



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA
CURSO DE DOUTORADO

ANDERSON DOUGLAS PEREIRA RODRIGUES DA SILVA

**PROTOTIPAÇÃO, DESENVOLVIMENTO E VALIDAÇÃO DE UM MICROMUNDO
COM SUPORTES PARA O ENSINO DE ÁREA E PERÍMETRO**

Recife
2019

ANDERSON DOUGLAS PEREIRA RODRIGUES DA SILVA

**PROTOTIPAÇÃO, DESENVOLVIMENTO E VALIDAÇÃO DE UM MICROMUNDO
COM SUPORTES PARA O ENSINO DE ÁREA E PERÍMETRO**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (PPGE-EDUMATEC) do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain

Recife
2019

S586p Silva, Anderson Douglas Pereira Rodrigues da.
Prototipação, desenvolvimento e validação de um micromundo com
suportes para o ensino de área e perímetro / Anderson Douglas Pereira
Rodrigues da Silva. – Recife, 2019.
407 f. : il.

Orientador: Franck Gilbert René Bellemain
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa
de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2019.
Inclui Referências e Apêndices.

1. Engenharia de software. 2. Matemática - Grandezas geométricas. 3.
Engenharia – Didática. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Bellemain, Franck
Gilbert René (Orientador). II. Título.

372.7 (23. ed.)

UFPE (CE2019-073)

ANDERSON DOUGLAS PEREIRA RODRIGUES DA SILVA

**PROTOTIPAÇÃO, DESENVOLVIMENTO E VALIDAÇÃO DE UM MICROMUNDO
COM SUPORTES PARA O ENSINO DE ÁREA E PERÍMETRO**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (PPGE-EDUMATEC) do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Defesa em: 1º/07/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain (Orientador e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Daniel Wyllie Rodrigues (Examinador Externo)
Universidade Federal do Rio de Janeiro/ Centro de Letras e Artes (UFRJ)

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo (Examinador Externo)
Universidade Federal do Rio de Janeiro

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus; autor da minha fé, a Ele seja dada toda honra, glória e louvor para sempre, meu amigo de todas as horas.

À minha família, meus pais Rostan e Neide e minha irmã Thalya pelo carinho dispensado em todos os momentos da minha vida.

À minha esposa Jessyca Karine pela paciência, apoio e compreensão durante todos os momentos que precisei me ausentar para pesquisar e concluir este trabalho.

Ao meu orientador e amigo professor Dr. Franck Bellemain, um grande pesquisador, com quem aprendi muito durante esses anos. Seus ensinamentos me permitiram vislumbrar novos horizontes na área de desenvolvimentos de software para o ensino da matemática. Essas linhas não são suficientes para externar minha gratidão.

À professora Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain, pelas importantes contribuições para a realização desta pesquisa.

Aos professores Dr. Daniel Wyllie Rodrigues, Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain, Dr. Paulo Figueiredo Lima e Dr. Victor Augusto Giraldo, pelas importantes contribuições na minha banca de defesa da tese.

Aos colegas do grupo Pró-Grandezas em especial a Alexandre, Lúcia e Tarcísio, pelas contribuições dadas na área de grandezas e medidas para esta pesquisa.

Aos colegas do grupo LEMATEC, em especial a Amanda pela contribuição com as telas para nova versão do software e a Elizabeth e Sadi, pelas importantes sugestões para o aprimoramento dos aspectos técnicos e de ergonomia do software.

À minha eterna professora de didática da matemática e amiga Walenska Maysa, por ter me incentivado a fazer um mestrado em Educação Matemática e Tecnológica.

Aos especialistas, sujeitos da pesquisa, que se mostraram disponíveis sempre que solicitei ajuda.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa de estudo durante todo o período de realização deste Doutorado.

Aos colegas Clara, Mário e Fábio pela atenção e por sempre estarem dispostos a tirar nossas dúvidas na secretaria do EDUMATEC.

E a você, leitor, que procura tornar suas aulas mais lúdicas por meio da utilização de diferentes recursos informáticos.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo conceber, desenvolver e validar um micromundo como elemento de suporte ao professor para o ensino de área e perímetro. A prototipação adotou um Modelo de Processo de Software construído com base na Engenharia Didático-Informática (EDI) desenvolvida por Ricardo Tibúrcio, que alia aspectos da Engenharia Didática estudada por Michèle Artigue e da Engenharia de Software presentes nos estudos de Sommerville e Pressman. Esse processo é constituído por cinco fases: Análises Preliminares; Análise de Requisitos; Análise à priori e Prototipação; Experimentação; Análise à posteriori e Validação. Na primeira fase, os conceitos de área e perímetro foram situados em relação aos aspectos cognitivos, epistemológicos, didáticos e informáticos que nos permitiram elencar elementos para o novo micromundo apresentados e discutidos nas Análises de Requisitos. Na fase de Análise à priori e Prototipação, que diz respeito ao desenvolvimento do protótipo, considerando-se as situações de uso a serem abordadas, trazemos à tona dois layouts iniciais com os possíveis recursos que deveriam ser implementados pelo programador no micromundo. Ainda nessa fase, apresentamos a primeira versão do protótipo e análise de seu funcionamento. Na experimentação, explicitamos como o software foi testado com docentes (especialistas em grandezas e medidas e em informática e educação matemática). Os resultados dessa fase culminaram na Análise à posteriori e Validação, que nos permitiu verificar, com base nas avaliações realizadas pelos especialistas, que o protótipo do software denominado de *Magnitude Studium* (MS) atendeu apenas parcialmente ao objetivo especificado na sua concepção. Isso se deve à ausência de uma variedade maior de elementos para a construção conceitual do perímetro, visto que há uma restrição das figuras a serem construídas (figuras não poligonais e a composição de figuras poligonais com não poligonais). Embora tenham identificado alguns erros no sistema, os docentes ressaltaram o potencial do MS com relação ao ensino de área. Assim, destacaram como ponto forte: a presença do tangram; dos poliminós; das diferentes ferramentas de cortes; da variedade de malhas; da possibilidade de medir a área e o perímetro por meio da fita métrica; da decomposição dos lados de uma figura para o estudo do perímetro; das ferramentas do menu quadratura e da construção de diferentes figuras poligonais. Sugerem o aprimoramento da ferramenta de colagem (composição), uma opção de escolher as unidades de medidas convencionais, as escalas das malhas e a possibilidade de desvincular uma figura criada na malha. No que diz respeito aos aspectos técnicos e de ergonomia, o MS mostrou-se, segundo os especialistas, ser de fácil manipulação, intuitivo e autoexplicativo. Contudo, sugeriram a implementação de um

mini tutorial, a descrição das ferramentas em português e a sinalização que dentro dos botões dos ícones existem outras ferramentas. As riquezas dos elementos elencados pelos especialistas nas análises realizadas nos menus e ferramentas do MS nos permitiram refletir sobre possíveis avanços e adaptações para uma versão definitiva desse software.

PALAVRAS-CHAVE: Área. Engenharia Didático-Informática. Engenharia de Software. Grandeza Geométrica.

RÉSUMÉ

Cette recherche avait pour objectif de concevoir, développer et valider un micro-monde en tant qu'élément de soutien à l'enseignant pour l'enseignement de la surface et du périmètre. Le prototypage a adopté un modèle de processus logiciel basé sur l'ingénierie didactique-informatique (EDI) développé par Ricardo Tibúrcio, qui combine des aspects de l'ingénierie didactique étudiés par Michèle Artigue et de l'ingénierie logicielle présents dans les études Sommerville et Pressman. Ce processus comprend cinq phases: analyses préliminaires; Analyse des besoins; Analyse a priori et prototypage; Expérimentation; Analyse a posteriori et validation. Au cours de la première phase, les concepts de surface et de périmètre ont été localisés par rapport aux aspects cognitif, épistémologique, didactique et informatique, ce qui nous a permis d'énumérer les éléments du nouveau monde imaginaire présentés et discutés dans l'Analyse des exigences. Dans la phase d'analyse et de prototypage a priori, qui concerne le développement du prototype, en tenant compte des situations d'utilisation à traiter, nous présentons deux mises en page initiales avec les ressources pouvant être mises en œuvre par le programmeur dans le micro-monde. Toujours dans cette phase, nous présentons la première version du prototype et analysons son fonctionnement. Lors de l'expérience, nous avons expliqué comment le logiciel avait été testé avec des enseignants (spécialistes des tailles et mesures, de l'enseignement de l'informatique et des mathématiques). Les résultats de cette phase ont abouti à l'analyse et à la validation a posteriori, qui nous ont permis de vérifier, sur la base des évaluations effectuées par les spécialistes, que le prototype du logiciel appelé Magnitude Studium (MS) ne servait que partiellement pour l'objectif spécifié dans sa conception. Cela est dû à l'absence d'une plus grande variété d'éléments pour la construction conceptuelle du périmètre, car il existe une restriction des figures à construire (figures non polygonales et composition des figures polygonales et non polygonales). Bien qu'ils aient identifié certaines erreurs dans le système, les enseignants ont souligné le potentiel de la SEP par rapport à l'enseignement par zone. Ainsi, ils ont mis l'accent sur un point fort: la présence de tangram; deux poliminos; des différents outils de coupe; variété de tricots; la possibilité de mesurer la superficie et le périmètre au moyen du ruban à mesurer; de la décomposition des côtés d'une figure pour l'étude du périmètre; les outils du menu en quadrature et la construction de différentes figures polygonales. Ils suggèrent l'amélioration de l'outil de dimensionnement (composition), une option permettant de choisir les unités de mesures conventionnelles, les échelles des mailles et la possibilité de dissocier une figure créée dans le maillage. En ce qui concerne les aspects techniques et l'ergonomie, le MS s'est avéré, selon les experts, être facile à manipuler, intuitif

et explicite. Cependant, ils ont suggéré la mise en place d'un mini tutoriel, la description des outils en portugais et la signalisation selon laquelle il existe d'autres outils à l'intérieur des boutons des icônes. La richesse des éléments recensés par les spécialistes dans les analyses effectuées dans les menus et outils de la MS nous a permis de réfléchir aux avancées et adaptations possibles pour une version définitive de ce logiciel.

MOTS-CLES: Aire. Ingénierie Didactique-Informatique. Ingénierie Logiciel. Grandeur géométrique.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Articulação entre as Engenharias	37
Figura 2	Modelo de processo de software	38
Figura 3	Representação geométrica da proposição 34 livro I	46
Figura 4	Representação geométrica da proposição 35 livro I	47
Figura 5	Representação geométrica proposição 36 livro I	47
Figura 6	Representação geométrica da proposição 37 do livro 1	48
Figura 7	Representação geométrica da Proposição 38 do livro I.	49
Figura 8	Representação geométrica da proposição 41 do livro I	49
Figura 9	Representação geométrica da proposição 42	50
Figura 10	Representação geométrica da proposição 43 do livro I	51
Figura 11	Ilustração da Proposição 45	51
Figura 12	Construção de paralelogramos	52
Figura 13	Representação geométrica da proposição 48 do livro I	53
Figura 14	Decomposição em triângulos	55
Figura 15	Relações entre os quadros	61
Figura 16	Comparação de área numérica	65
Figura 17	Figuras poligonais e não poligonais nas malhas	73
Figura 18	Esquema da tipologia de software.....	77
Figura 19	Composição de um micromundo	80
Figura 20	Criando ferramentas.....	84
Figura 21	Janela de abertura do AG2	93
Figura 22	Família do quadrado.....	94
Figura 23	Peças do AG2.....	95
Figura 24	Triângulos em diferentes posições	96
Figura 25	Paralelogramos construídos no AG 2.....	97
Figura 26	Paralelogramos criados com o uso do menu “modificar”	98
Figura 27	Bug em salvar as decomposições.....	101
Figura 28	Fusão de figuras	102
Figura 29	Construção no Cabri.....	106
Figura 30	Construção de um quadrado.....	107
Figura 31	Ferramentas no Cabri	108

Figura 32	Exemplo que área e perímetro não variam no mesmo sentido.....	109
Figura 33	Tangram no Geogebra: um modelo.....	113
Figura 34	Peças destacadas do tangram	114
Figura 35	Tangram	115
Figura 36	Separando as peças do tangram.....	116
Figura 37	Construindo o quadrado do tangram.....	117
Figura 38	Construção do paralelogramo no tangram	118
Figura 39	Jogo Poliminós	119
Figura 40	Finalizando o jogo.....	120
Figura 41	Triângulo equivalente.....	127
Figura 42	Geometry 2.8.2.....	131
Figura 43	Cálculo da área de um triângulo.....	132
Figura 44	Software triângulos	133
Figura 45	Software Área de um triângulo.	135
Figura 46	Alturas do Triângulo	136
Figura 47	Tela do software.....	137
Figura 48	Interface do software.....	139
Figura 49	1º Episódio do Software.....	142
Figura 50	Do Episódio 1.....	143
Figura 51	Sobreposição da folha de Hipólito à de Clara	144
Figura 52	Episódio 3.....	145
Figura 53	Episódio 4.....	146
Figura 54	Ordenação das figuras	147
Figura 55	Ordem crescente das áreas	148
Figura 56	Próxima tela	149
Figura 57	Início da ideia de unidade de medida de área	150
Figura 58	Orientação da atividade.....	151
Figura 59	Diferentes unidades de medida	152
Figura 60	Malhas pontilhadas quadradas	154
Figura 61	Perímetros	156
Figura 62	Reflexão sobre perímetro	157
Figura 63	Atividade com auxílio de um software	157
Figura 64	Perímetro dos poliminós	160
Figura 65	Cálculo de perímetros	160

Figura 66	Comparação de perímetros.....	161
Figura 67	Calculando perímetros	162
Figura 68	Explore – Construtor de áreas	164
Figura 69	Jogo do construindo áreas	165
Figura 70	Nível 3.....	166
Figura 71	Diferentes unidades de medida	167
Figura 72	Nível 3 atividade concluída.....	168
Figura 73	Nível 4.....	169
Figura 74	Nível 5.....	169
Figura 75	Nível 5 - conferir.....	170
Figura 76	Nível 6.....	171
Figura 77	Parte do Jogo construindo loucuras.....	172
Figura 78	Soma de Quadrados.....	176
Figura 79	Modo de decompor pelo ponto central.....	177
Figura 80	Modo de decompor 2	178
Figura 81	Malhas para o <i>Magnitude Studium</i>	180
Figura 82	Peças do tangram.....	182
Figura 83	Seleção das figuras.....	182
Figura 84	Transparência das figuras.....	182
Figura 85	Modelo do comportamento dos poliminós.....	183
Figura 86	Destacando uma parte do lado	184
Figura 87	Abrindo um polígono com cliques.....	185
Figura 88	Ferramenta colorir.....	186
Figura 89	Construindo Ferramentas	188
Figura 90	Salvando configuração	190
Figura 91	Configurando menu no AG2.....	190
Figura 92	Comparação de áreas.....	191
Figura 93	Decomposições e recomposições	192
Figura 94	Peças do jogo poliminós.....	193
Figura 95	Atividade na malha quadriculada.....	194
Figura 96	Mudança de unidade	195
Figura 97	Construindo Figuras	196
Figura 98	Prototipagem de tela 1.....	200
Figura 99	Possível Layout do <i>Magnitude Studium</i>	201

Figura 100	Exemplo: [P0, P1, P2, P3, P4, P0] para um pentágono.....	203
Figura 101	Decomposição tipo 1.....	203
Figura 102	Decomposição tipo 2.....	204
Figura 103	Decomposição tipo 3.....	204
Figura 104	Colagem	205
Figura 105	Layout do MS.....	207
Figura 106	Colorindo as figuras	209
Figura 107	Definição da unidade que compõe os poliminós.....	211
Figura 108	Tangram no MS.....	212
Figura 109	Decomposição dos lados das figuras.....	213
Figura 110	Triangle to parallelogram.....	214
Figura 111	Parallelogram to rectangle.....	214
Figura 112	Área em Lebesgue.....	215
Figura 113	Decomposição de um quadrado em duas partes iguais de mesma área	218
Figura 114	Segmentos divididos em quatro partes congruentes	219
Figura 115	Paralelogramos de mesma área	219
Figura 116	Extrato do protocolo de E1	221
Figura 117	Extrato do protocolo E2	221
Figura 118	Extrato do protocolo de E3	222
Figura 119	Extrato do protocolo do participante A.....	226
Figura 120	Extrato do protocolo do participante B.....	226
Figura 121	Extrato do protocolo da participante C	227
Figura 122	Extrato de protocolo 1 do participante D	228
Figura 123	Extrato de protocolo 2 do participante D	228
Figura 124	Extrato de protocolo da dupla 1 -teste da ferramenta ponteiro parte 1	235
Figura 125	Extrato de protocolo da dupla 1 - teste da ferramenta ponteiro parte 2	236
Figura 126	Reflexão no MS.....	237
Figura 127	Extrato de protocolo da dupla 1	238
Figura 128	Extrato do protocolo da dupla 1- vértices e lados escondidos do triângulo...	239
Figura 129	Ocultando objetos.....	240
Figura 130	Extrato de protocolo da dupla 2	242
Figura 131	Bug nas malhas pontilhadas isométrica e hexagonal	245
Figura 132	Análise da linha poligonal.....	247
Figura 133	Linha poligonal não simples	247

Figura 134	Linha poligonal simples e não simples	248
Figura 135	Construção realizada pela dupla 3.....	249
Figura 136	Bug na tela do software.....	250
Figura 137	Bug na malha isométrica ao desenhar um triângulo	250
Figura 138	Extrato de protocolo da dupla 1	251
Figura 139	Extrato de protocolo da dupla 2- análise do segmento circular (parte 1).....	252
Figura 140	Extrato de protocolo da dupla 2- análise do segmento circular (parte 2).....	252
Figura 141	Tangrans construídos pela dupla 2	254
Figura 142	Decomposição do Triminó.....	255
Figura 143	Extrato de protocolo da dupla 2 (Tentativa de colagem 1)	256
Figura 144	Extrato de protocolo da dupla 2 (Tentativa de colagem 2)	257
Figura 145	Extrato de protocolo da dupla 2 (Tentativa de colagem 3)	257
Figura 146	Extrato de protocolo da dupla 2 (Tentativa de colagem 4)	258
Figura 147	Extrato de protocolo da dupla 2 (Tentativa de colagem 5)	258
Figura 148	Extrato de protocolo da dupla 2 - construção do tangram	259
Figura 149	Extrato de protocolo da dupla 1 (testagem 1 com o tangram)	259
Figura 150	Extrato de protocolo da dupla 1 (testagem 2 com o tangram)	260
Figura 151	Extrato de protocolo da dupla 1 (testagem 3 com o tangram)	260
Figura 152	Colagem a partir da decomposição em Hilbert.....	261
Figura 153	Recomposição (figuras mal comportadas)	261
Figura 154	Sugestão de modificação das imagens das ferramentas	263
Figura 155	Análise da ferramenta paralelogramo para retângulo	263
Figura 156	Decomposição de EFGH.....	264
Figura 157	Insucesso na soma de quadrados.....	264
Figura 158	Soma de quadrados	265
Figura 159	Calculando a área em Lebesgue	266
Figura 160	Análise da ferramenta de Lebesgue pela dupla 1.....	267
Figura 161	Analisando Lebesgue com os poliminós.....	267
Figura 162	Erro na contagem dos quadradinhos que compõe o tetraminó	268
Figura 163	Erro na contagem na malha isométrica	269
Figura 164	Exemplo dado pela dupla 2 sobre a confusão gerada pela ferramenta	270
Figura 165	Análise da ferramenta measurement pela dupla 1.....	271
Figura 166	Cálculo do pentaminó nas malhas hexagonal e quadrada	272
Figura 167	Ferramenta confusa	274

Figura 168	Exemplo da dissertação de Facco (2003).....	282
Figura 169	Exemplo da área para Lebesgue.....	282
Figura 170	Área em Lebesgue.....	283
Figura 171	Área medida levando em conta a unidade quadrada não convencional.....	284
Figura 172	Escolha pelo professor	284
Figura 173	Ajustes das escalas das malhas	285
Figura 174	Medindo comprimento no <i>Cinderella</i>	286
Figura 175	Ideia para trabalhar perímetro	289
Figura 176	Observação realizada pela dupla 1	299
Figura 177	Protocolo da dupla 1.....	300
Figura 178	Destacando uma unidade de área	300
Figura 179	Decomposição	303
Figura 180	Sobreposição	304
Figura 181	Recobrimento com o monominó e o triminó.	304
Figura 182	Decomposição e recomposição	306
Figura 183	Medindo com a fita métrica	307
Figura 184	Tentativa de construção de uma figura poligonal com outra não poligonal ..	308
Figura 185	Construção de retângulos na malha quadriculada.....	309
Figura 186	Bug na atividade de Guilherme.....	309
Figura 187	Resolução 1	310
Figura 188	Resolução 2	310
Figura 189	Exemplo dado pela dupla 1	311
Figura 190	Explicação dada pela dupla na malha isométrica.....	312
Figura 191	Tarefa com os poliminós.....	318
Figura 192	Decomposição no AG 2 pela diagonal.....	329
Figura 193	Decomposição de um quadrado em dois retângulos de mesma área	330
Figura 194	Decomposição por meio da criação de um ponto central	331
Figura 195	Decomposição livre pela ligação de pontos	331
Figura 196	Decomposições no AG2.....	355
Figura 197	Representação geométrica da proposição 34 livro I	402
Figura 198	Representação geométrica da proposição 35 livro I	403
Figura 199	Proposição 36.....	403
Figura 200	Representação geométrica da proposição 37 do livro 1.....	403
Figura 201	Representação geométrica da Proposição 38 do livro I.	403

Figura 202	Representação geométrica da proposição 41 do livro I	403
Figura 203	Representação geométrica da proposição 43 do livro I	403
Figura 204	Representação geométrica da proposição 48 do livro I	403

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Classificação das situações que dão sentido a área	63
Quadro 2	Tipologia de software	78
Quadro 3	Recursos digitais para o ensino de área	122
Quadro 4	Requisitos refinados	199
Quadro 5	Lista de ponto de contato.....	206
Quadro 6	Ferramentas para a construção de figuras.....	210
Quadro 7	Alguns bugs na colagem.....	216
Quadro 8	Perfil dos sujeitos da pesquisa	225
Quadro 9	Cronograma dos encontros presenciais	232
Quadro 10	Marcação pelas duplas.....	234
Quadro 11	Análise de aspectos técnicos mais pontuais	275
Quadro 12	Opções escolhidas pelas duplas	277

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	24
1.1	Objetivos da Pesquisa.....	29
1.2	Estrutura do Texto	29
	PRIMEIRA PARTE DA PESQUISA (DIMENSÃO TEÓRICA).....	32
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA.....	32
2.1	As Engenharias de Software, Didática e Didático-Informática	32
3	ANÁLISES PRELIMINARES	40
3.1	Estudos Epistemológicos de Área.....	40
3.1.1	<i>Breve reflexão sobre a origem da geometria e a noção de área</i>	<i>40</i>
3.1.2	<i>A abordagem de área em D. Hilbert</i>	<i>54</i>
3.1.3	<i>A noção de área para Lebesgue</i>	<i>56</i>
3.2	Estudos Cognitivo e Didático do Conceito de Área	58
3.2.1	<i>Abordagem de área como grandeza</i>	<i>58</i>
3.2.2	<i>Situações que dão sentido à área como grandeza geométrica</i>	<i>62</i>
3.2.2.1	<i>Comparação</i>	<i>64</i>
3.2.2.2	<i>Situação de medida.....</i>	<i>66</i>
3.2.2.3	<i>Situação de mudança de unidade</i>	<i>67</i>
3.2.2.4	<i>Situação de produção de superfície.....</i>	<i>68</i>
3.3	Os Recursos no Ensino de Área e Perímetro	69
3.3.1	<i>Conceptualização de recursos</i>	<i>70</i>
3.3.2	<i>Diferentes recursos no ensino e aprendizagem de área e perímetro</i>	<i>71</i>
3.4	Dimensão Informática.....	76
3.4.1	<i>Os software educacionais</i>	<i>76</i>
3.4.1.1	<i>Micromundos</i>	<i>79</i>
3.4.2	<i>Análise dos micromundos de GD</i>	<i>82</i>
3.4.2.1	<i>Cinderella</i>	<i>83</i>
3.4.2.2	<i>Déclic.....</i>	<i>85</i>
3.4.2.3	<i>iGeom.....</i>	<i>86</i>
3.4.2.4	<i>OpenEuclide</i>	<i>87</i>
3.4.2.5	<i>Régua e Compasso.....</i>	<i>88</i>
3.4.2.6	<i>Tracenpoche</i>	<i>91</i>

3.4.2.7	<i>O Apprenti Géomètre 2</i>	92
3.4.2.7.1	Tangram e poliminós no Apprenti Géomètre	104
3.4.2.8	<i>O Cabri Géomètre</i>	105
3.4.2.9	<i>Geogebra 5</i>	111
3.4.2.9.1	O tangram no Geogebra.....	112
3.4.2.9.2	Os poliminós no Geogebra	119
3.4.3	<i>Síntese do Capítulo</i>	121
3.5	Potencialidades dos Software Apprenti, Cabri e Geogebra no Ensino de Área e Perímetro	124
3.6	A Abordagem de Área e Perímetro em Diferentes Software	129
3.6.1	<i>Banco internacional de objetos educacionais</i>	130
3.6.1.1	<i>Geometry 2.8.2</i>	131
3.6.1.2	<i>Triângulos</i>	133
3.6.1.2.1	Alturas do triângulo e ortocentro	137
3.6.1.3	<i>INKGeometrics editor (DRAW & GEOMETRY)</i>	139
3.6.2	<i>Hypatiamat</i>	140
3.6.2.1	<i>Áreas I</i>	140
3.6.2.1.1	Comparação de área.....	142
3.6.2.1.2	Situação de medida e mudança de unidade	150
3.6.2.1.3	Situação de produção de superfície	154
3.6.2.2	<i>Aplicativos do Hypatiamat para o trabalho com perímetro</i>	155
3.6.3	<i>Phet</i>	163
3.6.4	<i>O jogo Construindo Loucuras</i>	171
3.6.5	<i>Finalizando o capítulo</i>	173
	SEGUNDA PARTE (DIMENSÃO OPERACIONAL)	174
4	ELICITAÇÃO E ANÁLISE DE REQUISITOS	174
4.1	Requisitos Referentes a Dimensão Epistemológica	175
4.1.1	<i>Equivalência de área Euclides - quadratura de figuras</i>	175
4.1.1.1	<i>A quadratura do triângulo</i>	175
4.1.1.2	<i>Ferramenta para tratar o teorema de Pitágoras</i>	176
4.1.1.2.1	Comportamento da ferramenta	176
4.1.1.3	<i>Decomposição e recomposição</i>	177
4.1.1.3.1	Decomposição	177

4.1.1.3.2	Recomposição.....	178
4.1.2	Ferramenta para explorar a equidecomposição (Hilbert).	178
4.2	Requisitos Referentes às Dimensões Cognitiva, Didática e Informática	179
4.2.1	Menu construção	179
4.2.2	Menu polígonos	179
4.2.3	Ladrilhos	179
4.2.4	Caneta livre	180
4.2.5	Movimento	180
4.2.6	Malhas	180
4.2.6.1	<i>Magnetismo nas malhas</i>	181
4.2.7	Tangram	181
4.2.8	Poliminós	183
4.2.9	Magnitudes	183
4.2.10	Definindo uma unidade de comprimento da figura	184
4.2.11	Ferramentas comuns aos software de geometria da dimensão informática	185
4.2.11.1	<i>Duplicação</i>	186
4.2.11.2	<i>Observações referentes ao comportamento de algumas ferramentas comuns</i>	186
4.2.11.2.1	<i>Magnetismos nas figuras</i>	187
4.2.12	Ferramentas de suportes ao planejamento do professor	187
4.2.12.1	<i>Macroconstrução</i>	187
4.2.12.2	<i>Histórico do aluno</i>	188
4.2.12.3	<i>Configuração de menus</i>	189
4.2.13	Panorama geral dos requisitos em relação a construção de situações	191
4.2.13.1	<i>Construção de uma situação de comparação sem intervenção do aspecto numérico</i>	191
4.2.13.2	<i>Construção de uma situação de comparação com a intervenção do aspecto numérico</i>	192
4.2.13.3	<i>Construção de uma situação de medida de área utilizando as malhas</i>	193
4.2.13.4	<i>Construção de uma situação de mudança de unidade utilizando o tangram</i>	194
4.2.13.5	<i>Construção de uma situação de produção de superfície</i>	196
5	PROTOTIPAÇÃO E ANÁLISE A PRIORI	197
5.1	Resumo dos Requisitos para o Protótipo	199
5.2	Desenvolvimento do 1º Protótipo	202
5.2.1	Polígonos	202

5.2.2	Corte	203
5.2.3	Colagem	204
5.3	Primeira Versão do Protótipo	207
5.4	Análise do Funcionamento do Protótipo	216
5.4.1	<i>Segundo teste do protótipo</i>	220
6	EXPERIMENTAÇÃO	224
6.1	Caracterização dos Sujeitos da Pesquisa	224
6.2	Descrição do Experimento	229
6.3	Análise e Discussão dos Dados	233
6.3.1	<i>Análise das ferramentas (formulário 1 – análise das ferramentas)</i>	235
6.3.1.1	<i>Ponteiro</i>	235
6.3.1.2	<i>Borracha</i>	239
6.3.1.3	<i>Lixeira</i>	241
6.3.1.4	<i>Brush (Pincel)</i>	241
6.3.1.5	<i>Fill (latinha de tinta)</i>	242
6.3.1.6	<i>Pallet (Paleta de cores)</i>	243
6.3.1.7	<i>Linestyle (Estilos de Linhas)</i>	244
6.3.1.8	<i>Referencial (malhas)</i>	244
6.3.1.9	<i>Caixa de texto</i>	246
6.3.1.10	<i>Ponto e ponto médio</i>	246
6.3.1.11	<i>Segmento e linha poligonal</i>	246
6.3.1.12	<i>Polígonos</i>	249
6.3.1.13	<i>Reta (paralela, perpendicular, perpendicular bissetor e bissetor)</i>	252
6.3.1.14	<i>Circunferência, circunferência por três pontos, arco e segmento circular</i>	252
6.3.1.15	<i>Ladrilhos (Poliminós e Tangram)</i>	253
6.3.1.16	<i>Tesoura, triangular polígono (tipo 1 e 2)</i>	255
6.3.1.17	<i>Colagem</i>	256
6.3.1.17.1	<i>Colagem com polígonos:</i>	256
6.3.1.17.2	<i>Colagem com poliminós:</i>	258
6.3.1.17.3	<i>Colagem com Tangram:</i>	259
6.3.1.18	<i>Triângulo para paralelogramo, paralelogramo para retângulo, retângulo para quadrado e soma de quadrados</i>	262

6.3.1.19	Medida da área em Lebesgue	265
6.3.1.20	<i>Magnitudes</i>	271
6.3.1.21	<i>Freezing (congelar)</i>	273
6.3.1.22	<i>Síntese geral das análises realizadas pelas duplas</i>	273
6.3.2	Formulário 2 (aspectos técnicos mais pontuais)	275
6.3.3	Formulário 3 (análise de aspectos pedagógicos).....	277
7	ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO	279
7.1	Discussão das Respostas ao Questionário1.....	280
7.1.1	Análise de aspectos relativos ao conceito de área e perímetro.....	280
7.1.1.1	<i>Respostas dadas pela dupla 1</i>	280
7.1.1.2	<i>Respostas dadas pela dupla 2.....</i>	287
7.1.1.3	<i>Respostas dadas pela dupla 3.....</i>	288
7.1.2	Questão 2 (situações que dão sentido a área).....	289
7.1.2.1	<i>Respostas dadas pelas duplas.....</i>	290
7.1.2.1.1	<i>Respostas dadas à situação de comparação</i>	291
7.1.2.1.2	<i>Respostas dadas à situação de medida.....</i>	292
7.1.2.1.3	<i>Respostas dadas à situação de produção de superfície</i>	293
7.1.2.1.4	<i>Respostas dadas à situação de mudança de unidade.....</i>	293
7.1.3	Questão 3 referente à decomposição e recomposição no MS	295
7.1.3.1	<i>Respostas dadas pelas duplas.....</i>	296
7.1.4	Questão 4 – análise das ferramentas para trabalhar a ideia de mesma área.....	297
7.1.4.1	<i>Respostas dadas pelas dupla</i>	297
7.1.5	Questão 5 – medida da área em Lebesgue.....	298
7.1.5.1	<i>Respostas dadas pelas duplas.....</i>	298
7.1.6	Considerações sobre o capítulo.....	301
7.2	As Construções das Tarefas.....	302
7.2.1	Tarefa 1 (área – dupla 1).....	302
7.2.1.1	<i>Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa pela dupla 1</i>	303
7.2.2	Tarefa 2 (área e perímetro – dupla 1).....	305
7.2.2.1	<i>Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa pela dupla 1</i>	306
7.2.3	Tarefa 3- (Perímetro- dupla 1)	311

7.2.4	Tarefa 1- (área - dupla 2)	314
7.2.4.1	<i>Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa</i>	314
7.2.5	Tarefa 2- (perímetro- dupla 2)	315
7.2.5.1	<i>Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa</i>	316
7.2.6	Tarefa 3- (área e perímetro- dupla 2)	317
7.2.6.1	<i>Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa</i>	317
7.2.7	Tarefa 1- (área e perímetro - Dupla 3)	319
7.2.7.1	<i>Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa</i>	319
7.2.8	Tarefa 2- (área - dupla 3)	321
7.2.8.1	<i>Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa</i>	321
7.2.9	Tarefa 3- (perímetro - dupla 3)	322
7.2.9.1	<i>Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa</i>	322
7.2.10	Conclusão do capítulo	323
7.3	Questionário Final	323
7.3.1	Respostas à pergunta 1	323
7.3.2	Respostas à pergunta 2	325
7.3.3	Respostas à pergunta 3	326
7.3.4	Respostas à pergunta 4	326
7.3.5	Conclusão do capítulo	327
7.4	O Diferencial do Magnitude	327
7.4.1	Decomposição e recomposição	327
7.4.2	As Malhas	332
7.4.3	O Tangram e os Poliminós	332
7.4.4	As ferramentas para trabalhar a ideia da quadratura de figuras	334
7.4.5	Rotação e reflexão nas figuras	334
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	335
8.1	Observações Referentes a nossa Pesquisa	341
	REFERÊNCIAS	343
	APÊNDICE A- CONVERSAS COM A ESTAGIÁRIA	355
	APÊNDICE B- REQUISITOS PARA O NOVO MICROMUNDO	357
	APÊNDICE C- REQUISITOS DE ALGUNS SOFTWARE DE GD	364
	APÊNDICE D- PERFIL DO PARTICIPANTE	367

APÊNDICE E- ANÁLISE DE ASPECTOS TÉCNICOS	368
APÊNDICE F- ANÁLISE DE ASPECTOS TÉCNICOS PONTUAIS.....	373
APÊNDICE G- ANÁLISE DE ASPECTOS PEDAGÓGICOS	374
APÊNDICE H- ASPECTOS RELATIVOS AO ENSINO DE ÁREA E PERÍMETRO	375
APÊNDICE I- FORMULÁRIOS PARA AS TAREFAS DE ÁREA E PERÍMETRO	379
APÊNDICE J- TERMO DE CONSENTIMENTO	385
APÊNDICE K- REQUISITOS EM TELAS	386
APÊNDICE L- MODELO DE UM NOVO LAYOUT PARA O MS.....	397
APÊNDICE M- PROPOSIÇÕES DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES	402

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa de doutorado teve como objetivo conceber, desenvolver e validar um micromundo como elemento de suporte ao ensino de área e perímetro. A mesma dá continuidade a um conjunto de pesquisas que vêm sendo desenvolvidas ao longo dos anos pelos grupos LEMATEC (Laboratório de Educação Matemática e Tecnológica)¹ e Pró-grandezas², ambos da Universidade Federal de Pernambuco.

O primeiro investiga o desenvolvimento e a avaliação de tecnologias computacionais, suas potencialidades e limitações para o ensino e aprendizagem da matemática, além das modificações provocadas pela integração dessas tecnologias nas aprendizagens e no funcionamento do sistema didático (PORTAL DO LEMATEC, 2016). O segundo vem investigando, há mais de 15 anos, os fenômenos relativos ao ensino e aprendizagem das grandezas e medidas em vários níveis escolares, com foco nas grandezas geométricas: área, comprimento, perímetro, volume e capacidade (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

A produção desses grupos, em diálogo com pesquisadores brasileiros e estrangeiros, tem permitido, entre outros enfoques, investigar o potencial de recursos tecnológicos para favorecer a apropriação de conhecimentos sobre grandezas e medidas, especialmente o Pró-grandezas. Dentre os recursos, podem-se destacar o *Cabri Géomètre* (BALTAR, 1996) e o *Apprenti Géomètre 2* (SILVA, 2016), *software* de geometria dinâmica.

No âmbito do LEMATEC, têm sido desenvolvidos e validados vários artefatos³ tecnológicos informáticos, com o objetivo de contribuir para o ensino e aprendizagem de diferentes conteúdos matemáticos. A título de ilustração, a simulação *Formas*⁴ (SIQUEIRA,

¹LEMATEC: Grupo de pesquisa da UFPE liderado pelo professor Franck Bellemain, registrado no Cnpq (PORTAL DO LEMATEC, 2016).

²O grupo Pró-grandezas: ensino e aprendizagem das grandezas e medidas, da Universidade Federal de Pernambuco, certificado no diretório de grupos de pesquisa do Cnpq, é liderado pelos professores Paula Baltar e Paulo Figueiredo Lima.

³Artefato é qualquer elemento produzido pelo homem e não por causas naturais, podendo exercer diferentes papéis em uma organização, tais como o de insumo ou produto de uma atividade. Artefatos podem ser classificados, de acordo com a sua natureza, em bens, documentos e componentes. Bens podem ser classificados em bens de usufruto e bens de produção, sendo que bens de produção podem ainda ser classificados em hardware, software e equipamentos. Um componente pode ser um componente de hardware, um componente de software ou uma peça (VILLELA; TRAVASSOS, 2004).

⁴Formas: uma simulação que permite articular de forma dinâmica e com a manipulação direta do gráfico e dos coeficientes das equações, o gráfico da parábola com sua equação nas formas desenvolvida, canônica e fatorizada. (SIQUEIRA, 2009).

2009), o jogo do Bingo dos Racionais versão digital⁵ (RAMOS, 2015) e o *Function Studium*⁶ (SILVA, 2016; TIBÚRCIO, 2016) são alguns exemplos desses artefatos.

A participação do pesquisador nesses grupos de estudo resultou na produção de uma dissertação de mestrado (SILVA, 2016), que teve como objetivo investigar o tratamento dado por alunos de 12 a 13 anos do 6º ano do ensino fundamental a um conjunto de tarefas sobre área como grandeza em três ambientes distintos: papel e lápis, materiais manipulativos e o *Apprenti Géomètre 2* (Aprendiz de Geometria)⁷.

Este último é um *software* de geometria belga, desenvolvido pelo *Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*⁸ (CREM). Ele possibilita trazer diretamente para sua interface figuras geométricas mais comuns: triângulos, quadriláteros, círculos, segmentos de reta, circunferências etc., como ponto de partida na exploração dos estudantes, e oferece diversas ferramentas que possibilitam ao usuário arrastar, fazer rotação e reflexão, decompor, recompor e duplicar diferentes figuras geométricas desenhadas em sua tela.

Esse *software* foi escolhido como um dos ambientes da pesquisa (SILVA, 2016) por permitir o processo de decomposição e recomposição de maneira original em relação aos demais *software* consultados, como o *Cabri Géomètre* e o *Geogebra*. Nesses *software* não há uma ferramenta específica que permita ao aluno realizar processos de decomposição e recomposição de figuras, tal como ocorre no AG 2.

O uso dessas ferramentas de decomposição e recomposição de figuras poderia ampliar, por exemplo, a possibilidade de resolução de algumas tarefas de comparação de área. Duas figuras de mesma área e formas diferentes podem no AG 2 ter suas áreas comparadas por decomposição e recomposição, seguida de sobreposição.

Os estudantes do 6º ano que utilizaram o *Apprenti Géomètre 2*, como possibilidade de manipular uma pluralidade de recursos fornecidos nesse *software*, apresentaram um avanço na superação das “concepções geométricas de área” que se caracterizam por um amálgama entre a figura e a área, ou seja, para os sujeitos que mobilizam uma concepção geométrica é como

⁵Bingo dos racionais: é um bingo no qual os números utilizados são números racionais, representados nas cartelas por diversos registros de representação: decimal, fracionário, gráfico, porcentagem, etc. (GITIRANA et al., 2013).

⁶*Function Studium*: é um micromundo desenvolvido para o estudo de funções numéricas (SILVA César, 2016).

⁷Esse *software* foi traduzido para língua portuguesa em nossa pesquisa de Mestrado (SILVA, 2016). O AG 2 encontra-se disponível em <<http://www.crem.be>>, é livre e pode ser instalado em computadores com o sistema operacional Windows, Mac OSX, Mac OS9 e Linux.

⁸O CREM é um grupo de pesquisa responsável pelo projeto de elaboração do *Apprenti Géomètre* nas versões 1 e 2. O projeto de desenvolvimento desse *software* contou com a participação dos seguintes integrantes: Michel Ballieu, Marie-France Guissard, Guy Noël, Nicolas Rouche et Marie-Françoise Van Troeye. Este Centro está localizado na 5 rue Émile Vandervelde, B-1400 Nivelles, Belgique.

se a palavra área remetesse à própria figura e não a uma propriedade da mesma (FERREIRA; BELLEMAIN, 2013).

Embora este *software* tenha se mostrado um importante recurso por oferecer condições que permitiram ser mobilizados diferentes tipos de estratégias de resolução de tarefas sobre área de figuras planas, algumas limitações⁹ foram identificadas no decorrer do experimento da nossa pesquisa (SILVA, 2016), como também nas oficinas e minicursos ministrados pelo autor deste estudo em parcerias com (BARROS; SILVA, 2016; SANTANA; SILVA; BARROS, 2016; SILVA, 2015).

As limitações identificadas são de diferentes naturezas e podem não favorecer a construção de situações de aprendizagem de área e perímetro neste ambiente, como também restringir as ações de alunos na resolução das tarefas de área e perímetro. Dentre elas, destacamos as seguintes:

- a maneira com que o AG 2 lida com a decomposição exige do usuário uma combinação de procedimentos que não se mostraram ser intuitivos;
- as partes de uma figura decomposta só podem recompor uma nova se coincidirem seus vértices e seus lados;
- o uso das malhas restringe-se apenas à pontilhada quadrada e à isométrica;
- o *software* permite apenas o trabalho com unidades de medidas não convencionais;
- o trabalho com ladrilhamento no AG 2 restringe-se ao uso de unidades de medidas não convencionais que estejam predefinidas em seus menus;
- Não há ferramentas específicas para o trabalho com perímetro de figuras planas.

As potencialidades e limitações encontradas nos resultados de nossa pesquisa (SILVA, 2016) vêm como um primeiro fator relevante para pensarmos em ampliar o trabalho com área e perímetro de figuras planas a partir do desenvolvimento de um novo *software* de geometria acessível ao professor¹⁰ que permita a construção de situações de aprendizagem desses conceitos.

O segundo fator diz respeito às influências do autor desta pesquisa em um projeto maior, a plataforma LEMATEC *Studium*, que está sendo utilizada em testes e pesquisas desenvolvidas pelo grupo LEMATEC. A proposta desta plataforma é dar suporte à

⁹ Essas limitações serão discutidas no capítulo 3 (dimensão infomática) deste nosso estudo.

¹⁰ Um *software* que não seja complexo em ferramentas, numa linguagem que o professor dos anos iniciais ao ensino médio, mesmo que não tenha familiaridade com artefatos tecnológicos digitais possa utilizar de forma a aprimorar o processo de ensino e aprendizagem desses conceitos.

webdocumentação¹¹ e à orquestração¹² do professor no ensino de conteúdos matemáticos em aulas nas modalidades presencial, semipresencial e a distância.

Nela, podem ser implementados vários arquivos nos formatos *pdf*, *word*, *jpeg*, *png*, *software* em *Java Script*, entre outros (SILVA, 2018). Essa plataforma precisa ser nutrida com os mais variados recursos para oferecerem condições ao professor de trabalhar com diferentes conteúdos matemáticos. Isso também nos motivou a pensar em um novo *software* numa linguagem compatível com plataforma *web*.

Com relação ao tipo de *software*, decidimos desenvolver um micromundo de geometria pelo fato de ser um ambiente computacional que permite a exploração de um conceito matemático por meio da interação com ferramentas que podem ser modificadas pelo usuário da maneira que se desejar.

Para Tchounikine¹³ (2011, p. 2), micromundos são *software* que permitem aos alunos mergulharem em um ambiente virtual projetado para apresentar propriedades que favorecem certos objetivos pedagógicos traçados a priori. Isto é, modelagem de um domínio especificamente adaptado a alguma aprendizagem direcionada, com características como reversibilidade de ações, repetição de sequências ou análise, a posteriori, de ações realizadas.

Não optamos por outro tipo de *software* como, por exemplo, os **tutoriais multimídias**, que contêm informações específicas voltadas para o conteúdo proposto, porque neles não há possibilidade de ampliação de estratégias de resolução de uma determinada tarefa matemática por meio da manipulação de diferentes ferramentas.

Nos micromundos, por sua vez, como o *Apprenti Géomètre*, o *Cabri Géomètre* e o *Geogebra*, existe a possibilidade da ampliação de estratégias de resolução de uma dada tarefa matemática pela pluralidade de ferramentas e menus que são disponíveis ao usuário.

Pensar em um *software* que dê suporte à exploração em uma aula, leva-nos também a considerar elementos de suporte ao planejamento didático do professor, como as macro construções, ferramentas que permitem ao usuário encapsular diversas etapas de uma construção geométrica em um único comando, assim como a configuração de menus, a qual

¹¹Diz respeito a um suporte ao trabalho de documentação do professor no meio computacional (SILVA, 2018).

¹²A Orquestração Instrumental objetiva “entender e modelar a ação docente em um ambiente rico em tecnologias” (COUTO, 2015, p. 40).

¹³Microwords: Simulation or virtual reality pedagogical environments, i.e., software que allowance learners to immerse themselves in a virtual word designed so as to present properties that will favor the adressing of the targeted pedagogical objectives: modeling of a domain specifically adapted to some targeted learning, taking advantage of features such as reversibility of actions, replay of sequences or a posteriori analyses; etc. (TCHOUNIKINE, 2011, p. 2).

permite restringir funcionalidades com fins didáticos específicos. Esses elementos também serão pertinentes ao novo micromundo.

Diferentemente dos outros *software* de geometria a que tivemos acesso – tais como *Apprenti Géomètre 2*, *Cabri Géomètre II*, *Cinderella*, *Déclic*, *Euklides*, *Geogebra*, *Igeom*, *Régua e Compasso*, *Tracenpoche*¹⁴ –, nosso foco é a construção de um novo micromundo que seja especificamente voltado para as grandezas geométricas, em especial para o Campo Conceitual¹⁵ da grandeza área. Afinal, embora nos *software* supracitados possam ser construídas diferentes tarefas de área e perímetro, eles não foram desenvolvidos especificamente para trabalhar esses conceitos.

Para desenvolver este novo micromundo, ancoramo-nos em um método de desenvolvimento de *software* concebido nos estudos de Tibúrcio (2016), organizado em seis etapas: delimitação do campo, análises preliminares, análise de requisitos, análise *a priori* e prototipação, fase experimental, análise *a posteriori* e validação.

Esse método vem sendo utilizado por pesquisadores do grupo de estudos LEMATEC e tem contribuído para o desenvolvimento de artefatos digitais, como o *software* **Function studium**, um micromundo desenvolvido para o estudo de funções numéricas (SILVA, 2016) e o **Cônicas**, um *software* que possibilita a integração de recursos computacionais para a exploração dos tratamentos e das conversões dos registros de representação semiótica das cônicas (SIQUEIRA; BELLEMAIN, 2018).

O método para o desenvolvimento do novo micromundo está baseado na Engenharia Didático-Informática (EDI) (TIBÚRCIO, 2016), que reúne elementos da Engenharia de Software (ES). Esta, consoante Benitti et al. (2005), organiza certa estrutura para o processo de desenvolvimento de um *software* em algumas etapas: concepção, elaboração, finalização e viabilização. Também remete à Engenharia Didática¹⁶ (ARTIGUE, 1996), no que se refere às análises preliminares e suas dimensões didática, cognitiva e epistemológica, a fase de análise *a priori*, a experimentação, a análise *a posteriori* e a validação.

¹⁴Apresentaremos cada uma das especificidades desses *software* de GD no capítulo 3 (dimensão informática).

¹⁵Consideramos primeiramente um campo conceitual como um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes, mas intimamente relacionados (VERGNAUD, 1996).

¹⁶A engenharia didática caracteriza-se por um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino (ARTIGUE, 1996, p. 196).

A EDI amplia as análises preliminares com a inserção de uma nova dimensão, a “informática”. De acordo com Tibúrcio (2016), essa dimensão diz respeito aos elementos da ES descritos anteriormente e à Engenharia de Requisitos¹⁷.

Diante desse contexto, pretendemos responder à seguinte questão de pesquisa: o estudo da concepção, desenvolvimento e validação por meio da operacionalização da Engenharia de *Software* Educativos (ESE)-EDI permite conceber um *software* educativo de qualidade para o ensino e aprendizagem de área e perímetro?

Partimos da hipótese de que os recursos e funcionalidades implementados no micromundo poderão dar suportes ao ensino e à aprendizagem de área e perímetro de figuras planas.

1.1 Objetivos da Pesquisa

Elencamos como **objetivo geral**: Conceber, desenvolver e validar um micromundo como elemento de suporte ao professor para o ensino de área e perímetro, utilizando-se do modelo de desenvolvimento de Software Educativo proposto na EDI.

Para alcançarmos esse objetivo, elaboramos três **específicos**:

- Realizar um levantamento dos aspectos epistemológicos, didáticos, cognitivos e informáticos a respeito do conceito de área e perímetro;
- Verificar os requisitos necessários ao *software*, considerando a dimensão computacional de aspectos epistemológicos, didáticos e pedagógicos para engenharia;
- Prototipar, desenvolver e validar a versão inicial do micromundo, utilizando-se do modelo de desenvolvimento de SE estabelecido na EDI.

1.2 Estrutura do Texto

Nosso texto está organizado em oito capítulos, divididos em duas grandes etapas. A primeira, denominada de **Dimensão Teórica**, contempla a fundamentação teórico-metodológica para a concepção do *software*. A segunda etapa, caracterizada por **Dimensão Operacional**, diz respeito ao desenvolvimento, validação e evolução do novo micromundo.

No primeiro capítulo temos a introdução.

¹⁷[...] é um processo de descoberta, refinamento, modelagem e especificação, ou seja, é o processo pelo qual os requisitos de um produto de *software* são coletados, analisados, documentados e gerenciados ao longo de todo o ciclo de vida do *software* (PRESSMAN, 1995).

No segundo, trazemos a fundamentação teórico-metodológica, por meio da qual explicitamos a Engenharia Didático-Informática. Para isso, realizamos uma breve apresentação da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), assim como um panorama da Engenharia de *Software* e da Engenharia de *Software* Educativo, uma vez que a Engenharia Didático-Informática reúne elementos dessas engenharias.

No terceiro, temos a nossa Análise Preliminar. Nela, realizamos um estudo epistemológico do conceito de área, abordando sua complexidade em um contexto histórico. Evocamos as dimensões cognitiva e didática, através das quais discutimos área como uma grandeza, por meio dos estudos de Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989). Essa abordagem corresponde a distinguir e articular três quadros¹⁸: o quadro geométrico, o quadro numérico e o das grandezas (FERREIRA, 2010). Em seguida, levantamos pesquisas nacionais que vêm corroborando este tratamento.

Perscrutamos também a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e colaboradores (1996), que traz uma contribuição importante para a compreensão da construção de conceitos pelos sujeitos, mais especificamente em situação escolar (BELLEMAIN; BITTAR, 2000). As pesquisas que adotam esse marco teórico têm ajudado a compreender melhor como as crianças formam e desenvolvem conceitos matemáticos, a partir da observação de suas estratégias de ação (GITIRANA, et. al. 2014, p.7). Essas autoras, com base nos estudos de Gérard Vergnaud, afirmam que diversos fatores influenciam e interferem na formação e desenvolvimento de conceitos e que o conhecimento conceitual emerge a partir da resolução de situações de caráter teórico ou prático.

No capítulo 3, explicitamos ainda um conjunto de situações – modelo proposto por Baltar (1996) e ampliado em Ferreira (2010) – que dão sentido ao conceito de área como grandeza. Essa classificação compreende quatro grandes classes: comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície. Apresentamos também uma breve revisão de literatura, apontando os principais recursos não informáticos que vêm sendo utilizados nas pesquisas científicas ao longo dos anos para diagnosticar e, por vezes, intervir nas dificuldades de estudantes relacionadas aos conceitos de área e perímetro.

Finalizamos esse capítulo dando ênfase à quarta dimensão da EDI, a “informática”. Nela expomos os diferentes tipos de *software*; aprofundamos o conceito de micromundo; realizamos análises em diferentes *software*, apontando os aportes e limitações para o estudo

¹⁸Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989, p. 389), um quadro é constituído de objetos de um ramo da matemática, das relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que o sujeito associa num dado momento, a esses objetos e relações.

desses conceitos, buscando também dar visibilidade ao que vem sendo produzido para explorá-los. Além disso, discutimos sobre o impacto do uso de diferentes *software* educativos no processo de produção do conhecimento de área e perímetro.

Na segunda parte da nossa pesquisa, denominada de “Dimensão Operacional”, fundamentada em nossas análises preliminares, temos o capítulo 4, composto da Elicitação e Análise de Requisitos para o desenvolvimento do novo micromundo.

No capítulo 5, explicitamos a fase de Análise a priori e Prototipação, nas quais exibimos um possível layout com as reais necessidades do protótipo, com base em elementos da análise preliminar e dos requisitos gerados a partir dela. Expomos ainda a primeira versão do protótipo e realizamos análises de seu funcionamento com o objetivo de identificar erros no sistema.

O capítulo 6 diz respeito à experimentação do micromundo denominado de *Magnitude Studium* (MS). Nesta etapa, explicitamos como o protótipo de *software* foi testado, com o objetivo de verificar falhas, sugestões de melhorias de interface, comandos, botões, funcionalidades, e se atendeu ao que fora previsto no objetivo elencado para o seu desenvolvimento “dar suporte ao ensino de área e perímetro”.

O experimento contou com a participação de três integrantes do grupo de pesquisa Pró-grandezas e três do LEMATEC. Justificamos essa escolha pelo fato desses sujeitos poderem contribuir no processo de experimentação/validação com um olhar mais direcionado aos aspectos teóricos conceituais referentes às grandezas área e perímetro (integrantes do grupo Pró-grandezas) e informáticos (integrantes do grupo LEMATEC), no que diz respeito a interface, funcionalidades e interatividade de menus e ferramentas do MS.

No Capítulo 7, temos a fase de Análise a Posteriori e Validação, na qual realizamos uma discussão a partir do que fora analisado pelos sujeitos que participaram do experimento, confrontando suas observações com os requisitos previstos e elementos das análises preliminares e a priori, com o propósito de verificar se o MS atendeu ao objetivo pensado para sua concepção. Realizamos ainda um breve estudo sobre o diferencial do MS em relação aos *software* Cabri Géomètre e Geogebra, apontando seu diferencial.

Por fim, apresentamos, no capítulo 8, as considerações finais, em que destacamos os resultados da nossa pesquisa, suas limitações e pistas de estudos a serem realizados. Seguem-se as referências e os apêndices.

PRIMEIRA PARTE DA PESQUISA (DIMENSÃO TEÓRICA)

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

Nesta seção, explicitamos a fundamentação do quadro teórico-metodológico da Engenharia Didático-Informática, que contempla o modelo de processo de *software* desenvolvido por Tibúrcio (2016), gerado a partir dessa engenharia. Esse modelo norteará o desenvolvimento do micromundo que estamos propondo em nosso estudo.

2.1 As Engenharias de Software, Didática e Didático-Informática

“A Engenharia de *Software* (ES) é um campo de conhecimento que se propõe a estabelecer princípios teóricos e metodológicos para a concepção, o desenvolvimento e a validação de *software*” (BELLEMAIN; RAMOS; SANTOS, 2015). De acordo com Pressman (1995, p. 31), essa engenharia abrange um conjunto de três elementos fundamentais: métodos, ferramentas e procedimentos, que possibilitam ao engenheiro de *software* certo controle do processo de desenvolvimento, oferecendo-lhe condições para a construção de *software* com alta qualidade.

Para esse autor, os métodos envolvem um amplo conjunto de tarefas que incluem: “planejamento e estimativa de um projeto de *software*, análise de requisitos de *software* e de sistemas, projeto da estrutura de dados, arquitetura de programa e algoritmo de processamento, codificação, teste e manutenção.” (PRESSMAN, 1995, p. 31).

Ainda para Pressman (1995), independente do paradigma de engenharia de *software* escolhido, três fases genéricas podem ser encontradas em todo desenvolvimento de *software*, independente do campo de aplicação, definição, desenvolvimento e manutenção:

A fase de **definição** focaliza no *o quê*, ou seja, durante a definição o desenvolvedor de *software* tenta identificar quais informações têm de ser processadas, a função e o desempenho desejados, as interfaces que devem ser estabelecidas, quais as restrições de projetos existem e os critérios de validação exigidos para se definir um sistema bem sucedido. A fase de **desenvolvimento** focaliza *o como*, ou seja, durante a definição, o desenvolvedor de *software* tenta definir como a estrutura de dados e as arquiteturas de *software* têm de ser projetadas e como os testes têm de ser realizados, por fim, a fase de **manutenção** que se concentra nas mudanças que estão sendo associadas à correção de erros, adaptações exigidas à medida que o ambiente do *software* evolui e ampliações exigidas por exigências variáveis do cliente. Essa fase reaplica os passos das fases de definição e desenvolvimento, mas o faz no contexto do *software* existente (PRESSMAN, 1995, p. 46-47).

A partir dessa engenharia, em se tratando de desenvolvimento de *software* educativos, na elaboração dos seus princípios, deve haver uma articulação entre conhecimentos de

educação, de informática, de conteúdos disciplinares e de didática desses conteúdos (BELLEMAIN; RAMOS; SANTOS, 2015).

Dentro desse contexto, nasce a Engenharia de *Software* Educativo (ESE), que, além do processo de engenharia propriamente dito, visa à elaboração efetiva de *software* voltados para a educação. “A ESE constitui-se como um verdadeiro campo científico objetivando a produção de novos conhecimentos, teorias, técnicas, tecnologias, métodos ou mesmo procedimentos investigatórios” (BELLEMAIN; RAMOS; SANTOS, 2015).

Ainda para esses autores, no contexto da ESE, o desenvolvimento de um *software* está mais relacionado à produção de novos conhecimentos do que para disponibilizar um novo artefato. O trabalho de ESE

não tem como finalidade construir EIAH¹⁹ utilizados nas salas de aula ou em formações (mesmo se alguns deles transformam-se para evoluir para tais objetivos, e que uma utilização banalizada pode ser necessária para o estudo de certas problemáticas de pesquisa), mas de melhor compreender os desafios a abordar, os fenômenos a considerar, os meios (noções, modelos, processos, ferramentas, etc.) úteis para a concepção dos EIAHs (TCHOUNIKINE, 2009, p.1, tradução nossa).

Portanto, “a engenharia dos EIAH é o domínio de pesquisa cujo objeto é a elaboração dos conhecimentos relativos à concepção desses ambientes” (TCHOUNIKINE, 2009, p.14).

Da complexidade e riqueza crescente dos recursos hardware, software, intelectuais para o ensino-aprendizagem, do aumento do nível de abstração das teorias educativas, emerge mais ainda a necessidade de formalizar os princípios de engenharia de dispositivos pedagógico/didático (Pedagogical-Didactical Settings). (BELLEMAIN, 2014, tradução nossa).

De acordo com Galvis-Panqueva (1997, p.1), a engenharia de *software* educativo (ESE) é muito mais do que simplesmente tentar fazer um apanhado de ideias exitosas por docentes com apoio da tecnologia informática. Afinal,

[...] não se trata de enriquecer as aulas com o uso de diferentes *software* educativos, nem tampouco, diz respeito ao educador, que consciente dos desafios da globalização e da integração das tecnologias digitais na sociedade ou mesmo para a socialização do conhecimento, decide de forma enfática abrir as janelas dessas tecnologias para o saber, colocando seus alunos em contato com outros seres humanos por meio das redes virtuais como as da internet, por exemplo. Neste caso, o docente está enriquecendo a educação com a informática, mas não está fazendo ESE (GALVIS-PANQUEVA, 1997).

A ESE se refere à criação de ambientes educativos computadorizados, que oferecem muito mais do que boa utilização educativa genérica de soluções informáticas, desenhados para permitir a construção do conhecimento, elaborados com uma finalidade educativa específica (GALVIS-PANQUEVA, 1997).

¹⁹ Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (Ambientes informáticos para aprendizagem humana).

Do ponto (de vista) sócio técnico, o processo ESE não se limita à gestação e elaboração ou escolha de um produto que case com o que é educacionalmente necessário; vai além, ou seja, abrange a implementação e avaliação dele no campo (GALVIS-PANQUEVA, 1997). Por ser uma engenharia, ela é construída em cima de articulações entre a reflexão teórica sobre os fenômenos de ensino aprendizagem e a elaboração efetiva e técnica de artefatos. Nesse sentido, ela interroga os modelos teóricos para fundamentar a concepção, provocando assim a evolução desses modelos (BELLEMAIN, 2014).

Os artefatos desenvolvidos também criam um contexto de ensino aprendizagem com especificidades próprias que necessitam de um novo entendimento dos fenômenos de ensino, provocando a elaboração de modelos para a compreensão desses fenômenos. É nesse quadro da ESE que se apoia o desenvolvimento de um *software* em nossa pesquisa, tentando incorporar à ES princípios teórico-metodológicos relativos ao ensino aprendizagem, particularmente princípios relativos à avaliação qualitativa (BELLEMAIN, 2014).

Tchounikine (2011) coloca que um projeto de criação de uma ferramenta pode ser algo novo, ou partir da análise de uma ferramenta que já exista. No que diz respeito à concepção e ao desenvolvimento de *software* educativo, Benitti et al. (2005) e Tchounikine (2009) relatam em seus estudos a importância de uma equipe multidisciplinar, o que implica na participação de profissionais das áreas de “ciência da computação e diversas disciplinas das ciências humanas e sociais como a pedagogia, a didática, a psicologia, a ergonomia e as ciências da informação e da comunicação” (TCHOUNIKINE, 2004, p.4 tradução de BELLEMAIN; RAMOS; SANTOS, 2015).

Entretanto, entendemos, assim como Bellemain, Ramos e Santos (2015), que a formação dessa equipe não garante a qualidade do *software* concebido. A diversidade das competências envolvidas nessa concepção é uma riqueza, mas pode ser também um dos bloqueios da ESE:

Para a concepção de um *software*, não se trata somente de somar as competências, mas de integrá-las, o *software* não deve ser produto de uma atividade multidisciplinar, mas transdisciplinar²⁰. Não se trata de justapor uma elaboração de requisitos feita por profissionais do ensino-aprendizagem a uma engenharia de software feita por profissionais da computação. A questão da digitalização e da computação deve ser considerada desde o princípio da concepção (BELLEMAIN; RAMOS; SANTOS, 2015, p. 3) .

²⁰ A transdisciplinaridade é uma abordagem científica que visa a unidade do conhecimento. Desta forma, procura estimular uma nova compreensão da realidade articulando elementos que passam entre, além e através das disciplinas, numa busca de compreensão da complexidade. Além disso, do ponto de vista humano a transdisciplinaridade é uma atitude empática de abertura ao outro e seu conhecimento. (TEIXEIRA, 2015). Disponível em <<http://www.helioteixeira.org/ciencias-da-aprendizagem/o-que-e-transdisciplinaridade/>>. Acesso em 12 de setembro de 2018.

Ainda para esses autores, um ponto chave final em relação a essa situação é a “capacidade da equipe de reformular, para encontrar respostas, às questões teóricas, tecnológicas e técnicas levantadas pela concepção de *software* educativos dentro dos princípios de cada domínio de conhecimento envolvido” (BELLEMAIN; RAMOS; SANTOS, 2015, p. 3-4).

Ao se pensar em desenvolver um *software* educativo, a ESE ajuda a organizar certa estrutura de desenvolvimento e um dos primeiros passos é a escolha do domínio do conhecimento do *software* educativo. “Com efeito, já pelo fato que as modelizações da aprendizagem diferem em função da natureza do conhecimento (mais o menos estruturado, conhecimento fim, conhecimento meio, por exemplo), as ESE para a concepção-desenvolvimento de *software* para matemática, história, português, etc., também diferem” (BELLEMAIN; RAMOS; SANTOS, 2015, p. 4).

Em nosso estudo focaremos no Campo Conceitual das grandezas e medidas, mais especificamente na abordagem de área como grandeza, baseados nos estudos das pesquisadoras francesas Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989). O segundo passo é a escolha do tipo de *software*, sua natureza (TCHOUNIKINE, 2011). Para esse autor, essa escolha diz respeito ao norte que se dará à engenharia para esse desenvolvimento. Optamos em conceber, desenvolver e validar um micromundo que favoreça a atividade matemática no ambiente computacional.

Para Tchounikine²¹ (2011), micromundos são simulações ou ambientes pedagógicos virtuais, ou seja, *software* que permitem aos alunos mergulharem em um ambiente virtual projetado para apresentar propriedades que favorecem certos objetivos pedagógicos traçados a priori, isto é, modelagem de um domínio especificamente adaptado a alguma aprendizagem direcionada, com características como reversibilidade de ações, repetição de sequências ou análise a posteriori de ações realizadas.

Para auxiliar essa concepção, contamos com os pressupostos da Engenharia Didático-Informática, que alia os aspectos da ES supracitados aos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), para gerar um modelo de processo de *software* que integra ambos os quadros metodológicos.

²¹Microwords: Simulation or virtual reality pedagogical environments, i.e., software que allowance learners to immerse themselves in a virtual word designed so as to present properties that will favor the addressing of the targeted pedagogical objectives: modeling of a domain specifically adapted to some targeted learning, taking advantage of features such as reversibility of actions, replay of sequences or a posteriori analysis; etc. Tchounikine (2011, p. 2).

A Engenharia Didática, segundo Artigue (1996), emergiu em didática da matemática na escola francesa, na década de 80, com o objetivo de etiquetar uma forma de trabalho didático. Essa engenharia tem uma forma particular de organizar os procedimentos metodológicos da pesquisa, contemplando tanto a dimensão teórica quanto a dimensão experimental. Interliga investigação (plano teórico) e ação (experimental), sendo constituída por um conjunto de fases: análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação, análise a posteriori e validação.

Na fase de análises preliminares é realizado um levantamento na literatura concernente ao objeto matemático estudado, que pode comportar as seguintes vertentes:

- epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- do ensino usual e seus efeitos;
- das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução;
- das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva;
- a consideração dos objetivos específicos da pesquisa;
- o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 66).

Os elementos supracitados podem ser retomados a depender da necessidade da pesquisa que está sendo realizada (ARTIGUE, 1996). Concordamos com Almouloud e Coutinho (2008) que “a expressão análises preliminares não implica que após o início da fase seguinte não se possa retomá-las, visto que a temporalidade identificada pelo termo ‘preliminar’ é relativa, pois se refere apenas a um primeiro nível de organização”.

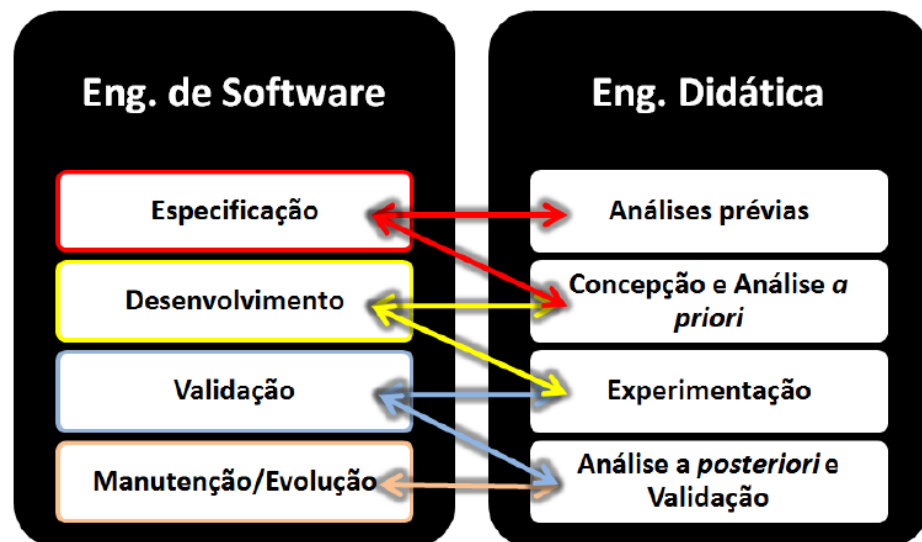
A fase de concepção e análise a priori diz respeito “às tomadas de decisões do pesquisador no sentido de agir sobre as variáveis que presume serem importantes ao problema da pesquisa e também sobre as variáveis que podem conduzir a caminhos ou soluções para o problema” (MATOS FILHO, 2015).

Nesse caso, realiza-se um estudo relacionado às dimensões da fase anterior, a saber: “a dimensão epistemológica (associada às características do saber), a dimensão cognitiva (associada às dimensões cognitivas dos alunos sujeitos da aprendizagem) e a dimensão didática (associada às características do sistema de ensino, no qual os sujeitos estão inseridos)” (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 67). A partir dessas análises, a sequência didática é concebida e aplicada na próxima fase denominada de experimentação: trata-se do “momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise a priori, em um processo de complementação (Ibid, 2008 p. 68).

As fases de análise a posteriori e validação nos permitem confrontar os dados obtidos na experimentação sob a ótica da análise a priori, “dos fundamentos teóricos, das hipóteses da problemática da pesquisa” (ALMOULOU; COUTINHO, 2008) para verificar a validação ou não da sequência didática.

Os elementos da ED como instrumento metodológico são necessariamente pertinentes, entretanto não são suficientes para resolver todas as questões relativas à criação de *software* educativos para matemática (BELLEMAIN; RAMOS; SANTOS, 2015). Por isso, Tibúrcio (2016) desenvolveu a EDI, que busca “aliar as contribuições da Engenharia Didática aos processos e princípios da Engenharia de *Software* para fundamentar um modelo que atenda tanto às necessidades do ensino e da aprendizagem da área a ser abordada pelo software, como as exigências das metodologias de sua concepção e desenvolvimento” (SILVA, 2016, p. 25). Para ilustrar a relação entre as engenharias citadas anteriormente, Tibúrcio (2016) apresenta a seguinte articulação:

Figura 1-Articulação entre as Engenharias



Fonte: (TIBÚRCIO, 2016, p. 46).

Por meio dessa ilustração, Tibúrcio (2016) faz uma relação das fases que compõem as duas engenharias e explica que os processos de desenvolvimento de *software* podem ser designados nas quatro etapas explicitadas acima (especificação, desenvolvimento, validação, manutenção/evolução) da ES, enquanto que as etapas da ED servem de fundamentação teórica e metodológica para o desenvolvimento de SE (*software* educativo).

Em resumo, esse autor explica as relações entre as fases das engenharias, ilustradas na figura acima, da seguinte forma:

A etapa de Especificação: momento em que se define a tipologia do software, requisitos e características, relaciona-se com as análises iniciais da Engenharia Didática.

A etapa de Desenvolvimento: leva em consideração o levantamento teórico que foi realizado na Concepção e Análise *a priori* e nesse momento é iniciado o processo de experimentação do software.

O processo de Validação do software: relaciona-se com a experimentação da ED e como última fase, a análise a posteriori e validação. Validar o software significa verificar se o mesmo realiza o que se propõe a fazer.

A etapa de manutenção/evolução: relaciona-se com a análise a posteriori e validação no momento em que a análise comparativa fornecida pela ED, traz à tona elementos que servem para o aperfeiçoamento e evolução do software desenvolvido (TIBÚRCIO, 2016, p.47).

Segundo Tibúrcio (2016, p. 48), a partir desse contexto, surge a “Engenharia Didático-Informática (EDI)”, uma nova abordagem de desenvolvimento de produtos tecnológicos para o ensino e a aprendizagem de conhecimentos matemáticos. Fundamentado nessa engenharia, esse autor desenvolveu um modelo de processo de *software* constituído de fases permeadas pelas dimensões cognitiva, didática e epistemológica, provenientes da Engenharia Didática.

Em se tratando da EDI, Tibúrcio (2016) implementa as análises preliminares à dimensão informática, com o objetivo de investigar os aportes e limitações do computador para abordar a complexidade do conhecimento, sua construção e seu ensino destacado nas dimensões cognitiva, didática e epistemológica.

A imagem a seguir apresenta esse modelo:

Figura 2- Modelo de processo de software



Fonte: (ATELIÊ DE SOFTWARE/LEMATEC, TIBÚRCIO, 2018).

As fases exibidas na figura 2 são descritas por Silva (2016), que também utilizou esse modelo no desenvolvimento de um micromundo para o estudo de funções numéricas da seguinte forma:

- i) Delimitação do campo:** Tal delimitação define o campo de conceitos matemáticos a ser abordado pelo software.
- ii) Análises preliminares:** Nesta fase o objeto matemático a ser abordado pelo software é situado no contexto das pesquisas já realizadas, abordando-se os aspectos cognitivos, didáticos, epistemológicos e informáticos relacionados ao objeto. Os resultados desta análise fundamentam as principais necessidades do software.
- iii) Análise de requisitos:** Tal análise tem por objetivo “traduzir” as necessidades geradas na fase anterior em ferramentas e características do software, ou seja, os requisitos do sistema são definidos com base nos resultados das análises preliminares.
- iv) Análise a priori e prototipação:** Nesta fase se dão o desenvolvimento do protótipo e a análise a priori, ou seja, uma análise das situações de uso e dos possíveis problemas que possam decorrer da utilização do software, a fim de corrigi-los.
- v) Fase experimental** (teste piloto, com professores, com alunos): Após o desenvolvimento do protótipo, se dá a fase experimental, na qual ocorrem os testes do software com os sujeitos destinados ao seu uso, como professores e estudantes, antecidos por um teste piloto que pode gerar necessidades de ajustes.
- vi) Análise a posteriori e validação:** Esta fase tem por objetivo analisar, com base nos testes do software e em comparação com a análise a priori, se os objetivos estabelecidos para o software foram alcançados, resultando na validação do software (SILVA, 2016, p. 25-27).

Com relação a esse último aspecto avaliação/validação do *software* educativo Bellemain, Ramos e Santos (2015) deixam claro que, além da validação técnica (testes, *benchmark*²²) e da validação do uso na sala de aula (aceitação pelos usuários finais), existe uma validação teórica feita pelos especialistas das áreas de conhecimento em jogo, assim como uma validação “semi-teórica” em condição de laboratório (situações didáticas específicas, professores e alunos escolhidos)” (BELLEMAIN; RAMOS; SANTOS, 2015, p. 4).

Nosso estudo para o desenvolvimento do novo micromundo contará com essas etapas do modelo de desenvolvimento de *software* educativo que serão descritas nas próximas seções.

²² Trata-se de um conjunto de critério, parâmetro de referência e qualidade, neste sentido voltado ao desenvolvimento de *software*.

3 ANÁLISES PRELIMINARES

Essa fase apoia-se num quadro teórico geral, em conhecimentos didáticos já adquiridos anteriormente e em outras análises. Na fase das análises preliminares, além das dimensões epistemológica, cognitiva e didática, por se tratar da EDI, explicitamos a dimensão informática.

3.1 Estudos Epistemológicos de Área

Optamos por apresentar duas abordagens teóricas para as áreas de figuras planas que fundamentam o desenvolvimento do novo micromundo, presente implicitamente na Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2017)²³, e em livros didáticos utilizados na educação básica no Brasil (MOREIRA, 2010). A primeira, noção de área sem usar medida, está baseada nos Elementos de Euclides (ANWANDTER-CUELLAR, 2012; BICUDO, 2009; MOREIRA, 2010; ROQUE, 2012) e nos *Foundations of geometry* de David Hilbert (tradução para o inglês de 1971 por Leo Unger), presente também nos estudos de (ANWANDTER-CUELLAR, 2012; BALTAR, 1996; MOREIRA, 2010) que serão explorados nesta seção. A segunda, teoria de Lebesgue (1975), define áreas a partir de medições, tomando por base uma “unidade de medida” (ANWANDTER-CUELLAR, 2012; JACOB, 2015).

3.1.1 Breve reflexão sobre a origem da geometria e a noção de área²⁴

De acordo com Roque (2012, p. 92) em seu livro *História da Matemática uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*, “é muito comum lermos que a geometria surgiu às margens do Nilo, devido à necessidade de medir a área das terras a serem redistribuídas, após as enchentes, entre os que haviam sofrido prejuízos”. Essa autora afirma que tal hipótese tem sua origem nos escritos do historiador grego Heródoto datados do século V a.E.C²⁵ - “quando das inundações do Nilo, o rei Sesóstris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos”.

²³ Essa é a base oficial atual que rege a educação básica no Brasil.

²⁴ Não pretendemos realizar um estudo exaustivo sobre o tema, para isso, o leitor pode recorrer ao livro de Tatiana Roque (2012).

²⁵ Abreviação de “antes da Era comum”, Tatiana Roque (2012) justifica essa abreviação, explicitando em seu livro que atualmente tem-se usado esse termo no lugar de “antes de Cristo” com o fim de neutralizar conotações religiosas.

Vem daí a ideia de que seu surgimento está ligado à agrimensura. Conforme Heródoto, essa prática teria dado origem à invenção da geometria, que pode ser traduzida, portanto, como medida da terra, um conhecimento que teria sido posteriormente importado pelos gregos (ROQUE, 2012).

Para essa autora, diferentes povos, como os egípcios e mesopotâmicos, civilizações antigas que se têm registros, realizavam cálculos com medidas de comprimentos, áreas e volumes, e alguns de seus procedimentos aritméticos podem ter sido obtidos por métodos geométricos, envolvendo transformações de áreas. Contudo, isso não quer dizer que possuísem uma geometria.

Nas práticas de medida, os problemas geométricos são transformados em problemas numéricos. A escolha de uma unidade de medida basta para converter um comprimento, uma área ou um volume em um número. Sem dúvida, os primeiros matemáticos gregos praticavam uma geometria baseada em cálculos de medidas, como outros povos antigos (ROQUE, 2012, p. 94)²⁶.

A matemática na Grécia, com Euclides²⁷, parece ter adquirido uma configuração particular, passando a empregar enunciados geométricos gerais que não envolvem somente procedimentos de medida” (ROQUE, 2012, p. 94). Todavia, essa prática também pode ser identificada na matemática Babilônica, pois de acordo J. Høyrup, um dos principais historiadores da matemática da atualidade, nos anos 1990, mostrou que a “álgebra” dos babilônicos estava intimamente relacionada a um procedimento geométrico de “cortar e colar”. Logo, tal prática, não poderia ser descrita como álgebra, sendo mais adequado falar de “cálculos com grandezas” (ROQUE, p. 39).

Entendemos, com base nos estudos de Roque (2012), que tanto os mesopotâmicos (babilônicos)²⁸ quanto os egípcios realizavam uma espécie de cálculo de grandezas, sendo uma das principais características de sua matemática.

²⁶ Não pretendemos nesta seção reforçar o mito de que a matemática antiga, em particular a mesopotâmica e a egípcia, que sempre foi tratada como parte da tradição ocidental, tivesse evoluído de modo linear desde quatro mil anos antes da Era Comum até a matemática grega do século III a.E.C. Ou seja, afirmar que haveria somente uma matemática e, conseqüentemente, uma única história de sua evolução até os nossos dias. Sendo que essa evolução teria sido marcada pela transformação de uma matemática concreta em uma outra, mais abstrata, da qual seríamos herdeiros (ROQUE, 2012, p. 34).

²⁷ Sabe-se muito pouco sobre a vida de Euclides; nem mesmo é comprovado que tenha nascido em Alexandria, como se afirma com frequência. Há evidências, contudo, de que seja autor, além dos Elementos, de outras obras de matemática, sobre lugares geométricos, cônicas etc. Os Elementos de Euclides são um conjunto de treze livros publicados por volta do ano 300 a.E.C., mas não temos registros da obra original, somente versões e traduções tardias (ROQUE, 2012, p. 150).

²⁸ Nos tabletas de argila de escrita cuneiforme foram encontrados problemas envolvendo áreas e tabelas de números pitagóricos (tablete Plimpton 322). Explicações sobre este tablete estão disponíveis em <<https://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/pl322.html>>. Acesso em 21 de janeiro de 2019.

Embora os gregos tenham realizado uma remodelagem da matemática e introduziram elementos que acabariam por orientar a evolução desta ciência nos próximos séculos²⁹, não há, contudo, uma documentação confiável que possa estabelecer a transição da matemática mesopotâmica e egípcia para a grega (ROQUE, op. cit.). Sabe-se apenas que “no final do século VII a.E.C., diversas realizações tecnológicas podem ter contribuído para o desenvolvimento da matemática e que alguns termos de geometria já apareciam na arquitetura”(p. 97).

Grande parte do que se conhece sobre a matemática na Grécia antiga parte de conclusões extraídas de um exame minucioso, por um lado, dos escritos de Platão e Aristóteles, e, por outro, dos Elementos de Euclides. A versão mais popular é a de que esse livro de Euclides resulta de uma compilação de conhecimentos matemáticos anteriores, ainda que a forma da exposição deva ser característica do tempo e do meio em que ele viveu. Não é possível confirmar essa tese, mas é fato que uma boa parte da matemática contida nessa obra associa-se a outros trabalhos gregos (ROQUE, 2012, p.115).

De acordo com Vaz (2010), Euclides foi o primeiro a dar uma consistência teórica a tudo de Matemática que havia sido registrado até o momento. Utilizando apenas a régua não graduada e o compasso³⁰, realizou as construções geométricas fundamentais para a axiomatização da Geometria. A partir daí, o critério para ser admitida uma verdade matemática deixou de ser a experimentação e passou a ser a demonstração.

Consoante Mol (2013), a obra euclidiana, como explicitamos anteriormente, incorporou as ideias de Platão no que diz respeito à natureza abstrata dos objetos matemáticos³¹, e, principalmente, as ideias de Aristóteles, no que concerne à estrutura do conhecimento matemático bem como dos elementos lógicos usados em sua construção. Ainda sobre essa obra³², a autora destaca que ela foi organizada em treze livros, ou capítulos, e que abrange tanto a geometria quanto a aritmética. Defende ainda que muito provavelmente a obra

²⁹Não pretendemos com esse texto enfatizar o mito de que somos herdeiros da matemática dos gregos, reforçado por inúmeras histórias da matemática escritas até hoje, teve sua origem no Renascimento, uma vez que essa ideia já existia um pouco antes, no século XIV, no seio do movimento dos humanistas italianos, inspirado no enaltecimento do saber dos antigos (ROQUE, 2012).

³⁰Uma das explicações para o uso da régua e do compasso nessa obra pode ter sido de ordem pedagógica. As construções feitas desse modo são mais simples e não exigem nenhuma teoria adicional (como seria o caso das construções por meio de cônicas). Desse ponto de vista, a restrição não seria consequência de uma proibição, mas de uma otimização: deve-se usar a régua e o compasso sempre que possível para simplificar a solução dos problemas de construção (ROQUE, 2012, p.161)

³¹Segundo Roque (2012, p. 152), “essa afirmação é relativa, isso porque os relatos diretos sobre a matemática grega no período euclidiano são bastante escassos. Das fontes utilizadas, as mais antigas datam de uma época bem distante de Euclides, caso das obras de Proclus e Pappus”.

³²Toda a descrição do que contém em cada livro pode ser encontrada na tradução para o português realizada por Irineu Bicudo (2009) e na tese de Almeida (2008) “Demonstrações em geometria plana em livros-texto no Brasil a partir do século XIX”.

foi fruto da colaboração de uma equipe de matemáticos coordenada por Euclides, não tendo sido escrita unicamente por ele.

Os primeiros quatro livros tratam de geometria plana elementar e estudam propriedades de figuras retilíneas e do círculo, abordando problemas cuja solução se faz com régua e compasso. O livro V aborda a teoria de proporções e o VI aplica essa teoria ao estudo de geometria. Os livros VII, VIII e IX versam sobre a teoria dos números. O livro X trata dos incomensuráveis e os livros XI, XII e XIII discorrem sobre geometria sólida (MOL, 2013, p 46).

No livro I³³, base para nosso trabalho, Euclides desenvolveu toda uma teoria de propriedades e comparações de áreas sem recorrer à sua medida, ou seja, muitos resultados parecem pertencer a uma tradição que podemos chamar de “cálculo de áreas”, que inclui a transformação de uma área em outra equivalente, bem como a soma de áreas (ROQUE, 2012).

Anwandter-Cuellar (2012) traz que as demonstrações presentes neste livro consistem em adicionar e subtrair figuras que são congruentes - ou isométricas - a figuras congruentes, de forma a obter outras figuras congruentes. A primeira menção à palavra “área” ocorre na proposição 34 do livro I, que corresponde às áreas paralelogramáticas³⁴ (BICUDO, 2009), e segue-se culminando na demonstração do teorema de Pitágoras (BICUDO, 2009, p. 132-133).

