UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE DOUTORADO

ALEXANDRE LUIS DE SOUZA BARROS

ECOLOGIA DE SABERES MATEMÁTICOS NO ENSINO TÉCNICO INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO

Recife
2018

ALEXANDRE LUIS DE SOUZA BARROS

ECOLOGIA DE SABERES MATEMÁTICOS NO ENSINO TÉCNICO INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC, da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de Concentração: Educação Matemática e Tecnológica

Orientadora: Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain

Recife

2018

Catalogação na fonte
Bibliotecária Amanda Ganimo, CRB-4/1806

B277e Barros, Alexandre Luis de Souza.
Ecologia de saberes matemáticos no ensino técnico integrado ao ensino médio/ Alexandre Luis de Souza Barros. – Recife, 2018.
283 f. : il.

Orientadora: Paula Moreira Baltar Bellemain.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2019.
Inclui Referências e Apêndices

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ensino profissional. 3. Ensino médio. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Bellemain, Paula Moreira Baltar (Orientadora). II. Título.

378.013 (23. ed.) UFPE (CE2019-091)

ALEXANDRE LUIS DE SOUZA BARROS

ECOLOGIA DE SABERES MATEMÁTICOS NO ENSINO TÉCNICO INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC, da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 26/11/2018.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Paula Moreira Baltar Belemain (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Dr. Paulo Figueiredo Lima (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Profª. Drª. Catarina de Oliveira Luca (Examinadora Externa)
Instituto Politécnico do Porto

Profº. Dr. Luiz Márcio Santos Farias (Examinador Externo)
Universidade Federal da Bahia

Profº. Dr. Marcos Bessa de Meneses (Examinador Externo)
Universidade Federal de Campina Grande

Dedico este trabalho a duas pessoas fundamentais nesta caminhada: minha esposa, Maria de Fátima Arruda, e meu filho, Victor Gabriel de Arruda Barros.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a **Deus**, por ter me concedido saúde, sabedoria e paciência nesta jornada.

À minha esposa, Maria de Fátima Arruda, pelo apoio incondicional, desde o processo seletivo. Quando eu não acreditei que poderia ser aprovado como aluno de doutorado, ela me dizia: “Faça, pois você é muito capaz”.

Ao meu filho, Victor Gabriel de Arruda Barros, pela compreensão de saber que eu estava em casa, mas não estava à disposição para brincar com ele. Isso não é fácil para uma criança menor de 10 anos à época.

Aos colegas de trabalho, Eduardo Cabral e Eduardo Batista. Eduardo Cabral se comprometeu em ficar com minhas aulas, possibilitando meu afastamento integral para realização do curso. Eduardo Batista (nome fictício) é o professor de topografia, ele gentilmente abriu as portas da sua sala de aula para realização desta pesquisa.

À minha orientadora, Paula Moreira Baltar Bellemain, pela oportunidade de ser novamente seu orientando, em ver naquele projeto proposto na seleção um embrião do que temos escrito neste trabalho. Paula, você conseguia enxergar muito mais daquilo que eu estava pesquisando e escrevendo. Estes quatro anos de orientação foram excelentes.

À professora Anna Paula de Avelar Brito Lima, porque foi na qualidade de seu aluno ouvinte que iniciei minhas primeiras leituras sobre a teoria antropológica do didático. Utilizando a metáfora, considerando a TAD uma pessoa, posso dizer que Anna Paula nos apresentou.

À André Costa, Almir Moura e Sônia Vieira, ou melhor: o grupo construção de artigos. A elaboração do trabalho final da disciplina Constructos Teóricos foi o início desta parceria rica e profícua. O trabalho foi estendido, resultando, em 2019 num livro, coletânea de artigos publicados em congressos e periódicos.

Ao Grupo Pró-grandezas, pelas importantes contribuições durante minhas apresentações. Realizar o doutorado foi oportunidade para reencontrar colegas de longas datas, em especial: Walenska Maysa.

A Anderson Douglas, outro colega de doutorado com que estabeleci grandes parcerias que resultaram em publicações e minicursos. Trata-se de uma pessoa com profundo domínio dos recursos tecnológicos.

Aos funcionários da Secretaria do EDUMATEC, em particular a Mário e Clara, equipe sempre gentil em atender nossas demandas e nossos erros no sig@.

Ao professor Sérgio Abranches. Tive a satisfação de ser seu aluno da disciplina Teorias Didáticas, mas também ofereceu todo o suporte dado na época da defesa quando foi coordenador do Programa.

Aos professores da disciplina de Seminários DDM, Iranete Lima, Rosinalda Teles, Marcelo Câmara, Paulo Figueiredo, Paula Bellemain, pelas importantes contribuições em cada apresentação. A pergunta que não queria calar: qual é a sua tese? Foram momentos fundamentais neste caminhar.

Aos colegas leitores de Seminários DDM, pelas contribuições e por nos questionar quando escrevíamos algo que parecia estar tão claro para nós, mas cuja escrita estava, de fato, confusa.

Aos membros da banca, Luiz Márcio Farias, Marcus Bessa, Catarina Lucas e Paulo Figueiredo, pelas valiosas contribuições na qualificação e disponibilidade de participar da defesa.

Aos colegas da turma Doutorado 2014.2, em particular a Aldinete Lima, Marcos Melo e Lúcia Durão. Compartilhamos de boas discussões nas nossas tardes TADIANAS em Seminários.

À colega Lúcia Durão. Compartilhamos muitos elementos nesta jornada, em particular a orientadora. Foram quatro anos de estreito convívio acadêmico e que, no último ano, se intensificou devido ao ritmo de finalização das nossas teses.

À Roxane Giraudot, minha professora de francês, fundadora e professora do curso Casa de Toulousaine. Suas aulas foram momentos de grande aprendizado da cultura francesa. Sempre lembrarei com grande carinho desse curso localizado em João Pessoa.

RESUMO

A questão inicial dessa pesquisa foi: como os saberes matemáticos são abordados nos componentes curriculares da Educação Profissional Técnica de Nível Médio (EPTNM)? Procuramos investigar, sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD), duas hipóteses: uma referente ao equipamento praxeológico de alunos da EPTNM e outra sobre a existência de desconexão entre praxeologias pontuais de dois componentes curriculares, um da formação técnica e outra da formação geral, Topografia e Matemática, respectivamente. Para verificação da pertinência dessas hipóteses escolhemos nos debruçar sobre a Topografia estudada em um Curso Técnico em Agropecuária integrado ao Ensino Médio. O percurso metodológico da pesquisa contou com a realização de entrevista com o professor de topografia e observação de suas aulas, o que nos permitiu discutir com mais profundidade as hipóteses apresentadas. Seguiram-se a aplicação de teste de sondagem com estudantes do referido curso, análise de documentos de orientação curricular e livros didáticos. As respostas inadequadas dos alunos revelaram que o equipamento praxeológico mobilizado pelos participantes não era suficiente para responder às questões de topografia propostas nas aulas. Nesse teste, observamos que ora o aluno reconheceu a tarefa institucional proposta no teste de sondagem como outra tarefa ora os estudantes não conseguiram responder às tarefas. Caracterizamos as relações institucionais preconizadas pelo ensino de matemática por meio da análise dos documentos: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Fundamental (Anos Iniciais, Anos Finais); Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM); Orientações Educacionais Complementares ao PCNEM e Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Os resultados mostram um descompasso das técnicas apresentadas entre o ensino de Matemática e o campo profissional. A análise das organizações matemáticas estudadas em Topografia permitiu dar evidência à dimensão prática do discurso tecnológico teórico. Outro elemento importante foi o manuseio dos instrumentos topográficos. Os nossos resultados apontam para uma possível dialética entre técnicas e instrumentos em situações de uso de objetos matemáticos. Essa análise nos permite traçar características do modelo epistemológico dominante nessas instituições. Com o objetivo de não nos limitarmos à natureza observatória da pesquisa, apresentamos, de modo breve, possíveis atividades que trazem mudanças nesse modelo epistemológico dominante.

Palavras-chave: Teoria antropológica do didático. Equipamento praxeológico. Educação profissional técnica integrada ao ensino médio.

ABSTRACT

The initial question of this research was: how are mathematical knowledge are approached in the curriculum components of Vocational Technical High School? This research investigated two hypothesis from the perspective of the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). The first one is related to the praxeological equipment of students of Vo-Tech High School. The second is about the disconnection between punctual praxeologies of two curricular components, one of technical formation and the other of general instruction, Topography and Math respectively. In order to verify the relevance of these hypothesis we chose to investigate the Topography subject studied in a Full-Time Vo-Tech Agriculture High School. The methodological route of the research included an interview with the Topography teacher and observation of his classes, which allowed us to discuss more depthly the hypothesis presented. Then, a survey test was conducted among students of the referred course. Also the curriculum guidance documents and textbooks were analyzed. The inadequate student responses revealed that the praxeological equipment mobilized by the participants was not enough to answer the Topography questions proposed in class. In this test, we observed that sometimes the students misunderstood the task proposed in the survey test. Occasionally the students could not answer the tasks. We characterize the institutional relations recommended by mathematics teaching through the analysis of the documents: "Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Fundamental (PCNs)", Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), "Orientações Educacionais Complementares ao PCNEM" e "Orientações Curriculares para o Ensino Médio". The results show a mismatch of the techniques presented between Mathematics teaching and the professional field. The analysis of the mathematical organizations studied in Topography allowed to give evidence to the practical dimension of the theoretical technological discourse. Another important element found was the handling of topographic instruments. Our results point to a possible dialectic between techniques and instruments in situations of use of mathematical objects. This analysis allows us to trace characteristics of the dominant epistemological model in these institutions. Aiming to not limit ourselves to the observational nature of the research, we briefly present possible activities that could bring changes to this dominant epistemological model.

Key-words: Anthropological theory of didactics. Praxeological equipment. Secondary technical-professional education.

LISTA DE ILUSTRUÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CEB	Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação
CEFET	Centro Federal de Educação Tecnológica
CNCT	Catálogo Nacional de Cursos Técnicos
DCNEM	Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio
DCNEPT	Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Profissional Técnica
Embrapa	Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária
EPTNM	Educação Profissional Técnica de Nível Médio
HLCA	Habilitação em Licenciatura em Ciências Agrárias
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
NBR	Norma Brasileira
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
TAD	Teoria Antropológica do Didático

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa investiga a mobilização de conhecimentos matemáticos no âmbito de cursos técnicos. Meu interesse por esse tema emerge da experiência, desde 2005, como professor de matemática em um estabelecimento de ensino vinculado a uma universidade pública no qual em diferentes modalidades foram e/ou são ofertados cursos técnicos. Até 2009, além do ensino médio regular, havia cursos técnicos de nível médio nas modalidades concomitante e subsequente[1].

Nessa época, lecionei somente matemática para turmas do ensino médio regular. No período de 2005 a 2009, a grande maioria dos alunos dos cursos técnicos, das modalidades citadas, havia realizado o ensino médio regular noutro estabelecimento.

Em atendimento à Lei nº 11.741/2008 (BRASIL, 2008), inicia-se a elaboração da proposta de um curso técnico na modalidade integrada. Em Brasil (2008), são propostas alterações na de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB nº 9394/96 (BRASIL, 1996), no sentido de integrar ao ensino médio ações referentes à educação profissional, dedicando uma seção exclusiva para esta modalidade. A experiência e o quantitativo do corpo docente da escola possibilitaram a execução da proposta de curso técnico em agropecuária integrado ao ensino médio.

Houve reuniões para a elaboração do projeto do curso, mas as decisões deliberadas em colegiado faziam referência aos aspectos mais gerais do curso: carga horária, grade curricular, registro das aulas e das notas etc. Foram realizadas atualizações nas grades curriculares do curso de ensino médio e do técnico em agropecuária objetivando homogeneidade nos diferentes cursos oferecidos que possuíam disciplinas em comum.

Nessas reuniões, os aspectos pedagógicos não foram tratados. Em 2010, comecei a lecionar para a primeira turma desse curso técnico. Pensava que poderia continuar ensinando, na matemática do curso técnico, os mesmos conteúdos e do mesmo modo que habitualmente trabalhava com o ensino médio regular. O fato de existir um novo curso não despertou, em princípio, a necessidade de mudar a

[1] A modalidade subsequente é destinada para alunos que possuem o ensino médio completo, enquanto na modalidade concomitante, o aluno pode estar cursando a partir do 2º ano do ensino médio em qualquer escola, entretanto somente receberá o diploma de técnico quando apresentar documento de conclusão do ensino médio.

organização do componente curricular de matemática. Essa nova composição de turma provocou algumas mudanças, proporcionando maior interesse e necessidade de dialogar com os colegas professores dos componentes curriculares da formação técnica.

Não demorou muito para ouvir desses novos alunos e dos colegas professores questionamentos causadores de inquietações. Trazemos alguns aspectos observados no segundo ano de execução do curso integrado. Percebi que os alunos resolviam com maior facilidade problemas de trigonometria ao operar com racionais, mesmo com três ou quatro casas decimais. Os estudantes passaram a questionar o estudo de muitos conteúdos matemáticos por afirmar que não o utilizariam nas práticas daquela formação profissional, no caso técnico em agropecuária. Os questionamentos dos colegas professores faziam referência às dificuldades dos alunos ao mobilizar conteúdos matemáticos supostamente vistos no ensino fundamental.

Os saberes matemáticos não são estudados apenas no componente curricular matemática. Ao estudar física ou química no ensino médio regular, é preciso muito frequentemente lidar com objetos matemáticos, como funções, unidades de medida, área, volume, entre outros. Do mesmo modo, saberes matemáticos estão presentes nos cursos da educação profissional.

O interessante desse aspecto é que podemos ter um mesmo saber matemático sendo abordado em mais de um componente curricular. Por exemplo, nos questionamentos dos alunos percebi que saberes associados à trigonometria, dentre outros, são trabalhados em componentes curriculares do curso técnico em agropecuária. Portanto, a presença dos saberes matemáticos na formação profissional é um dos motivos que apontam para a importância desta pesquisa. Refletir sobre tais saberes em cursos, ou mesmo em componentes curriculares, cuja preocupação é utilizá-los, poderá trazer importantes contribuições para cursos (ou componentes) que se dedicam a ensiná-los. Por exemplo, investigações sobre como a física do ensino médio utiliza a noção de função polinomial do 1º grau podem dar subsídios às reflexões sobre o ensino desse saber quando abordado pela matemática do ensino médio.

A inquietação inicial que motivou o desenvolvimento desta pesquisa surgiu então do questionamento sobre as dificuldades dos alunos na utilização de saberes matemáticos, o que nos conduziu a refletir sobre: **quais os saberes matemáticos**

mobilizados e como são vivenciados na formação técnica de nível médio?

Embora existam poucos cursos, a escola na qual trabalho reflete um pouco da realidade e do desafio do ensino médio brasileiro, anunciando-os em duas dimensões: preparar o aluno tanto para o mundo do trabalho quanto para dar continuidade aos estudos. Vários trabalhos apontam que o ensino médio deverá preparar os alunos para uma leitura compreensiva da realidade social e econômica de sua sociedade, considerando as necessidades relativas à produção científica, tecnológica e cultural.

Dentre esses trabalhos, Lopes (2011, p. 6) afirma que “[...] os conhecimentos matemáticos são essenciais na vida pessoal e profissional de qualquer um, por isso, é um direito de todo e qualquer cidadão adquiri-lo”. Essa autora discute o papel da matemática na formação do estudante do ensino médio e destaca que a educação atual precisa se voltar para o desenvolvimento de algumas capacidades de comunicação, de resolver problemas, de fazer inferências, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente.

Nas reflexões, identificamos a busca por trazer a matemática, enquanto componente curricular do ensino médio, para a discussão das duas dimensões que compõem o desafio do ensino médio como etapa final da educação básica.

A proposta dos PCNs não tenciona ser profissionalizante, embora sinalize um aprendizado que seja útil à vida e ao trabalho. É importante refletir sobre essas dimensões, pois decorrem da percepção da função social do ensino médio, etapa da educação básica, que deverá articular ciência, trabalho e cultura. A matemática, por fazer parte desse currículo, está inserida nessa discussão tanto num nível de elaboração de projeto político pedagógico quanto num nível mais específico de ensino. Lopes afirma que

> [...] é necessário que se elaborem projetos e se desenvolvam estratégias que favoreçam o desenvolvimento das potencialidades dos alunos do Ensino Médio, com atividades de ensino que lhes permitam construir e mobilizar conhecimentos matemáticos inter-relacionados com outras áreas de conhecimento (2011, p. 9).

Brasil (2002a, 2002b, 2004, 2006a, 2008) são documentos que sinalizam a importância que o então governo destinou ao ensino médio. Ao longo desse período, ocorreu aumento nos investimentos para educação profissional e mais especificamente para educação profissional técnica de nível médio.

Em 29 de dezembro de 2008, com a sanção da Lei Federal nº 11.892, o então Governo cria 38 Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, por meio da junção de escolas técnicas federais, CEFET, escolas agrotécnicas e escolas vinculadas às universidades. Atualmente, essa rede é composta por diversas instituições, além dos 38 Institutos; dois Centros Federais de Educação; 25 escolas vinculadas; o Colégio Pedro II; e uma universidade tecnológica. Identificamos a presença de uma forte política pública de formação profissional para estudantes na educação básica.

No Brasil, existem duas possibilidades de percurso formativo anterior ao ensino superior. A primeira está no ensino médio, último nível da educação básica, de caráter propedêutico, enquanto a segunda está na educação profissional e tecnológica, oferecida em diversos níveis e modalidades. Atualmente, pode ser ofertada em duas formas: integrada ou articulada ao ensino médio.

Desde Brasil (2004), essas formações foram denominadas educação profissional técnica de nível médio (EPTNM). Lopes (2011, p. 4) menciona que "[...] o ensino médio integrado à Educação Profissional Técnica é atualmente uma das mais importantes políticas públicas e está articulada à ideia de se considerar a diversidade dos sujeitos que precisam se inserir na vida econômico-produtiva".

Diante dessas possibilidades, nesta pesquisa iremos investigar saberes matemáticos vivenciados na EPTNM, ofertados na forma integrada ao ensino médio. Em cursos desse tipo, o aluno é egresso do ensino fundamental e opta por fazer uma formação profissional cujo conjunto dos componentes curriculares é formado por aqueles da formação geral (que são os mesmos do ensino médio regular) e os da formação técnica.

Durante a formação dos futuros técnicos, os alunos são confrontados com situações nas quais necessitam estudar e utilizar saberes matemáticos nos diversos componentes curriculares que possuem características diferentes conforme mencionamos no parágrafo anterior.

Analisando referenciais curriculares e documentos de cursos técnicos oferecidos pelo Instituto Federal de Educação de São Paulo, Gonçalves (2012, p. 154-155) constata a ausência da articulação que poderia ser realizada pela matemática.

> [...] percebeu-se que nesse nível de ensino há uma precariedade no trabalho pedagógico com a Matemática, observando que os currículos

> prescrevem uma formação interdisciplinar e contextual nos currículos dos cursos técnicos e de Ensino Médio, a qual deve atender às finalidades destes e às da formação técnica dos futuros egressos. [...] Foi observado que os projetos pedagógicos de cursos técnicos analisados não fazem referências pedagógicas ao tratamento da Matemática no desenvolvimento curricular visando à oferta de uma formação que efetivamente integra a formação profissional técnica com o Ensino Médio [...].

As Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Profissional Técnica (DCNEPT) foram instituídas pela resolução da Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação (CEB) nº 04/99 (BRASIL, 1999). O autor evidencia alguns princípios norteadores na DCNEPT: articulação com ensino médio; contextualização; interdisciplinariedade; flexibilidade. E ressalta que “[...] O documento não traz referência ao ensino de Matemática, visto que este componente curricular estará na organização curricular dos cursos visando à formação para o mundo do trabalho” (GONÇALVES, 2012, p. 89).

Ao analisar as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM) e os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), sua pesquisa verificou que a interdisciplinaridade recebe destaque, mas observou fragilidades nesses documentos quanto à discussão sobre o que é uma abordagem interdisciplinar.

Pesquisar sobre os saberes matemáticos, no âmbito de cursos da educação profissional técnica de nível médio (EPTNM), pode propiciar elementos diagnósticos que subsidiem futuras propostas de articulação, um aspecto ausente nos documentos citados e analisados.

Nesta pesquisa, pretendemos então realizar estudos sobre: **como os saberes matemáticos são abordados nos componentes curriculares da EPTNM? Onde são trabalhados: em sala de aula, laboratórios, aulas com natureza mais prática tais como visitas técnicas, aulas de campo? Que tipos de atividades são estudadas? Como são determinadas as resoluções dessas atividades? Os argumentos que justificam tais resoluções são trabalhados em sala de aula?**

Embora a articulação entre o ensino médio e educação profissional seja trazida como um dos princípios nas orientações curriculares, segundo constata Gonçalves (2012), **será que os saberes matemáticos vivenciados nas escolas de ensino médio regular são os mesmos que os cursos técnicos solicitam? Será que os alunos os reconhecem como sendo os mesmos?**

Os questionamentos formulados anteriormente fazem referência a como objetos do saber vivem em instituições, o que justifica a escolha da teoria antropológica do didático como marco teórico desta pesquisa.

Assumimos a influência de fatores externos à escola tanto na presença quanto na ausência dos saberes matemáticos nos cursos técnicos por ela oferecidos. As práticas profissionais podem ser fator que possibilite a presença de determinados saberes matemáticos quando certo problema é trabalhado. Assim como outros podem não ser estudados nos cursos técnicos por não serem utilizados na realidade profissional.

Considerar a realidade da escola, sua imersão como unidade de um sistema nacional de ensino e realizar reflexões sobre esse aspecto enriquecem as pesquisas em educação matemática. Além disso, investigar saberes matemáticos em componentes curriculares que os utilizam propicia ampliar as reflexões sobre a importância do estudo da matemática em diferentes contextos de formação profissional.

A teoria antropológica do didático (TAD), desenvolvida por Yves Chevallard e seus colaboradores, situa a atividade matemática e, portanto, a atividade de estudo da matemática, no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais (CHEVALLARD, 1999). Afirmam que a TAD é um modelo epistemológico para o estudo dos processos de produção e circulação de saberes. Desde Romo-Vazquez (2009), observamos uma intensificação de pesquisas que adotam esta teoria para investigar contextos de formação profissional.

Nossa reflexão inicial – como são vivenciados os saberes matemáticos na formação técnica de nível médio? – formula-se nos termos desta teoria como um questionamento que se insere na problemática ecológica ao interrogar as condições de vida dos saberes matemáticos na formação técnica de nível médio.

Na nona escola de verão de didática da matemática, Chevallard (1998, p. 100) comenta que o viés da problemática ecológica conduz a investigar o que "[...] realmente é trabalhado em sala de aula" e como é feito, o porquê de certos objetos serem estudados ou não, assim como propor e experimentar modos diferentes de ensinar. Isso pode proporcionar uma ruptura com duas possíveis ilusões: a primeira é pensar que os saberes matemáticos são como são e se ajustam a uma ordem "natural" do seu próprio ensino; e, no sentido inverso, numa ilusão de onipotência segundo a qual a existência de um saber matemático é condição mais que suficiente para que ele seja ensinado.

Portanto, diante do exposto, **o objeto desta pesquisa é a vida de saberes matemáticos no âmbito da educação profissional técnica de nível médio (EPTNM)**.

O texto está estruturado em dez capítulos. No primeiro, introdução, apresentamos as motivações e a temática da pesquisa. O segundo capítulo trata da construção da nossa problemática, trazendo alguns elementos da TAD, as hipóteses e o objetivo da pesquisa. O terceiro é dedicado às escolhas metodológicas. Delineamos o componente curricular, topografia do curso técnico em agropecuária ofertado na modalidade integrada ao ensino médio. O primeiro estudo é apresentado no quarto capítulo. As observações das aulas nos permitiram identificar os principais objetos matemáticos estudados em topografia. Ainda como parte do primeiro estudo, discutimos pesquisas que tratam de aspectos didáticos desses objetos.

O quinto capítulo trata de identificar as relações institucionais da instituição *ensino de matemática* da educação básica, com os objetos matemáticos identificados no capítulo 4. Nosso olhar está direcionado para as recomendações curriculares e mais especificamente para o livro didático de matemática adotado pela escola. Essas reflexões nos conduziram ao sexto capítulo que discute o equipamento praxeológico dos alunos diante de atividades típicas da matemática escolar. No sétimo capítulo, está a análise das organizações matemáticas estudadas em topografia, para a qual utilizamos a escala de níveis de codeterminação do didático. No oitavo, discutimos outros elementos observados nas aulas de topografia e nos livros didáticos, permitindo aprofundar as reflexões presentes no quinto e sexto capítulos. Diante do quadro institucional observado, apresentamos o capítulo nove, no qual propomos possíveis atividades a serem aplicadas com a turma. Essas atividades foram pensadas conjuntamente com o professor de topografia. E, por fim, temos as considerações finais.

2 PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

Nossa problemática está direcionada para a matemática vivenciada nos cursos de formação profissional. Atualmente, além de possuir uma formação destinada ao trabalho, o egresso da educação profissional técnica de nível médio (EPTNM) pode se candidatar ao ensino superior, mas nem sempre foi assim. Embora haja indícios de uma dimensão profissionalizante na educação, só a partir da promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1961 o concluinte de uma formação profissionalizante de nível médio pôde concorrer amplamente às vagas no ensino superior.

A discussão posta a seguir traz um resgate histórico dos possíveis percursos formativos que permitiam aos estudantes concorrer ao ensino superior. Em grande parte da linha histórica, esses percursos estavam somente na educação básica, de caráter propedêutico, enquanto a educação profissional possibilitava exclusivamente acesso ao mercado de trabalho.

Usaremos a expressão educação profissional para nos referir ao percurso cuja formação habilite o egresso para uma atividade profissional[2]. Ao longo do tempo, essa terminologia mudou, e nas figuras da seção seguinte procuramos manter a nomenclatura da época. Assim, veremos expressões como: ensino técnico, habilitação profissional.

2.1 UM BREVE HISTÓRICO DA EDUCAÇÃO PROFISSIONAL NO BRASIL

Utilizaremos o termo *dualidade* empregado por Kuenzer (2007) para fazer referência às diferenças evidentes entre o tipo de educação integral e educação profissional. Fatores que aprofundam as diferenças entre classes. Vários autores, dentre eles Moura (2007) e Martins e Abreu-Bernardes (2013), afirmam que a relação entre educação básica e educação profissional está marcada historicamente pela dualidade.

Segundo Moura (2007), a educação profissional tem origem numa perspectiva

---

[2] Não iremos aprofundar a discussão sobre as especificidades dos termos ocupação, ofício e profissão, as quais remetem a outros campos do saber, como é o caso da sociologia das profissões. Destacamos apenas que conforme teóricos desse campo, como Freidson (1996) um dos aspectos que caracterizam as profissões é “uma especialização criteriosa teoricamente fundamentada.” (p. 142).

assistencialista: atender àqueles que não tinham condições sociais satisfatórias, evitando que praticassem ações que estavam na contra ordem dos “bons costumes”.

> [...] até o século XIX não há registros de iniciativas sistemáticas que hoje possam ser caracterizadas como pertencentes ao campo da educação profissional. O que existia até então era a educação propedêutica para as elites, voltada para a formação de futuros dirigentes. Assim sendo, a educação cumpria a função de contribuir para a reprodução das classes sociais já que aos filhos das elites estava assegurada essa escola das ciências, das letras e das artes e aos demais lhes era negado o acesso. (MOURA, 2007, p. 2).

Em Brasil (2007) menciona-se que os primeiros indícios do que hoje podemos chamar de educação profissional surgem a partir de 1809, com a criação do Colégio das Fábricas. Outros estabelecimentos de ensino foram criados durante o século XIX, predominantemente no âmbito da sociedade civil, voltados para o ensino das primeiras letras e a iniciação em ofícios.

> Em 1816, a criação da Escola de Belas Artes com o objetivo de articular o ensino das ciências e do desenho para os ofícios a serem realizados nas oficinas mecânicas; em 1861, a criação do Instituto Comercial no Rio de Janeiro, para ter pessoal capacitado para o preenchimento de cargos públicos nas secretarias de Estado; nos anos 1840 do século XIX, a construção de dez Casas de Educandos e Artífices em capitais brasileiras, sendo a primeira em Belém do Pará; em 1854, a criação de estabelecimentos especiais para menores abandonados, chamados de Asilos da Infância dos Meninos Desvalidos que ensinavam as primeiras letras e encaminhavam os egressos para oficinas públicas e particulares, através do Juizado de Órfãos. (MOURA, 2007, p. 3).

As primeiras ações que dão origem às instituições de educação profissional possuem características assistencialistas e promovem formação para aqueles que estavam fora da “escola regular”. Lembramos que, nesse período, a sociedade brasileira possuía uma dinâmica escravocrata. Moura (2007) aponta para forte coerência entre essa realidade social e a lógica assistencialista.

Ressaltamos que a promulgação da Lei Áurea, lei que proíbe a escravidão no Brasil, ocorre em 13 de maio de 1888. Kunze (2009) menciona que, na Constituição de 1891, quanto à responsabilidade da educação no âmbito do território nacional, competiu à União fixar os padrões da escola secundária e superior, enquanto os da primária e técnico-profissional competiam aos Estados.

> O início do Século XX trouxe uma novidade para a história da educação profissional do país quando houve um esforço público de organização da formação profissional, modificando a preocupação mais nitidamente

> assistencialista de atendimento a menores abandonados e órfãos, para a da preparação de operários para o exercício profissional. (MOURA, 2007, p. 3).

A proibição da escravidão e a consequente vinda de imigrantes europeus ocasionam nova dinâmica na sociedade brasileira. Kunze (2009) afirma que, devido às mudanças ocorridas na economia brasileira dessa época, com o aumento das atividades agrárias, industriais e comerciais, havia a necessidade de oferecer uma ocupação para aqueles que estavam se aglutinando nas cidades. Essas pessoas representavam uma potencial mão de obra às indústrias emergentes na recém-constituída República Federativa do Brasil. Segundo Moura (2007), mediante a busca da consolidação de uma política de incentivo para a preparação de ofícios, em 1906 o ensino profissional passou a ser atribuição do Ministério da Agricultura, Indústria e Comércio.

Naquele momento, havia propostas na Câmara dos Deputados para a criação de escolas destinadas à educação profissional. Alguns governos estaduais criaram tais estabelecimentos.

> [...] o projeto do congresso de instrução e a proposição 195 da Câmara dos Deputados enviados ao Senado nortearam o governo federal a sair do terreno das propostas e organizar um sistema nacional de educação profissional, sem agir inconstitucionalmente, embora não estivesse definida a melhor denominação a dar àquele ensino, se técnico ou profissional. (KUNZE, 2009, p. 12)[3].

A proposta criada para entrar em vigor em 1907 oferecia ensino industrial, agrícola e comercial nos estados e na capital federal. Mediante acordo entre os governos estaduais e a União, os recursos proviriam das duas esferas governamentais. Em 1909, foram criadas as Escolas de Aprendizes Artífices, sendo dezenove delas instaladas em 1910 nas várias unidades da Federação. Moura (2007) afirma que essas escolas eram semelhantes aos Liceus de Artes e Ofícios e voltadas para o ensino industrial, sendo custeadas pelo Estado brasileiro.

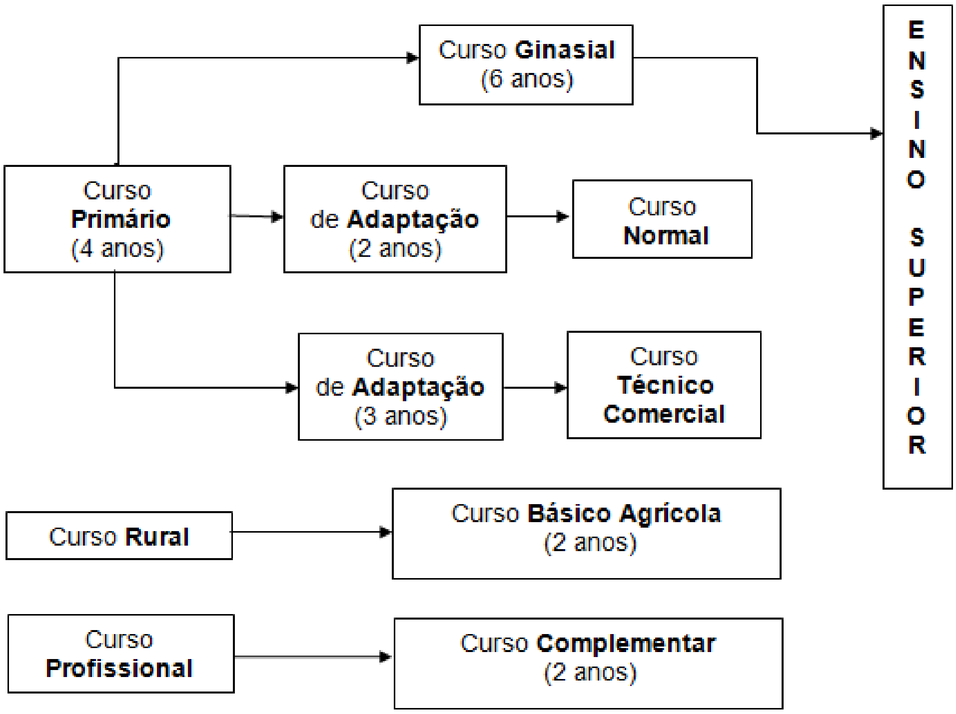
Kunze (2009) destaca que as Escolas de Aprendizes Artífices atenderiam às especificidades de cada estado. Nessa época, o ministério da justiça e negócios interiores era responsável pelos assuntos educacionais, mas essas escolas estavam subordinadas ao ministério dos negócios da agricultura, indústria e comércio.

[3] Conforme observamos em Freidson (1996) sobre diferenças entre profissão e ofício, o debate de nomenclatura apontado por Kunze (2009) certamente rebateria em aspectos do curso de formação ao qual a citação acima se refere.

Segundo Moura (2007), em 1910, foi organizado o ensino agrícola com o objetivo de capacitar[4] chefes de cultura, administradores e capatazes. Ele destaca o caráter elitista e de reprodução da estrutura social estratificada da referida organização. Entretanto, comenta que a ampliação da atuação devido à criação dessas escolas e do ensino agrícola ocasionou um redirecionamento da educação profissional no país.

Conforme observado, houve várias mudanças no sistema escolar nas primeiras décadas do século XX. O quadro a seguir representa as opções dos percursos formativos para etapas anteriores ao ensino superior.

Figura 1 – Percursos formativos nas primeiras décadas no século XX



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Não havia o que hoje conhecemos por ensino médio. Aqueles que pretendiam ascender à educação superior realizavam o curso primário sucedido pelo ginasial. A condição para acesso ao ensino superior era concluir o 5º ano do ginasial e, caso o aluno concluísse o 6° ano, recebia o título de Bacharel em Ciências e Letras. Esse era o único percurso que tornava o aluno apto a realizar exame para ingresso no ensino superior.

As demais opções formativas descritas a seguir não permitiam esse acesso.

[4] Termo utilizado pelo autor.

Outros dois percursos encerravam no curso normal ou técnico comercial. Ambos iniciados com o curso primário sucedido de curso de adaptação. Existiam também os cursos rural ou profissional enquanto alternativas ao curso primário. Segundo Moura (2007), esses cursos eram destinados às crianças das classes populares. A continuidade desse percurso formativo era o curso básico agrícola, para aqueles concluintes do curso rural; e o curso complementar para aqueles que haviam cursado o profissional.

Observamos que o curso normal, o técnico comercial, o básico agrícola e o complementar tinham caráter terminal. Nessa época, a educação profissional era destinada à formação de mão de obra, não havendo nenhuma proximidade ou vinculação com a educação básica.

Moura (2007) afirma que as grandes transformações políticas e econômicas da sociedade brasileira, ocorridas nas décadas de 30 e 40 do século XX, tiveram consequências profundas sobre a educação.

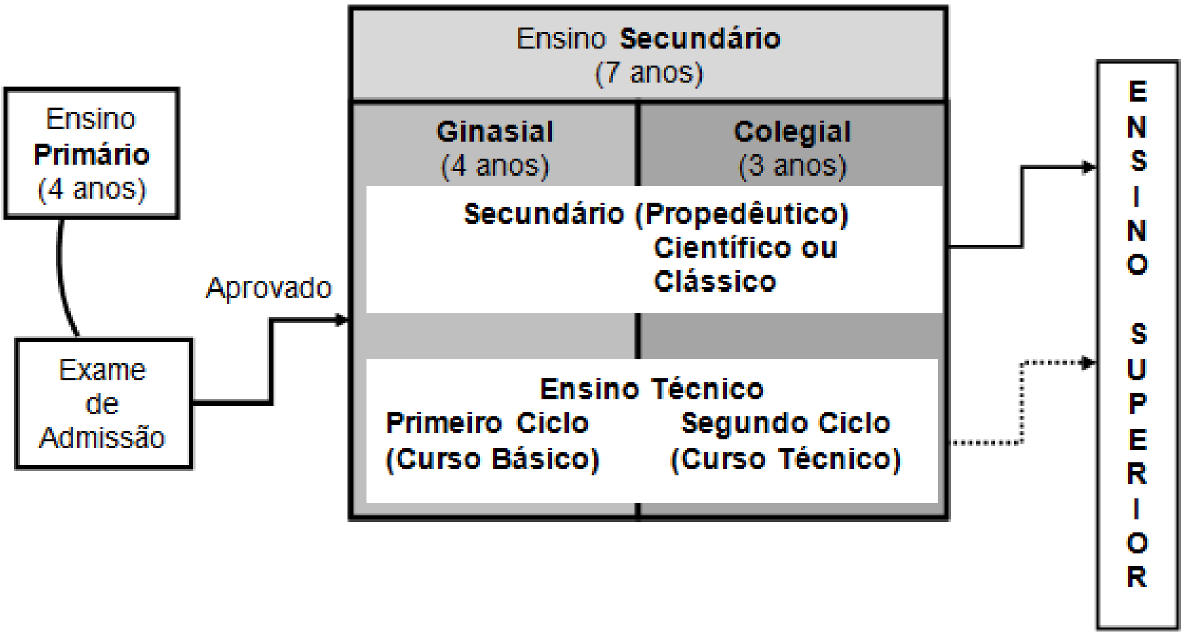
> Nesse período, em 1930, foi criado o primeiro ministério no âmbito da educação – Ministério da Educação e Saúde Pública. Em 1931, foi criado o Conselho Nacional de Educação e efetivada uma reforma educacional. Desta época, destacam-se os Decretos Federais nº 19.890/31 e nº 21.241/32, que regulamentaram a organização do ensino secundário [...] Convém, ainda, ressaltar que a V Conferência Nacional de Educação, realizada em 1933, refletiu-se, através dos seus resultados, na Assembleia Nacional Constituinte que ocorreu no mesmo ano e reforçou a ideia de responsabilidade do Estado para com a educação. Desse modo, a Constituição Brasileira de 1934 inaugurou uma política de educação, com o estabelecimento das competências da União em traçar as diretrizes nacionais e fixar o plano nacional de educação. Além disso, pela primeira vez uma constituição criou a vinculação de recursos à educação. (MOURA, 2007, p. 4-5).

As mudanças da economia ocasionadas pela expansão da atividade industrial e queda da atividade agrícola, principalmente da cultura do café, provocaram forte demanda de mão de obra para diversas atividades especializadas nas indústrias, no comércio e nas prestações de serviço. Esse processo de mudança exigiu um posicionamento do governo federal. (MOURA, 2007).

Em 1941, um conjunto de Decretos-lei, conhecido por Reforma Capanema, promulga leis específicas para a formação profissional em cada ramo da economia e para a formação de professores. Essa ação evidencia a importância que passou a ter a educação dentro do país e, em especial, a educação profissional.

De acordo com Brasil (2007), pela proposta da Reforma Capanema, a educação profissional passou a ser considerada de nível médio, constituída pelos cursos normal, industrial técnico, comercial técnico e agrotécnico, sendo exigido exame admissional para o seu acesso.

Figura 2 – Percursos formativos com a Reforma Capanema



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

A educação básica, denominada regular, era dividida em duas etapas: ensino primário e ensino secundário (ao qual tinham acesso aqueles alunos aprovados no exame de admissão). O ensino secundário era dividido em ginasial e colegial. No propedêutico, o colegial possuía duas variantes: o clássico e o científico. Os alunos egressos desse ensino propedêutico poderiam candidatar-se a qualquer curso do ensino superior.

Nessa época, a educação profissional era chamada de ensino técnico, composta por três ramos: industrial, comercial e agrícola. Neles, havia o primeiro ciclo, denominado curso básico, com mesma duração do ginasial e ingresso também condicionado à aprovação no exame admissional. Em continuidade, no segundo ciclo estavam os cursos técnicos, com mesma duração do colegial.

O pontilhado na figura indica que, para alunos egressos do curso técnico, o acesso ao ensino superior era restrito a cursos na área de formação. Conforme identificamos na Lei Orgânica do Ensino Agrícola[5] (BRASIL, 1946), essa situação

[5] O mesmo tipo de restrição pode ser observado na Lei Orgânica do Ensino Industrial (BRASIL,1942) e na Lei Orgânica do Ensino Comercial (BRASIL,1943).

estava prevista em Lei:

> [...] É assegurado ao portador do diploma conferido em virtude da conclusão de um curso agrícola técnico a possibilidade de ingressar em estabelecimentos de ensino superior, para matrícula em curso diretamente relacionado com o curso agrícola técnico concluído, uma vez verificada a satisfação das condições de admissão determinadas pela legislação competente.

Aos portadores de diploma conferido em virtude de conclusão de curso técnico era dada a possibilidade de ingresso em estabelecimento de ensino superior nos cursos diretamente relacionados. Os decretos ressaltam que o candidato deveria satisfazer as condições de preparo, determinadas pela legislação competente.

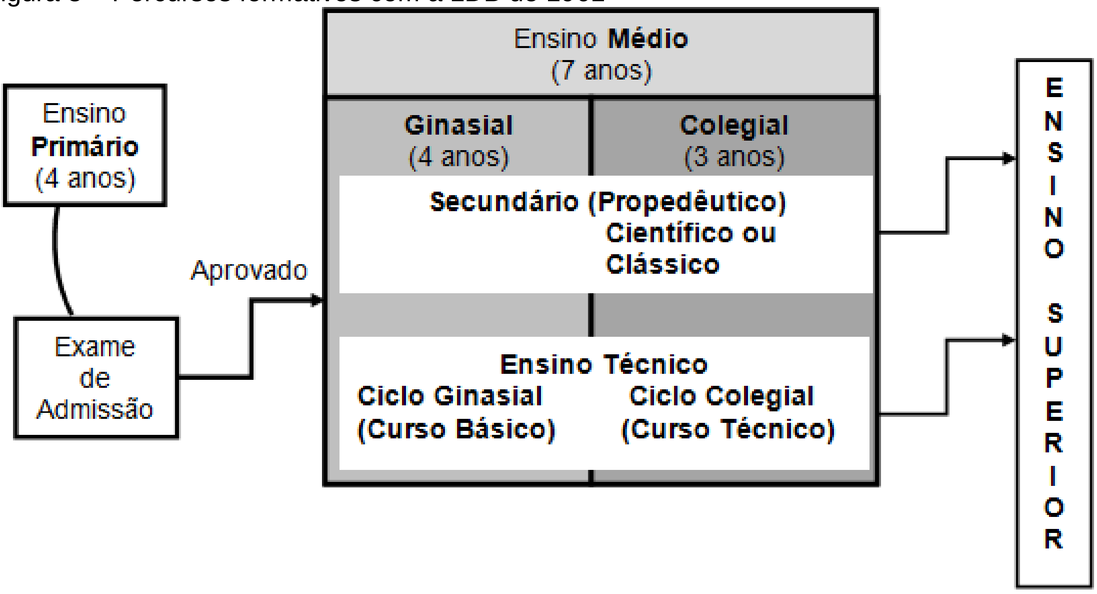
Portanto, concluir um curso técnico não habilitava para o ingresso em qualquer curso do ensino superior, apenas para aqueles correlatos. Moura (2007) aponta que tal fato reafirmava a dualidade, uma vez que o acesso ao ensino superior, por meio de processo seletivo, continuava ocorrendo baseado nos conteúdos gerais, das letras, das ciências e das humanidades.

Após duas décadas, é promulgada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB 4024/61 (BRASIL, 1961), que estabelece a equivalência entre o ensino profissional e o colegial, possibilitando ao aluno realizar transferência entre ambos. Essa é a primeira sinalização de reconhecimento legal do egresso da educação profissional como apto a ser candidato ao ensino superior.

> De tal modo, tanto os estudantes provenientes do colegial como os do ensino profissional poderiam dar continuidade de estudos no ensino superior. Este fato colocava, formalmente, um fim na dualidade de ensino. É importante frisar que essa dualidade só acabava formalmente já que os currículos se encarregavam de mantê-la, uma vez que a vertente do ensino voltada para a continuidade de estudos em nível superior e, portanto, destinada às elites, continuava privilegiando os conteúdos que eram exigidos nos processos seletivos de acesso à educação superior, ou seja, as ciências, as letras e as artes. Enquanto isso, nos cursos profissionalizantes, esses conteúdos eram reduzidos em favor das necessidades imediatas do mundo do trabalho. (MOURA, 2007, p. 8).

Segundo essa LDB (BRASIL, 1961), a educação brasileira ficou dividida em três graus: primário, médio e superior. O grau primário tornou-se obrigatório para todas as crianças partir dos sete anos. Havia também a escola pré-primária para menores de sete anos, não obrigatória. Ao término do primário, havia o exame de admissão ao ginásio. A figura a seguir apresenta as opções de percurso.

Figura 3 – Percursos formativos com a LDB de 1961

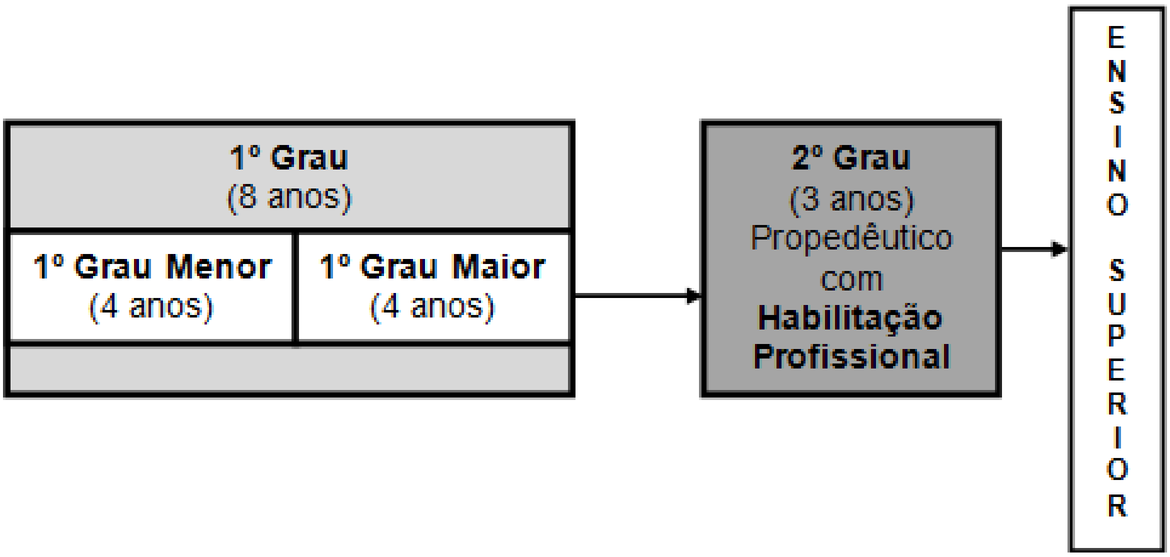


Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

A educação de grau médio ficou composta por dois ciclos: ginasial e colegial. Ambos abrangiam duas possibilidades de cursos: o secundário (de cunho propedêutico); e os técnicos e de formação de professores para o primário e pré-primário de caráter profissionalizante (MOURA, 2007). A educação superior era acessível para todos os concluintes da educação de grau médio, mediante processo seletivo.

Poucos anos após a deposição do presidente João Goulart e, consequentemente, início do Regime de Ditadura Militar, o Decreto nº 60.731/67 estabelece que as escolas vinculadas ao Ministério da Agricultura passam a ser subordinadas ao Ministério da Educação. E a reforma da LDB – Lei nº 5692/71 (BRASIL, 1971), promulgada em 1971, propõe mudanças na estrutura da educação básica.

Figura 4 – Percurso formativo a partir da Lei nº 5.692/71



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018

De acordo com essa reforma, a educação básica fora estruturada em 1º e 2º graus. O 1º grau agrupa aquilo que fora denominado primário e ginásio, agora chamados, respectivamente, 1º grau menor e 1º grau maior; o colegial passa a ser denominado 2º grau; e o exame de admissão foi extinto. Moura (2007) pontua um grande avanço com a extinção do exame de admissão, porque ele se constituía uma barreira para a continuidade dos estudos. Entretanto, o autor revela que o caráter compulsório da educação profissional foi restrito às escolas públicas estaduais e federais.

As escolas privadas permaneceram com currículo propedêutico. A implantação dessa profissionalização obrigatória foi prejudicada por diversos problemas existentes nos sistemas estaduais de ensino, referentes às estruturas das escolas, dentre outros a falta de corpo docente qualificado.

Paralelamente, as escolas federais consolidaram sua atuação nos cursos técnicos nas áreas de agropecuária e da indústria. Aquilo que faltou às escolas estaduais havia nas escolas federais, como o financiamento adequado do corpo docente especializado para formação técnica.

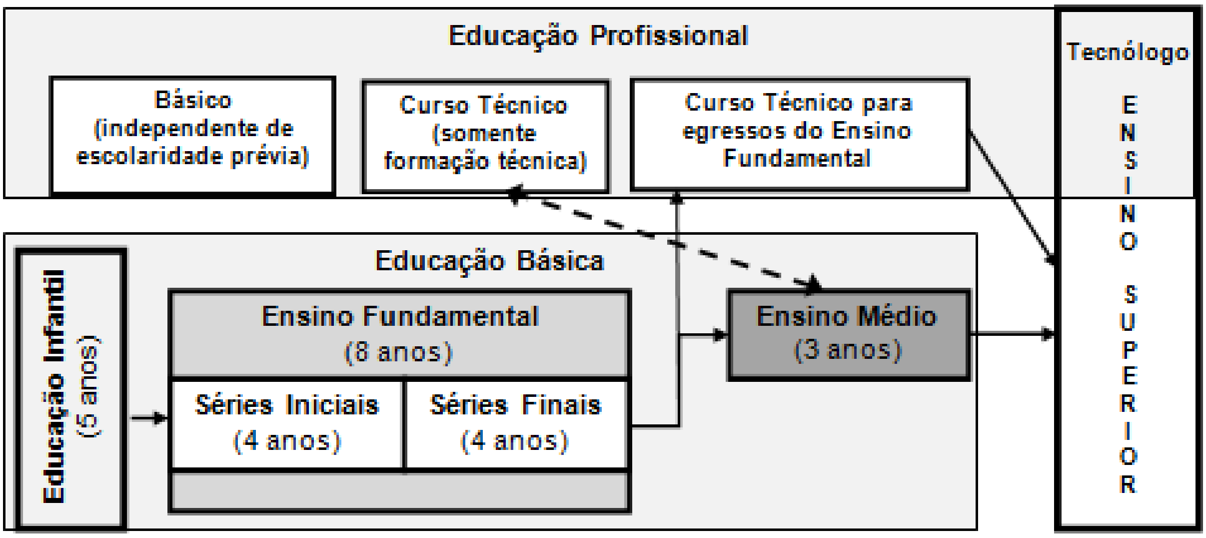
> Diante desse quadro, observa-se um acentuado movimento dos filhos da classe média das escolas públicas para as privadas na busca de garantir uma formação que lhes permitisse continuar os estudos no nível superior. Esse movimento alimenta o processo de desvalorização da escola pública estadual e municipal, pois era e continua sendo a classe média que tem algum poder de pressão junto às esferas de governo. Evidentemente é necessário relativizar essa opção da classe média, pois afinal estava em jogo a busca da garantia de uma melhor educação para os seus filhos. [...]

> O fato é que todo esse contexto contribuiu para gerar um ciclo negativo, o qual ainda não foi rompido, de deterioração da escola básica pública brasileira e que reforça a dualidade entre educação básica e educação profissional. (MOURA, 2007, p. 11).

A profissionalização compulsória mediante a duração de três anos do 2º grau trouxe uma redução dos conteúdos de ciências, das letras e das artes em detrimento dos conteúdos da formação profissional, por consequência um empobrecimento dos currículos do 2º grau das escolas estaduais (MOURA, 2007). Em 1982, período próximo do fim do Regime Militar e redemocratização do país, é extinta essa obrigatoriedade da profissionalização no 2º grau.

Na década de 1990, a Lei nº 9394/96 estabelece novas diretrizes e bases para a educação brasileira e mantém a dualidade entre educação profissional e educação básica. A educação profissional não esteve em nenhum dos níveis e não fez parte da estrutura da educação regular, fortalecendo a dualidade mencionada.
Somente por meio do Decreto nº 2208/97 (BRASIL, 1997), identificamos a terminologia *educação profissional* e seus cursos passam a ser oferecidos nos seguintes formatos: curso técnico para alunos egressos do ensino fundamental e curso técnico somente com currículo de formação técnica. A figura a seguir ilustra as opções formativas anteriores ao ensino superior. Esse decreto considera que a educação profissional compreende os níveis: básico, técnico e tecnológico.

Figura 5 – Percursos formativos logo após o Decreto nº 2208/97



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Segundo Brasil (1997), a educação profissional compreende os seguintes níveis: **I – básico**: destinado à qualificação, requalificação e reprofissionalização de trabalhadores, independente de escolaridade prévia; **II – técnico**: destinado a proporcionar habilitação profissional a alunos matriculados ou egressos do ensino médio, devendo ser ministrado na forma estabelecida por esse decreto; **III – tecnológico**: correspondente a cursos de nível superior na área tecnológica, destinados a egressos do ensino médio e técnico.

A LDB promulgada em 1996 (BRASIL, 1996) estrutura a educação escolar brasileira em dois níveis: educação básica e educação superior. A educação básica é formada pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio. A Lei nº 11.274/06 (BRASIL, 2006b) altera a duração do ensino fundamental para nove anos, tornando-o obrigatório para crianças a partir de seis anos.

Devido ao Decreto nº 2208/97, após o ensino fundamental o aluno poderia realizar o ensino médio de caráter propedêutico ou um curso técnico para egressos do ensino fundamental. No que se refere aos cursos da educação profissional de nível técnico, pontuamos alguns aspectos. Comparando a carga horária dos componentes curriculares da formação geral ofertados pelo ensino médio e pelo curso técnico para egressos do ensino fundamental, no curso técnico a carga horária era menor. E, por consequência, o aluno do curso técnico não estudaria todos os conteúdos presentes nas provas dos exames de admissão para o ensino superior ou os estudaria de maneira mais superficial.

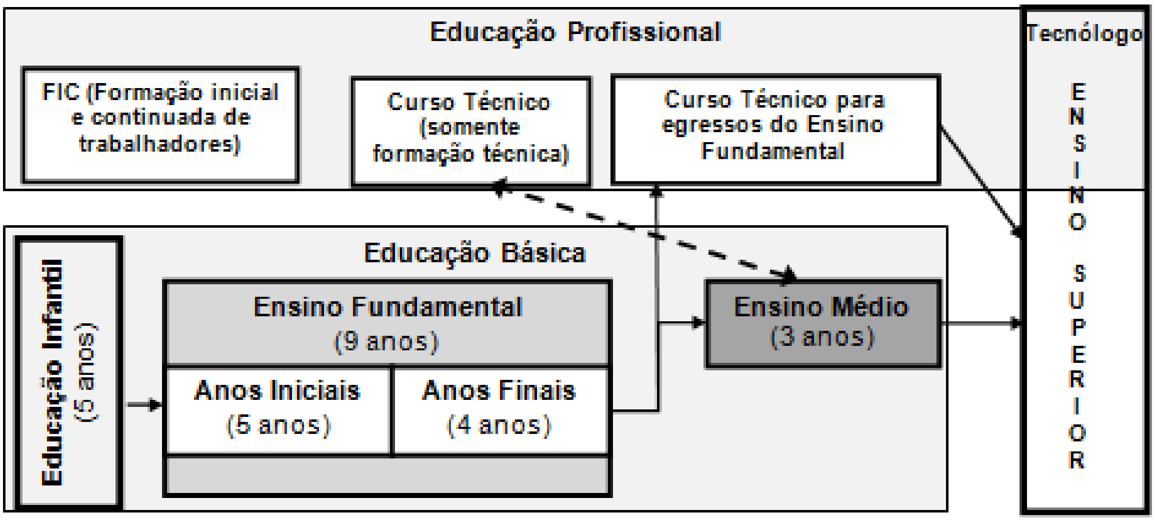
Outra opção nesse nível da educação profissional foi o curso técnico composto somente pelos componentes curriculares da formação técnica, ofertados em duas modalidades: sequencial e concomitante. A sequencial era destinada aos alunos egressos do ensino médio; enquanto, na concomitante, o aluno poderia estar cursando o ensino médio noutra escola.

No sentido de integrar a educação profissional à educação básica regular, revoga-se o Decreto nº 2208/97 com a promulgação do Decreto nº 5.154/04 (BRASIL, 2004):

> [...]§ 1º A articulação entre a educação profissional técnica de nível médio e o ensino médio dar-se-á de forma: I – integrada, oferecida somente a quem já tenha concluído o ensino fundamental, sendo o curso planejado de modo a conduzir o aluno à habilitação profissional técnica de nível médio, na mesma instituição de ensino, contando com matrícula única para cada aluno;

No decreto, identificamos a terminologia educação profissional técnica de nível médio (EPTNM) utilizada nesta pesquisa. Baseada nesse decreto, a Lei nº 11.741/08 (BRASIL, 2008) propõe alterações na LDB Lei nº 9.394/96, embora mantenha a possibilidade de oferta de cursos técnicos nas formas concomitante e subsequente. Esses instrumentos legais permitiram a integração do ensino técnico de nível médio ao ensino médio na forma ofertada até o ano de conclusão dessa tese.

Figura 6 – Percursos formativos após a Lei nº 11.741/08



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

No âmbito da educação profissional, os cursos de nível básico passam a ser chamados de formação inicial e continuada. A educação profissional tecnológica passa a poder ofertar cursos a nível de pós-graduação. As cargas horárias dos cursos técnicos são reestruturadas. Atualmente maiores informações estão no Catálogo Nacional de Cursos Técnicos (CNCT).

Além disso, ocorre aumento da carga horária das disciplinas de formação geral no curso técnico integrado ao ensino médio, ou seja, essa formação geral passa a ter mesma carga horária daquela ofertada pelo ensino médio. Por exemplo, nessa época, o ensino médio tinha no mínimo de 2.400 horas, e um curso técnico integrado deveria ter 2.400 horas de formação geral mais a carga horária da formação técnica apresentada no CNCT[6].

[6] Em Brasil (2017), são realizadas alterações na estrutura do ensino médio brasileiro. Consideramos importante a necessidade de investigações futuras para analisar o impacto dessas alterações diante das mudanças que se anunciam a partir de 2019.

Na realidade brasileira, diversos estabelecimentos ofertam cursos técnicos.

> [...] realizados em instituições devidamente credenciadas pelos sistemas de ensino:
> a) ao Sistema Federal de Ensino:
> – os Institutos Federais, o Colégio Pedro II, as Escolas Técnicas Vinculadas às Universidades Federais, os Centros Federais de Educação Tecnológica e a Universidade Tecnológica Federal do Paraná, que integram a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica;
> – SENAI, SENAC, SENAR e SENAT, vinculados aos Serviços Nacionais de Aprendizagem (SNA);
> – instituições de ensino superior devidamente habilitadas para ofertar cursos técnicos.
> b) aos sistemas estaduais, Distrital e municipais de ensino:
> – redes públicas estaduais e municipais de educação profissional e tecnológica;
> – escolas técnicas privadas;
> – instituições de ensino superior devidamente habilitadas para ofertar cursos técnicos (BRASIL, 2016, p. 282).

Nesta pesquisa, discutiremos o estudo de saberes matemáticos no âmbito da EPTNM. O breve resgate histórico da formação profissionalizante de nível médio no Brasil mostra que fatores externos à sala de aula podem influenciar o sistema de ensino e, por consequência, o trabalho dentro de sala de aula, o que inclui os saberes que são ensinados e o modo como é conduzido esse ensino.

Como já foi dito, o marco teórico desta pesquisa é a teoria antropológica do didático. Segundo Chevallard (1999), um saber não existe “em um vácuo”; o saber aparece em determinado momento histórico, em uma determinada sociedade, ou seja, todo saber é saber de uma instituição.

2.2 ALGUNS ELEMENTOS DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Chevallard desenvolve a TAD como prolongamento de suas análises da transposição didática dos saberes. Segundo um curso ministrado por Michele Artaud na 9ª Escola de Verão, a problemática ecológica é introduzida na didática da matemática em 1988, por meio da tese de Landy Rajoson.[7]

Na época, foram investigados três casos de não existência no ensino regular francês: por que o problema de Moivre não consta no ensino do *lycée*[8]? Por que o algoritmo de Heron para o cálculo de raízes quadradas não se faz presente nas

---

[7] Original do francês: La problématique écologique fait explicitement son entrée en didactique avec une these, soutenue em 1988 por Landy Rajoson [...] (ARTAUD, 1997)
[8] Nível equivalente ao nosso ensino médio atual.

aulas? Por que a reflexão deslizante é vista rapidamente no ensino secundário daquele país?

Alguns questionamentos são característicos da problemática ecológica: o que existe e por quê? O que não existe, e por quê? O que poderia existir e sob quais condições? Quais objetos são forçados a viver, ou, ao contrário, são impedidos de viver? E quais condições influenciam a existência ou não existência? Embora essas perguntas pareçam ingênuas, Chevallard afirma que elas se mostram bem-sucedidas para questionar a “real didática”, pois permitem romper com a dupla ilusão: primeiramente, de considerar os saberes matemáticos como algo que se adéqua a uma ordem natural do seu ensino, e, no sentido inverso, ilusão de onipotência por pensar que a existência de um saber matemático é condição mais que suficiente para que ele seja ensinado. Segundo Chevallard, a problemática ecológica surge assim como o fundamento de uma arte do possível. A existência pode ser instável, e aqueles saberes só existem para determinada instituição por causa das condições localmente e temporariamente estáveis.

2.2.1 As noções de objeto, sujeito

Trazemos a noção de objeto denotada pelo símbolo O. Tudo é objeto, toda entidade, material ou imaterial, que exista para ao menos um indivíduo ou uma instituição, por exemplo: o número dez; a distância entre dois pontos; o instrumento teodolito; a abertura do ângulo. Em particular, toda obra, isso quer dizer, todo produto intencional da atividade humana, é um objeto (CHEVALLARD, 2002c).

Muitos objetos são estudados na escola, outros não. Neste trabalho, nosso interesse se volta para os objetos matemáticos estudados na EPTNM. No âmbito da formação de futuros profissionais, diferentes objetos aparecerão, dentre eles: trena, teodolito, nivelamento e desnível entre dois pontos.

Qualquer objeto O existirá quando for estabelecida uma relação de um indivíduo ou de uma instituição com o objeto. A relação pessoal remete ao conjunto de interações (falar, manipular, utilizar, sonhar etc.) que esse indivíduo tem com esse objeto.

Outra noção fundamental é a de pessoa, formada pelo indivíduo X e o conjunto de relações de X num dado momento da sua história, com os objetos que existem para esse indivíduo. Ao longo da sua vida, as relações de um indivíduo com os objetos muda. Por exemplo, novos objetos passarão a existir para X, assim como a relação pessoal que ele terá com determinados objetos será modificada. Nesse processo, o indivíduo é invariante, o que muda é a pessoa. O exemplo a seguir procura ilustrar, no âmbito da educação profissional, a diferença entre pessoa e indivíduo.

Uma jovem, Maria, de 14 anos, após concluir o ensino fundamental, ingressa numa escola para fazer uma formação profissionalizante de nível médio em edificações. A relação de Maria com alguns objetos que existiam para ela (ângulo reto ou distância entre dois pontos, por exemplo) é modificada, pois passa a sofrer influência do modo como esses objetos vivem nessa formação. Ao mesmo tempo, Maria estabelece relações com novos objetos (teodolito, curva de nível etc.) que não existiam para ela até então. Assim, o conjunto de relações de Maria com objetos de saber é modificado. O indivíduo Maria é o mesmo, mas a pessoa (o par formado pelo indivíduo Maria e o conjunto de relações com os objetos que existem para ela) se transforma nesse momento da história dessa jovem.

Chevallard (2002c) afirma que o universo cognitivo do indivíduo é o conjunto constituído por todos os objetos com os quais o indivíduo interage e todas as relações pessoais com esses objetos, ou seja, a maneira pela qual X conhece O. Nesses termos, o cognitivo não deve ser visto somente como um adjetivo num sentido de intelecto.

A noção fundamental de instituição I é introduzida para explicar a formação e evolução do universo cognitivo. Todo indivíduo é sempre sujeito de uma ou mais instituições. No âmbito da TAD, uma instituição é um dispositivo social (que pode ter uma abrangência limitada), mas que permite, e impõe, aos seus sujeitos um modo de fazer e pensar próprio. (CHEVALLARD, 2002c)

Existem diferentes tipos de relação das instituições com objetos de saber. Há instituições produtoras de saberes; instituições que utilizam saberes; instituições transpositivas; instituições de ensino.

Essas relações não são mutuamente excludentes. Procurando exemplificar, a Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa) é uma instituição produtora de saber, essa produção é resultado das pesquisas realizadas. Entretanto, a Embrapa utiliza, para desenvolver suas pesquisas, saberes produzidos em outras instituições, como é o caso dos modelos matemáticos. Acrescentamos a tais aspectos as ofertas de cursos por ela, o que a caracteriza como uma instituição que também ensina. Esse exemplo ilustra uma possível diversidade, pois, tomando por referência o significado da sigla, o foco da Embrapa é a pesquisa.

Chevallard (2002c) afirma que os sujeitos de uma instituição são as pessoas que vivem e ocupam diversas posições, denotadas pelo símbolo p, oferecidas em I. Por exemplo, temos como sujeitos da instituição escola: professor, aluno, coordenador etc. Considerar que esses indivíduos ocupam diferentes posições diz respeito àquilo que a instituição espera deles enquanto ocupantes dessas posições, ou seja, o que a escola espera de um professor que leciona matemática para uma turma de ensino médio? O que a escola espera de um aluno de um curso técnico?

Dado um objeto O, uma instituição I e uma posição p, a relação institucional com objeto O na posição p diz respeito àquilo que a instituição espera que os sujeitos ocupantes dessa posição saibam sobre O. E que sejam capazes de fazer com esse objeto, ou seja, o modo como a instituição espera que seus sujeitos realizem certas tarefas. Por exemplo, a relação institucional vai modelar o que e como a escola espera de um sujeito ocupante da posição de professor que leciona matemática para uma turma de ensino médio regular saiba e seja capaz de fazer. Ou o que espera que um aluno de um curso técnico em agropecuária saiba e seja capaz de fazer. Um indivíduo é considerado um bom sujeito da instituição se há um grau elevado de conformidade entre o que ele faz e como faz e as expectativas da instituição para os sujeitos que ocupam sua posição.

Ressaltamos que essa conformidade não se refere a uma passividade do sujeito com respeito à instituição. A relação institucional numa determinada posição é dinâmica, então, ao se dizer bom sujeito, não se trata de um julgamento de valor, sendo somente uma avaliação de conformidade. O fato de os sujeitos interferirem nas instituições às quais estão assujeitados faz com que sejam atores das modificações das relações institucionais.

Anteriormente, mencionamos que os questionamentos dos colegas professores dos componentes curriculares da formação técnica faziam referência às dificuldades dos alunos ao mobilizar conteúdos matemáticos supostamente vistos no ensino fundamental. De certo modo, a relação pessoal desses alunos não parece estar em conformidade com aquilo que esse professor esperava dos sujeitos na posição de aluno do referido componente curricular. Embora seja um caso em particular, ajuda-nos a teorizar sobre um fenômeno complexo conforme posto a seguir.

Lembramos que um aluno ocupará a mesma posição, mas estará assujeitado a diferentes componentes curriculares, devido à existência de um conjunto complexo de sujeições. Por exemplo, enquanto aluno do ensino médio, ele estuda matemática, física, química etc. Ocupante da mesma posição: aluno; entretanto, assujeitado a todas essas instituições, nas quais certos objetos matemáticos vivem em comum. Sendo aluno de curso da EPTNM, estudará componentes curriculares da formação geral e outros da formação técnica. Assumirá, portanto, a posição de aluno em diversas instituições nas quais vivem objetos matemáticos.

Toda instituição define as relações institucionais na posição p, e Chevallard destaca que a relação pessoal que os indivíduos estabelecem com objetos de saber é fortemente influenciada pelas instituições em que esses objetos vivem e nas quais esses indivíduos são sujeitos.

> [...] Em geral, as nossas relações "pessoais" são, portanto, o resultado da história dos nossos assujeitamentos institucionais, passados e presentes. Reciprocamente, uma instituição I, e as diferentes obras O, as quais essa instituição serve de habitat, não poderiam existir sem os sujeitos. Estes são os atores da instituição I, e portanto das obras que vivem em I, e fazem que elas continuem a viver em I. (CHEVALLARD, 2002c, p. 3, tradução nossa)[9].

Uma instituição admite outras instituições no seu interior. Vejamos o seguinte caso: a escola é uma instituição de estudo de saberes e possui diferentes cursos, considerados como instituições nela inseridas. Os cursos técnicos numa escola de EPTNM são outro exemplo; os diversos componentes curriculares presentes nesses cursos podem ser vistos como instituições que fazem parte de outra mais complexa.

O professor pode ser visto como representante, mandatário de uma instituição. Em certa medida, ele representa a maneira de fazer e pensar própria da instituição que representa.

No âmbito da TAD, para poder modelar as relações institucionais e as relações pessoais Chevallard (1999) propõe a noção de praxeologia. Portanto, essa noção será um instrumental teórico metodológico utilizado para modelar tais relações.

---

[9] Original em francês: "[...] D'une manière générale, nos rapports « personnels » sont ainsi le fruit de l'histoire de nos assujettissements institutionnels passés et présents. Réciproquement, une institution I, et les différentes œuvres O auxquelles elle sert d'habitat, ne sauraient exister sans sujets. Ceux-ci sont les acteurs de l'institution *I*, et donc des œuvres *O* qui vivent dans *I*, et font que celles-ci continuent d'y vivre". (CHEVALLARD, 2002c, p. 3). Todas as traduções são nossas, estando os respectivos originais em notas de rodapé.

2.2.2 A noção de praxeologia

Um postulado da TAD é que toda atividade humana pode ser modelizada sob um modelo resumido pela palavra praxeologia (CHEVALLARD, 1999), a qual é originada a partir de dois termos gregos, “práxis e logos”, que correspondem, respectivamente, às dimensões prática e teórica. Nessa perspectiva, a atividade de estudo da matemática é considerada como atividade humana, o que justifica, segundo nosso entendimento, o termo antropológico. Uma praxeologia é uma organização constituída por quatro componentes: tipo de tarefas, técnica, tecnologia e teoria.

As noções solidárias de tarefa t e tipo de tarefas T estão na raiz da noção de praxeologia. Quando t pertence a T, dizemos que a tarefa t pode ser caracterizada segundo um tipo de tarefa T. As atividades propostas em sala de aula podem ser vistas como exemplos de tarefas t.

Nos tipos de tarefas T, o objeto está bem especificado. Calcular a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 cm e 4 cm é uma tarefa do tipo “calcular a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo dadas as medidas dos seus catetos”. Por sua vez, esse tipo de tarefa faz parte de um gênero de tarefas – calcular – do qual também fazem parte, vários outros tipos de tarefa como calcular a área de um retângulo dados os comprimentos de dois lados adjacentes, calcular as raízes de uma equação de segundo grau, calcular a quantidade de diagonais de um polígono, calcular o determinante de uma matriz, calcular a derivada de uma função etc. Portanto, a tarefa é mais precisa. O tipo de tarefa tem um grau de precisão intermediário porque agrupa tarefas, mas, ao mesmo tempo, faz parte de um gênero de tarefa que é algo mais geral.

São também tipos de tarefas matemáticas medir a distância entre dois pontos, simplificar uma expressão numérica ou determinar o seno de um ângulo vinculados, respectivamente, aos gêneros medir, simplificar e determinar, entre muitas outras possibilidades. Em concreto, um gênero de tarefa não existirá em um “vácuo”, e sua existência se dá na forma dos diferentes tipos de tarefas T que são associados a ele.

Chevallard (1998) afirma que, ao longo da vida escolar, o gênero será enriquecido pelo surgimento de novos tipos de tarefas T ocasionado pelo aparecimento de outros objetos. As tarefas, os tipos de tarefas e gêneros de tarefas são construções institucionais. Não provêm da natureza. Assim, suas reconstruções no ambiente da sala de aula são objeto de estudo da didática.

As tarefas do tipo T serão respondidas ou executadas por meio de procedimentos, chamados técnica τ. Nesses termos, uma praxeologia relativa ao tipo de tarefa T contém, em princípio, uma técnica τ relativa a T, constituindo, assim, o bloco [T/τ], chamado bloco prático-técnico. (CHEVALLARD, 1999).

De que é feita uma dada técnica? Quais *ingredientes* a compõem? Na observação desse elemento da atividade humana, Chevallard (1994) estabelece uma fundamental distinção entre dois tipos de objetos: os objetos ostensivos e os não ostensivos. São denominados de ostensivos aqueles objetos que possuem uma forma material. Por exemplo, um lápis, mas também os ostensivos gestuais (gestos); ostensivos discursivos (as palavras e mais geralmente o discurso); ostensivos gráficos (diagramas, desenhos e gráficos); e ostensivos escriturais (escritos e formalismos). Contrariamente aos ostensivos, os não ostensivos são as noções, conceitos e ideias e podem somente ser evocados e manipulados por meio dos ostensivos associados.

Uma técnica τ terá êxito sobre uma parte das tarefas do tipo T. Utilizaremos o seguinte exemplo, o tipo de tarefa *medir a distância entre dois pontos*. A primeira tarefa será: medir o comprimento de um segmento de reta AB representado numa folha tamanho A4. A técnica que consiste em utilizar uma régua escolar, de plástico, de 30 cm, posicionar um dos extremos do segmento AB no zero, verificar onde se localiza o outro extremo e ler sobre a régua o valor correspondente será eficiente e econômica para realizar essa tarefa, pois o comprimento a ser medido é acessível e menor que 30 cm. São objetos ostensivos: régua, o desenho do segmento de reta AB; enquanto a noção de comprimento associado à distância entre os pontos A e B é um não ostensivo. Entretanto, essa técnica é eficiente, mas não econômica para as tarefas *medir a largura de uma mesa de jantar*, de seis lugares; ou *medir as dimensões de um colchão*. E certamente a utilização da régua como instrumento de medida não será uma técnica eficaz para resolver a tarefa *medir altura de um edifício*.

As técnicas não são necessariamente algorítmicas, mas serão explicadas, justificadas e produzidas por uma tecnologia θ esclarecida e apoiada por uma teoria Θ; que formam o bloco tecnológico-teórico [θ/Θ]. Esses quatro componentes: tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria [T, τ, θ, Θ] compõem uma praxeologia matemática pontual, pois está organizada em torno de um único tipo de tarefa. Investigar o estudo de saberes matemáticos no âmbito da EPTNM permite refletir sobre as interações entre os dois blocos diante da realidade da formação profissional.

No âmbito da TAD, uma praxeologia matemática local é um amálgama de organizações pontuais [$T_i/\tau_i/\theta/\Theta$] $i \in I$, organizada em torno de um discurso tecnológico. Analogamente, mas num nível superior, a organização regional é vista como fruto do amálgama das organizações locais que admitem a mesma teoria [$T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta$] $i \in I_j$, $j \in J$. E o amálgama de várias organizações regionais conduz a uma organização global [$T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\ \Theta_k$] $i \in I_j$, $j \in J_k$.

A tecnologia θ é o discurso que objetiva justificar racionalmente a técnica. Chevallard (1998) afirma que esse estilo de racionalidade varia, por pressuposto, de acordo com o espaço institucional, em certo momento histórico daquela instituição. Desse modo, enquanto em uma instituição essa racionalidade é bastante presente, pode ser pouco citada em outra instituição. O autor afirma que existe na técnica a presença de um embrião da tecnologia.

A teoria Θ tem uma relação com a tecnologia θ, semelhante ao papel que esta tem com a técnica, em um nível superior de justificação. O discurso da tecnologia tem afirmações, explícitas ou não, da razão. Uma praxeologia é uma construção social que vive de maneira estável em determinada instituição I.

Romo-Vazquez (2009) afirma que o papel atribuído ao bloco tecnológico-teórico é precisamente o de estabelecer o reconhecimento institucional do bloco prático-técnico. Uma praxeologia pode viver em diferentes instituições esse processo de multilocalização pode ocasionar o enriquecimento das praxeologias socialmente disponíveis, criando praxeologias adaptadas às novas condições institucionais.

Nesse sentido, existem instituições que produzem, transmitem e utilizam as praxeologias. Embora não seja um resultado geral, essa autora comenta que as praxeologias são, ao menos parcialmente, elaboradas e transmitidas no seio da mesma instituição. Nosso interesse nesta pesquisa é o estudo e a ajuda ao estudo de organizações praxeológicas. Na TAD, esse aspecto é investigado por meio das organizações didáticas, o que será discutido no tópico a seguir.

2.2.3 Os momentos de estudo

A teoria antropológica do didático apresenta modelização da atividade didática de um professor quando ele propõe à sua turma o estudo de saberes matemáticos. Esse processo exige uma organização do saber, por meio das organizações didáticas. Nesta seção, o olhar está direcionado para como se estrutura o estudo das praxeologias matemáticas. As organizações didáticas são o modelo que a TAD propõe para estruturar e dar funcionalidade ao estudo de um tema.

> […] certos tipos de situações são quase necessariamente presentes ao longo do estudo, mesmo que seja de maneiras muito diferentes, tanto no plano qualitativo como no plano quantitativo. São tais tipos de situações que chamaremos momentos do estudo, ou momentos didáticos [...]. (CHEVALLARD, 2002a, p. 11, tradução nossa)[10].

Consideramos o estudo da organização praxeológica mais simples, a praxeologia matemática pontual, formada em torno de um único tipo de tarefa T. Os seis momentos de estudos são:

a) encontro com a praxeologia matemática a ser estudada;

b) exploração do tipo de tarefa e de elaboração de técnicas;

c) constituição do ambiente tecnológico e teórico;

d) institucionalização;

e) trabalho da técnica;

f) avaliação.

Eles não representam uma ordem cronológica necessária. (CHEVALLARD, 2002a). Esses momentos dão conta do processo de ensino, seja de matemática, seja de outra disciplina que faz uso da matemática ou mesmo de uma prática profissional.

Segundo Chevallard (1999, 2002a), a ordem indicada é arbitrária porque os momentos didáticos são uma abordagem da realidade funcional e não cronológica do estudo, ou seja, eles não representam necessariamente uma ordem cronológica, mas sim propõem discutir resposta para pergunta do tipo: como estudar uma praxeologia matemática?

