \text{ para todo } t \geqslant 0;$$

(H_2) $M(t)$ e $L(t)$ são convexas e

$$M(t) \geqslant \frac{1}{2}m(t)t \text{ e } L(t) \geqslant \frac{1}{2}l(t)t, \quad \text{para todo } t \geqslant 0.$$

Assumiremos que as não-peculiaridades $F_u, F_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ têm crescimento crítico exponencial. Mais precisamente,

(F_0) Existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{u,v\to+\infty}\frac{|F_u(u,v)|}{e^{\alpha(u^2+v^2)}} = \begin{cases} 0, & \forall\ \alpha>\alpha_0, \\ +\infty, & \forall\ \alpha<\alpha_0, \end{cases}$$

e

$$\lim_{u,v\to+\infty}\frac{|F_v(u,v)|}{e^{\alpha(u^2+v^2)}} = \begin{cases} 0, & \forall\ \alpha>\alpha_0, \\ +\infty, & \forall\ \alpha<\alpha_0. \end{cases}$$

Além disso, supomos as seguintes hipóteses:

(F_1) $\displaystyle\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{F_u(u,v)}{|(u,v)|} = \lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{F_v(u,v)}{|(u,v)|} = 0$

(F_2) Existe $\theta > 4$ tal que

$$\theta F(u,v) \leq U\nabla F(u,v) \text{ para todo } (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

(F_3) Existem $\xi > 0$ e $q > 4$ tais que $F(t,t) \geqslant \xi t^q$ para todo $t \in [0,1]$.

Vamos denotar $E := H^1_{rad}(\mathbb{R}^2) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$ munido com a norma $\|(u,v)\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. O par $(u,v) \in E$ é dito ser uma solução (no sentido fraco) do sistema (4.1) se

$$m(\|u\|^2)\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla u\nabla\varphi + u\varphi) + l(\|v\|^2)\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla v\nabla\psi + u\psi) - \lambda\int_{\mathbb{R}^2}[F_u(u,v)\varphi - \lambda F_v(u,v)\psi] = 0$$

para todo $(\varphi,\psi) \in E$. Agora estamos em posição de formular nosso primeiro resultado principal deste capítulo.

Teorema 4.1.1 *Suponha que (H_1), (H_2), $(F_1) - (F_3)$ sejam satisfeitas e F_u, F_v tenham crescimento crítico exponencial. Então, para todo $\lambda > 0$, o Sistema (4.1) admite, pelo menos, uma solução não-trivial, desde que $\xi > 0$, dado em (F_3), seja suficientemente grande.*

Também estamos interessados na existência de solução de energia mínima, isto é, uma solução cuja energia é mínima dentre todas as outras energias de soluções não-triviais. Para tanto, vamos substituir a hipótese (H_2) por uma hipótese mais forte, a saber:

$(\widehat{H_2})$ M, L são funções convexas e $\frac{m(t)}{t}$, $\frac{l(t)}{t}$ são não-crescentes para $t > 0$;

Além disso, assumimos a seguinte hipótese adicional sobre a não-leariedade.

(F_4) Para cada $(u,v) \neq (0,0)$, a aplicação $t \longmapsto \frac{\nabla F(tu,tv)(u,v)}{t^3}$ é não-decrescente para $t > 0$.

Agora, estamos prontos para apresentar nosso segundo resultado principal:

Teorema 4.1.2 *Suponha que (H_1), $(\widehat{H_2})$, $(F_1) - (F_4)$ são satisfeitas e F_u, F_v tenham crescimento crítico exponencial. Então, para todo $\lambda > 0$, o Sistema (4.1) admite, pelo menos, uma solução de energia mínima, desde que $\xi > 0$, dado em (F_3), seja suficientemente grande.*

Nosso terceiro resultado principal, garante que se F_u, F_v são funções ímpares, então o números de soluções aumenta quando o parâmetro λ torna-se grande.

Teorema 4.1.3 *Suponha que (H_1), (H_2), $(F_1) - (F_3)$ são satisfeitas e F_u, F_v são funções ímpares com crescimento crítico exponencial. Então, para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $\Lambda_m > 0$ tal que o Sistema (4.1) admite, pelo menos, m pares de soluções não-triviais, desde que $\lambda > \Lambda_m$.*

Observação 4.1.4 *Exemplos típicos de funções $m, \ell : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ que verificam nossas hipóteses são dadas por $m(t) = a_1 + b_1 t$ e $\ell(t) = a_2 + b_2 t$, em que $a_1, a_2 \geq 0$ e $b_1, b_2 > 0$. Este é um exemplo clássico que foi considerado em (24) para o caso escalar. Um exemplo de função $F(u,v)$ satisfazendo nossas hipóteses é dado por*

$$F(u,v) = u^{2\eta} + (e^{u^2} - 1)u^{2\eta} + v^{2\eta} + (e^{v^2} - 1)v^{2\eta}$$

para algum $\eta > 2$.

Observação 4.1.5 *Vale a pena mencionar que se* $F_u(0,u)$, $F_v(v,0) > 0$ *para todo* $u, v \neq 0$, *então uma solução não-trivial* $(u_0, v_0) \in E$ *para o Sistema* 4.1 *não é semitrivial, isto é,* $u_0 \neq 0$ *e* $v_0 \neq 0$. *Além disso, sob hipóteses adicionais adequadas, podemos adaptar algumas idéias de (36) para obter uma solução de energia mínima positiva.*

Observação 4.1.6 *Para superar a dificuldade imposta pela falta de compacidade, provamos que o valor do nível minimax associado ao Sistema* (4.1) *está relacionado com o parâmetro* ξ *introduzido em* (F_3). *No Teorema* $4.1.1$ *e no Teorema* $4.1.2$ *provamos a existência de soluções desde que* ξ *seja suficientemente grande. Precisamente, consideramos*

$$\xi \geqslant \xi_0 =: \max\left\{\xi_1, \left(\frac{2\xi_1}{q}\right)^{\frac{q}{2}} \left(\frac{\alpha_0\lambda(q-2)}{\nu_0(\theta-4)}\right)^{\frac{q-2}{2}}\right\},$$

em que $\xi_1 := [M(8\pi)+L(8\pi)]/(2\lambda\pi)$ *e* $\nu_0 := \min\{m_0, l_0\}$. *Se* $\xi > \xi_0$, *então somos capazes de usar a desilgualdade de Trundiger-Moser para provar que o funcional energia associado a* (4.1) *satisfaz a condição de Palais-Smale para algum* $c \in \mathbb{R}$. *A respeito da multiplicidade do Teorema* $4.1.3$, *embora o parâmetro* $\xi > 0$ *seja arbitrário, o número de soluções está relacionado ao parâmetro* λ.