Vaz (2010, p. 20) faz uma descrição do conteúdo deste livro, considerando o que fora sugerido em suas últimas proposições, que são:

a construção de um paralelogramo, sobre um ângulo retilíneo dado, de uma área igual à de uma figura retilínea dada (I, 45); a construção de um quadrado sobre uma reta dada (I, 46); a demonstração da igualdade da área de dois quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo à área do quadrado construído sobre a hipotenusa do mesmo triângulo (I, 47); e a demonstração de que se os quadrados construídos sobre dois lados de um triângulo são iguais ao quadrado construído sobre o lado restante, então o triângulo é retângulo (I, 48).

Secco (2007), ancorado nos estudos de Lima (2001), relata que entre as ideias de Euclides estavam a coincidência de duas figuras planas por superposição, um passo intermediário para concluir a igualdade de suas áreas. Sobre essa questão, na proposição 7, temos o seguinte axioma: “e as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si” (BICUDO, 2009, p. 99). De acordo com Almeida (2008), “o critério da igualdade por superposição se apoia sobre o movimento, pois é o transporte de um objeto geométrico sobre o outro que permite concluir a igualdade entre eles. Nesse caso, o raciocínio tem base na evidência visual da figura geométrica”.

³³ Tomaremos como base este livro, pois nos interessa a ideia de área sem utilizar medidas, neste momento.

³⁴ Essa proposição pode ser encontrada no livro Os elementos de Euclides tradução de Irineu Bicudo (2009).

Para Secco (2007), Euclides não se preocupa em definir “área” e chama a atenção que, nos Elementos duas figuras são chamadas iguais quando têm mesma magnitude, ou seja, mesmas áreas se forem figuras planas, os mesmos comprimentos se forem segmentos, entre outros. Segundo Moreira (2010), o conceito de área nos Elementos de Euclides é trabalhado a partir de duas abordagens complementares:

[...] a equivalência de áreas (figuras com o mesmo conteúdo) e a transformação de figuras (construção de uma figura com forma diferente da primeira, mas com o mesmo conteúdo). Os gregos não vinculavam a um segmento de reta o número correspondente à sua medida, em uma determinada unidade. Assim como também não relacionavam a área de uma figura com sua medida numérica. É importante ter em mente que o conceito de número para os gregos antigos era profundamente diverso do nosso conceito atual (MOREIRA, 2010, p. 23).

Dessa forma, a geometria euclidiana só admitia como números os inteiros positivos³⁵ e não levava em conta os números reais. Além disso, para os matemáticos gregos, a Aritmética e a Geometria tratavam de campos distintos. Enquanto a Geometria se ocupava das formas e grandezas, a Aritmética lidava com os números (ibidem, p. 24). “Um traço particular dos Elementos é que as grandezas são tratadas enquanto tais e jamais são associadas a números (ao contrário, nos livros sobre números, eles são tratados como segmentos de reta)” (ROQUE, 2012, p.165).

Moreira (2010) explica que Euclides trata a noção de área como uma relação de equivalência (não explicitada formalmente), e satisfaz às seguintes noções comuns (em termos modernos) da seguinte forma:

- Figuras congruentes têm ‘conteúdo’ igual (mesma área);
- Se duas figuras têm ‘conteúdo’ igual a uma terceira figura, elas têm ‘conteúdo’ igual entre si;
- Se pares de figura com ‘conteúdo’ igual são ‘somados’, no sentido de serem juntados sem sobreposição, fazendo figuras maiores, então, estas figuras maiores têm ‘conteúdo’ igual;
- O mesmo vale para a subtração, observando que a igualdade de conteúdo da diferença não depende de onde as peças iguais foram removidas;
- Metades de figuras com ‘conteúdo’ igual têm ‘conteúdo’ igual. (Também, dobro de iguais são iguais);
- O todo é maior que as partes, o que neste caso, significa que se uma figura está contida totalmente em outra (não congruente) então, as duas figuras não podem ter ‘conteúdo’ igual (estabelece uma relação de ordem sobre a grandeza área) (MOREIRA, 2010, p. 24).

Nos Elementos, é perceptível a não presença de fórmulas para cálculo de áreas de figuras planas como vemos nos dias atuais em livros textos na educação básica no Brasil, nem tampouco atribuições de valores numéricos a qualquer medida. Nesse sentido,

os gregos ‘medem’ a área das figuras poligonais planas a partir da transformação (adicionando e/ou subtraindo figuras de mesmo ‘conteúdo’) destas figuras em

³⁵ Ver Almeida (2008, p. 27) sobre a geometrização das grandezas.

quadrados (quadratura de figuras - dado qualquer polígono construir, com régua e compasso, um quadrado de mesma área). O quadrado é a figura mais simples considerada pelos gregos como unidade de comparação. Ora, todo polígono pode ser repartido em triângulos. Todo triângulo pode ser ‘transformado’ em um paralelogramo de igual ‘conteúdo’ (mesma área). Todo paralelogramo pode ser ‘transformado’ em um quadrado de ‘conteúdo’ igual. Assim, percorrendo este caminho de sucessivas transformações de figuras em outras figuras de áreas equivalentes, os gregos eram capazes de dimensionar a área de qualquer figura plana (MOREIRA, 2010, p. 34-35)³⁶.

Podemos destacar que a quadratura em Euclides aparece como um instrumento para permitir a comparação e o cálculo de área (com Pitágoras)³⁷. Ou seja, ao se decompor um polígono qualquer em triângulos (T1, T2, T3, T4, T5), e em seguida transformá-los por meio de decomposições em quadrados, é possível, aplicando sucessivamente o teorema de Pitágoras (soma de quadrados), obter ao final um quadrado de mesma área que o polígono dado³⁸.

Nessa perspectiva, o que se coloca não é o problema de calcular a medida de uma área, mas o problema de determinar a relação entre duas áreas: a área que se quer conhecer e uma área já conhecida, comparando-as. Uma vez resolvido o problema de fazer a quadratura de uma figura poligonal, o passo seguinte para os gregos era quadrar figuras que não fossem limitadas por segmentos de retas, mas por curvas.

Neste contexto, surge então o famoso problema da quadratura do círculo, um dos três problemas da Antiguidade, os dois outros sendo a triseção do ângulo e a duplicação do cubo, considerados difíceis para os gregos. A quadratura do círculo consiste em construir um quadrado com a mesma área que um círculo dado, utilizando apenas régua não graduada e compasso com um número de etapas finitas (SANTANA, R., 2015). Os gregos não conseguiram resolver esse problema utilizando tais instrumentos dentro do padrão imposto por Euclides.

Exporemos a seguir algumas das proposições do Livro I³⁹ dos Elementos de Euclides, pois acreditamos que os caminhos para a quadratura de uma figura constituem-se algo

³⁶A quadratura consiste em obter um quadrado de mesma área que uma figura dada, mas até esse processo acontecer são realizados vários procedimentos que não são quadraturas, por exemplo, quando se passa de um triângulo para um paralelogramo, não se está fazendo uma quadratura, e sim, uma equidecomposição: dois polígonos são chamados de equidecomponíveis se eles podem ser decompostos em um número finito de triângulos congruentes dois a dois (HILBERT, 1971, p. 60).

³⁷**Teorema de Pitágoras em uma abordagem geométrica:** em qualquer triângulo retângulo, o quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma dos quadrados construídos sobre os catetos.

³⁸Essa explicação pode ser encontrada na aula ministrada pelo professor Pitombeira sobre os Elementos de Euclides disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=Ugq0xHNTpWM&t=3608s>>. Acesso em 12 de agosto de 2017.

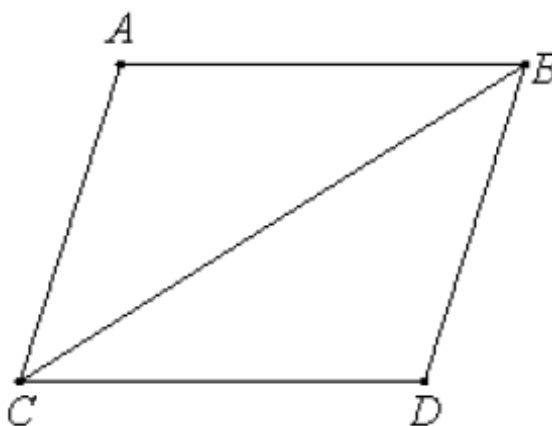
³⁹A proposição 14 do livro 2 que diz respeito à construção de um quadrado igual a um retilíneo dado (retângulo). Também será um dos requisitos para o MS em virtude de estar relacionada à quadratura de figuras.

importante para o tratamento da área em um software de geometria, uma vez que esse método não antecipa o uso das fórmulas nem tampouco a medida da área.

Pretendemos então levar em conta, no processo de desenvolvimento do software, algumas proposições (34-38, 41, 42, 43 e 46), de forma que possibilite ao professor trabalhar em sala de aula uma abordagem geométrica de área, sem no primeiro momento antecipar a medida numérica da área⁴⁰. Para isso, nos filiamos na tradução dos Elementos de Euclides em português, como relatamos anteriormente, por Irineu Bicudo (2009). Os estudos de Moreira (2010) e Vaz (2010) nos darão subsídios para elaborar algumas explicações sobre as proposições que serão expostas, pois realizaram um estudo mais profundo neste livro.

Proposição 34⁴¹: Das áreas dos paralelogramos, tanto os lados quanto os ângulos opostos são iguais entre si, e a diagonal corta-as em duas.

Figura 3- Representação geométrica da proposição 34 livro I



Fonte: Moreira (2010, p. 163)

Concordamos com Vaz (2011) que, nesta proposição 34, Euclides demonstra a igualdade dos elementos semelhantes e opostos em um paralelogramo e, em complemento a isto, mostra a simetria dos paralelogramos com relação ao seu diâmetro, ao demonstrar que a área da figura é bissecada⁴² por ele.

Segundo Vaz (2010, p. 67), a próxima proposição “mostra que se dois paralelogramos estão contidos entre as mesmas paralelas, e se eles compartilham a mesma base, eles serão

⁴⁰ Essa preocupação de abordar a área geometricamente sem números está ancorada nos estudos das pesquisadoras francesas Douady e Perrin-Glorian (1989).

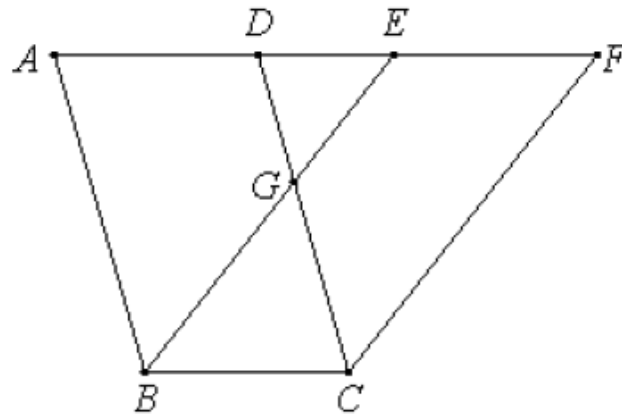
⁴¹ Todas as demonstrações das proposições estão disponíveis no Apêndice M deste nosso estudo.

⁴² Divisão em duas partes iguais. (Var.: bissecção.). <<https://www.dicio.com.br/bissecacao/>>.

iguais”. Este é o primeiro critério de identidade para paralelogramos dos *Elementos*, o qual apresentamos a seguir:

Proposição 35: “Os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si” (BICUDO, 2009, p. 124).

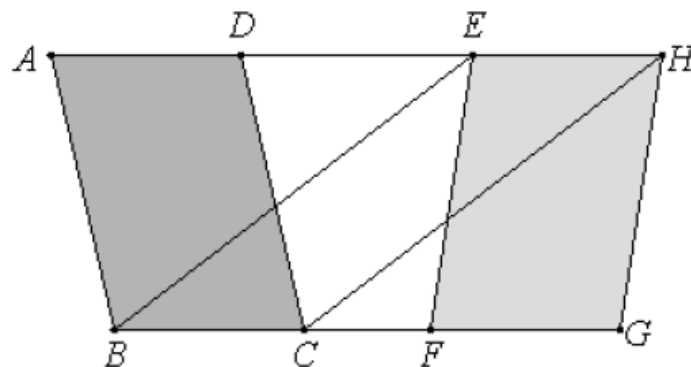
Figura 4- Representação geométrica da proposição 35 livro I



Fonte: Moreira (2010, p. 163)

A **proposição 36** do livro I estende “a igualdade para os casos em que as bases são iguais não pelo fato de serem coincidentes, mas apenas por serem iguais (por hipótese ou demonstração)” (VAZ, 2010, p. 67). Temos então a proposição - os paralelogramos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si, que pode ser representada geometricamente da seguinte forma:

Figura 5- Representação geométrica proposição 36 livro I

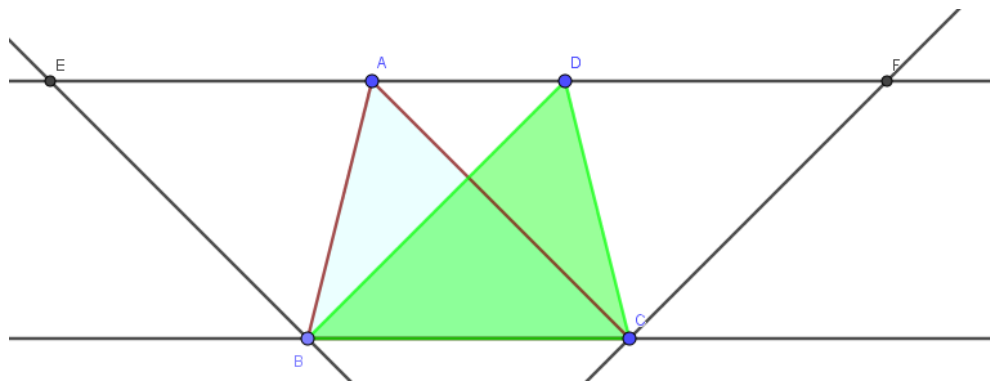


Fonte: Moreira (2010, p. 164)

As **proposições 37 e 38** tratam da igualdade de triângulos (triângulos de mesma área)⁴³. Demonstram, de maneira análoga às anteriores, a igualdade de triângulos com bases iguais e nas mesmas paralelas. Vaz (2010, p. 68) explica que nesses casos os resultados são alcançados através da inclusão dos triângulos dados em paralelogramos, de forma que o triângulo se transforma, quando se traça uma paralela a um de seus lados, em uma área paralelogrâmica bissecada cuja parte é igual ao triângulo dado. Ainda para esse autor, esta área é demonstrada como igual à do outro paralelogramo construído (do qual o outro triângulo também é parte), pelo que se deduz a igualdade dos triângulos.

Proposição 37: Os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si.

Figura 6- Representação geométrica da proposição 37 do livro 1



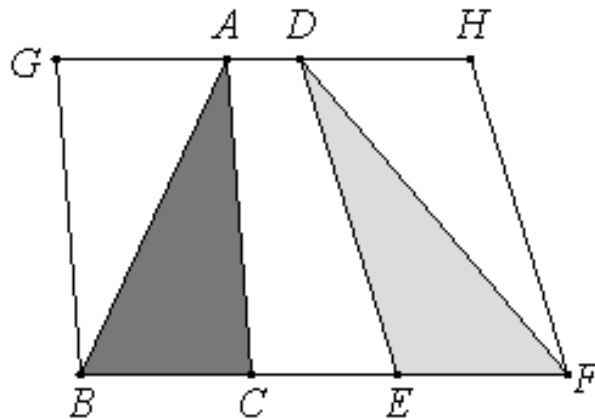
Fonte: da pesquisa baseado em Bicudo (2009)

Ressaltamos que tanto na proposição 37, apresentada anteriormente, quanto na 38 do livro I, Euclides usa, assim como para os paralelogramos, a palavra “iguais” com significado de mesma área.

⁴³ Esse é o termo que utilizamos hoje baseado nos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989).

Proposição 38: Os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si.

Figura 7- Representação geométrica da Proposição 38 do livro I.

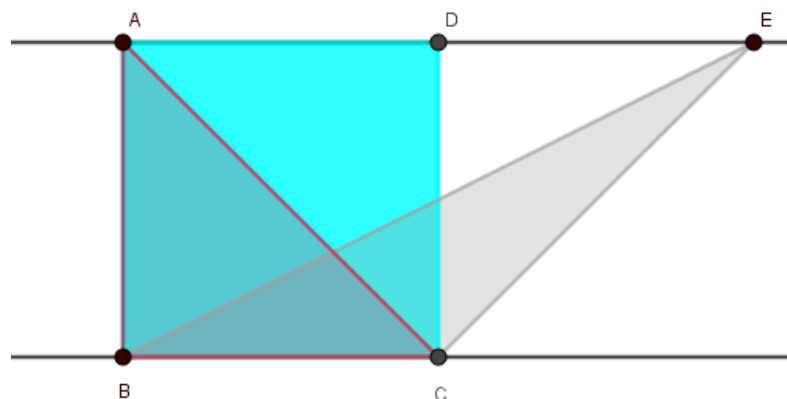


Fonte: Moreira (2010, p. 165)

Segundo Vaz (2010, p. 69), na proposição 41 são tratadas pela primeira vez a relação entre a área de um paralelogramo e de um triângulo com bases coincidentes e paralelas iguais, de forma que a área do paralelogramo deverá ser o dobro da do triângulo.

Proposição 41: Caso um paralelogramo tenha tanto a mesma base que um triângulo quanto esteja nas mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo.

Figura 8- Representação geométrica da proposição 41 do livro I

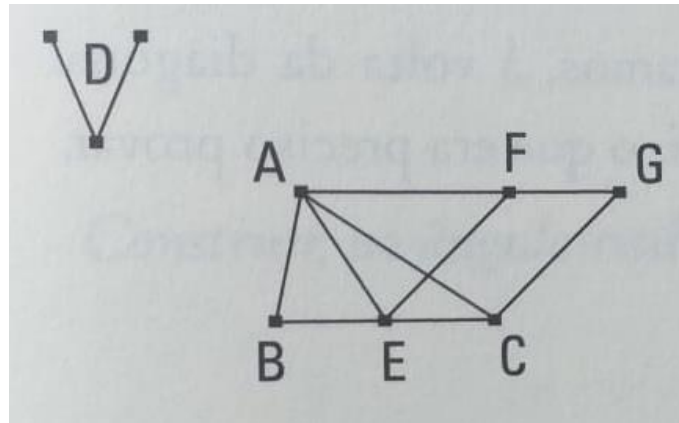


Fonte: da pesquisa, baseado em Bicudo (2009)

A **proposição 42** diz respeito à construção de um paralelogramo igual ao triângulo dado, no ângulo retilíneo dado. Como ilustramos a seguir:

Figura 9-Representação geométrica da proposição 42

Ângulo retilíneo dado



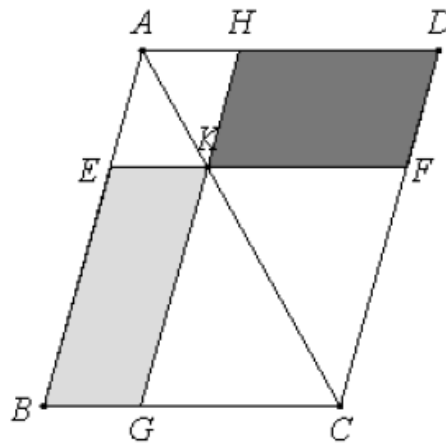
Fonte: Bicudo (2009, p. 128)

Na proposição 43, Euclides expressará um resultado muito valioso na teoria de áreas: “em qualquer paralelogramo, os complementos em torno da diagonal são iguais entre si” (MOREIRA, 2010).

Nessa proposição estabelece a igualdade, em áreas paralelogramáticas, entre os paralelogramos construídos em torno do diâmetro do paralelogramo original, e as áreas que os complementam com relação à área daquele. Na demonstração, o autor se vale da igualdade das áreas dos triângulos formados pela bissetriz do paralelogramo, as quais são compostas pelas metades (triângulos) dos paralelogramos construídos em torno da bissetriz (a qual também os bisseca) somados aos mencionados complementos. Como estas metades estão presentes nos dois lados da bissetriz, e os triângulos que ela forma no paralelogramo original são compostos por elas e pelos assim chamados complementos, estes deverão ser iguais também, pois podem ser vistas como a subtração de iguais a todos iguais (VAZ, 2010, P. 69).

Proposição 43: Os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de todo paralelogramo, são iguais entre si.

Figura 10- Representação geométrica da proposição 43 do livro I

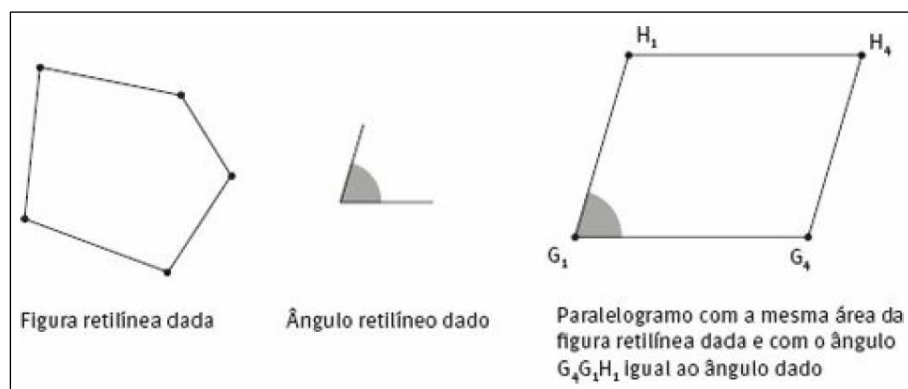


Fonte: Moreira (2010, p. 156)

Nessa proposição 43, se estabelece a igualdade, em áreas paralelogrâmicas, entre os paralelogramos construídos em torno do diâmetro do paralelogramo original, e as áreas que os complementam com relação à área daquele (VAZ, 2010). Ainda para esse autor, nesta demonstração, Euclides se vale da igualdade das áreas dos triângulos formados pela bissetriz do paralelogramo, as quais são compostas pelas metades (triângulos) dos paralelogramos construídos em torno da bissetriz (a qual também os bisseca), somados aos mencionados complementos. Como estas metades estão presentes nos dois lados da bissetriz, e os triângulos que ela forma no paralelogramo original são compostos por elas e pelos assim chamados complementos, estes deverão ser iguais também, pois podem ser vistas como a subtração de iguais a todos iguais (ibidem, p. 69).

Proposição 45: Construir, no ângulo retilíneo dado, um paralelogramo igual à retilínea dada.

Figura 11- Ilustração da Proposição 45



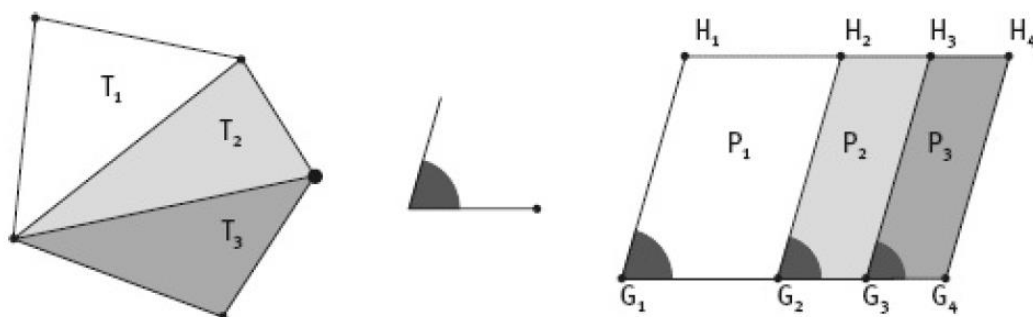
Fonte: (ROQUE, 2012, p. 168)

De acordo com Roque (2012):

A figura retilínea dada é um polígono, mas sua área é transformada na área de um quadrilátero. A ideia principal é dividir o polígono em triângulos, T_1 , T_2 , T_3 , e construir paralelogramos, P_1 , P_2 , P_3 , tal que a área de cada P_i seja igual à área de cada T_i . Além disso, cada ângulo $G_i + I G_i H_i$ ($i = 1, 2, 3$) deve ser igual ao ângulo dado. As ferramentas para realizar esse procedimento são fornecidas pelas proposições anteriores, como a I-42, que mostra como construir um paralelogramo com a mesma área de um triângulo, quando um ângulo do paralelogramo é prefixado (ROQUE, 2012, p.169)

Essa autora relata que o objetivo da proposição 45 do livro I de Euclides é mostrar como se pode construir um paralelogramo, com ângulo dado, cuja área seja igual a um polígono qualquer e ilustra a citação acima da seguinte forma:

Figura 12- Construção de paralelogramos



Fonte: (ROQUE, 2012, p. 169)

Em seguida a autora supracitada expressa que essa “construção torna possível representar a área de qualquer polígono como um retângulo, uma vez que o retângulo é um caso particular de um paralelogramo, com ângulos retos” (ROQUE, 2012, p. 169).

Roque (2012) ainda relata que os problemas envolvendo as grandezas geométricas, como comprimentos e área, nesse momento, não eram tratados por meio da associação a números, sendo resolvidos pela busca de áreas equivalentes. Por exemplo, para “medir” a área de uma figura qualquer, encontrava-se uma figura simples cuja área fosse igual à da figura dada. Essa figura simples era um quadrado. Logo, o problema de encontrar a quadratura de uma figura qualquer era equivalente ao problema de construir um quadrado cuja área fosse igual à da figura dada (ROQUE, 2012).

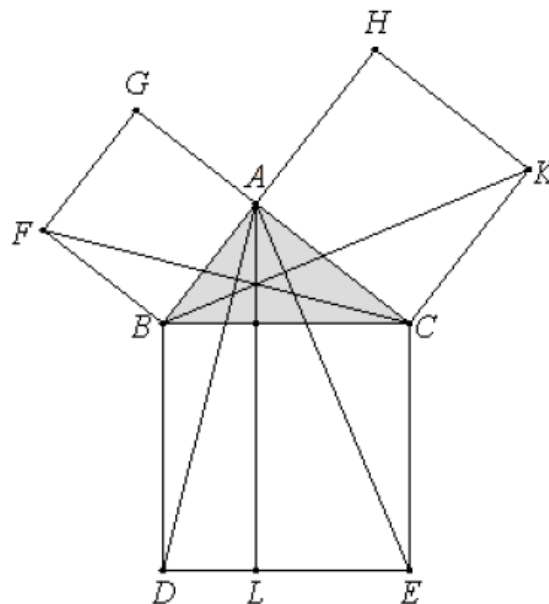
A proposição I-45 fornece uma construção clássica que é parte dos métodos de aplicação de áreas. Os passos para descobrir a quadratura de um polígono qualquer

eram os seguintes: usar a proposição I-45 para encontrar um retângulo com a mesma área do polígono e, em seguida, usar a proposição II-14 para determinar o quadrado com a mesma área do retângulo (no livro II são fornecidos alguns procedimentos para transformar um retângulo em um quadrado). Feito isso, era possível somar as áreas dos quadrados por meio da proposição I-47, enunciada logo após a construção obtida em I-45, e que equivale ao resultado que conhecemos como teorema “de Pitágoras” (ROQUE, 2012, p. 170).

A proposição 47 do livro I, como explicitada na citação acima, trata do teorema de Pitágoras e nela “temos a demonstração das condições necessárias para a soma de duas áreas (em quadrados), que estabelece a equivalência das áreas construídas sobre os catetos à da área construída sob a hipotenusa, num triângulo retângulo” (VAZ, 2010, p. 71). Em outras palavras, atribui àquela figura a capacidade de somar áreas.

Proposição 47: Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.

Figura 13- Representação geométrica da proposição 48 do livro I



Fonte: Moreira (2010, p.114)

Demonstração: Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto; digo que o quadrado sobre a BC é igual aos quadrados sobre as BA, AC. Fiquem, pois, descritos, por um lado o quadrado BDEC sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC sobre as BA, AC, e, pelo A, fique traçada a AL paralela a qualquer uma das BD, CE; e fiquem ligadas às AD, FC. E, como cada um dos ângulos sob BAC, BAG é reto, então, as duas retas AC, AG, não postas no mesmo lado, fazem relativamente a alguma reta, a BA, e no ponto A sobre ela, os ângulos adjacentes iguais a dois retos; portanto, a CA está sobre uma reta com a AG. Pelas mesmas coisas, então, também a BA está sobre uma reta com a AH. E, como o ângulo sob DBC é igual ao sob

FBA; pois, cada um é reto; fique adicionado o sob ABC comum; portanto, o sob DBA todo é igual ao sob FBC todo. E como, por um lado, a DB é igual à BC, e, por outro lado, a FB, à BA, então, as duas DB, BA são iguais às duas FB, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob DBA é igual ao ângulo sob FBC; portanto, a base AD [é] igual à base FC, e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC; e, por um lado, o paralelogramo BL [é] o dobro do triângulo ABD; pois, tanto têm a mesma base BD quanto estão nas mesmas paralelas BD, AL; e, por outro lado, o quadrado GB é o dobro do triângulo FBC; pois, de novo, tanto têm a mesma base FB quanto estão nas mesmas paralelas FB, GC. [Mas os dobros das coisas iguais são iguais entre si]; portanto, também o paralelogramo BL é igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, então, sendo ligadas às AE, BK, será provado também o paralelogramo CL igual ao quadrado HC; portanto, o quadrado BDEC todo é igual aos quadrados GB, HC. E, por um lado, o quadrado BDEC foi descrito sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC, sobre as BA, AC. Portanto, o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC. Portanto, nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o [ângulo] reto; o que era preciso provar (BICUDO, 2009, p.132).

“Nesta demonstração, as áreas dos quadrados sobre os lados do triângulo são divididas em triângulos, os quais são usados para demonstrar a igualdade dos paralelogramos que compõem as três áreas dos quadrados envolvidos” (VAZ, 2010, p. 71).

Na educação básica, o teorema de Pitágoras deve ser explorado no 9º ano do ensino fundamental de acordo com a Base Nacional Comum Curricular -BNCC (BRASIL, 2017, p. 316). Entretanto, como recomenda esse documento, o ensino desse teorema não pode ser restrito ao uso de fórmulas.

3.1.2 A abordagem de área em D. Hilbert

David Hilbert, no livro “Grundlagen der geometrie de 1899”, desenvolveu sua teoria com base em quatro grupos de axiomas da geometria plana euclidiana: os axiomas de pertencimento, ordem, congruência e paralelismo. Ademais, a teoria das proporções é central para a construção da abordagem das áreas de superfícies planas nessa obra. Em particular, o trabalho de Hilbert traz uma importante contribuição para a teoria euclidiana no início do século XX, dando um novo lugar às técnicas de decomposição de figuras.

Na tradução dessa obra para o inglês⁴⁴, no capítulo IV intitulado “*Theory of plane area*” Hilbert (1971), podemos perceber que o autor define um polígono como as partes do plano que podem ser expressas sob a forma de uma reunião finita de triângulos quase disjuntos⁴⁵ e utiliza no lugar do termo **iguais** de Euclides, o termo **congruente**. Em seguida,

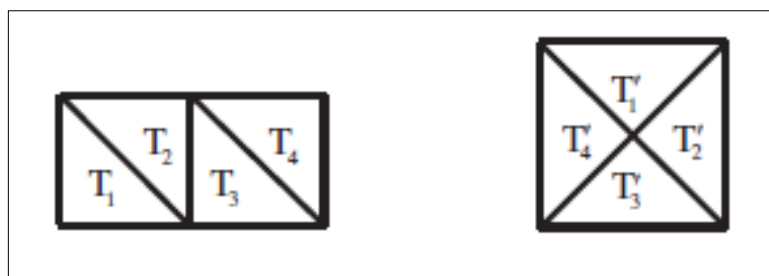
⁴⁴Foundations of geometry” de David Hilbert tradução para o inglês de 1971 por Leo Unger.

⁴⁵Quase disjuntas: figuras poligonais que têm em comum no máximo pontos de suas fronteiras (FERREIRA, 2018)

esse autor explicita duas definições que estão relacionadas a decomposição e recomposição de figuras: equidecomposição e a equidecomplementariedade (HILBERT, 1971, p. 60).

Pressiat (2008, p. 468), em seu texto intitulado *La place des grandeurs dans la construction des mathématiques*⁴⁶ baseado nos estudos de Hilbert (1899), nos apresenta a seguinte definição com relação a equidecomposição: “Duas figuras P e P' são equivalentes, se for possível escrever cada uma delas na forma de reuniões de triângulos que não se sobrepõem”: $[P = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n \text{ e } P' = T'_1 \cup T'_2 \cup \dots \cup T'_n]$ de modo que, para cada i, os triângulos T_i e T'_i são congruentes. Assim, por exemplo, a união de dois quadrados congruentes (figura da esquerda [abaixo]) é equidecomponível a um quadrado (figura da direita [abaixo]) construído em uma de suas diagonais por meio da equivalência por decomposição (ibidem, p. 468) :

Figura 14- Decomposição em triângulos



Fonte: (PRESSIAT, 2008, p. 468)

Assim, “dois polígonos são chamados de equidecomponíveis se eles podem ser decompostos em um número finito de triângulos congruentes dois a dois”. (HILBERT, 1971, p.60).

Pressiat (2008) ainda continua apresentando, dos estudos de Hilbert (1899), a definição de equidecomplementariedade. Duas figuras P e P' são equicomplementares se houver figuras Q e Q' de modo que:

P e Q são quase disjuntas;

P' e Q' são quase disjuntas;

Q e Q' são equidecomponíveis;

$P \cup Q$ e $P' \cup Q'$ são equidecomponíveis. (PRESSIAT, 2008, p. 469)

⁴⁶Texto publicado no Journées La Rochelle 2008 da Association Des Professeurs De Mathématiques De L'Enseignement (APMEP), disponível em <<https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA09054-2.pdf>>. Acesso em junho de 2019.

Concordamos com Ferreira (2018, p. 42) que “essas noções, na reflexão sobre a aprendizagem e o ensino da área como grandeza, conectam-se ao aspecto da conservação da área ao realizar processos de decomposição e recomposição de figuras, sem perda nem sobreposição”. A ênfase na construção de um conceito de área sem recurso numérico e principalmente o seu trabalho em polígonos equicomplementares e polígonos equidecomponíveis é necessária para a abordagem da área que adotamos nesta pesquisa para o desenvolvimento do novo software de geometria.

3.1.3 A noção de área para Lebesgue

Para explicar a noção de área, Lebesgue⁴⁷ (1975) propõe o seguinte exemplo:

Supomos que queremos pavimentar duas figuras diferentes com quadrados congruentes (iguais). Para a primeira figura serão suficientes 100 ladrilhos para pavimentá-la completamente de forma adequada (os quadrados inteiros sem serem decompostos), para a segunda figura serão utilizados 150 ladrilhos. Diz-se então que a figura 1 tem área menor que a figura 2, ou seja, a primeira tem uma área de 100 quadrados e a segunda uma área de 150 quadrados.(ANWANDTER-CUELLAR, 2012, p. 67).

Depois de explicar esse exemplo, Lebesgue (op. cit.) constrói uma definição de área com um procedimento análogo à noção de comprimento. Anwandter-Cuellar (2012, p. 67) afirma, com base em Lebesgue, que

no plano, deve-se considerar primeiro uma grade (malha) dada pelas linhas retas paralelas aos eixos de um quadrado C . A área deste quadrado fechado C da grade é igual a 1 unidade. Cobrimos o plano com uma malha R de quadrados iguais a C , chamamos os quadrados U , em seguida subdividimos os lados desse quadrado em 10 partes iguais, obtemos então uma rede R_1 de quadrados chamados de U_1 quadrados, da mesma forma, prosseguimos construindo redes de R_2 , R_3 , etc. Como cada grade i é a união de 100 quadrados da rede $i-1$, a gente vai atribuir aos pequenos quadrados U_i a área $\frac{1}{100^i}$. A reunião de n quadrados terá por área $\frac{n}{100^i}$.

A partir dessa definição, a autora segue exemplificando que agora nós pegamos um domínio D . Contamos quantos quadrados U_i formamos inteiramente de pontos D , ou n_i . Como um quadrado U_i contém 100 quadrados U_{i+1} , temos portanto:

⁴⁷Henri Léon Lebesgue (1875-1941) foi um notável matemático francês que nasceu na cidade de Beauvais. Apesar da polêmica que causou, ao criar um conceito de integral distinto daquele de Riemann, foi considerado um dos mais originais e produtivos do início do século XX. Ele provocou uma mudança substancial na análise moderna, com a teoria da integração de funções de variável real. Lebesgue formulou a teoria da medida em um artigo seminal, publicado no periódico francês *Comptes Rendus*, em 29 de abril de 1901, e defendeu sua tese de doutorado na Faculdade de Ciências de Paris, em 1902, de certa maneira revolucionando a teoria da integração. Seu trabalho foi bastante influenciado pelos artigos de René-Louis Baire (1874-1932), sobre funções descontínuas (ALENCAR, 2008, p. 4). Disponível em <http://www.difusaocientifica.com.br/artigos/Matematica_Medicao.pdf>. Acesso em 25 de dezembro de 2018.

$$n \leq \frac{n_1}{100} \leq \frac{n_2}{100^2} \leq \frac{n_3}{100^3} \leq \dots$$

Contando os quadrados U_i dos quais alguns pontos pertencem a D , seja N_i , temos que:

$$N \geq \frac{N_1}{100} \geq \frac{N_2}{100^2} \geq \frac{N_3}{100^3} \geq \dots$$

Obtemos então:

$$\frac{n_i}{100^i} \leq \text{Área } D \leq \frac{N_i}{100^i}$$

Em outras palavras, Lebesgue enquadra a área a partir de grades internas e externas.

Quando $\frac{N_i - n_i}{100^i}$ tende a zero e quando i aumenta indefinidamente, dizemos que o número definido por essas duas séries é a área de D em relação à unidade U (ANWANDTER-CUELLAR, 2012, p. 70). Ainda para essa autora, podemos definir uma função medida μ (a área) no conjunto de domínios quantificáveis, temos que $\mu(C) = 1$. Ele verifica as seguintes propriedades:

Se D_1 e D_2 são quase disjuntos, então $\mu(D_1 \cup D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2)$;

$\mu(D) \geq 0$, para todo D ;

μ é invariante por isometria: para toda isometria g e todo domínio D , $\mu(g(D)) = \mu(D)$;

Para todo polígono convexo P , existe apenas uma aplicação μ definida no conjunto de polígonos e verificando as propriedades acima tal que $\mu(P) = 1$.

Destas propriedades, podemos provar os seguintes teoremas:

Qualquer polígono tem uma área;

Se subdividimos um polígono P em polígonos $P_1, P_2, \dots, P_m$ temos que $\text{Área } P = \text{Área } P_1 + \text{Área } P_2 + \dots + \text{Área } P_m$;

Dois polígonos iguais têm mesma área (ANWANDTER-CUELLAR, 2012, p. 71).

Jacob (2015), em sua dissertação sobre a construção do conceito de área para figuras planas, cujo objetivo foi oferecer ao estudante uma visão global desse conceito, apresenta da seguinte forma a noção de área para Lebesgue:

Vamos admitir que qualquer figura plana está contida em um papel quadriculado. Admitiremos também que cada quadradinho tem a mesma área $\alpha = 2^{-2k}$, onde k é um número inteiro escolhido arbitrariamente, ou seja, podemos aumentar ou diminuir a área de cada quadradinho da forma que nos for mais conveniente, multiplicando ou dividindo por dois o comprimento dos lados de cada quadradinho. Daqui para frente, vamos chamar cada quadradinho do papel quadriculado de elemento de área α ” (JACOB, 2015, p. 31).

Esse autor segue explicitando ainda a seguinte questão:

Seja Q_α o conjunto de todas as figuras planas formadas por uniões (finitas ou infinitas) de elementos de área α . Sendo assim, dado $X \in Q_\alpha$, existe n inteiro positivo tal que: $X = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$; onde Q_j é um elemento α , para cada $j = 1, \dots, n$, (caso contrário, X é uma figura formada por infinitos elementos de área α). As figuras em Q_α serão chamadas de figuras discretas (JACOB, 2015, p. 31).

A cada $X \in Q_\alpha$, podemos associar o número positivo $\lambda_1(X)$ definido por:

$$\lambda_1(X) = \begin{cases} n\alpha, & \text{Se } X = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n; \\ +\infty; & \text{se } X \text{ é formada por infinitos elementos de área } \alpha; \end{cases}$$

A função $\lambda_1 : Q_\alpha \rightarrow (0; +\infty]$ assim obtida é a área de Lebesgue das figuras discretas (JACOB, 2015, p. 32).

Por meio destas teorias, podemos observar que a noção de área pode ser definida usando objetos geométricos como polígonos, na teoria presente nos Elementos de Euclides e em Hilbert, ou quadrados, na teoria elaborada por Lebesgue (ANWANDTER-CUELLAR, 2012). Estas abordagens teóricas referem-se a duas maneiras de conceber a noção de área. As primeiras definem áreas sem o uso das medidas e a segunda baseia-se em uma "unidade de área" no processo de medição. Na próxima seção, direcionaremos o olhar para a noção de área como uma grandeza em que subjazem as diversas abordagens históricas da área.

3.2 Estudos Cognitivo e Didático do Conceito de Área

Nesta seção, tratamos acerca do conceito de área como grandeza autônoma. Apoiamos esse estudo nas pesquisas realizadas por Régine Douady e Marie Jeanne Perrin-Glorian (1989). Explicitamos ainda a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996), que nos permite entender a construção de um conceito, seguido de um conjunto de situações que dão sentido ao conceito de área.

3.2.1 Abordagem de área como grandeza

A proposta de abordar área como uma grandeza em nosso estudo apoiou-se nas pesquisas desenvolvidas por Douady e Perrin-Glorian (1989). Essas autoras evidenciaram erros e entraves na resolução de problemas sobre área por alunos franceses em um nível equivalente ao 4º e 5º anos do ensino fundamental no Brasil em 1980, dentre os quais, destacam-se que:

- a possibilidade de expressar a área de uma figura usando certa unidade depende dos formatos da figura e da superfície unitária, ou seja, da possibilidade de ladrilhar efetivamente a figura com uma quantidade finita de exemplares da superfície unitária. Assim, encontram dificuldade em expressar a área de um triângulo em centímetros quadrados devido à impossibilidade de cobrir um triângulo efetivamente com uma quantidade finita de quadradinhos de lados de um centímetro;

- a área de uma figura é ligada à própria figura de tal modo que não se dissocia de outras características da mesma. Nessas condições, não parece possível, aos olhos dos alunos, modificar uma figura, mantendo sua área inalterada, ou seja, qualquer modificação da figura modificaria necessariamente sua área e todas as demais características da figura (como seu perímetro, por exemplo);
- qualquer modificação do perímetro de uma figura altera sua área (e reciprocamente);
- duas figuras que tenham áreas iguais têm necessariamente perímetros iguais (e reciprocamente);
- o uso de certas fórmulas pode ser estendido a situações nas quais não são válidas, como é o caso de multiplicar os comprimentos dos lados adjacentes de um paralelogramo não retângulo ou até multiplicar os comprimentos dos três lados de um triângulo (estendendo indevidamente a validade da fórmula da área de um retângulo).

Pesquisas realizadas no Brasil em diferentes níveis de escolaridade (BELLEMAIN; LIMA, 2002; DUARTE, 2002; FACCO, 2003; FERREIRA, 2010; FERREIRA; BELLEMAIN, 2013; SILVA; BELLEMAIN, 2017; MELO, 2003; TELES, 2007, entre outros) identificaram erros e dificuldades similares aos apresentados nos estudos das pesquisadoras francesas. Tais pesquisas destacaram que “grande parte dos alunos cometem erros em relação ao uso de unidades de medida e alguns consideram que figuras com áreas iguais são necessariamente congruentes” (SILVA, 2016, p. 24).

Para Ferreira e Bellemain (2013), o modelo explicativo para tais entraves, proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989) e adotado por Baltar (1996), baseia-se na organização das concepções dos alunos em dois polos - as concepções geométricas e as concepções numéricas - as quais são descritas da seguinte forma:

As concepções geométricas se caracterizam por um amálgama entre a figura e a área, ou seja, para os sujeitos que mobilizam uma concepção geométrica é como se a palavra área remetesse à própria figura, e não a uma propriedade da mesma. No outro extremo, estão as concepções numéricas, que focam exclusivamente o aspecto do cálculo. É o caso de respostas a problemas de cálculo de área, nas quais nenhuma unidade é mencionada ou utilizam-se unidades inadequadas (FERREIRA; BELLEMAIN, 2013, p. 3).

Douady e Perrin-Glorian (1989) enfatizam que os alunos mobilizam ora uma concepção geométrica de área, ora uma concepção numérica e, por vezes, as duas de forma simultânea, mas sem estabelecer relações pertinentes entre os aspectos geométricos e numéricos no tratamento de problemas sobre área, o que provoca ou reforça a persistência de dificuldades na aprendizagem da área. Ainda colocam que um dos motivos que enfatizava

essas concepções estava relacionado ao modelo de ensino nos níveis elementares na França, na década 80. Para elas:

A apresentação padrão do ensino consiste em recorrer ao ladrilhamento de superfícies passando-se rapidamente pelo ladrilhamento e contagem dos quadrados para determinar a área de superfícies quadriculáveis; em seguida, para retângulos ou quadrados, procuram-se meios econômicos de contagem; depois, procede-se à introdução das unidades convencionais com múltiplos e submúltiplos e, de acordo com o caso, antes ou depois disso, leva-se ao estabelecimento das fórmulas de áreas dos retângulos em função dos comprimentos dos lados (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 393 - Tradução Livre).

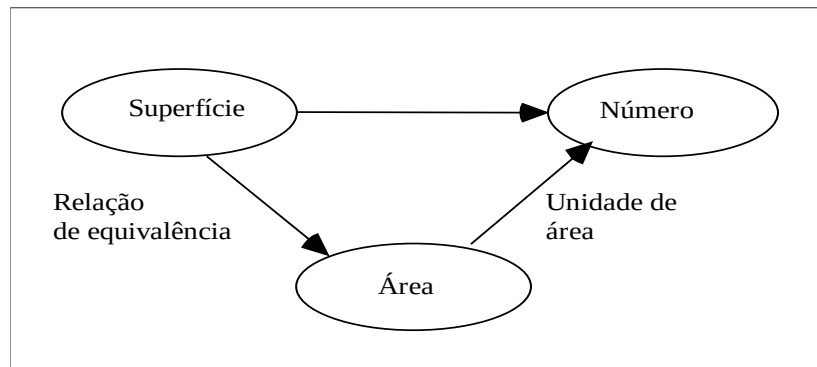
A partir dessa constatação, essas autoras defendem que na aprendizagem do conceito de área devem-se considerar três quadros: o geométrico, o numérico e o das grandezas. Para elas “um quadro é constituído de objetos de um ramo da matemática, das relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que o sujeito associa num dado momento, a esses objetos e relações” (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 389- Tradução Livre).

No quadro geométrico, estão as superfícies planas, consideradas como modelos matemáticos de faces de objetos do mundo físico. São objetos desse quadro, triângulos, quadriláteros, círculos, figuras de contornos irregulares, etc. Esses objetos geométricos são comparados, segundo o atributo área. Nesse modelo, a área faz parte do quadro das grandezas e é caracterizada como classe de equivalência de superfícies de mesma área. O quadro numérico é composto pelas medidas, as quais são números reais não negativos (3 , $\frac{1}{7}$, $\sqrt{5}$, etc.). Expressões compostas de um número acompanhado de uma unidade de área são maneiras de representar grandezas (3 ha , $\frac{1}{7} \text{ m}^2$, $\sqrt{5} \text{ km}^2$, etc.) (SILVA; BELLEMAIN, 2017, p. 4).

A concepção e experimentação de uma engenharia didática realizada nos estudos das pesquisadoras francesas supracitadas evidenciaram que a abordagem de área como grandeza autônoma favorecia a construção de relações entre conhecimentos geométricos e numéricos na resolução de problemas de área. Ainda para essas autoras, a distinção e a articulação entre três quadros, a saber: o geométrico, o numérico e o das grandezas contribui para a construção do conceito de área como grandeza.

As relações entre os quadros geométrico, numérico e o quadro das grandezas podem ser, segundo Bellemain e Lima (2002), modelizadas da seguinte forma:

Figura 15- Relações entre os quadros



Fonte: Bellemain e Lima (2002, p. 41)

Bellemain (2000) exemplifica esse diagrama em uma modelização da grandeza área da seguinte forma:

- as superfícies planas (objetos do quadro geométrico);
- as áreas (objetos do quadro das grandezas);
- as medidas de áreas – números reais positivos (objetos do quadro numérico);
- a relação de equivalência “ter mesma área” (objeto que permite passar do quadro geométrico ao das grandezas);
- as unidades de área (objeto que permite passar do quadro das grandezas ao das medidas) (BELLEMAIN, 2000, p. 7).

A partir dessa perspectiva, Baltar (1996) propõe um conjunto de situações que dão sentido à área como grandeza em três classes: comparação de área, medida de área e produção de superfície. Na pesquisa de Ferreira (2010) essas situações são ampliadas para mais uma categoria a de mudança de unidade.

Nas situações de comparação trata-se em primeiro plano de decidir se duas figuras pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência (ou seja, se têm mesma área) ou de estabelecer uma ordem entre as áreas de duas ou mais figuras. **Nas situações de medida**, o resultado esperado é um número seguido de uma unidade de área e, nesse caso, o que está em foco é a passagem da grandeza ao número mediante a escolha de uma unidade. **As situações de produção** são aquelas nas quais se solicita que sejam desenhadas ou descritas figuras que respeitam determinadas condições: por exemplo, traçar no papel quadriculado uma figura de área 10 cm²; dada uma figura F, desenhar uma figura G, diferente de F, com mesma área; ou uma figura J com perímetro igual ao de F etc. **Nas situações de mudança de unidade**, uma área é inicialmente representada utilizando certa unidade U e solicita-se que seja expressa a mesma área, com o uso de uma unidade diferente de U, como por exemplo, expressar em hectares a área de uma região de três quilômetros quadrados (SILVA, BELLEMAIN, 2017, p. 6).

A ideia de situações, para Baltar (1996), está ancorada na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud em que o conceito é constituído por uma tríade C (Conceito) = (S, I e R), na qual “S” é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência), I é o conjunto de invariantes sobre os quais se assenta a operacionalidade dos

esquemas (conceitos em ação e teoremas em ação) (o significado) e **R** é o conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante).

Consideramos, então, o conceito de área a partir da tríade estabelecida anteriormente, ou seja, o conjunto das situações que dão sentido à área, o conjunto de invariantes operatórios subjacentes à ação e o conjunto das representações simbólicas em jogo.

Exemplificaremos a seguir, de forma mais enfática, as situações que dão sentido à área como grandeza (conforme mencionado: comparação, medida, mudança de unidade e produção), assim como os invariantes operatórios, mais especificamente, “os teoremas em ação que podem ser entendidos como uma proposição considerada verdadeira pelo sujeito, porém pode ser falsa para o domínio da matemática” (VERGNAUD, 1996), pois esses elementos da TCC fundamentam o desenvolvimento do novo micromundo.

3.2.2 Situações que dão sentido à área como grandeza geométrica

Como explicitamos, um primeiro estudo das situações que dão sentido à área foi proposto por Baltar (1996), no âmbito de uma pesquisa realizada na França voltada para a elaboração e experimentação de uma engenharia didática com alunos de nível equivalente ao terceiro ciclo do ensino fundamental do Brasil (SILVA, 2016).

Baltar (1996) realizou um breve levantamento dos tipos de problemas sobre área, ao longo da história da matemática, nos resultados das pesquisas sobre a aprendizagem desse conceito e nas avaliações do desempenho de alunos do ensino fundamental no contexto francês. Esse levantamento permitiu à autora evidenciar uma variedade de situações concernentes a esse conceito. Assim, tomando por base simultaneamente as considerações históricas e sociais, matemáticas, psicológicas e didáticas, destaca que na aprendizagem do conceito de área devem ser levadas em conta as situações de: medida de área, comparação das áreas de duas superfícies dadas, produção de superfície de mesma área que uma superfície dada, a otimização⁴⁸ de área e da conservação de área por transformação.

No Brasil, esse estudo é ampliado por Ferreira (2010), que acrescenta a essa classificação a situação de mudança de unidade e organiza o seguinte quadro para então justificar cada uma delas:

⁴⁸A otimização da área de acordo com Ferreira (2010) são dadas as condições que envolvem todos os problemas do tipo “achar a maior área para um perímetro fixo”, por exemplo, dentro de um conjunto de superfícies.

Quadro 1- Classificação das situações que dão sentido a área

S I T U A Ç Õ E S	COMPARAÇÃO	ESTÁTICAS	Sem unidade de medida	
			Com unidade de medida	Não-convencional
				Convencional
		DINÂMICAS	Variação da área e do perímetro por deformação ou transformação geométrica	
			Otimização da área por invariância do perímetro e vice-versa	
	MEDIDA	EXATA	Com unidade de medida não-convencional	
			Com unidade de medida convencional	
		ENQUADRAMENTO	Aproximações	
	MUDANÇA DE UNIDADE		Com unidade de medida	Não-convencional
				Convencional
	PRODUÇÃO		Mesma área que a de uma figura dada	
			Área maior ou menor que a de uma figura dada	
			Com área dada	

Fonte: Ferreira (2010, p. 29)

Realizaremos a seguir uma explicação de cada uma dessas situações com base nos estudos de Baltar (1996), Bellemain (2000), Ferreira (2010) e Silva (2016), que norteiam essa parte da pesquisa. Explicitamos também a classificação dos possíveis procedimentos e identificação dos invariantes operatórios relacionados à área como grandeza unidimensional, que diz respeito à possibilidade de medir uma figura usando qualquer superfície unitária, assim como a realização de decomposição, recomposição, sobreposição, translação, rotação e reflexão em diferentes figuras para o trabalho com a noção de área, sem recorrer a um cálculo específico e a fórmulas das áreas, que neste caso, subjaz o aspecto bidimensional da área com a intervenção da grandeza comprimento.

3.2.2.1 Comparação

De acordo com Bellemain (2000), na classificação das situações de comparação, consideramos algumas variáveis didáticas, cujos valores diferentes possíveis no contexto do ensino fundamental conduzem a favorecer ou bloquear procedimentos de resolução, correspondendo a propriedades distintas do conceito e, portanto, a invariantes operatórios distintos.

Com relação às situações estáticas e dinâmicas do quadro 1, essa autora coloca que “as primeiras são aquelas em que, dadas duas ou mais superfícies, pede-se apenas para compará-las, neste caso, as superfícies não sofrem efeitos de movimento. As situações dinâmicas de comparação dizem respeito à conservação ou variação da área relacionada ao estudo dos efeitos de deformações e transformações geométricas” (BELLEMAIN, 2000, p.8).

Complementarmente, a autora revela uma segunda distinção fundamental que diz respeito a problemas de seriação e de comparação: “nos problemas de seriação (ordenar mais de duas superfícies do ponto de vista de suas áreas), a transitividade da relação de ordem é necessária, o que não ocorre na comparação de duas superfícies. A tarefa de seriação é, portanto, mais complexa que a comparação das áreas de duas superfícies”. (BELLEMAIN, 2000, p. 8).

Ainda para essa autora, outras variáveis importantes são a natureza das superfícies a comparar (superfícies quaisquer, figuras geométricas usuais, retângulos, paralelogramos, ...) e o suporte ou tipo de papel sobre o qual são desenhadas as superfícies (papel branco, quadriculado, pontilhado, ...). As estratégias de comparação são significativamente diferentes segundo os diversos valores de cada uma destas variáveis, como veremos através da explicitação dos procedimentos de resolução possíveis para essa situação (BELLEMAIN, 2000, p. 9).

Com relação aos procedimentos de resolução, Bellemain (2000) chama-nos a atenção para a distinção a ser feita entre os processos numéricos e não numéricos, uma vez que nos procedimentos numéricos há uma situação de medida implícita: o aluno mede as áreas para comparar as medidas obtidas e deduz a ordem das áreas da ordem dos números. Nos procedimentos de comparação numérica estão implícitos os invariantes: “dada uma unidade de área, a superfície cuja medida é maior tem maior área”, “a medida menor é a de menor área” e “duas superfícies de mesma medida têm mesma área”. A atividade a seguir ilustra esse tipo de situação.

Figura 16- Comparação de área numérica

1-Observe o conjunto de figuras abaixo:

Agora, responda cada uma das perguntas:

a) Entre as figuras, qual ou quais possuem maior área? _____
 Explique como você fez: _____

b) Entre as figuras, qual ou quais possuem menor área? _____
 Explique como você fez: _____

c) Entre as figuras, há figuras de mesma área? _____
 Quais? _____

Fonte: da pesquisa

Para Bellemain (2000, p. 9), a utilização de procedimentos deste tipo pode favorecer a concepção segundo a qual a área é um número, seja ele o número de quadradinhos necessários para cobrir a superfície, ou o número obtido usando uma fórmula. Mas ela pode também contribuir na passagem de concepções geométricas à construção da área enquanto grandeza, na medida em que superfícies de mesma medida podem ter mesma área, mesmo tendo formas distintas.

Os procedimentos não numéricos estão relacionados à área enquanto grandeza unidimensional quando as áreas de duas superfícies podem ser comparadas sem a intervenção de outras grandezas, como por exemplo, a grandeza comprimento (FERREIRA, 2010) em que não estão nítidos os procedimentos de resolução que recaem diretamente ao aspecto numérico, como explicitado na atividade apresentada na figura 16. Com relação a essa situação, colocamos em evidência algumas classes de procedimentos de resolução:

Inclusão e sobreposição: Sobrepondo-se uma superfície S_1 por deslocamento em S_2 essa por sua vez, estando contida totalmente no interior de S_2 , se dirá que a área de S_1 é menor que a área de S_2 . Se as áreas de S_1 e S_2 coincidirem por sobreposição, após a aplicação de transformações isométricas do plano, diremos que as duas superfícies têm mesma área.

Equidecomposição: este procedimento consiste na decomposição das superfícies e comparação dos pedaços obtidos.

Decomposição e recomposição (corte e colagem): esse procedimento consiste em decompor uma determinada superfície S em duas superfícies distintas S_1 e S_2 , e montar uma figura S' por meio da recomposição de S_1 e S_2 sem perda nem

sobreposição. Nesse caso, S' terá mesma área que S . Essa questão também se estende à decomposição de S em um número finito de partes (SILVA, 2016, p. 35)

Os teoremas em ação subjacentes à **inclusão e sobreposição** correspondem à invariância da área por isometrias e à aditividade das áreas. Quanto à equidecomposição, temos que “superfícies equidecompostas têm mesma área” e decomposição e recomposição “o corte-colagem sem sobreposição e sem perda conserva a área”. De acordo com Bellemain (2000), esse tipo de procedimento tem um papel central na construção da área enquanto grandeza, pois não é necessária a intervenção dos números para comparar por corte e colagem. Além disso, superfícies de formas diferentes podem ter mesma área.

Ferreira (2010), em sua dissertação de mestrado, apresenta uma ampliação na classe de situações dinâmicas de comparação relacionadas a variações de área e de perímetro em que é possível identificar duas subclasses: “as situações que estão relacionadas com o estudo das variações de área e do perímetro ao longo de deformações e de transformações geométricas, e as que estão relacionadas com a otimização de área dentro de algumas limitações, como por exemplo, a invariância do perímetro” (FERREIRA, 2010, p. 31). Para essa autora, com relação às deformações, temos o seguinte:

envolvem atividades sobre a área e o perímetro de um paralelogramo, situação central nas construções dos invariantes, que permitem conservar a área e o perímetro das superfícies usuais, e em particular, contribuem para a aquisição das fórmulas e a apropriação da dissociação das variações das áreas e dos perímetros, no caso particular dos paralelogramos. A otimização da área em que são dadas as condições, envolve todos os problemas do tipo “achar a maior área para um perímetro fixo”, por exemplo, dentro de um conjunto de superfícies (FERREIRA, 2010, p. 31).

Em nosso estudo, não damos ênfase ao emprego das fórmulas das áreas das figuras, pois a ideia é que o professor, por meio de diversos recursos que serão oferecidos no micromundo, possa criar situações que proporcionem ao aluno construir o conceito de área como uma grandeza e não simplesmente decorar as fórmulas para o cálculo da área das figuras planas que pode conduzir, se muito antecipada, a uma concepção numérica da área.

3.2.2.2 Situação de medida

Este tipo de situação de medida de área privilegia a articulação entre o quadro das grandezas e o quadro numérico. De acordo com Bellemain e Lima (2002), nessas situações destacam-se o quadro numérico e a passagem da grandeza ao número por meio da escolha de uma unidade. O resultado esperado numa situação deste tipo é um número seguido de uma unidade.

Ratificamos Ferreira (2010, p. 32) ao dizer que a medida da área de uma superfície pode ser expressa por uma medida exata ou por um intervalo (medida aproximada por enquadramento). Nas situações de enquadramento, a área de uma superfície de borda irregular ou arredondada será aproximada, nas de medida exata de área são aquelas em que, para a escolha de uma unidade, é atribuído um número à área da superfície.

Com relação aos procedimentos de resolução, que diz respeito à medida da área como grandeza unidimensional, têm-se os seguintes:

Medida direta em que um objeto associa um número, que será sua medida, ou pelo menos uma medida aproximada.

Ladrilhamento: uma superfície S é ladrilhável com uma superfície S' se é possível recobrir S com um número inteiro “ n ” de superfícies S' , sem deixar buracos e sem sobreposição, onde S' será a superfície unitária.

Adição e subtração de áreas: uma superfície S é decomposta em duas superfícies S_1 e S_2 , ou em um número finito de partes $S_1, S_2, \dots, S_n$ disjuntos dois a dois ($S = S_1 \cup S_2$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$) (FERREIRA, 2010, p 32).

3.2.2.3 Situação de mudança de unidade

De acordo com Silva (2016), as situações de mudança de unidade oferecem condições para que a noção de área como grandeza geométrica possa ser construída distinguindo a área do número e controlando a correspondência entre o quadro geométrico e o numérico. Esse tipo de situação tem como procedimento representar uma mesma área com unidades de medidas diferentes, ou seja, a uma mesma superfície podem corresponder números diferentes segundo uma unidade de medida escolhida, mas a área não muda. (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989). Para Duarte (2002), esse tipo de situação em que se promove a mudança de unidade para medir a área de uma mesma figura pode evidenciar a invariância da área.

Ainda para Silva (2016), a situação de mudança de unidade foi adotada no trabalho de Ferreira (2010) como ampliação dos estudos de Baltar (1996). O objetivo dessa autora era introduzir esse tipo de situação separadamente com o uso de diferentes superfícies para medir as áreas de determinadas figuras, antecedendo a introdução das unidades de medidas convencionais, para que os alunos compreendam a construção do par (n° , unidade de medida) independente das transformações operatórias de conversão de unidades.

3.2.2.4 Situação de produção de superfície

De acordo com Silva (2016), esse tipo de situação é importante para a dissociação e articulação do quadro das grandezas e do quadro geométrico, porque pode conduzir o aluno a produzir superfícies de formas variadas tendo todas as mesmas áreas, ou área menor, maior ou igual à área de uma superfície dada.

Podemos então destacar alguns procedimentos com relação a esse tipo de situação. O primeiro diz respeito à produção de superfície de uma mesma área que uma superfície dada:

A contagem das unidades de área: este procedimento está associado aos procedimentos do tipo ladrilhamento das situações de medida de área quando, escolhida uma unidade de medida de área, duas superfícies que possuem mesma medida têm mesma área. A escolha de determinados valores para as variáveis de situação como, a forma da superfície dada, a forma da unidade de medida, e aquela da superfície que será produzida, pode ser favorável ou bloquear a resolução do aluno.

“Corte – colagem”: se uma superfície S_1 é obtida a partir de uma superfície S por “corte – colagem”, sem perda de partes e que estas não estão sobrepostas, se dirá que S e S_1 têm a mesma área. Este é um procedimento geométrico, sem a intervenção do quadro numérico (FERREIRA, 2010, p. 33).

Os procedimentos explicitados anteriormente estão relacionados à área enquanto grandeza unidimensional.

O segundo está relacionado a situações em que se pede para se produzir (construir) uma superfície de área maior ou menor que uma superfície dada. Os procedimentos para essas situações podem ser subdivididos em duas categorias: geométricos e numéricos.

Com relação aos geométricos, temos:

Construir uma superfície no interior (ou no exterior) da superfície inicial: este procedimento se justifica pela aditividade das áreas e porque a área é uma função positiva, em que uma superfície incluída em outra tem uma área menor. Para colocar este procedimento em prática, em geral a forma da superfície é mantida, sendo uma característica da concepção geométrica.

Recortar (ou acrescentar) um pedaço (uma parte) da superfície inicial: esse procedimento também se justifica pela aditividade das áreas, também estando muito associado à forma da superfície, o que favorece a distinção entre área e perímetro (FERREIRA, 2010, p. 34).

Quanto aos procedimentos numéricos, temos que: utiliza a medida da área de uma superfície inicial obtida pela contagem de quadradinhos ou outra unidade de medida, em seguida se produz outra superfície de área maior ou menor que a área dada.

O terceiro é a produção de superfície de área dada. Para Ferreira (2010, p. 34-35), nesta situação subjaz uma combinação de procedimentos, ou seja, “O aluno pode produzir uma superfície inicial, para a contagem das unidades, e depois produzir superfícies de mesma área que a superfície produzida inicialmente, por corte – colagem”. Ainda para essa autora, esse tipo de situação é importante para a dissociação do quadro das grandezas e do

geométrico, porque o aluno é levado a produzir superfícies de formas variadas tendo todas as mesmas áreas.

Podemos observar nitidamente no estudo referente às situações que dão sentido à área apresentado nesta seção, a presença da abordagem de área em Euclides, Hilbert e Lebesgue exploradas na dimensão epistemológica. Nas situações de comparação estáticas por exemplo, sem unidade de medida, em que os procedimentos de decomposição e recomposição de figuras estão presentes, a noção de equivalência de área em Euclides vem à tona.

Nas situações de medida, sejam elas exatas com unidade de medidas convencional ou não convencional ou mesmo por enquadramento (aproximações) ou nas situações de mudança de unidades temos implicitamente a abordagem de área em Lebesgue que leva em conta o trabalho com o número (medida). Nas situações de produção de superfície de mesma área que a de uma figura dada, na qual subjaz a equidecomposição, temos as ideias de Hilbert presentes em tais procedimentos.

Ressaltamos que no desenvolvimento de um micromundo, não precisamos implementar situações como as apresentadas nesta seção, uma vez que o foco está direcionado aos objetos-relações-operações e interface. Todavia, acreditamos que tais situações podem ser esclarecedoras para que o programador (engenheiro de software) compreenda qual tipo de arquitetura utilizará para o desenvolvimento deste novo micromundo, cujo foco é oferecer condições para serem explorados os conceitos de área e perímetro.

Na próxima seção, apresentaremos uma breve revisão sobre o uso de recursos para o ensino de área e perímetro em que poderão ser observadas construções de diferentes tarefas relacionadas à abordagem de área como uma grandeza.

3.3 Os Recursos no Ensino de Área e Perímetro

Nesta seção, apresentaremos uma breve revisão de literatura realizada a partir de dissertações publicadas no BDTD (Banco Digital de Teses e Dissertações) e de alguns artigos publicados em anais de eventos científicos que tratam do ensino aprendizagem de área e perímetro. Focaremos mais especificamente nos recursos materiais que vêm sendo mais utilizados pelos autores, ao longo dos anos, para o trabalho com esses conceitos na educação básica.

Para fundamentar a ideia de “recursos para o ensino da matemática”, nos filiamos na conceptualização de Jillian Beryl Adler (2000) a qual conceitua um “recurso” como sendo

tudo que “realimenta, reconfigura e reabastece” (*re-source*) a atividade do professor (SILVA, 2018).

3.3.1 *Conceptualização de recursos*

Os trabalhos de Adler (2000) propõem uma ampla noção de recursos que surge pela necessidade de mostrar aos professores das escolas da África do Sul pós-*apartheid*, “encaminhamentos para melhoria das práticas pedagógicas nas escolas, principalmente de zonas rurais, para superar as consequências catastróficas das antigas políticas oficiais de discriminação” (MONTEIRO, 2016, p. 4). Ainda esse autor, a respeito dos estudos de Adler, coloca que :

Naquela época de redemocratização e reconstrução nacional, o país enfrentava enormes desafios para melhorar a educação da maioria da população, predominantemente negra, pobre e que moravam em regiões rurais. As escolas rurais tinham condições paupérrimas, muitas sem água ou eletricidade e, além disso, eram frequentadas por uma grande diversidade de etnias que falavam diferentes línguas (MONTEIRO, 2016, p. 4).

Muitos professores então, nessas condições, quando indagados sobre a utilização de recursos, relatavam que as dificuldades educacionais eram inúmeras e isso se dava também pela ausência deles⁴⁹. Sobre essa afirmação, Adler (2000) apresenta a seguinte reflexão: não é simplesmente a presença de recursos que vai permitir uma grande mudança no ensinar e aprender matemática, e que há escolas em que, mesmo sem possuir tantos recursos “materiais”, apresentam resultados bem sucedidos. Essa autora ainda direciona seu olhar para a formação do professor de matemática propondo que ela precisa focar mais atenção nos recursos, no que eles são, e seu funcionamento como uma extensão do professor na prática da matemática escolar.

Adler (2000) considera o uso do recurso como **substantivo** e como **verbo**, ou seja, tanto como **objeto (artefato/estático)** quanto como **ação (utilização pelo professor do artefato)**. Tais recursos podem ser os materiais utilizados para ensinar matemática, as ações utilizadas durante o processo de ensino e aprendizagem, ou seja, todos os fatores que podem auxiliar o professor em sua atividade docente. Assim, para Adler (2000, p. 210), “os recursos para a matemática escolar se estendem além dos diferentes materiais básicos que são utilizados por muitos professores. Ela coloca que existem ainda os recursos humanos,

⁴⁹Still, across contexts and irrespective of their school’s resources, many mathematics teachers are heard blaming or explaining their educational difficulties on a lack of resources (ADLER, 2000, p. 2).

culturais e sociais que são relevantes e devem ser levados em conta no processo de ensinar e aprender matemática.

A respeito da prática matemática escolar, Adler (2000) faz a categorização dos recursos educacionais em: recursos humanos; recursos materiais; recursos culturais. Ela organiza a categoria da seguinte forma:

- **Recursos humanos:** as pessoas envolvidas (professor e alunos), conhecimento e o processo (interações).
- **Recursos materiais:** distinguem-se entre tecnologias (quadro, computadores), materiais de matemática escolar (livro didático, geoplano), objetos matemáticos (um teorema, um plano cartesiano) e objetos do cotidiano (dinheiro, régua, calculadoras).
- **Recursos culturais:** a linguagem (língua falada e escrita, gestos) e o tempo (tempo de aula, horário, calendário escolar).

Para analisar as pesquisas realizadas no Brasil desta seção, focamos então na conceptualização de recurso de Adler (2000), mais especificamente os recursos materiais que são utilizados para o ensino e aprendizagem da matemática escolar e estão relacionados ao conceito de área e perímetro.

3.3.2 Diferentes recursos no ensino e aprendizagem de área e perímetro⁵⁰

Pesquisas em educação matemática realizadas no Brasil já há algum tempo têm se debruçado sobre as potencialidades do uso de diferentes recursos informáticos⁵¹ e não informáticos, como forma de aprimorar o ensino e a aprendizagem de área e perímetro de figuras planas, outras usam recursos para diagnosticar as dificuldades dos alunos com relação a esses conceitos (DUARTE, 2002; FACCO, 2003; PESSOA, 2010). Há ainda o estudo de Santana (2006), que mostra a insuficiência de recursos em livros didáticos como um fator negativo ao trabalho do professor para o ensino de área e perímetro.

Dos recursos encontrados nesses estudos, temos o Tangram (DUARTE, 2002; FACCO, 2003; SANTANA, 2006), as malhas quadriculadas (FACCO, 2003; SANTANA, 2006; PESSOA, 2010) e os poliminós (SANTANA, 2006). Essas pesquisas utilizaram a abordagem de área como grandeza, explicitada no capítulo anterior, e serão apresentadas a seguir.

⁵⁰As pesquisas analisadas nesta subseção foram escolhidas pelo fato dos autores terem utilizado em seus estudos a abordagem de área como grandeza.

⁵¹ Na dimensão informática realizamos um estudo da arte sobre o uso de recursos digitais, por exemplo, software de geometria dinâmica e suas potencialidades e limitações para o ensino e aprendizagem de área e/ou perímetro.

Duarte (2002) realizou uma investigação exploratória, a partir de um estudo de caso com um grupo de 73 alunos da 5ª série do ensino fundamental anos finais (atualmente, 6º ano), de uma escola da rede pública estadual. Desses alunos, foram selecionadas quatro duplas. Tendo como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais, o autor elencou como objetivo diagnosticar noções, procedimentos, invariantes operatórios (teoremas em ação e conceitos em ação) que seriam mobilizados por esses sujeitos na resolução de um conjunto de atividades relacionadas às situações que dão sentido a áreas desenvolvidas por Baltar (1996), a saber: comparação de área, medida de área e produção de superfície.

Nessas situações pesquisadas, o autor explorou dois tipos de abordagem: a primeira, centrada em atividades abordando objetos dos quadros geométricos e das grandezas, sem numerização e a segunda, apresentando atividades envolvendo objetos dos quadros numérico, geométrico e das grandezas com unidade de medidas não convencionais. Para responder as atividades propostas, o pesquisador entregou alguns materiais para os alunos, dentre eles, “malhas quadriculadas e triangulares” e o “tangram”.

Na atividade 04 da 2ª seção, intitulada “trabalhando com o tangram”, o objetivo foi investigar a ação do aluno em uma situação em que deveria perceber a comparação das áreas por sobreposição, decomposição/recomposição, pela mudança de unidade de área e as relações entre as áreas e das peças causadas por essa mudança. Foi observado que os alunos não tiveram dificuldades pelo fato de poderem manusear diferentes peças desse quebra-cabeça de forma dinâmica, mostrando compreender que figuras com formas diferentes podem ter a mesma área e que uma mesma figura pode possuir medidas diferentes a depender da unidade de medida utilizada, mas que a área permanece invariável.

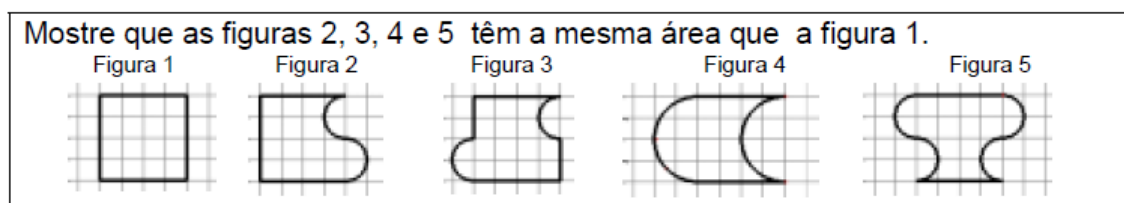
Com relação ao uso das malhas, ora é possível observar que as figuras construídas sobre elas são pintadas (em que não é possível verificar de forma direta os quadradinhos que a compõem), ora as figuras são desenhadas e os quadrados que a compõem destacam-se na malha. Sobre essas duas variáveis controladas pelo autor, pode-se observar que, particularmente, o contexto de papel quadriculado ou triangular parece ser um ambiente que favorece a resolução de problemas envolvendo medida, uma vez que os procedimentos adotados nas atividades em papel quadriculado ou triangulado foi quase sempre o esperado, ou seja, a contagem de unidades para em seguida estabelecer as áreas.

Assim como Duarte (2002), que utilizou o tangram e as malhas como meio para diagnosticar dificuldades na aprendizagem de área, Facco (2003) também utilizou esses recursos em seu estudo e a abordagem de área como uma grandeza. Como suporte teórico, essa autora utilizou a dialética ferramenta-objeto e mudanças de quadro Régine Douady

(1986) e a teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1993). Tendo como objetivo os estudos dos fenômenos que interferem no processo de ensino aprendizagem do conceito de área no ensino fundamental, apresentou uma proposta para o ensino do conceito de área por meio de uma sequência didática envolvendo a decomposição e recomposição de figuras planas. Os sujeitos de sua pesquisa foram alunos e professores do ensino fundamental.

Em uma das atividades dessa sequência, a autora utilizou tanto malhas quadriculadas como triangulares. Segundo essa autora, a mudança de malha é uma escolha didática que intenciona a identificação de diferentes unidades de medida de área. E, quando essas unidades estão destacadas na malha, os alunos tendem a contar os quadradinhos ou triângulos que expressarão a medida da área das figuras. Na atividade das malhas, diferente de Duarte (2002) que utiliza apenas figuras poligonais no estudo das áreas, Facco (2003) traz figuras não poligonais como apresentamos na ilustração abaixo:

Figura 17 – Figuras poligonais e não poligonais nas malhas



Fonte: Facco (2003, p. 65)

Ela ainda coloca que essa atividade na malha quadriculada poderia ajudar os alunos a responderem, utilizando a técnica de compensação (composição e decomposição) ou a contagem para justificarem que existem figuras com mesma área, mas com formas diferentes. Como previsto, 87,5% dos alunos responderam utilizando o método da compensação (decomposição e recomposição) e 22,5% dos alunos contaram a quantidade de quadradinhos para responderem essa atividade.

Com relação ao uso do tangram, Facco (2003) realizou atividades que permitiram aos alunos em sua pesquisa construir (montarem) diferentes figuras em posições diversas com as peças desse jogo. Essa possibilidade ofereceu condições para os alunos perceberem a invariância da área por isometrias, que os formatos das figuras podem mudar e a área se manter invariável, como também a composição de diferentes figuras com as mesmas peças do tangram unidas pela justaposição de seus lados podem ter o perímetro reduzido ou aumentado.

Outro resultado que pode ser identificado nessa atividade diz respeito à composição de duas figuras, ou seja, a medida da área da figura montada é a soma das medidas das áreas

das duas figuras que a compõem (peças do tangram) e que o perímetro é a soma das medidas dos lados da figura final. Facco (2003), concluindo sua pesquisa, coloca que a proposta para o ensino e aprendizagem de área desenvolvida em seu estudo é satisfatória e pode ser confirmada por meio da aplicação da sequência de atividades realizadas com o uso de diferentes recursos, como os que foram apresentados.

Pessoa (2010), por sua vez, utilizou em sua pesquisa apenas as malhas quadriculadas, realizando, por meio delas, um estudo diagnóstico com 100 alunos do 6º ano do ensino fundamental. Assim como em Duarte (2002), duas variáveis são levadas em conta nas atividades de sua pesquisa: ora as figuras são dispostas nas malhas e não é possível visualizar os quadradinhos que a compõem, ora é possível identificá-los. O foco do seu estudo é com figuras poligonais na malha, mas assim como Facco (2003), algumas delas possuem superfícies arredondadas e, por vezes, não se encontram com seus lados apoiados nos lados dos quadradinhos que compõem a malha.

Pessoa (2010) queria identificar se o uso da malha quadriculada favorecia o procedimento de contar quadradinhos no cálculo das áreas e se esse procedimento prevaleceria no cálculo das áreas de triângulos, e de uma figura não poligonal, assim como se a malha fosse ou não visível. Como resultados, essa autora coloca que o uso da malha propiciou a operação de medida da área por meio da contagem de quadradinhos, ou seja, medir a área neste contexto corresponde a determinar quantas vezes o quadradinho cabe dentro da figura. Ainda para ela, neste processo realizam-se duas operações distintas, uma geométrica e outra numérica. “No caso do cálculo da área na malha quadriculada, a operação geométrica corresponde a ladrilhar a figura e a numérica a contar a quantidade de quadradinhos” (PESSOA, 2010, p. 106). Ao tratar da contribuição das malhas em sua pesquisa, ela destaca que:

- a possibilidade de aceitar que a medida da área pode ser um valor fracionário. Isso significa ampliar o conjunto imagem da função-medida, dos naturais para os racionais positivos;
- possibilita a compreensão da área enquanto grandeza através do procedimento de decomposição e composição, evidencia a invariância da área por equidecomponibilidade (se duas superfícies podem ser decompostas em um número finito de partes, duas a duas congruentes, estas superfícies possuem a mesma área);
- a escolha de uma superfície unitária (área do quadradinho), a partir da qual a medição da área limita-se a verificar quantas vezes a superfície unitária cabe na figura; (ideia de área unidimensional, ou seja, a medida da área da superfície é obtida pela quantidade de quadradinhos que podem ser obtidos (formados) a partir da superfície da figura dada);
- a contagem de quadradinhos ajuda na interpretação e ideia da dedução de fórmulas; possibilita o cálculo de figuras sem necessidade de dados numéricos; (PESSOA, 2010, p. 109-110).

Essa autora conclui seu estudo afirmando que o uso da malha quadriculada pode contribuir com o ensino do cálculo de área de figuras planas.

Diferente das pesquisas anteriores, Santana (2006) realizou um estudo em livros didáticos sobre o uso de recursos no qual indica contribuições possíveis da utilização do tangram, das malhas e dos poliminós na construção do conceito de área como grandeza geométrica, mas também mostra que esses recursos são pouco explorados nos livros didáticos pesquisados.

Com relação ao uso da malha, essa autora ressalta que:

Na comparação de áreas, através da medida de área, as malhas são recursos didáticos que facilitam a articulação entre o quadro numérico e o quadro das grandezas; ao se escolher a superfície unitária, favorece a contagem de ladrilhos que compõem a figura plana representada. A mudança de unidade de área provoca a mudança de medida de área, mas há invariância de área (SANTANA, 2006, p. 37).

Santana (2006) afirma ainda que o tangram e os poliminós podem favorecer as questões da mudança de unidade e do uso de diferentes superfícies unitárias associadas a uma mesma unidade, contribuindo para estabelecer a articulação entre o quadro numérico e o quadro das grandezas e da distinção entre figura e área:

Destacamos, como um importante papel do tangram e poliminós, a manipulação das peças na construção de diferentes figuras planas, servindo de suporte para auxiliar na dissociação entre área e figura. Nas representações de figuras planas nas malhas quadrada, triangular ou retangular, justamente ao se conservar a figura, vê-se esse recurso como um auxiliar à compreensão das quantidades de quadrados, triângulos ou retângulos, que essa figura plana possui. Não é a manipulação dos objetos nem a construção de figuras em malhas que podem garantir a aprendizagem, mas, essas representações, possivelmente, contribuem para facilitar a reflexão e a compreensão sobre os aspectos geométricos e numéricos de área, ou seja, a construção de área como grandeza geométrica (SANTANA, 2006, p. 61).

Santana (2006) enfatiza em seu estudo que a exploração de recursos nos livros didáticos é incipiente e há uma necessidade do trabalho acentuado com o uso de tangram, malhas quadriculadas e poliminós, por exemplo. Entretanto, apenas as malhas quadriculadas aparecem com frequência nas atividades propostas nos livros didáticos analisados por essa autora.

Nas pesquisas apresentadas, o recurso é tido como um meio para diagnosticar e por vezes intervir no ensino aprendizagem de área e perímetro. O estudo do recurso em si, na sua totalidade não foi encontrado em nenhuma delas, mas são apresentados de forma que pudemos identificar sua potencialidade para o ensino e aprendizagem de área de figuras planas.

Entendemos então que as malhas quadriculadas e triangulares, o tangram e os polígonos produzidos e utilizados em papel, borracha, plástico, madeira (ambientes não digitais) mostraram-se pertinentes para o ensino de área e perímetro de figuras planas. Pretendemos, então, implementar tais recursos em um micromundo e verificar suas possíveis potencialidades para o estudo desses conceitos.

3.4 Dimensão Informática

Nesta seção, apresentamos uma reflexão sobre o uso de diferentes recursos tecnológicos informáticos no processo de ensino e aprendizagem da matemática e o conhecimento, em particular do conceito de área e perímetro. Para isso, realizamos análises em diferentes software, apontando os aportes e limitações para o estudo desses conceitos, buscando também dar visibilidade ao que vem sendo produzido para explorar os conceitos de área e/ou perímetro de figuras geométricas planas.

3.4.1 Os *software* educacionais

Não é de hoje que se discute como os *software* educacionais podem contribuir com o processo de ensino e aprendizagem. Eles oferecem condições para a construção do conhecimento, em particular do conhecimento matemático. Essa temática parece não esgotar, pois pesquisas continuam sendo desenvolvidas tratando de questões cada vez mais específicas (BORBA, 2010). De acordo com Kusiak et al. (2012), é muito significativo o número de *software* educacionais gratuitos que podem ser encontrados em rede, porém é fundamental que se avalie, sistematicamente, a qualidade e a funcionalidade destes para cada contexto, considerando se eles contribuem para a aprendizagem do alunado.

Sendo assim, cabe ao professor a escolha do aplicativo adequado, baseado no conteúdo matemático que deseja trabalhar e nos objetivos de aprendizagem almejados. Ainda para essa autora, os recursos tecnológicos permitem que o professor de matemática tenha ousadia no preparo de suas aulas, possibilitando-o diversificar e inovar, saindo da rotina de aulas tradicionais. Com isso, pode auxiliar na aprendizagem do aluno e até mesmo provocar nele o interesse pelo estudo.

Os Parâmetros Curriculares para os anos iniciais do ensino fundamental (BRASIL, 1997) também compactuam com tais preceitos e, há algum tempo, destacam a importância do uso e da escolha de *software* educacionais para o ensino.

Quanto aos software educacionais é fundamental que o professor aprenda a escolhê-los em função dos objetivos que pretende atingir e de sua própria concepção de conhecimento e de aprendizagem, distinguindo os que se prestam mais a um trabalho dirigido para testar conhecimentos dos que procuram levar o aluno a interagir com o programa de forma a construir conhecimento (BRASIL, 1997, p. 31).

Existem vários tipos de *software* que correspondem aos projetos pedagógicos dos conceptores e também a momentos do ensino, dentre eles: tutoriais, processador de texto, multimídia, exercício e prática, jogos eletrônicos, simulações, entre outros. De acordo com Bellemain (2002), há uma diversidade de *software* educativos disponíveis no mercado associados a vários conteúdos matemáticos que são frutos da combinação de diferentes elementos, como por exemplo, da aplicação de um certo modelo de ensino e aprendizagem; da concretização de um certo projeto didático do autor; da escolha do tipo de situação na qual o *software* deve intervir e distinguem-se de acordo com o conteúdo que eles abordam.

