

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

LUCAS MARQUES TELES DA SILVA

**ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO  
SUBMETIDO AO ESTADO PLANO DE TENSÕES**

Recife  
2019

LUCAS MARQUES TELES DA SILVA

**ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO  
SUBMETIDO AO ESTADO PLANO DE TENSÕES**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estruturas.

**Área de Concentração:** Estruturas

**Orientador:** Prof. Dr. Ramiro Brito Willmersdorf

Recife  
2019

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

S586a Silva, Lucas Marques Teles da.  
Análise não-linear de estruturas de concreto armado submetido ao estado plano de tensões / Lucas Marques Teles da Silva. – 2019.  
81 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Ramiro Brito Willmersdorf.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2019.  
Inclui Referências.

1. Engenharia Civil. 2. Concreto armado. 3. Método dos elementos finitos.  
4. Análise não linear. 5. Modelo de fissuração distribuída. I. Willmersdorf,  
Ramiro Brito. (Orientador). II. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2019-422



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

A comissão examinadora da Defesa de Dissertação de Mestrado

**ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO  
SUBMETIDO AO ESTADO PLANO DE TENSÕES**

defendida por

Lucas Marques Teles da Silva

Considera o candidato APROVADO

Recife, 30 de agosto de 2019

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Ramiro Brito Willmersdorf - UFPE  
(orientador)

---

Prof. Dr. Paulo de Araújo Régis – UFPE  
(examinador externo)

---

Prof. Dr. Renato de Siqueira Motta – UFPE  
(examinador interno)

*Este trabalho é dedicado primeiramente aos meus pais, à minha família, meus amigos e à todas pessoas que de alguma maneira esteve presente em todas as etapas desta dissertação.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a toda minha família, mais especialmente aos meus pais, minha irmã e minha tia Digna, por todo apoio dado durante toda a minha vida para que alcançasse meus objetivos e crescesse como pessoa.

A todos meus amigos do PPGEC por sempre estarem presentes e dispostos a ajudar e motivar uns aos outros durante esses anos.

A Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), em especial ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) por proporcionar uma formação profissional e humana.

Aos professores do curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil pelos ensinamentos passados durante todo o curso.

Agradecimento especial aos professores Ézio da Rocha Araújo e Ramiro Brito Willmersdorf, pela dedicação, paciência, convívio e incentivo como professor e orientador.

## RESUMO

Um dos problemas remanescentes da Engenharia Estrutural é a análise de estruturas de concreto armado que rompem ao cisalhamento. Isto se deve ao fato de um comportamento bastante complexo, envolvendo diversos mecanismos internos como, fissuração do concreto e transmissão dos esforços de cisalhamento através da fissura (esmagamento da biela, engrenamento dos agregados e efeito de pino). Consequentemente não há nenhuma teoria de ruptura ao esforço cortante universalmente aceita, contrapondo com uma única teoria, proposta na década de 1960, por Rush. Portanto, este trabalho compreende um estudo do comportamento de estruturas de concreto armado submetidas ao estado plano de tensões, especialmente aquelas que rompem por cisalhamento e a apresentação de um programa pelo Método dos Elementos Finitos para análise não linear dessas estruturas. O modelo constitutivo proposto para o concreto armado é um modelo ortotrópico fortemente baseado no *Disturbed Stress Field Model* (DSFM). A teoria consiste em um modelo de fissuras distribuídas ao longo do elemento, que considera o concreto armado como um material ortotrópico com equações constitutivas próprias. As tensões e deformações são tomadas pelos seus valores médios e as fissuras podem rotacionar em função das mudanças das cargas aplicadas. De modo a validar o modelo, foram comparados os resultados numéricos com alguns experimentais obtidos na literatura e com um programa de análise não linear de concreto armado, Vector2, desenvolvido na Universidade de Toronto, Canadá. As comparações realizadas mostram uma ótima concordância tanto com os valores experimentais quanto com o Vector2.

**Palavras-chave:** Concreto armado. Método dos elementos finitos. Análise não linear. Modelo de fissuração distribuída.

## ABSTRACT

One of the remaining problems of structural engineering is an analysis of reinforced concrete structures that fail in shear. This is due to the fact that behavior of these structures is quite complex, involving several internal mechanisms such as: concrete cracking and shear stress transmission through cracking (direct shear transfer, aggregate interlock and dowel action). Consequently, there is no shear theory that is universally accepted, in contrast with a unified theory for flexural response, proposed in the 1960s by Rush. In this context, this dissertation aims to study the behavior of reinforced concrete structures and present a Finite Element program based on the Disturbed Stress Field Model. The theory consists of a smeared crack model which treats cracked reinforced concrete as an orthotropic material with its own set of governing constitutive equations. In this context, stresses and strains are treated on average and cracks are allowed to progressively reorient as a function of the changing applied loads. In order to validate the proposed program, the numerical results were compared with some experimental results, as well as against a nonlinear finite element analysis program (Vector2). The obtained results revealed an excellent accuracy with the experimental results.

**Keywords:** Reinforced concrete. Finite element method. Nonlinear analysis. Smeared crack model

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Relação tensão-deformação do concreto sob estado uniaxial de compressão .	21
Figura 2 – Relação tensão-deformação do concreto sob estado de compressão biaxial .	21
Figura 3 – Relação tensão-deformação do concreto sob estado de compressão-tração biaxial . . . . .	22
Figura 4 – Relação tensão-deformação do concreto sob estado de tração biaxial . . . . .	22
Figura 5 – Curva tensão-deformação para o aço . . . . .	23
Figura 6 – Relação entre a tensão de aderência e o deslocamento relativo entre o concreto e o aço . . . . .	24
Figura 7 – Ensaio de arrancamento (pull-out teste) e distribuição de tensões ao longo da barra . . . . .	25
Figura 8 – <i>Tension-Stiffening</i> : (a) prisma de concreto armado tracionado e (b) distribuição de tensões ao longo do elemento . . . . .	25
Figura 9 – Mecanismos de transferência de esforço cortante . . . . .	26
Figura 10 – Desenho esquemático para modelagem do concreto . . . . .	27
Figura 11 – Modelos de fissura: (a) fissura discreta e (b) fissura distribuída . . . . .	28
Figura 12 – Modelo para armaduras distribuídas . . . . .	31
Figura 13 – Modelo para armaduras: (a) armadura discreta e (b) armadura embutida . . . . .	32
Figura 14 – Comportamento das tensões nas regiões entre fissuras e regiões locais da fissura . . . . .	33
Figura 15 – Elemento de membrana de concreto armado fissurado . . . . .	35
Figura 16 – Equação de equilíbrio das forças em termos de tensões médias . . . . .	35
Figura 17 – Condições de equilíbrio para as tensões médias e locais . . . . .	37
Figura 18 – Condições de compatibilidade: deformações médias do concreto . . . . .	39
Figura 19 – Condições de compatibilidade: deformações locais do concreto . . . . .	40
Figura 20 – Comportamento do concreto sob compressão biaxial. (a) Definição do elemento, (b) variação do módulo de elasticidade e (c) variação do coeficiente de Poisson . . . . .	45
Figura 21 – Conceitos de Pseudo Cargas para deformações laterais. (a) Modelo tradicional ( $v_{12} \leq 0$ ) e (b) Modelo considerando as pseudo cargas ( $v_{12} = 0$ ) . . . . .	47
Figura 22 – Elemento quadrilateral linear: (a) elemento regular nas coordenadas parametrizadas e (b) Mapeamento do elemento distorcido . . . . .	49
Figura 23 – Variação das funções de forma para um elemento quadrilateral linear . . . . .	51
Figura 24 – Deslocamentos e deformações . . . . .	52
Figura 25 – Quatro pontos de Gauss para um elemento bidimensional . . . . .	59
Figura 26 – Soluções para o método de Picard . . . . .	60
Figura 27 – Programa principal para análise não linear de estruturas de concreto armado . . . . .	61
Figura 28 – Exemplo de uma estrutura utilizando o pré-processador FormWorks . . . . .	62
Figura 29 – Método iterativo para análise não linear física de estruturas de concreto armado pelo Método dos Elementos Finitos . . . . .	63

Figura 30 – Sub-rotina para o cálculo das tensões na armadura . . . . .	64
Figura 31 – Sub-rotina para o cálculo das tensões no concreto . . . . .	65
Figura 32 – Sub-rotina para o cálculo das tensões do concreto sob tração biaxial . . . . .	65
Figura 33 – Sub-rotina para o cálculo das tensões do concreto sob compressão-tração biaxial . . . . .	66
Figura 34 – Sub-rotina para o cálculo das tensões no concreto sob estado de compressão biaxial . . . . .	67
Figura 35 – Sub-rotina para o cálculo das tensões locais da fissura . . . . .	68
Figura 36 – Geometria e detalhes das armaduras das paredes de concreto armado . . . . .	70
Figura 37 – Modelo de Elementos Finitos das paredes Tipo I e II . . . . .	71
Figura 38 – Curvas carga versus deslocamento das paredes SW21, SW22, SW24 e SW25	72
Figura 39 – Curvas carga versus deslocamento das paredes SW11, SW12, SW15, SW16	73
Figura 40 – Geometria e detalhes das armaduras das paredes de concreto armado . . . . .	74
Figura 41 – Curvas carga versus deslocamento dos painéis W2 e W3 . . . . .	75

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Pontos de integração de Gauss . . . . .	59
Tabela 2 – Propriedades das barras de aço . . . . .	69
Tabela 3 – Taxa de armadura correspondente à cada elemento . . . . .	70
Tabela 4 – Propriedades do concreto . . . . .	71
Tabela 5 – Comparação dos resultados numéricos e experimentais. . . . .	73
Tabela 6 – Taxa de armadura correspondente à cada elemento . . . . .	75
Tabela 7 – Comparação dos resultados numéricos e experimentais de Cervenka e Gerstle (1971). . . . .	76

## LISTA DE SÍMBOLOS

### LETRAS ROMANAS

$a_g$	Diâmetro máximo do agregado;
$[B]$	Matriz de deformação específica do elemento finito;
$[B_i]$	Matriz de deformação específica do nó $i$ ;
$E_c$	Módulo de elasticidade do concreto;
$E_{c1}, E_{c2}$	Módulo de elasticidade secante do concreto na direção dos eixos de ortotropia;
$E_s$	Módulo de elasticidade do aço;
$E_{sx}, E_{sy}$	Módulo de elasticidade secante do aço na das direções $x$ e $y$ ;
$E_{sh}$	Módulo de elasticidade do aço do trecho de encruamento;
$f_c$	Resistência cilíndrica à compressão do concreto;
$f_{cu}$	Resistência cúbica à compressão do concreto;
$f_p$	Resistência máxima à compressão do concreto;
$f_t$	Resistência à tração do concreto em ensaio uniaxial;
$f_y$	Tensão de escoamento do aço;
$f_{yi}$	Tensão de escoamento do aço na direção $i$ ;
$\{F\}$	Vetor de cargas nodais aplicadas à estrutura ;
$\{F^0\}$	Vetor de pseudas cargas;
$\{F_{ext}\}$	Vetor de forças externas totais;
$G_{12}$	Modulo de elasticidade transversal na direção dos eixos de ortotropia;
$h$	Espessura do Elemento;
$[J]$	Matriz Jacobiana do elemento;
$[K]$	Matriz de rigidez global;
$[N]$	Matriz das funções de forma do elemento finito;
$N_i$	Função de forma para o nó $i$ do elemento;

$S_{rm}$	Espaçamento médio entre fissuras;
$u, v$	Deslocamentos de um ponto segundo os eixos $x$ e $y$ ;
$\{u\}$	Vetor de deslocamentos de um ponto segundo os eixos $x$ e $y$ ;
$\{U\}$	Vetor de deslocamentos de nodais do elemento ;
$w_r$	Abertura média das fissuras;
$x, y$	Coordenadas de um ponto segundo os eixos $x$ e $y$ ;
$x_i, y_i$	Coordenadas globais de um nó do elemento, segundo os eixos $x$ e $y$ .

#### LETRAS GREGAS

$\delta_s$	Magnitude do deslizamento entre fissuras;
$\beta_d$	Fator de redução da resistência uniaxial máxima do concreto à compressão;
$\{\varepsilon\}$	Vetor das deformações totais do elemento;
$\{\varepsilon^c\}$	Vetor das deformações médias do concreto;
$\{\varepsilon_c^0\}$	Vetor das deformações laterais do concreto (efeito de Poisson);
$\{\varepsilon^r\}$	Vetor das deformações decorrentes do deslizamento entre fissuras;
$\{\varepsilon_s\}$	Vetor das deformações das armaduras;
$\varepsilon_{c0}$	Deformação correspondente à resistência cilíndrica do concreto;
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Deformações normais do elemento, nas direções $x$ e $y$ ;
$\varepsilon_{cx}, \varepsilon_{cy}$	Deformações normais do concreto, nas direções $x$ e $y$ ;
$\varepsilon_{sx}, \varepsilon_{sy}$	Deformações normais da armadura, nas direções $x$ e $y$ ;
$\varepsilon_{c1}$	Deformação principal máxima do concreto;
$\varepsilon_{c2}$	Deformação principal mínima do concreto;
$\varepsilon_{cr}$	Deformação de fissuração do concreto;
$\varepsilon_{si}$	Deformação uniaxial da armadura na direção $i$ ;
$\varepsilon_{sr}$	Deformação da armadura na interface da fissura;
$\varepsilon_p$	Deformação correspondente a resistência de pico do concreto quando submetido ao estado biaxial de tensão;
$\gamma_r$	Deformação tangencial do concreto devido ao deslizamento entre fissuras

$\Delta \epsilon_{si}^r$	Incremento de deformação da armadura na região de interface da fissura;
$\theta$	Ângulo entre o eixo $x$ e a direção normal à fissura;
$\theta_\sigma$	Ângulo entre o eixo $x$ e a direção principal máxima (tração) das tensões;
$\theta_{ni}$	Ângulo entre direção da armadura e a direção normal à fissura;
$\nu_{12}, \nu_{21}$	Coefficiente de Poisson do concreto em relação as direções do eixo de ortotropia;
$\rho_i$	Taxa de armadura do elemento na direção $i$ ;
$\{\sigma\}_{xy}$	Vetor das tensões totais do elemento;
$\{\sigma_c\}$	Vetor das tensões do concreto;
$\{\sigma^0\}$	Vetor das pseudas tensões do elemento;
$\{\sigma_s\}$	Vetor das tensões da armadura;
$\sigma_x, \sigma_y$	Deformações normais do elemento, nas direções $x$ e $y$ ;
$\sigma_{cx}, \sigma_{cy}$	Tensões normais do concreto, nas direções $x$ e $y$ ;
$\sigma_{sx}, \sigma_{sy}$	Tensões normais da armadura, nas direções $x$ e $y$ ;
$\sigma_{c1}$	Tensão principal máxima do concreto;
$\sigma_{c2}$	Tensão principal mínima do concreto;
$\sigma_{si}$	Tensão média da armadura na direção $i$ ;
$\sigma_{sri}$	Tensão da armadura na região da interface da fissura, na direção $i$ ;
$\tau_{xy}$	Tensão cisalhante do elemento;
$\tau_c$	Tensão de cisalhamento do concreto;
$\tau_{ci}$	Tensão de cisalhamento do concreto na interface da fissura ;
$\phi_i$	Diâmetro nominal da barra de aço;
$\xi, \eta$	Coordenadas naturais normalizadas;
$\xi_i, \eta_i$	Coordenadas naturais normalizadas no nó $i$ ;
$\{\delta \epsilon\}$	Vetor de deformações virtuais;
$\{\delta u\}$	Vetor de deslocamentos virtuais de um ponto, segundo os eixos $x$ e $y$ ;
$\{\delta U\}$	Vetor de deslocamentos nodais virtuais de um elemento.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>1.1</b>	<b>Justificativa e Motivações da Pesquisa . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos da Pesquisa . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>1.3</b>	<b>Organização do Trabalho . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>2</b>	<b>PROPRIEDADES DOS MATERIAIS . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>Comportamento do Concreto . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Comportamento do aço . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>2.3</b>	<b>Aderência entre Concreto e Aço . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>2.4</b>	<b>Engrenamento dos Agregados e Efeito de Pino . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>3</b>	<b>MODELAGEM DOS MATERIAIS . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>3.1</b>	<b>Modelagem das Fissuras . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>3.2</b>	<b>Modelagem do Concreto . . . . .</b>	<b>28</b>
3.2.1	Modelos ortotrópicos . . . . .	29
<b>3.3</b>	<b>Modelagem do Aço . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>DISTURBED STRESS FIELD MODEL . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>4.1</b>	<b>Equações de Equilíbrio . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>4.2</b>	<b>Relação entre Tensões Médias e Locais da Fissura . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>4.3</b>	<b>Equações de Compatibilidade . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>4.4</b>	<b>Equações Constitutivas . . . . .</b>	<b>40</b>
4.4.1	Comportamento do concreto sob compressão-tração biaxial . . . . .	40
4.4.2	Comportamento do concreto sob compressão biaxial . . . . .	41
4.4.3	Comportamento do concreto sob tração biaxial . . . . .	42
4.4.4	Comportamento do aço . . . . .	43
<b>4.5</b>	<b>Matriz Constitutiva dos Materiais . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>5</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>5.1</b>	<b>Mapeamento do Elemento . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>5.2</b>	<b>Campo dos Deslocamentos . . . . .</b>	<b>51</b>
<b>5.3</b>	<b>Campo de Deformação . . . . .</b>	<b>51</b>
<b>5.4</b>	<b>Transformação de Coordenadas . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>5.5</b>	<b>Campo de Tensões . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>5.6</b>	<b>Formulação pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>5.7</b>	<b>Integração Numérica . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>5.8</b>	<b>Método para Solução dos Sistemas Não Lineares . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>6</b>	<b>ESTRUTURA DO CÓDIGO . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>6.1</b>	<b>Pré-Processamento . . . . .</b>	<b>62</b>

<b>6.2</b>	<b>Processamento</b> . . . . .	<b>63</b>
6.2.1	Sub-rotina para cálculo das tensões na armadura . . . . .	64
6.2.2	Sub-rotina para Cálculo das Tensões no concreto . . . . .	64
6.2.2.1	<i>Estado de tração biaxial</i> . . . . .	65
6.2.2.2	<i>Estado de compressão-tração biaxial</i> . . . . .	66
6.2.2.3	<i>Estado de compressão biaxial</i> . . . . .	66
6.2.3	Sub-rotina para o cálculo das tensões locais . . . . .	67
<b>7</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>7.1</b>	<b>Experimentos de Lefas, Kotsovos e Ambraseys (1990)</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>7.2</b>	<b>Experimentos de Cervenka e Gerstle (1971)</b> . . . . .	<b>74</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>77</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>79</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, as estruturas de concreto armado compreendem grande parte da infraestrutura mundial. Exemplo de tais estruturas incluem edifícios, pontes, construções offshore e silos. Portanto, para garantir a segurança e durabilidade dessas construções é de extrema importância um bom conhecimento de seu comportamento.

Com o avanço da tecnologia e a chegada dos computadores, modelos numéricos começaram a serem inseridos no âmbito da engenharia estrutural, permitindo aos engenheiros analisar estruturas cada vez mais complexas, seja pela sua geometria ou pelas propriedades dos materiais, que antes levariam muito tempo para serem resolvidas.

Um método bastante eficaz para a análise não linear de elementos de concreto armado é o Método dos Elementos Finitos. A partir de um conjunto de condições de equilíbrio, compatibilidade e relações constitutivas adequadas, é possível obter boas estimativas de capacidade de carga, modos de ruptura e toda a curva de carga por deslocamento dessas estruturas.

Apesar de todo avanço das últimas décadas, a análise das peças que rompem principalmente à esforços cisalhantes, continuam sendo um problema na Engenharia Estrutural. Durante todo século XX, século da invenção do concreto armado, foram desenvolvidas mais de uma centena de teorias de ruptura ao esforço cortante de vigas normais (COLLINS et al., 1996). Em contraste, existe uma única teoria, universalmente aceita, de resistência das vigas de concreto armado à flexão, produzida na década de 1960 por Rush.

O motivo da insatisfação com as teorias de resistência ao cortante propostas até hoje reside na grande dispersão dos seus resultados, frente aos ensaios experimentais. Essa dispersão, provavelmente, deve-se à existência de diferentes escalas de comportamentos com diferentes mecanismos internos, como: fissuração do concreto, transmissão dos esforços através das fissuras (engrenamento dos agregados e efeito de pino). Como consequência, as normas de projeto de cada país são baseadas em diferentes teorias e possuem uma pequena confiabilidade estatística, que geram exigências normativas com grande margem de segurança.

Dentro deste panorama, a análise desses tipos de estruturas vem sendo fortemente estudadas nas últimas quatro décadas. Diversas teorias relacionadas ao esforço cortante em peças de concreto armado foram desenvolvidas, das quais podemos citar: Vecchio e Collins (1986), Hsu (1988), Kaufmann e Marti (1998), Vecchio (2000).

Dentre essas teorias, o *Modified Compression Field Theory* (MCFT), proposta por Vecchio e Collins (1986), é uma das mais importantes teorias para análise não linear de elementos de concreto armado, sendo base para vários outros modelos. O MCFT surgiu como um modelo analítico, incorporando ao *Compression Field Theory* (COLLINS, 1978) os efeitos de *tension-stiffening* e em seguida implementado em MEF por Vecchio (1989).

Neste trabalho é apresentado um código em Elementos Finitos baseado no *Disturbed Stress Field Model* (DSFM) proposto por Vecchio (2000), considerado como uma expansão do

MCFT para análise não linear de estrutura de concreto armado sujeito ao estado plano de tensões.

## 1.1 Justificativa e Motivações da Pesquisa

O principal objetivo de qualquer engenheiro estrutural é projetar de forma econômica e segura. Um amplo conhecimento no comportamento dessas estruturas é indispensável para garantir sua segurança e vida útil.

O comportamento das estruturas que rompem ao esforço cortante ainda não é muito bem entendido, isto deve-se o fato de ocorrência de mecanismo internos bastantes complexos e de grande variabilidade estocástica (engrenamento dos agregados, fissuração efeito de pino). Com isto, não existe uma teoria universalmente válida, cada uma com suas limitações.

O MCFT é um dos principais modelos para a análise de estruturas de concreto armados sujeitos ao estado plano de tensão, servindo de base para várias outras teorias. O DSFM surgiu como uma extensão do MCFT, proporcionando ao modelo melhorias em sua teoria e nas relações constitutivas dos materiais. Os dois modelos provaram ser bastante eficazes, fornecendo boas estimativas de capacidade de carga, modo de falha e curva carga-deslocamento.