4.2 Estrutura Variacional

Nesta seção, introduzimos a estrutura variacional para estudar o Sistema (4.1). Associado ao Sistema (4.1), temos o funcional energia $I : E \to \mathbb{R}$ definido por:

$$I(u,v) := \frac{1}{2}M(\|u\|^2) + \frac{1}{2}L(\|v\|^2) - \lambda\int_{\mathbb{R}^2} F(u,v).$$

Tendo em vista (F_0) e (F_1), dados $\varepsilon > 0$, $r \geqslant 1$ e $\alpha > \alpha_0$, existe $C = C(\varepsilon, r, \alpha) > 0$ tal que

$$|F_u(u,v)| + |F_v(u,v)| \leqslant \varepsilon\,|(u,v)| + C(e^{\alpha(u^2+v^2)} - 1)\,|(u,v)|^{r-1}, \tag{4.2}$$

o que implica que

$$|F(u,v)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|(u,v)|^2 + C(e^{\alpha(u^2+v^2)} - 1)|(u,v)|^r \tag{4.3}$$

para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Note que, se $1/p + 1/q = 1$, então

$$ab - 1 \leqslant \frac{1}{p}(a^p - 1) + \frac{1}{q}(b^q - 1) \ \text{ para todo } \ a, b > 0. \tag{4.4}$$

Em virtude da Desigualdade de Trudinger-Moser (veja apêndice A, Lema $A.2$) e (4.4), temos

$$\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha(u^2+v^2)} - 1) \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(e^{2\alpha u^2} - 1) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(e^{2\alpha v^2} - 1) < \infty.$$

Assim, o funcional energia I está bem definido. Além disso, usando argumentos, pode-se mostrar que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ e a sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} I'(u,v).(\varphi,\psi) &= m(\|u\|^2)\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla u\nabla\varphi + u\varphi) + l(\|v\|^2)\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla v\nabla\psi + v\psi) \\ &- \lambda\int_{\mathbb{R}^2}F_u(u,v)\varphi - \lambda\int_{\mathbb{R}^2}F_v(u,v)\psi \end{aligned}$$

para $(u,v),(\varphi,\psi)\in E$. Assim, pontos críticos de I são precisamente soluções do Sistema (4.1).

4.3 Geometria do Funcional $I(u,v)$

Nesta seção, vamos mostrar que o funcional I possui a geometria do passo da montanha. Antes disso, vamos obter o seguinte lema auxiliar:

Lema 4.3.1 *Sob as hipóteses (F_0) e (F_1), dados $q \geqslant 2$ e $\alpha > \alpha_0$ para $\|(u,v)\| \leqslant \rho < \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, obtemos*

$$\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha(u^2+v^2)}-1)|(u,v)|^q \leqslant C\|(u,v)\|^q \tag{4.5}$$

para algum $C = C(q,2) > 0$.

Demonstração. Por (4.4) e a Desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha(u^2+v^2)}-1)|(u,v)|^q \leqslant C\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(e^{4\alpha u^2}-1)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(e^{4\alpha v^2}-1)\right]^{1/2}\|(u,v)\|^q.$$

Desde que $\|(u,v)\| \leqslant \rho < \sqrt{\pi/\alpha}$, segue que $4\alpha\|u\|^2 < 4\pi$ e $4\alpha\|v\|^2 < 4\pi$. Logo, pela Desigualdade de Trudinger-Moser

$$\int_{\mathbb{R}^2}(e^{4\alpha u^2}-1) \leqslant \int_{\mathbb{R}^2}(e^{4\alpha\|u\|^2\left(\frac{u}{\|u\|}\right)^2}-1) \leqslant C_1$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2}(e^{4\alpha v^2}-1) \leqslant \int_{\mathbb{R}^2}(e^{4\alpha\|v\|^2\left(\frac{v}{\|v\|}\right)^2}-1) \leqslant C_2,$$

o que facilmente implica (4.5) e a prova está feita. ∎

Agora provaremos a Geometria do Passo da Montanha.

Lema 4.3.2 *Suponha que as condições $(H_1)-(H_2)$ e $(F_0)-(F_3)$ sejam satisfeitas. Então, vale os seguintes fatos:*

(I_1) Existem $\tau > 0$ e $\rho > 0$ tais que $I(u,v) \geqslant \tau$ se $\|u\| = \rho$;

(I_2) Existe $e \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$ com $\|(e,e)\| > \rho$ tal que $I(e,e) < 0$.

Demonstração. Dados $0 < \varepsilon < \min\{m_0, l_0\}$, $q > 2$ e $\alpha > \alpha_0$, segue por (H_1) e (4.3) que

$$I(u,v) \geqslant \frac{1}{2}(\min\{m_0,l_0\} - \lambda\varepsilon)\|(u,v)\|^2 - C\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha(u^2+v^2)} - 1)|(u,v)|^q.$$

Considerando $\|(u,v)\| = \rho < \sqrt{\pi/\alpha}$, pelo Lema 4.3.1, obtemos

$$I(u,v) \geqslant \frac{1}{2}(\min\{m_0,l_0\} - \lambda\varepsilon)\rho^2 - C\rho^q.$$

Agora, tomando $0 < \rho < \sqrt{\pi/\alpha}$ suficientemente pequeno tal que $(\min\{m_0,l_0\} - \lambda\varepsilon)/2 - C\rho^{q-2} > 0$, concluímos que

$$I(u,v) \geqslant \tau := \rho^2\left[\frac{1}{2}(\min\{m_0,l_0\} - \lambda\varepsilon) - C\rho^{q-2}\right], \ \text{ para } \ \|(u,v)\| = \rho,$$

o que prova (I_1). Para provar (I_2), sejam $\varphi \in C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^2)\backslash\{0\}$ tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ em $\mathbb{R}^2$ e $K = \text{supp}(\varphi)$. Pela condição (F_3), segue que

$$I(t\varphi,t\varphi) \leqslant \frac{1}{2}M(t^2\|\varphi\|^2) + \frac{1}{2}L(t^2\|\varphi\|^2) - \lambda\xi\int_K t^q\varphi^q. \tag{4.6}$$

Em vista de (H_2) segue que $M(t)/t^2$ é não-crescente para $t > 0$. Assim, para $t \geqslant 1$ temos $M(t) \leqslant M(1)t^2$. Consequetemente, $m(t) \leqslant 2M(1)t$ para todo $t \geqslant 1$. Portanto, existem $a_0, a_1 > 0$ tais que

$$m(t) \leqslant a_0 + a_1 t, \ \text{ para todo } \ t \geqslant 0. \tag{4.7}$$

Analogamente, existem $b_0, b_1 > 0$ tais que

$$l(t) \leqslant b_0 + b_1 t, \ \text{ para todo } \ t \geqslant 0. \tag{4.8}$$

As estimativas acima implicam que

$$M(t) \leqslant a_0 t + \frac{a_1}{2}t^2 \ \ e \ \ L(t) \leqslant b_0 t + \frac{b_1}{2}t^2 \ \text{ para todo } \ t \geqslant 0. \tag{4.9}$$