Com o objetivo de organizar a integração dos vários tipos de *software* educativos que correspondem aos modelos de aprendizagem behaviorista, instrucionista e construtivista, Bellemain (2002, p. 53) elaborou o seguinte esquema:

Figura 18- Esquema da tipologia de software



Fonte: Bellemain (2002, p. 53)

Com relação à explicação desse esquema, Bellemain (2002) justifica que o eixo vermelho corresponde à visão da educação que fundamenta cada tipo de *software*, e por consequência a maneira como ele pode ser integrado no sistema didático. Complementa ainda, expondo que o esquema da figura 18 aborda as contribuições de cada tipo de *software* à aprendizagem e as preocupações que eles procuram atender, a evolução histórica dos *software* educativos (de fora para dentro do esquema) e as aproximações entre as diversas orientações do desenvolvimento de *software* educativos.

Organizamos no quadro abaixo a tipologia de *software* segundo Bellemain (2002, p. 53) que correspondem aos três modelos de aprendizagem supracitados.

Quadro 2- Tipologia de software

Modelos de aprendizagem	Tipo de software	Descrição
Behaviorista	Questão-resposta	✓ Os princípios de desenvolvimento desses ambientes baseiam-se no recorte do saber a ensinar em pequenos passos predeterminados. ✓ Tentam resolver a questão da aprendizagem com sistema de treinamento, de aprendizagem por tentativa/erro (aprender é associar).
Instrucionista	Sistemas multimídias de apresentação de aulas como os sistemas de autoria de aulas multimídias(courseware).	✓ Consistem em geral na automatização, pelo computador, das formas tradicionais de ensino. ✓ A questão da aprendizagem é considerada como uma questão de transmissão de informação. ✓ O computador contribui permitindo uma organização não linear da informação (utilização de hipertextos) e a criação de múltiplas formas de apresentação dos conhecimentos, incluindo animações.
Construtivista	Micromundos e simulações	✓ Criam, no âmbito computacional, condições e ferramentas para expressão e resoluções de problemas.
Associação de dois ou dos três modelos de aprendizagem	Tutores inteligentes	✓ Acompanham de forma inteligente a manipulação e construção de conhecimentos do sujeito com micromundos e simulação, para guiar o sujeito na exploração de conteúdos e para construir um percurso dentro de uma tipologia de situações que se adapte ao sujeito e suas respostas.

Fonte: adaptado de Bellemain (2002).

De acordo com Bellemain (2002), os jogos educativos não entram nesse esquema em virtude de poderem ser classificados como um micromundo, um tutor, um questionário, etc. Dentre os *software* educativos apresentados no quadro 2, que são utilizados em

diferentes etapas da educação básica no Brasil para trabalhar conceitos matemáticos (BALDINI, 2004; GOBBI, 2012; SILVA, 2014, 2015, 2016, 2017), nos interessam os “micromundos”, em especial aqueles que implementam a geometria dinâmica.

3.4.1.1 *Micromundos*

Bellemain (2002) ancorado nos estudos de Noss e Hoyles (1996), relata que o termo micromundo remota ao início dos anos 70, na comunidade de Inteligência Artificial, tendo como forte referência os trabalhos de Minsky e Seymour Papert. Ainda para esse autor, nessa comunidade, o termo foi inicialmente usado para definir um sistema que permite simular ou reproduzir um domínio do mundo real, e que tem como objetivo abordar e resolver uma classe de problemas. Ademais, “a associação da noção de micromundo à resolução de problemas permanece no mundo da informática educativa e da educação matemática até os dias atuais” (BELLEMAIN, 2002, p. 54).

O primeiro exemplo de um micromundo foi o Logo de Papert que gerou uma grande quantidade de pesquisas sobre a construção de significados geométricos das crianças (LABORDE et al., 2006). Nesse micromundo, Papert associa uma tartaruga ao computador com o objetivo de ensinar aos alunos conceitos de geometria a partir da programação dos deslocamentos da tartaruga sobre o computador.

A programação conduz os alunos a explicitar e organizar os conhecimentos e favorece o desenvolvimento cognitivo (BELLEMAIN, 2002). Nele, a criança pode usar ferramentas simples para construir figuras geométricas e explorar suas propriedades por meio de uma linguagem de programação que permite a criação de diferentes comandos para construí-las e manuseá-las.

Por volta de 1986, as interfaces gráficas começaram a ser exploradas como forma de favorecer a expressão dos conhecimentos dos alunos. São introduzidas a elas, novos modos de manipulação de objetos formais a partir de diferentes representações (BELLEMAIN, F., 2000).

Hoje, o micromundo não é mais visto como um ambiente de expressão e exploração de concepções em função das características de uma linguagem de programação, como no caso da the LOGO turtle de Papert. Ele é um ambiente que favorece a interação do sujeito com conhecimento através de várias interfaces, como por exemplo: realidade virtual, lápis, tátil, mouse com efeito retroativo, entre outras.

Bellemain (2002, p. 59) explicita em seu estudo sobre o “Paradigma Micromundo” que segundo Balacheff (1999), um micromundo é constituído de:

- (i) um sistema formal no sentido matemático, seja um conjunto de objetos primitivos, um conjunto de operações elementares e um conjunto de regras exprimindo como as operações podem ser executadas e associadas;
- (ii) um sistema fenomenal que determina os comportamentos na interface em relação com os objetos do sistema formal e as operações sobre esses objetos. Esse sistema modeliza o tipo de *feedback* resultante das ações e decisões do usuário.

Bellemain (2002) complementa a definição supracitada caracterizando as possibilidades das ações dos sujeitos da seguinte forma: micromundo trata-se de sistema de aquisição que determina as ações possíveis do usuário. Além dos comandos e aquisição de dados, esse sistema pode igualmente modelizar a interpretação das intenções do usuário em função do contexto dessas ações.

Para Bellemain (2002, p. 59), Ballacheff considera que o micromundo deve permitir construir objetos complexos ou processos complexos em novos objetos e novos operadores. Para ilustrar o sistema formal e o sistema fenomenal explicitado anteriormente, Bellemain (2002) apresenta a seguinte ilustração:

Figura 19-Composição de um micromundo



Fonte: (BELLEMAIN, 2002, p. 58)

O sistema fenomenal fornece representações perceptíveis sobre objetos e relações do sistema formal. Esse, por sua vez, produz *feedback* que são manifestações perceptíveis pelo sujeito dos resultados das operações sobre os objetos do sistema formal. Portanto, manifestações significativas das propriedades desses objetos (ibidem, p. 59). Ou seja, o sistema formal se liga a uma descrição formal dos objetos-relações-operações. No caso de

software, em geral, o formalismo é representado por estruturas internas (numéricas e com aproximações, mas existem possibilidades, com limites, de cálculo chamado de formal), a representação dessas estruturas internas na tela (e eventuais outras interfaces) seria o sistema fenomenal dando informações sobre os objetos-relações-operações internos e sobre as manipulações dos mesmos. O sistema de captura seria caracterizado pela interpretação em objetos-relações-operações internos das manipulação na interface.

Diante desse contexto, entendemos que micromundos matemáticos são “sistemas compostos por objetos, relações e operadores que transformam objetos e relações, podendo ser expandidos pela criação de novos objetos, relações e operadores” (BELLEMAIN, 2002). Ou seja, fornecem um sistema que permite expressar e resolver um conjunto de problemas.

Para Bellemain (2002, p. 55):

De um ponto de vista construtivista, a resolução de problemas e o desenvolvimento conceitual são fortemente interligados. A resolução de problemas tem um papel central na evolução dos saberes e na construção de conhecimentos pelo sujeito e o micromundo contribui para o desenvolvimento conceitual por meio de seus aportes à resolução de problemas. Na verdade, de uma forma geral, o micromundo contribui para a aprendizagem, permitindo as manipulações pelo sujeito dos objetos e relações através dos operadores e favorecendo assim a construção dos conhecimentos sobre esses objetos e relações.

Pelos motivos descritos anteriormente, decidimos desenvolver um micromundo matemático de Geometria Dinâmica, pois constituem-se exemplos de aportes à resolução de diferentes problemas matemáticos.

O termo Geometria Dinâmica (GD), segundo Bellemain e Correia (2004), refere-se a um tipo de software que permite a exploração de figuras geométricas pelo deslocamento contínuo, com o mouse, de elementos constitutivos dessa figura. Para Bellemain (2002), a ideia de figura dinâmica permite considerar e conceber uma representação de objetos matemáticos abstratos em várias configurações, podendo modificar as posições relativas do objeto. O mesmo autor ainda afirma que o aspecto dinâmico da GD aparece na continuidade do deslocamento dos elementos de um desenho para mudar de configuração, sendo esses elementos livres ou parcialmente livres.

Os software de GD apresentam recursos com os quais os alunos podem realizar construções geométricas feitas usualmente com régua e compasso, mas que, com esses recursos, levariam mais tempo (ZULATTO, 2002). Assim, o dinamismo presente nesses programas permite a construção de figuras geométricas em suas interfaces com régua e compasso virtuais que podem ser arrastados sobre a tela, sem alterar suas propriedades.

Os primeiros indícios à denominada GD não é tão recente quanto os software que a implementam. De acordo com Bellemain e Correia (2004, p. 2),

ao longo dos séculos, inúmeros matemáticos imaginavam figuras dinâmicas para resolver problemas geométricos. Em geral, o movimento da figura geométrica era simulado a partir de representações estáticas [...] e servia, sobretudo, para explicar um fenômeno geométrico. Em certos casos, chegaram a descrever e, por vezes, construir sistemas mecânicos, envolvendo propriedades de Geometria, para representar certas curvas e resolver problemas da Geometria.

Mesmo que haja indícios de manifestações antigas que tentam relatar o surgimento da GD, esse conceito só foi explicitado com o desenvolvimento de micromundos como o *Cabri-Géomètre* e o *Geometer Sketchpad*. Com o passar dos anos, diversos outros *software* foram desenvolvidos com implementação da GD, cujo objetivo era ultrapassar as limitações das formas estáticas dos desenhos em papel e facilitar a visualização de propriedades geométricas (BELLEMAIN, 2000).

3.4.2 Análise dos micromundos de GD

Nesta subseção, realizaremos uma breve análise de alguns micromundos que implementam a Geometria Dinâmica. Observaremos se a maneira que lidam com: os diferentes tipos de malhas; o tangram; os poliminós; a possibilidade de realizar as transformações isométricas do plano (mover, realizar rotação e reflexões nas figuras); decompor; recompor; duplicar; construir diferentes tipos de figuras por meio das ferramentas de construção (régua e compasso dinâmicos); possibilidades de medir a área, o perímetro e o comprimento das figuras; a presença de polígonos predefinidos - designados em nosso estudo como pertinentes para o trabalho com situações de aprendizagem de área e perímetro, e econômica, se exige um alto custo de exploração, ou mesmo se os recursos supracitados não são contemplados nos micromundos.

Focaremos também nas ferramentas de “configuração de menus”⁵², “macroconstrução”⁵³, assim como a possibilidade de acompanhar as tarefas do aluno ao serem resolvidas no *software*, por meio da ferramenta “histórico das construções”⁵⁴. Caracterizamos essas ferramentas como sendo um suporte ao planejamento do professor, por permitir certas escolhas que podem ser úteis aos objetivos de aprendizagem que ele queira atingir, por meio de um *software* de matemática em uma aula.

⁵²Permite restringir/ocultar menus e ferramentas em um *software*.

⁵³ Ferramenta que permite encapsular diversas etapas de uma construção geométrica em um único comando no *software*, facilitando o processo de outras construções mais complexas e, por conseguinte, enriquecendo a lista de ferramentas que ficam disponíveis aos usuários.

⁵⁴Ferramenta que encapsula os passos da resolução de uma determinada tarefa realizada por usuários em *software* matemáticos.

Os *software* de GD escolhidos para as análises são: *Cinderella*, *Déclic*, *iGeom*, *OpenEuclide*, Régua e Compasso, *Tracenpoche*, seguidos do *Apprenti Géomètre 2*, *Cabri* e *Geogebra* 5⁵⁵.

Gostaríamos de ressaltar que os *software* de GD analisados podem ser considerados interativos, ou seja, permitem ao usuário escolher um possível caminho para resolução de determinadas situações de construção de figuras geométricas, pois oferecem diferentes ferramentas clássicas para essa questão.

Portanto, vamos nos limitar a um quadro de análise em quatro pontos centrais para o foco da nossa pesquisa: i) recursos para o trabalho com área (ferramentas específicas); ii) ferramentas de planejamento (configuração de menus, macro construções); iii) histórico das construções; iv) aspectos técnicos (compatibilidade; portabilidade⁵⁶, exigências para instalação, interface atrativa, facilidade no manuseio, ferramentas autoexplicativas, disponibilidade de tutorial e menu ajuda e navegabilidade). Esses pontos estão baseados nos estudos do CREM (2007a) e em Batista (2004), que tratam da análise de *software* voltados para o ensino da matemática.

3.4.2.1 Cinderella

O *software Cinderella* foi criado e desenvolvido por Jürgen Richter-Gebert e Ulrich Kortenkamp. Ele está disponível para os sistemas operacionais *Mac*, *Windows* e *Linux*. Há uma versão demo, com idioma em Português, disponível para *download* no site do EDUMATEC/UFRGS (Educação Matemática Tecnológica Informática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul)⁵⁷.

Já no site dos próprios desenvolvedores, <<https://www.cinderella.de/tiki-index.php>>, podem ser encontradas diferentes versões desse *software*. Porém, para explorar a versão completa do *software*, é necessária uma licença.

⁵⁵Os *software* analisados estão organizados em ordem alfabética até o *Tracenpoche*. Em seguida, temos as análises do *Apprenti Géomètre 2*, *Cabri* e *Geogebra*, pelo fato de logo após, explicitarmos as potencialidades dos mesmos em literaturas que abordam os conceitos de área e perímetro. Ressaltamos ainda que todos os *software* apresentados nesta subseção já foram explorados em algum momento pelo pesquisador em suas aulas de matemática ministradas no ensino superior.

⁵⁶A **portabilidade** de um programa de computador é a sua capacidade de ser compilado ou executado em diferentes arquiteturas (seja de hardware ou de **software**). O termo pode ser usado também para se referir a reescrita de um código fonte para uma outra linguagem de computador. (JÚNIOR, J., 2013). Disponível <<https://4alltests.webs.com/sobre>>. Acesso em 4 de agosto de 2018.

⁵⁷ Disponível em <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/software/soft_geometria.php>. Acesso em 24 de agosto de 2018.

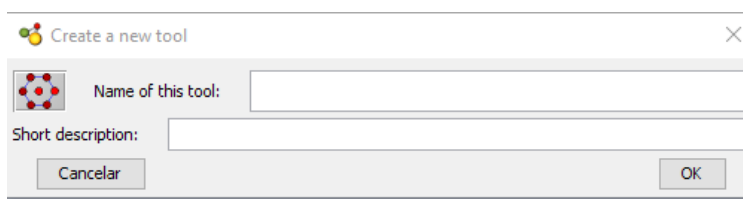
A escolhida para análise foi a versão 2.0.17. O *Cinderella*, diferente de outros *software* de geometria dinâmica, permite trabalharem geometria euclidiana, hiperbólica ou elíptica. As ferramentas são bem intuitivas: ao passar o mouse sobre cada uma delas o *software* apresenta sua descrição. É possível trabalhar com dois tipos de malhas, uma quadriculada e outra isométrica. Os ícones das mesmas ficam localizados na barra inferior do *software* e podem ser ampliadas ou reduzidas pelos botões (+) e (-) próximos às malhas. Elas servem apenas de referência para as construções, não há um magnetismo que arrasta as figuras para seus pontos.

Algumas ferramentas não estão disponíveis para a versão demo, mas pudemos analisar todas que estamos apresentando nesta seção. Baseados também nas análises realizadas pelo CREM (2007a), as quais, assim como identificado em nossa exploração, colocam que é impossível configurar os menus por meio da desativação de alguns recursos. Tudo é muito estático em sua tela. Entretanto, a ferramenta *Detach and re-attach* permite que o usuário, ao escolher um vértice de um polígono regular criado na interface, possa ampliar ou reduzir as figuras, mantendo suas propriedades, ou mesmo aplicar rotações de forma direta na figura, escolhendo um dos seus vértices ou um ponto central. Porém, este *software* não permite uma manipulação mais direta, com acesso à possibilidade de arrastar as figuras sobre a tela.

A maioria das principais características de construção de figuras é semelhante a outros *software* de GD. Propicia também trazer diretamente à tela alguns “polígonos regulares”. Por exemplo, para construir um quadrado por meio dessa ferramenta, deve-se dar um clique com o botão esquerdo do *mouse* na interface do *software* que determinará um ponto e, com esse botão pressionado, arrastá-lo até que a construção seja concluída. Os demais polígonos seguem a mesma lógica de construção, na forma predefinida.

Não encontramos ferramentas que permitem guardar os históricos das ações realizadas no *Cinderella* – o menu “Editar” oferece a opção *create tool from selection*, que se aproxima da ideia de macroconstrução. Após ter sido construída uma figura, por exemplo, pode-se selecionar os elementos geométricos que a constituem e clicar na opção supracitada, que apresentará a seguinte janela:

Figura 20- Criando ferramentas



Fonte: da pesquisa

Deve-se fornecer um nome à construção, após uma pequena descrição, e clicar em ok. Assim, a ferramenta aparecerá na barra superior do *software*. Ao fecharmos o *Cinderella*, uma janela perguntará se deseja que sejam salvas as alterações. A versão demo precisa ser aberta aproximadamente a cada 30 min, pois o *software* encerra as ações, sendo preciso iniciar tudo novamente. Mesmo com essa limitação, pudemos verificar as ferramentas que desejamos analisar para o foco da nossa pesquisa.

É possível medir a área, os ângulos e os comprimentos dos lados das figuras. Chamou-nos a atenção a opção Medir - Distância, em que se pode medir o comprimento dos lados de um polígono, clicando em um dos vértices com o botão esquerdo do mouse e arrastando até o outro. Ao realizar essa operação, uma espécie de fita métrica aparece por trás dos segmentos que formam o polígono, como se estivéssemos utilizando a mesma na forma usual para medir comprimentos de objetos em ambientes não digitais.

Podemos ainda encontrar, no menu ajuda, *links* que guiam o usuário a sites em que é possível encontrar tutoriais deste *software* e não há complexidade para a instalação do mesmo.

3.4.2.2 Déclic

Déclic é um *software* livre, gratuito e de código aberto, desenvolvido para os níveis equivalentes no Brasil aos anos finais do ensino fundamental e médio. A versão testada foi a 32 bits 5.23.2.0 para *Windows*.

Está disponível para *download* em <<http://emmanuel.ostenne.free.fr/declic.htm>>, nos idiomas francês ou italiano. Permite ainda instalá-lo por meio do modo compatibilidade, em computadores com sistema *Windows* 64 bits, o qual funciona normalmente. Algumas atividades com o uso do *Déclic* podem ser encontradas no site supracitado. Um breve manual de instruções de uso está disponível no endereço <<http://www.ac-besancon.fr/spip.php?article2816>>.

A navegação entre os menus e as ferramentas do *software* não são intuitivos: por exemplo, uma vez criado um polígono em sua tela, ele não pode ser movido sem que todas as demais figuras sejam arrastadas junto com ele.

No que diz respeito aos aportes para a construção de situações de aprendizagem de área e perímetro, temos que: o *software* possui uma malha quadriculada, que pode ser ajustada e colorida, na qual podem ser construídas diferentes figuras geométricas. A malha é apenas

um suporte independente das construções, servindo de referencial para as mesmas e há um botão para determinar os comprimentos dos lados das figuras. Outra diferença é que as ferramentas que ficam do lado esquerdo da tela não são muito intuitivas: uma vez acionadas, ao se realizar a ação desejada é preciso voltar sempre à ferramenta se quiser que a mesma ação seja realizada em outra figura.

A organização dos comandos é bastante complexa: alguns são inseridos em menus. Às vezes, eles são repetidos em uma caixa de ferramentas à direita da tela. Tudo isso dá ao usuário a impressão de pouca coerência na gestão das informações. Os atalhos do teclado estão disponíveis e funcionam corretamente. A maioria das características encontradas em outros *software* de geometria dinâmica também está presente no *Déclic*, no que diz respeito às ferramentas de construções geométricas.

O menu ajuda oferece a descrição do *software*, modo de compatibilidade e um *link* que leva ao site desenvolvido pelo seu criador. Não há exigências para sua instalação. É possível realizar macroconstrução e há uma ferramenta que permite verificar o histórico de criações realizadas em sua área de trabalho, mas em passos aligeirados, como se fossem *prints* da tela, não havendo como acompanhar todos os passos de uma construção realizada no mesmo. Os menus também não podem ser configurados.

3.4.2.3 iGeom

Como os demais *software* supracitados, o *iGeom* permite realizar construções geométricas e interagir com elas. É livre e gratuito e está disponível para *download* no site oficial, <<http://www.matematica.br/igeom/manual/pt/exercicios.html?lang=pt>>. Nesse site, ainda podem ser encontrados tutoriais e alguns exemplos de construções de cônicas e fractais. Esse programa funciona em todas as plataformas, uma vez que é escrito na linguagem de programação Java (PORTAL, IGEOM, 2018).

O diferencial desse *software* para os demais analisados é a possibilidade de

exportar uma construção para que seja visualizada em uma página Web; realizar construções diretamente na versão Web; encapsular os passos de uma construção em um script, como um *algoritmo*; anotar recorrências em *script*, permitindo a construção rápida de *fractais* (parciais), existe uma ferramenta para autoria de exercícios que depois podem ser automaticamente avaliados; um exercício pode ser publicado para páginas Web (PORTAL, IGEOM, 2018).

Assim, o professor, por meio desse *software*, pode obter um *feedback* de quais alunos fizeram os exercícios, as soluções encaminhadas por eles, etc. Com relação às ferramentas que podem oferecer condições para o professor construir situações de aprendizagem de área e

perímetro, temos a presença da malha quadriculada sem magnetismo⁵⁸ e as mesmas ferramentas para a construção de figuras geométricas (pontos, retas, semirretas, etc.) como nos demais *software* de GD. Porém, não há possibilidade de trazer para tela polígonos predefinidos, como é encontrado no *Openeuclide*, *Cinderella* e *Déclic*, por exemplo. Há uma ferramenta que possibilita medir a área e o comprimento das figuras que podem ser construídas em sua tela, mas a ênfase é dada apenas ao número (medida da área/comprimento e ângulo).

O *software* é de fácil manuseio e algumas das ferramentas são autoexplicativas. A interface pode ser considerada atrativa, mas os ícones não aparentam, muitas vezes, o objetivo de sua função, como por exemplo, o que trata das transformações isométricas do plano. Não há uma ferramenta que permita que as figuras sejam arrastadas sobre a interface. O menu ajuda serve de guia para que o usuário acesse o portal do *iGeom*. Em nossas análises, não encontramos ferramentas que permitam a macroconstrução.

3.4.2.4 OpenEuclide

Esse *software*, desenvolvido por Fabien Coulon, é livre e gratuito, podendo ser encontrado nos idiomas inglês e francês. Está disponível para *download* no Banco Internacional de Objetos Educacionais, através do seguinte endereço eletrônico: <<http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/9689>>. Outro endereço em que o *software* encontra-se disponível é o <<http://coulon.publi.free.fr/openeuclide/>>, que apresenta algumas descrições desse *software* e versões para outros sistemas operacionais, como, por exemplo, o *Linux*. A versão analisada foi a 0.5 para *Windows 64 bits*.

OpenEuclide permite que algumas figuras geométricas possam ser levadas diretamente para sua interface, com apenas um clique sobre a figura e outro em sua área de trabalho. Ele é de fácil instalação e navegação entre os menus, entretanto não é possível aplicar uma mesma ação em vários objetos, assim como o *Déclic*: ao ser acionada uma determinada ferramenta e aplicada certa ação em um objeto, deve-se voltar novamente à mesma ferramenta, se o usuário desejar aplicar a mesma ação em outro objeto.

Uma parte dos menus estão organizados do lado esquerdo da tela e outros ficam na barra superior do *software*, por vezes, se repetem. Ao passarmos o cursor do *mouse* sobre as ferramentas, uma descrição aparece em uma caixa no rodapé do *software* o que pode ser

⁵⁸A função do magnetismo é manter as figuras com seus lados e vértices fixos a marcação das linhas e pontos das malhas, não permitindo ao usuário, por exemplo, construir um polígono fora dessa marcação.

confuso e não muito perceptível. Não é possível realizar macroconstrução, nem tampouco configurar/ocultar menus. Não há uma ferramenta que possibilite também arquivar em disco as ações realizadas no mesmo, como a ferramenta de histórico, encontradas no *software Décllic*, por exemplo.

Algumas ferramentas de construção de figuras que estão presentes em alguns *software* de geometria dinâmica, como o *Cinderella* podem ser encontradas nele, tais como: ponto, retas, reta paralelas, retas perpendiculares, circunferências, entre outras. Quanto aos polígonos predefinidos temos: quadrado, retângulo, triângulos (isósceles, retângulo, equilátero) e triângulo qualquer. Nessas figuras, ao serem arrastados os vértices, as propriedades que as caracterizam são preservadas, com exceção do triângulo qualquer.

Quanto ao uso de ferramentas de medição, é possível apenas medir o comprimento dos lados da figura, o procedimento apresenta as mesmas características do *software Cinderella*. Entretanto, as medições aparecem no canto esquerdo da tela, distante do segmento medido, também não é levado em consideração o par (número + unidade de medida), como resultado das medições. Algumas transformações isométricas do plano podem ser aplicadas às figuras que são construídas, mas não seguem o princípio da manipulação direta. Não há nenhuma espécie de malhas, nem tampouco, um comando em que as figuras possam ser arrastadas sobre a tela, dando a impressão que tudo é muito estático. Não há um menu ajuda e, a não ser pelos endereços explicitados anteriormente, não tem como obter outras informações sobre o *OpenEuclide*.

3.4.2.5 Régua e Compasso

De acordo com Barcelos et al. (2014), o C.A.R (Régua e Compasso) é um *software* livre, de autoria de René Grothmann (professor da Universidade Católica Eichstätt Alemanha). Seu código fonte está disponível conforme Licença Pública Geral. O idioma original é o alemão, mas já foi traduzido para vários outros, dentre eles o português. Pode ser encontrado por meio do endereço eletrônico: <<http://www.professores.uff.mat.br/hjbortol/car/index.html>>. Nesse site, ainda consta descrição, tutoriais, exercício, macroconstrução e várias versões desse *software*.

O programa, assim como os outros que foram analisados nesta subseção, destina-se à Geometria Dinâmica, isto é, sua função é “possibilitar o trabalho com construções geométricas que podem ser alteradas movendo um dos pontos básicos, permitindo a

preservação das propriedades originais. Permite, então, explorar diversos aspectos relativos à Geometria Plana Euclidiana e à Geometria Analítica” (BARCELOS et al., 2014, p.6).

Concordamos com esses autores que realizaram uma análise neste *software* em 2014, em alguns aspectos que podem ser considerados positivos e negativos. Os aspectos positivos são: pode ser considerado fácil de usar; possui interface agradável e bem didática; permite desde a realização de construções geométricas bem simples até construções bastante complexas, dependendo da capacidade do usuário e de sua necessidade; oferece grandes possibilidades de interação com o usuário; e orienta as ações a serem tomadas por meio de uma caixa de diálogo, apresentando mensagens claras e objetivas.

Quanto aos pontos negativos, podemos destacar os seguintes:

Requer a instalação de ambiente Java, o que faz com que sua instalação não seja das mais simples; apresenta uma ferramenta nomeada inadequadamente: Usar Ângulos Obtusos. (não se trata de ângulos obtusos e sim ângulos maiores que 180°); apresenta ajuda em inglês; não alerta o usuário sobre a impossibilidade de determinadas ações. Por exemplo, ao solicitar a marcação dos pontos de interseção entre duas retas paralelas (ou segmentos paralelos) (BARCELOS et al., 2014, p.7).

Há uma versão mais simples do Régua e Compasso disponível para *download* no BIOD⁵⁹, em uma versão 2.10 denominada de *Zirkel* que possui também várias ferramentas de construção de figuras geométricas com uma interface menos sofisticada que a do Régua e Compasso atual. Analisamos a versão 8.7 do C.A.R, criada em 2008.

Neste *software*, é possível aplicar uma mesma ação a vários objetos criados em sua interface, pois, uma vez acionadas, as funções das ferramentas ficam ativadas, sendo preciso que o usuário clique novamente nelas para desabilitá-las. Uma malha pontilhada pode ser encontrada no *software* junto com um plano cartesiano, e a escala da mesma pode ser ajustada por meio da ferramenta *zoom* e de alguns movimentos com o botão esquerdo do *mouse* pressionado, mas não há uma opção de magnetismo automático que junte os pontos de uma figura construída aos da malha. Apesar disso, o usuário pode realizar construção utilizando seus pontos como referencial, de forma que os vértices das figuras ficam alinhados aos pontos da malha.

Uma das características do Régua e Compasso tem semelhança com o *iGeom*, no que se refere à possibilidade de publicar construções na Internet, via páginas da web. Com esse recurso, podem ser lançados desafios e problemas para outros usuários resolverem. Além

⁵⁹Banco Internacional de Objetos Educacionais do Ministério da Educação e Cultura: Disponível em <<http://objetoseducacionais.mec.gov.br/#/ne/SU5GQU5USUw>>, Acesso em 23, de julho de 2018.

disso, o programa possui uma ferramenta que permite macroconstrução, o que torna possíveis construções mais complicadas.

A Secretaria de Estado da Educação do Paraná (2010) tece um minucioso estudo sobre esse *software*, no qual afirma que ele é composto por ferramentas e funções diversas, que abordam conceitos e demonstrações geométricas e permitem aos usuários a construção de figuras. Tais figuras podem ainda ser alteradas, mantendo-se as propriedades originais, apenas com o movimento de um dos pontos básicos – pontos, retas e círculos.

A partir disso, esses elementos “podem ser destacados na tela mantendo-se as relações geométricas (pertinência, paralelismo, etc.) previamente estabelecidas, permitindo ao usuário concentrar-se na associação existente entre os objetos ao invés de gastar seu tempo com detalhes de construção repetitivos” (PARANÁ, 2010, p. 17-18). Sobre essas ferramentas, o estudo destaca que graças a elas podem ser explorados pontos concernentes à geometria plana e à geometria euclidiana.

Sobre a organização interna do *software*, o estudo traz que

Há uma “Lista de objetos” (à esquerda), onde são representados algebricamente os objetos de uma construção. Ela pode ser fechada, clicando-se com o botão esquerdo do *mouse* em Configurações, no menu principal e, a seguir, em Lista de objetos, desativando essa opção. Encontramos ainda uma ajuda contextualizada: que abre uma janela com informações que auxiliam o usuário no uso do programa (PARANÁ, 2010, p. 19).

Diferente de outros *software* estudados, para mover uma figura sobre a tela deve-se arrastá-la com o botão direito do mouse pressionado. Com relação à construção de polígonos quaisquer de “n” lados, é necessário somente “clicar com o botão esquerdo sobre os vértices (pontos), seguindo a ordem do polígono, concluindo ao pressionar pela segunda vez no primeiro vértice ou então dar dois cliques no último ponto marcado” (PARANÁ, 2010, p. 23).

Neste *software*, é possível ainda escrever textos, mostrar alguns dados numéricos ou coordenadas dos objetos construídos. Antes de construí-los, faz-se necessária a seleção da ferramenta “Mostrar valores dos objetos” para que o *software* forneça a medida dos lados do polígono. Também oferece condições de expressar a área medida de qualquer polígono criado em sua interface.

Para isso, alguns procedimentos devem ser levados em conta: “clicar com o botão direito sobre o polígono; na janela que se abrirá, deve-se selecionar a ferramenta ‘Mostrar valores dos objetos’ que é representada por um segmento e, em seguida, premir OK” (PARANÁ, 2010, p. 34).

Muitos desses procedimentos exigem um nível alto de familiarização desse *software*, pois nem todas as funcionalidades das ferramentas oferecem uma forma intuitiva de realizar tais procedimentos apresentados nos parágrafos anteriores.

3.4.2.6 Tracenpoche

Trata-se de um *software* executado em *Adobe Flash player*, que não exige instalação. Este micromundo está disponível para *download* em <<http://tracenpoche.sesamath.net/>>, somente em francês. Ele faz parte de um projeto denominado de *Sésamath*⁶⁰, sua interface pode ser considerada simples com as ferramentas localizadas do lado esquerdo da tela. Um botão com aparência de uma seta fornece às demais ferramentas que ficam embutidas e fazem parte de um mesmo conjunto, ou seja, na que é representada por um segmento de reta estão contidas a reta e a semirreta, por exemplo.

As ferramentas são de fácil manipulação e autoexplicativas: ao passar o cursor do *mouse* sobre as mesmas, pode-se verificar sua descrição, pois não exige um nível alto de familiarização para um usuário que entende a lógica de construção de figuras geométricas em outros *software* de GD. Ao selecionar uma determinada ferramenta, não é impossível aplicar uma mesma ação em vários objetos criados.

As figuras podem ser movidas sobre a tela, após a ativação da ferramenta representada por uma seta (cursor), entretanto os polígonos construídos por meio da ferramenta *Construire un polygone* não podem ser movidos. Essa ferramenta permite que sejam construídos polígonos quaisquer por meio da criação de pontos que os definam, e para concluir a construção o usuário precisa apenas clicar no ponto inicial que dá origem ao polígono. As transformações isométricas do plano podem ser aplicadas, mas não diretamente: é preciso realizar algumas operações – que por sinal são muito restritas.

Não possui menu ajuda, tutorial, nem tampouco as opções de configuração de menus e macroconstrução, mas há plugins que permitem a publicação de figuras dinâmicas on-line. Qualquer informação sobre o mesmo, assim como uma versão que funciona diretamente na página web, pode ser encontrada no endereço indicado no início desta subseção. O

⁶⁰ Associação francesa Sésamath tem como objetivo disponibilizar gratuitamente recursos educacionais e ferramentas para serem utilizadas no ensino de matemática pela Internet.

Deliberadamente registrada em uma abordagem de serviço público, a associação está ligada aos valores de uso de recursos e *software* livres: por conseguinte, favorece, na medida do possível, licenças gratuitas para documentos e *software*, bem como para formatos abertos, e autoriza a sua modificação, distribuição e reprodução. Recomenda aos seus membros e colaboradores o uso para comunicação, produção de documentos e recursos educacionais (PORTAL DO SÉSAMATH, 2018, Tradução nossa).

TracenPoche é gratuito e permite que seja modificado seu código fonte para inserir outras ferramentas.

O *software* consegue mostrar, em alguns passos, as construções realizadas em sua interface, por meio do botão “*Basculer en mode pas à pas*”, contudo, na maioria das vezes em que testamos, esse modo não funcionou corretamente. Podemos encontrar ferramentas que permitem medir comprimentos e ângulos das figuras. Não apresenta malhas quadriculadas nem isométricas.

3.4.2.7 O *Apprenti Géomètre* ⁶¹

O *Apprenti Géomètre* é um software de geometria desenvolvido pelo “*Centre de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques (CREM)*”⁶² para atender à proposta do Ministro da Educação Básica da comunidade francófona na Bélgica, de fornecer um *software* de matemática para crianças e adolescentes que lhes permitissem realizar atividades de geometria em um ambiente dinâmico diferente do contexto tradicional em que a geometria é explorada: de forma estática e apenas por meio de papel e lápis (SILVA, 2016).

Esse *software* oferece alguns menus em sua tela inicial – A, B, C, AB e AC – que encapsulam conjuntos de ferramentas diferentes a depender do nível de escolaridade que se deseja atender. Esses menus restringem algumas funcionalidades e, por vezes, agrupam-nas, como no caso dos menus AB e AC. Nessa janela de abertura do AG 2, ainda é preciso, para ter acesso à *interface* desse *software*, que o usuário se identifique como “professor” ou “aluno”, escolha o idioma e clique em “Ok”. Para fazer o login, o aluno deve se identificar escrevendo o seu nome, de forma que o professor poderá depois ter acesso a seu histórico de atividades desenvolvido (SILVA, 2016, p. 264). Já sobre o acesso do professor a esse sistema, Silva (2016, p. 267) traz que:

O professor pode traçar atividades iniciais, definir menus para deixar acessível ao aluno e decidir as ferramentas que estarão disponíveis à atividade que será proposta, ou seja, um menu de controle no qual os alunos só poderão utilizar as ferramentas que serão compatíveis com o planejamento do professor. Esse software encontra-se disponível em <<http://www.crem.be>> é livre e gratuito e pode ser instalado em computadores com o sistema operacional *Windows*, *Mac OSX*, *Mac OS9* e *Linux*. No

⁶¹ Apresentamos uma análise mais detalhada desse *software* por ser o mais conhecido pelo autor desta pesquisa. Ele foi utilizado como um dos recursos para investigar o tratamento dado por estudantes do 6º ano do ensino fundamental a um conjunto de tarefas sobre área de figuras planas em nossa dissertação de mestrado (SILVA, 2016). É dele que vem a inspiração para o desenvolvimento de um novo micromundo a partir de suas potencialidades e limitações para o ensino e aprendizagem dos conceitos de área e perímetro.

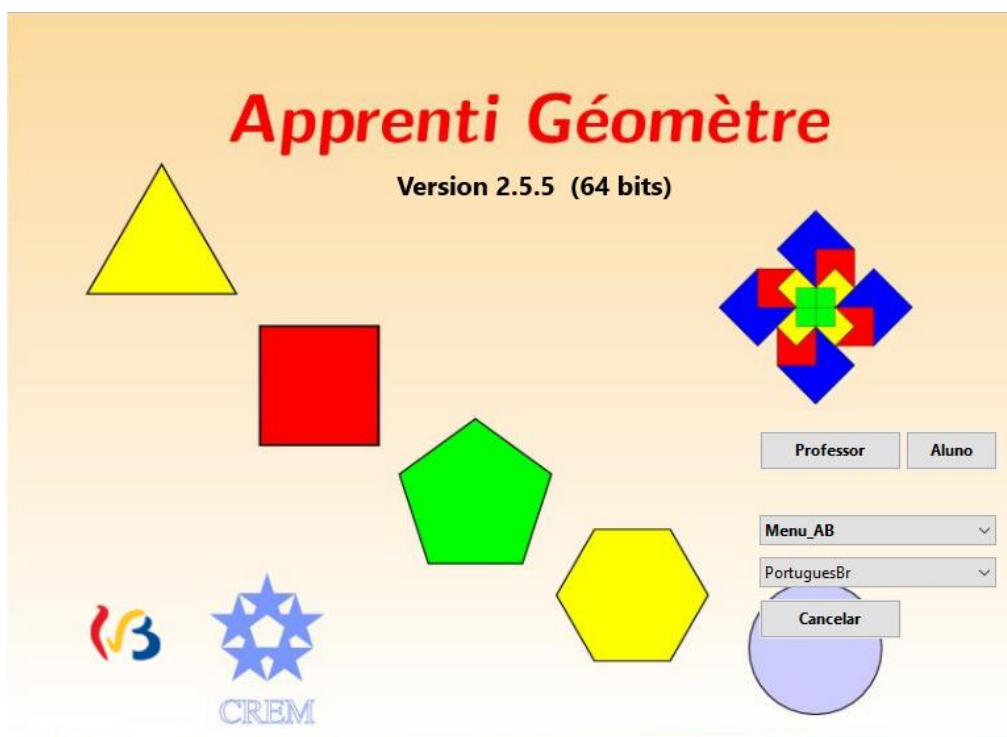
⁶²Centre de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques (CREM) é um grupo de pesquisa responsável pelo projeto de elaboração do *Apprenti Géomètre* nas versões 1 e 2. A elaboração do projeto desse *software* contou com a participação dos seguintes integrantes: Michel Ballieu, Marie-France Guissard, Guy Noël, Nicolas Roucheet Marie-François e Van Troeye. Este Centro está localizado na 5 rue Émile Vandervelde, B-1400 Nivelles, Belgique.

referido site encontramos ainda tarefas predefinidas⁶³ com o uso do *Apprenti Géomètre 2* e utilizadas nas pesquisas desenvolvidas pelo CREM. Há também um manual de utilização e publicações referente ao impacto do *Apprenti Géomètre 2* na aprendizagem de áreas de figuras planas.

Atualmente, o AG 2 encontra-se na versão 2.5.7, na qual é possível ter acesso ao menu em “português” que fora traduzido em nossa dissertação (SILVA, 2016) para ser utilizado em nosso dispositivo experimental com alunos do 6º ano de uma escola pública municipal, uma vez que só existiam versões em inglês e francês. A versão utilizada em nossos estudos (SILVA, 2016) foi a 2.4. Os desenvolvedores detectam as falhas e *bugs* ocorridos que são enviados automaticamente pelo *software* quando em situação de uso, de forma que há sempre atualizações, em que alguns ajustes são realizados para melhorar seu desempenho.

A figura a seguir ilustra a janela inicial do AG2:

Figura 21- Janela de abertura do AG2



Fonte: da pesquisa

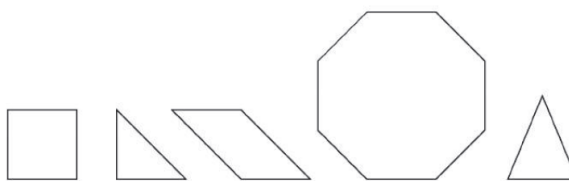
As opções de menus presentes na figura acima oferecem ferramentas diferentes para o usuário, como explicitamos anteriormente. O menu “A” foi programado para crianças da comunidade francófona da Bélgica com idade de 8 a 12 anos. De acordo com Silva (2016), nesse menu, denominado de Figuras Padrão, o aluno tem acesso a um conjunto de figuras

⁶³ Essas atividades foram desenvolvidas pela CREM com o objetivo de fazer um estudo com alunos da comunidade francófona na Bélgica por meio do *Apprenti Géomètre 2*.

geométricas predefinidas, organizadas, segundo Rouche e Skilbecq (2003), em “famílias”: a do quadrado, do triângulo equilátero e a do pentágono regular.

A título de ilustração, vamos detalhar a “família” do quadrado. Seus membros são os polígonos mostrados na Figura 22, a saber: um quadrado; um triângulo retângulo isósceles, obtido por meio da decomposição do quadrado pela diagonal; um paralelogramo, obtido pela junção de dois triângulos retângulos isósceles, a partir de decomposição do quadrado pela diagonal; um octógono regular com um lado do mesmo comprimento que o quadrado; um triângulo isósceles, obtido cortando o octógono em oito triângulos. Como vimos, nós vamos de alguns deles para outros, por simples operações de decomposição e recomposição, justaposição e fusão (ROUCHE; SKILBECQ, 2003)⁶⁴.

Figura 22- Família do quadrado



Fonte: (ROUCHE; SKILBECQ, 2003)⁶⁵.

No Brasil, traduzimos por “Jogo de Base”, pois não utilizamos o termo “famílias de figuras” da mesma forma que na Bélgica, pelos desenvolvedores do AG 2. No texto citado, o círculo não está contido nessas “famílias”, mas no próprio software o círculo faz parte da “família” do quadrado, do triângulo e do pentágono regular. Muitas dessas figuras podem ser utilizadas como unidades de medidas de áreas não convencionais em tarefas de medida de área e mudança de unidade, as quais permitem a passagem da grandeza ao número por meio da escolha de uma unidade. Nesse caso, o resultado esperado é um número seguido de uma unidade (BELLEMAIN; LIMA, 2002). Essas unidades também podem ser usadas na construção de diferentes mosaicos.

As figuras do menu Figuras Padrão podem ser substituídas por novos “Jogos de Base”. No menu Preferências, localizado na barra de ferramentas superior do AG 2, há uma opção também denominada de Figuras Padrão, na qual o usuário pode escolher um novo conjunto de

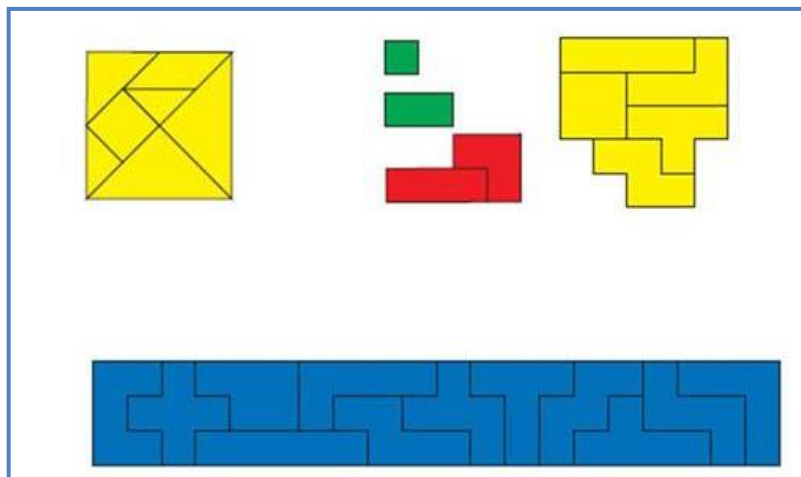
⁶⁴ Mais detalhes sobre famílias de figura podem ser encontrados em Rouch e Skilbecq (2003a), no **Apprenti Géomètre: un nouveau logiciel -Première partie: le kit standard**, que está em nossas referências.

⁶⁵ O leitor pode encontrar as decomposições dessas figuras no manual do *Apprenti Géomètre 2* disponível em <<http://www.crem.be>> . Acesso em 24 de agosto de 2019.

figuras geométricas, tais como o jogo Tangram e os conjuntos de peças de poliminós (monominó, dominó, triminó, tetraminó e pentaminó), entre outros.

A ilustração abaixo apresenta alguns desses conjuntos de figuras:

Figura 23- Peças do AG2



Fonte: da pesquisa

Santana (2006) afirma que o tangram e os poliminós podem favorecer as questões da mudança de unidade e do uso de diferentes superfícies unitárias associadas a uma mesma unidade, contribuindo para estabelecer a articulação entre o quadro numérico e o quadro das grandezas e da distinção entre figura e área, como explicitado na seção recursos.

Com relação a esta questão, Douady e Perrin-Glorian (1989) explicam que, atribuindo a uma determinada figura as medidas por ladrilhamento e utilizando diferentes formas de ladrilhos, contribui-se para a construção da noção de área como grandeza autônoma. Para essas autoras, esse tipo de situação ajuda os alunos a distinguirem a área do número, controlando a correspondência entre figuras e números, na qual a uma mesma figura poderão corresponder números diferentes segundo uma unidade escolhida, mas a área não muda (SILVA, 2016, p. 83). Esse tipo de tarefa é importante na superação das concepções numéricas de área.

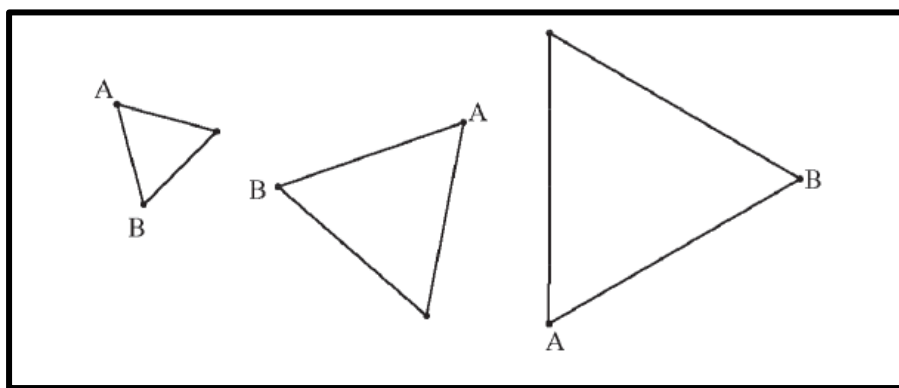
Diferente do menu Figura Padrão, que traz um conjunto de figuras geométricas predefinidas, sendo preciso apenas um clique sobre a figura com o mouse e depois na interface do *software* para que as figuras sejam criadas, o menu Figuras à mão livre permite a construção da figura por meio de alguns cliques, exigindo do aluno um conhecimento mais elaborado para construir diferentes figuras (SILVA, 2016).

No menu Figura Padrão, por exemplo, se o usuário selecionar um triângulo equilátero, clicando em qualquer ponto da tela, mostra um triângulo equilátero do

qual ele não escolhe nem grandeza nem orientação. No entanto, o usuário que selecionar o triângulo equilátero do menu “Figuras a mão livre” deve primeiro clicar em um ponto A de sua escolha, então um segundo ponto B, e o *software* então mostra um triângulo equilátero de que AB é um dos lados. O usuário não tem escolha do lado AB, onde o triângulo é construído, uma vez que o último ponto é desenhado no sentido trigonométrico (ROUCHE; SKILBECQ, 2003b, p.1-Tradução nossa)⁶⁶.

Como ilustração a essa situação de construção, esses autores apresentam os seguintes triângulos, como se estivessem sendo construídos no AG2:

Figura 24- Triângulos em diferentes posições



Fonte: (ROUCHE; SKILBECQ, 2003b, p.1)

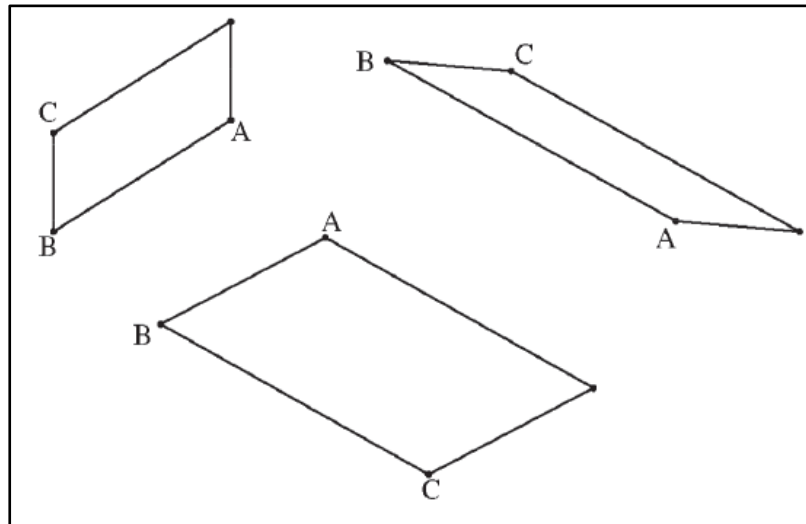
Então, para construir um triângulo equilátero, dois cliques devem ser dados definindo dois pontos. O *software* determina a terceira direção para formar o triângulo no sentido anti-horário positivo. O menu “Figuras a mão livre” permite trazer para a tela do AG 2 uma maior variedade de figuras em relação ao Figuras Padrão. Para explicitarmos a ideia de construção dessas figuras contida nesse menu, as quais diferem de outros *software* de GD, trazemos um outro exemplo de como construir um paralelogramo não retângulo e não quadrado.

O usuário (professor ou aluno) precisa determinar dois pontos A e B, o que dará um primeiro lado da figura; em seguida, deve clicar em um terceiro ponto C, de modo que BC é um segundo lado do paralelogramo. Esse, sendo determinado pelos dois lados adjacentes, então aparece na tela do AG 2.

⁶⁶Pour plus de clarté, repartons du kit standard. Celui-ci amène à l'écran des figures prédéterminées. Par exemple, si l'utilisateur sélectionne *triangle équilatéral*, alors par un clic en un point quelconque de l'écran, il fait apparaître un triangle équilatéral dont il ne choisit ni la grandeur, ni l'orientation. Par contre, l'utilisateur qui a sélectionné *triangle équilatéral* dans le kit libre doit d'abord cliquer en un point A de son choix, puis en un deuxième point B, et le logiciel fait apparaître alors un triangle équilatéral dont AB est un des côtés. L'utilisateur n'a pas le choix du côté de AB où se construit le triangle, puisque ce dernier se dessine dans le sens trigonométrique (ROUCHE; SKILBECQ, 2003b, p.1).

A Figura a seguir mostra três exemplos.

Figura 25- Paralelogramos construídos no AG 2



Fonte: (ROUCHE; SKILBECQ, 2003b, p.1)

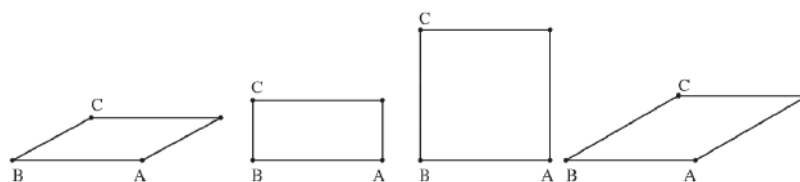
De acordo com Rouche e Skilbecq (2003b, p. 2), em síntese cada figura é determinada por sua definição e por elementos (vértices, lados etc.) que são suficientes para a sua construção. Este método de construção induz perguntas pedagogicamente interessantes, como por exemplo: por que o paralelogramo é determinado por dois lados adjacentes?

Ainda para esses autores, uma vez que uma figura é desenhada, ela pode ser modificada "com o *mouse*", após ter sido acionada a ferramenta "Modificar" sem deixar de cumprir sua definição. Por exemplo, do paralelogramo ABC, desenhando no ponto C, gera os demais paralelogramos como mostrado na figura 25. Ele também pode deformar a figura puxando em A, B ou C, mas não no quarto ponto.

Este tipo de deformação contínua também induz perguntas interessantes: como é que, distorcendo um paralelogramo, podemos obter um retângulo, um quadrado, um losango?⁶⁷

⁶⁷ Mais explicações sobre as ideias que estão por trás do objetivo das construções que são realizadas por meio da escolha de figuras deste menu podem ser encontradas no manual do AG 2 e em diferentes volumes das pesquisas realizadas pelo CREM que estão disponíveis em <<http://www.crem.be>> na aba *Nos recherches e Publications*, todas disponíveis para *download*.

Figura 26- Paralelogramos criados com o uso do menu “modificar”



Fonte: (ROUCHE; SKILBECQ, 2003b, p.1)

Em suma, as figuras disponíveis no menu “Figuras a mão livre” são todas as variedades clássicas de triângulos e quadriláteros, polígonos regulares de 5 a 12 lados, e polígono qualquer de 5 a 10 lados, segmento, segmento paralelo e perpendicular, ponto, circunferência e arco.

Entendemos ser pertinente ao professor esse tipo de menu que permite a criação de figuras, pois por meio deles podem ser construídas tarefas em que, dada uma figura, pede-se que se construa outras de área menor, maior ou de mesma área. Segundo Silva (2016), esse tipo de situação, em que a ênfase é dada na produção de superfícies, permite ora a articulação entre o quadro geométrico e o das grandezas, nos procedimentos em que o aspecto numérico é bloqueado, ora a articulação entre os quadros numérico e geométrico. A produção de superfície pode conduzir o aluno na dissociação entre área e figura, assim como área e número, levando-o a entender área como uma grandeza autônoma.

No menu “Ferramentas”, pode ser encontrada a opção “malhas” em que é possível trazer diretamente para a tela do *software* a malha pontilhada quadriculada ou a isométrica (pontilhada triangular). Ambas as opções possuem um magnetismo que fixa os vértices de uma figura qualquer construída na tela do AG 2 no pontilhado. Não há como construir uma figura fora dos pontos da malha. As figuras criadas podem ser movidas, decompostas, duplicadas ou divididas. Além disso, diversas ações podem ser realizadas, entretanto, é importante ressaltar, na malha quadrada não é possível construir um triângulo por meio do menu “Figuras à mão livre”, nem tampouco um quadrado desse mesmo menu na malha isométrica.

Pelo fato de o *software* não oferecer a opção da malha quadriculada, tivemos que construir uma malha utilizando a ligação de quadradinhos do menu Figuras Padrão, para desenvolver a atividade 4 da nossa pesquisa (SILVA, 2016). Construir uma malha da maneira como foi produzida no *software* requer tempo e torna-se custoso. Para elaborar tarefas de área por meio de uma malha quadriculada, o professor precisaria conhecer o AG 2 em um nível

mais profundo de familiarização, porém, nesse *software*, é possível utilizar o menu malhas pontilhadas quadradas e isométricas implementadas no mesmo, mas qual seria o porquê da necessidade de uma malha quadriculada? Santana (2006, p. 93) coloca que

as malhas podem aparecer articulando-se com o conceito de área na exploração de unidades não padronizadas, possibilitando a composição de figuras com os lados podendo coincidir, ou não, com as linhas das malhas no procedimento de representação de figuras em malhas quadriculadas. Alguns de seus contornos, que não coincidem com as linhas dessas malhas, permitem realizar a compensação das unidades (quadrinhos) que cabem na figura.

Ainda para Santana (2006, p. 95), as malhas podem servir, também, como um facilitador, para a obtenção da fórmula algébrica da área de algumas figuras, como, por exemplo, na figura do retângulo, representada em uma malha quadriculada, em que a contagem das unidades, organizadas em linhas e em colunas, pode vir a colaborar com a observação do cálculo da área pelo produto das medidas dos lados.

De acordo com Pessoa (2010), dos três recursos investigados por Santana (2006), a malha é o mais utilizado pelos professores e aparece com certa frequência nos livros didáticos. Isso nos motivou a realizar a tarefa em uma malha quadriculada e não nas pontilhadas que estão presentes no AG 2.

Um dos primeiros conhecimentos que os estudantes podem utilizar para comparar duas grandezas geométricas sem medir é a sobreposição, em particular no caso da área. O *Apprenti Géomètre 2* valoriza a geometria das transformações e inclui um comando para cada uma das transformações isométricas que permitem o movimento das figuras, mantendo-as congruentes: translação, rotação e reflexão.

Franchi et al. (1992, p. 38) relata que a análise desses movimentos é importante em vários aspectos. Um deles é favorecer a percepção e a capacidade de análise de movimentos, tais como translação e rotação em torno de um ponto, rotação em torno de um eixo. Defende também que essas atividades fazem parte da experiência diária de todos, além de propiciar o desenvolvimento de habilidades de visualização.

Essas habilidades permitem visualizar uma figura em diferentes posições e prever elementos geométricos das figuras, criando hipóteses como “essa montagem superpõe-se a esta por meio de translação” ou “este lado é congruente a este”. Para esses autores, tais habilidades devem ser desenvolvidas de modo gradativo pelos alunos, a fim de que, em seguida, possam realizar tarefas mais complexas. Esses tipos de movimentos na figura permitem ao aluno perceber que as transformações isométricas do plano conservam a área, ou seja, que a área é invariante por isometrias.

Para Silva (2016), além de o *Apprenti Géomètre 2* trazer em seus menus uma geometria voltada para crianças dos anos iniciais do ensino fundamental, é importante destacar um diferencial em relação aos demais *software* de geometria que são explorados nesta subseção: a implementação da ferramenta “Decomposição” do menu “Operações”. Por meio dela é possível decompor uma figura, pela diagonal, pela vertical ou horizontal, ou de diferentes formas com a criação e ligação de pontos (menu Figuras à mão livre) sobre a figura. Entretanto, para que essa decomposição aconteça, é preciso conectar esses pontos criados na figura com dois dos vértices da mesma, não há possibilidade de criar pontos internos na figura, ligá-los e recortar o meio da figura, por exemplo.

Essa ferramenta é pertinente em atividades de comparação de áreas, pois quando comparamos duas superfícies de formas diferentes, uma das maneiras de saber se elas possuem ou não mesma área é adotar o procedimento de decompor uma delas e recompor uma nova possível de comparar por sobreposição. Caso as duas coincidam após tal procedimento, pode-se afirmar que terão as mesmas áreas.

Outro fato a ser destacado é que, ao decompor uma figura no software, por trás dela, fica algo denominado pelo CREM (2017) de “formulários” (a mesma figura sem ser decomposta). Para os autores supracitados, isso é importante para os alunos perceberem a origem das peças decompostas, lembrando o formato original da figura. Mas as experiências vivenciadas por nós em oficinas com professores (BARROS; SILVA, 2016; SANTANA; SILVA; BARROS, 2016), assim como na resolução das tarefas sobre área da nossa pesquisa (SILVA, 2016), a pergunta que sempre surge é: qual o porquê da figura continuar por trás se ela foi decomposta? Esses professores expõem ainda *que isso pode atrapalhar a reflexão dos alunos na ação de decompor e poluir a interface do software com muitas figuras*.

*Bug*⁶⁸ com o uso dessa ferramenta foram detectados por um estudante de Pós-Graduação⁶⁹ que tinha como objetivo construir algumas atividades para sua pesquisa de mestrado e para isso precisou usar a ferramenta “decompor” em algumas figuras, mas ao salvar e abrir o arquivo, a seguinte mensagem era gerada: “rotina não implementada”, e em seguida, a mensagem de erro não permitindo que o arquivo fosse aberto (APÊNDICE A).

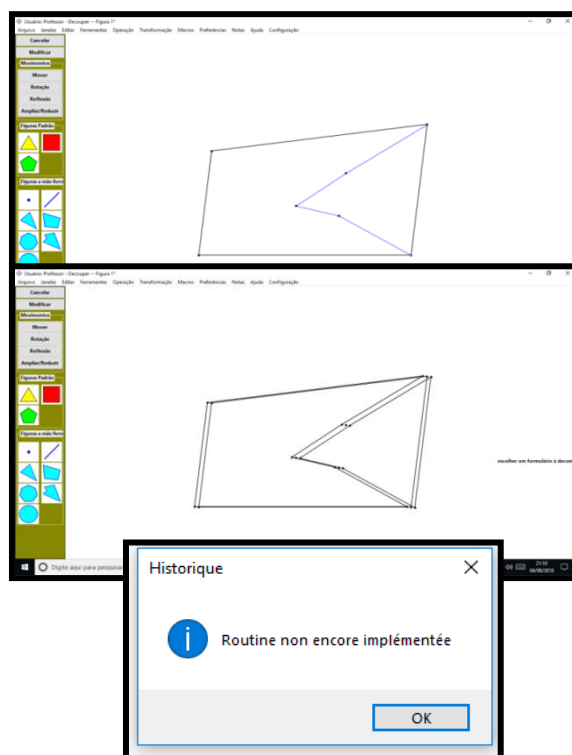
Procuramos então entender o porquê deste *bug* aparecer. Construímos um quadrilátero qualquer por meio da ferramenta “Quadrilátero” do menu “Figura a mão livre” e, em seguida criamos alguns pontos dentro da figura. Após esses procedimentos, acionamos a ferramenta

⁶⁸Defeito, falha ou erro no código de um programa que provoca seu mau funcionamento.

⁶⁹Esse *software* vem sendo utilizado em outras pesquisas no EDUMATEC-UFPE, assim como temos utilizado o AG 2 em nossos estudos, várias dúvidas são nos enviadas sobre esse *software*.

decompor, e seguimos os passos para a decomposição do quadrilátero construído. A imagem abaixo apresenta a decomposição realizada e a mensagem de erro que é gerada após abrirmos o arquivo salvo:

Figura 27- Bug em salvar as decomposições



Fonte: da pesquisa

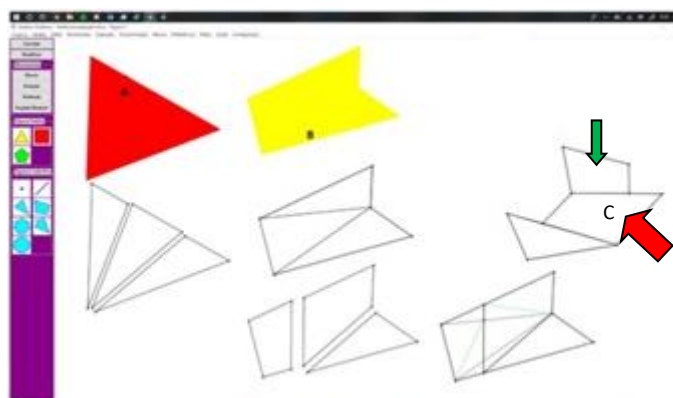
Após realizarmos esse procedimento, concordamos então com a estudante que a ferramenta decomposição precisa ser ajustada e o erro corrigido, pois pode atrapalhar a construção de atividades em que seu uso seja necessário.

Embora essa ferramenta tenha se mostrado pertinente para que os alunos resolvessem diferentes tarefas sobre área em nossa pesquisa (SILVA, 2016) ajudando-os na superação das concepções geométricas, foi preciso um tempo longo de familiarização para que eles compreendessem as diferentes formas de decompor figuras. Esse fato nos permitiu perceber que a maneira com que o AG 2 lida com a decomposição não se mostra tão econômica.

A ferramenta de decomposição pode ser utilizada ainda para destacar como unidade de medida de comprimento um lado de qualquer polígono do menu Figuras Padrão. Para isso, o usuário precisa selecionar a ferramenta “Decompor”, deve clicar em um dos vértices da figura e arrastar até o outro sem ser pela diagonal, ou seja, ligar os dois vértices que delimitam o segmento que compõe um dos lados da figura, assim teremos a cópia daquele segmento.

Outra característica presente no AG 2 que pode contribuir para o desenvolvimento de situações para o ensino de área são as ferramentas duplicar e fundir. A primeira permite a reprodução de cópias idênticas da figura desenhada e qualquer alteração na figura original, por meio da ferramenta Modificar, afeta as outras que surgiram a partir dela. A segunda faz uma espécie de fusão entre duas figuras colocadas por justaposição dos lados. Para esse procedimento acontecer, as figuras precisam coincidir vértice e lados. No caso abaixo não é possível a fusão da figura C, por não atender o que fora explicitado.

Figura 28-Fusão de figuras



Fonte: da pesquisa

Com essa ferramenta, o professor pode construir diferentes tipos de ladrilhos, que podem ser utilizados como unidades de medidas não convencionais em situações de medida de área e mudança de unidade.

A ferramenta de fundir, como explicitamos no parágrafo anterior, tem a função de colar as partes de uma figura que tenha sido decomposta, ou seja, de recompor outras. Todavia, tais partes não podem ser coladas de qualquer maneira, precisam coincidir os lados por justaposição de seus vértices. Por exemplo, o quadrilátero indicado pela seta verde na imagem acima, não pode ser colado no que está sendo apontado pela seta vermelha para compor uma única figura. Essa situação pode limitar o trabalho com tarefas que envolvam o corte e colagem de figuras planas para o estudo das áreas.

Quanto às demais ferramentas que caracterizamos como sendo referentes ao planejamento do professor, tais como “configuração de menus” e “construção de macros”, elas podem ser encontradas no *software*. Podemos também construir outros conjuntos de Figuras Padrão por meio do menu “Standardiser” (Padronizar).

Outra questão importante a se destacar com relação ao *Apprenti Géomètre 2* é a ferramenta denominada de “Histórico do aluno”, que oferece como possibilidade uma espécie

de conjunto de *flashes* das ações dos alunos ao resolverem uma determinada tarefa, o qual fica armazenado em um arquivo criado no computador (SILVA, 2016). Entretanto, essa possibilidade precisa ser revista no *software*, pois não ajudou a analisar os extratos dos alunos da nossa pesquisa, uma vez que, ao abrir os arquivos, aconteciam vários *bugs* e o programa era encerrado, não nos permitindo verificar as ações dos alunos ao resolverem as tarefas.

Há um menu ajuda no AG 2, o qual oferece também um tutorial em francês de como utilizá-lo, assim como o site do CREM, no qual podem ser encontradas as novas versões deste *software*.

Com relação aos aspectos técnicos, o AG 2 pode ser considerado fácil de usar, com uma interface agradável, menus familiares e intuitivos. Sua instalação não exige grandes conhecimentos de informática, nem domínio de linguagem de programação, orienta as ações a serem tomadas por meio de algumas perguntas claras e objetivas que vão surgindo a depender da ação do usuário.

Todavia, como explicitamos anteriormente, erros no sistema precisam ser solucionados para que o *software* funcione com mais qualidade. Dentre eles, destacamos alguns que foram identificados em nossa dissertação de mestrado (SILVA, 2016):

- Na maioria das vezes, as figuras criadas sobre as malhas do AG2 não poderiam ser salvas ou o arquivo salvo ficava corrompido;
- Ao tentarmos trabalhar com situações de medida de área e mudança de unidades no AG 2 com unidades de medidas não convencionais diferentes das que são oferecidas em seus menus, ele apresentava erros no sistema (*bug*) e encerrava o programa automaticamente sem oferecer a opção de salvar;
- ao serem montados ladrilhos com a junção de figuras predefinidas presentes no AG 2, sendo esses diferentes dos implementados em seus menus, ao salvarmos e abriremos posteriormente, o *software* apresenta um erro no sistema, não permitindo abrir o arquivo salvo.

No decorrer da realização das tarefas pelos alunos do 6º ano sujeitos da nossa pesquisa (SILVA, 2016), vários *bugs* apareceram. Dentre eles, destaca-se o fato de que, se o aluno clicasse muitas vezes na área de trabalho do *software* ou desenhasse diversas figuras com as ferramentas do menu “Figuras a mão livre”, o *software* travava a tarefa sem oferecer uma opção de salvar, ou seja, o aluno teria que fechar o AG 2 e recomeçar. Ainda com relação a esse menu, se o aluno escolhesse uma figura e não conseguisse desenhá-la corretamente, o *software* apresentava uma mensagem de erro e bloqueava todas as ferramentas, sendo necessário reiniciá-lo.

Algo ainda a se destacar é o fato de que o AG 2, como foi projetado para trabalhar sem a intervenção do aspecto numérico no estudo das grandezas (área, comprimento e perímetro), não há ferramentas que permitam expressar tais grandezas medidas, ou seja, o par (número + unidade de medida), esse fator é importante para o trabalho conceitual da área e do perímetro em um nível mais aprofundado e menos intuitivo.

Com relação ao tangram e os poliminós, o AG2 traz em seus menus esses recursos predefinidos, não sendo preciso construí-los como acontece no Geogebra.

3.4.2.7.1 Tangram e poliminós no Apprenti Géomètre

Para acessar o tangram, assim como os poliminós, no AG 2, é preciso que o usuário selecione o menu Preferências, que fica na barra superior do *software*, e escolha a opção Figuras Padrão, que oferecerá uma caixa de opções de ferramentas, dentre as quais: as barras de *cuisenaire*, polígonos estrelados, cubos, entre outros. Ao selecionar a opção tangram e clicar em Ok, as peças desse quebra-cabeça substituem o menu Figuras Padrão na lateral esquerda do *software*.

O usuário precisará, então, clicar sobre o triângulo que aparece no menu. Após esse procedimento, abrirá automaticamente uma nova janela com as peças predefinidas (um triângulo pequeno, um médio, um grande, um paralelogramo e um quadrado). Com um clique nelas, e, em seguida, na *interface* do *software*, surge a figura escolhida, que pode ser reproduzida várias vezes a depender dos cliques que forem dados pelo usuário.

O mesmo acontece com os poliminós, sendo que a diferença é que o usuário poderá escolher apenas uma das peças desse jogo no menu superior – Figuras Padrão, por exemplo – e decidir apenas utilizar os triminós, ou mesmo todos os poliminós. Para isso, precisará clicar no botão de nome Poliminós, e nessa opção, o *software* direciona todos para a barra lateral, assim como o tangram.

Um dos problemas em relação a esses recursos é que eles ficam muito embutidos dentro de menus, e isso pode dificultar ao usuário encontrar as peças, e entender a lógica de organização das mesmas para seu uso. Em nosso experimento (oficina) com o AG 2 (SILVA, 2015), realizado com licenciados em matemática para construção de tarefas de área e perímetro de figuras planas, percebemos que nenhum deles utilizou ferramentas para esse fim, o que, segundo eles, se sucedeu por não terem localizado as mesmas. Ao perceberem a existência desses recursos, apresentados pelo pesquisador ao final da oficina, ficaram

surpresos, expressando verbalmente a possibilidade da construção de diferentes tarefas por meio deles.

Assim, chamamos atenção para a maneira com que elas são organizadas no AG2, com a possibilidade de, com apenas alguns cliques, serem direcionadas para a área de trabalho do *software* como expusemos, ficando mais acessível ao professor para a construção de situações de aprendizagem de área e perímetro.

3.4.2.8 O Cabri Géomètre

O *Cabri Géomètre 2* é um *software* de Geometria Dinâmica desenvolvido por Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain no *Institut d'Informatique et Mathématique Appliquées de Grenoble* (IMAG) (Instituto de Informática e de Matemática Aplicada), da Université Joseph Fourier em Grenoble, França. Sua primeira versão é de 1985 (BALDIN; VILLAGRA, 2002). É um *software* pago, mas uma versão “demo” pode ser baixada por meio do seguinte endereço <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/software/soft_geometria.php>.

Ele permite que sejam construídas todas as figuras da geometria elementar que podem ser traçadas com a ajuda de uma régua e de um compasso. Uma vez construídas, as figuras podem se movimentar conservando as propriedades que lhes haviam sido atribuídas. Essa possibilidade de deformação permite o acesso rápido e contínuo a todos os casos, constituindo-se numa ferramenta rica de validação experimental de fatos geométricos (PORTAL DA TARGETWARE, 2018).

Ainda nesse site, é possível encontrar a seguinte descrição: O *Cabri* permite ao professor criar livremente atividades para suas aulas, ele é assim caracterizado como um *software* aberto podendo ser utilizado desde os anos iniciais do ensino fundamental até a Universidade nas mais diferentes disciplinas Matemática, Física e Geometria Gráfica, por exemplo.

De acordo com Hoffman (2000), esse *software* oferece um conjunto de ferramentas para a construção de objetos geométricos a partir de propriedades que os definem:

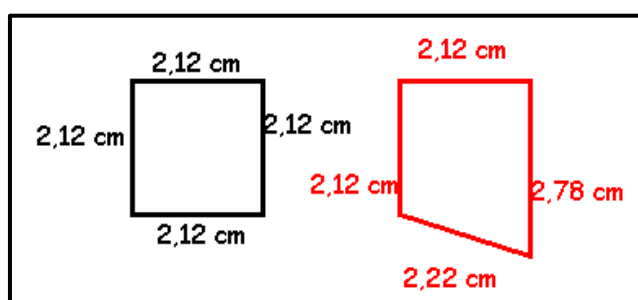
[...] com esta ferramenta, os desenhos dos objetos geométricos são feitos a partir das propriedades geométricas que os definem. Mas não é só isto a riqueza que “software” oferece para o ensino e aprendizagem da geometria, e é aqui que está o seu grande potencial – registrado no seu próprio nome “*Cahier de Brouillon Interactive*” (Caderno Interativo de Rascunho): por meio de deslocamentos aplicados aos elementos que compõem o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto temos associada uma coleção de “desenhos em movimento” e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas do objeto (HOFFMAN, 2000, p. 2).

Ela coloca ainda que já nos primeiros contatos com o *software*, ele surpreende, pois “mesmo já sabendo que os recursos do programa dão estabilidade às construções, os alunos produzem essencialmente desenhos do tipo “a mão-livre”, sem a preocupação de preservar as relações geométricas existentes no objeto geométrico” (HOFFMAN, 2000, p. 2). Essa autora se refere aos resultados de sua experiência com uma turma de licenciatura em matemática, na qual era monitora, e expõe que a disciplina de Geometria I tinha como foco para o estudo de conteúdos geométricos o uso do *software Cabri Géomètre*.

Nesse ponto, ele difere-se do *Apprenti Géomètre 2*, em que para se construir um quadrado é preciso apenas selecionar a opção quadrado do Menu quadriláteros/Figuras à mão livre, e em seguida definir dois pontos AB (em um dos lados do quadrado) e o *software* fixa a representação desse quadrado. Ao clicarmos no menu “Modificar” e escolhermos um dos vértices da figura, se o arrastarmos, ele fixa um ponto (um dos vértices) e podemos então observar que as propriedades da figura são preservadas (comprimentos dos lados de mesma medida, ângulos internos iguais a 90°). Assim, o *Apprenti Géomètre 2* traz mais uma noção intuitiva, a qual, implicitamente a essa ação, corresponde a quadrados construídos baseados nas propriedades de lados congruentes e ângulos retos.

De acordo com Hoffman (2000), os sujeitos de sua pesquisa, ao iniciarem o estudo com o *Cabri*, tentavam construir um quadrado por meio de segmentos de mesma medida, fazendo um traçado cuidadoso e usando o recurso de medida para conferir se de fato é um quadrado. Mas, ao mover os vértices do suposto quadrado, eles percebiam que este perdia suas propriedades porque, de fato, não foi explicitado ao “*software*” as propriedades que caracterizam o quadrado, como ilustramos a seguir na figura vermelha.

Figura 29- Construção no Cabri

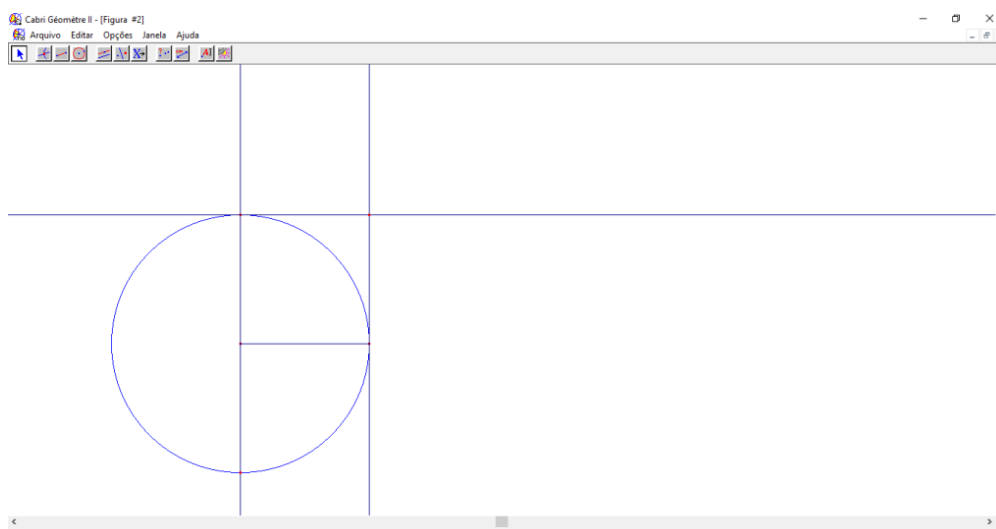


Fonte: Hoffman (2000)

Para Gravina (2001, p. 99), “a estabilidade sob a ação de movimento resulta das relações geométricas impostas à construção e que encerram as propriedades características do quadrado enquanto objeto geométrico”.

Para se construir um quadrado no *Cabri*, temos a seguinte possibilidade: primeiro, construir um segmento AB e, em seguida, uma circunferência com centro em A; depois, traçar uma perpendicular a AB passando por A e um ponto de interseção entre essa reta e a circunferência; logo após, traçar outra perpendicular a AB, passando por B, e uma reta paralela ao segmento AB, passando pelo ponto de interseção anterior; por fim, deve-se colocar um ponto de interseção entre a paralela e a perpendicular que passa por B.

Figura 30- Construção de um quadrado



Fonte: da pesquisa

Pode-se ainda construir de outras formas, como por exemplo:

Traçar um segmento AB; retas perpendiculares ao segmento passando pelos extremos; círculo de centro A passando por B e interceptando uma das retas em D; círculo de centro B passando por A e interceptando a outra reta em C; segmento AD, DC e CB. Este quadrado será instável sob a ação de movimentos. E mais, a congruência do segmento DC aos demais lados, bem como a perpendicularidade nos vértices D e C são fatos não declarados na construção e ali “estão”- são fatos estáveis implícitos, então passíveis de demonstração (GRAVINA, 2001, p. 99).

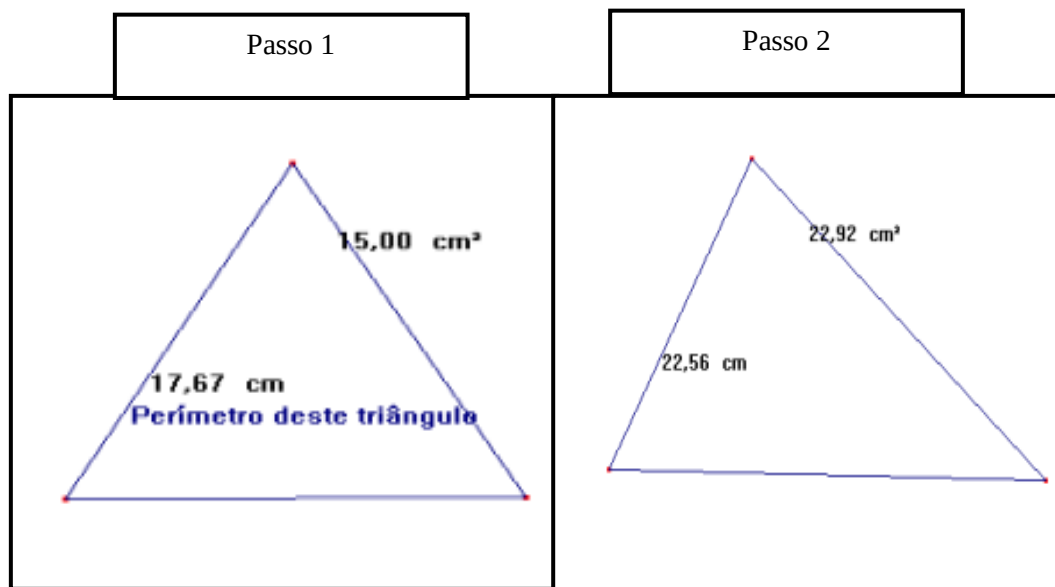
De uma forma geral, as construções que são realizadas nos *software* que implementam a geometria dinâmica, em que as ferramentas de régua e compassos virtuais estão presentes, oferecem recursos de estabilidade sob a ação de movimento, ou seja, assim que uma construção é feita, a partir de deslocamentos que são aplicados aos elementos iniciais que determinam o objeto geométrico, “o desenho na tela do computador ‘instância de representação do componente figural’ transforma-se mas preserva, nas novas instâncias, as relações geométricas impostas inicialmente à construção, bem como as relações dela decorrentes” (GRAVINA, 2001, p 98).

Mas é possível, ainda, construir um quadrado sem necessariamente recorrer a tais construções, por meio da ferramenta polígono regular, que permite além do quadrado que as propriedades das figuras construídas por meio dela sejam preservadas, ao deslocarmos os vértices das figuras. Ou seja, no *Cabri Géomètre 2*, por meio da ferramenta polígono regular, pode se construir um polígono regular convexo ou em estrela, definido por um centro de “n lados (30 ou menos)”. Um polígono regular consiste de lados congruentes e de ângulos congruentes.

Do ponto de vista da construção conceitual de área, as questões supracitadas são relevante, para o desenvolvimento das diferentes situações que dão sentido à área (FERREIRA, 2010), como as de produção de superfície, por exemplo.

Outro fator de destaque para o trabalho com área e perímetro é a presença da malha pontilhada quadrada e de ferramentas, por meio das quais podemos expressar a área da figura (em cm^2), o perímetro e o comprimento (em cm) dos lados das figuras geométricas planas construídas em sua *interface*. Permite, também, visualizar a variação da área ao deslocarmos os vértices da figura, assim como o perímetro, mas é possível também, ao fixarmos a altura do triângulo, por exemplo, observar a invariância da área e variação do perímetro. As ilustrações a seguir apresentam essas duas situações.

Figura 31- Ferramentas no Cabri



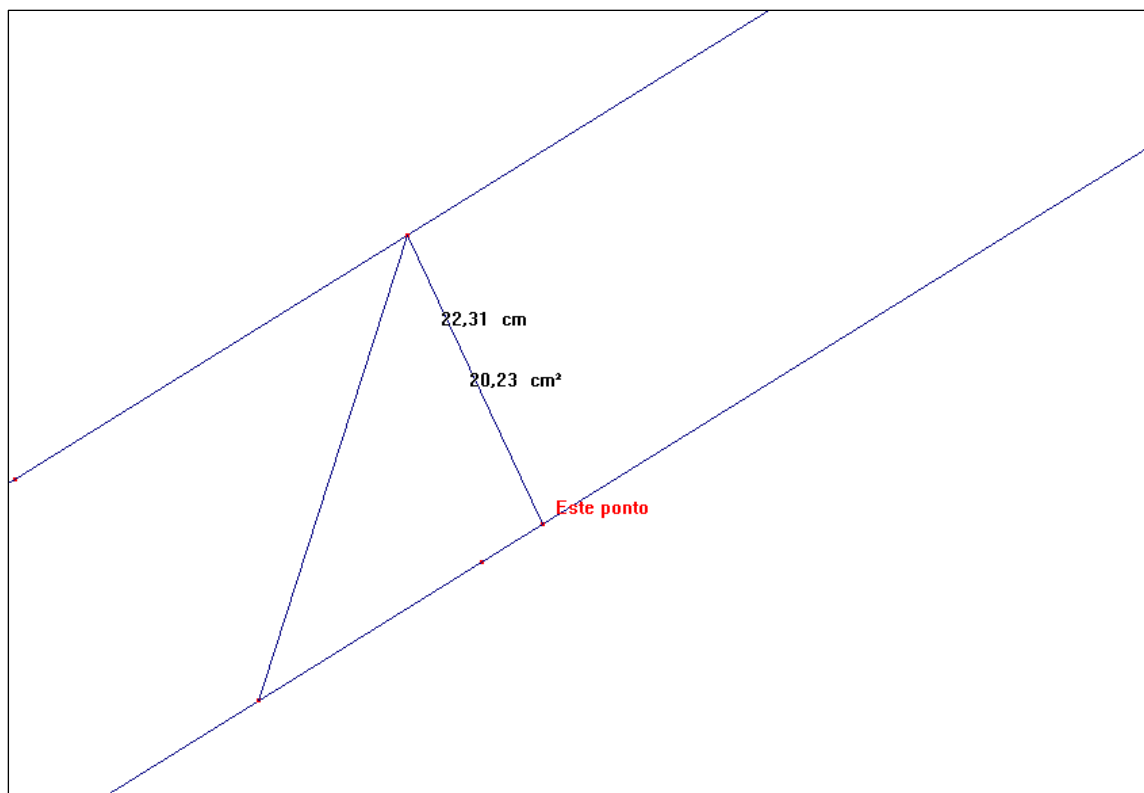
Fonte: da pesquisa

Na imagem acima, temos um triângulo qualquer (passo 1). Para determinarmos a área, selecionamos a ferramenta “área” e em seguida clicamos na figura, assim como o

perímetro e o comprimento (distância entre dois pontos). Logo em seguida, é apresentado o par número mais unidade de medida de área (15,00 cm²). É possível, assim como a área, escolher outra unidade de medida, no caso do perímetro ou do comprimento.