Consequentemente, combinar o Método dos Elementos Finitos com o MCFT e DSFM se faz uma ferramenta bastante útil para avaliar o comportamento das estruturas de concreto armado. Os autores já possuem um software para a análise não linear disponível em sua versão básica, gratuitamente (Vector2). Porém esta versão é limitada quanto ao número de elementos. Além do mais, o programa é fechado, o que impossibilita o usuário implementar novas teorias ou relações constitutivas.

Portanto, desenvolver um código aberto, com todos os procedimentos de implementação explicados de forma sucinta, pode possibilitar os engenheiros estruturais um maior entendimento do modelo, além de permitir a implementação de novos elementos, relações constitutivas e teorias (como dito anteriormente, o MCFT é base de várias outras teorias). Ainda mais, elimina a restrição da quantidade de elementos, permitindo a análise de grandes estruturas.

## 1.2 Objetivos da Pesquisa

O principal objetivo deste trabalho é apresentar um modelo de análise não linear de estruturas de concreto armado submetidos ao estado plano de tensões através do Método dos Elementos Finitos. Toda programação do código será desenvolvido no software MATLAB.

A teoria para representar o comportamento do concreto armado foi fortemente baseada nos modelos do MCFT e DSFM. Como esses modelos foram propostos considerando o concreto fissurado, algumas teorias adicionais foram consideradas para aprimorar os resultados, principalmente para o concreto submetido ao estado de compressão biaxial.

Afim de validar o programa desenvolvido, estudos comparativos entre os resultados

numéricos com resultados experimentais obtidos na literatura foram realizados. Como também entre o software Vector2, desenvolvido na Universidade de Toronto pelo Professor Vecchio e alguns outros pesquisadores, para análise não linear de concreto armado. Este programa também tem como base as teorias do MCFT e DSFM.

### **1.3 Organização do Trabalho**

Este presente trabalho está organizado em oito capítulos.

O segundo capítulo, apresenta um breve resumo das propriedades mais relevantes do concreto e do aço. Além de descrever alguns dos principais mecanismos que afetam o comportamento do concreto armado.

O terceiro capítulo descreve os modelos mais utilizados para representar as fissuras, o concreto e o aço no Método dos Elementos Finitos. Com uma maior ênfase nos modelos ortotrópicos.

O quarto capítulo apresenta os conceitos e formulações do Disturbed Stresses Field Model.

O quinto capítulo descreve as formulações básicas do Método dos Elementos Finitos pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. Em seguida aborda-se as formulações para um elemento isoparamétrico quadrilateral, apresentando quatro nós e dois graus de liberdade por nó.

O sexto capítulo apresenta a estrutura do código computacional, descrevendo de maneira sucinta os principais procedimentos de implementação do modelo.

O sétimo capítulo apresenta os resultados obtidos das análises numéricas de alguns experimentos obtidos na literatura. Como também, faz-se uma análise estatística entre eles.

Por fim, o oitavo capítulo, aborda as principais conclusões e contribuições obtidas da pesquisa, assim como propostas para continuidade do trabalho.

## 2 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

O concreto armado é um material formado por concreto com barras convenientemente dispostas em seu interior. O concreto é caracterizado por seu bom desempenho quando submetido à compressão, porém não responde bem à tração, considera-se sua resistência à tração como cerca de 10 % da de compressão. Assim, as barras de aço assumem a função de resistir esses esforços, podendo também auxiliar o concreto à absorver tensões de compressão.

A aderência é o mecanismo mais importante para que exista o concreto armado. É ela que garante que os dois materiais trabalhem junto, impedindo que a armadura deslize do concreto que a envolve, garantindo a compatibilidade das deformações.

O comportamento do concreto armado é bastante complexo, envolvendo diversos mecanismos internos, que tornam a resposta não linear. Dentre os principais mecanismos podemos citar a fissuração do concreto, escoamento da armadura, transferências de esforços entre fissuras (engrenamento dos agregados e efeito de pino), esmagamento do concreto e perda de aderência entre o aço e o concreto.

Portanto, neste capítulo pretende-se apresentar as propriedades relevantes do concreto e do aço submetidos ao estado plano de tensões, assim como, descrever brevemente os principais mecanismos que envolve as estruturas de concreto armado para uma melhor compreensão de seu comportamento.

### 2.1 Comportamento do Concreto

O concreto é um material composto basicamente por uma mistura de agregados (miúdos e graúdos), cimento e água. Apesar do comportamento linear e frágil dos seus componentes, a relação tensão-deformação do concreto sob compressão uniaxial não é linear e apresenta um certo grau de ductilidade. Um dos fatores que contribuem para esta não linearidade é crescimento e formação das micro-fissuras pré-existentes do concreto. Segundo MacGregor et al. (1997), nos ensaios de compressão uniaxial, pode-se observar quatro estágios principais no comportamento e desenvolvimento das fissuras do concreto, ilustrado pela Figura 1.

1. Antes mesmo de sofrer algum carregamento externo, o concreto apresenta microfissuras decorrentes da variação de umidade e expansão térmica. Essas fissuras permanecem estáveis e tem pouco efeito sobre o concreto em tensões de até cerca de 30% da resistência última do concreto,  $f_c$ , apresentando um comportamento linear.
2. Quando submetido à tensões entre 30% e 40% de  $f_c$ , as tensões nas interfaces entre a pasta de cimento (cimento + areia + água) e o agregado graúdo excedem suas resistências à tração e ao cisalhamento, e conseqüentemente, novas fissuras surgem. As fissuras que se formam nas interfaces entre a pasta de cimento e agregado são denominada fissuras de aderência. Essas fissuras também são estáveis e se propagam apenas com o aumento

de tensão. Porém, qualquer tensão adicional nas interfaces fissuradas são redistribuídas para as interfaces intactas e para a pasta de cimento. Essa capacidade de redistribuição de tensões do concreto provoca uma gradual inclinação na curva tensão-deformação para tensões acima de 40% de  $f_c$ .

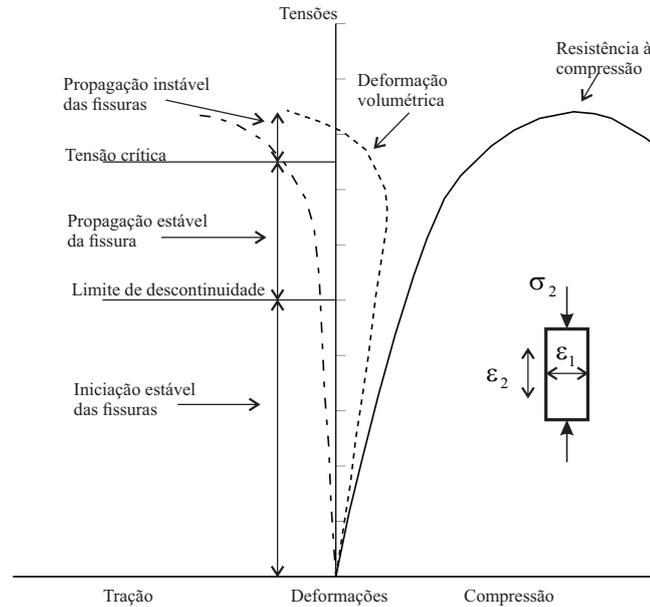
3. A medida em que as tensões atingem valores entre 50% e 60% da resistência última do concreto, fissuras na pasta de cimento começam a surgir. Essas fissuras ocorrem paralelamente à direção do carregamento e são decorrentes das deformações de tração transversais. Este estágio é denominado de limite de descontinuidade e durante ele, a propagação das fissuras são dadas de forma estáveis.
4. Quando as tensões atingem 75% à 80% da resistência última à compressão, as fissuras na argamassa aumentam de número e tamanho, tornando a curva tensão-deformação ainda mais não linear. Essas fissuras se vinculam às fissuras na interface, de modo a formar um padrão contínuo das fissuras. Esse estágio é denominado de tensão crítica, e as fissuras se propagam de modo instável, ou seja, se a carga for mantida constante, a ruptura vai ocorrer com o decorrer do tempo.

As deformações volumétricas também estão ilustradas na Figura 1. Como visto, o concreto sob compressão apresenta uma expansão lateral caracterizada pelas microfissuras existentes no concreto, que aumentam a medida que aumenta a tensão de compressão, como era de se esperar devido ao efeito de Poisson. Porém, perto do pico de resistência à compressão, valores entre 75% e 80% de  $f_c$ , as fissuras se tornam rapidamente cada vez maiores e a partir deste ponto, observa-se uma inversão de uma contração de volume lenta para um rápido aumento de volume.

Em contraste com a resposta sob compressão uniaxial, o concreto apresenta um comportamento quase linear até a ruptura nos ensaios à tração uniaxial.

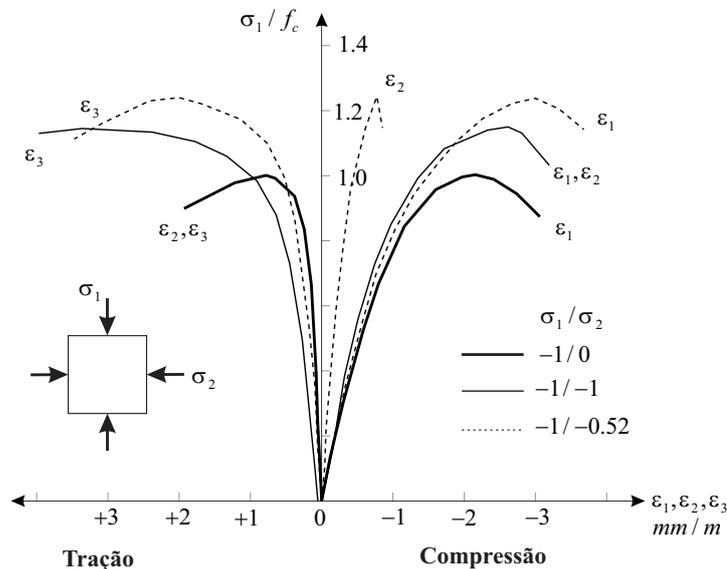
Além do mais, o comportamento das curva tensão-deformação e resistência mecânica quando o concreto é submetido à tensões biaxiais são diferentes dos resultados uniaxiais. O trabalho apresentado por Kupfer, Hilsdorf e Rusch (1969) mostrou que a resistência do concreto quando submetido ao estado de compressão biaxial pode alcançar valores maiores comparados com a resistência uniaxial. Conforme ilustrado na Figura 2, os valores são de aproximadamente 27% para a combinação  $\sigma_2/\sigma_1 = 0.5$  e cerca de 16% para  $\sigma_2/\sigma_1 = 1.0$ .

Figura 1 – Relação tensão-deformação do concreto sob estado uniaxial de compressão



Fonte: MacGregor et al. (1997).

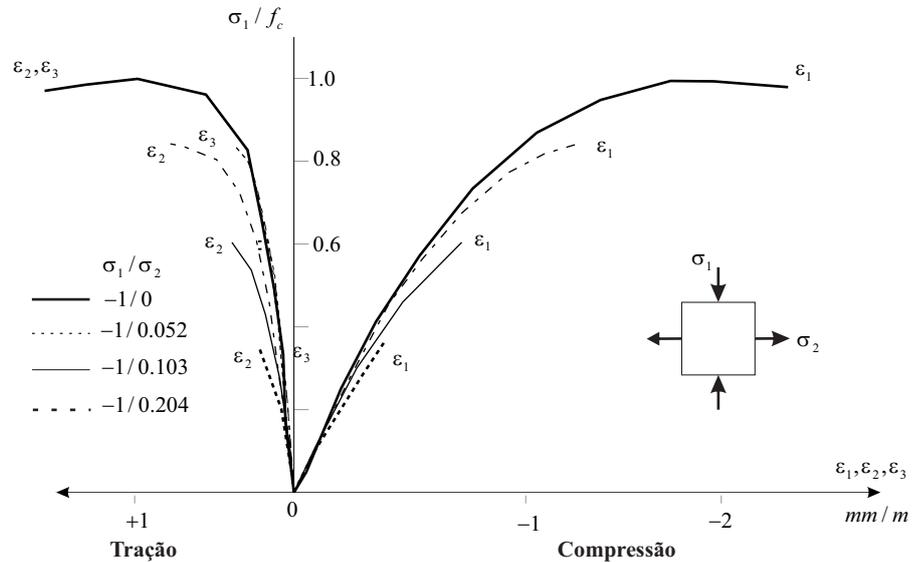
Figura 2 – Relação tensão-deformação do concreto sob estado de compressão biaxial



Fonte: Kupfer, Hilsdorf e Rusch (1969).

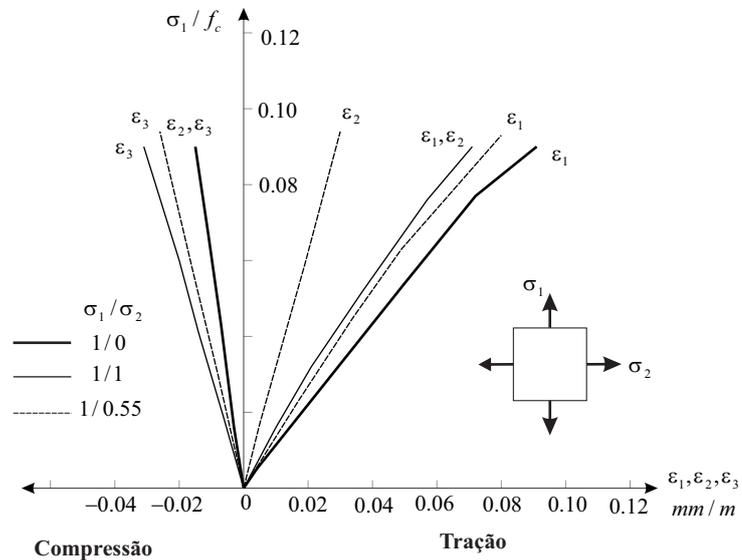
Sob tração-compressão biaxial, representada pela Figura 3, a resistência à compressão do concreto é reduzida pela presença das tensões de trações, este efeito é denominado de *compression-softening*. Por fim, o comportamento do concreto quando submetido à tração biaxial (Figura 4), apresenta comportamentos independentes e similares ao estado uniaxial de tração.

Figura 3 – Relação tensão-deformação do concreto sob estado de compressão-tração biaxial



Fonte: Kupfer, Hilsdorf e Rusch (1969).

Figura 4 – Relação tensão-deformação do concreto sob estado de tração biaxial



Fonte: Kupfer, Hilsdorf e Rusch (1969).

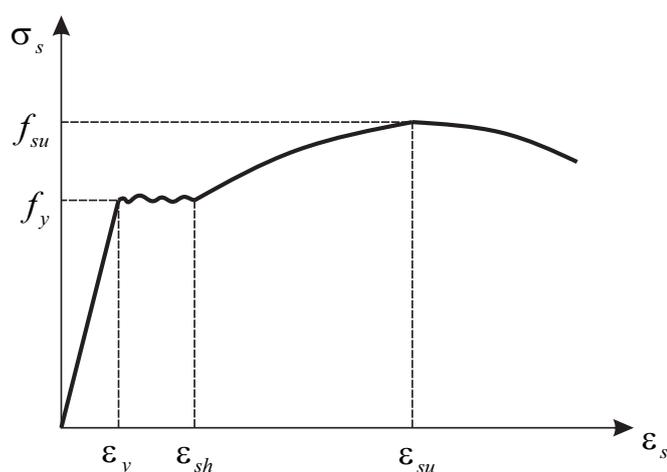
## 2.2 Comportamento do aço

As propriedades do aço são obtidas a partir de ensaios experimentais de tração uniaxiais. Suas propriedades e comportamento dependem do seu modo de fabricação. Em geral, em concreto armado, utiliza-se os aços laminados à quente. Esse tipo de aço possui quatro estágios bem definidos, como ilustrado na Figura 5 e resumido a seguir.

1. O primeiro corresponde uma fase linear elástica, definida por  $0 \leq \epsilon_s \leq \epsilon_y$ , onde  $\epsilon_y$  é a deformação específica correspondente à tensão de escoamento do aço,  $f_y$ .
2. Em seguida um patamar de escoamento, definida por  $\epsilon_y \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{sh}$ , onde  $\epsilon_{sh}$  é a deformação específica que define o início do encruamento. Este estágio é praticamente linear, embora ocorra algumas flutuações nas tensões.
3. Logo após se observa um trecho de encruamento, definido por  $\epsilon_{sh} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{su}$ , onde  $\epsilon_{su}$  é a deformação específica correspondente a tensão última do aço,  $f_{su}$ .
4. Por fim, o aço ainda apresenta uma região posterior a tensão última, chamada de região de amolecimento, definida por  $\epsilon_s > \epsilon_{su}$ . Nesta região ocorre a perda de resistência até a ruptura do material.

Em geral, o comportamento do aço à compressão é considerado o mesmo descrito acima para a tração.

Figura 5 – Curva tensão-deformação para o aço



Fonte: O Autor (2019).

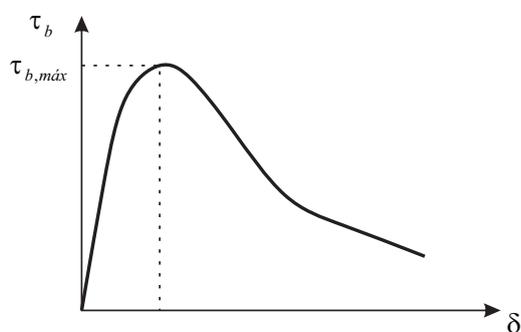
### 2.3 Aderência entre Concreto e Aço

A aderência é uma tensão de cisalhamento entre o aço e o concreto que o envolve, impedindo o deslizamento,  $\delta$ , entre a barra de aço e o concreto, garantindo assim, a compatibilidade das deformações entre os dois materiais.

Seu comportamento pode ser avaliado através do ensaio de arrancamento (*pull-out teste*). Que consiste em submeter uma barra de aço inserida em um cilindro de concreto à uma força de tração (ver Figura 7). A Figura 6 representa o comportamento da aderência entre os dois materiais a partir do ensaio de arrancamento. Nota-se um aumento de tensão a medida que a

barra de aço desliza do concreto, até atingir um valor máximo  $\tau_{b,max}$ , a partir deste ponto, a aderência entre os dois materiais começa a se deteriorar, comprometendo o funcionamento da estrutura.

Figura 6 – Relação entre a tensão de aderência e o deslocamento relativo entre o concreto e o aço



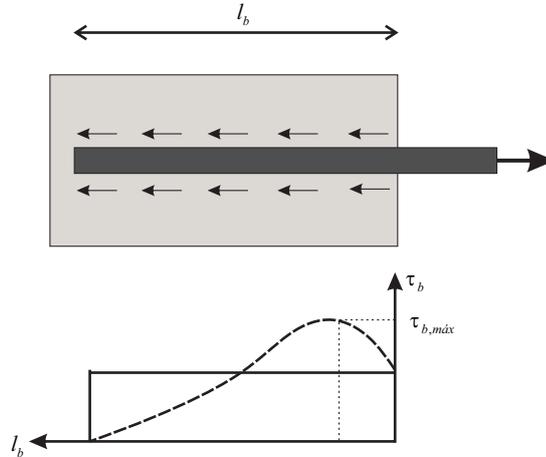
Fonte: O Autor (2019).

Watstein (1941) foi um dos pioneiros a estudar este comportamento, e observou que a tensão de aderência ao longo da barra de aço, atinge seu valor máximo próximo da área de contato entre aço-concreto (ver Figura 7). Para garantir a transferência de esforços entre as barras e o concreto, é necessário um comprimento mínimo,  $l_b$ , de imersão da barra tal que as tensões de cisalhamento, na extremidade da barra, sejam nulas. Este comprimento é chamado de comprimento de ancoragem.

Uma maneira simplificada em abordar o problema, é considerar uma distribuição uniforme de tensões ao longo da barra aderida ao concreto. Assim, a força aplicada ao aço pode ser calculada como o produto da tensão cisalhante pela área de aderência.

As consequência dos efeitos da aderência no comportamento estrutural do concreto armado, quando o mesmo encontra-se fissurado, é denominada *tension-stiffening*. Este fenômeno está relacionado com a contribuição do concreto na rigidez da barra de aço tracionada, em comparação com a barra nua.

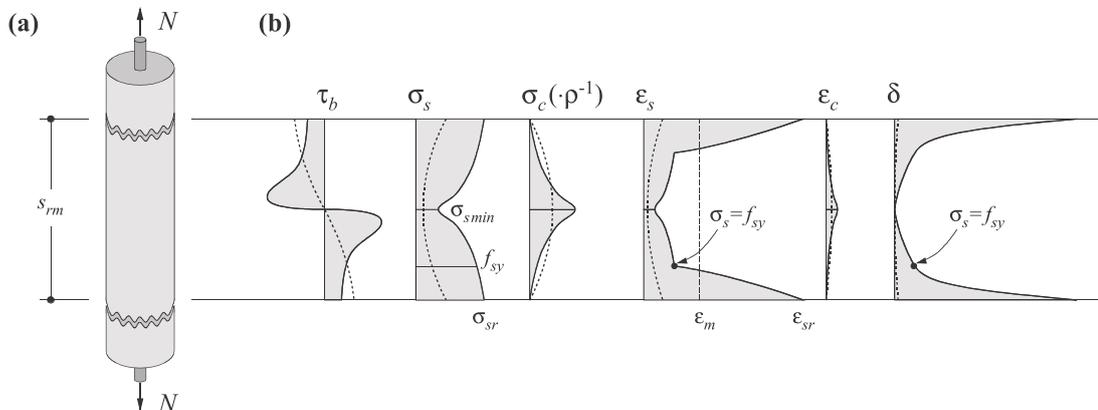
Figura 7 – Ensaio de arrancamento (pull-out teste) e distribuição de tensões ao longo da barra



Fonte: O Autor (2019).