Combinando (4.6) e (4.9), obtemos

$$I(t\varphi,t\varphi) \leqslant \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2(a_0+b_0) + \frac{t^4}{4}\|\varphi\|^4(a_1+b_1) - \lambda\varepsilon t^q\int_K \varphi^q.$$

Desde que $q > 4$, concluímos que $I(t\varphi,t\varphi) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Portanto, (I_2) é provada tomando $e = t\varphi$ para $t > 0$ suficientemente grande. ∎

4.4 Sequência de Palais-Smale para $I(u,v)$

Nesta seção, obteremos algumas propriedades da sequência $(PS)_c$ (veja Apêndice A, Definição $A.8$) associada ao funcional energia I.

Lema 4.4.1 *Se $(u_n,v_n) \subset E$ é uma sequência de Palais-Smale para o funcional energia I, então (u_n,v_n) é limitada em E.*

Demonstração. Seja (u_n, v_n) uma sequência $(PS)_c$ para I. Por (H_1) e (H_2), obtemos

$$\begin{aligned} c + o_n(1)\|(u_n, v_n)\| &\geqslant I(u_n, v_n) - \frac{1}{\theta} I'(u_n, v_n)(u_n, v_n) \\ &\geqslant \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right) m(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right) l(\|v_n\|^2)\|v_n\|^2 \\ &\quad + \frac{\lambda}{\theta} \int_{\mathbb{R}^2} [\nabla F(u_n, v_n).(u_n, v_n) - \theta F(u_n, v_n)], \end{aligned}$$

que juntamente com (H_1) e (F_2) implica que

$$c + o_n(1)\|(u_n, v_n)\| \geqslant \left(\frac{\theta - 4}{4\theta}\right) \nu_0 \|(u_n, v_n)\|^2, \tag{4.10}$$

em que $\nu_0 := \min\{m_0, l_0\}$. Portanto, (u_n, v_n) é limitada em E. ■

Corolário 4.4.2 *Se (u_n, v_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I, então*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|(u_n, v_n)\|^2 \leqslant \frac{4\theta}{(\theta - 4)\nu_0} c. \tag{4.11}$$

Demonstração. É uma consequência imediata de (4.10), desde que (u_n, v_n) é limitada em E. ■

Antes de provar a condição de Palais-Smale, mostremos o seguinte lema:

Lema 4.4.3 *Seja (u_n, v_n) uma sequência de Palais-Smale no nível c para o funcional I com*

$$c < \frac{\nu_0(\theta - 4)\pi}{2\alpha_0\theta}. \tag{4.12}$$

Se $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$ fracamente em E, então

$$\int_{\mathbb{R}^2} F_u(u_n, v_n)(u_n - u) \to 0 \;\text{ e }\; \int_{\mathbb{R}^2} F_v(u_n, v_n)(v_n - v) \to 0.$$

Demonstração. Vamos provar a primeira convergência, pois a segunda é análoga. Seja $\varepsilon > 0$, $\alpha > \alpha_0$, $\sigma > 1$ para ser escolhido depois e $1/\sigma + 1/\sigma' = 1$. Por (4.2) e a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} F_u(u_n, v_n)(u_n - u_0)\right| \leqslant \varepsilon \|(u_n, v_n)\|_{L^2} \|u_n - u_0\|_{L^2} + C\left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha\sigma(u^2+v^2)} - 1)\right]^{1/\sigma} \|u_n - u_0\|_{L^{\sigma'}}.$$

Por (4.4), Lema 4.4.1 e a imersão compacta $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{\sigma'}(\mathbb{R}^2)$, obtemos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} F_u(u_n, v_n)(u_n - u_0)\right| \leqslant \varepsilon C + C\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (e^{2\alpha\sigma(u_n^2)} - 1) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (e^{2\alpha\sigma(v_n^2)} - 1)\right]^{1/\sigma} o_n(1). \tag{4.13}$$

Para concluirmos nossa prova, resta-nos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{2\alpha\sigma u_n^2} - 1) \leqslant C \;\text{ e }\; \int_{\mathbb{R}^2} (e^{2\alpha\sigma v_n^2} - 1) \leqslant C. \tag{4.14}$$

Vamos provar a limitação da primeira integral, a outra é idêntica. Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2}(e^{2\alpha\sigma u_n^2}-1)\leqslant\int_{\mathbb{R}^2}(e^{2\alpha\sigma\|(u_n,v_n)\|^2\left(\frac{(u_n)}{\|u_n\|}\right)^2}-1).$$

Por (4.11) e a hipótese (4.12), segue que para algum $\delta>0$ temos $2\alpha_0\|(u_n,v_n)\|^2\leqslant 4\pi-\delta$ para $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande. Assim, para $\alpha>\alpha_0$ perto de α_0, $\sigma>1$ próximo de 1, temos $2\alpha\sigma\|(u_n,v_n)\|^2<4\pi$, para $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande. Assim, a limitação uniforme de (4.4) segue pela Desigualdade de Trundiger-Moser. De (4.13) e (4.14) implica a primeira convergência de (4.4). Portanto a prova está concluída. ■

Proposição 4.4.4 *O funcional energia $I(u,v)$ satisfaz a condição de Palais-Smale em qualquer nível $c<\frac{\nu_0(\theta-4)\pi}{2\alpha_0\theta}$.*

Demonstração. Desde que $M(t)$ e $L(t)$ são convexas, temos que o funcional

$$\Phi(u,v):=\frac{1}{2}M(\|u\|^2)+\frac{1}{2}L(\|v\|^2)$$

é convexo. Seja $(u_n,v_n)\subset E$ uma sequência $(PS)_c$ para I com $c<\frac{\nu_0(\theta-4)\pi}{2\alpha_0\theta}$. Temos que (u_n,v_n) é limitada em E e a menos de subsequência,

$$(u_n,v_n)\rightharpoonup(u,v)\ \text{ fracamente em }\ E.$$

Agora, aplicando o Lema $4.4.3$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2}F_u(u_n,v_n)(u_n-u)\to 0\quad\int_{\mathbb{R}^2}F_v(u_n,v_n)(v_n-v)\to 0.$$