No passo 2, pegamos um dos vértices do triângulo e o arrastamos. O *software* rapidamente mostra a variação da área, do perímetro e do comprimento dos lados da figura, nessa situação. Na próxima figura, pode ser observado que um triângulo foi construído entre duas retas paralelas. Neste caso, a área e o perímetro não necessariamente variam no mesmo sentido, um aspecto relevante ao estudarmos área, pois permite a dissociação entre a área e o perímetro.

Figura 32- Exemplo que área e perímetro não variam no mesmo sentido



Fonte: da pesquisa

Alguns programas de geometria dinâmica, como o *Cabri*, possibilitam a mudança de elementos de *interface* por meio de ferramentas denominadas de “macroconstrução”, podendo-se restringir funcionalidades com fins didáticos específicos. De acordo com Sangiacomo et al. (1999):

Uma característica importante do Cabri-géomètre é a possibilidade de ampliar as opções do menu CONSTRUÇÃO, ou seja, a possibilidade de acrescentar novas construções. Quando uma determinada construção já foi suficientemente explorada e compreendida, a mesma pode ser incorporada ao menu para ser utilizada como instrumento nas próximas etapas, ou seja, a construção muda do status de objeto

para o de ferramenta. Ou ainda no caso em que o objetivo do professor é explorar os invariantes de uma figura sem que os alunos tenham a necessidade de construí-la. Outra aplicação se refere a situações-problema que exigem várias repetições de uma certa construção. Para otimizar esse processo, podemos disponibilizar tal construção no menu (SANGIACOMO et al., 1999, p. 7).

Diante desse contexto, entendemos que por meio de “macroconstrução” é possível encapsular diversas etapas de uma construção em um único comando no *software*, facilitando o processo de outras construções mais complexas e, por conseguinte, enriquecendo a lista de ferramentas que ficam disponíveis aos usuários.

A presença da malha pontilhada neste *software* permite que sejam trabalhadas diferentes situações de comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície.

No *Cabri*, ainda é possível aplicar as transformações isométricas do plano (rotação, translação e reflexão) nas figuras construídas em sua tela. Contudo, a maneira como ele lida com as transformações diferem dos procedimentos utilizados no AG 2. Nesse, basta escolher uma das ferramentas do menu movimento (Mover, Rotação ou Reflexão), clicar com o botão esquerdo do mouse em um dos vértices da figura, ou mesmo em seu centro, no caso da rotação, e realizar esse movimento diretamente na figura.

No *Cabri*, esse tipo de isometria é aplicado da seguinte forma: escolhe-se a ferramenta rotação, na caixa de ferramenta transformar, seleciona-se o objeto para girar, o ponto de rotação e o valor angular de rotação, ferramenta que rotaciona um objeto de um valor angular específico em relação a um ponto⁷⁰.

Com relação aos aspectos técnicos, o *Cabri* é de fácil instalação e, ao menos na versão analisada, 1.0 MS *Windows*, pode ser encontrado nos idiomas inglês, português, alemão, francês, espanhol e italiano (CREM, 2007a). Os menus são autoexplicativos, mas notamos que a *interface* não é tão atrativa e os menus e ferramentas ficam muito reduzidos. Quanto à navegabilidade entre as ferramentas, é preciso clicar com o botão esquerdo e, com o direito, escolher as ferramentas. Esse sistema difere de outros *software*, podendo não ser tão intuitivo, uma vez que, no geral, selecionamos com o botão direito e os demais menus aparecem em seguida. No menu ajuda não há um tutorial do *software*, mas é possível verificar em uma caixa na barra inferior algumas explicações sobre suas ferramentas.

⁷⁰ Ver as outras formas em

<<https://education.ti.com/pt/software/details/en/9FC193D5F0FC4863A9542085F5E46D63/cabri2>>.

3.4.2.9 Geogebra 5

O Geogebra é um *software* de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. Foi idealizado por Markus Hohenwarter, da Flórida Atlantic University, em 2001, e desenvolvido por uma equipe de programadores. É gratuito e livre em vários idiomas, escrito na linguagem Java e disponível para *download* em: <http://www.geogebra.org/cms/pt_BR>. É compatível com diferentes sistemas operacionais e há versões para dispositivos móveis como *tablets* e *smartphones*. O *software* é simples e fácil de manipular, e por isso pode ser usado da educação básica ao ensino superior.

Esse *software* permite a realização de diferentes atividades, dentre as quais podemos destacar a construção de pontos, segmentos de reta, retas paralelas e perpendiculares, gráficos de diferentes funções e figuras geométricas. Pode-se ainda medir a área, o comprimento, o perímetro e ângulo dos objetos geométricos criados em sua interface. A opção de construção de polígonos apenas com alguns cliques do *mouse* tanto regulares como irregulares mostra-se pertinente para auxiliar o usuário com pouco conhecimento da GD.

Encontramos também a opção de malha quadriculada, que pode ser ajustada: ora ela serve apenas de referência para as construções das figuras geométricas, como no caso do *Déclic*, ora permite ativar o comando “fixar a malha” em que automaticamente as construções vão se ajustando à mesma, não sendo possível com essa opção ativada construir uma determinada figura na metade dos quadrados que compõem a malha. Essas possibilidades são pertinentes por oferecerem condições para que se construam diferentes situações de área e perímetro em sua *interface*.

A ideia de como as figuras são preenchidas com cores chama-nos atenção por oferecer níveis de cores em gradação, o que pode ou não permitir a visualização da malha em que a figura foi construída. Esse tipo de ferramenta pode favorecer uma maior diversidade de resolução de atividades de área na malha quadriculada.

As ferramentas podem ser consideradas autoexplicativas, uma vez que a navegação entre elas é fácil e podem ser acessadas algumas vezes pelo teclado. É possível ainda realizar macroconstrução e configurar a barra de ferramentas para ocultá-las, se essa for a intenção do usuário. No menu ajuda, podem ser encontrados *links* que conduzem o usuário ao site oficial do Geogebra, no qual pode ser encontrado vários tutoriais para diferentes versões, inclusive uma em 3D. O Geogebra permite ainda a visualização de forma simultânea de dois tipos de registros de representação de objetos (gráfico e algébrico).

As figuras podem ser movidas facilmente sobre a *interface* do *software* e aplicadas as transformações isométricas do plano de diferentes formas, inclusive escolhendo o ângulo de rotação. Não localizamos uma ferramenta em que seja possível obter um histórico das construções. O Geogebra, assim como o Régua e Compasso, possibilita a construção do tangram e dos poliminós. Esses recursos, ao longo deste nosso estudo, mostraram-se pertinentes ao ensino e aprendizagem de área e perímetro de figuras planas. A seguir, apresentaremos algumas das possibilidades de construção do tangram. Quanto aos poliminós exporemos sua presença em forma de um jogo criado no Geogebra. O objetivo é mostrar que esses dois recursos podem ser construídos nesse micromundo, todavia requer que o usuário tenha domínio das funcionalidades de suas ferramentas e menus em um nível mais aprofundado.

3.4.2.9.1 O tangram no Geogebra⁷¹

O jogo tangram no Geogebra não está predefinido em seus menus, sua construção exige alguns procedimentos os quais explicitamos a seguir:

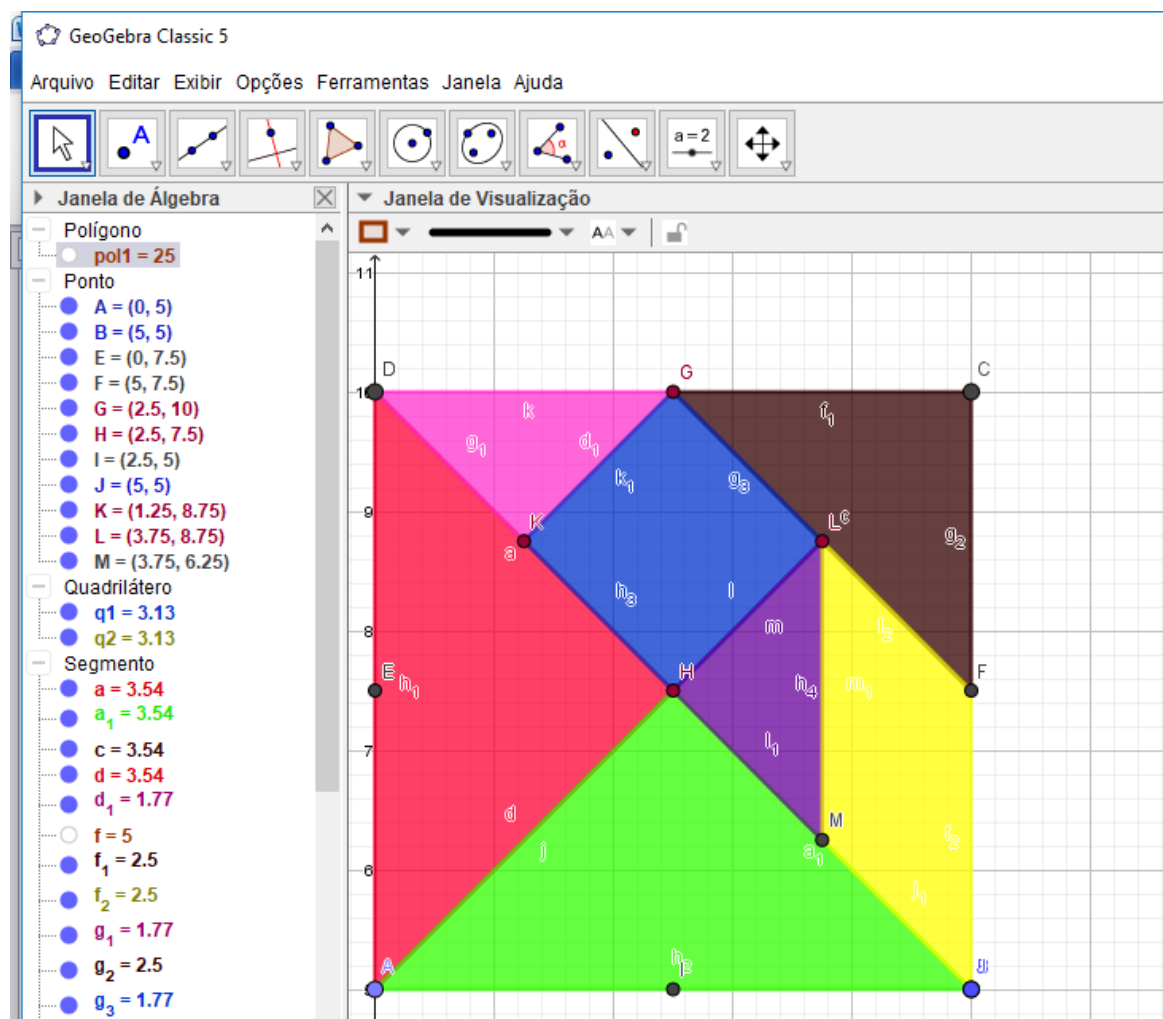
1. Traçamos, com a ferramenta “Polígono Regular”, um quadrado (polígono com 4 lados iguais), que chamamos de ABCD;
2. Marcamos o ponto médio dos segmentos AB, BC, AD e DC com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”. Chamamos o ponto médio de AB de I, o ponto médio de BC de F, o ponto médio de AD de E e o ponto médio de DC de G;
3. Marcamos, com essa ferramenta ainda ativada, um ponto no centro do quadrado criado;
4. Traçamos um triângulo ADH com a ferramenta “Polígono” passando pelo ponto médio de AD, para criarmos o primeiro triângulo grande que compõe o tangram;
5. Construimos, com a ferramenta “Polígono” ativada, o outro triângulo grande, passando pelos pontos AHB;
6. Marcamos o ponto médio do segmento DH, que faz parte de um dos lados do triângulo ADH que chamamos de K;
7. Construimos um dos triângulos pequenos passando pelos pontos DGK;
8. Construimos o triângulo médio passando pelos pontos GCF;
9. Marcamos o ponto médio de GF que chamamos de L;

⁷¹Os exemplos apresentados aqui não são únicos, o usuário pode usar sua criatividade e construir um tangram das mais diversas formas.

10. Construimos o quadrado. Para isso, com a ferramenta “Polígono”, traçamos o quadrado nos pontos GLKH;
11. Construimos o outro triângulo pequeno. Para isso, marcamos o ponto médio do segmento HB que denominamos de M, e, com a ferramenta “Polígono”, traçamos o triângulo nos pontos HLM;
12. Traçamos a última peça do tangram, o paralelogramo BFLM;
13. Colorimos cada uma das 7 peças criadas com cores diferentes, por meio do menu propriedade e da ferramenta colorir;
14. Colorimos, com nível de transparência 75, cada uma das figuras.

O resultado obtido pode ser conferido a seguir:

Figura 33- Tangram no Geogebra: um modelo

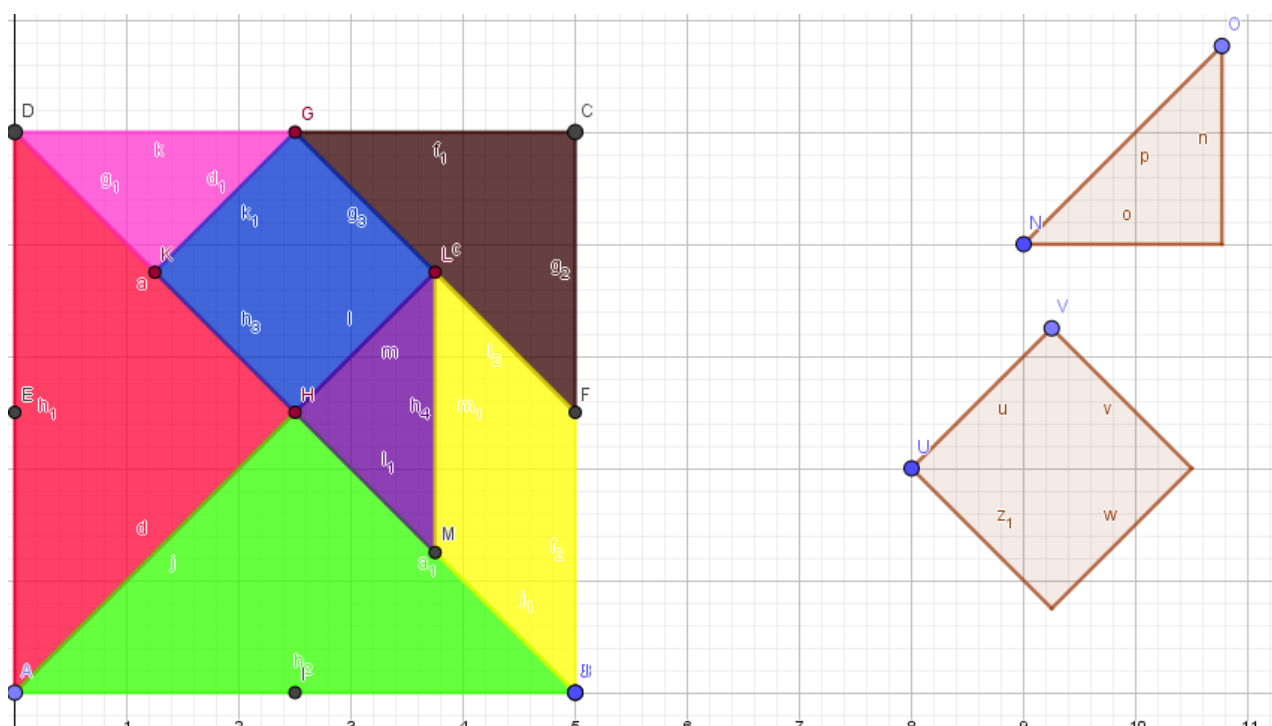


Fonte: da pesquisa

Por meio dos procedimentos realizados, pudemos chegar ao tangram (cf. figura 33). Entretanto, para utilizar as peças separadamente será preciso primeiro, na barra lateral (janela de álgebra), retirarmos o quadrado que traçamos no início como referência para construção do tangram. Para isso, basta apenas clicar “pol 1=25” que representa a área do quadrado ABCD.

Em seguida, é preciso escolher a ferramenta “Polígono Rígido”, e clicar em cada uma das peças. Elas, então, serão duplicadas e se destacarão automaticamente das demais. Todavia, será preciso colori-las novamente, caso o usuário queira. Diferente dessas peças que estão definidas no *software* AG 2 que será explorado na próxima subseção, só será possível nessa situação aplicar a rotação diretamente em um dos pontos, e mover (translação) por outro ponto que compõe o vértice da figura, como apresentamos a seguir:

Figura 34- Peças destacadas do tangram



Fonte: da pesquisa

Após termos clicado na ferramenta polígono rígido, no triângulo DGK e no quadrado KGLH, eles se destacaram. Assim, pudemos arrastar (transladar) sobre a malha o quadrado por meio do ponto U, ou rotacionar diretamente utilizando o ponto V, por exemplo.

A partir dessa construção, pudemos perceber algumas limitações. A primeira é que as peças nem sempre ficam no local escolhido pelo usuário na área de trabalho do *software*, a

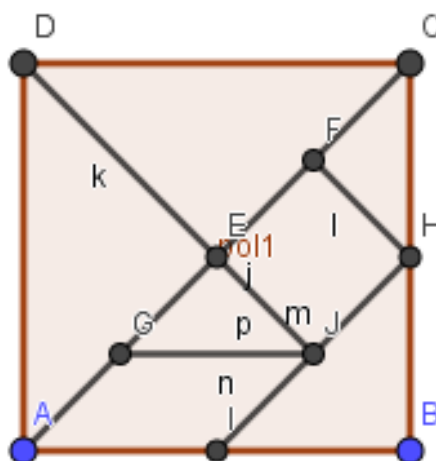
ideia de magnetismo não funciona, ou seja, ao aproximarmos um dos lados da figura ao de outra, não há uma junção das peças de forma que seus lados coincidam, tornando-se difícil a manipulação direta das peças para realizar atividades por meio desse tangram.

Pensamos então em outra possibilidade de construção para ter mais acessibilidade em relação aos movimentos (translação e rotação) das figuras, da seguinte forma:

1. Construímos um quadrado com a ferramenta “Polígono Regular”, que chamamos de ABCD;
2. Traçamos a diagonal AC, utilizando a ferramenta “Segmento”; após, marcamos, por meio da ferramenta Ponto “Médio ou Centro”, o ponto médio de AC, que chamamos de E, outro em CE, que denominamos de F, e outro em EA, que chamamos de G;
3. Marcamos, ainda com essa ferramenta ativada, o ponto médio do segmento CD, que chamamos de H, e de BA, que chamamos de I;
4. Traçamos o segmento DE, FH e HI;
5. Marcamos o ponto médio de HI, que denominamos de J;
6. Traçamos os segmentos GJ e EJ.

Com a construção concluída, obtivemos o seguinte resultado:

Figura 35- Tangram



Fonte: da pesquisa

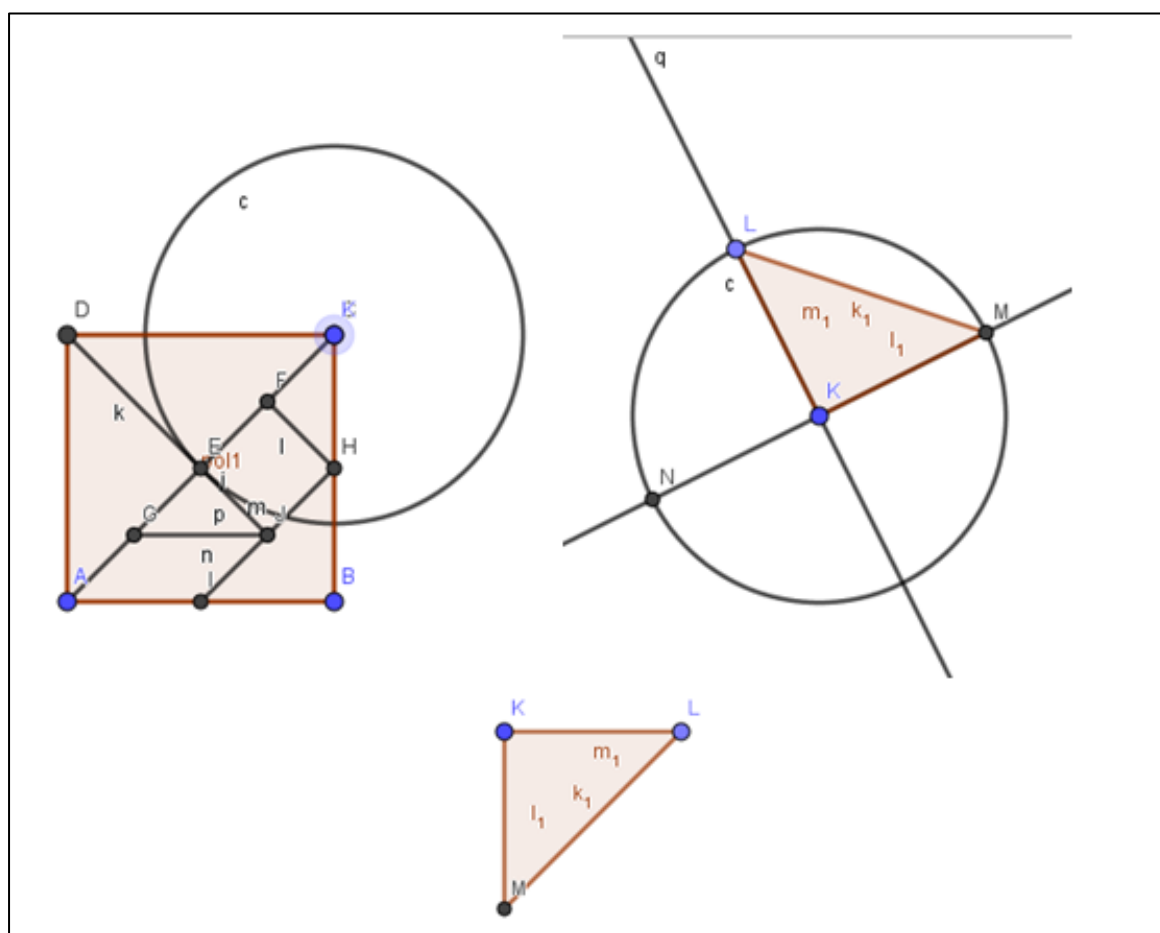
Contudo, para termos acesso às peças separadamente e podermos enfim manipulá-las, outros procedimentos ainda precisaram ser aplicados:

1. Traçamos o ângulo reto de cada figura por meio da ferramenta “Compasso”, principiando pelo triângulo DEC;

2. Marcamos o ângulo reto, clicando em EC e obtivemos uma circunferência de centro K;
3. Traçamos, ao escolhermos a ferramenta “Reta”, uma reta, clicando no centro da circunferência e depois na linha que a delimita, e chamamos essa reta de “q”;
4. Traçamos uma perpendicular à “q”, marcando o centro da circunferência;
5. Marcamos então um ponto de intersecção da circunferência com a perpendicular traçada;
6. Construimos, com a ferramenta “Polígono”, um triângulo passando pelos pontos LMK.

Abaixo podemos visualizar o resultado obtido.

Figura 36- Separando as peças do tangram



Fonte: da pesquisa

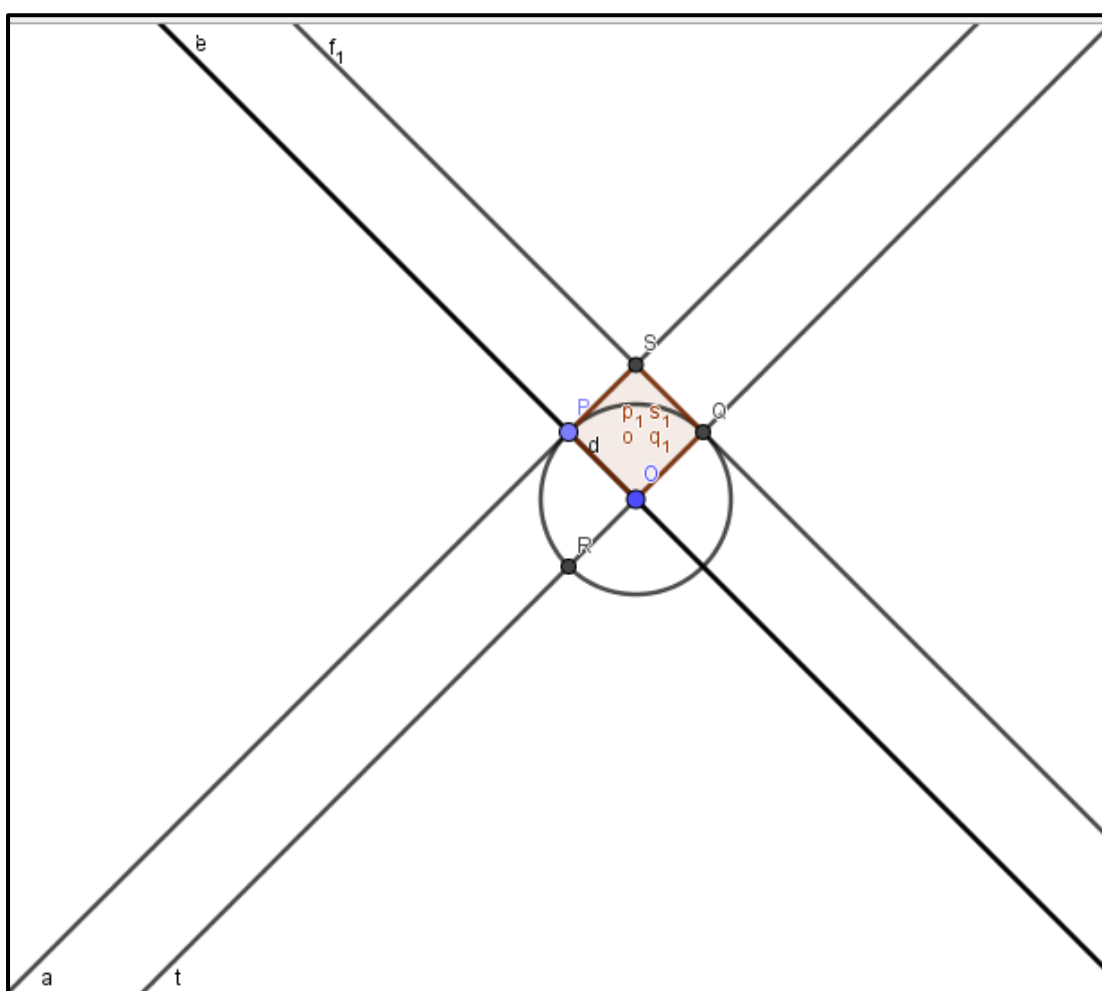
Após construirmos o triângulo grande do tangram, pudemos ocultar, por meio da ferramenta “Ocultar Objetos”, os objetos que permitiram a construção. Procedimento análogo

pode ser realizado para construir o outro triângulo grande, o médio e os dois pequenos. Nossas ações seguintes foram:

1. Marcamos, para o quadrado, o ângulo reto por meio da ferramenta “Compasso”;
2. Criamos uma circunferência com centro, que denominamos de “O”;
3. Traçamos uma reta “s” passando pelo centro, e uma perpendicular a “s” que chamamos de “t”;
4. Marcamos um ponto de interseção da circunferência com a perpendicular “t” também passando por “O”, uma paralela a “t”, que denominamos de “a”, e outra reta perpendicular a “a”, que chamamos de f_1 ;
5. Marcamos um ponto de interseção da reta “a” com a reta f_1 ;
6. Traçamos, com a ferramenta “Polígono”, um quadrado pelos pontos OPSQ

Obtivemos a seguinte construção:

Figura 37- Construindo o quadrado do tangram



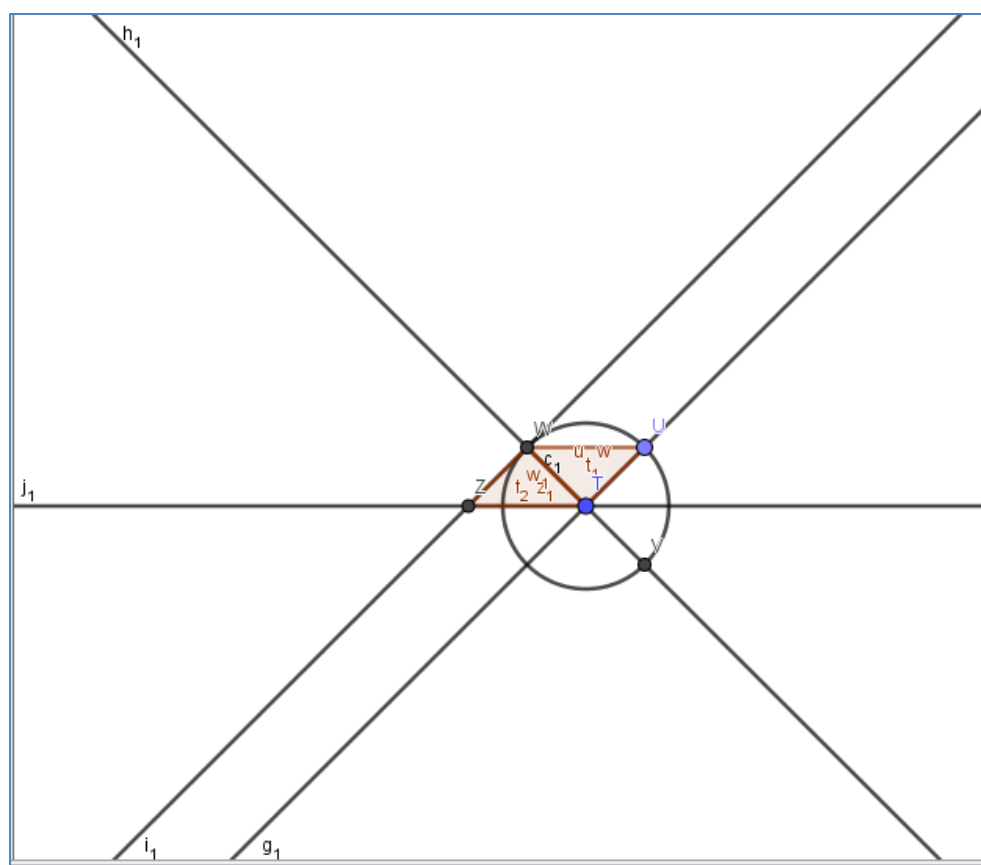
Fonte: da pesquisa

Para utilizar apenas o quadrado, tivemos que continuar o passo a passo.

1. Ocultamos os objetos que foram utilizados para sua construção e os movemos sobre a interface do Geogebra, obtendo a construção do paralelogramo;
2. Clicamos, com a ferramenta “Compasso” ativada, nos pontos G e I, que formam uma das diagonais do paralelogramo, obtendo, assim, uma circunferência de centro T;
3. Traçamos uma reta g_1 passando por esse centro, e uma perpendicular à g_1 , que chamamos de h_1 , também passando pelo centro T;
4. Marcamos um ponto de interseção entre a circunferência e a reta h_1 ;
5. Criamos um triângulo passando pelos pontos TUW, uma reta I_1 paralela à g_1 e outra ao lado WU do triângulo construído, e um ponto de interseção nas retas I_1 e J_1 ;
6. Construimos, com a ferramenta Polígono, um paralelogramo passando pelos pontos ZWUT.

Dessa forma, obtivemos o seguinte:

Figura 38- Construção do paralelogramo no tangram



Fonte: da pesquisa

Com isso, as peças do tangram poderão ser utilizadas separadamente para a realização de diferentes atividades. Mesmo que na construção dos dois tangrans explicitados vários conceitos geométricos possam ser construídos e trabalhados, pode-se perceber a complexidade que é a construção dessa figura, sendo preciso ter domínio das ferramentas dos *software* e noção de construção com régua e compasso em *software* de geometria dinâmica.

Assim, não é tão econômica sua construção se a intenção é trabalhar com tarefas de área e perímetro, posteriormente. As peças que foram criadas por meio dessa construção apresentam as mesmas limitações da anterior. Destacamos, então, a necessidade da construção dessa ferramenta já preestabelecida, de forma que as transformações isométricas do plano sejam empregadas às mesmas sem grandes investimentos, como realizamos no AG 2.

É possível, ainda, encontrar alguns tangrans predefinidos disponíveis no site <<https://www.geogebra.org/materials>>, como também outros tipos de quebra-cabeça. Entretanto, foram encontradas em muitos deles limitações como as que foram apresentadas. Desses materiais predefinidos, a ideia está exclusivamente voltada para construção de figuras por meio das peças do tangram, não sendo possível decompor, apenas mover e rotacionar as peças por um ponto, o que pode não oferecer condições para que sejam criadas diferentes tipos de tarefas de área e perímetro.

3.4.2.9.2 Os poliminós no Geogebra

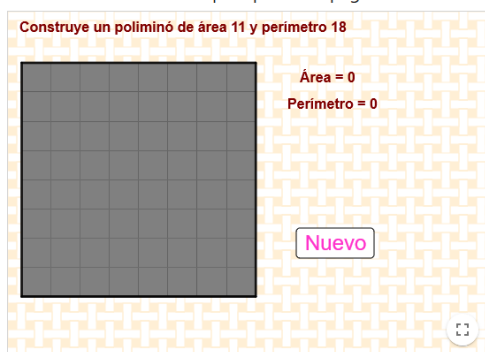
Também podemos localizar, no site supracitado, alguns jogos em que é possível verificar o trabalho com os poliminós, como apresentamos a seguir:

Figura 39- Jogo Poliminós

Desafío de los poliminós

Autor: Marco A. Manetta, Equipo de Matemática Plan Ceibal

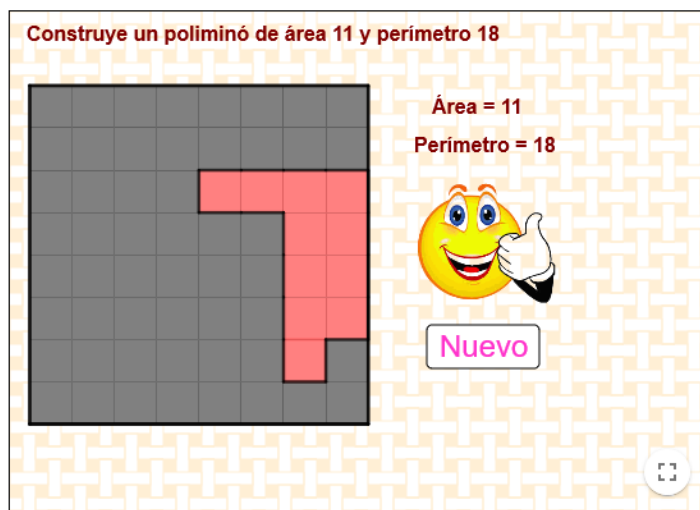
Selecciona los cuadrados para pintar o apagar



Fonte: Geogebra (2018). Disponível em <<https://www.geogebra.org>>. Acesso em 12 de setembro de 2018.

Nesse jogo, o usuário precisa ir montando um poliminó que tenha área e perímetro de acordo com a indicação acima do tabuleiro. A partir do momento em que se clica no tabuleiro, automaticamente a área e o perímetro vão sendo expressos ao lado direito da tela. Ao concluir a construção a seguinte mensagem aparece:

Figura 40- Finalizando o jogo



Fonte: Geogebra (2018). Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/tgQb5yPD>>. Acesso em 12 de setembro de 2018.

A partir de então, o usuário poderá encontrar um novo desafio. Chama-nos a atenção o fato de haver, no próprio site do Geogebra, diferentes jogos e simulações que podem ser aproveitados para o trabalho com situações que envolvem a área e o perímetro de figuras planas. Ainda assim, se o professor desejar utilizar outras peças do jogo poliminós ou mesmo criar situações diferentes das que estão programadas, precisará de fato construir as peças desse jogo previamente.

Para isso, poderá acessar a malha quadriculada no *software* e escolher a opção Polígono Rígido, cuja função é a construção de polígonos, de forma que, ao ser arrastado um dos vértices, o polígono não deforma. O usuário pode também arrastar a figura criada sobre a tela por meio de um dos vértices e rotacionar por outro. Como os poliminós são formados por quadrados justapostos pelos lados, basta com essa ferramenta ativada ir contornando os quadrados da malha até finalizar a construção. A dificuldade é que são muitas as peças desse jogo e não é tão econômica a construção de todas, nem tão simples criar uma ferramenta que comporte todas essas peças na lógica de uma macroconstrução.

3.4.3 Síntese do Capítulo

Nesta seção, apresentamos recursos contidos nos *software* que implementam a Geometria Dinâmica, e podem ser úteis ao professor no desenvolvimento de situações de aprendizagem de área e perímetro, com o objetivo de explicitar o modo como cada um desses ambientes lidam com as diferentes formas de construir figuras, o trabalho com as malhas e a decomposição de figuras. A possibilidade de construção de novas ferramentas (macro-construções), de configuração de menus e acompanhar o histórico das construções, também foram destaques nas análises dos *software*, uma vez que podem contribuir com o planejamento do professor.

Destacaremos no quadro a seguir, de forma mais pontual, ferramentas que achamos pertinentes como suportes ao professorado na criação de situações de aprendizagem de área e perímetro. Tomamos como base para isso, algumas das ferramentas e menus do *Apprenti Géomètre 2*, pois, embora não tenha sido desenvolvido especificamente para o trabalho com área e perímetro de figuras geométricas planas (CREM, 2007b), contempla diferentes recursos pertinentes ao estudo desses conceitos.

Elencamos, então, alguns elementos de análise (legenda a seguir), com o objetivo de especificar o tratamento dado nos *software* de GD estudados em nossa dimensão informática aos recursos que acreditamos serem pertinentes ao trabalho conceitual de área e perímetro como grandezas:

AF: Ausência da ferramenta.

CAC: Construção com alto custo.

CBC: Construção com baixo custo.

CGD: Construção de figuras (características da Geometria Dinâmica).

MD: Manipulação direta.

OLC: Outra lógica de construção das figuras.

OP: Objeto predefinido.

PF: Possui a ferramenta.

Quadro 3- Recursos digitais para o ensino de área

RECURSOS	SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA								
	AG 2	Cabri Géomètre	Cinderella	Déclic	Open Euclide	Geogebra	Igeom	R.A.C	Tracenpoche
Malha quadriculada	AF/CAC	AF/CAC	PF	AF/CAC	AF/CAC	PF	PF	AF/CAC	AF/ CAC
Malha isométrica	AF/CAC	AF/CAC	PF	AF	AF/CAC	AF/CAC	AF/CAC	AF/CAC	AF/ CAC
Malha pontilhada isométrica	PF	AF	AF	AF	AF	AF	AF	AF	AF/ CAC
Malha pontilhada quadrada	PF	PF	AF	AF/ CAC	AF	AF	AF	PF	AF/ CAC
Tangram	OP	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC
Poliminós	OP	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC
Ladrilhos predefinidos	OP	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC
Decomposição	PF	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC
Recomposição	PF	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC	AF/ CAC
Transformações isométricas (translação, rotação e reflexão)	PF/MD	PF/MD	PF	PF	PF	AF/ CAC	PF	PF	PF
Construção de Diferentes polígonos	OLC	CGD	CGD	CGD	CGD	CGD	CGD	CGD	CGD
Polígonos regulares	OLC	PF	PF	PF	PF	PF	AF/CGD	PF	CGD
Polígonos quaisquer	OLC	PF	PF	PF	AF	PF	AF/CGD	PF	PF
Figuras não poligonais (circunferência e arco)	CGD	PF/CGD	PF/CGD	PF/CGD	PF/CGD	PF/CGD	PF/CGD	PF/CGD	PF/CGD
Medir a área	AF	PF	PF	AF	AF	PF	AF	PF	AF
Medir perímetro	AF	PF	AF	AF	AF	PF	AF	AF	AF
Medir comprimento	AF	PF	PF	PF	PF	PF	PF	PF	PF

Fonte: da pesquisa

Por meio do quadro, pudemos perceber que grande parte dos *software* estudados não possuem elementos que acreditamos serem pertinentes ao estudo de área e perímetro, tais como: menus com ladrilhos predefinidos, tangram, poliminós, malhas quadriculadas, isométricas, e não permitem diretamente a decomposição e recomposição de figuras como acontece no *software Apprenti Géomètre 2*.

Isso não implica dizer que não seja possível criar situações que permitam decompor figuras, construir o tangram, as peças do jogo poliminós, malhas quadriculadas e isométricas para trabalhar com os conceitos de área e perímetro, mas as análises apresentadas anteriormente nos mostram que o custo não seria tão baixo, ou seja, demandam a familiarização efetiva de muitas funcionalidades de várias ferramentas.

Nesta seção, também levamos em conta nas análises dos *software* alguns aspectos técnicos, dentre eles: compatibilidade, portabilidade, exigências para instalação, interface atrativa, facilidade no manuseio, ferramentas autoexplicativas, disponibilidade de tutorial e menu ajuda, e navegabilidade. Verificamos que nem todos os *software* analisados possuem *interface* atrativa, com ferramentas autoexplicativas e que permitem facilidade no manuseio.

Um exemplo disso é a possibilidade de arrastar as figuras sobre a tela, haja visto que, em alguns *software*, essa possibilidade não segue a maneira usual, que é clicar sobre a figura com o botão esquerdo *mouse* pressionado e movê-las. Essas características serão pertinentes para pensarmos a parte técnica do *software* e a interação homem-máquina no desenvolvimento do mesmo.

Com relação às ferramentas de macroconstrução, podem ser encontradas nos *software*: AG 2, Cabri Géomètre, Cinderella, Déclic, Geogebra e Régua e Compasso. Porém, a configuração de menus, um elemento importante para o planejamento do professor, pôde ser identificada apenas nos *software*: AG 2, Cabri Géomètre, Cinderella, Geogebra e Igeom. Por sua vez, a opção histórico das construções, que permite verificar em alguns passos as construções de objetos realizadas pelo usuário (aluno), só foi encontrada nos *software*: AG 2, Déclic, Igeom e Tracenpoche. Entretanto, a maneira de guardar o histórico apresenta-se diferente, como explicitamos nas análises individuais.

3.5 Potencialidades dos Software Apprenti, Cabri e Geogebra no Ensino de Área e Perímetro⁷²

As pesquisas realizadas pelo CREM (*Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*), de 2005 a 2007, com alunos de 10 a 14 anos da comunidade francófona na Bélgica, por meio de atividades desenvolvidas com o uso do *Apprenti Géomètre 2*, tiveram como objetivo verificar o impacto desse *software* na resolução de situações-problema, envolvendo a aprendizagem de área. O CREM (2007b) pretendia observar a evolução dos alunos a respeito do conceito de área durante o ano letivo. Para isso, os dividiram em dois grupos, um experimental e o outro de controle.

Ambos os grupos trabalharam com atividades similares: o grupo controle com papel e lápis e o grupo experimental com o uso do *software*. Como resultados, o CREM (2007b) concluiu que os procedimentos de resolução de atividades dos dois grupos nem sempre são idênticos, e que as crianças que utilizaram o *software* desenvolveram alguns reflexos que não tinham antes, como o de decomposição e sobreposição. Além disso, o *Apprenti Géomètre* ofereceu um conjunto de ferramentas que permitiu aos alunos manipular diversos materiais (figuras geométricas padronizadas) de forma ilimitada. Para o CREM (2007b), esse fator contribuiu para as resoluções das situações-problema de área e perímetro que foram propostas.

Nossa pesquisa de mestrado (SILVA, 2016) teve como objetivo investigar o tratamento dado por estudantes (12 a 13 anos) do 6º ano do ensino fundamental a um conjunto de situações que dão sentido a área como grandeza, em três ambientes distintos: papel e lápis, materiais manipulativos e um *software* de geometria, *Apprenti Géomètre 2*. Esse estudo foi fundamentado na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud, que reúne com êxito contribuições da Psicologia Cognitiva, da Didática da Matemática e da Matemática, e que vêm ajudando a entender como as crianças formam e desenvolvem conceitos matemáticos, a partir da observação de suas estratégias de ação (GITIRANA et al., 2014, p.7).

Pretendia-se, então, por meio das estratégias de ação mobilizadas pelos sujeitos da pesquisa na resolução de tarefas similares sobre área nos ambientes supracitados, identificar os teoremas em ação⁷³. Os estudantes que responderam as tarefas sobre área no ambiente denominado de “materiais manipulativos” tiveram à disposição um *kit* contendo malhas pontilhadas (isométrica e quadrada), malhas quadriculadas e isométricas, tesoura, papel de

⁷²Escolhemos fazer apresentação das potencialidades desses três *software* por estarem presentes em várias pesquisas como forma de aprimorar o processo de ensino e aprendizagem de área e perímetro.

⁷³ Em capítulos anteriores, abordamos essa teoria e o que são teoremas em ação.

decalque, fita adesiva, lápis grafite e de colorir, cola branca. Os que utilizaram o *software* de geometria *Apprenti Géomètre 2* puderam utilizar um conjunto de ferramentas, como as de decomposição de figuras.

Alguns teoremas em ação verdadeiros foram identificados nas resoluções das tarefas sobre área de figuras planas, tanto no ambiente materiais manipulativos, quanto no AG 2. Por exemplo, *a área é invariante por isometria e a decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição conserva a área*. Esse último teorema em ação só foi identificado nas resoluções dos estudantes que utilizaram o AG 2. Silva (2016) conclui seu estudo afirmando que a disponibilidade de uma pluralidade de recursos, fornecidos nesses dois ambientes, favoreceu um avanço na superação das “concepções geométrica de área”.

Essas concepções se caracterizam por um amálgama entre a figura e a área, ou seja, para os sujeitos que mobilizam uma concepção geométrica, é como se a palavra área remetesse à própria figura e não a uma propriedade da mesma (FERREIRA; BELLEMAIN, 2013). Os estudantes, que só dispunham do lápis grafite para responder o conjunto de tarefas sobre área, não apresentaram em suas resoluções parcialmente ou plenamente um avanço nessa concepção.

Silva et al. (2017) realizou um estudo cujo objetivo era investigar como professores da Educação Básica que cursavam uma disciplina de Tecnologia na Educação, ofertada por uma faculdade de formação de professores, lidavam e avaliavam aspectos positivos e negativos do *software* de geometria *Apprenti Géomètre 2* como um recurso tecnológico digital para o ensino e aprendizagem de área como grandeza. Os sujeitos dessa pesquisa resolveram uma sequência de tarefas sobre área neste ambiente e, depois dessa primeira etapa, colocaram-se oralmente em relação ao uso desse *software* a partir da resolução das tarefas propostas.

Um dos aspectos relevantes do *Apprenti Géomètre 2* que é apresentado na fala do estudante 1 (professor da educação básica) é a possibilidade de decompor e recompor figuras, pois, segundo ele, o uso das ferramentas de decomposição e recomposição pode permitir ao aluno compreender a invariância da área, ajudando-o na superação da concepção geométrica de área. Outro sujeito desta pesquisa diz que os processos de decompor e recompor figuras são bem parecidos com os do papel e lápis. Entretanto, aponta que, nesse processo, o aluno poderá desperdiçar papel e não ter a possibilidade de verificar a invariância da área de determinada figura, sendo essas ferramentas pertinentes para esse estudo.

O estudante 3 coloca que, além da ferramenta de decomposição, a possibilidade de utilizar e duplicar os diferentes ladrilhos predefinidos no *software* e aplicar movimentos

(rotação, translação e reflexão) nas figuras oferece condições para que sejam ampliadas as estratégias de resolução de tarefas sobre área, como as de comparação e medida realizadas na aula. Os resultados desta pesquisa expuseram argumentos positivos em relação ao *software* em todas as falas dos sujeitos.

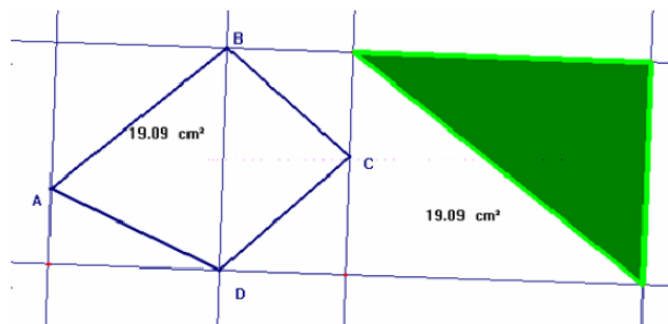
Baldini (2004), por sua vez, desenvolveu sua dissertação de mestrado com alunos do ensino médio. O objetivo de sua pesquisa era verificar, por meio de uma sequência didática, se o *software Cabri Géomètre II* contribuiria para a construção dos conceitos de área e perímetro. Essa autora constatou, em uma das atividades aplicadas, que esse *software*, pelo fato de proporcionar movimentos dos vértices das figuras sem alterar suas propriedades, permitiu aos alunos responderem satisfatoriamente que área e perímetro não variam no mesmo sentido e figuras de mesma área podem ter perímetros distintos e, reciprocamente, figuras de mesmo perímetro podem ter áreas diferentes.

Assim como Baldini (2004), Secco (2007) utilizou o *Cabri Géomètre 2* em sua pesquisa, que teve como objetivo apresentar uma proposta de ensino e aprendizagem sobre o conceito de área, por meio de uma sequência didática, a fim de evidenciar o aspecto bidimensional das figuras, voltado ao processo de composição e decomposição (reconfiguração). Sua pesquisa foi realizada com 71 alunos do ensino fundamental.

O foco do uso deste *software* era oferecer condições aos alunos para utilizarem diferentes procedimentos de resolução, baseando suas ações em experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair e generalizar formas de responder às atividades voltadas ao conceito de área.

A experiência com o uso do *Cabri Géomètre 2* nesta pesquisa motivou a resolução de diferentes atividades sobre área de figuras planas. Uma delas solicitava a construção de um triângulo equivalente a um determinado quadrilátero dado. O uso do *software* permitiu que uma dupla de estudantes utilizasse um raciocínio bem complexo. O autor dessa pesquisa não previa que tais estudantes apresentassem a seguinte resolução:

Figura 41- Triângulo equivalente



Fonte: Secco (2007, p. 158)

Os estudantes realizaram os seguintes procedimentos:

reta passando pelos pontos D e B; reta paralela ao DB passando pelo ponto A; reta paralela a DB passando pelo ponto C, retas perpendiculares ao DB passando pelos pontos D e B, construção de um retângulo idêntico ao circunscrito ao quadrilátero ABCD, construção da diagonal do retângulo e do triângulo verde, equivalente ao quadrilátero ABCD (SECCO, 2007, p. 158).

O autor conclui que os aspectos geométricos envolvidos na comparação das áreas por composição e decomposição de polígonos estavam presentes nas ações das duplas e que, para essa resolução, foram fundamentais as ferramentas de construção dinâmicas do *Cabri*.

Outro trabalho, desenvolvido por Gobbi (2012), consistiu na elaboração de uma sequência didática com o objetivo de investigar como alunos do 7º ano do ensino fundamental constroem conhecimentos sobre área e perímetro de figuras planas, utilizando como recurso o *software* Geogebra. Algumas das atividades aplicadas neste *software* para o trabalho com área consistiam no processo de ladrilhamento de figuras com diferentes unidades e produção de figuras a partir de uma quantidade suficiente de ladrilhos para a realização de uma determinada pavimentação. A autora ressalta que não houve dificuldades, por parte dos alunos para resolver as atividades propostas com uso desse *software* pelo fato de eles poderem arrastar as diferentes unidades de medidas dadas e girá-las de forma dinâmica.

Machado (2011) investigou a significação dos conceitos de perímetro e área em uma turma do sétimo ano do ensino fundamental sob a ótica do pensamento reflexivo de John Dewey⁷⁴ (1959). Esse autor desenvolveu um conjunto de tarefas sobre área e perímetro. Para a resolução das tarefas propostas, os estudantes tiveram à disposição o *software* de Geometria

⁷⁴ Machado (2011, p. 23) explicita que, segundo Dewey (1959), a aprendizagem acontece quando há compreensão de um conceito. Tal compreensão está relacionada à atribuição de significados evidenciados pelo uso e se estabelece não pelo conceito em si, mas por intermédio de alguma coisa que lhe sirva de testemunho, evidência ou prova.

Dinâmica Geogebra e, desse, os recursos: seletor⁷⁵, a malha quadriculada, as ferramentas que fornecem a medida, movimentos, arraste de pontos e construção de polígonos.

Em uma das tarefas dadas sobre área, o objetivo dos alunos era, utilizando o quadradinho da malha quadriculada do *software* como unidade de medida, desenhar cada uma das letras (siglas) que representam o nome da escola (E, E, R e O) com um formato reconhecível, tendo cada uma, ao final, 24 unidades de área.

Esse autor conclui que a experiência tornou positiva a produção de significados ao conceito de área em ambiente informatizado, pelo fato dele permitir a precisão dos desenhos, facilidade de construção, da aplicação de movimentos nas figuras, a potencialidade da visualização por meio da malha da figura construída, assim como fornecer a ferramenta que expressa a área medida. Esses fatores contribuíram com a resolução satisfatória desta atividade pelos estudantes, sujeitos de sua pesquisa.

Com relação ao perímetro, foi dado o seguinte problema: “pretendemos reformar o quadro da sala de aula seguindo a sugestão da professora de matemática. O quadro deve ter 1,5 metros de altura e ser construído de tal forma que não ultrapasse 15 metros em toda a sua volta. Qual seria o comprimento ideal para alcançarmos essas medidas?” (MACHADO, 2011, p. 163). Esse autor dá algumas sugestões de passos que devem ser tomados pelos alunos para resolver essa atividade por meio do Geogebra, com o objetivo de construir dois seletores que permitissem variar o comprimento e altura de um retângulo que deveria ser construído no *software*, oferecendo condições de os estudantes, por meio da visualização proporcionada pelos movimentos aplicados às figuras, chegarem a uma conclusão sobre qual seria a resposta.

Nesta atividade, não dispunham da ferramenta que expressasse o perímetro. Como resultado a essa questão, o autor coloca que os alunos observaram as representações diversas das figuras associadas ao quadro, as quais possibilitaram significar o perímetro nesta situação.

Por meio das análises realizadas nas pesquisas supracitadas, pode-se perceber a potencialidade de vários *software* de Geometria Dinâmica, dentre eles o *Apprenti Géomètre 2*, o *Cabri* e o Geogebra para o ensino e aprendizagem de área de figuras planas. Destacam-se a possibilidade de decompor do AG 2, as ferramentas de construção de figuras do *Cabri* e a utilização das malhas, do seletor e das ferramentas de arraste de pontos e mover do Geogebra.

⁷⁵ Seletor ou controle deslizante é um recurso do Geogebra. “Criar um seletor significa definir um intervalo de dados, representado por um segmento sobre a tela do Geogebra, com limite inferior, superior e um incremento que representa de quanto em quanto (escala), segundo a qual o seletor vai deslocar pelo movimento provocado pelo operador” (MACHADO, 2011, p. 76).

3.6 A Abordagem de Área e Perímetro em Diferentes Software

Com o objetivo de verificar o que tem sido produzido de recursos digitais (jogos, simulações e tutoriais) ao longo dos anos para o ensino e aprendizagem de área e perímetro, realizamos um levantamento em fontes diversas. Uma delas foi o Banco Internacional de Objetos Educacionais⁷⁶ (OEDs) do Ministério da Educação⁷⁷ (BIOE/MEC). Além dele, pesquisamos em alguns sites institucionais que permitem a exploração de recursos digitais gratuitos para o ensino e aprendizagem da matemática.

Um desses sites foi o *Hypatiamat*, disponível em <<https://www.hypatiamat.com/>>. Essa plataforma foi desenvolvida por pesquisadores da Universidade do Minho e de Coimbra que centram na criação de recursos tecnológicos digitais para o trabalho com conteúdos de matemática, do 1º ao 9º ano.

Outro site consultado foi o do projeto “*PhET*” - Simulações Interativas da Universidade de Colorado Boulder, disponível em <https://phet.colorado.edu/pt_BR>, que desenvolve simulações interativas gratuitas de matemática e ciências, visando a envolver alunos em ambientes interativos, como jogos, em que eles aprendem por meio da exploração e da descoberta (PORTAL DO PHET, 2018).

Nosso último material foi o protótipo do jogo “Construindo Loucuras”, desenvolvido por Prates (2011), cujo objetivo é trabalhar a ideia de ladrilhamento de figuras a partir de cerâmicas quadradas que devem ser compradas em uma loja pelo arquiteto/construtor. Este jogo foi desenvolvido para o trabalho com a situação de medida de área.

Analisaremos a seguir alguns dos recursos encontrados no BIOE, bem como alguns materiais disponíveis no portal dos sites supracitados, como jogos, simulações e tutoriais. Essa abordagem tem por meta explicitar como são explorados os conceitos de área e perímetro e, quando possível, sob a ótica da abordagem de área como uma grandeza. Nossas análises também almejam contemplar os aportes, lacunas e limitações de cada *software* para o estudo de área e perímetro, com base no que fora explicitado na dimensão didática e cognitiva deste texto. Além dos recursos encontrados para o trabalho com área e perímetro nestes ambientes, explicitaremos a análise do jogo “Construindo loucuras”, observando também a relação custo-benefício neste.

⁷⁶Um objeto de aprendizagem é um recurso digital cujo objetivo é dar suporte à aprendizagem de um conceito. (CARVALHO, 2012, p.1).

⁷⁷ Disponível em <<http://objetoseducacionais.mec.gov.br/#/ne/SU5GQU5USUw>>. Acesso em 23, de julho de 2018.

Nosso foco não é fazer um estudo exaustivo de todos os recursos que encontramos nos sites supracitados, mas dar visibilidade ao que tem sido produzido e que pode ser útil na abordagem em sala de aula dos conceitos de área e perímetro por professores da educação básica. Isso posto, iniciaremos apresentando alguns dos recursos localizados no BIOE do MEC, em seguida, os disponíveis no *Hypatiamat* tanto para dispositivos móveis como no próprio portal em um formato que podem ser utilizados nos IWB (*interactive whiteboards*)⁷⁸, seguidos das simulações interativas do *PhET* e, por fim, o jogo “Construindo Loucuras”.

Consideramos em nossa análise que, para permitir a construção de situações de aprendizagem de área e perímetro, um *software* precisa apresentar, em seus menus, diferentes tipos de ferramentas e condições por meio das quais os alunos possam explorar, criar conjecturas que lhes permitam dissociar área de figura, área de número e a área do perímetro, avançando na construção do conhecimento desses conceitos.

3.6.1 Banco internacional de objetos educacionais

Ao analisarmos o BIOE, podemos encontrar uma pluralidade de recursos que estão organizados em menus de acordo com as etapas da educação básica no Brasil ao ensino superior, contemplando também a educação profissional e outras modalidades de ensino. Os recursos são organizados de acordo com o tipo: simulação, imagem, vídeo, exercícios, experimento, hipertexto, aplicativo, texto, áudio, vídeos e slides.

Vale salientar que estes não são desenvolvidos pelo MEC (Ministério da Educação e Cultura), apenas estão presentes neste banco que serve como repositório. Dentre os recursos, selecionamos alguns que funcionavam corretamente em nossos computadores com sistema *Windows 64 bits* e cujo foco estava voltado para os conceitos de área e/ou perímetro, como os *software Geometry*, Triângulos e algumas simulações em *Adobe Flash player*⁷⁹.

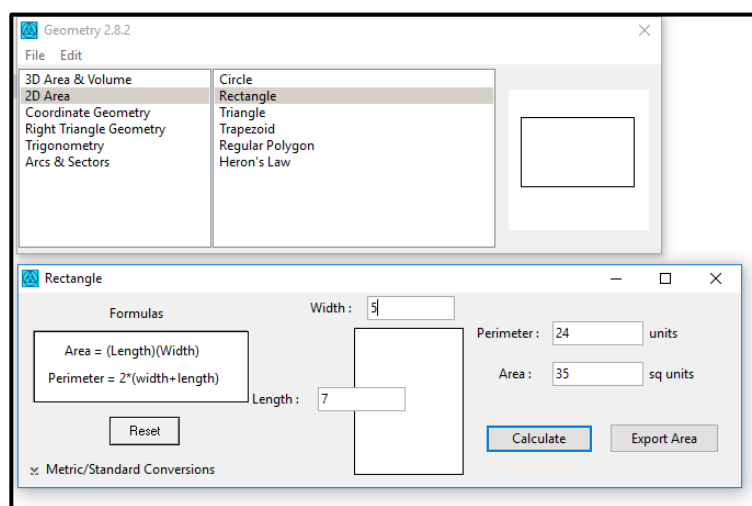
⁷⁸ Is an instructional tool that allows computer images to be displayed onto a board using a digital projector. The instructor can then manipulate the elements on the board by using his finger as a mouse, directly on the screen (BBC ACTIVE, 2010). Disponível em <<http://www.bbcactive.com/BBCActiveIdeasandResources/Whatisaninteractivewhiteboard.aspx>> . Acesso em 26 de julho de 2018.

⁷⁹ O *Adobe Flash Player* é um plugin multiplataforma, baseado em navegador, que permite a exibição de conteúdos e vídeos. Tecnicamente, ele é uma máquina virtual usada para executar arquivos SWF ou Flash (TECHTUDO, 2018). Disponível em <<http://www.techtudo.com.br/tudo-sobre/adobe-flash-player.html>>. Acesso em 23 de julho de 2018.

3.6.1.1 Geometry 2.8.2

O *geometry* 2.8.2 é um *software* gratuito para Windows 95/98/NT/2000/XP, desenvolvido por Travis East e encontra-se acessível para *download* em <<https://download.cnet.com/Geometry/>>. Nele, é possível calcular área, perímetro, volume, entre outros atributos de algumas figuras geométricas. A ilustração a seguir apresenta uma das telas do *software*, na qual o usuário pode calcular a área e o perímetro de um retângulo.

Figura 42- Geometry 2.8.2

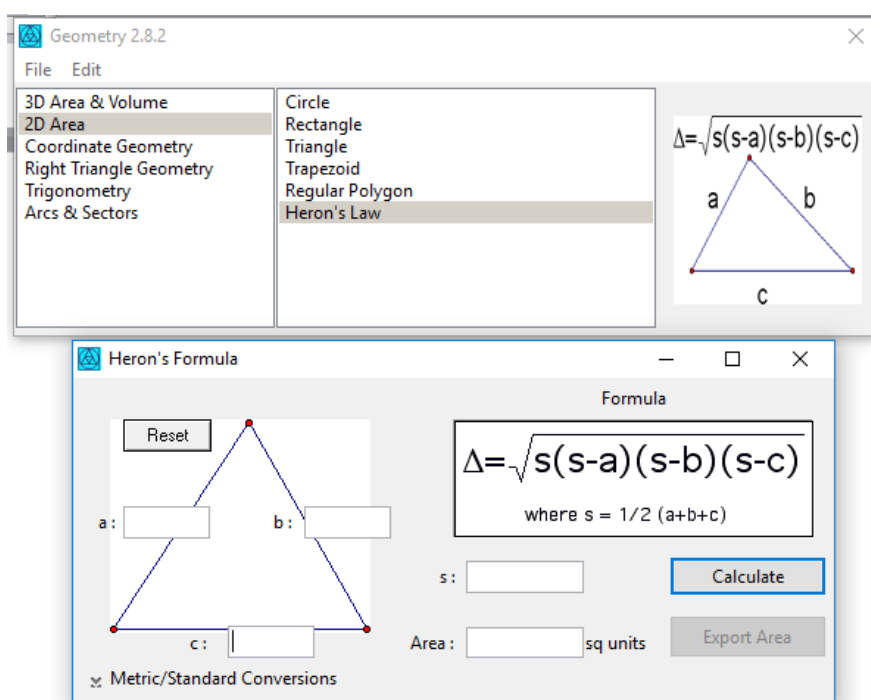


Fonte: da pesquisa

Após abrirmos a tela inicial do *software* e clicarmos nas opções 3D Area & Volume ou mesmo em “2D Area”, por exemplo, ele abre outra janela na qual é possível, por meio da inserção de algumas medidas, verificar a área e, quando possível, o perímetro e o volume. Na ilustração anterior, inserimos a medida do comprimento dos lados de um retângulo e pudemos ver o resultado do cálculo da área e do perímetro.

Heron de Alexandria é o responsável por elaborar uma fórmula que calcula a área de um triângulo em função das medidas dos seus três lados e é muito útil nos casos em que não sabemos a altura do triângulo, mas temos a medida dos comprimentos dos lados. O *Geometry* 2.8.2 contém uma ferramenta que realiza esse cálculo. Se dermos um clique duplo na opção *Heron's Law*, o *software* exibe a seguinte janela:

Figura 43- Cálculo da área de um triângulo



Fonte: da pesquisa

Ao inserirmos as medidas de a , b e c e clicarmos em calcular, ele apresenta a área e o semiperímetro do triângulo dado. Este *software* também está alinhado à condição de existência de um triângulo, ou seja, cada lado deve ser menor que a soma dos outros dois e maior que a diferença entre eles. Se colocarmos, por exemplo, $a=4$, $b=3$ e $c=9$, ele apresenta a mensagem que o “triângulo não existe”, dando um *feedback* a essa ação.

Mesmo que o foco da nossa pesquisa não sejam o estudo das fórmulas das áreas das figuras geométricas planas – que, segundo Lima (1995), são as funções que fornecem a medida de área, em termos do comprimento de segmentos associados à figura, sendo este procedimento indispensável para o cálculo de áreas –, decidimos apresentá-las como uma ferramenta que pode ser utilizada pelo professor.

Esse possível uso serve não apenas para mostrar o resultado gerado pelo *software*, mas para oferecer condições para que alunos construam o significado de cada uma dessas fórmulas. Afinal, a antecipação do uso das fórmulas na abordagem de área e seu tratamento de forma acentuada, sem que seja dado um devido significado, tem se mostrado um dos fatores que leva os alunos a uma concepção numérica da área (DOUADY, PERRIN-GLORIAN, 1989) e a amalgamarem área e perímetro (BALTAR, 1996), como explicitamos em capítulos anteriores.

Como limitações neste *software*, identificamos a ausência do cálculo da área de outras figuras geométricas, tais como quadrado, paralelogramo não quadrado e não retângulo, entre

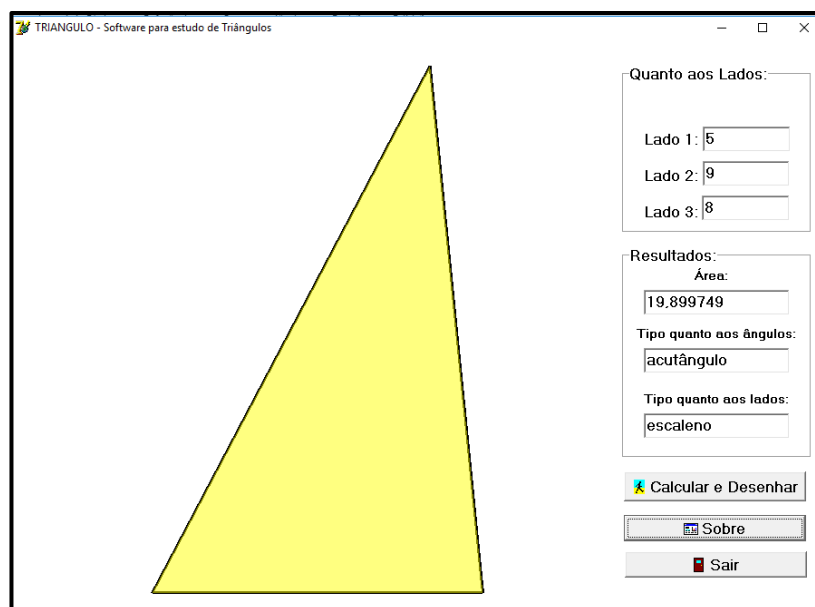
outras. O *software* não oferece condições para que, ao movimentar os vértices das figuras seja possível identificar a variância ou invariância da área e do perímetro, funcionando apenas como uma “máquina de calcular”, voltado a estabelecer a área, perímetro entre outros atributos de diferentes figuras.

3.6.1.2 Triângulos

O “Triângulos” é uma ferramenta educacional desenvolvida para auxiliar no estudo dos triângulos, e que possibilita a construção de triângulos de acordo com os lados sugeridos. “Serve como estímulo à curiosidade, ao interesse e à criatividade do alunado, pois permite que ele explore novas ideias e descubra novos caminhos na aplicação dos conceitos adquiridos sobre triângulos” (GRIGOROVSKI; CARVALHO, 2012, p. 8).

A figura a seguir mostra a *interface* deste *software*, desenvolvido em parceria entre alunos e professores da Universidade Severino Sombra, no curso de Sistema de Informação, 2008, disponível para *download* (CARVALHO, 2012).

Figura 44- *Software* triângulos



Fonte: da pesquisa

No *software* “Triângulos”, após inserirmos as medidas dos comprimentos dos lados e clicarmos na opção “Calcular e Desenhar”, ele apresenta automaticamente em sua tela a representação de um triângulo e expressa alguns resultados: a classificação de acordo com os lados (isósceles, escaleno ou equilátero) e quanto aos ângulos (acutângulo, retângulo ou obtusângulo), assim como o valor de sua área. Apresenta uma *interface* amigável e pode ser

utilizado em sala de aula, após serem trabalhadas as construções das fórmulas para o cálculo da área de triângulos.

Nesse *software*, não é possível calcular a área se forem dados, em um problema matemático, apenas a altura do triângulo e um dos seus lados, por exemplo. O *feedback* oferecido ao usuário com relação à “existência de um triângulo” é o mesmo que o *Geometry* 2.8.2. A figura gerada pelo *software* é estática, logo o usuário não tem como arrastar entes geométricos da figura, como o vértice, para visualizar o que vai acontecendo com a área da figura após esses procedimentos. Acreditamos que essa possibilidade seja pertinente, pois pode contribuir para que o usuário (aluno) perceba a variação da área, neste caso.

Outra limitação que podemos destacar é a ausência da representação da área pelo par (número + unidade de medida), o que pode reforçar a ideia de que a área da figura é um número, levando o aluno a confundir a área com a medida da área.

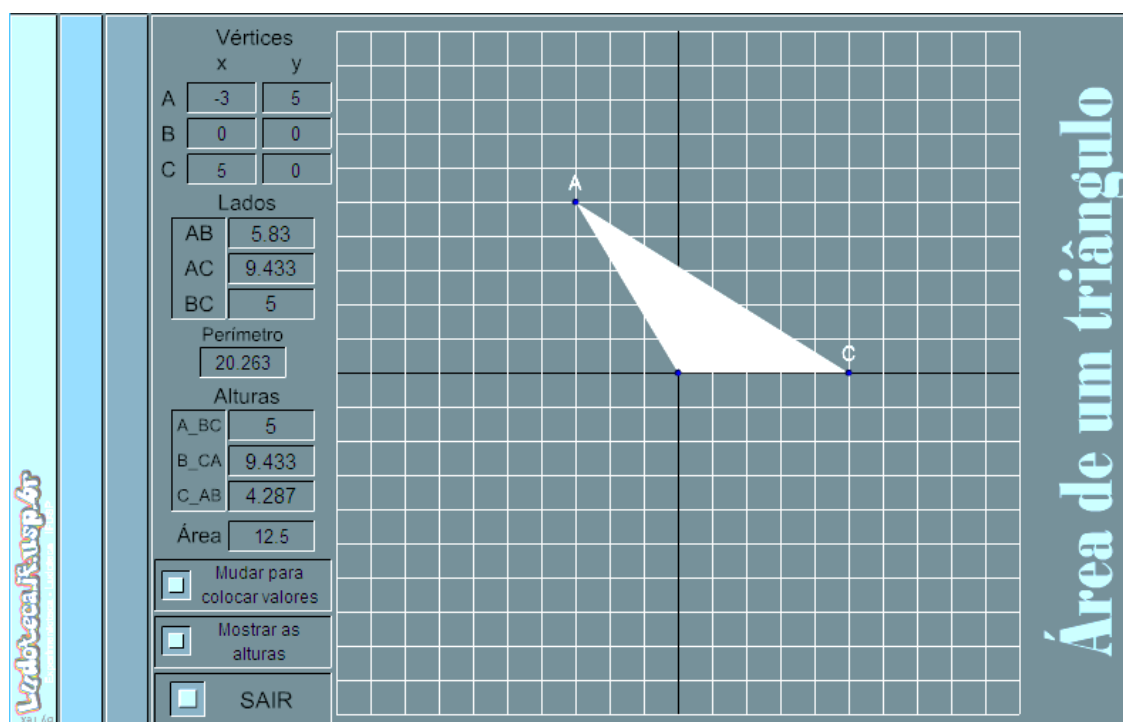
Ferreira (2010) apresenta em seu estudo uma atividade caracterizada como “produção de superfície a partir de um retângulo”, na qual eram dados os comprimentos dos lados (4 cm e 6 cm) para que os alunos desenhasssem, a partir desse, outro de mesma área e de perímetro menor. Como resposta à tarefa supracitada, a autora coloca que os alunos apresentavam apenas a parte numérica no resultado ou o número acompanhado da unidade de medida centímetros para área e/ou cm^2 para perímetro, apresentando confusão nas unidades de medidas estabelecidas.

Mesmo que este *software* tenha sido construído para o estudo de triângulos, e por decisão dos desenvolvedores foi colocada uma ferramenta para expressar as áreas, entendemos que deveriam ter estabelecido a unidade de medida referente ao comprimento dos lados (cm, m, etc.), como também que o resultado para representar a área dos triângulos fosse em (m^2 , cm^2 , etc.), o que ajudaria os alunos a perceberem que a área de uma figura deve ser expressa pelo par indissociável (número + unidade de medida).

Em outros dois *software* que são executados no *Adobe Flash Player*, também encontramos uma situação análoga à apresentada no parágrafo anterior. Um é denominado de “Área de um triângulo” e encontra-se disponível para *download* no site do BIOE, mas também em <ludoteca.if.usp.br>; e outro, de “Alturas do triângulo e ortocentro”, que pode ser encontrado em <<http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/>>.

O primeiro mostra o cálculo da área de um triângulo por três métodos diferentes: conhecendo-se a invariância da área por escolha da base e altura, as medidas dos lados, e, portanto, seu semiperímetro e as coordenadas dos vértices do triângulo. A imagem a seguir mostra a *interface* do *software* “Área de um triângulo”.

Figura 45- Software Área de um triângulo.



Fonte: da pesquisa

No manual⁸⁰ desta simulação, que faz parte de um dos aplicativos, podem ser encontradas algumas descrições dessa simulação, expondo a função de ferramentas do *software*. Os sistemas virtuais e os jogos foram desenvolvidos pela equipe do professor Dietrich Schiel, com finalidades especificamente educacionais e/ou de apoio ao processo de ensino e aprendizagem de Ciências, Matemática e áreas afins (Universidade de São Paulo-USP /São Carlos) (PORTAL CIÊNCIA A MÃO, 2018)⁸¹.

Vamos entender o que é possível fazer nesta simulação, que calcula a área de um triângulo utilizando métodos diferentes. Ao executarmos o programa, o triângulo já aparece predefinido. Os vértices A, B e C podem ser arrastados e, quando essa operação é realizada, as coordenadas desses pontos mudam, tal como ocorre com a medida dos comprimentos dos lados (AB, BC e AC), com a área, com o perímetro e com as alturas com relação a cada lado.

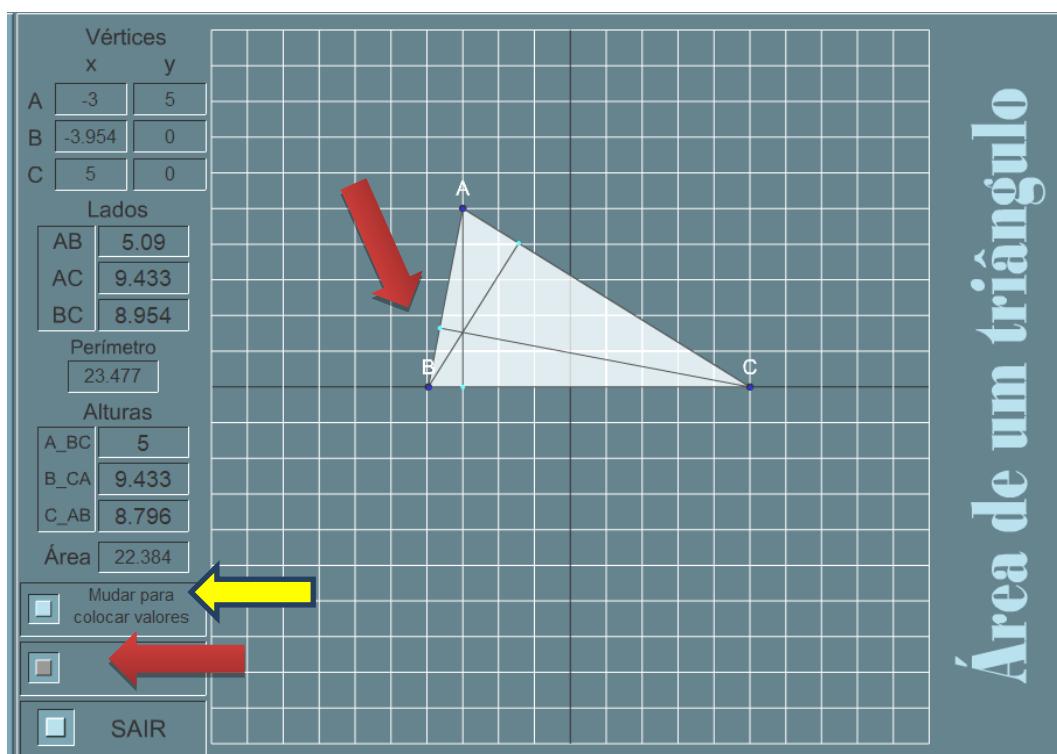
Para que as alturas apareçam, é preciso manter pressionado, com o botão esquerdo do mouse, a opção “mostrar às alturas”, indicada na imagem a seguir pela seta vermelha:

⁸⁰ Este manual encontra-se disponível em

<http://www.ciencia-mao.usp.br/dados/text/_areadeumtriangulo.manual.pdf>. Acesso em 25 de julho de 2018.

⁸¹ Neste portal <<http://www.ciencia-mao.usp.br/>> podem ser encontradas outras simulações para o trabalho com outros conceitos matemáticos e mais explicações sobre a equipe responsável por esta animação.

Figura 46- Alturas do Triângulo



Fonte: da pesquisa

Outra forma de mudar a posição dos vértices é atribuir valores às coordenadas dos mesmos. Para isso, devemos clicar no botão que está sendo indicado por uma seta amarela na ilustração acima. Os desenvolvedores dessa animação ainda justificam matematicamente as três formas de calcular a área, nesta situação.

A primeira maneira está relacionada ao produto da base pela altura. Como temos três bases e três alturas, a área pode ser obtida por qualquer par base-altura, então temos que a “Área = Base x altura/2”. Outra forma é usar os lados e o semiperímetro “p” do triângulo. O semiperímetro é dado por: $p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$, a área em função do semiperímetro é $\text{Área} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)}$, e por fim, segundo os desenvolvedores da simulação, a área pode ser calculada em função das coordenadas de cada vértice:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_A & X_B & 1 \\ Y_A & Y_B & 1 \\ X_C & X_C & 1 \end{vmatrix}$$

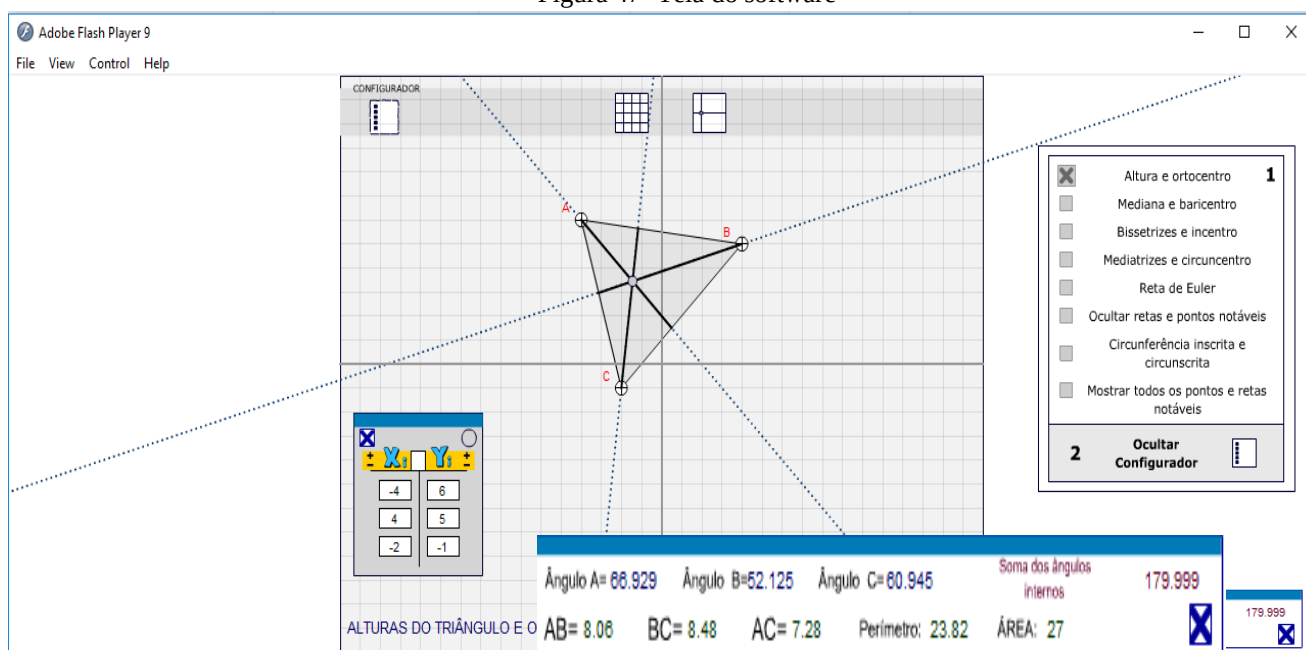
Dessa forma, eles justificam no manual do *software*, o cálculo da área do triângulo que aparece na tela inicial, quando o usuário movimenta os vértices da figura. Esse *software* pode ser explorado por professores dos anos finais do ensino fundamental e médio, com o objetivo de estudar a construção das fórmulas da área de triângulos, dando ênfase à variação da área e do perímetro, ao serem movimentados os vértices da figura.

3.6.1.2.1 Alturas do triângulo e ortocentro

A simulação “Alturas do triângulo e ortocentro” apresenta algumas das características da “Áreas de um Triângulo”, porém contém mais ferramentas. Nela é possível ajustar a malha quadriculada e o eixo de coordenadas, nos quais encontra-se o triângulo predefinido. As alturas estão visivelmente presentes no triângulo e é possível visualizar ainda a mediana e baricentro, bissetrizes e incentro, mediatrizes e circuncentro, reta de Euler, circunferência inscrita e circunscrita, além de poder ocultar retas e pontos notáveis, assim como mostrá-los na simulação. Para isso, é preciso apenas marcar a opção desejada no configurador que aparece no canto direito da tela.

A imagem abaixo apresenta a tela da simulação após executarmos o arquivo em *Flash*.

Figura 47- Tela do software



Fonte: da pesquisa

Os vértices A, B e C do triângulo podem ser arrastados na tela, assim como podemos, por meio da ferramenta $X_i + Y_i$, apresentadas no canto inferior esquerdo da tela nesta ilustração, modificar as coordenadas de cada ponto, ou realizar essa ação diretamente nos

vértices, arrastando-os sobre a malha. Ao realizarmos ações desse tipo no *software*, pode ser observada a variação dos ângulos de cada vértice, da área e do perímetro. Assim como a simulação anterior, não observamos o cuidado dos seus desenvolvedores em representar a área da figura pelo par (número + unidade de medida).