---

[10] Original do francês: "[…] certains types de situations sont presque nécessairement présents au cours de l'étude, même s'ils le sont de manière très variable, tant au plan qualitatif qu'au plan quantitatif. Ce sont de tels types de situations qu'on appellera *moments de l'étude*, ou *moments didactiques* […]" (CHEVALLARD, 2002a, p. 11).

Tomamos a estrutura mais simples de uma organização matemática, a praxeologia pontual *O* = [$T/\tau/\theta/\Theta$], formada em torno de um único tipo de tarefa T. Assim, o primeiro momento de estudo é o primeiro encontro com *O*. Esse encontro pode se dar de várias maneiras, por exemplo, através dos tipos de tarefas T referentes ao objeto *O*. Pode ser de modo mais informal, quando o professor avisa a turma: na próxima aula, começaremos o estudo sobre as razões trigonométricas. Existem também outros modos mais formais, tais como apresentação de uma problemática que conduza os alunos a pesquisar sobre a razão de ser do objeto estudado; ou por meio de um discurso, uma definição.

Chevallard (1999) afirma que a relação com o objeto não é determinada completamente no primeiro encontro, mas sim construída e melhorada ao longo do processo de estudo.

O segundo momento é o de exploração de um tipo de tarefa T e a elaboração de uma técnica τ_i relativa à T. Chevallard (1999) alerta que, muitas vezes, a elaboração de uma técnica é o coração da atividade matemática. Afirma que, na realidade, o estudo da resolução de um determinado tipo de tarefa caminha de mãos dadas com a constituição de um embrião da técnica. O estudo de uma tarefa particular não deve ser um fim, mas um meio para que a técnica de resolução se constitua. Assim, é estabelecida a seguinte dialética: estudar as tarefas é uma maneira permanente de criar e de pôr uma técnica relativa às tarefas de mesmo tipo, técnicas que serão em si o modo de resolução.

O terceiro momento de estudo é a constituição do ambiente tecnológico teórico [θ/Θ], relativo à técnica τ_i. Chevallard (1999) afirma que esse terceiro momento está inter-relacionado como os demais e, muitas vezes, por argumentos de economia didática, é a primeira etapa do estudo. Assim, o estudo dos tipos de tarefas aparece como uma sequência de aplicações do bloco tecnológico-teórico.

O quarto momento é o trabalho com a técnica, devendo-se aprimorá-la, tornando-a mais confiável, exigindo certo retoque na tecnologia elaborada até então. O trabalho é no sentido de ampliação, percebendo que aquela técnica τ_i que dava conta de uma tarefa do tipo T também soluciona outras tarefas, denominadas T_i, que formam um conjunto não apenas com quantitativo, mas qualitativo também. Conjunto formado pelas técnicas que dão solução para uma grande variedade de tipos de tarefas. Portanto, temos o estudo de [$T_i /\tau_i/\theta/\Theta$].

A institucionalização é o quinto momento. Nele, é estabelecido o objeto matemático, havendo a separação de partes dos elementos usados na sua construção e a incorporação definitiva de outras partes. É o momento da oficialização das relações institucionais, em que se revela não ser suficiente estudar a organização praxeológica $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, havendo uma ampliação dos tipos de tarefas associados à tecnologia θ. O sexto momento é aquele da avaliação que se articula com a institucionalização. Chevallard (1999) afirma que, em alguns aspectos, o momento de avaliação é um submomento da institucionalização. O fundamento do projeto de avaliar as relações pessoais está na hipótese que as relações institucionais transcenderam às pessoas, sendo então a institucionalização hipostasiada[11]. Segundo Chevallard,

> A operação de avaliação deve ser entendida como algo mais amplo: por trás da clássica avaliação das relações pessoais, ou seja, por trás da avaliação "de pessoas", está a avaliação do padrão em si, a relação institucional que serve de modelo. Qual é a organização matemática que foi constituída e institucionalizada? Além da interrogação sobre o domínio, por tal pessoa, de tal técnica encontra-se então a interrogação sobre a técnica em si: é potente, manejável, segura, robusta? Aqui, essa avaliação é formadora, não de uma pessoa, [...], mas de uma praxeologia, por isso, participa da institucionalização. Como reformuladora, ela relançará o estudo, incentivará a retomada deste ou daquele momento e, talvez junto, do percurso didático[12]. (1999, p. 22-23, nossa tradução).

A avaliação de uma praxeologia local $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ basear-se-á em critérios explícitos, a especificar e justificar. Chevallard (1999) afirma que essa operação de avaliação deverá permitir até que ponto os critérios são satisfeitos pela organização matemática a ser avaliada. Essas considerações levam o autor a propor categorias de critérios: de identificação, das razões de ser, de pertinência. O objetivo dessa lista é apresentar como exemplo e não como um material pronto e finalizado.

Essas categorias são compostas por questionamentos sobre os elementos da praxeologia a ser avaliada. Alguns exemplos de critérios de identificação presentes

---

[11] Considerar como substância ou coisa real o que é apenas uma ficção ou abstração; reificar.

[12] Original do francês: L'opération d'évaluation doit être entendue aussi en un sens plus large : derrière l'évaluation toute classique des rapports *personnels*, c'est-à-dire derrière l'évaluation "des personnes", se profile l'évaluation de la *norme elle-même* – le rapport institutionnel qui sert d'étalon. Que vaut, en fait, l'organisation mathématique qui s'est construite et institutionnalisée ? Au-delà de l'interrogation sur la maîtrise, par telle personne, de telle technique on trouve alors l'interrogation *sur la technique elle-même* – est-elle puissante, maniable, sûre, robuste aussi ? Cette évaluation […] est ici formatrice, non d'une personne, mais d'une praxéologie : à ce titre, elle participe de l'institutionnalisation. Réformatrice, elle relancera l'étude, suscitera la reprise de tel ou tel moment, et peut-être de l'ensemble Du parcours didactique.

em Chevallard (1999): os tipos de tarefas são claramente propostos e bem identificados? As técnicas propostas são efetivamente elaboradas ou apenas esboçadas? Elas são fáceis de utilizar? As formas de justificação utilizadas estão próximas das formas canônicas em matemática? Elas são adaptadas às condições de utilização? Referente ao segundo critério anunciado: as razões de ser dos tipos de tarefas e das técnicas são explicitadas? Ou são desmotivantes? Critério de pertinência: os tipos de tarefas e técnicas são pertinentes para as necessidades matemáticas dos estudantes de hoje?

Chevallard (1999) afirma que o modelo dos momentos de estudo propicia dois importantes elementos para o professor. Primeiro porque constitui uma grade para análise do processo didático e, por consequência, permite colocar claramente a problemática da realização dos diferentes momentos de estudo. O professor não é somente diretor e ator, mas também é o criador, estilista, arquiteto de situações didáticas. O modelo dos momentos de estudo possibilita que o professor reflita sobre questionamentos que lhe são propostos, por exemplo, como realizar concretamente o primeiro encontro com tal organização matemática? Como realizar o momento de avaliação?

No próximo tópico, situamos os questionamentos iniciais que motivaram a pesquisa no âmbito da TAD e formulamos as hipóteses a serem verificadas.

2.3 HIPÓTESES

A origem das nossas indagações é que, sob a ótica dos professores encarregados da formação técnica, a relação pessoal dos alunos com os saberes matemáticos não lhes permite lidar adequadamente com as questões vivenciadas durante o curso de formação profissional. A formulação das hipóteses busca explicar o que pode estar ocorrendo a esse respeito. Ressaltamos que tais hipóteses não são mutuamente excludentes, podendo existir sobreposição.

Em face disso, enunciamos nossa primeira hipótese, **H1: o equipamento praxeológico matemático do aluno não é suficiente para resolver as tarefas que utilizam matemática nos componentes curriculares da formação profissional**.

Aquilo que o aluno conhece sobre matemática é parte do seu equipamento praxeológico matemático, ou seja, o conjunto de todas as praxeologias matemáticas que compõem o universo cognitivo desse aluno e que será enriquecido ao longo de sua trajetória de vida. “A relação R(X,O) será constituída a partir das praxeologias que, em EP(x), *ativam* O de uma maneira ou de outra, por exemplo, no plano técnico ou no registro tecnológico, etc.” (CHEVALLARD, 2007, p. 11, tradução nossa)[13].

Outra possibilidade de estudo está direcionada para as relações institucionais em cada componente curricular. Trazemos nossa segunda hipótese, **H2: no curso de EPTNM, para o mesmo tipo de tarefa existe grande desconexão (descompasso) entre as praxeologias pontuais estudadas nos componentes curriculares da formação técnica e as praxeologias pontuais estudadas em componentes curriculares da formação geral.**

Nessa hipótese, refletimos sobre o fato de, por necessidades específicas da Sociedade, saberes serem escolhidos para serem ensinado na EPTNM. A existência de saberes matemáticos, em comum nos diversos componentes curriculares, pode ser vista como resultado de diferentes percursos de transposição didática.

Podemos trazer alguns exemplos: a função polinomial do 1º grau está na matemática e na física; o logaritmo é um conteúdo presente na matemática e na química; o cálculo de distâncias inacessíveis é abordado na matemática e na topografia.

Nessa hipótese, faremos reflexões acerca do que podemos dizer sobre a vida do bloco prático-técnico nos dois componentes curriculares quando estão em jogo tarefas de um mesmo tipo? Sobre o papel de reconhecimento institucional atribuído ao bloco tecnológico-teórico, qual sua estrutura quando olhamos para a vida de saberes matemáticos em componentes que os utilizam?

Outro aspecto que podemos refletir é como essas praxeologias são reconstruídas nesses componentes curriculares. São mantidos os mesmos *porquês* do estudo dessas praxeologias, por exemplo: os porquês de estudar o cálculo de distâncias inacessíveis nas instituições *ensino de matemática* e *ensino de topografia* são os mesmos, ou há grandes diferenças?

Diante das diversas instituições presentes num curso de educação profissional, e do fato da existência de saberes matemáticos nessas instituições,

[13] Original em francês: “[...] Le rapport de *x* à *o* est alors en quelque sorte la ‘coupe’ de *EP*(*x*) par l’objet *o* : il sera constitué à partir des praxéologies qui, dans *EP*(*x*), ‘activent’ *o* d’une manière ou d’une autre – par exemple au plan technique, ou dans le registre technologique, etc. ” (CHEVALLARD, 2007)

pensamos que existam aquelas que se dedicam a estudá-los e outras que os utilizam sem a obrigatoriedade de os ensinar. Nessa perspectiva de identificar uma realidade de estudo de saberes matemáticos, mas também de utilização desses mesmos saberes, adotaremos a expressão vida. Portanto, o objetivo desta pesquisa é: **investigar a vida de saberes matemáticos no âmbito da EPTNM.**

3 PERCURSO METODOLÓGICO

Vários caminhos permitem investigar a vida de saberes matemáticos em componentes curriculares da EPTNM. Escolhemos iniciar com a análise de documentos oficiais sobre os cursos da EPTNM.

Brasil (2012; 2016) são as versões atuais do Catálogo Nacional de Cursos Técnicos (CNCT). São documentos do Ministério da Educação, órgão responsável por regulamentar a oferta dos cursos técnicos de nível médio no país. “[...] A proposta de catálogo foi construída, em regime de colaboração com os sistemas de ensino, instituições de educação profissional e tecnológica, ministérios e órgãos relacionados ao exercício profissional [...]” (BRASIL, 2016, p. 8).

A escola escolhida para realização da parte empírica da pesquisa será chamada de escola São Bento.[14] Localizada na região metropolitana de uma capital do Brasil, faz parte da rede federal de educação profissional e oferece regularmente cursos técnicos na modalidade integrada ao ensino médio.

Na sua origem, está o curso técnico em agropecuária, oferecido pela escola São Bento há mais de meio século. Lembramos que todas as reflexões presentes na introdução desta pesquisa partiram da minha prática enquanto professor de matemática desta escola.

Compreender o histórico da rede federal de educação nos evidencia que aspectos presentes fora da escola determinam um conjunto de condições e restrições que incide diretamente nela. Diante das reflexões iniciais, buscamos indicações no CNCT, para o perfil profissional de conclusão desse curso técnico e percebemos a possibilidade da vivência de saberes matemáticos no curso de formação devido às indicações: realiza medição, demarcação e levantamentos topográficos rurais. O Brasil é um país de grande extensão territorial com enorme biodiversidade, havendo a necessidade de grande formação profissional no eixo tecnológico de Recursos Naturais que

> [...] compreende tecnologias relacionadas à extração e produção animal, vegetal, mineral, aquícola e pesqueira. Abrange prospecção, avaliação técnica e econômica, planejamento, extração, cultivo e produção de recursos naturais e utilização de tecnologias de máquinas e implementos. A organização curricular dos cursos contempla conhecimentos relacionados a: leitura e produção de textos técnicos; raciocínio lógico; ciência, tecnologia e inovação; investigação tecnológica; tecnologias sociais,

[14] Para preservar a identidade da escola foi usado um nome fictício.

> empreendedorismo, cooperativismo e associativismo; tecnologias de comunicação e informação; desenvolvimento interpessoal; legislação e políticas públicas; normas técnicas; saúde e segurança no trabalho; gestão da qualidade; responsabilidade e sustentabilidade social e ambiental; qualidade de vida; e ética profissional. (CNCT, 2016, p. 225,).

Outro fator importante para escolha desta escola foi o modo de seleção dos alunos. Diferentemente do Instituto Federal e das escolas técnicas presentes no Estado, na época desta pesquisa, a seleção dos alunos é por meio de análise curricular, e o candidato apresenta à secretaria da escola sua ficha 18[15].

Direcionamos nosso olhar para os cursos técnicos em agropecuária, buscando os componentes curriculares nos quais se estudam ou utilizam saberes matemáticos. Topografia é mencionada nas duas versões do CNCT (BRASIL, 2012 e 2016).

Em Brasil (2012), é uma possibilidade de tema a ser abordado na formação do futuro profissional. E a realização de levantamentos topográficos rurais faz parte do perfil profissional da versão publicada em 2016.

Assim temos outro fator que influenciou em nossa escolha pelo componente curricular topografia. Diante dessa constatação, direcionamos nosso olhar para a escola, mais especificamente o currículo do técnico em agropecuária e a infraestrutura. O colégio possui sala exclusiva para prática de desenho, contendo diversas pranchetas. E topografia é um componente curricular do curso ofertado pela escola.

Após essa etapa de busca nos documentos, fomos conversar com o professor de topografia, explicando-lhe que o objetivo da pesquisa está nos saberes matemáticos vivenciados no componente curricular sob sua responsabilidade. Ele confirmou que muitos conteúdos matemáticos são usados nas aulas e aceitou o convite para participar da pesquisa.

Além de Brasil (2012; 2016), analisamos outros documentos: a ementa do componente curricular topografia e o possível livro utilizado pelo professor. Procuramos nesses textos identificar as praxeologias preconizadas. A ausência de elementos da praxeologia nesses documentos, bem como a falta de um livro utilizado pelo professor, ocasionou a tomada de duas decisões: entrevistar o professor e observar suas aulas.

[15] É o histórico escolar de todo o período do ensino fundamental; nele, estão informações tais como: escola, grade curricular, médias anuais de cada componente curricular por ano estudado.

Tratou-se de entrevista semiestruturada com seguinte roteiro: formalizar nossa parceria; solicitar uma descrição de sua formação acadêmica; investigar a importância da topografia para o técnico em agropecuária; investigar a situação do componente curricular topografia no curso ambiente da pesquisa. De certa forma, procurávamos elementos sobre o porquê de estudar topografia na agropecuária. Outros aspectos surgiram durante essa entrevista, e a possível utilização de instrumentos de medidas norteou algumas indagações: quais instrumentos de medida a escola dispõe para as aulas de topografia; quais atividades são estudadas nesse componente curricular e por quê? Na época da entrevista, o professor estava ministrando o componente curricular para turma do técnico em agropecuária na modalidade concomitante. No caso desses componentes da formação técnica, o professor comenta que não existem mudanças no conteúdo devido à modalidade do curso.

Ele será chamado de Eduardo. Possui formação de técnico agrícola[16], graduação em Engenharia Florestal e realizou a licenciatura em Ciências Agrícolas. Ao término da graduação, foi convidado pra ser professor na escola da qual foi aluno. Nessa escola, lecionou, no curso técnico agrícola, vários componentes curriculares, dentre elas, topografia. Trabalhara por seis anos, quando prestou concurso para a escola São Bento, iniciando oficialmente em janeiro de 2000. É um professor com mais de vinte anos de experiência. Ele relata que, após seu ingresso na escola federal, teve oportunidade de continuar sua formação. Possui mestrado e doutorado em Ciências Florestais, investigando temas relacionados à topografia.

Sobre sua formação, destacamos o fato de ele possuir Habilitação de Licenciatura em Ciências Agrárias (HLCA) e ressaltamos que, embora lecione um componente curricular que aplica saberes matemáticos (e não que se encarrega de ensinar saberes matemáticos), o professor está diante de um problema didático, uma vez que tem por tarefa ensinar para um grupo de sujeitos.

Segundo informações do site da Universidade[17], a HLCA tem por objetivos, dentre outros: formar professores(as) para o ensino básico (médio e profissional) atendendo ao art. 62 de Brasil (1996); formar profissionais para trabalhar com extensão rural; desenvolver processos educacionais de capacitação profissional; trabalhar com agroecologia, agricultura familiar, desenvolvimento local sustentável;

[16] Nomenclatura da época de conclusão do curso de Eduardo.
[17] Universidade em que Eduardo realizou toda sua formação acadêmica.

trabalhar com educação do campo; trabalhar com metodologias populares e participativas.

A admissão nessa habilitação é por meio de seleção pública e, nela, podem se inscrever estudantes dos cursos de Agronomia, Medicina Veterinária, Zootecnia, Engenharia Florestal, Engenharia de Pesca e Engenharia Agrícola e Ambiental, desde que estejam matriculados a partir do 5° período desses cursos. Também podem participar aqueles candidatos já formados e portadores de diploma dos mesmos cursos, outorgados por instituição de ensino superior reconhecida pelo Ministério da Educação do Brasil.

No âmbito dessa investigação, a instituição “curso técnico em agropecuária” possui uma grade curricular composta por componentes destinados à formação geral e à formação técnica. Nossa análise terá o olhar para dois componentes: matemática pertencente à formação geral e topografia presente na formação técnica.

O registro das aulas de topografia ocorreu de duas formas, ora áudio-gravação, ora filmagem. As observações ocorreram no período de outubro de 2016 a março de 2017. Devido ao momento político da época, em novembro e dezembro de 2016 ocorreram ocupações nas escolas por estudantes e greves de funcionários públicos em várias cidades do Brasil. A escola São Bento passou pelo processo de ocupação estudantil e por uma greve dos servidores públicos. Por consequência, houve atraso no cronograma inicial que previa término das atividades em dezembro daquele ano.

Essas observações possibilitaram identificar os objetos matemáticos presentes nas aulas. Observamos alguns elementos que remetem às duas hipóteses, dentre outros: os tipos de tarefa que a topografia se dedica a responder; as técnicas exploradas; o que se espera de um sujeito ocupante da posição p de aluno de topografia. Entretanto, percebemos outros elementos que não havíamos discutido até então, tais como: o estudo e a utilização dos instrumentos de medida.

As praxeologias estudadas em topografia serão chamadas de praxeologias mistas, pois os elementos do quarteto praxeológico não são constituídos apenas por objetos matemáticos.

A identificação dos saberes matemáticos efetivamente vivenciados possibilitou um redirecionamento no olhar para os documentos oficiais, tanto aqueles que fazem referência à educação profissional (BRASIL, 2012; 2016) quanto para os da educação básica (BRASIL, 1997; 1998; 2002a; 2002b; 2006a). Nesses referenciais, procuramos analisar que elementos eles trazem sobre os saberes matemáticos identificados, o que possibilita discutir as relações institucionais preconizadas em torno de tais saberes.

A busca por maior caracterização da relação institucional sustentou nossa análise do livro didático de matemática adotado pela escola. Analisamos os capítulos destinados aos estudos dos objetos matemáticos identificados nas observações das aulas de topografia. Mais especificamente, traremos discussões sobre o capítulo que trata das razões trigonométricas, pois identificamos que a topografia é estudada no segundo semestre do curso e um dos objetos matemáticos foram as razões trigonométricas.

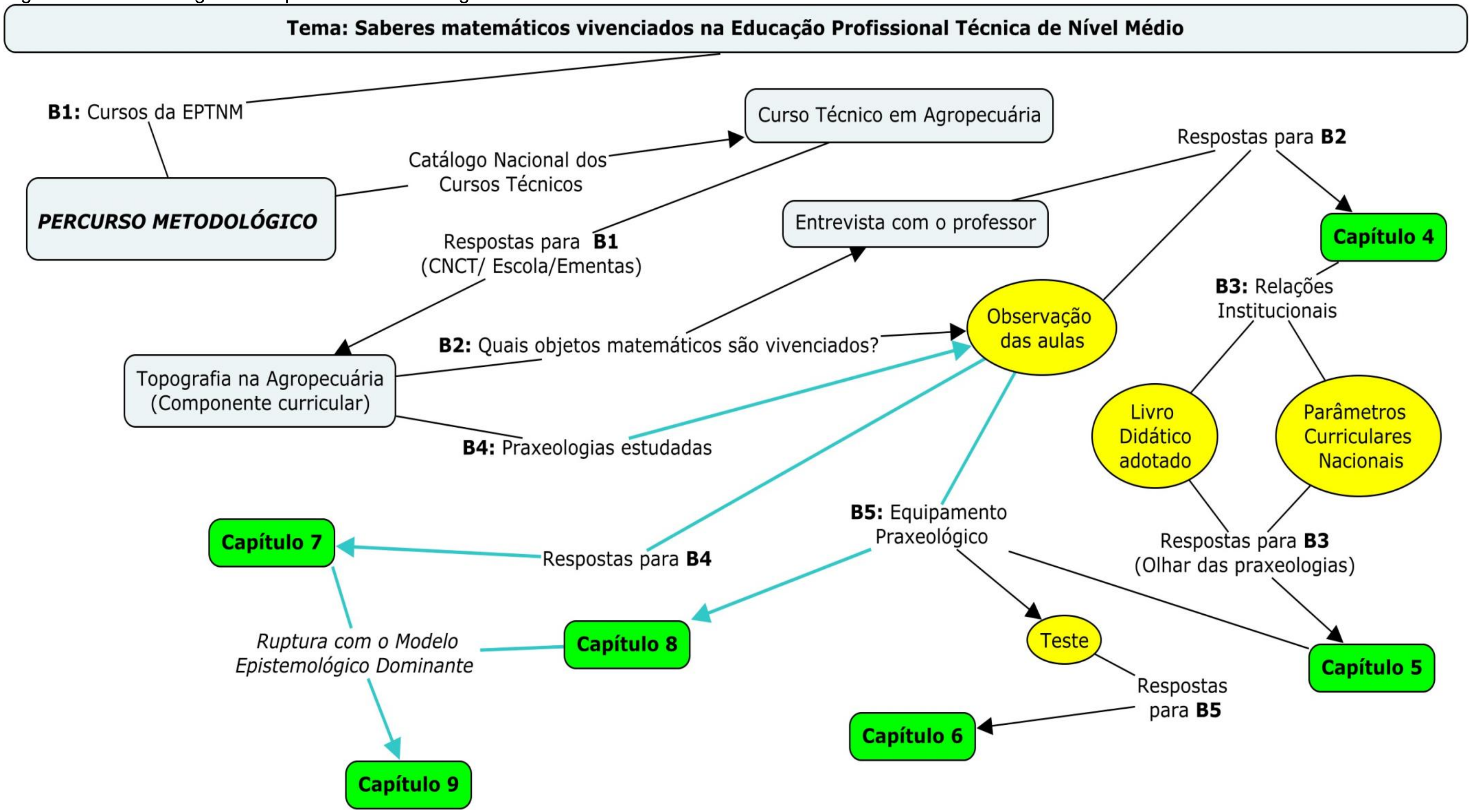
Diante dessas constatações, analisamos o primeiro volume da coleção *Conexões com a Matemática*, da Editora Moderna. Editor responsável: Fábio Martins de Leonardo, 2ª edição, 2013, aprovada no Programa Nacional do Livro Didático, PNLD, para o triênio 2015 a 2017.

Nessas análises, utilizamos a noção de praxeologia como ferramenta teórico-metodológica. Assim, podemos identificar aspectos que nos possibilitam discutir o conjunto de hipóteses lançadas. Essa maior caracterização das relações institucionais entre os objetos matemáticos vivenciados em topografia e a instituição ensino de matemática forneceu subsídios para a elaboração de uma atividade de sondagem, o que nos possibilitou refletir sobre outro aspecto: o equipamento praxeológico do aluno.

A figura seguinte busca apresentar um panorama do percurso metodológico utilizado. As buscas estão indicadas por B1, B2,..., B5. Elas não são constituídas exclusivamente de questionamentos, quando mencionamos B3: relações institucionais significam que a temática dessa busca permeia essa noção. Particularmente, nessa busca a instituição considerada foi *ensino de matemática.* Os capítulos foram postos como a construção da resposta para essas buscas.

Destacamos que a observação das aulas é um elemento importantíssimo nesse percurso, pois podemos analisá-las sob o olhar de várias buscas, bem como os resultados dessa análise subsidiaram as discussões presentes nos demais capítulos.

Figura 7 – Estrutura global do percurso metodológico



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

4 ESTUDO EXPLORATÓRIO

Este capítulo pretende responder à seguinte pergunta: que objetos matemáticos são utilizados no ensino de topografia? Para a construção desses dados, foram utilizados a entrevista com o professor e as observações das aulas. Traremos trechos dessa entrevista e, diante das constatações, discutiremos pesquisas sobre aspectos voltados ao ensino e aprendizagem desses objetos.

Na época da entrevista, o professor estava ministrando topografia para o curso técnico pós-médio. Embora não fosse nossa intenção investigar nesse tipo de turma, procuramos questionar com o objetivo de ter indícios dos objetos matemáticos utilizados, tendo em vista que, segundo o professor, o conteúdo abordado é o mesmo para todas as turmas de topografia do curso técnico em agropecuária, das diferentes modalidades.

4.1 OBJETOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS NA TOPOGRAFIA DAS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

Ao entrevistar o professor e observar as aulas, a nossa expectativa foi determinar as grandezas mais utilizadas na topografia. Pensávamos que essas grandezas seriam: área e comprimento. O fato de topografia trabalhar com extensões territoriais e, por outro lado, a possibilidade de conexões que as grandezas possibilitam, alimentavam tal expectativa.

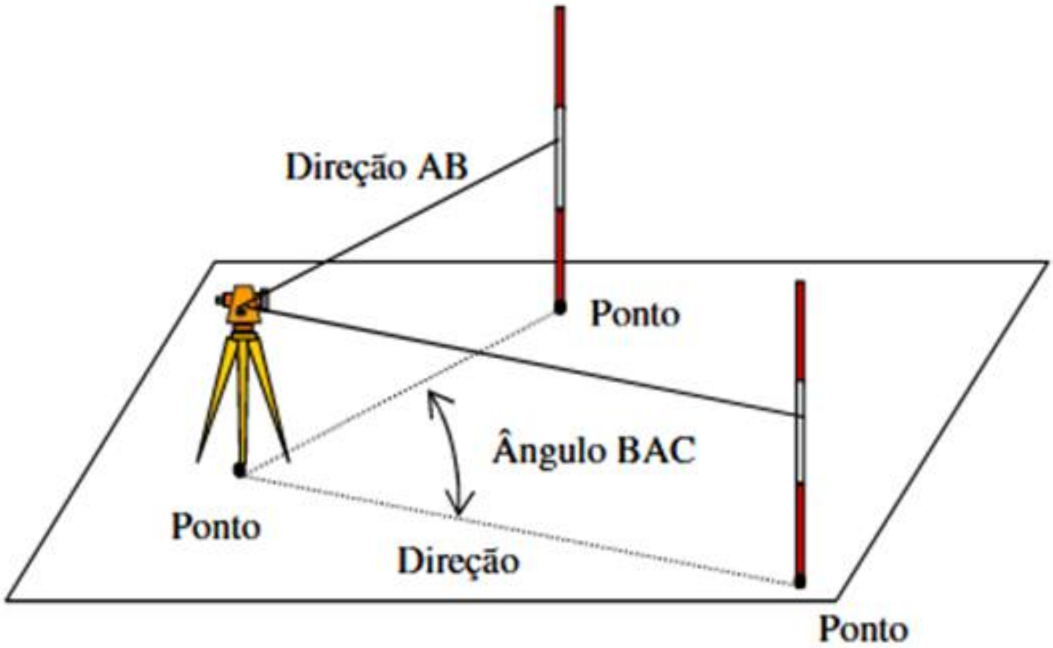
Entretanto, aquilo que foi identificado ampliou nosso conjunto inicial de objetos matemáticos. Outro elemento que surgiu com grande importância, e não havíamos pensado, foi o manuseio dos instrumentos de medida.

Uma breve definição de topografia, na primeira aula: “[...] Então é a ciência responsável em estudar a superfície terrestre levando em consideração suas diferenças de níveis, ou seja, suas altitudes e seus declives... medindo distância e ângulos horizontais e verticais”. (BARROS, 2018; APÊNDICE B, linhas: 12 a 14).

Observamos que o ensino de topografia utiliza a expressão ângulo vertical, que não é utilizada pelo ensino da matemática. Portanto, trazemos definições para a noção de ângulo presentes em Veiga, Zanetti e Faggien (2012). O professor não menciona que utiliza esses autores como uma referência, mas os trouxemos pois tratam, assim como outros livros de topografia, dessa noção para ângulos.

Veiga, Zanetti e Faggien (2012, p. 71) afirmam que “[...] uma das operações básicas em Topografia é a medição de ângulos horizontais e verticais. [...]. Para a realização destas medições emprega-se um equipamento denominado de teodolito”. Os autores apresentam a seguinte figura:

Figura 8 – Ângulo horizontal na topografia



Fonte: Veiga, Zanetti e Faggien, 2012, p. 71.

Os autores comentam que a orientação dos ângulos horizontais é tomada em campo. Veiga, Zanetti e Faggien (2012, p. 71) apresentam como definição para ângulo horizontal aquele “[...] formado por dois planos verticais que contém as direções formadas pelo ponto ocupado e os pontos visados. É medido sempre na horizontal, razão pela qual o teodolito deve estar devidamente nivelado”.

O teodolito é um instrumento topográfico que trabalha em conjunto com outro que pode ser a haste apresentada na figura anterior, a mira estadimétrica[18] (haste que pode chegar a 4 metros de altura e possui uma régua em sua superfície) ou para os modelos totalmente eletrônicos o prisma óptico (uma espécie de espelho). Os modelos mais atuais de teodolito (semieletrônico ou eletrônico) possuem uma luneta e um display. Essa luneta permite dar um zoom e visualizar: a haste, o trecho da régua da mira ou o prisma óptico. A luneta está montada sobre uma base que permite a rotação horizontal ou vertical. O display oferece o ângulo de rotação e

[18] Chamada nas aulas de topografia de mira falante.

para os modelos eletrônicos oferece também a distância entre o instrumento e o prisma óptico.

Após comentar a importância de estacionar corretamente o teodolito e as balizas o mais próximo possível dos pontos demarcados, Veiga, Zanetti e Faggien (2012, p. 73) apresentam a definição para ângulo vertical: “[...] é o ângulo formado entre a linha do horizonte (plano horizontal) e a linha de visada, medido no plano vertical que contém os pontos (figura 6.4). Varia de 0º a + 90º (acima do horizonte) e 0º a -90º (abaixo do horizonte)”. E apresentam a seguinte figura:

Figura 9 – Ângulo vertical na topografia

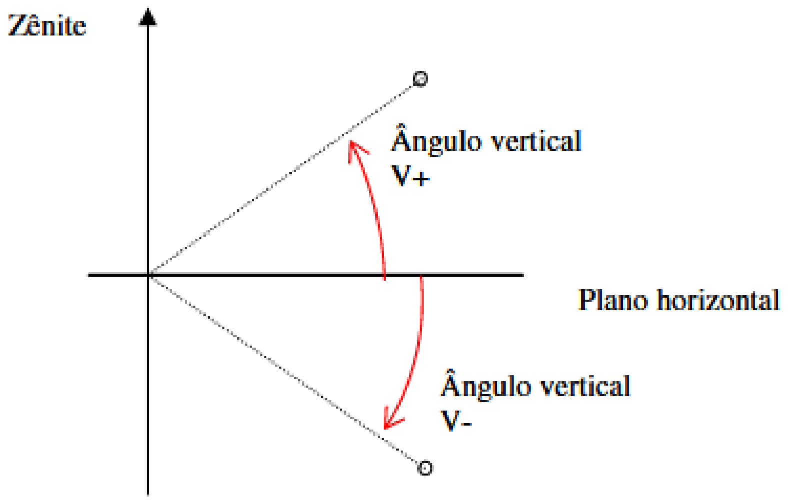


Figura 6.4 - Ângulo vertical.

Fonte: Veiga, Zanetti e Faggien, 2012, p. 73.

O Zênite indica o local que estamos com o teodolito estacionado, por exemplo demarcando dois pontos A e B. O primeiro ponto é o Zênite, enquanto o segundo está num local mais visivelmente acima do primeiro. Assim, o aclive ou ângulo vertical será o ângulo entre o plano horizontal e a linha de visada, representada na figura acima pela linha pontilhada. O teodolito está no ponto A, enquanto B pode ser o ponto mais alto de uma árvore.

Identificamos a presença das noções de comprimento e ângulo. Além disso, observamos a utilização da recíproca do teorema de Pitágoras para a construção de ângulo reto num terreno plano.

> [...] já estamos levando o menino para campo, e já estamos aplicando algumas teorias, por exemplo levantamento de perpendicular, então eu trabalho com ele, justamente falando do teorema de Pitágoras, onde a gente tem como achar o ângulo reto no campo, simplesmente utilizando as

> medidas 3 e 4 para os catetos e 5 para hipotenusa. (BARROS, 2018, APÊNDICE A, linhas: 106 a 110).

Essa construção nos remeteu aos estiradores de cordas, na época das enchentes do rio Nilo. Nas aulas de topografia, a construção de uma poligonal retangular é comum para delimitar a porção do terreno a ser utilizada para cultivo. Portanto, faz-se necessária a construção de ângulos retos no terreno.

O professor comenta que é uma topografia voltada às ciências agrárias. Segundo o professor, utilizar o teorema de Pitágoras como argumento que apoie a técnica de construção do ângulo reto propicia mostrar onde esse objeto matemático é usado.

> **P**: [...] Então, precisamos dar uma base, uma revisada na base, principalmente na matemática onde eles vão começar a entender o porquê de muitas coisas [...] Por que, por exemplo, se dá o teorema de Pitágoras, mas eu vou usar onde? Quer dizer que agora ele está vendo onde usa a questão prática. Simplesmente, você admitindo 3, 4 e 5, fazendo um perímetro de 12 metros com a trena, [...] você consegue encontrar o triângulo retângulo sem mais fazer cálculo. Agora, primeiro eu expliquei a ele que aquele cálculo está certo e como está certo. Partindo do princípio do teorema de Pitágoras: o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos, substituo os valores e provo que 25; 5 ao quadrado é igual a 9 mais 16. (BARROS, 2018, APÊNDICE A, linhas: 162 a 174).

O professor utiliza a recíproca do teorema de Pitágoras para construir o triângulo retângulo cujos lados medem respectivamente: 3m, 4m e 5m.[19]

Na construção desse ângulo reto, identificamos o uso da trena. Os instrumentos surgem na topografia como ferramentas que fornecem maior precisão e otimização do tempo: "**I**: Pelo que você falou, hoje em dia é indispensável o uso desses instrumentos? **P**: É indispensável, até mesmo para facilitar o trabalho do homem no campo e para diminuir o tempo no campo". (BARROS, 2018, APÊNDICE A, linhas: 131 a 133).

O manuseio de instrumentos é um elemento que revela possíveis graus de complexidade. Por exemplo, manuseia-se trena que é um instrumento mais simples que o teodolito com a leitura na mira estadimétrica.

---

[19]Lembramos que o teorema de Pitágoras diz que: em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Sua recíproca é: dado um triângulo, se o comprimento do maior lado ao quadrado for igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos dois menores lados então o triângulo é retângulo (e portanto, o lado de maior comprimento será sua hipotenusa e os lados de menor comprimento serão seus catetos).

> [...] conversões que precisamos fazer, e como a leitura do instrumento que tem um acessório chamado mira falante, quando lemos por meio da luneta do teodolito ou do nível que tem na escola hoje, lemos em milímetro e, no final dos cálculos, transformamos para metro. Você não vai dizer que a propriedade tem 140.000 milímetros de distância, aí o proprietário vai te olhar e talvez até nem vai conhecer essa medida, mas você transforma para unidades de campo: metros, ou em termos de área transforma para hectare. (BARROS, 2018, APÊNDICE A, linhas: 114 a 120).

O professor comenta a necessidade de o aluno conhecer diferentes instrumentos. Assim, outros objetos matemáticos surgem na entrevista: “[...] Mas eu prefiro ensinar, desde o início, como se calculou essa distância, então utilizamos muito a trigonometria, a geometria, muito baseado nessas, nessas *trias*”. (BARROS, 2018, APÊNDICE A, linhas: 152 a 154)

Diante dessas observações, ocorre um direcionamento nos questionamentos da entrevista porque observamos que área não é o enfoque, mas sim comprimento, geometria e trigonometria. Essa última agrega comprimento e ângulo. Então, perguntamos sobre distância inacessível e instrumento de medida.

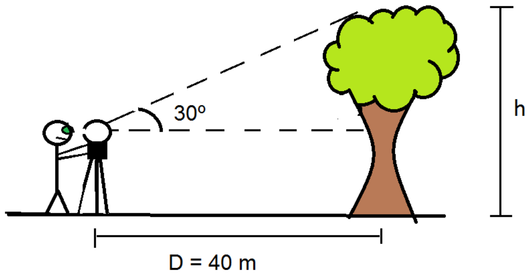
> **I**: Essa medida que você faz de distância, seria alguma medida inacessível se não houvesse o instrumento?
> **P**: Também, não totalmente inacessível, mas seria uma medida que iria demorar se fizéssemos com a trena. Porque, com o instrumento, temos condições de medir, em média, até 150 metros de uma vez. E como a trena tem 30 metros, algumas de 50 metros, precisaríamos enrolar e desenrolar a trena várias vezes e ainda com risco de erro. Porque, cada vez que você enrola e desenrola, cada vez que estica de uma forma diferente, estica mais ou estica menos e vai gerando uma margem de erro naquele material. (BARROS, 2018, APÊNDICE A, linhas: 244 a 252)

Nessa entrevista, não conseguimos identificar quais objetos matemáticos são referentes à geometria, entretanto tínhamos uma lista de outros objetos. Portanto, procuramos questionar o professor sobre de que forma o ensino de matemática do técnico em agropecuária poderia ajudar o ensino de topografia.

> **P:** Acho que poderíamos fazer algo que, na minha época, ajudou-me bastante quando estava fazendo o técnico em agropecuária. Nós tínhamos, durante as férias, ou nos finais de semanas, alguns cursos de matemática, por exemplo: 20 horas de trigonometria, 20 horas de geometria. [...] Inclusive eu fiz dois minicursos desses no período de férias. Minicursos só de matemática, onde a gente pode estar direcionando a matemática para dentro das ciências agrárias. Talvez seria algo interessante, por exemplo: a matemática trabalhando medidas agrárias, a matemática trabalhando trigonometria, porque quando eu falo em seno, cosseno e tangente, a turma faz uma cara feia danada. (BARROS, 2018, APÊNDICE A, linhas: 272 a 285)

A indicação de um curso de férias mostra a ausência de diálogo entre os professores de matemática e de topografia do curso técnico, pois o professor de topografia não sabe quais objetos matemáticos são trabalhados em matemática. E, por sua vez, o professor de matemática desconhece quais objetos matemáticos são utilizados pela topografia.

Observamos a utilização das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

> **Obs**: O professor escreve enquanto fala as fórmulas das relações trigonométricas: seno, cosseno e tangente. E retoma a figura desenhada no início da aula:
>
> 
>
>
> **P:** Então... seno é o cateto oposto sobre a hipotenusa... cosseno, cateto adjacente sobre a hipotenusa. (BARROS, 2018, APÊNDICE C, linhas: 122 a 126).

Nesse trecho, o professor apresenta exemplo de cálculo de distância inacessível. Nessa ilustração, o operador está de posse de um teodolito, o que possibilita medir ângulos, no caso 30º. Na realização de medições de distância, é utilizada a conversão entre unidades de medidas, pois a topografia realiza medições diretas e indiretas, conforme conversa o professor com a turma:

> **P**: O cálculo de distância pode ser... distância direta ou distância indireta. Para obter uma distância direta, eu falei que é só pegar uma trena, esticar e ver o valor que ela acusa no final da medição, então é a distância direta. Vou pegar a trena, marco no ponto A, no zero a trena, vou até o ponto B esticando a trena e vai dar o valor da distância. Para obter a distância com os instrumentos, por meio do: nível, teodolito ou da estação total; eles (o nível ou o teodolito) trabalham em conjunto com a mira falante. (BARROS, 2018, APÊNDICE C, linhas: 187 a 193).

Na medição direta com a trena, o resultado é visto pelo operador, que geralmente o expressará em metros. Por outro lado, na medição indireta, utilizando o teodolito e a mira estadimétrica, todas as leituras na mira (dos fios estadimétricos) são em milímetros e, depois de substituídas numa fórmula apropriada, indicam a distância, em metros, entre os pontos.

Observamos também a utilização da noção de escala devido à necessidade de leitura de plantas topográficas: "**P**: Esta planta... ela está numa escala de 1 para 2000. Então, vamos fazer algumas medidas aqui e colocar na escala para vocês terem uma ideia do tamanho real". (BARROS, 2018, APÊNDICE D, linhas: 1 a 5).

Diante do exposto, a entrevista e as observações nos indicam uma variedade de objetos matemáticos utilizados nas aulas de topografia: comprimento (unidades e conversão entre unidades de medidas de comprimento); ângulo (trazendo a noção de ângulo vertical e horizontal); teorema de Pitágoras; a noção de escala; as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Diante dessa diversidade, realizamos algumas escolhas, delimitamos nosso olhar para: comprimento, ângulo, teorema de Pitágoras e razões trigonométricas.

Discutiremos sobre pesquisas que façam menção às relações pessoais de professores ou alunos dos mais variados níveis e modalidades escolares, com esses saberes. É bom deixar claro que esses estudos não utilizam necessariamente o marco teórico da TAD, mas serão discutidos segundo a ótica dessa teoria.

Consideraremos perímetro[20] como instância da grandeza comprimento e traremos trabalhos com foco mais relacionado ao comprimento do que a perímetro. Além disso, procuramos evitar pesquisas que utilizassem apenas softwares, sem que houvesse algo referente ao ambiente papel e lápis, pois este é o ambiente que os estudantes de topografia trabalham.

4.2 PESQUISAS SOBRE A DIDÁTICA DE OBJETOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS NO ENSINO DE TOPOGRAFIA

As grandezas e medidas podem favorecer uma importante conexão da matemática com outras ciências. Consequentemente, os componentes curriculares da educação profissional técnica de nível médio (EPTNM) podem ser vistos como exemplos de outros campos científicos.

Teixeira (2004) investiga as concepções de alunos brasileiros do 2º e 8º períodos do curso de pedagogia, para o comprimento e o perímetro no ambiente papel e lápis. A autora destaca que os participantes não possuíam formação superior ou técnica em curso que tenham relação direta com a matemática.

Na resolução das tarefas, os alunos receberam uma "caixa de ferramentas"

[20] Perímetro é o comprimento do contorno.

com: fio, cordão, canudo, régua não graduada e compasso, mas não constava régua graduada. Esses materiais foram classificados em duas categorias de instrumentos: flexível e não flexível.

O estudo constata a dificuldade dos alunos em operar a grandeza comprimento quando envolve linhas curvas fechadas. Observou-se maior acerto nas tarefas com linhas abertas, nas quais se faz presente a noção de comprimento e não a de perímetro, sejam linhas retas ou curvilíneas. Nas tarefas com figuras poligonais, nas quais se faz referência às noções de perímetro e de contorno, surgiram erros associados à confusão entre contorno e superfície, embora as atividades tratem das noções de comprimento e perímetro.

Teixeira (2004, p. 109) identificou que os alunos

> [...] consideram que somar comprimentos de figuras consistia, simplesmente, em unir suas extremidades desde que suas formas não fossem alteradas. Nesse caso, a soma foi dada pela união dos extremos e conservação das formas e não pela união de conservação dos comprimentos das figuras. Outros, no entanto, conceberam que a soma era união dos extremos das figuras, sendo que, para isso, suas formas e seus comprimentos deveriam ser mantidos. Ou seja, era como se os alunos considerassem que se modificando as formas das figuras os seus comprimentos também seriam modificados.

Segundo a TAD, classificamos as sete atividades propostas por Teixeira (2004) em três tipos de tarefas: comparar comprimentos, produzir segmentos de comprimentos dados e determinar um comprimento a partir de outro comprimento dado. A autora identificou maior uso de instrumentos na resolução de tarefas que traziam linhas abertas. Nas tarefas de linhas fechadas, o aspecto visual foi mais utilizado, sendo observada uma mudança na técnica empregada.

Ferigolo (2007) aborda as grandezas comprimento e área, por meio de atividades com alunos brasileiros do 9º ano do ensino fundamental. Houve aplicação de um pré-teste e, em seguida, o trabalho de um conjunto de atividades divididas em duas partes. A primeira foi composta por atividades envolvendo comprimento e a segunda, a noção de área. Por fim, ocorreu aplicação de um pós-teste. As respostas dos alunos e gravações das entrevistas foram materiais coletados na pesquisa.

Segundo a autora, o fato de muitos alunos residirem na zona rural seria motivo para saber manusear trena ou fita métrica, pois em atividades de canteiros de hortas tais instrumentos podem ser utilizados. Entretanto, seus resultados mostraram uma realidade diferente. Os alunos não sabiam manusear instrumentos de medida de comprimento, assim como não conseguiam medir comprimentos, nem identificar nesses instrumentos as unidades de medidas presentes, tais como: metro, centímetro.

Nas atividades iniciais, a autora destaca que, mesmo quando o aluno conseguia obter a medida, não realizava a escrita correta do resultado que seria indicado pelo par: número, unidade de medida. Segundo Ferigolo (2007, p. 43-44):

> [...] A grande maioria dos alunos, quando solicitados a anotar o resultado encontrado, colocaram apenas o valor, solto, sem coerência alguma. Esse fato pode ser mais bem ilustrado pela frase dita pela aluna Safira: "No começo, na primeira atividade, a professora pediu para que medíssemos a classe, a porta, etc. Eu não sabia interpretar o valor encontrado; por exemplo, se eu encontrei 9,5 eu não sabia se eram metros ou centímetros". (2007, p. 43-44).

Outro resultado destacado faz referência às principais dificuldades relatadas pelos alunos, para a realização das atividades: utilizar os instrumentos para medir; e interpretar o valor encontrado, porque nem sempre dá um número inteiro. A autora comenta a dificuldade dos alunos em escrever o resultado das medições em números racionais.

Lima (2000) pesquisa sobre a noção de ângulos em dois ambientes: papel/lápis (PL) e Cabri-Géomètre (CG). Além disso, investiga sobre conhecimentos mobilizados por alunos do 6º e 7º anos do ensino fundamental brasileiro, na resolução de atividades, análogas nos dois ambientes. Lima (2000, p. 63) destaca que

> Nos trabalhos de Magina (1988) Diniz e Smole (1996) e Lima (1998) verificamos alguns erros e limites frequentes nas respostas das crianças, tais como: o não reconhecimento dos ângulos retos, agudos e obtusos em posições diferentes da vertical/horizontal; a confusão entre o "tamanho" dos ângulos e o comprimento dos seus lados; a confusão entre a "distância" entre os lados e o "tamanho" do ângulo; a dificuldade em identificar ângulos dentro de uma figura complexa; a dificuldade em reconhecer ângulos maiores que cento e oitenta graus.

Acrescenta que os dois primeiros estudos discutem a problemática do ângulo estático e dinâmico, afirmando que, no início do trabalho, devem ser exploradas atividades que levem os sujeitos a desenvolver a noção de ângulo dinâmico, como uma extensão do movimento, por exemplo, conversar sobre rotação ou giro.

Os resultados de Lima (2000) apontam para dificuldade dos alunos em identificar: ângulos retos em posição não prototípica e ângulos externos do polígono. A autora identifica baixo índice de acertos quando perguntou quais seriam as medidas dos comprimentos dos lados e dos ângulos internos de certo triângulo A'B'C', construído a partir da duplicação dos comprimentos dos lados do triângulo ABC, sendo informadas todas as medidas em ABC.

Nos dois ambientes analisados, não foram disponibilizados instrumentos de medida – régua e/ou transferidor – no PL; ou comandos que forneçam as medidas no CG. Segundo Lima (2000, p. 65): "Entendemos que a utilização desses instrumentos nas atividades propostas poderia levar os sujeitos a solucioná-las, apenas, pela medição sem, necessariamente, haver a mobilização do conceito". Essa afirmação nos indica duas possibilidades, tratando do ambiente papel lápis: os alunos sabem manusear régua e transferidor ou os alunos são sabem manusear, mas a pesquisadora acredita que eles sabem.

D'Amore e Marazzani (2008) apresentam as diversas definições existentes para ângulo ao longo dos séculos. Desde Euclides até Hilbert, os autores mencionam que em muitas dessas definições não se faz referência à noção de ângulo como giro. Todavia, comentam que,

> No período entre os séculos XVIII e XIX, o conceito de ângulo compreendido como rotação desenvolvido na Grã-Bretanha: Duas semirretas são dadas com a origem em comum; mantenha uma delas fixa e deixe a outra girar, até que ela sobrepõe a fixa; Essa rotação é chamada de ângulo[21] (D'AMORE; MARAZZANI, 2008, p. 8)

D'Amore e Marazzani (2008, p. 7) afirmam que a seguinte definição é a mais trabalhada nas escolas italianas: "[...] ângulo é a parte do plano entre duas semirretas que têm a mesma origem; a origem comum das duas semirretas é chamada de vértice do ângulo, enquanto as duas semirretas são chamadas de lados do ângulo"[22]. Esses pesquisadores escolhem oito definições e realizam entrevistas com estudantes italianos, distribuídos em dois grupos: aqueles que não tiveram contato com a noção de ângulo na escola e os que já estudaram esse assunto. As entrevistas iniciavam pela seguinte questão: para você, o que é ângulo? Os resultados mostram que todas as oito definições podem estar presentes nas respostas dos estudantes, independentemente de terem ou não estudado ângulo na

[21] Original em italiano: "Nel periodo a cavallo tra i secoli XVIII e XIX si è sviluppato in Gran Bretagna il concetto di angolo inteso come rotazione: siano date due semirette con l'origine in comune; si tenga fissa una delle due e si faccia ruotare l'altra, fino a sovrapporsi alla fissa; tale rotazione si chiama angolo".

[22] Original em italiano: "angolo è la parte di piano3 compresa tra due semirette che hanno la stessa origine; l'origine comune delle due semirette è detta vértice dell'angolo, mentre le due semirette sono dette lati dell'angolo".

escola.

Embora a definição seja uma unidade mínima para descrever o objeto em jogo, os autores refletem que, nesse caso, pode-se formular a hipótese de que o objeto ângulo é o conjunto de caracterizações que cada definição destaca e detecta. Ressaltam também que o professor deve estar atento para essa variedade na conceituação de um objeto matemático. Embora não seja temática dessa pesquisa, os autores refletem sobre o que o professor de matemática conhece sobre o objeto matemático ângulo.

Sbaragli e Santi (2011) discutem sobre as escolhas dos professores italianos, que atuam nos anos iniciais do ensino fundamental, quando trabalham com a noção de ângulo. Os autores realizaram duas fases de entrevistas, sendo a primeira composta de sete perguntas para vinte professores de diferentes cidades italianas:

> 1) O que você gostaria que seus alunos conhecessem em relação a ângulo?
> 2) Por onde você começa para alcançar esse aprendizado?
> 3) O que você propõe a seus alunos sobre esse tema?
> 4) Você tem em mente uma única definição do ângulo para propor aos seus alunos ou diferentes?
> 5) Qual representação você escolheu falar sobre ângulo na sala de aula?
> 6) Por que você escolheu essa representação?
> 7) Você também fornece outras representações do ângulo? (SBARAGLI; SANTI, 2011, p. 20)[23].

Na segunda fase, ocorreram entrevistas individuais, com oito estudantes do quinto ano de cada professor participante. Entrevista constituída de única pergunta: estamos em geometria... o que é ângulo para você?

Dentre as respostas para a primeira pergunta aos professores, destacamos: saber como medir o tamanho do ângulo com um transferidor. Os autores comentam que seis professores apresentam resposta, tais como: “Gostaria que meus alunos pudessem resolver problemas que envolvessem ângulos mesmo quando estão fora da escola”[24]. Sbaragli e Santi (2011, p. 21) acrescentam que: “Para os outros, a aprendizagem do conceito de ângulo parecia estar exclusivamente dentro da escola,

---

[23] Original em inglês: “1) What would you like your pupils to know with regard to the angle?
2) Where do you start from to reach this learning?
3) What do you propose to your pupils on this theme?
4) Do you have in mind a single definition of the angle to propose to your pupils or different ones?
5) What representation do you chose to speak about the angle in the classroom?
6) Why do you chose this representation?
7) Do you also provide other representations of the angle?”.

[24] Original em inglês: “I would like my pupils to be able to solve problems that involve angles even when they are outside of the school”.

ligada ao sucesso escolar e sem qualquer relação com a realidade externa”[25].

No que se refere às perguntas 2, 3, 4, um aspecto que nos chama atenção é que, mesmo iniciando o estudo da noção de ângulo por meio de elementos presentes em torno do ambiente dos estudantes, inclusive os questionando a respeito, Sbaragli e Santi (2011, p. 22) identificam que

> Todos os professores alegaram que eles tinham em mente uma única definição de ângulo que eles queriam que seus alunos alcançassem. Ninguém pensou em fornecer diferentes definições de ângulo aos alunos ou trabalhar com suas definições. Os professores declaram que, para escolher a definição, mostram aos alunos diferentes situações padrões retiradas dos livros didáticos e, sem aceitar negociar diferentes interpretações com os alunos, fornecem a definição para aprender[26].

Os autores refletem que a definição estudada em sala não é resultado de um processo de negociação ou de mediação, mas sim uma escolha do professor. O professor de matemática, enquanto mandatário da instituição ensino de matemática, opta por uma definição e a trabalha com os alunos. A conformidade entre a relação institucional (escolhida pelo professor) e a relação pessoal de um sujeito na posição de aluno, para o saber ângulo, caracteriza-se pelo processo de assujeitamento desse aluno àquilo que o professor escolheu.

Conforme Sbaragli e Santi (2011), quatorze dos vinte professores apresentaram aquela que é a definição mais usual para ângulo na Itália, trazida anteriormente por D’Amore e Marazzani (2008).

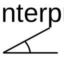
As perguntas 5, 6 e 7 faziam referência à figura utilizada para representar ângulo. Doze professores usam o “pequeno arco”[27]. Outros utilizam partes coloridas do plano, seja a superfície limitada pelas semirretas e o arco ou a ilimitada. Os autores refletem sobre inconsistências entre essas figuras e as definições apresentadas pelos professores.

Dentre as respostas dos alunos sobre o que é ângulo, 62 responderam ser a parte do plano limitada pelas semirretas e o arco, enquanto 34 afirmaram que ângulo

---

[25] Original em inglês: “For the others, the learning of the concept of angle seemed to be exclusively within the school, tied to scholastic success, and without any relationship to the external reality. The other 6 teachers answered with more conceptual aims, reaffirming the importance of acquiring the meaning of angle in geometry”.

[26] Original em inglês: “All the teachers claimed that they had in mind a single definition of angle they wanted their pupils to reach. No-one thought of providing different definitions of angle to the pupils or working from their definitions. Teachers declare that, in order to choose the definition, they show their pupils different standard situations taken from textbooks and, without accepting to negotiate different interpretations with the students, provide the definition to learn”.

[27] A figura  representa esse pequeno arco. Original em inglês: “small arc”.

é a parte ilimitada.

Entretanto, houve outras respostas: é o arco, as duas semirretas, o ponto de origem e o comprimento do arco, representadas respectivamente por 21, 18, 12 e 9 alunos. A respeito dessas respostas, Sbaragli e Santi (2011, p. 32) refletem que

> [...] Nesse caso, o significado dado pelos alunos ao objeto matemático (o ângulo) revela-se diferente em relação ao proposto pelo professor tanto em termos verbais quanto gráficos. Isso mostra quanta cautela é necessária para propor representações de um objeto matemático e, acima de tudo, é importante investigar a interpretação dada pelo aluno dessas representações[28].

A reflexão a respeito das escolhas didáticas do professor também se faz presente em Garciadiego (2002) sobre teorema de Pitágoras. Embora não façam menção às relações pessoais do sujeito, trouxemos algumas considerações desse trabalho.

O autor (2002) discute algumas demonstrações do teorema de Pitágoras, no que diz respeito à simplicidade de algumas e complexidade de outras, refletindo sobre possíveis indagações dos alunos diante dessas diferentes demonstrações. Além disso, ele afirma que, ao escolher uma demonstração mais simples, podemos deixar de abordar outros saberes. Assim, simplificar o ensino pode trazer consequências não muito boas.

Concordamos que, no processo de ensino e aprendizagem, algumas decisões baseadas em critérios de economia podem trazer péssimas consequências. Todavia, na realidade da vivência de alguns componentes curriculares, topografia, por exemplo, essa simplificação talvez seja observada com mais frequência porque, dentre outras características, eles fazem uso de saberes matemáticos e não possuem por objetivo ensiná-los.

Durante a realização de atividades diagnósticas com alunos do 9º ano do ensino fundamental, Santos e Viana (2011, p. 8) identificaram dificuldade dos alunos em reconhecer um triângulo retângulo em posição não prototípica:

> Quanto às atividades sobre o Teorema de Pitágoras, era necessário que o aluno conseguisse reconhecer um triângulo retângulo. No entanto, nas respostas às questões do questionário, vinte e nove alunos não souberam

---

[28] "[…] In this case the meaning given by the pupils to the mathematical object (the angle) turns out to be different with respect to that proposed by the teacher both in verbal and graphic terms. This shows how much caution is necessary to propose representations of a mathematical object, and above all how, important it is to investigate the interpretation given by the pupil of such representations".

> reconhecer como triângulo retângulo aquele triângulo retângulo que estivesse com os catetos não paralelos à folha em que estão impressos.

Essa dificuldade também foi apontada por Lima (2000). As autoras não detalham as atividades e não explicitam se os alunos dispuseram de instrumentos de medidas, tais como régua e transferidor. Devido a essa ausência de citação, podemos supor que não houve uso. Outro indício que revela essa não utilização:

> Novamente, o questionário possibilitou verificar que seria necessário esclarecer aos alunos como identificar um ângulo reto no triângulo, para verificar se o mesmo era retângulo. A fim de não estender muito essa revisão, foi proposto o reconhecimento do ângulo reto com a utilização de um dos cantos de uma folha de papel A4, artifício ainda desconhecido pelos quarenta e cinco sujeitos da pesquisa. (SANTOS; VIANA, 2011, p. 8).

Segundo as autoras, a dificuldade em reconhecer um triângulo retângulo é consequência da não identificação do ângulo reto presente na figura. Observamos que a relação pessoal com o objeto matemático ângulo reto estrutura outra relação pessoal, agora com o objeto triângulo retângulo.

Nacarato e Santos (2004) realizaram oficinas sobre trigonometria no triângulo retângulo e ciclo trigonométrico com quatorze participantes, sendo dez licenciandos e quatro professores de matemática. Os autores iniciam os encontros propondo um questionário com objetivo de identificar as concepções relativas ao ensino de trigonometria. Segundo Nacarato e Santos (2004, p. 5), os participantes “[...] declararam que tiveram pouco contato com o tema durante sua escolarização e o pouco de que se lembravam estava relacionado a ângulos e tabelas (seno, cosseno e tangente)”.

Embora não tenham como objetivo discutir o pragmatismo no ensino da trigonometria, Nacarato e Santos (2004, p. 8) levantam alguns questionamentos: “[...] Seria, pois, um conteúdo desnecessário ao aluno da educação básica? Ou ela deveria ser abordada apenas pelo seu caráter mais pragmático? [...] O ensino de matemática deve se pautar apenas pelas suas aplicações?”. Afirmam que, ao se prender somente aos aspectos pragmáticos, não será levada em consideração a construção de um conhecimento teórico-científico.

Não pretendemos continuar com discussões sobre o pragmatismo no ensino de saberes matemáticos, nem responder alguns dos questionamentos do parágrafo anterior, entretanto pensamos que não podemos deixar de olhar para as aplicações dos saberes matemáticos quando estamos em situações de ensino.

As aplicações podem fortalecer as razões de ser do estudo desses objetos, permitindo que os alunos tenham acesso a funcionalidades desses saberes, que o ensino de matemática, sem tais aplicações, talvez não seja capaz de reconstruir.

Durante a execução das oficinas, os pesquisadores realizaram diversos tipos de registros. Os resultados mostram a importância de trabalhar com diversos materiais, inclusive instrumentos de medidas.

> Os depoimentos dos participantes, em diferentes momentos da oficina, possibilitam-nos afirmar que é fundamental que a prática pedagógica em trigonometria seja permeada por recursos didáticos os mais variados possíveis, como materiais manipulativos (diferentes tipos de transferidor para se medir o ângulo de visada, prancha trigonométrica, régua trigonométrica, dentre outros), uso do teodolito, computador e calculadora. (NACARATO; SANTOS, 2004, p. 16).

Silva e Neto (2006) analisaram respostas de 37 alunos de 2º anos do ensino médio brasileiro. As atividades tratavam desde identificações dos elementos (hipotenusa, cateto oposto a determinado ângulo), definição das razões trigonométricas e cálculo de comprimentos utilizando tais razões.

Enquanto resultados, houve 85% de acerto quando se trata de identificar os elementos do triângulo retângulo e 76% dos alunos relacionam corretamente as razões com suas definições. Ressaltamos que os autores não mencionam se os triângulos retângulos das atividades propostas estão em posição prototípica. Também não foi dito se os alunos haviam estudado recentemente os saberes matemáticos abordados nas atividades.

Quando a atividade proposta apresentou um triângulo retângulo com dois ângulos em foco, na qual os alunos deveriam escrever as relações relativas a esses ângulos, 67,7% conseguiram escrever corretamente as relações apresentadas.

Nas atividades envolvendo cálculos numéricos, os resultados mostram maior acerto quando a figura se faz presente (51,4%). Nas atividades que exigem do aluno interpretar o enunciado, fazer a figura, o índice de acerto não foi superior a 40%. Os autores comentam que nessas atividades ocorreu índice relevante de alunos que deixaram respostas em branco.

> [...] Diante de tal ocorrência, podemos considerar que ao deixar os problemas em branco, tais alunos, mesmo respondendo as questões anteriores (questões 1, 2, 3 e 4), não conseguiram colocar em prática tais conhecimentos quando foram solicitados para solucionar os problemas verbais. (SILVA; NETO, 2006, p. 10).

Oliveira e Fernandes (2010) trabalham noções de trigonometria com alunos do 2º ano do ensino médio brasileiro, propondo atividades sobre seno e cosseno no ciclo trigonométrico, em dois ambientes, primeiramente com lápis, régua, papel e transferidor, denominados de tecnologias tradicionais e, num segundo momento, utilizando Geogebra, intitulada de tecnologia digital.

Os autores comentam sobre a dificuldade dos alunos em resolver atividades que exigiram uso do transferidor, bem como fazem referência à dificuldade de manipulação com esse instrumento.

> Na atividade sobre a construção do ciclo trigonométrico utilizando lápis, transferidor e papel, ficou evidente que os alunos tinham dificuldades para trabalhar com tais ferramentas, ou não lembravam mais como utilizá-las. Não foi possível posicionar com precisão, nesta pesquisa, se as dificuldades de aprendizagem eram mais relativas aos conteúdos de trigonometria ou relativos à manipulação dos instrumentos tecnológicos tradicionais, o transferidor em especial. (OLIVEIRA; FERNANDES, 2010, p. 574)

Klein e Costa (2011) trabalham com alunos do 2º ano do ensino médio brasileiro. Foram duas etapas, proposição de atividades com o objetivo de identificar o que os alunos sabiam sobre algumas noções de trigonometria, e na seguinte, proposição de duas atividades resolvidas em grupo, sobre razões trigonométricas e determinação da altura da cesta de basquete existente na quadra da escola.

Enquanto resultados da primeira etapa, Klein e Costa (2011, p. 57) identificaram dificuldade dos alunos em manusear o transferidor:

> [...] para construir as figuras planas. Sobre essa habilidade, alguns alunos comentaram, referindo-se ao transferidor:
> – “Professora, eu não sei usar isso.”
> – “Como é que eu uso?”
> – “A gente não sabe medir.”

Segundo os pesquisadores, os alunos apresentam definições corretas sobre hipotenusa e catetos, entretanto o fato de não saberem manipular o transferidor acarretou alto índice de erros em atividades de construções de triângulos retângulos. Os autores explicam que os alunos deveriam identificar os elementos (hipotenusa, catetos oposto e adjacente a determinado ângulo) nos triângulos por eles construídos, porém a dificuldade na construção ocasionou alto índice de erro nas atividades de identificação e obtenção de medidas de comprimento por meio de régua.

Sobre os resultados das atividades da segunda etapa, os autores destacam:

> - o uso e o manuseio de material concreto, como forma de estimular a criatividade e as características perceptivas;
> - a elaboração e a explicitação de hipóteses;
> - o trabalho em grupo, como forma de incentivar a troca de ideias entre os colegas;
> - a organização das aulas;
> - a participação do aluno, por meio de questionamentos entre seus pares e o professor-pesquisador e estabelecendo relações com situações do cotidiano; [...] (KLEIN; COSTA 2011, p. 70).

Nos termos da TAD, podemos dizer que os autores proporcionaram, por meio das atividades da segunda etapa, uma mudança naquilo que se espera do comportamento dos alunos. O cálculo de distâncias inacessíveis foi estudado por meio da atividade de determinar a altura da cesta de basquete.

Outro estudo que não utiliza a TAD, mas no qual podemos observar uso de saberes matemáticos numa realidade diferente daquela vivenciada dentro da sala de aula, é o feito por Bortoli e Marchi (2013). Nele, as pesquisadoras trabalham aplicações e aspectos da razão de ser de objetos da trigonometria com alunos do 2º do ano do ensino médio brasileiro. Os sujeitos participantes da pesquisa (34 estudantes divididos em nove grupos) são de uma escola da rede particular, localizada na cidade de Caxias do Sul, Rio Grande do Sul.

> Após as visitas a campo para a realização das entrevistas com pedreiros, mestres de obras, engenheiros civis ou arquitetos, os alunos procuraram relacionar a Trigonometria tratada no âmbito escolar e a Matemática utilizada no cotidiano do profissional da construção civil, escolhido de acordo com o tema sorteado. [...] (BORTOLI; MARCHI, 2013, p. 276).

Os pesquisadores propuseram que cada grupo buscasse associações entre a trigonometria e três atividades práticas: verificar a maneira pela qual se tira o esquadro entre o chão e uma parede de um cômodo (existência de ângulo de 90º graus entre o plano do chão e o da parede); verificar como se determina o desnível entre dois pontos de um terreno, utilizando mangueira e água; e verificar os métodos empregados na construção da base dos diferentes telhados em função de sua aparência (seu formato) ou materiais empregados. Embora houvesse três tarefas práticas para nove grupos, cada grupo escolheu uma tarefa e um profissional dentre três profissionais diferentes para entrevistar.

Destacamos que as atividades práticas são situações que de fato ocorrem no cotidiano da construção civil e, embora o professor tenha uma finalidade didática ao apresentar essas situações, elas não se limitam a um contexto de ensino, sendo tarefas recorrentes dessa realidade profissional.

Os resultados mostram, dentre outros aspectos, a presença dos instrumentos de medida de: comprimento, abertura de ângulo; na execução dessas tarefas. A escolha do instrumento depende da profissão; por exemplo, para verificar o desnível, um pedreiro utiliza mangueira com água, enquanto o engenheiro, além dessa opção, menciona o teodolito.

> [...] Na pesquisa a campo, os discentes tiveram a oportunidade de se aproximar de profissionais sem formação acadêmica que, sem conhecerem os conceitos matemáticos de Trigonometria, utilizavam-nos ao fazerem seus cálculos para a construção de casa ou prédio. Eles puderam evidenciar que a trigonometria, nesse caso, estava presente na Matemática do dia a dia da construção civil. (BORTOLI; MARCHI, 2013, p. 284).

A tarefa de reconhecer a trigonometria nas práticas profissionais foi dos alunos. Conforme mencionado pelos autores, alguns profissionais não possuíam formação acadêmica. Assim, seus argumentos de validação das técnicas empregadas possuíam para eles uma característica proveniente da experiência prática e não de alguma fundamentação teórica.

Rodrigues e Carrião (2015) buscam identificar dificuldades dos alunos brasileiros de uma turma do 9º ano do ensino fundamental na resolução de atividades envolvendo trigonometria no triângulo retângulo. Os autores realizaram observações por meio de filmagem e suas análises são das resoluções de algumas atividades propostas pelo professor após várias aulas sobre trigonometria.

> [...] A última atividade sobre trigonometria no triângulo retângulo, realizada antes da prova, foi uma lista elaborada pelo professor com 11 problemas para que os alunos resolvessem em grupos, e são alguns momentos das resoluções desses problemas que analisaremos neste trabalho. (RODRIGUES; CARRIÃO, 2015, p. 13).

Enquanto resultado, os autores apontam que a principal dificuldade observada nos alunos foi transformar o enunciado (linguagem natural) em um desenho (representação figural).

No que se refere a olhar para atividades propostas, trazemos Ramalho (2016). cujo objetivo foi o de caracterizar o ensino da trigonometria em livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2014. Essa pesquisa realiza uma análise das praxeologias matemáticas e didáticas existentes nos livros de matemática das quatro coleções mais adotadas pelas escolas públicas brasileiras. Ramalho (2016, p. 38) divide os tipos de tarefas em dois grupos.

> [...] Não sabemos dizer se isso tem influência direta no ensino, mas achamos importante agrupar tais tarefas em dois grupos, sendo um composto pelas tarefas que apresentavam um contexto extraescolar e outro pelas tarefas que remetiam a um contexto matemático.

Esses dois grupos de tarefas, denominados G1 e G2, são descritos do seguinte modo: resolver uma situação que envolve triângulos retângulos em um contexto extraescolar (G1); e resolver uma situação que envolve triângulos retângulos em um contexto matemático (G2). Segundo a autora, o contexto é utilizado para fazer referência ao ambiente que o enunciado da atividade ou a figura indicam, por exemplo,

> [...] o grupo G1 é composto por tarefas que, por meio de um pequeno texto ou de uma figura-contexto, fazem referência ao dia-a-dia, como por exemplo, as que demandam a ação como: calcular a altura de uma pipa em relação ao solo, de um avião em relação ao solo ou de uma árvore.
> [...]
> Por sua vez, o grupo de tarefas G2 é composto por tarefas que remetem ao universo matemático, sendo resolvidas mediante a mobilização de conceitos, relações e representações matemáticas [...]. (RAMALHO, 2016, p. 44).

Ramalho (2016) afirma que a existência de uma quantidade de tarefas do grupo G1 indica certo retrato do que a autora denomina por uma tentativa de contextualização do ensino da trigonometria. Dos quatro livros analisados, três apresentam mais tarefas que fazem referência ao grupo G2. E somente o livro pertencente à coleção mais adotada é também o que possui maior percentual de tarefas que remetem ao grupo G1, contexto extraescolar.

Embora a pesquisa realize essa classificação em dois grupos, não houve um detalhamento a respeito de quais contextos extraescolares estão presentes nas atividades classificados como G1. Destacamos essa ausência porque a topografia pode ter sido usada como exemplo desse tipo de contexto.

Em sua análise da praxeologia matemática, Ramalho (2016) identifica dez tipos de tarefas, e destacamos os três que possuem maior frequência: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo; calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo; e calcular o valor de uma razão trigonométrica. Diante dessa diversidade, a pesquisadora (2016, p. 87) descreve as três técnicas mais trabalhadas:

> Substituir o valor do seno de um ângulo e a medida da hipotenusa (cateto oposto a esse ângulo) na razão que define seno e resolver a equação do 1º grau para encontrar a medida do cateto oposto (hipotenusa).
> Substituir o valor do cosseno de um ângulo e do cateto adjacente (hipotenusa) a esse ângulo na razão que define cosseno e resolver a equação do 1º grau para encontrar a medida da hipotenusa (cateto adjacente)
> Substituir o valor da tangente de um ângulo e a medida do cateto adjacente (cateto oposto) a esse ângulo na razão que define a tangente e resolver a equação do 1º grau para encontrar a medida do cateto oposto (adjacente) [...].

Sobre a utilização dos instrumentos nas atividades propostas pelos livros, a autora afirma que em três das coleções analisadas existem poucas tarefas respondidas por meio de técnicas que utilizam os instrumentos régua e transferidor. Algumas atividades fazem uso da calculadora para calcular o ângulo ou a razão trigonométrica. Entretanto, Ramalho (2016) não comenta sobre a possível utilização desses instrumentos na coleção mais adotada.

Sua análise sobre os momentos de estudo identificados nos livros evidencia que

> [...] a exploração dos tipos de tarefas e elaboração das técnicas ocorre em conjunto ou articulado com a elaboração do bloco tecnológico teórico, geralmente após uma definição. E por último, são propostas atividades, o que propicia o trabalho com a técnica. [...] Além disso, a quantidade de tarefas propostas e as técnicas mobilizadas para respondê-las, evidenciou a valorização do ensino de trigonometria por meio do trabalho com a técnica. (RAMALHO, 2016, p. 82-83).

No capítulo seguinte, analisaremos o livro de matemática adotado pela escola e teremos a possibilidade de observar se a articulação entre os momentos de estudo, verificada por Ramalho (2016), nos livros do ensino fundamental permanece ou se está presente outra forma de estudo desses saberes matemáticos.

4.3 SÍNTESE

Houve vários objetos matemáticos estudados nas aulas de topografia, mas escolhemos: comprimento, abertura de ângulo; o teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Ademais, discutimos pesquisas que trataram de aspectos da didática desses objetos.

As grandezas e medidas são uma importante conexão entre a matemática e a topografia, contudo existem diferenças quando nos referimos aos componentes curriculares: matemática e topografia. Enquanto a matemática escolar dedica-se ao ensino dessas grandezas, a topografia as utiliza e realiza aquilo que se destina a fazer: descrever o ambiente.

De acordo com o professor entrevistado, a topografia é uma ciência responsável pelo estudo de um determinado local levando em consideração seus aclives e seus declives. Na descrição do ambiente, uma porção de terra, faz-se necessário utilizar as noções de distâncias e de ângulos.

Nesse sentido, a descrição de um terreno exigirá que o profissional se direcione até o local, modificando sua perspectiva de visualização quando comparada com situações de sala de aula. Por exemplo, quando o professor realiza em sala de aula desenhos no quadro ou folha, sobre a construção de ângulo reto num terreno plano, a perspectiva de visão do observador é de uma vista superior. O observador não está no mesmo plano que esse ângulo reto é construído. Nessa situação em sala de aula, o aluno pertence a um plano, e a construção é realizada noutro plano, vertical em relação ao aluno.

Essa mudança de perspectiva é um dos fatores da importância das aulas práticas. Outro fator diz respeito às dimensões e particularidades dos terrenos, ocasionando por consequência a necessidade de, por exemplo, medições de distâncias entre dois pontos por meio de determinados instrumentos.

Teixeira (2004), Nacarato, Santos (2004) e Ferigolo (2007) destacam a importância de trabalhar instrumentos de medida, entretanto as duas primeiras pesquisas apontam que os alunos optam por não usar instrumentos de medida mesmo quando os possuem à sua disposição. Alguns indícios de explicação são discutidos em Ferigolo (2007); Oliveira e Fernandes (2010); e Klein e Costa (2011): dificuldades no manuseio de instrumentos de medida. Essas pesquisas comentam sobre utilização da trena e do transferidor por alunos brasileiros.

Vimos também que, segundo Ramalho (2016), poucas atividades existentes nos livros do 9º ano solicitam uso de instrumentos quando propõem estudar trigonometria. Nossas análises nos direcionam a olhar para a trigonometria como a conexão mais estreita e clara entre matemática e topografia, mais especificamente as razões trigonométricas e a necessidade de determinar distâncias inacessíveis.

As pesquisas discutidas e nossas observações apresentam constatações que os alunos concluem o ensino fundamental com pouco conhecimento e manuseio de instrumentos de medidas, sejam aqueles considerados mais sofisticados ou até mesmo os mais comuns como régua e transferidor.

Outro aspecto que consideramos relevante, relacionado ao ano de estudo da trigonometria, é que algumas pesquisas mencionadas (SILVA; NETO, 2006; OLIVEIRA; FERNANDES, 2010; KLEIN; COSTA, 2011; BARTOLI; MARCHI, 2013) apresentam seus estudos com alunos do 2º ano do ensino médio. E apontam, mesmo que de modo superficial, que a escolha se deu por ser este o ano em que se estuda trigonometria, enquanto, na nossa realidade observada, topografia é um componente curricular estudado no primeiro ano do ensino médio.

Calcular a distância entre dois pontos é considerado um tipo de tarefa da trigonometria e comum aos dois componentes curriculares, mas o que acontece com a tarefa efetivamente proposta? Temos tarefas idênticas nos dois componentes curriculares? O que provoca a necessidade da entrada de instrumentos de medidas diferentes em cada componente curricular?

Diante do que discutimos neste capítulo da tese, seguiremos para outro estudo, a análise dos documentos oficiais brasileiros e do livro didático de matemática do ensino médio adotado pela escola.

5 RELAÇÕES INSTITUCIONAIS PRECONIZADAS

Neste capítulo, são apresentadas as análises de documentos oficiais de orientação curricular e do livro didático adotado pela escola. Para traçar um quadro das relações institucionais preconizadas pela instituição *ensino de matemática* utilizamos a noção de organização praxeológica. Os objetos matemáticos considerados foram comprimento, ângulo, teorema de Pitágoras e razões trigonométricas.

Inicialmente, discutimos as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais[29] (PCN) para o ensino fundamental (BRASIL, 1997; 1998), anos iniciais e anos finais, respectivamente. E depois, para o ensino médio: os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM (BRASIL, 2002a), orientações educacionais complementares ao PCNEM (BRASIL, 2002b) e orientações curriculares para o ensino médio – OCEM (BRASIL, 2006).

Optamos por analisar o livro de matemática do 1º ano do ensino médio adotado pela escola porque, na instituição onde a pesquisa foi realizada, o componente curricular topografia é ofertado no segundo período do curso técnico. Esse livro, cuja coleção foi aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2015 (BRASIL, 2014), foi utilizado pela escola durante o triênio de 2015 a 2017.