O mecanismo do *tension-stiffening* pode ser bem explicado através do *Tension Chord Model*, apresentado por Marti et al. (1998). A Figura 8(a) apresenta um prisma de concreto armado tracionado. As distribuições das tensões ao longo deste elemento estão representado na Figura 8(b). Na região da fissura as tensões no concreto,  $\sigma_c$ , são nulas e apenas a armadura resiste aos esforços de tração. Porém na região entre fissuras, tensões de aderência,  $\tau_b$ , são transferidas do aço para o concreto que as envolve, permitindo que o concreto resista à tensões de tração, mesmo depois de fissurado. Além disto, no centro o aço encontra-se totalmente aderido ao concreto, desta forma, as tensões na armadura,  $\sigma_s$ , atingem seus valores mínimos e no concreto valores máximos.

Figura 8 – *Tension-Stiffening*: (a) prisma de concreto armado tracionado e (b) distribuição de tensões ao longo do elemento



Fonte: Kaufmann (2013).

## 2.4 Engrenamento dos Agregados e Efeito de Pino

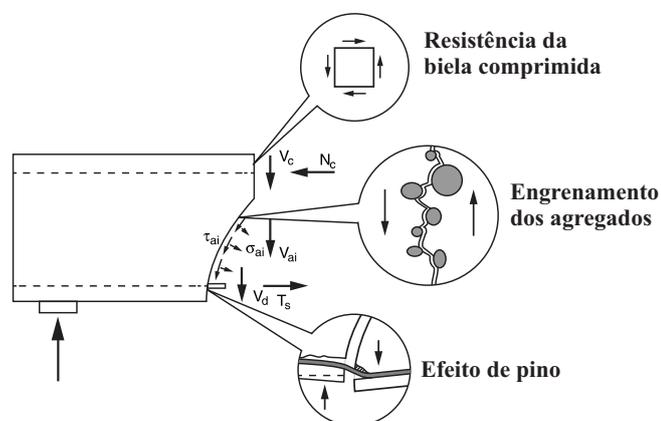
Esses dois mecanismos, representados pela Figura 9, são responsáveis por resistir uma parcela considerável dos esforços cortantes, especialmente em vigas com relação altura e vão de cisalhamento igual ou superior à dois, quando não armadas com estribos.

O mecanismo dos engrenamentos dos agregados está ligado à maneira na qual as fissuras são formadas. Devido a grande diferença entre as resistências da matriz de cimento e dos agregados graúdos, as fissuras tendem a percorrer as regiões da matriz e das interfaces entre a matriz e os agregados graúdos, formando duas superfícies rugosas, com uma espécie de dentes, em decorrência da presença dos agregados que sobressaem de suas faces.

À medida em que se aplica um determinado carregamento, as fissuras tendem a se separar através de um deslizamento entre as duas superfícies. Esse deslizamento é impedido pelo um bloqueio mecânico da superfície rugosa e principalmente dos agregados graúdos, proporcionando uma transferência de tensões de cisalhamento através da fissura.

Além disto, as armaduras também desempenha um importante papel para resistir aos esforços cortante através do efeito de pino. Este mecanismo é basicamente a capacidade da barra de aço resistir aos esforços de cargas transversais.

Figura 9 – Mecanismos de transferência de esforço cortante



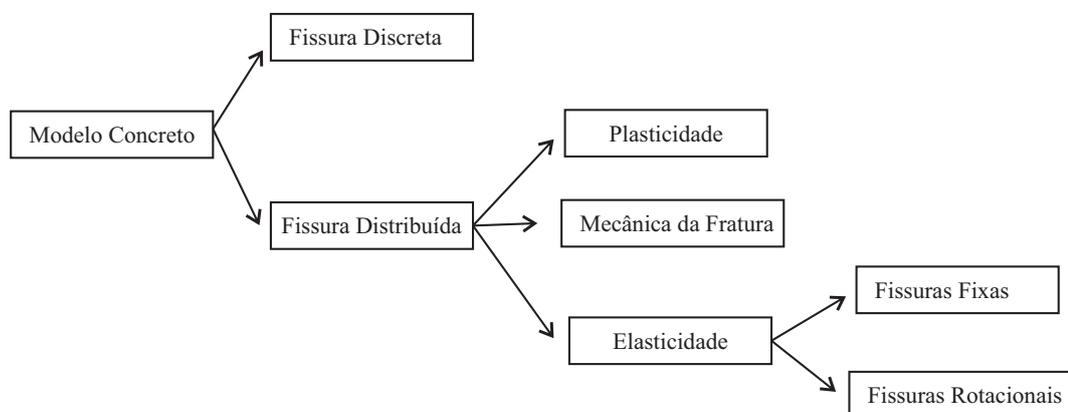
Fonte: Yang, Walraven e Uijl (2016).

### 3 MODELAGEM DOS MATERIAIS

O Método dos Elementos Finitos tem sido uma grande ferramenta para análise não linear de estruturas de concreto armado. A partir de equações de equilíbrio, compatibilidade e relações constitutivas, é possível obter informações de extrema importância para o engenheiro estrutural, como carga de ruptura, histórico de carga-deslocamento e fissuração do concreto.

Para isto, a escolha dos modelos mais adequados para o problema a ser analisado é de extrema importância para se obter bons resultados. Sendo assim, neste capítulo, apresenta-se os principais modelos para representar as fissuras, o concreto e o aço. Um desenho esquemático está representado na Figura. 10 para a modelagem do concreto.

Figura 10 – Desenho esquemático para modelagem do concreto



Fonte: O Autor (2019).

Neste trabalho, adotou-se um modelo ortotrópico, baseado na teoria da Elasticidade, com fissuras e armaduras consideradas distribuídas ao longo do elemento, com base na teoria do DSFM.

#### 3.1 Modelagem das Fissuras

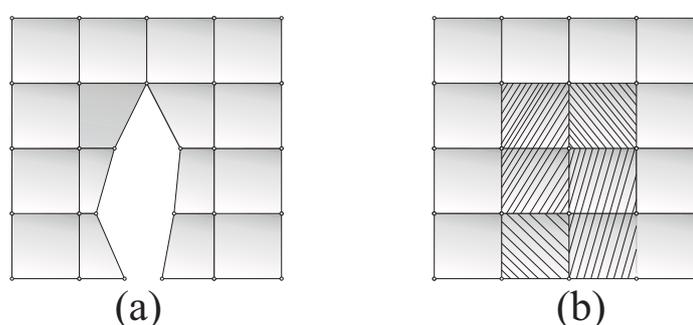
O processo de fissuração é uma das principais características do concreto armado. Sendo assim, representa-las da melhor forma é de extrema importância para a análise de estruturas de concreto armado. Na análise pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), existem basicamente duas formas de representar as fissuras: fissuras discretas e distribuídas.

As fissuras discretas, (Figura 11(a)), foram primeiramente abordadas por Ngo e Scordelis (1967). Os autores modelaram as fissuras como uma descontinuidade da malha, através das separações dos nós onde ocorre a fissura. Apesar deste modelo ser mais realista, sua implementação se torna mais complicada pelo fato da necessidade da atualização e refinamento da malha, demandando um maior esforço computacional.

Já no modelo de fissuras distribuídas (Figura 11(b)), proposto por Rashid (1968), o concreto fissurado é considerado um elemento contínuo com as fissuras espalhadas em ao longo de sua região. O efeito da degradação do elemento devido o processo de fissuração é considerada a partir das mudanças das propriedades do material, através de relações constitutivas apropriadas.

Em geral, o modelo de fissuras distribuídas é mais utilizado para a análise de estruturas de concreto armado, principalmente pela facilidade de implementação computacional e também por conseguir representar bem o mecanismo da fissuração. Porém, deve-se ter alguns cuidados com este modelo, pois as respostas podem ser significativamente afetadas pela malha adotada, podendo levar a resultados fisicamente sem sentido (NUH; BRUUN; BENTZ, 2017).

Figura 11 – Modelos de fissura: (a) fissura discreta e (b) fissura distribuída



Fonte: O Autor (2019).

### 3.2 Modelagem do Concreto

Os modelos para o concreto podem ser classificados dependendo da hipótese adotada. Em geral, os mais utilizados são baseados na teoria da plasticidade, na mecânica da fratura e do dano e na teoria da elasticidade não linear.

Os modelos de plasticidade fazem uma distinção das deformações em elásticas e plásticas. O comportamento do material é definido a partir de superfícies que estabelece o início de plastificação (*Yiel Criterion*). As superfícies de plastificação mais comuns são baseadas na teoria de Mohr-Column, Drucker-Prager, Prandtl-Ruess e Willam-Warnke. Todos esses modelos estão descritos em Chen (1982).

A mecânica da fratura e do dano é uma teoria que, originalmente, foi formulada apenas para materiais homogêneos de comportamento frágeis. A partir da década dos anos 80, começaram a surgir formulações com aplicações ao concreto simples e armado. Este modelo tenta reproduzir o comportamento da propagação das fissuras do concreto.

Os modelos baseados na elasticidade não linear utilizam funções não lineares para representar o comportamento do material. Dentre todas as teorias são as mais utilizadas, devido sua simplicidade e bons resultados. Este modelo é dividido basicamente em duas categorias,

hiperelástico e hipoeelástico . O primeiro considera as relações constitutivas em termos das deformações totais enquanto que o segundo em termos de deformações incrementais. Como consequência, os modelos hiperelásticos independem da trajetória das deformações, uma vez que as tensões são calculadas apenas pela deformação corrente, já os hipoeelástico o estado de tensões variam de acordo com o caminho das deformações.

Neste trabalho, utilizou-se o modelo ortotrópico, proposto por Darwin e Pecknold (1977), baseado na teoria da elasticidade não linear. A seguir serão apresentados alguns dos principais teorias formuladas considerando o concreto armado como um material ortotrópico.

### 3.2.1 Modelos ortotrópicos

O modelo ortotrópico para o concreto foi proposto por Darwin e Pecknold (1977), assumindo que seu comportamento biaxial pode ser representado por duas curvas de tensão-deformação uniaxial distintas em relação ao seus eixos principais de tensão, através do conceito de deformações uniaxiais equivalentes.

Este modelo é dividido em duas categorias, fissuras rotativas e fixas. No primeiro método, as fissuras são livres para rotacionar, de forma que sempre permaneça perpendicular à direção principal de deformação máxima. Já as fissuras fixas, considera que uma vez fissurado, a direção da fissura permanece a mesma durante todo processo de fissuração.

Nas ultimas décadas, diversas teorias vem sendo formuladas baseadas no modelo ortotrópico. Dentre as principais podemos citar: Vecchio e Collins (1986), Hsu (1988) , Kaufmann e Marti (1998) , Vecchio (2000).

O *Modified Compression Field Theory* (MCFT), proposta por Vecchio e Collins (1986), foi uma das mais importantes teorias na análise não linear de painéis de concreto armado sujeitos ao estado plano de tensões, sendo base de diversas outras teorias. O MCFT surgiu como um modelo analítico, incorporando ao CFT (COLLINS, 1978) os efeitos de *tension-stiffening* e em seguida implementado em MEF por Vecchio (1989).

Todo conceito do modelo foi criado a partir da elaboração de equações de equilíbrio e compatibilidade em termos de deformações e tensões médias, e suas relações constitutivas foram formuladas de forma empírica a partir das observações de ensaios de trinta painéis submetidos ao estado plano de tensões. No entanto, condições nas regiões locais da fissura foram impostas de modo a manter a compatibilidade entre as tensões nas regiões médias (regiões entre duas fissuras consecutivas) e locais da fissura.

A hipótese adotado no MCFT, supõe que, quando fissurado, as direções das tensões principais coincidem com a direção das deformações principais do concreto. As fissuras são consideradas distribuídas ao longo do elemento e podem rotacionar durante a aplicação do carregamento, de modo que sempre permaneça perpendicular à direção das deformações principais máxima do concreto.

Embora o MCFT apresente, na maioria dos casos, bons resultados numéricos em relação aos experimentais. Vecchio (2000) apresentou o *Disturbed Stress Field Model* (DSFM), como uma extensão do MCFT, com o objetivo de tratar algumas deficiências apresentadas no MCFT, provenientes da simplificação de colinearidade das direções das tensões médias principais com as deformações médias principais. O conceito do DSFM é similar ao do MCFT, porém incorpora uma deformação de corpo rígido decorrentes ao deslizamento das superfícies da fissura nas condições de compatibilidade.

O *Cracked Membrane Model* (CMM) foi desenvolvido por Kaufmann e Marti (1998), para a análise de painéis de concreto armado. O modelo é baseado nos conceitos do MCFT, porém os efeitos do *tension-stiffening* são tratados a partir das formulações do *Tension Chord Model* (TCM), proposto por Marti et al. (1998).

Nas formulações do TCM, a relação entre a tensão de cisalhamento e o deslocamento relativo entre o aço e o concreto são apresentadas como um comportamento rígido perfeitamente plástico, permitindo uma solução analítica para a distribuição de tensões ao longo do elemento de concreto armado. O TCM eliminou a necessidade de formulações empíricas para o efeito do *tension-stiffening*.

Diferentemente do MCFT, as equações de equilíbrio são formuladas em termos das tensões locais da fissura, permitindo ao CMM uma ligação com o método de análise limite de plasticidade (KAUFMANN, 2013).

O CMM foi implementado em Elementos Finitos primeiramente por Foster e Marti (2003), como modelo de fissuras rotativas. Mais tarde Dabbagh e Foster (2006) e Pimentel, Brühwiler e Figueiras (2010), apresentaram uma formulação mais complexa, incorporando um modelo de fissuras fixas.

Por fim, o *Softened Truss Models* (STM) foi desenvolvido pela Universidade de Houston por Hsu e outros pesquisadores. O STM foi primeiramente formulado para análise de elementos sujeitos à ação do cisalhamento e torção, por Hsu (1988). As equações de equilíbrio e compatibilidade são baseada nos mesmos princípios do MCFT, nas quais as deformações e tensões são em termos dos valores médios. Assim como o MCFT, as relações constitutivas do concreto também foram formuladas empiricamente a partir da observação de experimentos de vários painéis sujeitos a diferentes condições de carregamento. A principal diferença entre as relações constitutivas dos dois modelos, se dá por uma nova abordagem nas relações constitutivas do aço, proposta por Belarbi e Hsu (1994), que se comporta de maneira diferente quando está inserido ao concreto.

O STM foi expandido para a análise de elementos sob ações no plano primeiramente por Pang e Hsu (1995). Neste modelo as fissuras foram consideradas livres para rotacionar e por isto foi chamado de *Rotating Angle Softened Truss Model* (RA-STM). Um ano após, Pang e Hsu (1996), propôs um novo modelo, agora considerando fissuras fixas, denominado *Fixed Angle Softend Truss Model* (FA-STM).

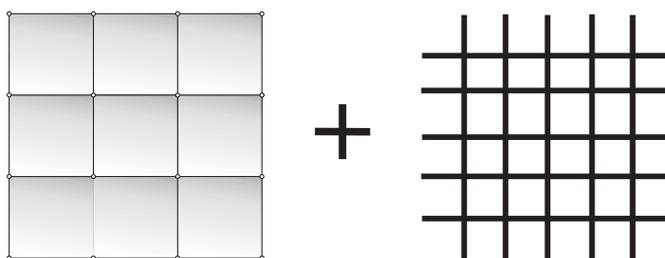
Hsu e Zhu (2002), propõem o *Softened Membrane Model* (SMM), como uma extensão do FA-STM, com o objetivo de simplificar-lo e introduzir o parâmetro denominado de Hsu-Zhu (ZHU; HSU, 2002), para considerar o efeito de Poisson quando o concreto encontra-se fissurado.

### 3.3 Modelagem do Aço

As armaduras podem ser representadas basicamente de três maneiras: armadura distribuída, discretas e embutidas.

No modelo de armaduras distribuídas, ilustrado na Figura 12, considera-se que o concreto armado é um material homogêneo. A matriz constitutiva deste novo material é formado pela soma da contribuição do concreto e do aço. A compatibilidade entre os dois materiais se dá multiplicando a contribuição da armadura pela taxa de armadura, que é calculada pela razão da área de aço pela área de concreto.

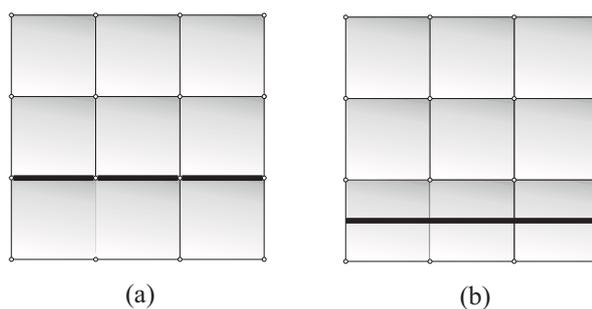
Figura 12 – Modelo para armaduras distribuídas



Fonte: O Autor (2019).

As armaduras discretas, representado na Figura 13(a), são representadas por elementos de barra (dois graus de liberdade por nó) ou de viga (três graus de liberdade por nó) conectado aos nós da malha. Com isso, torna o modelo uma representação mais realista. A rigidez do elemento discreto é sobreposta à rigidez do elemento de concreto, nos seus respectivos graus de liberdade. A grande vantagem deste modelo é poder considerar os deslocamentos relativos entre o concreto e o aço, simulando o efeito de aderência, através de elementos especiais. Porém, como os elementos têm que coincidir com os nós da malha, a sua aplicação pode ser limitada.

Figura 13 – Modelo para armaduras: (a) armadura discreta e (b) armadura embutida



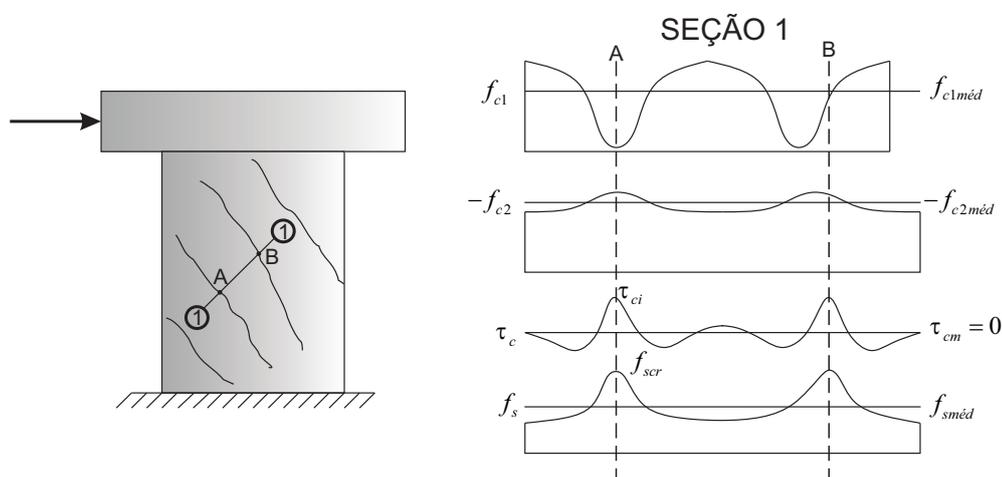
Fonte: O Autor (2019).

Em geral, as armadura embutidas, apresentada na Figura 13(b), são representadas por elementos uniaxiais interno no elemento de concreto armado, impondo condições de compatibilidade nos deslocamento dos elementos em todos os pontos. Uma grande vantagem deste elemento é que a armadura pode ser representada com qualquer orientação, inclusive curvas, permitindo modelagem de cabos de protensão.

#### 4 DISTURBED STRESS FIELD MODEL

O DSFM foi proposto por Vecchio (2000) como uma extensão do MCFT. Segundo o autor, o principal avanço da teoria foi a inclusão de uma deformação de corpo rígido, relativo ao deslizamento das superfícies da fissura, na formulação das equações de compatibilidade. Esta modificação ocasionou em uma reorientação nas direções principais das tensões e deformações médias, tornando-as não necessariamente coincidentes. Além disto, incorporou um novo tratamento para as regiões locais da fissura, eliminando a necessidade da verificação da compatibilidade das tensões médias, que segundo o autor, é um aspecto que não foi bem entendido por outros pesquisadores e por isso vem sendo ignorado nas implementações do MCFT, embora seja um componente importante da formulação do modelo.

Figura 14 – Comportamento das tensões nas regiões entre fissuras e regiões locais da fissura



Fonte: Vecchio (2000).

A hipótese adotada no DSFM admite que quando fissurado, o concreto armado pode ser tratado como um novo material com leis constitutivas próprias. O concreto é modelado como um material ortotrópico, ou seja, suas propriedades físicas dependem das direções principais médias das deformações. As fissuras são consideradas distribuídas ao longo do elemento e podem rotacionar com o carregamento, de modo que sempre permaneça perpendicular a direção principal das deformações máxima do concreto.

Todo conceito do modelo foi elaborado a partir da formulação de equações de equilíbrio e compatibilidade combinando o comportamento das tensões nas regiões entre fissuras e as regiões locais da fissura. A Figura 14 ilustra bem os conceitos que foram adotados. Conforme o carregamento aplicado aumenta de intensidade, as tensões internas começam a aumentar até que a resistência à tração do concreto é excedida, a partir deste momento, fissuras começam a aparecer e apenas a armadura resiste os esforços de tração. Podemos ter um entendimento maior do comportamento do concreto armado, quando mesmo encontra-se fissurado, focando em uma região menor da estrutura, apresentada pela Seção 1, da Figura 14, representada pelos pontos A

e B.

Na região da fissura, apenas a armadura resiste os esforços de tração, a tensão do concreto é aproximadamente nula nesta direção. Devido a abertura das fissuras, existe um incremento de deformação do aço. Porém na região entre fissuras, a armadura encontra-se aderentes ao concreto, e parte das tensões resistidas pela armadura é transferida ao concreto através de tensões de aderência, fazendo com que nesta região as tensões de tração do concreto sejam maiores que zero.

Além disto, como o modelo trata as tensões do concreto como valores médios orientado em suas direções principais, a tensão cisalhante média do concreto deve ser necessariamente igual a zero. Contudo, na região local, o deslizamento entre as superfícies da fissura é impedido devido ao efeito do engrenamento dos agregados, que proporciona uma transferência de tensões de cisalhamento nas regiões da fissura.

As deformações do concreto são representadas pela soma das deformações médias do concreto (representado pela abertura das diversas fissuras) com as deformações locais devido ao deslizamento das superfícies da fissura. Além disto, as deformações laterais decorrentes do efeito de Poisson, serão consideradas como um vetor de pseudas ao invés de serem consideradas na matriz constitutiva do material. Este artifício, proposto por Selby e Vecchio (1997), garante a simetria da matriz constitutiva.