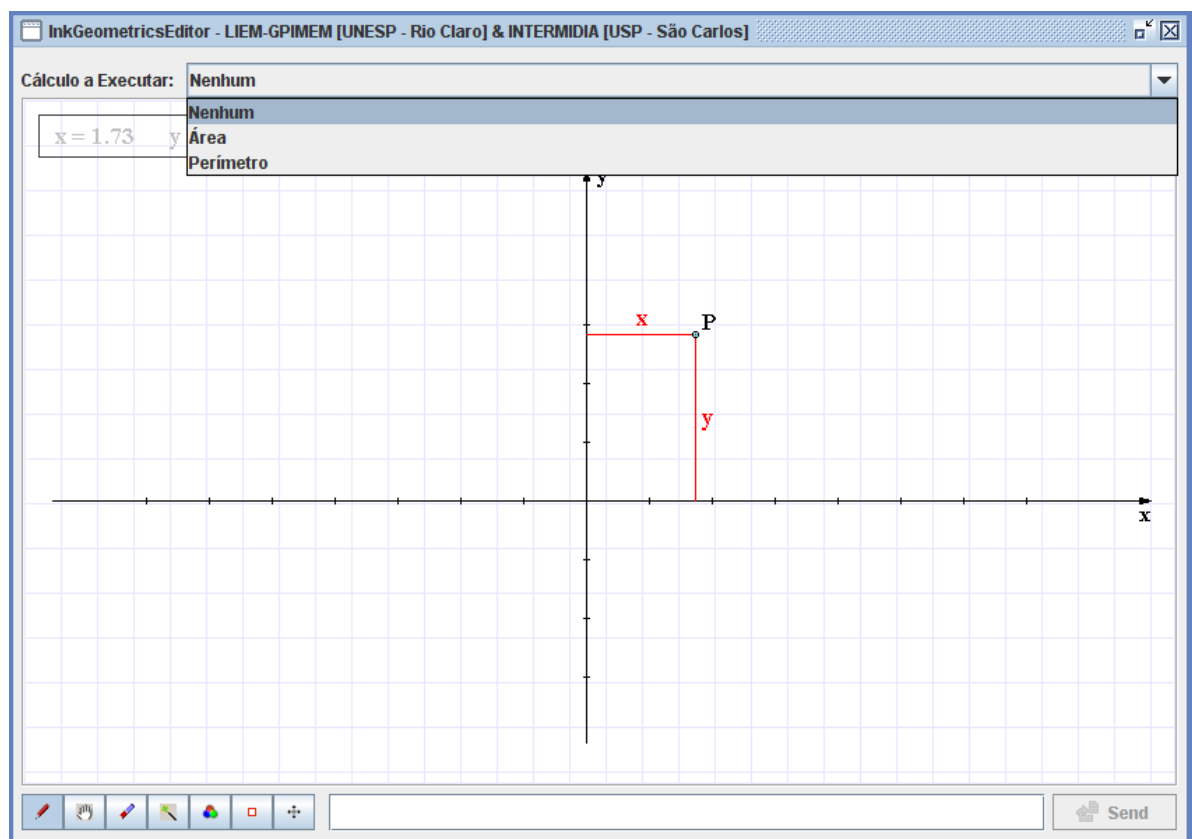
Se por um lado há aspectos positivos, pelos quais é possível visualizar a área de triângulos, seja pela inserção dos comprimentos dos seus respectivos lados, ou mesmo, arrastando seus vértices; por outro lado, é preciso estar atento até que ponto os usos desses *software* podem contribuir para o ensino e aprendizagem desse conceito, tendo o cuidado para não reforçar a ideia de área como um número, ou mesmo apresentar as fórmulas precocemente, sem atribuir-lhe um significado.

Outra limitação observada nas duas últimas simulações é a possibilidade de verificar apenas a variação da área e do perímetro, ao se deslocarem os vértices do triângulo. Não há uma forma de fixarmos a altura dele, por exemplo, para que os alunos observem que o perímetro de uma figura pode variar e sua área permanecer invariável, nem tampouco existe liberdade para o professor criar outra simulação em que o perímetro de uma figura varie e sua área não. Assim, não oferece condições para que se verifique que a área e o perímetro não variam necessariamente no mesmo sentido.

3.6.1.3 INKGeometrics editor (DRAW & GEOMETRY)

Ainda no BIOE podemos encontrar um *software* denominado de *INKGeometrics Editor (DRAW & GEOMETRY)*, desenvolvido pelo LIEM-GPIMEM da UNESP de Rio Claro e Intermídia (USP- São Carlos). A imagem abaixo apresenta a *interface* desse *software*.

Figura 48- Interface do software



Fonte: da pesquisa

Ao realizarmos o *download* desse *software*, junto com ele, em um arquivo zipado (compactado), temos um guia rápido, que apresenta uma curta descrição desse protótipo. Trata-se, basicamente, de um reconhecedor de figuras geométricas, em que o usuário pode fazer um desenho à mão livre com a ferramenta *pen* (caneta) no plano cartesiano, que será reconhecido pelo programa e pode ser convertido numa figura geométrica aperfeiçoada por meio do uso da ferramenta *Magic Tool*. Depois de convertida, a figura pode ser manipulada (arrastada pela interface do *software*).

Há uma caixa de texto na parte inferior da *interface*, ao lado das ferramentas básicas, em que é possível visualizar o nome das figuras que foram reconhecidas pelo *software*. É possível ainda obter a área e o perímetro da figura da seguinte forma: após desenhá-las, deve-se escolher no menu “cálculo a executar”, a opção área ou perímetro; clicar no que fora

desejado e em seguida na figura. O *software* expressa então, automaticamente, a área e/ou o perímetro da figura construída.

Como se trata de um protótipo bem inicial, algumas das funcionalidades expressas nos parágrafos anteriores não estão funcionando corretamente. Desenhamos várias figuras neste *software* para realizarmos os testes. No entanto, na maioria das vezes, ele não identifica corretamente a figura construída na caixa de texto e a ferramenta *Magic Tool* nem sempre consegue transformar a figura desenhada em uma aperfeiçoada. Quando isso é possível, pode-se utilizar a ferramenta arrastar, clicar em alguns pontos das figuras que estão em vermelho, automaticamente o *software* converte-os em verde, sendo possível arrastá-los e visualizar a variação da área e do perímetro.

Diferentes tipos de *software*, vídeos, simulações, indicação de sites, hipertextos, slides, áudio, pdfs, entre outros recursos podem ser encontrados no BIOE. Limitamo-nos a explicitar apenas os que tratavam do conceito de área e/ou perímetro, e que funcionavam corretamente em nosso sistema operacional, *Windows 2010, 64 bits*.

3.6.2 *Hypatiamat*

No site do *Hypatiamat*, encontramos uma diversidade de recursos que podem ser utilizados para o ensino e aprendizagem de diferentes conteúdos matemáticos, como área, perímetro, ângulos, quadriláteros, teorema de Pitágoras, entre outros. Os recursos estão organizados em alguns blocos da matemática, tais como: números e operações, geometria e medida, probabilidade e álgebra.

Na aba correspondente a geometria e medida, encontramos alguns recursos para o ensino e aprendizagem de área e perímetro. Uns estão disponíveis apenas para celulares e tablets com o sistema *Android*, como o “Áreas 1”⁸², e outros podem ser acessados diretamente na plataforma virtual do *Hypatiamat*, como o “Geometria no plano-perímetros, Comparar perímetros e Calcular perímetros de figuras planas”.

3.6.2.1 *Áreas I*

“Áreas I” pode ser classificado na categoria dos diferentes *software* utilizados na educação como sendo um “tutorial dinâmico”, no qual é possível o usuário interagir com os

⁸² Esse aplicativo para *Android* pode ser baixado gratuitamente pelo *Play Store* do Google. Deve-se digitar no buscador pelo nome Área I. O desenvolvimento e grafismo é de autoria de Ricardo Pinto que integra a equipe da Universidade do Minho, responsável também pelo portal e material contido no *Hypatiamat* (TUTORIAL DO ÁREAS I, 2018).

diferentes desafios em forma de perguntas que vão surgindo ao serem avançadas, uma a uma, as telas do aplicativo.

Esse aplicativo se aproxima da proposta da abordagem de área como grandeza, por permitir a articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas. Isso ocorre por meio de diferentes situações, nas quais podem ser identificadas tarefas de: medidas de áreas; de mudança de unidades; produção de superfícies; e comparação de área, sem a intervenção do aspecto numérico. Não estamos com isso inferindo que ele tenha sido concebido e desenvolvido sob esta ótica, mas é possível afirmar que as atividades presentes em suas diferentes telas aproximam-no dessa abordagem.

Como se trata de um aplicativo voltado para os anos iniciais do ensino fundamental, o conceito de área vai sendo explorado de forma gradativa, sem de início ser colocada a palavra “área” nas situações-problema que vão surgindo dentro de um determinado contexto. Pela mesma razão - o público-alvo - a ludicidade também é algo a se destacar nesse aplicativo: alguns personagens vão aparecendo no decorrer das telas para envolver o usuário nas diferentes situações sobre área que vão surgindo.

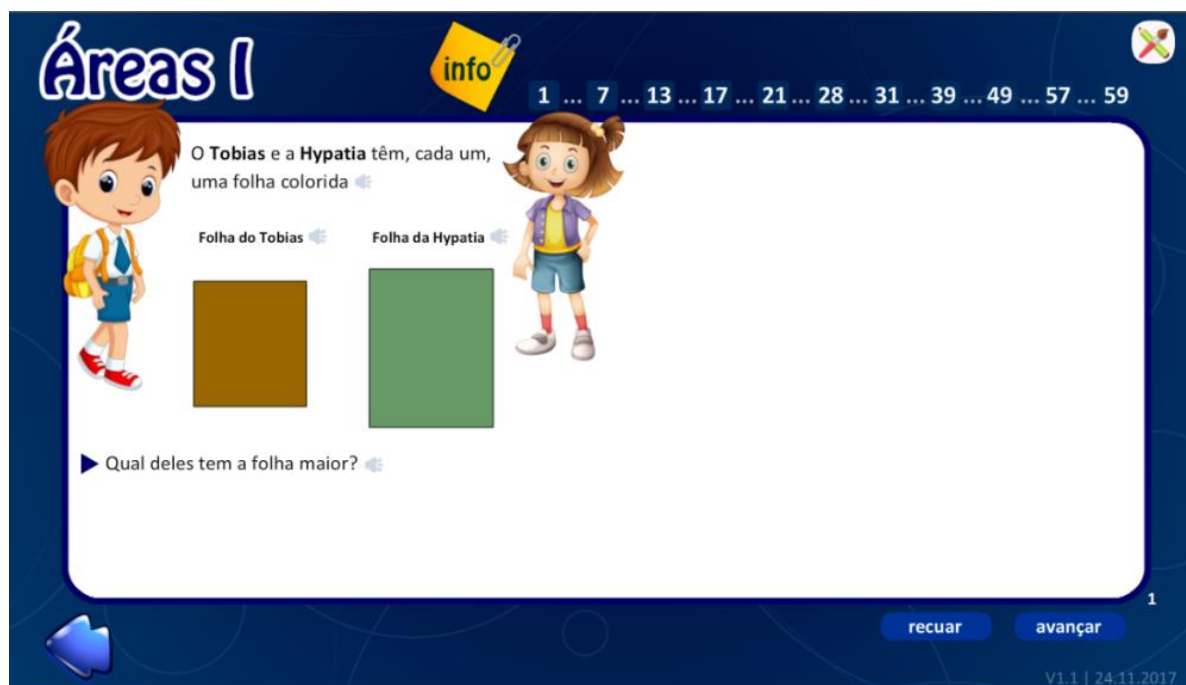
Deslizando o dedo na tela do celular ou tablet, algumas figuras que são indicadas pelo desenho de um *mouse* podem ser arrastadas, um importante recurso para comparar as áreas das figuras por sobreposição, permitindo ao usuário verificar se a figura dada tem área maior, menor ou igual à outra. Para explicar as situações que surgem no aplicativo, vamos enumerar as telas, chamando-as de episódio 1, 2, 3, e assim sucessivamente.

Nossas análises estarão voltadas aos tipos de situações que dão sentido à área: comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície (SILVA, 2016), verificando como é tratada a abordagem dessa grandeza no aplicativo, seus aportes, lacunas e limitações para o ensino e aprendizagem de área.

3.6.2.1.1 Comparação de área

Ao clicarmos em “aprender”, a seguinte tela aparecerá:

Figura 49- 1º Episódio do Software



Fonte: do aplicativo Áreas 1

A ideia nesta tela é que o usuário reflita sobre qual dos dois personagens tem a folha maior. Não há uma opção para ser inserida a resposta, trata-se de uma situação apenas para a reflexão. Após clicar em avançar, a personagem Hytapia coloca que a folha dela é a mais extensa, automaticamente no aplicativo a folha de Tobias se sobrepõe à de Hypatia, como forma de justificar o porquê de ele ter a folha menor, como ilustra a imagem a seguir:

Figura 50- Do Episódio 1



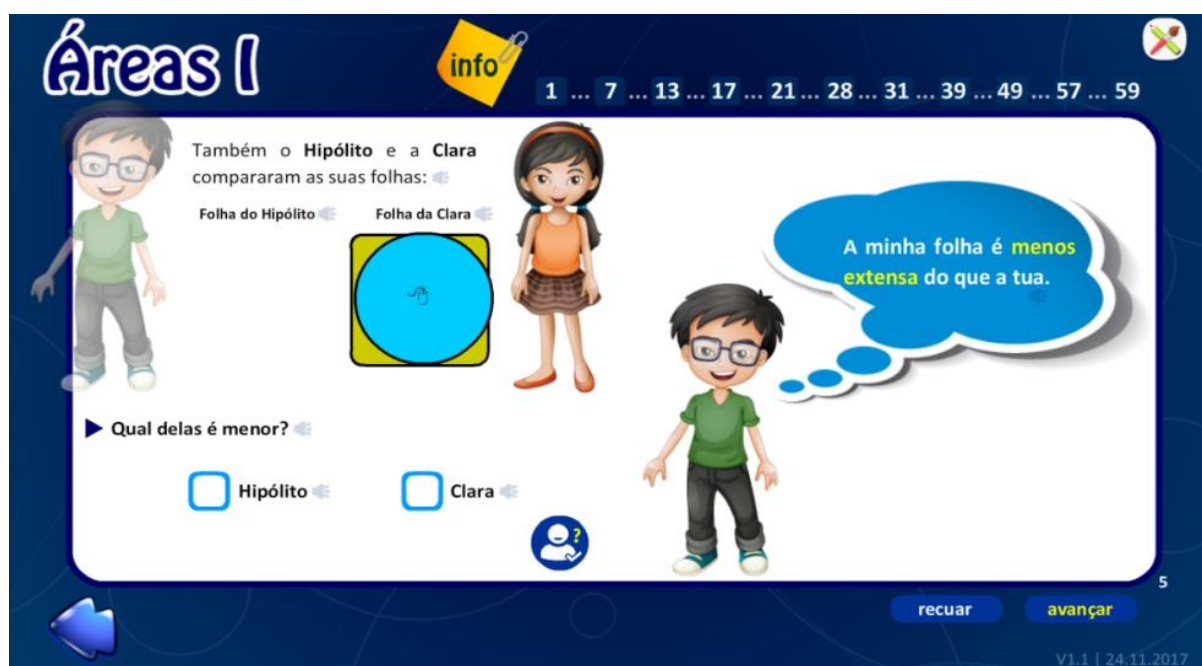
Fonte: do aplicativo Áreas 1

Como aportes, pudemos identificar que é explorada, por meio deste episódio, a relação entre o quadro geométrico e das grandezas, sem a intervenção do quadro numérico. Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989), a construção da noção de ter mesma área deve anteceder o ensino da medida de área, para que os alunos construam a noção de área como uma grandeza e não como número, e, desta maneira, os alunos compreendam gradativamente a área como um atributo da figura.

Ferreira (2010) ainda coloca que esse tipo de situação não aparece com frequência em livros didáticos, havendo uma predominância de tarefas que tratam de forma enfática a medida da área. Silva (2016) relata que a antecipação desse tipo de situação pode conduzir os alunos à compreensão de área como um número, isto é, à concepção exclusivamente numérica da área.

O episódio 2 também trata da comparação das áreas de duas figuras de forma implícita, acrescentando-se a possibilidade do usuário arrastar as figuras e sobrepô-las. Ou seja, é possível, antes de assinalar a resposta, sobrepôr as folhas para identificar qual personagem tem a menor folha, como ilustra a imagem a seguir:

Figura 51- Sobreposição da folha de Hipólito à de Clara

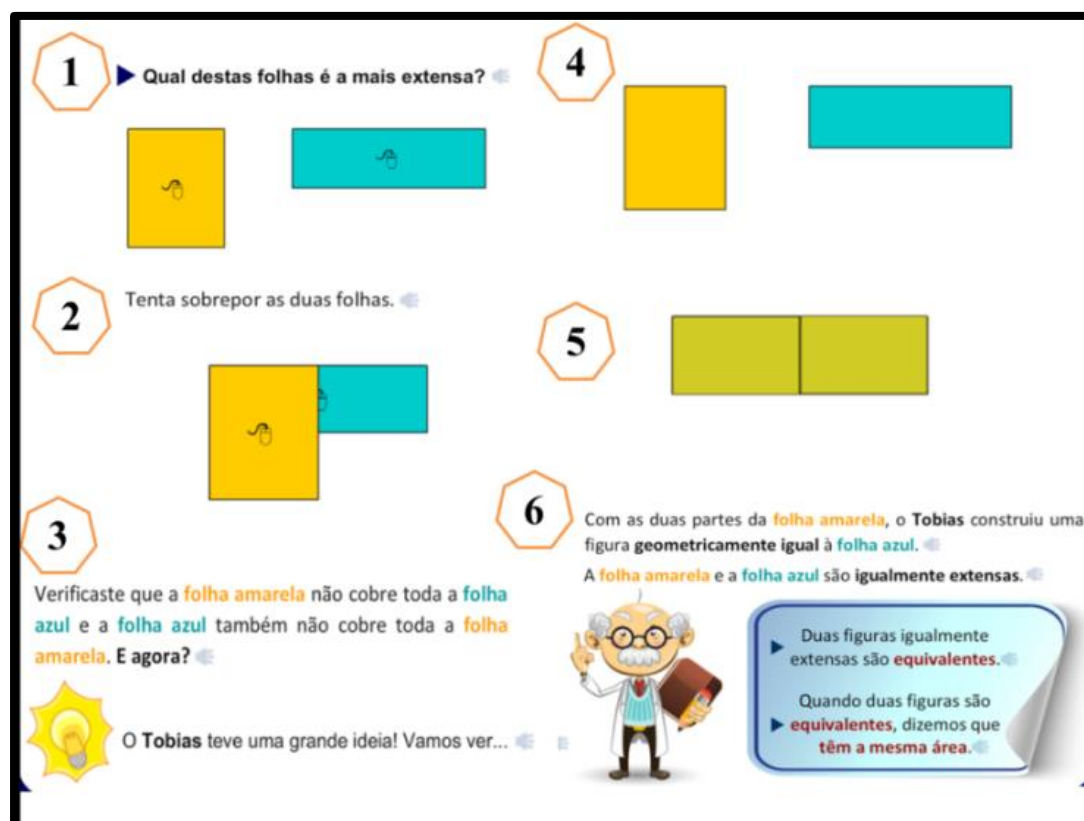


Fonte: do aplicativo Áreas 1

Observamos nitidamente neste caso que a área da folha de Hipólito é menor que a da folha de Clara. Podemos verificar, nesta situação, um teorema em ação verdadeiro, que justifica essa ação do usuário nos dois episódios, ou mesmo a ideia que está por trás desse procedimento: se uma superfície S_1 pode, por deslocamento, estar totalmente contida no interior de uma superfície S_2 , se dirá que a área de S_1 é menor que a área de S_2 (BALTAR, 1996).

Outra forma de comparação de área de duas figuras é dada nos episódios 3 e 4, nos quais é trabalhada a ideia de decomposição e sobreposição de figuras para comparar a área e na noção de equivalência (ter mesma área), como ilustramos a seguir:

Figura 52- Episódio 3

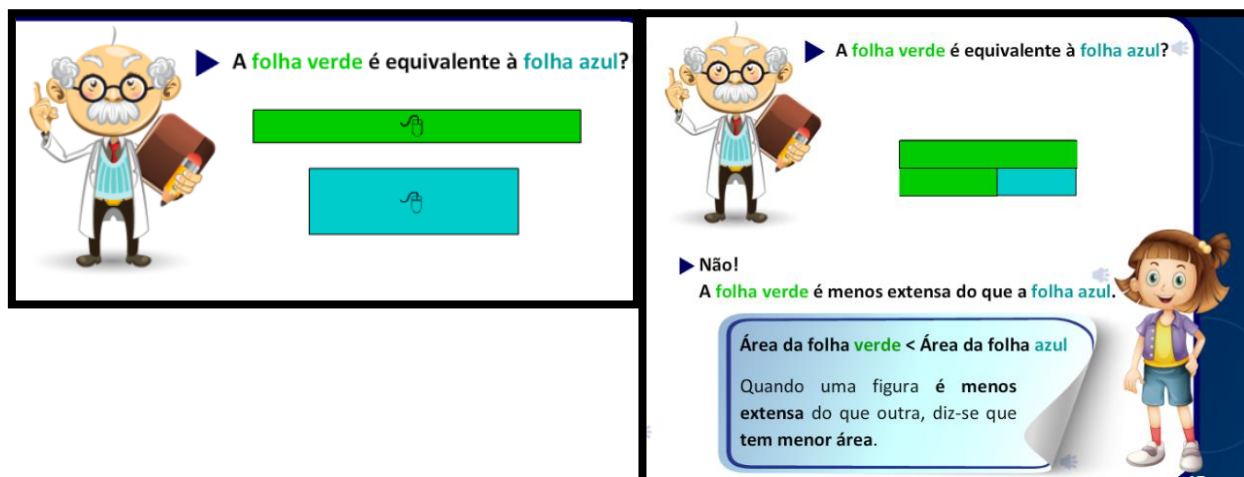


Fonte: do aplicativo Áreas 1

Vale salientar que o usuário só poderá arrastar as figuras e sobrepô-las para verificar se possuem ou não mesma área. Não há, portanto, a possibilidade de decompor: essa ação é realizada automaticamente no aplicativo, assim que é avançada a próxima tela. Ao final, após decompor e sobrepor o retângulo amarelo ao azul, é dada uma explicação de que figuras igualmente extensas são equivalentes e, quando duas figuras são equivalentes, diz-se que têm mesma área – como apresentado no passo 6 na imagem acima, por um personagem que representa um professor.

No próximo episódio, é perguntado ao usuário (aluno) se a folha verde é equivalente à azul. Assim como o anterior, é possível comparar por sobreposição, mas a decomposição é realizada pelo aplicativo. Como as figuras não coincidem por sobreposição, diz-se que não são equivalentes e que, nesta situação, não possuem a mesma área, conforme percebemos na figura a seguir.

Figura 53- Episódio 4



Fonte: do aplicativo Áreas 1

De acordo com Bellemain (2000, p. 7), quando comparamos duas superfícies somos conduzidos a decidir se elas pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência. No episódio acima, pudemos observar que a figura verde não se sobrepõe totalmente à figura azul e por isso ela tem área menor.

A possibilidade de oferecer condições para que o usuário arraste as figuras nos traz uma reflexão pertinente ao estudo de área, em termos de teorema em ação verdadeiro, segundo o qual área de uma figura é invariante por isometria. Da mesma forma, podemos perceber, ainda de forma automática, a decomposição e recomposição ocorrem sem perda nem sobreposição, isto é, conserva a área. Mesmo que esse aplicativo não tenha sido fundamentado na TCC (Teoria dos Campos Conceituais), notamos que, por meio das condições oferecidas pelo aplicativo, ele pode contribuir para que o usuário perceba a invariância da área nestes casos.

Assim, nos episódios 1, 2, 3 e 4, temos um exemplo claro de situação de comparação de áreas sem dados numéricos. Esse tipo de situação contribui para a construção do conceito de área como uma grandeza autônoma, pois, além de evidenciar que figuras diferentes podem ter mesma área ou não, favorece a utilização de procedimentos para compará-las, tais como sobreposição, decomposição e recomposição, diminuindo a força do campo numérico que geralmente é privilegiado no ensino desse conteúdo.

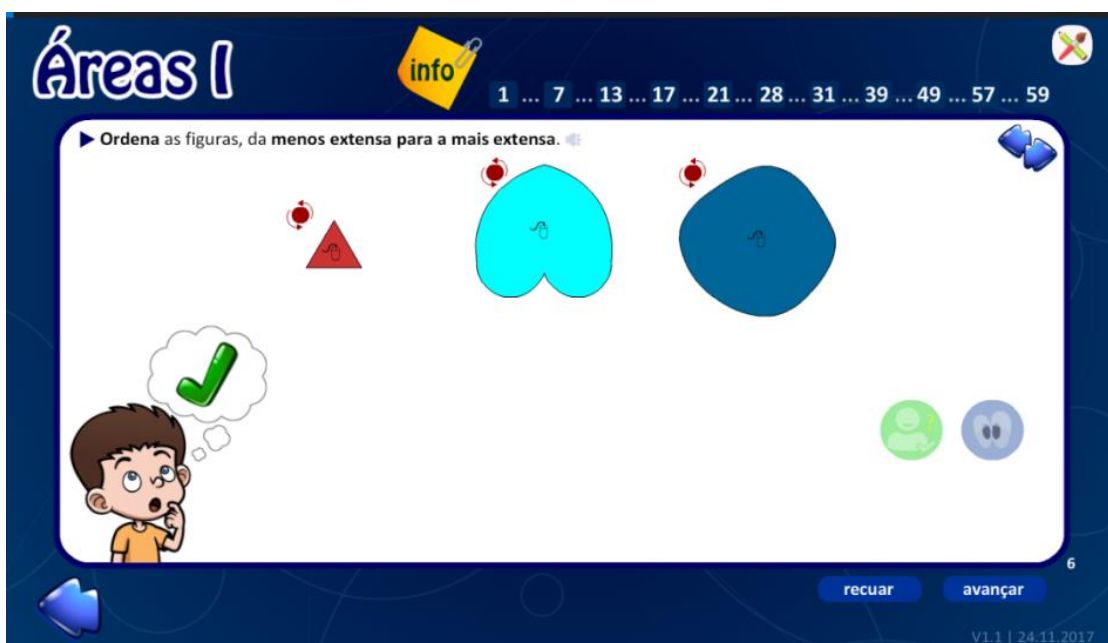
Por outro lado, precisamos destacar que é preciso ter certo cuidado com relação ao vocabulário. As expressões “mais extensa” ou “menos extensa” podem gerar confusões em que uma superfície visualmente e mais espalhada que outra tem mesma área ou ainda que a mais espalhada tenha área menor que a mais compacta. Essa situação pode ser identificada em

nossa pesquisa (SILVA, 2016, p. 168 e 189), em que nas tarefas 1 e 2 os alunos deveriam, respectivamente: indicar se um paralelogramo não retângulo “E” teria a mesma área de um paralelogramo retângulo “A”; e indicar se um paralelogramo não retângulo “E” teria mesma área que um quadrado “A”.

Em ambas as tarefas, as figuras tinham áreas iguais, porém alguns alunos responderam que os paralelogramos não quadrado e não retângulo tinham áreas diferentes, porque eram mais “compridos”. Interpretamos a partir disso que, para eles, as figuras mais esticadas não poderiam ter mesma área que figuras compactas. Voltando ao caso dos episódios analisados: é preciso levar em consideração até que ponto esse vocabulário é válido.

Em uma tela anterior ao episódio 3 há algumas atividades voltadas a ordenar um conjunto de figuras, da menos extensa para a mais extensa. O usuário tem a opção de aplicar rotações nas figuras, sobrepô-las e arrastá-las por toda a tela, para então colocar na ordem que é solicitada. Nestas atividades, temos a presença de figuras poligonais e não poligonais para realizar essa ordenação, como apresentamos a seguir:

Figura 54- Ordenação das figuras



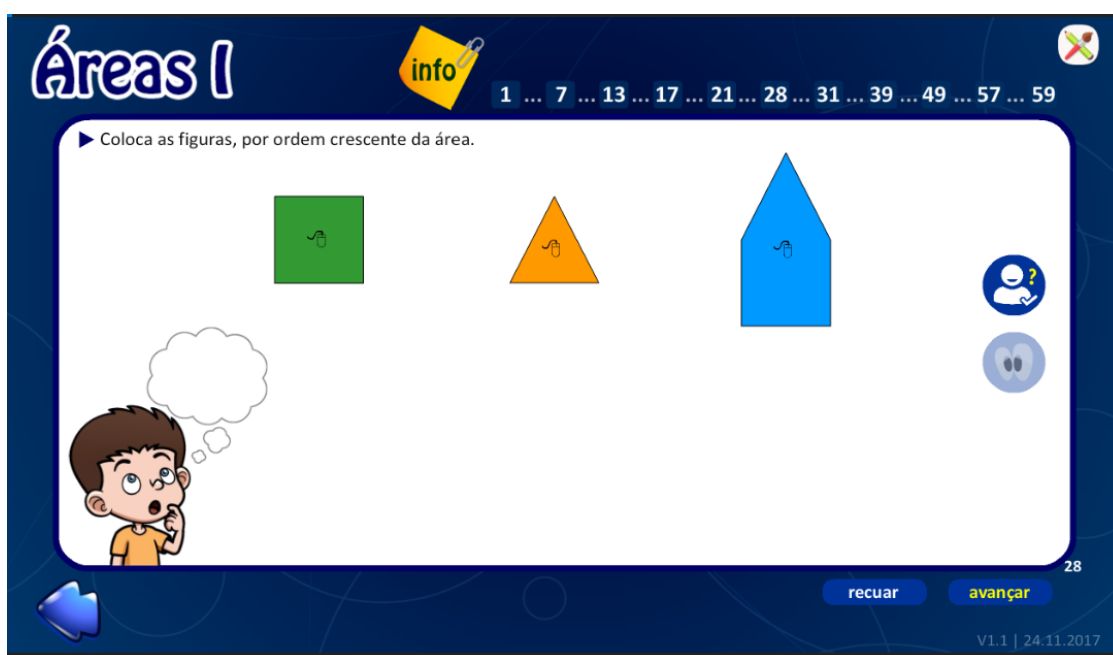
Fonte: do aplicativo Áreas 1

Após ter colocado na ordem solicitada, o usuário pode clicar no bonequinho que apresenta um sinal de correto. Se a ordem estiver correta, ele ficará verde, e, se não, vermelho com um (x). Em qualquer lugar da tela podem ser ordenadas as figuras, porém, para passar para a próxima atividade, o usuário precisa clicar nas duas setinhas que ficam localizadas no

canto superior direito da tela. Nas telas posteriores, continua a ser trabalhada a ideia de figuras equivalentes, por meio de diferentes atividades: com o uso do tangram (telas 25 a 27) e com recomposição de figuras (telas 28). Inclusive, um pdf embutido na tela 19 traz a ideia de que figuras equivalentes têm mesma área.

A palavra área ainda não aparece na situação ilustrada na figura acima, só a partir do episódio 4, após o trabalho com “equivalência de figuras”. Essa atividade é retomada na tela “28”, em que é solicitado que o usuário coloque as figuras, por ordem crescente de suas áreas.

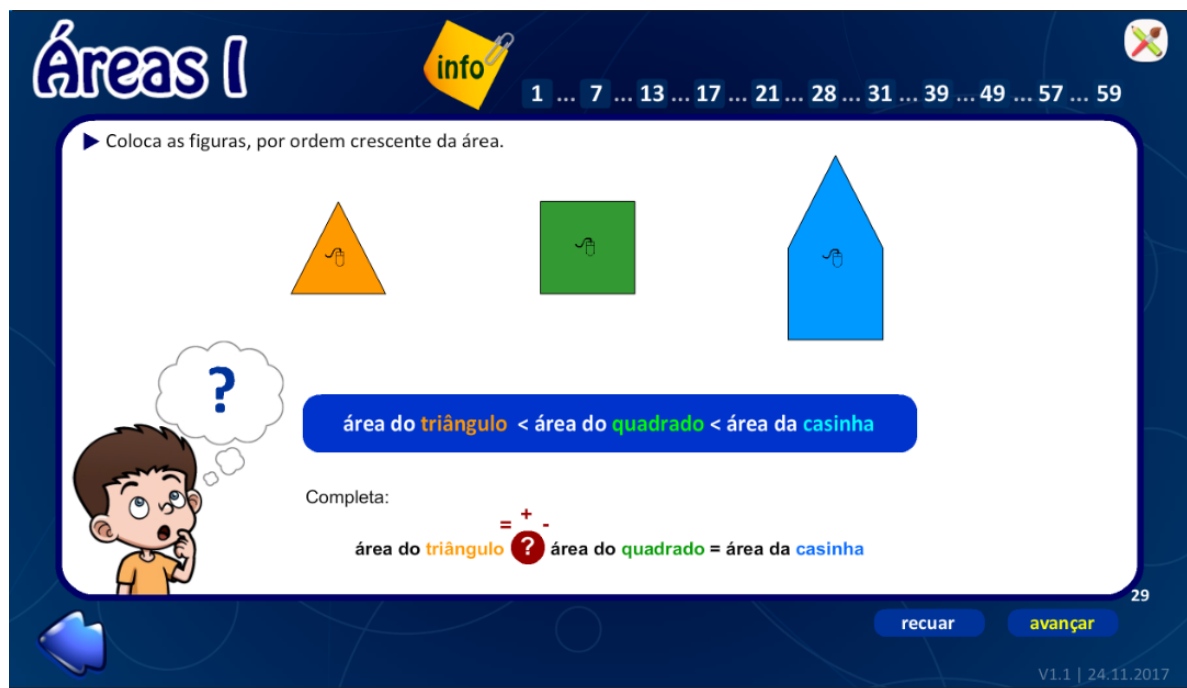
Figura 55- Ordem crescente das áreas



Fonte: do aplicativo Áreas 1

É possível arrastar as figuras na tela do aplicativo para colocá-las em ordem crescente de área, e em seguida, ao avançar, temos uma atividade de reflexão, a qual trabalha com aditividade das áreas. É dado o *feedback* em uma frase que aparece abaixo da figura, dizendo que a área do triângulo é menor que a do quadrado e que essa, por sua vez, é menor que a da figura azul, como ilustra a imagem seguinte:

Figura 56- Próxima tela



Fonte: do aplicativo Áreas 1

Automaticamente, na próxima tela o aplicativo sobrepõe o triângulo e o quadrado à figura azul, mostrando que a (área do triângulo + a área do quadrado = a área da figura azul). Nas figuras 1, 2 e no início da atividade apresentada na figura 3, temos, para ordenação em relação à área, a comparação de três superfícies, o que é denominado por Baltar (1996) de “seriação”, uma situação na qual é necessário colocar em prática a transitividade da relação de ordem. Isso não havia ocorrido até agora nas atividades anteriores, pois só era preciso comparar as áreas de duas superfícies.

Destacamos que, ao oferecer condições para que o usuário arraste as figuras, o aplicativo permite que sejam mobilizados dois tipos de procedimentos de comparação por sobreposição, que permitem ao usuário perceber que, por inclusão, a área do triângulo é menor que a do quadrado e que a figura azul, assim como a área do quadrado verde, é menor que a da figura azul. Nesse caso, temos a comparação das áreas sem recorrer ao aspecto numérico, contribuindo para que o usuário avance no conhecimento, superando também concepções geométricas de área.

A segunda parte da atividade solicita que seja completada a frase: se a área do triângulo (=, +, -) a área do quadrado = a área da figura azul. Esse procedimento, segundo Ferreira (2010), trata-se da adição e subtração de áreas: uma superfície S é decomposta em

duas superfícies S_1 e S_2 , ou em um número finito de partes $S_1, S_2, \dots; S_n$ disjuntos dois a dois ($S = S_1 \cup S_2$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$). Com relação a esse tipo de procedimento, temos o seguinte teorema em ação: Se S e S' são superfícies disjuntas, $A(S \cup S') = A(S) + A(S')$ (BALTAR, 1996).

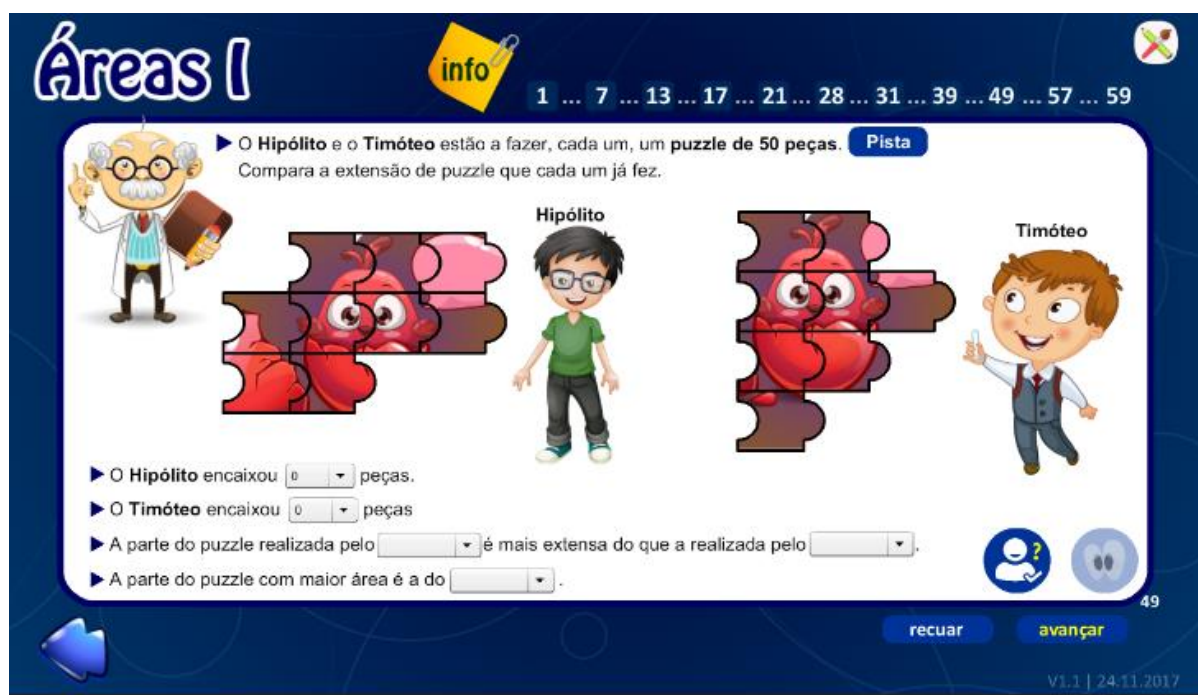
As noções de dobro, metade e triplo da área de uma dada figura, bem como a possibilidade de continuar exercitando o que foi explorado em relação à adição das áreas em telas anteriores são elementos trabalhados no avançar das atividades.

3.6.2.1.2 Situação de medida e mudança de unidade

A situação de medida vem logo após as descritas anteriormente, na qual é explorado o trabalho com a unidade de medida não convencional em uma questão em que é solicitado ao usuário que selecione o número de peças de um *puzzle* que foi encaixado por Hipólito e Timóteo.

Após comparar, pede-se que se escolha quem tem a parte mais extensa do *puzzle* e em seguida, remete essa situação a quem tem a maior área em relação à quantidade de peças encaixadas. A imagem a seguir apresenta a situação.

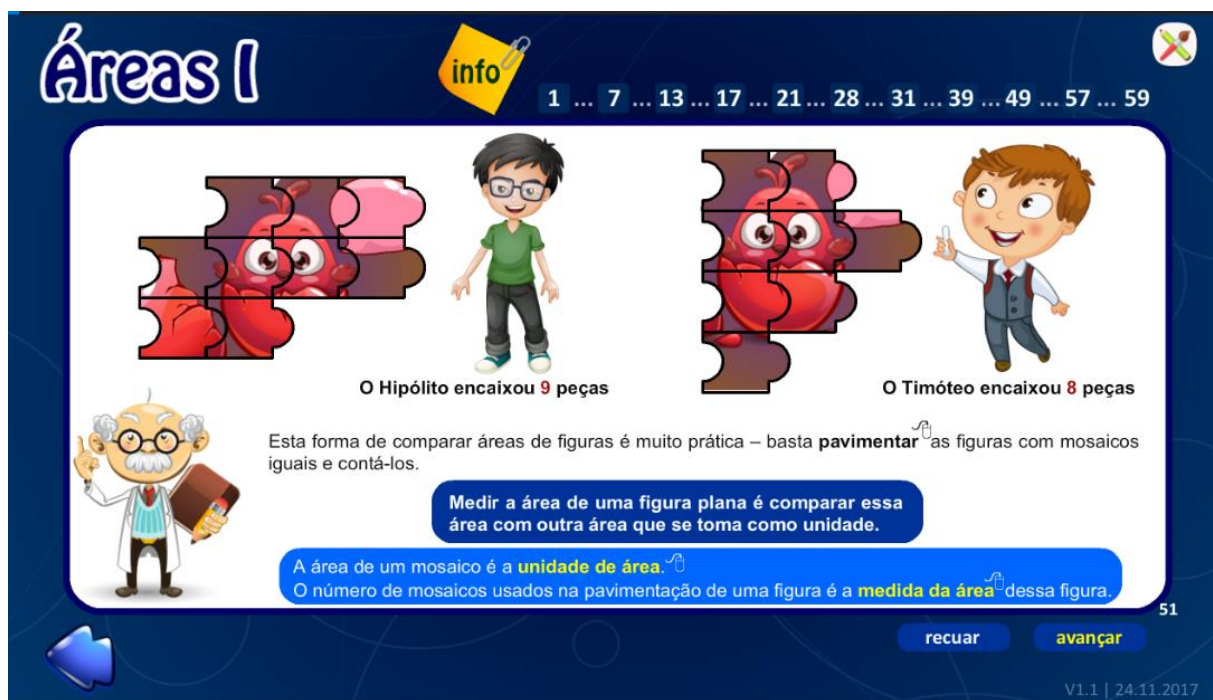
Figura 57- Início da ideia de unidade de medida de área



Fonte: da Hypatiamat

A explicação com relação a essa atividade é dada na próxima tela:

Figura 58- Orientação da atividade



Fonte: da Hypatiamat

A partir da tela 50, a ênfase é dada a situações de medida de área em que são utilizadas unidades de medidas não convencionais, como as peças dos *puzzles* de Hipólito e Timóteo. De acordo com Ferreira (2010), esse tipo de situação tem como objetivo a passagem do quadro das grandezas para o quadro numérico. Nesses casos, a área medida pode ser expressa por um número seguido da unidade, chamada de medida exata. Como por exemplo, 9 peças e 8 peças representam a área do *puzzle* de cada personagem que foi medida, utilizando as peças unitárias que também possuem uma área.

Como explicação a essa situação, é explicitado na tela 51 que “a área de um mosaico é a unidade de área e o número de mosaicos usados na pavimentação de uma figura é a medida da área dessa figura”.

Nas próximas telas, o trabalho com as unidades de medidas não convencionais tem continuidade, ora na malha quadriculada, ora em situações em que são dadas diferentes unidades de medida para medir a área de uma figura na qual só é possível ladrilhar efetivamente com o triângulo e o losango. No caso, por exemplo, do trapézio e do hexágono, eles precisam ser decompostos mentalmente em triângulos para saber qual será a medida da área utilizando essas unidades.

A imagem a seguir ilustra essa atividade:

Figura 59- Diferentes unidades de medida



Fonte: do aplicativo Áreas 1

Essa atividade pode ser classificada em situação de medida de área e de mudança de unidade. Essa situação tem como objetivo a passagem do quadro das grandezas para o quadro numérico. De acordo com Ferreira (2010), esse tipo de situação baseia-se na possibilidade de representação de uma mesma área com unidades de medida diferentes. Douady e Perrin-Glorian (1989) colocam que, atribuindo-se a uma determinada figura as medidas por ladrilhamento e utilizando-se diferentes formas de ladrilhos, contribui-se para a construção da noção de área enquanto uma grandeza autônoma.

Essas autoras colocam ainda que esse tipo de situação ajuda os alunos a distinguir a área do número, controlando a correspondência entre figuras e números, na qual a uma mesma figura poderão corresponder números diferentes segundo unidade escolhida, mas a área não muda. Esse tipo de atividade é importante na superação das concepções numéricas.

Ainda chamamos a atenção para as unidades trapézio e hexágono não ladrilharem efetivamente a figura dada na atividade da tela 59. Douady e Perrin-Glorian (1989), com relação ao ladrilhamento não efetivo de determinadas figuras, relatam que no contexto francês alguns alunos se recusavam a expressar a área de um triângulo em centímetros quadrados, por não ser possível ladrilhar efetivamente o triângulo usando quadradinhos.

Pessoa (2010) também elencou em sua pesquisa alguns erros previsíveis com relação ao ladrilhamento não efetivo de determinadas figuras na malha quadriculada. De acordo com

essa autora, “para alguns alunos a área depende do recobrimento da superfície utilizando uma quantidade finita de superfícies unitárias da mesma forma que uma unidade dada”. (p. 58).

Diante desse contexto, achamos pertinentes as atividades de medida de área e mudança de unidades trazidas no aplicativo, as quais mostram privilegiar a articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas, tomando como superfícies unitárias diferentes figuras, sem focar nas transformações meramente operatórias, como é frequente em livros didáticos brasileiros (FERREIRA, 2010).

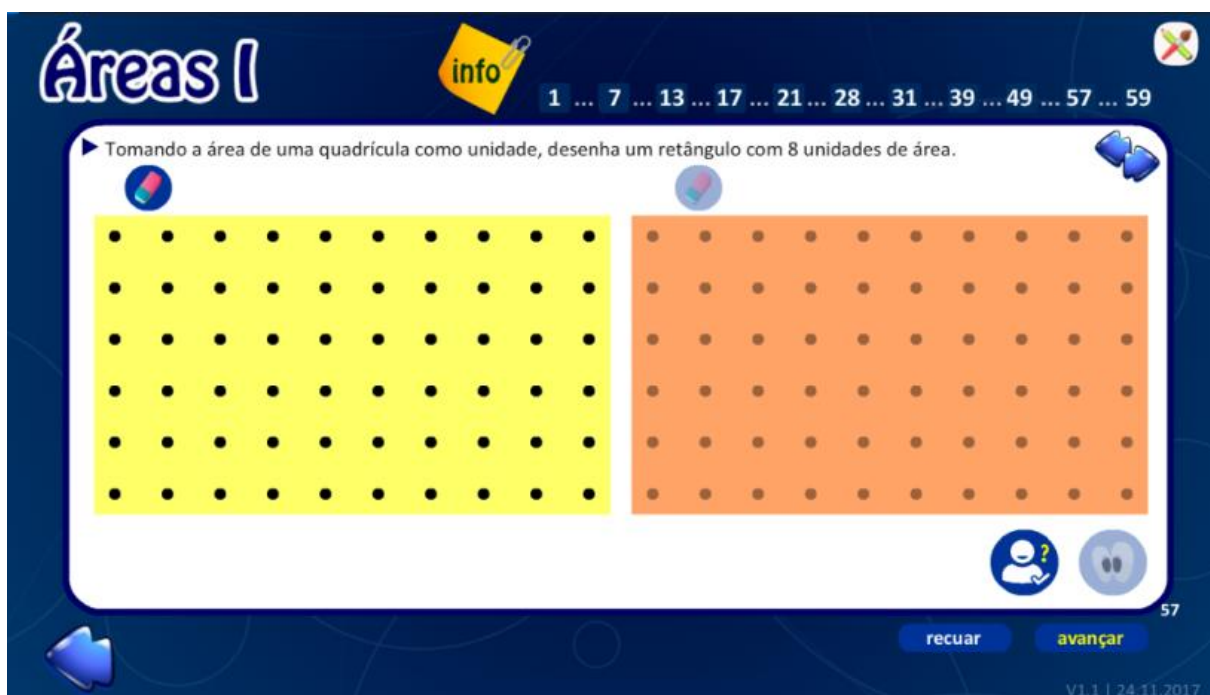
Uma limitação nesta atividade diz respeito a não oferecer condições de arrastar e duplicar as figuras dadas como unidades de medida, de forma que o usuário terá que fazer um esforço maior mentalmente para saber a medida da área dessa figura, utilizando as diferentes unidades. Ele pode recorrer à opção de “pista”, que mostrará a figura pavimentada, quando possível, com os dois primeiros ladrilhos e com o terceiro em algumas partes da figura decomposta.

Contudo, isso pode limitar a construção do conhecimento do usuário, uma vez que, não dá a oportunidade para explorar diferentes maneiras de responder a atividade, levando-o possivelmente a não construir a ideia de que a área da figura permanece invariável ao se utilizar diferentes ladrilhos, ou seja, a medida da área muda a depender do ladrilho que estiver sendo utilizado como unidade de medida, mas a área da figura será a mesma. Para melhor fixação desses conceitos, há ainda a possibilidade de fazer o *download* de um arquivo em pdf com várias atividades desse tipo, abordando a noção da mudança de unidade.

3.6.2.1.3 Situação de produção de superfície

A situação de produção de superfície aparece timidamente na tela 57:

Figura 60- Malhas pontilhadas quadradas



Fonte: do aplicativo Áreas 1

Nesta tela, é solicitado ora que o usuário construa algumas figuras geométricas, tomando como unidade de medida um quadradinho da malha pontilhada quadrada amarela; ora que o usuário desenhe duas figuras diferentes, mas que tenham a mesma área. Para Silva (2016), esse tipo de situação é importante para a dissociação e a articulação do quadro das grandezas e do geométrico, porque o aluno é levado a produzir superfícies de formas variadas, tendo todas as mesmas áreas ou não. De acordo com Ferreira (2010), as situações de produção de superfície são de uma natureza diferente das situações de comparação de área, medida de área e mudança de unidade, pois admitem várias respostas a uma mesma atividade.

A análise desse aplicativo revelou as diferentes atividades que são trabalhadas gradativamente, por vezes controlando a articulação entre o quadro geométrico e o das grandezas, sem a intervenção do aspecto numérico, explorado nas últimas telas. Há também a possibilidade de manipulação de algumas figuras e de decomposições automáticas. Esse dinamismo pode contribuir significativamente para a aprendizagem do conceito de área e para a superação das concepções geométricas e numéricas de áreas que são persistentes na abordagem desse conceito (SILVA, 2016).

Como ressalva, faz-se necessária a atenção com algumas definições que foram comentadas durante as análises, como “figura mais extensa” e “figura menos extensa”, bem como a oferta de mais ferramentas ao usuário para que ele utilize diferentes tipos de estratégias de resolução de uma mesma atividade, como, por exemplo, ferramentas de decomposição de figuras.

O próximo menu do *software* presente na tela de abertura é o “problemas”. Nele, o usuário terá que responder várias atividades, a partir do que fora explorado no “aprender”, de comparação de área, medida de área na malha quadriculada e de produção de superfície. Não são oferecidas, para a resolução, as possibilidades que explicitamos anteriormente, nem tampouco é possível arrastar as figuras sobre a tela na atividade de comparação de área. Ainda nessa plataforma, podemos encontrar diferentes atividades em malhas quadriculadas e isométricas sobre medida de área e mudança de unidade⁸³.

3.6.2.2 Aplicativos do *Hypatiamat* para o trabalho com perímetro

Como explicitamos no início desse capítulo, alguns recursos disponíveis no *Hypatiamat* – “Geometria no plano-perímetros”⁸⁴, “Comparar perímetros”⁸⁵ e “Calcular perímetros de figuras planas”⁸⁶ – trabalham a ideia de perímetro em diferentes situações. Para realizar as atividades, é preciso que o usuário esteja registrado na plataforma, mas, caso não deseje efetivar o registro, é possível entrar com um *login* e senha genéricos que aparecem na janela de abertura.

O conceito de perímetro é introduzido a partir da situação a seguir:

⁸³ Disponível em <https://www.hypatiamat.com/escritorio/quero_resolver_exercicios_de.php>. Acesso em 1 de agosto de 2018.

⁸⁴ Disponível em <<http://www.hypatiamat.com/perimetros/perimetros.php>>. Acesso em 1 de agosto de 2018.

⁸⁵ Disponível em <https://www.hypatiamat.com/perimetros/tarefaPerimetros_1.html>. Acesso em 2 de agosto de 2018.

⁸⁶ Disponível em <<https://www.hypatiamat.com/perimetros/tarefaPerimetros4HTML.html>>. Acesso em 3 de agosto de 2018.

Figura 61- Perímetros

HypatiaMAT - Bem vindo Hypatia Matemática da Silva | menu principal | on

Perímetros

Conceito de perímetro 1

Índice

O Tobias e a Hypatia fizeram duas bases, para oferecerem à mãe. A contornar as respetivas bases, o Tobias queria pôr uma fita azul e a Hypatia, uma vermelha. Precisavam de saber a quantidade de fita que tinham de comprar na papelaria, onde era vendida ao metro.

Foram ter com o professor, para os ajudar.

- Professor, como havemos de saber a quantidade de fita necessária? – perguntou o Tobias.
- Já sei – disse a Hypatia – contornamos cada uma das bases com uma linha e, depois, medimos o comprimento da linha usada no contorno.
- É isso mesmo! – disse o professor.

Obtemos dessa forma o **perímetro** de cada uma das bases...

Base do Tobias

Base da Hypatia

Obtemos de forma semelhante o **perímetro** de qualquer figura plana:

O perímetro de uma figura plana é o comprimento da linha que contorna essa figura (ou seja, é o comprimento da fronteira dessa figura).

PERÍMETRO PERÍMETRO PERÍMETRO PERÍMETRO PERÍMETRO PERÍMETRO

1 2 3 4 5 6

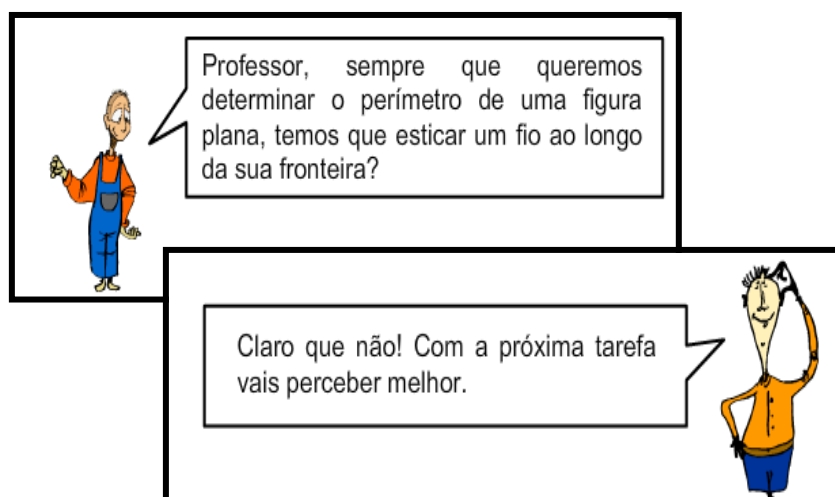
© hypatiamat | Atualizado em Abril de 2013

Fonte: da plataforma Hypatiamat

As bases de Tobias e Hypatia podem ser visualizadas sendo contornadas por linhas ao se clicar no botão de *play*, que fica ao lado da base de cada um. Após esse procedimento, automaticamente a linha fechada que contorna as bases é aberta e uma régua aparece na tela, apresentando a medida desse comprimento em centímetros, como ilustra a figura acima.

Para avançar e continuar o estudo sobre perímetro, é preciso ir clicando com o botão direito do mouse nas setas que ficam localizadas no canto inferior direito da tela. Surgirá uma definição de perímetro: *o comprimento da linha que contorna essa figura (ou seja, é o comprimento da fronteira dessa figura)*. Ao clicarmos nas setas, canal de navegação por entre as telas do tutorial, temos uma pergunta de um personagem – que simboliza o aluno:

Figura 62- Reflexão sobre perímetro



Fonte: da plataforma Hypatiamat

A resposta introduz, portanto, o conceito de perímetro. Ao avançarmos nas setas, as atividades que seguem centram-se em situações de medida. Ora solicitam que sejam transportados os segmentos utilizando um compasso virtual, para que o usuário determine o perímetro; ora solicitam que se utilize apenas uma régua graduada em centímetros que aparece na tela do *software* ao se clicar na opção “Utilizar a régua”, como pode-se perceber na seguinte atividade:

Figura 63- Atividade com auxílio de um software

Fonte: da plataforma Hypatiamat

Nesta atividade, não é possível movimentar o triângulo: a figura é estática e o usuário é limitado a utilizar as ferramentas que são indicadas no comando do enunciado. Interpretamos que é uma atividade voltada, aqui no Brasil, para os anos finais do ensino fundamental, pelo fato da introdução do termo transporte de segmentos e da introdução com unidade de medida convencional, neste caso o centímetro.

Após medir o comprimento dos lados do triângulo, ou com a régua ou fazendo o transporte de segmento para a linha vermelha, é possível utilizar uma máquina de calcular para realizar a soma das medidas dos lados e escrever no espaço em branco destinado à resposta. Ao se inserir a resposta, o usuário pode clicar no botão verde para conferir se acertou a medição.

Os estudos de Barbosa (2002), Brito (2003) e Brito e Bellemain (2004) nos trazem importantes reflexões sobre o perímetro de figuras planas, como um instanciamento da grandeza comprimento, ou seja, *“um caso particular da grandeza comprimento, diferenciando-se do objeto geométrico, em si, que é uma linha fechada”* (BARBOSA, 2002, p. 32). Assim, Barbosa (2002) supõe, a partir da abordagem de área, que a distinção e articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas favorecem a construção do conceito de comprimento, ou de perímetro em particular.

Nesta perspectiva do quadro geométrico, participam as linhas abertas ou fechadas – essa última constituindo-se o que chamamos de contorno de uma figura plana, poligonal ou não. O comprimento faz parte do quadro das grandezas e caracteriza-se de forma distinta das linhas, pois, diferentes linhas podem possuir o mesmo comprimento e por último, o quadro numérico é composto das medidas de comprimento, usando diferentes unidades (BRITO; BELLEMAIN, 2004, p. 5).

Para Barbosa (2002), deve-se dar ênfase ao se introduzir esses conceitos à distinção e à articulação entre o quadro geométrico e o das grandezas, que significa, em especial, comparar comprimentos sem medir, sem fazer intervir o quadro das medidas, ou numérico. Ainda para esse autor, é importante construir o conceito de perímetro de forma mais ampla do que é adotado em muitos manuais didáticos, nos quais, segundo ele, se diz quase sempre que o “perímetro é a soma dos lados”. Também assentimos que tal definição parcial pode gerar um obstáculo didático⁸⁷ para a compreensão de figuras não poligonais, tão importantes para a matemática e para a vida prática.

⁸⁷“conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar” (PAIS, 2001, p.44).

Identificamos um avanço em relação ao exposto na situação explorada no início desse *software*, ao terem sido colocadas duas figuras diferentes das usuais trazidas em livros didáticos (BRITO, 2003) para abordar a ideia de perímetro. De acordo com Perrot et al. (1998, p. 4), muitas vezes os alunos acham que somente os polígonos ‘particulares’, os que têm um nome e fórmulas convencionais, têm também um perímetro e uma área. Porém, a ênfase, logo em seguida, é dada à ação de medir já no início das situações que são exploradas. Para Barbosa (2002), esse tipo de situação, quando antecipada, pode gerar um amálgama entre o próprio contorno e o perímetro.

Timidamente, aparecem atividades em que são trabalhadas situações de comparações, nas quais são solicitadas figuras de menor, maior ou de mesmo perímetro que uma figura dada. Para Brito (2003), uma das fontes de dificuldade é a ênfase nos aspectos numéricos presentes em propostas de ensino, pois verifica-se, por exemplo, uma carência nos livros didáticos no sentido de explorar situações de comparação (sem a ação do medir) que favoreçam a construção de comprimento e área como grandezas. Nesse contexto, a autora explicita, em seu estudo, que no processo de construção dos conceitos comprimento e perímetro, a ênfase seja dada às situações de comparação e produção.

Identificamos uma situação em que são dados alguns polígonos e é solicitado que o usuário escolha o que tem menor perímetro. Classificamo-la como uma situação de comparação, mas o aspecto numérico está em jogo, pois deve se contar quantas unidades de medida (lado do quadradinho) contornam cada figura e, em seguida, estabelecer a comparação entre elas, como ilustramos a seguir:

Figura 64- Perímetro dos políminós

HypatiaMAT - Bem vindo Hypatia Matemática da Silva | menu principal | on

Perímetros

Conceito de perímetro 1

Tarefa
As figuras foram construídas com quadrados congruentes entre si. Qual das figuras tem **menor** perímetro?
Escolhe a opção correta.

nat | Atualizado em Abril de 2013

Índice

Verificar (V) Corrigir (C)

Fonte: da plataforma Hypatiamat

Nas atividades que se seguem, vemos um investimento em cálculos de perímetro de figuras poligonais e não poligonais e, por vezes, são dadas condições para que o usuário responda a atividade por meio da utilização de outros recursos, como construções geométricas com régua e compasso, para então estabelecer o perímetro da figura.

Figura 65- Cálculo de perímetros

HypatiaMAT - Bem vindo Hypatia Matemática da Silva | menu principal | on

Perímetros

Cálculo do perímetro | Polígonos 2

Tarefa
Considera o **paralelogramo** [ABCD] com $\overline{AB} = 4$ cm e $\overline{AD} = 5$ cm.
Constrói para cada lado do paralelogramo, um quadrado contido no exterior do paralelogramo, tendo um lado coincidente com esse lado do paralelogramo e calcula o perímetro da figura geométrica obtida por justaposição dos 5 quadriláteros.

?

P = _____ cm.

Verificar (V) Corrigir (C)

Índice

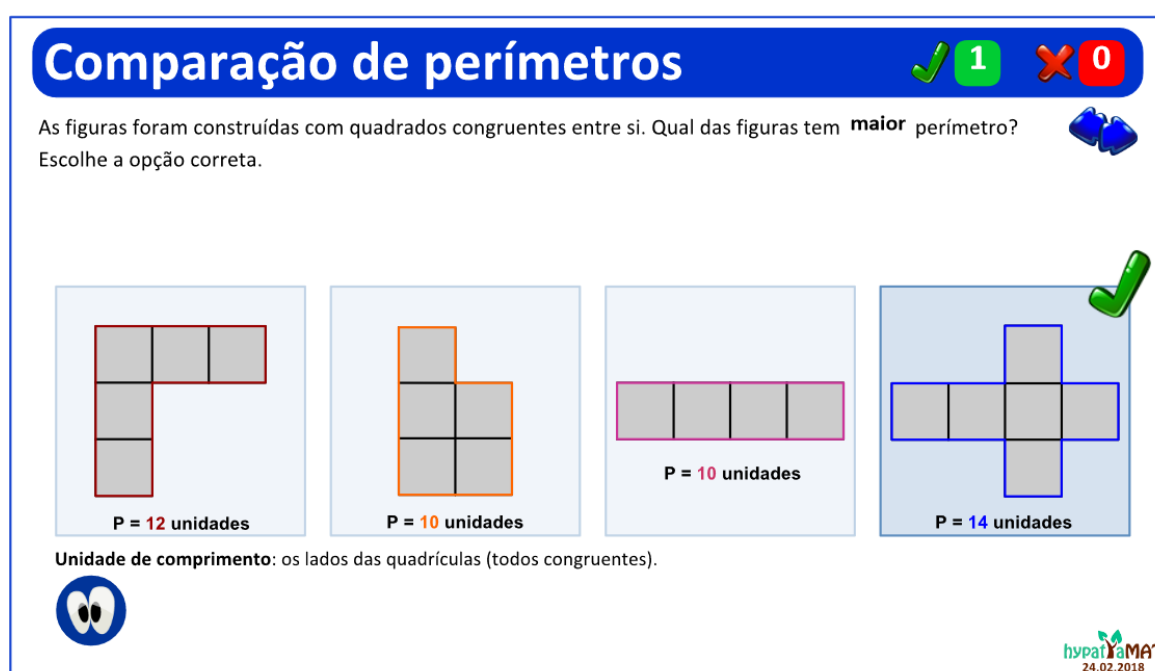
© hypatiamat | Atualizado em Abril de 2013

1 2 3 4 5 6 E

Fonte: da plataforma Hypatiamat

Outro *software* denominado de “Comparação de perímetros” explora atividades relacionadas, como o próprio nome sugere, à comparação, nas quais é solicitado aos usuários que identifiquem as figuras de menor ou maior perímetro, todas figuras poligonais da família dos políminós. Ao ser identificada a resposta, o usuário deve selecionar a figura, logo em seguida no *software*, aparece um “v” (representando que o usuário acertou) ou um “x” (indicando que ele errou). Ao clicar nos olhinhos que aparecem no canto inferior direito da tela, é possível ter um *feedback* da resposta dada, como apresentamos a seguir:

Figura 66- Comparação de perímetros



Fonte: da plataforma Hypatiamat

Para navegar pelas outras atividades, é preciso clicar com o *mouse* nas setas localizadas no canto superior direito da tela. Em nenhum momento, nestas atividades, são oferecidos recursos dinâmicos para a comparação dos perímetros de outra forma, sem ser pela contagem das unidades de medida não convencional representada pelo lado dos quadrados congruentes.

O último *software* analisado foi o “Calcular perímetro de figuras planas”, em que todas as atividades foram construídas na malha quadriculada, na qual é dada como unidade de medida um lado do quadradinho da malha em decímetro (dm), para que o usuário calcule o perímetro das figuras que vão surgindo ao serem avançadas as telas. A imagem a seguir apresenta uma das atividades:

Figura 67- Calculando perímetros

Fonte: da plataforma Hypatiamat

Se o usuário digitar, no teclado virtual que aparece na atividade, a medida incorreta, é dado um *feedback* para que se conte corretamente o número de lados⁸⁸ que constituem a fronteira do polígono, ou mesmo observar se o cálculo foi realizado corretamente. Diferente do *software* “Geometria no plano-perímetros”, tanto o “Comparação de perímetros” quanto o “Calcular perímetros de figuras planas” não oferecem outros recursos que ampliem a estratégias de resolução das atividades propostas. Algumas dicas são dadas ao usuário ao se clicar no “i”. Os olhinhos que aparecem na imagem acima apresentam a resposta da atividade, e, ao ser inserida a resposta para que o *software* entenda que você já respondeu, é preciso clicar no símbolo que representa um bonequinho.

Outras atividades podem ser encontradas na opção “Quero resolver questões” diretamente na plataforma. O usuário pode escolher as que tratam de perímetro que são organizadas por subtemas: definição, determinação do perímetro de polígonos e determinação do perímetro de círculos⁸⁹. É possível ainda escolher resolver só exames nacionais (Portugal) ou duas opções (nacionais e internacionais).

As análises desse tipo de *software* e de como foi explorada a ideia de perímetro nos mostra que, mesmo sendo objetos digitais em que o foco é oferecer condições lúdicas à

⁸⁸Neste caso, o *software* ao corrigir dessa maneira, reforça um teorema em ação falso que o perímetro é o número de lados (FERREIRA, 2010).

⁸⁹Disponível em <https://www.hypatiamat.com/escritorio/quero_resolver_exercicios_de.php>. Acesso em 1 de agosto de 2018.

aprendizagem de forma interativa e dinâmica, as características estavam relacionadas ao modo de resolução de tarefas em papel e lápis.

Podemos perceber também um investimento forte em situações em que é dada ênfase aos aspectos da medida de comprimento e em estabelecer o perímetro de figuras poligonais. Isso nos permite refletir em meios que possibilitem ao usuário uma diversidade de situações que levem à superação dos aspectos geométricos e numéricos do comprimento, assim como a distinção entre comprimento e perímetro.

Nesses *software* analisados, é dado um recorte para trabalhar, ou com o conceito de área ou o de perímetro de forma compartimentada, mas não é dada ênfase em atividades que trabalhem com as duas grandezas de forma simultânea como é explorado no *software* a seguir.

3.6.3 Phet

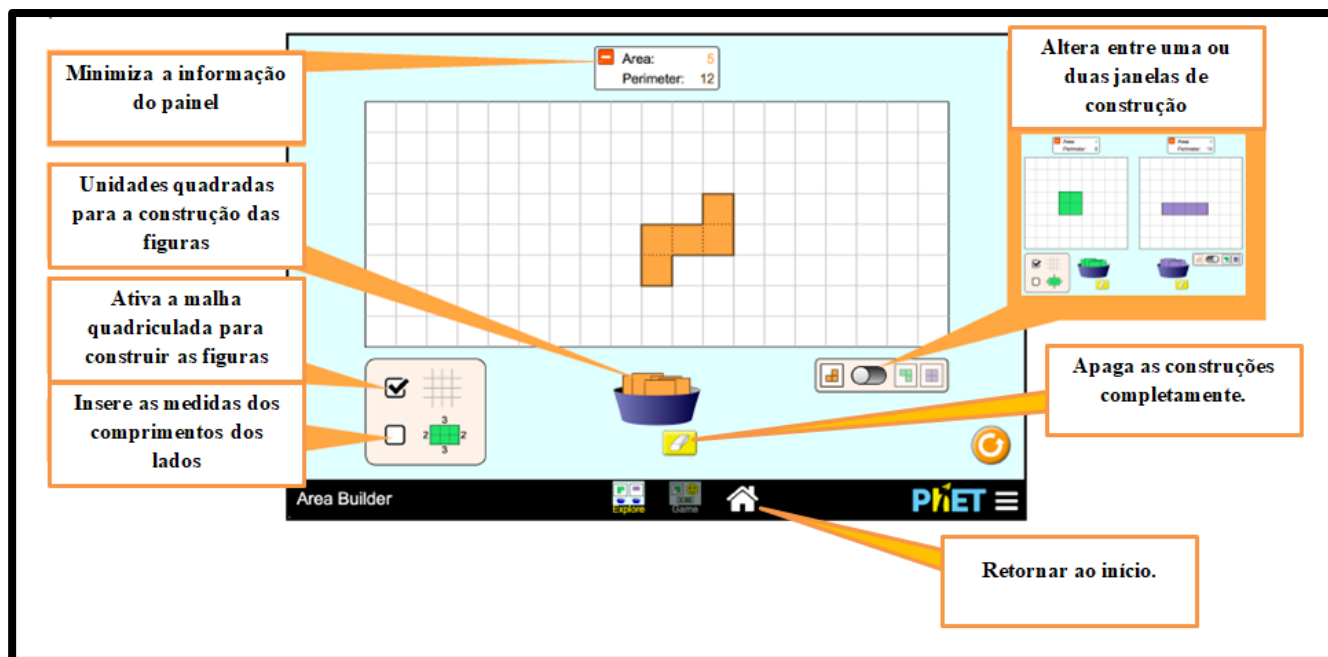
No site do *Phet* encontramos uma simulação denominada de “Construtor de Área”⁹⁰ versão 1.1.7, disponível para *download* em <https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/area-builder>. Nela, podem ser explorados os conceitos de área e perímetro de diferentes maneiras. Para acessar outros recursos que são oferecidos na plataforma do *Phet Interactive Simulations da University of Colorado Boulder*, o professor precisa realizar um registro e fazer o login. Alguns objetivos de aprendizagem são traçados e estão predefinidos neste ambiente para esta simulação, tais como: encontrar a área de uma figura por meio da contagem dos quadradinhos, dissociar área do perímetro, construir figuras com uma determinada área e/ou perímetro, entre outros (PORTAL DO PHET, 2018).

Na tela de abertura podem ser encontradas duas opções de menus: uma diz respeito à exploração livre da simulação, na qual podem ser criadas várias figuras; a outra trata de um jogo com diferentes níveis, que podem ser jogados por duas pessoas. Os níveis do jogo são livres e podem ser escolhidos pelos jogadores. No canto inferior direito da tela, há um menu no qual é possível ter acesso a algumas informações que podem ser úteis ao usuário: versão da simulação, as atualizações, o usuário pode informar algum problema encontrado (*bug*) no jogo, dados da simulação, entre outras.

⁹⁰ O programa funciona em Microsoft Edge and Internet Explorer 11, latest version of Firefox, latest version of Chrome. A equipe responsável pelo projeto de desenvolvimento: Karina Hensberry (lead), John Blanco (developer), Bryce Gruneich, Amanda McGarry, Ariel Paul, Kathy Perkins, Beth Stade. (PORTAL DO PHET, 2018).

A tela a seguir apresenta a simulação após ser escolhida a opção “Explore”.

Figura 68- Explore –Construtor de áreas



Fonte: adaptado do Phet

Nesta simulação, é possível construir diferentes figuras utilizando as unidades de medidas quadradas. A malha quadriculada também pode ser retirada ao desmarcar a opção (ativar malha) e nela podem ser criadas situações de comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície. Tais situações podem contribuir na dissociação entre área e figura, área e número (medida da área) e área de perímetro, a depender de como o professor conduzirá as diferentes situações que podem ser criadas por meio dela. A maneira como o construtor lida com essas situações pode contribuir para que o aluno construa a ideia de área como uma grandeza autônoma.

Ao serem construídas figuras, é possível visualizar no painel as medidas de sua área e o perímetro, mas esta opção pode ser minimizada para que o usuário não tenha acesso a essa informação. É possível ainda inserir as medidas dos lados das figuras criadas ao clicar na opção *inserir as medidas* (é levado em consideração o lado do quadradinho como unidade de comprimento).

A dinamicidade também está presente neste construtor. Ao levar os quadradinhos da bandeja para a malha, notamos que há um magnetismo que encaixa as figuras mantendo seus lados justapostos, a qualquer momento pode ser devolvido pelo usuário qualquer quadradinho

para sua bandeja, mas é preciso ficar atento, pois, se forem retirados quadrados do centro de uma figura, os que estiverem abaixo dela retornam para bandeja, ou seja, se o objetivo é construir uma figura em que em seu meio seja vazado, é preciso considerar esse aspecto ao iniciar a construção.

A opção de duas janelas, que é apresentada na imagem acima, permite que sejam comparadas áreas e/ou perímetros de figuras lado a lado, ou mesmo criados desafios de atividades pelo professor para dois alunos em uma única tela.

Algo a se destacar como limitação é que, na opção “Explorar”, não se pode trabalhar com unidades de medidas em formato triangulares. Não há como decompor o quadrado pelas diagonais para obter outra unidade de medida, nem tampouco é possível fundir as unidades quadradas de forma a bloquear em atividades de comparação de áreas o aspecto numérico. Também não é possível aplicar rotações nas figuras nem reflexões, o que poderia ser pertinente para que o aluno conceba a invariância da área. Não há como salvar as construções realizadas pelos alunos, sendo preciso que o professor dê um *print screen* da tela para verificar os acertos e erros nas atividades que tiverem sido propostas.

A outra opção na tela central do “Construtor de áreas” é denominada de “Jogo”. Neste jogo, existem ao menos três tipos de desafios: construir uma figura com a área dada, encontrar a área de uma figura e construir uma figura com a área e perímetro dado. Cada nível contém desafios e dificuldade crescente. A tela a seguir apresenta a interface inicial do jogo, na qual inserimos exemplos de situações que aparecem em cada nível.

Figura 69- Jogo do construindo áreas



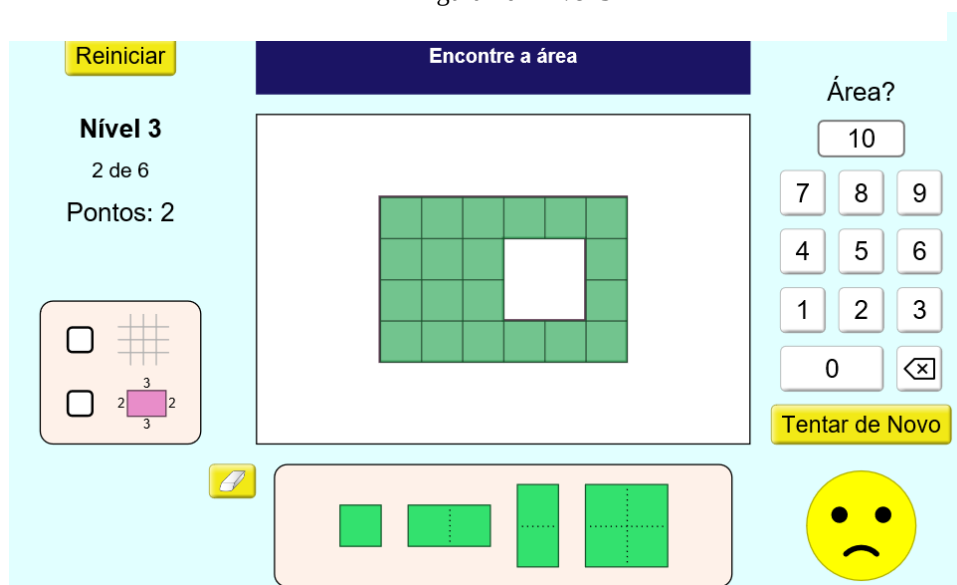
Fonte: do Phet Jogo

O nível 1 explora situações de produção de superfície em que a área de uma figura já é dada previamente, sendo necessário então construí-la. Quando o usuário acerta a tarefa, o nível de dificuldade aumenta e surge um novo desafio. Ele precisa agora medir a área de figuras que aparecem na tela, utilizando uma das unidades que foram dadas, e, em seguida, escrever em um teclado virtual a área da figura.

No nível 2, o jogador terá que construir figuras de área e perímetros distintos e de mesma área e perímetro. São situações em que, dadas diferentes unidades de medidas compostas por unidades quadradas, o jogador precisa seguir o comando e construir com elas o que é solicitado, em seguida. Ao clicar em conferir, se a resposta estiver correta, é possível prosseguir para o próximo desafio; e se incorreta, deve-se recomeçar a construção ou ainda conferir outro tipo de resposta.

O nível 3 apresenta uma situação de medida de área em que podem ser escolhidas diferentes unidades para ladrilhar a figura dada. Após realizar essa ação, deve-se inserir qual a área da figura em um teclado virtual que aparece no jogo, e clicar em conferir. Nesta situação o jogador precisa ficar atento, pois é necessário escolher a unidade mais adequada para realizar a medição da área, caso contrário o jogo não entenderá a resposta. Vamos ilustrar essa explicação na situação abaixo, do nível 3.

Figura 70- Nível 3



Fonte: do PHET

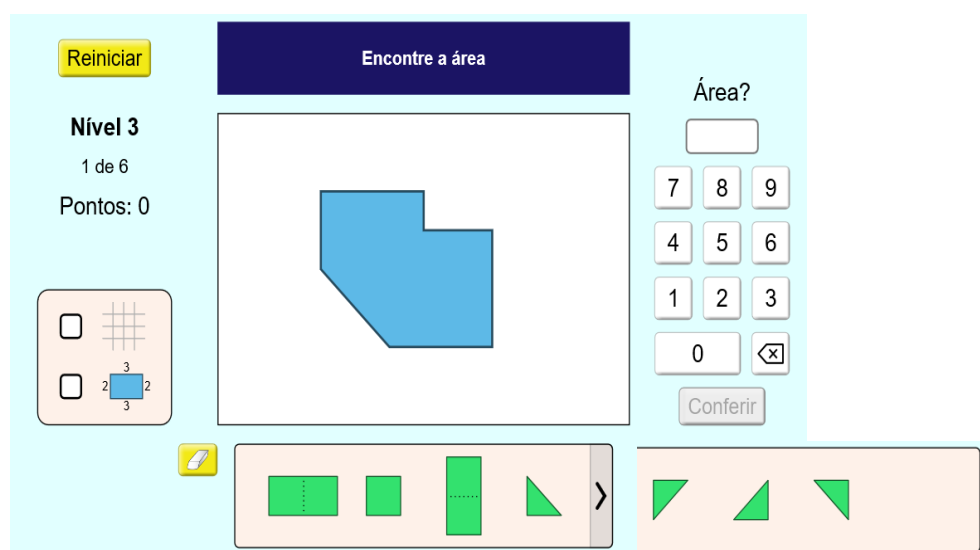
Neste nível do jogo, escolhemos para medir a área da figura dada, a segunda unidade da esquerda para direita (um dominó) na posição horizontal. Todas as unidades são formadas por quadrados congruentes justapostos pelos lados, então pensávamos que, utilizando essa

unidade, a área seria 10 dominós (9 na vertical e 1 na horizontal). Porém, como são as mesmas peças em posições diferentes, o jogo entende que são unidades diferentes, então a mais adequada neste caso seria o quadrado (monominó) para medir a área dessa figura. Esse tipo de controle que é dado a esta situação pode limitar a mobilização de diferentes estratégias de resolução dessa atividade, levando o usuário a pensar que só é possível medir a área da figura apenas com a unidade do monominó, para então estabelecer sua área.

Neste momento, baseados nos estudos de Silva (2016), ressaltamos a diferenciação de alguns aspectos entre a ação de ladrilhar e a medição de área de certa figura. Nesta tarefa, a ladrilhagem efetiva da figura dada com quantidade inteira do tretaminó é impossível, mas é possível com as outras unidades, o que não impede que possamos expressar área da figura dada na situação, tomando como unidade a área do tretaminó. Lembramos que unidade de área e superfície unitária são elementos diferentes⁹¹.

Quando nos referimos à unidade de área, temos figuras diferentes que podem ter a mesma medida de área e serem utilizadas como unidade, no caso dos dois dominós em posições diferentes. Há também figuras com superfície unitária (superfícies que podem ser utilizadas como unidade de área para expressar as medidas de área de outras superfícies), por exemplo o tetraminó. Ainda nesse nível, é possível verificar que há outras unidades de medidas de áreas que podem ser escolhidas pelo jogador para medir a área de uma figura dada, como ilustramos a seguir:

Figura 71- Diferentes unidades de medida

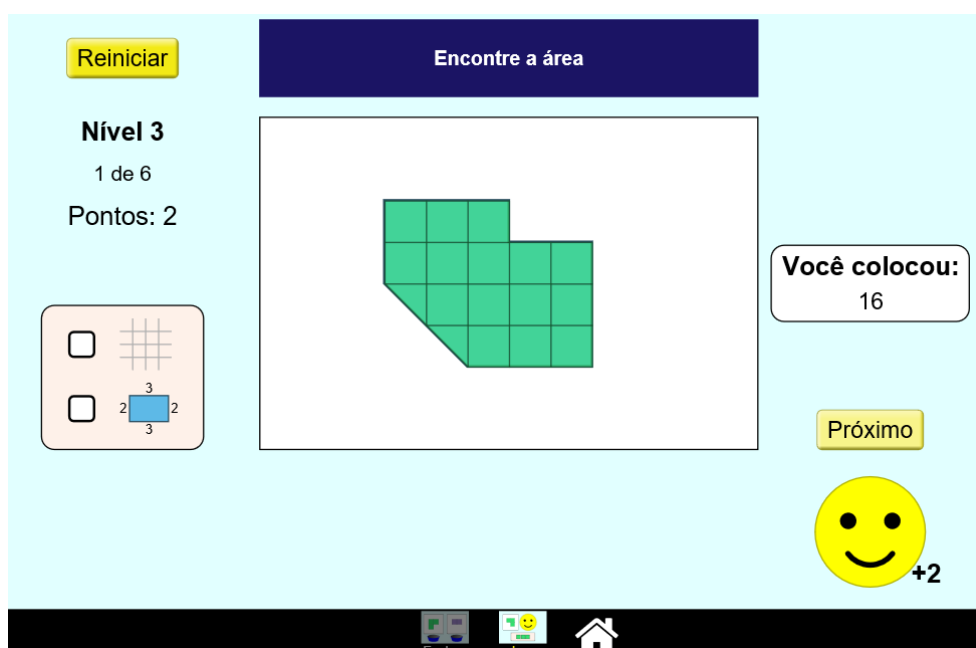


Fonte: do PHET

⁹¹ Neste caso, há uma confusão na possibilidade de usar certa unidade com ladrilhamento efetivo e superfície unitária dada.

No nível 3, fizemos várias tentativas utilizando as unidades triangulares, que representam metade da área do quadrado (triângulos retângulos isósceles). Entretanto, ao serem inseridas para ladrilhar a figura, por vezes não encaixam, ficam fora da figura, dando a entender que o jogador deve escolher outra unidade. Escolhemos, então, o quadrado como unidade de medida para medir a área da figura dada. O jogo apresenta um rostinho feliz ao ser inserido o número 16, como resposta a área da figura dada, ou ainda que a área da figura são 16 quadradinhos, porém são 15 inteiros e 1 decomposto, como apresentamos a seguir:

Figura 72-Nível 3 atividade concluída



Fonte: do PHET

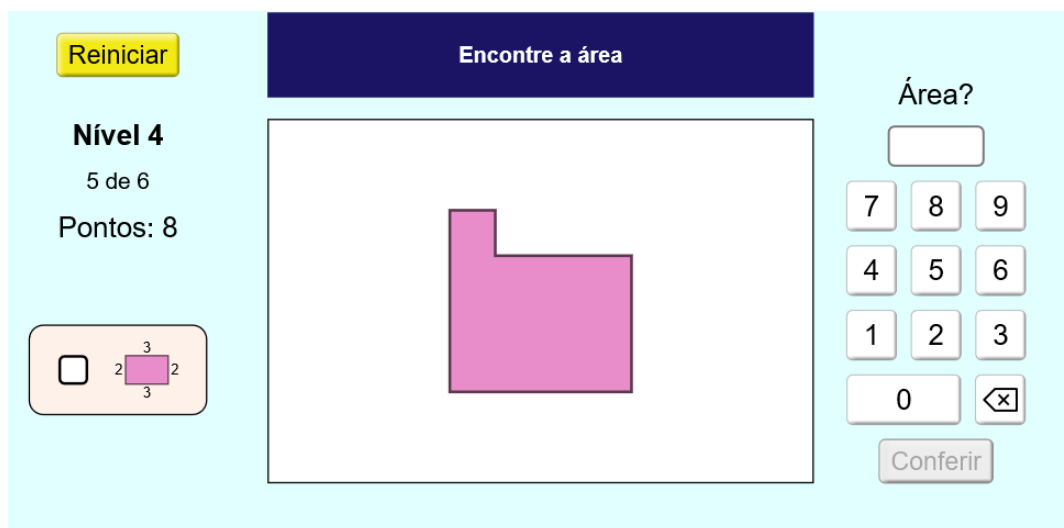
Notamos certa confusão e uma disparidade entre uma atividade de medida de área e outra neste mesmo nível, o que pode conduzir o usuário a não diferenciar a área de sua medida, assim como a compreensão de que não é possível ladrilhar completamente a área da figura com ladrilhos iguais ao quadrado, sendo necessário decompô-lo pela diagonal.

No nível 4, é dada uma quantidade insuficiente de ladrilhos, de forma que o usuário terá que, mentalmente, descobrir quantas unidades faltam para completar a ladrilhagem, e em seguida contar quantas foram usadas para ladrilhar toda a figura, para enfim escrever, utilizando o teclado virtual do jogo, qual a área da figura. Os níveis de complexidade das atividades vão aumentando e exigindo que o usuário por vezes decomponha a unidade de medida de área dada mentalmente para, em seguida, expressar a área da figura.