Como $\Phi(u,v)$ é convexo, obtemos

$$\begin{aligned}&\Phi(u,v)-\Phi(u_n,v_n)\geqslant\Phi^{'}(u_n,v_n)(u-u_n,v-v_n)\\=\ &I^{'}(u_n,v_n).(u-u_n,v-v_n)+\int_{\mathbb{R}^2}F_u(u_n,v_n)(u-u_n)+\int_{\mathbb{R}^2}F_v(u_n,v_n)(v-v_n),\end{aligned}$$

ou seja, $\Phi(u,v)\geqslant\Phi(u_n,v_n)+o_n(1)$. Daí, tomando o $\liminf$, segue que

$$\frac{1}{2}M(\|u\|^2)+\frac{1}{2}L(\|v\|^2)\geqslant\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}M(\|u_n\|^2)+\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}L(\|v_n\|^2).\tag{4.15}$$

Por outro lado, desde que $u_n\rightharpoonup u$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$ e $v_n\rightharpoonup v$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$ e como $\frac{1}{2}M(\|u\|^2)$ e $\frac{1}{2}L(\|v\|^2)$ são também convexos, eles são fracamente semicontínuos inferiormente. Assim,

$$\frac{1}{2}M(\|u\|^2)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}M(\|u_n\|^2)\ \text{ e }\ \frac{1}{2}L(\|v\|^2)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}L(\|v_n\|^2).\tag{4.16}$$

Por (4.15) e (4.16), obrigatoriamente, a menos de subsequência, obtemos

$$\frac{1}{2}M(\|u_n\|^2)\to\frac{1}{2}M(\|u\|^2)\ \text{ e }\ \frac{1}{2}L(\|v_n\|^2)\to\frac{1}{2}L(\|v\|^2).$$

Como $M(t)$ e $L(t)$ são estritamente crescentes em $t>0$, concluímos que $\|u_n\|^2\to\|u\|^2$ e $\|v_n\|^2\to\|v\|^2$, quando $n\to+\infty$. Portanto, $u_n\to u$ e $v_n\to v$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$, de onde

$$(u_n,v_n)\to(u,v)\ \text{ em }\ E$$

e a prova está finalizada. ■

4.5 Estimativa do Nível Minimax

Nesta seção, vamos provar uma estimativa para o nível do passo da montanha do funcional I. Mais precisamente, temos o seguinte lema:

Lema 4.5.1 *Suponha que em (F_3) tenhamos*

$$\xi \geqslant \max\left\{\xi_1, \left(\frac{2\xi_1}{q}\right)^{\frac{q}{2}} \left(\frac{\alpha_0\lambda(q-2)}{\nu_0(\theta-4)}\right)^{\frac{q-2}{2}}\right\},$$

em que $\xi_1 := \frac{M(8\pi)+L(8\pi)}{2\lambda\pi}$ e $\nu_0 := \min\{m_0, l_0\}$. Então, o nível do passo da montanha c^* de I satisfaz

$$c^* < \frac{\nu_0(\theta-4)\pi}{2\alpha_0\theta}.$$

Demonstração. Primeiramente, seja $\varphi \in C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^2)\backslash\{0\}$ tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1, \operatorname{supp}(\varphi) \subset B_2(0)$, $\varphi \equiv 1$ em $B_1(0)$ e $|\nabla\varphi| \leqslant 1$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2_{H^1_{rad}} = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\varphi|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \varphi^2 &= \int_{B_2(0)} |\nabla\varphi|^2 + \int_{B_2(0)} \varphi^2 \\
&\leqslant 2|B_2(0)| = 8\pi,
\end{aligned}$$

e, além disso, se $\xi \geqslant \xi_1$ então

$$\begin{aligned}
I(\varphi,\varphi) &< \frac{1}{2}M(8\pi) + \frac{1}{2}L(8\pi) - \lambda\xi_1 \int_{\mathbb{R}^2} \varphi^q \\
&= \frac{M(8\pi)+L(8\pi)}{2} - \lambda\xi_1\pi = 0.
\end{aligned}$$

Assim, se definirmos $\gamma : [0,1] \to E$ por $\gamma(t) = (t\varphi, t\varphi)$ então $\gamma \in \Gamma := \{\gamma \in C([0,1], E); \gamma(0) = (0,0) \text{ e } I(\gamma(1)) < 0\}$. Portanto, por definição,

$$\begin{aligned}
c^* &\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} I(\gamma(t)) = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left[\frac{1}{2}M(t^2\|\varphi\|^2) + \frac{1}{2}L(\|t^2\|\varphi\|^2) - \lambda\int_{\mathbb{R}^2} F(t\varphi, t\varphi)\right] \\
&\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left[\left(\frac{M(8\pi)+L(8\pi)}{2}\right)t^2 - \lambda\xi t^q \int_{B_1} \varphi^q\right] \\
&\leqslant \lambda\pi \max_{t\geqslant 0}[\xi_1 t^2 - \xi t^q].
\end{aligned}$$

Por cálculos elementares, temos que

$$\max_{t\geqslant 0}[\xi_1 t^2 - \xi t^q] = \frac{1}{\xi^{2/(q-2)}}(q-2)2^{\frac{2}{q-2}}\left(\frac{\xi_1}{q}\right)^{\frac{q}{q-2}}.$$

Assim,

$$c^* < \frac{\lambda\pi}{\xi^{\frac{2}{q-2}}}(q-2)2^{\frac{2}{q-2}}\left(\frac{\xi_1}{q}\right)^{\frac{q}{q-2}}.$$

Suponha que

$$\xi > \left(\frac{2\xi_1}{q}\right)^{\frac{q}{2}}\left(\frac{\alpha_0\theta(q-2)}{\nu_0(\theta-4)\pi}\right)^{\frac{2}{q-2}},$$

então

$$c^* < \frac{\nu_0(\theta-4)\pi}{2\alpha_0\theta}.$$

■

4.6 Prova do Teorema 4.1.1

Pelo Lema 4.3.2 e Proposição 4.4.4, mostramos que $I(u,v)$ possui a geometria do passo da montanha e satisfaz a condição $(PS)_c$, respectivamente, para todo

$$c < \nu_0(\theta - 4)\pi/2\alpha_0\theta.$$

Desde que o nível do passo da montanha $c^* \in (-\infty, \nu_0(\theta-4)\pi/2\alpha_0\theta)$, então, pelo Teorema do Passo da Montanha, segue que I possui um ponto crítico $(u_0, v_0) \in E$ tal que $I(u_0,v_0) = c^*$, o qual é uma solução fraca do Sistema (4.1), desde que valha o Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais.