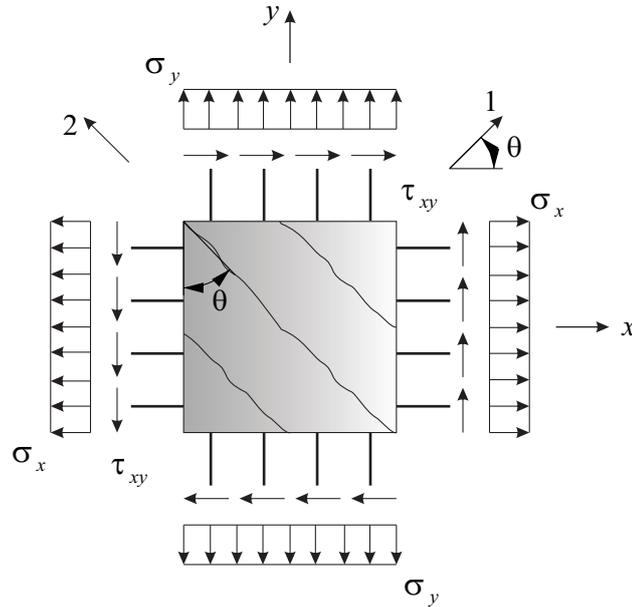
A armadura é considerada perfeitamente aderida ao concreto, assim, as deformações do aço são consideradas iguais às deformações totais.

Os modelos constitutivos para o concreto são obtidos a partir do comportamento dos testes uniaxiais. Em geral, como mostrado por Kupfer, Hilsdorf e Rusch (1969), o comportamento do concreto sujeito a tensões biaxiais difere do comportamento uniaxial. De modo a corrigir esta diferença nas curvas tensão por deformação, modificações foram consideradas de forma a levar em conta os efeitos do *compression softening*. Além disto, como o DSFM foi formulado para o concreto armado sujeito ao estado compressão-tração biaxial, sob compressão biaxial o comportamento do concreto foi modelado a partir das teorias proposta por Vecchio (1992).

#### **4.1 Equações de Equilíbrio**

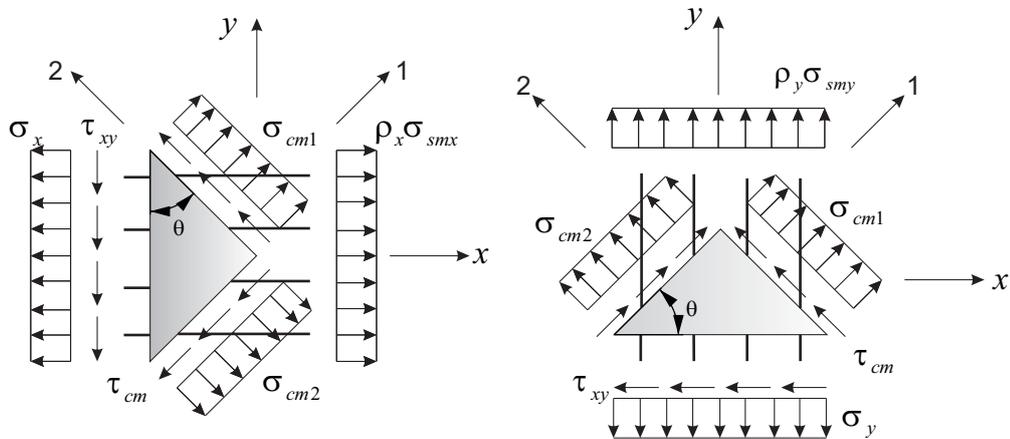
Considere um elemento de concreto armado com fissuras uniformemente distribuídas e paralelas entre si, conforme Fig. 15, submetido ao estado plano de tensões. Os eixos globais coincidem com as direções dos eixos cartesianos e os locais coincidem com as direções das fissuras. O ângulo é definido entre a direção principal normal as fissuras e o eixo  $x$ .

Figura 15 – Elemento de membrana de concreto armado fissurado



Fonte: Adaptado de Foster e Marti (2003).

Figura 16 – Equação de equilíbrio das forças em termos de tensões médias



Fonte: Adaptado de Foster e Marti (2003).

A partir do diagrama de corpo livre, ilustrado na Fig. 16, representado por um corte AA (ver Fig. 15), localizado nas regiões entre duas fissuras, podemos formular as equações de equilíbrio nas direções  $x$  e  $y$  em termo das tensões médias.

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \sigma_{c1}c^2 + \sigma_{c2}s^2 - 2\tau_{c12}2sc + \rho_x\sigma_{sx}, \\
 \sigma_y &= \sigma_{c1}s^2 + \sigma_{c2}c^2 + 2\tau_{c12}2sc + \rho_y\sigma_{sy}, \\
 \tau_{xy} &= \sigma_{c1}sc - \sigma_{c2}sc + \tau_{c12}(c^2 - s^2).
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

onde:

$$\begin{aligned} c &= \cos\theta, \\ s &= \sin\theta. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Baseado na hipótese em que as direções principais das tensões médias do concreto coincidem com as direções da fissura, a tensão cisalhante média do concreto é necessariamente igual a zero. Reescrevendo Eq. 4.1 de forma matricial, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{c1} \\ \sigma_{c2} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \rho_x \sigma_{sx} \\ \rho_y \sigma_{sy} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Escrevendo a Eq. 4.3 de maneira sintética:

$$\{\sigma\}_{,xy} = [T_\sigma] \{\sigma_{c12}\} + \rho \{\sigma_s\} \quad (4.4)$$

## 4.2 Relação entre Tensões Médias e Locais da Fissura

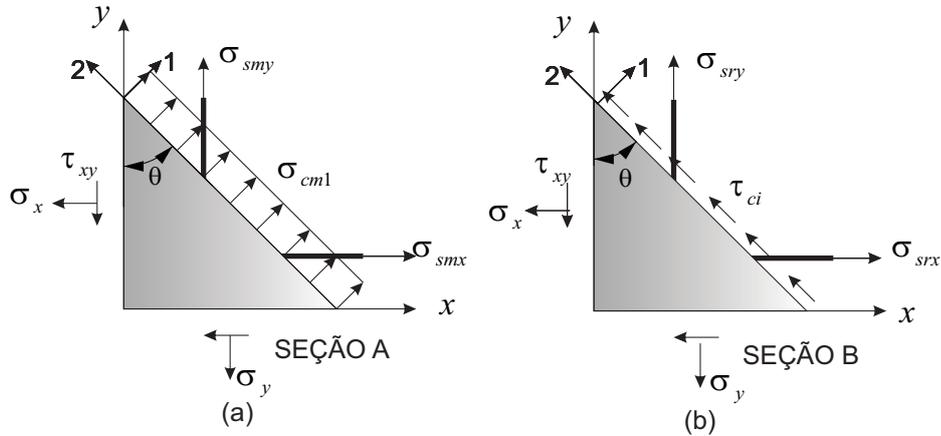
Considerando um elemento sujeito a ações de carregamento no próprio plano, conforme a Fig. 15, toda força aplicada a este elemento é resistida por tensões internas do concreto e da armadura. Porém, quando as tensões internas do elemento superam a resistência de tração do concreto, as fissuras pré-existentes no concreto aumentam de tamanho e largura. A partir deste momento, apenas o aço age no combate dos esforços de tração.

As tensões internas deste elemento deve ser analisadas em duas regiões distintas. A primeira região é localizada em uma seção entre duas fissuras, representada pela seção A, conforme Fig. 17(a). Nesta região, o aço encontra-se aderido ao concreto, e parte da tensão resistida pela armadura é transferida ao concreto através de tensões de aderência, fazendo com que a tensão de tração no concreto seja maior que zero. Segundo Vecchio (2000), a tensão média de tração no concreto,  $\sigma_{c1}$ , não deve ser maior que a soma da reserva de resistência em cada direção da armadura, calculada como a diferença entre a tensão média,  $f_s$ , e tensão de escoamento do aço,  $f_y$ .

$$\sigma_{c1} \leq \sum_{i=1}^n \rho_i (f_{yi} - \sigma_{si}) \cos^2 \theta_{ni}. \quad (4.5)$$

onde,  $\theta_{ni}$ , é o ângulo formado entre a direção da armadura e a direção normal à fissura,  $n$  é quantidade de componentes da armadura,  $\rho_i$ , a taxa de armadura em cada elemento e  $\sigma_{si}$ , a tensão média da armadura.

Figura 17 – Condições de equilíbrio para as tensões médias e locais



Fonte: Adaptado de Vecchio (2000).

A segunda seção é localizada na superfície da fissura (seção B), ilustrada em Fig. 17b. Nesta seção, devido ao deslizamento e abertura da fissura, surgem tensões adicionais na armadura causadas pelo incremento de deformação no aço. As tensões das duas regiões devem ser compatíveis de modo a garantir o equilíbrio interno do elemento.

Fazendo o equilíbrio estático na direção normal à fissura, temos:

$$\sigma_{c1} + \sum_{i=1}^n \rho_i \sigma_{si} \cos^2 \theta_{ni} = \sum_{i=1}^n \rho_i \sigma_{sri} \cos^2 \theta_{ni}. \quad (4.6)$$

rearranjando a Eq. 4.6, temos:

$$\sigma_{c1} = \sum_{i=1}^n \rho_i (\sigma_{sri} - \sigma_{si}) \cos^2 \theta_{ni}. \quad (4.7)$$

onde,  $\sigma_{sri}$  é a tensão da armadura na região de interface da fissura.

Embora o modelo considerar tensão cisalhante média do concreto nula. Na região local, o deslizamento entre as superfícies da fissura é impedido devido ao efeito do engrenamento dos agregados, que proporciona uma transferência de tensões de cisalhamento nas regiões da fissura. Conseqüentemente, fazendo o equilíbrio estático na direção perpendicular à fissura, podemos determinar a tensão local de cisalhamento,  $\tau_{ci}$ .

$$\tau_{ci} + \sum_{i=1}^n \rho_i \sigma_{si} \cos \theta_{ni} \sin \theta_{ni} = \sum_{i=1}^n \rho_i \sigma_{sri} \cos \theta_{ni} \sin \theta_{ni}. \quad (4.8)$$

rearranjando Eq. 4.8, temos:

$$\tau_{ci} = \sum_{i=1}^n \rho_i (\sigma_{sri} - \sigma_{si}) \cos \theta_{ni} \sin \theta_{ni}. \quad (4.9)$$

A tensão local de cisalhamento é limitada pela mecanismo de engrenamento dos agregados, que é função da largura da abertura da fissura,  $w_r$ , e do tamanho médio dos agregados,  $a_g$ . Vecchio e Collins (1986) estabeleceram o limite para a tensão cisalhante na fissura baseado nos trabalhos de Walraven (1981).

$$\tau_{ci} \leq \frac{0.18\sqrt{f_c}}{0.31 + 24w/(a_g + 26)}. \quad (4.10)$$

Calculada a tensão de cisalhamento na região local da fissura, a magnitude do deslizamento,  $\delta_s$ , pode ser obtida através de relações constitutivas apropriadas. Um modelo bastante utilizado na literatura e sugerido por Vecchio (2000) é a relação obtida por Walraven (1981). Essa formulação é função tanto da tensão cisalhante que atua na interface da fissura,  $\tau_{ci}$ , como também da abertura de fissura,  $w_r$ , e do valor da resistência cúbica à compressão do concreto,  $f_{cu}$ .

$$\delta_s = \frac{\tau_{ci}}{1.8w_r^{-0.8} + (0.234w_r^{-0.707} - 20)f_{cu}} \quad (4.11)$$

### 4.3 Equações de Compatibilidade

Embora o MCFT adote a hipótese das direções principais das tensões médias coincidirem com as direções principais deformações médias, resultados experimentais mostram que quando fissurado a inclinação das direções principais das deformações alteram-se em uma taxa maior que as das direções principais das tensões,  $\theta_\varepsilon \neq \theta_\sigma$ . Afim de desenvolver um modelo mais racional e remover a restrição de colinearidade, o DSFM distingue as deformações totais médias do concreto, entre deformações médias do concreto (contínuas) e as deformações decorrentes do deslizamento entre as superfícies da fissura (descontínuas). Com isto, alguns autores classificam o DSFM como um modelo e fissuras parcialmente distribuídas, por considerar apenas as aberturas das diversas fissuras no elemento distribuídas.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^c\} + \{\varepsilon^r\} \quad (4.12)$$

As deformações médias do concreto estão associadas com as tensões médias do concreto por meio de relações constitutivas apropriadas. Por se tratar de um modelo ortotrópico, as deformações devem ser transformadas para suas direções principais a partir de formulações que podem ser obtidas pela construção do círculo de Mohr, conforme ilustrado na Figura. 18.

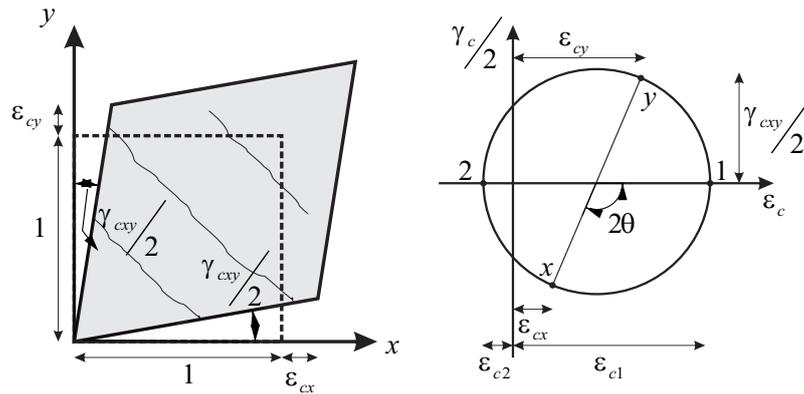
$$\{\varepsilon_{12}^c\} = \frac{(\varepsilon_x^c + \varepsilon_y^c)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x^c - \varepsilon_y^c)^2 + (\gamma_{xy}^c)^2} \quad (4.13)$$

O ângulo de inclinação da direção principal das deformações do contínuo coincidem com a direção principal das tensões médias do concreto, que pode ser calculada pela seguinte

equação.

$$\theta = \theta_{\sigma} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\gamma_{xy}^c}{\epsilon_x^c - \epsilon_y^c} \right) \quad (4.14)$$

Figura 18 – Condições de compatibilidade: deformações médias do concreto



Fonte: Adaptado de Vecchio (2000).

As deformações descontínuas são calculadas a partir da razão da magnitude do deslizamento da fissura,  $\delta_s$ , e do espaçamento médio entre duas fissuras consecutivas,  $S_{rm}$ . As componentes dessas deformações no eixo de coordenadas globais podem ser obtidas através do círculo de Mohr (Figura 19)

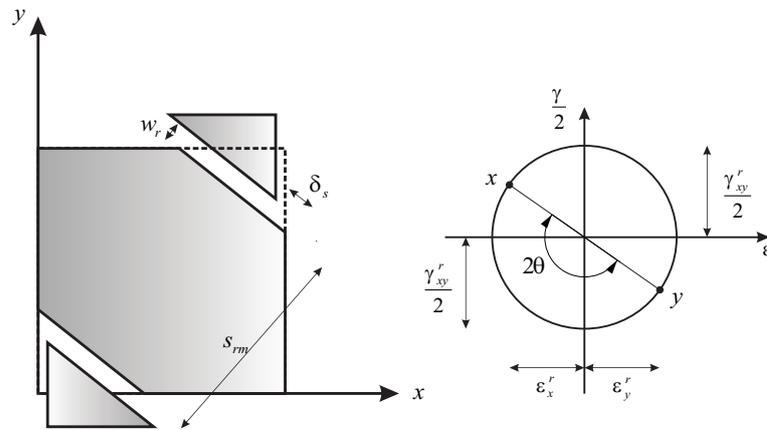
$$\gamma_r = \frac{\delta_s}{S_{rm}} \quad (4.15)$$

$$\epsilon_x^r = -\frac{\gamma_r}{2} \sin 2\theta$$

$$\epsilon_y^r = \frac{\gamma_r}{2} \sin 2\theta \quad (4.16)$$

$$\gamma_{xy}^r = \frac{\gamma_r}{2} \cos 2\theta$$

Figura 19 – Condições de compatibilidade: deformações locais do concreto



Fonte: Adaptado de Vecchio (2000).

Com base na hipótese que a armadura é considerada perfeitamente aderida ao concreto, ou seja, as deformações sofridas pelo concreto são idênticas as deformações da armadura.

$$\epsilon_x = \epsilon_{sx} \quad (4.17)$$

$$\epsilon_y = \epsilon_{sy}$$

#### 4.4 Equações Constitutivas

##### 4.4.1 Comportamento do concreto sob compressão-tração biaxial

O concreto submetido à tensões combinadas de compressão e tração, apresenta uma significativa perda de resistência à compressão devido à presença de fissuras transversais, conforme apresentado por Vecchio e Collins (1993). Portanto, a tensão principal de compressão do concreto é função tanto da deformação principal de compressão quanto da deformação principal de tração. Os autores propuseram um fator de redução para definir o valor da resistência de compressão máxima,  $f_p$  e sua respectiva deformação específica,  $\epsilon_p$ .

$$\begin{aligned} f_p &= -\beta_d f_c \\ \epsilon_p &= -\beta_d \epsilon_{c0} \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde,  $\beta_d$  é dado por:

$$\beta_d = \frac{1}{(1 + C_s C_d)} \leq 1.0 \quad (4.19)$$

O parâmetro  $C_s$  leva em consideração a influência do deslizamento das superfícies da fissura, quando considerado  $C_s = 0.55$ , caso não  $C_s = 1.00$ . Através de experimentos conduzidos

por Vecchio e Collins (1993), a melhor correlação encontrada para o parâmetro  $C_d$ , foi obtida em função de  $(\varepsilon_{c1}/\varepsilon_{c2})$ .

$$C_d = 0.35 \left( \frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c2}} - 0.28 \right)^{0.8} \quad (4.20)$$

onde,  $\varepsilon_{c1}$  é a deformação principal de tração do concreto e  $\varepsilon_{c2}$ , a deformação principal de compressão do concreto.

Para a resposta do concreto sob compressão utilizou-se o modelo de Hognestad (1951).

$$\sigma_{c2} = -f_p \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_p} \right) - \left( \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_p} \right)^2 \right] \quad (4.21)$$

Para o concreto sob tração, admite-se um comportamento linear elástico antes de fissurar. Após a fissuração, as tensões de tração no concreto continuam a existir devido ao mecanismo de *tension stiffening*. Este mecanismo está relacionado com a aderência entre o concreto e o aço nas regiões entre fissuras. Vecchio e Collins (1986) apresentaram uma formulação empírica para modelar este efeito, conforme a equação abaixo.

$$\sigma_{c1} = E_c \varepsilon_{c1} \quad , \quad 0 < \varepsilon_{c1} < \varepsilon_{cr} \quad (4.22)$$

$$\sigma_{c1} = \frac{f_t}{1 + \sqrt{c_t \varepsilon_{c1}}} \quad , \quad \varepsilon_{c1} \geq \varepsilon_{cr} \quad (4.23)$$

onde  $f_t$  é a resistência do concreto a tração,  $E_c$  o módulo de elasticidade tangente e  $\varepsilon_{cr}$  sua respectiva deformação específica.

Inicialmente Vecchio e Collins (1986) propuseram um valor para  $c_t = 200$ . Porém, Bentz (2000) apresentou um novo modelo considerando a influência de outros fatores como taxa de armadura,  $\rho_i$  e o diâmetro nominal da barra,  $\phi_i$ .

$$c_t = 2.2m \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{m} = \sum_{i=1}^n \frac{4\rho_i}{\phi_i} |\cos \theta_{ni}| \quad (4.25)$$

#### 4.4.2 Comportamento do concreto sob compressão biaxial

Quando submetido a um estado biaxial de compressão, o concreto apresenta um ganho de resistência e ductilidade, devido ao efeito de confinamento. Este comportamento pode ser modelado de acordo com as formulações apresentadas por Vecchio (1992). Este modelo foi desenvolvido a partir de relações aproximadas do trabalho de Kupfer, Hilsdorf e Rusch (1969). Os fatores de aumento de resistência,  $K_{c1}$  e  $K_{c2}$ , são descritos como:

$$K_{c1} = 1 + 0.92 \left( -\frac{\sigma_{c2}}{f_c} \right) - 0.76 \left( -\frac{\sigma_{c2}}{f_c} \right)^2 \quad (4.26)$$

$$K_{c2} = 1 + 0.92 \left( -\frac{\sigma_{c1}}{f_c} \right) - 0.76 \left( -\frac{\sigma_{c1}}{f_c} \right)^2 \quad (4.27)$$

$$f_{p1} = K_{c1} f_c \quad (4.28)$$

$$f_{p2} = K_{c2} f_c \quad (4.29)$$

Segundo Selby e Vecchio (1997), as deformações específicas,  $\varepsilon_{p1}$  e  $\varepsilon_{p2}$ , crescem à uma taxa um pouco maior que suas correspondentes resistências máximas de compressão uniaxial,  $f_{p1}$  e  $f_{p2}$ . A partir dos resultados de Kupfer, Hilsdorf e Rusch (1969), pode-se adotar as seguintes expressões:

$$\varepsilon_{p1} = (3K_{c1} - 2)\varepsilon_{c0} \quad (4.30)$$

$$\varepsilon_{p2} = (3K_{c2} - 2)\varepsilon_{c0} \quad (4.31)$$

onde,  $\varepsilon_{c0}$  é a deformação específica correspondente à resistência máxima do concreto no ensaio de cilindro.