Entre as ações do PNLD, está a organização do processo de avaliação das coleções de vários componentes curriculares do ensino regular, dentre os quais a matemática. Na finalização dessa etapa, é produzido um parecer para cada coleção avaliada, o qual é baseado em critérios previamente estabelecidos e publicados em edital público. A equipe de avaliadores é formada por docentes que atuam na área do referido componente curricular. As coleções aprovadas na avaliação compõem um guia que visa auxiliar os professores de cada escola a escolhem os livros didáticos a serem adotados no triênio. Por exemplo, o Guia do Livro Didático do PNLD 2015 (BRASIL, 2014) subsidiou a escolha dos livros didáticos destinados ao ensino médio e que foram utilizados no triênio 2015 a 2017. Ressaltamos que as ações do PNLD não atingem componentes curriculares da formação técnica.

[29] Não analisamos a Base Nacional Comum Curricular porque este documento não estava em vigor a época que os estudantes cursaram o ensino fundamental.

Neste capítulo, são apresentadas as análises de documentos oficiais de orientação curricular e do livro didático adotado pela escola. Para isso, traçar um quadro das relações institucionais preconizadas pela instituição *ensino de matemática* utilizamos a noção de organização praxeológica. Os objetos matemáticos considerados foram comprimento, ângulo, teorema de Pitágoras e razões trigonométricas.

5.1 ANÁLISE DAS RECOMENDAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Em Brasil (1997; 1998), apresentam-se os saberes matemáticos a serem estudados no ensino fundamental agrupados em quatro blocos de conteúdos: números e operações; espaço e forma (geometria); grandezas e medidas; tratamento da informação.

O ensino fundamental é etapa da educação básica brasileira. Em Brasil (1997; 1998) são tratadas respectivamente as recomendações para 1º e 2º ciclos e para o 3º e 4º ciclos, na nomenclatura da época.

Atualmente, os anos iniciais do ensino fundamental correspondem à etapa do 1º ao 5º ano e os anos finais vão do 6º ao 9º ano. Na época da publicação dessas recomendações, o ensino fundamental era composto por oito anos, os quais eram denominados séries. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998) cada ciclo correspondia a duas séries. A partir da Lei nº 11.274/2006 (BRASIL, 2006b), as crianças passaram a ingressar no ensino fundamental aos seis anos. Portanto, atualmente a duração dessa etapa é de nove anos (o último ano da educação infantil passou a ser o primeiro ano do ensino fundamental; a antiga 1ª série é o atual 2º ano, e assim por diante).

Outro fator que destacamos é o caráter não obrigatório de todos os documentos analisados nesse capítulo.

5.1.1 Comprimento

As recomendações mencionam a importância dos conteúdos do bloco das grandezas e medidas por serem relevantes para a vida social dos indivíduos e o convívio em sociedade, presentes nas atividades realizadas pelos seres humanos em seu dia a dia, bem como pelo papel que exercem no currículo da educação básica. Em especial, o trabalho com as grandezas geométricas área e comprimento faz com que os professores possam realizar investigações de maneira mais dinâmica e ativa, pois essas grandezas estão presentes na vida dos alunos, mesmo antes de eles chegarem à sala de aula. Várias atividades podem ser desenvolvidas com esse viés investigativo, algumas delas ligadas à percepção ou à utilização do próprio corpo para medir o comprimento de alguns objetos.

Nos objetivos para os primeiros anos do ensino fundamental, encontramos:

> [...];
> Reconhecer grandezas mensuráveis: como comprimento, massa, capacidade e elaborar estratégias pessoais de medidas;
> [...];
> Utilizar instrumentos de medida, usuais ou não, estimar resultados e expressá-los por meio de representações não necessariamente convencionais. (BRASIL, 1997, p. 47).

Identificamos uma primeira referência ao comprimento, como exemplo de grandeza mensurável. Portanto, o saber matemático comprimento está localizado no Domínio das Grandezas e Medidas. Brasil (1997) recomenda-se a utilização de instrumentos não usuais para realização de medições. A abordagem de estimativa também é recomendada.

> Não é objetivo deste ciclo a formalização de sistemas de medida, mas sim levar a criança a compreender o procedimento de medir, explorando para isso tanto estratégias pessoais quanto ao uso de alguns instrumentos, como balança, fita métrica e recipientes de uso frequente. (BRASIL, 1997, p. 49).

Na lista de conteúdos conceituais e procedimentais serem estudados, em Brasil (1997, p. 52) há: “[...] Comparação de grandezas de mesma natureza, por meio de estratégias pessoais e uso de instrumentos de medida conhecidos – fita métrica, balança, recipientes de um litro, etc.”. Observe que uso da fita métrica é preconizado desde os anos iniciais do ensino fundamental e, portanto, deveria ser plenamente dominado no ensino médio.

Assim, alguns tipos de tarefas podem ser enunciados, tais como: comparar comprimentos, medir comprimentos, produzir elementos de comprimento baseado noutro comprimento dado. Por que diferenciar os gêneros de tarefas: comparar e medir? Consideramos que responder a questões como: qual palito é o mais longo? qual pessoa é mais alta? são tarefas classificadas no gênero comparar, pois não há necessidade de entrar em jogo uma unidade de medida. Por outro lado, as atividades do gênero medir são aquelas que solicitem: quantos palmos têm determinado comprimento? Ou mesmo solicitando uso de fita métrica para determinar altura de uma pessoa. Essas situações exigem unidade e instrumento de medida, e, geralmente, o resultado dessas atividades é um par indissociável: número e unidade de medida, seja ela padrão ou não. Outro tipo de tarefa recomendado é: estimar resultado de medições de comprimento.

> [...] O conhecimento e uso de unidades e instrumentos convencionais não são essenciais até o final do primeiro ciclo e dependem da familiaridade que os alunos possam ter com esses elementos em situações do cotidiano. Outro aspecto a ser observado é a capacidade do aluno de realizar algumas estimativas de resultados de medições. (BRASIL, 1997, p. 53-54).

Identificamos indicações de como o aluno possa resolver: estratégias pessoais, utilização de instrumentos de medida. Tais indicações são constituídas de elementos que remetem a técnicas de resolução às quais os alunos podem recorrer, mas não trazem detalhamento de técnicas preconizadas.

Podemos ter várias técnicas que são caracterizadas como estratégias pessoais de medidas: utilizar o palmo da mão e usar trena, entre outras. O uso de instrumentos de medida também não traz muitos detalhes, por exemplo, podem surgir instrumentos de medidas não convencionais, tais como: partes do corpo e objetos. Em Brasil (1997) comenta-se que utilizar partes do corpo no processo de medição é uma forma interessante de reconstruir historicamente o processo de medição, sendo uma oportunidade de destacar aspectos curiosos de algumas civilizações que utilizam, por exemplo, parte do corpo do rei como unidade padrão. Consideraremos tais indicações como uma espécie de agrupamentos de técnicas porque não se sabe o modo como o aluno resolverá ou como, preconiza o documento que os sujeitos da instituição resolvam.

Nas recomendações para o 4º e 5º anos (BRASIL, 1997, p. 56), aponta-se a importância de ampliar o que foi trabalhado nos anos anteriores. Outras recomendações presentes nos objetivos: a medição, a utilização de unidades convencionais e não convencionais, fazendo uso de instrumentos e da terminologia adequada.

Destacamos a importância de serem observados aspectos no processo de medição, por exemplo, o número resultado da medição depende da unidade de medida escolhida. Em Brasil (1997, p. 58) está explícito que "[...] nesse processo, descobrem que, dependendo da unidade escolhida, o resultado da medição varia [...]". Enquanto conteúdo conceitual e procedimental, faz-se presente em Brasil (1997, p. 60): "[…] estabelecimento das relações entre unidades usuais de medidas de uma mesma grandeza".

Portanto, acrescentamos os seguintes tipos de tarefa: realizar conversão entre unidades padrões de medidas e escolher a unidade de medida e o instrumento mais adequado para situações sobre comprimento.

Em Brasil (1997), não identificamos para o 4º e 5º anos as possíveis técnicas para tais tarefas. Entretanto, devido à recomendação de ampliação do trabalho realizado, podemos considerar que as técnicas exploradas nos primeiros anos devam permanecer.

Recomendações no sentido de ampliar e retomar o que foi trabalhado nos anos iniciais estão presentes nas orientações para os anos finais.

> A exploração de medidas relativas a comprimento, [...] iniciada nos ciclos anteriores, é ampliada, incorporando-se o estudo das medidas de ângulo, [...]. O trabalho com medidas deve centrar-se fortemente na análise de situações práticas que levem o aluno a aprimorar o sentido real das medidas. (BRASIL, 1998, p. 68).

Em Brasil (1998, p. 68), recomenda-se que as atividades propostas sejam extraídas de contextos práticos em que as diferentes grandezas se encontram, apresentando-se como situações o uso de plantas, croquis e a leitura de mapa.

Lembramos que atividades desenvolvidas no âmbito das profissões podem ser exemplos de contextos práticos. O componente curricular topografia pode ser um local fértil de situações com tal característica.

As recomendações orientam sobre o aspecto numérico presente na natureza aproximada das medidas, possibilitando trabalhar ações de estimativa. Nesse processo de medição, em Brasil (1998) reforça-se a importância de ensinar os alunos a selecionar e utilizar adequadamente instrumentos de medidas.

O processo de medição é muito trabalhado na realidade da topografia das ciências agrárias. Em Brasil (1998), comenta-se que deve ser dado destaque às atividades e não à memorização de fórmulas nem a conversões poucos usuais entre unidades de medidas, por exemplo de quilômetros para milímetros.

São mencionados nas recomendações para os últimos anos do ensino fundamental: o processo de medição, o manuseio e escolha adequada de instrumentos de medidas, tais como régua, trena e transferidor. Segundo o professor entrevistado e as observações das aulas, a topografia é uma ciência responsável pela descrição de uma porção de terra, considerando seus aclives e declives. Portanto, faz-se necessário o uso de instrumentos que forneçam as medidas de comprimentos e ângulos. Estudos trazidos anteriormente (TEIXEIRA, 2004; NACARATO; SANTOS 2004; FERIGOLO, 2007) apontam para a importância de trabalhar instrumentos de medida, enquanto que Ferigolo (2007), Oliveira e Fernandes (2010) e Klein e Costa (2011) evidenciam as dificuldades dos alunos brasileiros no manuseio da trena e do transferidor.

Em Brasil (1997; 1998), comenta-se sobre o caráter articulador ao estudar grandezas e medidas, por exemplo, o estudo dos números racionais através do processo de medição, bem como outros aspectos da matemática.

> A utilização dos instrumentos de medida é fundamental para iniciar a exploração dos significados e usos de termos como algarismo duvidoso, algarismo significativo, ordem de grandeza, erro de medição e arredondamento. [...], o trabalho com essas noções pode ficar restrito às primeiras aproximações, reservando para o Ensino Médio seu aprofundamento. Ao discutir esses conceitos, o aluno poderá perceber que todas as medidas são inevitavelmente acompanhadas de erros, identificando uma dimensão da Matemática que é o trabalho com a imprecisão. (BRASIL, 1998, p. 85).

Ressaltamos que o processo de medição é frequentemente utilizado em topografia. No capítulo anterior, comentamos sobre a medição direta e a indireta. Na medição direta, o comprimento daquilo que se quer medir é visto pelo operador porque se utiliza uma régua ou trena. E, na medição indireta, faz-se necessário o uso de um instrumento que fornecerá dados que serão postos numa fórmula por meio da qual se obtém a medida procurada.

A imprecisão é discutida nas aulas de topografia, estando mais associada ao instrumento de medida.

> **P**: Se eu não quiser algo com tanta precisão, o GPS nos dá uma diferença em média de um a três metros de erro. Se o morro tem mais de 50m de altura, então um para cima, um para baixo não irá alterar a escolha da potência da motobomba para tocar para irrigar. (BARROS, 2018, APÊNDICE E, linhas: 127 a 130).

O trecho acima é da aula sobre altimetria e retrata um pouco dessa discussão sobre imprecisão. O professor abordava as técnicas de levantamento topográfico para determinar altura de um ponto em relação a outro num terreno.

5.1.2 Ângulo, teorema de Pitágoras e razões trigonométricas

Inicialmente, identificamos a noção de ângulo inserida no domínio Geometria (denominado: Espaço e Forma), sendo que uma das primeiras referências faz menção a ângulo como elemento que pode ser critério de diferenciação entre polígonos: “[...] Identificação de semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de simetria, etc.”. (BRASIL, 1997, p. 59).

Consideramos como gênero de tarefa: reconhecer. Não identificamos uma possível definição para ângulo nas recomendações curriculares, mas observamos que, ao longo dos anos escolares, tal noção é associada a diversos saberes matemáticos, inclusive sendo também localizada noutro domínio: Grandezas e Medidas.

Em Brasil (1998, p. 71) dá-se continuidade a ângulo enquanto elemento de figura geométrica: “[...] Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: [...], medidas de ângulos e de lados”. Embora não esteja explícito nas recomendações, consideramos que o gênero seja classificar e o tipo de tarefa: classificar ângulos. Lembramos a existência de classificação de ângulo baseada na sua medida (agudo, reto, obtuso e raso) e que pode influenciar diretamente a classificação de triângulo e de alguns quadriláteros.

Observamos aspectos sobre ângulos relacionados a outros saberes, tais como: transformações de uma figura plana; ampliações; e reduções. Essas transformações não modificam as medidas dos ângulos das figuras geométricas planas resultantes quando comparados com os ângulos das figuras iniciais. “Construindo figuras a partir da reflexão, por translação, por rotação de uma outra figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas". (BRASIL, 1998, p. 86).

Embora em Brasil (1997) seja mencionada a ideia de movimento, somente em Brasil (1998) ela é associada à noção de ângulo. Portanto, observamos nesses dois documentos a noção de ângulo como um elemento presente nas figuras geométricas planas. E também uma associação à noção de giro que pode ser explorada em situações de localização e deslocamento.

Conforme mencionamos, ângulo aparece nos objetivos de Brasil (1998, p. 74) como exemplo de grandeza: "[...] Reconhecimento de grandezas como comprimento, [...], ângulo, [...] e identificação de unidades adequadas (padronizadas ou não) para medi-las, fazendo uso de terminologia própria". O transferidor também é mencionado como exemplo de instrumento de medida a ser utilizado.

Nas recomendações destinadas aos dois últimos anos do ensino fundamental, ângulo continua a ser mencionado na lista de conteúdos, como elemento de figuras planas, em que a noção de congruência e semelhança são mencionadas.

Em Brasil (1998, p. 125) menciona–se que

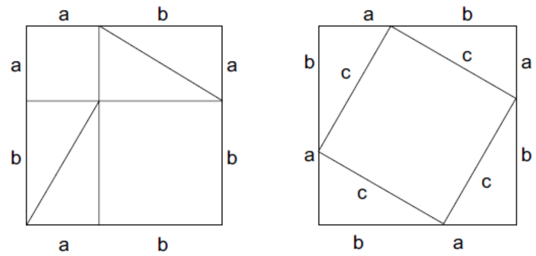
> [...] o conceito de semelhança é proveitoso para estabelecer conexões com outros conteúdos matemáticos, como razões e proporções, propriedades das figuras, ângulos, medidas (áreas, volumes) e conteúdos de outras áreas (artes, educação física, ciências, geografia, física).

Tais recomendações apontam para o conceito de semelhança estar presente no estudo de escalas, plantas e mapas. Destacamos esse trecho porque tarefas em torno desses saberes foram abordadas em algumas aulas do componente curricular topografia. O fragmento a seguir retrata o início da aula de topografia em que foi abordado conceito de semelhança por meio da noção de escala.

> **P**: Esta planta... ela está numa escala de 1 para 2000. Então, vamos fazer algumas medidas aqui e colocar na escala para vocês terem uma ideia do tamanho real. Iremos medir com a régua, por exemplo, qualquer extensão desta [aponta para planta]. Medir com a régua significa que temos como unidade metros ou centímetros?
> **Obs**: Certo silêncio na sala. Uma aluna começa a falar vagarosamente: "cen... ti... metro?".
> **P:** Centímetros. Então, jogando nesta escala que está aqui, de 1 para 2000, conseguimos saber qual é o tamanho real em termos de campo. (BARROS, 2018, APÊNDICE D, linhas: 1 a 10).

O teorema de Pitágoras foi outro saber matemático vivenciado em algumas dessas aulas. Identificamos em Brasil (1998, p. 89): “Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras”. Segundo recomendações, está localizado no domínio Geometria. Não identificamos muitas considerações em Brasil (1998) para o saber matemático em questão, apenas alguns comentários sobre o fato de apresentar aos alunos situações experimentais não se constituem como provas matemáticas para o teorema.

Em Brasil (1998) recomenda-se que as situações com materiais concretos podem ser desencadeadoras de conjecturas e processos que levem a maior formalidade.

> [...] O professor propõe ao aluno, por exemplo, um quebra-cabeças constituído por peças planas que devem compor, por justaposição, de duas maneiras diferentes, um modelo material de um quadrado (ver figura). Utilizando o princípio aditivo relativo ao conceito de área de figuras planas, observa-se que $a^2 = b^2 + c^2$. Diz-se, então, que o teorema de Pitágoras foi provado.
>
> 
>
>
> [...]
>
> No caso do teorema de Pitágoras, essa justificativa poderá ser feita com base na congruência de figuras planas e no princípio da aditividade para as áreas. Posteriormente, os alunos poderão também demonstrar esse teorema quando tiverem se apropriado do conceito de semelhança de triângulos e estabelecido as relações métricas dos triângulos retângulos. (BRASIL, 1998, pp. 126 e 127)

Essas recomendações nos trazem a seguinte reflexão: em situações de estudo que utilizam saberes matemáticos, por exemplo, nas aulas de topografia, o discurso de validação das técnicas vivenciadas se apoiará sempre numa instituição que produziu tais saberes? Os argumentos do bloco tecnológico-teórico não são advindos necessariamente da instituição que produziu o saber em jogo.

No que se refere à trigonometria, não identificamos nos documentos referências diretas a esse termo. Entretanto, Brasil (1998 p. 129) são trazidas reflexões sobre o trabalho com medidas que podem ser exploradas pelo professor: “[...] o estudo das estratégias de medidas usadas por diferentes civilizações, [...] retomar experiências que explorem o conceito de medida”.

Em Brasil (1998, p. 130), comenta-se sobre a oportunidade de trabalhar medições diretas e indiretas. Essas características do processo de medição também foram vistas nas aulas de topografia. As recomendações mencionam o fato de não termos acesso a determinados comprimentos, por exemplo, distância entre a Terra e a Lua, exigindo medição por meio de métodos mais elaborados.

> Para a determinação de distâncias inacessíveis podem-se também propor situações problema de natureza histórica, como a forma com que Eratóstenes mediu o comprimento da circunferência máxima e o raio da Terra. Para resolver esse problema os alunos poderão aprofundar seu conhecimento sobre algumas noções e procedimentos geométricos (circunferências, ângulos e paralelismo), elaborando, inclusive, uma síntese dos conceitos envolvidos.

Consideramos o trabalho com a trigonometria, principalmente por meio de cálculo de distâncias inacessíveis, como exemplo que oportuniza discussões conforme citadas anteriormente. No estudo diagnóstico, vimos que, no processo de medições de distâncias, a escolha do instrumento a ser utilizado pode ser influenciada pela precisão que se deseja obter.

5.2 ANÁLISE DAS RECOMENDAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO

Em Brasil (2002a; 2002b; 2006), são apresentadas reflexões sobre os saberes matemáticos a serem estudados no ensino médio, etapa final da educação básica brasileira. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio - PCNEM (BRASIL, 2002a), os componentes curriculares são reagrupados em três áreas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Essa organização é mantida nas: orientações educacionais complementares ao PCNEM (BRASIL, 2002b) e orientações curriculares para o ensino médio – OCEM (BRASIL, 2006).

Nesses documentos, nosso olhar está voltado para os saberes matemáticos escolhidos no capítulo anterior: comprimento, ângulo, teorema de Pitágoras e razões trigonométricas. Como se sabe, atualmente, o ensino médio brasileiro está estruturado em três anos. Nosso enfoque será nas recomendações desses documentos para o primeiro ano do ensino médio, pois o componente curricular topografia é ofertado no segundo semestre letivo do curso. Atualmente, o ensino médio brasileiro está estruturado em três anos.

> [...] Conforme destacam os PCNEM (2002) e os PCN+ (2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.
> Visando à contribuição ao debate sobre as orientações curriculares, este documento trata de três aspectos: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular. (BRASIL, 2006, p. 69).

Em Brasil (2002b, p. 120), propõe-se que os saberes matemáticos podem ser sistematizados em três eixos ou temas estruturadores[30], desenvolvidos de forma concomitante nos três anos do ensino médio: 1. Álgebra: números e funções; 2. Geometria e medidas; 3. Análise de dados. Trigonometria é uma das duas unidades temáticas do primeiro eixo.

Conforme se afirma em Brasil (2006), ocorre uma mudança nessa proposta. Os saberes matemáticos são agrupados em quatro blocos de conteúdos: números e operações; funções; geometria; análise de dados e probabilidade. Em Brasil (2006, p. 70) reflete-se "[...] Isso não significa que os conteúdos desses blocos devam ser trabalhados de forma estanque, mas, ao contrário, deve-se buscar constantemente articulação entre eles".

Em suas considerações iniciais (BRASIL, 2002a, p. 12), está presente um quadro síntese de competências e habilidades que confere unidade ao ensino das diferentes disciplinas da área de ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, podendo orientar o trabalho integrado dos professores. Mencionamos duas: formular questões a partir de situações reais e compreender aquelas já mencionadas; utilizar instrumentos de medição e de cálculo.

Desde os anos iniciais do ensino fundamental (mais especificamente desde o primeiro ciclo), está preconizado o uso de instrumentos de medidas para a grandeza comprimento. Por outro lado, as observações das aulas e a entrevista do professor apontam que os alunos não dominam este manuseio.

Então, é em outro patamar que se situa a questão de não haver uso

---

[30] Cada tema estruturador é um campo de interesse com organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo. Para organizar o planejamento do ensino cada tema estruturador foi dividido em unidades temáticas que, por sua vez, são parcelas autônomas de conhecimentos específicos que podem ser organizadas dentro do projeto pedagógico de cada professor ou escola, em função das características de seus alunos e dos tempos e espaços para sua realização.
É importante ressaltar que essa é uma escolha possível e compatível com a proposta dos PCNEM, que contempla os critérios apontados e que não reproduz o modelo curricular de "listas de assuntos", mas não é necessariamente a única.

adequado dos instrumentos de medida. Não é no currículo prescrito que isso está ausente.

Nos três documentos analisados, não identificamos menção direta às praxeologias preconizadas. Em Brasil (2002a), afirma-se que um critério central para escolha de temas ou tópicos é o seu potencial em permitir conexões entre diversos saberes matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático. Dois exemplos são mencionados: funções e trigonometria.

E acrescenta "[...] a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência" (BRASIL, 2002a, p. 43). Um tema exemplificado foi a trigonometria:

> [...] Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos [...]. (BRASIL, 2002a, p. 44).

Enquanto competência e habilidades a serem desenvolvidas em matemática, identificamos, dentre outras: utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento; e utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades. (BRASIL, 2002a, p. 46).

Em Brasil (2002b, p. 113) menciona-se que a área de ciências da natureza, matemática e suas tecnologias elegeu três grandes competências a serem perseguidas durante o ensino médio para todos brasileiros: representação e comunicação; investigação e compreensão; contextualização sociocultural. Em Brasil (2002b), apresenta-se detalhamento dessas competências.

Identificamos alguns aspectos de continuidade com o que vimos em Brasil (1998) no que se refere aos saberes matemáticos discutidos nesta pesquisa. A conversão entre unidade de medidas é citada: "Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentados sob diferentes formas como [...], quilômetros em metros, ângulos em graus e radianos" (BRASIL, 2002b, p. 114). E a elaboração de estratégias para realizar medições no enfrentamento de uma situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medi-la diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas [...] (BRASIL, 2002b, p. 115).

Observamos referência ao teorema de Pitágoras como uma propriedade presente num triângulo retângulo: “reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; por exemplo, estabelecer [...] a relação entre catetos e hipotenusa em qualquer triângulo retângulo [...]”. (BRASIL, 2002b, p. 115).

A utilização de instrumentos de medição, destacada nas recomendações para o ensino fundamental, permanece para o ensino médio. Em Brasil (2002b), estão presentes nas habilidades preconizadas para o ensino em física e matemática.

> Identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; por exemplo, discriminar o melhor instrumento para medir, comparar ou calcular comprimentos e distâncias, ângulos, volumes ocupados por líquidos, em dada situação específica. Usar adequadamente réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos. (BRASIL, 2002b, p. 116).

Um aspecto que identificamos como ampliação presente em Brasil (2002a; 2002b) com relação ao que foi observado em Brasil (1998) está nas considerações a respeito da trigonometria. Em Brasil (1998), não identificamos referências diretas a essa temática, enquanto nas recomendações de Brasil (2002a) a trigonometria é trazida como um tema importante, exemplo da relação da aprendizagem de matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências. Em Brasil (2002b, p. 121), afirma-se que:

> [...] O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas.

Observamos um reinvestimento da noção de ângulo no estudo da trigonometria. Em Brasil (2002b) propõe-se uma organização de temas a serem trabalhados em todo o ensino médio: álgebra; geometria e medidas; e análise de dados. E, mais especificamente, no primeiro ano, é recomendada a trigonometria do triângulo retângulo como unidade temática no primeiro tema.

Em Brasil (2006), existem reflexões sobre a escolha de conteúdos, mas não é proposta uma organização ao longo dos três anos do ensino médio. No que se refere às razões trigonométricas seno e cosseno, podemos dizer que neste documento apontam-se para possíveis razões de ser do seu estudo, seja pelo fato de elas precederem as funções seno e cosseno, importante para o estudo de fenômenos cíclicos, seja pela possibilidade de vínculo com temáticas da geometria, pois, afirma-se que:

> "[...] deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições.
> [...] Também é recomendável o estudo da razão trigonométrica tangente pela sua importância na resolução de diversos tipos de problemas. Problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola. Por exemplo, como calcular a largura de um rio? Que referências (árvore, pedra) são necessárias para que se possa fazer esse cálculo em diferentes condições – com régua e transferidor ou com calculadora? (BRASIL, 2006, p. 73-74).

Um aspecto que poderíamos nos questionar é: qual a importância de saber a largura de um rio? Não identificamos em nenhum dos três documentos analisados discussões sobre qual a importância do cálculo de distâncias inacessíveis.

5.3 SÍNTESE DAS ANÁLISES DAS ORIENTAÇÕES CURRICULARES

Diante da diversidade de saberes matemáticos vivenciados em topografia, escolhemos direcionar nosso olhar para: comprimento, ângulo, teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas. Nas aulas de topografia, observamos várias situações de cálculo de distâncias inacessíveis, nas quais foram utilizadas as noções de: seno, cosseno e tangente.

Nesta seção, adotaremos a terminologia *razões trigonométricas* para nos referir a essas três noções. Ao iniciar o estudo das *razões trigonométricas*, vemos que são determinadas por expressões matemáticas, mais especificamente divisões entre os comprimentos dos lados de um triângulo. Lembramos que também existem as tábuas trigonométricas, muito comuns nos capítulos que tratam desse saber. Observamos que trouxemos a noção de comprimento ao tratar das *razões trigonométricas*.

Portanto, faz-se necessário retomar inicialmente o quadro institucional para os saberes comprimento e ângulo, passando pelo teorema de Pitágoras e fecharmos como um tema central: as *razões trigonométricas*.

Os conteúdos a serem estudados na matemática escolar agrupam-se em Brasil (1997; 1998) em quatro blocos: números e operações, espaço e forma (geometria), grandezas e medidas; tratamento da informação, enquanto que em Brasil (2002b) estão propostos três eixos ou temas estruturadores: 1. Álgebra: números e funções; 2. Geometria e medidas; 3. Análise de dados. Em Brasil (2006), ocorre uma mudança nessa proposta, dando continuidade à terminologia blocos de conteúdos: números e operações; funções; geometria; análise de dados e probabilidade.

Desses, o primeiro mencionado foi comprimento e no que se refere à localização preconizada nesses documentos, em Brasil (1997; 1998), está no bloco das grandezas. Ressaltamos que a utilização de instrumentos de medidas, tais como trena e transferidor, está preconizada nos PCN e, mesmo assim, nossas discussões apontam que os alunos do ensino médio não dominam esse manuseio. Nos PCNs, os gêneros de tarefas identificados para o saber matemático comprimento foram: medir, converter, produzir, comparar e estimar. Os dois primeiros também estão presentes em Brasil (2006). Identificamos que elementos relacionados ao processo de medição de comprimento estão preconizados desde as primeiras menções a essa grandeza nos documentos oficiais.

Observamos os seguintes tipos de tarefas: realizar conversão entre unidades padrão de medida, estabelecer relações entre duas unidades padrão de medidas, medir comprimentos, escolher instrumento de medida mais adequado, comparar comprimentos, estimar comprimentos e produzir comprimentos. Os quatro primeiros tipos de tarefas mencionados estão presentes em Brasil (2006), que também menciona as duas técnicas citadas.

A noção de ângulo aparece em Brasil (1997) no bloco Geometria, o qual é mencionado como elemento invariante de uma figura plana que sofre transformações isométricas ou homotetias. Posteriormente, nos anos finais surge também a medida de ângulo no bloco das grandezas e medidas.

Acrescentamos a essa mudança a seguinte reflexão de Lima e Bellemain:

> A noção de ângulo parece simples. No entanto, quando procuramos criar um modelo matemático para este conceito, com preocupação de ensiná-lo, a tarefa não se mostra nada fácil. Além disso, os estudos revelam que as crianças têm muitas dificuldades na aprendizagem deste conceito (2010, p. 193).

Trazemos essa discussão, pois a mudança de localização foi observada num documento escrito para sistema de ensino e por consequência terá impactos na didática dos saberes em jogo. Lima e Carvalho refletem sobre duas definições para ângulo:

> Em geral, um ângulo é definido como a figura constituída por duas semirretas, distintas e não opostas, com uma mesma origem [...]. No entanto, alguns professores escolhem definir ângulo como a figura constituída pelos pontos que estão em duas semirretas, distintas e não opostas, com uma mesma origem, reunidos com os pontos da região do plano delimitada por essas semirretas [...] (2010, p. 152).

Esses autores comentam que as duas são matematicamente corretas e estão relacionadas entre si. A grandeza associada ao objeto geométrico ângulo será a sua abertura. E por que optamos por olhar para *abertura de ângulo* como exemplo de grandeza geométrica? Um motivo será o estudo das unidades de medida para ângulo, inicialmente graus, posteriormente radiano. Outro fato é que associar ângulo à noção de abertura possibilita trabalhar ângulo como um movimento, um giro.

Sobre Brasil (1997, 1998), Lima afirma que:

> As primeiras ideias relacionadas à noção de ângulo aparecem nos PCN's, no primeiro ciclo [...] por meio da localização e movimentação de pessoas ou objetos no espaço, utilização de diferentes pontos de referência e algumas indicações de direção e sentido.
> [...]
> No terceiro ciclo [...] se formaliza o estudo dos ângulos de forma integrada a outros conceitos geométricos, como polígonos, rotação, simetria, perpendicularidade, paralelismo, na classificação de figuras bidimensionais e tridimensionais. Recomenda-se a construção da noção de ângulo associada à ideia de mudanças de direção e seu reconhecimento em figuras planas, ou seja, os ângulos vistos de forma contextualizada. (2000, p. 46)

A hipótese de Lima (2000, p. 46) era "[...] de que as propostas pedagógicas reforçam a dificuldade que os alunos têm em reconhecer ângulos retos em posições não prototípicas". O surgimento dessa hipótese pode ser advindo da ausência de uma discussão sobre a importância dos alunos reconhecerem ângulos retos em diferentes posições.

Medir, associar foram os gêneros de tarefas identificados para o saber matemático ângulo, enquanto que os tipos de tarefas foram: associar ângulo ao movimento de giro; e medir ângulos. Não identificamos indícios das técnicas preconizadas, apenas a utilização de transferidor para a medição de ângulos. Em Brasil (2002b), observamos o gênero de tarefa: converter com o tipo de tarefa: realizar conversão entre as unidades de medida graus e radiano. Lembramos que, ao estudar topografia, os ângulos são fornecidos em graus, não havendo menção a outra unidade de medida.

Em Brasil (1998), identificamos o teorema de Pitágoras localizado no Domínio: Geometria. Podemos dizer que tal localização se mantém no ensino médio, sempre como uma propriedade presente em determinado tipo de triângulo, diferentemente da forma que vive na topografia das ciências agrárias.

Lima e Carvalho (2010) refletem que, num olhar puramente geométrico, a definição de um objeto abstrato não permite efetuar medições com instrumentos concretos. Os autores trazem como exemplo o quadrado, mas estamos estendendo para os triângulos.

Trabalhar o teorema de Pitágoras possibilita sair do abstrato para o concreto. Nas aulas de topografia, os alunos constroem com balizas e trena um triângulo retângulo. Lima e Carvalho (2010, p. 137) ressaltam que nos exemplos concretos "[...] – desenhados ou construídos de algum material adequado – as medições fornecerão sempre igualdades aproximadas dos comprimentos dos lados e das aberturas dos ângulos em jogo".

Conforme comentamos anteriormente, há poucas recomendações para teorema de Pitágoras. Identificamos os tipos de tarefas: verificar o teorema de Pitágoras como propriedade dos triângulos retângulos; determinar o comprimento de um lado de um triângulo retângulo, dados os comprimentos dos demais lados. Portanto, estão representados os gêneros de tarefa verificar, aplicar. Enquanto elementos da técnica estão a experimentação, por meio do uso de materiais concretos. Em Brasil (1998) há breves comentários sobre o ensino desse saber, no qual a técnica realizada para demonstrar o teorema se apoia em argumentos de natureza teórica, utilizando a formalidade da matemática.

Em Brasil (2006), o estudo das relações qualitativas entre duas grandezas é indicado como caminho para introduzir a noção de função. Percebemos que sugestões para estudo das noções de comprimento e ângulo estão presentes ao longo de praticamente toda a educação básica. Estudar funções possibilita um reinvestimento nas noções de comprimento e ângulo.

Essa reinvestida ocorre no estudo da trigonometria. Em Brasil (1998) não há menção direta às razões trigonométricas, mas nos demais documentos esse saber recebem importante destaque nas reflexões sobre o ensino de saberes matemáticos para a etapa final da educação básica, PCENM, PCN+, OCEM.

A trigonometria não está explícita em Brasil (1998), entretanto os comentários sobre semelhança no domínio da geometria e do cálculo de distâncias inacessíveis no domínio das grandezas e medidas nos fornecem indícios de que a trigonometria possa ser um exemplo de estreitas relações entre esses domínios. Lembramos o trabalho de Ramalho (2016) porque constata que nos livros didáticos de matemática do 9º ano há uma primeira abordagem das razões trigonométricas.

De fato, em Brasil (2002b; 2006) estão presentes reflexões mais explícitas sobre a importância das razões trigonométricas. Outros aspectos da trigonometria foram mencionados, mas iremos direcionar nosso olhar para as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Procuramos refinar nossa análise, no sentido de trazer o que da trigonometria foi necessário nas aulas de topografia.

O cálculo de distâncias inacessíveis indica um caminho para determinar fontes da razão de ser do estudo do seno, cosseno e tangente. Apesar de as razões trigonométricas relacionarem as noções de comprimento e ângulo, esse caminho nos possibilita indicar o gênero de tarefa: calcular; mais especificamente, por serem tratadas como relações métricas no triângulo retângulo, os tipos de tarefas devem estar em torno de: calcular o comprimento de um lado do triângulo retângulo dados o comprimento de um dos seus lados e a medida de um de seus ângulos agudos.

Quando nos referimos ao tipo de tarefa descrito anteriormente é porque comumente as tarefas propostas podem nem apresentar tal polígono. Por exemplo, considerando a seguinte situação: calcular a altura de uma árvore dadas as medidas de abertura do ângulo de visualização e a distância entre essa árvore e o operador. Nessa situação, não temos *a priori* um triângulo retângulo. Assim, a ação de reconhecer essa tarefa como similar à descrita no parágrafo anterior pode ser institucionalizada pelo professor ou ficar a cargo do aluno.

Portanto, ao tratar das tarefas propostas que necessitam das razões trigonométricas temos de levar em consideração esse aspecto de reconhecimento, presente no processo de estudo desse saber. O cálculo da largura do rio pode ser tomado como outro exemplo para ilustrar esse processo de reconhecimento.

No ensino médio, são estudadas as funções trigonométricas, havendo a necessidade de introduzir outra unidade de medida para ângulo: o radiano. A noção de giro é reinvestida quando se trabalha a passagem da trigonometria no triângulo para a trigonometria das funções trigonométricas. Essa passagem inicia-se com a introdução do ciclo trigonométrico que possibilita abordar a noção de giro orientado, associando a medidas positivas e negativas de abertura de ângulos.

Em termos gerais, podemos refletir sobre a trajetória realizada pela trigonometria da matemática escolar. É um caminho iniciado com a trigonometria no triângulo com maior detalhamento nos triângulos retângulos e a abordagem das razões trigonométricas para ângulos agudos. Em seguida, entra em cena a trigonometria no ciclo trigonométrico possibilitando ampliar o estudo das razões trigonométricas para ângulos maiores que 90º; associação gráfica entre as unidades de medida: graus e radiano, pois estão relacionadas à abertura e ao comprimento de arcos respectivamente. E, por último, a trajetória é encerrada na trigonometria das funções trigonométricas ampliando para funções que podem modelar fenômenos cíclicos. Pensamos que ao longo dessa trajetória não é evidente para o aluno perceber que está manipulando os mesmos objetos, mas em ambientes tecnológico-teóricos diversos.

Diante desses aspectos, lembramos a realidade da educação brasileira, à época desta pesquisa: o fato de os documentos de orientação curricular não serem obrigatórios, mas sim apresentarem recomendações que podem ou não ser seguidas. Essa característica é um dos fatores que podem contribuir para que importantes e pertinentes reflexões não sejam de conhecimento do professor, havendo, em muitos casos, pouca influência dessas reflexões no trabalho docente. E qual seria, então, o material candidato a ter maior influência? O livro didático. Assim, partiremos para analisá-lo.

5.4 AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO LIVRO DIDÁTICO ANALISADO

Como já foi dito, não existe material escrito para o componente curricular topografia e a coleção adotada pela escola São Bento para matemática é “Conexões com a Matemática” (LEONARDO, 2013).

Segue-se, inicialmente, um breve comentário sobre essa coleção, a partir da resenha do Guia do Livro Didático do PNLD 2015 (BRASIL, 2014). No que se refere à seleção e organização dos saberes matemáticos, para efeitos de avaliação, em Brasil (2014) se adota a distribuição dos conteúdos a serem estudados, em seis campos: números, funções, equações algébricas, geometria, geometria analítica e estatística e probabilidade. A trigonometria e as grandezas estão no campo da Geometria, entretanto no campo dos números estão as medidas das grandezas.

Em Brasil afirma-se que, para a coleção adotada,

> [...] há uma quantidade excessiva de conteúdos a serem estudados em todos os campos da matemática escolar. Ao lado disso, a distribuição desses campos é pouco equilibrada. É o que ocorre com o estudo de funções, priorizado no primeiro livro em detrimento de outros campos, e com a geometria analítica, abordada apenas no terceiro (2014, p. 25).

Segundo esse documento, o desequilíbrio é uma característica observada em todas as coleções aprovadas. “No primeiro ano, há uma clara concentração no estudo das funções em detrimento dos demais campos. Todas as coleções dedicam mais de 60% de seus textos didáticos a esse campo.” O destaque ao estudo das funções pelo componente curricular matemática para o primeiro ano do ensino médio foi mencionado pelos alunos do curso técnico que realizaram a atividade de sondagem.

Em conformidade com as normas do PNLD, os três volumes a coleção analisada são todos não consumíveis. A coleção é composta por três volumes, constituídos respectivamente de 11, 11 e 8 capítulos, todos divididos em tópicos com exercícios denominados: resolvidos, propostos, complementares e autoavaliação. Os resolvidos são apresentados num box destacando seu enunciado e resolução. Os propostos e os resolvidos estão dispostos ao longo do capítulo, mas obviamente sem a resolução. Nas páginas finais de cada capítulo, estão presentes os exercícios complementares subdivididos em: aplicação, aprofundamento e desafio. Em seguida, estão os exercícios de autoavaliação que são de múltipla escolha, ou seja, atividades que contêm única alternativa correta entre as opções (a) a (d).

No final de alguns capítulos, após as atividades de autoavaliação, há seções denominadas: “Pesquisa e Ação”, nas quais se sugere um trabalho para ser realizado em grupos; “Compreensão do Texto”, em que se propõem atividades a partir da leitura do texto proposto; e “Resolução Comentada”, apresentando maior detalhamento da resolução de uma questão proposta por algum exame de vestibular. Nessas seções, são trabalhados os conteúdos vistos no referido capítulo.

As aulas de topografia são ofertadas no segundo semestre letivo, motivo pelo qual o livro didático de matemática analisado foi o destinado ao primeiro ano do ensino médio. Analisamos o material denominado livro do professor, composto pelo livro do aluno e um guia do professor, que possui algumas orientações pedagógicas e didáticas referentes tanto à coleção quanto aos conteúdos abordados no volume.

A Análise praxeológica do livro adotado nos permite identificar o saber matemático vivenciado, mais especificamente os elementos que formam o quarteto praxeológico $[T, \tau, \theta, \Theta]$.

5.4.1 Análise das organizações matemáticas pontuais

Nesta seção, discutiremos as praxeologias presentes no livro. A necessidade de analisá-lo deve-se ao fato de os documentos de orientação curricular terem caráter de recomendação, não são obrigatórios. E não trazem explicitamente as praxeologias preconizadas pela instituição ensino de matemática.

Nessa análise, quando mencionamos a quantidade de tarefas apresentadas, estamos incluindo todos os itens. Por exemplo, se uma determinada questão apresentava dois itens (a e b) e um dos itens apresentava duas perguntas, consideramos como três tarefas. Os exercícios resolvidos, os propostos e os complementares serão denominados ER, EP e EC, respectivamente. Usaremos AA para indicar autoavaliação. Ademais, esclarecemos que utilizamos a palavra exercício para seguir a nomenclatura utilizada no livro.

Usamos a palavra tarefa para indicar que ao interpretar um exercício o modelamos, ou seja, identificamos o tipo de tarefa ao qual pertence a tarefa e, desse modo, um exercício pode fazer menção a um ou vários tipos de tarefas.

No capítulo analisado, encontramos com maior frequência o verbo determinar. Contudo, neste, usaremos o verbo calcular, ou seja, o gênero de tarefa: calcular. Foram identificadas 34 tarefas, sendo sete ER e 27 EP, totalizando 58 itens. E, presentes somente no final do capítulo, temos 17 exercícios, sendo: oito EC e nove AA, num total de 26 itens.

Utilizamos a expressão T_x: para representar um tipo de tarefa T. Apresentamos também discussão sobre as possíveis técnicas de resolução, indicadas por $\tau_{x.y}$, onde x indica a qual tipo de tarefa T ela está associada.

Identificamos nove tipos de tarefas, também presentes em Ramalho (2016), que analisou os quatros livros didáticos de matemática destinados ao 9º ano mais adotados nas escolas públicas brasileiras, referentes ao PNLD 2014. O objetivo de Ramalho (2016) foi caracterizar o ensino da trigonometria nesses livros.

Tabela 1 – Quantidade de itens identificados por tipos de tarefas

Tipos de tarefas	**ER**	**EP**	**EC**	**AA**
T_1: Calcular o valor de uma razão trigonométrica	3	15	0	7
T_2: Calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto oposto a um ângulo e a desse ângulo	1	4	0	1
T_3: Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo	2	2	1	2
T_4: Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo	1	9	3	1
T_5: Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo	0	4	3	2
T_6: Calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto adjacente a um ângulo e a desse ângulo	0	3	0	0
T_7: Calcular a medida do cateto adjacente um ângulo, dadas a medida do cateto oposto e a desse ângulo	0	2	0	0
T_8: Calcular a medida do ângulo, dadas as medidas de dois lados do triângulo	2	9	1	2
T_9: Calcular o perímetro de um trapézio isósceles, dadas as medidas das suas bases e da altura	0	1	0	0
T_{10}: Calcular a medida de lados de um triângulo, dadas medidas de lado de outro triângulo semelhante.	0	0	2	1

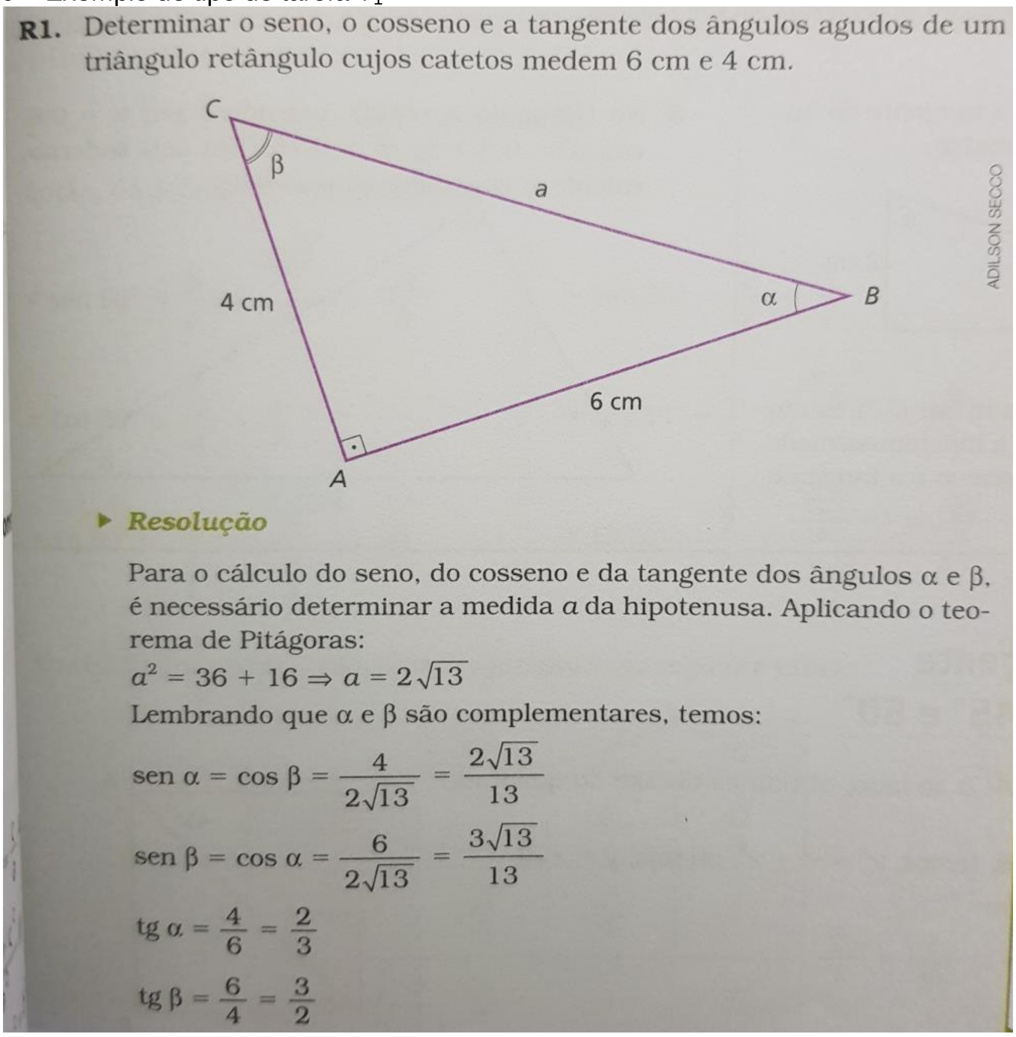
Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

O tipo de tarefa T_1 é o mais frequente, enquanto que T_9 foi aquela com menor aparecimento. Entre os exercícios resolvidos foram identificadas tarefas dos tipos T_1, T_2, T_3, T_4 e T_8. Observamos que o tipo de tarefa T_5 está presente em EP, EC e AA exceto nos ER.

Na estrutura do capítulo analisado, os exercícios resolvidos precedem os propostos. Os ER permitem evidenciar as técnicas preconizadas. Nesta análise, propomos um agrupamento das tarefas do capítulo em cinco conjuntos de exercícios. Denominamos de C_e, e = 1, 2, 3, 4, 5. C_1 a C_4 são formados por exercícios propostos EP precedidos dos exercícios resolvidos ER. A proposição desses conjuntos C_1 a C_4 tem por finalidade dar um panorama da distribuição dos tipos de tarefas ao longo do capítulo analisado. Todavia, a organização EP precedida de ER é aquilo que dá forma aos conjuntos C_1 a $C_{4.}$, enquanto C_5 é constituído pelos exercícios presentes no final do livro, divididos em complementares (EC) e autoavaliação (AA).

Segundo as orientações presentes no guia do professor, os EC temáticos permitem o aprofundamento dos conteúdos e a percepção das diferentes situações, enquanto a seção AA apresenta questões que abrangem os conteúdos fundamentais do capítulo. A figura a seguir mostra o primeiro ER:

Figura 10 – Exemplo de tipo de tarefa T_1


R1. Determinar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos catetos medem 6 cm e 4 cm.

Resolução

Para o cálculo do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos α e β, é necessário determinar a medida a da hipotenusa. Aplicando o teorema de Pitágoras:

$a^2 = 36 + 16 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$

Lembrando que α e β são complementares, temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \cos\beta = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{sen}\,\beta = \cos\alpha = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Fonte: Leonardo, 2013, p. 261.

Identificamos três técnicas, ancoradas na aplicação das fórmulas que definem as razões trigonométricas, $\tau_{1.1}$: substituir a medida do cateto oposto e da hipotenusa na razão que define o seno para encontrar o valor do seno do ângulo. Enquanto $\tau_{1.2}$: substituir a medida do cateto adjacente e da hipotenusa na razão que define o cosseno para encontrar o valor do cosseno do ângulo e $\tau_{1.3}$: substituir a medida do cateto oposto e do cateto adjacente na razão que define a tangente para encontrar o valor da tangente do ângulo. Essas três técnicas são complementadas pela ação de realizar a simplificação da fração. Caso o denominador seja irracional, deve-se fazer a racionalização. Ocorreu ainda uma tarefa do tipo T_1, presente no AA cuja técnica necessária é $\tau_{1.4}$: substituir o valor do ângulo na razão trigonométrica seno.

Os argumentos que justificam e produzem as definições das razões trigonométricas, ou seja, o bloco tecnológico-teórico proposto pelo livro, utiliza a noção de semelhança, mais especificamente, a proporção como igualdade entre razões. Essa escolha corrobora Brasil (2006, p. 73): “[...] Na introdução das razões trigonométricas seno e cosseno, inicialmente para ângulos com medida entre 0º e 90°, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições [...]”.

No que se refere às técnicas $\tau_{1.1}$; $\tau_{1.2}$ e $\tau_{1.3}$, temos as proporções que definem o seno, cosseno e tangente, respectivamente. Nas tarefas do tipo T_1, geralmente são dadas as medidas de todos os lados do triângulo.

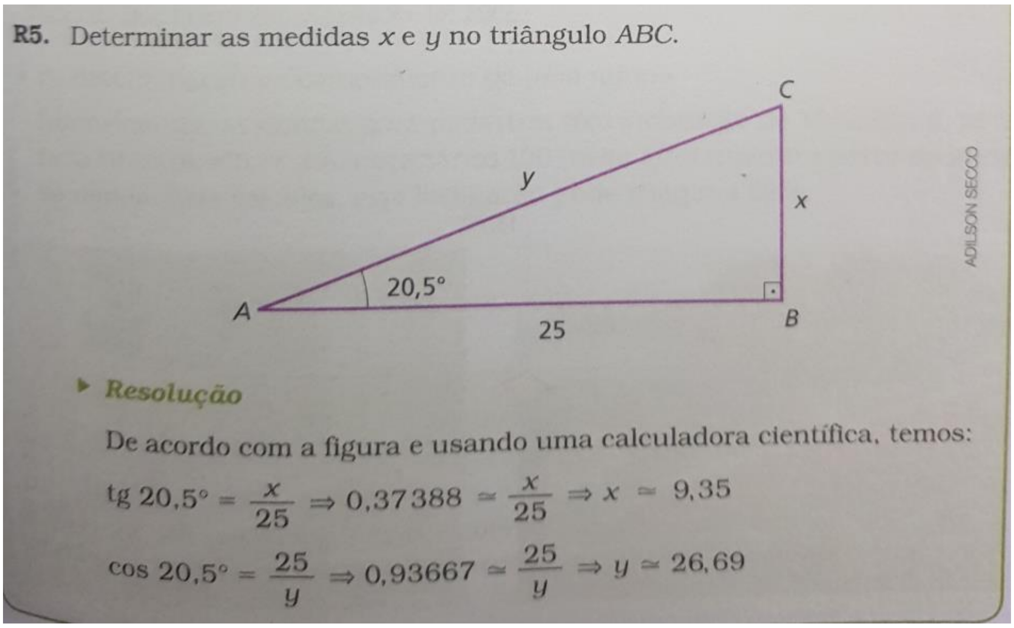
No conjunto C_3, T_1 é explorada no primeiro EP, no qual calcular a razão trigonométrica de um ângulo, dado o valor de outra razão, surgindo a necessidade das técnicas $\tau_{1.4}$: substituir o valor do seno e do cosseno de um ângulo na igualdade $tg\alpha = {}^{sen\alpha}/_{cos\alpha}$; e $\tau_{1.5}$: substituir o valor do seno (ou cosseno) na igualdade $sen\alpha = \cos(90 - \alpha)$.

Os tipos de tarefas T_2 a T_7 são atividades que solicitam calcular o comprimento de um lado, dados o comprimento de outro lado e a medida de um ângulo. Procuramos ordenar os tipos de tarefas segundo surgimento no capítulo analisado. Ainda no primeiro conjunto, identificamos os tipos de tarefa T_2 e T_3 em ER2 e EP3[31], respectivamente. E, por consequência, há necessidade do trabalho da técnica $\tau_{2.1}$: substituir o valor do seno de um ângulo e a medida do cateto oposto a esse ângulo na proporção utilizada para definir o seno de um ângulo. E da técnica $\tau_{3.1}$: substituir o valor do cosseno de um ângulo e a medida da hipotenusa na proporção utilizada para definir o cosseno de um ângulo.

No conjunto C_2, temos maior ênfase em três tipos de tarefas. Além de T_3, discutida anteriormente, temos T_4: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo; e T_5: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo.

[31] ER2 indica o segundo exercício resolvido; EP3 indica o terceiro exercício proposto.

Figura 11 – Exemplo de exercício resolvido (ER) classificado como tipo de tarefa T_4



R5. Determinar as medidas x e y no triângulo ABC.

Resolução

De acordo com a figura e usando uma calculadora científica, temos:

$$\text{tg } 20{,}5° = \frac{x}{25} \Rightarrow 0{,}37388 \simeq \frac{x}{25} \Rightarrow x \simeq 9{,}35$$

$$\cos 20{,}5° = \frac{25}{y} \Rightarrow 0{,}93667 \simeq \frac{25}{y} \Rightarrow y \simeq 26{,}69$$

Fonte: Leonardo, 2013, p. 267.

Na imagem acima, identificamos a técnica $\tau_{4.1}$: substituir o valor da tangente de um ângulo e a medida do cateto adjacente na proporção utilizada para definir a tangente de um ângulo. Analisando outras tarefas, identificamos a técnica $\tau_{5.1}$: substituir o valor do seno de um ângulo e a medida da hipotenusa na proporção utilizada para definir o seno de um ângulo. Consideramos que, para as três técnicas, $\tau_{3.1}$; $\tau_{4.1}$ e $\tau_{5.1}$, temos no bloco $[\theta,\Theta]$ as proporções que definem o cosseno, tangente e seno, respectivamente.

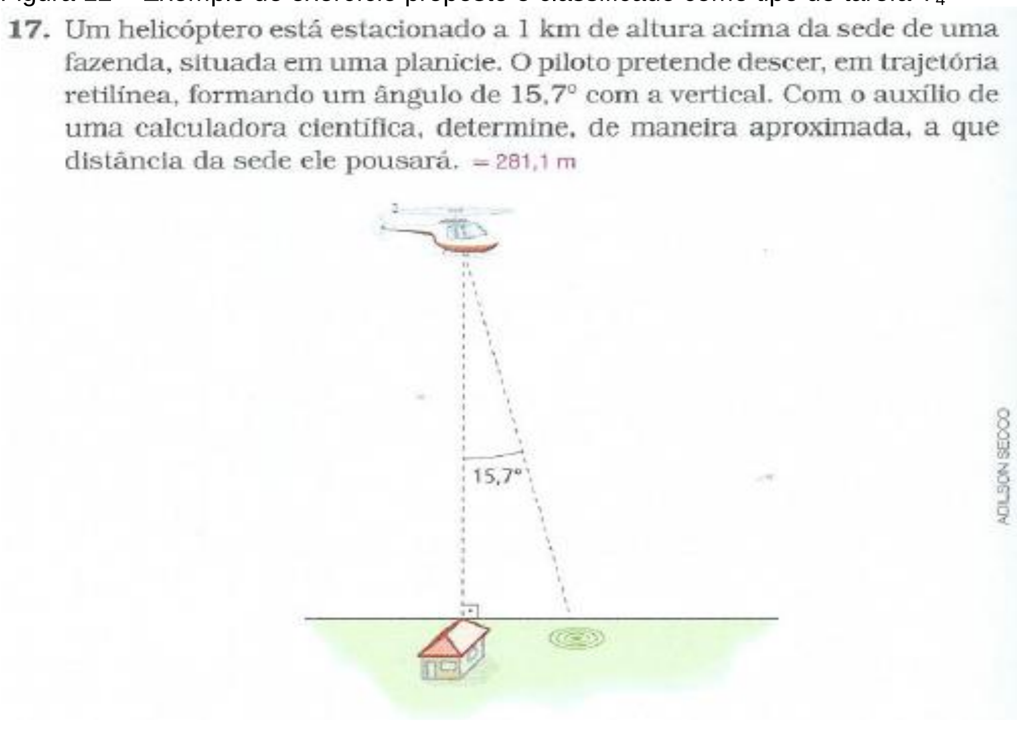
As técnicas propostas para resolver os tipos de tarefa T_6: calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto adjacente a um ângulo e a desse ângulo; e T_7: calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida do cateto oposto e a desse ângulo; são $\tau_{6.1}$: substituir o valor do cosseno do ângulo e a medida do cateto adjacente na proporção utilizada para definir o cosseno do ângulo; e $\tau_{7.1}$: substituir o valor da tangente do ângulo e a medida do cateto oposto na proporção utilizada para definir a tangente de um ângulo. Essas técnicas estão presentes na figura 11. Elas são justificadas e produzidas pelas razões que definem o cosseno e a tangente, respectivamente.

Um aspecto a ser comentado são duas etapas que compõem a descrição das técnicas $\tau_{2.1}$; $\tau_{3.1}$; $\tau_{4.1}$; $\tau_{5.1}$; $\tau_{6.1}$ e $\tau_{7.1}$. Antes de realizar as substituições, é necessário consultar a tabela trigonométrica (ou utilizar uma calculadora) para encontrar o valor da razão e, após as substituições, temos de resolver a equação do 1º grau para determinar o valor da medida do lado desconhecido.

Em três das atividades do conjunto C_2, as medidas dadas são irracionais. Solicita-se nas demais a obtenção de valores aproximados, números racionais com duas casas decimais.

A imagem a seguir é uma tarefa do conjunto C_3. Nesse conjunto, há maior quantidade de tarefas do tipo T_4: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo. O valor do ângulo em 15,7º e sugere-se no livro didático o uso da calculadora científica. Na descrição da técnica $\tau_{4.1}$, surge um elemento inicial, consultar o valor da razão trigonométrica, seja nas tabelas ou, no caso desse conjunto de exercícios, obter tais valores com auxílio das calculadoras.

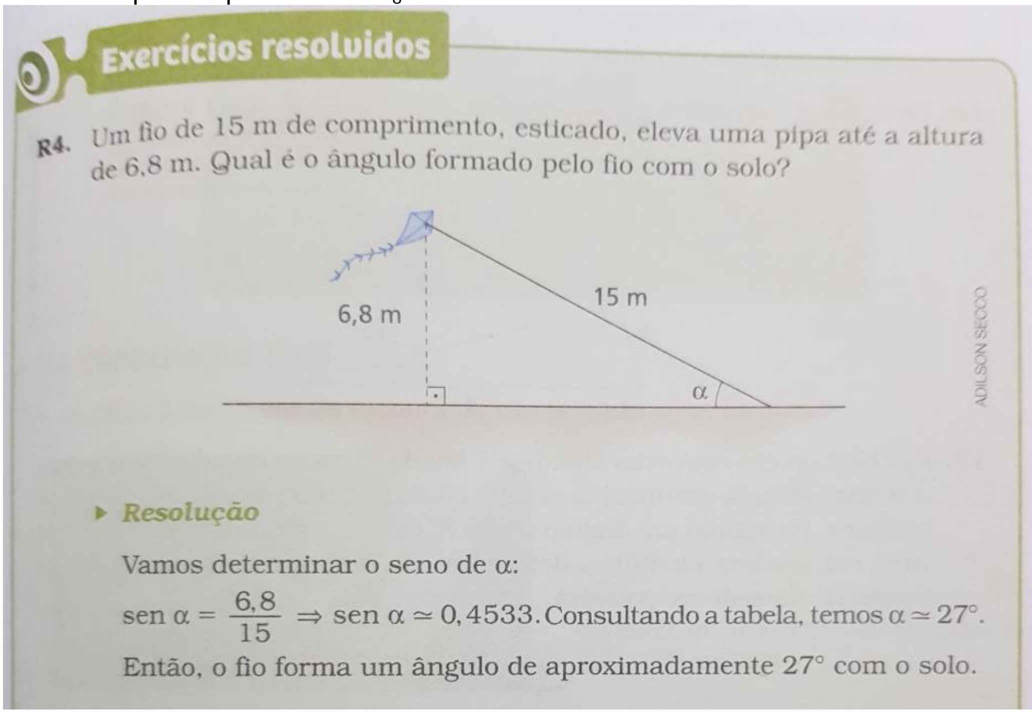
Figura 12 – Exemplo de exercício proposto e classificado como tipo de tarefa T_4


17. Um helicóptero está estacionado a 1 km de altura acima da sede de uma fazenda, situada em uma planície. O piloto pretende descer, em trajetória retilínea, formando um ângulo de 15,7° com a vertical. Com o auxílio de uma calculadora científica, determine, de maneira aproximada, a que distância da sede ele pousará. ≅ 281,1 m

Fonte: Leonardo, 2013, p. 268.

Duas técnicas são evocadas para resolver tarefas do tipo T_8: calcular a medida do ângulo, dadas as medidas de dois lados do triângulo. A imagem seguinte é de uma tarefa cuja resposta é obtida pela técnica $\tau_{8.1}$: substituir a medida da hipotenusa e do cateto oposto na proporção que define o seno de um ângulo.

Figura 13 – Exemplo de tipo de tarefa T_8



Exercícios resolvidos

R4. Um fio de 15 m de comprimento, esticado, eleva uma pipa até a altura de 6,8 m. Qual é o ângulo formado pelo fio com o solo?

▸ **Resolução**

Vamos determinar o seno de α:

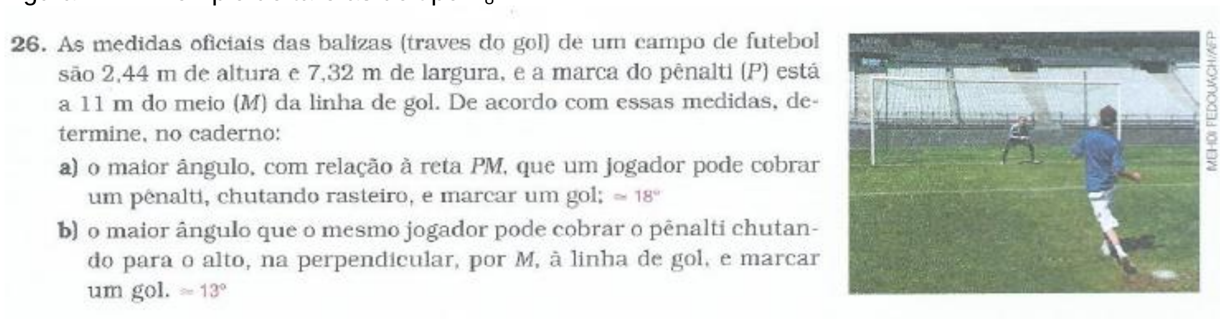
$\text{sen } \alpha = \dfrac{6,8}{15} \Rightarrow \text{sen } \alpha \simeq 0,4533$. Consultando a tabela, temos $\alpha \simeq 27°$.

Então, o fio forma um ângulo de aproximadamente 27° com o solo.

Fonte: Leonardo, 2013, p. 267.

A segunda técnica é $\tau_{8.2}$: substituir a medida do cateto oposto e do cateto adjacente na proporção que define a tangente de um ângulo, essa última utilizada somente nas tarefas do conjunto C_4. Ambas as técnicas exigem a consulta à tabela trigonométrica, pois, encontrado o valor da razão, deve-se saber qual o ângulo correspondente.

Figura 14 – Exemplo de tarefas do tipo T_8



26. As medidas oficiais das balizas (traves do gol) de um campo de futebol são 2,44 m de altura e 7,32 m de largura, e a marca do pênalti (*P*) está a 11 m do meio (*M*) da linha de gol. De acordo com essas medidas, determine, no caderno:

a) o maior ângulo, com relação à reta *PM*, que um jogador pode cobrar um pênalti, chutando rasteiro, e marcar um gol; ≃ 18°

b) o maior ângulo que o mesmo jogador pode cobrar o pênalti chutando para o alto, na perpendicular, por *M*, à linha de gol, e marcar um gol. ≃ 13°

Fonte: Leonardo, 2013, p. 271.

O livro apresenta duas tabelas com valores das três razões trigonométricas, sendo a primeira com valores aproximados para os ângulos 30º, 45º e 60º antes do conjunto C_2 e a segunda composta de valores exatos com quatro casas decimais para os ângulos de 1º a 89º. Assim, para desenvolver as técnicas $\tau_{2.1}$; $\tau_{3.1}$; $\tau_{4.1}$; $\tau_{5.1}$; $\tau_{6.1}$; $\tau_{7.1}$ e $\tau_{8.1}$ presentes no conjunto C_2, tem-se de consultar a primeira tabela. Nessas tarefas, os valores aproximados são obtidos por arredondamentos dos valores das raízes quadradas de dois ou três, tomando números com duas casas decimais.

A consulta da segunda tabela ou utilização da calculadora será explorada nas técnicas $\tau_{2.1}$; $\tau_{4.1}$; $\tau_{5.1}$; $\tau_{6.1}$; $\tau_{7.1}$; $\tau_{8.1}$ e $\tau_{8.2}$ presentes nos conjuntos C_3 e C_4. Lembramos que a utilização da calculadora é permitida nas aulas de topografia e também foi mencionada em Brasil (2006, p. 87): “[...] No trabalho com calculadoras, é preciso saber informar, via teclado, as instruções de execução de operações [...]”.

O último exercício proposto é uma tarefa do tipo T_9: calcular o perímetro de um trapézio isósceles, dadas as medidas das suas bases e da altura. A medida do lado inclinado é calculada por $\tau_{8.1}$: substituir a medida dos catetos na expressão algébrica que representa o teorema de Pitágoras. Após calculado esse lado inclinado, basta realizar a soma das medidas de todos os lados e obter o perímetro do trapézio.

Conforme observado por Ramalho (2016), as tarefas presentes no capítulo analisado do livro podem ser distribuídas nos grupos G1 e G2, caracterizados respectivamente por: contexto extraescolar e matemático. Não utilizamos a palavra contexto num sentido de analisar se o exercício presente no livro é contextualizado. Consideramos igualmente Ramalho (2016, p. 43), quando afirma que: “[...] entendemos por contexto o ambiente (matemático ou extraescolar) que a mensagem emitida pelo enunciado da atividade remete, em conjunto com o ostensivo que a acompanha, ajudando-a em sua compreensão [...]”.

No que se refere aos conjuntos C_1 a C_4, dos 34 exercícios identificados, 14 são consideradas tarefas de contexto matemático e 19 fazem menção a contextos extraescolares e no caso de uma tarefa que não se aplica essa distinção porque trata de preenchimento de valores numa tabela. Identificamos quatro exercícios que trazem temáticas associadas à vivência de saberes matemáticos na topografia. No conjunto C_5, dos nove EC, apenas três foram considerados de contextos matemáticos. Dos nove AA, temos oito tarefas em contexto matemático, e o único que não se insere nesse contexto trata da inclinação de uma rampa.

De todas as tarefas presentes no capítulo analisado, observamos que em seis são mobilizados cálculos com valores aproximados na forma de números irracionais, indicando que a resposta seja neste mesmo formato de número. Nos demais estavam valores exatos representados por números racionais.

5.4.2 Análise da organização didática

Os capítulos do livro destinado ao primeiro ano do ensino médio são, nesta ordem: “Organização e apresentação dos dados”; “Conjuntos”; “Funções”; “Função Afim”; “Função Quadrática”; “Função Modular”; “Função Exponencial”; “Função Logarítmica”; “Sequências”; “A Semelhança e os triângulos”; e “Triângulo retângulo”.

O teorema de Pitágoras é estudado no capítulo 10, intitulado: “A Semelhança e os triângulos”, enquanto que as razões trigonométricas são abordadas no último. Caso o professor siga a ordem proposta pelo livro, esses saberes serão trabalhos no final do ano letivo. Na realidade da instituição onde realizamos a pesquisa, considerando que o professor consiga trabalhar tais capítulos, eles serão abordados em concomitância ou após o estudo do componente curricular topografia.

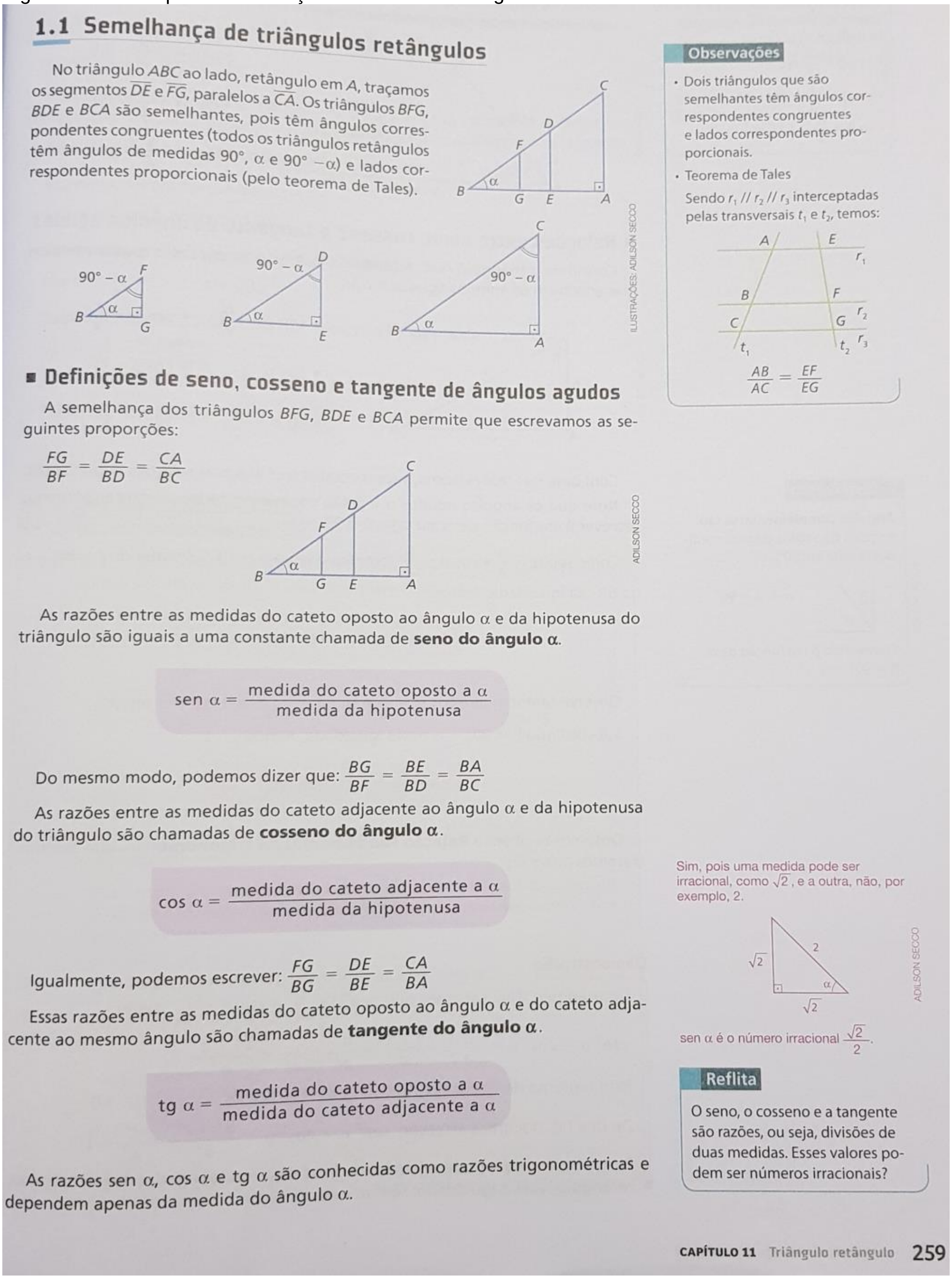
De acordo com o manual do professor do livro analisado, no último capítulo pretende-se atingir os seguintes objetivos: “identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo e resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.” (LEONARDO, 2013, p. 258). Suas seções e subseções são: “1 Razões Trigonométricas”; “1.1 Semelhança de triângulos retângulos”; “1.2 Seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º”; “1.3 Aplicações das razões trigonométricas”; “2 Seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos”; “2.1 Tabela de razões trigonométricas”; “2.2 Uso de calculadora na determinação de razões trigonométricas”; e “2.3 Outras aplicações das razões trigonométricas”.

O capítulo é iniciado com texto sobre o interesse da humanidade em resolver problemas de astronomia, agrimensura, navegação e construção. Define trigonometria e continua explicitando o cálculo do grego Aristarco de Samos para investigar a razão entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua. Essa é a forma que o livro adota para o primeiro encontro, informando qual a temática a ser estudada nesse primeiro momento de estudo.

Na página seguinte, encontra-se a subseção “1.1 Semelhança de triângulo retângulo”, sendo que o texto apresenta uma figura que é um triângulo retângulo contendo outros dois segmentos paralelos ao cateto vertical, formando três triângulos retângulos semelhantes. A semelhança é justificada pela congruência dos ângulos correspondentes. Assim, observamos que Θ_1: semelhança entre triângulos e Θ_2: teorema de Tales abordados no capítulo anterior do livro são retomados para a constituição do ambiente tecnológico-teórico, o quarto momento de estudo.

O texto continua apresentado a definição, o que caracteriza o quinto momento de estudo, a institucionalização. Além de informar o que de trigonometria será estudado – seno, cosseno e tangente de ângulos agudos –, define essas razões trigonométricas conforme observamos na imagem a seguir:

Figura 15 – Exemplo de construção do Bloco Tecnológico Teórico



1.1 Semelhança de triângulos retângulos

No triângulo ABC ao lado, retângulo em A, traçamos os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{FG}$, paralelos a $\overline{CA}$. Os triângulos BFG, BDE e BCA são semelhantes, pois têm ângulos correspondentes congruentes (todos os triângulos retângulos têm ângulos de medidas 90°, α e $90° - \alpha$) e lados correspondentes proporcionais (pelo teorema de Tales).

Observações

- Dois triângulos que são semelhantes têm ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.
- Teorema de Tales

Sendo $r_1 \,//\, r_2 \,//\, r_3$ interceptadas pelas transversais t_1 e t_2, temos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{EG}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

■ Definições de seno, cosseno e tangente de ângulos agudos

A semelhança dos triângulos BFG, BDE e BCA permite que escrevamos as seguintes proporções:

$$\frac{FG}{BF} = \frac{DE}{BD} = \frac{CA}{BC}$$

ADILSON SECCO

As razões entre as medidas do cateto oposto ao ângulo α e da hipotenusa do triângulo são iguais a uma constante chamada de **seno do ângulo α**.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Do mesmo modo, podemos dizer que: $\frac{BG}{BF} = \frac{BE}{BD} = \frac{BA}{BC}$

As razões entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo α e da hipotenusa do triângulo são chamadas de **cosseno do ângulo α**.

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Igualmente, podemos escrever: $\frac{FG}{BG} = \frac{DE}{BE} = \frac{CA}{BA}$

Essas razões entre as medidas do cateto oposto ao ângulo α e do cateto adjacente ao mesmo ângulo são chamadas de **tangente do ângulo α**.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

As razões sen α, cos α e tg α são conhecidas como razões trigonométricas e dependem apenas da medida do ângulo α.

Sim, pois uma medida pode ser irracional, como $\sqrt{2}$, e a outra, não, por exemplo, 2.

ADILSON SECCO

sen α é o número irracional $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Reflita

O seno, o cosseno e a tangente são razões, ou seja, divisões de duas medidas. Esses valores podem ser números irracionais?

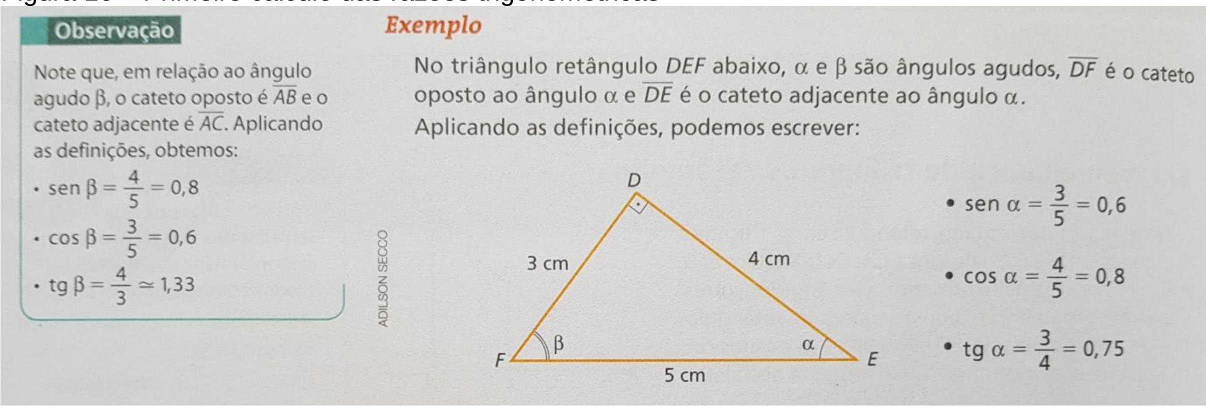
CAPÍTULO 11 Triângulo retângulo 259

Fonte: Leonardo, 2013, p. 259.