4.7 Prova do Teorema 4.1.2

Nesta seção, lidamos com o Sistema (4.1), mas substituimos a hipótese (H_2) por $(\widehat{H_2})$ e consideramos (F_4). Vamos definir

$$b := \inf_{(u,v)\in S} I(u,v), \text{ quando } S := \{(u,v) \in E; (u,v) \neq (0,0) \text{ e } I^{'}(u,v) = 0\}.$$

Vamos mostrar que o nível minimax c^* de I satisfaz $c^* \leqslant b$. Seja $(u,v) \in S$ e defina $\xi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ por $\xi(t) = I(tu,tv)$. Temos que ξ é diferenciável e

$$\begin{aligned} \xi^{'}(t) &= I^{'}(tu,tv).(u,v) = m(t^2\|u\|^2)t\|u\|^2 + l(t^2\|v\|^2)t\|v\|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^2} F_u(tu,tv)u \\ &- \lambda\int_{\mathbb{R}^2} F_v(tu,tv)v. \end{aligned}$$

Desde que $I^{'}(u,v).(u,v) = 0$, isto é,

$$m(\|u\|^2)\|u\|^2 + l(\|v\|^2)\|v\|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^2} \nabla F(u,v).(u,v) = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \xi^{'}(t) = t^3\|u\|^4\left[\frac{m(t^2\|u\|^2)}{t^2\|u\|^2} - l\frac{(\|u\|^2)}{\|u\|^2}\right] + t^3\|v\|^4\left[\frac{p(t^2\|v\|^2)}{t^2\|v\|^2} - l\frac{(\|v\|^2)}{\|v\|^2}\right] \\ +\lambda t^3\left[\int_{\mathbb{R}^2} \nabla F(u,v)(u,v) - \int_{\mathbb{R}^2}\frac{\nabla F(tu,tv)(u,v)}{t^3}\right]. \end{aligned}$$

Observe que $\xi^{'}(1) = 0$ e, por $(\widehat{H_2})$ e (F_4), segue que $\xi^{'}(t) \geqslant 0$ para $0 < t < 1$ e $\xi^{'}(t) \leqslant 0$ para $t > 1$. Assim,

$$I(u,v) = \max_{t\geqslant 0} I(tu,tv).$$

Agora, definindo $\gamma_0 : [0,1] \to E$ por $\gamma_0(t) = tt_0(u,v)$, em que t_0 é tal que $I(t_0u,t_0v) < 0$, temos $\gamma_0 \in \Gamma$. Portanto

$$c^* \leqslant \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_0(t)) \leqslant \max_{t\geqslant 0} I(tu,tv) = I(u,v).$$

Desde que $u \in S$ é arbitrário, temos $c^* \leqslant b$ e terminamos a prova.

4.8 Prova do Teorema $4.1.3$

Nesta seção, estamos interessados na multiplicidade de soluções para o Sistema (4.1). Para provar o Teorema $4.1.3$, vamos usar a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha Simétrico (veja o Apêndice A, Teorema $A.7$).

Para provar que o funcional energia I satisfaz as hipóteses do teorema anterior, usamos o seguinte lema:

Lema 4.8.1 *Para algum $\lambda > 0$, seja $h_\lambda : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$h_\lambda(t) := at^2 + bt^4 - \lambda c t^q,$$

em que $a, b, c > 0$ e $q > 4$. Se $A_\lambda := \max_{t\geq 0} h_\lambda(t)$, então $A_\lambda \in (0, +\infty)$ para todo $\lambda > 0$ e $\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = 0$.

Demonstração. Não é díficil ver que $h_\lambda(t) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e $\lim_{t\to+\infty} h_\lambda(t) = -\infty$. Assim, $A_\lambda < +\infty$. Além disso, para algum $\lambda > 0$, existe $t_0 = t_0(\lambda) > 0$ tal que $A_\lambda = h_\lambda(t_0)$. Portanto,temos

$$0 < A_\lambda \leqslant \begin{cases} (a+b)t_0^2 - \lambda c t_0^q, & \text{se} \quad t_0 \leqslant 1, \\ (a+b)t_0^4 - \lambda c t_0^q, & \text{se} \quad t_0 > 1. \end{cases}$$

Este fato implica que

$$A_\lambda \leqslant \min\{\max_{t\geq 0} h_{1,\lambda}(t), \max_{t\geq 0} h_{2,\lambda}(t)\},$$

em que $h_{1,\lambda}(t) := (a+b)t^2 - \lambda c t^q$ e $h_{2,\lambda}(t) := (a+b)t^4 - \lambda c t^q$. Por cálculos padrões, temos que

$$\max_{t\geq 0} h_{1,\lambda}(t) = \left(\frac{q-2}{2}\right)\left[\frac{2(a+b)}{q}\right]^{\frac{q}{q-2}} \frac{c^{\frac{2}{2-q}}}{\lambda^{\frac{2}{q-2}}}$$

e

$$\max_{t\geq 0} h_{2,\lambda}(t) = \left(\frac{q-4}{4}\right)\left[\frac{4(a+b)}{q}\right]^{\frac{q}{q-4}} \frac{c^{\frac{4}{4-q}}}{\lambda^{\frac{4}{q-4}}}.$$

Desde que $q > 4$, temos

$$\lim_{\lambda\to+\infty} h_{1,\lambda}(t) = 0 \ \text{ e } \ \lim_{\lambda\to+\infty} h_{2,\lambda}(t) = 0,$$

que implica que $\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = 0$. ■

Demonstração do Teorema $4.1.3$**.** Para algum $m \in \mathbb{N}$, seja V um subespaço de dimensão finita de E definido por

$$V := [(\varphi_1, \varphi_1), (\varphi_2, \varphi_2), ..., (\varphi_m, \varphi_m)],$$

em que $\{\varphi_i\}_{i=1}^m \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ é uma coleção de funções suaves com suporte compacto. Vale a pena mencionar que os resultados obtidos nas Seções 3 e 4 são para algum $\lambda > 0$. Assim, tendo em vista o Lema $4.3.2$, segue que I satisfaz a condição (J_1). Desde que em V as normas são equivalentes, existem $c_m > 0$ dependendo de m, tais que

$$I(u,v) \leqslant \frac{1}{2}M(\|u\|^2) + \frac{1}{2}L(\|u\|^2) - \lambda c_m \|u\|^q \text{ para todo } (u,v) \in V,$$

em que usamos a hipótese (F_3). De (4.9), obtemos

$$I(u,v) \leqslant (a_0 + b_0)\|u\|^2 + \frac{(a_1 + b_1)}{2}\|u\|^4 - \lambda c_m \|u\|^q \text{ para todo } (u,v) \in V.$$

Considerando $a = a_0 + b_0, \;\; b = (a_1 + b_1)/2, \;\; c = c_m$ e $t = \|u\|$ no Lema $4.8.1$, concluímos que

$$\max_{(u,v)\in V} I(u,v) \leqslant A_\lambda,$$

o qual implica que I satisfaz a condição (J_2). Além disso, $\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = 0$. Assim, existe $\Lambda_m > 0$ tal que

$$A_\lambda < \frac{\nu_0(\theta - 4)\pi}{2\alpha_0\theta}, \text{ para todo } \lambda > \Lambda_m.$$