As tensões principais em cada direção são calculadas pela mesma curva apresentada em Eq. 4.21.

$$\sigma_{c1} = -f_{p1} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{p1}} \right) - \left( \frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{p1}} \right)^2 \right] \quad (4.32)$$

$$\sigma_{c2} = -f_{p2} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{p2}} \right) - \left( \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{p2}} \right)^2 \right] \quad (4.33)$$

#### 4.4.3 Comportamento do concreto sob tração biaxial

Segundo o trabalho de Kupfer, Hilsdorf e Rusch (1969), quando submetido ao estado de tração biaxial, o concreto apresenta comportamentos independentes e iguais ao estado uniaxial de tração em cada direção. Portanto, as tensões principais são obtidas utilizando a mesma curva da Eq. 4.22 e 4.23.

$$\sigma_{c1} = E_c \varepsilon_{c1} \quad , \quad 0 < \varepsilon_{c1} < \varepsilon_{cr} \quad (4.34)$$

$$\sigma_{c1} = \frac{f_t}{1 + \sqrt{c_t \epsilon_{c1}}}, \quad \epsilon_{c1} \geq \epsilon_{cr} \quad (4.35)$$

$$\sigma_{c2} = E_c \epsilon_{c2}, \quad 0 < \epsilon_{c2} < \epsilon_{cr} \quad (4.36)$$

$$\sigma_{c2} = \frac{f_t}{1 + \sqrt{c_t \epsilon_{c2}}}, \quad \epsilon_{c2} \geq \epsilon_{cr} \quad (4.37)$$

#### 4.4.4 Comportamento do aço

Para as tensões de compressão e tração da armadura, utiliza-se um modelo trilinear para a curva tensão-deformação.

$$\sigma_s = \begin{cases} E_s \epsilon_s & 0 \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{sy} \\ f_y & \epsilon_{sy} < \epsilon_s \leq \epsilon_{sh} \\ f_y + E_{sh}(\epsilon_s - \epsilon_{sy}) & \epsilon_{sh} < \epsilon_s \leq \epsilon_{su} \end{cases} \quad (4.38)$$

onde,  $\epsilon_{sy}$  é a deformação específica correspondente a tensão de escoamento do aço,  $\epsilon_{sh}$  é a deformação específica que define o início do encruamento do aço,  $\epsilon_{su}$  é a deformação específica que corresponde a tensão última do aço e  $E_{sh}$  é o módulo de elasticidade do aço no trecho de encruamento.

### 4.5 Matriz Constitutiva dos Materiais

As tensões no elemento de concreto armado pode ser calculada como a soma das tensões no concreto e na armadura:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_c\} + \{\sigma_s\} \quad (4.39)$$

Considerando que o concreto pode ser considerado como um material ortotrópico, onde 1 e 2 são sua direções principais, a relação constitutiva para o estado plano de tensões pode ser expressado como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{c1} \\ \sigma_{c2} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{c1} & \nu_{12}E_{c1} & 0 \\ \nu_{21}E_{c2} & E_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{12}\nu_{21})G_{c12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{c1} \\ \epsilon_{c2} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

onde,

$$G_{c12} = \frac{E_{c1}E_{c2}}{E_{c1}(1 + \nu_{12}) + E_{c2}(1 + \nu_{21})}. \quad (4.41)$$

Para que a simetria da matriz constitutiva seja mantida a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\nu_{12}E_{c1} = \nu_{21}E_{c2} \quad (4.42)$$

Em geral, nos modelos ortotrópicos, quando o concreto encontra-se fissurado o coeficiente de Poisson é desconsiderado das formulações,  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0$ . Logo, anulando os coeficientes de Poisson das Eq. 4.40 e Eq. 4.41

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{c1} \\ \sigma_{c2} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{c1} \\ \varepsilon_{c2} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

onde,

$$E_{c1} = \frac{\sigma_{c1}}{\varepsilon_{c1}}, \quad E_{c2} = \frac{\sigma_{c2}}{\varepsilon_{c2}}, \quad G_{12} = \frac{E_{c1}E_{c2}}{E_{c1} + E_{c2}} \quad (4.44)$$

A Equação 4.43, pode ser transformada para os eixos globais a partir de uma matriz de transformação  $[T]$ .

$$\{\sigma_c\} = [D_c] \{\varepsilon_c\} \quad (4.45)$$

onde,

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$[D_c] = [T]^T [D_{c12}] [T] \quad (4.47)$$

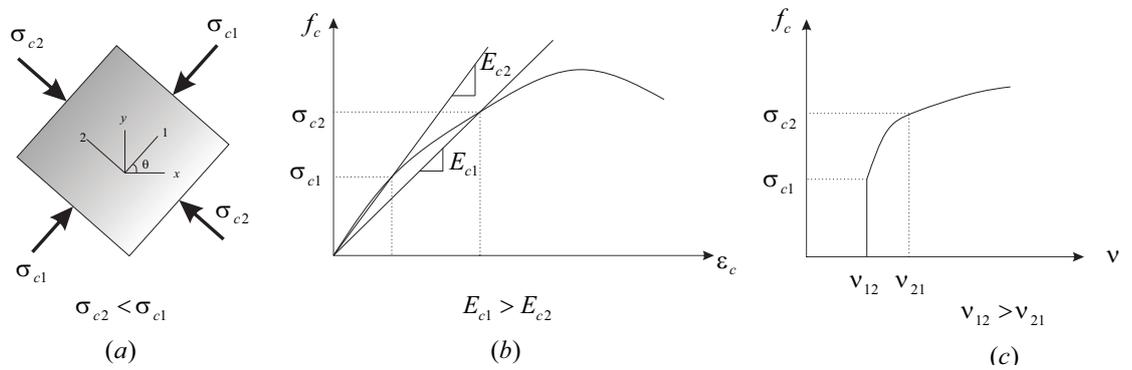
Segundo Vecchio (1992), embora essa simplificação produza um bom comportamento do concreto armado submetido ao estado de tração-compressão biaxial, nos casos, principalmente, de compressão biaxial (Figura. 20a), as deformações laterais causadas pelo efeito de Poisson, podem representar uma parcela significativa das deformações médias do concreto. Portanto não podem ser desconsideradas.

O comportamento do concreto submetido a tensões de compressão exibe perdas progressivas de rigidez em sua curva tensão-deformação (Fig. 20b). Além disto, o concreto sob compressão apresenta uma expansão lateral caracterizada pelas microfissurações existentes no concreto, que aumentam a medida que aumenta a tensão de compressão. Perto do pico de resistência à compressão, o volume de concreto aumenta, tornando as fissuras cada vez maiores, acarretando também no aumento progressivo do coeficiente de Poisson (Fig. 20c). Portanto,

principalmente para os casos onde o concreto está submetido ao estado de compressão biaxial, onde  $\sigma_{c2} < \sigma_{c1}$ , pode-se afirmar verdadeira as relações,  $E_{c2} < E_{c1}$  e  $\nu_{12} > \nu_{21}$ , conflitando com a igualdade da Eq. 4.42.

De modo a simplificar e garantir a simetria da matriz constitutiva, Selby e Vecchio (1997) incluíram no conceito de pseudo forças, apresentado por Vecchio (2001), as deformações decorrentes do efeito de Poisson. Estas forças fornecem uma maneira de separar o efeito de Poisson do estado biaxial de tensão do concreto, permitindo obter o comportamento bidimensional através de duas curvas tensão-deformação uniaxial distintas.

Figura 20 – Comportamento do concreto sob compressão biaxial. (a) Definição do elemento, (b) variação do módulo de elasticidade e (c) variação do coeficiente de Poisson



Fonte: Adaptado de Vecchio (1992).

Em um estado biaxial de tensão, ilustrado na Figura. 21(a), as deformações específicas em uma determinada direção é tanto função da tensão atuante naquela direção, como também da tensão atuante na direção ortogonal a ela.

$$\epsilon_{c1} = \frac{\sigma_{c1}}{E_{c1}} - \nu_{12} \frac{\sigma_{c2}}{E_{c2}}, \quad (4.48)$$

$$\epsilon_{c2} = \frac{\sigma_{c2}}{E_{c2}} - \nu_{21} \frac{\sigma_{c1}}{E_{c1}}.$$

A ideia principal desta técnica compreende desacoplar as deformações axiais, obtidas pelas tensões uniaxial aplicadas ao concreto,  $\sigma_{c1}$  e  $\sigma_{c2}$ , das laterais, que serão produzidas a partir de forças fictícias aplicadas ao elemento (ver Figura. 21b) . As magnitudes dessas forças são escolhidas de tal forma à produzirem as deformações laterais a partir das seguintes equações:

$$\epsilon_{c1}^0 = -\nu_{12} \frac{\sigma_{c2}}{E_{c2}}, \quad (4.49)$$

$$\epsilon_{c2}^0 = -\nu_{21} \frac{\sigma_{c1}}{E_{c1}}.$$

Transformando as deformações laterais (Eq. 4.49) para o sistema global,  $x$  e  $y$ :

$$\{\varepsilon_c^0\} = \{\varepsilon_{cx}^0 \ \varepsilon_{cy}^0 \ \gamma_{cxy}^0\} \quad (4.50)$$

onde,

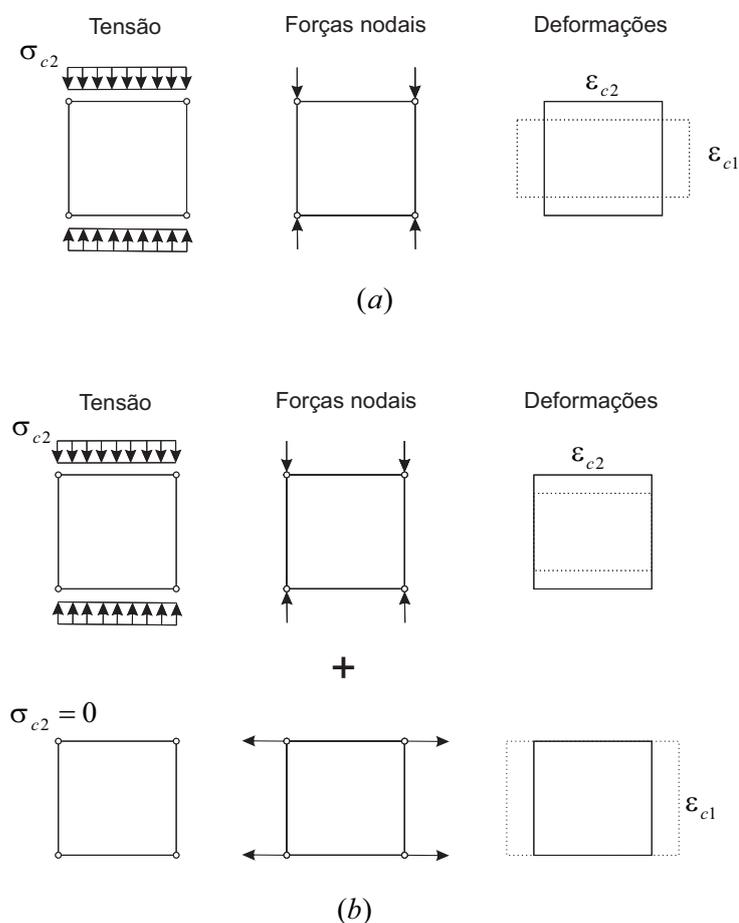
$$\begin{aligned} \varepsilon_{cx}^0 &= \varepsilon_{c1}^0 \frac{(1 + \cos \theta)}{2} + \varepsilon_{c2}^0 \frac{(1 - \cos \theta)}{2} \\ \varepsilon_{cy}^0 &= \varepsilon_{c1}^0 \frac{(1 - \cos \theta)}{2} + \varepsilon_{c2}^0 \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\gamma_{cxy}^0 = (\varepsilon_{c1}^0 - \varepsilon_{c2}^0) \sin 2\theta$$

Assim, podemos escrever as deformações médias do concreto como a soma das deformações uniaxiais e das deformações laterais.

$$\{\varepsilon_c\} = \{\varepsilon_c^u\} + \{\varepsilon_c^0\} \quad (4.52)$$

Figura 21 – Conceitos de Pseudo Cargas para deformações laterais. (a) Modelo tradicional ( $v_{12} \leq 0$ ) e (b) Modelo considerando as pseudo cargas ( $v_{12} = 0$ )



Fonte: Adaptado de Selby e Vecchio (1997).

Da mesma maneira, considerando que o aço só resiste à tensão uniaxial, podemos calcular as tensões para cada componente das armaduras pela seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{sx} \\ \sigma_{sy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_x E_{sx} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_y E_{sy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{sx} \\ \epsilon_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

onde,

$$E_{sx} = \frac{\sigma_{sx}}{\epsilon_{sx}}, \quad E_{sy} = \frac{\sigma_{sy}}{\epsilon_{sy}} \quad (4.54)$$

Escrevendo a Eq. 4.53 de forma sintética:

$$\{\sigma_s\} = [D_s] \{\epsilon_s\} \quad (4.55)$$

Substituindo as Eq. 4.45 e Eq. 4.55 em Eq. 4.39:

$$\{\sigma\} = [D_c] \{\epsilon_c''\} + [D_s] \{\epsilon_s\} \quad (4.56)$$

Substituindo a Eq. 4.52 em Eq. 4.56:

$$\{\sigma\} = [D_c] (\{\epsilon_c\} - \{\epsilon_c^0\}) + [D_{si}] \{\epsilon_s\} \quad (4.57)$$

Assumindo a hipótese de aderência perfeita da armadura ao concreto,  $\{\epsilon\} = \{\epsilon_s\}$  e lembrando que  $\{\epsilon\} = \{\epsilon_c\} + \{\epsilon_r\}$ , a Eq. 4.57 pode ser reescrita como:

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} - \{\sigma^0\} \quad (4.58)$$

onde,

$$[D] = [D_c] + [D_s] \quad (4.59)$$

$$\{\sigma^0\} = [D_c] (\{\epsilon_c^0\} + \{\epsilon_r\}) \quad (4.60)$$

Como todas as deformações laterais estão representadas através do conceito de pseudo cargas, a matriz constitutiva do concreto pode ser expressada só em termos da sua diagonal principal (Eq. 4.43).

## 5 IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

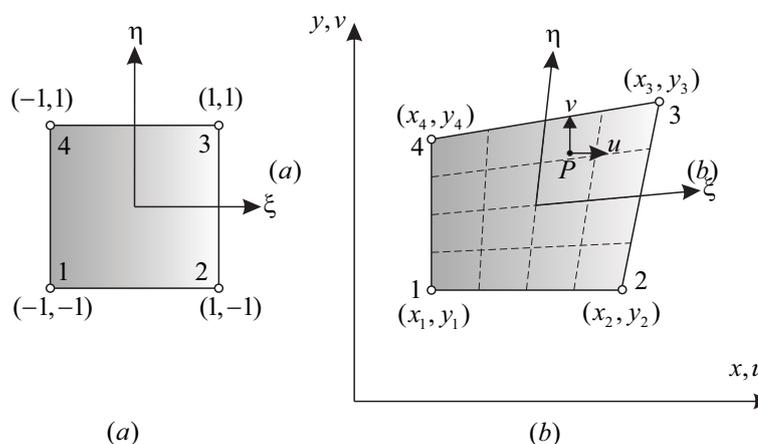
A formulação do Método dos Elementos Finitos será desenvolvida neste capítulo por meio do Princípio dos Trabalhos Virtuais aplicado à problemas de elasticidade bidimensional. Neste trabalho utiliza-se o elemento isoparamétrico quadrilateral linear, onde cada nó possui dois graus de liberdade.

Segundo Logan (2015), elementos isoparamétricos são aqueles cujas as funções de forma para descrever a aproximação dos deslocamentos são as mesmas para representar a geometria do elemento. Através dessas funções é possível realizar uma transformação, com a finalidade de mapear um elemento distorcido para um sistema de coordenadas locais onde o mesmo se torna regular.

### 5.1 Mapeamento do Elemento

Considere um elemento quadrilateral, cuja sua geometria é dada de forma arbitrária conforme ilustrado em Figura. 22(b). Este elemento possui oito graus de liberdade,  $u_1, v_1, \dots, u_4$  e  $v_4$ , associado ao sistema de coordenadas globais  $(x, y)$ .

Figura 22 – Elemento quadrilateral linear: (a) elemento regular nas coordenadas parametrizadas e (b) Mapeamento do elemento distorcido



Fonte: Adaptado de Logan (2015).

Neste caso a geometria no sistema de coordenadas naturais pode ser aproximada utilizando funções de forma para interpolar as coordenadas dos pontos nodais  $(x_1, y_1, \dots, x_4, y_4)$ . Assim, a parametrização das coordenadas globais em função das coordenadas locais é efetuada através da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \\ y &= a_5 + a_6\xi + a_7\eta + a_8\xi\eta \end{aligned} \quad (5.1)$$

Resolvendo as constantes  $a_{is}$ , na Eq. 5.1, em termos de  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4$  e  $y_4$ , obtemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}[(1 - \xi)(1 - \eta)x_1 + (1 + \xi)(1 - \eta)x_2 + (1 + \xi)(1 + \eta)x_3 + (1 - \xi)(1 + \eta)x_4], \\ y &= \frac{1}{4}[(1 - \xi)(1 - \eta)y_1 + (1 + \xi)(1 - \eta)y_2 + (1 + \xi)(1 + \eta)y_3 + (1 - \xi)(1 + \eta)y_4]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

A Eq. 5.2 pode ser expressa de forma matricial como:

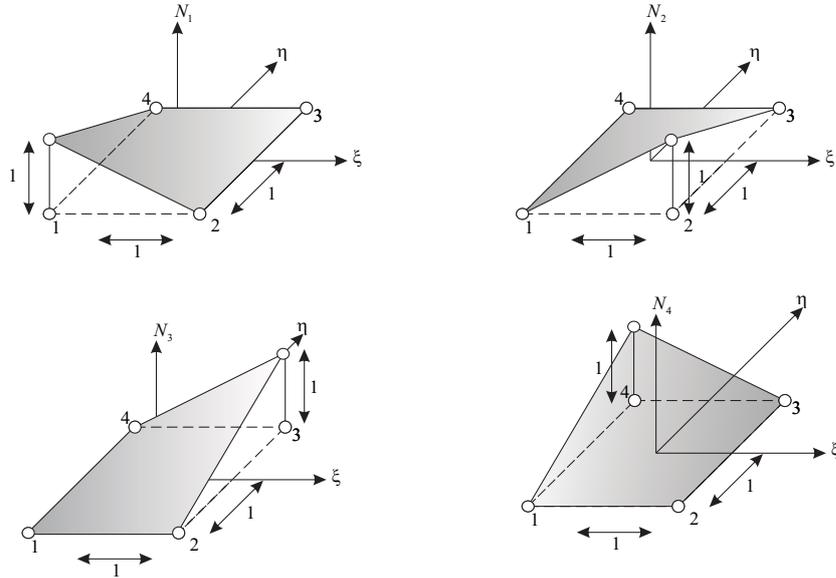
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

onde,  $N_i$ , são as funções de forma e podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4}, \\ N_2 &= \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4}, \\ N_3 &= \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4}, \\ N_4 &= \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)}{4}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Podemos observar que os valores das funções de forma na Eq. 5.4 se comporta de maneira onde  $N_i = 1$  no nó  $i$  e  $N_i = 0$  nos demais nós. A Figura 23 ilustra a variação das funções de forma  $N_i (i = 1, 2, 3, 4)$  do elemento quadrilateral.

Figura 23 – Variação das funções de forma para um elemento quadrilateral linear



Fonte: Adaptado de Logan (2015).

## 5.2 Campo dos Deslocamentos

As funções de forma para o campo de deslocamento são similares as funções de forma usadas para mapear o elemento (Eq. 5.4), sendo assim:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

Podemos reescrever a Eq. 5.5 de forma sintética:

$$\{\mathbf{u}\} = [N] \{U\} \quad (5.6)$$

## 5.3 Campo de Deformação

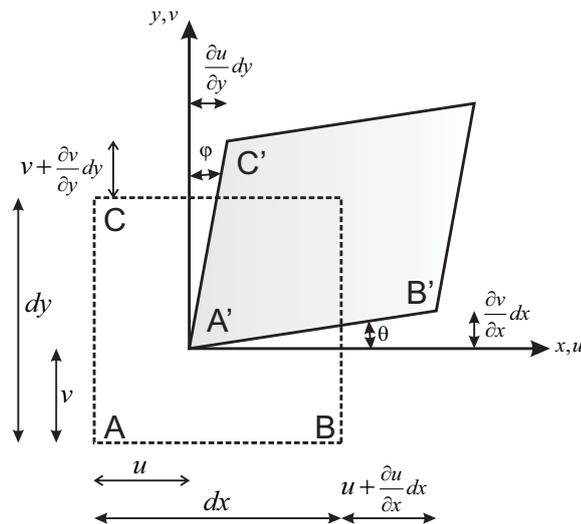
Conforme Villaça e Garcia (2000) admite-se a hipótese de pequenas mudanças de configuração, para relação entre as componentes de deformação e de deslocamento. Por essa

hipótese as deformações e rotações sofridas pelos segmentos elementares são consideradas muito pequenas em presença da unidade. Como consequência, as relações deformação-deslocamento podem basear-se em projeções sobre os planos coordenados, dos segmentos elementares na configuração deformada que originalmente tinham a direção dos eixos.

Supondo que um corpo sofra deformações e deslocamentos conforme na Figura. 24. Podemos obter as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx &= u + \overline{A'B'} \cos \theta, \\
 dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy &= v + \overline{A'C'} \cos \varphi, \\
 \theta + \varphi &= \frac{\phi}{2} + C\hat{A}B, \\
 \sin \theta &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{\overline{A'B'}}, \\
 \sin \varphi &= \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{\overline{A'C'}}
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

Figura 24 – Deslocamentos e deformações



Fonte: Adaptado de Villaça e Garcia (2000)).

Tendo em vista a hipótese dos pequenos deslocamentos e rotações são validas as seguintes

aproximações:

$$\begin{aligned}\overline{A'B'} &= dx(1 + \varepsilon_x), \\ \overline{A'C'} &= dy(1 + \varepsilon_y), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\phi}{2} + C\hat{A}B, \\ \sin\theta &\cong \theta; \quad \sin\varphi \cong \varphi, \\ \cos\theta &\cong 1; \quad \cos\varphi \cong 1\end{aligned}\tag{5.8}$$

Substituindo as expressões da Eq. 5.8 nas Eq. 5.7, obtemos:

$$\begin{aligned}dx + u + \frac{\partial u}{\partial x}dx &= u + dx(1 + \varepsilon_x), \\ dy + v + \frac{\partial v}{\partial y}dy &= v + dy(1 + \varepsilon_y), \\ \theta + \varphi &= \gamma_{xy}, \\ \sin\theta &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx(1 + \varepsilon_x)}, \\ \sin\theta &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx(1 + \varepsilon_x)}.\end{aligned}\tag{5.9}$$

De Eqs. 5.9, obtemos:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Reescrevendo Eq. 5.10 de forma matricial.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}\tag{5.11}$$

Por fim, podemos sintetizar a Eq. 5.11 como:

$$\{\varepsilon\} = [L] \{\mathbf{u}\} \quad (5.12)$$

Uma vez definido o campo de deslocamento, as componentes de deformações específicas são obtidas a partir dos deslocamentos nodais, substituindo a Eq. 5.6 em Eq. 5.12, obtemos:

$$\{\varepsilon\} = [L][N] \{U\} \quad (5.13)$$

Reescrevendo a Eq. 5.13 de forma sintética :

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U\} \quad (5.14)$$

onde,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

#### 5.4 Transformação de Coordenadas

As deformações compatíveis com as funções de forma do campo de deslocamentos estão definidas na Eq. 5.12. Como as funções de forma estão expressas em coordenadas locais  $(\xi, \eta)$  e as derivadas parciais da matriz  $[B]$  em coordenadas globais  $(x, y)$ , devemos fazer uma transformação de coordenadas, para obter as derivadas parciais de  $x$  e  $y$  em função de  $\xi$  e  $\eta$ .