O nível aumenta ainda mais, chegando a um momento em que não é dado nenhum ladrilho na atividade, mas visualmente o usuário terá que imaginar quantas unidades

quadradas serão necessárias para medir a área da figura dada, e por vezes realizar o processo de decomposição mentalmente, para então responder qual a área da figura, como no exemplo a seguir:

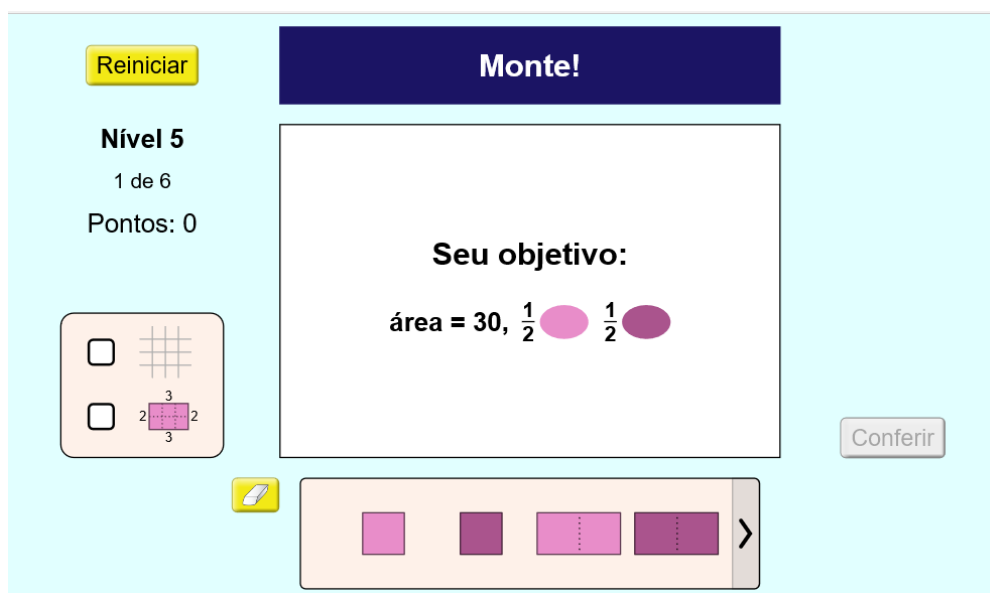
Figura 73- Nível 4



Fonte: do jogo

No nível 5, o desafio dado é para que se construam figuras a partir da área preestabelecida, porém o usuário terá que obedecer a algumas regras. Por exemplo, metade da área deve ser composta por um tipo de unidade de área e a outra por outro tipo, como ilustrado:

Figura 74- Nível 5

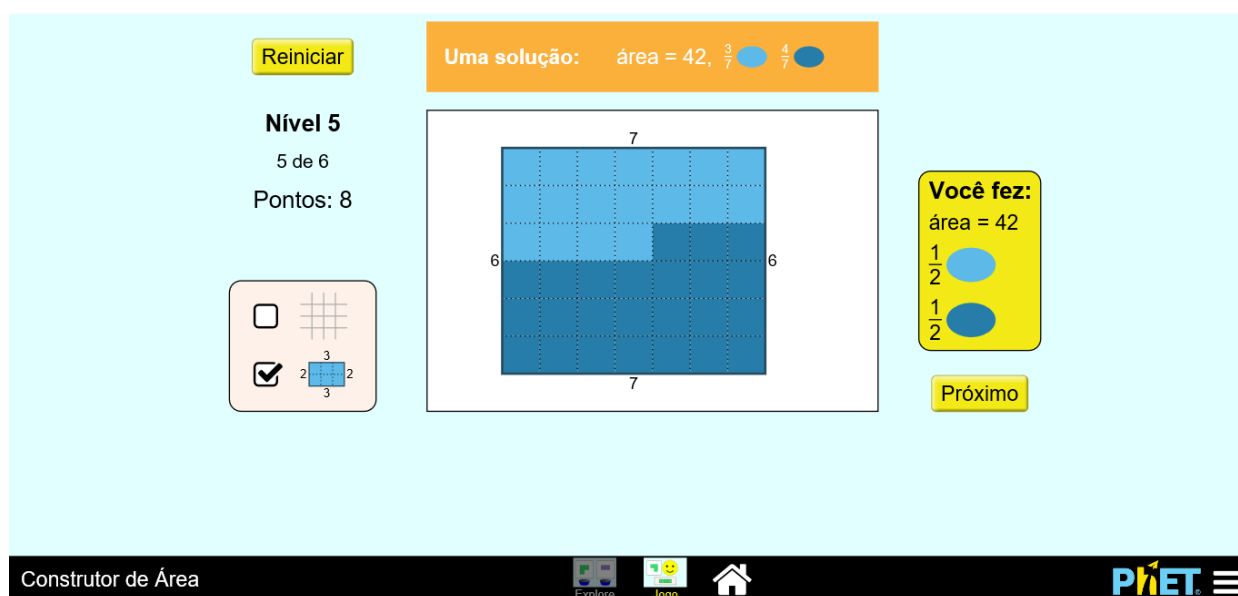


Fonte: do jogo

Notamos que, no “Construindo áreas”, tanto na opção de “Explorar” como na de “Jogos”, o foco é dado a situações de medida de área, em que, por vezes, são dadas diferentes unidades e pede-se ora para que seja medida a área de uma figura, ora para que se construa uma figura que tenha certa área e certo perímetro. Sentimos falta do trabalho com situações nas quais não intervisse o aspecto numérico rapidamente e o cuidado em algumas atividades de medida de área em que ficaram confusos os controles que o jogo dá, em relação às unidades que devem ser escolhidas.

O jogo ainda oferece estrelas ao finalizar cada nível e, quanto mais o usuário acertar, mais ele ganha estrelas. Caso o usuário não consiga resolver a atividade, pode tentar de novo ou ainda conferir um tipo de resposta, clicando na opção “conferir”. A imagem abaixo apresenta uma solução após ser selecionada essa opção.

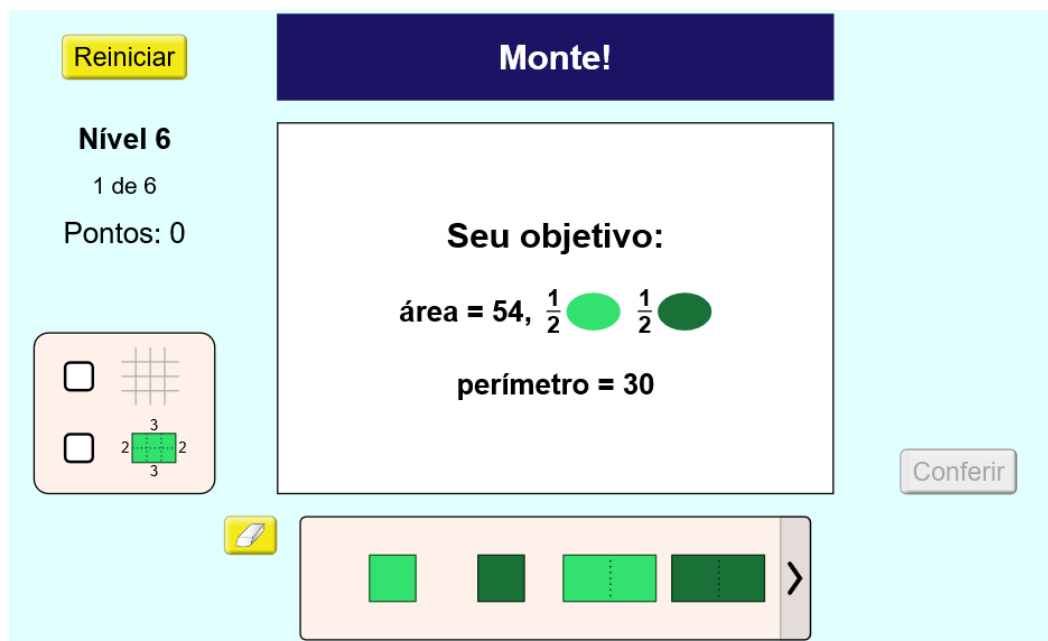
Figura 75- Nível 5-conferir



Fonte: do jogo nível 5

O último nível do jogo é o 6, o qual explora situações em que é preciso construir figuras com área e perímetro diferente, atendendo ao objetivo da atividade:

Figura 76- Nível 6



Fonte: do jogo nível 6

Com essa tela, finalizamos a análise desse jogo que pode ser útil ao ensino e aprendizagem de área e perímetro em alguns níveis. Entretanto, é preciso ter certo cuidado em algumas telas para que o mesmo não reforce as diversas confusões que foram explicitadas em parágrafos anteriores com relação ao conceito de área.

3.6.4 O jogo *Construindo Loucuras*

O “Construindo loucuras” é um protótipo de um jogo desenvolvido por Prates (2011), cujo objetivo é trabalhar a ideia de ladrilhamento de figuras, a partir de peças estabelecidas e compradas em uma loja. A ilustração a seguir apresenta uma das telas do jogo.

Figura 77- Parte do Jogo construindo loucuras



Fonte: da pesquisa

Neste sentido, o trabalho com ladrilhamento de figuras com diferentes unidades de medida não convencionais é pertinente para que o aluno perceba que a área da figura independe da unidade de área estabelecida, e que, ladrilhando uma mesma figura com diferentes ladrilhos, a área da figura permanece invariável.

A análise desses recursos vem nitidamente como outro fator motivador para a concepção e desenvolvimento de um *software* de geometria do tipo micromundo, pois, como observado em nossas análises, só é possível ao professor criar situações que já estão predefinidas nos *software* do tipo: jogos, simulações, animações ou tutoriais. Em alguns deles, não há a possibilidade de serem construídas diferentes situações que deem sentido ao conceito de área e perímetro, assim o professor limita-se apenas às que estão programadas.

Entretanto, algumas das ideias presentes em cada um deles servem de requisitos para que este novo micromundo possa oferecer condições ao professor de produzir diferentes tipos de situações que dão sentido à área, por meio da criação e desenvolvimento de diferentes tarefas, sendo este tipo de *software* mais apropriado para este foco.

Nesta subseção, procuramos explicitar diferentes tipos de recursos que podem ser úteis ao se explorar os conceitos de área e perímetro de figuras geométricas planas. Limitamo-nos em apresentar os aportes, limitações e lacunas de cada um concernentes ao estudo desses conceitos.

Muitos outros tipos de *software* podem ser encontrados em diferentes sites, nacionais e internacionais, e podem contribuir com o ensino e aprendizagem da matemática, como no site do “Só Matemática”⁹², da “UNICAMP” (Universidade de Campinas/São Paulo)⁹³, no “Edumatec” (Educação Matemática Tecnológica e Informática)⁹⁴, no *Mathenpoche*⁹⁵ (GUEUDET; TROUCHE, 2008), entre outros. A lista não se esgota a esses sites, que são citados por terem servido de busca em algum momento desta pesquisa para estudar alguns recursos e por vezes selecionados para serem analisados posteriormente.

3.6.5 Finalizando o capítulo

Como abordamos, há uma diversidade de micromundos, jogos, simulações, tutoriais dinâmicos que foram desenvolvidos em diferentes épocas. Uns implementam a Geometria Dinâmica, como por exemplo, o AG 2, o *Cabri*, o Geogebra, o R.A.C, outros, como o Construindo Loucuras e o Aire do phet, permitem o trabalho com a ideia de área, voltado ao uso de unidade de medida de área e mudança de unidade. Alguns dos elementos implementados nesses *software* mostraram-se pertinentes ao trabalho com área e perímetro de figuras planas.

Nossas análises preliminares nos deram subsídios para fundamentar teoricamente a concepção do novo micromundo que denominamos de “Magnitude Studium”⁹⁶ (MS), como também as análises dos *software* existentes estudados na dimensão informática. No próximo capítulo, apresentaremos os requisitos extraídos das análises preliminares que serão pertinentes ao MS.

⁹² Disponível em <<https://www.somatematica.com.br/softOnline.php>>. Acesso em 28 de julho de 2018.

⁹³ Disponível em <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:software>>. Acesso em 29 de junho de 2018.

⁹⁴ Disponível em <<http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/>>. Acesso em 28 de julho de 2018.

⁹⁵ Disponível em <<http://mathenpoche.sesamath.net/>>. Acesso em 30 de julho de 2018.

⁹⁶ Esse novo micromundo que, traduzido para português, é “Estudo da Grandeza”, deverá ser incorporado no LEMATEC Studium, protótipo de um ambiente de suporte ao ensino da matemática, presencial e/ou à distância que vem sendo desenvolvido por Franck Bellemain (BELLEMAIN; RODRIGUES; SILVA, 2017, p. 4).

SEGUNDA PARTE (DIMENSÃO OPERACIONAL)

4 ELICITAÇÃO E ANÁLISE DE REQUISITOS⁹⁷

Para a elicitação e análise de requisitos do novo micromundo denominado de *Magnitude Studium* (MS) (Estudo da Grandeza), subsidiamo-nos em elementos da fase de análise preliminar (dimensão teórica), conforme o modelo de Tibúrcio (2016), a saber: epistemológica, didática, cognitiva e informática. Como o desenvolvimento do MS conta também com grandes influências de nossas experiências com o *Apprenti Géomètre 2* (SILVA, 2014, 2015, 2016, 2017), explicitaremos, nesta seção, alguns requisitos desse *software* com base em nossos estudos.

Ampliaremos esses achados, por meio da análise do projeto de desenvolvimento do AG 2 intitulado “*Conception d'un CD-Rom pour l'enseignement des mathématiques à l'école primaire Cahier des charges Du logiciel de dessin*” (CREM, 2002). Nesse texto, o *Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* explicita a empresa que desenvolveu o AG 2, o funcionamento dos menus e ferramentas desse *software* para a produção de sua primeira versão.

Diante desse contexto, exporemos nesta seção, o que vem a ser interessante em um ambiente potencialmente rico para a construção de situações de aprendizagem de área e perímetro com características voltadas ao público (professores e alunos) da educação básica no Brasil.

Entendemos, assim como Pressman (1995), que uma compreensão completa dos requisitos de *software* é fundamental para um bem sucedido desenvolvimento. Ainda para esse autor, a análise de requisitos é “um processo de descoberta, refinamento, modelagem e especificação que possibilita ao engenheiro de *software* aprimorar a alocação do *software* e construir modelos dos processos dos dados e dos domínios comportamentais que serão tratados pelo mesmo, com uma maior qualidade” (PRESSMAN, 1995, p. 232).

⁹⁷ Além dos requisitos que expomos neste capítulo, nos Apêndices B e C podem ser encontrados mais algumas explicações com base em elementos da nossa análise preliminar sobre o que este novo micromundo deverá permitir realizar.

4.1 Requisitos Referentes a Dimensão Epistemológica

4.1.1 Equivalência de área Euclides - quadratura de figuras

Dizemos que figuras planas são equivalentes quando possuem mesma área⁹⁸. Para permitir trabalhar a ideia de equivalência de área em Euclides e alguns passos para a quadratura de polígonos mais usuais (triângulo - paralelogramo - retângulo - quadrado), o software deverá levar em conta os seguintes elementos:

- 1- *Todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de base e altura respectivamente congruentes às do paralelogramo. (Proposição 36 do livro 1);*
- 2- *Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e metade da altura do triângulo. (Proposição 42 do livro 1);*
- 3- *Construir um quadrado igual a um retilíneo dado (retângulo). (Proposição 14 do livro 2).*

Para isso, o software oferecerá a possibilidade do usuário construir os seguintes polígonos:

- **Triângulos:** bastará definir o tipo por meio da escolha de três pontos não colineares;
- **Paralelogramos:** determina-se com três cliques do *mouse* ambos os lados adjacentes e o software completa a construção;
- **Retângulo:** para desenhar o retângulo, o procedimento é o mesmo do paralelogramo, o software deverá impor restrições quanto ao ângulo e o comprimento dos lados.

4.1.1.1 A quadratura do triângulo⁹⁹

Para fazer a quadratura do triângulo, primeiramente o software deverá oferecer condições de transformá-lo em um paralelogramo equivalente. Para isso, bastará permitir construir um triângulo qualquer, selecionar um botão com a função que conduzirá a tal transformação, em seguida clicar em um dos lados do triângulo. Automaticamente, aparecerá um paralelogramo equivalente.

⁹⁸ Mas duas figuras de mesma área não necessariamente são equivalentes.

⁹⁹ A quadratura do paralelogramo e do retângulo estão contidas na explicação referente a do triângulo. Queremos ressaltar que a quadratura diz respeito a obter um quadrado de mesma área que uma figura dada, mas nessa passagem há muita coisa que não está relacionada a quadratura, ou seja, quando se passa de um triângulo para o paralelogramo, não estamos fazendo uma quadratura, e sim, uma equidecomposição.

O segundo passo será análogo ao anterior, para transformar o paralelogramo em retângulo, o *software* deverá oferecer uma ferramenta que, ao ser acionada e em seguida clicado em um dos lados do paralelogramo possa surgir um retângulo equivalente. Por último, uma ferramenta que permita transformar automaticamente o retângulo em um quadrado equivalente, seguindo os passos descritos anteriormente. Assim, o MS, além de oferecer condições de construir separadamente os polígonos supracitados, deverá conter três ferramentas: **triângulo para paralelogramo**, **paralelogramo para retângulo** e **retângulo para quadrado**, finalizando com a soma de quadrados (Pitágoras), como apresentamos a seguir.

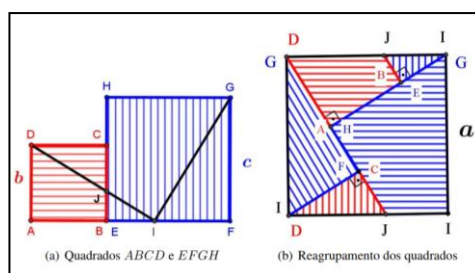
4.1.1.2 Ferramenta para tratar o teorema de Pitágoras

“Fizemos a comparação de figuras geométricas através da equivalência e, para isso, reduzimos cada figura dada a uma figura mais simples: “o quadrado- por meio da quadratura” (SANTANA, R., 2015). Agora, detalharemos o comportamento de uma ferramenta que permita somar áreas de quadrados pelo Teorema de Pitágoras, proposição 47 dos elementos de Euclides, Livro I: *Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.*

4.1.1.2.1 Comportamento da ferramenta

Para somar as áreas de dois quadrados quaisquer, o Magnitude deverá oferecer: uma ferramenta que possibilite ao usuário construir quadrados predefinidos, determinando com dois cliques um de seus lados, sendo que o *software* terminará a construção respeitando o sentido anti-horário em curso. Em seguida, a possibilidade de justapor esses quadrados por um de seus lados. Por fim, um botão com a função que permita, após ter sido acionado, clicar em um dos quadrados e prontamente no outro, gerando, automaticamente, um novo quadrado com a soma da área dos outros dois.

Figura 78- Soma de Quadrados



Fonte: (SANTANA, R., 2015, p. 34)

Não necessariamente as partes decompostas precisam ficar destacadas no novo quadrado gerado.

4.1.1.3 Decomposição e recomposição

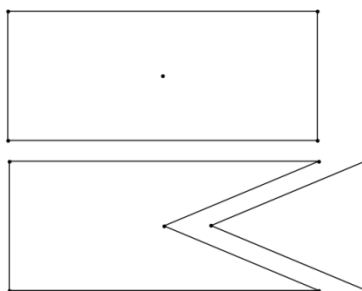
Decomposição e recomposição de figuras: (método da partição) iniciado pelos egípcios e mesopotâmicos e estudado de forma mais aprofundada por Euclides, David Hilbert, entre outros: consiste em para calcular a área, tenta-se dividir uma figura em um número finito de partes, de tal modo que essas partes possam compor uma figura de área a qual conhecemos (BOLTIANSKI, 1981).

4.1.1.3.1 Decomposição

As figuras criadas no MS poderão ser decompostas pela diagonal, vertical, horizontal ou de diferentes formas por meio da ligação de pontos sobre a figura. Para realizar a decomposição da figura pela diagonal, alguns passos devem ser levados em conta. Tendo sido acionada a ferramenta “Decomposição”, deve-se escolher um dos seus vértices, selecioná-lo e arrastá-lo até o outro, clicando-o ao final com o botão esquerdo do *mouse*.

Quanto às decomposições pela vertical e horizontal, poderá ser livre, apenas pela ligação de pontos. Todavia, caso o usuário deseje dividir em partes congruentes, será preciso primeiro, com o botão de decomposição ativado, clicar duas vezes em um dos segmentos da figura. Então, uma janela com os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 surgirá na tela e o usuário poderá escolher um desses números. Automaticamente, o *software* dividirá o segmento proporcionalmente em até 10 partes. O usuário deverá realizar o mesmo procedimento no segmento paralelo e, em seguida, ligar os pontos para que as figuras sejam decompostas. Ainda na opção decomposição, aparecerão as seguintes opções: “ponto central e corte livre”.

Figura 79-Modo de decompor pelo ponto central

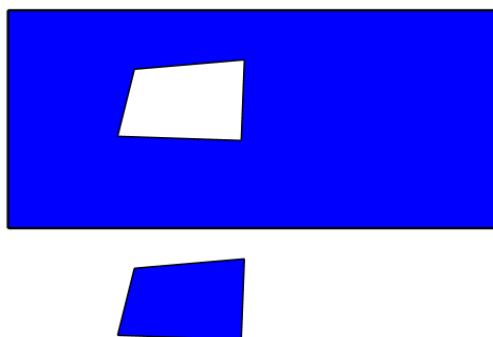


Fonte: da pesquisa

A opção *ponto central* permitirá criar, no centro da figura, um ponto que passa a lhe pertencer. Após a criação desse ponto central, será preciso apenas selecionar a ferramenta “Decompor”, escolher um dos vértices da figura, ligar ao ponto central com o botão esquerdo do mouse e concluir, arrastando até o outro vértice da figura, para assim ser realizado mais um processo de decomposição como apresentado na figura anterior.

Ainda oferecerá outra forma de decompor por meio do “Corte livre”. Ao escolher essa ferramenta, deve-se clicar sobre a figura para selecioná-la. Em seguida, devem-se construir diferentes pontos livres em seu interior, clicar sobre um deles e ir arrastando até os outros. A decomposição ocorrerá quando, no último ponto que fecha a figura, for dado um clique duplo. Como ilustramos a seguir:

Figura 80- Modo de decompor 2



Fonte: da pesquisa

Assim que for realizada a união dos pontos, a parte decomposta se destacará da figura como apresentado na ilustração acima.

4.1.1.3.2 Recomposição

Para realizar a recomposição da figura, devem-se justapor as partes decompostas, clicar na opção recomposição, em seguida na primeira parte da figura e logo após na segunda. O *software* deverá então fazer a junção das duas partes em uma única figura (SILVA, 2016).

4.1.2 Ferramenta para explorar a equidecomposição (Hilbert).

Equidecomposição: De acordo com Pressiat (2008, p. 468) “Duas figuras P e P' são equivalentes, se for possível escrever cada uma delas na forma de reuniões de triângulos que não se sobrepõem”: $[P = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n \text{ e } P' = T'_1 \cup T'_2 \cup \dots \cup T'_n]$ de modo que, para

cada i , os triângulos T_i e T'_i são congruentes. Para esse tipo de decomposição, precisaremos de ferramentas que permitam a construção de diferentes quadriláteros e uma que decomponha-os em triângulos. Acreditamos que a triangularização nos permite trabalhar com a equidecomposição de figuras a partir das ideias de David Hilbert presentes na dimensão epistemológica.

4.2 Requisitos Referentes às Dimensões Cognitiva, Didática e Informática

4.2.1 Menu construção

Neste botão, teremos ferramentas de construção, presentes em alguns dos *software* de geometria estudados na dimensão informática, tais como: reta, ponto, ponto de intersecção, segmento, reta paralela, reta perpendicular, semirreta, circunferência e arco definido por dois pontos e três pontos, os quais permitirão que sejam construídas diferentes figuras, poligonais e não poligonais.

4.2.2 Menu polígonos

Ao acionar este botão, deverão aparecer duas opções: “polígono regular e polígono qualquer”. A ideia de polígono regular deverá seguir os princípios do *Cabri Géomètre* em que é possível trazer diretamente à tela do *software* um polígono regular convexo definido por um centro de “ n ” lados (30 ou menos). Quanto ao “polígono qualquer”, este seguirá os princípios do Geogebra. Após escolhida tal ferramenta, basta apenas determinar a quantidade de vértices do polígono escolhido com alguns cliques na área de trabalho do *software* e, em seguida, finalizar a construção com um clique o primeiro vértice criado.

4.2.3 Ladrilhos

Ao ser acionado este botão, em cascata, surgirão as seguintes opções: Quadriláteros (quadrado, retângulo, paralelogramo, losango, trapézio retângulo e trapézio isósceles), Triláteros (triângulos formados por algumas decomposições do quadrado), outros (pentágono regular, hexágono regular, heptágono regular, octógono regular, eneágono regular e dodecágono regular), essas figuras seguiram os princípios dos ladrilhos predefinidos do AG 2. Entretanto, não seguirá a ideia de famílias de figuras que está presente neste *software*.

4.2.4 Caneta livre

Essa ferramenta permitirá que sejam construídas superfícies irregulares à mão livre. O *software* reconhecerá como uma figura fechada e poderá ser decomposta como todas as outras. Fornecerá também a área e o perímetro destas figuras.

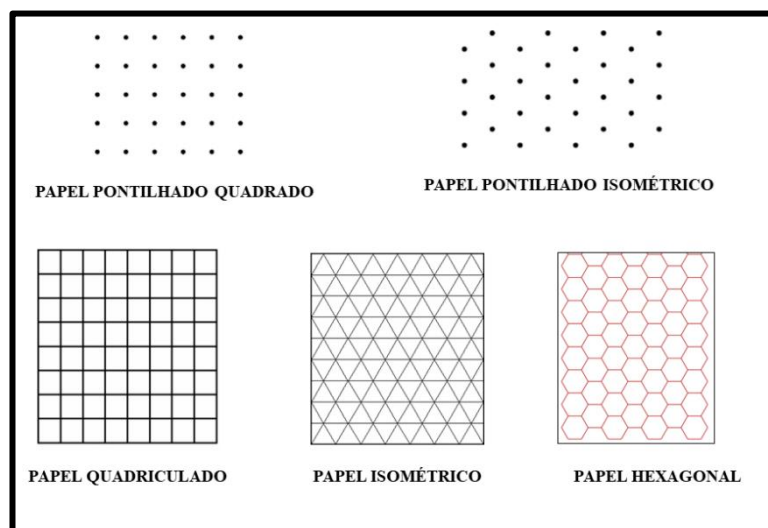
4.2.5 Movimento

Esse menu deverá conter três ferramentas específicas que permitirão ao usuário movimentar as figuras desenhadas na interface do *software*, mantendo-as congruentes – *Mover*, *Rotação* e *Reflexão*, seguindo os princípios do *Apprenti Géomètre 2* (CREM, 2007b). Quanto à rotação, haverá uma opção de escolha de quantos graus (sentido horário e anti-horário) a figura poderá ser rotacionada (seguirá neste caso, os princípios do *Cabri-Géomètre 2*).

4.2.6 Malhas

Este botão mostrará seis sub-botões: (Magnetismo), (Eixo) e (Malhas: papel pontilhado quadrado, papel pontilhado isométrico (cuja base é um triângulo equilátero), papel quadriculado, papel isométrico, papel hexagonal). Essas malhas são ilustradas na figura a seguir:

Figura 81- Malhas para o *Magnitude Studium*



Fonte: da pesquisa

Ao clicar no botão com a malha desejada, na tela do *software*, aparecerá a que fora escolhida pelo usuário. A desativação se dará com um clique no mesmo botão, retornando à tela em branco. Para ampliar ou reduzir a distância entre os pontos na malha, poderão ser utilizados os botões (+ e -) do teclado ou o botão direito do *mouse* da seguinte forma: após ter sido ativada uma das malhas, o *software* deverá fornecer uma janela onde será possível inserir as coordenadas (x, y) para o seu ajuste de espaçamento.

As malhas serão independentes das figuras, servindo como referencial para as construções, exceto quando a função magnetismo estiver acionada. Essa função permitirá que a figura se ajuste automaticamente, podendo ser ampliadas ou reduzidas na mesma proporção que as malhas quando inseridos os valores de (comprimento (x) e largura (y)).

A opção (arrastar/translação), quando ativada, permitirá que as malhas por completo sejam arrastadas na tela do software. Para isso, bastará manter pressionado o botão esquerdo do *mouse*. O movimento de rotação também poderá ser realizado nas malhas com esse botão ativado.

4.2.6.1 Magnetismo nas malhas

O botão magnetismo, quando acionado antes da construção das figuras, permitirá que os vértices das mesmas se ajustem aos pontos da malha (vértices do quadradinho na malha quadriculada, por exemplo). Se o botão magnetismo for desativado, tal ação não será efetivada. Os objetos criados nas malhas poderão ser ampliados, reduzidos, decompostos, movidos e duplicados. Os movimentos de rotação, translação e reflexão também poderão ser acionados e aplicados a estes objetos, desde que os resultados tenham todos os vértices em pontos da malha.

4.2.7 Tangram

Quando acionado este botão, deverá aparecer logo abaixo o tangram em seu formato quadrado e suas principais peças soltas sem repetição: um quadrado, um triângulo retângulo isósceles pequeno, um grande, um médio e um paralelogramo. Esse fator pode contribuir para auxiliar o usuário (professor) a utilizar esse jogo no ensino de área e perímetro, não sendo necessário ao mesmo, dominar as ferramentas da GD para sua construção.

Para que essas figuras, assim como o tangram completo, venham direto para a tela, será preciso apenas clicar nelas e, em seguida, na área de trabalho do *software*. Cada clique permitirá várias cópias de uma mesma peça. Quando as peças forem aproximadas, o magnetismo fará com que elas se justaponham automaticamente. As figuras poderão ser

decompostas, recompostas, duplicadas e aplicadas às transformações isométricas do plano, entre outras ações. O modelo a seguir surgirá após ser acionado esse botão:

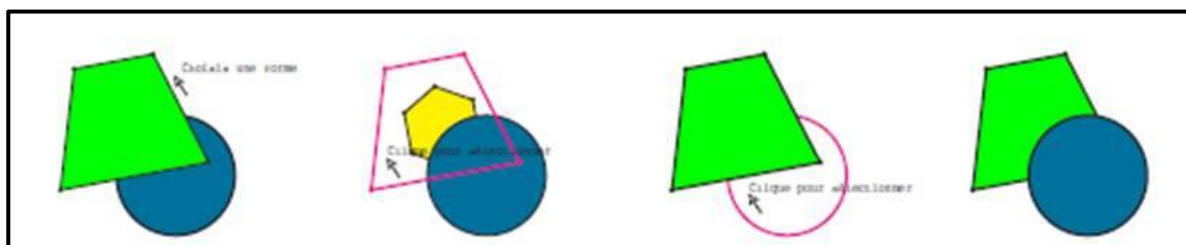
Figura 82- Peças do tangram



Fonte: da pesquisa

Chamamos atenção neste momento para a seguinte questão: se o tangram for colocado diretamente na tela antes das peças avulsas, essas, ao serem sobrepostas a ele, cobrirão uma das partes do mesmo. Entretanto, caso aconteça o contrário, a peça ficará por trás. Assim, o usuário terá a opção, com o botão direito, de selecioná-la e escolher a opção enviar para frente. Seguiremos os princípios do AG 2 na seguinte situação:

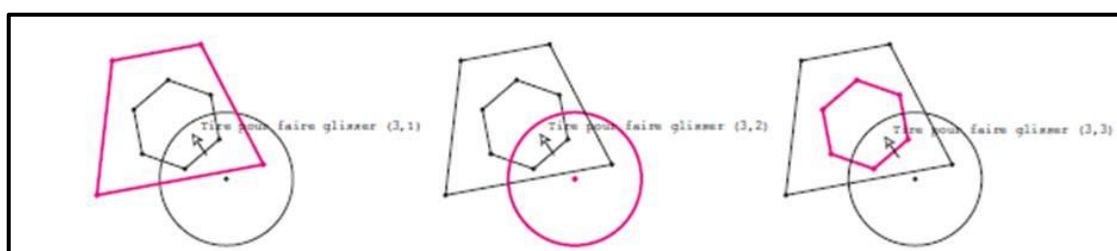
Figura 83- Seleção das figuras



Fonte: CREM (2017, p. 36)

Ao colocar três figuras, uma sobre a outra, e passarmos o cursor do *mouse* em cada uma delas separadamente, como no trapézio verde na imagem acima, ficará transparente. Neste caso, o usuário poderá ver o que está por trás de tal figura. Quando o *mouse* passar sobre diversas figuras sobrepostas ao mesmo tempo, elas se tornarão transparentes e aparecerá uma mensagem indicando quantas e quais são. Além disso, a figura em que o cursor permanecer ficará destacada em uma cor vermelha, como apresentamos a seguir:

Figura 84- Transparência das figuras



Fonte: CREM (2017, p. 37)

Ao selecionarmos a opção mover, que deverá constar no menu denominado de movimentos no *Magnitude Studium*, o cursor do mouse, quando colocado sobre alguma das peças do tangram, selecionará a borda da peça e aparecerá a seguinte mensagem: “arrastar essa peça”. Isso acontecerá em qualquer outra figura que tenha sido construída ou inserida na área de trabalho desse *software* e caberá ao usuário realizar o movimento indicado clicando com o *mouse*.

4.2.8 Poliminós

Neste botão, teremos a presença do jogo poliminós (monominó, dominó, triminó, tetraminó, pentaminó). Da mesma forma que acontece com o tangram, após acionado, aparecerão as peças da seguinte forma:

Figura 85- Modelo do comportamento dos poliminós



Fonte: da pesquisa

Deve-se escolher qual dos jogos deseja-se utilizar, clicar no número correspondente, em seguida na peça, e após na *interface* do *software* para que a mesma apareça. Todas as funcionalidades que ele permitir realizar nos objetos criados por meio de outras ferramentas serão possíveis também nas peças deste jogo. Como são formados por quadrados justapostos pelos lados, os mesmos não devem aparecer demarcados nas figuras. Assim, o professor, ao utilizar essa opção, estará bloqueando estratégias numéricas de contagem das unidades quadradas na determinação da área dessas figuras. Poderá também utilizá-las como unidade de medida de área nas quais os quadrados não estarão explícitos visualmente.

4.2.9 Magnitudes

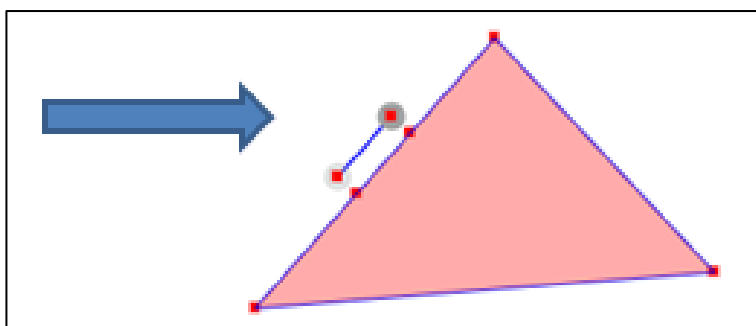
Este menu abrirá dois botões. Um deles está relacionado à área e, ao ser acionado e em seguida clicado dentro da figura, permitirá aparecer a representação da área pelo par (número + unidade de medida). A unidade de medida escolhida poderá ser (cm^2 , mm^2) ao se clicar com o botão esquerdo do *mouse* sobre essa ferramenta. Para o comprimento e o perímetro, as

unidades também devem ser escolhidas (cm, mm), da mesma forma que para as de área. Com relação ao perímetro, deverá ser clicado em um dos segmentos da figura para que o mesmo venha a surgir. Quanto ao comprimento, deverá clicar em um vértice e outro de um mesmo lado da figura, assim, aparecerá o comprimento medido daquele lado. Para isso, seguiremos a ideia do *software Cinderella*, que, ao permitir realizar essa medição, aparece por trás do segmento uma espécie de fita métrica, aproximando a ideia da régua em um ambiente de papel.

4.2.10 Definindo uma unidade de comprimento da figura

Para realizar esta decomposição, o usuário deverá clicar em um dos vértices e arrastar até o outro, dando um clique ao final. Assim, um dos lados da figura se destacará automaticamente. Todas as ações que o *software* permitir serem realizadas em objetos construídos em sua tela poderão ser aplicadas neste. O usuário ainda poderá destacar uma das partes dos lados das figuras. Para isso, bastará selecionar a ferramenta de corte (decomposição), e em seguida, escolher a parte que se deseja decompor com dois cliques, como se estivesse construindo um segmento de reta. Dessa maneira, automaticamente, o pedaço obtido se destacará como ilustramos a seguir.

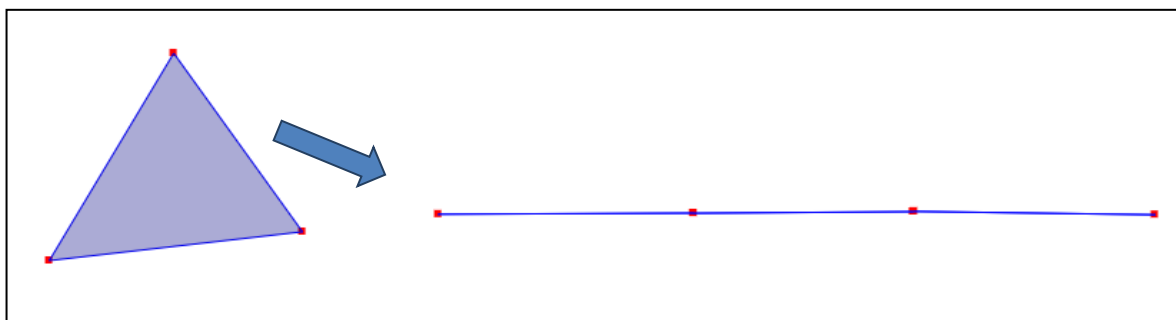
Figura 86- Destacando uma parte do lado



Fonte: da pesquisa

Outra forma seria escolher um dos lados da figura dada, clicar em um de seus vértices, seguido do outro. Assim, automaticamente, a figura abriria, gerando uma linha como na ilustração abaixo.

Figura 87-Abrindo um polígono com cliques



Fonte: da pesquisa

4.2.11 Ferramentas comuns aos software de geometria da dimensão informática

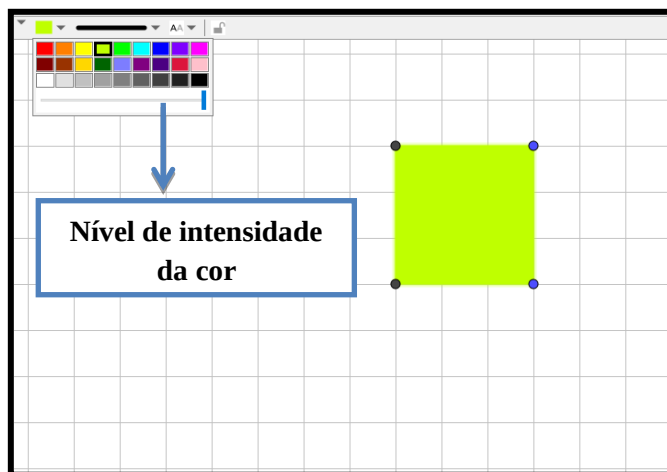
Um botão do tipo “Arquivo”, que deverá abrir em cascata as seguintes funcionalidades: novo, salvar no disco, carregar do disco, imprimir, exportar em pdf, jpeg ou bitmap. Outro denominado de “Editar” contendo ferramentas do tipo: desfazer, selecionar, agrupar, desagrupar, nomear, remover e de texto.

Um botão denominado de “Formatação” com os dados e métodos comuns a todos os objetos construídos no *software*: cor da linha, cor de preenchimento, espessura da linha, trazer para frente, enviar para trás, aplicar zoom (ampliar e reduzir) e modificar (ampliar e reduzir por meio do arrastar pelo vértice) e colorir.

A opção “Janela” abrirá uma nova janela, deixando a que aparece na tela de abertura do *software* por trás. Quando o usuário escolher a opção “novo documento”, a janela de abertura do *software* também ficará por trás, mas, ao ser clicado, deverá retornar à tela principal. Um menu do tipo “Ajuda” (que poderá conter o manual do software).

Uma opção de colorir os objetos da seguinte forma: quando acionada a ferramenta “colorir”, surgirá uma paleta de cores com um botão de gradiente. Após ser construído um objeto na tela do *software*, será possível escolher uma cor e ajustar em níveis de opacidade. Essa ação também poderá ser realizada nos vértices e nos lados das figuras. No nível mais intenso da cor, o que estiver colocado por trás de qualquer objeto que tenha sido construído não poderá ser visualizado. Na figura a seguir, a cor verde no nível mais intenso fez com que a malha que está por trás do quadrado não aparecesse.

Figura 88- Ferramenta colorir



Fonte: extraído do Geogebra

4.2.11.1 Duplicação

Essa ferramenta terá como função duplicar qualquer figura desenhada na interface do *software*. Para duplicar as figuras, será preciso apenas acionar essa ferramenta e clicar na figura que se deseja duplicar e, em seguida, arrastar sobre a tela do *software*.

4.2.11.2 Observações referentes ao comportamento de algumas ferramentas comuns

Outra situação a se destacar é a possibilidade de um menu embutido aparecer em cascata, assim que uma figura for selecionada com o botão direito do *mouse*.

Após uma figura ser construída na tela do MS por meio das ferramentas de régua e compasso dinâmicos, ao selecionar o menu mover e, em seguida, colocar o cursor sobre a tal figura, uma mensagem aparecerá contendo o nome do polígono e indicando um menu de contexto embutido. Nele deverão constar as opções de colorir a figura completa ou apenas a borda, trazer para frente ou enviar para trás de outro objeto, esconder os pontos (vértices das figuras) e tornar as lados mais destacadas ou mais finos. Quando for selecionado apenas um dos objetos que constitui a figura, outras opções deverão aparecer, tais como: exibir objeto, exibir rótulo, renomear e apagar (seguindo os princípios do Geogebra).

4.2.11.2.1 Magnetismos nas figuras

As figuras criadas possuirão vértices e lados magnéticos, para que possam ser "montadas" duas ou mais por vértices ou lados. O centro de um círculo será magnético. Quando um vértice de uma figura estiver a uma distância de outro ponto magnético menor que a distância do magnetismo de dois pontos, haverá atração dos dois pontos (CREM, 2002).

Se um vértice “A” de uma figura estiver a uma distância dos vértices de outra figura maior que a distância de magnetismo de dois pontos, obviamente não haverá atração entre “A” e os outros pontos. Entretanto, se este primeiro vértice “A” estiver na zona de magnetismo em um lado da figura, então haverá atração de “A” em direção ao ponto no lado desta figura, estando ela mais próxima de “A”. Se quisermos fazer os vértices coincidirem, teremos que ajustar com o *mouse* (CREM, 2002, tradução nossa)¹⁰⁰. Então, ao se aproximar de qualquer figura, o *software* ativará a função magnetismo.

4.2.12 Ferramentas de suportes ao planejamento do professor

Quando nos referimos sobre suporte ao planejamento do professor em ambiente informático para a construção de situação matemática, estamos tratando em oferecer condições às tomadas de decisões dele em relação a seu planejamento didático. Nesse sentido, entendemos que algumas ferramentas contribuem com tal suporte. Dentre elas, *a configuração de menus, as macro construções, os históricos das construções dos alunos, a decisão de escolher em uma tarefa sobre área e perímetro qual unidade de medida vai ser trabalhada*, ou seja, tudo que é deixado para que o professor tome uma decisão no ambiente informático, e que esteja relacionado à configuração do mesmo para atender a um determinado objetivo, caracterizamos como um suporte ao planejamento didático do professor, como apresentamos a seguir.

4.2.12.1 Macroconstrução

Uma “macroconstrução”, como já fora explicitado em capítulos anteriores, pode ser compreendida enquanto uma sequência de construção interdependente entre si que é útil, no

¹⁰⁰Si un sommet A d'une figure se trouve à une distance de sommets d'une autre figure supérieure à la distance de magnétisme de deux points, il n'y a évidemment pas attraction entre A et les autres points, mais si ce premier sommet A se trouve dans la zone de magnétisme d'un côté de la figure, alors il y a attraction de A vers le point du côté de cette figure qui est le plus proche de A. Si on désire faire coïncider les sommets, il faudra alors ajuster (CREM, 2002).

que diz respeito à criação de novas ferramentas para construir objetos que são únicos ou que executam tarefas de caráter repetitivo (GREMILLION; KEYTON, 1998, p. 9). A ideia dessa ferramenta seguirá os princípios dos *software* Geogebra, Cabri e Cinderella da seguinte forma:

- 1- Ao ser selecionada a opção “Configuração” na barra superior esquerda do *Magnitude Studium*, em cascata, abrirá uma janela com as seguintes opções: Macroconstrução, Personalizar e Histórico das Construções.
- 2- Ao ser acionada a ferramenta Macroconstrução, teremos quatro opções: Ativar Macro, Criar a Macro, Carregar Macro e Salvar Macro.

Quando acionada a ferramenta Ativar Macro, o usuário poderá se dirigir para selecionar os entes geométricos que compõem a construção finalizada na área de trabalho do *software* que deseja que seja transformada em nova ferramenta, em seguida deverá clicar em Criar Macro, a qual apresentará uma seguinte janela:

Figura 89- Construindo Ferramentas

Fonte: adaptado da pesquisa

Na opção nome da ferramenta, o usuário poderá digitar o nome da macro e, logo abaixo, uma pequena descrição. Essa aparecerá assim que o cursor do *mouse* for colocado em cima da ferramenta. Após completar os espaços solicitados, o usuário deverá clicar em OK. Automaticamente, a ferramenta passará a fazer parte da barra lateral dos menus do *Magnitude Studium*. A opção “Salvar macro” permitirá salvá-la no disco rígido do computador. Após ser fechado o *software* e reiniciado, para utilizar a macro, basta clicar em “Carregar Macro”, procurar onde foi salva, e em seguida a ferramenta aparecerá na lateral do *software*.

4.2.12.2 Histórico do aluno

Ao ser aberta a tela inicial do *Magnitude Studium*, na barra superior do *software*, lado direito, teremos a opção aluno. Quando esse usuário digitar seu nome e clicar em OK, inicia-

se uma gravação das ações deles ao responderem as atividades. Ao serem salvas, gerará um arquivo no disco rígido do computador, que poderá posteriormente ser aberto e analisado pelo usuário professor. Para isso, após abrir o *software*, ele deverá clicar na opção “Configuração”, e, em seguida, “Histórico”. Essa ferramenta redirecionará a pasta que fora criada no computador, bastará apenas abri-la e em seguida analisar os passos que o usuário (aluno) trilhou para responder a atividade.

4.2.12.3 Configuração de menus

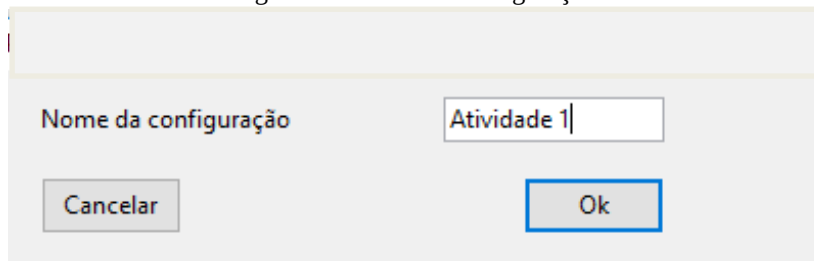
Os *software* utilizados na sala de aula para trabalhar um conteúdo matemático apresentam, muitas vezes, uma riqueza de ferramentas, comandos e menus que podem atrapalhar os objetivos de aprendizagem traçados pelo professor. Os alunos podem querer explorar diferentes menus e ferramentas, trilhando caminho distante do foco almejado para uma determinada tarefa matemática.

Ao permitir a delimitação dos menus acessíveis para o aluno, o professor pode ter a intenção de forçar o desenvolvimento de certa técnica, ou seja, oferecendo condições para emergir estratégias de resolução, bloqueando algumas ações. Dessa forma, tal escolha possivelmente será pertinente ao planejamento didático do professor.

Para realizar essa ação no MS, o usuário (professor) deverá acionar o menu “Configuração” na barra superior do *Magnitude Studium*. Assim, aparecerá a opção “Personalizar”, a qual deverá oferecer a possibilidade de configurar os menus e ferramentas, que poderão ficar acessíveis ao usuário (aluno) de acordo com o planejamento do professor, para certa tarefa de área e/ou perímetro, por exemplo. Tal ação poderá ser realizada da seguinte forma:

- 1- Todos os menus e ferramentas do *software* deverão aparecer em uma janela;
- 2- O usuário (professor), ao clicar sobre o ícone da ferramenta, automaticamente este deixará de aparecer no *software*;
- 3- Nesta mesma janela deverá conter um botão denominado de “Salvar a Configuração” e, após acionado, a seguinte janela aparecerá:

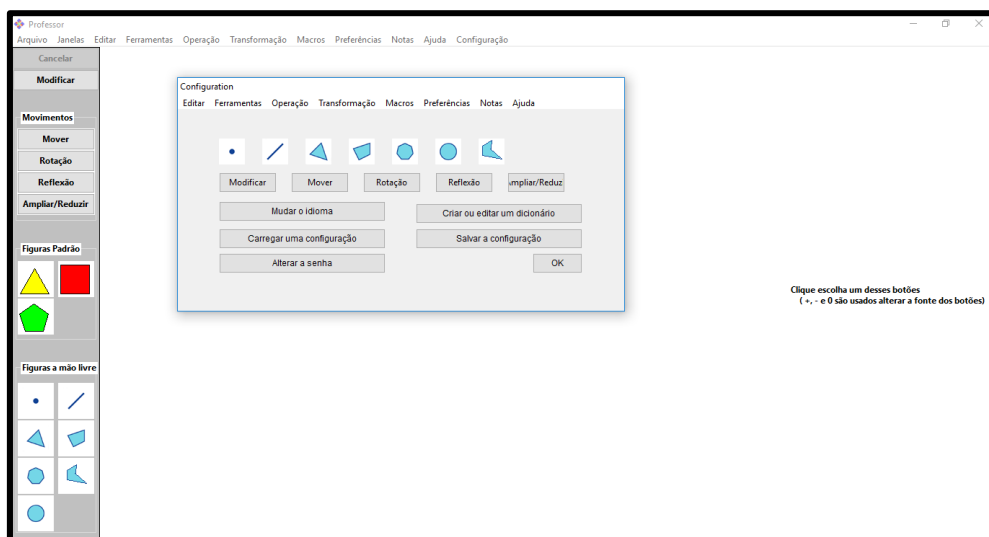
Figura 90- Salvando configuração



Fonte: da pesquisa

Assim, para aquela tarefa, os menus e ferramentas estarão previamente configurados, bastando apenas o usuário (aluno) abrir o arquivo que fora salvo pelo professor e realizá-la. Outra opção é, após realizar os passos 1 e 2 descritos anteriormente, o usuário (professor), ao invés de salvar a opção para realização de uma atividade posterior, configurar os menus, sem necessariamente optar por essa opção “salvar”, o que implicará, depois dessa ação, em fechar o software. Para isso, bastará apenas realizar os seguintes procedimentos, como acontece no *Apprenti Géomètre 2*:

Figura 91- Configurando menu no AG2



Fonte: Da pesquisa

Na tela inicial do *software*, após clicar na opção “Professor”, Menus, Idioma- e por último, em OK, a tela apresentada na figura acima aparecerá em branco. Para que a janela “Configuração” apareça na área de trabalho do *software*, é necessário clicar em “Configuração” e, em seguida, em “Personalizar”. As ferramentas e menus poderão ser ocultados na parte lateral do *software*. Neste caso, deve-se selecionar o botão que corresponde

à ferramenta. Dessa maneira, automaticamente, a opção não mais aparecerá, ou seja, não estará disponível para o usuário (aluno). Para manter tal configuração, deve-se clicar em “OK”. Assim, o usuário (professor) cria uma espécie de controle para aquela atividade, sem necessariamente fechar o *software*. Essa ideia deverá estar presente no *Magnitude Studium*.

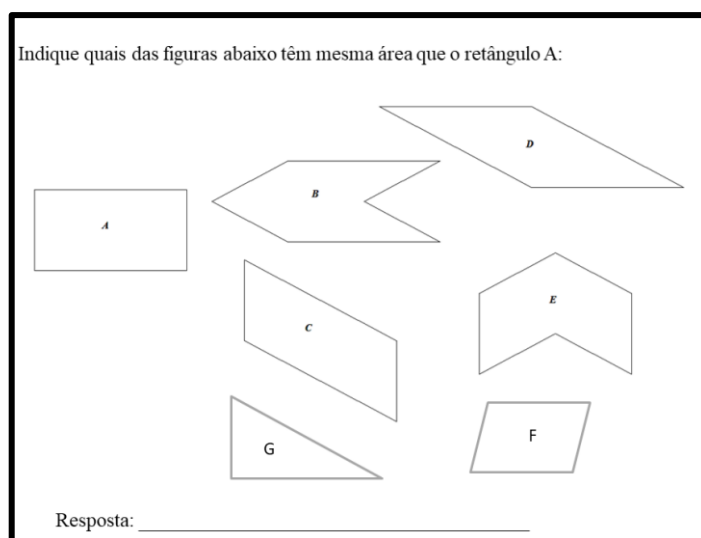
4.2.13 Panorama geral dos requisitos em relação a construção de situações

A seguir, apresentaremos um panorama geral dos requisitos para MS, prevendo a construção de situações de aprendizagem de área pelo professor, que possivelmente será um dos usuários finais do MS. O objetivo é de fornecer informações do comportamento de algumas ferramentas e menus para que o programador (engenheiro de *software*)¹⁰¹ compreenda qual tipo de arquitetura utilizará para o desenvolvimento deste novo micromundo.

4.2.13.1 Construção de uma situação de comparação sem intervenção do aspecto numérico

Suponhamos que o professor queira construir uma tarefa de “comparação de área” em que se deseja bloquear o aspecto numérico (FERREIRA, 2010), da seguinte forma:

Figura 92- Comparação de áreas

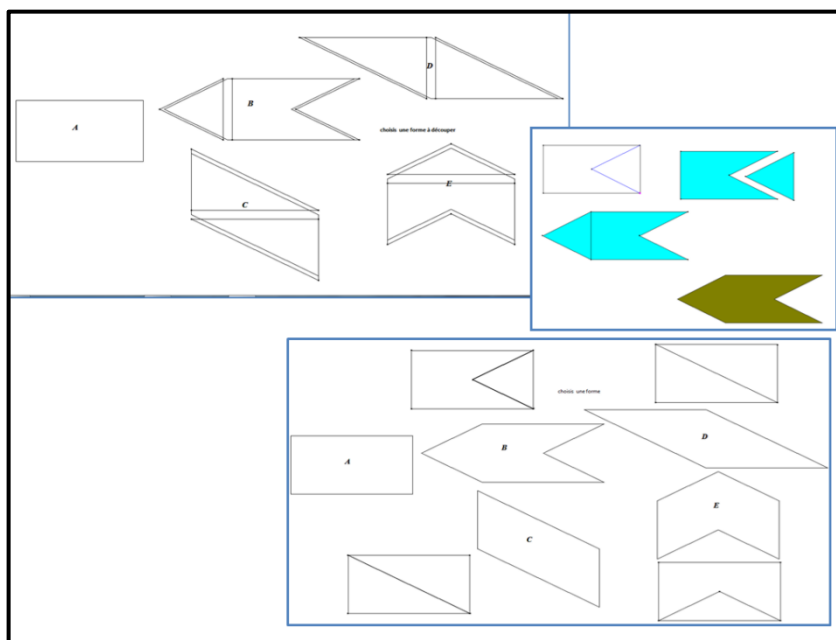


Fonte: da pesquisa

¹⁰¹ Em nosso caso, o engenheiro de *software* não apenas implementou o que foi decidido pelo pesquisador. Ele foi além, pois sua formação e vasta experiência na área de educação matemática, como também em informática e programação de *software*, nos permitiu implementar várias ferramentas originais que vão além do que está exposto nos requisitos.

As figuras B, C, D e E, têm as mesmas áreas que a figura “A” e foram criadas a partir dessa por meio de decomposições e recomposições, como ilustramos a seguir:

Figura 93- Decomposições e recomposições



Fonte: da pesquisa

Para realizar uma tarefa como a descrita acima, o *Magnitude Studium* precisará oferecer condições ao usuário (professor) para construir diferentes figuras com ferramenta de régua e compasso dinâmicos, ou mesmo figuras que estejam predefinidas em diferentes menus. As possibilidades de decompor, recompor, rotacionar e mover deverão ser oferecidas também para tal realização.

4.2.13.2 Construção de uma situação de comparação com a intervenção do aspecto numérico

Na tarefa a seguir, temos uma situação que visualmente é possível estabelecer as áreas das figuras, pois são formadas por quadrados justapostos pelos lados. Entretanto, além do *software* proporcionar que as peças do jogo poliminós estejam predefinidas, deverá permitir ativar uma malha quadriculada e a função movimento (rotação, translação e reflexão) nas figuras para a realização de sobreposições se o objetivo do usuário (professor) for que o aluno compare as áreas das figuras em uma tarefa deste tipo. Essas peças poderão ser decompostas e recompostas no intuito de oferecer condições à construção de outros tipos de peças.

Figura 94- Peças do jogo poliminós

Observe as figuras abaixo que compõem o conjunto de peças do jogo polimonós disponível no menu lateral do Magnitude Studium:

Agora, responda a seguinte questão:

Entre as peças do jogo poliminó acima, há alguma (s) que possuem mesma área?

Se sim, qual ou quais? _____

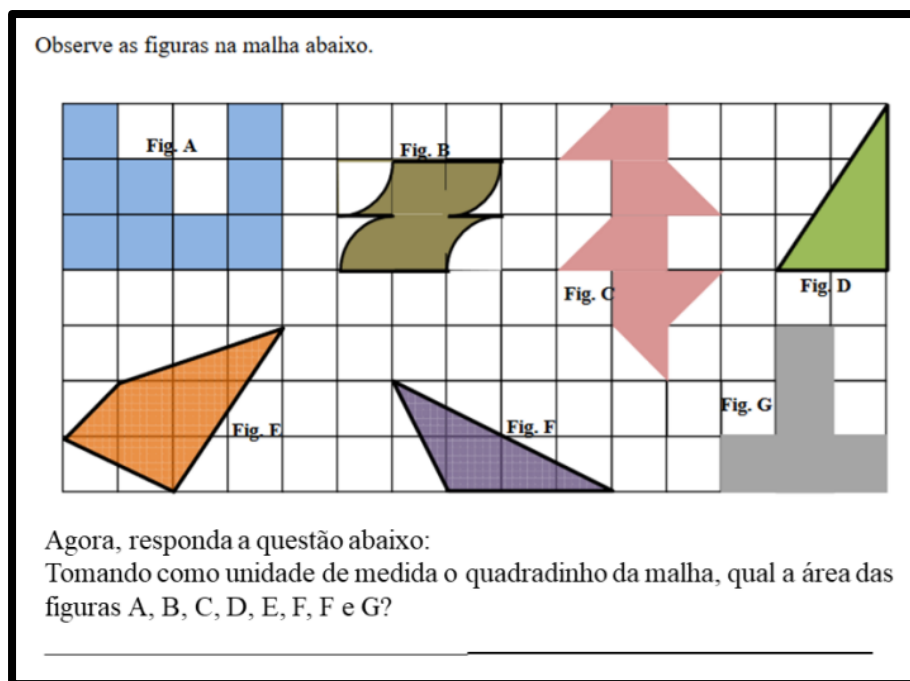
Fonte: da pesquisa

Caso tenha pretensão, o professor também poderá escrever os enunciados das atividades diretamente no *software*, que deverá oferecer uma caixa de texto.

4.2.13.3 Construção de uma situação de medida de área utilizando as malhas

Nas malhas quadriculadas do *software*, se a opção magnetismo não estiver acionada, figuras desenhadas poderão ser movimentadas, decompostas, recompostas, entre outras ações. No ambiente papel e lápis, elas permanecem estáticas, e, em hipótese alguma, podem ser movidas dinamicamente como acontece em um *software* de geometria. Neste sentido, pensamos na seguinte tarefa:

Figura 95- Atividade na malha quadriculada



Fonte: adaptado de Pessoa (2010)

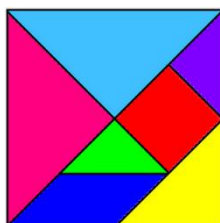
O *software* também permitirá ao professor compor (unir) diferentes figuras para a formação de outras, como realizado na figura C da imagem acima, em que foram justapostos quadrados e triângulos isósceles retângulos, sucessivamente, até finalizar sua construção. Com relação à figura G, foi utilizada uma das peças do jogo pentaminó, sem a demarcação dos quadradinhos que a compõem.

4.2.13.4 Construção de uma situação de mudança de unidade utilizando o tangram

Para realizar uma tarefa desse tipo, o *software* disponibilizará o tangram completo e suas peças predefinidas separadamente na barra lateral. Quando esse jogo for levado por completo para tela, bastará o usuário selecionar a opção mover e destacar as peças uma a uma com o botão esquerdo do mouse. As opções de arrastar, refletir, rotacionar, decompor e recompor poderão ser empregadas em todas as peças. A imagem a seguir ilustra um tipo de tarefa de mudança de unidade, utilizando o jogo tangram e suas peças.

Figura 96- Mudança de unidade

O tangram segundo Franchi (1992) é uma palavra chinesa que quer dizer quebra-cabeça. O mais conhecido deles é o composto por sete peças (cinco triângulos retângulo isósceles (dois pequenos, dois grandes e um médio), um quadrado e um paralelogramo) como apresentamos a seguir:



Vamos chamar de **U** a unidade de área definida pelo quadrado que compõe esse quebra-cabeça;

Vamos chamar de **V** a unidade de área definida por um dos triângulos pequenos que compõem esse quebra-cabeça;

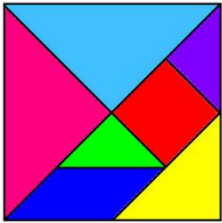
Vamos chamar de **X** a unidade de área definida pelo paralelogramo que compõe esse quebra-cabeça;

Agora, responda a pergunta abaixo:

É possível medir a área do tangram das sete peças utilizando cada uma das unidades (**U**, **V** e **X**) ?

Justifique sua resposta:

Complete quando possível o quadro a seguir:

TANGRAM	Unidade de medida	Medida da área
	Quadrado U	
	Triângulo V	
	Paralelogramo X	

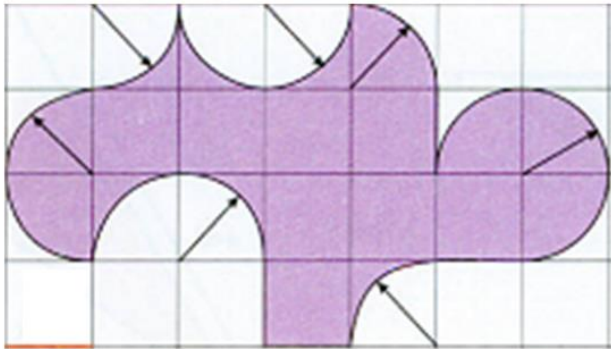
Fonte: da pesquisa

4.2.13.5 Construção de uma situação de produção de superfície

O *software* deverá oferecer ferramentas com polígonos predefinidos (ladrilhos), Polígonos Regulares, Polígono Rígido (seguindo os princípios do Geogebra), mas também opções de construção de figuras como as ferramentas (ponto, ponto de intersecção, reta, retaparalela, reta perpendicular, circunferência, arco, compasso dinâmico (como no *Cabri*)), entre outras. Essas ferramentas deverão oferecer condições para a construção de figuras, utilizando os princípios da Geometria Dinâmica. A tarefa a seguir, denominada de produção de superfície, apresenta uma figura que poderá ser construída por meio de tais ferramentas no MS.

Figura 97- Construindo Figuras

Observe a figura abaixo, desenhada na interface do software Magnitude Studium por meio do menu construção.



Dada a figura acima, utilizando as ferramentas do Magnitude Studium, responda o que se pede:

- Construa uma figura de área menor que a figura dada.
- Construa uma figura de área maior que a figura dada.
- Construa uma figura de mesma área que a figura dada.

Fonte: adaptado do livro de matemática da 8ª série (IMENES; LELLIS, 2008, p. 83)

Esses são possíveis modelos de tarefas que o *software Magnitude Studium* deverá permitir ao professor construir para trabalhar situações de aprendizagem de área. No próximo capítulo apresentaremos um sumário com os requisitos, alguns possíveis *layouts* (prototipagem de tela), o desenvolvimento do protótipo e a análise de suas funcionalidades.

5 PROTOTIPAÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

De acordo com Sommerville (2011), um protótipo é uma versão inicial de um sistema de *software*, usado para demonstrar¹⁰² conceitos, experimentar opções de projeto e descobrir mais sobre o problema e suas possíveis soluções. O desenvolvimento rápido e iterativo do protótipo é essencial para que os custos sejam controlados e os *stakeholders*¹⁰³ do sistema possam experimentá-lo no início do processo de *software*. Ainda para esse autor, um protótipo de *software* pode ser usado em um processo de desenvolvimento de *software* para ajudar a antecipar as mudanças que podem ser requisitadas:

1. No processo de engenharia de requisitos, um protótipo pode ajudar na elicitación e validação de requisitos de sistema.
2. No processo de projeto de sistema, um protótipo pode ser usado para estudar soluções específicas do software e para apoiar o projeto de interface de usuário (SOMMERVILLE, 2011, p. 44).

No que diz respeito à prototipação, trata-se de um processo em que são tomadas várias decisões no sentido de estabelecer os requisitos que serão levados em conta no desenvolvimento do protótipo teste. Neste sentido, os objetivos da prototipação devem ser explicitados desde o início do processo. Estes podem ser o desenvolvimento de um sistema para prototipar a interface de usuário, o desenvolvimento de um sistema para validação dos requisitos funcionais do sistema ou o desenvolvimento de um sistema para demonstrar aos gerentes a viabilidade da aplicação. Esses fatores precisam estar bem claros ao desenvolvedor, para que os usuários finais possam entender a função do protótipo, pois, caso contrário, podem não oferecer os benefícios esperados (SOMMERVILLE, 2011).

A análise a priori, por sua vez, tem como função verificar o real funcionamento do protótipo, de forma que eventuais erros possam ser corrigidos antes mesmo de haver a fase de testes (TIBÚRCIO, 2016, p. 58).

A concepção do novo micromundo, assim como os requisitos traduzidos em ferramentas apresentados no capítulo anterior – tais como diferentes tipos de malhas, tangram, poliminós, a possibilidade de realizar diferentes movimentos nas figuras (mover, aplicar rotação e realizar reflexões), decompor, recompor, construir diferentes tipos de figuras por meio das ferramentas de construção (régua e compasso dinâmicos), ferramentas de medir área

¹⁰² Esse verbo não diz respeito a demonstração no sentido matemático.

¹⁰³ É um dos termos utilizados em diversas áreas como gestão de projetos, comunicação social administração e arquitetura de *software* referente às partes interessadas que devem estar de acordo com as práticas de governança corporativa executadas pela empresa. Disponível em <<https://www.significados.com.br/stakeholder/>> . Acesso em 12 de setembro de 2018. Em linhas gerais, são os responsáveis pela testagem inicial.

e perímetro – são designados em nosso estudo como pertinentes para o trabalho com situações de aprendizagem de área e perímetro e caracterizam os resultados dessa análise.

Nossa ideia, nesta fase de prototipação e análise a priori, é apresentar, a partir do que fora colocado na seção anterior em relação à análise preliminar, os requisitos gerados para o desenvolvimento do *Magnitude Studium* de forma mais pontual.

Explicitaremos certa organização em prototipação de telas que caracterizam possíveis *layout* no qual incluímos em um quadro os requisitos discutidos no capítulo 4. Expomos ainda elementos referentes à programação para o desenvolvimento do protótipo e comentamos a respeito da sua primeira versão. Por fim, realizamos uma análise do funcionamento das ferramentas e menus do protótipo antes de sua fase de testes.

5.1 Resumo dos Requisitos para o Protótipo¹⁰⁴

Para um primeiro refinamento dos requisitos necessários ao desenvolvimento do MS, expomos, no quadro a seguir, a abordagem de área em algumas das etapas da fase de análise preliminar (epistemológica, cognitiva e didática), culminando na informática, explicitando as principais ferramentas e menus que deverão ser contempladas no *software*.

Quadro 4- Requisitos refinados

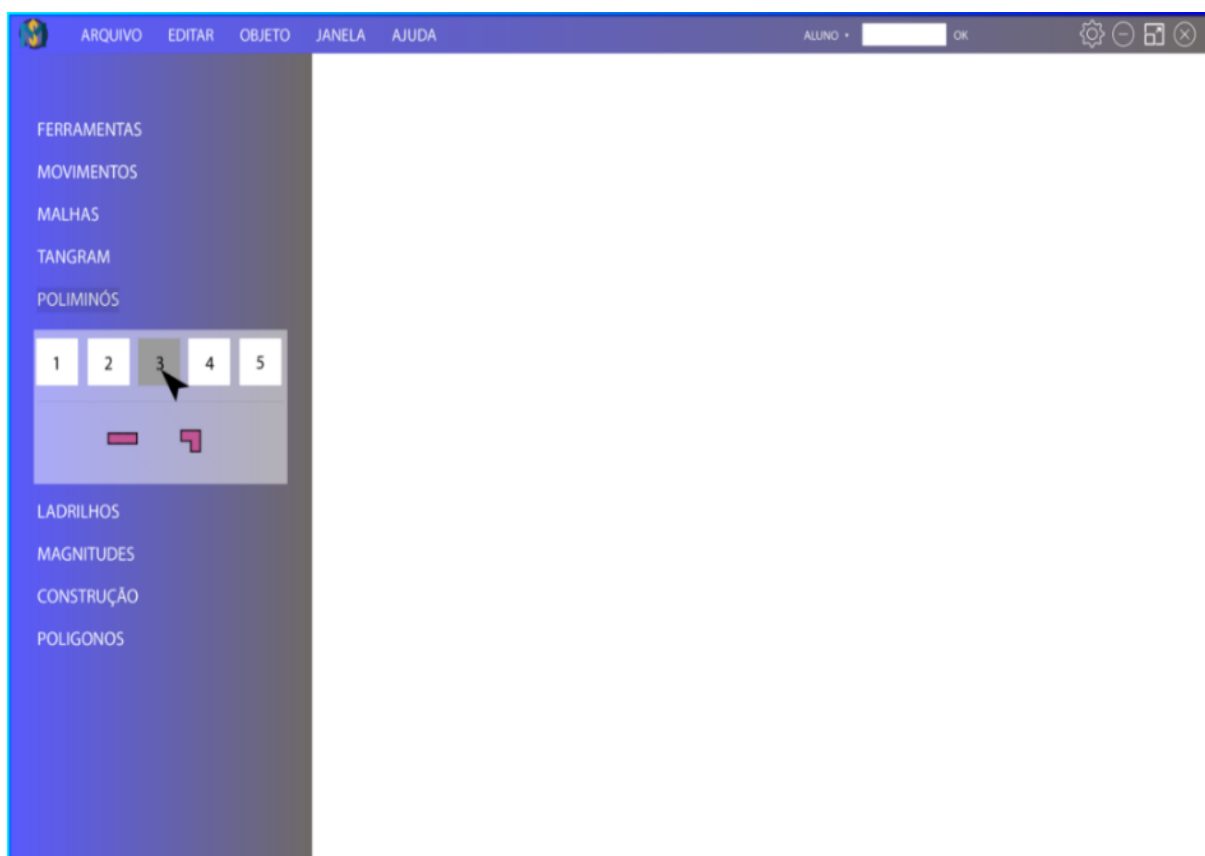
Dimensão Epistemológica	Ferramentas e menus específicos para trabalhar as abordagens de área
Abordagem de área nos Elementos de Euclides (BICUDO, 2009) e em David Hilbert (1971). Abordagem de área em Lebesgue (1975).	• Corte e colagem • Mover; • Rotação; • Reflexão; • Malha (quadrada, isométrica e hexagonal, pontilhadas ou não). • Opção de magnetismo nas malhas; • Ladrilhos predefinidos (Tangram e Poliminós); • Ferramentas de: medir área, perímetro e comprimento; • Construção de objetos geométricos (ponto, ponto sobre objeto, ponto de intersecção, ponto médio, reta, reta paralela, reta perpendicular, segmento, semirreta, circunferência e arco, mediatriz e bissetriz, compasso); • Opção de deixar o polígono rígido; • Polígono regular;
Dimensão Cognitiva e Didática	
Abordagem de área como uma grandeza. Douady e Perrin-Glorian (1989). Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996): construção de situações que dão sentido ao conceito de área.	
Dimensão Informática	
Ferramentas de suporte ao planejamento do professor (comuns a alguns <i>software</i> de GD explicitados na dimensão informática)	• Configuração de menus; • Macroconstrução; • Histórico das construções; • Opção para a escolha das unidades de medidas (múltiplos e submúltiplos do metro para o perímetro e o comprimento, e os múltiplos e submúltiplos do m² para as áreas).
Ferramentas comuns aos <i>software</i> de geometria	• Duplicar; • Colorir com níveis de gradação à figura; • Copiar e Colar; • Esconder objeto; • Apagar objetos; • Desfazer (ctrl z); • Nomear objetos.
Aspectos de acessibilidade	• Compatibilidade com plataforma web; • Interface atrativa; • Facilidade no manuseio; • Ferramentas autoexplicativas; • Disponibilidade de tutorial e menu ajuda; • Navegabilidade pelo teclado.

Fonte: da pesquisa

¹⁰⁴ Nos Apêndices B e C temos uma síntese das análises preliminares e o que o Magnitude deverá permitir fazer.

Nos Apêndices B e C, apresentamos outros quadros que trazem mais alguns detalhes e, resumidamente, as dimensões supracitadas de forma mais enfática, nos quais explicitamos os requisitos pertinentes ao *software* extraído de cada uma delas, juntamente com o que, possivelmente, este novo micromundo deverá permitir realizar. A partir desse quadro, idealizamos então no *Adobe Illustration CC 17.0.0* duas prototipagens de telas. Na primeira, colocamos os nomes dos menus em forma de texto que, ao serem clicados, abririam em cascata as ferramentas embutidas nele¹⁰⁵, como ilustramos a seguir.

Figura 98 – Prototipagem de tela 1

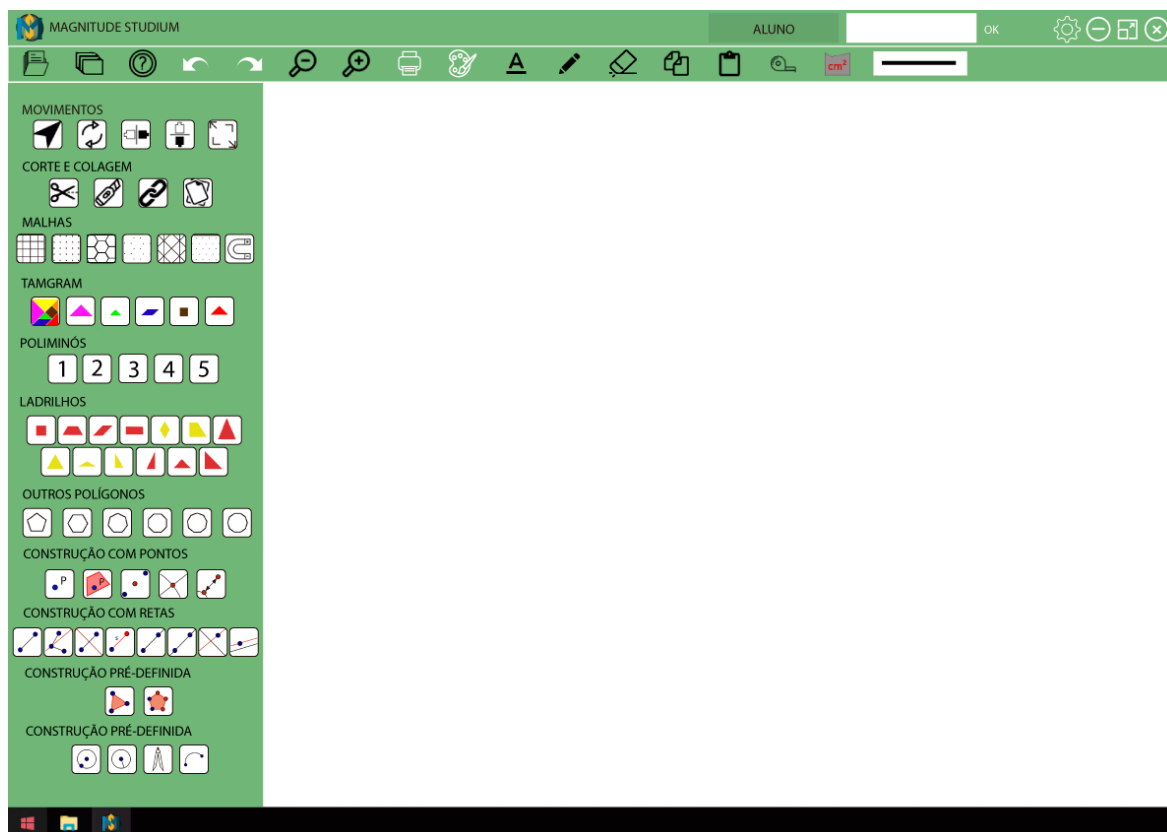


Fonte: da pesquisa

Todavia, nosso desejo era que as ferramentas ficassem visíveis aos usuários e não exigissem um nível alto de familiarização do *software* para a construção de diferentes situações de aprendizagem de área e perímetro. Assim, criamos um segundo *layout* com os nomes dos menus e, logo abaixo, as ferramentas contidas neles.

¹⁰⁵Explicação de cada uma das ferramentas está disponível no Apêndice K

Figura 99- Possível Layout do Magnitude Studium



Fonte: da pesquisa

Com tal prototipação de tela, elaborada pelo engenheiro pesquisador, a qual reúne as ferramentas e menus apresentados na seção correspondente aos requisitos de *software*, tivemos a primeira interação com o programador. O objetivo foi explicitar as funcionalidades de cada uma delas de forma mais enfática. O engenheiro programador¹⁰⁶ responsável pelo desenvolvimento do MS, além do conhecimento da parte de ESE, tem formação em Didática da Matemática. As sugestões dadas por ele nos permitiram redirecionar o olhar para um protótipo que pudesse ser desenvolvido em um tempo hábil para testagem e que permitisse tratar da abordagem de área como uma grandeza. Para isso, refinamos os requisitos, a fim de viabilizarmos a primeira versão desse *software* para a experimentação. Na próxima seção, teremos o desenvolvimento do primeiro protótipo a partir do que fora acordado entre o engenheiro pesquisador¹⁰⁷ e o engenheiro programador.

¹⁰⁶ O engenheiro responsável pelo desenvolvimento do *software* é o professor Dr. Franck Bellemain.

¹⁰⁷ Termo criado por Tibúrcio (2016) que se refere a quem está desenvolvido a parte teórica da pesquisa.

5.2 Desenvolvimento do 1º Protótipo

Optamos por desenvolver o *Magnitude Studium* para plataforma *web* utilizando as linguagens *HTML (HTML5)*, *CSS* e *JAVA SCRIPT*. Para Tibúrcio (2016), essas linguagens podem ser interpretadas como um padrão por qualquer *browser* e editadas por meio de tratamento de texto. São beneficiadas através de inúmeras bibliotecas de objetos, o que possibilita diminuir o tempo de desenvolvimento. Ainda para esse autor:

A escolha de uma prototipagem para plataforma *web* facilita também a distribuição do artefato para os diversos envolvidos no projeto e favorece as reconfigurações no processo de engenharia de software educativo, entre a engenharia de *software* empregada para a concepção/desenvolvimento técnico do artefato e a engenharia de requisitos que fundamenta e norteia essa concepção/desenvolvimento. O emprego de métodos ágeis ou de uma metodologia que favoreça uma forte e rápida interação entre os diversos profissionais envolvidos no projeto é facilitada pela escolha de desenvolvimento *web* (TIBÚRCIO, 2016, p. 105).

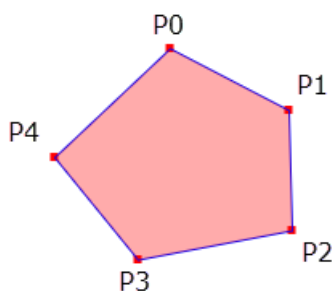
Outro fator que nos levou a pensar no desenvolvimento do MS para plataforma *web* foi a facilidade de uso pelos professores. Muitas vezes, há certa preocupação com o tipo de sistema operacional e *hardware* dos computadores no laboratório de informática das escolas e essa situação tem impossibilitado a exploração de diferentes *software* nas aulas de matemática (SILVA, 2016).

O objetivo de apresentar essa parte de desenvolvimento é para mostrar algo original em relação às ferramentas mais comuns de encontrar em outros *software* de Geometria Dinâmica. Como por exemplo, o corte e colagem que no papel parece ser tão simples. Todavia, há uma complexidade específica a qual não diz respeito apenas ao problema da programação, mas envolve questões mais complexas que requerem aportes matemáticos.

5.2.1 Polígonos

Os polígonos do *Magnitude Studium* serão definidos pelos seus vértices armazenados numa tabela (*array*), na ordem de designação pelo usuário. O primeiro ponto da tabela é repetido como último ponto para fechar o polígono e diferenciar o mesmo da linha poligonal, outro tipo de ferramenta que será contemplada.

Figura 100- Exemplo: [P0, P1, P2, P3, P4, P0] para um pentágono



Fonte: da pesquisa

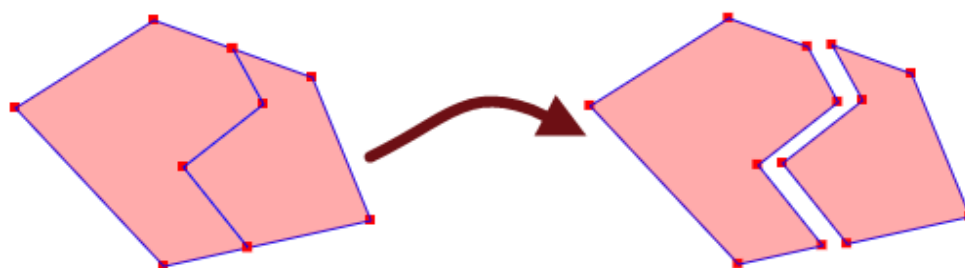
A ordem dos lados segue a mesma ordem dos vértices: [P0P1, P1P2, P2P3, P3P4, P4P0] para um pentágono. A indexação dos pontos e lados acompanha a posição dos pontos na tabela, indo de 0 a 4 para um pentágono, ou 0 a n-1 para um polígono de n lados.

5.2.2 Corte

Para cortar polígonos, várias ferramentas estarão disponíveis. A primeira permitirá cortar um polígono (e a princípio outra figura fechada) em duas figuras. A ferramenta é executada uma vez conhecida uma linha de segmentos cuja duas extremidades pertencem (por construção geométrica) aos lados do mesmo polígono inicial. A princípio, o corte somente pode ser realizado se a linha de segmentos é inteiramente contida no interior do polígono inicial na exclusão das extremidades que pertencem ao polígono.

A programação dessa ferramenta não apresenta nenhuma dificuldade particular. Uma vez implementada, a função “corte” ficará disponível para os demais cortes de polígono, como a “triangularização”, cortar um polígono com mais de três lados em triângulos, ou a função “tangram”, cujo princípio é recortar um quadrado nas peças desse quebra-cabeça.

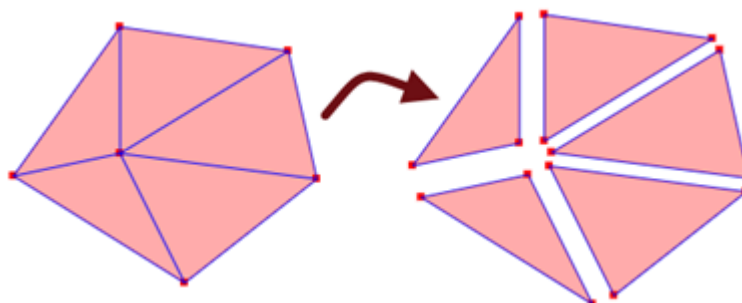
Figura 101-Decomposição tipo 1



Fonte: da pesquisa

A segunda ferramenta permite cortar um polígono em triângulos. A ferramenta será executada uma vez conhecidos o polígono e o ponto (interior), vértice comum de todos os triângulos resultados do corte. Como a anterior, essa ferramenta não apresenta nenhuma dificuldade específica para a sua programação.

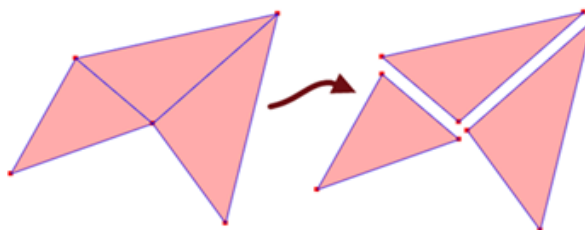
Figura 102- Decomposição tipo 2



Fonte: da pesquisa

A terceira ferramenta permite cortar um polígono em triângulos, de tal forma que todos os triângulos resultantes dos cortes sejam interiores ao polígono inicial. A ideia é permitir uma triangularização de polígonos, sem que sejam necessariamente convexos. Como as anteriores, essa ferramenta não apresenta dificuldades particulares de programação.

Figura 103- Decomposição tipo 3

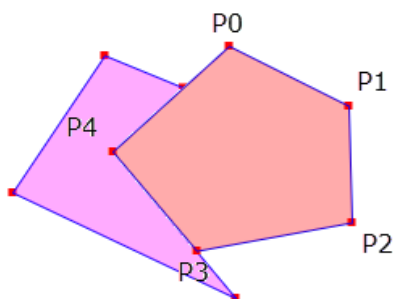


Fonte: da pesquisa

5.2.3 Colagem

A ferramenta de colagem apresenta mais dificuldades para sua implementação. Diferentemente das ferramentas de corte, ela exige que seja verificado se a colagem será possível (colagem sem perda nem sobreposição). A interface para juntar polígonos (e a princípio outras figuras fechadas) proposta pelo *Magnitude Studium* é de realizar a colagem a partir da designação pelo usuário de polígonos com partes em comum (ou suficientemente próximas), interpretando a intenção do usuário de colar os polígonos por essas partes.