Portanto, em virtude da Proposição $4.4.4$, somos capazes de aplicar o Teorema $A.0.7$ (Apêndice A) para obter m pares de pontos críticos não-triviais de I. ■

REFERÊNCIAS

1 CAO, D. Nontrivial solution of semilinear elliptic equations with critical exponent in r. **Communications in Partial Differential Equations**, Taylor & Francis, v. 17, n. 3-4, p. 407–435, 1992. 10, 16, 67

2 AKHMEDIEV, N.; ANKIEWICZ, A. Novel soliton states and bifurcation phenomena in nonlinear fiber couplers. **Physical review letters**, APS, v. 70, n. 16, p. 2395, 1993. 10

3 BERESTYCKI, H.; LIONS, P.-L. Nonlinear scalar field equations, i existence of a ground state. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Springer, v. 82, n. 4, p. 313–345, 1983. 10, 67, 68

4 STRAUSS, W. A. Existence of solitary waves in higher dimensions. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 55, n. 2, p. 149–162, 1977. 10

5 BERESTYCKI, H.; LIONS, P.-L. Nonlinear scalar field equations, ii existence of infinitely many solutions. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Springer, v. 82, n. 4, p. 347–375, 1983. 10

6 RABINOWITZ, P. H. On a class of nonlinear schrödinger equations. **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)**, Springer, v. 43, n. 2, p. 270–291, 1992. 10

7 AMBROSETTI, A. Remarks on some systems of nonlinear schrödinger equations. **Journal of Fixed Point Theory and Applications**, Springer, v. 4, n. 1, p. 35–46, 2008. 11

8 AMBROSETTI, A.; CERAMI, G.; RUIZ, D. Solitons of linearly coupled systems of semilinear non-autonomous equations on rn. **Journal of Functional Analysis**, Academic Press, v. 254, n. 11, p. 2816–2845, 2008. 11

9 CHEN, Z.; ZOU, W. On coupled systems of nonlinear schrödinger equations. **Adv Difer Equ.**, n. 16, p. 775–800, 2011. 11

10 CHEN, Z.; ZOU, W. Ground states for a system of schrödinger equations with critical exponent. **Journal of Functional Analysis**, Elsevier, v. 262, n. 7, p. 3091–3107, 2012. 11

11 LI, G.; TANG, X. Nehari-type ground state solutions for schrödinger equations including critical exponent. **Applied Mathematics Letters**, Elsevier, v. 37, p. 101–106, 2014. 11, 15

12 MEDEIROS, E.; SEVERO, U. et al. A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Elsevier, v. 345, n. 1, p. 286–304, 2008. 11, 41

13 RABELO, P. Elliptic systems involving critical growth in dimension two. **Communications on Pure & Applied Analysis**, American Institute of Mathematical Sciences, v. 8, n. 6, p. 2013, 2009. 11

14 Ó, J. M. do; ALBUQUERQUE, J. C. de. On coupled systems of nonlinear schrödinger equations with critical exponential growth. **Applicable Analysis**, Taylor & Francis, v. 97, n. 6, p. 1000–1015, 2018. 11

15 LIU, J.; WANG, Z.-Q. Soliton solutions for quasilinear schrödinger equations, i. **Proceedings of the American Mathematical Society**, JSTOR, p. 441–448, 2003. 13, 14

16 MOAMENI, A. On the existence of standing wave solutions to quasilinear schrödinger equations. **Nonlinearity**, IOP Publishing, v. 19, n. 4, p. 937, 2006. 13

17 SEVERO, U. et al. Solitary waves for a class of quasilinear schrödinger equations in dimension two. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, Springer, v. 38, n. 3-4, p. 275–315, 2010. 13

18 MIYAGAKI, O. H.; SOARES, S. H. et al. Soliton solutions for quasilinear schrödinger equations: the critical exponential case. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, Elsevier, v. 67, n. 12, p. 3357–3372, 2007. 13

19 LIU, J.-q.; WANG, Y.-q.; WANG, Z.-Q. Soliton solutions for quasilinear schrödinger equations, ii. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 187, n. 2, p. 473–493, 2003. 13

20 POPPENBERG, M.; SCHMITT, K.; WANG, Z.-Q. On the existence of soliton solutions to quasilinear schrödinger equations. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, Springer, v. 14, n. 3, p. 329–344, 2002. 13

21 SEVERO, U.; SILVA, E. da. On the existence of standing wave solutions for a class of quasilinear schrödinger systems. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Elsevier, v. 412, n. 2, p. 763–775, 2014. 13, 36, 37, 39, 68

22 GUO, Y.; TANG, Z. Ground state solutions for quasilinear schrödinger systems. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Elsevier, v. 389, n. 1, p. 322–339, 2012. 13

23 RUIZ, D.; SICILIANO, G. Existence of ground states for a modified nonlinear schrödinger equation. **Nonlinearity**, IOP Publishing, v. 23, n. 5, p. 1221, 2010. 14

24 KIRCHHO, G. Mechanik. **Teubner, Leipzig**, 1883. 15, 54

25 BERNSTEIN, S. Sur une classe d'équations fonctionelles aux dérivées partielles. **Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.**, v. 4, p. 17–26, 1940. 15

26 POHOŽAEV, S. On a class of quasilinear hyperbolic equations. **Mathematics of the USSR-Sbornik**, IOP Publishing, v. 25, n. 1, p. 145, 1975. 15

27 LIONS, J.-L. On some questions in boundary value problems of mathematical physics. In: **North-Holland Mathematics Studies**. [S.l.]: Elsevier, 1978. v. 30, p. 284–346. 15

28 ALVES, C.; CORRÊA, F.; MA, T. F. Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of kirchhoff type. **Computers & Mathematics with Applications**, Pergamon, v. 49, n. 1, p. 85–93, 2005. 15

29 AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P. H. Dual variational methods in critical point theory and applications. **Journal of functional Analysis**, Elsevier, v. 14, n. 4, p. 349–381, 1973. 15

30 FIGUEIREDO, G. M.; SEVERO, U. B. Ground state solution for a kirchhoff problem with exponential critical growth. **Milan Journal of Mathematics**, Springer, v. 84, n. 1, p. 23–39, 2016. 15, 16

31 LI, Y.; LI, F.; SHI, J. Existence of a positive solution to kirchhoff type problems without compactness conditions. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 253, n. 7, p. 2285–2294, 2012. 15

32 MA, T. Remarks on an elliptic equation of kirchhoff type. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, Elsevier, v. 63, n. 5-7, p. e1967–e1977, 2005. 15