Nesse momento de estudo, identificamos os primeiros elementos do bloco tecnológico-teórico [θ/Θ] que serão efetivamente estudados: θ_{SEN}: $sen\alpha = \frac{C.O.}{Hip}$; θ_{COS}: $cos\alpha = \frac{C.A.}{Hip}$; θ_{TG}: $tg\alpha = \frac{C.O.}{C.A.}$

O texto apresenta definições: as razões entre as medidas do cateto oposto ao ângulo α e da hipotenusa do triângulo são iguais a uma constante chamada de seno do ângulo α. Ao final dessa página, o livro sugere a seguinte reflexão: essas razões podem ser números irracionais? A página seguinte à mostrada na figura é iniciada com um exemplo:

Figura 16 – Primeiro cálculo das razões trigonométricas



Fonte: Leonardo, 2013, p. 260.

Do ponto de vista dos ostensivos, destacamos que nesse caso o ângulo reto do triângulo retângulo não está na posição horizontal-vertical, ou seja, não está na posição prototípica. Lembramos que Lima (2000) aponta para dificuldade dos alunos em identificar ângulos retos em posição não prototípica.

Um exercício resolvido que apresenta o cálculo dos valores do seno, cosseno e tangente; dadas as medidas de todos os lados de um triângulo retângulo. Consideramos que ocorrem simultaneamente os momentos de estudo: o primeiro encontro com tarefas; o trabalho com as respectivas técnicas apoiadas em argumentos do bloco tecnológico-teórico anteriormente apresentados; e o enriquecimento desse bloco com a tecnologia θ_{RDN} = Realizar a divisão numérica.

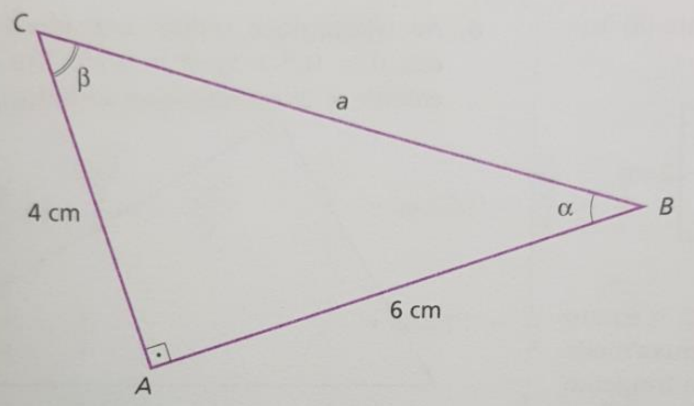
Em seguida, o livro apresenta um texto sobre relações entre seno, cosseno e tangente: o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar; a tangente de um ângulo é a razão entre o seno e o cosseno desse mesmo ângulo; e a relação fundamental da trigonometria: a soma dos quadrados do seno e cosseno de um mesmo ângulo é igual a 1, estando presente o teorema de Pitágoras na sua demonstração. Consideramos como um enriquecimento do bloco tecnológico-teórico.

Em continuidade, é apresentado outro exercício resolvido, que consideramos outro trabalho com a técnica, num triângulo retângulo de comprimento de lados 3cm, 4cm e 5cm em posição não prototípica. Esse exercício é uma tarefa que exemplifica numericamente a relação fundamental[32]. Na sequência, observamos dois exercícios resolvidos (ER) e três exercícios propostos (EP) que constituem o primeiro conjunto de exercícios, denominado anteriormente por C_1, conforme a figura:

[32] $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

Figura 17 – Exercício resolvido e exercício proposto em torno do tipo de tarefa T_1

R1. Determinar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos catetos medem 6 cm e 4 cm.



▸ **Resolução**

Para o cálculo do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos α e β, é necessário determinar a medida a da hipotenusa. Aplicando o teorema de Pitágoras:

$a^2 = 36 + 16 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$

Lembrando que α e β são complementares, temos:

$$\text{sen } \alpha = \cos \beta = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{sen } \beta = \cos \alpha = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

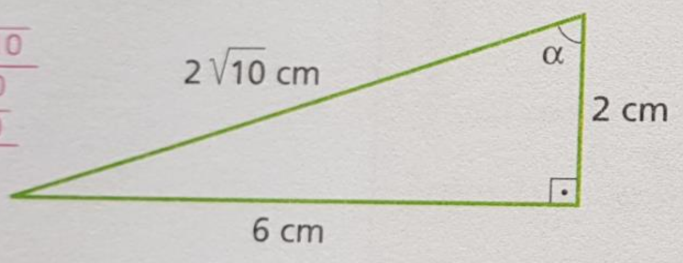
$$\text{tg } \beta = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

1. Determine o seno, o cosseno e a tangente do ângulo α do triângulo retângulo abaixo.

$\text{sen } \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\text{tg } \alpha = 3$



2. Em um triângulo ABC, retângulo em C, o cateto oposto ao vértice A mede 8 cm e a hipotenusa mede 12 cm. Determine o seno, o cosseno e a tangente do ângulo $\hat{A}$. $\text{sen } \hat{A} = \frac{2}{3}$; $\cos \hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\text{tg } \hat{A} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Fonte: Leonardo, 2013, p. 261-262.

Consideramos que ocorre uma proposição simultânea de diferentes tarefas do tipo T_1: calcular o valor de uma razão trigonométrica. E, consequentemente, a exploração das três técnicas $\tau_{1.1}$; $\tau_{1.2}$ e $\tau_{1.3}$; de modo igualmente simultâneo. Essas técnicas foram apresentadas nos ER e agora são solicitadas nos EP. Nas tarefas do tipo T1, são abordadas as três razões, o que talvez justifique a grande quantidade de tarefas desse tipo quando comparadas com demais.

Essa estrutura proposta no livro, EP precedido de ER, é mantida ao longo do capítulo. Ocorre uma ampliação do ambiente tecnológico teórico, com novas institucionalizações. Nos três conjuntos seguintes C_1 a C_3, há apresentação simultânea de tarefas de diferentes tipos e suas respectivas técnicas apoiadas nos novos argumentos tecnológicos.

Tabela 2 – Distribuição dos tipos de tarefas segundo os conjuntos de exercícios presentes no livro

Tipos de tarefas	**C_1**	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**
T_1: Calcular o valor de uma razão trigonométrica	9	1	8	0	7
T_2: Calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto oposto a um ângulo e a desse ângulo	1	1	0	2	0
T_3: Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo	1	3	0	0	3
T_4: Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo	0	3	5	2	4
T_5: Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo	0	3	1	0	5
T_6: Calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto adjacente a um ângulo e a desse ângulo	0	1	2	0	0
T_7: Calcular a medida do cateto adjacente um ângulo, dadas a medida do cateto oposto e a desse ângulo	0	1	0	1	1
T_8: Calcular a medida do ângulo, dadas as medidas de dois lados do triângulo	0	2	2	7	3
T_9: Calcular o perímetro de um trapézio isósceles, dadas as medidas das suas bases e da altura	0	0	0	1	0
T_{10}: Calcular a medida de lados de um triângulo, dadas medidas de lado de outro triângulo semelhante.	0	0	0	0	3

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

No conjunto C_1, identificamos predominância do tipo de tarefa T_1. O conjunto C_2 é aquele que possui maior diversidade de tarefas contendo T_1 a T_8. Observamos equilíbrio quantitativo quando agrupamos em duplas os tipos de tarefas: T_2 e T_5; T_3 e T_6; T_4 e T_7. Essa redistribuição é baseada nos argumentos tecnológicos e teóricos que apoiam as técnicas referentes a esses tipos de tarefas.

No conjunto C3, os tipos de tarefas T_1 e T_4 aparecem com maior frequência, enquanto que T_8 está mais presente em C_4. O tipo de tarefa T_1 está presente no conjunto C_1, C_3 e é retomado em C_5, mais especificamente na autoavaliação, ou seja, naquilo que o livro sinaliza como fundamental do capítulo. Nas páginas finais do capítulo, temos o conjunto C_5 com maior destaque para T_4 e T_5 nos exercícios complementares (EC) e T_1 na autoavaliação (AA).

Após os exercícios propostos, inicia-se a subseção “1.2 razão trigonométrica dos ângulos 30º, 45º e 60º”. O texto é iniciado por um triângulo retângulo obtido da divisão de um quadrado por sua diagonal. O teorema de Pitágoras é utilizado para determinar que o comprimento da diagonal de um quadrado é $D = L.\sqrt{2}$; onde L indica o comprimento do lado do quadrado. Assim, são obtidos os valores de $sen\ 45°$; $cos\ 45°$ e tg $45°$.

O texto apresenta um triângulo equilátero de comprimento de lado X e traça a altura relativa ao lado horizontal dividindo-o em dois triângulos retângulos semelhantes, mas o texto indica que a razão de semelhança é 1, e conclui que eles são congruentes. Assim, as medidas dos ângulos são: 30º, 60º e 90º. E os comprimentos dos lados de cada triângulo são: X; X/2; H. Aplicando o teorema de Pitágoras, encontra-se H = X.$\sqrt{3}/2$. Assim, o texto apresenta os elementos tecnológicos-teóricos, conforme apresentado na figura a seguir:

Figura 18 – Proposta do livro para o bloco tecnológico-teórico referente às razões trigonométricas

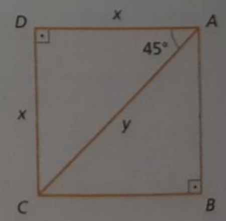
1.2 Seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°

Considere o triângulo retângulo *ACD* ao lado, obtido da divisão do quadrado *ABCD* por sua diagonal $\overline{AC}$.

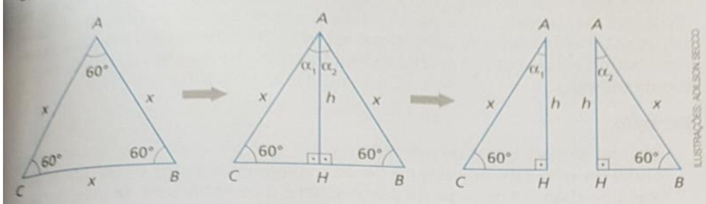
Aplicando o teorema de Pitágoras, temos: $y^2 = x^2 + x^2$, ou seja, $y = x\sqrt{2}$

De acordo com as definições, temos:

- $\text{sen } 45° = \cos 45° = \frac{x}{y} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg } 45° = \frac{x}{x} = 1$



Vamos considerar agora o triângulo equilátero *ABC* dividido pela sua altura $\overline{AH}$ em dois triângulos: *ACH* e *ABH*.



Observação

A **altura** de um triângulo é um segmento de reta perpendicular a um dos lados desse triângulo, tendo uma das extremidades nesse lado e a outra no vértice oposto a esse lado.

Analisando os triângulos *ACH* e *ABH*, verificamos que:

- os ângulos $A\hat{H}C$ e $A\hat{H}B$ são retos;
- os ângulos $A\hat{C}H$ e $A\hat{B}H$ medem 60° cada um.

Logo, os triângulos *ACH* e *ABH* são semelhantes.

Calculando a razão entre a medida dos lados correspondentes $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, temos:

$\frac{AC}{AB} = \frac{x}{x} = 1$

Portanto, os triângulos *ACH* e *ABH* são congruentes.

Ainda considerando os dois triângulos, verificamos que:

- $CH + HB = x$

  Como $\overline{CH} \cong \overline{HB}$, temos: $CH = HB = \frac{x}{2}$
- $\alpha_1 + \alpha_2 = 60°$

  Como $C\hat{A}H \cong B\hat{A}H$, temos: $\alpha_1 = \alpha_2 = 30°$

Aplicando o teorema de Pitágoras em um dos triângulos obtidos, por exemplo no triângulo *ACH*, temos:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Então, de acordo com as definições:

- $\text{sen } 60° = \frac{h}{x} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$
- $\text{tg } 60° = \frac{h}{\frac{x}{2}} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$
- $\text{sen } 30° = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$
- $\cos 30° = \frac{h}{x} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg } 30° = \frac{\frac{x}{2}}{h} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Os resultados obtidos podem ser organizados na seguinte tabela:

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Reflita

Considere as seguintes informações:

- **Bissetriz**: semirreta que divide um ângulo em dois ângulos de medidas iguais. Ela tem sua origem no vértice desse ângulo.
- **Mediana**: segmento de reta que tem como extremidades um vértice e o ponto médio do lado oposto a esse vértice.
- **Mediatriz**: reta perpendicular a um dos lados passando por seu ponto médio.

Agora, responda:

Por que podemos afirmar que o segmento $\overline{AH}$, no triângulo equilátero *ABC* desta página, além de uma altura, é uma mediana e está contido na bissetriz de $\hat{A}$ e na mediatriz de $\overline{BC}$?

Ver resolução no Guia do professor.

Fonte: Leonardo, 2013, p. 263.

Esses dados possibilitam determinar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos 30º, 60º; mas encerram a página com a tabela dos valores exatos das razões trigonométricas para os ângulos de 30º, 45º e 60º. Consideramos que essa informação final seja elemento tecnológico: θ_{CTC} = Consultar tabela ou calculadora.

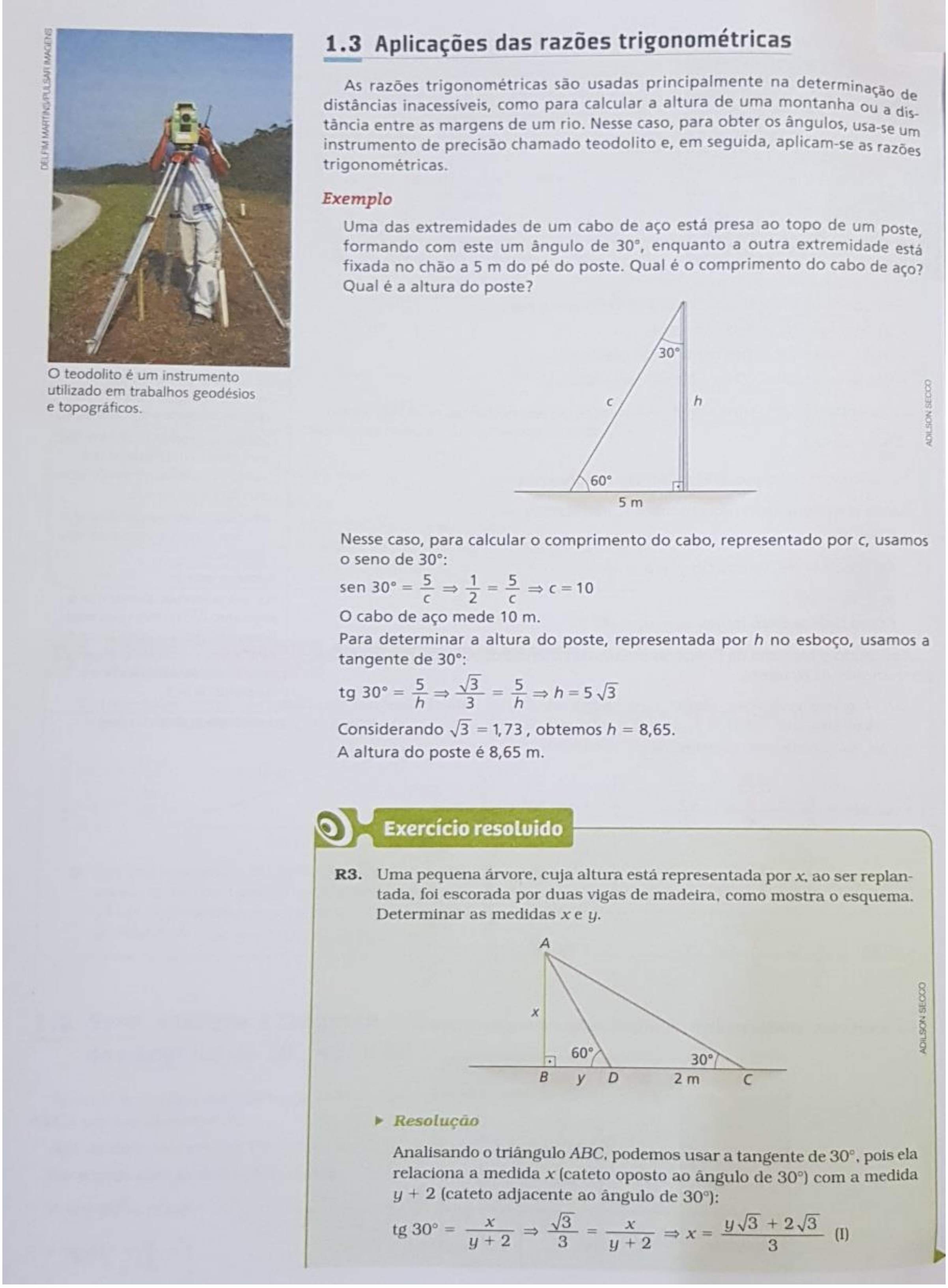
Consequentemente, os tipos de tarefas T_3: calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo; T_4: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo; e T_5: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo; serão exploradas exclusivamente com os valores de cosseno, tangente e seno dos três ângulos citados no parágrafo anterior. O trabalho com as técnicas $\tau_{3.1}$; $\tau_{4.1}$ e $\tau_{5.1}$ é limitado a esses ângulos, havendo algumas presenças de números irracionais. Observamos que os tipos de tarefas e as técnicas necessárias estão presentes como aplicações dos elementos trazidos no bloco tecnológico-teórico. Lembramos que nesse conjunto de exercícios são propostas tarefas do tipo T_2, T_6, T_7 e T_8.

No trabalho com as técnicas $\tau_{2.1}$; $\tau_{3.1}$; $\tau_{4.1}$; $\tau_{5.1}$; $\tau_{6.1}$ e $\tau_{7.1}$, existe uma etapa anterior às substituições, na qual é necessário consultar a tabela trigonométrica para encontrar o valor da razão, realizar a substituição e depois resolver a equação do 1º grau. Assim como observamos reagrupamentos das tarefas em duplas, temos também para as respectivas técnicas $\tau_{2.1}$ e $\tau_{5.1}$; $\tau_{3.1}$ e $\tau_{6.1}$; $\tau_{4.1}$ e $\tau_{7.1}$ os argumentos tecnológico-teóricos que se referem às razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, respectivamente.

Essas etapas propiciam um melhoramento da técnica, tornando-a mais confiável e exigindo certo retoque na tecnologia elaborada até então. Esse retoque direciona o aluno no sentido de indicar o que ele deverá extrair do bloco tecnológico-teórico para produzir as etapas dessas técnicas.

Na página seguinte, o texto faz menção da utilização das razões trigonométricas na determinação de distâncias inacessíveis, tais como a altura de uma montanha e a distância entre as margens de um rio, conforme a figura seguinte:

Figura 19 – Livro menciona o cálculo de distâncias inacessíveis na trigonometria



DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

O teodolito é um instrumento utilizado em trabalhos geodésios e topográficos.

1.3 Aplicações das razões trigonométricas

As razões trigonométricas são usadas principalmente na determinação de distâncias inacessíveis, como para calcular a altura de uma montanha ou a distância entre as margens de um rio. Nesse caso, para obter os ângulos, usa-se um instrumento de precisão chamado teodolito e, em seguida, aplicam-se as razões trigonométricas.

Exemplo

Uma das extremidades de um cabo de aço está presa ao topo de um poste, formando com este um ângulo de 30°, enquanto a outra extremidade está fixada no chão a 5 m do pé do poste. Qual é o comprimento do cabo de aço? Qual é a altura do poste?

Nesse caso, para calcular o comprimento do cabo, representado por c, usamos o seno de 30°:

$\text{sen } 30° = \frac{5}{c} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{c} \Rightarrow c = 10$

O cabo de aço mede 10 m.

Para determinar a altura do poste, representada por h no esboço, usamos a tangente de 30°:

$\text{tg } 30° = \frac{5}{h} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{h} \Rightarrow h = 5\sqrt{3}$

Considerando $\sqrt{3} = 1{,}73$, obtemos $h = 8{,}65$.

A altura do poste é 8,65 m.

Exercício resoluido

R3. Uma pequena árvore, cuja altura está representada por x, ao ser replantada, foi escorada por duas vigas de madeira, como mostra o esquema. Determinar as medidas x e y.

▸ ***Resolução***

Analisando o triângulo ABC, podemos usar a tangente de 30°, pois ela relaciona a medida x (cateto oposto ao ângulo de 30°) com a medida $y + 2$ (cateto adjacente ao ângulo de 30°):

$\text{tg } 30° = \frac{x}{y+2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{y+2} \Rightarrow x = \frac{y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3}$ (I)

Fonte: Leonardo, 2013, p. 264.

No capítulo analisado, esse é o segundo texto que faz referência às distâncias inacessíveis na trigonometria. O texto da figura anterior está localizado entre os conjuntos de exercícios C_1 e C_2. Entretanto, nesses dois conjuntos não está presente nenhuma tarefa que trate das distâncias inacessíveis.

Na figura anterior, não identificamos vínculos entre o texto do parágrafo inicial e os elementos do bloco prático-técnico presentes no exemplo. Observamos que o teodolito é mencionado, sendo apresentada uma imagem desse instrumento. Entretanto, as informações sobre o teodolito são incompletas porque ele é um instrumento que determina ângulos e distâncias. O texto não faz menção à possibilidade de determinar distâncias com auxílio do teodolito. Por outro lado, o exemplo aborda o cálculo de uma distância inacessível, mas não se discute uma forma de obtenção dos 5 m e 60º. O fato de a página trazer possíveis problemáticas do cotidiano possibilita iniciar uma discussão de como nessas práticas cotidianas se obtêm determinadas medidas para a resolução das questões.

Outro aspecto que nos chama atenção surge na técnica presente no exercício resolvido que propõe o cálculo da altura de uma árvore, dados os ângulos verticais e distância entre os pontos C e D, ambos obtidos por meio de instrumentos. Classificamos como uma tarefa do tipo T_4: Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo.

Na página seguinte, é iniciada a segunda seção: “2 Seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos”, em sua subseção “2.1 Tabela de razões trigonométricas”, contendo os valores das três razões trigonométricas para ângulos agudos. Os valores estão com aproximação de quatro casas decimais. Em seguida, outra subseção – “2.2 Uso de calculadora na determinação de razões trigonométricas”- aborda a utilização das calculadoras científicas para obter os valores das razões. Essas seções enriquecem a tecnologia θ_{CTC} = consultar tabela trigonométrica ou calculadora, pois essa nova tabela é mais completa que a anterior e a utilização da calculadora permite determinar valores das razões quando seus ângulos são apresentados na forma de números decimais, por exemplo o valor do $sen\,23{,}5°$. Esse enriquecimento contempla as três razões trigonométricas.

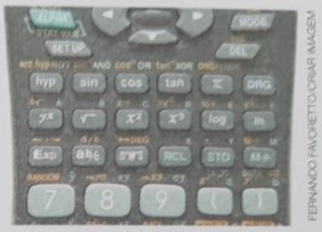
Figura 20 – Seção do capítulo analisado sobre uso da calculadora

2.2 Uso de calculadora na determinação de razões trigonométricas

Algumas calculadoras científicas têm teclas em que lemos "sin", "cos" ou "tan". Essas teclas permitem calcular os valores aproximados de seno, cosseno e tangente de ângulos. As calculadoras oferecem diferentes modos de entrada para as unidades de medida dos ângulos: "graus", "radianos" ou "grados", que serão estudadas no volume do 2º ano desta coleção.

Selecionando a opção "graus", se digitarmos, em algumas calculadoras, o número 30, por exemplo, e depois pressionarmos $\boxed{\text{sin}}$, aparecerá o número 0,5, que é o valor do seno de 30°. Da mesma forma, se apertarmos a tecla $\boxed{\text{cos}}$, aparecerá o número 0,86602..., que é o valor do cosseno de 30°. Se for pressionada a tecla $\boxed{\text{tan}}$, depois de digitado o número 60, aparecerá 1,73205... no visor, que é a tangente de 60°.

Na tabela da página 263, o cosseno de 30° é dado como $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se digitarmos 3 na calculadora e pressionarmos a tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$, aparecerá no visor o número 1,73205... (raiz quadrada de 3). Dividindo esse número por 2, obtemos o número 0,86602... (cosseno de 30°). Analogamente, podemos obter os valores aproximados dos demais senos, cossenos e tangentes que aparecem na tabela.



Parte do teclado de uma calculadora científica. Nessa calculadora científica, cada uma das teclas "sin", "cos" e "tan" possui uma segunda função – "$\sin^{-1}$", "$\cos^{-1}$" e "$\tan^{-1}$", em amarelo. Com essas funções, é possível obter a medida do ângulo a partir do valor do seno, do cosseno ou da tangente.

Orientar os alunos de que o procedimento apresentado pode variar de acordo com o modelo da calculadora. Por exemplo, em alguns modelos, para calcular sen 30° é necessário primeiro pressionar $\boxed{\text{sin}}$, depois digitar o 30 e em seguida, a tecla $\boxed{=}$.

Fonte: Leonardo, 2013, p. 267.

O texto ressalta que, dependendo do modelo, as calculadoras oferecem diferentes modos de entrada, podendo exigir determinada unidade de medida de ângulos. As unidades de medida para abertura de ângulos são estudadas no livro do segundo ano. Observamos breves explicações sobre como obter os valores das razões trigonométricas nas calculadoras. Comenta-se que as calculadoras informam os valores aproximados das razões trigonométricas dos ângulos 30º, 45º e 60º. Lembramos que os valores exatos haviam sido apresentados na seção 1.2 por meio de uma tabela.

Em seguida, é proposto o terceiro conjunto de exercícios, onde estão mais presentes exercícios referentes ao tipo de tarefa T_4: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo. Nessas tarefas, usar calculadora será necessário em dois casos, pois as medidas dos ângulos são 20,5º e 17,5º.

Após o conjunto de exercícios C_3, tem-se a última subseção, "2.3 Outras aplicações das razões trigonométricas". O texto menciona que astronomia, topografia e construção civil são áreas que utilizam tais saberes, mas não traz um exemplo desse fato.

Nessa seção, não identificamos elementos que enriqueçam o bloco tecnológico-teórico, mas observamos uma proposta de trazer possíveis razões de ser para o estudo das razões trigonométricas.

Em seguida, o livro apresenta o quarto conjunto de exercícios, em que se destacam as tarefas do tipo T_8: calcular a medida do ângulo, dadas as medidas de dois lados do triângulo. Conforme observamos na análise das organizações matemáticas, esse tipo de tarefa é predominantemente explorado em C_4, havendo o trabalho com duas técnicas, $\tau_{8.1}$: substituir a medida da hipotenusa e do cateto oposto na proporção que define o seno de um ângulo. Consultar a tabela para saber qual ângulo corresponde. E a técnica $\tau_{8.2}$: substituir a medida do cateto oposto e do cateto adjacente na proporção que define a tangente de um ângulo.

Por fim, temos o conjunto em C_5. Nele, são propostas tarefas do tipo T_{10}, e observamos ausência de tarefas do tipo T_2, T_6 e T_9. O maior destaque está nas tarefas dos tipos T_1, T_4 e T_5. Essas indicações revelam indícios de que as técnicas $\tau_{4.1}$ e $\tau_{5.1}$ dão conta de responder a tarefas em diferentes situações, pois T_4 e T_5 estão presentes nos exercícios complementares, enquanto que T_1 abrange o conteúdo fundamental do capítulo, pois quatro exercícios são desse tipo.

5.4.3 Síntese da análise do livro: organizações matemáticas regionais

Discutimos os tipos de tarefas e as técnicas e de maneira menos sistemática pontuamos elementos do bloco tecnológico-teórico. Foram identificados oito tipos de tarefas. A seguir, temos os elementos da organização matemática em torno do tipo de tarefa T_1.

Quadro 1 – Organização matemática em torno da tarefa do tipo T_1

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias	Teorias
T_1: calcular o valor de uma razão trigonométrica	**$\tau_{1.1}$**: substituir a medida do cateto oposto e da hipotenusa na proporção que define o seno e realizar a divisão.	θ_{SEN}: $sen\alpha = \frac{C.O.}{Hip}$ θ_{RDN} = Realizar a divisão numérica	Θ_1: semelhança entre triângulos Θ_2: Teorema de Tales Θ_3: propriedades das operações elementares com números reais
	$\tau_{1.2}$: substituir a medida do cateto adjacente e da hipotenusa na razão que define o cosseno e realizar a divisão.	θ_{COS}: $cos\alpha = \frac{C.A.}{Hip}$ θ_{RDN} = Realizar a divisão numérica	
	$\tau_{1.3}$: substituir a medida do cateto oposto e do cateto adjacente na razão que define a tangente e realizar a divisão.	θ_{TG}: $tg\alpha = \frac{C.O.}{C.A.}$ θ_{RDN} = Realizar a divisão numérica	
	$\tau_{1.4}$: substituir o valor do ângulo na razão trigonométrica seno.	θ_{CTC} = Consultar tabela trigonométrica.	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

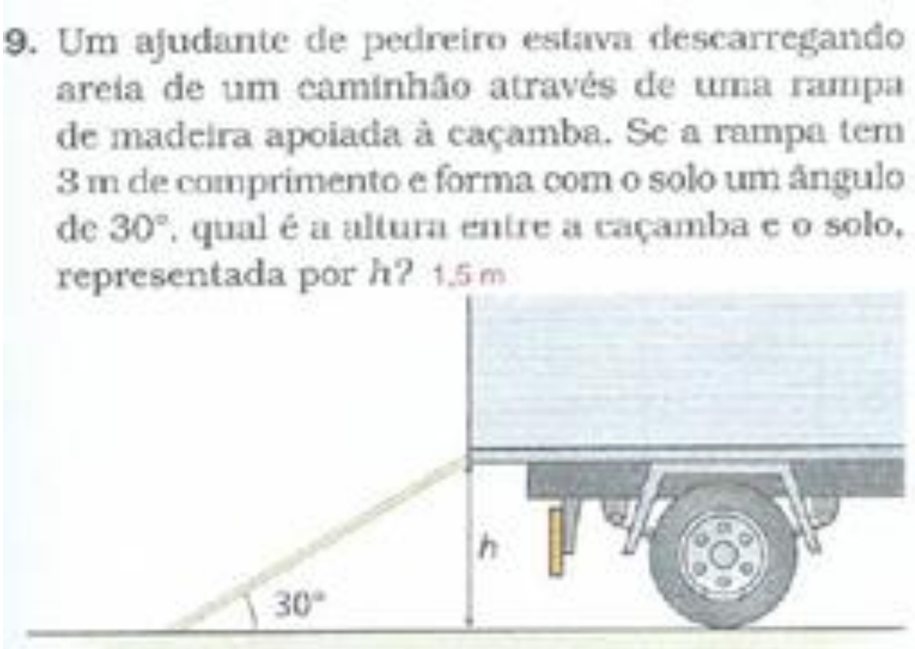
As razões trigonométricas são definidas pelas expressões: $sen\alpha = \frac{C.O.}{Hip}$; $cos\alpha = \frac{C.A.}{Hip}$; $tg\alpha = \frac{C.O.}{C.A.}$. Portanto, elas fazem parte do bloco tecnológico/teórico trabalhado no capítulo analisado. Tais expressões são justificadas e produzidas por Θ_1: semelhança entre triângulos e Θ_2: teorema de Tales.

Elementos teóricos que são mencionados, mas não são trabalhados no capítulo analisado. No livro adotado, esses objetos são estudados no capítulo precedente ao analisado. Acrescentamos que, para o desenvolvimento das tarefas propostas, não basta realizar substituições, o sujeito deverá fazer divisões, inclusive racionalização de denominadores quando for necessário, operações que se apoiam em Θ_3: propriedades das operações elementares com números reais.

Ao longo do capítulo, embora os três elementos do bloco $[\theta, \Theta]$ permaneçam, novos elementos tecnológicos e técnicas surgem, enriquecendo o estudo do objeto matemático. Mencionamos anteriormente a presença de tabelas trigonométricas e do uso da calculadora para obter o valor da razão dada medida do ângulo.

Lembramos que nas tarefas dos tipos T_2 a T_6 não é informado o valor da razão trigonométrica, mas sim o valor do ângulo. Considere a seguinte tarefa: calcular o cateto oposto a um ângulo de 30º, cuja hipotenusa mede 3m.

Figura 21 – Exemplo de tarefa do tipo T_5



Fonte: Leonardo, 2013, p. 265.

Sua resolução exige uma primeira etapa: identificar qual a razão trigonométrica será utilizada? Nesse caso, é a razão seno de um ângulo. Assim, a resposta institucional que se espera do aluno é:

$$sen\alpha = \frac{C.O.}{Hip}$$

Substitui alfa, C.O. e Hip por 30°, h, 3, respectivamente.

$$sen\ 30° = \frac{h}{3}$$

O valor do seno do ângulo de 30º não é um dado da questão, e o aluno terá que obter por consulta às tabelas trigonométricas ou à calculadora. Um fator determinante será o local desse exercício. Ele está no conjunto C2, e a tabela consultada será aquela que possui os valores das razões trigonométricas para os ângulos de 30°, 45º e 60º. Assim, teremos a seguinte equação, solucionada por mudança de termo e coeficiente, invertendo operações que se apoiam nas propriedades das operações elementares com números reais.

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{3}\ \therefore\ 2h = 3\ \therefore\ h = \frac{3}{2}\ \therefore\ h = 1{,}5m$$

Essa discussão sobre o papel do aluno nesse tipo de tarefa está associada ao topos desse aluno nessa tarefa. Esse livro analisado é o manual do professor, e, em suas páginas finais, estão as resoluções dos exercícios presentes nos capítulos. Em particular, a figura a seguir apresenta a resposta para esse exercício.

Figura 22 – Resposta do livro para o professor

9. $\text{sen } 30° = \dfrac{h}{3} \Rightarrow h = 3 \cdot 0{,}5 \Rightarrow h = 1{,}5$

Portanto, a altura h é 1,5 m.

Fonte: Leonardo, 2013.

Essas respostas revelam elementos do livro didático para o *topos* do professor. Do grego *topos* que corresponde no latin a local. Por exemplos, O *topos* do professor é o papel, a atribuição dele quando realiza a tarefa t, utilizando determinada técnica τ. Essa noção está muito relacionada à ideia de distribuição de responsabilidade. O que está a cargo do professor numa atividade proposta pelo livro didático?

Ainda que se perceba que o trabalho abordado no capítulo seja o estudo das três razões trigonométricas, quando o aluno se depara com a resolução das tarefas entram em jogo outros objetos matemáticos, tais como resolução de equações do 1º grau. Portanto, aquilo que o aluno mobiliza para resolver uma tarefa dita como "exercício sobre trigonometria" exige dele o domínio de outros saberes matemáticos que não se limitam às razões trigonométricas. De certa forma, isso pode ampliar as atitudes esperadas do aluno para tarefas que tratem das razões trigonométricas e exigirá maior uso do seu equipamento praxeológico.

Quadro 2 – Organização regional em torno dos tipos de tarefas T_2 a T_7

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias	Teorias
T_2: calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto oposto a um ângulo e a desse ângulo	$\boldsymbol{\tau_{2.1}}$: consultar o valor do seno do ângulo informado. Substituir esse valor encontrado e a medida do cateto oposto a esse ângulo na fórmula que define o seno de um ângulo e resolve a equação do 1º grau.	θ_{CTC} = consultar tabela trigonométrica ou calculadora θ_{SEN}: $sen\alpha = \frac{C.O.}{Hip}$ θ_{MTC} = mudar termo e coeficiente, invertendo operações.	Θ_1: semelhança entre triângulos Θ_2: teorema de Tales Θ_3: propriedades das operações elementares com números reais
T_5: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo	$\boldsymbol{\tau_{5.1}}$: consultar o valor do seno do ângulo informado. Substituir esse valor e a medida da hipotenusa na fórmula que define o seno de um ângulo e resolve a equação do 1º grau.		
T_3: calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo	$\boldsymbol{\tau_{3.1}}$: consultar o valor do cosseno do ângulo informado. Substituir esse valor e a medida da hipotenusa na fórmula que define o cosseno de um ângulo e resolve a equação do 1º grau.	θ_{CTC} = consultar tabela trigonométrica ou calculadora θ_{COS}: $cos\ \alpha = \frac{C.A.}{Hip}$	
T_6: calcular a medida da hipotenusa, dadas a	$\boldsymbol{\tau_{6.1}}$: consultar o valor do cosseno do ângulo informado. Substituir esse		

medida do cateto adjacente a um ângulo e a desse ângulo	valor e a medida do cateto adjacente na fórmula que define o cosseno de um ângulo e resolve a equação do 1º grau.	θ_{MTC} = mudar termo e coeficiente, invertendo operações.	
T_4: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo	$\boldsymbol{\tau_{4.1}}$: consultar o valor da tangente do ângulo informado. Substituir esse valor e a medida do cateto adjacente na fórmula que define a tangente de um ângulo e resolver a equação do 1º grau.	θ_{CTC} = consultar tabela trigonométrica ou calculadora θ_{TG} : $tg\ \alpha = \frac{C.O.}{C.A}$ θ_{TTC} = mudar termo e coeficiente, invertendo operações.	
T_7: calcular a medida do cateto adjacente um ângulo, dadas a medida do cateto oposto e a desse ângulo	$\boldsymbol{\tau_{7.1}}$: consultar o valor da tangente do ângulo informado. Substituir esse valor e a medida do cateto oposto na fórmula que define a tangente de um ângulo e resolver a equação do 1º grau.		

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

O bloco tecnológico teórico referente às três razões trigonométricas, mais especificamente θ_{SEN}, θ_{COS} e θ_{TG}, justificam e produzem técnicas de resolução para as tarefas presentes no capítulo analisado. Portanto, as razões seno, cosseno e tangente são estudadas paralelamente ao longo de todo o capítulo. Essa característica de abordagem simultânea foi identificada com o auxilio da proposição dos conjuntos de tarefas, em particular de C_1 a C_4. O quadro acima retrata as praxeologias locais e busca refletir sobre uma reconstrução iniciada pelas praxeologias pontuais presentes na seção anterior.

Quadro 3 – Organização matemática em torno de tarefas do tipo T_8

Tipos de tarefas	**Técnicas**		**Tecnologias**	**Teorias**
T_8: calcular a medida do ângulo, dadas as medidas de dois lados do triângulo.	Escolher qual razão trigonométrica é adequada e:	$\tau_{8.1}$: substituir a medida da hipotenusa e do cateto oposto na proporção que define o seno de um ângulo. Consultar a tabela para saber qual ângulo corresponde.	θ_{SEN}: $sen\alpha = \frac{C.O.}{Hip}$ θ_{CTC} = Consultar tabela trigonométrica ou calculadora	Θ_1: semelhança entre triângulos Θ_2: teorema de Tales Θ_3: propriedades das operações elementares com números reais
		$\tau_{8.2}$: substituir a medida do cateto oposto e do cateto adjacente na proporção que define a tangente de um ângulo. Consultar a tabela para saber qual ângulo corresponde	θ_{TG} : $tg\ \alpha = \frac{C.O.}{C.A}$ θ_{CTC} = consultar tabela trigonométrica ou calculadora	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

As tarefas do tipo T_8, voltadas para determinar a abertura do ângulo, estão mais presentes no conjunto C_4, localizado na seção do livro que destaca as aplicações. Nas resoluções das tarefas do tipo T_8, não teremos equações do primeiro grau nem mudanças de termos e coeficientes. A execução da técnica está na escolha da razão trigonométrica adequada, substituição dos valores, divisão numérica e consulta à tabela ou calculadora.

6 EQUIPAMENTO PRAXEOLÓGICO DOS ALUNOS

Neste capítulo, trazemos a noção de praxeologia-em-ação como ferramenta de análise de parte do equipamento praxeológico dos alunos e propomos uma tarefa de sondagem com alunos do segundo período do curso técnico em agropecuária. Diante dos saberes matemáticos escolhidos no capítulo 4: comprimento, ângulo, teorema de Pitágoras e razões trigonométricas, optamos por trazer na tarefa de sondagem tarefas referentes ao teorema de Pitágoras e às razões trigonométricas.

Essa delimitação está ancorada na utilização desses saberes nas aulas de Topografia. No capítulo 4, vimos que as noções de comprimento e ângulo também são exploradas nessas aulas. Todavia, o uso de instrumentos de medida, tais como trena e teodolito, fornece ao operador dados sobre comprimentos e aberturas de ângulos. Nossas observações indicam que a relação pessoal do aluno de topografia com os saberes comprimento e ângulo é muito permeada por tais instrumentos.

Por outro lado, essas mesmas observações não indicam forte influência dos instrumentos na relação pessoal quando se trata do uso do teorema de Pitágoras e das razões trigonométricas.

No capítulo 5, discutimos a caracterização das relações institucionais da instituição *ensino de matemática* com esses objetos.. Acrescentamos o trabalho de Ramalho (2016), pois investiga as organizações matemáticas propostas em livros de matemática do 9º ano. Assim, mesmo com nossa constatação de que as razões trigonométricas não estão explicitadas nos PCN, a pesquisa de Ramalho (2016) evidencia uma primeira abordagem nos livros já nos anos finais do ensino fundamental.

Essas reflexões nos forneceram subsídios para elaboração do teste, o qual foi aplicado no segundo semestre de 2017. Retornamos para trabalhar com outra turma do componente curricular topografia. Na primeira aula, conversamos com os alunos sobre a temática da pesquisa e aplicamos um questionário de identificação.

Esse questionário é formado por perguntas curtas e diretas. Nele buscamos obter informações, tais como: nome, idade, local onde reside, instituição na qual estudou nos últimos anos e por fim solicitamos que listassem todos os assuntos estudados em matemática no primeiro ano do curso técnico.

Enquanto resultados desse questionário, temos que a turma é composta por jovens entre 14 e 16 anos, dos quais 90% estavam com 15 anos na data da entrevista, e 55% são meninas. A maioria reside próximo da escola, e 60% deles moram a uma distância máxima de 5 km. Metade estudou em escolas públicas, e a outra metade em escolas particulares. Esse percentual pode ser devido ao sistema de cotas vigente na escola[33].

Todos os alunos responderam que o conteúdo de funções foi estudado nas aulas de matemática. Algumas respostas descrevem quais funções: quadrática, modular e exponencial. Eles relatam que o professor de matemática havia comentado sobre a possibilidade de estudarem trigonometria no próximo ano letivo e que sua prioridade estava em ensinar as funções.

Essa opção do professor em dedicar o primeiro ano do ensino médio ao estudo das funções foi também observada na distribuição dos capítulos do livro analisado. Acrescentamos que, em Brasil (2014), se afirma a existência desse desequilíbrio em todas as coleções aprovadas no PNLD 2015.

Ressaltamos que a construção do teste não foi norteada pelo modelo da praxeologia-em-ação. Na temporalidade desta pesquisa, à época que o teste foi elaborado e aplicado não estávamos utilizando na pesquisa a noção de praxeologia-em-ação. Consequentemente, não conseguiremos responder alguns elementos que poderemos identificar e podem ser aprofundados em pesquisas posteriores.

6.1 TESTE E ANÁLISE *A PRIORI*

O teste é composto por cinco tarefas, divididas segundo os dois grupos de tarefas, citados em Ramalho (2016). As duas primeiras são do grupo G2, pois remetem ao universo matemático. Optamos por trazer a figura porque alguns estudos (SILVA; NETO, 2006; RODRIGUES; CARRIÃO, 2015) apontam para a dificuldade dos alunos em responder tarefas que continham somente o texto.

Outra opção foi trazer polígonos em posição prototípica, para evitar possíveis erros decorrentes da dificuldade de reconhecer ângulos retos em posição não prototípica[34] (LIMA, 2000; SILVA; NETO, 2006; SANTOS; VIANA, 2011), dificuldade também apontada por alguns estudos. Procuramos apresentar números inteiros positivos nos dados dos enunciados.

---

[33] Para os cursos de nível médio, as vagas são destinadas na proporção: metade para alunos de escolas públicas e metade para estudantes de escolas particulares.

[34] A posição prototípica do ângulo reto é horizontal-vertical, em relação às margens da folha.

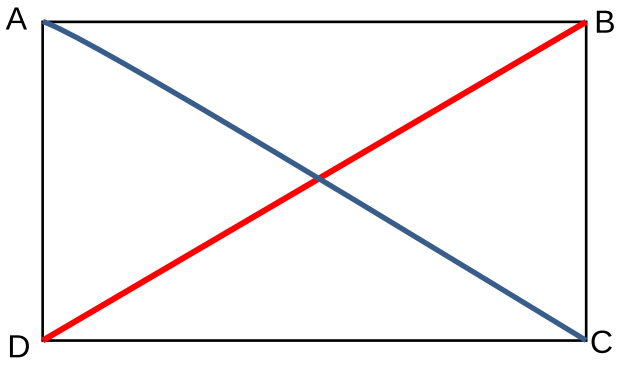
As escolhas mencionadas anteriormente podem dar a impressão que: se as dificuldades apontadas na literatura foram evitadas, o que foi testado? Tudo foi feito para evitar erros? Resposta da segunda pergunta: não. Aquilo que foi descartado da observação não era central para nossa problemática. Procuramos investigar as praxeologias pessoais dos alunos, bem como analisar possíveis inadequações entre as respostas produzidas e as esperadas pela instituição ensino de matemática. Assim, podemos discutir os possíveis objetos não ostensivos evocados diante dos objetos ostensivos presentes nas produções.

Nesta seção, apresentamos as técnicas esperadas pela instituição *ensino de matemática*, considerando que um "bom" sujeito responda às tarefas propostas. Esse sujeito está assujeitado a essa instituição na posição de aluno. Assim, podemos refletir com o olhar da TAD para técnicas preconizadas para determinadas tarefas.

Usaremos apenas a palavra seno ao invés de expressões como: a noção de seno enquanto razão trigonométrica; a razão seno de um ângulo; a razão trigonométrica seno. Analogamente para as palavras: cosseno e tangente.

A tarefa 1: Determine o comprimento da diagonal DB do retângulo ABCD. As medidas dos lados são: AB = CD = 6 cm; AD = BC = 8 cm.

Figura 23 – Retângulo da primeira questão



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Essa tarefa pode ser descrita como: determinar o comprimento da diagonal de um retângulo de lados 6 cm e 8 cm.[35]

[35] Por falha nossa, no objeto gráfico desenhado no teste de sondagem o lado designado no enunciado como tendo 6 cm tem comprimento maior que o lado indicado como tendo 8 cm. Como a pesquisa foi realizada no ensino médio, não se espera que a resolução se apoie diretamente no objeto gráfico. Observamos na análise das produções dos alunos que essa aparente incoerência entre o enunciado e o objeto gráfico a ele associado não foi mencionada por nenhum dos alunos.

A resolução[36] prevista, ou seja, a descrição da técnica: reconhecer que o triângulo BCD é triângulo retângulo, e substituir na fórmula que representa o teorema de Pitágoras os valores dos catetos. E, por fim, resolver a equação do segundo grau incompleta. A seguir, temos a resolução:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$
$$BD^2 = 8^2 + 6^2$$
$$BD^2 = 64 + 36$$
$$BD^2 = 100$$
$$BD = \sqrt{100}$$
$$BD = 10\ cm$$

Reconhecer o triângulo BCD como triângulo retângulo é evocar o não ostensivo *a noção de triângulo retângulo* a partir do ostensivo gráfico. Esse último ostensivo evoca o não ostensivo, *a noção do teorema de Pitágoras*, que pode ser manipulado pelo ostensivo algébrico: $BD^2 = BC^2 + CD^2$. Os ostensivos 6 cm e 8 cm que representam o não ostensivo, *a ideia de comprimento do lado do triângulo*, são postos na referida expressão. Na próxima etapa da resolução, aquilo que deveria ser uma manipulação baseada no não ostensivo, *as operações com grandezas*, pois estamos elevando medidas de comprimento à segunda potência é baseada no não ostensivo *as operações com números*, havendo como resultado: $BD = 10$. Entretanto, a resposta da tarefa é um ostensivo associado ao não ostensivo *comprimento*, mais particularmente comprimento da diagonal de um quadrado. Assim, a resposta é: $BD = 10\ cm$. O teorema de Pitágoras está presente no bloco tecnológico-teórico que justifica uma parte da técnica empregada.

Chevallard (1994) afirma que uma técnica de resolução de equação pressupõe a implementação de um sistema de ostensivos articulados a não ostensivos. A análise do parágrafo anterior é um exemplo desse sistema.

> Toda técnica supõe a ativação de um complexo de objetos, alguns ostensivos (que serão manipulados), outros não ostensivos (que serão evocados). A manipulação dos ostensivos é regulada com o auxílio dos não ostensivos, e esses, inversamente, são evocados com auxílio dos ostensivos. Existe, portanto, uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos. (CHEVALLARD, 1994, p. 5, tradução nossa)[37].

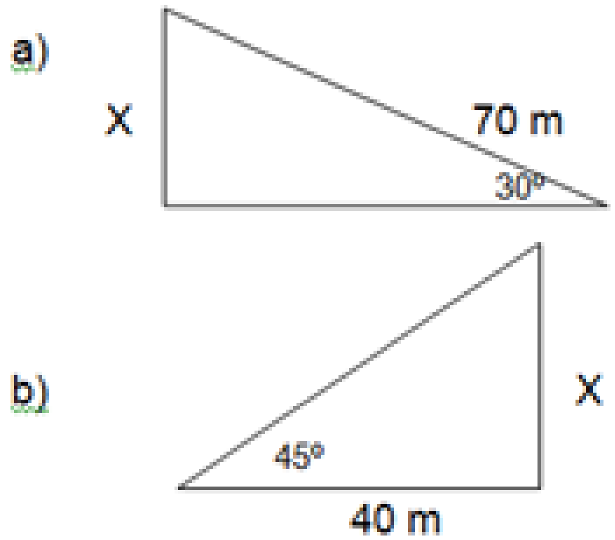
[36] Em todas as resoluções apresentadas nesta seção, escreveremos a unidade de medida apenas no final dos cálculos. Assim, procuramos manter um hábito comum nas aulas de topografia.
[37] Original do francês: “Toute technique suppose l’activation d’un complexe d’objets, les uns ostensifs

Essa dialética está presente em nossas análises e passa a ser um dos motivos que apoia nossas escolhas na produção das tarefas do teste.

A trigonometria foi explorada na tarefa 2, e optamos por utilizar os ângulos de 30º, 45º e 60º porque os primeiros valores estudados no 9º ano das razões trigonométricas são referentes a esses ângulos. As medidas dos comprimentos são números inteiros e foi comunicado que os dois triângulos são retângulos. Entretanto, não informamos os valores das razões trigonométricas, pois pensamos que tal informação (um exemplo de ostensivo algébrico) remete ao não ostensivo *razões trigonométricas.*

Nossa análise foi direcionada para observar se os ostensivos presentes na tarefa seriam suficientes para que os alunos evocassem o objeto não ostensivo *razões trigonométricas*. Essa tarefa é composta por dois itens, seu enunciado: "Determine o valor de X":

Figura 24 – Itens da segunda questão



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Observe que temos alguns objetos ostensivos: informação que são triângulos retângulos; ângulos agudos de 30º e 45º; e comprimento de um dos seus lados. Segundo nossas discussões do capítulo 5, os itens (a) e (b) são, respectivamente, as tarefas do tipo T_5: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a

(ils seront manipulés), les autres non ostensifs (ils seront évoqués). La manipulation des ostensifs est réglée à l'aide notamment des non-ostensifs, et ces derniers, inversement, sont évoqués à l'aide des ostensifs. Il y a ainsi une dialectique nécessaire entre ostensifs et non-ostensifs".

medida da hipotenusa e a desse ângulo; e T_4: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo.

No item a, a tarefa é: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo de 30º, sabendo que o comprimento da hipotenusa é de 70 m. A técnica esperada é que o aluno identifique a necessidade da utilização da razão trigonométrica seno e substitua na fórmula que representa essa razão o valor da hipotenusa, além de lembrar que o valor do seno do ângulo de 30º é igual a ½. Em seguida, que resolva a equação do primeiro grau.

$$sen \propto = \frac{cat\ op}{hip}$$

$$sen\ 30° = \frac{X}{70}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{X}{70}$$

$$2X = 70$$

$$X = \frac{70}{2}$$

$$X = 35\ m$$

Os ostensivos presentes no item (a) evocam o objeto não ostensivo: *o conceito de seno.* Ele está associado ao ostensivo: $sen \propto = \frac{cat\ op}{hip}$. A próxima etapa é substituir os ostensivos: ∝; $cat\ op$; hip por 30º; X e 70, respectivamente. Nessa etapa, o ostensivo: $\frac{1}{2} = \frac{X}{70}$ não está associado ao não ostensivo que deu origem ao cálculo, mas sim ao não ostensivo: *a noção de proporção*. Para continuidade dessa resolução, esse não ostensivo evocará outro: *a ideia de quarta proporcional*, mais conhecido como: *o produto dos meios pelo extremos*. Resulta no ostensivo: $2X = 70$, que passa a ser associado ao objeto não ostensivo: *a noção de equação do primeiro grau*.

A técnica padrão de resolução de equações de primeiro grau leva a concluir que $X = 35$. Como o ocorrido primeira tarefa, a resposta é um ostensivo associado ao não ostensivo *comprimento*, mais particularmente, comprimento de um segmento, portanto a resposta é: $X = 35\ m$.

O item b é descrito da seguinte forma: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo de 45°, sabendo que a medida do outro cateto é 40m. A técnica explorada está em torno da noção de tangente, e espera-se que o aluno identifique a necessidade de uso dessa razão e substitua na fórmula que representa a razão tangente o valor do cateto adjacente, além de lembrar que a tangente de 45º é igual a 1.

$$tg \propto = \frac{cat\ op}{cat\ adj}$$

$$tg45° = \frac{X}{40}$$

$$1 = \frac{X}{40}$$

$$X = 40\ m$$

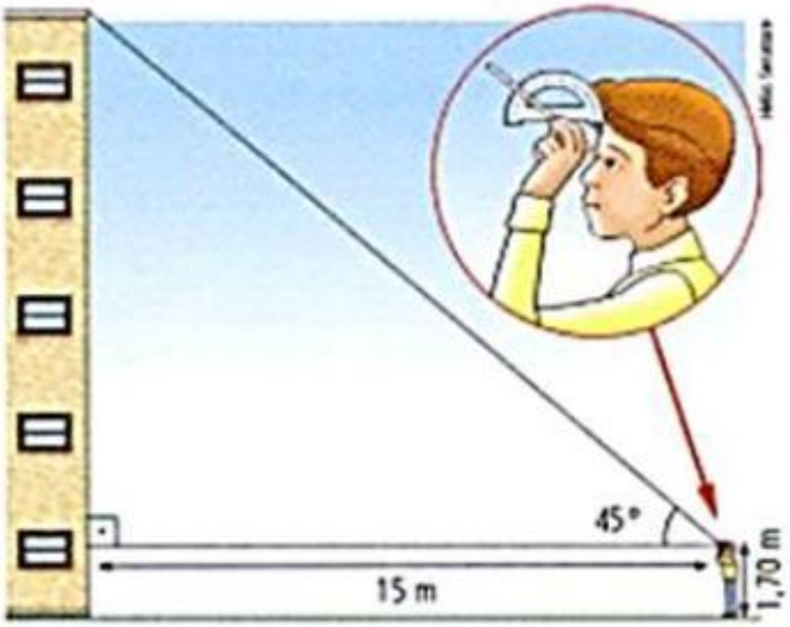
Conforme discutimos na análise praxeológica do livro didático, o bloco tecnológico-teórico referente às técnicas $\tau_{5.1}$ e $\tau_{4.1}$ que produzem solução para tarefas do tipo T_5 e T_4 é constituído das noções sobre Θ_1: semelhança de triângulos; Θ_2: teorema de Tales e Θ_3: propriedades aritméticas das operações inversas.

As demais tarefas de sondagem podem ser classificadas no grupo G1 discutido por Ramalho (2016) e fazem referência ao cotidiano por meio de uma figura-contexto e de um breve texto. Portanto, possuem um conjunto mais amplo de objetos ostensivos.

As tarefas 3 e 4 foram inspiradas noutras presentes nas análises de Ramalho (2016). Na tarefa 3, modificamos o valor do ângulo, antes de 40° para 45º, enquanto que, na tarefa 4, mantivemos a figura e modificamos seus dados.

A mudança para ângulo de 45º justifica-se porque esse valor está no início do estudo das razões trigonométricas. Essa tarefa é uma tarefa do tipo T_4: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo. O enunciado é: “Utilizando os dados da figura abaixo, calcule a altura do prédio”.

Figura 25 – Ilustração utilizada na terceira questão



Fonte: Adaptada de Coleção **Praticando a Matemática**, 9º ano, 2012, p. 204.

Essa tarefa retrata uma distância inacessível, a altura do prédio. Espera-se que o aluno identifique a necessidade do uso da tangente e substitua na fórmula que representa a tangente o valor do cateto adjacente, lembrando que a tangente de 45º é igual a 1. Em seguida, aguarda-se que ele determine o valor e por fim que adicione a altura do observador, determinando a altura do edifício:

$$tg \propto = \frac{cat\ op}{cat\ adj}$$

$$tg45° = \frac{X}{15}$$

$$1 = \frac{X}{15}$$

$$X = 15$$

$$X = 15 + 1{,}7$$

$$H = 16{,}7\ m$$

Os ostensivos gráficos presentes na figura da página anterior auxiliariam a evocar o não ostensivo: *o conceito de tangente*, que, por sua vez, está associado ao objeto ostensivo: $tg \propto = \frac{cat\ op}{cat\ adj}$. A próxima etapa é substituir os ostensivos: $\propto$; $cat\ op$; $cat\ adj$ por 45º, X e 15, respectivamente. Assim, o ostensivo $1 = \frac{X}{15}$ não está associado ao não ostensivo que deu origem ao cálculo, mas sim ao não ostensivo: *a noção de proporção*. Para continuidade dessa resolução, esse não ostensivo evocará outro: *a ideia de quarta proporcional*. Resulta no ostensivo: $X = 15$, que deverá ser associado ao um elemento do objeto ostensivo gráfico: o comprimento do segmento delimitado pelo vértice do ângulo reto e o topo do prédio, o que representa uma parte da resposta. Observamos que esse ostensivo está associado ao não ostensivo *comprimento*, portanto temos $X = 15m$. Para determinar a altura do prédio, deve-se realizar a operação: 15m + 1,7m.

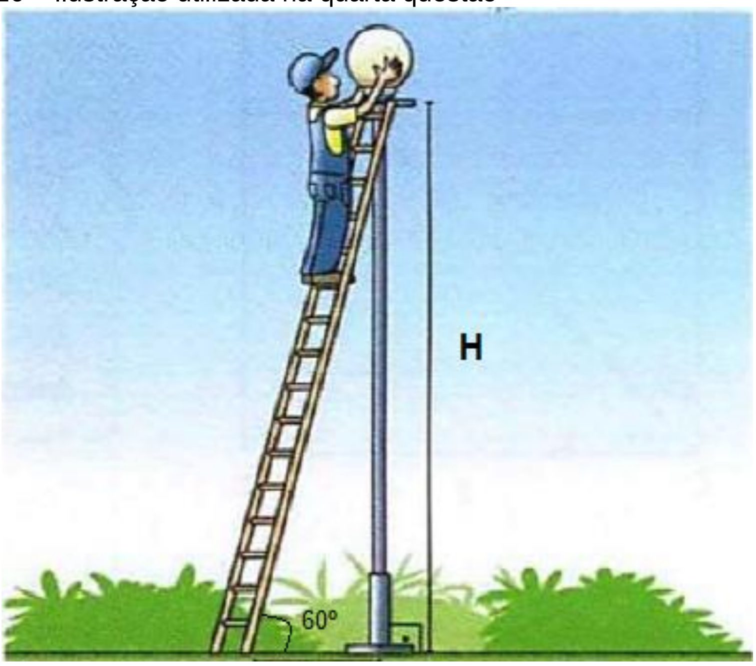
Nessa tarefa, saber a altura do observador auxilia na determinação da distância inacessível, algo também comentado nas aulas de topografia. O trecho[38] a seguir apresenta a determinação da altura de uma árvore. Nele, o professor comenta a necessidade de adicionar a altura do operador.

> **P**: Vai ser 23 metros e 20 centímetros. Está certo ou falta alguma coisa?
> **Obs**: Alguns alunos comentam: a altura do...
> **P**: Muito bem, a altura do operador. Se altura do operador for um metro e sessenta. É só pegar um metro e sessenta mais vinte e três e vinte, que vai dar: vinte e quatro e oitenta, não é isso? Então, a altura da árvore, que chamaremos de altura total, vai ser altura: 23,2 + 1,6 = 24,8m. (BARROS, 2018, APÊNDICE C, linhas: 149 a 157).

A figura a seguir está na tarefa 4. Seu enunciado: “Sabendo que o comprimento da escada é de seis metros. Determine a altura do poste”.

[38] Todos os trechos extraídos dos apêndices são transcrições de aulas observadas

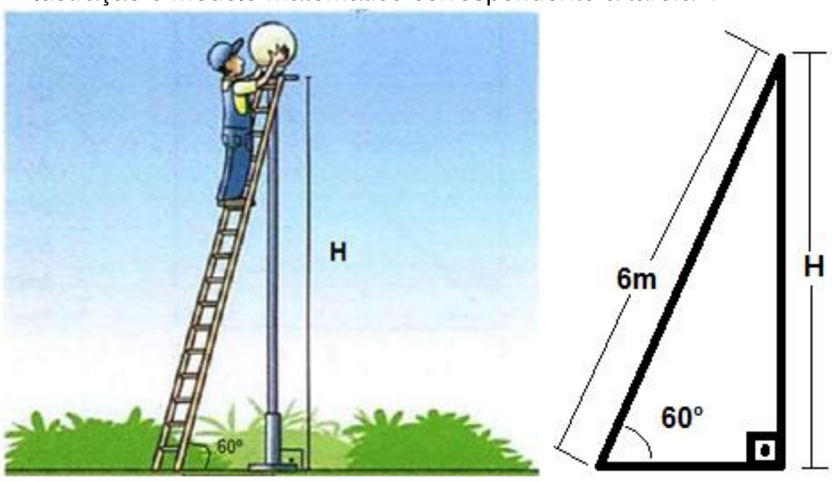
Figura 26 – Ilustração utilizada na quarta questão



Fonte: Adaptada de Coleção **Praticando a Matemática**, 9º ano, 2012, p. 211.

A tarefa 4 foi classificada como um tipo de tarefa T_5: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo. A técnica a ser empregada é reconhecer que essa imagem pode ser representada, de forma simplificada, por um triângulo retângulo cuja hipotenusa seja a representação da escada.

Figura 27 – Ilustração e modelo matemático correspondente à tarefa 4



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

A próxima etapa é identificar a necessidade da utilização da noção de seno, substituir os valores na expressão e resolver a equação do primeiro grau.

$$sen \propto = \frac{cat\ op}{hip}$$

$$sen\ 60° = \frac{H}{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{6}$$

$$2H = 6\sqrt{3}$$

$$H = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

$$H = 3\sqrt{3}\ m$$

Os ostensivos gráficos presentes na figura da página anterior auxiliariam a evocar o não ostensivo: *o conceito de tangente*, que, por sua vez, está associado ao objeto ostensivo: $tg \propto = \frac{cat\ op}{cat\ adj}$. A próxima etapa é substituir os ostensivos: $\propto$; $cat\ op$; $cat\ adj$ por 60°, X e 6, respectivamente. Assim, o ostensivo: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{6}$ não está associado ao não ostensivo que deu origem ao cálculo, mas sim ao não ostensivo: *a noção de proporção*. Para a continuidade dessa resolução, esse não ostensivo evocará outro: *a ideia de quarta proporcional*, resultando no ostensivo: $2H = 6\sqrt{3}$, que deverá ser associado ao não ostensivo: *noção de equação do primeiro grau*. Após manipulações baseadas nas operações aritméticas inversas e acréscimo da unidade de comprimento tem-se altura do poste $H = 3\sqrt{3}\ m$.

A tarefa 6 pode ser considerada como tarefa do tipo: construir triângulo retângulo dada a medida do seu perímetro. Procuramos manter medidas inteiras, mas não queríamos trabalhar com o triângulo de medidas 3, 4 e 5. Embora essas medidas pudessem ser utilizadas na resolução da tarefa.

Segue o conteúdo do enunciado: “A figura abaixo representa uma corda com 25 nós igualmente espaçados. Construa um triângulo retângulo utilizando toda a corda, de modo que o último nó coincida com o primeiro”.

Figura 28 – Ilustração utilizada na quinta questão

Fonte: Adaptada de Santos e Viana, 2011.

Uma técnica para essa tarefa é o aluno perceber que os 25 nós formam 24 intervalos iguais e tal medida será o perímetro do triângulo. Lembrando que as medidas 3, 4 e 5 são de lados de um triângulo retângulo que possuirá 12 de perímetro, e, multiplicando por 2, obtém-se a resposta: lados com medidas 6, 8 e 10. Essas medidas coincidem com aquelas do triângulo retângulo da tarefa 1. O trecho a seguir revela indícios de que os alunos poderiam não associar a uma possível técnica apoiada na recíproca do teorema de Pitágoras, conteúdo comentado pelo professor nesse momento da aula:

> **I**: Tem algum triângulo que vocês conhecem com medidas que dê aquilo que o professor está falando?
> **E**: Triângulo equilátero?
> **I**: Colocando as medidas, esse cateto medindo tanto, esse outro cateto medindo tanto e a hipotenusa medindo tanto.
> **E**: Um triângulo retângulo mesmo.
> **P**: Assim com medidas, por exemplo: 3...2...10.
> **Es**: Há!
> **I**: Então, algum triângulo que você diga: esse eu sei que é retângulo, ou esse eu lembro que é retângulo.
> **Obs**: Os alunos respondem: “Lembro não”. Um aluno diz: “4, 6, 8”.
> **P:** ... 4, 6 e 8 está perto, mas não é não. Olha a fórmula, não é essa? A de Pitágoras? Hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos, então quais são os números que eu substituo aqui e dá certinho?
> **E:** 10... 4, 6 e 10?
> **P:** Não. Geralmente, eu na topografia trabalho com esses números: a hipotenusa vale 5, o cateto adjacente mede 4 e aqui 3. 3, 4 e 5. (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 138 a 154)

Propusemos essa tarefa com o objetivo de analisar possíveis respostas dos alunos diante de uma tarefa cuja técnica possibilita a construção de um triângulo com cordas. A resolução está ancorada na recíproca do teorema de Pitágoras. Essa tarefa foi adaptada de outra proposta por Santos e Viana:

> A classe foi organizada em grupos de três alunos cada. A cada grupo foi entregue um pedaço de barbante e um pincel. Cada grupo escolheu uma unidade de medida e utilizou o pincel, para demarcar as treze medições, ao invés de fazer nós no barbante.
> Assim, como os egípcios, a professora solicitou que cada grupo formasse um triângulo retângulo com o pedaço do barbante a partir das marcações. Somente dois grupos conseguiram realizar a tarefa sem a intervenção da professora. Por isso, ela sugeriu que antes de qualquer procedimento, os alunos formassem o ângulo reto e depois formassem o triângulo (2011, p. 9).

Embora a tarefa tenha sido proposta noutras condições, as autoras apontam para a dificuldade dos alunos em produzir uma solução. Portanto, havia um grau de dificuldade maior nessa tarefa.

6.2 A NOÇÃO DE PRAXEOLOGIA PESSOAL

No âmbito da teoria antropológica do didático, alguns estudos têm utilizado a noção de praxeologia pessoal para caracterizar as relações pessoais dos sujeitos. Usamos essa noção para análise das resoluções dos alunos.

Desde o início do desenvolvimento da TAD, o conhecimento de um aluno é considerado por meio do conceito de relação com o saber. Bittar e Chaachoua (2016) trazem reflexões sobre a evolução dessa consideração do conhecimento do aluno no âmbito da TAD. Esse resgate histórico foi dividido em três períodos. No primeiro, estão as pesquisas desenvolvidas até 1999:

> Os trabalhos selecionados para a análise deste período são os de Assude (1992) Grugeon (1995), Bronner (1997) e Chaachoua (1997). Os autores estavam interessados no estudo das relações institucionais, relações pessoais de estudantes ou de professores, bem como a sua conformidade com a relação institucional.
> [...]
> Este primeiro período foi marcado pelo uso da TAD para questões de assujeitamentos dos sujeitos a uma ou várias instituições.
> [...]
> O erro foi integrado no quadro teórico da teoria das situações didática (TSD) e na teoria dos campos conceituais (TCC) e, portanto, não considerados na TAD. (BITTAR; CHAACHOUA, 2016, p. 12 e 13).

O segundo período compreende 1999 a 2006, situando-se após a introdução da noção de praxeologia como um modelo para descrever a relação institucional, relação que condiciona a relação pessoal de um sujeito a um objeto do saber. E por que estudar o conhecimento do aluno? Os sujeitos são estudados para que se entendam melhor as instituições às quais eles estão assujeitados, bem como desenvolver ou testar novas praxeologias. Todavia, a praxeologia é utilizada para descrever relações pessoais em conformidade com as relações institucionais (BITTAR; CHAACHOUA, 2016).

Quando a relação pessoal não apresentava conformidade, as pesquisas utilizavam outros quadros ou conceitos não abordados pela TAD. Essa perspectiva é reformulada no terceiro período, correspondente às pesquisas realizadas a partir de 2006. O modelo praxeológico é utilizado para descrever a relação pessoal do sujeito com os objetos, mesmo quando ela não está em conformidade com a relação institucional.

Nesse último período, houve uma mudança no olhar dado ao erro, segundo apontam Bittar e Chaachoua:

> No estudo de Nguyen (2006), o erro é considerado como um mau funcionamento de uma técnica institucional. Na sequência dessa tese, Croset e Chaachoua (2010) procuraram interpretar o erro como um componente de uma técnica pessoal do estudante (2016, p. 15).

Nessa perspectiva, a técnica pode ser matematicamente válida ou não, pode estar em conformidade com as expectativas ou não. Bittar e Chaachoua (2016, p. 15) refletem que veem “[...] o surgimento de um terceiro período favorável à inclusão do sujeito cognitivo e, em particular, o erro como um objeto de estudo como tal na TAD”. A noção de praxeologia-em-ação é proposta inicialmente por Croset (2009). Entretanto, Chaachoua (2010) a denomina de praxeologia pessoal, argumentando que prefere utilizar essa terminologia porque faz analogia à relação pessoal[39].

> Assim, a relação institucional $R_I(p,O)$ do sujeito na posição p de aluno de uma instituição I é descrita pelas praxeologias institucionais. E a relação pessoal $R_p(p^*/I,O)$ de um aluno e*, assujeitado à uma instituição I, ao objeto O é descrita pelas praxeologias pessoais. (CHAACHOUA, 2010, p. 52, tradução nossa)[40].

A praxeologia pessoal é composta por três elementos. O primeiro é o tipo de tarefa pessoal que é o conjunto de tarefas que o sujeito reconhece como similares provocando aplicação de uma mesma técnica. Dois tipos de tarefas pessoais serão diferentes quando emanam do sujeito técnicas diferentes. Essa diferenciação não corresponde necessariamente àquela da instituição.

Croset (2009) afirma que o segundo elemento é a técnica pessoal que pode ser errônea, correta, legitimada ou não pela instituição. Ela deve apresentar certa estabilidade na sua utilização para ser considerada como técnica de resolução. Dessa forma, evita-se considerar os erros por falta de atenção ou um descuido pontual como exemplos de uma técnica pessoal. Esses dois componentes formam a práxis pessoal. Por fim, tem-se a tecnologia pessoal que explica ou não, governa e legitima a utilização da técnica pessoal. Essa tecnologia nem sempre é consciente

---

[39] Original em francês : “Nous reprenons cette définition, mais nous préférons utiliser le terme de *praxéologie personnelle* à la place de *praxéologie-en-acte* par analogie à la notion du rapport personnel.” (CHAACHOUA, 2010, p. 51)

[40] Original em francês: “Ainsi, le rapport institutionnel RI(e,O) du sujet en position élève à l’objet O au sein d’une institition I est décrit par les praxéologies institutionnelles. Et le rapport personnel Rp(e*/I,O) d’un élève e*, assujetti à une institution I, à l’objet O est décrit par des praxéologies personnelles”. (CHAACHOUA, 2010, p. 52).

ou explicitável.

Essa autora discute a necessidade de algumas distinções entre a noção de praxeologia-em-ação e as noções de praxeologia e concepção, evitando, assim, o uso deliberado das duas últimas. E afirma que a praxeologia ou organização praxeológica modela a tarefa institucional, portanto caracteriza a relação institucional com os objetos do saber. Entretanto, quando se propõe descrever a atividade de um aluno, podendo ele ser um bom sujeito ou não, outros aspectos entram em jogo. Dentre eles, Croset (2009) lança a seguinte questão: podemos considerar esse aluno uma instituição?

A resposta é que ele é sujeito de uma instituição didática, participante de um sistema didático composto por professor, aluno e objetos do saber. Além desse aspecto, esse aluno pode estudar o mesmo objeto em diferentes instituições. É o que identificamos até então. Portanto, o aluno não é, na pesquisa de Croset (2009), considerado como uma instituição propriamente dita. Assim, a autora argumenta sobre a necessidade de diferenciar as noções de organização praxeológica e praxeologia pessoal, sendo que adotamos o mesmo posicionamento em nossa pesquisa.

Podemos lançar alguns questionamentos: o que a instituição *ensino de matemática* espera de um sujeito na posição de aluno de matemática ao estudar cálculo de distâncias inacessíveis? De certa forma, discutimos tal questionamento no capítulo anterior. O que a instituição *ensino de topografia* espera de um sujeito na posição de aluno de topografia ao estudar cálculo de distâncias inacessíveis? Discutiremos essas questões nos capítulos seguintes.

No caso desta pesquisa, a pessoa está na posição de aluno de matemática e na posição de aluno de topografia. Ao termos um objeto matemático que vive nessas diferentes instituições, a relação pessoal desse sujeito será moldada pelas relações institucionais que essas diferentes instituições têm com esse objeto. A relação pessoal desse sujeito será uma combinação: dessas diferentes relações institucionais; além de outras instituições às quais se sujeitam ou se sujeitaram e nas quais esse objeto vive.

Croset (2009) afirma que um dos objetivos da descrição das concepções está em diferenciar o saber a ensinar daquele efetivamente assimilado pelo aluno. A construção das concepções está sustentada numa análise epistemológica do conceito, proporcionando reflexões sobre o conhecimento de um sujeito epistêmico.

Portanto, a noção de concepção diferencia-se da praxeologia pessoal, que propõe um modelo referente à tarefa de um sujeito institucional, ou seja, um sujeito assujeitado a uma instituição, um sujeito didático.

No contexto brasileiro, embora não utilize as terminologias apresentadas neste tópico, observamos na pesquisa de Menezes (2010) várias aproximações às noções discutidas nos parágrafos anteriores. Inicialmente, as temáticas das pesquisas de Croset (2009) e Menezes (2010) são referentes ao ensino de conteúdos da álgebra. O objetivo de Menezes (2010) foi identificar as diferenças entre o saber que é ensinado pelo professor e o saber efetivamente aprendido pelo aluno, fato que, segundo o pesquisador, caracterizaria uma nova transposição de saberes em sala de aula.

Em nosso olhar, esse saber efetivamente aprendido pelo aluno é parte do equipamento praxeológico do aluno, sendo observado por meio das suas praxeologias pessoais.

> Porém, com o desenvolvimento da pesquisa, verificamos que não seria possível identificarmos o saber efetivamente aprendido pelo aluno, mas, sim, elementos que indicassem para uma nova organização no saber ensinado pelo professor. Uma nova ordem, estabelecida por cada aluno, que contaria com o resgate de conhecimentos prévios que dessem mais sentido e segurança para eles na resolução das equações de 2º grau, ou seja, uma nova *práxis*, a *práxis* do aluno. (MENEZES, 2010, p. 141).

Menezes (2010) caracteriza as organizações praxeológicas institucionais por meio da observação de aula e da análise do livro didático utilizado em sala e entrevista com o professor. As praxeologias pessoais dos alunos foram caracterizadas por meio de tarefas compostas pelos mesmos tipos de tarefas que foram exploradas pela instituição ensino de matemática, representada pelo professor e livro didático. Essa pesquisa identificou alunos com praxeologias pessoais em conformidade com as praxeologias institucionais, e seus resultados apontam para que

> [...] dependendo do subtipo de tarefa, o aluno efetua escolhas estratégicas particulares que tenham mais sentido para ele do que as estratégias apresentadas pelo professor. Assim sendo, ao fazermos a montagem da praxeologia, identificamos diferenças nas técnicas e/ou subtécnicas utilizadas pelo professor, o que caracteriza uma praxeologia diferente. (MENEZES, 2010, p. 143).

E, conforme foi comentado sobre a estabilidade da técnica pessoal para ser considerada uma técnica de resolução, Menezes (2010, p.145) reflete sobre esse aspecto, enquanto uma questão em aberto: “[...] buscar elementos que identificassem se a praxeologia dos alunos possui uma estabilidade, a partir de uma análise longitudinal das atividades dos alunos”.

6.3 ANÁLISE DOS ELEMENTOS PRAXEOLÓGICOS APRESENTADOS PELOS ALUNOS A PARTIR DO MODELO DE PRAXEOLOGIA PESSOAL

Apresentamos discussões baseadas nas respostas dos alunos para as tarefas de sondagem, aplicadas na primeira aula do componente curricular topografia.

Inicialmente, ressaltamos com exceção da tarefa 3, que trata de distância inacessível, os tipos de tarefas propostos nas tarefas de sondagem são estudados somente pela matemática, ou seja, não são tarefas às quais a topografia se dedica a resolver.

Na resposta do questionário de identificação, os alunos afirmam que os saberes matemáticos trabalhados no primeiro ano do ensino médio foram predominantemente as funções. Como vimos no capítulo 5, a trigonometria está presente no último capítulo.

Diante da realidade do parágrafo anterior, temos indicativos de que a relação pessoal dos alunos com os objetos do saber necessários para topografia está mais sustentada naquilo que foi estudado nos anos anteriores de escolarização. Essas constatações apontam para um conjunto de fatores que podem justificar o baixo índice de respostas corretas na tarefa de sondagem.

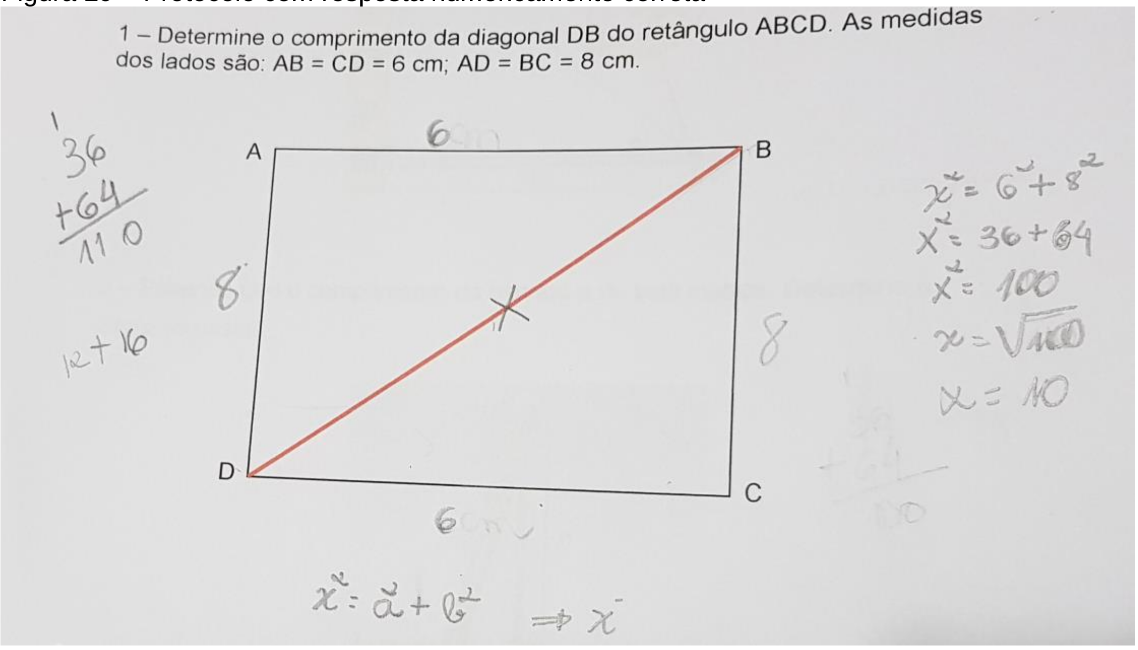
Tabela 3 – Percentuais do teste sondagem

Tarefa	Acertos	Inadequações	Não respondeu
1	13,3	40	46,7
2 (a)	0	26,7	63,3
2 (b)	0	13,3	86,7
3	0	20	80
4	0	13,3	86,7
5	0	33,3	66,7

Fonte: Dados da pesquisa.