Portanto, precisamos aplicar a regra da cadeia diferencial para expressar as funções de forma  $(N_{is}(\xi, \eta))$  como função de  $(x, y)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Na Equação 5.16, as derivadas parciais  $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial \xi}$  e  $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ , são todas conhecidas já que a Eq. 5.2 e Eq. 5.4 são função de  $\xi$  e  $\eta$ . Logo, apenas as derivadas parciais em relação a  $x$

e a  $y$  são desconhecidas. Portanto, a Eq. 5.16 pode ser resolvida utilizando a regra de Cramer, com intuito de obter  $\frac{\partial N_i}{\partial x}$  e  $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ .

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}} \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}} \quad (5.18)$$

Onde a matriz do denominador das Eq. 5.17 e Eq. 5.18 são as derivadas parciais relacionada com a mudança de coordenadas, sendo denominada de matriz jacobiana  $[J]$ .

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Resolvendo os determinantes das Eq. 5.17 e Eq. 5.18, obtemos:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left[ \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \left[ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right] \quad (5.21)$$

Uma vez definida as derivadas parciais em relação a  $x$  e  $y$  como função de  $\xi$  e  $\eta$ , as componentes das deformações específicas podem agora ser obtida substituindo as Eq. 5.20 e Eq. 5.21 na Eq. 5.15.

$$B(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

onde,

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

## 5.5 Campo de Tensões

Para o campo de tensões, adota-se a relação entre as tensões e as deformações para um elemento de concreto armado formulada na Eq. 4.58.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - \{\sigma^0\} \quad (5.24)$$

onde,

$$[D] = [D_c] + [D_s] \quad (5.25)$$

$$\{\sigma^0\} = [D_c](\{\varepsilon_c^0\} + \{\varepsilon_r\}) \quad (5.26)$$

Substituindo a Eq. 5.14 em Eq. 5.24, obtemos:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{U\} - \{\sigma^0\} \quad (5.27)$$

## 5.6 Formulação pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais

Considere um estado plano de tensões constituído por um elemento finito quadrilateral. Supondo que apenas existem ações distribuídas por unidade de comprimento na periferia do elemento finito. O Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece que o trabalho realizados pelas tensões internas na deformação virtual do corpo é igual ao trabalho realizado pelas forças externas nos deslocamentos virtuais dos seus pontos de aplicação. Do PTV origina-se a seguinte equação:

$$\int_V \{\delta\varepsilon^T\}\{\sigma\}dV - \int_L \{\delta u^T\}\{b\}dL = 0 \quad (5.28)$$

Designado por  $h$  a espessura do elemento finito, tem-se:

$$dV = hdA \quad (5.29)$$

Partindo da equação cinemática que relaciona deformações com deslocamentos, pode-se escrever as deformações virtuais como:

$$\{\delta\varepsilon\} = [B]\{\delta U\} \quad (5.30)$$

que é equivalente a:

$$\{\delta\varepsilon^T\} = \{\delta U^T\}[B]^T \quad (5.31)$$

De maneira similar, podemos reescrever os deslocamentos virtuais por:

$$\{\delta u\} = [N]\{\delta U\} \quad (5.32)$$

Podendo ser reescrita como:

$$\{\delta u^T\} = \{\delta U^T\}[N]^T \quad (5.33)$$

Substituindo as Eq. 5.27, 5.31 e 5.33 em Eq. 5.33, o PTV passa a ser expresso por:

$$\int_A \{\delta U^T\}[B]^T[D][B]h\{U\}dA - \int_A \{\delta U^T\}[B]^T\{\sigma^0\}hdA - \int_L \{\delta U^T\}[N]^T b dL = 0 \quad (5.34)$$

Uma vez que  $dA = dx dy$  e os deslocamentos nodais não dependem das variáveis  $x, y$ , os vetores  $\delta U^T$  e  $U$  podem sair da integral da Eq. 5.34:

$$\{\delta U^T\} \int_A [B]^T [D] [B] h dA \{U\} - \{\delta U^T\} \int_A [B]^T \{\sigma^0\} h dA - \{\delta U^T\} \int_L [N]^T \{b\} dL = 0 \quad (5.35)$$

De acordo com o Princípio dos Trabalhos Virtuais, Eq. 5.35 é verdadeira para qualquer conjunto de deslocamentos virtuais, então:

$$\int_A [B]^T [D] [B] h dA \{U\} - \int_A [B]^T \{\sigma^0\} h dA - \int_L [N]^T \{b\} dL = 0 \quad (5.36)$$

Escrevendo a Eq. 5.36 de forma sintética.

$$[K]\{U\} = \{F_{ext}\} \quad (5.37)$$

Onde:

$$[K] = h \int_A [B]^T [D] [B] dx dy \quad (5.38)$$

$$\{F_{ext}\} = \{F\} + \{F^0\} \quad (5.39)$$

## 5.7 Integração Numérica

A integração numérica é utilizada a nível de elemento para avaliar as integrais na formulação variacional de um problema:

$$\int_{\Omega} f(x) d\Omega = \int_{\Omega} f(\xi) |J| d\xi \quad (5.40)$$

Onde  $|J|$  é o determinante da matriz Jacobiana. A regra de integração numérica mais utilizada em elementos finitos é a quadratura de Gauss, por sua precisão e eficiência computacional:

$$\int_{-1}^1 g(\xi) ds = \sum_{i=1}^n W_i g(\xi_i) \quad (5.41)$$

Onde:

$n$ - número de pontos de integração de Gauss

$\xi_i$ - Coordenadas dos pontos de integração

$W_i$ - peso do  $i$ -ésimo ponto e integração

A quadratura de Gauss integra corretamente funções que podem ser representadas exatamente por polinômios de grau  $p$ , tal que:

$$p \leq (2n - 1) \quad (5.42)$$

No caso bidimensional, a integração numérica é obtida através do emprego da quadratura de Gauss em cada coordenada separadamente.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n_\xi} \sum_{j=1}^{n_\eta} g(\xi, \eta) W_i W_j \quad (5.43)$$

Utilizando as regras de integração mencionadas acima, pode-se determinar a matriz de rigidez apresentada na Eq. 5.39. No item 5.4 foi demonstrado que o elemento quadrilateral pode ser avaliado em termos de coordenadas locais, com limites variando de  $-1$  à  $1$ . Além disto, o diferencial de área  $dA$  nas coordenadas globais  $(x, y)$  está relacionado com as coordenadas locais pela seguinte expressão:

$$dA = |J| d\xi d\eta \quad (5.44)$$

Então, a Eq. 5.39, pode ser reescrita da seguinte maneira:

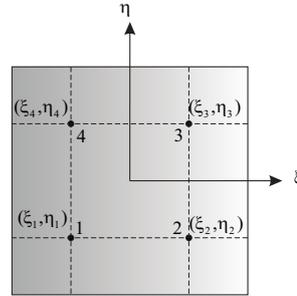
$$[K] = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (5.45)$$

Utilizando a integração numérica expressa na Eq. 5.44, esta matriz é calculada pela seguinte expressão:

$$[K] = h \sum_{i=1}^{n_\xi} \sum_{j=1}^{n_\eta} [B]^T [D] [B] |J| W_i W_j \quad (5.46)$$

O conjunto de pontos de Gauss para um elemento quadrilateral com funções de interpolação linear, está ilustrado em Fig. 25. Os pontos de integração e os pesos são aplicados de acordo com a Tabela 1.

Figura 25 – Quatro pontos de Gauss para um elemento bidimensional



Fonte: Adaptado de Logan (2015).

Tabela 1 – Pontos de integração de Gauss

n	$\xi_i$	$\eta_i$	$W_i$	$W_j$
1	0	0	2	2
2	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1	1
	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1	1
	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1	1
	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1	1

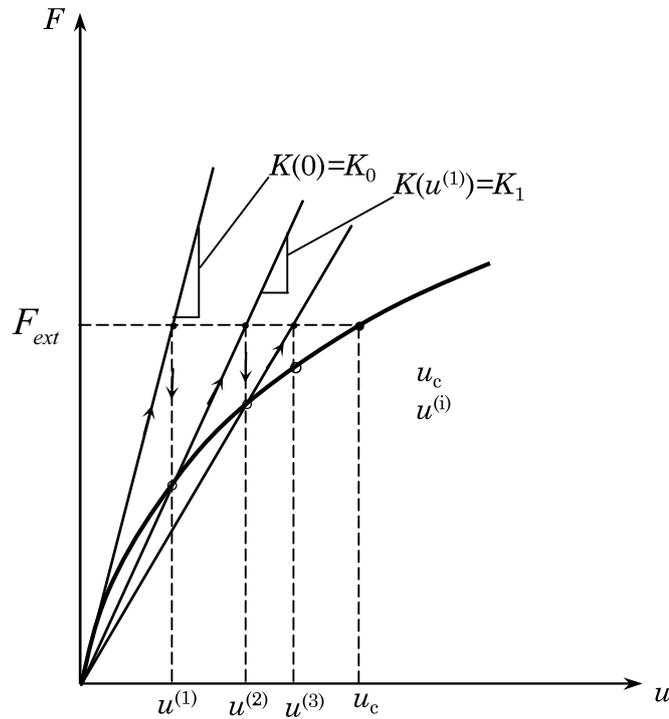
Fonte: Adaptado de Logan (2015).

## 5.8 Método para Solução dos Sistemas Não Lineares

O método utilizado para resolver o sistema de equações não lineares foi a iteração de Picard. Esse método consiste basicamente em atualizar a matriz de rigidez, através da matriz constitutiva secante. Os deslocamentos são obtidos resolvendo o sistema a partir do vetor de forças externas cheio, conforme ilustrado na Figura 26.

$$\{u^i\} = ([K(u^{i-1})])^{-1} F_{ext} \quad (5.47)$$

Figura 26 – Soluções para o método de Picard



Fonte: Adaptado de Reddy (2015).

O procedimento é repetido até que a diferença entre duas aproximações consecutivas atinge um valor dentro da tolerância desejada pelo usuário,  $\{u^i\} \approx \{u^{i-1}\}$ . O critério de convergência adotado no algoritmo é estabelecido pela Eq. 5.48.

$$Tol \geq \sqrt{\frac{|u^i| - |u^{i-1}|}{|u^i|}} \quad (5.48)$$

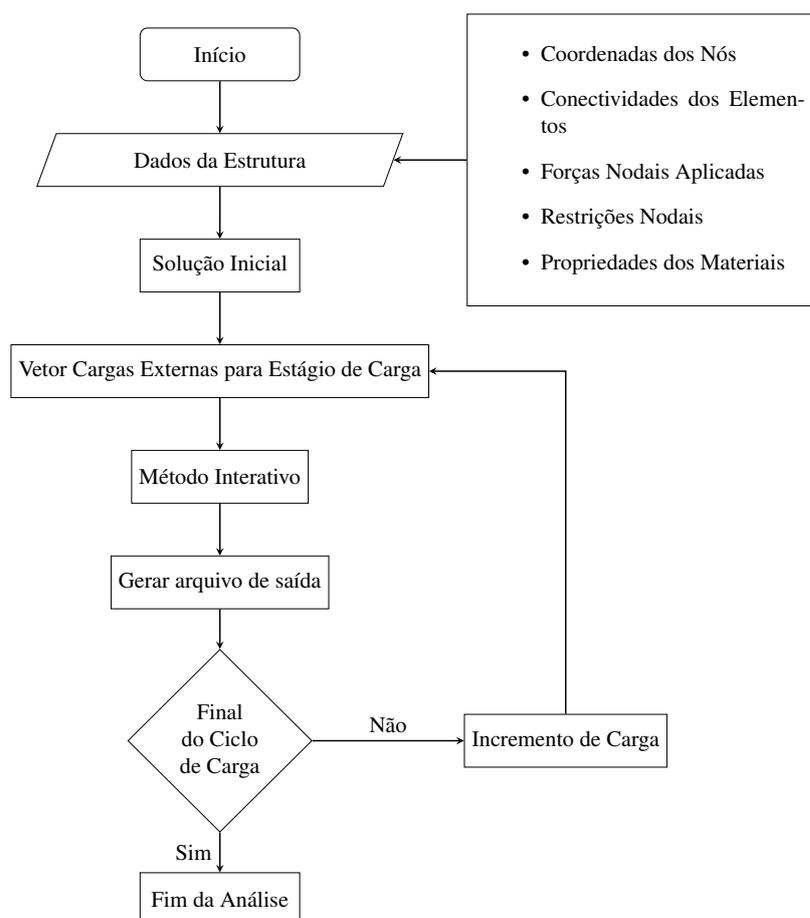
As principais vantagens na utilização deste método são:

1. Facilidade na implementação,
2. Não é necessário o cálculo dos vetores de forças internas,
3. Utiliza-se a matriz secante,
4. Convergência rápida para o problema proposto.

## 6 ESTRUTURA DO CÓDIGO

Neste capítulo serão apresentados todos os procedimentos para o desenvolvimento do algoritmo para análise não linear física de elementos de estruturas de concreto armado pelo Método dos Elementos Finitos. Quanto a programação foi utilizado o programa MATLAB e a estrutura do código foi elaborada de tal forma que permita ao usuário adaptar-lo incluindo outros tipos de elementos, relações constitutivas e até mesmo outras teorias baseados no campo de compressão.

Figura 27 – Programa principal para análise não linear de estruturas de concreto armado



Fonte: O Autor (2019).

O corpo de programa está representado pela Figura 27. Primeiramente deve-se entrar com os dados quanto a geometria e propriedades da estrutura, em geral, é necessário um pré-processador, principalmente para obter os parâmetros geométricos como coordenadas nodais e conectividade dos nós. Logo em seguida os vetores de cargas nodais equivalentes do estágio de carga corrente é montando e uma solução inicial é adotada. Então, o método iterativo pode começar a resolver as equações do sistema não linear. Este sistema é resolvido, quando a convergência dos resultados apresentar valor menor que a tolerância estabelecida pelo usuário.

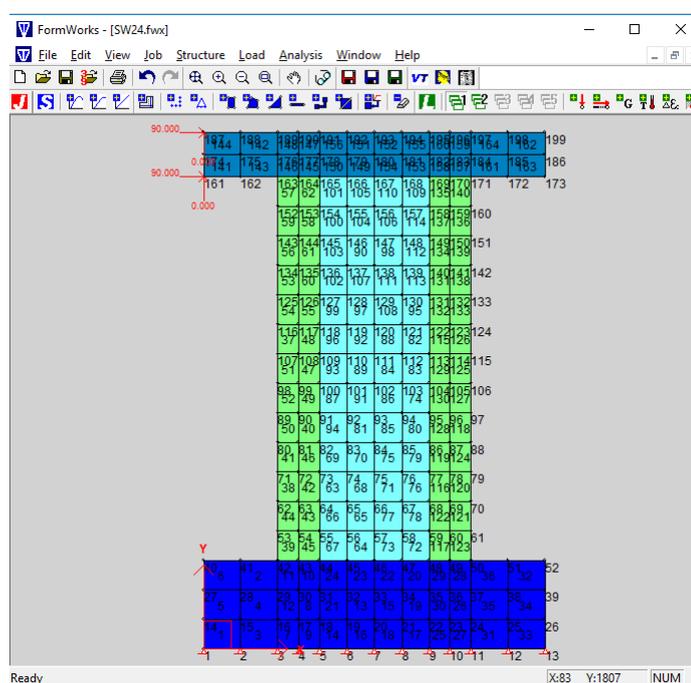
Por fim, os principais resultados são salvos em um arquivo de texto. Este procedimento é repetido até que o último estágio de carga seja alcançado.

## 6.1 Pré-Processamento

A primeira etapa do programa consiste em obter os dados iniciais da estrutura, como as coordenadas e conectividades dos nós, as cargas e restrições nodais e as propriedades dos materiais. Neste trabalho todos esses parâmetros foram fornecidos pelo software FormWorks, elaborado pela Universidade de Toronto.

O FormWorks é um pré-processador que gera os arquivos de entrada do Vector2, programa desenvolvido pelo grupo Vector Analysis, da Universidade de Toronto, coordenado pelo Professor Frank J. Vecchio. Este programa permite a análise não linear de estruturas de concreto armado pelo Método dos Elementos Finitos, baseados na teoria do MCFT e DSFM, utilizando elementos de membrana. Além do Vector2, este grupo possui um pacote com vários outros programas, ampliando os tipos de elementos (casca, placa, sólidos, pórticos) e condições de carregamento (impacto, cíclico, incêndio).

Figura 28 – Exemplo de uma estrutura utilizando o pré-processador FormWorks



Fonte: Adaptado de Wong, Vecchio e Trommels (2013).

Uma das principais vantagens de utilizar o FormWorks é a facilidade de gerar, visualizar e verificar o modelo de elementos finitos (ver Figura 28). Além de permitir uma comparação malha a malha do código proposto neste trabalho com o Vector2. Uma descrição detalhada dos modelos para o concreto armado contidos no Vector2 e da utilização do FormWorks é fornecida

no manual do usuário do programa (WONG; VECCHIO; TROMMELS, 2013). A versão básica e o manual está disponível no site do grupo <http://www.vectoranalysisgroup.com/>.

## 6.2 Processamento

A estratégia adotada para análise não linear física foi o incremento de carga constante. Para cada estágio de carga uma solução inicial é necessária para iniciar o método iterativo. No primeiro passo, uma solução linear, considerando o concreto como uma material linear isotrópico é adotada, nos demais passos, a solução inicial é considerada como a solução do passo anterior.

O método iterativo consiste basicamente em atualizar a matriz constitutiva e o vetor de pseudas forças dos elementos até que a solução atinja a convergência. Uma rotina simples foi proposta por Vecchio (2001), utilizando matriz rigidez secante. Os procedimentos de implementação deste algoritmo está resumido na Figura 29.

Figura 29 – Método iterativo para análise não linear física de estruturas de concreto armado pelo Método dos Elementos Finitos

---

```

{Fext} ; % Determinar o vetor de forças externas
{d} ; % Estimar o vetor de deslocamentos nodais
conv = 10000 ;
while conv > Tol do
    [K] = zeros(ngl,ngl) ; % Pré-alocar a matriz de rigidez global
    {F0} = zeros(ngl,1) ; % Pré-alocar o vetor de pseudo cargas global
    for i = 1 : ne do
        {ε} = [B] {d} ; % Calcular as deformações totais de cada elemento
        {εc} = {ε} - {ε0} - {εr} ; % Estimar deformações médias do concreto
        {σs} ; % Calcular as tensões médias da armadura
        {σc12} ; % Calcular as tensões médias do concreto em suas direções principais
        {σsr} e {τci} ; % Calcular as tensões locais da fissura
        {εr} e {ε0} ; % Calcular as novas estimativas das deformações locais e laterais
        [Dc], [Ds] e [D] ; % Calcular as matrizes constitutivas dos materiais
        [ke] % Calcular a matriz de rigidez do elemento
        {f0} ; % Calcular a matriz de rigidez do elemento
        [K] = [K] + [ke] ; % Construir a matriz de rigidez global
        {F0} = {F0} + {f0} ; % Construir o vetor de pseudo cargas global
    end
    {Fr} = {Fext} + {F0} ; % Calcular o vetor de forças total
    {d'} = [K]-1 Fr ; % Calcular os novos deslocamentos nodais
    conv =  $\frac{|norm(d') - norm(d)|}{norm(d')}$  ; % Calcular a convergência dos resultados
    {d} = {d}'
end

```

---

Fonte: O Autor (2019).

Para avaliar a matriz de rigidez e o vetor de pseudas cargas, é necessário a obtenção das deformações em cada ponto de Gauss. Neste trabalho utilizou-se quatro ponto de Gauss, ilustrados na Figura 25 e resumido na Tabela 1. Então, as relações cinemáticas podem ser reescritas como:

$$\varepsilon(\xi, \eta) = B(\xi, \eta)u \quad (6.1)$$

Deste modo, as matrizes de rigidez e o vetor de pseudas cargas de cada elemento são calculadas utilizando integração numérica nos pontos de Gauss adotados.

$$[K] = h \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [B(\xi, \eta)]^T [D(\xi, \eta)] [B(\xi, \eta)] |J| W_i W_j \quad (6.2)$$

$$[F^0] = h \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [B(\xi, \eta)]^T \{ \sigma^0(\xi, \eta) \} |J| W_i W_j \quad (6.3)$$

### 6.2.1 Sub-rotina para cálculo das tensões na armadura

As tensões no aço são calculadas a partir da Figura. 30. A relação constitutiva foi apresentada na Eq. 4.38. É considerado um modelo trilinear para aço, simulando uma fase elástica, um patamar de escoamento e por fim um trecho de encruamento do aço.

Figura 30 – Sub-rotina para o cálculo das tensões na armadura

---

```

* Tensões na armadura *
% i é a componente x ou y
;
if  $\epsilon_{si} \leq \epsilon_{yi}$  then
|  $\sigma_{si} = E_{si} \epsilon_{si}$  ;
else
| if  $\epsilon_{yi} < \epsilon_{sx} \leq \epsilon_{shi}$  then
| |  $\sigma_{si} = f_{yi}$  ;
| else
| |  $\sigma_{si} = f_{yi} + E_{shx} (\epsilon_{si} - \epsilon_{shi})$  ;
| end
end

```

---

Fonte: O Autor (2019).

### 6.2.2 Sub-rotina para Cálculo das Tensões no concreto

O comportamento do concreto submetido ao estado plano de tensões é caracterizado por três diferentes estados: compressão-tração biaxial, compressão biaxial e tração biaxial. Em todos os casos a tensão do concreto é determinada em relação às suas direções principais, através de relações constitutivas que relacionam deformação e tração. A sub-rotina para o cálculo das tensões do concreto está resumida na Figura 31.