33 MOSER, J. A sharp form of an inequality by n. trudinger. **Indiana University Mathematics Journal**, JSTOR, v. 20, n. 11, p. 1077–1092, 1971. 16, 67

34 JEANJEAN, L.; TANAKA, K. A remark on least energy solutions in r n. **Proceedings of the American Mathematical Society**, JSTOR, p. 2399–2408, 2003. 28, 36

35 BARTSCH, T.; WANG, Z. Q. Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on rn: Existence and multiplicity results. **Communications in Partial Differential Equations**, Taylor & Francis, v. 20, n. 9-10, p. 1725–1741, 1995. 42

36 ZHANG, H.; XU, J.; ZHANG, F. Existence of positive ground states for some nonlinear schrödinger systems. **Boundary Value Problems**, Springer, v. 2013, n. 1, p. 13, 2013. 55

37 DEGIOVANNI, M.; MARZOCCHI, M. A critical point theory for nonsmooth functional. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, Springer, v. 167, n. 1, p. 73–100, 1984. 68

38 WILLEM, M. **Minimax theorems**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1997. v. 24. 69

APÊNDICE A – ALGUNS RESULTADOS UTILIZADOS

Neste apêndice, enunciaremos os principais lemas e teoremas que foram utilizados em nosso trabalho.

Lema A.0.1 (Teorema de Strauss) *Sejam $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas satisfazendo*

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0.$$

Seja (u_n) uma sequência de funções mensuráveis de $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tais que

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} |Q(u_n(x))|dx < +\infty$$

e $P(u_n(x)) \to v(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ quando $n \to \infty$. Então, para todo $B \subset \mathbb{R}^N$, Borel, mensurável, limitado, tem-se

$$\int_B |u_n(x) - v(x)|dx \to 0$$

quando $n \to +\infty$. Além disso, se supursermos que

$$\lim_{s\to 0} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0$$

e $u_n(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$ uniformemente com respeito a n, então $P(u_n)$ converge para v em $L^1(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to +\infty$.

(Veja (3))

Lema A.0.2 (Desigualdade de Trundiger-Moser) *Se $\alpha > 0$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1)dx \leqslant \infty.$$

Além disso, se $0 < \alpha < 4\pi$, $\|\nabla u\|_2 \leqslant 1$, $\|u\|_2 \leqslant \widetilde{C}$, então existe uma constante $C = C(\alpha, \widetilde{C}) > 0$, dependendo somente de α e $\widetilde{C}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1)dx \leqslant C.$$

(Veja (1), (33))

Teorema A.0.3 (Teorema do Passo da Montanha) *Sejam E um espaço de Banach real e $I \in C(E, \mathbb{R})$, Gateaux-diferenciável em E, com derivada de Gateaux $I'(v) \in E'$ para todo $v \in E$ e contínua da topologia da norma de E para a topologia fraca* de E'. Suponha que $I(0) = 0$ e seja $S \subset E$ fechado que desconecta (por caminhos) E. Sejam $v_0 = 0$ e $v_1 \in E$ pontos pertencentes a componentes conectas distintas de $E \backslash S$. Suponha ainda que*

$$\inf_S I \geqslant \alpha > 0 \;\; e \;\; I(v_1) \leqslant 0.$$

Então I possui uma sequência de Palais-Smale no nível c caracterizada como

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geqslant \alpha,$$

em que $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]; E);\ \ \gamma(0) = 0 \ \text{ e } \ \gamma(1) = v_1\}$.

(Veja (37))

Teorema A.0.4 (Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais) *Assuma que a ação de um grupo topológico G sobre um espaço de Hilbert $(H; \langle .,. \rangle)$ seja isométrica. Se $I \in C^1(H; \mathbb{R})$ é invariante e u é ponto crítico de I restrito a $Fix(G)$, então u é um ponto crítico de I em H.*

(Veja (21))

Lema A.0.5 (Lema Radial) *Se $u \in L^p(\mathbb{R}^N), 1 \leq p < +\infty$, é uma função radial não crescente (isto é, $0 \leq u(x) \leq u(y)$ se $|x| \geqslant |y|$), então tem-se*

$$|u(x)| \leq |x|^{-N/P} \left(\frac{N}{|S^{N-1}|} \right)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \ \ x \neq 0.$$

(Veja (3))

Teorema A.0.6 (Teorema dos Multiplicadores de Lagrange) *Sejam X um espaço de Banach, $J, F \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $x_0 \in X$ um extremo local de J restrito ao conjunto*

$$M = \{x \in X; F(x) = F(x_0)\}.$$

Se $F^{'}(x_0) \neq 0$, para todo $x \in M$, então existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$J^{'}(x_0)v = \theta F^{'}(x_0)v$$

para qualquer $v \in X$. O número θ é chamado de Multiplicador de Lagrange.

Teorema A.0.7 (Teorema do Passo da Montanha Simétrico) *Seja X um espaço de Banach real, e seja $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ e J um mesmo funcional satisfazendo $J(0) = 0$ e*

(J_1) *Existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $J\mid_{\partial B_\rho(0)} \geqslant \alpha$;*

(J_2) *Existem $A > 0$ e V um subespaço finito-dimensional de X tais que*

$$\max_{u \in V} J(u) \leqslant A.$$

Se o funcional J satisfaz a condição $(PS)_d$ para $d \in (0, A)$, então ele possui pelo menos $dimV$ pares de pontos críticos não-triviais.

(Veja (7))

Definição A.0.8 *Sejam X um espaço de Banach e $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. A sequência $(u_n) \subset X$ é dita uma sequência de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ para o funcional J, isto é, uma sequência $(PS)_c$ para o funcional J, sempre que $J(u_n) \to c$ e $\|J' u_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$. O funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ sempre que toda sequência $(PS)_c$ do funcional J admite uma subsequência convergente.*

(Veja (38))

APÊNDICE B – RESULTADOS DE REGULARIDADE

Neste apêndice, iremos provar a regularidade C^1 do funcional

$$I(u,v)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u|^2+|u|^2)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla v|^2+|v|^2)-\lambda\int_{\mathbb{R}^2}uv+\int_{\mathbb{R}^2}F_1(u)+\int_{\mathbb{R}^2}F_2(v).$$

Para isto, vamos precisar do seguinte lema:

Lema B.0.1 *Seja f uma função como no Capítulo 1, sob as hipóteses de que f é contínua e tem crescimento crítico, como definimos em (H_2), temos que, para todo $\beta>\alpha$, existe uma constante $C>0$ tal que*

$$|f(u)|\leqslant Ce^{\beta u^2}.$$

Demonstração. De fato, seja $\beta>\alpha$ e $\varepsilon>0$, existe $R_\varepsilon>0$ tal que

$$\frac{|f(u)|}{e^{\beta u^2}}<\varepsilon,$$

o que implica

$$|f(u)|\leqslant \varepsilon e^{\beta u^2},\ \text{ para todo } u\geqslant R_\varepsilon. \tag{B.1}$$