Esses dados indicam que os alunos não se apropriaram adequadamente dos saberes matemáticos em jogo nas questões propostas no teste, o que prejudica a mobilização dos conhecimentos matemáticos necessários ao estudo da topografia. Na tarefa 1, em todos os acertos está escrito apenas o resultado numérico, conforme a figura a seguir:

Figura 29 – Protocolo com resposta numericamente correta



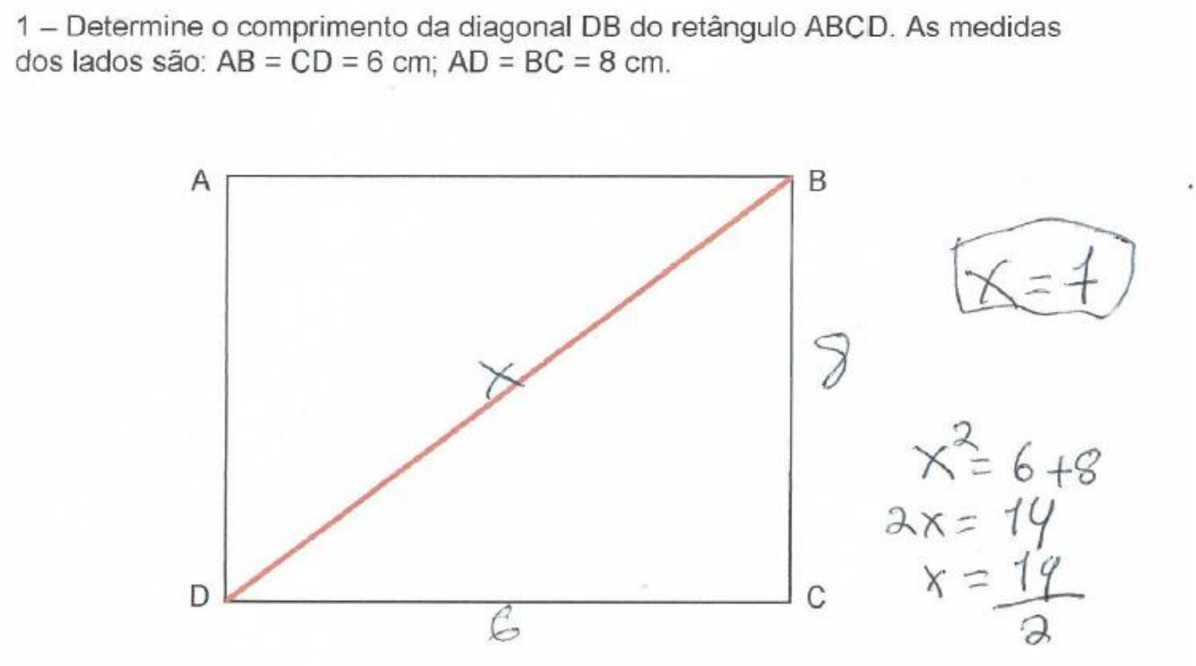
Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Observamos que os alunos utilizaram a expressão que representa o teorema de Pitágoras, no caso o objeto ostensivo: $X^2 = 6^2 + 8^2$. Por meio das manipulações baseadas nas operações numéricas, obtiveram o resultado $X = 10$. Nenhum aluno escreveu a resposta $X = 10\ cm$. Dizemos numéricas, pois eles não escreveram a unidade de medida centímetro. Entretanto, a técnica pessoal desses sujeitos apresenta conformidade com a esperada pela instituição ensino de matemática.

No protocolo apresentado na figura anterior, observamos elementos escritos pelo aluno. Alguns estão apagados: unidade de medida centímetro, adição: $36 + 64 = 100$. Outros foram deixados, por exemplo: $12 + 16$; ou desconsiderados: 36 +64 = 110. Esse é uma possível indicação de que o aluno associou o objeto ostensivo: 6^2 a 2.6; como também 8^2 = 2.8.

Conforme comentado sobre a estabilidade da técnica pessoal, somente com essas tarefas de sondagem não teremos como avaliar tal aspecto. Por outro lado, as respostas dos alunos nos fornecem elementos sobre sua relação pessoal. E, por tal motivo, preferimos utilizar o termo inadequação ao invés da palavra erro.

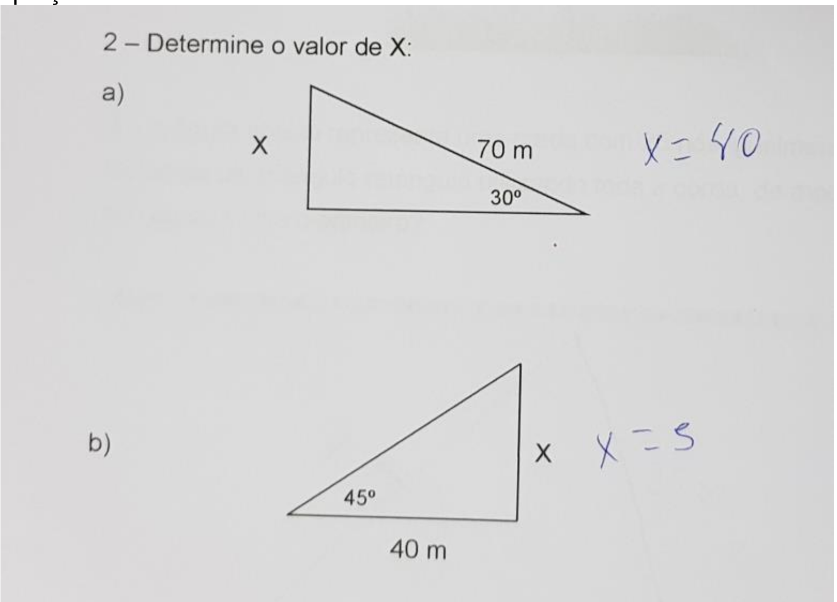
Figura 30 – Protocolo com resposta inadequada produzida por técnica com inadequação conceitual referente à tarefa 1



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Esse é um exemplo de resposta inadequada e que foi produzida por técnicas pessoais que não estão em conformidade com as expectativas institucionais. No protocolo acima, o sujeito utilizou uma expressão inadequada para representar o teorema de Pitágoras, e outra inadequação está em transformar X^2 em 2X, fato que remete ao protocolo anterior quando mencionamos os números 12 e 16 como possíveis cálculos das potências 6^2 e 8^2, respectivamente. Percebemos indícios de inadequação entre as relações: pessoal e institucional. A relação pessoal desse aluno com o teorema de Pitágoras foi identificada, em parte, pela expressão: $X^2 = 6 + 8$, enquanto que a relação institucional na posição de aluno esperada para essa mesma parte é: $X^2 = 6^2 + 8^2$. Portanto, observamos que o resultado obtido pelo aluno é fruto de uma técnica que possui inadequações conceituais.

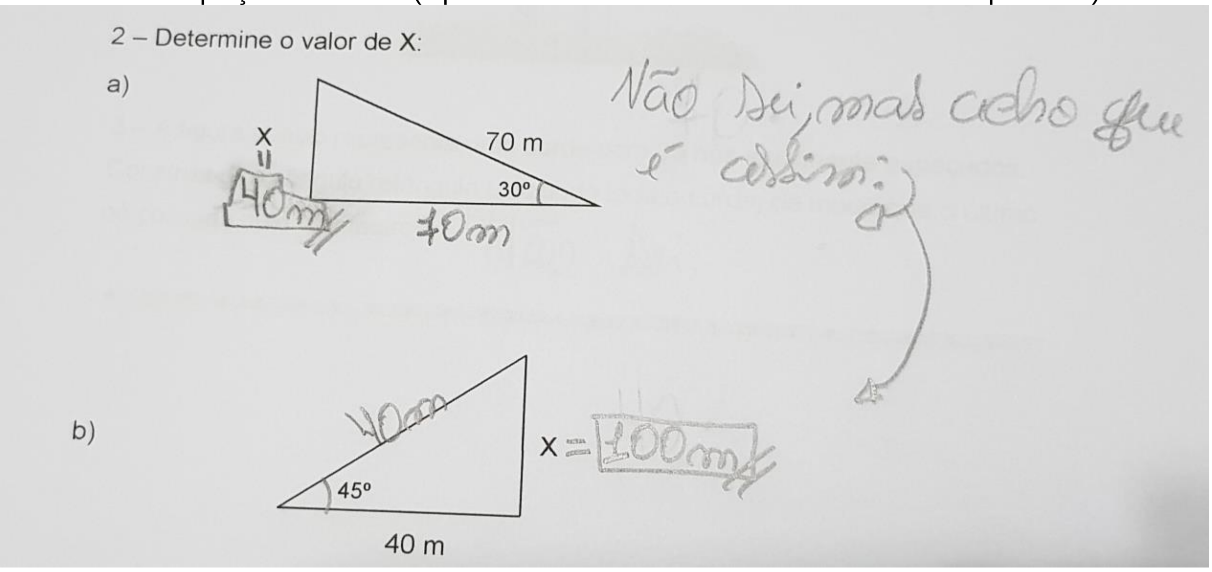
Figura 31 – Protocolo com resposta inadequada produzida por técnica com inadequação conceitual referente à tarefa 2



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Consideramos que o aluno tenta produzir uma resposta. Assim, podemos refletir até que ponto não é uma questão contratual: o aluno sabe que precisa dar uma resposta para a tarefa matemática proposta, e ele também sabe que fará operações com os dados fornecidos. Nesse protocolo, realiza operação de subtração, sem reconhecer os números como medidas das grandezas: comprimento e ângulo. Nossa interpretação é que respostas $X = 40$ e $X = 5$ obtidas por meio das operações $70 - 30$ e $45 - 40$, respectivamente. Essas indicações mostram insegurança no reconhecimento de qual técnica empregar. E, diante desse não reconhecimento, ele produz tais respostas.

Figura 32 – Protocolo da tarefa 2 com resposta inadequada produzida por técnica com inadequação conceitual (hipotenusa e cateto horizontal com mesmo comprimento)

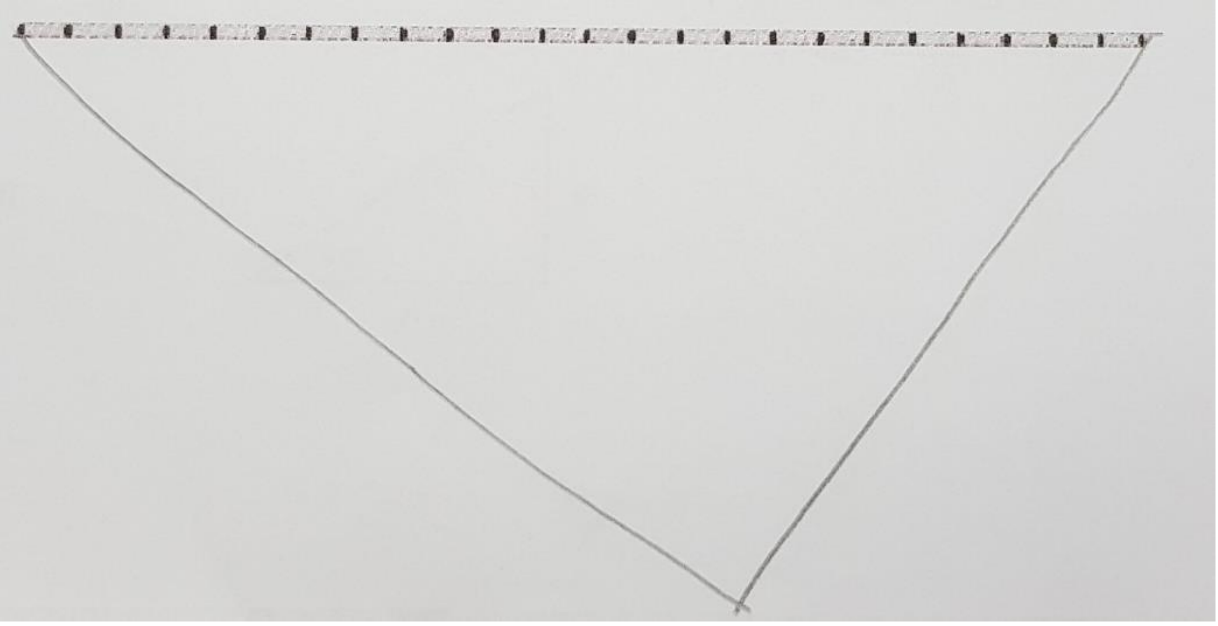


Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

No protocolo acima, a nossa interpretação é que o aluno incorre em inadequações conceituais: considera que a hipotenusa e o cateto horizontal possuem mesmo comprimento e que a soma das medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo é igual a 180. Utilizando tais inadequações, o aluno obteve suas respostas. Nossas reflexões indicam para a possibilidade de que haja uma confusão entre lado e ângulo: a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° levando a considerar que a medida do perímetro do triângulo é 180.

Temos várias respostas inadequadas para as tarefas 3 e 4, em sua maioria são números sem nenhum indício de manipulação algébrica. Na tarefa 4, alguns alunos responderam que a altura do poste é 6m porque o ponto mais alto do poste coincide com o topo da escada e, portanto, terão a mesma altura. Vejamos outro exemplo de inadequação na figura a seguir.

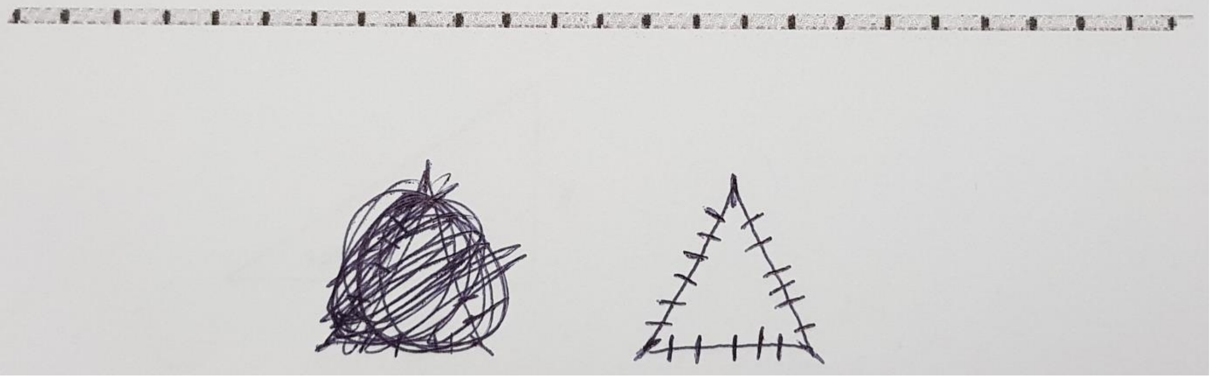
Figura 33 – Protocolo da tarefa 5 com resposta inadequada produzida por técnica com inadequação conceitual (comprimento da corda foi considerado como um lado do triângulo)



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Interpretamos que o aluno considerou o comprimento da corda como um dos lados do triângulo retângulo. O formato do ângulo construído é próximo de um ângulo reto.

Figura 34 – Protocolo com resposta inadequada produzida por técnica com inadequação conceitual referente à tarefa 5

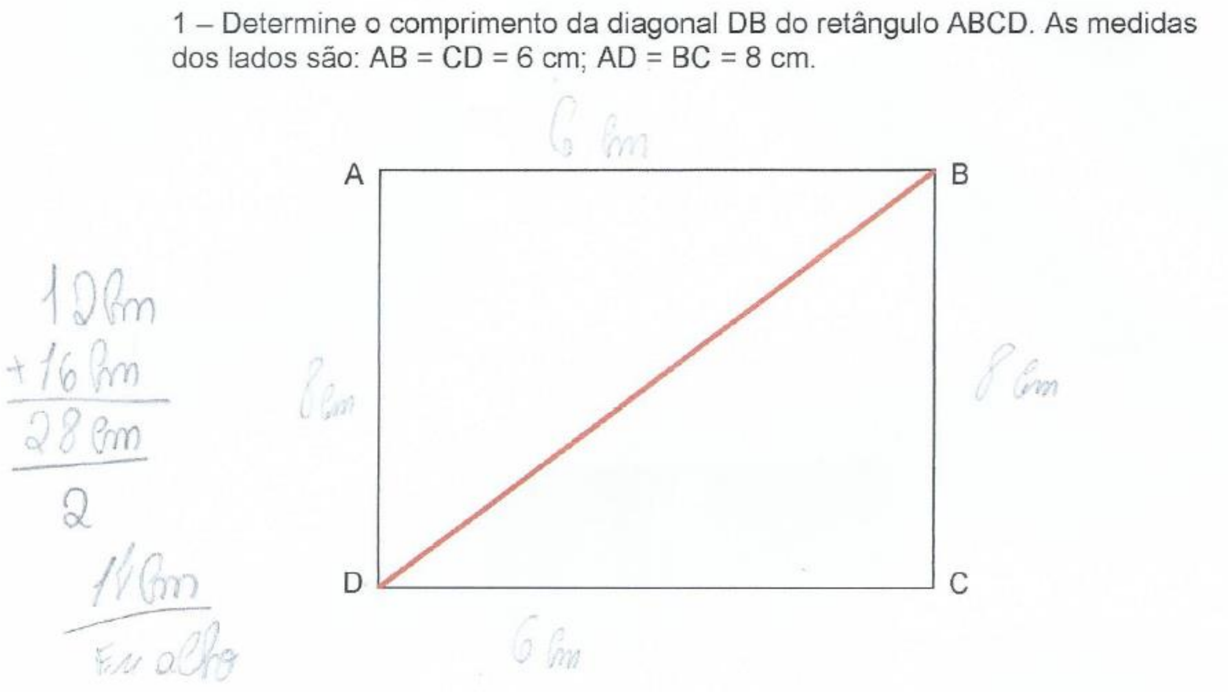


Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

No protocolo acima, o aluno constrói um triângulo que não possui ângulo reto. Observamos que a quantidade de marcações nos lados do triângulo é inferior aos 25 nós.

Um exemplo de resposta inadequada, porém produzida por uma técnica que não apresenta inadequações conceituais, é apresentada na figura a seguir:

Figura 35 – Protocolo com resposta inadequada produzida por técnica sem inadequação conceitual



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Nesse protocolo, consideramos que o sujeito reconheceu a tarefa proposta como similar à outra tarefa institucional: calcular o semiperímetro de um retângulo de lados 6 cm e 8 cm. E aplica uma técnica eficaz para a tarefa assimilada que não é a tarefa proposta. Consequentemente, essa técnica produz uma resposta que não está em conformidade com a esperada pela instituição ensino de matemática, mas que não apresenta inadequações conceituais, ou seja, se a tarefa proposta fosse calcular o semiperímetro do retângulo ABCD, o aluno teria utilizado uma técnica eficaz.

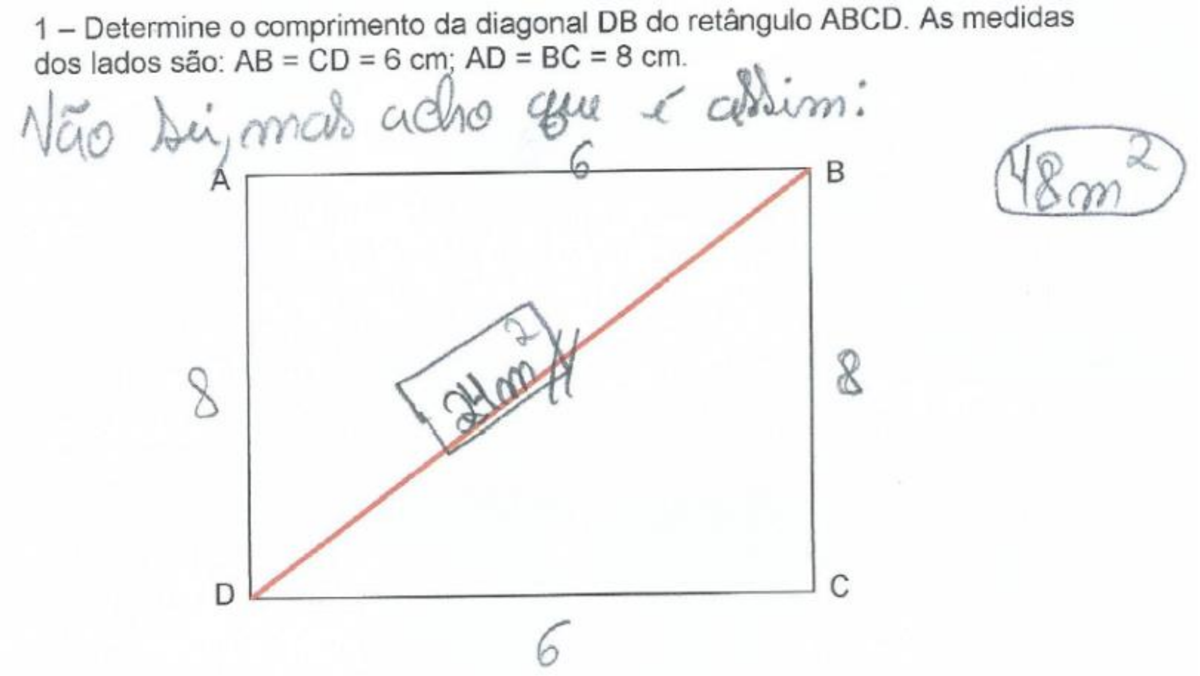
Portanto, temos indícios que a praxeologia pessoal empregada pelo aluno é relativa a outro tipo de tarefa institucional. Alguns elementos apontam que a tecnologia evocada, ou seja, os argumentos que explicam, justificam e produzem essa técnica-em-ação estão apoiados na noção de perímetro.

Embora não seja temática desta tese discutir a noção de perímetro, não podemos desconsiderar o fato de surgir uma resposta referente a tal objeto matemático. Nesta pesquisa, consideramos perímetro de uma figura plana como o comprimento do seu contorno. No caso da tarefa, temos ao menos dois tipos de figuras planas: retângulo e triângulo.

O objeto não ostensivo: *a noção de perímetro* está associado a alguns objetos ostensivos presentes na tarefa 1, tais como: o retângulo cuja única informação é a medida dos lados. Outro fato é que a tarefa solicita o comprimento de um lado do triângulo, e os objetos não ostensivos: *noção de comprimento* e *ideia de perímetro* estão relacionados.

Consideramos o perímetro como uma grandeza associada a figuras planas, mais especificamente ao seu contorno, sendo representado pelo par indissociável: número e unidade de medida. E, nesses termos, ao apresentar a resposta 14cm, o sujeito escreveu corretamente o semiperímetro. Além da noção de perímetro, foram observadas respostas que fazem referência à outra grandeza geométrica: área.

Figura 36 – Protocolo com resposta inadequada (área)



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Nesse protocolo, o aluno reconheceu a tarefa proposta como semelhante a outra tarefa institucional: determinar a área de um triângulo retângulo cujos comprimentos dos catetos são 6 cm e 8 cm.

Alguns alunos responderam utilizando uma técnica ancorada na noção de área e apresentam como resposta para o comprimento de um segmento de reta a área do retângulo ou a sua metade que é a área do triângulo retângulo. Nessas produções, existe uma inadequação conceitual no sentido de representar um comprimento como se fosse uma área. Observamos, no protocolo acima, que o aluno não escreve a unidade de medida que foi dada, no caso, centímetro. E na resposta apresenta metros quadrados.

Conforme identificado anteriormente, nossas reflexões apontam para a possibilidade do objeto não ostensivo: *a noção de área* ser evocado por estar associado a alguns objetos ostensivos presentes, tais como: o retângulo cuja única informação é a medida dos lados. Outro fato é que a tarefa solicita o comprimento de um lado do triângulo que está no interior do retângulo.

Ressaltamos que perímetro e área são grandezas geométricas relacionadas a elementos das figuras planas. Por exemplo, a um retângulo podem ser associadas essas duas grandezas, o perímetro ao seu contorno, enquanto a área ao interior. Acrescentamos que, no caso do retângulo, os cálculos para determinar perímetro e área utilizam dos mesmos elementos: os comprimentos dos lados perpendiculares. Nesses cálculos, a diferença repousa na operação a ser realizada, adição e multiplicação respectivamente.

Todos esses objetos ostensivos: contorno e interior da mesma figura, medidas dos lados, adicionar ou multiplicar os mesmo números, entre outros, estão associados aos objetos não ostensivos: *as noções de perímetro e área*. Portanto, nossas reflexões indicam mais elementos que evoquem associação entre esses não ostensivos do que dissociação.

6.4 SÍNTESE

No que se refere às respostas dos alunos, o percentual de acertos foi baixo para todas as tarefas. Conforme observado, nenhum aluno acertou as tarefas 2 a 5. Houve várias justificativas por escrito dizendo que não sabiam ou não lembravam das fórmulas. Temos indícios de que os alunos não conseguiram reconhecer as tarefas propostas como similar a nenhuma outra tarefa institucional.

Nas tarefas 3 e 4, algumas dessas respostas levam em consideração o aspecto visual das imagens, informando que a altura do prédio é próximo de 20m ou que o comprimento da escada é igual à altura do poste, nesse caso 6m.

Na tarefa 6, alguns alunos interpretaram o segmento dado como um dos lados do triângulo e não como representação do comprimento do contorno do triângulo a ser construído.

Ressaltamos que a resolução esperada pelo “bom” sujeito exige dele outros conhecimentos, por exemplo, o valor da razão trigonométrica. E, mesmo optando por: tarefas com figuras em posição prototípica, números racionais e tipos de tarefas mais frequentes ao se iniciar o estudo da trigonometria, obtivemos poucas respostas. Portanto, os resultados deste capítulo apontam para uma insuficiência do equipamento praxeológico dos alunos referentes aos saberes matemáticos em jogo.

7 ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS VIVENCIADAS NO COMPONENTE CURRICULAR TOPOGRAFIA

Nesse capítulo, pretendemos refletir, entre outros aspectos, sobre as praxeologias matemáticas vivenciadas no curso de ETPNM. Iniciamos por uma breve discussão sobre as pesquisas de Romo-Vazquez (2009) e de Chávez (2013), relativas à educação profissional, que adotam a TAD como marco teórico.

Romo-Vazquez (2009) investiga saberes matemáticos na formação de engenheiros. Essa pesquisa dedicou-se à questão do lugar atribuído à matemática que permite responder às necessidades matemáticas de futuros engenheiros. Segundo a pesquisadora, seu trabalho é desenvolvido na França por dois motivos: a longa tradição desse país na formação institucional de futuros engenheiros e a existência de quadros teóricos para estudar a formação e as práticas profissionais.

Romo-Vazquez (2009) aponta para a dificuldade encontrada no estabelecimento de uma relação satisfatória entre teoria e prática na formação dos engenheiros. Seus resultados mostram a importância de levar em consideração os diferentes tipos ou níveis de discursos tecnológicos.

A autora denomina de disciplinas intermediárias aquelas que fazem uso da matemática, embora não tenham como finalidade o ensino de objetos matemáticos. A autora destaca essas disciplinas como oportunas para trabalhar relações entre a teoria e a prática. Segundo Romo-Vazquez (2009, p. 289, tradução nossa), "[...] a análise dos projetos mostra que a maioria das praxeologias ali presentes são das disciplinas intermediárias. Elas apresentam uma componente matemático imbricado com os saberes dessas disciplinas e, eventualmente, com outros saberes [...]"[41]. Esse estudo se deu com a disciplina intermediária automação e o saber matemático foi a transformada de Laplace. No caso da nossa pesquisa, a topografia é a disciplina intermediária.

A pesquisa de Chávez (2013) foi desenvolvida no México e investigou objetos matemáticos em dois cursos de nível médio. Seu questionamento inicial foi: a formação matemática é adequada tanto para a formação especializada quanto para a prática desses futuros técnicos?

[41] Original em francês: "[...] L'analyse des projets montre que la plupart des praxéologies qui y interviennent sont issues des disciplines intermédiaires, elles présentent une composante mathématique imbriquée avec des savoirs de ces disciplines et éventuellement d'autres savoirs".

Foi investigada a matemática vista no segundo semestre do curso de formação geral e o levantamento e traço, característicos da topografia. Segundo a autora, o levantamento topográfico consiste nas tarefas de efetuar as medições de um terreno. Esses dados permitem a realização de cálculos e a construção da planta topográfica. Ela completa que o traço compreende tarefas de projetar edificações nessa planta, em que, muitas vezes, se deve ir ao terreno para a realização de novas medições.

Chávez (2013) afirma que houve necessidade de investigação em três contextos: histórico, profissional e escolar. As práticas referentes ao levantamento e traço topográfico foram analisadas nesses três contextos por meio da noção de praxeologia. Essa escolha permitiu uma análise da constituição e matematização dos conhecimentos envolvidos.

A análise do contexto histórico das práticas, referentes ao levantamento e traço topográfico, permitiu constatar e comparar as práticas que permaneceram, bem como as motivações e justificativas associadas. A autora destacou ainda outros resultados do contexto histórico:

> Em geral, pode-se dizer que os tipos de tarefas não são matemáticas, mas topográficas (levantamento e traço topográfico), porém as técnicas utilizadas são na maioria geométrica e trigonométrica, e a validação é fortemente experimental. Utilizam-se recursos materiais como a corda de nós com as quais se realizava no solo a verificação experimental sem medida graduada que posteriormente será, segundo este estudo, base de conhecimento matemático teórico como a fórmula de Pitágoras para calcular os lados de um triângulo retângulo. Validações práticas podem ser reconhecidas, como a facilidade do uso do instrumento na elaboração de linhas perpendiculares que permitem o traço de figuras geométricas em terra, mas a falta de documentos e explicitações não permitem uma análise mais aprofundada. (CHÁVEZ, 2013, p. 266, tradução nossa)[42].

Essa pesquisa discutiu sobre fatores que influenciam as técnicas observadas, tais como o tipo de terreno e os instrumentos de medição. E comenta que o desenvolvimento dos instrumentos possibilitou medições mais precisas.

---

[42] Original do espanhol: “[...] De manera general, puede decirse que los tipos de tareas no son matemáticas sino topográficas (Levantamiento y Trazo Topográfico), pero las técnicas empleadas en su mayoría son geométricas y trigonométricas, y la validación es fuertemente experimental. Se recurre a recursos materiales como la cuerda de nudos con las que se lograba no sólo la verificación experimental sino graduada (medida) que posteriormente será, según este estudio, base de conocimientos matemáticos teóricos como la fórmula pitagórica para calcular los lados de triángulos rectángulos. Validaciones prácticas pueden reconocerse, como la facilidad del uso del instrumento en la elaboración de líneas perpendiculares que permitieran el trazo de figuras geométricas en terrenos, pero la falta de documentos y explicitaciones no permiten realizar un análisis más profundo”.

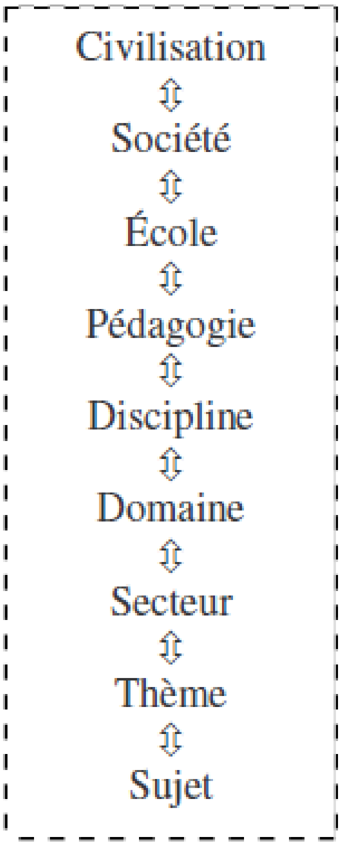
A análise do contexto profissional permitiu identificar as práticas atuais e a análise escolar, por sua vez, possibilitou elencar os objetos matemáticos ensinados. Chávez (2013) indica que muitas das praxeologias encontradas são mistas, isto é, ao menos um dos componentes é matemático ou topográfico. Chevallard (2002b) constata que, ao longo do tempo, ocorreu uma integração dos elementos de topografia ao componente curricular matemática, ocasionando a eliminação das praxeologias mistas da matemática ensinada na França. Nossas análises apontam para indícios que esse movimento não é um caso particular daquele país, havendo certa similitude no Brasil.

Diante dessas reflexões, discutiremos as condições e restrições enquanto uma perspectiva de determinação das praxeologias, bem como outras considerações sobre o bloco tecnológico-teórico. Restrições são condições não modificáveis num dado período de tempo. Nesta pesquisa adotamos para os termos condições e restrições, condições modificáveis e não modificáveis, respectivamente.

7.1 A ESCALA DE NÍVEIS DE CODETERMINAÇÃO

Chevallard (2002b) propõe que as praxeologias: pontuais, locais, regionais e globais correspondam aos níveis inferiores, chamados, respectivamente, assunto, tema, setor e domínio. A escala é ampliada para outros níveis que fazem referência ao estudo das praxeologias matemáticas: disciplina e pedagogia. Embora esses níveis sejam comuns a todos os domínios, possuem características didáticas, mas não podem se impor sem considerar as limitações institucionais do ensino, resultando numa codeterminação das organizações matemáticas e didáticas. Inicialmente, além desses, foram propostos: escola, sociedade e civilização, conforme apresentada na figura a seguir.

Figura 37 – Escala de níveis de codeterminação
(primeira proposta)



Fonte: Chevallard, 2007, p. 32.

Observamos que a escala propõe desde os níveis *assunto* até *civilização*. No que se refere à organização dessa escala, mais recentemente a noção de sistema didático $S(X\ ;\ Y\ ;\ ♥)$ propõe uma flexibilização na base, e substitui os níveis inferiores da escala de codeterminação. A seguir, temos sua nova proposição:

Figura 38 – Escala de níveis de codeterminação (proposta atual)

Humanité

↓↑

Civilisation

↓↑

Société

↓↑

École

↓↑

Pédagogie

↓↑

Système didactique

Figure 1.1. *Échelle des niveaux de conditions didactiques*

Fonte: Chevallard e Artaud, 2016, p. 3.

Num sistema didático *S*(*X* ; *Y* ; ♥), a instância estudantil é representada por X. O professor ou outro sujeito que auxilie aos estudantes é indicado por Y. E ♥ faz referência à obra (ou trabalho) estudada(o). Na atual proposta da escala é acrescentado um nível superior: *humanidade*. (CHEVALLARD; ARTAUD, 2016).

Segundo Chevallard (2002b), geralmente o professor procura estabelecer na sua classe uma tecnologia θ que reagrupa um conjunto de tipo de tarefas T_i ($i \in I$) e toma, então, *status* de tema de estudo. A tecnologia permite associar uma técnica τ_i.

> A organização matemática que o professor visa estabelecer na classe não é mais então uma estrutura atômica que exibe a fórmula $[T/\tau/\theta/\Theta]$, é um amálgama de organizações pontuais $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ $i \in I$, e que chamarei organização (matemática) local. E é dessa organização local que o aluno deverá então extrair, nas reconstruções com suas camadas de estudo sob a direção do professor (ou, na falta de melhor, por conta própria), as organizações pontuais sobre as quais será avaliado seu conhecimento. O professor, por sua vez, deve gerir um fenômeno análogo, mas a nível superior: a organização local $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ $i \in I$ corresponde ao tema de estudos, e deve ser extraída de uma organização mais ampla, dita regional, sendo vista como o fruto do amálgama das organizações locais que admitem a mesma teoria $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta]$ $i \in I_j$, $j \in J$. Esse nível, o setor de estudos, não é o término. Em geral, de fato existem níveis superiores de determinação (de uma organização) matemática: o amálgama de várias organizações regionais conduz a uma organização global $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\ \Theta_k]$ $i \in I_j$

> , $j \in J_k$, um domínio de estudos. O conjunto desses domínios é amalgamado numa disciplina como – para nós, a matemática. (CHEVALLARD, 2002b, p. 2, tradução nossa)[43].

Romo-Vazquez (2009) afirma que o **assunto** é uma organização matemática pontual, contendo uma única técnica para cumprir uma tarefa do tipo T. O **tema** é uma organização local, reagrupando todas as organizações matemáticas pontuais associadas à mesma tecnologia θ. O reagrupamento de todas as organizações matemáticas pontuais associadas à mesma teoria é chamado de **setor**, que é uma organização matemática regional. O **domínio** é uma organização matemática global, formada pelo reagrupamento das organizações matemáticas regionais. Comum a todos os domínios, temos a **disciplina** como próximo nível superior. Assim, temos uma determinação das organizações segundo uma escala em níveis: assunto, tema, setor, domínio e disciplina.

Chevallard (2002b) afirma que o principal mérito do reconhecimento desse delineamento hierárquico de níveis é permitir ordenar as limitações presentes no estudo escolar. Suas observações alertam para o seguinte fato: ao determinar quais as organizações matemáticas serão estudadas na sala de aula, o professor tende a não se identificar com os níveis: assunto e tema. Esses níveis mais específicos exigiriam do professor a destinação de certo período do curso para trabalhar o tema e mais precisamente o assunto na classe. O autor acrescenta também que dificilmente a preocupação do professor está direcionada para os níveis setor e domínio.

> O principal déficit que engendra a situação das coisas que prevalecem hoje no ensino fundamental e médio concerne nas organizações matemáticas efetivamente atuais em sala de aula: o déficit se faz sentir na falta de motivação dos tipos tarefas T estudadas. [...] geralmente, os tipos de tarefas

---

[43] Original do francês: "L'organisation mathématique que le professeur vise à mettre en place dans la classe n'a plus alors la structure atomique qu'exhibe la formule $[T/\tau/\theta/\Theta]$: c'est un amalgame de telles organizations ponctuelles, que l'on notera $[Ti/\tau i/\theta/\Theta]$ $i\in I$ et qu'on appelle organisation (mathématique) *locale*. Et c'est d'une telle organisation locale que l'élève devra alors extraire, en les reconstruisant avec ses camarades d'étude sous la direction du professeur (ou, faute de mieux, pour son propre compte), les organisations *ponctuelles* sur lesquelles sa maîtrise será préférentiellement évaluée. Le professeur, quant à lui, doit gérer un phénomène analogue, mais à un niveau supérieur : l'organisation locale $[Ti/\tau i/\theta/\Theta]$ $i\in I$ correspondant au *thème d'études* doit être extraite d'une organisation plus vaste, qu'on dira *régionale*, et qu'on peut regarder formellement comme le fruit de l'amalgamation d'organisations locales admettant la *même théorie* Θ, $[Tji/\tau ji/\theta j/\Theta]$ $i\in Ij$, $j\in J$. Ce niveau, celui du *secteur d'études*, n'est au reste nullement terminal. On constate en effet, en général, l'existence de niveaux supérieurs *de détermination (d'une organisation) mathématique* : l'amalgamation de plusieurs organisations régionales $[Tji/\tau ji/\theta j/\Theta k]i\in Ij$, $j\in Jk$ conduit ainsi à une organisation *globale*, identifiable à un *domaine d'études* ; et l'ensemble de ces domaines est amalgamé en une commune *discipline* – pour nous, 'les mathématiques'".

> motivantes se encontram nos níveis superiores de determinação das organizações matemáticas – setor e domínio. (CHEVALLARD, 2002b, p. 4, tradução nossa)[44].

A ausência de vínculos dos níveis *assunto* e *tema* com os níveis superiores torna impossível pensar nos vínculos de motivação entre tipos de tarefa. Noutras palavras, Chevallard (2002b) reflete sobre a organização do estudo da matemática no ambiente escolar, afirmando, então, o estabelecimento de um fenômeno ecológico central: a codeterminação das organizações matemáticas e didáticas. Assim como foi proposta uma escala hierárquica de níveis para as organizações matemáticas, o autor propõe um princípio essencial da ecologia das organizações didáticas: a organização de estudo de um assunto ou de um dado tema deverá considerar os níveis superiores da escala.

Na sequência, Chevallard (2002b) reflete sobre o fato acontecido no nível *disciplina* e constata que, ao longo do tempo, houve uma integração dos elementos de topografia à disciplina matemática. Esse movimento de integração foi finalizado em meados do século XX. Lembramos que tanto na matemática quanto na topografia estudam-se tipos de tarefas em torno dos problemas de calcular distâncias “inacessíveis”.

Assim, afirma que foram expurgadas da matemática ensinada nas escolas as praxeologias mistas, ou seja, ao longo de todo o século XX, as organizações praxeológicas compostas por objetos matemáticos e não matemáticos foram expulsas da matemática ensinada na escola secundária da França, indicando que, desse modo, é revelado um exemplo de limitações impostas no nível disciplina.

No que se refere às organizações didáticas relativas a um dado *assunto*, Chevallard (2002b) destaca um triplo recorte: espacial, temporal e epistemológico. Espacial, pois o estudo dificilmente excede aquilo que foi oferecido por escrito, temporal porque o estudo deve ser realizado num curto período de tempo, muitas vezes como uma concatenação de diferentes intervalos de tempo. O epistemológico refere-se à tendência de excluir não apenas qualquer mistura[45] presente nos objetos

[44] Original do francês: “Le principal déficit qu’engendre l’état de choses qui prévaut aujourd’hui au collège et au lycée concerne d’abord les organisations mathématiques effectivement mises en place dans les classes : ce déficit s’y fait sentir dans *l’absence de motivation des types de tâches T étudiés*. […] très généralement, les types des tâches motivantes se trouvent *dans les niveaux supérieurs* de détermination des organisations mathématiques – secteurs et domaines”.

[45] Essa mistura faz referência às organizações matemáticas mistas: organizações praxeológicas que põem em jogo certo número de objetos matemáticos e outros não matemáticos.

a serem estudados, mas também qualquer relação com os níveis mais elevados de determinação matemática. Considerando que os professores estejam confinados no nível tema, as diferentes instâncias da Noosfera oficializam os níveis: setor, domínio e disciplina. Mas a sua atuação também está limitada a uma realidade do sistema escolar em sentido estrito (CHEVALLARD, 2002b).

Nesse sentido, o autor enuncia a continuação da prevalência do princípio da legitimidade limitada. No caso da Noosfera, embora esteja parcialmente fora da sua esfera legítima de intervenção, ela inscreve ou não nos currículos certo domínio da matemática. Essa etapa do processo de transposição realizada pela Noosfera, e comunicada para a sociedade por meio de certas produções documentos de orientação curricular, livros didáticos. Entretanto, conforme mencionamos no capítulo anterior, tais produções são de uma parte dessa esfera plural. E, no caso da realidade brasileira, as orientações curriculares são um importante exemplo desses materiais, mesmo que possuam, até o ano de conclusão dessa pesquisa, carácter de recomendação e não de obrigatoriedade.

Essas orientações apresentam os saberes eleitos como saberes a serem ensinados pela escola, representando uma política de Estado. Por outro lado, o livro didático, material produzido por outra parte da Noosfera, se apresenta como um importante recurso para o professor. A pluralidade da Noosfera sinaliza que na sua formação estejam pessoas que podem estar ou não atuando em sala de aula, trabalhando como professores nas escolas.

Na hierarquia proposta por Chevallard (2002b), cada nível se refere a uma realidade que não é dada, mas sim uma construção histórica. Nos currículos dos cursos de EPTNM (modalidade integrada), há dois eixos complementares: os componentes da formação geral e os destinados à formação técnica. A trigonometria está presente em ambos os eixos e considerando a instituição mais ampla (o curso técnico integrado em agropecuária) coabitam as instituições ensino da matemática e ensino de topografia. A discussão sobre o estudo da trigonometria em curso de EPTNM permite evidenciar que o diálogo entre as instituições supracitadas não parece ser suficiente.

7.2 MODELO PRAXEOLÓGICO ADOTADO EM PESQUISAS DE FORMAÇÃO PROFISSIONAL

Nos capítulos anteriores, utilizamos o modelo praxeológico constituído pelos quatro componentes: tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria [T, τ, θ, Θ]. Em suas análises, Romo-Vazquez (2009) e Chávez (2013) utilizaram um modelo de praxeologia, no qual estão presentes outras funcionalidades para a tecnologia θ. Consideramos importante discuti-lo, tendo em vista que o ambiente da nossa pesquisa se aproxima dos estudos citados.

Durante a institucionalização, momento de estudo discutido anteriormente, Chevallard (1999) afirma ser o momento exato da construção "bruta" daquilo que será a praxeologia matemática definitiva. Gradativamente, durante essa construção, emergem, a partir do estudo, o matematicamente necessário que será conservado do matematicamente contingente que brevemente será esquecido. O necessário e o contingente são separados por um movimento de comprometimento com o futuro.

Esse processo de separação é denominado de decantação por Romo-Vazquez (2009, p. 62, tradução nossa).

> Mas essas noções não são especificamente trabalhadas nas pesquisas que utilizam a análise praxeológica para a matemática. Parece, de fato, que não são em geral retidos na tecnologia "purificada" os elementos que não são nem justificados, nem produzidos por uma teoria. O saber empírico não tem mais as características das condições concretas do uso das técnicas. Esses elementos não são necessariamente contingentes porque podem se referir a certas adaptações invariantes às tarefas. Portanto, eles não revelam mais necessariamente os saberes pessoais sem legitimidade social. Considerando o objetivo de nosso estudo, saberes na formação profissional, não podemos negligenciar os saberes orientados pelo uso das praxeologias, matemáticos ou não. De seu desenvolvimento depende, do nosso ponto de vista, a funcionalidade das praxeologias[46].

Essa autora comenta certa ambiguidade nos termos que enunciam as funções da tecnologia: explicação, justificativa e produção das técnicas, apontando

[46] Original do francês: "Mais ces notions ne sont pas spécifiquement travaillées dans les travaux utilisant l'analyse praxéologique pour les mathématiques. Il apparaît de fait que ne sont en général pas retenus dans la technologie « épurée » des éléments qui ne sont ni justifiés ni produits par une théorie, des savoirs empiriques ayant plutôt trait aux conditions concrètes d'usage des techniques. Ces éléments ne sont pas nécessairement contingents puisqu'ils peuvent avoir trait à certains invariants des adaptations aux tâches, ils ne relèvent donc pas non plus nécessairement de savoirs personnels sans légitimité sociale. Compte tenu de l'objet de notre étude, à savoir la formation professionnelle, nous ne pouvons négliger ces savoirs orientés vers l'usage des praxéologies, mathématiques ou non. De leur développement dépend à notre avis la fonctionnalité des praxéologies".

para a necessidade da existência de diferentes tipos de discursos tecnológicos e de funcionalidades para este discurso. "Castela (2008) oferece o que pode aparecer como uma extensão do conceito de tecnologia, distinguindo duas componentes: a componente teórica θ^{th} e a componente prática θ^{p}" (ROMO-VAZQUEZ, 2009, p 62, tradução nossa)[47].

Romo-Vazquez (2009) afirma que esse modelo distingue no seio da tecnologia duas componentes que correspondem aos dois tipos de validação. A componente teórica é resultado a ser validada por uma teoria. Já a componente prática é validada pelo uso das práticas e desenvolve essencialmente os saberes relativos às funcionalidades da técnica. O modelo de alargamento defende que há seis funcionalidades para a tecnologia: descrever, validar, explicar, favorecer, motivar e avaliar.

Descrever o tipo de tarefa T e a técnica é considerado a produção de um discurso que caracteriza o tipo de tarefa e descreve a sequência de gestos que compõem a técnica demarcando tanto o processo de emersão da institucionalização quanto a transmissão do bloco prático-técnico, etapa que não pode ser negligenciada. A autora argumenta que não considera a descrição apenas como parte integrante da técnica, pois é importante que se diferenciem praxeologias que sejam transmitidas apenas por experiência daquelas que dispõem de ferramentas simbólicas e de linguagem. Acrescentamos a possibilidade de realização das técnicas por meio de instrumentos de medição.

Validar a técnica, isto é, a garantia que a técnica utilizada produz uma boa solução está relacionada à verificação da sua eficácia. Nesses termos, validar não é sinônimo de justificar. Embora corresponda ao que Chevallard (1999) denomina como justificar que é um termo com significado mais amplo. Validar está ancorada no fato de o tipo de validação depender da instituição na qual vive a praxeologia. Chavéz (2013) aponta que, no caso da matemática, a justificação é assegurada pelas teorias matemáticas, mas, em outros contextos, saberes válidos em laboratório ou empiricamente podem validar uma técnica.

Explicar tem por objetivo detalhar os mecanismos que fazem a técnica ser eficaz. Para explicar, recorre-se a saberes que não são necessariamente utilizados

[47] Original em francês: "Castela (2008) propose ce qui peut apparaître comme un élargissement de la notion de technologie, y distinguant deux composantes: la composante théorique θ^{th} et la composante pratique θ^{p}". (ROMO-VAZQUEZ, 2009, p. 62).

na prática, havendo uma postura mais teórica.

Favorecer a utilização da técnica consiste em realizar o discurso que permite aos usuários utilizar confortavelmente determinada técnica e que é portador de ajudas e advertências que permitem evitar erros ditos como frequentes.

Motivar a técnica relativa a tarefas do tipo T e aos diferentes gestos que a compõem trata de “escrever” um histórico que situe alguns aspectos da técnica: por que fazer? Por que fazer determinado passo em tal momento? Os saberes de motivação podem estar seguidos pelos saberes sobre o tipo de tarefa proposto e permitem analisar a finalidade do tipo de tarefa que requereu a técnica. Assim, é considerado como um saber orientado para a prática.

Avaliar uma técnica é analisar as condições de sua eficácia, tendo em vista que uma única técnica não resolve todos os tipos de tarefa.

> Para uma técnica matemática, a avaliação pode ser interna à matemática: eficácia das tarefas matemáticas. Mas quando a matemática é considerada como disciplina de serviço, no quadro de uma formação profissional, a avaliação pode (deve) referir-se aos campos de aplicação das disciplinas intermediárias, ou até mesmo às práticas profissionais (ROMO-VAZQUEZ, 2009, p. 66)[48].

Assim, o bloco tecnológico-teórico terá também componentes práticos na tecnologia, características dos componentes curriculares que utilizam o saber matemático, presentes nos cursos das escolas da educação profissional. A figura a seguir ilustra o modelo de alargamento das funcionalidades da tecnologia, sendo que as setas fazem evocação aos mecanismos de validação dentro das instituições de produção P(S) e das instituições de uso I_u.

Figura 39 – Modelo praxeológico ampliado

$$\left[T, \tau, \begin{matrix} \theta^{th} \\ \theta^{p} \end{matrix}, \Theta \right] \begin{matrix} \leftarrow P(S) \\ \leftarrow \ Iu \end{matrix}$$

Fonte: Romo-Vazquez (2009, p. 69).

---

[48] Original do francês: “Pour une technique mathématique, l'évaluation peut être interne aux mathématiques: efficacité dans des tâches mathématiques. Mais quand les mathématiques sont considérées comme disciplines de service, dans le cadre d'une formation professionnelle, l'évaluation peut (doit) référer aux champs d’applications dans les disciplines intermédiaires, voire dans les pratiques professionnelles”. (ROMO-VAZQUEZ, 2009, p. 66).

Chavéz (2013) comenta que as instituições que possuem relação com uma dada praxeologia podem ser diferenciadas de acordo com suas finalidades: produção, uso, transmissão e transposição. As instituições produtoras de saber – chamaremos de P(S) – possuem uma relação teórica com as tarefas do tipo T, e sua finalidade não é de manipular, mas sim produzir e validar elementos das praxeologias relativas às tarefas do tipo T. Existem instituições que fazem uso dessas praxeologias, indicadas por I_u, nas quais os sujeitos de I_u devem realizar tarefas do tipo T, enquanto que a transmissão das praxeologias está associada às instituições educativas.

Embora os estudos de Castela (2008), Romo-Vazquez (2009) e Chávez (2013) proponham essa componente prática do discurso tecnológico como extensão, temos uma visão diferente, mas não divergente. Nosso entendimento é que a ideia de extensão ou alargamento se aproxima de algo que foi acrescentado, no caso, tais pesquisas estariam propondo algo que até então não fazia parte da estrutura do quarteto praxeológico. Diferentemente, consideramos que essa componente prática passa a ter mais visibilidade ao estudar objetos matemáticos em componentes curriculares que os utilizam.

Conforme mencionado nessa pesquisa, Chevallard (1998) afirma que o estilo de racionalidade do discurso tecnológico varia de uma instituição para outra, considerando também seus momentos históricos. Desse modo, enquanto em uma instituição essa racionalidade do bloco tecnológico-teórico é bastante presente, pode ser pouco mencionada noutra instituição.

Tomamos o seguinte exemplo, observando o mesmo objeto matemático vivenciado nos dois componentes curriculares. O discurso tecnológico presente no ensino de matemática visto anteriormente contém afirmações mais ou menos explícitas, o que nos permite investigá-lo num nível superior de explicação-justificação-produção, a teoria. Veremos neste capítulo que o discurso tecnológico-teórico, presente ao se estudar topografia, possibilita dar luz a essa dimensão prática nele existente.

Segundo Chevallard (1999), os enunciados teóricos parecem frequentemente abstratos, distantes das preocupações "simples" dos enunciados da tecnologia e da técnica. Esse efeito de abstração está correlacionado com a base da grande generatividade de enunciados teóricos – sua capacidade de justificar, explicar e produzir. Numa situação de ensino de saberes matemáticos, recorrer a tal abstração é necessário para dar apoio às técnicas de resolução dos tipos de tarefas propostos. Não há a necessidade de muitos argumentos de natureza prática, o que poderia suscitar como uma simples menção a um caso particular. Entretanto, nas situações de utilização desses saberes, considerando a natureza da instituição, essa dimensão prática enriquece os argumentos do bloco [θ/Θ], de forma que se torna importante sua presença, não havendo necessidade de recorrer com maior ênfase aos argumentos teóricos.

Nessas reflexões, não estamos dizendo que, nas situações de ensino da matemática, os argumentos são podem ser mais amplos e profundos dos que os mencionados nas situações de utilização. Entretanto, conforme identificado na análise presente neste capítulo, os argumentos de natureza prática são mais evidenciados nas aulas de topografia. Nas seções seguintes, discutiremos a realidade observada no referido componente curricular. Usar a escala de níveis de codeterminação possibilitou a ampliação da nossa unidade de análise, formada inicialmente pelos documentos de orientação para o curso técnico em agropecuária e observação das aulas. A análise do sistema didático permitiu evidenciar praxeologias mistas constituídas de argumentos de natureza prática e teórica.

7.3 CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES IDENTIFICADAS NOS NÍVEIS SUPERIORES

Diante da realidade observada, as considerações referentes aos níveis *Humanidade* e *Civilização* são direcionadas para a necessidade das práticas agrícolas para a vida humana. Eves (2004, p. 52) afirma que “[...] os povos foram impelidos para uma agricultura intensiva e em grande escala, em virtude de mudanças no clima do mundo”. O autor menciona que grandes cisternas naturais foram criadas devido a tais mudanças ocorridas no final da Idade da Pedra.

O vale do rio Nilo e os picos das cordilheiras dos Andes são alguns exemplos de lugares com muita água. Segundo Eves (2004, p. 53),

> As civilizações que emergiram dessas cisternas diferiam amplamente das sociedades de caçadores/colhedores da Idade da Pedra. A densidade populacional tornara-se alta demais para permitir que se continuasse sobrevivendo como caçadores e colhedores. [...] Não é de surpreender, pois, que se voltassem para a agricultura intensiva que podia alimentar populações de até quarenta pessoas por milha quadrada. Isso foi uma espécie de “revolução agrícola” que precipitou profundas mudanças culturais.

Enquanto exemplos de mudanças culturais, o autor cita, além da prática de agricultura, a criação da escrita, não apenas enquanto forma de comunicação, mas também de registro de periodicidade de alguns fenômenos naturais. É necessário cooperação para a realização das atividades de agricultura: construção de barragens, sistemas de irrigação e medições de terras.

Havendo a necessidade de criação de ocupações: arte da engenharia; escribas; astrólogos; artesões especializados em forjar instrumentos de metais, Eves (2004, p. 53) aponta que tais mudanças nas "[...] cidades propiciavam condições para mercados onde agricultores e artesões podiam trocar bens, surgindo aí, para facilitar o processo, uma classe de mercadores".

Esse autor afirma que novas formas de organização política foram desenvolvidas pelos agricultores. As tribos da idade da Pedra foram substituídas por cidades-estados, reinos e pequenos impérios. O motivo é que a complexidade das atividades paralelas ao plantio requeria um sistema mais centralizado de governo. Segundo Eves, nem todas as sociedades agrícolas eram idênticas, mas a centelha do desenvolvimento foi essa *revolução agrícola*.

Atualmente, o Brasil é um país exportador e possui no agronegócio grande destaque no cenário mundial. Nas relações comerciais, uma característica dos países da civilização ocidental, em especial do Brasil, é exportar matéria-prima. No caso da agricultura, citamos os grãos, atividade econômica com forte impacto em nossa balança comercial. Portanto, é essencial a formação de profissionais especializados nas diversas áreas que possam atuar no agronegócio, em nível superior ou médio.

No nível *sociedade,* no Brasil são ofertados para os alunos diferentes percursos de formação anteriores à educação de nível superior. De certa forma, as reflexões trazidas ao discutir a educação profissional no Brasil enquanto opção de percurso formativo, mesmo que, de forma histórica, situam a sociedade brasileira num contexto global. Por exemplo, a necessidade da criação de cursos técnicos, em parte, é advinda do processo de industrialização.

No caso dos cursos técnicos em agropecuária, os avanços na área de tecnologia rural e mecanização agrícola passam a exigir melhor qualificação das pessoas que atuam nesse ramo. Não queremos afirmar que um trabalhador rural que não teve oportunidade de fazer um curso seja uma pessoa sem qualificação, por outro lado, ter formação técnica permite realizar práticas de manejo otimizadas.

Na realidade do nível *escola*, no que se refere à Educação Profissional Técnica de Nível Médio (ETPNM), a Lei nº 11.741/08 (BRASIL, 2008) propõe alterações na Lei de Diretrizes e Bases de Educação Nacional nº 9.394/96 (BRASIL, 1996). As alterações de Brasil (2008) fornecem condições para que a educação profissional seja ofertada na modalidade integrada ao ensino médio.

Em Brasil (2008) afirma-se que a educação profissional será desenvolvida por meio de cursos e programas: “[...] educação profissional técnica de nível médio”. Assim, identificamos que esse decreto permitiu, em nível de **escola**, a integração do ensino técnico de nível médio ao ensino médio na forma atual.

No Brasil, os assuntos relativos à educação são tratados pelo Ministério da Educação (MEC), fundado em 1930. O atual Conselho Nacional de Educação (CNE) é um órgão colegiado integrante do MEC e tem por finalidade colaborar na formulação da Política Nacional de Educação e exercer atribuições normativas, deliberativas e de assessoramento ao Ministro da Educação. As Câmaras de Educação Básica e de Educação Superior compõem o conselho. Elas são constituídas por doze conselheiros cada, sendo membros natos nas câmaras.

Em Brasil (1996) tem-se que a carga horária mínima estabelecida para o ensino médio é um ano letivo de 800 horas distribuído em 200 dias. Para o ensino médio são três anos, portanto sua carga horária mínima é de 2400h.

E por que apresentamos a descrição no parágrafo anterior? Porque a Resolução nº 01, de 2005, da Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação, estabelece limitações para os cursos da EPTNM integrados ao ensino médio, por meio de valores mínimos de carga horária.

> Art. 5º Os cursos de Educação Profissional Técnica de nível médio realizados de forma integrada com o Ensino Médio, terão suas cargas horárias totais ampliadas para um mínimo de 3.000 horas para as habilitações profissionais que exigem mínimo de 800 horas; de 3.100 horas para aquelas que exigem mínimo de 1.000 horas e 3.200 horas para aquelas que exigem mínimo de 1.200 horas. (BRASIL, 2005, p. 2).

O Catálogo Nacional de Cursos Técnicos (CNCT) (BRASIL, 2012; 2016) é o documento do Ministério da Educação que organiza oferta dos cursos técnicos de nível médio no Brasil, portanto é outro exemplo de material produzido por parte da Noosfera atuante na educação profissionalizante.

Em Brasil (2016) apresentam-se os 227 cursos técnicos ofertados no âmbito da sociedade brasileira, agrupados em treze eixos tecnológicos. Nessa realidade, identificamos o curso técnico em agropecuária pertencente ao eixo tecnológico de recursos naturais, que

> [...] compreende tecnologias relacionadas à extração e produção animal, vegetal, mineral, aquícola e pesqueira. Abrange prospecção, avaliação técnica e econômica, planejamento, extração, cultivo e produção de recursos naturais e utilização de tecnologias de máquinas e implementos. A organização curricular dos cursos contempla conhecimentos relacionados a: leitura e produção de textos técnicos; raciocínio lógico; ciência, tecnologia e inovação; investigação tecnológica; tecnologias sociais, empreendedorismo, cooperativismo e associativismo; tecnologias de comunicação e informação; desenvolvimento interpessoal; legislação e políticas públicas; normas técnicas; saúde e segurança no trabalho; gestão da qualidade; responsabilidade e sustentabilidade social e ambiental; qualidade de vida; e ética profissional. (BRASIL, 2016, p. 225).

Nossa análise encontra a primeira referência à topografia na formação do técnico em agropecuária em Brasil (2012; 2016) que são as últimas edições do CNCT. No perfil profissional de conclusão do técnico em agropecuária, identificamos: realiza medição, demarcação e levantamentos topográficos rurais. Recomendações como essas dão condições para que objetos matemáticos sejam vivenciados durante a formação técnica. Outro dado obtido nesses documentos é a possibilidade da topografia como temática a ser abordada na formação. (BRASIL, 2012).

Em Brasil (2016) está permanecida a limitação de 1200h como carga horária mínima para o curso técnico em agropecuária. E, por consequência das limitações de Brasil (2005), a carga horária mínima desse curso oferecido na modalidade integrada ao ensino médio será de 3200h.

Em continuidade, nossa análise vai para o nível *Pedagogia*. Ressaltamos que em Brasil (2004; 2008; 2005; 2016) não se estabelece para os cursos da EPTNM carga horária por ano letivo, mas, devido ao fato de a escola estar inserida numa realidade de sistema de ensino da educação básica, temos a limitação dos 200 dias letivos, que são os dias efetivamente contabilizados com aulas. A escola procurar dividir em dois semestres letivos, com 100 dias, e, por consequência, em torno de 20 semanas porque o sábado não é considerado dia letivo. Devido às exigências de Brasil (2008), em 2009 a escola São Bento elaborou a proposta do plano do curso técnico em agropecuária na modalidade integrada ao ensino médio.

Na realidade da escola, ofertar um curso com carga horária mínima de 3.200

horas trouxe questionamentos sobre sua duração. E, por consequência, a comissão que elaborou o plano de curso apoiando-se em Brasil (2005; 2008) propõe à comunidade escolar: carga horária de 3.900 horas mais 320 horas de estágio, totalizando 4.420 horas com duração de três anos. A opção de permanência dessa duração deve-se ao fato de a comissão entender que a proposição de novos cursos, com uma duração maior poderia causar baixa procura.

Enquanto limitações, identificamos um fator que causa fortes impedimentos: devido à carga horária total do curso e sua duração, o horário abrange dois turnos. Consequentemente, o aluno cursa no segundo semestre letivo uma grande quantidade de disciplinas. Eles estudam em horário integral (manhã e tarde), todos os dias da semana. Nessa realidade, a ação de “passar atividades para fazer em casa” é pouco explorada.

Embora não tenhamos entrevistado os estudantes a respeito de passar os dois turnos na escola, nas aulas observadas os alunos relatam que isso lhes causou estranheza. Alguns pensam em solicitar transferência ao término do primeiro ano letivo para cursar somente o ensino médio. Embora não seja objeto desta pesquisa, a comissão mencionada anteriormente também propôs a nova grade curricular para o curso técnico em agropecuária oferecido na modalidade concomitante, em atendimento às exigências de Brasil (2008). Nas duas propostas, identificamos que a carga horária de cada componente curricular da formação profissional e sua respectiva localização nos semestres letivos são semelhantes. Assim, embora existam cursos ofertados de diferentes modos, a escola São Bento procurou evitar a existência de diferentes grades curriculares referentes à formação profissional para aquele mesmo curso.

Essa comissão é representante da escola e fornece, por meio do plano de curso, condições e restrições para a abordagem da topografia no curso técnico em agropecuária. Na realidade das escolas da rede federal de ensino, a elaboração de planos de novos cursos da EPTNM, limitando à formação do seu corpo docente, é uma possibilidade de atuação da Noosfera. Consideramos que, nessa realidade institucional, o corpo docente é uma parte da Noosfera e que pode atuar diretamente nos níveis *escola e pedagogia*.

Segundo nosso entendimento, os instrumentos topográficos disponíveis na escola também fazem parte do conjunto de condições do nível *pedagogia*, porque possibilitam a vivência de organizações matemáticas por meio do seu manuseio.

Eles fazem parte do patrimônio da escola e não são exclusivos para a aula de topografia, por tal motivo os indicamos nesse nível. A formação e experiência dos professores também estão nesse conjunto de condições. A seguir, apresentaremos algumas funcionalidades desses instrumentos.

Figura 40 – Trena topográfica

Fonte: Dados da pesquisa.

A trena é um instrumento muito utilizado no processo de medição direta de comprimentos entre pontos acessíveis. Nos trechos a seguir, o professor descreve um pouco esse instrumento:

> **P**: Então, vamos começar pela trena. A trena, ela é um instrumento que pode ser de lona de metal, se chama de aço, e de fibra sintética, podendo ter desde as pequenas trenas que o pessoal utiliza a “tira-colo” (de bolso), de 3m, 5m, até trena topográfica que a gente pode ter de 10m, 20m, 30m, 50m e 100m. Nossa trena aqui... nós temos uma de 30 e outra de 50.
> [...]
> Quando o terreno é pequeno, você simplesmente estica a trena. Se fosse medir uma sala de aula dessa... simplesmente, você estica a trena e você consegue ter os quatro lados da sala de aula[...]. (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 28 a 102).

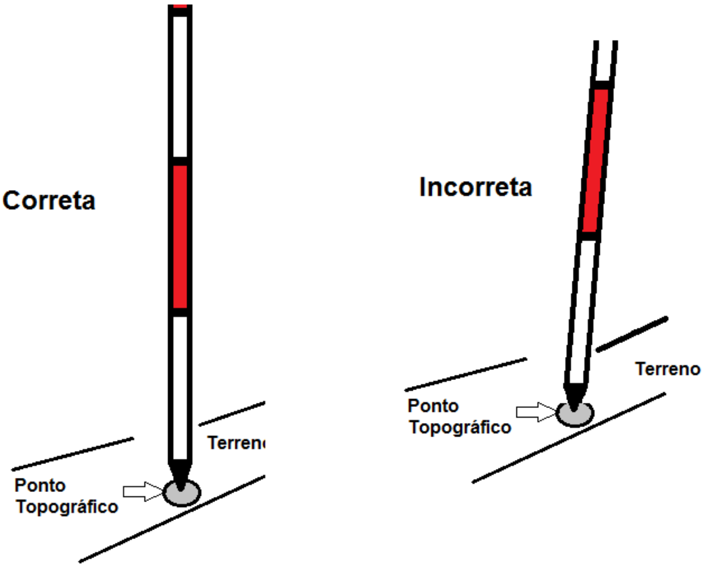
O professor comenta as limitações da trena, a qual é muito utilizada para pequenas extensões de comprimento, até 50 m. As trenas topográficas são feitas de lona. Elas possuem pouca rigidez quando comparadas àquelas de metal ou mesmo a uma régua de plástico, portanto a ação de deixá-las bem esticadas durante uma medição é muito importante.

Figura 41 – Baliza topográfica

Fonte: Dados da pesquisa.

A baliza é uma haste metálica, uma barra de ferro com dois metros de comprimento. Desmonta-se em duas partes, com um metro cada, as quais são encaixadas através de rosqueamento. Sua funcionalidade é tornar visível um ponto marcado no terreno.

Figura 42 – Posicionamentos da baliza num terreno



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Após marcar o ponto topográfico no terreno, a baliza permitirá que o operador saiba onde está esse ponto. Isso não significa que a baliza ficará permanentemente fincada naquele local. A figura anterior apresenta a forma correta que o operador deverá posicionar a baliza. Matematicamente, pode-se dizer que a baliza ficará perpendicular ao plano horizontal.

Figura 43 – Bússola

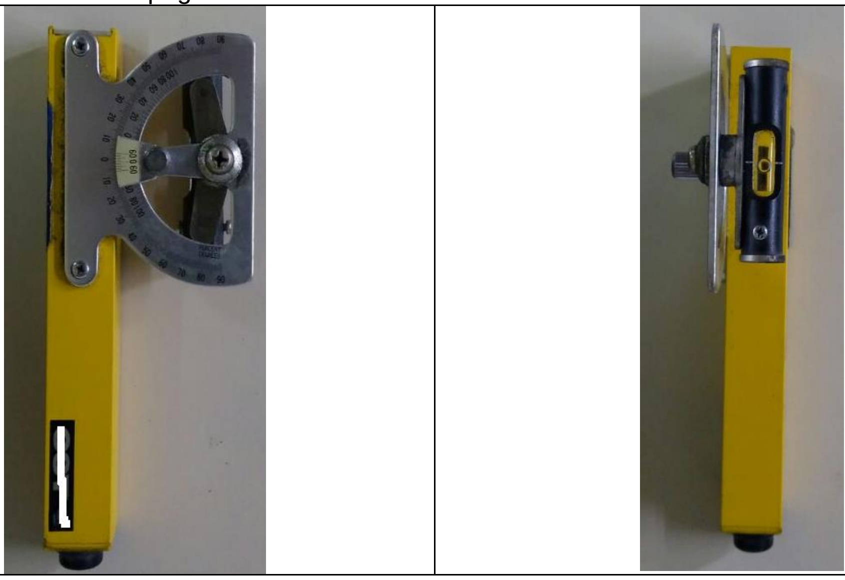
Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Enquanto parte da descrição de uma poção de terra, é importante registrar a orientação. Essa é uma funcionalidade da bússola em topografia. No trecho a seguir, o professor havia comentado que existem bússolas cujo vidro está dividido em quatro quadrantes.

> **P**: Já essa bússola daí [apontando para o instrumento que os alunos estão olhando], ela é uma bússola de 0 a 360 direto, não preciso especificar o quadrante que estou. Então, a bússola foi muito utilizada pela navegação... É o instrumento que tem uma agulha solta sobre um eixo bem polido, sem atrito quase, para que ela possa se movimentar de acordo com... alguém sabe o que é que atrai a agulha da bússola? (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 209 a 214).

O professor continua comentando sobre o campo magnético da terra e os pontos cardeais, tendo em vista que a agulha da bússola aponta para norte/sul apenas. Observamos que uma das extremidades da sua agulha é pintada. Além disso, estão presentes níveis de bolha no instrumento.

Figura 44 – Instrumento topográfico: clinômetro



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

As imagens são do clinômetro da escola São Bento. Sua funcionalidade é medir ângulos verticais. Embora existam outros instrumentos mais modernos que realizam tal medição, o clinômetro tem a vantagem de ser pequeno, leve, transportado com facilidade. Essa barra amarela é uma luneta. Para determinar a altura de um ponto inacessível, o operador procurar visualizar com auxílio da luneta o ponto. Na lente desse instrumento, existe uma linha horizontal e um nível de bolha. O operador deixará o ponto inacessível sobre essa linha bem como a bolha. O movimento do nível de bolha dá-se pelo transferidor do instrumento.

Figura 45 – Instrumentos topográficos: nível, teodolito, mira estadimétrica

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Os instrumentos apresentados na imagem anterior são utilizados, dentre outras tarefas, na realização de medições indiretas de comprimento. O nível e o teodolito não são usados sozinhos. Eles necessitam de outro instrumento, que pode ser a mira estadimétrica, também denominada nas aulas de topografia de mira. Os dois primeiros são montados sobre um tripé que serve de base. Existem parafusos ajustáveis para garantir que a suas lunetas estejam alinhadas com um plano horizontal.

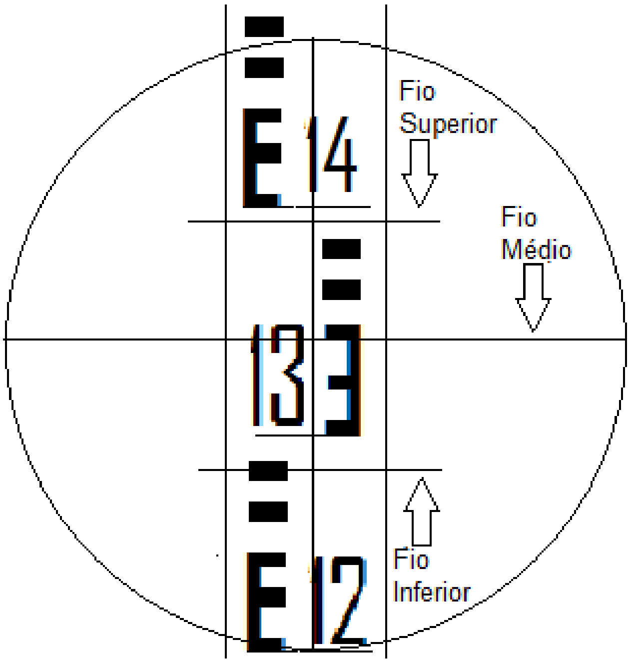
Ao instrumento nível é permitido movimento de rotação horizontal, sendo que a parte preta é marcada por medidas de ângulo, como se fosse um transferidor. Esse instrumento ficará posicionado num ponto topográfico, enquanto a mira falante está no outro ponto.

A mira falante é uma régua metálica ajustável que pode chegar a 4m de comprimento. Veiga, Zanetti e Faggion (2012, p. 55) a descrevem como “[...]réguas graduadas centimetricamente, ou seja, cada espaço branco ou preto corresponde a um centímetro”. Ela deve ser posicionada sobre o ponto topográfico na mesma posição que a baliza, ou seja, perpendicular a um plano horizontal.

O teodolito da figura tem precisão de 5 segundos, e sua luneta realiza rotação horizontal e vertical, movimento cuja abertura pode ser medida e informada no display. Esse modelo é semieletrônico, não trabalhando com prisma óptico. Ele ficará num ponto topográfico e a mira falante no outro.

Por meio das lentes do nível ou do teodolito, o operador verá a mira falante e os fios estadimétricos indicados por: superior, médio e inferior.

Figura 46 – Mira falante vista com a lente dos instrumentos: teodolito e nível



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

A imagem acima retrata uma possível visão da régua da mira estadimétrica por meio da lente do teodolito indicada pela circunferência e os fios estadimétricos (superior, médio e inferior). Os números são postos em posição invertida para facilitar a leitura. Na figura, o fio médio está marcando em 1340mm.

Diante dessa breve descrição e discussão da funcionalidade dos instrumentos topográficos existente na escola São Bento, direcionamos nosso olhar para o próximo nível na escala.

A realidade no nível **disciplina** identificada refere-se, em princípio, à presença das disciplinas: matemática e topografia. Enquanto condições, observamos que a disciplina matemática está presente nos seis semestres do curso, com carga horária de 80 horas. Segundo anunciamos anteriormente, a *disciplina topografia* é ofertada somente no segundo semestre. Ela é uma disciplina da área de tecnologia rural, que ainda possui: desenho, irrigação e drenagem 1 e 2; construções e instalações rurais.

No semestre letivo, a distribuição das aulas apresenta outro indicativo da coexistência de ao menos dois eixos do currículo. A *disciplina matemática* é da formação geral, ofertada em quatro aulas semanais, distribuídas igualmente em dois dias. A carga horária é de 80h, ou seja, sua duração é de 20 semanas, o que corresponde a todo o semestre letivo.

A *disciplina topografia* possui carga horária de 60 horas. Todas as disciplinas da formação técnica são organizadas em encontros de 5 horas/aula, o que corresponde a 4 horas. Geralmente, as aulas de cada disciplina da formação técnica ocorrem uma vez na semana. Nessa realidade, a duração da disciplina topografia é de doze encontros, aproximadamente três meses.

Assim, para identificar as condições e restrições presentes no nível **disciplina**, investigamos a ementa e plano de ensino do componente curricular topografia. Embora não explicitem de forma detalhada quais os tipos de tarefas T que a topografia se propõe a resolver, identificamos nos objetivos desse componente: dominar as técnicas e acompanhar o levantamento planimétrico, altimétrico e planialtimétrico; ler e interpretar cartas topográficas; distinguir as diferentes áreas da topografia; e determinar qual o instrumento adequado para cada levantamento topográfico.

Essas informações dão indícios dos possíveis setores da topografia abordados nesse componente curricular: planialtimetria (altimetria e planimetria); e cartografia (cartas topográficas). Além disso, temos a indicação da escolha adequada dos instrumentos para realização de levantamentos topográficos.

Nossa análise caminha para a realidade observada nos níveis inferiores da escala de codeterminação. No capítulo anterior, utilizamos a noção de praxeologia como ferramenta para analisar as relações institucionais preconizadas, pois estávamos diante da possibilidade do ensino de saberes matemáticos. Neste capítulo, estamos numa realidade de utilização desses saberes.

7.4 ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS MISTAS VIVENCIADAS NAS AULAS OBSERVADAS

Nas primeiras aulas, o professor apresenta a topografia como uma ciência responsável por estudar a superfície terrestre, levando em consideração suas diferenças de níveis, ou seja, suas altitudes e seus declives, medindo distância e ângulos horizontais e verticais. A topografia é citada como um exemplo do grupo das ciências exatas.

Segundo o professor de topografia, a descrição da superfície requer uso dos instrumentos topográficos: trena, bússola, nível, teodolito, clinômetro, GPS, baliza e mira estadimétrica (ou mira falante). Mencionados como os principais instrumentos manuseados durante esse componente curricular.

A descrição dos instrumentos topográficos feita pelo professor se refere a diversos aspectos, dentre outros: à variedade de materiais que os constituem; aos diferentes modelos existentes no mercado; ao princípio de funcionamento de alguns deles; para que serve o instrumento; e ao seu uso em outras ciências. Anteriormente, apresentamos uma breve descrição desses materiais. Outro fator de aspecto descritivo observado foram as situações da prática que justificam o uso dos instrumentos topográficos.

Conforme utilizado no capítulo 5, permanecemos com a seguinte numeração: tipo de tarefa T_i, em que i indica a ordem que ela surgiu. Técnica $\tau_{i.j}$, o índice j indica as diferentes técnicas propostas para resolução do mesmo tipo de tarefa T_i.

Chamamos de “pontos” os locais escolhidos num terreno para marcação de referências. Usaremos também a expressão “operador” para indicar os personagens (fictícios) presentes na resolução das tarefas.