Figura 31 – Sub-rotina para o cálculo das tensões no concreto

---

```

 $\epsilon_{c12}$  ; % Calcular as deformações principais do concreto
 $\theta$  ; % Calcular o ângulo da deformações principais do concreto
if  $\epsilon_{c1} > 0$  e  $\epsilon_{c2} > 0$  ou  $\epsilon_{c1} < 0$  e  $\epsilon_{c2} < 0$  then
  if  $sign(\epsilon_{c1}) = 1$  then
    | Chamar Estado de tração biaxial;
  else
    | Chamar Estado de compressão biaxial;
  end
else
  | Chamar Estado de compressão-tração biaxial;
end

```

---

Fonte: O Autor (2019).

As equações para as transformações das deformações dos seus eixos globais, ( $x$  e  $y$ ), para os principais já foram mencionados na Eq. 4.13, como também do ângulo entre a máxima deformação principal com o eixo  $x$ , na Eq. 4.14.

#### 6.2.2.1 Estado de tração biaxial

O concreto sob o estado de tração biaxial, se comporta como duas curvas uniaxiais independentes. As tensões são calculadas separadamente utilizando as Eq. 4.34 à Eq. 4.37, conforme ilustrado na Figura 32.

Figura 32 – Sub-rotina para o cálculo das tensões do concreto sob tração biaxial

---

```

* Estado de tração biaxial *
;
if  $\epsilon_{c1} \leq \epsilon_{cr}$  then
  |  $\sigma_{c1} = E_c \epsilon_{c1}$  ;
else
  |  $\frac{1}{m} = \sum_{i=1}^n \frac{4\rho_i}{\phi_i} |\cos \theta_{ni}|$  ;
  |  $c_t = 2.2m$  ;
  |  $\sigma_{c1a} = \frac{f_t}{1 + \sqrt{c_t \epsilon_{c1}}}$  ;
  |  $\sigma_{c12,max} = \sum_{i=1}^n \rho_i (f_{yi} - \sigma_{smi}) \cos^2 \theta_{ni}$  ;
  |  $\sigma_{c1} = \min(\sigma_{c1a}, \sigma_{c12,max})$  ;
end
;
if  $\epsilon_{c2} \leq \epsilon_{cr}$  then
  |  $\sigma_{c2} = E_c \epsilon_{c2}$  ;
else
  |  $\sigma_{c2a} = \frac{f_t}{1 + \sqrt{c_t \epsilon_{c2}}}$  ;
  |  $\sigma_{c2} = \min(\sigma_{c2a}, \sigma_{c12,max})$  ;
end

```

---

Fonte: O Autor (2019).

### 6.2.2.2 Estado de compressão-tração biaxial

Para o estado de compressão-tração biaxial, utiliza-se as relações constitutivas propostas por Vecchio (2000). O concreto apresenta uma perda de resistência à compressão pela presença de deformações transversais, sendo assim, um fator de redução é levado em conta. Além disto, depois de fissurado, o concreto continua resistindo esforços de tração devido ao mecanismo do *tension-stiffening*. As relações constitutivas estão todas apresentadas nas Eq. 4.19 à Eq. 4.25. Um algoritmo proposto está ilustrado na Figura. 33.

Figura 33 – Sub-rotina para o cálculo das tensões do concreto sob compressão-tração biaxial

---

```

* tensão de compressão *
% Calcular o fator de perda de resistência da compressão  $\beta_d$ 
 $r = \epsilon_{c12}/\epsilon_{c2}$  ;
 $C_s = 0.55$  ;
 $C_d = 0.35(r - 0.8)^{0.8}$  ;
 $\beta_d = 1/(1 + C_s C_d)$  ;

% Calcular a resistência máxima e sua respectiva deformação
 $f_p = \beta_d f_c$  ;
 $\epsilon_p = \beta_d \epsilon_{c0}$  ;

% Calcular a tensão principal de compressão pela parábola de Hognestead
 $\sigma_{c2} = -f_p \left[ 2 \left( \frac{\epsilon_{c2}}{\epsilon_p} \right) - \left( \frac{\epsilon_{c2}}{\epsilon_p} \right)^2 \right]$  ;

* tensão de tração *

if  $\epsilon_{c1} \leq \epsilon_{cr}$  then
|  $\sigma_{c1} = E_c \epsilon_{c1}$  ;
else
|  $\frac{1}{m} = \sum_{i=1}^n \frac{4\rho_i}{\phi_i} |\cos \theta_{ni}|$  ;
|  $c_t = 2.2m$  ;
|  $\sigma_{c1a} = \frac{f_t}{1 + \sqrt{c_t \epsilon_{c1}}}$  ;
|  $\sigma_{c1,max} = \sum_{i=1}^n \rho_i (f_{yi} - \sigma_{smi}) \cos^2 \theta_{ni}$  ;  $\sigma_{c1} = \min(\sigma_{c1a}, \sigma_{c1,max})$  ;
end

```

---

Fonte: O Autor (2019).

### 6.2.2.3 Estado de compressão biaxial

Como visto anteriormente, concreto quando submetido ao estado de compressão biaxial, apresenta uma aumento de resistência à compressão, como pôde ser visto no trabalho de Kupfer, Hilsdorf e Rusch (1969). Neste trabalho este comportamento foi modelado pelo parâmetro,  $K_{ci}$ , estabelecido por Vecchio (1992), onde  $i$  é a direção do ganho de resistência e  $j$  é a direção das tensões que agem em  $i$ . As relações constitutivas estão representadas nas Eq. 4.26 à Eq. 4.33.

Observa que pra o cálculo das tensões principais do concreto, o sistema de equações não

é linear, portanto é necessário resolve-las iterativamente. Um algoritmo proposto está resumido na Figura 34.

Figura 34 – Sub-rotina para o cálculo das tensões no concreto sob estado de compressão biaxial

---

```

*Estado de compressão biaxial* ;
Inicializar  $\sigma_{c1} = 0$  e  $\sigma_{c2} = 0$  ;
 $i = 1$  ;
Norma( $i$ ) = 0 ;
Erro = 10000 ;
while Erro > Tol e  $i < MaxIter$  do
   $K_1$  e  $K_2$ ; % Calcular o fator de aumento de resistência
   $f_{p1}$  e  $f_{p2}$ ; % Calcular as tensões de compressão máxima
   $\varepsilon_{p1}$  e  $\varepsilon_{p2}$ ; % Calcular as deformações de pico.;
   $\sigma_{c1}$  e  $\sigma_{c2}$ ; % Calcular as tensões principais ;

  Norma( $i+1$ ) =  $\sqrt{\sigma_{c1}^2 + \sigma_{c2}^2}$  ;
  Erro = |Norma( $i$ ) - Norma( $i+1$ )| ;
   $i = i + 1$  ;
end

```

---

Fonte: O Autor (2019).

### 6.2.3 Sub-rotina para o cálculo das tensões locais

As tensões locais da fissura são obtidas a partir do equilíbrio de tensões das regiões entre fissuras e locais da fissura, como mostrando nas equações do item 4.2.

Primeiramente, o cálculo das tensões locais da armadura,  $\sigma_{sri}$ , deve ser feito a partir de incrementos de deformações,  $\Delta\varepsilon_{si}^r$ , até que o lado direito da Eq. 4.7,  $\sigma_{c1}^*$ , atinja o valor da tensão principal de tração do concreto,  $\sigma_{c1}$ .

$$\sigma_{c1}^* = \sum_{i=1}^n \rho_i (\sigma_{sri} - \sigma_{smi}) \cos^2 \theta_{ni} = \sigma_{c1}. \quad (6.4)$$

Como existe duas componentes de tensão no aço,  $(x, y)$ , e apenas uma equação, Vecchio (2001) assumiu que o incremento de deformação no aço,  $\Delta\varepsilon_{si}^r$ , colinear com a direção normal à fissura. Assim, as deformações locais da armadura pode ser expressa como:

$$\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{si} + \Delta\varepsilon_{si}^r \cos^2 \theta_{ni} \quad (6.5)$$

As relações constitutivas para a armadura na região local são as mesmas utilizadas para as tensões médias da armadura, substituindo  $\sigma_{si}$  por  $\sigma_{sri}$  e  $\varepsilon_{si}$  por  $\varepsilon_{sr}$ .

Calculadas as tensões locais da armadura, as tensões de cisalhamento são encontradas resolvendo o equilíbrio da Eq. 4.9.

$$\tau_{ci} = \sum_{i=1}^n \rho_i (\sigma_{sri} - \sigma_{smi}) \cos \theta_{ni} \sin \theta_{ni}.$$

Por fim, a magnitude do deslizamento,  $\delta_s$ , pode ser obtido através de relações constitutivas apropriadas, definidas o por Eq. 4.11.

$$\delta_s = \frac{\tau_{ci}}{1.8w_r^{-0.8} + (0.234w_r^{-0.707} - 20)f_{cc}}$$

Um algoritmo simples para o cálculo das tensões e deformações locais está resumido na Figura 35.

Figura 35 – Sub-rotina para o cálculo das tensões locais da fissura

---

```

Inicializar  $\tau_{ci} = 0$ ;
Inicializar  $\Delta\varepsilon_{1cr} = 0.0001$ ;
 $j = 1$  ;
 $R = 10000$  ;
while  $R > Tol$  do
     $\varepsilon_{sri} = \varepsilon_{si} + \Delta\varepsilon_{1cr}(j) \cos^2 \theta_{ni}$  ;
    Calcular  $\sigma_{sri}$  ;
    Calcular  $\sigma_{c1}^*$  ;
     $R = \sigma_{c1}^* - \sigma_{c1}$  ;
     $k_{scri} = \sum_{i=1}^n \rho_i \frac{\sigma_{sri}}{\varepsilon_{sri}} \cos^2 \theta_{ni}$  ;
     $x = -k_{scri} / Residuo$  ;
     $\Delta\varepsilon_{1sr}(j+1) = \Delta\varepsilon_{1sr}(j) + x$  ;
end
Calcular  $\tau_{ci}$  ;
Calcular  $\delta_s$  ;
Calcular  $\varepsilon_r$  ;

```

---

Fonte: O Autor (2019).

## 7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 7.1 Experimentos de Lefas, Kotsovos e Ambraseys (1990)

Lefas, Kotsovos e Ambraseys (1990) apresentaram um estudo de 13 paredes de concreto armado submetidas à diferentes combinações de cargas axiais e laterais. As paredes foram divididas em duas categorias de acordo com a sua geometria (razão entre altura e comprimento,  $h/l$ ). Foram denominadas “Tipo 1” aquelas cuja razão  $h/l = 1$  (750mm de comprimento x 750mm de altura) e largura de 70mm. As “Tipo 2” correspondem as paredes com  $h/l = 2$  (650mm de comprimento x 1300mm de altura) e largura de 65mm. Além disto, foram monoliticamente concretadas vigas tanto no topo quanto na base de cada paredes com função de transferir as cargas axiais e laterais para as paredes como também fixar o experimento ao chão, simulando uma fundação rígida.

Todas as dimensões e detalhes das armaduras estão representadas na Figura. 36. Para as armaduras verticais e horizontais foram utilizadas, respectivamente, barras com diâmetro de 8mm e 6.25mm. Os espaçamentos das armaduras verticais foram, respectivamente, de 60 mm e 62 mm para o Tipo 1 e Tipo 2, enquanto que as horizontais foram de 80 mm e 115 mm. Armaduras adicionais em forma de estribos, com diâmetro de 4 mm, foram utilizadas para garantir o confinamento necessário nas bordas das paredes. As tensões de escoamento,  $f_y$ , e últimas,  $f_u$ , para cada tipo de armadura estão resumidas na Tabela. 2.

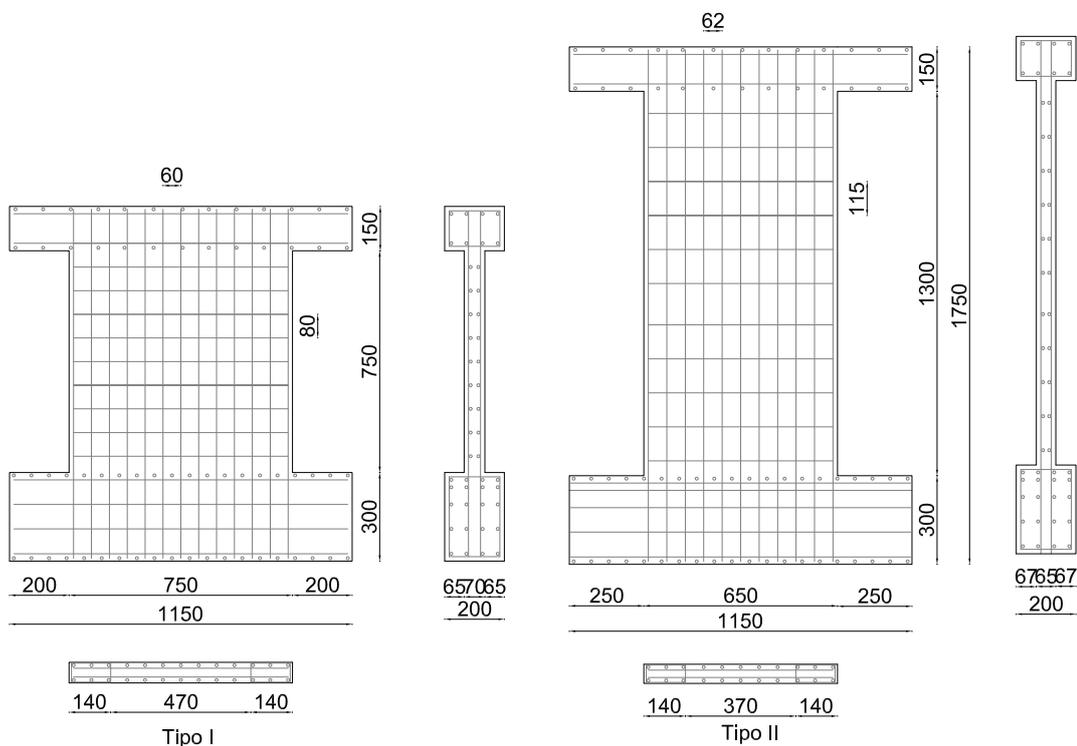
Tabela 2 – Propriedades das barras de aço

Diâmetro	$f_y$ (MPa)	$f_u$ (MPa)	$E_s$ (GPa)
8 mm	470	565	210
6.25 mm	520	610	210
4 mm	420	490	210

Fonte: Adaptado de Vecchio (1992).

O modelo de Elementos Finitos para as paredes dos Tipos 1 e 2 foram realizados com uma malha contendo 170 e 164 elementos respectivamente, como ilustrado na Figura. 37. Os carregamentos aplicados nas paredes foram como cargas nodais na viga de topo e todos os nós ao longo da viga de base foram restringidos. As armaduras foram modeladas de maneira distribuída. Quatro zonas distintas foram consideradas para cada tipo de parede em termos da taxa de armadura e de sua espessura, conforme ilustrado na Figura. As taxas de armaduras,  $\rho$ , atribuídas a cada elemento estão resumidas na Tabela. 3.

Figura 36 – Geometria e detalhes das armaduras das paredes de concreto armado



Fonte: Adaptado de Lefas, Kotsovos e Ambraseys (1990)

Tabela 3 – Taxa de armadura correspondente à cada elemento

Tipo	Zona	t(mm)	$\rho_x$ (%)	$\rho_y$ (%)	$\rho_z$ (%)
I	1	70	1.095	2.138	-
	2	70	1.095/0.448	3.076	1.20
	3	200	0.818	0.837/0.209	0.279
	4	200	1.675	0.837/0.209	0.140
II	1	65	0.82	2.09	-
	2	65	0.82/0.336	3.312	0.90
	3	200	0.818	0.810/0.203	0.270
	4	200	1.022	0.810/0.203	0.135

Fonte: Adaptado de Vecchio (1992).

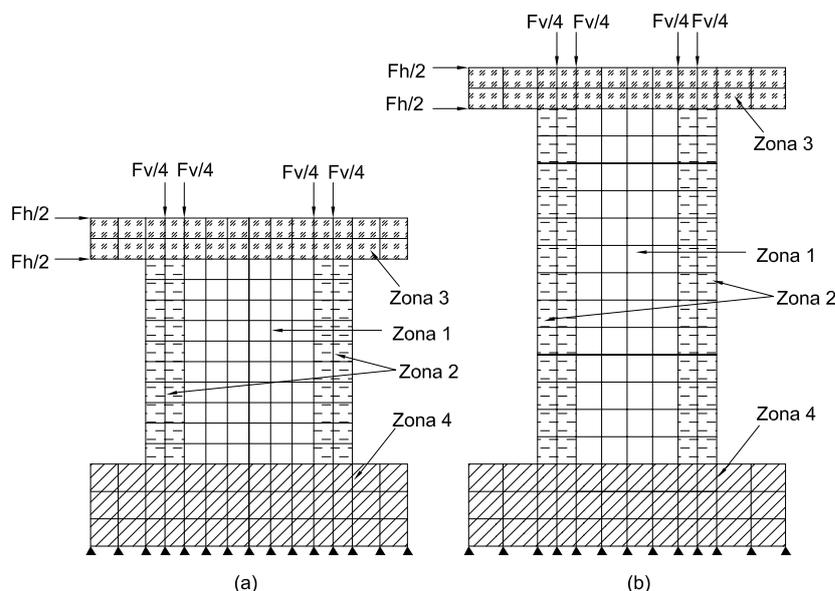
As propriedades do concreto adotadas no modelo numérico foram estimadas através de formulações empíricas. As resistências cilíndrica à compressão foram adotadas como 80% da resistência cúbica à compressão,  $f_c = 0.85f_{cu}$ . As resistências à tração e os módulos de elasticidade dos concretos foram estimados como:  $f_t = 0.33\sqrt{f_c}$  e  $E_c = 5000\sqrt{f_c}$ . Para todas as paredes foi considerado o coeficiente de Poisson igual a 0.15. Todos os parâmetros estão resumidos na Tabela. 4.

Tabela 4 – Propriedades do concreto

Parede	Tipo	$F_v$ (kN)	$f_{cu}$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$E_c$ (MPa)
SW11	I	0	52.3	44.5	2.20	33350
SW12	I	230	53.6	45.6	2.23	33750
SW15	I	185	43.3	36.8	1.97	29900
SW16	I	460	51.7	44.0	2.20	33150
SW21	II	0	42.8	36.4	2.00	32800
SW22	II	182	50.6	43.0	2.16	32800
SW24	II	0	48.3	41.1	2.12	32050
SW25	II	325	45.0	38.3	2.04	30950

Fonte: Adaptado de Vecchio (1992).

Figura 37 – Modelo de Elementos Finitos das paredes Tipo I e II



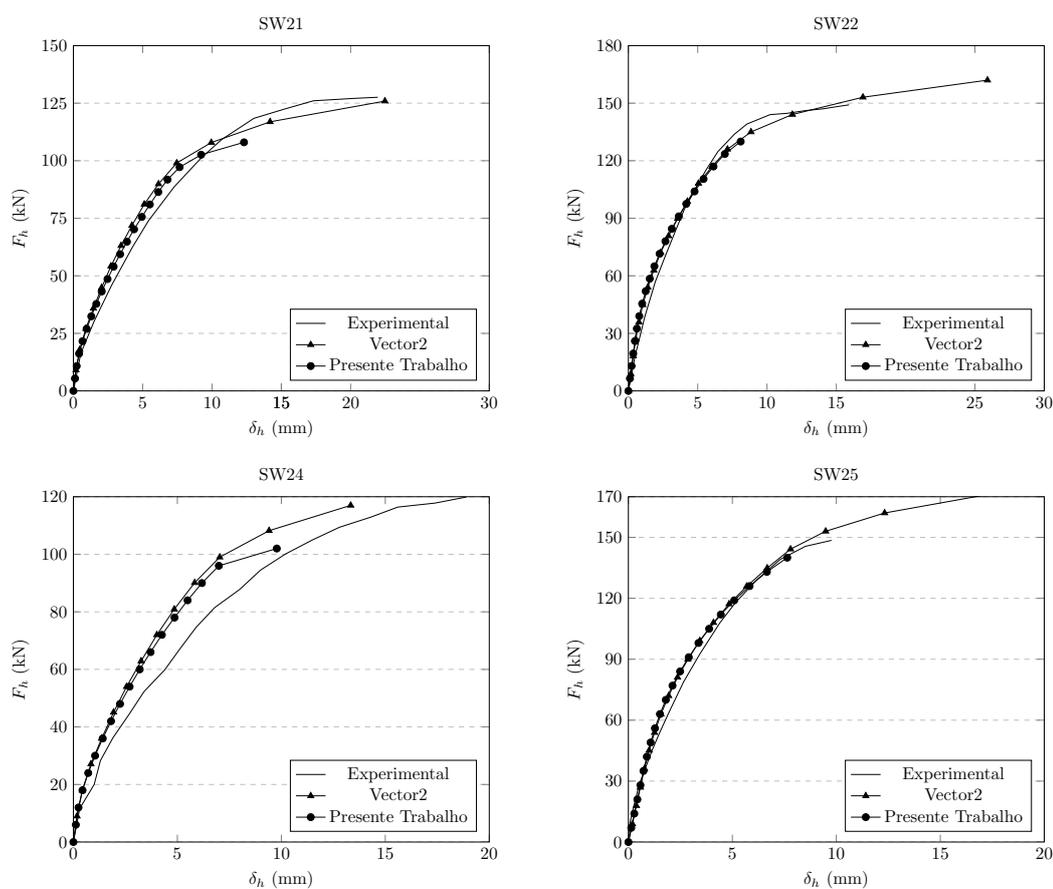
Fonte: Adaptado de Vecchio (1992)

Os resultados obtidos pelo modelo numérico foram comparados com os resultados experimentais e com os resultados simulados no software Vector2. As curvas do tipo carga-deslocamento foram plotadas, conforme as Figuras 38 e 39. Na Tabela. 5, apresentam-se as cargas de ruptura obtidas e os correspondentes resultados experimentais e do programa Vector2.

Primeiramente, fazendo uma análise comparativa entre o programa Vector2, pode-se afirmar que o comportamento dos dois modelos numéricos é bastante similares, como pode ser visto nas curvas carga-deslocamento, pelo menos até perto da carga de ruptura. Esses resultados eram esperados, visto que os dois modelos são baseados nas mesmas teorias. Em geral, as cargas de ruptura do código proposto foram menores que a do Vector2. Essa diferença provavelmente pode estar em dois aspectos. O primeiro consiste nos mecanismos adicionais

que estão incorporado ao Vector2, como efeito de pino, não linearidade geométrica e efeito do *tension softening*, além de outras abordagens numéricas que não estão explícitas no manual. O segundo é a maneira em que as tensões são avaliadas, no Vector2, as deformações são calculadas em um único ponto de Gauss (WONG; VECCHIO; TROMMELS, 2013), já no código proposto as deformações são avaliadas em cada ponto de Gauss (neste trabalho foram considerados quatro pontos de Gauss para a integração numérica).