Agora consideremos a restrição de $f(u)$ ao compacto $[0,R_\varepsilon]$. Sendo $f(u)$ uma função contínua, existe uma constante $M>0$ tal que $|f(u)|\leqslant M$ para todo $u\in[0,R_\varepsilon]$. Como $e^{\beta u^2}$ é uma função crescente, podemos escolher uma constante $C>0$ de maneira que

$$|f(u)|\leqslant Ce^{\beta u^2}\ \text{ para todo } u\in[0,R_\varepsilon].$$

■

Usando o lema acima e a desigualdade de Trundinger-Moser, agora, mostrarems que o funcional de energia $I:E\to\mathbb{R}$ associado ao problema (2.1). Para facilitar o cálculo, consideremos os funcionais $I_1,I_2,I_3:E\to\mathbb{R}$ definidos por

$$\begin{aligned}
I_1(u,v) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u|^2+|u|^2)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla v|^2+|v|^2),\\
I_2(u,v) &= \int_{\mathbb{R}^2}F_1(u)+\int_{\mathbb{R}^2}F_2(v),\\
I_3(u,v) &= \lambda\int_{\mathbb{R}^2}uv.
\end{aligned}$$

Desta forma, $I=I_1,-I_2-I_3$ Em se tratando de norma proveniente de um produto interno, é fácil ver que, na verdade, $I_1\in C^\infty(E,\mathbb{R})$. Agora provemos que I_2 é de classe C^1. Seja $(u,v)\in E$ para $|t|<1,t\neq 0$. Consideremos

$$r(v)=I_2(u+\overline{v},v)-I_2(u,v)-\int_{\mathbb{R}^2}f_1(u)v.$$

Afirmamos que
$$\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$
ou, equivalentemente,
$$\lim_{v_n \to 0} \frac{r(v_n)}{\|v_n\|} = 0.$$
De fato, consideremos a função $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = F_1(u + tv_n)$. Notemos que g é contínua e com derivada $g'(t) = f_1(u + tv_n)v_n$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos
$$\int_0^1 g'(t) = g(1) - g(0).$$
Por outro lado, temos
$$\int_0^1 g'(t) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(F_1(u + tv_n)),$$
de onde, obtemos
$$F_1(u + v_n) - F_1(u) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(F_1(u + tv_n)).$$
Notemos que
$$\frac{d}{dt}(F(u + tv_n)) = f_1(u + tv_n)v_n.$$
Daí,
$$F_1(u + v_n) - F_1(u) = \int_{\mathbb{R}^2} f_1(u + tv_n)v_n dt.$$
Consequentemente,
$$r(v_n) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\left(\int_0^1 f_1(u + tv_n)v_n \right) f_1(u)v_n \right],$$
o que implica
$$r(v_n) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left[f_1(u + tv_n)v_n - f_1(u)v_n \right],$$
logo
$$|r(v_n)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 |f_1(u + tv_n) - f_1(u)||v_n|.$$
Aplicando o Teorema de Fubini, obtemos
$$|r(v_n)| \leqslant \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} |f_1(u + tv_n) - f_1(u)||v_n|.$$
Pela desigualdade de Hölder para $1/r + 1/s = 1$
$$|r(v_n)| \leqslant \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \|f_1(u + tv_n) - f_1(u)\|_r \|v_n\|_s.$$
Pela imersão de Sobolev $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^t$ para todo $t \in [2, +\infty)$,
$$|r(v_n)| \leq C\|v_n\|_s \int_0^1 \|f_1(u + tv_n) - f_1(u)\|_r.$$

Agora notemos que

$$|f_1(u+tv_n)-f_1(u)|^r \leq [Ce^{\beta(u+tv_n)^2}+Ce^{\beta u^2}]^r,$$

o que implica

$$|f_1(u+tv_n)-f_1(u)|^r \leq C[e^{r\beta(u+tv_n)^2}+e^{r\beta u^2}].$$

Usando o fato de que para toda sequência (v_n) que converge fortemente em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$ existe uma subsequencia $(v_{n_k}) \subset H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$ e $h \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$ tal que $|v_{n_k}(x)| \leq h(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, temos que

$$|f_1(u+tv_{n_k})-f_1(u)|^r \leq C[e^{r\beta|u+h|^2}+e^{r\beta|u|^2}].$$

Logo, pela desigualdade de Trundiger-Moser, temos que

$$|f_1(u+tv_{n_k})-f_1(u)|^r \in L^1(\mathbb{R}^2)$$

e, pelas imersões de Sobolev,

$$u(x)+tv_{n_k}(x) \to u(x) \ \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2.$$

Sendo f_1 contínua temos

$$|f_1(u+tv_{n_k})-f_1(u)|^r \to 0 \ \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\|f_1(u+tv_{n_k})-f_1(u)\|_r \to 0.$$

Como

$$\frac{|r(v_{n_k})|}{\|v_{n_k}\|} \leq C\int_0^1 \|f_1 u(.)+tv_{n_k}(.))-f_1(u(.))\|_r,$$

tomando o limite quando $\|v_{n_k}\| \to 0$, obtemos

$$\lim_{v_{n_k}\to 0}\frac{r(v_{n_k})}{\|v_{n_k}\|}=0.$$

Por fim, notemos que $I_2' : E \to \mathbb{R}$ é linear e limitado, pois

$$I_2'(u)(v) \leqslant \int_{\mathbb{R}^2}|f_1(u)||v| \leqslant \int_{\mathbb{R}^2}|f_1(u)|^q)^{\frac{1}{q}}\|v\|_p.$$

Pela desigualdade de Trundiger-Moser e pelas imersões de Sobolev $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^(\mathbb{R}^2)$ para todo $t \in (2,+\infty)$, obtemos

$$|I_2'(u)v| \leqslant C\|v\|.$$

Provemos que $I_2'(u)$ é contínuo. Seja $u_n \to u$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$, daí

$$\|I_2'(u_n)-I_2'(u)\|_v = \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1}|\int_{\mathbb{R}^2}(f_1(u_n)-f_1(u))\varphi|.$$

Usando a desigualdade de Hölder, para $1/r + 1/s = 1$, obtemos

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\| \leqslant \|f(u_n) - f(u)\|_r \|\varphi\|_s.$$

Pelas imersões de Sobolev,

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\| \leqslant C\|f(u_n) - f(u)\|_r.$$

Usando novamente a desigualdade de Trundiger-Moser e procedendo de forma análoga aos cálculos acima,

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\| \to 0.$$

Portanto, I_2' é contínuo.