Nossas observações apontam que a problemática trazida pela instituição *ensino de topografia* para o primeiro episódio a ser analisado foi: como construir um retângulo (uma poligonal) num terreno plano? Ou como medir um terreno retangular com lados maiores que 50 m com os vértices demarcados. O formato retangular é comum nos canteiros que servirão de hortas para as diferentes culturas. A necessidade de construir essa poligonal exige a resolução de dois tipos de tarefas matemáticas: alinhar três pontos e construir ângulo reto num terreno plano.

Nesse caso, observamos uma inter-relação explícita entre os tipos de tarefas descritas no parágrafo anterior. A resolução de determinado tipo, no caso construir um retângulo num terreno plano, depende da resolução sequencial de outras tarefas combinadas ambas num terreno plano: alinhar pontos e construir ângulo reto.

Analisamos as praxeologias matemáticas mistas em torno dos tipos de tarefas e procuramos explicitar as técnicas descritas pelo professor e os argumentos do bloco [θ/Θ]. Além disso, indicaremos por θ^p quando estiverem presentes argumentos de natureza prática.

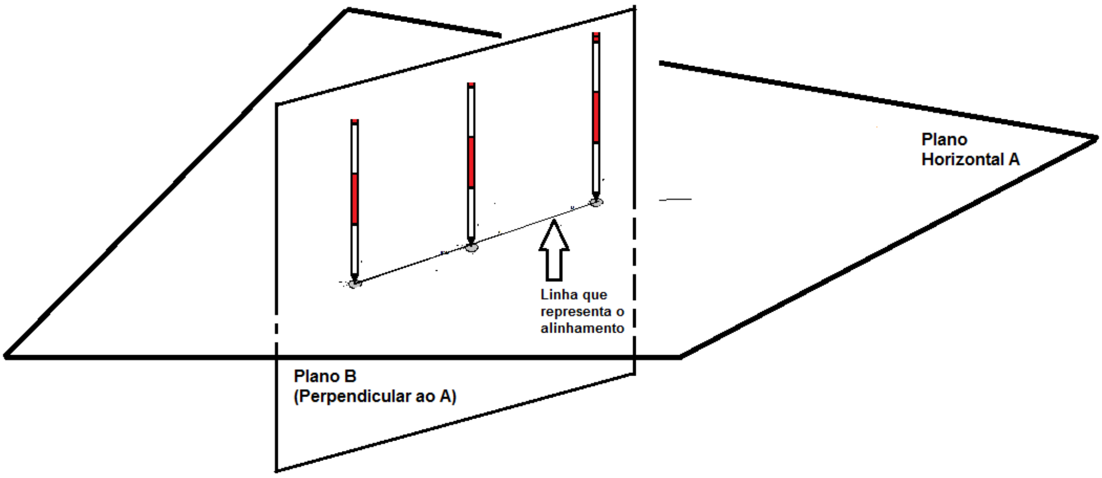
Quadro 4 – Organizações matemáticas mistas em torno do tipo de tarefa: alinhar três pontos num terreno plano

Tipo de tarefa T_1	Traçar um alinhamento em um terreno plano.
Técnica $\tau_{1.1}$	Utilizando três balizas, a primeira localizada no ponto inicial A, a segunda localizada a alguns metros de A, chamaremos de ponto B. A terceira será estacionada no ponto C localizado num prolongamento de AB. Usando o olho-mira, procura-se “esconder” atrás da baliza localizada no ponto A, as balizas postas em B e C.
Tecnologia θ^p	(Motivação) realização de alinhamentos em terrenos de extensão territorial superior a 50 metros. Ao esconder a terceira baliza, você garante o alinhamento. O professor comenta também sobre a importância da pessoa posicionada no ponto A orientar a pessoa do ponto C.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Matematicamente, podemos afirmar que o alinhamento é garantido porque as hastes são vistas como retas posicionadas perpendicularmente ao plano horizontal. A orientação de “esconder” a terceira, e não a segunda, garantirá que essas três retas pertencerão ao mesmo plano. Assim, a reta formada pela intersecção do plano horizontal com esse novo plano é o alinhamento. A figura a seguir procura ilustrar nossa análise matemática:

Figura 47 – Análise matemática referente ao alinhamento topográfico



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Na figura acima, consideramos o *plano horizontal A* como a porção do terreno no qual será traçado ao alinhamento. O plano B, perpendicular ao A, contém as três retas representadas pelas balizas. Não iremos discutir nenhum sistema de axiomática da geometria espacial, mas sabe-se que essa construção garante que o plano B é único, bem como a linha que representa o alinhamento intersecção entre os planos A e B.

Essa análise matemática não é explicitada pelo professor nas aulas de topografia. Conforme comentamos, o tipo de tarefa de alinhar três pontos é combinado a outro: construir ângulo reto.

Quadro 5 – Organizações matemáticas mistas em torno do tipo de tarefa: construir um ângulo reto

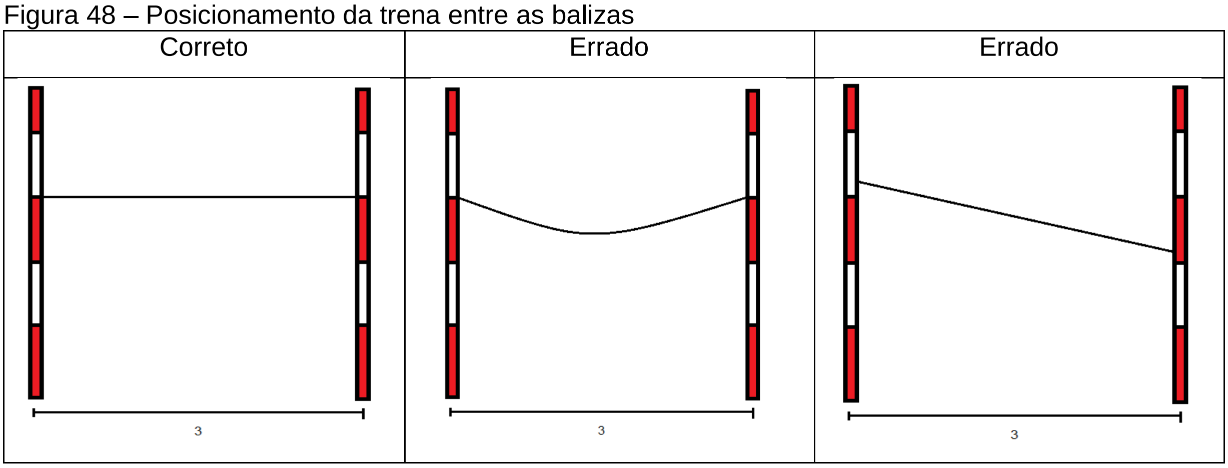
Tipo de tarefa T_2	Construir um ângulo reto com vértice no ponto C e um de seus lados é o segmento AC.
Técnica $\tau_{2.1}$	Usando três balizas e a trena, constrói-se um triângulo retângulo com hipotenusa oposta ao vértice C, e lados de comprimento: 3 m, 4 m e 5 m.
Bloco [θ/Θ]	(Teórica) Um triângulo com lados possuindo tais comprimentos é um triângulo retângulo, como se conclui pela recíproca do teorema de Pitágoras: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ $5^2 = 3^2 + 4^2$ $25 = 9 +16$ $25 = 25$
Tecnologia θ^p	(Prática) O professor descreve a técnica passo a passo. Posicionar a baliza e o zero da trena no ponto C. Esticar a trena até 3 m, marcando um ponto sobre o segmento AC, depois esticar a trena até 8 m, marcando o terceiro ponto. Em seguida, esticar a trena de volta para o ponto C, devendo coincidir o 0 com a

	marcação de 12 m. O professor chama atenção para que a trena esteja bem esticada passando pela mesma marcação na baliza, verificando se em cada lado do triângulo a trena se encontra paralela ao chão. Ele comenta: Então, essa relação é verdadeira, a partir do momento em que eu coloco esses valores: 5, 3 e 4. Então, se eu sei que é verdadeira não precisa fazer os cálculos em campo.
Técnica $\tau_{2.2}$	Usando o teodolito (ou nível) e duas balizas. Posiciona o instrumento no ponto C e visualiza a baliza no ponto sobre o lado AC. Depois, gira o instrumento em 90º e orienta o operador para posicionar adequadamente uma baliza. Assim, pode-se marcar o terceiro ponto.
Tecnologia θ^p	É bem mais prático com esse instrumento. Ele já tem como se fosse um transferidor, que fornece a medida em graus. Além desses elementos, comenta-se a precisão do instrumento e a necessidade de apenas dois operadores. Fatores que podem favorecer sua utilização.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Nessa tarefa surgiram mais de uma técnica para sua resolução, com instrumentos diferentes. Ao utilizar as balizas e a trena, o professor reforça o posicionamento da trena, que sempre deve estar esticada. As figuras a seguir foram apresentadas nas aulas.

Figura 48 – Posicionamento da trena entre as balizas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Enquanto modelo matemático, podemos refletir que essa construção com trena e balizas referente à técnica $\tau_{2.1}$ se trata de um triângulo retângulo paralelo ao plano horizontal. O posicionamento correto da trena garante que os lados do triângulo meçam 3 m, 4 m e 5 m, portanto, pela recíproca do teorema de Pitágoras, esse triângulo possui ângulo reto. Por outro lado, a eficácia da técnica $\tau_{2.2}$ se apoia na precisão dos instrumentos envolvidos. Lembramos que as técnicas $\tau_{1.1}$ e $\tau_{2.1}$ (ou $\tau_{2.2}$) são repetidas até o retângulo ser construído.

Direcionamos para o segundo episódio, em torno do tipo de tarefa: medir a altura de um ponto inacessível, outro exemplo no qual identificamos a importância da utilização dos instrumentos topográficos para a realização das técnicas propostas.

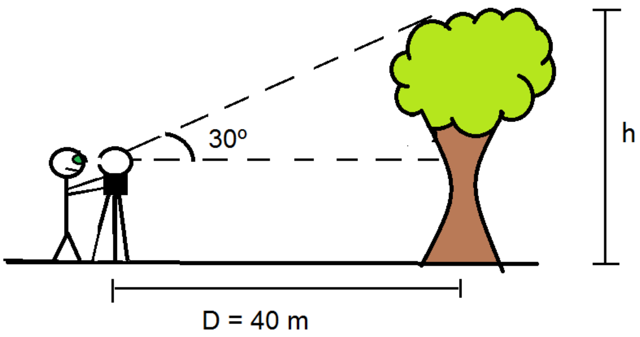
Quadro 6 – Organizações matemáticas mistas em torno do tipo de tarefa: medir a altura de um ponto inacessível

Tipo de tarefa T_3	Medir a altura de uma árvore.
Técnica $\tau_{3.1}$	Utilizar o clinômetro fixo no ângulo de 45° e caminhar aproximando-se ou afastando-se do objeto. Parar quando, por meio do olho-mira, identificar que a projeção do lado desse ângulo (pelo clinômetro) está alinhada com o topo da árvore. Então, meço minha distância até a árvore. Soma-se ao resultado a medida da altura compreendida entre o olho do operador e o chão.
Bloco [θ/Θ]	O valor da tangente de um ângulo de 45° é igual a 1, o que possibilita a construção de um triângulo retângulo e isósceles.
Tecnologia θ^p	A técnica pode ser útil em situações de campo em que o operador não dispõe de calculadora nem da tabela com os valores das razões trigonométricas, mas quero ter a leitura rápida de alguma altura.
Técnica $\tau_{3.2}$	Utiliza o clinômetro e uma trena. Obtenho a medida do ângulo alfa e a distância D, entre o operador e árvore. Com esses dados, aplica-se a fórmula: $tg\alpha = \frac{cat.\ oposto}{cat.\ adjacente}$. Soma-se ao resultado a medida da altura compreendida entre o olho do operador e o chão.
Bloco [θ/Θ]	$tg\alpha = \frac{cat.\ oposto}{cat.\ adjacente}$ Razão trigonométrica Tangente.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

A tarefas proposta pelo professor baseia-se na seguinte problema: como medir determinada altura quando não tenho calculadora científica nem tabela trigonométrica? Ele pontua: basta saber que a tangente de 45º é 1. De posse de uma trena e um clinômetro, realiza-se a técnica $\tau_{3.1}$.

Figura 49 – Tipo de tarefa medir a altura de uma árvore



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Esse tipo de tarefa é retomado na aula seguinte, e, conforme mencionado anteriormente, foi proposta a seguinte tarefa: um operador está distante 40 m de uma árvore. Nesse ponto, o ângulo formado entre a horizontal e a linha imaginária até o cume da árvore mede 30º. Qual a altura da árvore? Embora os dados tenham sido elaborados para essa tarefa, o professor comenta que, em uma possível tarefa de campo, os valores 40m e 30º podem ser obtidos por meio de instrumentos.

A técnica $\tau_{3.2}$ proposta utilizada se apoia na fórmula da relação trigonométrica tangente e no manuseio de instrumentos. As razões trigonométricas surgem para dar resposta às tarefas que a topografia se destina a estudar. O professor reforça que, nas duas resoluções, seria necessário acrescentar a altura do operador.

Retomando nossa análise presente no capítulo 5, a tarefa descrita anteriormente pode ser classificada como um exemplo de T_4: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo. Lembramos que a primeira etapa da técnica empregada é realizar a consulta à tabela. Portanto, saber previamente o valor da tangente de 45 e ter outros instrumentos possibilita ultrapassar a referida etapa.

Outro aspecto observado é que, para uma mesma tarefa, a técnica pode ser diferente devido ao conjunto de instrumentos que tenha disponível. Assim, existe a possibilidade de fazer a seguinte questão: como resolver essa tarefa? Podemos resolver desse modo porque tenho determinado conjunto de instrumentos. Caso tenhamos outros, pode-se solucionar de modo diferente. Diante dessa dinâmica, surgem reflexões sobre a tarefa propriamente posta, visto que, de certa forma, ela é construída pelo operador.

Por exemplo, quando se quer determinar a altura de uma árvore, isso é um tipo de tarefa e não uma tarefa. A tarefa estará posta quando o operador obtiver a medida de abertura do ângulo vertical, a distância entre o ponto de observação e a árvore. Diante desses dados obtidos pelo operador, temos a construção da tarefa: *determinar altura de uma árvore, dada a distância até o observador, o ângulo vertical e altura desse observador.*

Outro exemplo de distância inacessível está no terceiro episódio. Esse é mais longo do que os anteriores. Podemos dizer que sua duração é de pelo menos três encontros. Nesses encontros, são exploradas tarefas em torno do tipo de tarefa: determinar a altura entre dois pontos acessíveis de um terreno. Nas aulas, essa altura é chamada: diferença de nível. São estudadas três técnicas, chamadas de levantamentos altimétricos: barométrico, trigonométrico e geométrico, que dão conta de produzir resposta para o tarefa do tipo T_4. O professor discute limitações do uso de cada técnica, tais como: os instrumentos a serem utilizados e sua precisão em medir a diferença de nível; as particularidades do terreno.

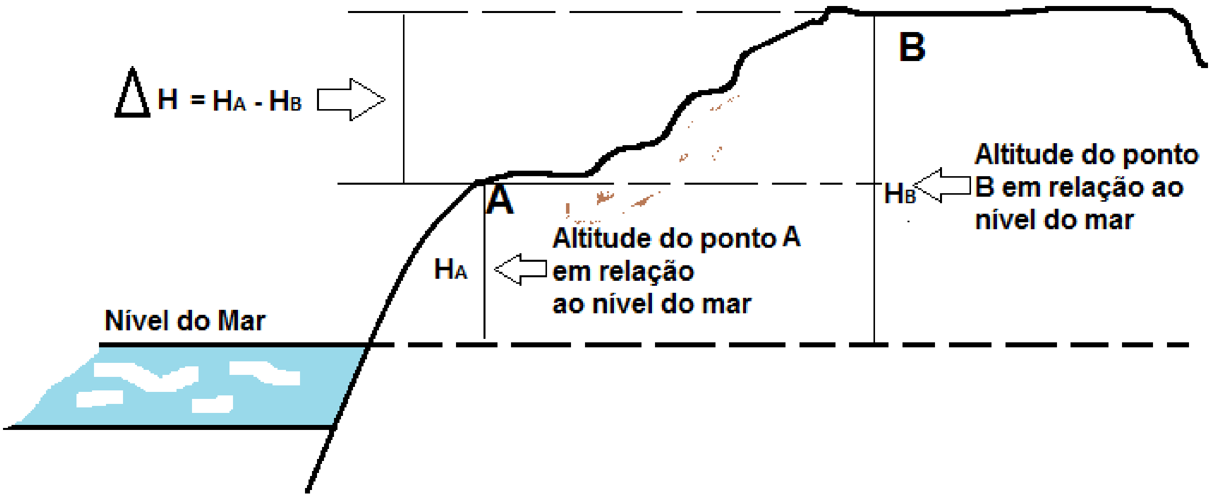
Quadro 7 – Organizações matemáticas mistas em torno do setor da altimetria

Tipo de tarefa T_4	Determinar a diferença de nível entre dois pontos A e B, localizados em um terreno.
Técnica $\tau_{4.1}$ (Barométrico)	Utilizar o instrumento barômetro (ou GPS com barômetro interno) e aferir a pressão atmosférica em cada ponto. Utilizar um software ou tabela de conversão para saber a altura de cada ponto, A e B, relativa ao nível do mar. A diferença entre essas alturas será a diferença de nível que se quer determinar.
Técnica $\tau_{4.2}$ (Trigonométrico)	Utilizar uma das técnicas de medição de distância, seja direta ou indireta, e determinar a distância entre A e B. O ângulo será determinado com instrumentos: teodolito e mira falante. Posiciona o teodolito no ponto mais baixo (A) e a mira falante no outro (B). Medir o ângulo vertical. Reconhecer que esses dados produzem uma tarefa do tipo: Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo. Depois aplicar a razão trigonométrica seno e determinar a altura.
Tecnologia	Os pontos A, B e C, embora C seja inacessível, formam um triângulo retângulo, com hipotenusa AB. Determinar o comprimento da hipotenusa por ser o único lado acessível. Aplicar a razão trigonométrica seno, por isso o nome: técnica trigonométrica. (Prática) O professor comentou que usar a técnica de medição indireta economiza tempo, pois medimos distância e ângulo vertical com os mesmos instrumentos.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

No quadro anterior, não mencionamos os argumentos tecnológicos-teóricos para $\tau_{4.1}$, uma vez que, durante a exploração da técnica, o professor explica apenas um pouco do princípio de funcionamento do barômetro. Nossa análise matemática é iniciada pela seguinte figura.

Figura 50 – Representação dos argumentos tecnológico-teóricos para o nivelamento barométrico



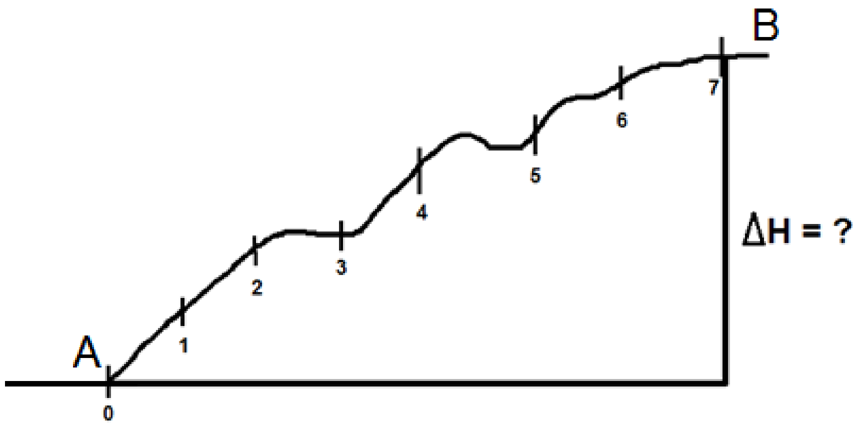
Fonte: Dados da pesquisa.

O ponto A representa a porção do terreno que contém o açude, e o nível mar é a referência para o barômetro. Assim, tomadas as medidas da pressão atmosférica nos pontos A e B, a diferença será o altura desejada.

A técnica $\tau_{4.2}$, denominada de levantamento trigonométrico, é explorada por meio da seguinte tarefa: você precisa comprar uma motobomba para retirar água do açude e levar para uma plantação no alto do terreno. A distância entre a margem do açude e a plantação é de 60 metros, com ângulo vertical de 30°. Qual será o desnível que a motobomba deverá levar a água?

Conforme analisamos no capítulo 5, essa tarefa pode ser classificada como um exemplo do tipo de tarefa T_5: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo. Entretanto, o professor comenta que em muitas situações de campo o triângulo retângulo não modeliza as particularidades do terreno. Assim, é apresentada a terceira técnica.

Figura 51 – Terreno típico para execução da técnica geométrica



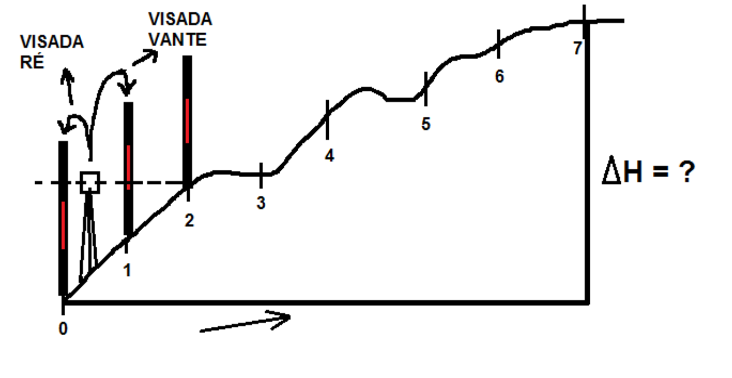
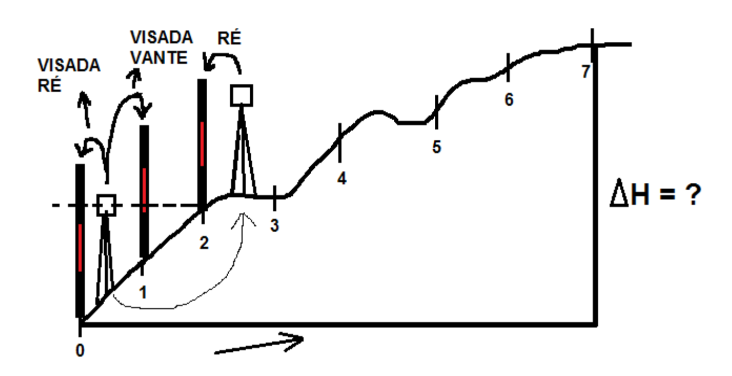
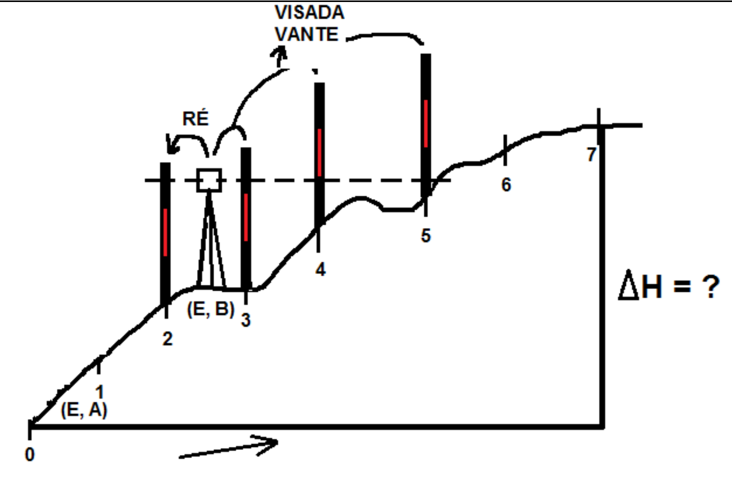
Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

A problemática posta pela instituição ensino de topografia é: determinar o desnível entre dois pontos do terreno representado na imagem acima, enquanto a descrição de técnica $\tau_{4.3}$ é a realizada a seguir.

Os pontos topográficos recebem indicação numérica, iniciada no zero. Nessa demarcação, ocorrem ajustes para que A e B coincidam com o primeiro e último ponto, respectivamente. Na figura, estão indicados pelos pontos zero e sete. Esses pontos são equidistantes, por exemplo, a cada 5 m, 8 m ou a cada 10 m. Essa demarcação pode ser realizada utilizando uma trena ou a baliza. A próxima etapa é realizar a leitura da mira estadimétrica pela lente do teodolito (ou nível). Entre os pontos 0 e 1, posiciona-se o teodolito, e, nos pontos topográficos 0 e 1, são posicionadas as miras. Realiza-se a leitura (chamada visadas: ré e vante) para cada ponto, anotando-se somente o valor do fio médio.

Esse primeiro local, no qual se estaciona o teodolito entre os pontos topográficos 0 e 1, é chamado de estação (muitas vezes, indicado por letras). Após a leitura na régua da mira posicionada nos pontos zero e um, ela é transportada do ponto 0 para o ponto 2 e a leitura é feita sem deslocar o teodolito. E continuará realizando leituras até que não seja possível ler.

Quadro 8 – Etapas do nivelamento geométrico

	Supondo que não consiga realizar leitura para o ponto topográfico 3.
	Nesse caso, o operador deverá deslocar o teodolito para um local entre o último ponto lido e o próximo não lido. Esse novo local será a segunda estação. O operador deverá fazer uma nova visada ré, ou seja, leitura do último ponto lido com o teodolito na segunda estação.
	E, após o deslocamento das miras falantes, realizar quantas visadas vantes forem possíveis. Caso não se consiga realizar a leitura de algum topo topográfico, repete-se o procedimento descrito nessa sequência: desloca-se o teodolito para local após o último lido...

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Essas leituras são anotadas em uma planilha, denominada caderneta de campo. A técnica ilustrada na figura acima foi trabalhada em um encontro. Noutro encontro, o professor propôs determinar o desnível entre dois pontos de um terreno próximo da escola.

A figura a seguir apresenta alguns valores preenchidos na caderneta de campo nessa atividade fora da escola. Identificamos a execução da técnica numa tarefa específica. Os alunos demarcaram pontos topográficos no terreno, com intervalo de 10m.

Figura 52 – Modelo de caderneta de campo utilizada nas aulas de topografia

Pontos TOP	E	Visadas		I	H	Obs
		Ré	Vante			
0	A	888	---			
1	A	---	2295			
2	A	695	3615			
3	B	---	1865			

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Na coluna da esquerda, temos os pontos topográficos. A primeira estação (E) foi indicada pela letra A. Com o teodolito posicionado entre os pontos 0 e 1, ocorreu a leitura dos pontos 0, 1 e 2. Depois o teodolito foi deslocado para um local entre os pontos 2 e 3, sem ser possível a continuidade da técnica. As visadas são medidas em milímetros. Na caderneta de campo:

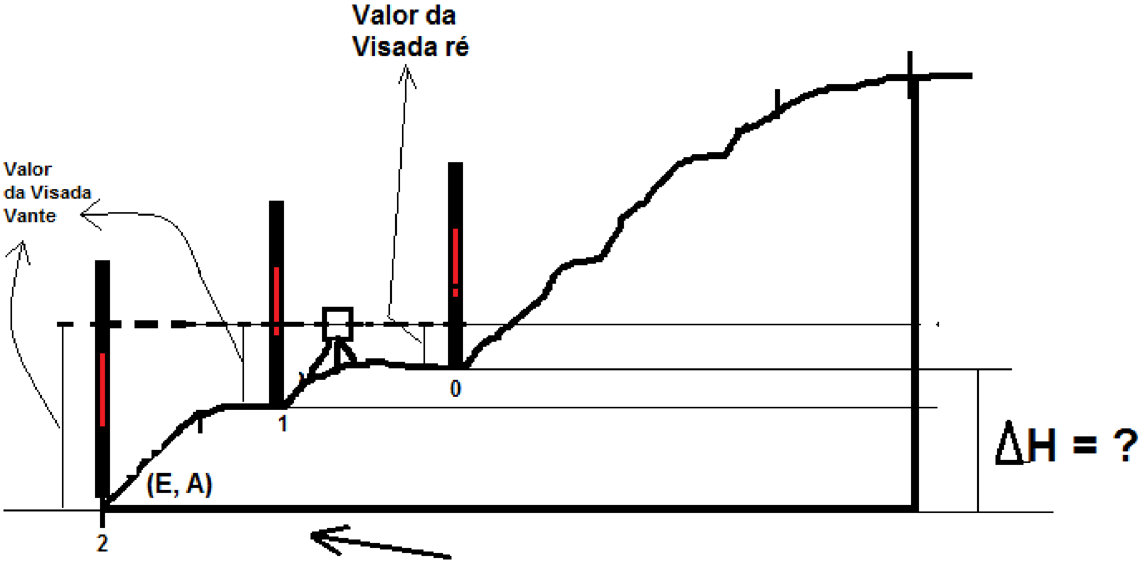
$$i = H + V_R$$

$$H = i - V_V$$

Nessas duas fórmulas, *i* é a cota. Essa cota é igual a H, altura mais V_R que indica visada ré. V_V é a visada vante. Aferidas todas as visadas e preenchidas na caderneta de campo, a próxima etapa é o preenchimento das colunas i e H. A cota *i* é estipulada pelo operador, por exemplo 50.000mm. Então, realizam-se as devidas substituições. Para cada ponto topográfico j, as expressões são escritas da seguinte forma: $i = H_j + V_{R_j}$ e $H_j = i - V_{V_j}$

Segundo nossa análise matemática, a cota é estipulada para evitar o trabalho com números negativos, tendo em vista que a tarefa é calcular o desnível entre os pontos. A imagem a seguir ilustra a leitura de uma visada ré e duas visadas vantes.

Figura 53 – Representação do levantamento geométrico



Fonte: Dados da pesquisa

Estipulando a cota de 40.000 mm, as informações da imagem a seguir poderiam indicar as leituras acima.

Figura 54 – Exemplo de caderneta de campo preenchida

Pontos TOP	E	Visadas		I	H	Obs.
		Ré	Vante			
0	A	888	---	40888	40000	$H_0 = 40000mm$
1	A	---	2295		38593	
2	A	---	3615		37273	

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Considerando os valores da imagem o desnível entre os pontos 0 e 2, A e B, respectivamente, é de $\Delta H = |40000 - 37273| = 2727\ mm$. Essa técnica $\tau_{4.3}$ é longa e exige várias etapas.

Diante das discussões apresentadas sobre as organizações matemáticas mistas, trazemos nossa análise dos momentos de estudos dos episódios selecionados.

7.5 ORGANIZAÇÕES DIDÁTICAS VIVENCIADAS NAS AULAS OBSERVADAS

Nesta seção, discutiremos as organizações didáticas daquelas organizações matemáticas mistas anteriormente analisadas. Permanecemos com a seguinte numeração: tipo de tarefa T_i, e Técnica $\tau_{i.j}$. Também serão chamados de “pontos” os locais escolhidos num terreno para marcação de referências, bem como a expressão operador.

Apresentamos alguns trechos das transcrições das aulas observadas. Usamos algumas as letras **E, P, I** para indicar estudante, professor e investigador respectivamente. As ações não verbais, gestos do professor ou de alunos serão indicados pela letra **G**. Os momentos de respostas de mais de um estudante estão indicados por **Es**. Usamos **E1, E2**,... para alunos específicos, quando necessário. A sigla **Obs** indica alguma observação do pesquisador, geralmente para acontecimento de ações verbais e não verbais simultaneamente e que consideramos importante dar esse destaque.

Examinemos o problema da topografia: como construir um retângulo num terreno plano. O primeiro momento de estudo, o encontro da turma com essa organização, é quando o professor comenta uma funcionalidade para o instrumento baliza. “**P**: [...] para que serve o alinhamento? Se eu vou medir uma área, onde aqui eu tenho uma distância de 100 m... então, tenho como esticar uma trena e saber se ela está bem alinhada, para poder fazer iniciar medição dessa área”. (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 54 a 57).

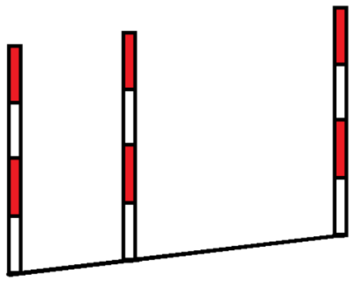
Entretanto, o professor passa desse exemplo para explicar sobre o olho-mira porque se usam os olhos nas orientações para alinhamento de baliza. O trecho a seguir retrata esse momento de estudo:

> **P**: Eu vou desenhar aqui uma referência, certo? É... olho-mira, é o seguinte, vocês ficam aí sentados, não precisam se levantar. Com os dois olhos abertos, estendam o braço de forma que o dedo indicador fique na frente daquelas duas linhas paralelas verticais que eu desenhei.
> **Obs**: Vários comentários inaudíveis. O professor reforça: “com os dois olhos abertos”. O professor começa a explicar à turma como cada aluno pode identificar o seu olho mira. Os alunos estendem o braço para frente colocando o dedo indicador para cima.
> **P**: Com os dois olhos abertos, não está mais ou menos na direção?
> **Es**: Alguns alunos falam: “está”, outros dizem: “estou ficando zarolho”.
> **G**: Então, o professor pede, tampando um dos olhos:
> **P**: Você coloca a mão no olho, depois coloca no olho. Qual foi o olho que o dedo fica menos distante das retas?
> **Obs**: Respostas pessoais dos alunos.

> **P**: Pronto, meu olho que se afasta menos é o direito. Se eu fechar meu olho esquerdo, o objeto permanece no mesmo lugar, mas, se eu fechar o direito, o objeto foge.
> **Obs**: Alguns alunos concordam.
> **P**: O olho que o dedo não fugir é o olho de mira.
> **Obs**: Alguns alunos dizem: “que massa”. E o professor continua.
> **P**: Então, esse é o primeiro passo para você entender como é que vocês trabalham a questão de um simples alinhamento na topografia. (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 69 a 90).

Nessa aula, o professor continua descrevendo outros instrumentos que levou para a turma conhecer. Na aula seguinte, ele inicia pela construção do ângulo reto, reforçando o posicionamento da trena entre as balizas. Assim, ele retoma a noção de alinhamento.

> **P**: Então, eu disse na aula passada que, para obter uma reta, é necessário ter dois pontos. E, para obter um alinhamento, tem que ter o terceiro ponto.
> **Obs**: O professor retoma o manuseio dos instrumentos na realização de um alinhamento e, enquanto faz o seguinte desenho, fala.



> **P**: A pessoa que está olhando aqui [referindo-se à baliza da esquerda]... é como se eu estivesse com meus três dedos, em pé, e o último dedo quisesse sair do alinhamento está errado. Tenho que escondê-lo atrás do segundo dedo. Quando eu escondo o terceiro ponto [baliza da direita] atrás do segundo ponto [baliza do meio], olhando pelo meu olho-mira. Estão lembrados do olho-mira?
> **Es**: Sim.
> **P**: Então, por meio do olho-mira, vamos tentar orientar a terceira baliza (direita), se é mais para direita, é mais para esquerda. Então, quando estiver com minha baliza, segurando e orientando o alinhamento, eu vou dizer ao operador da terceira baliza, ao da segunda não: “mais para lá”, ou “mais para cá”. (BARROS, 2018, APÊNDICE C, linhas: 58 a 73).

A ação de “esconder” a terceira baliza é a forma de garantir que ela também será paralela às duas primeiras, determinando um plano perpendicular ao plano horizontal conforme nossa análise matemática. Temos a elaboração do ambiente tecnológico-teórico nesse momento.

Direcionando nosso olhar para o outro tipo de tarefa: construir ângulo reto. O primeiro momento de estudo também ocorre na aula sobre descrição de instrumentos.

No trecho a seguir, o professor havia comentado sobre a trena e trouxe exemplos de situação na qual medir comprimento utilizando somente a trena não garante precisão.

> **P**: Vamos lá, temos as ferramentas auxiliares que vão justamente fazer parte do nosso quadro para podermos fazer medição de determinado terreno. Quando o terreno é pequeno, você simplesmente estica a trena. Se fosse medir uma sala de aula dessa... simplesmente, você estica a trena e você consegue ter os quatro lados da sala de aula, não é isso?
> **Es**: É.
> **P**: Agora, partindo de um terreno grande, [...], o que acontece? Além da trena, você vai precisar da baliza, vai precisar do auxílio de duas ou três pessoas para você poder fazer determinado alinhamento. Continuando aqui numa revisão geral, depois a gente vai fazer uma prática.
> **G:** O professor se direciona ao quadrilátero e, apontando para um vértice e um lado vertical, diz:
> **P:** Quando eu chego nesta esquina aqui, se eu quiser um ângulo de 90º e continuar medindo para cá [lado vertical], como é que eu faço um ângulo de 90º? (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 99 a 112).

A necessidade de realizar medições de comprimento maiores que 30 m ou 40m com precisão exige a realização do alinhamento. Conforme mencionado para a primeira tarefa, essa tarefa também será retomada na aula seguinte. Entretanto, na organização didática, observamos uma mudança na ordem de estudo dessas tarefas. Na aula de retomada, primeiramente é vista a construção do ângulo reto, em seguida o alinhamento.

O trecho a seguir apresenta o início da aula de retomada

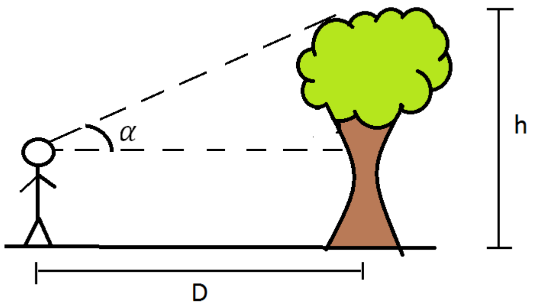
> **P:** Então, na topografia, para a gente não se esforçar muito, temos três valores mais práticos para colocar nesses lados: os catetos, que são os lados que formam o ângulo reto, deixamos com os valores 3 m e 4 m, e a hipotenusa deixamos com 5m. Sempre no campo, iremos trabalhar com 3, 4 e 5. Quando fomos fazer aula prática, pegaremos três balizas, uma trena e vamos fazer um triângulo retângulo para encontrar o ângulo de 90º. (BARROS, 2018, APÊNDICE C, linhas: 4 a 9).

O professor continua a aula e utiliza a recíproca do teorema de Pitágoras para justificar que o triângulo possui ângulo reto. Nesse momento da aula, identificamos os momentos de estudo referentes à constituição do ambiente tecnológico e teórico e institucionalização. Observamos pela fala do professor que a exploração da técnica será na aula prática. O quadro apresentado com o panorama do curso mostra que noutra aula haverá a retomada com esse momento de estudo.

Nas aulas de característica descritiva, observamos que os tipos de tarefas são postos para justificar a utilização dos instrumentos topográficos. Nossas reflexões nos direcionam a questionamentos da ecologia do estudo desses instrumentos: por que estudar tal instrumento? Estuda-se porque nessa situação utilizo-o para realizar essa tarefa. E por qual motivo cumpro essa tarefa desse modo? Porque os instrumentos me permitem essa execução. O segundo episódio trata do cálculo da altura de um ponto inacessível e também retrata tais questionamentos.

O trecho a seguir é das primeiras aulas. O professor havia apresentado a bússola e agora traz a problemática do cálculo de altura para falar sobre uma funcionalidade do clinômetro.

> **P**: Mas é muito comum perguntar a vocês a altura de determinado objeto, a altura de determinado prédio, poste, uma árvore, não é? Então, na realidade, se eu estou aqui e tenho essa distância, estico a trena e tenho essa distância... só que eu quero saber a altura... Então, para saber a altura, o que ocorreu aqui?
> **G**: O professor realiza um desenho no quadro enquanto explica. A figura abaixo ilustra o desenho realizado pelo professor.



> **P**: Se estiver com um clinômetro, o clinômetro serve para medir ângulo vertical. Então, tem como ter a leitura desse ângulo vertical [referindo-se ao ângulo alfa]. Estão lembrados dos três irmãos da trigonometria? (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 532 a 541).

Esse trecho é o primeiro momento de encontro com as razões trigonométricas. Na continuidade, o professor fala das três razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente para a turma. O professor realiza a modelização matemática.

> **P**: Certo. Hipotenusa eu não tenho, não é? Então, se eu tenho o cateto adjacente. Tenho o ângulo, abertura que eu tenho, coloco na máquina científica, qual o ângulo de 35º? Seja seno, cosseno ou tangente, a máquina vai dar também, celular também tem a função... então, estou querendo o cateto oposto. (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 553 a 556).

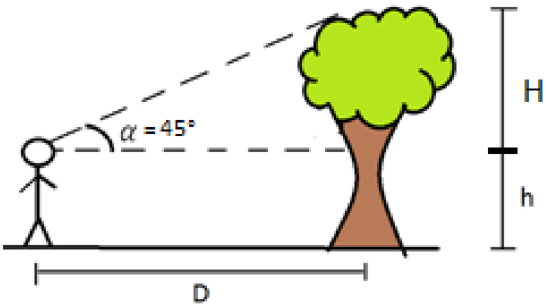
Eduardo continua sua fala e, em conjunto com a turma, constrói o ambiente tecnológico teórico com as fórmulas para cálculo das três razões trigonométricas.

Inclusive, comenta que $tangente = \frac{seno}{cosseno}$. Mas, ao explorar a técnica, adota 45º como o valor da abertura do ângulo vertical.

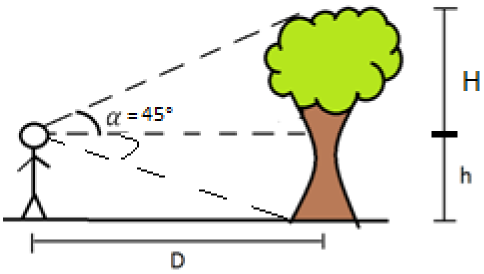
> **P**: Se eu não tenho como medir a tangente, por não ter calculadora na hora, então eu me aproximo desse ponto alto ou me afasto desse ponto que quero medir altura, desde que eu trave o clinômetro em 45º graus, me aproximo, deu 45º? Deu. Então é só medir essa distância. Quando estou a 45°, a distância é igual à altura. É só substituir: tangente de 45º não é um? (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 651 a 655).

Nesse momento de estudo, o professor explora a técnica $\tau_{3.1}$ que utiliza uma trena e um clinômetro. Durante esse momento de estudo, o professor apresenta um discurso tecnológico que, segundo nossa análise, está ancorado na prática. E continua apresentado outros argumentos relativos a essa técnica.

> **P**: Ou seja, o cateto adjacente fica igual à altura quando estiver a um ângulo de 45º, certo?
> **E**: Certo.
> **P**: Agora, vocês não prestaram atenção num pequeno detalhe.
> **Es**: Qual?
> **P**: Estou com instrumento olhando a partir de onde: do chão ou do meu olho?
> **Es**: Olho.
> **E5**: Então não é mais 45.
> **E4**: O senhor vai ter que somar.
> **P**: Você soma essa H com h-zinho. Esse h-zinho é o quê? Minha altura.
> **E**: Do olho ao chão.
> **Obs**: A figura a seguir ilustra o desenho do professor:



> **P:** Se eu não quisesse medir esta altura [referindo ao h], teria que mirar lá para baixo, descendo, mas só que iria dar um ângulo quebrado que sem calculadora não iria me atender.
> **Obs:** O professor faz nova marcação na figura:



> **P**: Daria muito mais trabalho, então é melhor você deixar em 45º e medir a

> distância D. Distância mais a minha altura é igual à altura do objeto. (BARROS, APÊNDICE B, linhas: 661 a 680).

Lembramos que esse tipo de tarefa é retomado na aula seguinte, com outros valores. Assim, o professor reconstrói o ambiente tecnológico teórico referente às razões trigonométricas, mas explora a técnica $\tau_{3.2}$. Entretanto, após explorar a técnica $\tau_{3.2}$, Eduardo retoma $\tau_{3.1}$, ressaltando que muitas vezes em situações de campo deseja-se saber determinada altura, mas o operador não lembra dos valores das razões trigonométricas nem possui calculadora, instrumento que poderia servir de consulta. Nesses casos, Eduardo comenta que é melhor os alunos terem em mente o valor da tangente de 45º.

O uso da calculadora foi observado nas análises do capítulo 5, tanto nas recomendações dos documentos oficiais quanto no livro didático. Ela foi apresentada como exemplo de instrumento que pode informar o valor das razões trigonométricas para ângulos com medidas decimais.

As aulas sobre altimetria ilustram o terceiro episódio. Inicialmente, o professor apresenta algumas divisões da topografia:

Figura 55 – Divisões da Topografia

$$Topografia$$

$$Divisão\text{: } 1.\ Topometria \begin{cases} Planimetria \ (\hat{A}ngulos\ e\ distâncias\ horizontais) \\ Altimetria \quad (\hat{A}ngulo\ e\ distâncias\ verticais) \end{cases}$$

$$2.\ Topologia$$

$$3.\ Taquiometria$$

$$4.\ Fotogrametria \begin{cases} Terrestre \\ Aérea \end{cases}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Segundo a imagem, os dois primeiros episódios estão nas aulas sobre planimetria. O professor comenta que, devido à carga horária do curso, aquilo que foi estudado na disciplina topografia está praticamente centralizado em topometria.

Retomando a escala de níveis de codeterminação, nossa análise aponta que na topografia existem domínios, dentre outros a topometria; constituído dos setores: planimetria e altimetria.

> **P**: [...] O que é planimetria? Medição de áreas planas, ou seja, iremos obter distâncias e ângulos horizontais na planimetria. Não vamos os preocupar com aclives e declives, certo? Vamos só nos preocupar em medir, áreas planas obtendo distância e ângulos horizontais... Já a altimetria, assunto que começaremos hoje, é responsável por medir ângulos e distâncias verticais. (BARROS, 2018, APÊNDICE E, linhas: 23 a 28).

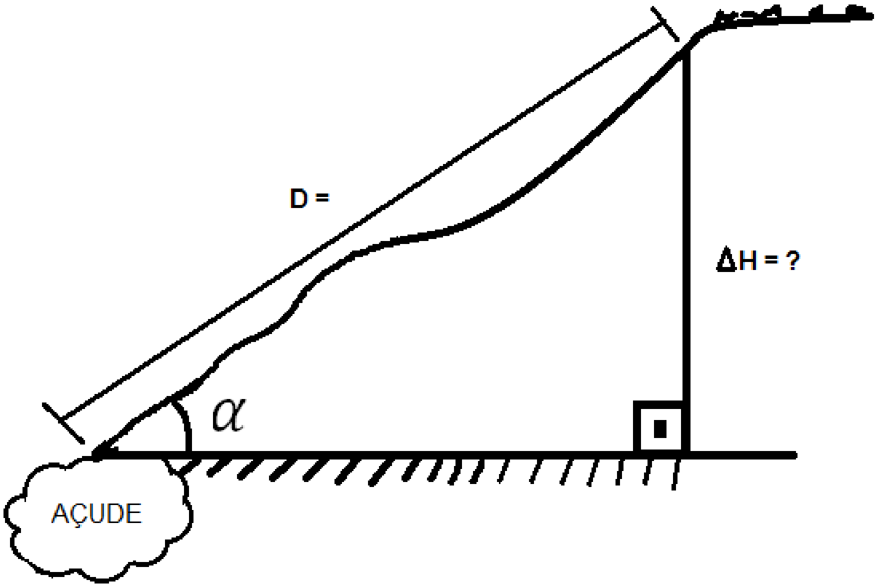
O trecho acima é o início da aula sobre planimetria, ou seja, o primeiro momento de estudo. O professor explica brevemente cada domínio e apresenta a importância da altimetria.

> **P**: Já a altimetria, assunto que começaremos hoje, é responsável por medir ângulos e distâncias verticais. Se eu quero, por exemplo, sendo bem prático, que... é... muito comum precisar desse trabalho para quem vai fazer um projeto de irrigação, para quem vai fazer um trabalho de... um trabalho de captar água de um reservatório de uma parte mais baixa e levar essa água para uma parte mais elevada, então para isso é necessários... temos o quê? Iremos levar água de balde? Não. Vamos levar água por meio de uma motobomba que suga água da parte mais inferior e leva essa água para parte mais superior. Então, para isso, é necessário obtermos essa diferença de nível que é para poder dimensionar qual é a bomba ideal que dê força suficiente para sugar água em baixo e tocar até em cima e lá em cima girar as aspersores para poder irrigar determinada cultura. (BARROS, 2018, APÊNDICE E, linhas: 25 a 32).

Segundo nosso olhar, a fala de Eduardo trazida acima expõe argumentos sobre a razão de ser do estudo da altimetria, promovendo articulação com outras disciplinas do currículo, tais como: irrigação e drenagem e culturas regionais. A captação de água por meio da execução de um projeto de irrigação é uma situação que pode ocorrer na prática profissional. Em muitos terrenos, são nas partes mais baixas que a água está localizada, seja proveniente da chuva ou da existência de um riacho.

Eduardo continua a aula mencionando a importância de um profissional com conhecimento em topografia: um topógrafo, um engenho ou um técnico. A presença desse tipo de profissional se faz durante toda a execução de um grande projeto. Em seguida, o professor retorna a topografia das ciências agrárias quando fala que em relação à altimetria existem três métodos de levantamento altimétrico. A problemática é apresentada pelo professor por meio da imagem na figura seguinte. Eduardo faz este desenho no quadro:

Figura 56 – Situação que representa a necessidade dos levantamentos altimétricos



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Essa imagem procura representar a vista lateral de um terreno com aclive. O professor fala da existência de um açude na parte inferior e a necessidade de levar água para a parte superior. Em seguida, Eduardo busca realizar a modelização matemática, conforme o trecho a seguir:

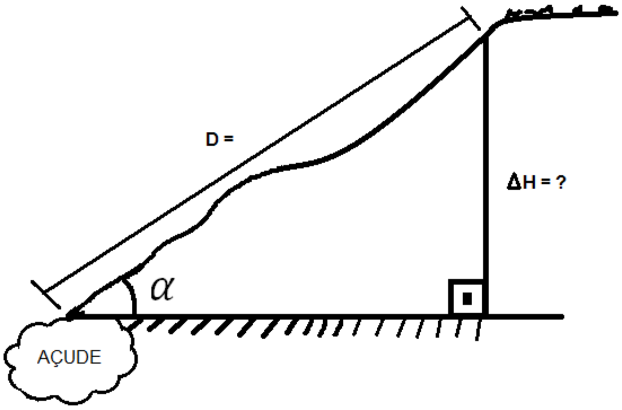
> **P**: Então, praticamente é... de uma forma bem prática que iremos aprender a medir... nos três levantamentos altimétricos é... a altura que eu vou me deslocar desde a base do açude, como no exemplo que eu dei onde quero tocar água para irrigar a cultura lá em cima. Então isso está lembrando o quê? Esse formato? É um triângulo o quê?
> **E**: Triângulo retângulo.
> **P**: Triângulo retângulo porque aqui em baixo vai formar um ângulo de...
> **E**: 90.
> **P**: 90º... então, se vai formar ângulo lá, também vai formar ângulo aqui também de inclinação, não é isso? (BARROS, 2018, APÊNDICE E, linhas: 78 a 87).

O trecho acima apresenta o momento de estudo da exploração do tipo de tarefa e de elaboração de técnicas, as quais em altimetria são chamadas de levantamentos altimétricos ou nivelamento. A primeira técnica explorada é conhecida por levantamento barométrico. Denominada de $\tau_{4.1}$, necessita do instrumento chamado barômetro, que foi mencionado nos primeiros encontros porque alguns GPS possuem barômetro interno. Enquanto Eduardo explora a técnica de $\tau_{4.1}$, ele comenta a respeita da sua precisão.

> **P**: Se eu não quiser algo com tanta precisão, o GPS nos dá uma diferença em média de um a três metros de erro. Se o morro tem mais de 50 m de altura, então um para cima, um para baixo não irá alterar a escolha da potência da motobomba para tocar para irrigar. [...] (BARROS, 2018, APÊNDICE E, linhas: 127 a 130).

Eduardo ressalta essa imprecisão porque, no caso da compra de uma motobomba, acrescenta-se à altura calculada uma margem de segurança de 20%. O professor fala que há necessidade de outra informação para a aquisição da motobomba.

> **P**: E, dependendo ainda do meu objetivo lá em cima, se é só para encher um tanque em cima, beleza, é só água e cair lá. Mas, se é para chegar lá em cima com uma potência maior e ainda de jato de água, então não vai te vender uma bomba para 30, vai te vender uma bomba... sei lá... para o dobro, 60m, que é para poder ela chegar lá em cima com força suficiente para girar os aspersores e poder irrigar o teu projeto de cultura.
> **Obs**: O professor se direciona para o quadro, continua falando e apontando para o desenho:

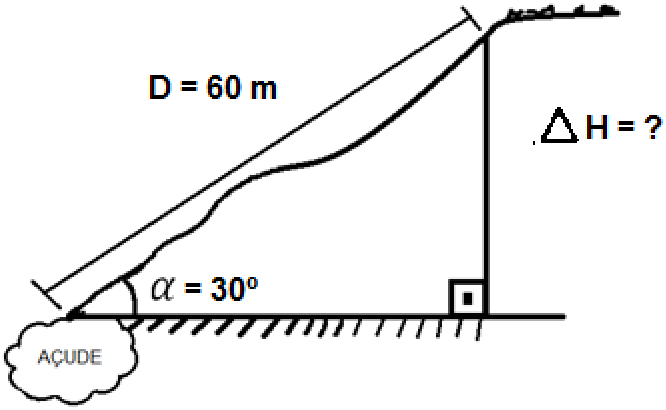


> **P:** E outra coisa que ele pede é essa distância [refere-se à hipotenusa do triângulo]. (BARROS, 2018, APÊNDICE E, linhas: 141 a 150).

Assim, a primeira técnica, denominada levantamento barométrico, necessita do instrumento barômetro ou GPS com barômetro interno. Ela pode ser útil para alturas maiores que 50 m, pois alguns barômetros podem possuir um erro entre 1 a 3 metros. Entretanto, essa técnica não permite determinar a distância D entre os pontos A e B. O professor comenta que essa distância é um parâmetro de especificação para aquisição de motobombas, comuns para a execução de projeto de irrigação em terrenos similares ao descrito na figura.

Diante do exposto, o professor inicia a exploração da técnica $\tau_{4.2}$ intitulada levantamento trigonométrico. Ele retoma as três razões trigonométricas e propõe a seguinte tarefa:

P: Nessa situação aqui, se eu quisesse trabalhar esse levantamento trigonométrico admitindo que eu tenha essa distância de... 60 m e o ângulo aqui é de 30º.
Obs: A imagem a seguir representa as informações postas na situação mencionada pelo professor.



P: Qual seria a expressão trigonométrica mais adequada para encontrarmos esse delta H? Primeiro, você tem que entender, cada parte dessa é o quê? A distância de 60 é o quê? É o cateto? (BARROS, 2018, APÊNDICE E, linhas: 174 a 182).

O professor explora a técnica $\tau_{4.2}$. O trecho a seguir ilustra a tentativa de trazer o aluno para esse momento de estudo. Eduardo havia escrito as fórmulas das três razões trigonométricas.

P: Primeiro, você tem que entender, cada parte dessa é o quê? A distância de 60 é o quê? É o cateto?
E: Não, é a hipotenusa.
P: Hipotenusa, muito bem. Então aqui é a hipotenusa. Bom, se tem hipotenusa, então não é pela tangente que vou encontrar, não é o momento de usar a tangente. Uso seno ou cosseno... se eu tenho... estou querendo saber esta altura aqui, esta altura é qual cateto?
E: Adjacente.
P: O que é cateto adjacente?
E: Oposto.
P: O que é cateto oposto? Se estou desse lado e olho para o outro, então cateto oposto, cateto do outro lado... então cateto oposto é o cateto que o ângulo está olhando para ele.
Obs: Para explicar o cateto adjacente, o professor faz uma comparação com o organograma de um projeto existente na escola que possui o coordenador geral e um coordenador adjunto.
P: Cateto adjacente, não tem o coordenador adjunto não é? Coordenador geral e coordenador adjunto, coordenador que está junto do coordenador geral, então cateto adjunto é o cateto junto ao ângulo, certo? Que seria essa distância aqui que não temos e nem estamos interessados em ter agora.
Obs: Nesse momento, o professor aponta para o lado horizontal do triângulo.
P: O que nos interessa obter é a diferença de altura, ou seja, o delta H. Então, o delta H, se tenho o ângulo, tenho a hipotenusa, eu posso encontrar o terceiro termo que é o cateto oposto. E qual é a expressão trigonométrica que trabalha hipotenusa e cateto oposto?
Obs: Certo silêncio na sala. O professor aguarda alguns instantes, retorna para a parte do quadro em que estão escritas as expressões

> trigonométricas, aponta e fala: "seno". (BARROS, 2018, APÊNDICE E, linhas: 178 a 205).

Esse trecho reafirma a insuficiência do equipamento praxeológico dos alunos para essas tarefas, discutido no capítulo anterior. Após apresentar a tarefa, o professor retira a tangente porque usaria a medida da hipotenusa. Embora o triângulo esteja em posição prototítica e com a modelização realizada pelo professor, observamos que os alunos identificam corretamente apenas a hipotenusa.

O trecho anterior mostra outro exemplo que a turma não reconhece, a tarefa proposta pelo ensino de topografia como uma similar à outra tarefa proposta pelo ensino de matemática.

A exploração da técnica $\tau_{4.2}$ e discussão das possíveis "razões de ser" da organização matemática mista nos possibilitou identificar a importância dessa praxeologia noutros componentes curriculares da formação técnica.

Na construção do ambiente tecnológico-teórico, estão presentes argumentos tanto de natureza teórica, pois se utiliza o seno, quanto de natureza prática, porque essa técnica é eficaz em terrenos particulares. Em continuidade, o professor traz algumas limitações do nivelamento trigonométrico. Assim, surge o nivelamento geométrico.

> **P**: Eu quero medir uma distância maior e não é possível isso com... com... por meio de trigonometria porque, às vezes, essa distância maior pode ter alguma oscilação aqui. Então, na trigonometria, o interessante era que fosse uma hipotenusa perfeita. Quando partimos para a questão de campo mesmo e é uma área de campo mais extensa, por exemplo, eu quero medir o desnível... uma coisa prática, daquele terreno da escola, da entrada até lá em cima[49]. Então, temos que partir para o geométrico mesmo, se quiser uma coisa precisa, que, na verdade, não terá ângulo[50], não vamos trabalhar com ângulo. (BARROS, 2018, APÊNDICE E, linhas: 312 a 329).

Em situações de campo, o desnível entre os pontos A B pode não possuir inclinação constante. Nesses casos, é comum recorrer à técnica $\tau_{4.3}$, denominada nivelamento geométrico. Ela é composta por várias etapas e necessita de um conjunto diferente de instrumentos.

Inicialmente, são marcados pontos equidistantes, por exemplo, a cada 5 m, 8 m ou a cada 10 m. Essa demarcação pode ser realizada utilizando uma trena ou a

---

[49] É uma longa distância, os alunos têm uma noção do terreno, pois algumas disciplinas são ofertadas no prédio localizado nesse terreno.

[50] Referindo ao ângulo vertical alfa, ângulo de inclinação do terreno.

baliza. Cada marcação gera um ponto topográfico. Em continuidade à aula, Eduardo explora a técnica, descrevendo-a.

Todavia, numa aula posterior, ele retoma a exploração da técnica com a proposição e uma tarefa. O professor escolhe o terreno e o primeiro ponto e, com os alunos, demarca os demais pontos e escolhe 10 m de distância entre os pontos. Foram nove pontos topográficos, e o terreno escolhido possuía uma inclinação não constante e uma curva ao longo da sua descida. Essas particularidades foram comentadas com os alunos.

Nessa aula, ocorreram atividades de campo apenas. Os alunos se revesaram em realizar a leitura, manuseio dos instrumentos e preenchimento da caderneta de campo. Todas essas ações foram supervisionadas pelo professor. Ele também auxiliou em alguns momentos, inclusive ensinado alguns alunos a ler na mira estadimétrica ou mesmo confirmando a leitura realizada por outros alunos da turma.

Tomadas as leituras, ou seja, todas as visadas ré e vante exigidas pelos declives do terreno, o professor comenta que a etapa de preenchimento da caderneta relativa às informações de campo foi concluída. No encontro seguinte, o professor retoma a técnica explorando o preenchimento das colunas i e H.

Os episódios selecionados mostram uma diversidade de técnicas no que se refere aos instrumentos utilizados às etapas de execução e inter-relações entre técnicas *a priori* muito diferentes.

8 CRUZAMENTOS ENTRE A SONDAGEM, AS ANÁLISES DOCUMENTAIS E AS OBSERVAÇÕES DE AULAS

Neste capítulo, discutiremos dois aspectos que retomam elementos vistos anteriormente. O primeiro está relacionado ao equipamento praxeológico da turma; traremos trechos das transcrições das aulas observadas. Já o segundo é a análise de tarefas presentes no livro de matemática.

Das aulas, procuramos trechos que reforçam **H1: O equipamento praxeológico matemático do aluno não é suficiente para resolver as tarefas que utilizam matemática nos componentes curriculares da formação profissional**. Quando observamos que a turma não responde adequadamente a uma pergunta que deveria responder, pois são alunos do 1º ano do ensino médio.

No segundo aspecto, escolhemos tarefas que remeteram a situações abordadas em campo profissional. Por exemplo, olhamos para o cálculo de altura de objetos e para a inclinação de rampas. Nessa última, recorremos à Associação Brasileira de Normas Técnicas, ABNT NBR 9050. A primeira versão da NBR 9050 data de 2004, e a última atualização é de 2015. Não houve alterações nos parâmetros de inclinação.

Nessas tarefas, confrontamos dois modos de resolução: o preconizado pelo livro e aquele previsto no campo profissional. Refletimos sobre a obtenção dessas tarefas, aproximações e distanciamentos entre tais resoluções.

8.1 RELAÇÕES PESSOAIS DOS ALUNOS OBSERVADAS NAS AULAS DE TOPOGRAFIA

Teixeira (2004), Nacarato e Santos (2004) e Ferigolo (2007) mencionam a importância de se trabalhar os instrumentos de medida. No trecho a seguir, identificamos que os alunos não haviam trabalhado anteriormente com a trena.

> **P**: Esses são os principais equipamentos que a gente vai trabalhar ao longo da disciplina. [...] A trena, não sei se vocês visualizaram na disciplina de desenho, mediram alguma área, algum local. Vocês trabalharam com a trena algum momento em desenho?
> **Es**: Não.
> **P**: Então, vamos começar pela trena. A trena, ela é um instrumento que pode ser de lona de metal, se chama de aço, [...] (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 21 a 30).

Mencionamos a trena porque, embora seja um instrumento utilizado em topografia, consideramos que poderia ser do conhecimento dos alunos. Além disso, ela é, dentre os instrumentos vistos nesse componente curricular, talvez aquele que mais possui utilização no cotidiano. Existem outros instrumentos que se aproximam da trena, tais como régua e fita métrica.

Lembramos que os alunos realizaram ensino fundamental em diferentes escolas. E, por existirem vários tipos de trena e outros instrumentos que medem comprimento, poderíamos pensar que alguns desses instrumentos foram vivenciados nos anos anteriores de escolarização. Observamos indícios de que os alunos também não estavam familiarizados com a régua.

> **P:** Esta planta... ela está numa escala de 1 para 2000. Então, vamos fazer algumas medidas aqui e colocar na escala para vocês terem uma ideia do tamanho real. Iremos medir com a régua, por exemplo, qualquer extensão desta [aponta para uma planta]. Medir com a régua significa que temos como unidade: metros ou centímetros?
> **Obs:** Certo silêncio na sala. Uma aluna começa a falar vagarosamente: “cen... ti... metro?”.
> **P**: Centímetros. [...]. (BARROS, 2018, APÊNDICE D, linhas 1 a 9).

Na matemática escolar, a régua é um instrumento de medida de comprimento mais comum do que a trena. Outro aspecto, sobre a noção de comprimento, é o fato de os alunos não recordarem da conversão entre as unidades de medida: metro e centímetro.

> **P**: Passando para metro... tem aquela regra: metro para centímetro, eu faço o quê? Multiplico por quanto?
> **E3**: 1000.
> **P:** Não.
> **E3:** 100?
> **P:** 100. De centímetro para metro, o que eu faço?
> **Obs:** Comentários inaudíveis.
> **P:** Divido por 100, não é? Estão lembrados?
> **E1:** Espera, professor.
> **P:** Estou esperando.
> **E1:** Metros para centímetros...
> **P:** Metros para centímetros eu multiplico por 100. Centímetro para metro eu dividido por 100. Estão lembrados disso?
> **Es:** Não. (BARROS, 2018, APÊNDICE D, linhas 160 a 172).

Conforme apontamos na seção sobre elementos da praxeologia presentes nos referenciais curriculares (BRASIL, 1997, 1998), realizar conversão entre unidades padrões de medidas é um tipo de tarefa preconizado pela matemática estudada no ensino fundamental, considerado também importante para o ensino de topografia. Conforme destaca o professor no trecho a seguir:

> **Obs**: O professor escreve uma tabela que ele chama de escala, enquanto recomenda.
> m dm cm mm
> 1 0 0
> **P**: Anotem essa escala porque é muito importante para vocês, para topografia principalmente porque mexemos muito com conversão de medidas agrárias, onde é importante saber... não só... essa relação da escala em metro, decímetro, centímetro e milímetro [...]. (BARROS, 2018, APÊNDICE D, linhas: 199 a 205).

Esse trecho retrata o final de uma exposição sobre a conversão entre as unidades de comprimento: metro, decímetro, centímetro e milímetro. O professor comenta sobre os fatores de multiplicação. Essa exposição surge após a necessidade de converter para metros 23600 cm, na resolução de uma tarefa sobre escalas. Ele recomenda que os alunos estudem as unidades de medidas.

> **P:** Eu vou pedir a vocês para revisarem em: conversão de unidades de medidas, tanto grandezas de pesos quanto grandezas de medidas... de distâncias... porque é importante vocês revisarem, ou seja, quilômetro para metro, não é? Medidas agrárias: o que é um hectare? O que é uma tarefa? O que é um alqueire? Apesar que hoje utilizamos apenas hectare, um hectare corresponde a quantos metros? 10000 m^2 Dez mil metros quadrados... por exemplo: um hectômetro quadrado são quantos hectare? São essas coisas assim. (BARROS, 2018, APÊNDICE D, linhas 690 a 696).

Observamos que os alunos não executavam certas tarefas em torno da noção de comprimento, seja pelo não conhecimento dos instrumentos de medida, seja por não se lembrarem de algumas conversões entre unidades de medida padrão.

Um instrumento utilizado para orientação de terreno, a bússola também não era do conhecimento da turma.

> **P**: Então, voltando aqui, nós já falamos da trena e da baliza. Vamos falar agora da bússola [...]. Todo mundo já viu uma bússola?
> **Es**: Não.
> **G**: [51] O professor, enquanto fala, passa a bússola para os alunos e pede que ela seja olhada e repassada entre os demais alunos. (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 185 a 192).

Percebemos que alguns elementos de descrição tornam-se importantes no estudo dos instrumentos de medidas, possibilitando o enriquecimento da relação

[51] Usamos algumas as letras **E, P, I** para indicar estudante, professor e investigador, respectivamente. As ações não verbais, gestos do professor ou de alunos serão indicados pela letra **G**.

pessoal.

Na análise da tarefa de sondagem, observamos que os alunos não responderam à última tarefa que tratava da noção de perímetro. Embora não seja uma noção muito explorada nas aulas de topografia, os alunos não respondem quando questionados sobre esse conceito. O perímetro surgiu numa etapa da técnica sobre a construção de um triângulo retângulo com trena e balizas.

> **P**: [...] uma coisa é ter a área, outra é ter o perímetro, o que é o perímetro?
> **Obs**: Silêncio da turma.
> **P**: Não é a soma dos lados? Então a soma desses lados, desses três lados tem que dar 12 metros. Três com mais cinco 8, com mais quatro 12.
> (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 179 a 184)

Noutra aula, durante a retomada da construção do triângulo retângulo, o professor questiona novamente a turma sobre a noção de perímetro.

> **P**: Então, ao colocar esses valores 3, 4 e 5... não precisa nem fazer as contas no campo. O que é que fazemos no campo? Esticamos a trena... quanto é o perímetro desse triângulo?
> **Obs**: Os alunos não respondem. O professor havia pegado a trena, mas não a utiliza e retorna ao quadro. Enquanto fala, escreve a soma dos lados.
> **P**: Perímetro... o que é perímetro? É a soma de quê? Dos três lados do triângulo, no caso, três mais quatro mais cinco é igual a 12 metros, certo? [...] (BARROS, 2018, APÊNDICE D, linhas 712 a 718).

As observações nos fornecem indícios sobre possíveis dificuldades dos alunos para construir um triângulo retângulo cujos lados sejam medidas inteiras. Nas aulas de topografia, essa construção é utilizada como argumento tecnológico teórico da técnica para o tipo de tarefa construir um ângulo reto num terreno plano. Nesses termos, a terna pitagórica mais simples (3, 4, 5) é de grande utilidade.

Observamos que a turma enuncia corretamente o teorema de Pitágoras como também identifica adequadamente a hipotenusa e os catetos quando o triângulo está na posição prototípica, entretanto não menciona nenhum exemplo de terna que represente um triângulo retângulo.

> **G**: O professor desenha um triângulo retângulo em posição prototípica com vértices A, B (vértice com ângulo reto) e C enquanto fala.
> **P**: Então veja só, se eu tenho o triângulo retângulo, e quero um ângulo de 90º aqui, o Teorema de Pitágoras nos diz o quê? Esse lado maior é o quê?
> **Es**: Hipotenusa.
> **G**: O professor marca o ângulo agudo formado pelo lado horizontal e a hipotenusa e pergunta.
> **P**: E aqui é o quê?
> **E3**: Cateto oposto.

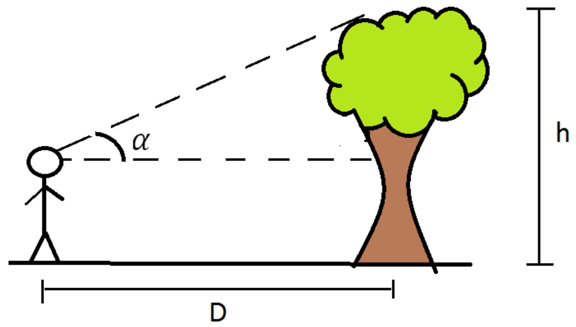
> [...] **P**: Hã?
> **E3**: Cateto adjacente.
> **P:** Sim. E esse outro é o quê?
> **E3**: Cateto adjacente.
> **P**: Estão lembrados disso?
> **E3**: Eu me lembrei agora.
> **I**: Tem algum triângulo que vocês conhecem com medidas que dê aquilo que o professor está falando?
> **E**: Triângulo equilátero?
> **I**: Colocando as medidas, esse cateto medindo tanto, esse outro cateto medindo tanto e a hipotenusa medindo tanto.
> **E**: Um triângulo retângulo mesmo.
> **P**: Assim com medidas, por exemplo: 3... 2...10.
> **Es**: Há!
> **I**: Então, algum triângulo que você diga: esse eu sei que é retângulo, ou esse eu lembro que é retângulo.
> **Obs**: Os alunos respondem: "Lembro não". Um aluno diz: "4, 6, 8".
> **P**: ... 4, 6 e 8 está perto, mas não é não. Olha a fórmula não é essa? A de Pitágoras? Hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos, então quais são os números que eu substituo aqui e dá certinho?
> **E**: 10... 4, 6 e 10?
> **P**: Não. Geralmente, eu na topografia trabalho com esses números: a hipotenusa vale 5, o cateto adjacente mede 4 e aqui 3. 3, 4 e 5. (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 122 a 154).

Os dados apresentados no trecho acima, nos fornecem indícios de que os alunos não conseguem mencionar três números que possam representar as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Tampouco parecem saber utilizar o teorema de Pitágoras como propriedade que confirme se, dadas três medidas quaisquer, elas correspondem aos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.

Nesses termos, temos indícios de que o objeto ostensivo triângulo retângulo não evocou o objeto não ostensivo: *teorema de Pitágoras*. Lembramos que houve poucos acertos no teste discutido no capítulo 6, e outros objetos não ostensivos – a noção de perímetro e área – foram evocados pelos alunos.

No que se refere à trigonometria, nossa interpretação é que o conjunto de transcrições parece mostrar, que os alunos sabem o que é cateto oposto e cateto adjacente, mas esse conhecimento não é estável para toda a turma, pois vez por outra confundem ou hesitam em responder.

Identificamos também que os alunos lembram expressões que representam as três razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Juntamente com o professor, a turma escreve adequadamente cada expressão, conforme trecho a seguir sobre a determinação da altura de uma árvore:



[...]
P: Veja só, se eu estou querendo este lado [direcionado para altura da árvore], em relação ao ângulo este lado é cateto adjcente ou oposto?
Es: Oposto.
P: Por que oposto?
E4: Porque está de frente para o ângulo.
P: Isso. Por que estou olhando para ele, está do lado de lá. E esse cateto aqui é o quê? [Passa a mão em cima do segmento horizontal.]
Es: Adjacente
P: Certo. Hipotenusa eu não tenho, não é? Então, se eu tenho o cateto adjacente, como medi. Tenho o ângulo, abertura que eu tenho, coloco na máquina científica, qual o ângulo de 35º? Seja seno cosseno ou tangente, a máquina vai dar também, celular também tem a função... então, estou querendo o cateto oposto. A gente sabe que o seno... de um ângulo é o quê?
G: Enquanto o professor escreve a fórmula para o seno, uma aluna completa sua fala.
P: Cateto...
E6: Oposto
P: ...oposto, sobre...
E6: Hipotenusa.
P: Hipotenusa. Cosseno?
E6: Adjacente sobre hipotenusa
P: Cateto adjacente sobre...
E6: Hipotenusa.
P: Qual dos dois vai me atender aqui?
E: Seno.
P: Nenhum, não é? Por enquanto.
E6: Cosseno,
E7: É a tangente.
P: Porque as duas expressões têm hipotenusa que eu não tenho também. Se estou sentindo falta de duas incógnitas então não atende. Então qual é o outro irmão?
Obs: O professor escreve no quadro enquanto fala: tangente. E pergunta: “tangente é o quê?”.
Es: Cateto oposto sobre cateto adjacente.
P: Mas por que é isso?
E8: Para calcular a hipotenusa. (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 538 a 579).

Os alunos identificam corretamente os lados, bem como escrevem as fórmulas. Essas são etapas necessárias para a realização da técnica em torno do tipo de tarefa determinar a altura de uma árvore. Considerando a fala do professor, podemos dizer que o exemplo é uma tarefa do tipo T_4: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo, tarefa discutida no capítulo 5. Retomamos a descrição da técnica $\tau_{4.1}$: consultar o valor da tangente do ângulo informado. Em seguida substituir esse valor e a medida do cateto adjacente na fórmula que define a tangente de um ângulo e por fim resolver a equação do 1º grau.

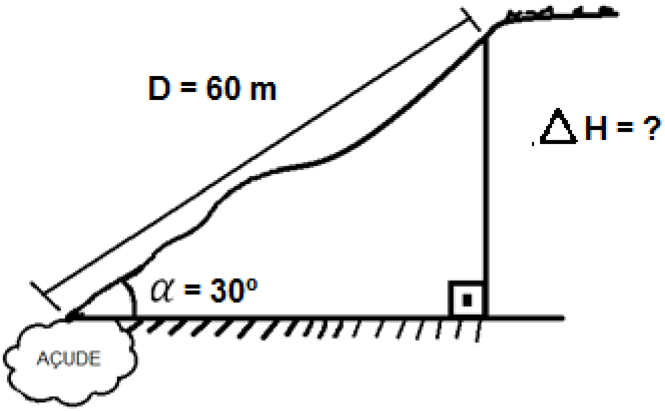
Todavia, percebemos que os alunos não lembravam os valores das razões trigonométricas, fato que pode comprometer a execução da referida técnica. O trecho a seguir traz esse aspecto:

> **P**: Então, imagine que você tem um ângulo. Vou colocar um ângulo fácil aqui... qual a tangente de 45º?
> **E4**: Eu não lembro de cabeça não. Não sei se cosseno de...
> **P**: É a mais fácil que tem.
> **Obs**: Alguns alunos falam: “tangente de 45. É...”. Os alunos tentam dizer a resposta correta:
> **E**: Um sobre dois.
> **P**: Quase.
> **E**: Menos um sobre dois.
> **P**: Quase.
> **E**: Raiz de um sobre dois.
> **P**: Quase.
> **E**: Ah!... não sei não.
> **Obs**: Um fala: “raiz de três”. Outro diz: “raiz de dois”.
> **E**: Raiz de dois sobre dois.
> **E**: Dois raiz de dois.
> **P**: $\sqrt{2}/_2$ é o seno de 45º. O cosseno de 45º é também $\sqrt{2}/_2$. Então tangente é igual a?
> **E5**: Raiz de dois sobre dois.
> **E4**: Sobre um.
> **E**: Um sobre dois.
> **P**: É um.
> **G**: Alguns risos. Comentários inaudíveis. (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 597 a 620).

Esses trechos nos fazem refletir a respeito da ausência de respostas nas tarefas de sondagem que trataram de trigonometria. As técnicas esperadas pela instituição ensino de matemática exigiam do aluno várias etapas, lembranças que podemos considerar como parte do reconhecimento de similaridade. Caso algum destes elementos: identificação do triângulo retângulo, escrita da razão correta e de seu valor numérico, não entre em ação, comprometeria a execução da técnica. Foi o que ocorreu.

Noutra situação observada em sala de aula, o professor propõe uma tarefa do tipo: determinar altura de um terreno, dados o ângulo de inclinação e a distância entre dois pontos extremos.

P: Nessa situação aqui, se eu quisesse trabalhar esse levantamento trigonométrico admitindo que eu tenha essa distância de... 60m e o ângulo aqui é de 30º.
Obs: A imagem a seguir representa as informações postas na situação mencionada pelo professor.



P: Qual seria a expressão trigonométrica mais adequada para encontrarmos esse delta H? Primeiro você tem que entender, cada parte dessa é o quê? A distância de 60 é o quê? É o cateto?
E: Não, é a hipotenusa.
P: Hipotenusa, muito bem. Então aqui é a hipotenusa. Bom, se tem hipotenusa, então não é pela tangente que vou encontrar, não é o momento de usar a tangente. Uso seno ou cosseno... se eu tenho... estou querendo saber esta altura aqui, esta altura é qual cateto?
E: Adjacente.
P: O que é cateto adjacente?
E: Oposto.
P: O que é cateto oposto? Se estou desse lado e olho para o outro, então cateto oposto, cateto do outro lado... então cateto oposto é o cateto que o ângulo está olhando para ele.
[...]
P: O que nos interessa obter é a diferença de altura, ou seja, o delta H. Então, o delta H, se tenho o ângulo, tenho a hipotenusa, eu posso encontrar o terceiro termo que é o cateto oposto. E qual é a expressão trigonométrica que trabalha hipotenusa e cateto oposto?
Obs: Certo silêncio na sala. O professor aguarda alguns instantes, retorna para a parte do quadro em que estão escritas as expressões trigonométricas, aponta e fala: “seno”. (BARROS, 2018, APÊNDICE E, linhas: 174 a 208),

Observe que o professor havia escrito as três relações trigonométricas e apresentado a tarefa para explorar a técnica de determinação de altura de um terreno, denominada: levantamento trigonométrico. Em sua fala, inicia descartando a relação trigonométrica tangente, muito utilizada em tipos de tarefas apresentados anteriormente. E ainda destaca que, nessa situação, não se tem – e não se está interessado em ter – a medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo de referência. Por consequência, restando apenas determinar o comprimento do cateto, dados o comprimento da hipotenusa e a abertura do ângulo vertical. Mesmo diante dessa delimitação, a turma não responde que deveria ser utilizada a expressão que representa o seno de um ângulo.