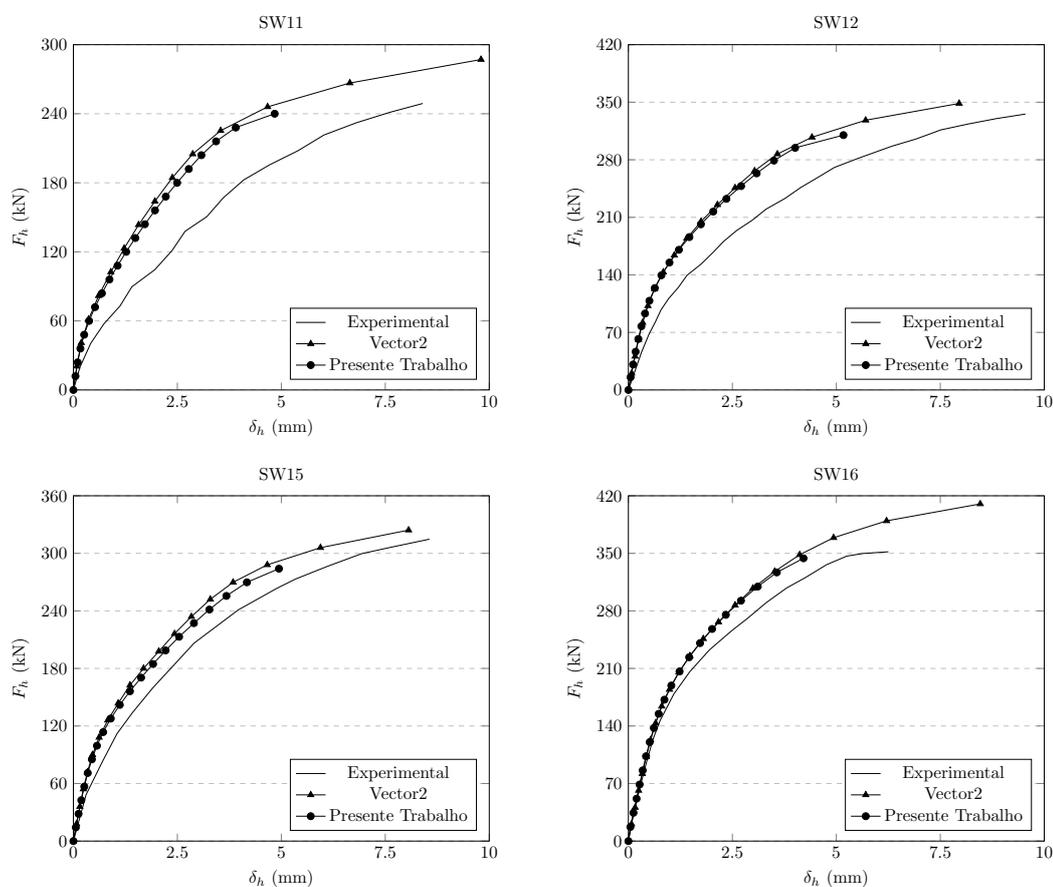
Figura 38 – Curvas carga versus deslocamento das paredes SW21, SW22, SW24 e SW25



Fonte: O Autor (2019).

Por fim, comparando os resultados numéricos com os experimentais, pode-se observar uma boa correlação entre as curvas carga-deslocamentos assim como as capacidades de carga. Em geral, os dois modelos numéricos apresentaram ótimos valores estatísticos. O modelo proposto neste trabalho demonstrou uma boa precisão nos resultados com média igual à 1.12 e um COV de 4.4%. Além de demonstrar todos os resultados a favor da segurança (razões resultado experimental por resultado numérico menor que 1). Já os resultados obtidos pelo software Vector2, obteve uma média de 0.95 e um COV de 5.9%, com praticamente todos os resultados contra a segurança.

Figura 39 – Curvas carga versus deslocamento das paredes SW11, SW12, SW15, SW16



Fonte: O Autor (2019).

Tabela 5 – Comparação dos resultados numéricos e experimentais.

Parede	$F_{h,exp}$ kN	$F_{h,cdigo}$ (kN)	$F_{h,Vector2}$ (kN)	$Exp/Cdigo$	$Exp/Vector2$
SW11	260	240	287	1.083	0.906
SW12	340	310	348	1.097	0.977
SW15	320	284	324	1.127	0.987
SW16	355	344	410	1.032	0.866
SW21	127	108	126	1.175	1.009
SW22	150	130	162	1.154	0.926
SW24	120	102	117	1.176	1.026
SW25	150	140	170	1.07	0.882
			Média	1.112	0.951
			SD	0.049	0.056
			COV (%)	4.4	5.9

Fonte: Adaptado de Vecchio (1992).

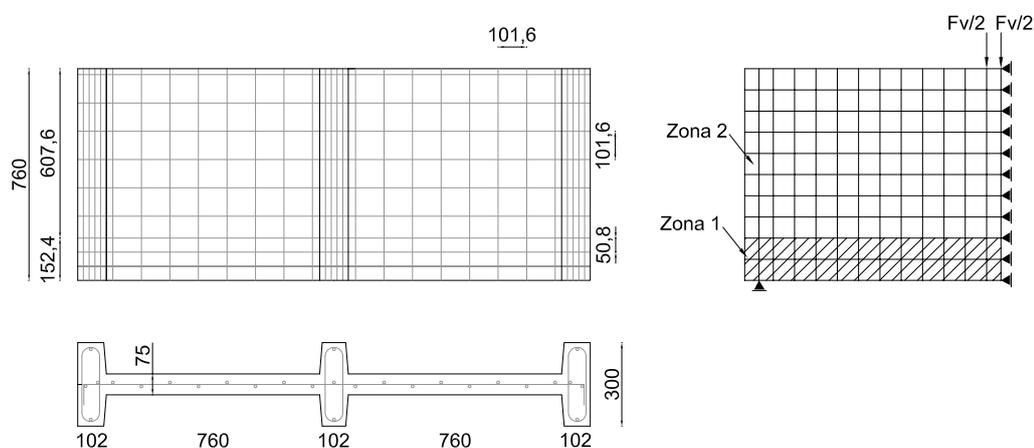
## 7.2 Experimentos de Cervenka e Gerstle (1971)

Cervenka e Gerstle (1971) apresentaram uma série de teste vigas-paredes de concreto armado simplesmente apoiada com uma carga concentrada no meio do vão. Esse experimento foi obtido pela junção de dois painéis com dimensões de 760 mm de comprimento por 760 mm de altura e espessura de 51 mm ou 76 mm, como mostrado na Figura 40.

Os detalhes da armadura do painel W2 estão ilustrado na Figura. 40. As barras de reforço tanto vertical quanto horizontal apresentam diâmetro de 9.525 mm. O espaçamento das armaduras verticais foi adotado constante, com valor de 101.6 mm. Já as armaduras horizontais apresentavam variações, os valores dos espaçamentos eram de 50.8 mm na parte mais baixa do painel e de 101.6 mm na parte superior. A tensão de escoamento e o módulo de elasticidade das barras de aço foram estimadas a partir de testes de tração, apresentando valores de  $f_y = 353MPa$  e  $E_s = 190000MPa$ , já a tensão última foi adotada como  $f_u = 1.15f_y$ .

O painel W3 difere do W2 na disposição da armadura e da espessura da parede. Neste painel, apenas armaduras horizontas foram consideradas com um espaçamento de 50.8mm. As propriedades do aço foram similares ao do painel W2.

Figura 40 – Geometria e detalhes das armaduras das paredes de concreto armado



Fonte: Adaptado de Cervenka e Gerstle (1971).

O concreto utilizado nos dois painéis apresentou resistência à compressão cilíndrica de  $f_c = 26.8MPa$ . As resistências à tração e os módulos de elasticidade do concreto foram estimados como:  $f_t = 0.33\sqrt{f_c}$  e  $E_c = 5000\sqrt{f_c}$ . Também foi considerado o coeficiente de Poisson igual a 0.2.

Os modelos numéricos foram realizados utilizando apenas a metade das vigas-paredes, devido a simetria do problema, como ilustrado na Figura. 40. Além disto, as malhas de elementos finitos foram discretizadas contendo 130 elementos. As cargas aplicadas e as condições de

contorno das vigas estão apresentados Fig. 40. Um modelo de armadura distribuída foi adotado nos modelos. As taxas de armaduras,  $\rho$ , atribuídas a cada elemento estão resumidas na Tabela. 6.

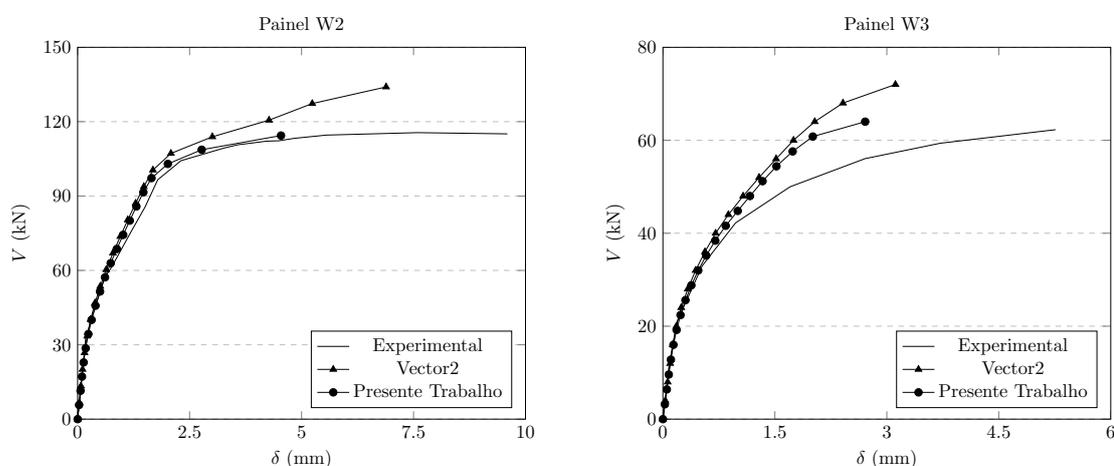
Tabela 6 – Taxa de armadura correspondente à cada elemento

Tipo	Zona	t(mm)	$\rho_x$ (%)	$\rho_y$ (%)
W2	1	75/300	1.83	0.92
	2	75/300	0.92	0.92
W3	1	50/270	1.23	0
	2	50/270	1.23	0

Fonte: O Autor (2019).

Novamente, os resultados obtidos pelos dois modelos numéricos foram comparados com os experimentais. As curvas das cargas por deslocamentos foram plotadas e representadas na Figura. 41 e os resultados foram resumidos na Tabela. 7.

Figura 41 – Curvas carga versus deslocamento dos painéis W2 e W3



Fonte: O Autor (2019).

Como esperado, os resultados dos modelos numéricos foram bastante parecidos, pelo menos até próximo à carga de ruptura. Assim como os resultados anteriores, as cargas de rupturas obtidas pelo Vector2 foram maiores, para os dois painéis, do que do modelo proposto. Valem as mesmas explicações dos resultados anteriores para as possíveis causas das diferenças entre as cargas de ruptura.

A curva carga por deslocamentos dos dois painéis, resultantes da análise pelo dois modelos, apresentaram uma boa concordância com os resultados experimentais, conforme ilustrado na Figura 41, principalmente para o painel W2. Apesar de ter apenas dois experimentos,

uma análise estatística foi realizada para corroborar a eficácia dos modelos apresentados. Os dois modelos numéricos apresentaram resultados estatísticos bastante satisfatório. A média do modelo proposto foi de 0.99 com um COV de 1.77%, enquanto que o Vector2 apresentou uma média de 0.869 com um COV de 0.17%.

Tabela 7 – Comparação dos resultados numéricos e experimentais de Cervenka e Gerstle (1971).

Painel	$V_{exp}$ kN	$V_{Cdigo}$ (kN)	$V_{Vector2}$ (kN)	$Exp/Cdigo$	$Exp/Vector2$
Painel W2	115.0	114	134	1.008	0.858
Painel W3	62.3	64	72	0.973	0.861
			Média	0.990	0.859
			SD	0.017	0.0015
			COV (%)	1.77	0.175

Fonte: O Autor (2019).

## 8 CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentou-se um algoritmo para análise de estrutura de concreto armado pelo Método dos Elementos Finitos. No que se diz respeito aos carregamentos, foram considerados apenas as estruturas sujeitas ao estado plano de tensões solicitadas por cargas monótonas.

As formulações adotadas foram fortemente baseadas no *Disturbed Stress Field Model*. O DSFM é um modelo ortotrópico que segue a teoria da elasticidade não linear e todo conceito foi formulado através de relações de equilíbrio e compatibilidade em termos dos valores médios das deformações e tensões.

O DSFM distingue as deformações totais do concreto em deformações médias, decorrentes das diversas aberturas de fissuras que ocorrem no elemento, e deformações locais, devido ao deslizamento entre as superfícies da fissura. Sendo considerado por alguns autores, um modelo de fissuras parcialmente distribuídas. Além disto, as fissuras são consideradas rotativas, permanecendo sempre perpendiculares com a direção da deformação principal máxima do concreto.

As relações constitutivas também foram adotadas de forma à considerar os principais efeitos do concreto submetido ao estado biaxial de tensões. Fatores foram incluídos nas curvas tensão-deformação dos ensaios de compressão uniaxial, modelando os efeitos da perda de resistência do concreto, na presença de deformações transversais e o ganho de resistência devido ao confinamento do elemento. O efeito do *tension-stiffening* foi considerado a partir de relações constitutivas formuladas de forma empíricas. Além disto, o conceito de pseudas carga foi apresentado, com intuito principalmente de desacoplar os efeitos de Poisson do estado biaxial do concreto, permitindo a utilização de relações constitutivas obtidas a partir de ensaios uniaxiais.

Uma descrição sucinta de todos os procedimentos realizados no desenvolvimento do código foi realizada, além de expor toda as formulações do DSFM.

Para validar o modelo proposto foram feitos estudos comparativos entre os resultados numéricos e o alguns resultados experimentais realizados por Lefas, Kotsovos e Ambraseys (1990) e Cervenka e Gerstle (1971). Além disto, utilizou-se um software de análise não linear de concreto armado, denominado Vector2, desenvolvido na Universidade de Toronto, para corroborar com a eficácia do programa desenvolvido.

De modo geral, obteve-se uma boa correlação entre os resultados numéricos e experimentais. As comparações entre os resultados foram feitas através de análises estatísticas, apresentando uma boa confiabilidade e coerência. Valores significativos foram obtidas quanto às médias e os coeficientes de variação.

Por fim, propõe-se algumas sugestões para trabalhos futuros:

1. Apresentar um método de soluções não lineares que capture o comportamento pós-pico das estruturas de concreto armado.

2. Expandir para elementos de casca e sólidos, com intuito de ampliar a aplicabilidade do modelo.
3. Aprimorar o modelo, com interesse de buscar métodos mais racionais, que satisfaçam os princípios de análise limite de plasticidade.
4. Apresentar um modelo estocástico, afim de determinar os principais parâmetros que influência a resposta final da estrutura.

## REFERÊNCIAS

- BELARBI, A.; HSU, T. T. Constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete. *Structural Journal*, v. 91, n. 4, p. 465–474, 1994. Citado na página 30.
- BENTZ, E. C. *Sectional analysis of reinforced concrete members*. Toronto: University of Toronto, 2000. Citado na página 41.
- CERVENKA, V.; GERSTLE, K. Inelastic analysis of reinforced concrete panels: Part i. theory, part ii: Experimental verification. *IABSE*, v. 31, p. 32–45, 01 1971. Citado 5 vezes nas páginas 10, 15, 74, 76 e 77.
- CHEN, W.-F. *Plasticity in reinforced concrete*. New York: McGraw-Hill, 1982. Citado na página 28.
- COLLINS, M. P. Towards a rational theory for rc members in shear. *Journal of the Structural Division*, v. 104, n. 4, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 29.
- COLLINS, M. P. et al. A general shear design method. *ACI Structural Journal*, v. 93, n. 1, p. 36–45, 1996. Citado na página 16.
- DABBAGH, H.; FOSTER, S. A smeared—fixed crack model for fe analysis of rc membranes incorporating aggregate interlock. *Advances in structural engineering*, v. 9, n. 1, p. 91–102, 2006. Citado na página 30.
- DARWIN, D.; PECKNOLD, D. A. Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, v. 103, n. 2, p. 229–241, 1977. Citado na página 29.
- FOSTER, S. J.; MARTI, P. Cracked membrane model: finite element implementation. *Journal of Structural Engineering*, v. 129, n. 9, p. 1155–1163, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 35.
- HOGNESTAD, E. *Study of combined bending and axial load in reinforced concrete members*. Illinois, 1951. Citado na página 41.
- HSU, T. T. Softened truss model theory for shear and torsion. *Structural Journal*, v. 85, n. 6, p. 624–635, 1988. Citado 3 vezes nas páginas 16, 29 e 30.
- HSU, T. T.; ZHU, R. R. Softened membrane model for reinforced concrete elements in shear. *Structural Journal*, v. 99, n. 4, p. 460–469, 2002. Citado na página 31.
- KAUFMANN, W. *Strength and deformations of structural concrete subjected to in-plane shear and normal forces*. Zurich: ETH Zurich, 2013. v. 234. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 30.
- KAUFMANN, W.; MARTI, P. Structural concrete: cracked membrane model. *Journal of Structural Engineering*, v. 124, n. 12, p. 1467–1475, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 16, 29 e 30.
- KUPFER, H.; HILSDORF, H. K.; RUSCH, H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal Proceedings*, v. 66, n. 8, p. 656–666, 1969. Citado 7 vezes nas páginas 20, 21, 22, 34, 41, 42 e 66.
- LEFAS, I. D.; KOTSOVOS, M. D.; AMBRASEYS, N. N. Behavior of reinforced concrete structural walls: strength, deformation characteristics, and failure mechanism. *Structural Journal*, v. 87, n. 1, p. 23–31, 1990. Citado 4 vezes nas páginas 15, 69, 70 e 77.

LOGAN, D. L. *A first course in the finite element method*. 5. ed. Massachusetts, EUA: Cengage Learning, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 49, 51 e 59.

MACGREGOR, J. G. et al. *Reinforced concrete: Mechanics and design*. 3. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.

MARTI, P. et al. Tension chord model for structural concrete. *Structural Engineering International*, v. 8, n. 4, p. 287–298, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 30.

NGO, D.; SCORDELIS, A. C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *Journal Proceedings*, v. 64, n. 3, p. 152–163, 1967. Citado na página 27.

NUH, M. E.; BRUUN, E. P.; BENTZ, E. C. Verification of a novel 2d finite element for reinforced and prestressed concrete. *Galbraith Society Undergraduate Engineering Journal*, p. 10, 2017. Citado na página 28.

PANG, X.-B. D.; HSU, T. T. Behavior of reinforced concrete membrane elements in shear. *Structural Journal*, v. 92, n. 6, p. 665–679, 1995. Citado na página 30.

PANG, X.-B. D.; HSU, T. T. Fixed angle softened truss model for reinforced concrete. *Structural Journal*, v. 93, n. 2, p. 196–208, 1996. Citado na página 30.

PIMENTEL, M.; BRÜWHILER, E.; FIGUEIRAS, J. Extended cracked membrane model for the analysis of rc panels. *Engineering Structures*, v. 32, n. 8, p. 1964–1975, 2010. Citado na página 30.

RASHID, Y. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, v. 7, n. 4, p. 334–344, 1968. Citado na página 28.

REDDY, J. N. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 2015. Citado na página 60.

SELBY, R. G.; VECCHIO, F. J. A constitutive model for analysis of reinforced concrete solids. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v. 24, n. 3, p. 460–470, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 34, 42, 45 e 47.

VECCHIO, F. J. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete membranes. *ACI Structural Journal*, v. 86, n. 1, p. 26–35, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 29.

VECCHIO, F. J. Finite element modeling of concrete expansion and confinement. *Journal of Structural Engineering*, v. 118, n. 9, p. 2390–2406, 1992. Citado 9 vezes nas páginas 34, 41, 44, 45, 66, 69, 70, 71 e 73.

VECCHIO, F. J. Disturbed stress field model for reinforced concrete: formulation. *Journal of Structural Engineering*, v. 126, n. 9, p. 1070–1077, 2000. Citado 10 vezes nas páginas 16, 29, 30, 33, 36, 37, 38, 39, 40 e 66.

VECCHIO, F. J. Disturbed stress field model for reinforced concrete: implementation. *Journal of Structural Engineering*, v. 127, n. 1, p. 12–20, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 45, 63 e 67.

VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI Structural Journal*, v. 83, n. 2, p. 219–231, 1986. Citado 4 vezes nas páginas 16, 29, 38 e 41.

VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. Compression response of cracked reinforced concrete. *Journal of structural engineering*, v. 119, n. 12, p. 3590–3610, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

VILLAÇA, S. F.; GARCIA, L. F. *Introdução à Teoria da Elasticidade*. 4. ed. Rido de Janeiro: Coppe/UFRJ, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 52.

WALRAVEN, J. C. Fundamental analysis of aggregate interlock. *Journal of the Structural Division*, v. 107, n. 11, p. 2245–2270, 1981. Citado na página 38.

WATSTEIN, D. Bond stress in concrete pullout specimens. *Journal Proceedings*, v. 38, p. 37–52, 1941. Citado na página 24.

WONG, P.; VECCHIO, F.; TROMMELS, H. *Vector2 and FormWorks User's Manual*. Toronto, Canada, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 62, 63 e 72.

YANG, Y.; WALRAVEN, J.; UIJL, J. d. Shear behavior of reinforced concrete beams without transverse reinforcement based on critical shear displacement. *Journal of Structural Engineering*, v. 143, n. 1, p. 04016146, 2016. Citado na página 26.

ZHU, R. R.; HSU, T. T. Poisson effect in reinforced concrete membrane elements. *Structural Journal*, v. 99, n. 5, p. 631–640, 2002. Citado na página 31.