Figura 104- Colagem



Fonte: da pesquisa

Para determinar as partes dos polígonos que podem ser coladas, o primeiro passo consiste em determinar quais vértices do primeiro polígono são próximos do (ou pertencem ao) segundo polígono e vice-versa. Essa verificação produz uma lista de informações com a seguinte codificação: $\{f:VV, p1:N, p2:M, p:a, geo\}$.

Formato (f):

- VV: dois vértices, um de cada polígono, são próximos;
- VS: um vértice do primeiro polígono é próximo de um lado do segundo;
- SV: um vértice do segundo polígono é próximo de um lado do primeiro.
- Polígono 1 (p1) indica o index do vértice ou lado (dependendo do caso indicado pelo formato) do primeiro polígono próximo de um vértice do segundo polígono. Esse index tem por Polígono 2 (p2) e indica a mesma coisa que Polígono 1, relativamente ao segundo polígono em relação com o primeiro.
- Abscissa (p): no caso de um vértice de um polígono sobre um lado do segundo, indica a abscissa desse vértice sobre o lado (entre 0 e 1).
- Geometria (geo): indica se a proximidade entre os dois elementos é resultado de uma construção geométrica ou não.

Uma vez essa lista constituída, precisa ser verificado se, excluindo os pontos de contato correspondentes, existe alguma superposição entre os polígonos, situação que impede a colagem. Em seguida, a lista é ordenada considerando o sentido (ordem dos vértices) do primeiro polígono, para depois ser percorrida para determinar eventuais segmentos de contato, observando se dois elementos sucessivos dessa lista são pontos ou extremidades de mesmos lados nos dois polígonos.

As situações de contato por segmento, considerando a codificação das informações descritas acima, são apresentadas no quadro a seguir. Cabe ratificar que, se a lista dos pontos de contatos acompanha a orientação do primeiro polígono, ela não acompanhará

necessariamente a orientação do segundo. Os índices dos pontos sucessivos de um polígono seguem a ordem natural dos inteiros, menos no caso do ponto de índice $n-1$ (para um polígono de n vértices), que tem como sucessor o ponto de índice 0. Na descrição seguinte, consideramos n o número de vértices do primeiro polígono e m o número de vértices do segundo polígono.

Quadro 5- Lista de ponto de contato

P1 P2	f	p1		p2			
	<u>VV</u>	<u>i</u>	$n-1$	j	j	$m-1$	0
	<u>VV</u>	$i+1$	0	$j+1$	$j-1$	0	$m-1$
	<u>VV</u>	<u>i</u>	$n-1$	j	j	0	
	VS	$i+1$	0	j	$j-1$	$m-1$	
	<u>VV</u>	<u>i</u>		j	j	$m-1$	0
	<u>SV</u>	<u>i</u>		$j+1$	$j-1$	0	$m-1$
	VS	<u>i</u>	$n-1$	j	j	$m-1$	
	<u>VV</u>	$i+1$	0	$j+1$	j	0	
	VS	<u>i</u>	$n-1$	j			
	VS	$i+1$	0	j			
	VS	<u>i</u>		j	j	$m-1$	
	<u>SV</u>	<u>i</u>		$j+1$	j	0	
	<u>SV</u>	<u>i</u>	$n-1$	j	j	$m-1$	0
	<u>VV</u>	$i+1$	0	$j+1$	$j-1$	0	$m-1$
	<u>SV</u>	<u>i</u>	$n-1$	j	j	0	
	VS	$i+1$	0	j	$j-1$	$m-1$	
	<u>SV</u>	<u>i</u>		j	j	$m-1$	0
	<u>SV</u>	<u>i</u>		$j+1$	$j-1$	0	$m-1$

Fonte: da pesquisa

Percorrendo a lista de pontos de contato e verificando essas condições, é possível a construção de uma lista de segmentos ou de linhas poligonais (se dois segmentos compartilham uma mesma extremidade, pertencem à mesma linha) de contato.

Uma vez conhecidas as informações de contatos entre os dois polígonos, é necessário verificar se a colagem pode ser realizada sem perda nem superposição. Se todos os pontos/segmentos de contato pertencem aos dois polígonos por construção geométrica, a colagem é possível, já que foi verificado que não há superposição entre os polígonos. Se os pontos/segmentos de contato foram encontrados devido à simples aproximação entre os

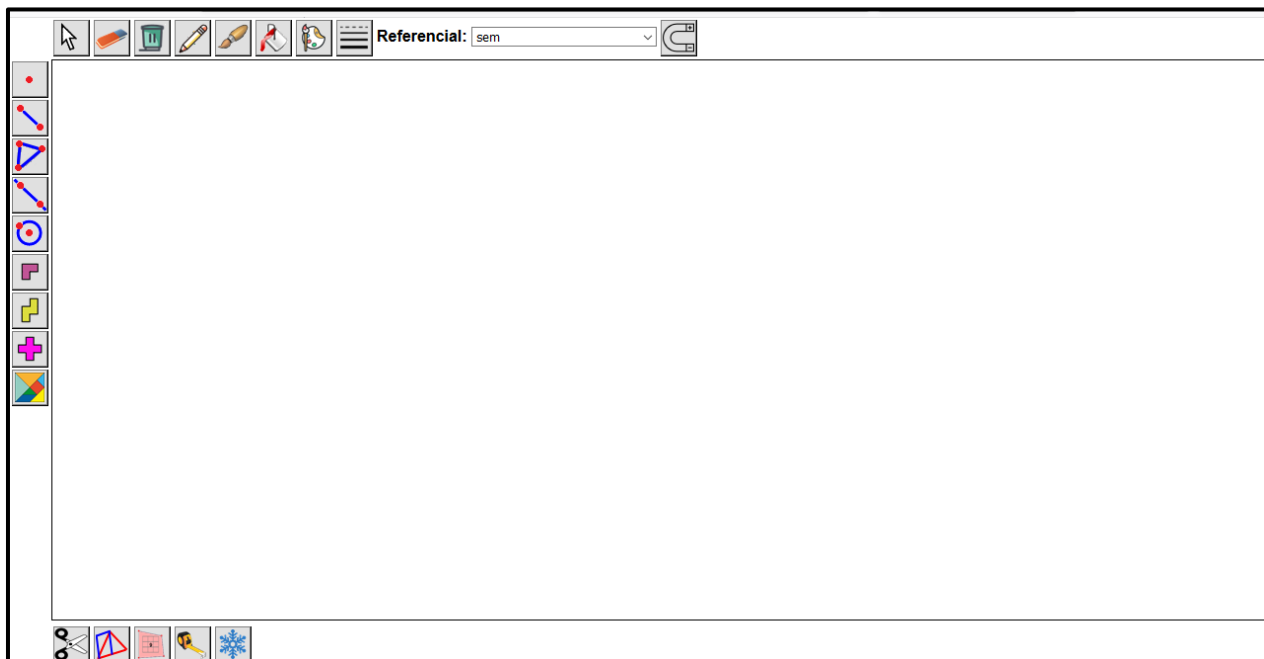
polígonos, é necessário verificar a congruência entre as linhas de segmentos de contato. Uma não congruência pode ser tratada de duas formas:

- Pode-se considerar que a colagem proposta pelo usuário não é possível;
- Pode-se realizar ajustes na lista de pontos de contatos, eliminando alguns, para chegar a uma lista permitindo a colagem sem perda nem superposição.

5.3 Primeira Versão do Protótipo¹⁰⁸

Após as especificações supracitadas, o engenheiro programador nos enviou um *layout* com os ícones associados às ferramentas já em funcionamento. Apresentamos a seguir a *interface* do MS desenvolvida para teste e experimentação, fases do modelo de Tibúrcio (2016). Logo após, explicitamos cada uma das ferramentas e suas funcionalidades.

Figura 105- Layout do MS



Fonte: da pesquisa

Na barra superior do *software* temos, da esquerda para a direita, as seguintes ferramentas:

¹⁰⁸ Para o desenvolvimento do protótipo do MS não foi preciso organizar uma equipe multidisciplinar, pois o engenheiro pesquisador, juntamente com o engenheiro programador já possuíam elementos suficientes para a construção do micromundo tanto no que diz respeito aos aspectos técnicos, quanto pedagógicos. Vale ressaltar que o conhecimento referente a integrantes da equipe multidisciplinar para o desenvolvimento de *software* foi acessado em nossas análises preliminares.

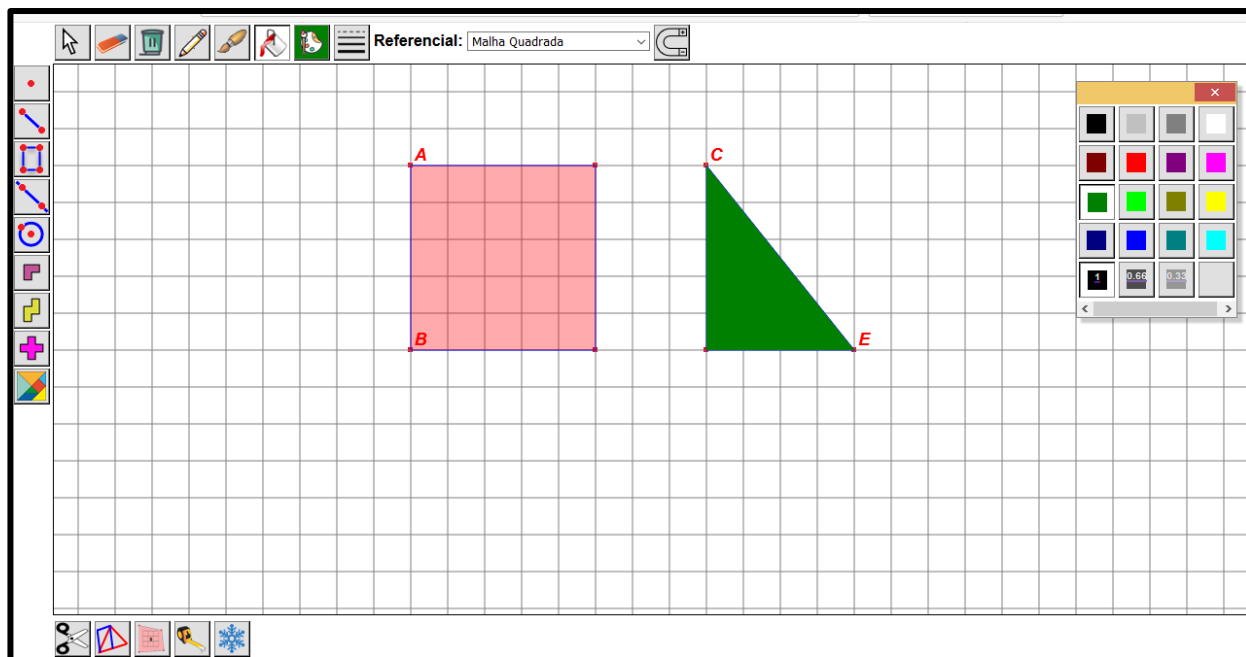
- **Ponteiro**: move um objeto criado na interface e desabilita funções das ferramentas ativadas;
- **Borracha**: esconde um objeto e o faz aparecer na tela novamente;
- **Lixeira**: exclui os objetos construídos na *interface do software*;
- **Lápis**: oferece opções de contornos para retas e pontos (vértices e lados de diferentes polígonos);
- **Brush**¹⁰⁹ (pincel): permite colorir o contorno dos objetos, tais como vértices e lados das figuras;
- **Fill** (latinha de tinta): função de preencher as figuras com diferentes cores;
- **Palette** (aquarela de cores): oferece uma paleta de cores e níveis de transparência para colorir os lados das figuras anteriores a construção;
- **Linestyle** (estilos de linhas): permite escolher o estilo de linha desejado para as bordas das figuras;
- **Referencial**: oferece diferentes opções, tais como eixo, eixo e malha, malha (quadriculada, isométrica e hexagonal) e malha pontilhada (quadrada, isométrica e hexagonal);
- **Imã**: ativa ou desativa o magnetismo nas malhas.

Como solicitado ao engenheiro programador, as figuras criadas nas malhas podem ser coloridas em níveis gradativos de transparência, deixando visível algum objeto que esteja por trás delas ou não. Esse fator oferece condições à construção de diferentes situações de área (BELLEMAIN; LIMA, 2002). No estudo de Facco (2003), podemos verificar várias tarefas nas quais são utilizadas malhas triangulares e quadriculadas. Para essa autora, a mudança de malha é uma escolha didática que intenciona facilitar a identificação de diferentes unidades de medida de área.

Contudo, se a intenção do professor for não destacar as unidades de medida que compõem a figura, visando à mobilização de outro tipo de estratégia pelo aluno para estabelecer sua área, poderá colori-la com o nível mais forte de transparência. Assim, a malha que estará por trás não poderá ser visualizada tão rapidamente. A seguir, ilustramos como pode ser realizado esse procedimento no MS.

¹⁰⁹ Alguns termos do MS estão em inglês, decidimos então, apresentá-los dessa forma.

Figura 106- Colorindo as figuras

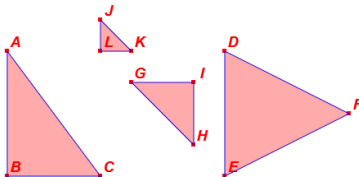
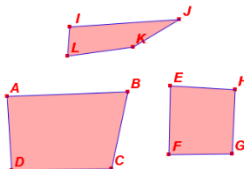
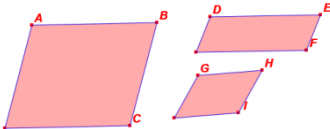
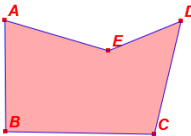


Fonte: da pesquisa

Na imagem acima temos duas figuras, o quadrado ABCD e o triângulo retângulo DEF. No MS, ao construirmos o quadrado, ou qualquer outro polígono, podemos verificar o que está por trás dele pelo seu nível de transparência ser menos intenso. No caso do triângulo DEF, escolhemos a opção *palette*, em seguida a ferramenta *fill* (latinha de tinta), a cor verde, o número 1 (nível de transparência que deixa a figura mais escura) e, em seguida, clicamos nessa figura para preenchê-la. Se fosse solicitado ao aluno a área desses dois polígonos, dado um quadrado da malha como unidade de medida de área, possivelmente haveria certa dificuldade em estabelecer a área do triângulo retângulo DEF, pelo fato de não estar visível a unidade dada. Essa tomada de decisão supostamente permitirá ao professor bloquear as estratégias de contagem das unidades que compõem a figura, permitindo possivelmente ao aluno mobilizar outro tipo de procedimento para chegar à área.

Na barra lateral esquerda estão presentes algumas ferramentas que são comuns em alguns *software* de geometria dinâmica. Para visualizarmos as ferramentas embutidas é preciso dar um clique duplo no seu respectivo ícone, abrindo, assim, o menu de contexto. No primeiro, temos o ponto e o ponto médio. Logo abaixo, segmento e linha poligonal. No ícone, representado por um triângulo, estão contidas as seguintes ferramentas:

Quadro 6- Ferramentas para a construção de figuras

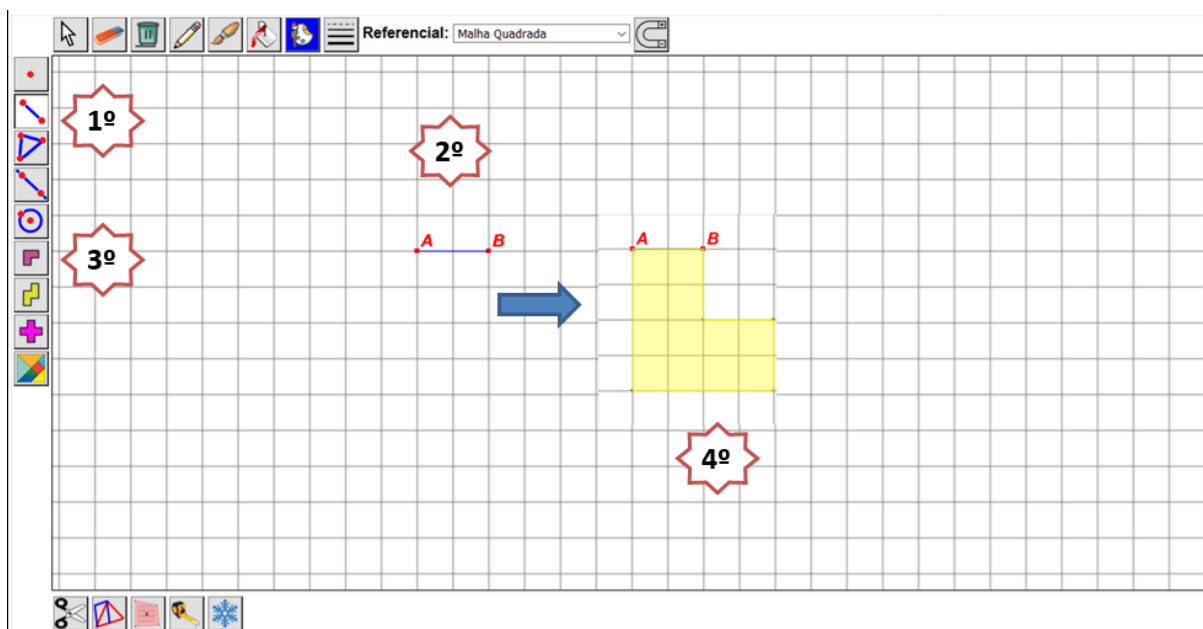
Ícone/Ferramenta	Descrição/interface
 Triângulo	Permite construir diferentes triângulos, basta definir o tipo por meio da escolha de três pontos não colineares. 
 Quadrilátero	Para desenhar qualquer quadrilátero, devem-se dar quatro cliques determinando seus vértices. 
 Paralelogramo	Para construir um paralelogramo, determina-se com três cliques do <i>mouse</i> ambos os lados adjacentes e o <i>software</i> completa a construção. 
 Quadrado	Para desenhar um quadrado, deve-se determinar com dois cliques um de seus lados, o <i>software</i> termina o trabalho respeitando o sentido anti-horário em curso.
 Retângulo	Para desenhar o retângulo, o procedimento é o mesmo do paralelogramo, o <i>software</i> impõe restrições quanto ao ângulo e o comprimento dos lados.
 Polígono qualquer	O polígono qualquer é formado por meio da criação de pontos que determinam seus vértices, para finalizá-lo é preciso dar um clique duplo no ponto final. 
 Polígono Regular	O polígono regular é construído por meio da inserção de pontos, os dois primeiros determinam um dos lados e o terceiro o ângulo.

Fonte: da pesquisa

O próximo menu representado por uma reta contém, além desse objeto, as retas (paralela, perpendicular, mediatriz, e bissetriz). Logo abaixo desse, temos a circunferência, circunferência por três pontos, arco e segmento circular. Em termos de interface, as funcionalidades dessas ferramentas seguem os princípios da geometria dinâmica dos *software* Cabri e Geogebra, por exemplo. Ainda na barra lateral esquerda, temos os ladrilhos predefinidos, ou seja, as peças do jogo poliminós. Para trazê-las diretamente à tela do *software* é preciso dar um clique duplo no ícone que representa o desenho das peças, e em seguida escolher uma delas (monominó, dominó, triminó, tetraminó ou pentaminó). Após isso, basta clicar na área de trabalho do *software* que a mesma aparecerá.

Pode-se ainda definir a unidade de medida dos quadrados que formam as peças do poliminó da seguinte maneira:

Figura 107- Definição da unidade que compõe os poliminós



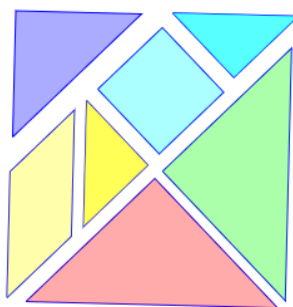
Fonte: da pesquisa

Para ilustrar a nossa explicação, adotamos a malha quadriculada apresentada na imagem acima. Como relatado em capítulos anteriores, os poliminós são figuras formadas pela justaposição de quadrados pelos lados. No MS, o quadradinho da malha é a unidade de medida utilizada para construção das peças desse jogo. Se quisermos tomar mais quadradinhos da malha como unidade padrão para compor os quadrados das peças, precisaremos optar pelos passos dados na figura acima. Primeiro, devemos selecionar a ferramenta segmento, posteriormente, definir o comprimento dele. Pressionar o ícone correspondente à peça do jogo e definir a que vai ser utilizada. Logo após, deve-se clicar no

ponto inicial do segmento e prontamente no outro, dessa forma, define-se a unidade de medida que compõe a peça. Não necessariamente será preciso se basear na malha quadriculada, esses passos poderão ser realizados na tela em branco do *software*.

A última ferramenta da barra lateral é o tangram. Diferente dos poliminós, as peças desse jogo não ficam embutidas no ícone correspondente, como sugerimos nos requisitos. Para ter acesso a elas, será preciso construir um quadrado localizado no menu que contém os polígonos e, logo depois, premir o botão tangram e, em seguida, um dos segmentos do quadrado. Dessa maneira, obtêm-se as peças separadamente, como ilustramos na imagem abaixo.

Figura 108 –Tangram no MS



Fonte: da pesquisa

Na barra inferior do *software* temos o ícone “tesoura”. Ao clicarmos nele, abrirá um menu de contexto contendo as ferramentas de corte e colagem. A primeira, da esquerda para direita, permite cortar qualquer polígono, a segunda e a terceira são programadas para triangularizar os polígonos construídos e a última, nesta ordem, permite colar as figuras.

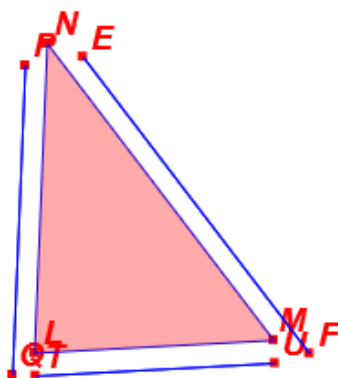
As funcionalidades dessas ferramentas dão conta da **decomposição e recomposição de figuras**, método da partição iniciado por Euclides e estudado por, entre outros, Hilbert, que consiste no fato de que, para calcular a área de uma figura, tenta-se dividi-la em um número finito de partes, de tal modo que essas partes possam compor uma figura de área a qual conhecemos (BOLTIANSKI, 1981).

As ideias da triangularização nos permitem trabalhar com a **equidecomposição**. Duas figuras se chamam **equidecomponíveis**. Cortando de certo modo uma delas em um número finitos de triângulos, pode-se, ao dispor das partes, compor com elas uma segunda figura (BOLTIANSKI, 1981) de mesma área que a primeira. Em Hilbert, temos a seguinte definição: “dois polígonos simples são chamados **equidecomponíveis** se eles podem ser decompostos em um número finito de triângulos congruentes dois a dois”. (HILBERT, 1971, p. 98). A

teoria das áreas expostas anteriormente permite, assim, definir um conceito de área para os polígonos simples, sem recorrer ao conceito numérico.

A ferramenta de corte ainda fornece condições ao usuário de destacar os lados das figuras para utilizá-las como uma unidade de medida não convencional de comprimento. Conforme a figura abaixo:

Figura 109- Decomposição dos lados das figuras



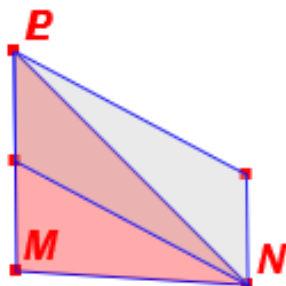
Fonte: da pesquisa

Os lados destacados podem ser movidos, rotacionados e coloridos. Para realizar o procedimento denominado de “decomposição dos lados das figuras” é preciso selecionar a ferramenta decompor (tesoura), escolher um dos vértices da figura, clicar nele, e em seguida no próximo, do lado da figura que se deseja destacar. Automaticamente o *software* separa o segmento. A figura permanecerá sem nenhuma alteração, podendo ser aproveitada para outras operações.

As ferramentas localizadas à direita das de corte foram desenvolvidas para trabalhar a ideia de figuras com mesma área/quadratura de figuras. Algumas delas simulam proposições dos Elementos de Euclides. A primeira, da esquerda para direita, denominada de “Triângulo para paralelogramo”, propicia que seja construído um triângulo e um paralelogramo de mesma área. Para utilizar essa ferramenta, o usuário terá que previamente traçar um triângulo, e, logo após, selecionar a opção *triangle to parallelogram*, seguidamente de um dos lados do triângulo.

O *software* então finaliza a construção, como ilustramos abaixo¹¹⁰:

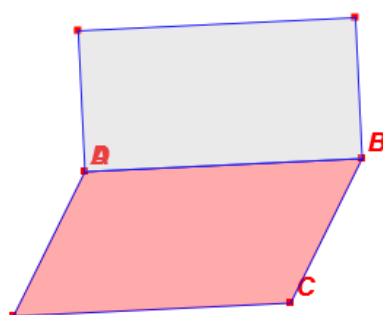
Figura 110- *Triangle to parallelogram*



Fonte: da pesquisa

A próxima ferramenta trata da proposição 35 do livro I de Euclides, “os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si” (BICUDO, 2009, p. 124). O procedimento para trabalhar com essa questão é análogo ao anterior. Define-se um dos paralelogramos selecionando a ferramenta de mesmo nome do menu polígonos. Logo após, deve-se escolher a opção *parallelogram to rectangle* na barra inferior e clicar no paralelogramo esboçado anteriormente. O resultado será as seguintes figuras justapostas por um de seus lados:

Figura 111-*Parallelogram to rectangle*



Fonte: da pesquisa

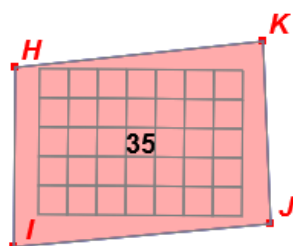
Ao movermos os vértices A, B, ou C da figura vermelha (paralelogramo inicial), a azul (paralelogramo [retângulo]) se modifica para que sua área continue sendo igual em relação à do anterior. Essa mesma função foi empregada nas demais ferramentas, ou seja, as figuras formadas por meio delas possuem vínculos. A ferramenta seguinte propicia a

¹¹⁰Os títulos das figuras estão em inglês pelo fato de serem designadas dessa forma no MS.

construção de um quadrado de mesma área que um retângulo dado, e, logo depois, temos a proposição 47, referente ao teorema de Pitágoras (soma de quadrados). Esse menu contempla os passos para a quadratura do triângulo, do paralelogramo e do retângulo, como explicitamos em nossos requisitos.

Ainda na barra inferior do MS, podem ser encontradas mais três ferramentas. O ícone representado por um quadrilátero com uma malha contida nele oferece condições para trabalhar a ideia de área em Lebesgue (1975)¹¹¹. Quando se clica nele e, em seguida, na figura desejada, o *software* insere dentro dela uma grade quadriculada que traz a ideia de quantos quadrados inteiros cabem dentro da figura.

Figura 112- Área em Lebesgue



Fonte: da pesquisa

O MS oferece a função de medir a área e o perímetro das figuras construídas em sua *interface* e representá-las pelo par (número + unidade de medida). Para realizar esse procedimento, basta pressionar o botão com o desenho de uma “trena”, seguidamente da figura a qual se deseja medir. A área será expressa em (cm²) e o perímetro em (cm).

A última ferramenta, que tem no ícone a imagem de um floco de neve, tem por funcionalidade “congelar os polígonos construídos na *interface* do *software*”. Ao desenharmos qualquer polígono, podemos deformá-los, ampliá-los ou reduzi-los, arrastando seus vértices. Para bloquear essa ação, devemos premir o botão *freezing* e depois clicar em um dos lados dessas figuras. Assim, só será possível rotacionar, aplicar reflexão e mover. Se o usuário optar em desfazer tal ação, deverá utilizar o procedimento análogo.

Assentimos com Prates (2011) que, no estudo de área como uma grandeza, quatro elementos são importantes: distinguir a área da figura (já que figuras distintas podem ter mesma área); reconhecer a área de sua medida numérica; usar superfícies unitárias diversas para a medição da área de figuras; e distinguir o perímetro da área. As ferramentas e menus

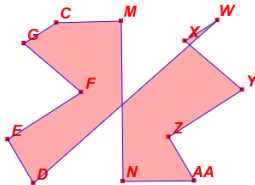
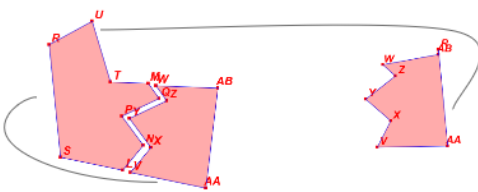
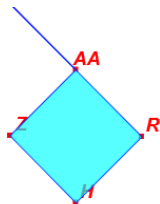
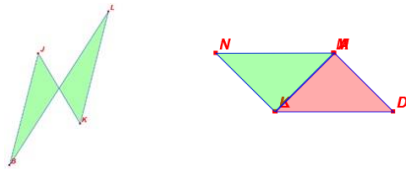
¹¹¹Alguns ajustes ainda precisarão ser realizados para que essa ferramenta dê conta da medida de área em Lebesgue. Essa ferramenta não aparece em nossos requisitos, mas foi pensada pelos desenvolvedores (engenheiro- pesquisador e engenheiro- programador) do MS durante a prototipação para dar conta da abordagem de área em Lebesgue.

contemplados nesta versão, expostas anteriormente, mostram-se pertinentes para esse trabalho.

5.4 Análise do Funcionamento do Protótipo

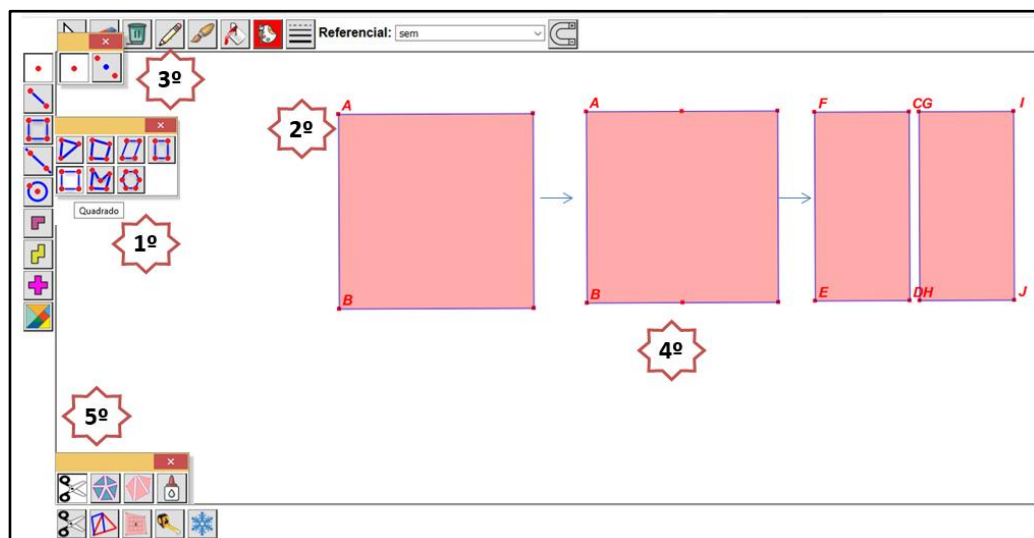
Ao analisarmos cada uma das ferramentas no sentido de verificar se funcionavam corretamente atendendo aos requisitos explicitados nas seções anteriores, identificamos alguns *bugs* (erros no sistema do programa) que foram enviados ao pesquisador-programador e são descritos a seguir.

Quadro 7- Alguns bugs na colagem

Ferramenta de colagem	
Descrição	Imagem do que acontece com a figura
Recomposição de um polígono qualquer Quando decompomos um polígono qualquer, ao pegarmos uma das partes e, por justaposição, tentarmos colar com a outra, quando escolhemos segmentos superiores das figuras a colagem é realizada, quando não, apresenta uma figura mal comportada.	
Ao decompormos um polígono como o apresentado ao lado e, com uma das partes decompostas, encaixarmos do outro lado como mostra a seta e, em seguida, clicarmos em colar, a segunda parte some da tela. Observação: Precisamos ver um tipo de magnetismo que possa puxar automaticamente as partes decompostas, ao aproximarmos uma da outra, para então, com a ferramenta colar ativada, realizarmos a recomposição.	
Peças do tangram Ao tentarmos colar o quadrado com o triângulo pequeno, mesmo justapondo os lados, o triângulo pequeno desaparece. Ficando visível apenas um de seus vértices como na figura ao lado.	
A colagem de dois triângulos grandes ao serem colocados de forma a montar um paralelogramo, teremos como resultado ora um polígono cruzado, ora aparece a mensagem “linha de colagem não congruente”.	

Com relação à ferramenta de decomposição, temos a seguinte questão: ao construirmos um polígono qualquer, para dividi-lo em duas partes iguais no MS precisaremos realizar alguns procedimentos como ilustramos a seguir:

Figura 113- Decomposição de um quadrado em duas partes iguais de mesma área

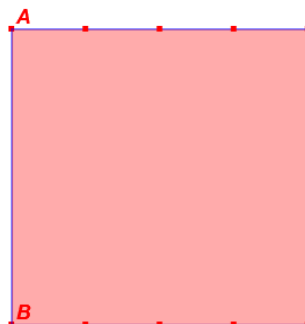


Fonte: da pesquisa

O primeiro passo é escolher qual tipo de figura se pretende decompor. Neste caso, optamos pelo quadrado. Para que ele seja construído na interface, basta determinar um de seus lados e o *software* finaliza a construção. Após isso, deve-se escolher a opção ponto médio, clicar em um dos vértices dessa figura, seguido do outro, como ilustramos no 4º passo. Esse mesmo procedimento precisa ser realizado no segmento oposto. Para recortar a figura, será preciso apenas selecionar a ferramenta decompor, clicar no primeiro ponto médio, seguido do outro criado no lado oposto.

Assim, teremos a decomposição do quadrado em duas partes iguais. Entretanto, se quisermos dividir esta mesma figura em quatro partes iguais, realizando o mesmo procedimento de criação de pontos médios, não será possível decompor a figura, como ilustramos a seguir:

Figura 114- Segmentos divididos em quatro partes congruentes

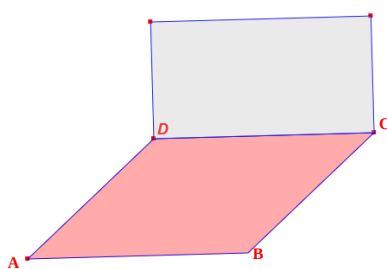


Fonte: da pesquisa

Outros elementos também foram elencados a partir das testagens de cada ferramenta pelo engenheiro pesquisador¹¹², como a lixeira, por exemplo. Ao apagarmos qualquer figura que tenha sido composta por duas outras, não é possível excluir todos os pontos (vértices que compõem as figuras). As circunferências, circunferências por três pontos e arcos não podem ser arrastados na *interface* do *software*, mesmo usando a ferramenta “ponteiro”, que tem essa função.

As ferramentas criadas para trabalhar as ideias de “figuras diferentes com mesma área/quadratura de figuras” em uma abordagem mais geométrica, baseada nos Elementos de Euclides, precisam de algumas implementações. Na situação abaixo, temos dois paralelogramos de mesma área. Ao arrastarmos o vértice (A, B ou C) do denominado por ABCD (paralelogramo rosa), o outro EFGH (retângulo azul) se modifica conservando a mesma área que a do ABCD.

Figura 115-Paralelogramos de mesma área



Fonte: da pesquisa

¹¹² Denominamos assim, com base em Tibúrcio (2016), o pesquisador deste estudo.

Tais figuras também podem ser separadas, entretanto não temos como realizar decomposições e outras funções. Se o objetivo do usuário for decompor o paralelogramo ABCD a fim de montar um retângulo igual ao EFGH, para verificar suas áreas por sobreposição, não será possível. Neste caso, o segundo desaparece da tela. Esse fato não ocorre com a figura dependente (retângulo azul), se a intenção do usuário for decompor essa figura nada acontecerá na que deu origem a ela. Compreendemos a ideia dos paralelogramos estarem vinculados como descrito no parágrafo anterior.

Contudo, para não limitar o estudo da abordagem de área como uma grandeza, poderíamos, por meio da ferramenta, cristalizar, congelar um dos paralelogramos e, assim, desvinculá-los, para então realizarmos decomposições em um, de forma que o outro não desapareça da interface do *software*. Dessa maneira, a ferramenta “cristalizar” teria mais uma função, a de desabilitar o vínculo entre os objetos criados para trabalhar a ideia de área presente nos Elementos de Euclides, que estão localizados na barra inferior do MS.

Os polígonos construídos na malha não podem ser movidos como se a opção imã estivesse sempre ativada, esse fator pode dificultar a elaboração de alguns tipos de situações de aprendizagem de área, limitando a translação das figuras. Na testagem a seguir, exporemos mais algumas sugestões para a primeira versão do protótipo.

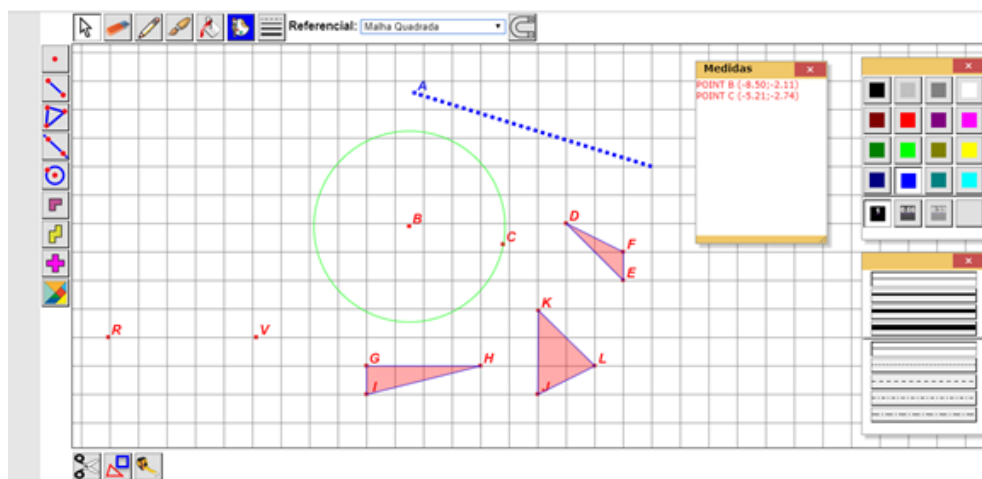
5.4.1 Segundo teste do protótipo

Participaram deste momento três estudantes do 5º período do Curso de Licenciatura em Expressão Gráfica de uma Universidade Pública Federal do estado de Pernambuco. Foram escolhidos por estarem acompanhando o desenvolvimento da nossa pesquisa, a qual foi apresentada a eles em uma aula da disciplina de Tecnologia da Educação, ministrada pelo engenheiro programador. Após mostrarmos o MS, solicitamos a construção de alguns desenhos livres que lhes permitissem explorar as funcionalidades das ferramentas do *software*. O objetivo da tarefa era apontar algumas irregularidades que poderiam surgir nesta experimentação para uma eventual modificação ou aprimoramento da versão inicial.

Para coletar o que fora sugerido, compartilhamos com todos, no momento da aula, um documento no *Google Drive*. Nele, deveriam inserir o *print screen* da construção do desenho na tela do *software* e abaixo as observações realizadas. Exporemos, a seguir, os extratos dos protocolos destes estudantes identificados por E1, E2 e E3 (estudantes 1, 2 e 3, respectivamente).

E1 ativou a malha quadriculada e, em sequência, desenhou uma circunferência, uma reta e alguns triângulos. Também utilizou as ferramentas preencher e contorno de objetos, como na imagem a seguir:

Figura 116- Extrato do protocolo de E1

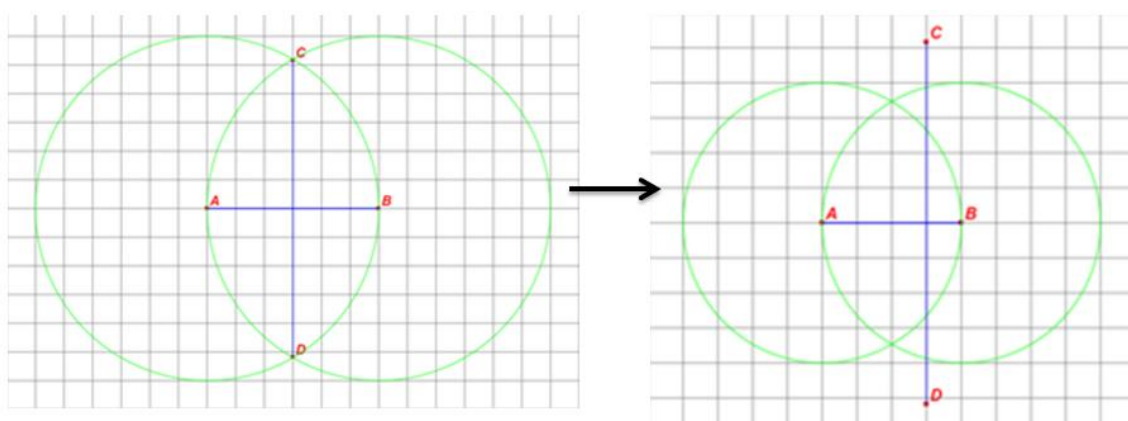


Fonte: da pesquisa

Para ele, na construção dos desenhos da imagem anterior, há dificuldade de acertar os pontos na malha, apontando como necessidade um tipo de sensor de proximidade para ajustá-los. Sugere, ainda, o *Ctrl z* para desfazer uma ação ou algum comando de voltar.

A próxima imagem trata-se do desenho construído pelo E2. O E2 faz a seguinte colocação: *aqui não foi possível adicionar os pontos nas interseções das circunferências de centro A e B, com isso, quando arrastamos um dos centros A ou B, a reta CD não acompanha a modificação*. Ele recomenda ser inserida no *software* a ferramenta ponto de intersecção entre objetos.

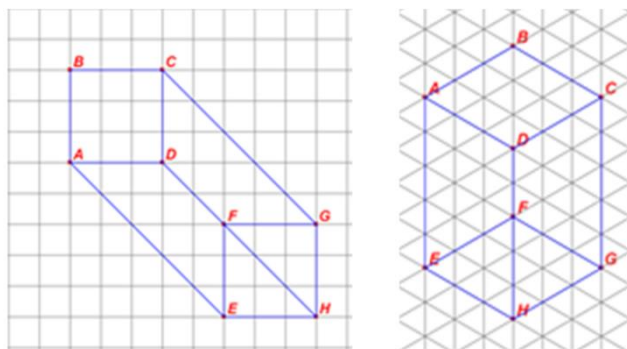
Figura 117- Extrato do protocolo E2



Fonte: da pesquisa

E3 desenha um prisma de base retangular na malha quadriculada. Ao optar pela isométrica, percebe que a construção se ajusta à malha escolhida. Ele então faz a seguinte observação: *o desenho geométrico muda conforme a malha escolhida, nesse caso só nas malhas quadrada e isométrica (acho que as malhas poderiam ficar apenas como referência ou ativar a função imã.).*

Figura 118- Extrato do protocolo de E3



Fonte: da pesquisa

Os testes desta versão 1.0 do MS foram realizados no *browser Mozilla Firefox*. Ao final, além de enviarmos os *bugs* para correção ao engenheiro programador, identificados anteriormente, solicitamos a inserção das seguintes ferramentas:

- 1- Duplicar objetos;
- 2- Permitir no quadro “magnitude” o comprimento dos lados das figuras;
- 3- Adicionar uma ferramenta para nomear e renomear objetos;
- 5- Adicionar uma ferramenta para selecionar vários objetos de uma só vez;
- 6- Adicionar uma ferramenta de *zoom in* e *zoom out* para a *interface* do *software* e malhas;
- 7- Ajustar a ferramenta de somar quadrados, que não está funcionando;
- 8- Adicionar a opção de salvar os objetos construídos;
- 9- Consertar a ferramenta retângulo do menu polígonos, pois ela não permite construir essa figura, mas um triângulo retângulo;
- 10- Adicionar uma caixa de texto para digitar o enunciado das atividades.

Após finalizarmos esta etapa, foram enviadas ao engenheiro programador, via documento do *Drive*, cada uma das observações realizadas na testagem inicial do MS para eventuais modificações e aprimoramentos. Nesta primeira versão, as ferramentas de planejamento do professor não foram contempladas, uma decisão dos envolvidos no desenvolvimento, em decorrência do tempo para finalização da pesquisa. As demais

ferramentas que não foram destacadas em nossas experimentações funcionaram corretamente, com exceção da soma de quadrados localizada na barra inferior do *software*.

Nosso foco nas próximas seções é a fase do modelo de desenvolvimento denominada de “experimentação” (TIBÚRCIO, 2016). Desta vez, para análise da versão inicial do MS, contaremos com a participação de especialistas no campo das grandezas e medidas e da informática para termos uma análise mais precisa em cada elemento do MS.

6 EXPERIMENTAÇÃO

Esta etapa do procedimento serve para testar o protótipo de *software*, verificar falhas, sugestões de melhorias de *interface*, comandos, botões, funcionalidades, entre outros (TIBÚRCIO, 2016), e verificar se o protótipo atende ao que fora previsto no objetivo traçado para o seu desenvolvimento “dar suporte ao ensino de área e perímetro”.

O experimento contou com a participação de três integrantes do grupo de pesquisa Pró-grandezas¹¹³ e três do LEMATEC¹¹⁴. Justificamos essa escolha pelo fato desses sujeitos poderem contribuir no processo de experimentação/validação, com um olhar mais direcionado aos aspectos teóricos conceituais referentes às grandezas área e perímetro (integrantes do grupo Pró-grandezas) e informáticos (integrantes do grupo LEMATEC), no que diz respeito à interface, funcionalidades e interatividade de menus e ferramentas do MS. Antes da realização de testes pelos especialistas, o engenheiro programador inseriu no MS uma ferramenta de texto e a possibilidade de nomear objetos.

6.1 Caracterização dos Sujeitos da Pesquisa.

Anteriormente à realização do experimento, foi enviado via documento do *Google Drive* um “Termo de Consentimento Livre Esclarecido” (disponível no Apêndice J), para que todos os participantes pudessem entender o objetivo da nossa pesquisa e o papel de cada um durante toda a experimentação. Caso aceitassem participar, deveriam assinar o termo supracitado, autorizando a divulgação do material produzido, sem suas identificações. Todos concordaram, assinaram o termo e entregaram ao engenheiro pesquisador no primeiro encontro do experimento.

Além desse termo, enviamos um questionário denominado de “Perfil do Participante” (disponível no Apêndice D). Nesse, cada um dos sujeitos da pesquisa deveria preencher com alguns dados relativos à formação inicial, maior titulação, etapa da educação na qual atuavam e há quanto tempo, além de relatar suas experiências com o uso de recursos informáticos. O objetivo era conhecer ainda mais os participantes da pesquisa e suas vivências enquanto professores com o uso de *software* de matemática em sala de aula. No quadro a seguir, trazemos algumas dessas informações. A partir deste momento, denominaremos os sujeitos da pesquisa por letras maiúsculas do alfabeto latino.

¹¹³ Esses sujeitos investigam há anos os fenômenos relativos ao campo das grandezas e medidas, mais enfaticamente os conceitos de área e perímetro.

¹¹⁴ Foram escolhidos estes integrantes do grupo LEMATEC pela experiência em *design* de *software* educativos, como também conhecimentos em geometria gráfica.

Quadro 8- Perfil dos sujeitos da pesquisa

SUJEITOS DA PESQUISA	INFORMAÇÕES			
	Formação Inicial	Maior Titulação	Etapa da Educação que Atua	Tempo de Atuação na Área de Educação
A	Licenciatura em Expressão Gráfica	Mestrando em Educação Matemática e Tecnológica.	Educação Básica 6º ao 9º e no Ensino Médio	2 anos
B	Licenciatura em Matemática	Doutor em Educação Matemática e Tecnológica	Educação Básica (6º ao 9º e no Ensino Médio)	35 anos
C	Licenciatura em Expressão Gráfica	Mestre em Educação Matemática e Tecnológica (Doutoranda em Educação Matemática e Tecnológica)	Formação de Professores da Educação Básica e 7º ano do Ensino Fundamental.	1 ano
D	Licenciatura em Matemática	Mestre em Educação Matemática e Tecnológica (Doutorando em Educação Matemática e Tecnológica)	Educação Básica (6º ao 9º e no Ensino Médio)	5 anos
E	Licenciatura em Matemática	Doutor em Educação Matemática e Tecnológica	Educação Básica (Ensino Médio)	15 anos
F	Bacharel em Design	Mestre em Design	Ensino Superior	5 anos

Fonte: da pesquisa

Quanto ao uso de *software* matemático em suas aulas, o participante “A” relata que costuma utilizar o Geogebra para demonstrar e simular construções geométricas, pois, segundo ele, esse *software* permite que os alunos verifiquem propriedades e características de objetos matemáticos de forma dinâmica e lúdica. Trabalha, por meio desse *software*, conteúdos voltados para a geometria gráfica como lugar geométrico, construções de polígonos regulares, transformações geométricas, ângulos na circunferência, sistemas de projeção cilíndrica e cônica, em específico os sistemas de representação. Apresentamos, no extrato do protocolo a seguir, o que foi respondido pelo participante “A”, referente a sua experiência com o uso de *software*.

Figura 119- Extrato do protocolo do participante A

Tive experiência de trabalhar na ed. básica nas disciplinas de Desenho Geométrico e Geometria Gráfica. Nelas o foco, além do desenho, o objetivo era levar os alunos a entenderem o que justificava as construções. Os softwares de Geometria Dinâmica eram utilizados para que os alunos conseguissem compreender as propriedades. No geral, os alunos conseguiam atingir os objetivos, uma vez que através das simulações e construções os alunos compreendiam o conteúdo além da representação gráfica.

Fonte: da pesquisa

O participante “B”, ao contrário, menciona que ultimamente, na escola onde trabalha, não tem uma estrutura que possibilite o uso de recursos tecnológicos informáticos, pois se encontra sem computadores e local disponível para realização das aulas. Entretanto, durante a sua jornada enquanto professor, já havia utilizado alguns micromundos, jogos digitais e *software* do tipo exercício e prática. No que diz respeito aos conteúdos de matemática trabalhados por meio desses *software* e os resultados obtidos, temos as seguintes respostas:

Figura 120-Extrato do protocolo do participante B

3- Qual ou quais conteúdo(s) foi/foram trabalhados por meio do(s) software(s) utilizado(s) ?
Geogebra - geometria - construção de polígonos; circunferências; ângulos; propriedades das figuras geométricas; Tangram: tabuadas; expressões numéricas; 4 (área/perímetro) Quiz - problemas dos diferentes domínios da matemática.
4- Relate-nos um pouco da sua experiência e os resultados obtidos por meio dela.
Geogebra - após a construção de figuras e os materiais de desenho os alunos usam o software como possibilidade de ampliar a compreensão das propriedades o que contribuiu para o aprendizado e fixação dos conteúdos. Tabuadas e expressões numéricas - como recurso para fixar as operações, procedimentos e conceitos ainda não atingidos por alunos com dificuldades. Quiz - como sondagem, revisão de conceitos já trabalhados em grupo. Atividade possibilitou além da interação, a troca de conhecimentos entre os grupos, ao analisarem as respostas dadas.

Fonte: da pesquisa

Como explicitado no extrato de protocolo, o participante “B” relata ter experiência com o uso do *software* Geogebra para abordar diferentes conteúdos matemáticos, a exemplo dos de geometria (construções geométricas, classificação de polígonos) e funções. Ademais, faz uso do tangram digital para explorar os conteúdos de área e perímetro, tabuadas digitais (uma espécie de jogo que promove a competição entre alunos) e *Quizzes* sobre problemas matemáticos. Como resultado, pode-se perceber que o uso desses diferentes *software* contribuiu para fixação de conteúdos, interações entre alunos e socialização de conhecimentos.

Já o participante “C” justifica a utilização de diferentes *software* em suas aulas elencando o auxílio e a potencialidade de muitos deles na visualização e representações gráficas, sobretudo de conceitos matemáticos/geométricos. Como exemplo, ele expõe o *software* de geometria *Poly*¹¹⁵. Com relação aos resultados obtidos em suas experiências, nos relata uma vivência com o Geogebra da seguinte forma:

Figura 121-Extrato do protocolo da participante C

4- Relate-nos um pouco da sua experiência e os resultados obtidos por meio dela.

Polígonos, malhas poligonais e circunferência, foram trabalhos com alunos do 7º ano. O uso do geogebra, simulação no prezi, além de prenderem a atenção dos alunos, auxiliaram com a visualização das formas e compreensão dos conceitos trabalhados. Cortes foi trabalhado no the Sims, para o entendimento da representação do corte em uma casa construída no simulador.

Fonte: da pesquisa

Além do Geogebra, ele usou simulações no *Prezi*, o que, segundo o participante despertou a atenção dos alunos. Assim, esses recursos informáticos contribuíram com a visualização das formas e conceitos trabalhados em suas aulas, tais como: polígonos, malhas poligonais e circunferência. Faz menção ainda ao “*The Sims*”, uma espécie de mundo virtual no qual o usuário pode externar sua imaginação criando casas e pessoas personalizadas.

Por meio dele, o participante relata que trabalhou em sala de aula cortes (secção) em uma casa que havia sido construída nesse simulador (esses cortes permitem que sejam

¹¹⁵**Poly** é uma abreviação do termo Polyhedron do inglês –Poly-vários, hedron –faces. Fanti et al. (2007). Os autores do *software* decidiram denominá-lo dessa forma, por ser um *software* de geometria, que permite a visualização da representação de figuras tridimensionais em sua forma planificada, além de realçar os vértices, faces e lados.

visualizadas as partes do interior da casa, seus diferentes cômodos, etc.). Neste caso, foram explorados também conceitos de perspectiva na matemática.

O participante “D” também possui experiência com o uso do software Geogebra, não apenas para ensinar geometria, mas também funções em geral, como explicitamos a seguir:

Figura 122- Extrato de protocolo 1 do participante D

3- Qual ou quais conteúdo(s) foi/foram trabalhados por meio do(s) software(s) utilizado(s) ?
- Funções em geral: para analisar graficamente de maneira dinâmica, cada função, suas variáveis gráficas na variação dos parâmetros, etc. - Geometria: Construções geométricas, classificação de polígonos, entre outros (é comum eu deixar o Geogebra aberto enquanto discutimos os conteúdos da geometria, e, quando necessário, utilizamos o software p/ auxiliar a visualização).
4- Relate-nos um pouco da sua experiência e os resultados obtidos por meio do(s)

Fonte: da pesquisa

Quando indagado sobre os resultados obtidos por meio do uso do Geogebra, o participante “D” nos responde da seguinte forma:

Figura 123- Extrato de protocolo 2 do participante D

Sobre a experiência, falei um pouco na resposta anterior. Quanto aos resultados, é evidenciado que o Geogebra, por exemplo, auxilia muito na visualização e análise dos objetos estudados. Ele permite uma análise dinâmica e uma interação nas figuras, que possibilita um estudo mais sofisticado dos conhecimentos visados além de ser um suporte experimental muito interessante, auxiliando também os estudantes que apresentam um pouco de dificuldade de abstração, geometricamente falando.

Fonte: da pesquisa

Podemos observar, na resposta dada por esse participante “D”, que o Geogebra, pelo seu dinamismo, possibilitou um estudo mais sofisticado auxiliando os estudantes a compreenderem abstrações próprias da geometria, pelo fato de permitir a visualização e análise de objetos geométricos.

O participante “E” informa que não costuma utilizar em suas aulas *software* matemáticos, mas, segundo ele, fez uso do Geogebra certa vez para demonstrar o comportamento do gráfico de algumas funções. Ainda assim, ele explica que conhece o Geogebra, suas funcionalidades e o propósito desse *software* em trabalhar, de forma articulada, a geometria e a álgebra. **Participante E:** *Usei o software mais para mostrar aos alunos. Não tive muita disponibilidade no laboratório. E nos últimos três anos me afastei da escola, por motivo de estudo.*

Por fim, o **participante F** expõe que conhece o Geogebra e outros *software* de desenhos. Ele os utiliza para que o estudante possa entender, através de uma visualização espacial tridimensional, a geometria que sempre é representada por meio de duas dimensões no papel. Com isso, tem conseguido uma melhor compreensão dos estudantes sobre os conteúdos das disciplinas de Geometria Gráfica tridimensional e Geometria descritiva, e Desenho.

As respostas são heterogêneas e revelam as particularidades de cada vivência. No entanto, a partir do que os sujeitos da pesquisa informaram no questionário, pudemos constatar que a maioria deles possui experiências com uso de *software* matemáticos em sala de aula, com destaque para o *software* de geometria dinâmica Geogebra, fator que nos parece pertinente para a avaliação do MS.

6.2 Descrição do Experimento

Os seis participantes da pesquisa foram organizados em duplas¹¹⁶, sendo um componente do grupo de grandezas e medidas e o outro do LEMATEC. Cada dupla teve a sua disposição um computador com acesso à internet, pois o MS encontrava-se disponível online na plataforma *Lematec Studium*. O experimento aconteceu em dias distintos, de acordo com a disponibilidade das duplas.

No primeiro encontro, realizado em 19 de fevereiro de 2019, apresentamos aos sujeitos da pesquisa uma síntese do nosso estudo e o objetivo que pretendíamos alcançar por meio deste novo micromundo (dar suporte ao professor para o ensino de área e perímetro, em um ambiente informático dinâmico). Em seguida, entregamos a cada dupla três formulários para a análise do MS, dois referentes à avaliação de “aspectos técnicos” e um concernente aos “aspectos pedagógicos” do *software*. Para elaborar esse material, baseamo-nos nas pesquisas

¹¹⁶ A escolha entre eles foi por afinidade.

desenvolvidas por Gomes et al. (2002), Lyra et al. (2003) e Batista (2004), que tratam da avaliação de *software* educativos para o ensino da matemática.

O Formulário Avaliativo do Micromundo *Magnitude Studium*, intitulado de “Análise de Aspectos Técnicos” (disponível no Apêndice E), tinha por objetivo a avaliação do funcionamento dos menus e ferramentas desse *software*. Para isso, as duplas deveriam assinalar a opção “adequadamente”, se a ferramenta¹¹⁷ analisada estivesse condizente com o seu ícone e funcionasse corretamente; “parcialmente”, se a ferramenta precisasse de alguma alteração ou aprimoramento de sua interface; e “insatisfatoriamente”, se não estivesse funcionando. Nos dois últimos casos, teriam que justificar apontando sugestões de aprimoramento e/ou adequação ou mesmo a mudança de forma completa das *interfaces*.

O segundo formulário, denominado de “Análise de Aspectos Técnicos mais Pontuais” (disponível no Apêndice F), tinha como objetivo a análise do MS no que diz respeito à facilidade no manuseio; à amenidade de diálogo (refere-se às características da interface em fornecer uma forma de diálogo com o usuário que seja claro, preciso e familiar); ao conforto visual/interface atrativa (refere-se às características que tornam a interface agradável ao usuário); ao grau de compreensão sem a presença de um instrutor; à clareza das alternativas possíveis de comando; à compatibilidade com plataforma web; a se as ferramentas eram autoexplicativas; e à navegabilidade pelo teclado e o *design* do *software*.

Todas as duplas precisariam, em comum acordo, análogo à maneira de preencher o formulário anterior, assinalar “adequadamente”, se o *software* atendesse a cada um dos aspectos supracitados; “parcialmente”, se precisassem ser ajustados e/ou aprimorados alguns dos referidos aspectos; e “insatisfatoriamente”, caso não atendesse ao que fora elencado. Além disso, era necessário justificar suas escolhas ao final das análises.

O último formulário estava relacionado à “Análise de Aspectos Pedagógicos” (disponível no Apêndice G). As duplas deveriam verificar se o *Magnitude Studium* ofereceria condições de gerar concentração e motivação nos alunos ao utilizarem; se permitiria o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas aos conceitos de área e perímetro; se teria a preocupação de preservar o ritmo individual de aprendizagem, a geração de autonomia para que o usuário construa seu próprio conhecimento; se promoveria a interatividade; e se faria a contextualização com a proposta curricular. Assim como os formulários anteriores, as duplas precisariam escolher uma das três opções (adequadamente,

¹¹⁷ A descrição de cada ferramenta encontrava-se ao lado da mesma no formulário.

parcialmente e insatisfatoriamente) e, em seguida, justificar suas escolhas em um espaço livre abaixo do formulário.

Juntamente com os formulários apresentados, entregamos um questionário com cinco perguntas (disponível no Apêndice H)¹¹⁸ relacionadas à abordagem do conceito de área e perímetro no *software*. Pedimos ainda que as duplas construíssem uma tarefa de área, uma de perímetro e outra que envolvesse essas duas grandezas (modelo a ser seguido disponível no Apêndice I). O objetivo era verificar, ao final, se o MS daria suporte a essa construção, visto que todos os participantes do experimento são professores – a maioria da educação básica – com experiência em grandezas e medidas.

Após apresentarmos os formulários, o questionário e o modelo das tarefas, solicitamos que todos acessassem a plataforma *Lematec Studium*, a qual hospeda o MS disponível em <<http://lematecstudium.net/>>, criassem um *login* e uma senha para cada dupla. Em seguida, pedimos que logassem e escolhessem a opção “Micromundos” na barra lateral dessa plataforma, prontamente selecionassem o menu *Magnitude Studium* e dessem um clique duplo na *interface* deste *software*, assim que a janela de abertura surgisse.

Todos esses passos foram apresentados pelo engenheiro pesquisador no primeiro momento da realização do experimento. Explicamos também que várias interfaces do MS apresentavam novidades em relação a outros *software* de geometria, tais como o *Apprenti Géomètre 2*, o *Cabri Géomètre* e o *Geogebra*, por exemplo.

Para obtermos os dados referentes ao experimento do MS, além das respostas dadas aos formulários, questionários e da realização das tarefas, gravamos a *interface* do computador (áudio e vídeo) das duplas, para obtermos a interação entre os componentes de cada uma delas e os procedimentos realizados no MS antes de preencherem os formulários. Para isso, utilizamos o *software* de captura de tela a *Tube Catcher* e uma câmera externa ao computador.

Devido à quantidade de ferramentas disponíveis para análise e aos diferentes materiais que precisariam ser preenchidos e respondidos, não conseguimos realizar todo o experimento em um único dia. Organizamos, então, um calendário de encontros presenciais de acordo com a disponibilidade dos integrantes das duplas. Entretanto, nem sempre foi possível contar com a presença de todas nos mesmos dias e horários. Os encontros presenciais contaram com a participação do engenheiro pesquisador e, em alguns deles, tivemos a presença do engenheiro programador. As composições das duplas foram: Dupla 1 composta pelos participantes “A e

¹¹⁸ Os dados extraídos desses questionários serão discutidos, por conveniência, no capítulo referente a Análise a posteriori e Validação.

B”, a Dupla 2 por “C e D” e a Dupla 3 formada por “E e F”. O quadro a seguir apresenta os dias e horários dos encontros.

Quadro 9- Cronograma dos encontros presenciais

Dias/mês	Horário	Duplas	Atividades Realizadas
19/02	Manhã	Dupla 1 (AB) Dupla 2 (CD)	• Apresentação da pesquisa; • Orientação do experimento e início das análises das ferramentas do <i>software</i>/preenchimento do formulário.
	Tarde	Dupla 3 (EF)	
26/02	Manhã	Dupla 1 (AB) Dupla 2 (CD)	Continuação das análises do <i>software</i> e preenchimento do formulário 1.
11/03	Manhã	Dupla 3 (EF)	Continuação das análises do <i>software</i> e preenchimento do formulário 1.
20/03	Manhã	Dupla 2 (CD)	Continuação das análises do <i>software</i> e preenchimento do formulário 2.
	Tarde	Dupla 1 (AB)	Continuação das análises do <i>software</i> e preenchimento do formulário 2.
22/03	Manhã	Dupla 2 (CD) Dupla 3 (EF)	Continuação das análises do <i>software</i> e preenchimento do formulário 3.
25/03	Manhã	Dupla 3 (EF)	Continuação das análises do <i>software</i> (finalização do preenchimento dos formulários).
28/03	Manhã	Dupla 2 (CD)	Continuação das análises do <i>software</i> (finalização do preenchimento dos formulários 1 e 2).
	Tarde	Dupla 1 (AB)	

Fonte: da pesquisa

Explicitamos, no quadro acima, o que fora realizado pelas duplas nos encontros presenciais. Mesmo organizando os horários apresentados anteriormente, o tempo e a quantidade de dias não foram suficientes para finalização de todas as análises. Decidimos, então, compartilhar com as duplas, via documento do *Google Drive*, os formulários, questionários e a explicação de como deveriam proceder para a realização das tarefas.

Orientamos que as duplas poderiam se reunir online de forma síncrona nos dias que achassem mais pertinentes ou de maneira assíncrona, deixando comentários nos documentos para que o outro integrante concordasse ou não com o que estava sendo proposto, e, assim, fossem preenchendo todo o material. Solicitamos aos participantes para que, quando possível, gravassem a tela do computador nos encontros das duplas de forma síncrona e nos momentos individuais. Não sendo possível a gravação, pedimos que deixassem os comentários no drive a respeito do que estava sendo realizado. No último momento do encontro, realizado no dia 19 de fevereiro, entregamos ainda a cada dupla um questionário mais geral, contendo perguntas abertas referentes às potencialidades e limitações da primeira versão do MS para o

ensino de área e perímetro, uma espécie de síntese do que eles haveriam de analisar (Apêndice M). O papel do engenheiro pesquisador era, no momento do experimento, tirar algumas dúvidas dos participantes em relação ao funcionamento de algumas ferramentas que muitas vezes não estavam tão claras.

6.3 Análise e Discussão dos Dados

Como relatamos, para avaliar as ferramentas do MS, as duplas precisaram explorar cada uma delas e, então, assinalar as opções: adequadamente, parcialmente e insatisfatoriamente, atestando ou não seu funcionamento e justificando essas duas últimas escolhas. No quadro a seguir, apresentaremos o formulário avaliativo do micromundo *Magnitude Studium*, intitulado de “Análise de Aspectos Técnicos”, com as respostas dadas pelas duplas e, logo após, as sugestões apontadas para o aprimoramento das funcionalidades dos menus e ferramentas desse *software*. Para evitar repetições, iremos explicitar as ferramentas em certa ordem e, em seguida, as propostas das duplas de forma simultânea.

Confrontaremos as ideias dadas pelos participantes, como as sugestões de aprimoramento dos menus e ferramentas do MS, com os requisitos que foram elencados e as análises a priori.

Quadro 10- Marcação pelas duplas

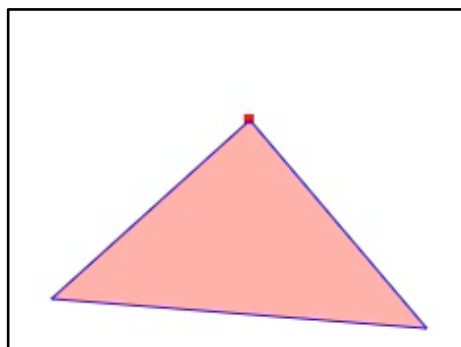
	Dupla 1			Dupla 2			Dupla 3		
FERRAMENTAS	(A)	(P)	(I)	(A)	(P)	(I)	(A)	(P)	(I)
 PONTEIRO		X		X			X		
 BORRACHA		X		X			X		
 LIXEIRA	X				X		X		
 TEXTO		X			X			X	
 BRUSH (PINCEL)		X		X			X		
 FILL (LATINHA DE TINTA)		X		X			X		
 PALETTE			X	X			X		
 LINSTYLE			X	X			X		
 MALHAS			X	X			X		
 IMÃ			X			X			X
 PONTO	X			X			X		
 PONTO MÉDIO	X			X			X		
 SEGMENTO DE RETA	X			X			X		
 LINHA POLIGONAL	X				X			X	
 TRIÂNGULO	X			X			X		
 QUADRILÁTERO	X			X			X		
 PARALELOGRAMO	X			X			X		
 QUADRADO	X			X			X		
 RETÂNGULO	X			X			X		
 POLÍGONO QUALQUER	X			X				X	
 POLÍGONO REGULAR		X			X			X	
 RETA	X			X			X		
 RETA PARALELA	X			X			X		
 RETA PERPENDICULAR	X			X			X		
 PERPENDICULAR BISSECTOR	X			X			X		
 BISSECTOR	X			X			X		
 CIRCUNFERÊNCIA	X			X			X		
 CIRCUNFERÊNCIA POR TRÊS PONTOS	X			X			X		
 ARCO	X			X			X		
 SEGMENTO CIRCULAR	X				X		X		
 POLIMINÓS	X				X		X		
 TANGRAM	X			X			X		
 TESOURA	X			X			X		
 DECOMPOSIÇÃO TIPO 1	X			X			X		
 DECOMPOSIÇÃO TIPO 2	X			X			X		
 RECOMPOSIÇÃO		X			X			X	
 TRIÂNGULO PARA PARALELOGRAMO	X			X			X		
PARALELOGRAMOPARA RETÂNGULO	X			X			X		
RETÂNGULO PARA RETÂNGULO	X			X			X		
SOMA DE QUADRADOS	X			X			X		
LEBESGUE			X			X		X	
MAGNITUDE		X		X			X		
CRISTALIZAR	X			X			X		

6.3.1 Análise das ferramentas (formulário 1 – análise das ferramentas)

6.3.1.1 Ponteiro

A dupla 1 iniciou a análise da ferramenta “ponteiro” realizando a construção de um triângulo qualquer, ilustrado na figura a seguir:

Figura 124- Extrato de protocolo da dupla 1 -teste da ferramenta ponteiro parte 1



Fonte: *print screen* do vídeo da dupla 1 em 19 de abril.

Após desenhar o triângulo, selecionou a ferramenta “ponteiro”; depois, com o botão esquerdo do mouse, clicou sobre ele tentando arrastá-lo. Entretanto, percebeu que, ao realizar tal procedimento, toda a tela de trabalho do *software* era movida juntamente com a figura. Ao executar tal ação, e não obter sucesso, o participante “A” faz a seguinte indagação:

Participante A: *E se a gente tentar arrastar pelo vértice? Eu vou tentar para ver o que acontece.*

Essa tomada de decisão permitiu que a dupla percebesse a deformação do triângulo quando se arrasta qualquer um de seus vértices. Como não conseguiu movê-lo, o participante “B” chamou o engenheiro pesquisador e perguntou se ele poderia tirar alguma dúvida em relação à funcionalidade das ferramentas, caso não conseguissem executá-las¹¹⁹. Como foi respondido que sim, “B” faz a seguinte colocação:

Participante B: *A gente percebeu que, se pegarmos um dos pontos do triângulo, ele modifica o triângulo, se pegarmos no, meio ele arrasta a construção, não estamos conseguindo perceber como movimentar as figuras na interface.*

O engenheiro pesquisador então expõe verbalmente como deveriam proceder:

Engenheiro pesquisador: *Para mover uma determinada figura sobre a tela do MS, basta apenas selecionar a ferramenta “ponteiro”, em seguida clicar com o botão esquerdo do*

¹¹⁹ O papel do engenheiro pesquisador era de observador participante. Consideramos pertinente ao experimento dar esse *feedback* às duplas, em virtude da inovação de algumas *interfaces* das ferramentas em detrimento de outros *software* de geometria dinâmica que eles já haviam utilizado.

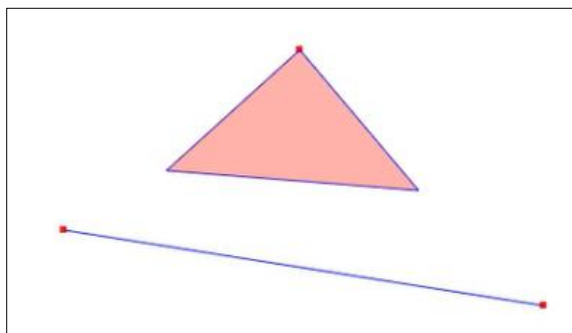
mouse em uma de suas lados e então arrastá-la. Esse procedimento pode ser realizado também em qualquer objeto construído na interface do software.

Outra dificuldade encontrada foi para descobrir como o “ponteiro” aplicava as transformações isométricas do plano, mais precisamente a rotação e a reflexão, uma vez que interpretamos a translação como o arrastar das figuras sobre a *interface do software*, explicado anteriormente pelo engenheiro pesquisador.

No formulário entregue às duplas, constava a descrição dessa ferramenta, ou seja, explicitamos suas funcionalidades (move um objeto criado na interface e desabilita funções das ferramentas ativadas, aplica as transformações isométricas do plano nas figuras [translação, rotação e reflexão]), após serem travadas por meio da ferramenta *freezing* (cristalizar).

Todavia, não fora detalhado como o usuário deveria proceder para realizar tais transformações. O objetivo era saber se de fato ficaria intuitivo aos participantes a realização desses procedimentos. Essa dupla então construiu as figuras abaixo para tentar descobrir como acontece a reflexão no MS:

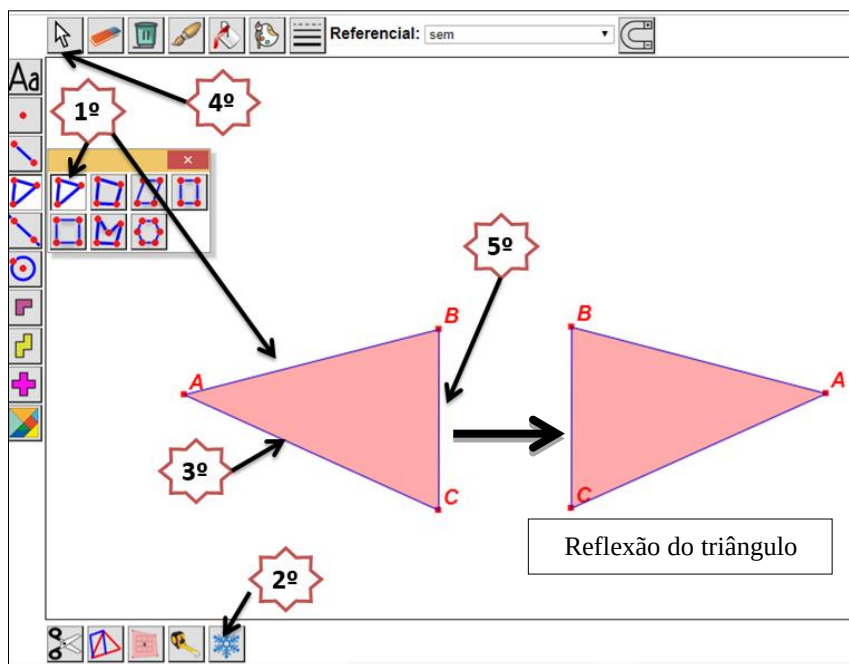
Figura 125-Extrato de protocolo da dupla 1 - teste da ferramenta ponteiro parte 2



Fonte: *print screen* do vídeo da dupla 1 em 19 de fevereiro.

A dupla realizou buscas em todos os ícones do *software* para verificar se encontrariam alguma ferramenta que permitisse realizar a reflexão no triângulo acima, dado o segmento de reta. Foi necessária, mais uma vez, a intervenção do engenheiro pesquisador, pois, para efetuar a rotação e reflexão nos objetos criados na *interface do software*, alguns passos precisam ser seguidos:

Figura 126- Reflexão no MS



Fonte: da pesquisa

Primeiro, deve-se escolher um polígono qualquer e construí-lo na interface do *software*. Depois, clicar na ferramenta *freezing* e, logo após, em uma dos lados da figura construída, em nosso caso, o triângulo. Em seguida, é preciso selecionar a ferramenta “ponteiro” e dar um clique duplo com o botão esquerdo do *mouse* em um dos lados da figura. Seguindo esses passos, acontecerá a reflexão. Na ilustração acima, decidimos realizar a reflexão do triângulo tomando o segmento BC. A figura, então, foi refletida em relação a esse segmento. Vale salientar que, o que aparece na tela depois de aplicada a reflexão, será apenas o resultado da mesma e não as duas figuras, como ilustrado na imagem anterior.

Para realizar a rotação, o usuário terá que proceder de maneira análoga aos passos para aplicar a reflexão, todavia bastará apenas escolher um dos vértices da figura e rotacionar com o botão esquerdo do *mouse*. A rotação acontece a partir do centro de gravidade das figuras.

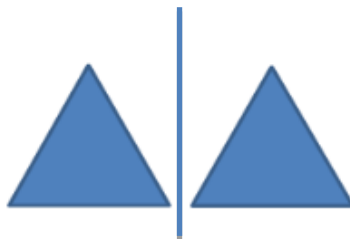
Ao desenharmos um polígono e, em seguida, arrastarmos um dos seus vértices com o botão esquerdo do *mouse*, podemos ampliá-lo ou reduzi-lo (no caso do quadrado, retângulo, paralelogramo e polígonos regulares). No caso dos quadriláteros e de outro polígono qualquer, quando arrastamos um de seus vértices, a figura deforma. A ferramenta *freezing* tem a função de travar ou destravar qualquer figura construída na *interface* do *software*, bloqueando ou desbloqueando as ações supracitadas.

Com relação ao funcionamento da ferramenta “ponteiro”, a dupla 1 assinalou, no formulário, a opção parcialmente. Segundo seus componentes, o arrastar das figuras ocorre

normalmente, e se a avaliação referisse apenas a essa ação, a escolha seria adequadamente. Contudo, para esta dupla a maneira que o *software* lida com a rotação e a reflexão não está intuitiva, exigindo do usuário um nível mais profundo de conhecimento do MS para realizar tais procedimentos. Na justificativa quanto à escolha da opção parcialmente para a ferramenta “ponteiro”, a dupla faz o seguinte comentário:

Figura 127- Extrato de protocolo da dupla 1

Ponteiro: *ele não aplica as transformações isométricas em si, pois depende da ferramenta Cristalizar para conseguir executar a transformação desejada. Como sugestão, que seja criado um ícone para as transformações, que o aluno perceba que o ícone serve para essa função e que a transformação se mantenha na tela como no exemplo.*



Nos requisitos apresentados no capítulo 4, solicitamos a inserção de três ferramentas no MS que permitissem, separadamente, as transformações isométricas do plano nas figuras (translação [mover a figura sobre a *interface*], rotação e reflexão) de forma mais intuitiva. Todavia, o engenheiro programador, juntamente com o engenheiro pesquisador, chegaram à conclusão que o próprio cursor poderia oferecer tais condições ao usuário. Assim, não sobrecarregaria o *software* com muitos ícones, evitando uma poluição visual da *interface*. Para que essa ação pudesse ser realizada, como já explicitamos, bastaria que o usuário escolhesse a ferramenta *freezing* e desse um clique em um dos lados da figura construída, selecionasse a opção ponteiro e executasse a ação desejada (reflexão ou rotação).

Assim como a anterior, a dupla 3 não conseguiu mover as figuras sobre a tela do *software* por meio da ferramenta ponteiro, nem tampouco realizar a rotação e reflexão nas figuras. O participante “E”, em um dos encontros presenciais, indagou ao engenheiro pesquisador o seguinte:

Participante E: *Olha, não consegui mover as figuras com o ponteiro, eu desenhei a figura depois cliquei na ferramenta ponteiro e com o botão esquerdo do mouse, cliquei dentro da figura e tentei arrastá-la, mas nada, como faz ou a ferramenta não está funcionando corretamente?*

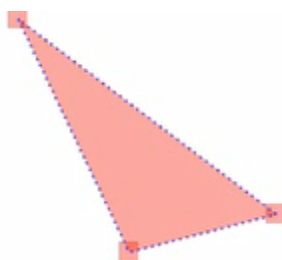
Esse participante, assim como os demais, certamente estava utilizando a maneira mais comum nos *software* de Geometria Dinâmica para mover um objeto, que é clicar na ferramenta “ponteiro” e, em seguida, com o botão esquerdo do *mouse*, mover as figuras, arrastando-as pelo seu interior. No MS, como exposto, para arrastar as figuras sobre a *interface*, o usuário terá que se valer dos procedimentos supracitados, mas deverá clicar em um de seus lados, para então movê-las. Se ele clicar no interior da figura, deslocará toda a tela de trabalho do *software* e as construções que estiverem sido realizadas, de uma única vez.

A dupla 2 não demonstrou dificuldades para descobrir o arrastar das figuras sobre a tela: tentaram primeiro movê-las pelo meio e, não conseguindo, realizaram o mesmo procedimento pelos lados com a ferramenta ponteiro selecionada. No que diz respeito à rotação e à reflexão, a dificuldade foi a mesma das demais duplas, entretanto, os componentes sugeriram uma ferramenta que permitisse a rotação em ângulos exatos. Quanto à reflexão, eles acharam interessante a maneira permitida pelo MS para realizar tal transformação, o que o participante “D” classificou como algo inovador. Outra funcionalidade do “ponteiro” é desabilitar uma função que estiver sendo executada no *software* por qualquer ferramenta. No que se refere a essa questão, as três duplas avaliaram positivamente a ação da ferramenta.

6.3.1.2 Borracha

Na descrição dessa ferramenta no formulário, colocamos que ela permite esconder o objeto e o faz reaparecer na tela. A dupla 1, após construir um triângulo qualquer, selecionou a ferramenta borracha e começou a apagar os vértices da figura e as lados. Contudo, percebeu que ao invés de desaparecerem completamente da tela do *software*, eles ficam com uma tonalidade bem clara, como se estivessem sido apagados de um caderno em branco por uma borracha, sendo que ainda permanecem na tela. Como ilustramos na imagem abaixo:

Figura 128- Extrato do protocolo da dupla 1- vértices e lados escondidos do triângulo



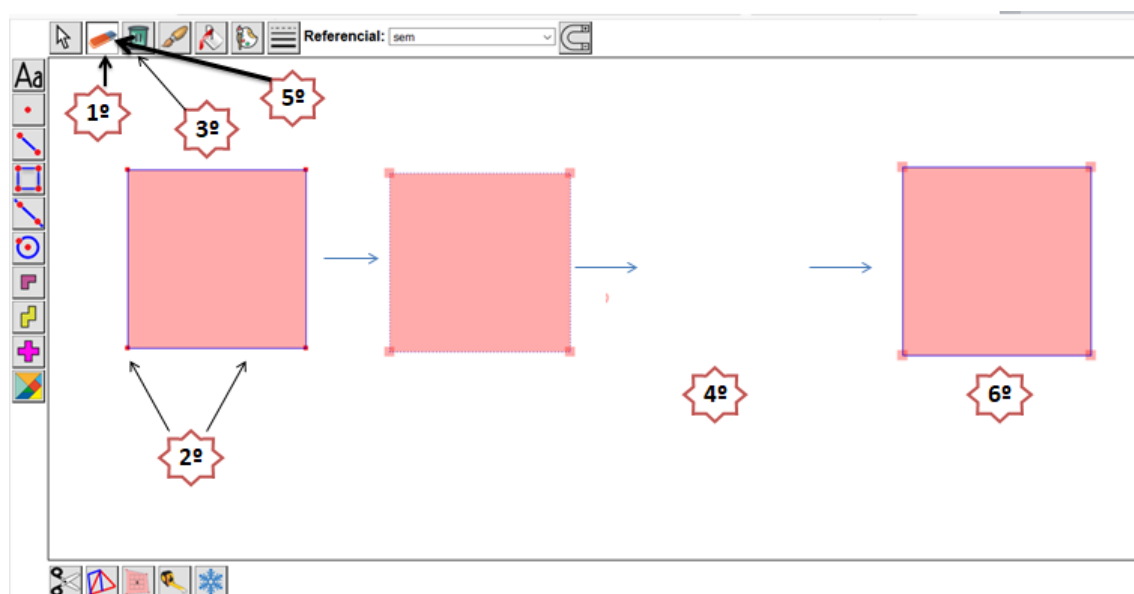
Fonte: *print screen* do vídeo da dupla 1 em 19 de fevereiro.

Ao final da análise, a dupla 1 assinalou a opção “parcialmente” quanto ao funcionamento da borracha. Sugere uma substituição do ícone por outro que expresse a ideia de esconder um objeto construído, pois, segundo ela, havia pensado inicialmente que a ferramenta servia para apagar o objeto por completo. Assim como essa dupla, as demais tiveram dificuldades de compreender a função do ícone em virtude da borracha remeter a algo que indica apagar por completo um determinado objeto, como expressa o **participante “E”** da dupla 3: *não entendi bem a função do ícone da borracha (pensei que fosse para apagar, depois percebi que é para ocultar). Sugestão de mudar a imagem desse ícone.*

A dupla 2 chamou o engenheiro pesquisador para explicar como funcionava a ferramenta, pois não estava entendendo o sentido de ocultar objetos se eles não haviam desaparecido por completo da tela. Então a seguinte explicação é dada:

Após construírem uma determinada figura, devem selecionar a ferramenta borracha e seguidamente escolher qual ente geométrico deseja esconder (vértices ou lados), clicando sobre eles. Os lados são selecionados de uma única vez, os vértices individualmente. Ao finalizarem essa ação, precisam pressionar a “lixeira”, dessa forma os objetos serão ocultados. Para que eles reapareçam na tela, deve-se premir a borracha e clicar nos objetos (vértices e lados) para que sejam novamente realçados como ilustramos a seguir:

Figura 129- Ocultando objetos



Fonte: da pesquisa

Mesmo que as duplas 2 e 3 tenham apresentado dificuldades em perceber a funcionalidade da borracha, assinalam no formulário a opção adequadamente, pois, segundo elas, a ferramenta estava executando corretamente a ação.