Os elementos identificados nesta seção nos conduziram a questionar as técnicas para executar os tipos de tarefas estudados. Passamos a refletir: dado o mesmo tipo de tarefa como é resolvido pelas instituições *ensino de matemática* e *ensino de topografia*? Esse questionamento tem origem porque é ao trabalhar determinada técnica que identificamos trechos presentes nesta seção. As discussões dos capítulos anteriores (5 e 7) fornecem respostas para tal questionamento, discutido na seção seguinte.

8.2 AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS EM OUTROS CAMPOS PROFISSIONAIS: O QUE INDICA O LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA

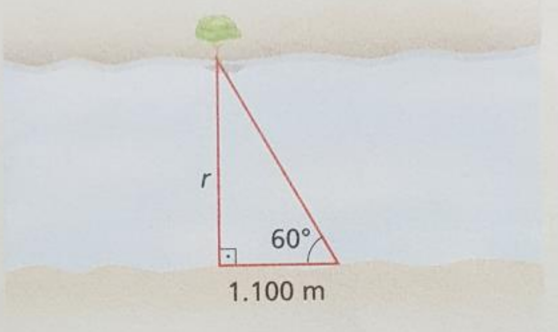
Nas análises das organizações matemáticas e organizações didáticas, observamos os primeiros indícios de que o ensino da matemática escolar não consegue sustentar uma razão de ser dos objetos estudados.

Notamos que tanto os referenciais curriculares quanto as páginas iniciais do livro mencionam tal importância, mas foram propostas poucas organizações matemáticas que abordem efetivamente, e, mesmo quando o livro traz exemplos do campo profissional, identificamos, em alguns deles, certo descompasso entre o tratamento dado no livro e aquele dado pela área profissional. Essa será a temática desta seção.

Iniciamos com os exercícios: ER7 e EP23, ambos no conjunto C_4. Quando escrevemos ER7, indicamos o sétimo exercício resolvido, bem como ER23 é o vigésimo terceiro exercício proposto, e assim por diante. Esses exercícios abordam cálculo da distância entre margens de um rio. Em Brasil (2002b; 2006) menciona-se como exemplo de distância inacessível. Caracterizamos como tarefas do tipo T_4: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo.

Figura 57 – Exemplos de tarefas do tipo T_4

R7. Na região do município de Óbidos, no Pará, encontra-se a garganta mais estreita do rio Amazonas. De um ponto na margem esquerda avista-se, bem em frente, certa árvore na outra margem. Caminhando 1.100 m pela margem esquerda, avista-se a mesma árvore sob um ângulo de 60°. Qual é a largura aproximada do rio Amazonas nesse local?



▸ *Resolução*

No esboço, a largura está representada por r. Assim:

$$\text{tg } 60° = \frac{r}{1.100} \Rightarrow 1{,}7321 \simeq \frac{r}{1.100}$$

$r \simeq 1.905$

Logo, a largura aproximada do rio Amazonas nesse local é 1.905 m.

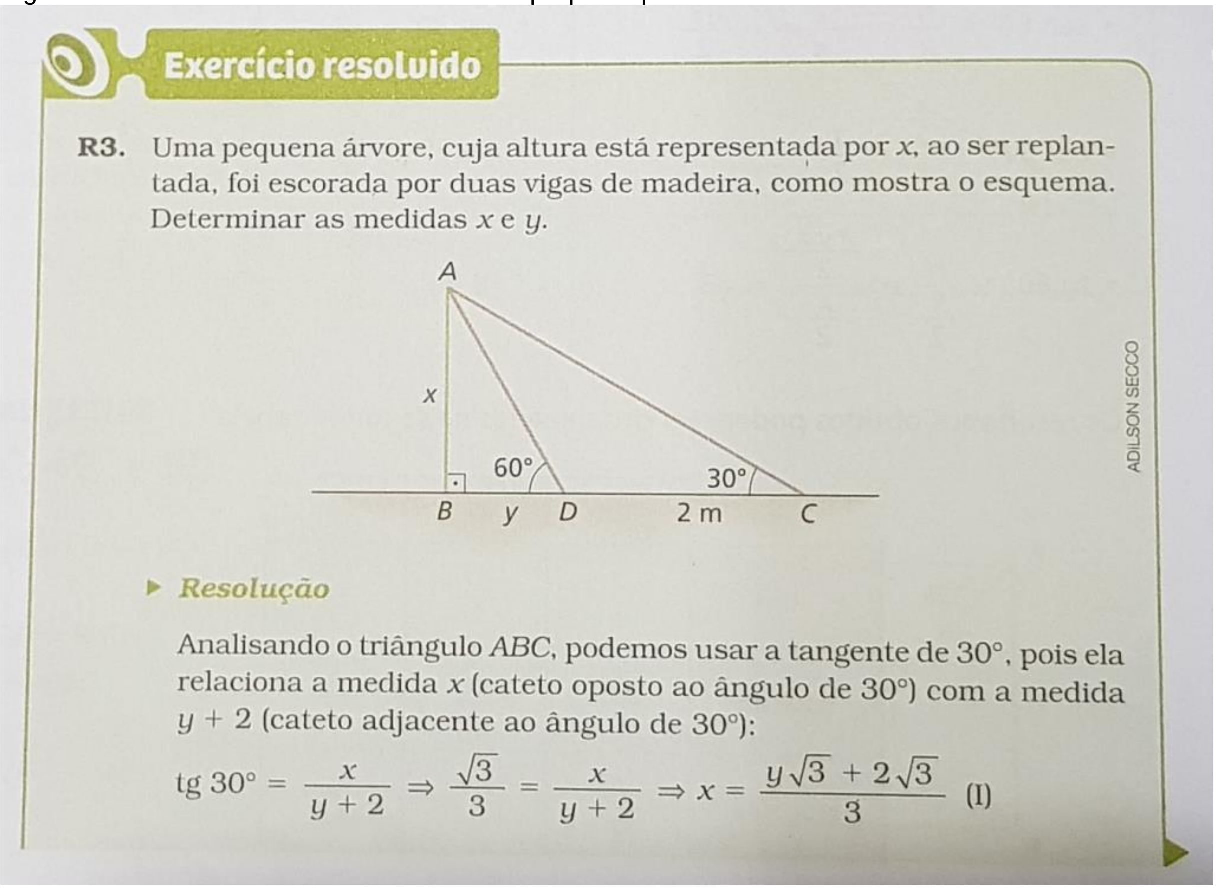
23. Um observador está em uma das margens do rio Tietê na região de Piracicaba, SP. Desse lugar, ele vê bem à sua frente uma pedra na outra margem. Depois de percorrer 35 m pela beira do rio, ele avista a mesma pedra sob um ângulo de 55°. Qual é, nesse local, a largura do rio Tietê? $\simeq$ 50 m

Fonte: Leonardo (2013, p. 270-271).

A presença dessas tarefas na ordem proposta pelo livro indica-nos que a técnica de solução de EP23 foi apresentada em ER7. Após esse exercício resolvido o livro propõe um bloco de tarefas, iniciando no EP19 a EP 27. Aquilo que poderia ser um momento de elaboração, de construção da técnica, passa a ser um momento de repetição da técnica que foi apresentada.

As observações das aulas não revelaram que a distância entre margens de um rio é uma temática abordada em topografia, portanto não temos como fazer reflexões a respeito dessa tarefa T_4 ser adequada para uma realidade profissional. Entretanto, identificamos no livro tarefas que a topografia observada nas aulas se dedicou a responder, por exemplo, a determinação da altura de uma árvore ou uma edificação, tratadas em ER3, EP8 e EC5.

Figura 58 – Cálculo da altura de uma árvore proposta pelo ensino da matemática



Exercício resolvido

R3. Uma pequena árvore, cuja altura está representada por x, ao ser replantada, foi escorada por duas vigas de madeira, como mostra o esquema. Determinar as medidas x e y.

▸ **Resolução**

Analisando o triângulo ABC, podemos usar a tangente de 30°, pois ela relaciona a medida x (cateto oposto ao ângulo de 30°) com a medida $y + 2$ (cateto adjacente ao ângulo de 30°):

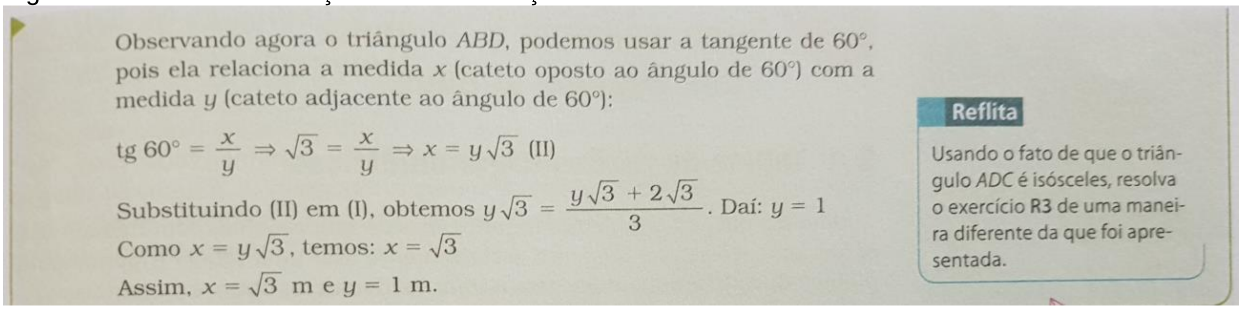
$$\text{tg } 30° = \frac{x}{y+2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{y+2} \Rightarrow x = \frac{y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3} \quad \text{(I)}$$

Fonte: Leonardo (2013, p. 264).

No capítulo anterior, vimos o modo por meio do qual a topografia resolveu uma tarefa desse tipo. Sua resolução foi utilizando instrumentos de medida que fornecem ao operador as mesmas informações desse exercício resolvido: ângulos verticais e distância entre dois pontos. Entretanto, a técnica explorada no *ensino de topografia* é diferente da apresentada pelo livro.

Trazemos um aspecto pouco discutido nas análises até então, e que no caso da trigonometria assume certa importância: como se determinam os dados da questão? No caso do ER3, partindo da suposição dos dados informados: como se chegou aos 2 metros? Se for por meio da trena, então y seria calculado diretamente. Como se determinaram os ângulos verticais de 30º e 60º? Havendo algum instrumento que faça essa determinação, existe possibilidade de outras técnicas. Trazemos o final da resolução do exercício resolvido na imagem a seguir:

Figura 59 – Final da resolução da determinação da altura de uma árvore



Observando agora o triângulo ABD, podemos usar a tangente de 60°, pois ela relaciona a medida x (cateto oposto ao ângulo de 60°) com a medida y (cateto adjacente ao ângulo de 60°):

$$\text{tg } 60° = \frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y\sqrt{3} \text{ (II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos $y\sqrt{3} = \dfrac{y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3}$. Daí: $y = 1$

Como $x = y\sqrt{3}$, temos: $x = \sqrt{3}$

Assim, $x = \sqrt{3}$ m e $y = 1$ m.

Reflita

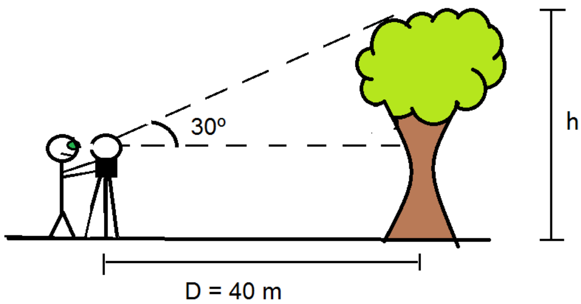
Usando o fato de que o triângulo *ADC* é isósceles, resolva o exercício **R3** de uma maneira diferente da que foi apresentada.

Fonte: Leonardo (2013, p. 265).

O resultado da medida é apresentado na forma de número irracional, outro aspecto que distancia as instituições, tanto das aulas de topografia quanto da própria tarefa respondida, porque x representa altura de um objeto, ou parte dela, e dificilmente se escora verticalmente algo pela sua extremidade.

Nas aulas de topografia, a técnica de determinação da altura de uma árvore (ou de uma construção), dadas: a distância entre o operador (ou observador) e a árvore; a abertura do ângulo entre a horizontal e a linha imaginária que parte do operador até o topo dessa árvore é diferente das técnicas exploradas nas aulas de matemática.

A técnica executada para resolver é comentada no trecho a seguir, em que o professor propõe uma situação na qual o aluno estaria de posse do clinômetro[52] e uma trena:



> **P**: Eu não sei se comentei com vocês nas aulas anteriores que, quando trabalho com tangente e não tenho a calculadora, se eu quiser medir qualquer altura de qualquer objeto, não tenho calculadora, só tenho instrumento que mede o ângulo, não tenho a tabela dos valores dos ângulos, nem de seno, cosseno e tangente. Não estou lembrado dos valores dos principais ângulos. Qual seria alternativa? Eu me aproximo da árvore e, à medida que eu vou me aproximando, o ângulo diminui ou aumenta?
> **Es:** Aumenta.
> **P:** Aumenta. Então, se eu chegar a um ângulo de 45º, qual é a tangente de 45°?
> **Es:** Comentários inaudíveis.

---

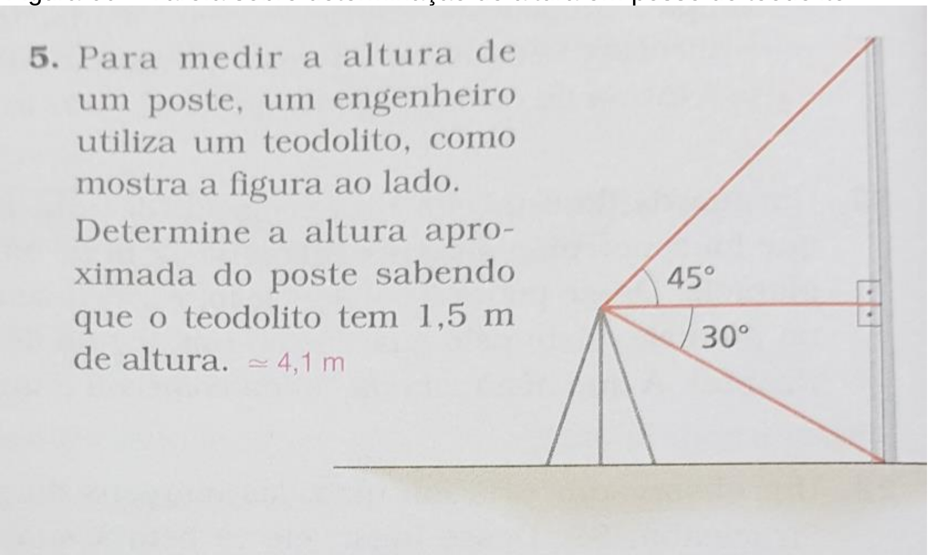
[52] É um instrumento que serve para medir ângulo vertical.

P: O seno de 45 é $\sqrt{2}/_{2}$; cosseno de 45 é $\sqrt{2}/_{2}$. Então, tangente de 45° é 1?
E: 1 só?
P: Sim, 1. Então, numa situação de campo que eu possa encontrar e não ter uma calculadora em mãos, não tenho nenhum equipamento, mas quero ter a leitura rápida de alguma altura. Eu me distancio, com o instrumento que mede ângulo, deixo em 45°, e é só medir essa distância [referindo-se a D]. Quando eu medir a distância, ela será igual a H maiúscula, com 45º. Por que vai ser igual? Porque, quando multiplicar pela tangente de 45º que é 1 [referindo-se ao trecho: $H = 40.tg\,45°$], qualquer número multiplicado por um é ele mesmo. Mais a altura do operador, então vai ser a distância que estiver da árvore que é igual à altura mais a altura do operador. (BARROS, 2018, APÊNDICE C, linhas 154 a 165).

O fato de o professor comentar que não estaria de posse de uma calculadora indica que possui poucas informações sobre os valores das razões trigonométricas dos ângulos. Podemos refletir que essa presença de poucos dados é próxima do que o aluno dispõe ao responder EP8.

Outro exemplo no qual podemos refletir sobre a construção dos dados está em EC5, apresentado na figura seguinte. A técnica preconizada exige a aplicação da fórmula da tangente primeiro para o ângulo de 30º e depois 45º.

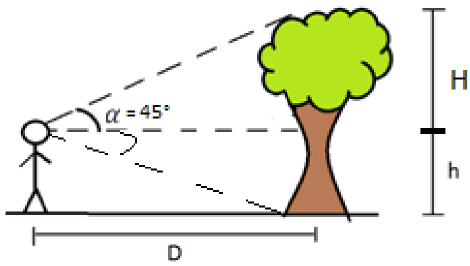
Figura 60 – Tarefa sobre determinação de altura em posse do teodolito



Fonte: Leonardo (2018, p. 272).

Conforme observado e comentado nas aulas de topografia, o teodolito não trabalha sozinho, mas sempre em conjunto, seja com a mira falante, seja com o prisma óptico nos casos dos modelos digitais.

P: Se eu não quisesse medir esta altura [referindo ao h], teria que mirar lá para baixo, descendo, mas só que iria dar um ângulo quebrado que sem calculadora não iria me atender.
Obs: O professor faz nova marcação na figura:



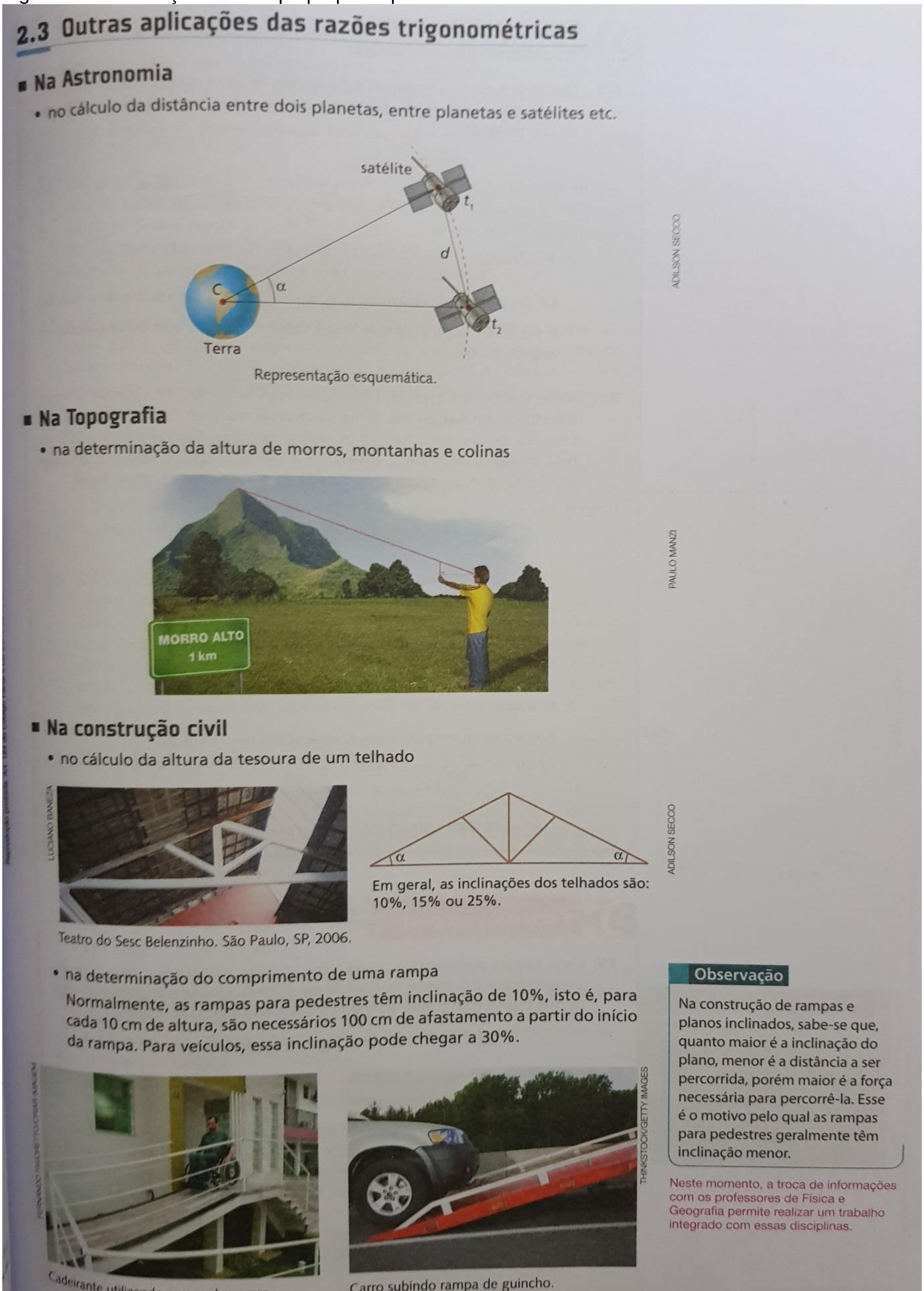
P: Daria muito mais trabalho, então é melhor você deixar em 45º e medir a distância D. Distância mais a minha altura é igual à altura do objeto. (BARROS, 2018, APÊNDICE B, linhas: 674 a 680).

Embora o tipo de tarefa seja o mesmo que encontramos na topografia, a presença dos instrumentos e seu uso na construção dos dados permite explorar técnicas diferentes daquelas estudadas na matemática do ensino regular. Havendo a entrada dos instrumentos nos momentos de estudo. De certo modo, há uma sinalização para aspectos que sustentam nossa segunda hipótese.

Diante do exposto, observamos que o *ensino da matemática* escolar não consegue sustentar a razão de ser dos objetos estudados, no caso a importância da trigonometria para o cálculo das distâncias inacessíveis. Embora observado que tanto os referenciais curriculares quanto as páginas iniciais do livro mencionam tal importância.

Outro exemplo agora na construção civil se faz presente no início da subseção “2.3 Outras aplicações das razões trigonométricas”, mais especificamente para a determinação da inclinação de uma rampa. Na figura a seguir, temos um trecho da página inicial dessa subseção:

Figura 61 – Inclinação da Rampa proposta pelo ensino de matemática



2.3 Outras aplicações das razões trigonométricas

Na Astronomia

- no cálculo da distância entre dois planetas, entre planetas e satélites etc.

Representação esquemática.

Na Topografia

- na determinação da altura de morros, montanhas e colinas

Na construção civil

- no cálculo da altura da tesoura de um telhado

Teatro do Sesc Belenzinho. São Paulo, SP, 2006.

Em geral, as inclinações dos telhados são: 10%, 15% ou 25%.

- na determinação do comprimento de uma rampa

Normalmente, as rampas para pedestres têm inclinação de 10%, isto é, para cada 10 cm de altura, são necessários 100 cm de afastamento a partir do início da rampa. Para veículos, essa inclinação pode chegar a 30%.

Observação

Na construção de rampas e planos inclinados, sabe-se que, quanto maior é a inclinação do plano, menor é a distância a ser percorrida, porém maior é a força necessária para percorrê-la. Esse é o motivo pelo qual as rampas para pedestres geralmente têm inclinação menor.

Neste momento, a troca de informações com os professores de Física e Geografia permite realizar um trabalho integrado com essas disciplinas.

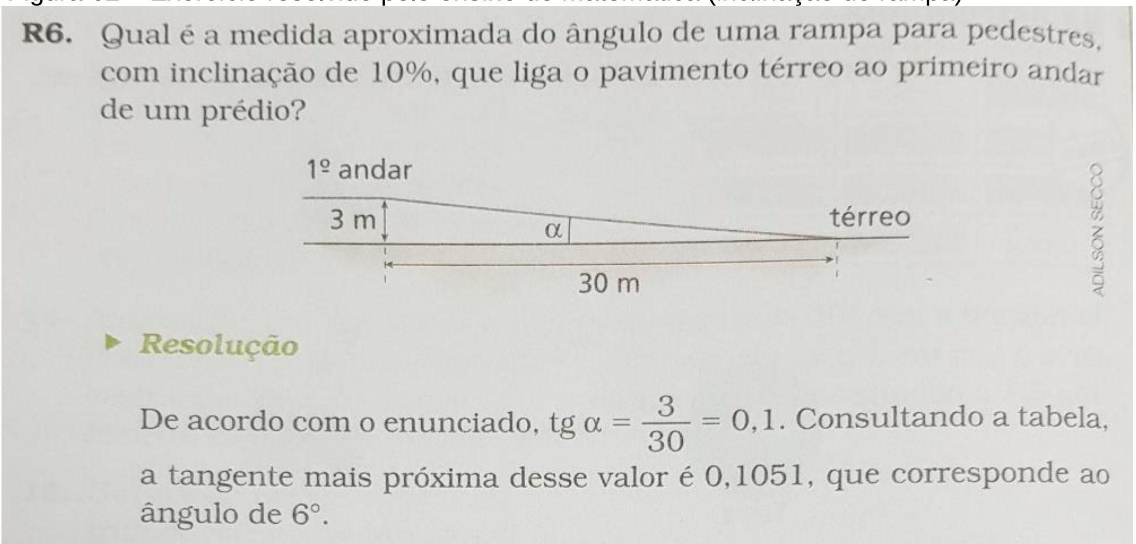
Cadeirante utilizando rampa de acesso.

Carro subindo rampa de guincho.

Fonte: Leonardo (2013, p. 269).

Nas páginas seguintes, identificamos quatro exercícios: ER6, EP19, EP21 e AA8, classificados como tarefas do tipo T_8: calcular a medida do ângulo, dadas as medidas de dois lados do triângulo. A informação poderia suscitar dúvida com relação ao afastamento. Ele seria um cateto horizontal ou a hipotenusa? O afastamento é o cateto.

Figura 62 – Exercício resolvido pelo ensino de matemática (inclinação de rampa)



R6. Qual é a medida aproximada do ângulo de uma rampa para pedestres, com inclinação de 10%, que liga o pavimento térreo ao primeiro andar de um prédio?

▸ **Resolução**

De acordo com o enunciado, $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{30} = 0{,}1$. Consultando a tabela, a tangente mais próxima desse valor é 0,1051, que corresponde ao ângulo de 6°.

Fonte: Leonardo (2013, p. 270).

Na realidade profissional da construção civil, o percentual de inclinação das rampas é normatizado pela Norma Brasileira, NBR 9050 da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Ela trata das especificações sobre acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. Sua primeira edição data de 2004, última atualização em 2015. Recorremos a ABNT NBR 9050 porque o livro faz referência a comprimentos de rampas para uso de pessoas cadeirantes.

Segundo essas normas, a inclinação (i) das rampas deve ser calculada por meio da expressão $i = \frac{h\,.100}{c}$, onde *h* é altura do desnível; *c* é o comprimento da projeção horizontal (afastamento mencionado no livro); *i* é informada em porcentagem.

> 6.6.2.1 As rampas devem ter inclinação de acordo com os limites estabelecidos na Tabela 6. Para inclinação entre 6,25 % e 8,33 %, é recomendado criar áreas de descanso (6.5.) nos patamares, a cada 50 m de percurso. Excetuam-se deste requisito as rampas citadas em 10.4 (plateia e palcos), 10.12 (piscinas) e 10.14 (praias).

Tabela 6 – Dimensionamento de rampas

Inclinação admissível em cada segmento de rampa *i* %	Desníveis máximos de cada segmento de rampa *h* m	Número máximo de segmentos de rampa
5,00 (1:20)	1,50	Sem limite
5,00 (1:20) < *i* ≤ 6,25 (1:16)	1,00	Sem limite
6,25 (1:16) < *i* ≤ 8,33 (1:12)	0,80	15

6.6.2.2 Em reformas, quando esgotadas as possibilidades de soluções que atendam integralmente à Tabela 6, podem ser utilizadas inclinações superiores a 8,33 % (1:12) até 12,5 % (1:8), conforme Tabela 7.

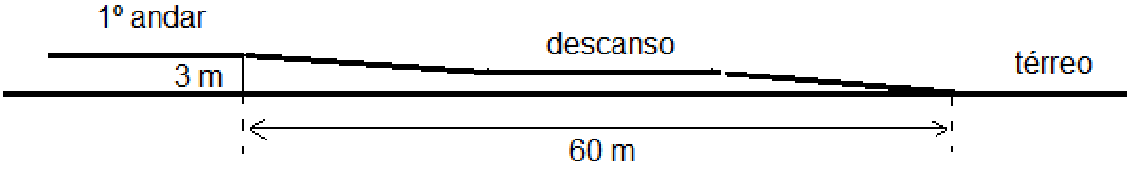
Tabela 7 – Dimensionamento de rampas para situações excepcionais

Inclinação admissível em cada segmento de rampa *i* %	Desníveis máximos de cada segmento de rampa *h* m	Número máximo de segmentos de rampa
8,33 (1:12) ≤ *i* < 10,00 (1:10)	0,20	4
10,00 (1:10) ≤ *i* ≤ 12,5 (1:8)	0,075	1

Fonte: ABNT 9050, 2015, p. 59.

Considerando um triângulo retângulo cuja hipotenusa é a rampa em vista lateral, a inclinação é a tangente obtida pela razão entre a altura do desnível (cateto oposto) e o comprimento da projeção horizontal (cateto adjacente). A inclinação de 10%, ou numericamente 0,1, corresponde à tangente do ângulo de 6º, conforme ER6. Aplicando os valores da Tabela 6 nesse exercício, a altura de desnível 3m ultrapassa o máximo permitido, que seria de 1,5m. Obedecendo à inclinação de 5% (1:20), a projeção horizontal terá o dobro do comprimento do que foi informado em ER6, passando ao menos para 60m, e, por consequência, o percurso da rampa (hipotenusa) terá mais de 50m, havendo necessidade de áreas de descanso. Assim, a vista lateral da rampa será melhor representada pela figura a seguir:

Figura 63 – Resolução do ER6 pela ABNT NBR 9050



Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Note que os valores estabelecidos pela ABNT NBR 9050 variam de acordo com o desnível, sendo o percentual de 10% aceito para desnível máximo de 7,5 cm, para situações excepcionais. Na situação presente, em EP19, o livro menciona uma rampa pneumática, como um elevador mecânico. Entretanto, nos exercícios EP21 e AA8, retoma-se a noção de inclinação de rampas para cadeirantes.

Nossas reflexões indicam certo descompasso entre o ensino da matemática e o campo profissional. Mais especificamente, o modo que o ensino da matemática escolar afirma que os saberes são aplicados nas diversas áreas profissionais mencionadas não condiz com a real aplicação desses saberes matemáticos por tais campos profissionais.

Esse descompasso poderá ser mais evidente quando se trata da realidade de curso da formação técnica integrada ao ensino médio, porque temos duas instituições que coabitam dentre de outra, no caso o *ensino de topografia* e o *ensino de matemática*, ambas num curso de EPTNM. A necessidade de uma gestão dessa coabitação nos níveis superiores da escala de codeterminação, ao menos nos níveis pedagogia e escola, é mais evidente nesse contexto do que no ensino regular. Os dados da pesquisa trazem indícios de que essa gestão não está se fazendo, ou está se fazendo de maneira inapropriada.

Nesta seção, discutimos o descompasso presente nos níveis inferiores da escala de codeterminação. Revelado do seguinte modo: para o mesmo tipo de tarefa, surgem técnicas diferentes. Nossas observações apontam que, ao trazer a escala de níveis, verifica-se que a falha não está apenas nos níveis inferiores. Ela vem de determinações, escolhas, condições e restrições de níveis superiores de codeterminação, no nível da escola, da pedagogia. Portanto, isso se coloca como um problema para tais níveis?

Na busca por um caminho para amenizar o descompasso evidenciado até então, podemos refletir sobre o papel da Noosfera nos cursos da Educação Profissional Técnica de Nível Médio nessa compatibilização entre o currículo do ensino regular e o currículo da formação técnica.

A Noosfera é responsável pela escolha dos saberes que terão *status* de saber a ensinar, e os documentos analisados neste capítulo são exemplos de produção de parte dessa esfera plural.

8.3 SÍNTESE

Nossas análises nos níveis superiores de codeterminação indicam que os cursos da EPTNM são regulamentados por documentos diferentes daqueles do ensino regular. Atualmente, no nível *escola*, existe proposta de modificação do ensino médio brasileiro, mas nosso direcionamento foi diante da legislação vigente à época da pesquisa. Em Brasil (2008) são estabelecidas condições e restrições para oferta de curso da EPTNM integrado ao ensino médio, provocando a proposta do novo plano de curso. Essa proposição permite a atuação dos professores que atuam em sala de aula agora como parcela da Noosfera.

A presença de matemática e topografia na lista de componentes curriculares é o primeiro indício dessa atuação. A localização e carga horária desses componentes são outros indicativos sinalizados por essa parte da Noosfera. Entretanto, o descompasso observado nesse capítulo evidencia que a atuação não se deve limitar à elaboração de proposta de curso técnico. Assim, lançamos o seguinte questionamento: quais são as margens de atuação que essa parcela Noosfera tem, no momento que o currículo do ensino profissionalizante deve andar em paralelo com o currículo do ensino médio?

Na realidade institucional, existem currículos que andam em paralelo: formação técnica, formação técnica integrada ao ensino médio e apenas o ensino médio. A necessidade da existência de correlação entre esses currículos é o caminho para a resposta: existência de maior diálogo entre o corpo docente, pois, conforme mencionamos no capítulo 2, em certa medida, o professor representa o modo de fazer e pensar próprios do respectivo componente curricular. Ele pode ser visto como representante, mandatário de uma instituição. Lembramos que, na entrevista com o professor Eduardo, ele cita que a trigonometria e geometria são utilizadas nas aulas de topografia.

Antes da implementação do curso na modalidade integrada, a escola ofereceu por muitos anos o curso de ensino médio e os cursos técnicos. Essa oferta de cursos separados não exige a priori um diálogo entre os professores da formação geral e aqueles da formação técnica. Nossa pesquisa indica que não basta juntar o curso técnico e o ensino médio para construir uma proposta eficiente de curso técnico integrado ao ensino médio.

Nas aulas observadas, chamou nossa atenção, dentre outros aspectos, o fato de os alunos desconhecerem o manuseio e a leitura por meio de trena e de transferidor. Esse desconhecimento foi tratado como dificuldade quando discutimos o equipamento praxeológico dos alunos. Embora o manuseio de instrumentos esteja preconizado nos documentos de orientação desde os anos iniciais de escolaridade, as observações das aulas de topografia reforçam uma possível ausência da utilização desses instrumentos nas aulas de matemática do ensino fundamental desses estudantes.

Identificamos que os alunos não lembraram que as medidas 3, 4 e 5 são de um triângulo retângulo, bem como não recordavam dos valores das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente do ângulo de 45°, saberes matemáticos estudados nos anos finais do ensino fundamental.

O professor indicou aos alunos que determinassem a tangente do ângulo de 30º por meio da calculadora científica, disponível nos smartphones, algo que não foi comentado, e por isso fazemos uma observação de que nas calculadoras científicas dos smartphones, dependendo do modelo de aparelho, as medidas dos ângulos são informadas nas duas unidades: graus e radiano. Assim, são obtidos os valores das razões trigonométricas. Lembramos que o livro didático adotado discute e indica o uso da calculadora para determinação de tais valores.

Na aula com uso da planta topográfica, observamos dificuldades dos alunos em situações de conversão entre unidades de comprimento inclusive naquela preconizada pelos documentos oficiais: conversão de metro para centímetros. Identificamos em algumas falas dos alunos a lembrança da conversão de metros para milímetros. Observou-se nas aulas práticas a dificuldade na leitura da mira falante por meio da lente do teodolito.

Um aspecto importante dessas aulas foi a forma de surgimento dos objetos matemáticos, mais especificamente, as razões trigonométricas foram trazidas como saberes necessários para responder tarefas que a topografia se destina a estudar.

Nossas análises nos fazem refletir sobre: diante da margem de negociação possível nos níveis superiores da escala de codeterminação, quais tarefas podem ser propostas aos alunos? E como seriam apresentadas?

Portanto, buscaremos refletir sobre possibilidades de caminhos que respondam a tais questionamentos e discutiremos no capítulo seguinte a elaboração e aplicação de possíveis tarefas. Não pretendemos exaurir esse debate, mas sim indicar alternativas à realidade institucional observada até então.

9 O ESQUEMA HERBARTIANO

Chevallard (2009) considera a didática como a ciência das *conditions* e *contraintes*[53] da difusão social das praxeologias. Restrições são condições não modificáveis num dado período de tempo. Considerando certa instância U, pessoal ou institucional, as condições que U não poderá modificar num certo período são as restrições, enquanto aquelas modificáveis serão simplesmente chamadas de condições, evitando, assim, o uso da expressão “condição modificável”.

> [...] as condições que são o objeto de estudo do pesquisador em didática não podem ser enumeradas *a priori*: sua descoberta progressiva e a compreensão do seu papel na difusão desta ou daquela praxeologia $\wp$ são objetos permanentes da pesquisa em didática. (CHEVALLARD, 2009, p.12, tradução nossa)[54].

Discutimos as condições e restrições sofridas pelas praxeologias mistas no âmbito do componente curricular topografia do curso da EPTNM, observando o uso de saberes matemáticos.

Utilizamos a teoria antropológica do didático (TAD) como referencial teórico, para investigar a vida de saberes matemáticos na educação profissional técnica de nível médio, mais especificamente no estudo da topografia, num curso técnico em Agropecuária. Diante da realidade observada, neste capítulo discutiremos possíveis alternativas, com base na perspectiva da TAD.

Dado um sistema didático $S(X\ ;\ Y\ ;\ \heartsuit)$, X representa a instância estudantil, Y é aquele que auxilia o estudo (o professor) e ♥ a obra estudada.

> Em primeiro lugar, deve haver o conceito de obra. Esta palavra não é usada com carga axiológica: refere-se a um “objeto” qualquer considerado como o resultado da atividade antrópica para uma finalidade específica (que pode ser desconhecida), isto é, o produto da ação humana *finalizada*. (CHEVALLARD, 2009, p. 16)[55].

As obras discutidas pela TAD são de dois tipos: as questões Q e as suas respostas R que serão as entidades praxeológicas $\wp$. Assim, pode-se lançar alguns

---

[53] Optamos por traduzir como: condições e restrições.

[54] “Les conditions qui sont l’objet d’étude de la didactique ne peuvent être énumérées a priori : leur découverte progressive et la compréhension de leur rôle dans la diffusion de telle ou telle entité praxéologique sont l’objectif permanent de la recherche en didactique”.

[55] Original do francês: “Tout d’abord doit exister la notion d’*oeuvre*. Ce mot est dépourvu ici de charge axiologique : il désigne un ‘objet’ quelconque regardé comme le fruit d’une activité anthropique visant un but déterminé (qui peut être inconnu), c’est-à-dire le produit d’une action humaine *finalisée*”.

questionamentos iniciais: Quem é a instituição I, mandante do sistema $S(X ; Y ; ♥)$? Quem é X? Quem é Y? Quem são as obras ♥?

Os capítulos anteriores buscaram caracterizar a instituição I, representante da educação profissional técnica de nível médio, no âmbito da rede federal de ensino brasileiro. Trouxemos um panorama histórico das políticas públicas que influenciaram os perfis de formação da educação básica e ensino profissionalizante, bem como a legislação atual que fornece condições e restrições para os cursos ofertados pela instituição. Houve a necessidade de maior caracterização do professor de topografia e observação das aulas. Por meio dessas etapas da pesquisa, apresentamos respostas parciais para as questões do parágrafo anterior.

Realizamos entrevista com a instância Y, o professor, na qual discutimos, dentre outros aspectos, o uso de saberes matemáticos no curso de topografia. Assim, pudemos ter indícios das questões Q e das entidades praxeológicas $\wp$ presentes. As respostas foram enriquecidas com a análise do capítulo anterior.

Retomando o sistema didático apresentado mais acima, $S(X ; Y ; ♥)$, considerando a atividade de estudar a obra ♥, mais especificamente estudar uma entidade praxeológica $\wp$, estudar certas questões Q relativas a $\wp$, sua estrutura, funcionamento, gênese etc.. Chevallard (2009) afirma que numa pesquisa, ao se investigar a ideia de estudar uma praxeologia $\wp$ por meio de uma disciplina escolar, deve-se levar em consideração o conjunto de condições e restrições presentes.

Chevallard (2009) chama atenção para duas problemáticas: a primeira é chamada problemática de base, enquanto a segunda de problemática possibilista.

> Sejam dadas certas restrições sobre a instituição ou a pessoa, sob quais conjuntos de condições esta instituição ou esta pessoa poderia integrar ao seu equipamento praxeológico tais entidades praxeológicas designadas?[56]
> [...]
> Seja dado um certo conjunto de condições e restrições aos quais tal instituição ou tal pessoa está submissa, qual (is) Sistemas Praxeológicos é possível que esta instituição ou esta pessoa acesse?[57] (CHEVALLARD, 2009, p. 17; 18, tradução nossa).

Outro modo de representar essas problemáticas é por meio da notação: $\partial(K_0,$

[56] Original em francês: “Étant donné certaines contraintes pesant sur telle institution ou telle personne, sous quells ensembles de conditions cette institution ou cette personne pourrait-elle intégrer à son équipement praxéologique telle entité praxéologique désigné?”.

[57] “La problématique *possibiliste*, de son côté, peut s’exprimer ainsi: Étant donné un certain ensemble de conditions et de contraintes auxquelles telle institution ou telle personne est soumise, à quel systèmes praxéologiques est-il possible que cette institution ou cette personne accède?”.

C, $\wp_0$, U_0) para indicar sob as restrições K_0 a instância pessoal U_0 "aprende" a entidade praxeológica $\wp_0$ estando reunidas as condições C. A problemática de base questiona o conjunto: $\{ C / \partial(K_0, C, \wp_0, U_0)\}$, enquanto a segunda, o conjunto: $\{\wp_0 / \partial(K_0, C, \wp_0, U_0)\}$.

> É geralmente apropriado criar as condições C para poder observar os efeitos: observa-se o conjunto Ĉ de condições efetivamente criadas, em seguida, examina se tem $\wp_0 \in \{ \wp / \partial(K_0, \hat{C}, \wp, U_0) \}$. Isto é o que o pesquisador deverá observar, não mais os sistemas didáticos "livres" (em relação a ele), mas os sistemas didáticos que deliberadamente terá "perturbações" intencionalmente "criadas", mesmo que geralmente esta perturbação ou esta criação seja por intermédio de Y (quando se tem poder suficiente). (CHEVALLARD, 2009, p. 19, tradução nossa)[58].

Existem distinções entre os sistemas didáticos $S(X ; Y ; \wp)$ e $S(X ; Y; Q)$. O primeiro é um estudo de uma praxeologia dada, ou seja, encontrar o conjunto de condições C que podem ser criadas amplamente por Y, as quais possibilitam que X integre $\wp$ ao seu equipamento praxeológico. Nesse cenário de estudo, tem-se um projeto Π que, para ser concebido ou realizado, impõe à classe (X ; Y) o estudo de uma questão $Q_\wp$ que provocará o encontro da classe com $\wp$.

No segundo caso, o sistema produz a resposta sob determinadas condições e restrições. Não existe uma resposta universal, mas sim resposta(s) a um cenário didático de funcionamento da classe, sob quais condições a produção da(s) resposta(s) responde a quais restrições. Chevallard (2009) denomina de esquema herbartiano reduzido, representando-o assim: $S(X ; Y; Q) \hookrightarrow R^{\heartsuit}$.

Chevallard (2009) afirma que a flecha indica a produção de uma resposta $R^{\heartsuit}$ devido ao estudo de uma questão Q. Essa elaboração de $R^{\heartsuit}$ supõe uma ferramenta de estudo chamada de Meio didático M. Assim, tem-se o esquema herbartiano semidesenvolvido: $[S(X ; Y; Q) \Rightarrow M\ ] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$. Esse meio é composto pelas diferentes respostas R_n^{Δ} trazidas num momento de estudo e das obras O_m existentes, $M = \{R_1^{\Delta}, R_2^{\Delta}, \ldots, R_n^{\Delta}, O_{n+1}, \ldots, O_m\}$.

A elaboração desse meio M se articula de uma maneira complexa com a

---

[58] Original em francês: "[…] il convient généralement de créer les conditions C pour pouvoir en observer les effets : si l'on note Ĉ l'ensemble de conditions effectivement créées, on examinera alors si l'on a bien $\wp_0 \in \{ \wp / \partial(K_0, \hat{C}, \wp, U_0) \}$. C'est alors que le chercheur devra observer, non plus des systèmes didactiques 'libres' (par rapport à lui), mais des systèmes didactiques qu'il aura délibérément 'perturbés', voire largement 'créés', même si cette perturbation ou cette création passe généralement par l'intermédiaire de Y (lorsque celui-ci dispose de suffisamment de pouvoir)". (CHEVALLARD, 2009, p. 19).

elaboração da resposta R♥. O estudo do sistema *S*(*X* ; *Y*; Q) desenvolverá o meio M que irá desenvolver a resposta R♥ produzida a partir das outras respostas presentes no meio M, sendo a $\wp \subset \{M\} \cup$ R♥.

Diante dessas considerações, Chevallard (2009) apresenta o esquema herbatiano desenvolvido: [*S*(*X* ; *Y*; Q) ➦ $\{R_1^{\Delta}, R_2^{\Delta}, \ldots, R_n^{\Delta}, O_{n+1}, \ldots, O_m\}$] ➥ R♥.

Em continuidade a tais reflexões, Chevallard (2009) discute as noções de mesogênese, topogênese e cronogênese. A mesogênese é a fabricação do meio M. Primeiramente, deve-se pensar que M não está pronto, mas sim é construído pela classe com produções internas e externas à classe [X, Y]. Portanto, essa condição mesogenética está relacionada à topogênese, porque o professor y não é o único responsável pela construção do meio M. Deverá existir uma mudança no topos do aluno. Assim, a instância estudantil X poderá contribuir com respostas R_n^{Δ}. Chevallard (2009) comenta que essa dinâmica de trabalho do meio tem por efeito uma dilatação do tempo didático, aspecto relativo à cronogênese.

No que segue, vamos explorar a possibilidade de esboçar tarefas em ruptura com o modelo epistemológico dominante, nas quais a vida dos objetos matemáticos no âmbito do ensino de topografia preserve a razão de ser desses objetos e enriqueça o estudo de ambas as disciplinas.

No caso desta pesquisa, a alternativa proposta é que Y seja composto pelo pesquisador e pelo professor de topografia, juntos.

9.1 ATIVIDADES DE ESTUDO E PESQUISA PENSADAS

Diante das condições (modificáveis e não modificáveis) observadas e de possíveis negociações, margens de manobra no nível *disciplina*, foram esboçadas atividades de estudo e pesquisa. Enquanto pesquisador, iniciamos diálogo com o professor de topografia objetivando a proposição conjunta de atividades para os alunos. As reflexões seguintes apresentam elementos de diálogos que efetivamente realizamos com o professor.

Nessa elaboração, outras condições que não haviam sido discutidas foram elencadas, e a mais restritiva foi o fato de alguns componentes curriculares que os alunos não estudaram.

Por exemplo, nas aulas de topografia foi comentada situação de aquisição de motobomba para projetos de irrigação, mas o componente curricular de *irrigação e drenagem* será trabalhado em semestres posteriores. Propor atividade sobre uma execução de plantio e que necessitasse dos saberes discutidos em irrigação seria, na visão do professor, antecipar algo que eles viriam mais à frente no curso. E, na época da pesquisa, não tivemos contato com o professor de Irrigação.

Outro fator discutido foi que, nas situações da prática profissional, o técnico em agropecuária pode trabalhar num terreno com os pontos topográficos preestabelecidos ou numa porção de terra sem referência alguma, havendo a possibilidade de ter ou não a poligonal retangular demarcada. Esse tipo de poligonal é utilizado no plantio de diversas culturas.

Enquanto condições e restrições presentes nos terrenos, discutimos que poderíamos separá-los em dois grupos: planos e não planos, separação similar à ocorrida no curso de topografia: planimetria e altimetria. Diante dessas opções, a primeira atividade esboçada foi baseada num terreno plano, retangular com extensão menor que 50 metros. Recorremos à quadra poliesportiva da escola. Embora seja uma área construída, o professor achou interessante porque seu piso possui marcações poliesportivas. E, considerando uma possível situação de prática, é comum distribuir as poções do terreno para diferentes funcionalidades: plantio, reservatório de água, pequena construção para armazenar equipamentos e insumos etc.

A proposta seria então partir da seguinte demanda: **o colégio pretende contratar mão de obra para revitalizar parte da quadra, trocando algumas grades e pintura do piso. Apresente uma proposta de orçamento.**

Essa proposição direciona para outros questionamentos: Q_1: quais as dimensões do piso? Quais as dimensões relativas à altura da quadra? Q_2: essas perguntas são necessárias? Na realidade, a quadra não possui um projeto arquitetônico porque é muito antiga. Portanto, os alunos deverão realizar as medições necessárias. Devido à natureza do que será medido, a turma terá de se distribuir em grupo de pelo menos três pessoas.

Na busca por respostas para as questões Q_1: e Q_2, espera-se que os estudantes utilizem: instrumentos topográficos. Derivando outras perguntas: $Q_{1.1}$: quais instrumentos devo escolher para medir as dimensões do piso? e $Q_{2.1}$: quais instrumentos devo escolher para medir as alturas? O professor de topografia comentou que em algumas situações da prática, dependendo do tipo de cultura, pode ser necessária a instalação de telas.

O processo de medição será diferente porque temos distâncias acessíveis em $Q_{1.1}$ e inacessíveis em $Q_{2.1}$; e, por ser mais de uma medição, os grupos poderão dividir a tarefa, mas nossa expectativa é que cada grupo realize sua própria medida. Diante dessas medidas, poderíamos propor a elaboração de um desenho do piso e outro da lateral, provocando uma questão Q_3: como fazer um esboço do piso e da lateral da quadra? Essa questão que se apresenta sem muitas restrições assume uma dimensão técnica em $Q_{3.1}$: como fazer esses desenhos mantendo proporções entre as medidas encontradas?

Nesse momento, podem ser formuladas questões como $Q_{3.2}$: qual escala melhor representa um desenho do piso? $Q_{3.3}$: qual escala melhor representa a lateral? A escola São Bento não possui *software* que possibilite a construção dos desenhos, por exemplo, AutoCad. Portanto, há dois caminhos: o aluno vai em busca do software desse tipo ou desenha numa folha de papel A4. Essa segunda opção nos parece a mais provável, pois, conforme comentamos, os estudantes dispõem de muito pouco tempo extraclasse. Apesar de nossa expectativa ser de não inclusão de recursos digitais no meio com o qual os estudantes irão interagir para desenhar uma planta, caso haja discussão sobre software e opção do uso, é desejável criar condições para seguiremos tal caminho. A seguir, nossas reflexões são voltadas para a opção com uso do papel A4.

Escolhida a escala, têm-se outros questionamentos possíveis: $Q_{3.2.1}$: qual o valor no desenho (objeto gráfico) correspondente ao valor real de cada comprimento aferido no piso? $Q_{3.3.1}$: qual o valor no desenho correspondente ao valor real de cada altura aferida na lateral? $Q_{3.4}$: as dimensões presentes atendem às dimensões de uma quadra para prática de cada esporte identificado? Noutras palavras, a parte destinada à quadra de voleibol atende às dimensões legais? E para futsal? A resposta para tais questionamentos possibilita a entrada de documentos de especificação técnica. Caso as dimensões não atendam, podemos questionar: temos espaço no piso para propor com dimensões que atendam e como ficaria essa nova proposição de desenho?

No que se refere à proposta do desenho, por se tratar de um piso de quadra poliesportiva, têm-se diferentes cores. Desse modo, questionamentos sobre a determinação dessas áreas deverão aparecer, mesmo que a proposição seja a revitalização das cores que já estão presentes ou até novas propostas de cores e distribuição.

Nesses questionamentos, procuramos trazer um trabalho que tenha origem em ambiente fora da sala de aula, no caso a quadra, com continuidade na sala de aula, como simulação de uma espécie de escritório do profissional. Certamente, os questionamentos provocam algumas idas e vindas dos alunos entre a sala de aula e a quadra. Consideramos que, nessa atividade, a quadra passa a fazer parte do meio M, pois, embora não seja uma resposta, é um exemplo de obra[59] que possui algumas respostas. Na constituição desse conjunto de obras, estão os instrumentos topográficos, textos sobre: razões trigonométricas, cálculo de área etc.

Assim, temos a possibilidade de observar aspectos da mesogênese. A proposta de iniciar com uma medição direta utilizando trena, por mais que os alunos desconheçam tal instrumento, é com o objetivo de trazer uma atividade que o aluno perceba como possível de ser respondida por ele em grupo.

Nossa expectativa enquanto instância Y é que os grupos realizem as medidas das dimensões do piso. Pode ocorrer de não tomarem todas as medidas necessárias, e por isso é importante nossa condução nesse momento. Essa condução não é dizendo o que medir, mas os observando e questionando os alunos quando necessário. Outro aspecto é a altura da quadra enquanto distância inacessível, então a realização da atividade pode ser dividida, começando pelo piso e se dedicando a resolver os questionamentos destinados a ele.

Diante dessas reflexões de mesogênese e topogênese, começamos a pensar sobre a cronogênese. Propomos que quatro a seis sessões de 90 minutos seja um tempo suficiente para construir respostas que deem conta da proposta. Conforme observado anteriormente, as aulas de topografia são 12 dias de 4 horas[60]. Portanto, a margem de manobra existente seria dividir cada dia de aula em dois encontros com intervalos.

Atualmente, a possibilidade de uso da internet nos smarphones é uma forma de trazer obras, no sentido da TAD, que contribuam para a construção das respostas. Pensar entre quatro e seis sessões equivale a dois ou três dias de aula. O professor comenta que o aspecto da orientação do terreno pode ser explorado, sendo necessária a utilização da bússola para determinar tal orientação, discutirmos características dessa construção. Ele comenta que trabalhar aspectos relacionados

[59] Obra no sentido da TAD e não no sentido da engenharia.
[60] Nesse caso nos referimos a hora relógio e não hora-aula.

ao piso é uma forma de explorar topografia, mas, como a quadra se assemelha a um grande galpão, um aviário, exemplos de construções rurais, é importante que se trabalhe localização e aspectos referentes à luminosidade. Assim, pode abordar elementos de projetos de construção rural porque é de responsabilidade da topografia informar a orientação do terreno, o que determina localização e posicionamento de futuras instalações.

Outras atividades, com característica de construção de material permanente foram pensadas: **Q_0: Como construir um relógio do sol no novo terreno da escola?** Numa aula, o professor comenta que gostaria de propor tal construção. Nessa aula, foi identificado que os alunos não sabiam o que é um relógio de sol.

Diante dessa constatação, as primeiras perguntas derivadas são Q_1: o que é um relógio de sol? Para que serve? Provocando uma pesquisa na internet sobre essa questão. Assim, uma etapa seguinte pode ser das escolhas: Q_2: existe um modelo padrão? Q_3: qual o local que será instalado? Dessas questões derivam outras: Q_4: quais materiais podem ser utilizados?

A busca pelas respostas trazem outros critérios, tais como: preço, durabilidade. O professor menciona exemplos de locais que possuem esse tipo de relógio, o que pode ser motivo de pesquisa ou até de visitação.

Diante dessas respostas, outras surgem, Q_5: quais dimensões serão realizadas? Q_6: por ter relação com o Sol, faz diferença a época do ano que construo? Q_7: o(s) ângulo(s) de incidência do Sol muda(m) ao longo de um dia? E de um mês? E de um ano?

Dialogando com o professor, ele comenta que a construção desse relógio seria uma bela contribuição da classe para o colégio, tendo em vista a possibilidade da longa duração desse produto. Nossa expectativa é a mudança no topos do aluno provocada, inicialmente, pelo possível desconhecimento do que é um relógio de sol e pela oportunidade de contribuir para com o acervo histórico da escola.

A construção de respostas para as perguntas dessa atividade propicia uma grande abertura no meio M. Nessa situação, do ponto de vista da cronogênese, o professor pretenderia desenvolver uma parte dessa construção como algo paralelo ao andamento do componente curricular. Assim, identificamos uma situação de limitação presente no nível disciplina para as atividades a serem propostas. Essa situação pode ser vista segundo dois aspectos: embora as atividades tragam outros saberes, propor uma atividade que traga todos os saberes vivenciados em topografia é um desafio. Por outro lado, é importante que se tenham atividades que não se limitem apenas ao que é vivenciado em topografia.

Aspectos relacionados à cronogênese também foram discutidos na atividade seguinte, Q_0: **como construir uma maquete baseada na planta topográfica do novo terreno da escola?** Segundo o professor, esse seria outro exemplo de bela contribuição de uma classe para o acervo da escola: uma maquete que represente toda a extensão territorial que o colégio possui. As primeiras questões que derivam dessa proposta estão relacionadas à planta topográfica: escala, localização, posicionamento e limites do terreno.

Outras questões relacionadas às escolhas para construção da maquete: a escala será mantida? Quais materiais são adequados? Precisaremos tomar todas as curvas de nível? Aspectos relativos à mesogênese e à topogênese foram discutidos: como a turma faria a distribuição das ações dessa construção? Os materiais impactam no custo financeiro e, portanto, deverão ser negociados entre a turma. Haveria maquete única como resultado da construção coletiva ou os grupos elaborariam separadamente?

Aspectos da cronogênese foram pensados: conseguiríamos conduzir essa construção em sessões incorporadas à carga horária do componente curricular, ou seria uma atividade mais longa caminhando em paralelo com a topografia?

9.2 SÍNTESE

Neste capítulo, discutimos propostas de atividades de estudo e pesquisas pensadas a partir de diálogos com o professor de topografia, participante da pesquisa. Identificamos condições e restrições para possível implantação e execução. No nível *pedagogia*, a ausência de diálogo entre os professores das disciplinas matemática e topografia limita a implantação porque a matemática desconhece os saberes matemáticos utilizados pela topografia, que, por sua vez, desconhece outros aspectos sobre tais saberes, pois se limita a utilizar uma porção minimamente necessária.

Portanto, nossas reflexões apontam que uma primeira mudança para implantação será naquilo que se espera do professor, que não será mais o detentor e transmissor do saber, mas sim o condutor de um processo de estudo. E, nesse sentido, os diálogos foram muito positivos devido à natureza prática de um curso técnico. Propor três atividades e, por meio dos diálogos, descobrir que o professor de topografia vislumbra a possibilidade de realizar uma construção para o acervo da escola indica a sua disposição de mudar suas ações.

Entretanto, uma limitação está na lógica estrutural interna dos currículos. Existe um conjunto de saberes a serem ensinados, o que deve exigir mais de uma atividade. Portanto, o diálogo no nível *pedagogia* e *escola* deve se dar entre os professores com esse desejo mútuo de construir algo que não se limite ao componente curricular que leciona.

Outro fator que propicia mudança é uma reestruturação no organograma da escola, com a criação de coordenações específicas para os cursos. Atualmente, existe apenas um coordenador geral e as áreas. Por exemplo, o curso integrado tem particularidades diferentes do ensino médio e do técnico em agropecuária ofertado noutra modalidade. Assim, o curso integrado teria um representante previsto pelo organograma para reunir e discutir suas demandas específicas. Atualmente, as áreas se reúnem quando necessário.

Os resultados dos diálogos foram a proposição de três atividades. Outras ideias surgiram, muitas apoiadas no manejo de alguma cultura regional, por exemplo, executar o plantio de milho. E, consequentemente, outras condições e restrições são postas, por exemplo, no nível *escola*: o colégio possui recurso financeiro para aquisição dos insumos agrícolas necessários? Sabemos que há o manejo de algumas culturas na escola São Bento. A limitação orçamentária restringe a execução de atividades relacionadas à pecuária na escola, havendo visitações a empresas, pequenas fazendas em cidades circunvizinhas.

Entretanto, o novo terreno da escola surge como um local de possibilidade de diversas práticas, principalmente de cultivo, atendendo às particularidades que cada cultura exige. Nessa direção, observamos a execução de alguns plantios que possam ter início e fim num semestre letivo, por causa das férias escolares, e, como o colégio não possui regime de internato, não haveria alunos para realizar os manejos necessários.

Diante dessas reflexões, partimos para o último capítulo desta tese.

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi investigar a vida de saberes matemáticos no âmbito da educação profissional técnica de nível médio. Nossa problemática surge da experiência profissional e dos questionamentos dos colegas que lecionam componentes curriculares da formação técnica.

Realizamos uma pesquisa de natureza diagnóstica. Nossa inquietação inicial foi: **quais os saberes matemáticos mobilizados e como são vivenciados na formação técnica de nível médio?** A teoria antropológica do didático nos possibilitou amplas reflexões em torno desse questionamento.

Na construção da nossa problemática, trouxemos um breve histórico da educação profissional enquanto opção de percurso formativo no Brasil. Percebemos que, ao longo dessa construção histórica, a educação profissional se torna uma opção de formação, possibilitando que seu egresso seja candidato a qualquer curso do ensino superior.

Procuramos investigar duas hipóteses: **H1: o equipamento praxeológico matemático do aluno não é suficiente para resolver as tarefas que utilizam matemática nos componentes curriculares da formação profissional**; e **H2: no curso de EPTNM, para o mesmo tipo de tarefa existe grande desconexão (descompasso) entre as praxeologias pontuais estudadas nos componentes curriculares da formação técnica e as praxeologias pontuais estudadas em componentes curriculares da formação geral.**

No percurso metodológico, discutimos os motivos que nos conduziram a escolher a topografia estudada num curso técnico em agropecuária. Até então, pensávamos que nosso objeto matemático estaria predominantemente no *domínio* das grandezas e medidas. No Catálogo Nacional dos Cursos Técnicos (CNCT), a topografia é mencionada na formação do referido curso técnico. Identificamos que na escola São Bento existe disciplina intitulada topografia. Assim, após conversa com o professor, decidimos observar a maior quantidade de aulas possíveis, o que foi praticamente todo um curso de topografia.

Essas observações forneceram os resultados do estudo exploratório e redirecionaram nosso olhar. Identificamos vários saberes matemáticos vivenciados em topografia, o que possibilitou, dentro do âmbito da pesquisa, nossa segunda escolha, refletir sobre os objetos matemáticos: comprimento, abertura de ângulo, teorema de Pitágoras e razões trigonométricas.

O capítulo 4 trata desta fase, discutindo aspectos didáticos sobre os objetos matemáticos escolhidos. Observar as aulas de topografia, igualmente um antropólogo se insere numa comunidade, nos permitiu discutir com mais profundidade os questionamentos postos no inicio da pesquisa.

Diante da diversidade de saberes matemáticos vivenciados em topografia, sugerimos, como possibilidade de futura investigação, um enfoque na noção de escala, mais especificamente como algumas profissões utilizam a escala nos seus desenhos e plantas.

Outra escolha, não menos importante, foi a caracterização das relações institucionais por meio da análise das recomendações curriculares e do livro didático, temática discutida no capítulo 5. Utilizar a noção de praxeologia como ferramenta teórico-metodológica possibilitou identificar elementos das organizações matemáticas preconizadas em toda a educação básica brasileira. Mostramos, dentre outros aspectos, que o manuseio de instrumentos de medida é indicado desde anos iniciais de escolaridade. Na realidade do Brasil, no período em que essa pesquisa foi realizada, essas recomendações não eram obrigatórias. Algumas reflexões trazidas nos capítulos 4 e 5 mostram que, embora os Parâmetros Curriculares Nacionais façam pouca menção à trigonometria nos anos finais, vários livros didáticos a introduzem no último ano do ensino fundamental.

A trigonometria no triângulo retângulo foi o capítulo do livro adotado que analisamos. Inicialmente, discutimos as organizações matemáticas pontuais e, em seguida, as organizações didáticas, o que nos possibilitou ampliar a discussão, reconstruindo as organizações matemáticas globais. O capítulo 5 oportunizou darmos enfoque à trigonometria proposta pelo livro do 1º ano do ensino médio.

Durante a análise do livro, chamou-nos atenção os exercícios resolvidos, estando, em seguida, os exercícios propostos. Refletimos que nos exercícios resolvidos estão explicitamente as técnicas propostas para a resolução das tarefas. No estudo das razões trigonométricas, ocorre uma particularidade, três saberes estudados simultaneamente: as noções de seno, cosseno e tangente.

O topos do aluno é o papel, a atribuição dele quando realiza a tarefa t, utilizando determinada técnica τ. A noção de topos está muito relacionada à ideia de distribuição de responsabilidade. Por exemplo, o que está a cargo do aluno numa atividade? Portanto, sugerimos como investigações futuras que, ao analisar o livro didático, considere dois fatores: a constituição do topos do aluno; aprofundar a dialética entre os objetos ostensivos e os não ostensivos.

No capítulo 6, discutimos a noção de praxeologia pessoal utilizada como ferramenta para analisar os protocolos dos alunos diante de atividades que evocassem ora o teorema de Pitágoras, ora as razões trigonométricas. Diante do que foi observado nos capítulos 4, 5 e 6, os objetos matemáticos vivenciados na topografia, a caracterização das relações institucionais preconizadas e as respostas dos alunos, podemos dizer que nossa primeira tese foi comprovada: **o equipamento praxeológico matemático do aluno não é suficiente para resolver as tarefas que utilizam matemática nos componentes curriculares da formação profissional**.

Diante desses resultados, apresentamos o capítulo 7, a análise das organizações matemáticas estudadas em topografia. A escala de níveis de codeterminação possibilitou a ampliação da unidade de análise para elementos externos à sala de aula. O modelo praxeológico ampliado dá luz a algo comentado desde as primeiras reflexões sobre o quarteto praxeológico: o fato de o discurso tecnológico não estar apoiado apenas em argumentos teóricos. Nossa compreensão é que em componentes curriculares que não têm por finalidade ensinar objetos matemáticos, mas sim os utilizar para resolver as tarefas que se dedica a estudar, esse aspecto desses componentes curriculares permite iluminar, ou dar evidência, a dimensão prática do discurso tecnológico teórico.

Escolhemos alguns episódios para analisar o sistema didático observado: construção de poligonal retangular num terreno plano, cálculo de distâncias inacessíveis e determinação de desnível entre ponto de terreno. Devido à diversidade observada em topografia, sugerimos estudos futuros sobre outros aspectos, tais como: o processo de medição; as unidades de medida para comprimento; e a utilização de instrumentos de medida.

Após o estudo exploratório, um aspecto que surgiu, ou pelo menos ganhou força na nossa problemática, foi o manuseio de artefatos, tais como máquinas, instrumentos que são comuns nas práticas profissionais e devem estar presentes nos cursos de formação, abrindo para estudos futuros a perspectiva de **investigar a importância desses artefatos nas aulas que se dedicam a utilizar saberes matemáticos**.

Trazemos como exemplo a leitura da mira estadimétrica como uma etapa de uma técnica referente ao tipo de tarefa que o operador deverá executar. Assim, refletimos que a terminologia *atividade instrumentalizada* (AI) seja adequada para indicar uma ação realizada exclusivamente por meio do manuseio de instrumentos, mas que não fornece por si só uma solução para a tarefa. Nesses termos, AI_1: ler a mira estadimétrica por meio da lente do teodolito. A realização dessa atividade requer etapas: estacionar corretamente cada instrumento, ajustar o foco da lente, identificar onde os fios estadimétricos que são visualizados sobre a régua da mira e registrar esses valores.

Acreditamos na possibilidade de usar a TAD para olhar o manuseio dos instrumentos de medida. Nossas observações nos conduzem a uma possível existência de uma dialética entre as técnicas e os instrumentos. Esse é um indicativo para futuras pesquisas sobre possíveis diálogos entre a gênese instrumental de Rabardel e a TAD.

Em determinada etapa desta pesquisa, pensávamos que um caminho seria trazer para a discussão a dialética das mídias e meios. Entretanto, no caso das aulas de topografia, os instrumentos topográficos passam a compor o meio, sendo em alguns momentos a mídia que ajuda a fornecer respostas. E, noutros momentos, são objeto de estudo por si só. O teodolito é um exemplo, ele ajuda a fornecer determinadas distâncias e ângulos, mas também existem tarefas associadas a ele, tais como: *estacionar o teodolito* faz parte do conjunto de tarefas que associamos ao manuseio do instrumento e que não necessariamente está associada a uma medição de comprimento.

As observações das aulas mostraram outros elementos que fortaleceram nossa **tese**. Alguns trechos revelam elementos das relações pessoais dos alunos com os objetos matemáticos vivenciados. A diversidade de saberes matemáticos vivenciados e apresentados nos capítulos 4 e 7; a caracterização das relações institucionais presentes no capítulo 5; e elementos do equipamentos praxeológicos discutidos no capítulo 6 revelaram proximidades e distanciamentos entre as técnicas estudadas pelas instituições *ensino de matemática* e *ensino de topografia*. Delimitamos os saberes matemáticos e escolhemos alguns tipos de tarefas. Assim, o capítulo 8 busca fazer um cruzamento dessas reflexões, evidenciando nossa segunda tese: **no curso de EPTNM, para o mesmo tipo de tarefa existe grande desconexão (descompasso) entre as praxeologias pontuais estudadas nos**

componentes curriculares da formação técnica e as praxeologias pontuais estudadas em componentes curriculares da formação geral.

Os estudos que compuseram essa tese foram desenvolvidos de maneira imbricada, mas o tempo cronológico da parte empírica e teórica não é linear. Assim, há aspectos que poderiam ter sido trabalhados, mas a percepção do nosso interesse veio em um momento em que já não era possível revisitar materiais empíricos com outro olhar. Assim, propomos que outras pesquisas se debrucem em aspectos que poderiam ser aprofundados.

Nossas reflexões apontam que disciplinas intermediárias como a topografia mantêm a razão de ser do estudo de saberes matemáticos mais do que a disciplina matemática.

O conjunto de materiais empíricos analisados nos permitiu traçar características do modelo epistemológico dominante nessas instituições. Embora não dispuséssemos de tempo hábil para vivenciar situações didáticas ancoradas em um modelo epistemológico alternativo, esboçamos e discutimos no capítulo 9 possíveis atividades de estudo e pesquisa situadas em ruptura com relação a esse modelo dominante.

Percebemos a existência de uma margem de manobra negociável nos níveis superiores *pedagogia* e *escola*. A própria natureza do curso, ofertado na modalidade integrada, permite propostas codisciplinares. Diante do atual organograma da escola São Bento, com professores agrupados por áreas e um coordenador-geral, o início dessa mudança começa em duas frentes, a curto prazo, o diálogo entre o docentes dos componentes curriculares da dimensão técnica e da formação geral; e, a longo prazo, a proposição da mudança desse organograma, sendo que a atual gestão está convidando professores para compor uma comissão a ser constituída para essa finalidade.

Durante o desenvolvimento deste estudo, foi muito evidente a abordagem do ensino da topografia para as grandezas geométricas comprimento e ângulo. Embora não seja objetivo da disciplina topografia ensinar saberes matemáticas, mas sim utilizá-los, nossas reflexões sugerem dar maior visibilidade ao uso dos instrumentos de medidas, inclusive com pesquisas que discutam o filtro das grandezas em disciplinas intermediárias.

As propostas discutidas no capítulo 9 podem ser utilizadas em futuras pesquisas. Esse modo de apresentar o capítulo teve por objetivo apontar para futuras pesquisas com questionamentos que tragam mudanças nessa comunidade de estudo, também conhecida pela expressão: sala de aula.

REFERÊNCIAS

ARTAUD, Michèle; Introduction à l´approche écologique du didactique l´école des organisations mathématique et didactiques. França. 1997.Anais: **IXiéme ecole d´ete de didactique des mathématiques: La problematique ecologique.** Mimeo.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS **NBR9050**: Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. Disponível em: <http://www.ufpb.br/cia/contents/manuais/abnt-nbr9050-edicao-2015.pdf>. Acesso em: 15 set. 2018

BITTAR, Marilena; CHACHOUA, Hamid. Conferência 2: A Teoria Antropológica do Didático: Paradigmas, Avanços e Perspectivas. In: **Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática**, 2016, Bonito – Mato Grosso do Sul. Disponível em: <http://ladima.tuseon.com.br/uploads/file_manager/source/d7322ed717dedf1eb4e6e52a37ea7bcd/CONFER%C3%8ANCIA%202%20-%20PORTUGU%C3%8AS.pdf>. Acesso em: 31 ago. 2018

BORTOLI, Gladis; MARCHI, Miriam Ines. O "mundo da construção civil": uma abordagem da trigonometria com perspectiva na etnomatemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 15, n. 2, p. 271-288, maio/ago. 2013.

BRASIL. **Decreto-Lei nº 4.073, de 30 de janeiro de 1942, Lei Orgânica do Ensino Industrial**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto-lei/1937-1946/Del4073.htm> Acesso em: 31 ago. 2018

BRASIL. **Decreto-Lei nº 6.141, de 28 de dezembro de 1943, Lei Orgânica do Ensino Comercial**. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-6141-28-dezembro-1943-416183-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 31 ago. 2018

BRASIL. **Decreto-Lei nº 9.613, de 20 de agosto de 1946, Lei Orgânica do Ensino Agrícola**. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-9613-20-agosto-1946-453681-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 31 ago. 2018.

BRASIL. Lei nº 4024, de 20 de dezembro de 1961. Fixa as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**. Brasília, 20 dez. 1961. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L4024.htm>. Acesso em: 31 ago. 2018

BRASIL. Lei nº 9493/96, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**. Brasília, 20 dez. 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 31 ago. 2018

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Secretaria do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 31 ago. 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Secretaria do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 31 ago. 2018.

BRASIL, Resolução CEB n.º 4 de 8 de dezembro de 1999. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional de Nível Técnico. **CEB.** Brasília. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/rceb004_99.pdf>. Acesso em: 31 ago. 2108.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2002a. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 31 ago. 2018

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+: Ensino Médio** – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002b. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 31 ago. 2018

BRASIL, Decreto n° 5154, de 23 de julho de 2004. Regulamenta o § 2º do art. 36 e os arts. 39 a 41 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e dá outras providências. Brasília, DF, 23 de julho de 2004. **Diário Oficial da União.** Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2004/decreto/d5154.htm>. Acesso em: 31 jul. 2015

BRASIL. Resolução nº 1, de 3 de fevereiro de 2005, Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais definidas pelo Conselho Nacional de Educação para o Ensino Médio e para a Educação Profissional Técnica de nível médio às disposições do Decreto nº 5.154/2004. **CNE**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb001_05.pdf>. Acesso em: 20 abr. 2017.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o ensino médio; volume 2**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Secretaria de Educação Básica – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 31 ago. 208.

BRASIL. Lei n° 11.274, de 6 fev. 2006. Altera a redação dos arts. 29, 30, 32 e 87 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, dispondo sobre a duração de 9 (nove) anos para o ensino fundamental, com matrícula obrigatória a partir dos 6 (seis) anos de idade. Brasília, 06 de fevereiro de 2006. **Diário Oficial da União**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2004-2006/2006/Lei/L11274.htm>. Acesso em: 31 ago. 2018

BRASIL. **Educação Profissional Técnica de Nível Médio integrada ao ensino médio**: Documento base, Brasília. 2007. Disponível em:

<http://portal.mec.gov.br/setec/arquivos/pdf/documento_base.pdf>. Acesso em: 15 set. 2015.

BRASIL, Lei nº 11.741, de 16 de julho de 2008. Altera dispositivos da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para redimensionar, institucionalizar e integrar as ações da educação profissional técnica de nível médio, da educação de jovens e adultos e da educação profissional e tecnológica. **Diário Oficial da União.** Brasília, DF, 16 de julho de 2008. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2008/Lei/L11741.htm>. Acesso em: 31 jul. 2015.

BRASIL. **Catálogo Nacional dos Cursos Técnicos**. Edição 2012. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download &alias=41291-catalogo-nacional-versao2012-pdf-1&category_slug=maio-2016-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 31 ago. 2016.

BRASIL. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2015: matemática: ensino médio. – Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014. 108p. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/guia-do-livro-didatico/item/5940-guia-pnld-2015>. Acesso em: 31 de ago. 2018.

BRASIL. **Catálogo Nacional dos Cursos Técnicos**. 3. ed. Brasília, 2016. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=41271-cnct-3-edicao-pdf&category_slug=maio-2016-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 20 abr. 2017.

BRASIL. Lei 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. Altera as Leis nºˢ 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho – CLT, aprovada pelo Decreto-Lei nº 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei nº 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei nº 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. **Diário Oficial da União.** Brasília, DF, 16 de fevereiro de 2017. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2017/Lei/L13415.htm>. Acesso em: 31 ago. 2018

CHAACHOUA, Hamid. **La praxeologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH**. Étude de cas: la modélisation des connaissances des élèves. Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain. Université de Grenoble, 2010. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00922383>. Acesso em: 20 jun. 2018.

CHÁVEZ, Olda Nadinne Covián. **La formación matemática de futuros profesionales técnicos en construcción**. 2013. 309 f. Tese (Doctorado en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa) – Instituto Politécnico

Nacional, México, 2013. Disponível em: <http://www.researchgate.net/publication/271198372>. Acesso em: 20 jun. 2018

CHEVALLARD, Yves. **Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique**, 1994. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Ostensifs_et_non-ostensifs.pdf>. Acesso em: 31 ago. 2018.

________. **Analyse des pratiques enseignantes Et didactique des mathematiques: L'approche anthropologique**. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27>. Acesso em: 11 jun. 2013.

________. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico.** Traducción de Ricardo Barroso Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Con la colaboración de Teresa Fernández García, Catedrática de Francés, IES Martinéz Montañes, Sevilla. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

________. **Organiser l'etude. 1. Structures & Fonctions**, 2002a. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=52>. Acesso em: 11 jun. 2013.

________. **Organiser l'etude. 3. Ecologie & Regulation**, 2002b. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53>. Acesso em: 11 jun. 2013.

________. **Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathematiques**, 2002c. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=62>. Acesso em : 11 maio 2016.

________. **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique**, 2007. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf>. Acesso em: 11 jun. 2016.

________. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder**: Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD, 2009. disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=144>. Acesso em: 11 maio 2016.

________; ARTAUD, Michèle. **Fondements et méthodes de la recherche en didactique**, 2016. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/DDM_-_UE_35_-_YC_-_Lecons_2015-2016.pdf>. Acesso em: 31 jun. 2016.

CROSET, Marie-Caroline. **Modélisation des connaissances dês élèves au sein d'un logiciel d'algèbre**. Études des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte. 2010. 349 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) –

Université Joseph-Fourier -Grenoble I, 2009. França. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00444557>. Acesso em: 20 jun. 2018.

D'AMORE, Bruno; MARAZZANI, Inês. L'angolo, oggetto matematico e modello spontaneo. **La matematica e la sua didattica**, v. 22, n. 3, p. 285-329, 2008. Disponível em: <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/653%20%20angolo.pdf>. Acesso em: 17 fev. 2018.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas. SP: Editora da Unicamp, 2004

FERIGOLO, Claudia Suzana. **Contribuições da acentuação do pensamento no desenvolvimento e aprimoramento da habilidade em medir comprimentos e superfícies**. 2007. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemáticas) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007. Disponível em: <http://tede2.pucrs.br/tede2/handle/tede/3504>. Acesso em: 14 set. 2018

FREIDSON, Eliot. Para uma análise comparada das profissões: a institucionalização do discurso e do conhecimento formais. **Revista Brasileira de Ciências Sociais**, São Paulo, v. 11, n. 31, p. 141-145, 1996.

GARCIADIEGO, Alejandro R. El teorema de Pitágoras como paradigma de la enseñanza de la geometria plana: simplificar no siempre simplifica. **Revista Latinoamericana de Investigacion em Matemática Educativa**, México, v. 5, n. 3, p. 251-270, nov. 2002.

GONÇALVES, Harryson Julio Lessa. **A Educação Profissional e o Ensino de Matemática**: Conjunturas para uma abordagem interdisciplinar. 2012. 175 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontíficia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/10908/1/Harryson%20Junio%20Lessa%20Goncalves.pdf>. Acesso em: 31 ago. 2016.

KLEIN, Marjúnia Edita Zimmer; COSTA, Sayonara Salvador Cabral da. Investigando as concepções prévias dos alunos do segundo ano do ensino médio e seus desempenhos em alguns conceitos do campo conceitual da trigonometria. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 24, n. 38, p. 43-73, abr. 2011.

KUENZER, Acácia Zuneida. Da dualidade assumida à dualidade negada: o discurso da flexibilização justifica a inclusão excludente. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 28, n. 100, p. 1153-1178, out. 2007. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-73302007000300024&lng=en&nrm=isso>. Acesso em: 1 set. 2010.

KUNZE, Nádia Cuiabano. O surgimento da Rede Federal de Educação Profissional nos primórdios do regime republicano brasileiro. **Revista Brasileira da Educação Profissional e Tecnológica,** Brasília, v. 2, n. 2, p. 8-24, nov. 2009.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a matemática**. 2. ed.São Paulo: Moderna, 2013.

LIMA, Iranete Maria da Silva. **A construção do conceito de ângulo no terceiro ciclo do ensino fundamental**: um estudo de dificuldades de aprendizagem nos ambientes papel/lápis e cabri-géomètre. 2000. 177 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2000.

LIMA, Paulo Figueiredo; Carvalho, João Bosco Pitombeira Fernandes de. Geometria. In: CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de (Coord.). **Coleção Explorando o Ensino**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. v. 17. p. 135 -166.

LIMA, Paulo Figueiredo; Bellemain, Paula Moreira Baltar. In: CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de (Coord.). **Coleção Explorando o Ensino**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. v. 17. p. 167-200.

LOPES, Celi Espasandi. Os desafios e as perspectivas para a educação matemática no ensino médio. **Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPEd), 34**. Sessão Trabalho encomendado. Grupo de trabalho GT19 – Educação Matemática. Natal, 2011.

MARTINS, Adriana Paula; ABREU-BERNADES, Sueli Teresinha de. A oferta dos cursos técnicos integrados ao ensino médio nos institutos federais e a dualidade na educação brasileira. **Revista Encontro de Pesquisa em Educação**, Uberaba, v. 1, n. 1, p. 9-22, 2013.

MENEZES, Marcus Bessa de. **Praxeologia do professor e do aluno**: uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau. 2010. 178 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

MOURA, Dante Henrique. Educação básica e educação profissional e tecnológica: dualidade histórica e perspectivas de integração. **Holos**, Natal, ano 23, v. 2, p. 4-30, 2007. Disponível em: <www2.ifrn.edu.br>. Acesso em: 31 ago. 2018.

NACARATO, Adair Mendes; SANTOS, Renato Tim dos. Espaços alternativos de formação: quando graduandos em matemática e professores em exercício compartilham experiências sobre ensino de trigonometria. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 6, n. 2, p. 63-90, 2004. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4687>. Acesso em 14 set. 2018.

OLIVEIRA, Gerson Pastre de; FERNANDES, Ricardo Uchoa. O uso de tecnologias para ensino de trigonometria: estratégias pedagógicas para a construção significativa da aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 3, pp. 548-577, 2010.

RAMALHO, Luana Vieira **Trigonometria em livros didáticos do 9° ano do ensino**

fundamental. 2016. 88 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2016.

RODRIGUES, Carolina Soares; CARRIÃO, Airton. A mudança de registro semiótico na resolução de problemas contextualizados: o caso da trigonometria no triângulo retângulo. **Educação Matemática em Revista**. Rio Grande do Sul, ano 16, v. 1, n. 16, p. 6-21, 2015.

ROMO-VAZQUEZ, Avenilde**. La formation mathématique des futurs ingénieurs**. domain other. 2009. 501f. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2009. French. <tel-00470285> Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00470285>. Acesso em: 31 mar. 2015.

SANTOS, Márcia Nunes; VIANA, Marger da Conceição Ventura. Abordagem histórica para aprendizagem dos teoremas de Tales e Pitágoras. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2011, Recife. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**.

SILVA, Dilvana Maria Melo; NETO, Mario Oliveira Thomaz. Ensino e aprendizagem de razões trigonométricas no triângulo retângulo: um estudo sobre os conhecimentos de estudantes do ensino médio. In: Seminário internacional de pesquisa em educação matemática, 3, 2006, Águas de Lindóia – São Paulo. **Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.**

SBARAGLI, Silvia; SANTI, George. Teacher's choices as the cause of misconceptions in the learning of the concept of angle. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 4, p. 117-157, 2011. Disponível em: <http://www.pgsskroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/view/123/112>. Acesso em: 17 fev. 2018.

TEIXEIRA, Suely Gomes. **Concepções de alunos de pedagogia sobre os conceitos de comprimento e perímetro**. 2004. 221 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2004.

VEIGA, Luis Augusto Koenig; ZANETTI, Maria Aparecida Zehnpfennig Zanetti; FAGGION, Pedro Luis. **Fundamentos da Topografia**. Engenharia Cartográfica de Agrimensura. Curitiba. Universidade Federal do Paraná, 2012. Disponível em: <http://www.cartografica.ufpr.br/docs/topo2/apos_topo.pdf>. Acesso em: 31 ago. 2018.

APÊNDICE A – TRECHOS DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR DE TOPOGRAFIA

Entrevista realizada antes de iniciarmos nossas observações. Usamos as letras **P, I** para indicar professor e investigador respectivamente.

I: Bom dia. Gostaria de agradecer a disponibilidade da gente, de repente, começar essa possível parceria e se Deus quiser que seja bem-sucedida. Antes de tudo, gostaria que você se apresentasse, falasse um pouco da sua carreira profissional, formação, tempo de trabalho na escola.

P: Bom dia. Meu nome é E. B. O. A minha formação, pra começar na parte técnica, eu sou técnico agrícola formado em Aliança, numa escola municipal de Aliança. Vim pra Recife assim que terminei o técnico agrícola e me submeti ao vestibular em 87. Passei para Engenharia Florestal. Depois fui convidado, depois dos quatro anos, quatro anos e meio de Engenharia Florestal, fui convidado pra ser professor em Aliança na escola que eu fui aluno. E, com muita honra, eu fui lá, agradeci e participei por seis anos como professor. Nesse interstício, no último ano, houve concurso para o colégio como professor da disciplina que já lecionava em Aliança também, Topografia. E, em 99, submeti. Tinha uma vaga, eram três candidatos, mas graças a Deus eu fique em 1º colocado. E, oficialmente, no dia 14 de janeiro de 2000. E tô na escola desde dessa data, nesse tempo, aproveitando a oportunidade que me foi dada de ficar como profissional professor. A gente tem que procurar se capacitar, e fui fazer o mestrado em 2004 a 2006, na minha área de ciências florestais, sempre voltado alguma coisa na área de Topografia, no que a gente trabalhava lançamento de parcelas, espaçamento onde locar melhor as unidades a serem mostradas das plantas dentro da mata atlântica, e voltei para escola em 2006. Em 2010, novamente tentei outra pós-graduação, doutorado, submeti, passei e conclui, em 2014, graças a Deus. Agora estou de volta à escola. E sempre que posso ajudando nessa área de tecnologia rural. Especificamente, como eu sou professor titular de Topografia, da disciplina de Topografia, ainda também, de vez em quando, procuro conciliar, sou convidado para ajudar em outras disciplinas que já são um total – estava somando um dia desses –, além de Topografia, já lecionei um total de nove disciplinas dentro do curso agrícola. Dentro do curso técnico em Alimentos também, inclusive a disciplina de Segurança do Trabalho já lecionei também.

[...]

P: Estamos na quinta aula, de um total de 12 encontros, e já estamos levando o menino para campo, e já estamos aplicando algumas teorias, por exemplo: levantamento de perpendicular, então eu trabalho com ele, justamente falando do teorema de Pitágoras, onde a gente tem como achar o ângulo reto no campo simplesmente utilizando as medidas 3 e 4 para os catetos e 5 para hipotenusa. Eu explico a eles, relembro, brinco com eles: "estão lembrados '8ª série, 3ª unidade'", ou então quando falo em alguma regra de três, "estão lembrados, 6ª série, 2ª unidade, na segunda página do seu caderno, está lá", regra de três simples, porque são medi... são conversões que precisamos fazer, e como a leitura do instrumento que tem um acessório chamado mira falante, quando lemos por meio da luneta do teodolito ou do nível que tem na escola hoje, lemos em milímetro e, no final dos cálculos, transformamos para metro. Você não vai dizer que a propriedade tem 140.000 milímetros de distância, aí o proprietário vai te olhar e talvez até nem vai conhecer essa medida, mas você transforma para unidades de campo: metros, ou em termos de área transforma para hectare. Mas, independente disso, eu também apresento a eles algumas medidas agrárias, que são utilizadas no Brasil, tipo o que é uma tarefa, um alqueire mineiro, um alqueire paulista? O que é uma conta? O que é uma quadra? O que é um hectômetro? Hectômetro quadrado, decâmetro quadrado, até chegar em hectare que é o mais usual.

I: E todas essas unidades de medidas são usualmente trabalhadas e utilizadas nesse ramo da agropecuária?

P: São usualmente trabalhadas, isso mesmo. Porque inclusive nos equipamentos mais modernos acompanham software, e os softwares têm na opção de você dizer a resposta, qual a medida que você vai gerar, ele tem todas as opções: metro quadrado, hectômetro quadrado, decâmetro quadrado, até chegar em hectare.

I: Pelo que você falou, hoje em dia é indispensável o uso desses instrumentos?

P: É indispensável, até mesmo para facilitar o trabalho do homem no campo e para diminuir o tempo no campo. Porque, quanto mais moderno o aparelho for, principalmente esses de última geração que é o GPS geodésico, Estação Total, por exemplo, são instrumentos que estamos pleiteando junto à escola. Para montar primeiro o curso, temos que ter equipamentos,..., então, são instrumentos praticamente eletrônicos, a gente vai ao campo, coleta os dados. Esses dados temos como transferir para o computador com os software previamente instalados, e ele te dá: todo o perímetro da área, a distância entre dois pontos quaisquer da área que você mediu, a área em metros quadrados ou hectare já.

I: Certo. Mas, neste momento em que a escola não possui esses equipamentos, muitos desses cálculos os alunos fazem? Como está a situação atual na escola?

P: Isso. Porque, independente, inclusive, da gente ter o equipamento ou não, o importante desse curso, que chamamos a primeira parte da topografia: a que é a planimetria, e a segunda parte, topografia B, chamada de planimetria. Temos que ensinar, e aí eu brinco com os alunos, tem que ensinar a dirigir o fusquinha, depois dirige o carro automático. Então, tem que ensinar a ele por que é que, por exemplo, um distanciômetro que você olha por meio de um dispositivo moderno, o teodolito eletrônico, e você, com um prisma óptico, mais adiante onde está no outro ponto topográfico, você consegue visualizar o prisma, o aparelho dá um bip e já informa a distância. O que foi que aplicou ali? Aplicou a física, onde a velocidade da luz e o tempo gasto para ir e voltar, ele tem a distância já no visor. Mas eu prefiro ensinar, desde o início, como se calculou essa distância, então utilizamos muito a trigonometria, a geometria, muito baseado nessas, nessas tias.

I: Falando especificamente nos conteúdos, como você já antecipou: Trigonometria e Geometria. Os cálculos com as grandezas: comprimento, área; eles são muito importantes, eles têm uma carga horária maior dentro da disciplina de topografia? Como está distribuído?

P: Eu destino praticamente, em torno de 10% das 60 horas aulas, ou seja 6 aulas, ou praticamente dois dias de aulas, sempre revisando essa questão de transformação de escala, transformação de unidades, de grandezas, porque temos uma clientela bastante heterogênea. Então precisamos dar uma base, uma revisada na base, principalmente na matemática aonde eles vão começar a entender o porque de muitas coisas que de repente ele aprendeu no 1º grau, ou no 2º grau. Começa a entender, o alunos diz “Ah, agora tô entendendo.” Porque por exemplo, se dá o Teorema de Pitágoras, mas eu vou usar onde? Quer dizer que agora ele está vendo onde usa, a questão prática. Simplesmente, você admitindo 3, 4 e 5 fazendo um perímetro de 12 metros com a trena, em cada do vértice do triângulo, você coloca: no zero, no 3 com mais 4 dá... 7 (3 + 4 = 7), depois volta para o 12; você consegue encontrar o triângulo retângulo sem mais fazer cálculo. Agora, primeiro eu expliquei a ele que aquele cálculo está certo e como está certo? Partindo do princípio do Teorema de Pitágoras: o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos, substituo os valores e provo que 25; 5 ao quadrado é igual a 9 mais 16.

[...]

I: Essa medida que você faz de distância, seria alguma medida inacessível se não houvesse o instrumento?

P: Também, não totalmente inacessível, mas seria uma medida que iria demorar se fizéssemos com a trena. Porque, com o instrumento, temos condições de medir, em média, até 150 metros de uma vez, e como a trena tem 30 metros, algumas de 50 metros, precisaríamos enrolar e desenrolar a trena várias vezes e ainda com risco de erro. Porque, cada vez que você enrola e desenrola, cada vez que estica de uma forma diferente, estica mais ou estica menos e vai gerando uma margem de erro naquele material.

Ação: O professor atendeu uma chamada no telefone, e paramos a entrevista por alguns minutos. Retomamos conversando sobre o dia de campo, uma atividade diferenciada proposta pelo curso técnico em agropecuária para os alunos da escola.

I: Eu observei no cronograma desse primeiro semestre divulgado pela coordenação da escola a previsão de um curso de GPS. Esse curso é para os alunos? Como está sendo planejado? Será em maio?

P: Isso, para maio. Todo ano, durante a Feira de Informações Agropecuárias [FIA], sempre fazemos seminários voltados para área agrícola. Esse será voltado para a área de topografia, será sobre noções de GPS e qual a aplicação do GPS nas ciências agrárias. Nesse ano, estamos propondo esse minicurso, pode-se dizer minicurso ou seminário, em maio, e voltado principalmente para os alunos que ou já pagaram topografia ou estão pagando, tanto para alunos do integrado quanto para alunos do pós-médio.

I: A FIA foi antecipada para o primeiro semestre? Ou é uma proposta sua?

P: Não. É uma proposta nossa da área de agricultura, fazer um dia de campo agrícola lá em Tiuma. Dentro da programação dia de campo, haverá alguns seminários de cursos relacionados à área agrícola. Então, estamos pretendendo fazer esse dia de campo diferenciado, antes da FIA. A FIA ocorrerá normalmente com a participação do agrícola, mas queremos fazer esse dia de campo.

I: Entendi. Pensando nessa nossa parceria, o que você poderia dizer de início, embora talvez seja uma pergunta num momento muito inicial, o que nós da matemática poderíamos ajudar no seu trabalho com topografia? A matemática enquanto disciplina escolar?

P: Acho que poderíamos fazer algo que, na minha época, ajudou-me bastante quando estava fazendo o técnico em agropecuária. Nós tínhamos, durante as férias, ou nos finais de semanas, alguns cursos de matemática, por exemplo: 20 horas de trigonometria, 20 horas de geometria. Tínhamos minicursos ofertados pelo DERE de Nazaré da Mata, na cidade de Aliança. Inclusive, eu fiz dois minicursos desses no período de férias. Minicursos só de matemática, onde a gente pôde estar direcionando a matemática para dentro das ciências agrárias, talvez seria algo interessante, por exemplo: a matemática trabalhando medidas agrárias, a matemática trabalhando trigonometria, porque, quando eu falo em seno, cosseno e tangente, a turma faz uma cara feia danada.

[...]

P: Hoje, nós temos trenas, balizas, piquetes, nível, teodolito, bússola e trabalhamos com alguns instrumentos de mesa no pré-requisito da disciplina de topografia que é a disciplina de desenho técnico, onde temos o planímetro, instrumento que necessita de saber conversão de medidas, utilizado no primeiro período de agropecuária, o aluno vai saber calcular numa planta (num mapa), por meio do planímetro vai gerar um número, ele vai consultar uma tabela e converter para metros, metros quadrados ou hectare aquela determinada medida. medindo apenas com uma ferramenta chamada planímetro, ele tem uma haste e você vai contornando o desenho da planta, o perímetro. Temos também o curvímetro. Por exemplo, tem um riacho, e você quer saber a distância desse riacho. Para não colocar um cordão e sair botando em cima e depois esticar o cordão numa régua que é uma forma também de medir, é uma alternativa. Mas existe um instrumento específico chamado curvímetro, porque ele mede justamente nas curvas.

I: Então, ele consegue medir comprimentos de segmentos que não são retos, curvilíneos?

P: Isso.

I: Na própria planta?

P: Na própria planta, que utilizamos também na topografia.

I: Interessante, muito interessante saber desses equipamentos.

P: De acordo com a escala que a planta está, estamos medindo em centímetros, por exemplo, convertemos na escala, 1 para 2000, por exemplo, faz aquela regra de três básica. Um está para escala assim como medida na plana está para medida no campo. É uma regra de três bem simples. Ensino eles a trabalhar. Praticamente quem ensina mais é a disciplina de desenho técnico, ensina a trabalhar com escalímetro, mas, na topografia, ensino ele a fazer as contas, os cálculos. Porque, se você esquecer do escalímetro, você está perdido, mas, se souber fazer a conta, você não precisa nem do escalímetro.

I: Entendi. É... o escalímetro é um instrumento muito usado, principalmente em desenho. Ele facilita porque cada parte da sua régua têm duas escalas. Eu fiz curso técnico em Refrigeração e o utilizamos muito nas disciplinas de desenho, para poder ler as plantas baixas. Muito obrigado E. B. O., por esse primeiro encontro.

APÊNDICE B – TRECHOS DA TRANSCRIÇÃO DAS AULAS 1 E 2 DE TOPOGRAFIA

Apresentamos as transcrições das aulas observadas e usamos algumas as letras **E, P, I** para indicar estudante, professor e investigador, respectivamente. As ações não verbais, gestos do professor ou de alunos serão indicados pela letra **G**. Os momentos de respostas de mais de um estudante estão indicados por **Es**. Usamos **E1, E2**,... para alunos específicos, quando necessário. A sigla **Obs** indica alguma observação do pesquisador, geralmente para acontecimento de ações verbais e não verbais simultaneamente e que consideramos importante dar esse destaque.

Durante a leitura dessas transcrições, percebem-se poucos trechos de comentários inaudíveis. A possibilidade de permanecer próximo ao quadro próximo à parede lateral e oposta ao condicionador de ar Split possibilitou boa captação de áudio e vídeo. Outro elemento facilitador foi a acústica da sala, pois sua climatização artificial diminuiu a interferência de barulhos externos. Entretanto, o registro das aulas ocorridas em ambientes fora da sala exigiu maior trabalho do investigador, não havendo possibilidade de maiores períodos de filmagens, entretanto conseguimos coletar um material que permite visualizar o componente curricular topografia do início ao fim.

As expressões matemáticas e os desenhos aqui presentes retratam as resoluções vivenciadas nas aulas. As imagens foram obtidas ora por meio de fotografia do quadro da sala ora pelo print do vídeo em pausa. Utilizamos dois recursos para registro das aulas: vídeo e gravação de áudio.

G: Professor inicia a aula.
P: Então, a topografia tem origem grega... onde “topo” significa lugar e “grafos”... significa estudo. Então, ela é uma descrição do ambiente... é uma ciência responsável pelo estudo de um determinado local onde a gente pode tomar como referência esse local para ser trabalhado... é justamente a superfície terrestre, levando em consideração suas... levando em consideração seus aclives e seus declives. Então, na realidade, topografia, eu vou mandar para o e-mail de vocês um resumo, uma apostila que eu fiz, consegui enxugar as definições básicas e tal, para a gente não perder tempo escrevendo aqui o que é isso ou o que é aquilo. Então,

vou colocando em tópicos e a gente vai explicando. Então, topografia, na realidade, é uma ciência responsável, e por ser ciência está no grupo das ciências exatas, não é? Então, é a ciência responsável em estudar a superfície terrestre levando em consideração suas diferenças de níveis, ou seja, suas altitudes e seus declives... medindo distância e ângulos horizontais e verticais.

G: O professor escreve uma breve definição no quadro e continua falando.

P: Então, topografia, ela vai estudar a distância entre ângulos horizontais e verticais. Bom, se a gente vai estudar distâncias, é necessário a gente saber quais são os instrumentos topográficos, não é?

G: O professor escreve o nome de alguns instrumentos enquanto fala os nomes: trena, bússola, nível, teodolito, clinômetro, GPS.

P: Esses são os principais equipamentos que a gente vai trabalhar ao longo da disciplina. Faltou eu dizer aqui que a disciplina tem 60 horas/aula... então são... cada dia tem cinco aulas. Doze vezes cinco ou sessenta dividido por cinco são doze segundas-feiras, certo? A trena, não sei se vocês visualizaram na disciplina de desenho, mediram alguma área, algum local. Vocês trabalharam com a trena algum momento em desenho?

Es: Não.

P: Então, vamos começar pela trena. A trena, ela é um instrumento que pode ser de lona de metal, se chama de aço, e de fibra sintética, podendo ter desde as pequenas trenas que o pessoal utiliza a “tira-colo” (de bolso), de 3m, 5m, até trena topográfica que a gente pode ter de 10m, 20m, 30m, 50m e 100m. Nossa trena aqui... nós temos uma de 30 e outra de 50.

[...]

P: Então, a pessoa que vai ficar nessa orientação, olhando pra lá, na prática vocês vão entender melhor, fica uma pessoa aqui na baliza, segurando essa haste... outra pessoa segura aqui (aponta para o segundo ponto desenhado) e a terceira pessoa vai receber orientação da primeira, para formar um alinhamento. Para que serve o alinhamento? Se eu vou medir uma área, onde aqui eu tenho uma distância de 100m... então, tenho como esticar uma trena e saber se ela está bem alinhada, para poder iniciar medição dessa área.

G: O professor desenha um quadrilátero e marca três pontos num mesmo lado, sendo o primeiro e terceiro nos vértices da figura, e continua.

P: Então, tenho que colocar uma baliza aqui, outra aqui e outra na outra extremidade, por exemplo (referindo-se ao pontos marcados na figura). Para fazer isso, a pessoa que ficar no início dessa medição, ou seja, no vértice desse polígono, ela vai orientar com seu olho mira, aí vamos abrir um parêntese: vocês sabem qual é olho-mira de vocês?

G: Os alunos gesticulam que não.

P: Eu não testei aqui nesta sala?

Obs: Acredito que, nesse momento, ele tenha esquecido que na aula anterior foram poucos alunos.

P: Eu vou desenhar aqui uma referência, certo? É... olho-mira, é o seguinte: vocês ficam aí sentados, não precisam se levantar. Com os dois olhos abertos, estendam o braço de forma que o dedo indicador fique na frente daquelas duas linhas paralelas verticais que eu desenhei.

Obs: Vários comentários inaudíveis. O professor reforça: “com os dois olhos abertos”. O professor começa a explicar à turma como cada aluno pode identificar o seu olho mira. Os alunos estendem o braço para frente colocando o dedo indicador para cima.

P: Com os dois olhos abertos, não está mais ou menos na direção?

Es: Alguns alunos falam: “está”, outros dizem: “estou ficando zarolho”.

G: Então, o professor pede, tampando um dos olhos:

P: Você coloca a mão no olho, depois coloca no olho. Qual foi o olho que o dedo fica menos distante das retas?

Obs: Respostas pessoais dos alunos.

P: Pronto, meu olho que se afasta menos é o direito. Se eu fechar meu olho esquerdo, o objeto permanece no mesmo lugar, mas, se eu fechar o direito, o objeto foge.

Obs: Alguns alunos concordam.

P: O olho que o dedo não fugir é o olho de mira.

Obs: Alguns alunos dizem: “que massa”. E o professor continua.

P: Então, esse é o primeiro passo para você entender como é que vocês trabalham a questão de um simples alinhamento na topografia. Qual é a minha ferramenta principal?

Es: O olho [risos].

P: O olho, muito bem. A ferramenta principal é o olho.

E1: É a mão.

E2: É o olho.

E1: É, mas se tu tens mãos, mas é cega, tu não consegue do mesmo jeito.

E2: É? E como vai fazer sem mão?

Obs: Professor chama atenção e diz.

P: Vamos lá, temos as ferramentas auxiliares que vão justamente fazer parte do nosso quadro para podermos fazer medição de determinado terreno. Quando o terreno é pequeno, você simplesmente estica a trena. Se fosse medir uma sala de aula dessa... simplesmente, você estica a trena e você consegue ter os quatro lados da sala de aula, não é isso?

Es: É.

P: Agora, partindo de um terreno grande, feito a área da gente lá em Tiúma[61], o que acontece? Além da trena, você vai precisar da baliza, vai precisar do auxílio de duas ou três pessoas para você poder fazer determinado alinhamento. Continuando aqui numa revisão geral, depois a gente vai fazer uma prática.

G: O professor se direciona ao quadrilátero e, apontando para um vértice e um lado vertical, diz:

P: Quando eu chego nesta esquina aqui, se eu quiser um ângulo de 90º e continuar medindo para cá [lado vertical], como é que eu faço um ângulo de 90º?

Obs: Silêncio na turma.

P: Teorema de?

E: Pitágoras.

Obs: O professor confirma: Pitágoras.

P: O teorema de Pitágoras diz o quê?

Obs: Alguns comentários inaudíveis, até que um aluno enuncia.

E: O quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.

P: Nota dez, muito bem.

Obs: Outro aluno fala: “foi eu que ensinei a ele”. E o professor diz: “foi você que ensinou? Eu desconfiei desde o início”.

G: O professor desenha um triângulo retângulo em posição prototípica com vértices A, B [vértice com ângulo reto] e C.

P: Então, veja só, se eu tenho o triângulo retângulo e quero um ângulo de 90º aqui, o teorema de Pitágoras nos diz o quê? Esse lado maior é o quê?

---

[61] Bairro o qual o colégio possui um terreno e algumas instalações em funcionamento.

Es: Hipotenusa.

G: O professor marca o ângulo agudo formado pelo lado horizontal e a hipotenusa. Ele pergunta.

P: E aqui é o quê?

E3: Cateto oposto.

P: Hã?

E3: Cateto adjacente.

P: Sim. E esse outro é o quê?

E3: Cateto adjacente.

P: Estão lembrados disso?

E3: Eu me lembrei agora.

I: Tem algum triângulo que vocês conhecem com medidas que dê aquilo que o professor está falando?

E: Triângulo equilátero?

I: Colocando as medidas, esse cateto medindo tanto, esse outro cateto medindo tanto e a hipotenusa medindo tanto.

E: Um triângulo retângulo mesmo.

P: Assim com medidas, por exemplo: 3... 2... 10.

Es: Há!

I: Então, algum triângulo que você diga: esse eu sei que é retângulo, ou esse eu lembro que é retângulo.

Obs: Os alunos respondem: “Lembro não”. Um aluno diz: “4, 6, 8”.

P: ...4, 6 e 8 está perto, mas não é não. Olha a fórmula, não é esta? A de Pitágoras? Hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos, então quais são os números que eu substituo aqui e dá certinho?

E: 10... 4, 6 e 10?

P: Não. Geralmente, eu, na topografia, trabalho com estes números: a hipotenusa vale 5, o cateto adjacente mede 4 e aqui 3. 3, 4 e 5. Substituindo lá: hipotenusa ao quadrado, 5 não é?... 5 ao quadrado. Distância de AB ao quadrado?

Es: 3.

P: 3. Distância de BC ao quadrado?

Es: 4.

[...]

P: [...] Então vamos ter... uma coisa é ter a área, outra é ter o perímetro, o que é o perímetro?

Obs: Silêncio da turma.

P: Não é a soma dos lados? Então, a soma desses lados, desses três lados tem que dá 12 metros. 3 com mais 5, 8, com mais 4, 12. Entenderam na teoria? Na prática, vocês irão fazer melhor e vão até ficar querendo fazer mais vezes cada um, de tão bom que é. Sério.

Obs: Risos.

P: Então, voltando aqui, nós já falamos da trena e da baliza. Vamos falar agora da bússola... Essa bússola daqui é, na realidade, duas em uma... ela é bússola e clinômetro. O que é um clinômetro? O clinômetro é um instrumento que serve para medir ângulo vertical, e a bússola serve para medir ângulo horizontal. Todo mundo já viu uma bússola.

Es: Não.

G: O professor, enquanto fala, passa a bússola para os alunos e pede que ela seja olhada e repassada entre os demais alunos.

P: Então, a bússola pode ser de 0 a 360° direto, ou pode ser bússola que vai de 0 a 90, de 90 a 0,.. ou seja, ela pode ser dividida em quatro partes, certo? A bússola pode ser dividida em quatro partes. Por ser dividida em quatro partes, então ela passa a ser bússola de quadrante, ou bússola de rumo, só que lá na frente eu vou explicar melhor o que é isso. Então, a bússola... se eu der um giro completo em torno do meu eixo, o que é meu eixo? O que é o eixo de vocês?

E: A volta?

P: O eixo é uma linha imaginária que a minha cabeça, dentro do meu corpo, que vai até o chão entre meus pés. Se eu der um giro completo, em torno do meu eixo, eu dei um giro de quantos graus?

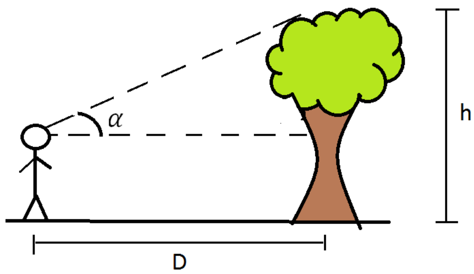
Obs: O professor realiza um movimento em torno do seu próprio eixo vertical, enquanto uma aluna responde: 360.

P: A bússola mede de zero a trezentos e sessenta graus. Na bússola de rumo, ela só mede 0 a 90; mas, sabendo que aqui é Norte, aqui é Sul, aqui é Leste, aqui é Oeste... então, por isso que eu tenho os quadrantes. Se eu tiver 45° numa bússola de rumo, tenho que dizer em qual quadrante ela está. Posso ter 45° Nordeste, 45° Sudeste, 45° Sudoeste e 45° Noroeste. Já essa bússola daí (apontando para o instrumento que os alunos estão olhando), ela é uma bússola de 0 a 360 direto, não preciso especificar o quadrante que estou. Então, a bússola foi muito utilizada pela navegação... É o instrumento que tem uma agulha solta sobre um eixo bem polido, sem atrito quase, para que ela possa se movimentar de acordo com... alguém sabe o que é que atrai a agulha da bússola?

[...]

P: Mas é muito comum perguntar a vocês a altura de determinado objeto, a altura de determinado prédio, poste, uma árvore, não é? Então, na realidade, se eu estou aqui e tenho essa distância, estico a trena e tenho essa distância... só que eu quero saber a altura... Então, para saber a altura, o que ocorreu aqui?

G: Professor realiza um desenho no quadro enquanto explica. A figura a seguir ilustra o desenho realizado pelo professor.



P: Se estiver com um clinômetro, o clinômetro serve para medir ângulo vertical. Então, tem como ter a leitura desse ângulo vertical (referindo-se ao ângulo alfa). Estão lembrados dos três irmãos da trigonometria?

G: Certo silêncio na sala.

P: Seno, cosseno e tangente, não é?

Es: Ah, sim.

P: Veja só, se eu estou querendo este lado (direcionado para altura da árvore), em relação ao ângulo este lado é cateto adjcente ou oposto?

Es: Oposto.

P: Por que oposto?

E4: Porque está de frente para o ângulo.

P: Isso. Por que estou olhando para ele, está do lado de lá. E esse cateto aqui é o quê? [Passa a mão em cima do segmento horizontal].

Es: Adjacente.

P: Certo. Hipotenusa eu não tenho, não é? Então, se eu tenho o cateto adjacente. Tenho o ângulo, abertura que eu tenho, coloco na máquina científica, qual o ângulo de 35º? Seja seno cosseno ou tangente, a máquina vai dar também, celular também tem a função... então, estou querendo o cateto oposto. A gente sabe que o seno...

de um ângulo é o quê?

G: Enquanto o professor escreve a fórmula para o seno, uma aluna completa sua fala.

P: Cateto...

E6: Oposto

P: ...oposto, sobre...

E6: Hipotenusa

P: Hipotenusa... cosseno?

E6: Adjacente sobre hipotenusa

P: Cateto adjacente sobre...

E6: Hipotenusa.

P: Qual dos dois vai me atender aqui?

E: Seno.

P: Nenhum, não é? Por enquanto.

E6: Cosseno

E7: É a tangente.

P: Porque as duas expressões têm hipotenusa que eu não tenho também. Se estou em falta com duas incógnitas, então não atende. Então, qual é o outro irmão?

Obs: O professor escreve no quadro enquanto fala: tangente. E pergunta: “tangente é o quê?”.

Es: Cateto oposto sobre cateto adjacente.

P: Mas por que é isso?

E8: Para calcular a hipotenusa.

P: Porque tangente é seno sobre o cosseno. Se eu coloco uma fração dividida por outra fração, o que é que ocorre? Eu conservo a primeira fração e inverto a segunda, e fica multiplicando. Quando eu multiplico cateto sobre hipotenusa vezes hipotenusa sobre cateto adjacente, hipotenusa com hipotenusa a gente elimina, então sobrou o quê? O que vocês falaram que é tangente.

Es: Cateto oposto sobre cateto adjacente.

P: Então, por isso que a tangente é cateto oposto sobre adjacente. Porque, se perguntarem: “discrimine...” ou então: “descreva o que é tangente”, você vai dizer: “tangente é seno sobre cosseno”... em resumo, é cateto oposto sobre adjacente. Então, esses são os três irmãos mais próximos, não é, Alexandre?

E: E tem mais?

P: Depois ainda vêm outras coisas que vocês irão aprender que é o cossecante, o cotangente, não é?
Obs: Uma aluna comenta: “precisa disso não, professor.” Outra diz: “a gente não quer saber o resto da família não, deixa assim mesmo”.
P: Depois é só o parentesco mais próximo.
E: Quero não, o parentesco não.
P: Tem: secante, cossecante e cotangente. Lá na frente, vão aprender. Então, imagine que você tem um ângulo. Vou colocar um ângulo fácil aqui... qual a tangente de 45º?
E4: Eu não lembro de cabeça, não. Não sei se cosseno de...
P: É a mais fácil que tem.
Obs: Alguns alunos falam: “tangente de 45. É...”. Os alunos tentam dizer a resposta correta:
E: Um sobre dois.
P: Quase.
E: Menos um sobre dois.
P: Quase.
E: Raiz de um sobre dois.
P: Quase.
E: Ah, não sei não.
Obs: Um fala: “raiz de três”. Outro diz: “raiz de dois”.
E: Raiz de dois sobre dois.
E: Dois raiz de dois.
P: $\sqrt{2}/_2$ é o seno de 45º. O cosseno de 45º é também a $\sqrt{2}/_2$. Então, tangente é igual a?
E5: Raiz de dois sobre dois.
E4: Sobre um.
E: Um sobre dois.
P: É um.
G: Alguns risos. Comentários inaudíveis.
[...]
P: Se eu não tenho como medir a tangente, por não ter calculadora na hora, então eu me aproximo desse ponto alto ou me afasto desse ponto que quero medir altura,

desde que eu trave o clinômetro em 45º graus, me aproximo, deu 45º? Deu. Então, é só medir essa distância. Quando estou a 45°, a distância é igual à altura. É só substituir: tangente de 45º não é um?

Es: É.

P: Cateto oposto é X.

Es: Certo.

P: Cateto adjacente é 20. Então vai ficar 20 x 1 que é igual a...

E: 20.

P: Ou seja, o cateto adjacente fica igual à altura quando estiver a um ângulo de 45º, certo?

E: Certo.

P: Agora, vocês não prestaram atenção num pequeno detalhe.

Es: Qual?

P: Estou com instrumento olhando a partir de onde: do chão ou do meu olho?

Es: Olho.

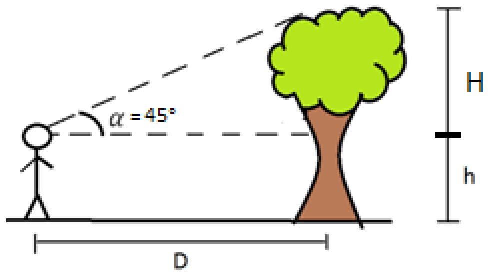
E5: Então, não é mais 45.

E4: O senhor vai ter que somar.

P: Você soma essa H com h-zinho. Esse h-zinho é o quê? Minha altura.

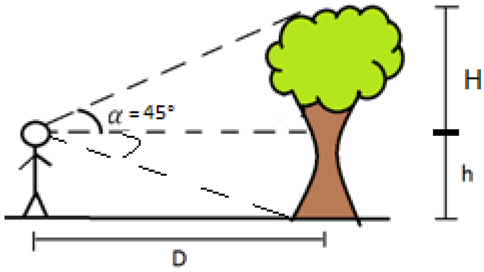
E: Do olho ao chão.

Obs: A figura a seguir ilustra o desenho do professor:



P: Se eu não quisesse medir esta altura [referindo ao h], teria que mirar lá para baixo, descendo, mas só que iria dar um ângulo quebrado que sem calculadora não iria me atender.

Obs: O professor faz nova marcação na figura:



P: Daria muito mais trabalho, então é melhor você deixar em 45º e medir a distância D. Distância mais a minha altura é igual à altura do objeto.

APÊNDICE C – TRECHOS DA TRANSCRIÇÃO DAS AULAS 3 E 4

Apresentamos as transcrições das aulas observadas e usamos algumas letras **E, P, I** para indicar estudante, professor e investigador, respectivamente. As ações não verbais, gestos do professor ou de alunos serão indicados pela letra **G**. Os momentos de respostas de mais de um estudante estão indicados por **Es**. Usamos **E1, E2**,... para alunos específicos, quando necessário. A sigla **Obs** indica alguma observação do pesquisador, geralmente para acontecimento de ações verbais e não verbais simultaneamente e que consideramos importante dar esse destaque.

Durante a leitura dessas transcrições, percebem-se poucos trechos de comentários inaudíveis. A possibilidade de permanecer próximo ao quadro próximo à parede lateral e oposta ao condicionador de ar Split possibilitou boa captação de áudio e vídeo. Outro elemento facilitador foi a acústica da sala, pois sua climatização artificial diminuiu a interferência de barulhos externos. Entretanto, o registro das aulas ocorridas em ambientes fora da sala exigiu maior trabalho do investigador, não havendo possibilidade de maiores períodos de filmagens, entretanto conseguimos coletar um material que permite visualizar o componente curricular topografia do início ao fim.

As expressões matemáticas e os desenhos aqui presentes retratam as resoluções vivenciadas nas aulas. As imagens foram obtidas ora por meio de fotografia do quadro da sala, ora pelo print do vídeo em pausa. Utilizamos dois recursos para registro das aulas: vídeo e gravação de áudio.

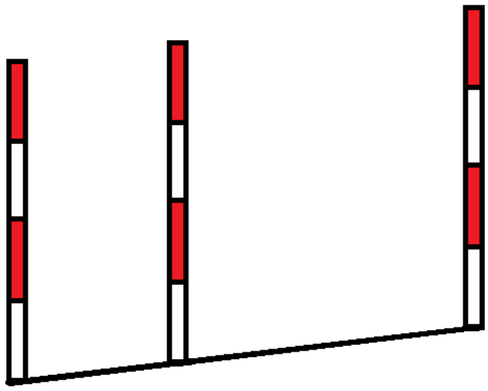
Obs: O professor inicia a aula desenhando no quadro a figura de um observador que pretende medir o comprimento da altura de árvore e desenha também um triângulo retângulo enquanto fala.

P: Então, na topografia, para a gente não se esforçar muito, temos três valores mais práticos para colocar nesses lados: os catetos que são os lados que formam o ângulo reto deixamos com os valores 3m e 4m, e a hipotenusa deixamos com 5m. Sempre no campo, iremos trabalhar com 3, 4 e 5. Quando fomos fazer aula prática, pegaremos três balizas, uma trena e vamos fazer um triângulo retângulo para encontrar o ângulo de 90º. Sempre vão ter 3 de medida de um dos catetos, 4 a outra medida de outro cateto, fechando 5 com a hipotenusa.

[...]

P: Sempre coloque na mesma divisória. Tudo vai depender do manuseio do operador dos instrumentos, para que garanta a perfeição do ângulo de 90º. Então, eu disse na aula passada que, para obter uma reta, é necessário ter dois pontos. E, para obter um alinhamento, tem que ter o terceiro ponto.

Obs: O professor retoma o manuseio dos instrumentos na realização de um alinhamento e, enquanto faz o seguinte desenho, fala.



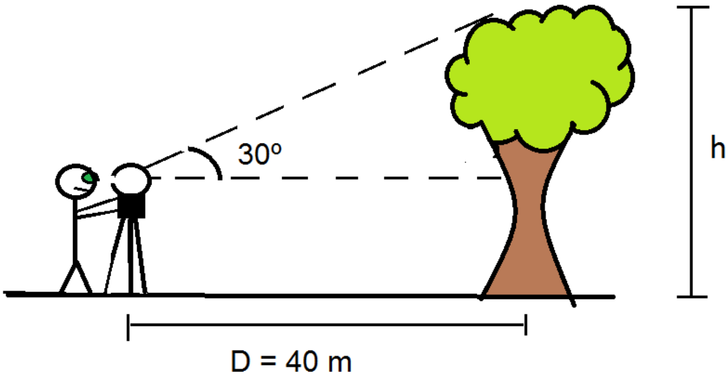
P: A pessoa que está olhando aqui [referindo-se à baliza da esquerda]... é como se eu estivesse com meus três dedos, em pé, e o último dedo quisesse sair do alinhamento está errado. Tenho que escondê-lo atrás do segundo dedo. Quando eu escondo o terceiro ponto [baliza da direita] atrás do segundo ponto [baliza do meio], olhando pelo meu olho mira... estão lembrados do olho-mira?

Es: Sim.

P: Então, por meio do olho-mira, vamos tentar orientar a terceira baliza [direita], se é mais para direita, é mais para esquerda. Então, quando estiver com minha baliza, segurando e orientando o alinhamento, eu vou dizer ao operador da terceira baliza, da segunda não: mais para lá", ou "mais para cá". [...]

[...]

Obs: O professor escreve enquanto fala as fórmulas das relações trigonométricas: seno, cosseno e tangente. E retoma a figura desenhada no início da aula:



P: Então... seno é o cateto oposto sobre a hipotenusa... cosseno, cateto adjacente sobre a hipotenusa. Tangente, cateto oposto sobre cateto adjacente. Nessa situação, D é a distância do operador até a árvore, é 40 metros. Esses 40 metros, em relação a esse ângulo 30 graus, é cateto oposto ou adjacente?

E: Adjacente.

P: Adjacente, porque cateto adjacente, junto ao ângulo, é o lado que está junto ao ângulo. E o H, seria o quê?

E: Altura.

E: Cateto oposto.

P: Cateto oposto. Então, se eu tenho três incógnitas. O ângulo de trinta graus, se eu usar seno, cosseno ou tangente, eu consigo obter o que é 30º desse ângulo, não é? De seno, cosseno ou tangente. Cateto adjacente eu tenho. Estou querendo achar o cateto oposto. Qual é a melhor fórmula que se encaixa?... seno, cosseno ou tangente? Qual a melhor fórmula para fazer o cálculo dessa altura?

E: Tangente.

P: Tangente, não é? Muito bem. Porque tangente, eu vou ter o ângulo... 30º da tangente, vai dar um valor. O cateto oposto é o que eu estou querendo e o cateto adjacente eu tenho, não é isso? Então, substituindo [o professor continua resolvendo e falando],

$$tg\ 30° = \frac{H}{40}$$

$$H = 40.tg\ 30°$$

P: Se não tiver calculadora científica, no celular também tem. É só girar o visor que você tem a função científica da calculadora.

Obs: Continua executando a técnica.

$$H = 40\ .\ 0{,}58$$

$$H = 23{,}2\ m$$

P: Vai ser 23 metros e 20 centímetros. Está certo ou falta alguma coisa?

Obs: Alguns alunos comentam: “a altura do...”.

P: Muito bem, a altura do operador. Se a altura do operador for um metro e sessenta, é só pegar um metro e sessenta mais vinte e três e vinte, que vai dar: vinte e quatro e oitenta, não é isso? Então, a altura da árvore, que chamaremos de altura total, vai ser altura: 23,2 + 1,6 = 24,8m. Eu não sei se comentei com vocês nas aulas anteriores que, quando trabalho com tangente e não tenho a calculadora, se eu quiser medir qualquer altura de qualquer objeto, não tenho calculadora, só tenho instrumento que mede o ângulo, não tenho a tabela dos valores dos ângulos, nem de seno, cosseno e tangente. Não estou lembrado dos valores dos principais ângulos. Qual seria alternativa? Eu me aproximo da árvore e, à medida que eu vou me aproximando, o ângulo diminui ou aumenta?

Es: Aumenta.

P: Aumenta. Então, se eu chegar a um ângulo de 45º, qual é a tangente de 45°?

Es: Comentários inaudíveis.

P: O seno de 45 é $\sqrt{2}/_2$ cosseno de 45 é $\sqrt{2}/_2$. Então, tangente de 45° é 1?

E: Um só?

P: Sim, um. Então, numa situação de campo que eu possa encontrar e não ter uma calculadora em mãos, não tenho num equipamento, mas quero ter a leitura rápida de alguma altura. Eu me distancio, com o instrumento que mede ângulo, deixo em 45°, e é só medir essa distância [referindo-se a D]. Quando eu medir a distância, ela será igual a H maiúscula, com 45º. Por que vai ser igual? Porque, quando multiplicar pela tangente de 45º que é 1 [referindo-se ao trecho: $H = 40.tg\ 30°$], qualquer número multiplicado por um é ele mesmo. Mais a altura do operador, então vai ser a distância que estiver da árvore que é igual à altura mais a altura do operador, não é isso? Entenderam?

Obs: Alguns comentários inaudíveis, uma aluna comenta.

E: Professor, no ano passado, eu tive algumas aulas, quase uma unidade sobre esse assunto, só que o professor pediu pra fazer com isopor, fazer um teodolito manual: transferidor, tubos de caneta, fita, barbante e cola. Medimos altura de uma igreja, de um prédio e um poste.

P: Só por meio de... é... expressões trigonométricas?

E: Isso.

Obs: Pausa para os alunos copiarem aquilo que foi escrito no quadro. O professor aproveita para dar um intervalo maior. Após o término desse intervalo, ele inicia a armação do tripé de suporte para o instrumento nível. Escreve a fórmula para medição indireta de distância, enquanto descreve os seus elementos: $d_{XY} = C + H.l.cos^2\alpha$; onde X, Y são os pontos; C = 0 ou 0,5 é uma constante aditiva; H = 100, outra constante; alfa é o ângulo vertical; e $l = |F_s - F_i|$.

P: O cálculo de distância pode ser... distância direta ou distância indireta. Para obter uma distância direta, eu falei que é só pegar uma trena, esticar e ver o valor que ela acusa no final da medição, então é a distância direta. Vou pegar a trena, marco no ponto A, no zero a trena, vou até o ponto B esticando a trena e vai dar o valor da distância. Para obter a distância com os instrumentos, por meio do: nível, teodolito ou da estação total; eles (o nível ou o teodolito) trabalham em conjunto com a mira falante. Ela não fala, mas diz.

APÊNDICE D – TRECHO DA TRANSCRIÇÃO DA AULA 5

Apresentamos as transcrições das aulas observadas e usamos algumas as letras **E, P, I** para indicar estudante, professor e investigador, respectivamente. As ações não verbais, gestos do professor ou de alunos serão indicados pela letra **G**. Os momentos de respostas de mais de um estudante estão indicados por **Es**. Usamos **E1, E2**,... para alunos específicos, quando necessário. A sigla **Obs** indica alguma observação do pesquisador, geralmente para acontecimento de ações verbais e não verbais simultaneamente e que consideramos importante dar esse destaque.

Durante a leitura dessas transcrições, percebem-se poucos trechos de comentários inaudíveis. A possibilidade de permanecer próximo ao quadro próximo à parede lateral e oposta ao condicionador de ar Split, possibilitou boa captação de áudio e vídeo. Outro elemento facilitador foi a acústica da sala, pois sua climatização artificial diminuiu a interferência de barulhos externos. Entretanto, o registro das aulas ocorridas em ambientes fora da sala exigiu maior trabalho do investigador, não havendo possibilidade de maiores períodos de filmagens, entretanto conseguimos coletar um material que permite visualizar o componente curricular topografia do início ao fim.

As expressões matemáticas e os desenhos aqui presentes retratam as resoluções vivenciadas nas aulas. As imagens foram obtidas ora por meio de fotografia do quadro da sala ora pelo print do vídeo em pausa. Utilizamos dois recursos para registro das aulas: vídeo e gravação de áudio.

Obs: O professor apresenta uma planta e começa a falar.

P: Esta planta... ela está numa escala de 1 para 2000. Então, vamos fazer algumas medidas aqui e colocar na escala para vocês terem uma ideia do tamanho real. Iremos medir com a régua, por exemplo, qualquer extensão desta [aponta para planta]. Medir com a régua significa que temos como unidade metros ou centímetros?

Obs: Certo silêncio na sala. Uma aluna começa a falar vagarosamente: “cen... ti... metro?”.

P: Centímetros. Então, jogando nesta escala que está aqui, de 1 para 2000, conseguimos saber qual é o tamanho real em termos de campo.

[...]

Obs: O professor escreve:

$$1. D = 2000 . 11,8$$

$$D = 2000 . 11,8$$

$$D = 23600\ cm$$

E3: Mas vai passar para metros ainda, né?

P: Passando para metro... tem aquela regra: metro para centímetro... eu faço o quê? ... Multiplico por?

E3: 1000.

P: Não.

E3: 100?

P: 100. De centímetro para metro... o que eu faço?

Obs: Comentários inaudíveis.

P: Divido por 100, não é? Estão lembrados?

E1: Espera professor.

P: Estou esperando.

E1: Metros para centímetros...

P: Metros para centímetros eu multiplico por 100. E centímetro para metro eu dividido por 100. Estão lembrados disso?

Es: Não.

P: É bom relembrar. Temos na escala, aquela tabelinha...

Obs: O professor escreve enquanto explica:

m dm cm mm
1

P: Se estou em 1m e quero ir para centímetro, acrescento um 0, dois 0:

m dm cm mm
1 0 0

E3: 100.

P: Vezes 100. Se estiver em centímetro, 1cm e quero ir para metro; então um 0, dois [0].

m dm cm mm
0 0 1

Obs: Certo silêncio na turma, enquanto o professor pergunta: “não é?”. E continua:

P: Eu ando a casa para esquerda. Se eu ando a casa à esquerda, significa dizer que estou dividindo por?

Obs: Silêncio na sala.

P: 100, não é? Centímetro para metro eu divido por 100, se eu andei 2 casas não é 100. Se estiver com essa situação aqui: quero saber quantos milímetros vale 1m, é só acrescentar os 0, não é?

m	dm	cm	mm
1	0	0	0

Obs: Alguns comentários inaudíveis dos alunos.

P: 1000 milímetros, se estiver com o inverso, com milímetro e passar para metro, divido por 1000. Se você lembrar dessa sequência: metro, decímetro, centímetro, milímetro. Se estiver em metro para decímetro, multiplico por...

m	dm	cm	mm
1	0		

... 10. Decímetro para metro, divido por... 10. Certo?

Obs: O professor escreve uma tabela que chama de escala, enquanto recomenda.

m	dm	cm	mm
1	0	0	

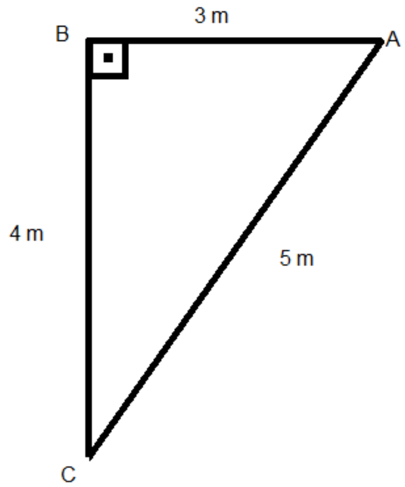
P: Anotem essa escala porque é muito importante para vocês, para topografia principalmente porque mexemos muito com conversão de medidas agrárias, onde é importante saber... não só... essa relação da escala em metro, decímetro, centímetro e milímetro, como também metro ao quadrado, decímetro ao quadrado, centímetro ao quadrado, milímetro ao quadrado. Poderemos precisar dessa conversão na prova, está certo?

[...]

Obs: O professor continua solicitando que os alunos estudem determinados conteúdos, como se estivessem fazendo uma revisão.

P: Eu vou pedir a vocês para revisarem em: conversão de unidades de medidas, tanto grandezas de pesos quanto grandezas de medidas.... de distâncias... porque é importante vocês revisarem, ou seja, quilômetro para metro, não é? Medidas agrárias: o que é um hectare? O que é uma tarefa? O que é um alqueire? Apesar que hoje utilizamos apenas hectare. Um hectare corresponde a quantos metros? 10000 m^2... por exemplo: um hectômetro quadrado são quantos hectare? São essas coisas assim.

Obs: Professor dá o intervalo. Após o intervalo, retoma aula resgatando a construção de um ângulo reto. O professor desenha um triângulo retângulo de lados 3m, 4m e 5m. Segue a imagem obtida do quadro escrito pelo professor:



P: Então, temos uma situação que é interessante. Para poder conferir este triângulo retângulo, para poder conferir essa expressão do teorema de Pitágoras, eu digo que a distância de A a C ao quadrado, ou seja, a hipotenusa tem que ser igual à soma dos quadrados dos catetos, ou seja, a distância de A a B, 3 e BC 4, substituindo os valores, como fizemos na aula passada.

Obs: Enquanto fala, o professor inicia a operação:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$25 = 9 + 16$$

$$25 = 25$$

Após concluir, ele continua.

P: Então, ao colocar esses valores 3, 4 e 5... não precisa nem fazer as contas no campo. O que é que fazemos no campo? Esticamos a trena... quanto é o perímetro desse triângulo?

Obs: Os alunos não respondem. O professor havia pegado a trena, mas ele a deixa e retorna ao quadro. Enquanto fala, escreve a soma dos lados.

P: Perímetro... o que é perímetro? É a soma de quê? Dos três lados do triângulo, no caso, três mais quatro mais cinco é igual a 12m, certo? Então, o que nós vamos fazer é esticar a trena em 12m de forma que o 0 fique com a pessoa que está com a baliza na extremidade [o professor aponta para o ângulo reto do triângulo], o 3 vai estar com a pessoa que estiver com a baliza na direção de um dos lados do terreno. Somando 3 com 5 vai dá 8, na outra direção do terreno [o professor aponta para outro vértice do triângulo] e fechando em 12m com a pessoa que vai segurar o 0 e o 12, certo?

APÊNDICE E – TRECHOS DA TRANSCRIÇÃO DAS AULAS 6 E 7

Apresentamos as transcrições das aulas observadas e usamos algumas as letras **E, P, I** para indicar estudante, professor e investigador, respectivamente. As ações não verbais, gestos do professor ou de alunos serão indicados pela letra **G**. Os momentos de respostas de mais de um estudante estão indicados por **Es**. Usamos **E1, E2**,... para alunos específicos, quando necessário. A sigla **Obs** indica alguma observação do pesquisador, geralmente para acontecimento de ações verbais e não verbais simultaneamente, e consideramos importante dar esse destaque.

Durante a leitura dessas transcrições, percebem-se poucos trechos de comentários inaudíveis. A possibilidade de permanecer próximo ao quadro próximo à parede lateral e oposta ao condicionador de ar Split possibilitou boa captação de áudio e vídeo. Outro elemento facilitador foi a acústica da sala, pois sua climatização artificial diminuiu a interferência de barulhos externos. Entretanto, o registro das aulas ocorridas em ambientes fora da sala exigiu maior trabalho do investigador, não havendo possibilidade de maiores períodos de filmagens, entretanto conseguimos coletar um material que permite visualizar o componente curricular topografia do início ao fim.

As expressões matemáticas e os desenhos aqui presentes retratam as resoluções vivenciadas nas aulas. As imagens foram obtidas tanto por fotografia quadro da sala quanto pelo print do vídeo em pausa. Utilizamos dois recursos para registro das aulas: vídeo e gravação de áudio.

Após um longo período de interrupção do semestre letivo, devido inicialmente às ocupações estudantis, reforçado por movimento grevista associado às ocupações, ocorreu o reinício das aulas. O término dessas mobilizações sociais coincide com o fim do ano civil. Desse modo, em assembleia os professores decidem pela permanência das férias coletivas em janeiro, e a reposição é iniciada em fevereiro, havendo aulas aos sábados.

Obs: O professor inicia comentando certa divisão da topografia, sua fala será após escrever as informações a seguir:

$$Topografia$$

$$Divisão: 1.\ Topometria \begin{cases} Planimetria\ (\hat{A}ngulos\ e\ distâncias\ horizontais) \\ Altimetria\ \quad (\hat{A}ngulo\ e\ distâncias\ verticais) \end{cases}$$

$$2.\ Topologia$$

$$3.\ Taquiometria$$

$$4.\ Fotogrametria \begin{cases} Terrestre \\ Aérea \end{cases}$$

P: Temos os principais grupos da topografia: A topometria, onde “topo” significa lugar e “metria”, medição, medição de lugar. Topologia é estudo do local. Taqueometria, que é a parte da topografia responsável por medição de áreas por meio da topometria. E temos... um último grupo... que é a fotogrametria... o que é foto? Foto é imagem, então é aferição ou medição de uma determinada área por meio de imagens. Essa imagem pode ser... é... adquirida ou por aeronave ou por satélite. E, hoje em dia, por drone... o drone, hoje em dia, é uma ferramenta muito utilizada para levantamentos topográficos, levantamentos de área degradadas... é... na parte ambiental, está sendo muito trabalhada. Então, isso... se refere à fotogrametria. Com relação à topometria, ela é divida em duas partes... como eu já disse, as 60 horas/aulas são praticamente 30 em altimetria e 30 em planimetria. Essa programação, do técnico em agropecuária, da topografia é semelhante a do técnico em saneamento, técnico em edificações, do agrônomo, do florestal, do engenheiro de pesca. Então, praticamente trabalham 60 horas/aulas, eles têm a disciplina topografia, em cima de altimetria e planimetria. O que é planimetria? Medição de áreas planas, ou seja, iremos obter distâncias e ângulos horizontais na planimetria. Não vamos os preocupar com aclives e declives, certo? Vamos só nos preocupar em medir áreas planas, obtendo distância e ângulos horizontais... Já a altimetria, assunto que começaremos hoje, é responsável por medir ângulos e distâncias verticais. Se eu quero, por exemplo, sendo bem prático, que... é... muito comum precisar desse trabalho para quem vai fazer um projeto de irrigação, para quem vai fazer um trabalho de... um trabalho de captar água de um reservatório de uma parte mais baixa e levar essa água para uma parte mais elevada, então para isso é necessários... temos o quê? Iremos levar água de balde? Não. Vamos levar água por meio de uma motobomba que suga água da parte mais inferior e leva essa água para parte mais superior. Então, para isso, é necessário obtermos essa diferença de nível que é para poder dimensionar qual é a bomba ideal que dê força suficiente para sugar água em baixo e tocar até em cima e lá em cima girar as aspersores para poder irrigar determinada cultura. Então, a topografia, como eu disse desde o início, ela é base para todos cursos da engenharia. Tem que ter topografia... uma infinidade de cursos técnicos tem que ter topografia, e para vários projetos ligados à agropecuária começam com a topografia. Eu sempre digo que a topografia... ele começa a obra e termina a obra, o topógrafo, ele é responsável por iniciar a obra e terminar a obra porque ele confere se está tudo ok, na construção de uma estrada, de uma barragem.

[...]

P: Então, praticamente é... de uma forma bem prática que iremos aprender a medir... nos três levantamentos altimétricos é... a altura que eu vou me deslocar desde a base do açude, como no exemplo que eu dei onde quero tocar água para irrigar a cultura lá em cima. Então, isso está lembrando o quê? Esse formato? É um triângulo o quê?

E: Triângulo retângulo.

P: Triângulo retângulo porque aqui embaixo vai formar um ângulo de...

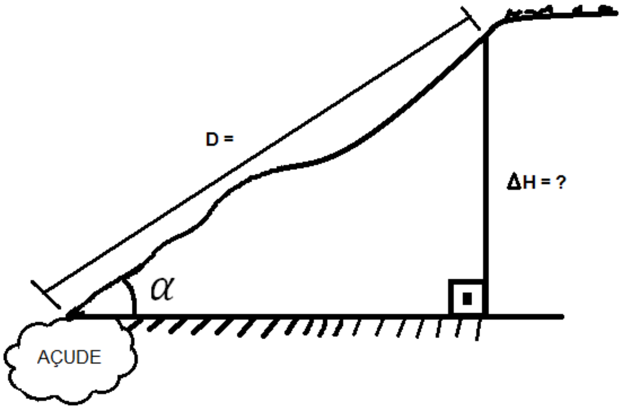
E: 90.

P: 90º... então, se vai formar ângulo lá, também vai formar ângulo aqui também de inclinação, não é isso? Então, vamos começar pelo barométrico.

[...]

P: Se eu não quiser algo com tanta precisão, o GPS nos dá uma diferença em média de um a três metros de erro. Se o morro tem mais de 50m de altura, então um para cima, um para baixo não irá alterar a escolha da potência da motobomba para tocar para irrigar. Porque se você... calcular aqui... e obteve uma altura de 30 metros, a pessoa que irá te vender a motobomba para poder tocar a uma altura de 30m não vai colocar uma bomba que só toque 30m. Porque vai chegar um tempo que essa bomba vai cair a potência dela... que é normal... uma lâmpada tem tantas horas de lume, depois ela queima. Assim que você compra, ela é bem forte. Depois você não nota, mas ela perde sua intensidade de lume. A mesma coisa para uma motobomba, ela tem a potência inicial quando é nova e depois de tantas horas de trabalho essa potência cai. Então, você não vai comprar uma motobomba que só toque 30m porque, quando cair a potência, ela só toca 28 e não chega lá. O que acontece? Você compra uma bomba... a pessoa que vai te vender esse produto... você vai comprar uma bomba com uma margem de segurança de 20%, por exemplo, então vai comprar uma bomba que toque 36m e não 30 só. E, dependendo ainda do meu objetivo lá em cima, se é só para encher um tanque em cima, beleza, é só água e cair lá. Mas, se é para chegar lá em cima com uma potência maior e ainda de jato de água, então não vai te vender uma bomba para 30, vai te vender uma bomba... sei lá... para o dobro, 60 m, que é para poder ela chegar lá em cima com força suficiente para girar os aspersores e poder irrigar o teu projeto de cultura.

Obs: O professor se direciona para o quadro, continua falando e apontando para o desenho:



P: E outra coisa que ele pede é essa distância [refere-se à hipotenusa do triângulo], só que essa distância é fácil de obtermos. Pode obter por uma trena, pode obter com um instrumento medindo pela mira falante e pode obter também por meio do levantamento geométrico que iremos ver mais adiante, certo? Então, vamos lá.

Obs: O professor inicia o segundo levantamento altimétrico: trigonométrico.

P: Levantamento trigonométrico... é por ser um triângulo retângulo, geralmente, quando nós queremos obter essa diferença de altura, existem aquelas expressões bem comuns que vocês já estão acostumados a trabalhar que é o seno, cosseno e tangente, não é? Só para relembrar.

Obs: O professor se direciona para o quadro e escrever as fórmulas das relações trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

P: Seno... seno de um ângulo é o cateto oposto sobre hipotenusa. Cosseno de um ângulo é cateto adjacente sobre hipotenusa.

Obs: Comentário inaudível da aluna, e o professor responde: “está certo”, como se confirmasse algo.

P: E tangente... é seno sobre cosseno. Estão lembrados disso?

Obs: Os alunos respondem positivamente. O professor desenvolve a seguinte expressão e continua falando:

$$tg \propto = \frac{sen \propto}{cos \propto} = \frac{\frac{Cat\ op}{Hip}}{\frac{Cat\ adj}{Hip}} = \frac{Cat\ op}{Hip} \times \frac{Hip}{Cat\ adj} = \frac{Cat\ op}{Cat\ adj}$$

Após o término dessa explicação, destaca cada fórmula.

P: Então, aqui é a tangente, aqui é o seno e aqui é o cosseno. São as três expressões mais básicas para trabalharmos até o final do semestre.

Obs: A figura a seguir mostra parte do quadro após o destaque do professor:

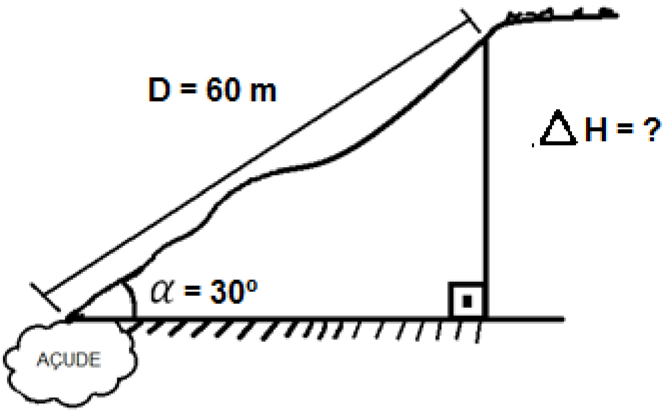
$$sen \propto = \frac{Cat\ oposto}{Hip}$$

$$cos \propto = \frac{Cat\ adj}{Hip}$$

$$tg \propto = \frac{sen \propto}{cos \propto} = \frac{\frac{Cat\ op}{Hip}}{\frac{Cat\ adj}{Hip}} = \frac{Cat\ op}{Hip} \times \frac{Hip}{Cat\ adj} = \frac{Cat\ op}{Cat\ adj}$$

P: Nessa situação aqui, se eu quisesse trabalhar esse levantamento trigonométrico admitindo que eu tenha essa distância de... 60m e o ângulo aqui é de 30º.

Obs: a imagem a seguir representa as informações postas na situação mencionada pelo professor.



P: Qual seria a expressão trigonométrica mais adequada para encontrarmos este delta H? Primeiro, você tem que entender, cada parte dessa é o quê? A distância de 60 é o quê? É o cateto?

E: Não, é a hipotenusa.

P: Hipotenusa, muito bem. Então, aqui é a hipotenusa. Bom, se tem hipotenusa, então não é pela tangente que vou encontrar, não é o momento de usar a tangente. Uso seno ou cosseno... se eu tenho... estou querendo saber esta altura aqui, esta altura é qual cateto?

E: Adjacente.

P: O que é cateto adjacente?

E: Oposto.

P: O que é cateto oposto? Se estou desse lado e olho para o outro, então cateto oposto, cateto do outro lado... então cateto oposto é o cateto que o ângulo está olhando para ele.

Obs: Para explicar o cateto adjacente, o professor faz uma comparação com o organograma de um projeto existente na escola que possui o coordenador-geral e um coordenador adjunto.

P: Cateto adjacente, não tem o coordenador adjunto, não é? Coordenador-geral e coordenador adjunto, coordenador que está junto do coordenador-geral, então cateto adjunto é o cateto junto ao ângulo, certo? Que seria essa distância aqui que não temos nem estamos interessados em ter agora.

Obs: Nesse momento, o professor aponta para o lado horizontal do triângulo.

P: O que nos interessa obter é a diferença de altura, ou seja, o delta H. Então, o delta H, se tenho o ângulo, tenho a hipotenusa, eu posso encontrar o terceiro termo que é o cateto oposto. E qual é a expressão trigonométrica que trabalha hipotenusa e cateto oposto?

Obs: Certo silêncio na sala. O professor aguarda alguns instantes, retorna para a parte do quadro em que estão escritas as expressões trigonométricas, aponta e fala: “seno”.

[...]

P: Eu quero medir uma distância maior e não é possível isso com... com... por meio de trigonometria porque, às vezes, essa distância maior pode ter alguma oscilação aqui. Então, na trigonometria, o interessante era que fosse uma hipotenusa perfeita. Quando partimos para a questão de campo mesmo e é uma área de campo mais extensa, por exemplo, eu quero medir o desnível... uma coisa prática, daquele terreno da escola, da entrada de até lá em cima[62]. Então, temos que partir para o geométrico mesmo, se quiser uma coisa precisa, que, na verdade, não terá ângulo[63], não vamos trabalhar com ângulo. Vamos trabalhar... é... o primeiro passo iremos

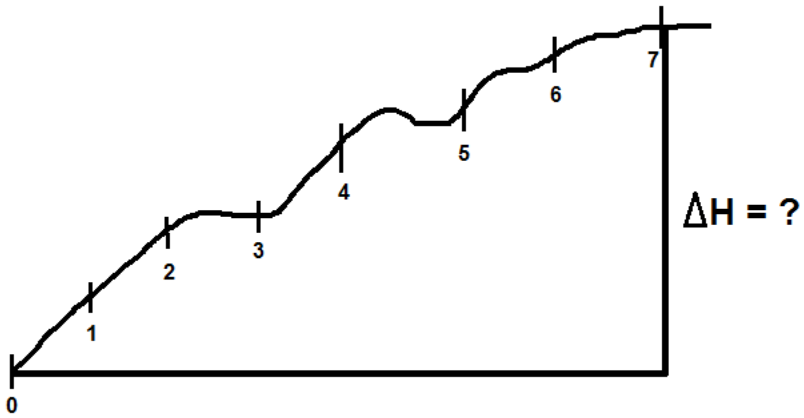
---

[62] É uma longa distância; os alunos têm uma noção do terreno, pois algumas disciplinas são ofertadas no prédio localizado nesse terreno.

[63] Referindo-se ao ângulo vertical alfa, ângulo de inclinação do terreno.

estabelecer distâncias iguais ou próximas de um número... é... a cada 10m, a cada 5m... estabelecer essas distâncias, certo?

Obs: O professor faz algumas marcações no desenho inicial e comenta que vai usar distância de 10m como exemplo, indicando uma numeração para cada marcação. No exemplo, vai de 0 a 7. A imagem a seguir mostra esses detalhes:



P: Cada ponto desse iremos batizar: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. E a gente chama esses pontos que marcamos... esses pontos são chamados de pontos topográficos, certo... Vamos pegar um instrumento que é um nível ou teodolito, estacioná-lo entre o ponto zero e o ponto um, pega a mira falante, coloca no ponto zero.

ANEXOS

ANEXO A – MATRIZ DE REFERÊNCIA CURRICULAR DO CURSO TÉCNICO EM AGROPECUÁRIA INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO

O colégio oferecerá duas disciplinas de línguas estrangeiras (inglês/espanhol) e caberá ao estudante optar por uma delas, na matrícula inicial, sendo esta mantida até o final do curso.

1º PERÍODO

DISCIPLINAS	C.H.
LÍNGUA PORTUGUESA 1	80
ARTE 1	40
EDUCAÇÃO FÍSICA 1	40
MATEMÁTICA 1	80
FÍSICA 1	60
QUÍMICA 1	40
BIOLOGIA 1	40
HISTÓRIA 1	40
GEOGRAFIA 1	40
INFORMÁTICA BÁSICA	40
LÍNGUA ESTRANGEIRA (ESPANHOL) 1	40
LÍNGUA ESTRANGEIRA (INGLÊS) 1	40
ZOOTECNIA GERAL	80
AGRICULTURA GERAL	80
HIGIENE E SAÚDE PÚBLICA ANIMAL	40
HIGIENE E SAÚDE AMBIENTAL	40
DESENHO	80
MECANIZAÇÃO AGRÍCOLA	80
REDAÇÃO INSTRUMENTAL	60
PLANEJAMENTO E GESTÃ I	40
TOTAL	1040

2º PERÍODO

DISCIPLINAS	C.H.
LÍNGUA PORTUGUESA 2	80
ARTE 2	40
EDUCAÇÃO FÍSICA 2	40
MATEMÁTICA 2	80
FÍSICA 2	60
QUÍMICA 2	40
BIOLOGIA 2	40
HISTÓRIA 2	40
GEOGRAFIA 2	40

LÍNGUA ESTRANGEIRA (ESPANHOL) 2	40
LÍNGUA ESTRANGEIRA (INGLÊS) 2	40
AVICULTURA CORTE/POSTURA	80
SUINOCULTURA	80
CUNICULTURA	40
OLERICULTURA	80
CULTURAS REGIONAIS I	80
CULTURAS REGIONAIS II	40
TOPOGRAFIA	60
TOTAL	960

3º PERÍODO

DISCIPLINAS	C. H.
LÍNGUA PORTUGUESA 3	80
EDUCAÇÃO FÍSICA 3	40
MATEMÁTICA 3	80
FÍSICA 3	60
QUÍMICA 3	60
BIOLOGIA 3	60
HISTÓRIA 3	40
GEOGRAFIA 3	40
FILOSOFIA 1	40
LÍNGUA ESTRANGEIRA (ESPANHOL) 3	40
LÍNGUA ESTRANGEIRA (INGLÊS) 3	40
BOVINOCULTURA CORTE/LEITE	80
CAPRINOCULTURA/OVINOCULTURA	80
APICULTURA	40
FRUTICULTURA	80
CANA-DE-ACÚCAR	80
IRRIGAÇÃO E DRENAGEM I	40
TOTAL	940

4º PERÍODO

DISCIPLINAS	C. H.
LÍNGUA PORTUGUESA 4	80
EDUCAÇÃO FÍSICA 4	40
MATEMÁTICA 4	80
FÍSICA 4	60
QUÍMICA 4	60
BIOLOGIA 4	60
HISTÓRIA 4	40
GEOGRAFIA 4	40

FILOSOFIA 2	40
LÍNGUA ESTRANGEIRA (ESPANHOL) 4	40
LÍNGUA ESTRANGEIRA (INGLÊS) 4	40
EQUINOCULTURA	60
COTURNICULTURA	40
PISCICULTURA	40
CARCINOCULTURA	40
OLEAGINOSAS	60
SILVICULTURA	40
IRRIGAÇÃO E DRENAGEM II	40
ARBORIZAÇÃO E JARDINAGEM	40
TOTAL	900

5º PERÍODO

DISCIPLINAS	**C. H.**
LÍNGUA PORTUGUESA 5	80
EDUCAÇÃO FÍSICA 5	40
MATEMÁTICA 5	80
FÍSICA 5	60
QUÍMICA 5	60
BIOLOGIA 5	60
HISTÓRIA 5	40
GEOGRAFIA 5	40
SOCIOLOGIA 1	40
LÍNGUA ESTRANGEIRA (ESPANHOL) 5	40
LÍNGUA ESTRANGEIRA (INGLÊS) 5	40
PLANEJAMENTO E GESTÃO II	40
PLANEJAMENTO E GESTÃO III	40
CONSTRUÇÕES E INSTALAÇÕES RURAIS	60
HIGIENE, LIMPEZA E SANITIZAÇÃO DA PRODUÇAO AGROINDUSTRIAL	40
CONSERVAÇÃO E ARMAZENAMENTO DA MATÉRIA-PRIMA E DOS PRODUTOS AGROINDUSTRIAIS	40
INFORMÁTICA APLICADA	60
TOTAL	820

6º PERÍODO

DISCIPLINAS	**C. H.**
LÍNGUA PORTUGUESA 6	80
EDUCAÇÃO FÍSICA 6	40

MATEMÁTICA 6	80
FÍSICA 6	60
QUÍMICA 6	60
BIOLOGIA 6	60
HISTÓRIA 6	40
GEOGRAFIA 6	40
SOCIOLOGIA 2	40
LÍNGUA ESTRANGEIRA (ESPANHOL) 6	40
LÍNGUA ESTRANGEIRA (INGLÊS) 6	40
TOTAL	540

DISCIPLINAS	**C. H.**
ESTÁGIO SUPERVISIONADO	**320**

TOTAL GERAL HORA AULA	**5.200**
TOTAL HORA RELÓGIO SEM ESTÁGIO	**3.900**
TOTAL HORA RELÓGIO COM ESTÁGIO	**4.220**

ANEXO B – PLANO DE CURSO DO COMPONENTE CURRICULAR TOPOGRAFIA

1. DADOS DE IDENTIFICAÇÃO	
CURSO	**TÉCNICO EM AGROPECUÁRIA**
MODALIDADE	**PRESENCIAL**
DISCIPLINA	**TOPOGRAFIA**
PRÉ-REQUISITO	**(X) OBRIGATÓRIA ( ) OPTATIVA**
PROFESSOR(A)	**E. B. DE O.**
ANO/SEMESTRE	**2016/2**
CARGA HORÁRIA	**TEÓRICA: PRÁTICA: 60 h/a**
2. EMENTA(Sinopse do Conteúdo)	
1. Conceito e importância 2. Divisão da topografia 3. Planimetria e Altimetria	
3. OBJETIVOS	
1. Dominar as técnicas e acompanhar o levantamento planimétrico, altimétrico e planialtimétrico 2. Ler e interpretar cartas topográficas 3. Distinguir as diferentes áreas da topografia 4. Determinar qual o instrumento adequado para cada levantamento topográfico	
4. CONTEÚDO PROGRAMÁTICO	
1. Construção de Escala Gráfica 2. Métodos de levantamento Planimétricos (Equipamentos, cálculo de área, medida de distâncias direta e indireta, medida de ângulos) 3. Identificação de tipos de poligonais 4. Métodos de levantamento Altimétricos 5. Métodos de Nivelamento 6. Elaboração de Perfil do Terreno 7. Locação de Curvas de Nível 8. Sistema Informação Geográfica – GPS **9.** Software ligado à área de Topografia	
4. METODOLOGIA DE ENSINO	
(x) Aula Expositiva ( ) Seminário ( ) Leitura Dirigida (x) Demonstração (prática realizada pelo Professor) ( ) Laboratório (prática realizada pelo aluno) (x) Trabalho de Campo ( ) Execução de Pesquisa	

( ) Outra: Aplicação de Projeto
5. CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO
- participação; - presença; - trabalhos práticos; - construção de planilhas topográficas
6. BIBLIOGRAFIA
* ESPARTEL, Lélis. **Curso de Topografia**. 8. ed. São Paulo: Globo, 1982. * SANTIAGO, Anthero Costa. **Guia do Técnico Agropecuário**. Instituto Campineiro de Ensino Agrícola. * SOUZA, Néviton Ângelo. **Apostilha de Topografia – Planimetria**. Escola Agrotécnica Federal de Barreiros – PE, 1997. **COMPLEMENTAR:** APOSTILAS DE INSTITUTO FEDERAL DE BARREIROS(IFPE) e IFPR