6.3.1.3 Lixeira

As duplas não apresentaram dificuldades no uso dessa ferramenta, criaram diferentes objetos (pontos, reta, segmento de reta, linha poligonal, polígonos regulares, entre outras) e em seguida foram apagando e verificando que essa ação funcionava em qualquer objeto construído na tela do *software*. As duplas 1 e 3 atestaram o funcionamento da lixeira como adequadamente, enquanto que os participantes da dupla 2 assinalaram parcialmente, realizando os seguintes comentários:

Participantes C: *a lixeira apaga a figura, mas deixa os vértices e torna-se trabalho ter que ficar apagando vértice por vértice.*

Participante D: *Pela minha experiência ela funcionou. Há algo que pode ser pouco prático, que é o fato de ter que apagar individualmente vários vértices ao "querer" apagar todo o polígono, mas funciona. Isso é facilitado se o usuário acertar o vértice que "gera" a figura, pois sempre há um ou dois vértices que, ao ser apagado, apaga os demais.*

Ao final, apontam como sugestão adicionar opção de deletar tudo de uma vez, ou seja, uma maneira de selecionar todo o objeto construído e poder apagar com apenas uma ferramenta, evitando que o usuário tenha tanto trabalho. Para a ação de apagar objetos o usuário pode ainda – funcionalidade não percebida pelas duplas – utilizar o teclado: ele deve selecionar a figura e clicar em delete. A maneira de apagar é análoga à da lixeira, que segue a mesma ideia dos *software* de Geometria Dinâmica Geogebra e Cabri Géomètre.

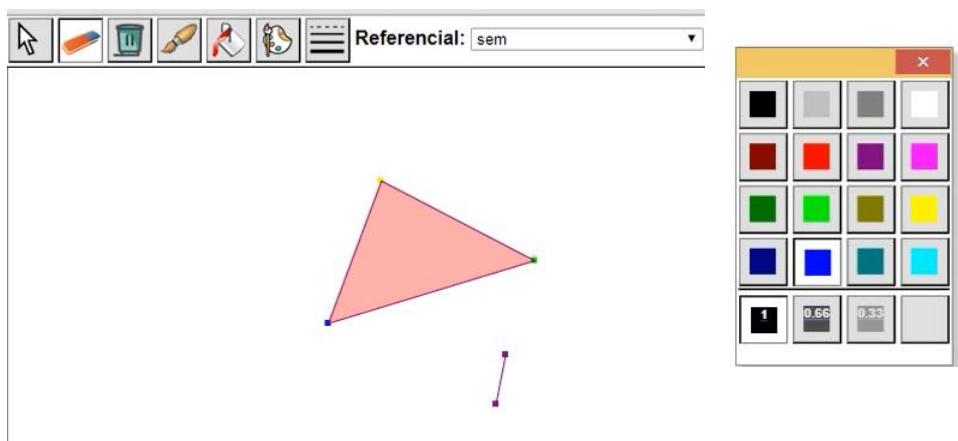
6.3.1.4 Brush (Pincel)

Essa ferramenta permite colorir os vértices e o contorno das figuras geométricas, as malhas e o eixo do “referencial”. O usuário ainda pode escolher a cor previamente dos objetos, como por exemplo, do ponto, das retas, dos arcos etc., que forem construídos na *interface* do *software*. Ao ser selecionado, o “brush” oferece, no canto superior direito da tela do MS, uma caixa de cores e seus níveis de intensidade. Para pintar o contorno dos objetos, o usuário terá que construí-los previamente, em seguida selecionar a cor desejada e clicar no vértice ou em um dos lados da figura. Os objetos que forem criados seguidamente, tendo sido ativada tal ferramenta, terão a mesma cor do último que fora pintado, ou o usuário poderá escolher outra que preferir.

Para as duplas 2 e 3, essa ferramenta funciona adequadamente. Entretanto, o participante E da dupla 2 faz a seguinte ressalva, após colorir os vértices e os lados do triângulo:

Participante D: *Posso colorir vértices individualmente, mas os lados de um polígono não. Quando tento colorir um, todos colorem ao mesmo tempo.*

Figura 130- Extrato de protocolo da dupla 2



Fonte: *print screen* do vídeo da dupla 2 em 26 de fevereiro

Como sugestão, essa dupla propõe a possibilidade do usuário colorir os lados separadamente para destacar alguns dos lados do triângulo. A dupla 1 achou pouco intuitiva a ferramenta, apontando a necessidade de separar as cores dos seus níveis de intensidade e, para seus participantes, o “brush” funciona apenas parcialmente.

6.3.1.5 Fill (latinha de tinta)

Essa ferramenta possui a função de preencher as figuras com diferentes cores e níveis de intensidade. Quando temos uma figura na tela do *software*, para pintá-la precisamos escolher uma determinada cor, em seguida o nível de intensidade desejado e, após clicar em sua borda, para que seu interior fique completamente pintado. O participante D da dupla 2 apresenta algumas dificuldades em relação a essa ferramenta, realizando, após várias tentativas, o seguinte comentário, o qual extraímos da gravação desse participante do momento individual de análise da ferramenta:

Participante D: *Não estou conseguindo colorir. Quando tento colorir uma figura com qualquer cor, ela fica internamente branca. Não sei se é bug momentâneo do programa, se é um problema mesmo ou se eu não estou sabendo fazer a tarefa (o que pode ser um problema, pois não estaria tão intuitivo).*

Ao analisarmos a gravação deste participante, notamos que, quando a ferramenta *Fill* é ativada, automaticamente a cor branca e o nível de intensidade branco ficam ativados. Assim, embora “D” tenha escolhido outra cor, ele não notou, na grade de cores, que era preciso também escolher o nível mais escuro de intensidade. O participante “C” deixou no comentário do formulário do *Google Drive* como “D” deveria proceder para colorir as figuras. Em comum acordo, eles assinalaram como “adequadamente” o funcionamento da ferramenta *Fill*.

A dupla 3, percebendo essa mesma situação, sugeriu que, ao ser acionada, a ferramenta *Fill* não apresentasse nenhuma seleção de cores prévias, pois poderia confundir o usuário. A dupla 1 tentou várias vezes colorir, até perceber que, após a escolha da cor, precisaria com o botão esquerdo do *mouse* clicar nas laterais e não no interior das figuras. Ao final, decidiu que a ferramenta funcionava apenas parcialmente, solicitando que a ação de colorir fosse diretamente com um clique no interior da figura como acontece no *software* Geogebra.

6.3.1.6 *Pallet (Paleta de cores)*

As duplas verificaram o funcionamento dessa ferramenta com passos análogos aos realizados nas análises anteriores. Construíram diferentes objetos na tela do MS para então colori-los. Escolhiam a cor, clicavam posteriormente nos objetos, por vezes em seu interior, no caso dos polígonos, ou até mesmo em seus lados e vértices. Como nada acontecia, assinalaram a opção “insatisfatoriamente”. Em um dos encontros presenciais, pediram explicação sobre qual era o papel da *Pallet* no *software*, em virtude de não terem conseguido realizar nenhuma ação nas figuras por meio dessa ferramenta.

O engenheiro programador então explicou que a função dela é permitir ao usuário escolher previamente a cor das bordas da figura. Assim, deve-se selecionar primeiro a *Pallet*, clicar na cor desejada, para então construir os objetos na tela do *software*, pois automaticamente o MS permitirá que as bordas das figuras sejam desenhadas com a cor predefinida.

As duplas 2 e 3 decidiram então modificar a opção assinalada, atestando adequadamente quanto ao funcionamento da *Pallet*. Todavia, a dupla 1 continuou com sua decisão, pois achou desnecessária essa ferramenta, uma vez que a *Fill* já estava executando tal ação.

6.3.1.7 *Linestyle* (Estilos de Linhas)

Essa é a última ferramenta do *kit* de estilos dos objetos, localizada na barra superior do *software*, antes do “referencial” (malhas) da esquerda para direita. Sua função é oferecer diferentes traçados e espessuras previamente para as bordas dos objetos geométricos a serem construídos na tela do *software*. Sobre a *Linestyle*, o participante “C” da dupla 2 destaca que levou um tempo para entender sua função, em virtude de não ser possível aplicar os tipos de espessuras nas bordas das figuras construídas antes dessa ferramenta ser acionada, ou seja, não há como editar as figuras para receberem os diferentes estilos oferecidos nesta opção. As duplas 2 e 3, após realizarem vários testes, optaram por escolher adequadamente quanto ao funcionamento da ferramenta *Linestyle*.

De acordo com a dupla 1, as ferramentas *Brush*, *Fill*, *Palette* e *Linestyle* precisam ser revistas de forma que suas funções sejam mais claras e independentes. Seus participantes chegaram a essa conclusão ao perceberem que a combinação do *Brush* com a *Linestyle* permite ao usuário colorir e determinar o tipo de estilo da borda de uma figura já construída previamente, ou seja, antes da ativação de tais ferramentas. Ainda complementam que essa mesma ação pode ser utilizada para colorir os vértices das figuras, destacando-os. Por esse motivo, assinalaram parcialmente no formulário de análise das ferramentas, sugerindo o aprimoramento de cada uma delas.

6.3.1.8 *Referencial* (malhas)¹²⁰

De acordo com as três duplas, o “Referencial” (eixo, eixo e malha pontilhada quadrada, malhas [quadriculadas, isométrica e hexagonal], pontilhado [quadrado, isométrico e hexagonal]) está funcionando adequadamente. O eixo e as malhas, ao serem selecionados, surgem na tela do MS e podem ser retirados por meio da opção “sem”. Contudo, quando se constrói uma figura com seus vértices coincidindo com os pontos de qualquer malha, essa, por sua vez, permanece grudada, não tendo como arrastá-la por meio do “ponteiro”, nem tampouco aplicar rotação sem deformá-la. A reflexão ainda é possível, e para isso o usuário terá que travar a figura utilizando a ferramenta *freenzing* e continuar os passos para realização dessa transformação isométrica. Essas situações foram identificadas por todas as duplas.

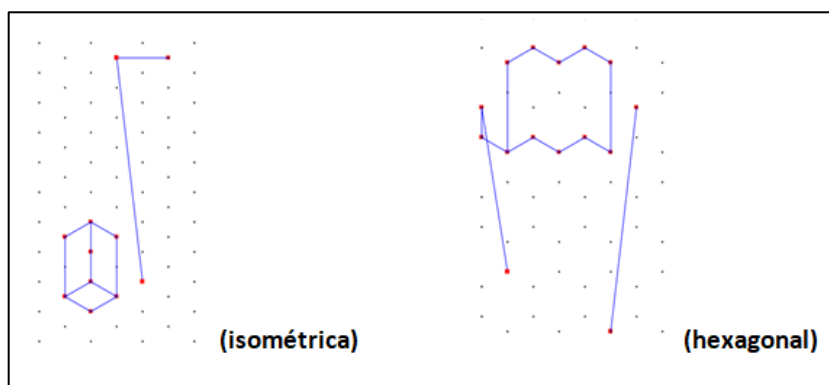
¹²⁰ As observações mais pontuais sobre o funcionamento das malhas (referencial) são trazidas nas respostas aos questionários.

A dupla 1 destaca que a translação, a rotação e a reflexão podem ser realizadas no resultado da decomposição de qualquer figura, mesmo que essa tenha sido travada pela malha. Por fim, as duplas solicitam a criação de uma ferramenta que seja capaz de desgrudar qualquer objeto que tenha sido construído com seus vértices coincidindo com os pontos da malha, tornando viável ao usuário a aplicação das transformações isométricas do plano.

A dupla 2 alvitra a necessidade de estabelecer as escalas das malhas, como acontece no Geogebra, e uma opção de ampliar e reduzi-las por meio do (+) e (-) do teclado, ou mesmo inserir dois ícones na barra superior do *software* com essa função, ao lado do “Referencial”. Destaca ainda que nas malhas pontilhadas hexagonal e isométrica, há um *bug* quanto a construções de figuras. Sobre essa observação, essa dupla traz a seguinte argumentação: *Caso um dos vértices esteja sob a lado de outra figura, não é possível obter um segmento, outro ponto aleatório é criado na malha, para que seja obtido o segmento.*

Após a explicação anterior, a participante “C” apresenta a imagem abaixo como forma de ilustrar o *bug* encontrado:

Figura 131- Bug nas malhas pontilhadas isométrica e hexagonal



Fonte: *print screen* do vídeo da dupla 2 em 20 de abril.

A ferramenta “imã”, no momento do experimento, não estava funcionando e isso foi identificado pelas duplas na análise do “Referencial”. A dupla 3 sugeriu como função para o “imã” que, quando selecionado, as figuras ao serem criadas nas malhas tivessem seus vértices coincidindo com os pontos das mesmas. Entretanto, se a opção não for escolhida, o usuário poderá desenhar, livremente, diferentes polígonos em qualquer lugar da malha, sem necessariamente coincidir seus vértices. As sugestões apontadas pelas duplas concernentes ao “Referencial” foram previstas no capítulo 4, que diz respeito aos requisitos para o *software*. Em virtude do tempo para o desenvolvimento e testagem do MS, não foi possível atender a toda elicitación.

6.3.1.9 Caixa de texto

A função da caixa de texto é permitir ao usuário inserir um determinado enunciado ou dica nas tarefas que forem realizadas no MS. As duplas não apresentaram dificuldades para descobrir como essa ferramenta funcionava. Selecionaram o ícone correspondente, em seguida clicaram na tela e começaram a escrever diferentes palavras. Perceberam que a caixa de texto pode ser ampliada ou reduzida e, dependendo da quantidade de palavras escritas, é criada automaticamente uma barra de rolagem do lado direito da referida caixa. Todavia, não é possível editar o texto após concluí-lo, ou seja, o usuário terá que deletar toda a caixa e escrever tudo novamente, caso tenha errado algum enunciado. Esse fator levou as duplas a assinalarem a opção “parcialmente” com relação ao funcionamento dessa ferramenta.

Como sugestão, a dupla 3 solicita que a caixa de texto ofereça condições ao usuário de tipos de fontes e tamanhos, aplicar negrito, itálico ou sublinhado, além de alinhamento e espaçamento de textos. As demais duplas apenas colocam a necessidade de poder reeditar o texto.

6.3.1.10 Ponto e ponto médio

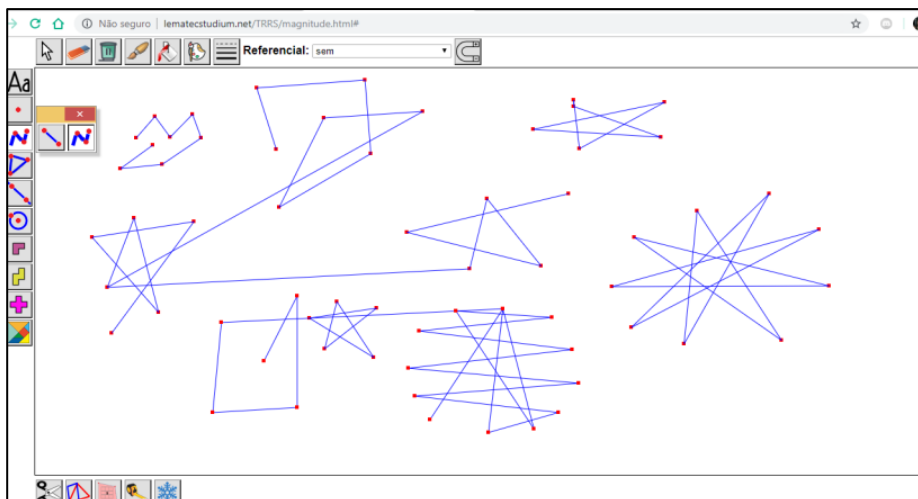
As duplas criaram diferentes pontos livres ou sobre objetos, como também pontos médios nos segmentos de reta e nos lados de alguns polígonos. Verificaram visualmente que de fato, o ponto médio estava dividindo um segmento no meio, obtendo, assim, dois outros de mesmo comprimento. A partir dessa observação, todas as duplas atestaram adequadamente o funcionamento desses entes geométricos. A dupla 3 constatou a falta do ponto de intersecção entre objetos e aponta como sugestão a inserção dele em uma próxima versão, alegando sua necessidade para a realização de algumas construções geométricas.

6.3.1.11 Segmento e linha poligonal

De acordo com as três duplas, é possível criar vários segmentos de retas com diferentes comprimentos. Após essa averiguação, marcaram no formulário a opção “adequadamente”, afirmando o bom funcionamento da ferramenta. Quanto à linha poligonal, as duplas, no primeiro momento, assinalaram a opção “parcialmente”. Segundo o participante “C”, essa ferramenta estava apresentando certa quantidade de *bugs* e não deixa clara a necessidade de dar dois cliques no último ponto para concluir a construção. Ressalta ainda que, ao finalizar certa linha, algumas vezes ela se une a outras já criadas, embora não tenha

sido selecionado nenhum vértice da mesma. Como exemplo, apresenta a imagem a seguir:

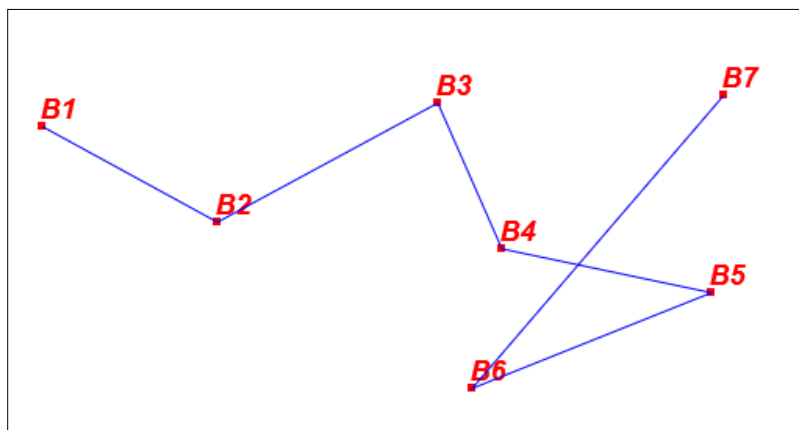
Figura 132- Análise da linha poligonal



Fonte: *print screen* do vídeo da dupla 2 em 20 de abril.

A dupla 3 também encontrou vários erros de sistema (*bugs*) durante a criação das linhas poligonais, dentre eles a impossibilidade de desenhar uma linha poligonal não simples como na imagem a seguir:

Figura 133- Linha poligonal não simples

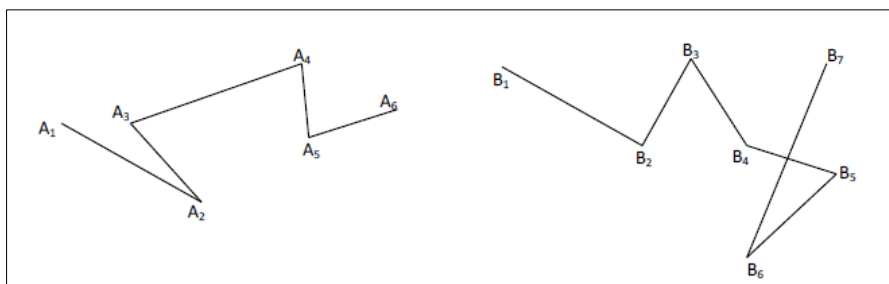


Fonte: da dupla 3 adaptado de Lima e Carvalho (2010)¹²¹

Para justificar o que fora colocado pela dupla 3, sobre o que vem a ser uma linha poligonal não simples, apoiamo-nos nos estudos de Lima e Carvalho (2010). Segundo esses autores, uma linha poligonal (ou linha quebrada) é “uma sequência especial de segmentos de reta, A1A2, A2A3, A3A4, A5A6 ou B1B2, B2B3, B3B4, B5B6, B6B7, como mostrado nos exemplos a seguir” (LIMA; CARVALHO, 2010, p. 156):

¹²¹ Esse modelo foi nos apresentado pelo participante F da dupla 3, diretamente no livro Explorando o Ensino da Matemática Volume 17. Disponível em http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=7842-2011-matematica-capa-pdf&category_slug=abril-2011-pdf&Itemid=30192. Acesso em 23 de abril de 2019.

Figura 134- Linha poligonal simples e não simples



Fonte: (LIMA; CARVALHO, 2010, p. 156)

Para Lima e Carvalho (2010, p. 156):

Esses exemplos são típicos de linhas poligonais: cada um dos segmentos e o seu sucessor na sequência têm em comum uma de suas extremidades e não são partes de uma mesma reta. No entanto, as duas poligonais acima distinguem-se em um aspecto. Na imagem à esquerda, cada segmento encontra (em suas extremidades) apenas seu antecessor ou seu sucessor imediatos na sequência de segmentos e, por isso, é chamada uma linha poligonal **simples**. Na imagem à direita, o segmento B4B5 encontra não apenas seu antecessor ou seu sucessor imediatos, mas também o segmento B6B7. Neste caso, dizemos que a poligonal é **não simples**. Os sucessivos segmentos da poligonal são os seus **lados** e os pontos de encontro dos segmentos são seus **vértices**.

O participante “D” conseguiu usar a ferramenta e construiu com ela um polígono, entretanto, segundo ele, essa ação não deveria ser possível. Sobre essa questão, corroboramos com Lima e Carvalho (2010, p. 156) que “um polígono é uma linha poligonal simples e fechada, ou seja, uma linha poligonal simples em que o primeiro segmento da sequência tem uma extremidade em comum com o último segmento dessa sequência”. Diante desse contexto, interpretamos como pertinente a ação permitida pela ferramenta.

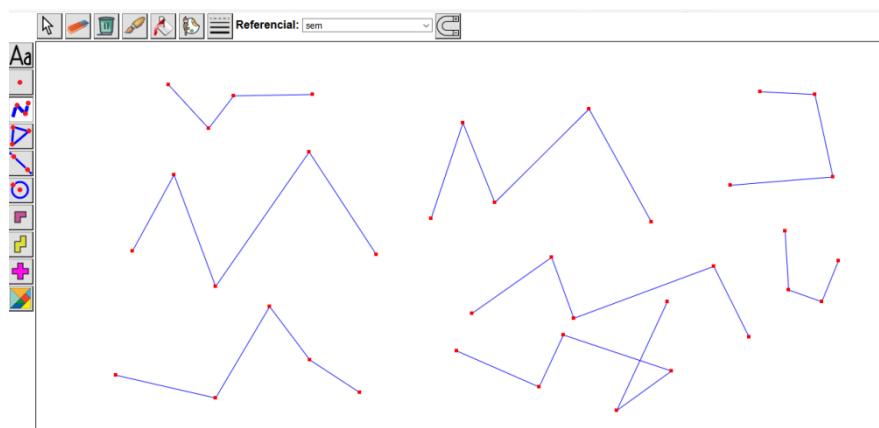
Esse mesmo participante ainda expõe o seguinte problema encontrado ao utilizar a *polyline*: *A ferramenta apresenta bug associado à forma da disposição dos vértices da linha poligonal. Outro bug: quando clico duas vezes no final da construção, às vezes a linha poligonal criada não é exatamente a esperada, mas às vezes dá certo. Talvez tenha a ver com o bug apresentado.*

Como explicitamos no início deste capítulo, o engenheiro programador participou de alguns encontros do experimento. Ao explicarmos o que estava acontecendo em relação às linhas poligonais, ele verificou e corrigiu o erro do sistema. Assim, as duplas analisaram novamente, resolvendo por fim marcar a opção “adequadamente”.

Para chegarem a essa conclusão, desenharam várias linhas poligonais (simples e não simples), trilhando os passos a seguir: escolheram a ferramenta *polyline* e, com o botão

esquerdo do *mouse*, como se estivessem construindo segmentos de reta, desenharam as linhas na tela, finalizando cada uma delas com um clique duplo.

Figura 135- Construção realizada pela dupla 3



Fonte: *print screen* do vídeo da dupla 3.

Ainda assim, a participante “C” acha que não estão muito claros os cliques duplos para finalizar a construção das linhas, e sugere então que sejam feitas alterações para tornar essa ferramenta mais intuitiva, ou mesmo que seja disponibilizado um manual ao usuário.

6.3.1.12 Polígonos

Quanto às ferramentas embutidas no menu polígonos (triângulo, quadrilátero, paralelogramo, retângulo, quadrado e polígono qualquer), as três duplas julgaram seus funcionamentos como “adequadamente”, após realizarem diferentes construções. A dupla 3 destacou como interessante a maneira do MS lidar com os polígonos supracitados, deixando-os predefinidos. Expõe ainda que esse fator torna mais econômico o trabalho do professor e de muitos alunos, não necessitando ter um conhecimento profundo da Geometria Dinâmica com régua e compasso virtuais para desenharem as figuras geométricas mais comuns no contexto da matemática escolar.

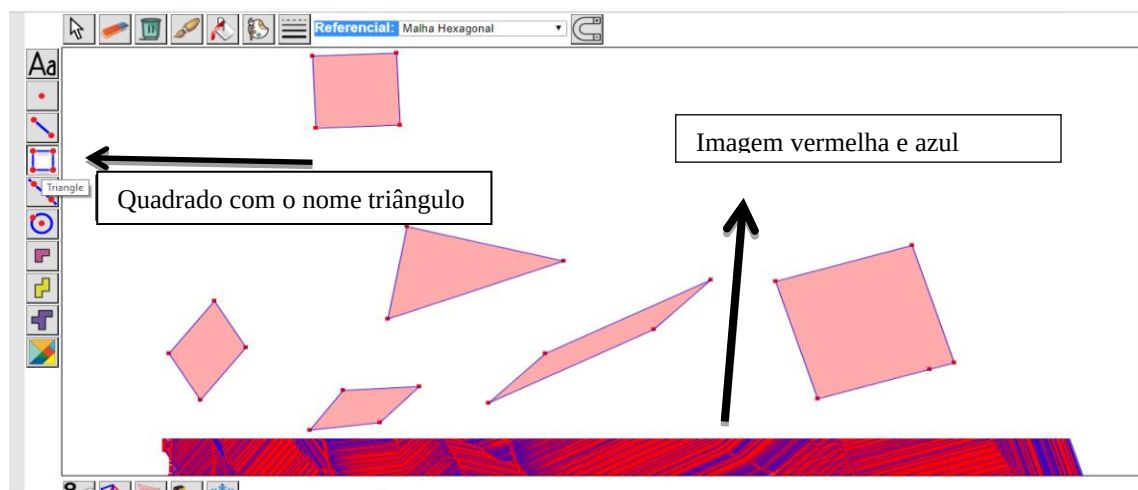
Com relação ao ícone triângulo, que embute os demais polígonos, a dupla 1 faz a seguinte observação:

Dupla 1: *anteriormente o ícone era um triângulo e, dentro dele estavam associados quadrilátero, paralelogramo, quadrado, retângulo, polígono qualquer e polígono regular. Hoje (07/04/19) nós voltamos a acessar esse ícone e a imagem era de um quadrado, embora o nome associado esteja triângulo, como pode ser observado abaixo, e em inglês. Posteriormente observamos que o ícone deixa à mostra o último polígono utilizado, o que reforça a necessidade de rever a nomeação deste ícone. Sugestão: rever o ícone e sua*

nomeação, que poderia ser *Polígonos*, já que podem aparecer diferentes tipos e não apenas o triângulo.

Ainda segundo essa dupla, ao testarem os polígonos embutidos nesse ícone e arrastarem a tela do *software* para poderem desenhar outras figuras, apareceu uma imagem em vermelho e azul, como se fosse o deslocamento dos polígonos que estavam desenhados.

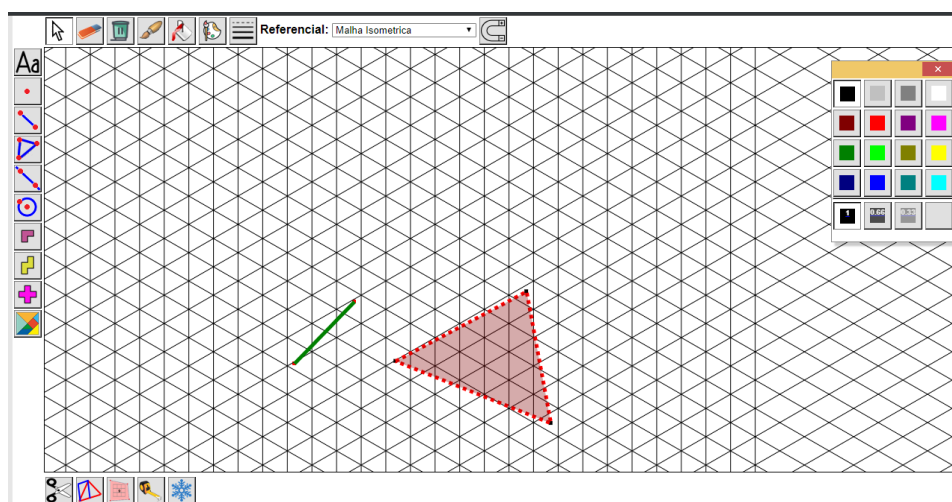
Figura 136- Bug na tela do software



Fonte: extrato do protocolo da dupla 1 retirado do formulário de análise das ferramentas

Por fim, a dupla 1 conclui suas análises construindo e colorindo as bordas de um triângulo qualquer na malha isométrica. Essa testagem permitiu identificar um *bug* nessa malha, como apresentamos na figura abaixo:

Figura 137- Bug na malha isométrica ao desenhar um triângulo



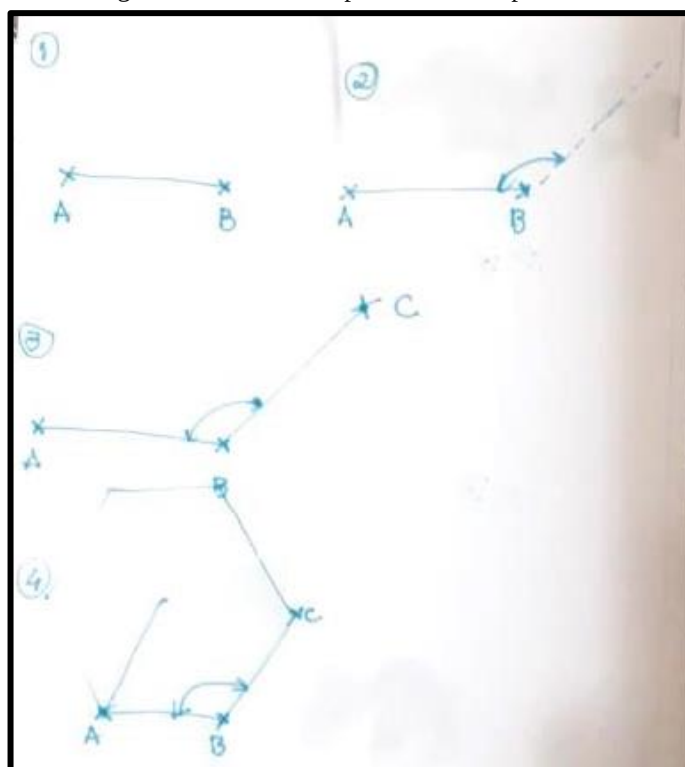
Fonte: extrato do protocolo da dupla 1 retirado do formulário de análise das ferramentas

Os participantes dessa dupla acharam por bem apresentar o *bug* acima nas análises do triângulo, ao invés do “Referencial”, por interpretarem que talvez a construção do triângulo é que esteja causando o *bug* e não as malhas e, sendo assim, não seria um problema exclusivo da malha isométrica.

Do menu explorado nesta subseção, apenas a ferramenta “polígonos regulares” foi assinalada como funcionando parcialmente. Para as duplas, as construções desses polígonos não estão claras, são pouco intuitivas e demandam um nível maior de conhecimento de ângulos para poder criá-los.

Como aprimoramento para a ferramenta “polígono regular”, a dupla 1 nos apresenta a seguinte sugestão: *Ao marcar o segundo ponto, o segmento que representa o lado do polígono poderia surgir e, do segundo ponto, apareceria um segmento tracejado e com a indicação do ângulo, permitindo que o aluno mova até escolher o ângulo desejado, semelhante a como é feito no AutoCAD.* Para ilustrar essa explicação, a participante B desenha os passos abaixo no formulário impresso:

Figura 138- Extrato de protocolo da dupla 1



Fonte: extraído do formulário da dupla 1

Assim como essa dupla, os participantes da 3 solicitam a inserção de um parâmetro de ângulo nessa ferramenta para torná-la mais acessível ao usuário. A dupla 2 relata que a construção de um determinado polígono regular de muitos lados acaba sendo “aleatória”, ou

seja, há dificuldades na criação de polígonos com mais de 9 lados, pois tem-se que deduzir o ângulo interno de forma manual. O participante B dessa dupla finaliza a observação afirmando o quão complicado é construir um polígono com uma quantidade específica de lados, sendo necessário ter uma intuição muito grande da medida de seus ângulos internos.

6.3.1.13 Reta (paralela, perpendicular, perpendicular bissetor e bissetor)

Para todas as duplas, essas ferramentas estão funcionando adequadamente. Há apenas uma solicitação do participante “E” para que o “segmento de reta” seja incluído no menu referente às retas. Segundo ele, não está claro o porquê dessa ferramenta pertencer a outro grupo no software.

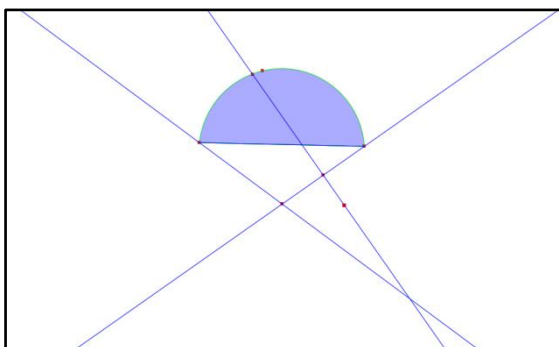
6.3.1.14 Circunferência, circunferência por três pontos, arco e segmento circular

Das ferramentas acima, apenas o “segmento circular” é assinalada como “parcialmente” pela dupla 2. As demais apresentam funcionamento “adequadamente” para todas as duplas.

Observação realizada pela dupla 2: *A ferramenta “segmento circular” funciona, entretanto, algumas vezes não é possível passar segmentos de retas em pontos que pertençam a ela. Apenas construir as retas fora dela e depois criar o ponto em cima. Enquanto que, em outros momentos, é possível fazer uma construção em cima do segmento circular.*

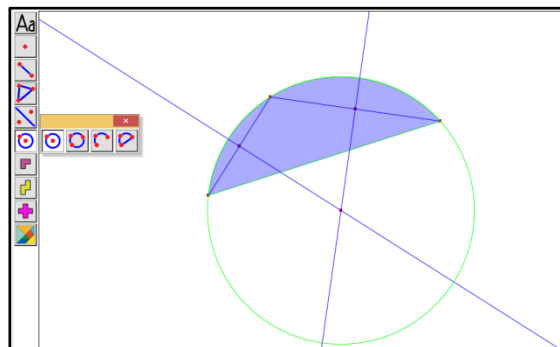
Para ilustrar essa colocação, a dupla nos apresenta os exemplos abaixo:

Figura 139- Extrato de protocolo da dupla 2- análise do segmento circular (parte 1)



Fonte: extraído do formulário da dupla 2 (parte 1)

Figura 140- Extrato de protocolo da dupla 2- análise do segmento circular (parte 2)



Fonte: extraído do formulário da dupla 2 (parte 2)

Segundo a dupla 2, na imagem da esquerda, não foi possível criar segmentos passando pelos pontos pertencentes ao “segmento circular”, apenas na da direita. O participante “B”

coloca ainda que gostou muito da ferramenta “arc”, principalmente por permitir a variação da figura por meio do ponteiro, movendo pontos que geram o arco.

6.3.1.15 Ladrilhos (Poliminós e Tangram)

De acordo com a Dupla 1, os poliminós estão funcionando normalmente, podendo ser arrastados pelos lados e rotacionados pelos vértices. O participante “D” apresentou a seguinte justificativa, após a avaliação realizada em todas as famílias dos poliminós (monominó, dominós, triminós, tetraminós e pentaminós): *Conseguir usar bem. Uma limitação, talvez, seja o tamanho dos poliminós, que parece ser invariável. O ponto de rotação dos poliminós é sempre o central. Talvez fosse interessante permitir a rotação em torno de outro ponto.*

Sobre o “tamanho” dos poliminós (possibilidade de ampliá-los e reduzi-los), o engenheiro pesquisador explicou às duplas como deveriam proceder para executar essas ações, por não estarem intuitivas no *software*, uma vez que, para o usuário poder proceder com a ampliação e redução das peças, precisa realizar uma combinação de duas ferramentas (segmento de reta e peças dos poliminós), como descrevemos no capítulo 5, referente à primeira versão do protótipo.

O participante “C” acrescenta às observações realizadas pelo seu colega as seguintes considerações: *Não sei se tem, mas não consegui rotacionar as peças em ângulos exatos, logo, a organização das peças passou a ficar desorganizada (uma peça acima da outra), acho que, dependendo do objetivo com essas peças, poderia ter uma ferramenta que auxiliasse nessa rotação e no magnetismo das peças quando colocadas sob a malha poligonal quadrada.*

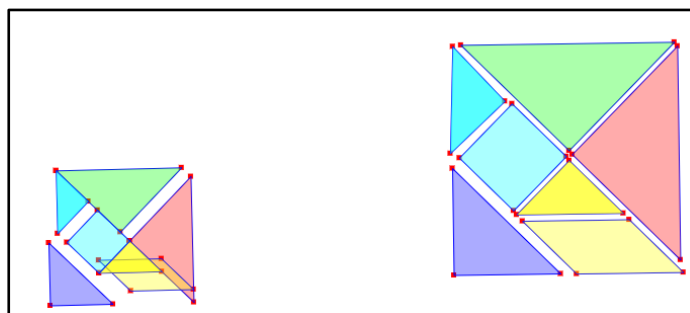
Esse participante se refere ao encaixe das peças dos poliminós uma nas outras, quando estão sendo utilizados sobre a malha quadrada, ou seja, as peças desse jogo não estão apresentando magnetismo e, por vezes, a justaposição dos lados só está acontecendo manualmente, dificultando seu uso na construção de diferentes figuras. Ele prossegue suas análises, ao final trazendo uma reflexão sobre os aspectos ergonômicos dessas ferramentas: *Em termos de uso: no que diz respeito ao aspecto ergonômico dos poliminós, acredito que seja necessária a alteração das cores dos ícones, pois quando as cores estão trocadas, falo das cores “padrões”, mesmo que possam ser alteradas, esta troca de cores confunde o usuário. Se o objetivo é que a cor do ícone não tenha relação com a peça na tela, sugiro o uso de outras cores que não estejam sendo utilizadas nos outros ícones.*

A dupla 2, mesmo realizando tais observações, expressa que os poliminós apresentam condições para auxiliar na aprendizagem com área e perímetro e, por fim, como as demais, assinalou a opção “adequadamente”.

Com relação à ferramenta tangram, no primeiro momento as duplas atestaram como se não estivesse funcionando. Esperavam que, ao ser clicado no ícone, assim como os poliminós, aparecessem as peças separadamente. Dada essa circunstância, o engenheiro pesquisador explicou a cada dupla como deveriam proceder para construírem essa figura¹²².

A dupla 1 criou dois tangrans de “tamanhos” diferentes para verificar o comportamento de suas peças, os quais apresentamos abaixo:

Figura 141- Tangrans construídos pela dupla 2



Fonte: retirado do formulário de análises das ferramentas da dupla 2

Logo após as construções, apresenta a explicação abaixo:

Dupla 1: *Criamos o tangram e separamos as peças. A primeira imagem do Tangram surge com algumas peças sobrepostas, a exemplo do Tangram menor abaixo, em que o paralelogramo está sobreposto ao triângulo menor, triângulo maior e quadrado. O Tangram maior do lado direito (na imagem acima) já representa o jogo após a nossa separação.*

Sugere então que as peças não sejam apresentadas sobrepostas nem com os lados coincidindo, mas um pouco afastadas, permitindo ao usuário a ideia do quadrado como também as peças que o compõem.

O participante “F” destaca a não possibilidade de ampliar e reduzir as peças e de encaixar uma nas outras, ou seja, destaca a ausência de um magnetismo que ao aproximar as figuras, possa justapô-las automaticamente. Segundo ele, o usuário precisa realizar um grande esforço para fazer coincidir as lados uma nas outras das diferentes peças deste jogo.

Por fim, todas as duplas decidiram que a ferramenta tangram funciona adequadamente, mas destacam a necessidade de incluir no ícone, de alguma forma, as peças desse jogo predefinidas como acontece nos poliminós.

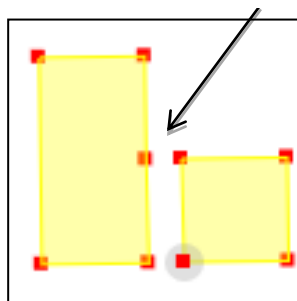
¹²²Descrevemos esses procedimentos no capítulo 5, que traz as ferramentas da primeira versão do MS.

6.3.1.16 Tesoura, triangular polígono (tipo 1 e 2)

De acordo com o participante “C”, as ferramentas de cortes (tesoura e triangularizar polígonos) são fáceis de manusear e funcionam bem, mostrando capacidade de fornecer auxílio para o entendimento da área de polígonos (regulares ou não) por meio da decomposição. Para “E”, uma limitação na ferramenta tesoura é não permitir decompor as figuras em várias peças iguais, como, por exemplo, construir um retângulo e dividi-lo em quatro partes congruentes. Ele recomenda inserir outra ferramenta de corte com essa possibilidade para o estudo de área e fração.

A observação do participante “F” da dupla 3, referente à tesoura, diz respeito à decomposição das peças dos poliminós. Conforme esse sujeito, ao tentar recortar um dos quadradinhos que compõem as peças desse jogo, o corte não ficou exato, ou seja, ele não conseguiu decompor um dos quadrados do triminó como ilustrado a seguir:

Figura 142- Decomposição do Triminó



Fonte: *print screen* do vídeo gravado pelo participante F da dupla 3.

Esse participante, após selecionar a ferramenta tesoura, clicou no lugar apontado pela seta na imagem acima. Depois, tentou visualmente verificar o local do ponto médio do segmento da base do triminó, dando um clique com o botão esquerdo do *mouse* ao final para realizar a decomposição. Ele não obteve sucesso nessa ação, pois a peça separada não corresponde a um quadrado. Para conseguir decompor exatamente um dos quadrados, ele deveria ter criado um ponto médio na base do triminó e prosseguir com os passos explicitados.

Todas as duplas realizaram, nas três ferramentas de cortes, vários testes. Decompuseram diferentes polígonos, as peças do tangram, os poliminós e os lados de algumas figuras construídas na interface do *software*. De maneira geral, a avaliação foi positiva e, ao final, marcaram a opção “adequadamente” no formulário.

6.3.1.17 Colagem

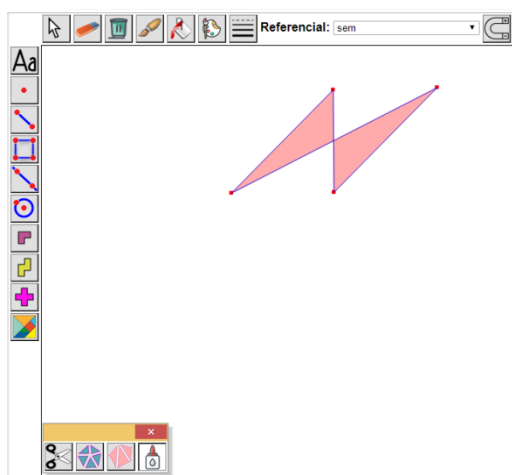
Nenhuma das duplas conseguiu, por si só, perceber como acontece a colagem (recomposição). Foi necessário o esclarecimento dessa função pelo engenheiro pesquisador para que prosseguissem com as avaliações.

Após analisar a ferramenta cola, a dupla 2 explicita no formulário a seguinte explicação: *quanto à ferramenta de colagem das figuras após decomposição, só conseguimos com 2 partes, mas ao tentar colar a terceira, cliquei em todas as linhas e não colou, precisa-se de maior clareza em como é feita a colagem.* A dupla se refere a uma decomposição realizada em um quadrilátero por meio da ferramenta triangularização tipo 1 e a tentativa de colagem de todas as partes decompostas. A dupla 1 faz uma relação, destacando o que acontece nas tentativas de colagem de diferentes figuras, as quais listamos a seguir:

6.3.1.17.1 Colagem com polígonos:

i) - Tentativa de colagem de partes de um quadrado que foi decomposto pela diagonal e uma das peças organizada de maneira a recompor um paralelogramo, o resultado foi um polígono não convexo;

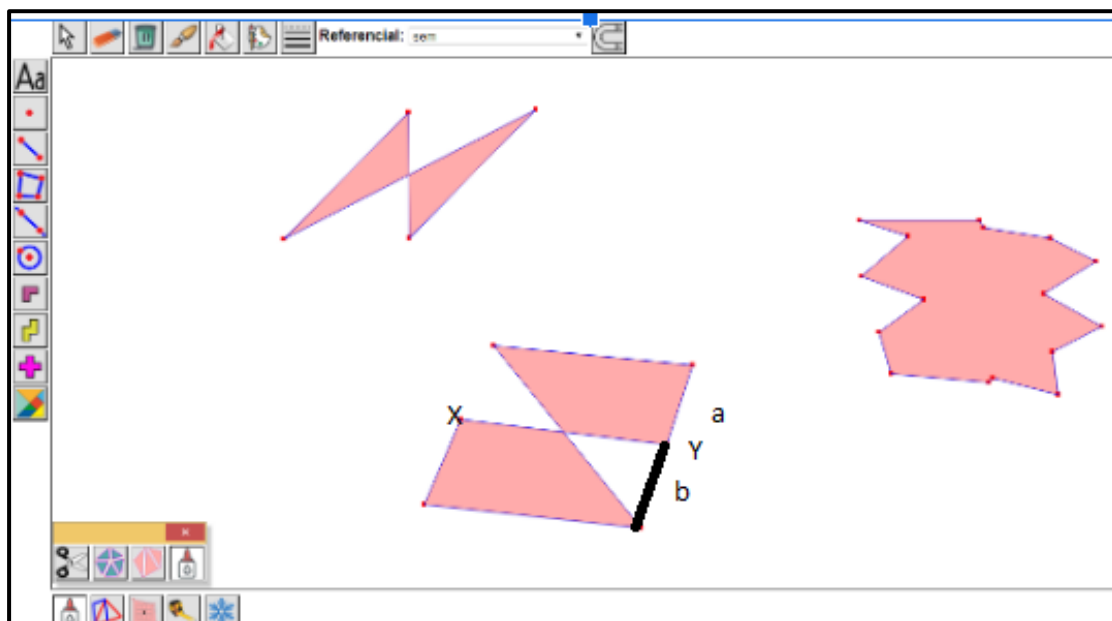
Figura 143- Extrato de protocolo da dupla 2 (Tentativa de colagem 1)



Fonte: extraído do formulário da dupla 2

ii) Tentativa de recomposição de um quadrilátero que havia sido cortado por dois pontos (X e Y), gerando um *bug*. Ao tentar recompor por justaposição no mesmo lugar do corte, selecionando os segmentos **a** e **b**, não foi possível recompor a figura como esperado;

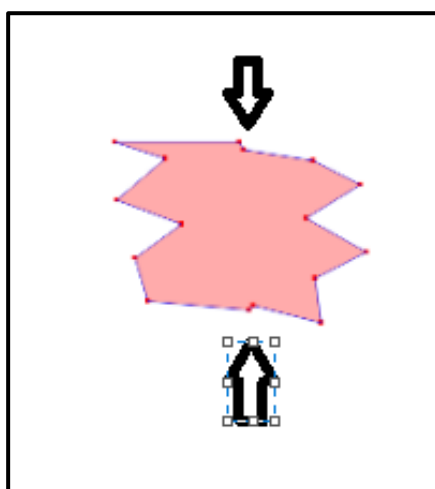
Figura 144- Extrato de protocolo da dupla 2 (Tentativa de colagem 2)



Fonte: extraído do formulário da dupla 2

iii) - Tentativa de recorte de um quadrilátero com uma linha poligonal (zigue-zague), o que ocorreu de maneira satisfatória, sem ocorrer a junção dos vértices das duas partes;

Figura 145- Extrato de protocolo da dupla 2 (Tentativa de colagem 3)

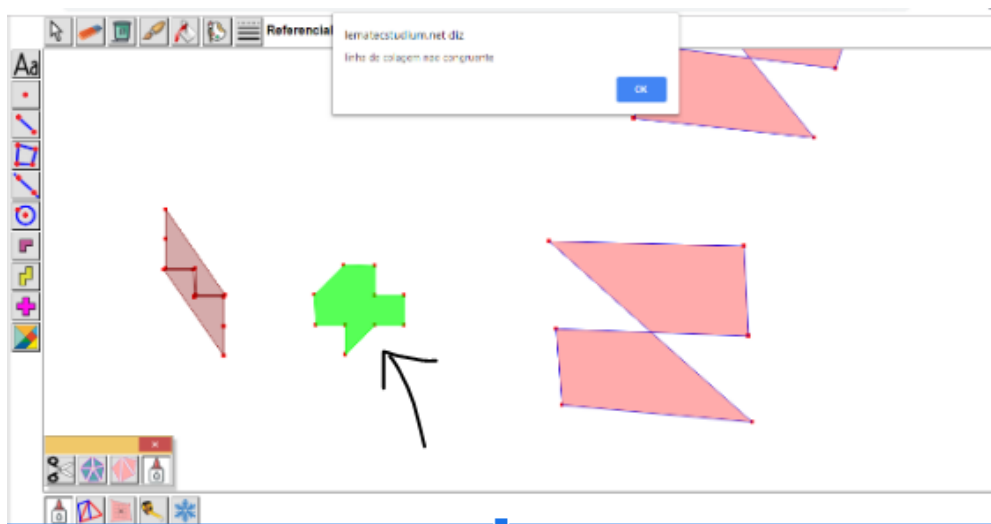


Fonte: extraído do formulário da dupla 2

6.3.1.17.2 Colagem com poliminós:

i) O polígono verde foi obtido a partir do pentaminó da cruz. Com um corte da diagonal de um quadrado (indicado com a seta) obtivemos um triângulo, que foi colado com a ferramenta colagem sem problemas.

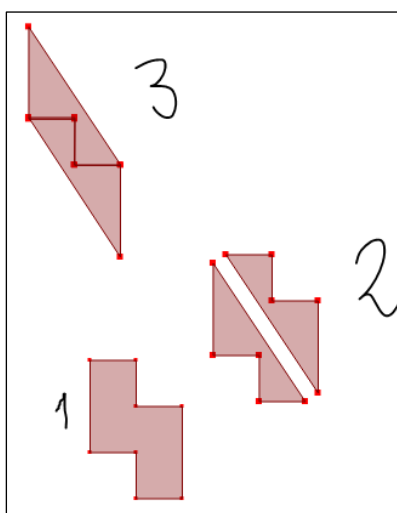
Figura 146- Extrato de protocolo da dupla 2 (Tentativa de colagem 4)



Fonte: extraído do formulário da dupla 2

ii) Colagem feita com tetraminó **Z**. Neste caso, quando recortamos pela diagonal, conforme sinalizado pelo número 2, e recompomos, formando a figura sinalizada pelo número 3, aparece a mensagem “linha de colagem não congruente”, não sendo possível realizar a recomposição com a ferramenta de colagem.

Figura 147- Extrato de protocolo da dupla 2 (Tentativa de colagem 5)

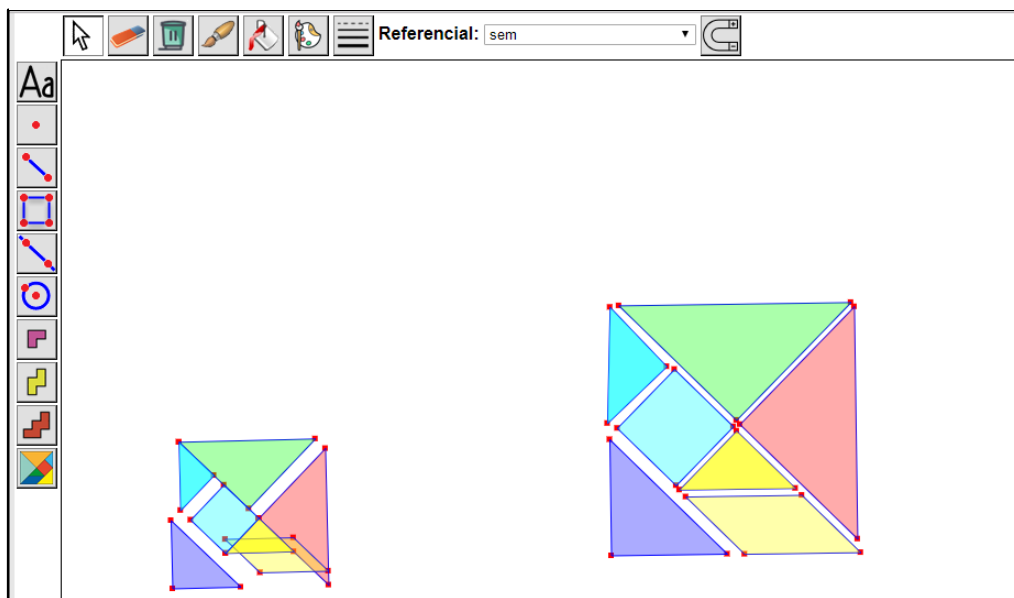


Fonte: extraído do formulário da dupla 2

6.3.1.17. 3 Colagem com Tangram:

Criamos o tangram e separamos as peças como na imagem a seguir:

Figura 148- Extrato de protocolo da dupla 2 - construção do tangram



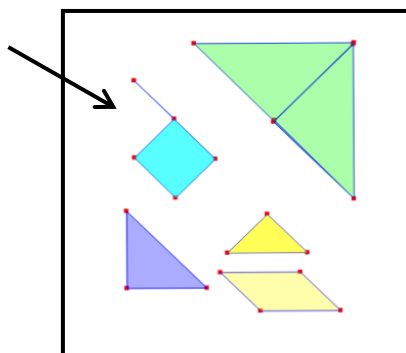
Fonte: do formulário da dupla 1

Iniciamos juntando os dois triângulos maiores através da colagem e foi mantida a junção das duas peças. No entanto, houve a predominância de apenas uma das cores das duas peças do tangram.

Explicamos a essa dupla que a aglutinação das cores foi uma decisão do programador em comum acordo com o engenheiro pesquisador, pois ao se recompor uma figura obtém-se uma nova com as partes decompostas. Após a explicação dada, a dupla 2 continuou analisando a colagem com as peças do tangram, listando os *bugs* encontrados:

i) Ao tentar colar o quadrado e um triângulo pequeno, o triângulo desapareceu e apenas um dos seus lados foi mantido, juntamente com o quadrado;

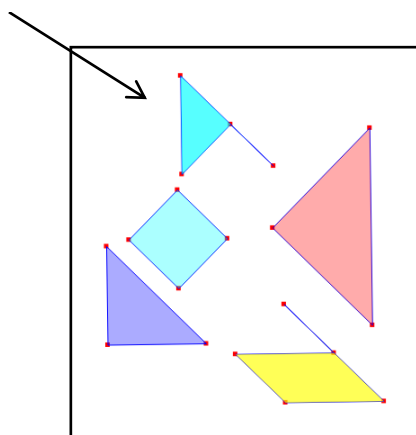
Figura 149- Extrato de protocolo da dupla 1 (testagem 1 com o tangram)



Fonte: do formulário da dupla 1

ii) Triângulo maior e triângulo menor azul, o triângulo maior (desaparece) restando apenas um dos seus lados e triângulo menor azul; um triângulo menor e o paralelogramo, o triângulo menor (desaparece) restando um dos seus lados e o paralelogramo amarelo;

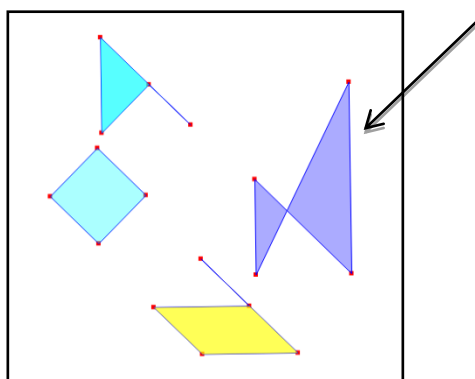
Figura 150- Extrato de protocolo da dupla 1 (testagem 2 com o tangram)



Fonte: do formulário da dupla 1

iii) Dois triângulos (médio e maior), composição de uma figura não poligonal (imagem em roxo abaixo):

Figura 151- Extrato de protocolo da dupla 1 (testagem 3 com o tangram)



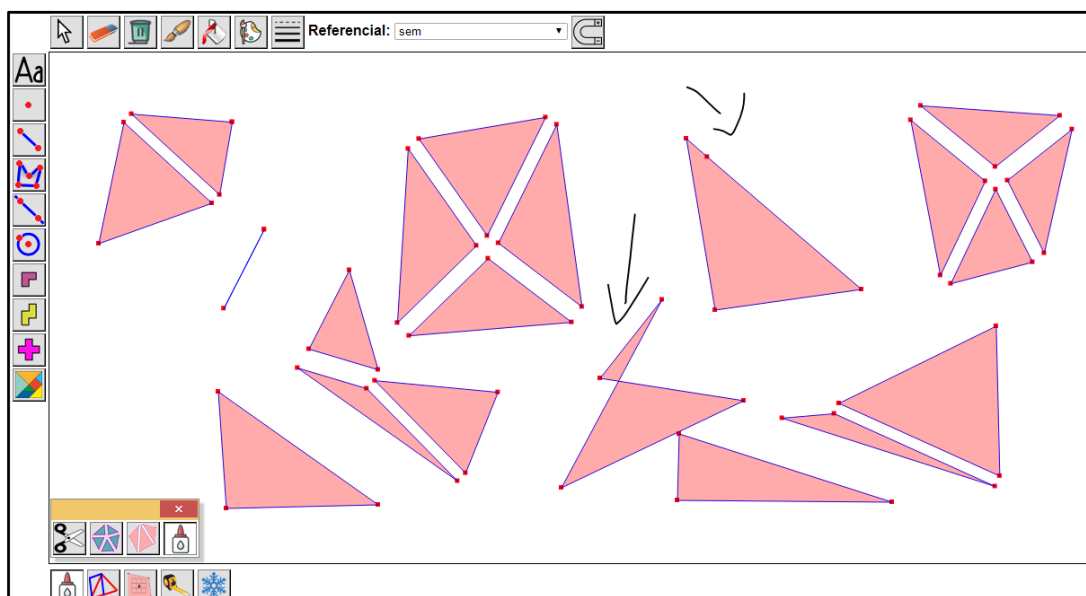
Fonte: do formulário da dupla 1

Muitos dos *bugs* apresentados até o momento na colagem dos poliminós e tangram foram identificados pelo engenheiro pesquisador no capítulo 5, referente às análises da primeira versão do protótipo. A dupla 1 continua avaliando a ferramenta “recomposição” com as peças decompostas por meio da triangularização, como apresentamos a seguir:

Dupla 1: *A decomposição, tanto pelo centro, como pelo vértice nos polígonos construídos, funcionou normalmente. No entanto, quando decidimos recompor as peças indicadas com as*

setas, aconteceram problemas já citados, no caso do triângulo que desapareceu e no outro caso gerou uma figura não poligonal.

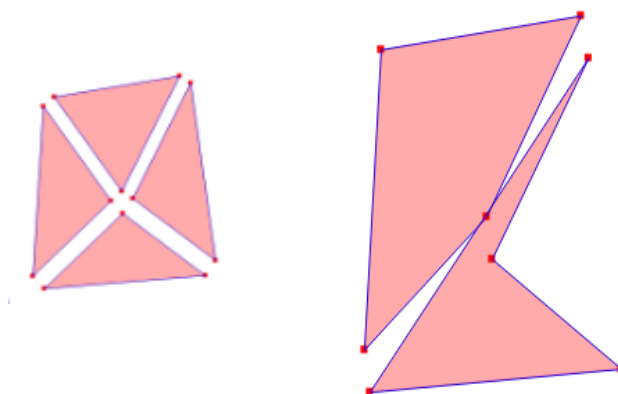
Figura 152- Colagem a partir da decomposição em Hilbert



Fonte: do formulário da dupla 1

A dupla 1 finalizou suas observações referentes à colagem com a seguinte explicação: *Ao tentar recompor o polígono que foi decomposto, com a ferramenta decomposição em triângulos (tipo 1) usando a colagem, conseguimos unir dois triângulos. Na tentativa de colar um terceiro triângulo, apareceu a mensagem “linha de colagem não congruente”. Ao tentar unir o terceiro e o quarto triângulo, o resultado foi uma figura que não representa a recomposição, conforme imagens abaixo.*

Figura 153- Recomposição (figuras mal comportadas)



Fonte: do formulário da dupla 1

Após todas as verificações realizadas, a dupla 1 decidiu que a ferramenta funcionava “insatisfatoriamente”, sugerindo que fosse revista pelo engenheiro programador, destacando

sua importância para o trabalho com a abordagem de área como uma grandeza e seu lugar de destaque no *software*, justificando o potencial que o MS pode alcançar no ensino de área ao serem realizadas as devidas correções nas colagens. As duplas 2 e 3 também assinalaram a opção “insatisfatoriamente”, em virtude da quantidade de *bugs* encontrados nas análises.

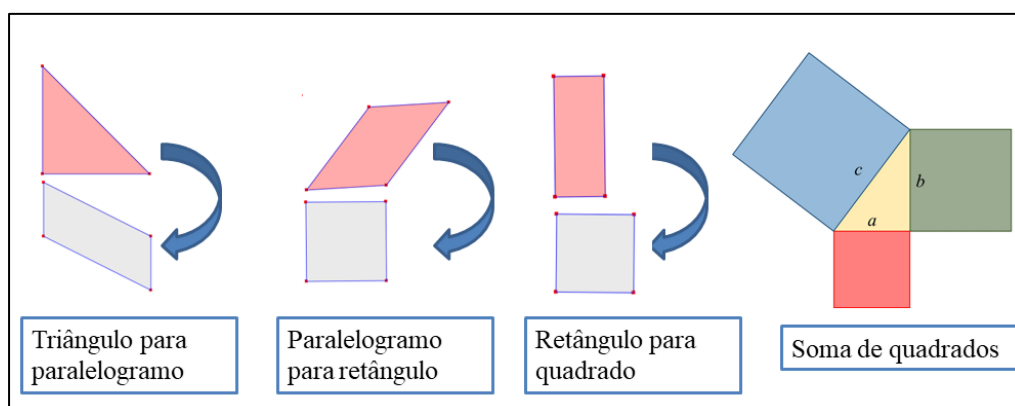
6.3.1.18 *Triângulo para paralelogramo, paralelogramo para retângulo, retângulo para quadrado e soma de quadrados*

Assim como a ferramenta de colagem apresentada, as duplas não conseguiram perceber como deveriam proceder para realizarem a passagem do triângulo para paralelogramo, nem tampouco das outras figuras. O engenheiro pesquisador explicou como lidar com tais ferramentas. Após as análises, as duplas chegaram à conclusão de que funcionavam “adequadamente”, e fizeram os seguintes comentários:

Dupla 2: *As ferramentas que fazem “de triângulo para paralelogramo” ... apresentam uma confusão. Pois quando selecionadas, se o usuário clicar na tela irá ficar gerando um conjunto de pontos que resulta em nada. Tem que ser explicado ao usuário que ele deve, por exemplo, construir um triângulo e depois selecionar a ferramenta para gerar o paralelogramo de mesma área. Contudo, embora a ferramenta apresente necessidade de mudança de como usá-la, a mesma auxilia no processo de ensino-aprendizagem, no que diz respeito à relação de mesma área de figuras distintas.*

Essa dupla solicita que seja explicado previamente ao usuário como proceder para executar as funções das ferramentas de triângulo para paralelogramo, etc. Para o participante “F”, os ícones não estão representativos de sua função e faz as seguintes sugestões de modificação do *design* das figuras contidas neles:

Figura 154- Sugestão de modificação das imagens das ferramentas

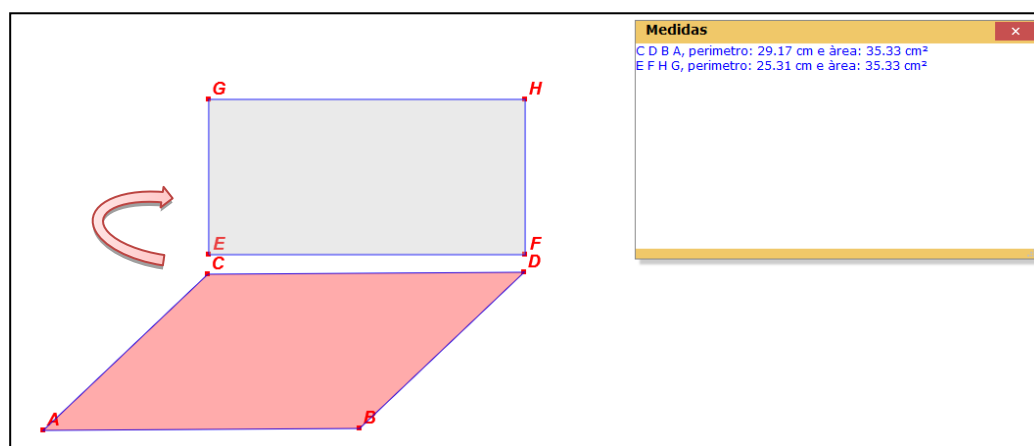


Fonte: do formulário de análise da dupla 3

Esse participante esboçou como deveriam ser as imagens dos ícones para que fossem autoexplicativos, pois, segundo ele, da maneira que está no software, não há como entender o objetivo das ferramentas.

A dupla 1 achou interessante a ideia dessas ferramentas, realizou várias construções, verificando, por meio da fita métrica, que de fato o paralelogramo e o retângulo apontados pela seta abaixo possuem a mesma área.

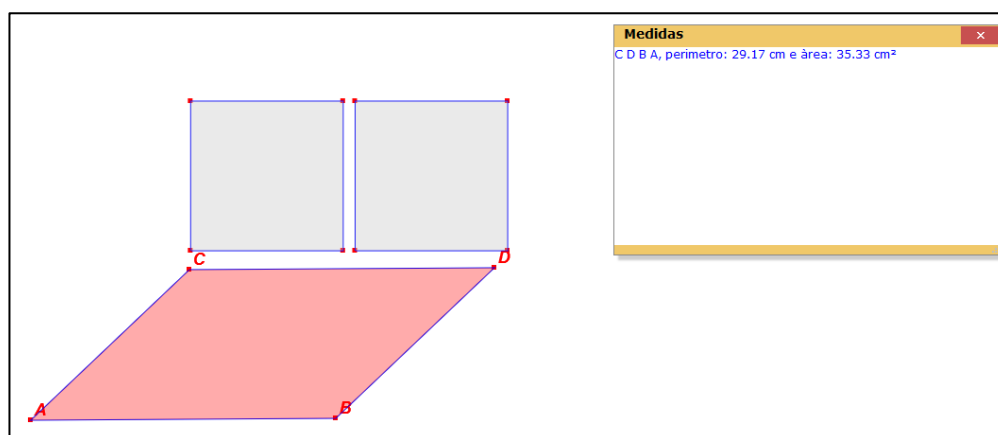
Figura 155- Análise da ferramenta paralelogramo para retângulo



Fonte: do vídeo da dupla 2

Em seguida, a dupla decidiu analisar o que aconteceria se decompusesse EFGH em dois quadrados de mesma área. A intenção era perceber se o usuário poderia, por meio da decomposição, construir uma superfície possível de ser comparada por sobreposição à figura ABCD, e assim chegar à conclusão que o paralelogramo e o retângulo tinham a mesma área.

Figura 156- Decomposição de EFGH

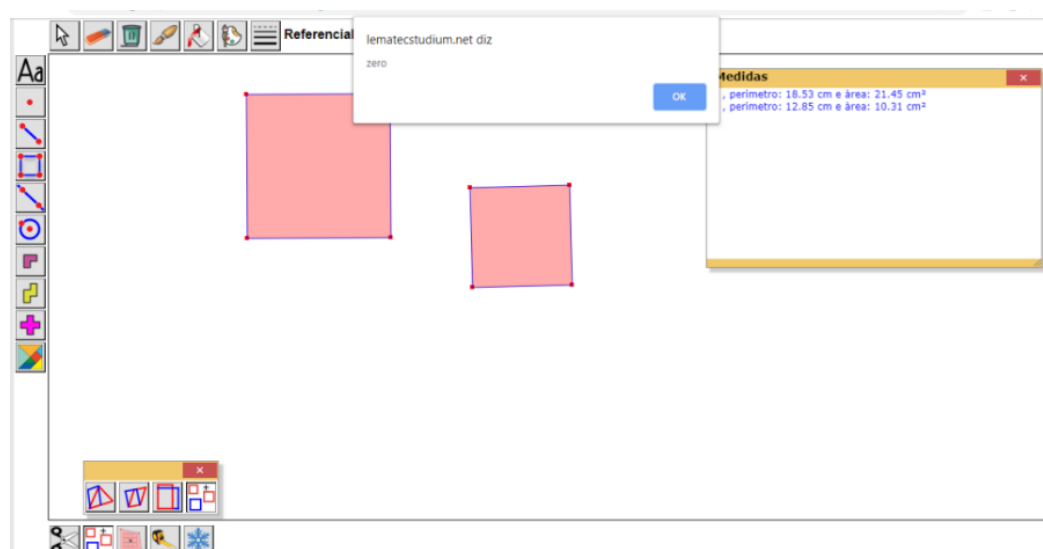


Fonte: do vídeo da dupla 2

Por fim, os participantes da dupla 1 decidem fazer o contrário: decompor ABCD de forma a recompor um retângulo possível de ser comparado por sobreposição à EFGH. Segundo eles, seria outra maneira de confirmar se o paralelogramo rosa teria mesma área que o retângulo azul. Chegaram à conclusão que, quando realizam tal ação, o retângulo EFGH gerado após a construção do paralelogramo ABCD desaparece da tela. Sugerem então que seja inserida uma ferramenta que desvincule essas duas figuras e as demais desse menu, oferecendo condições aos alunos para identificarem que as figuras possuem mesma área.

Quanto à soma de quadrados, a dupla 1 coloca como observação que, ao desenhar dois quadrados e utilizar essa ferramenta, clicando nos lados de cada um dos quadrados, a mensagem que aparece é “lematecstudium.net diz: zero”, conforme imagem abaixo:

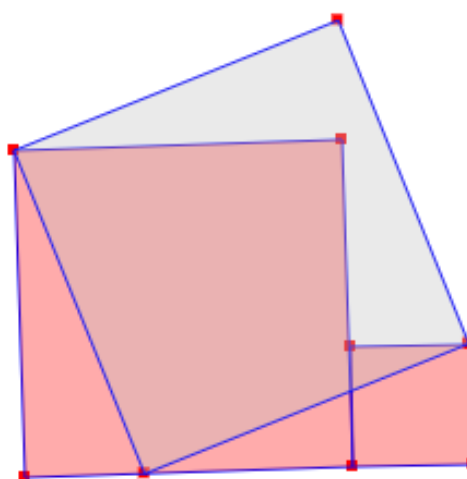
Figura 157- Insucesso na soma de quadrados



Fonte: do formulário da dupla 2

A dupla só entendeu como a ferramenta realizava a soma de quadrados após o comentário do engenheiro pesquisador, ou seja, para poder obter a soma, o usuário precisa fazer coincidir os lados de dois quadrados construídos por meio da ferramenta “quadrado” do menu polígonos. A dupla 1 apresentou, no fechamento de suas avaliações, a imagem abaixo e concluiu, assim como as demais, que as ferramentas desse menu (mesma área e soma de quadrados) funcionavam adequadamente.

Figura 158- Soma de quadrados



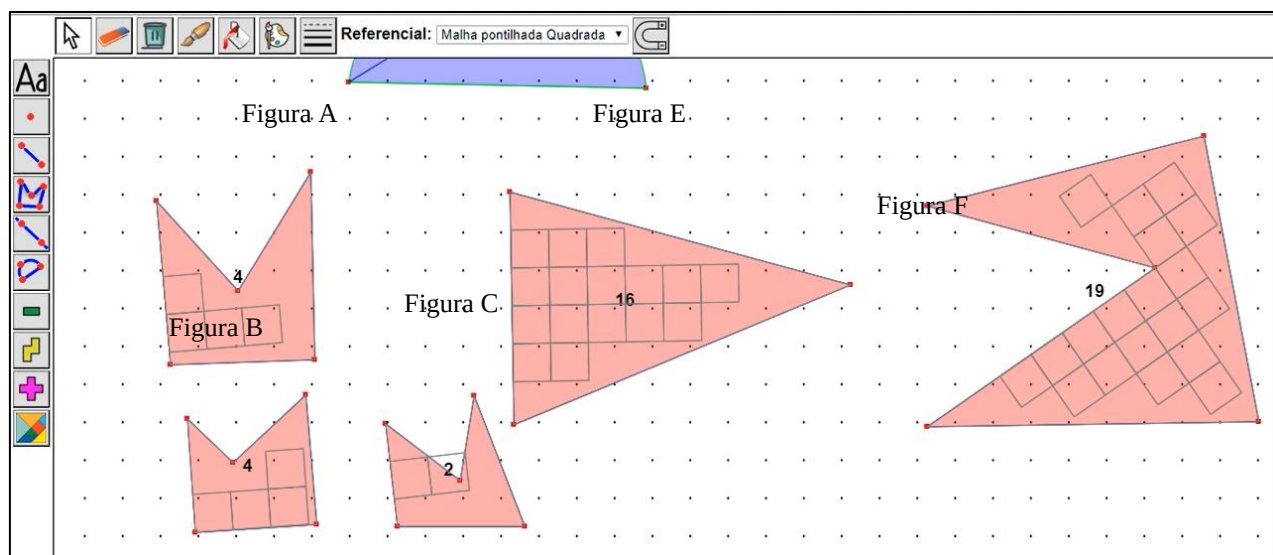
Fonte: do formulário da dupla 2

6.3.1.19 Medida da área em Lebesgue¹²³

Para todas as três duplas, a ferramenta que expressa o cálculo da medida da área em Lebesgue funciona “insatisfatoriamente”. Segundo a dupla 2, na maioria das vezes a quantidade de quadradinhos inteiros que cabem dentro da figura não é calculada pelo *software* corretamente, como ilustrado na imagem a seguir:

¹²³ Outras observações relacionadas à ferramenta de Lebesgue serão apresentadas nas próximas seções.

Figura 159- Calculando a área em Lebesgue



Fonte: extraído do vídeo da dupla 2 em 00:50:40s

De acordo com essa dupla, dependendo da organização dos quadradinhos inseridos dentro dos polígonos por meio da ferramenta de Lebesgue, a quantidade de inteiros que se encaixa dentro deles poderia variar. Como exemplo, citam a figura A na qual, segundo o cálculo expresso pelo software, cabem quatro quadrados inteiros, mas na realidade deveriam ser cinco. Outra observação é o cálculo realizado na figura C, como pode ser notado, um quadrado não está totalmente contido nela e foi contado pelo MS. Essas análises conduziram a dupla 2 a sugerir uma modificação por completo na ideia da ferramenta, por sua função não parecer tão clara ao usuário.

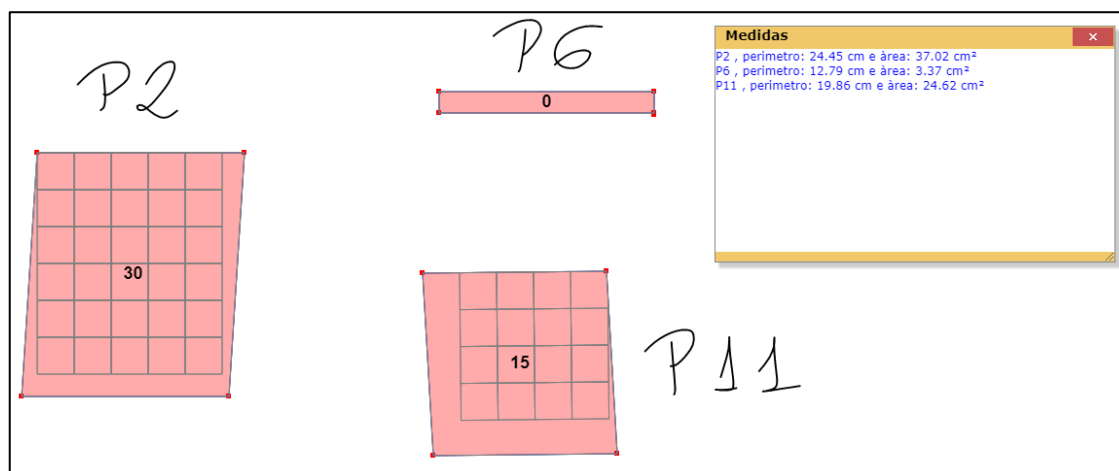
A dupla 1 relata nas suas análises que pode ser gerada uma confusão entre a área, a medida da área e quanto cabe de unidade quadrada inteira dentro da figura, como apresentamos a seguir:

Dupla 1: Nas figuras abaixo ao clicar no ícone Lebesgue e em um dos lados das figuras, é gerada uma malha que indica quantos quadradinhos inteiros cabem na figura e, ao mesmo tempo, apresenta o número indicativo dessa quantidade. Na figura P2 cabem 30 quadradinhos inteiros, na figura P6 não cabe nenhum quadradinho inteiro, por isso aparece o número 0, e na figura P11 cabem 16 quadradinhos, embora apareça o número 15, o que mostra um erro na programação.

Apesar de compreendermos que a função do ícone é determinar a quantidade inteira de quadradinhos, esta pode levar à incompreensão do conceito de área para o usuário, ao associar, por exemplo, na figura P6, que ela não possui área, ou ainda que a área de uma

figura é determinada pela quantidade de superfícies unitárias quadradinho, quando parte da região não está coberta. O ícone Measurement possibilita determinar a área de cada um dos polígonos e o usuário percebe que a figura P6, por exemplo, tem área diferente de zero.

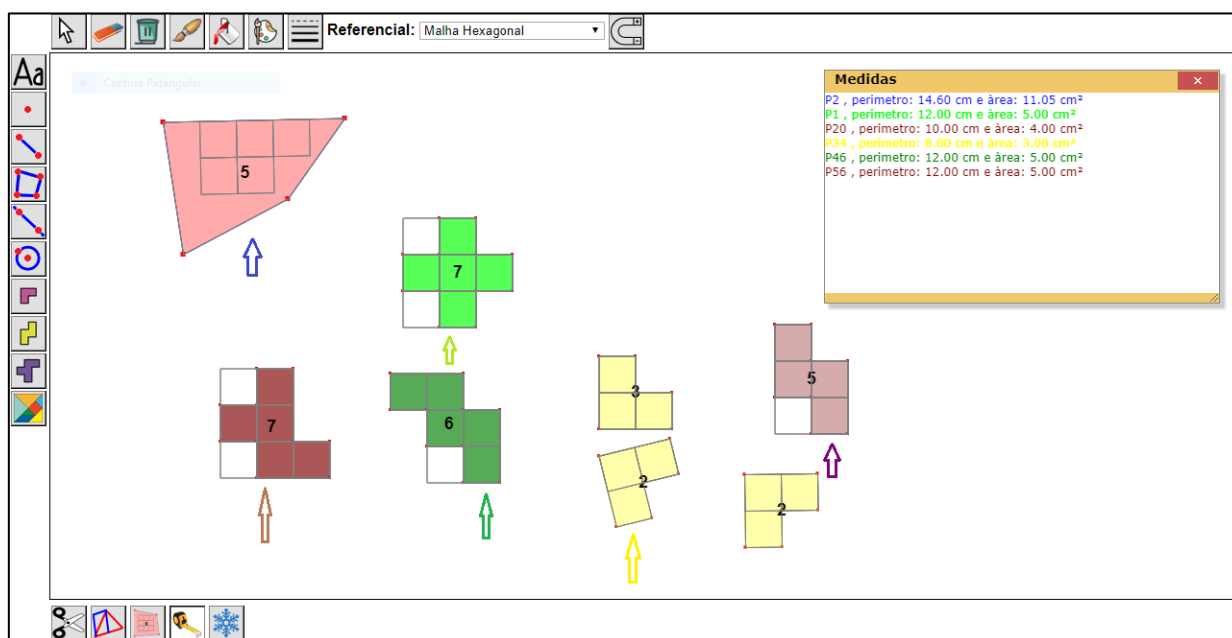
Figura 160- Análise da ferramenta de Lebesgue pela dupla 1



Fonte: extraído do formulário da dupla 2

Os participantes dessa dupla, a partir de outra tentativa de cálculo de área com essa ferramenta, observaram erro também ao usarem os poliminós:

Figura 161- Analisando Lebesgue com os poliminós



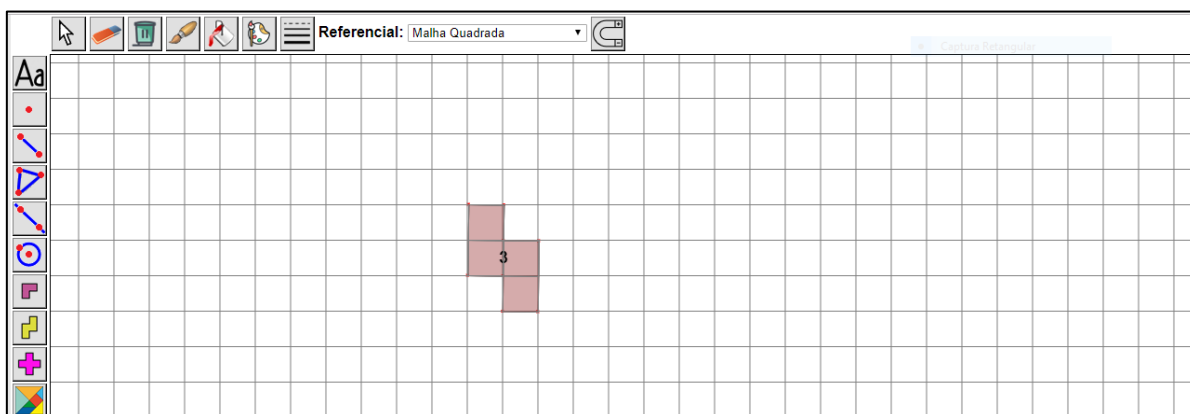
Fonte: extraído do formulário da dupla 2

Prosseguem explicando que: ao utilizarmos a ferramenta **Lebesgue** para determinar a área de um polígono não convexo, a exemplo dos poliminós, ao clicarmos em um dos lados do polígono, uma nova formação é realizada (observe o tracejado cinza) e a medida da área

é determinada a partir da quantidade de quadradinhos formados. Com o triminó amarelo acima, ao ser modificada a sua posição, a quantidade de quadradinhos considerada também se altera. Esse tipo de erro também vai no sentido contrário à proposta do MS, de trabalhar a conservação de área. Se utilizarmos a ferramenta **Fita métrica** com essas figuras, observamos valores diferentes para suas áreas se comparados com os números indicados dentro de cada uma delas com a ferramenta **Lebesgue**.

Continuando as análises, a dupla 1 expõe que, quando o poliminó é colocado na malha quadrada, ainda assim a contagem está equivocada ou a superfície unitária quadradinho da ferramenta é diferente da superfície unitária quadradinho na malha quadrada. A dupla chegou a essa conclusão após construir um tetraminó com seus quadradinhos, coincidindo com os quadradinhos da malha, o qual apresentamos na imagem abaixo:

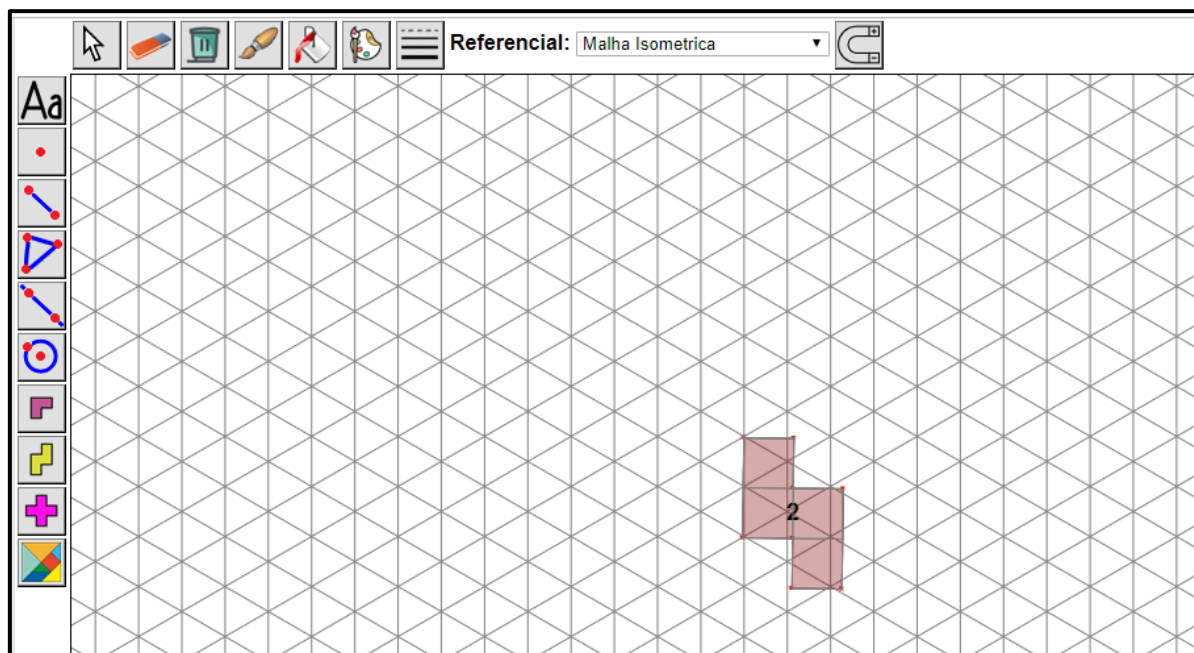
Figura 162- Erro na contagem dos quadradinhos que compõe o tetraminó



Fonte: extraído do formulário da dupla 2

Ainda para a dupla, a contagem também foi alterada para o mesmo tetraminó, agora na malha isométrica:

Figura 163- Erro na contagem na malha isométrica

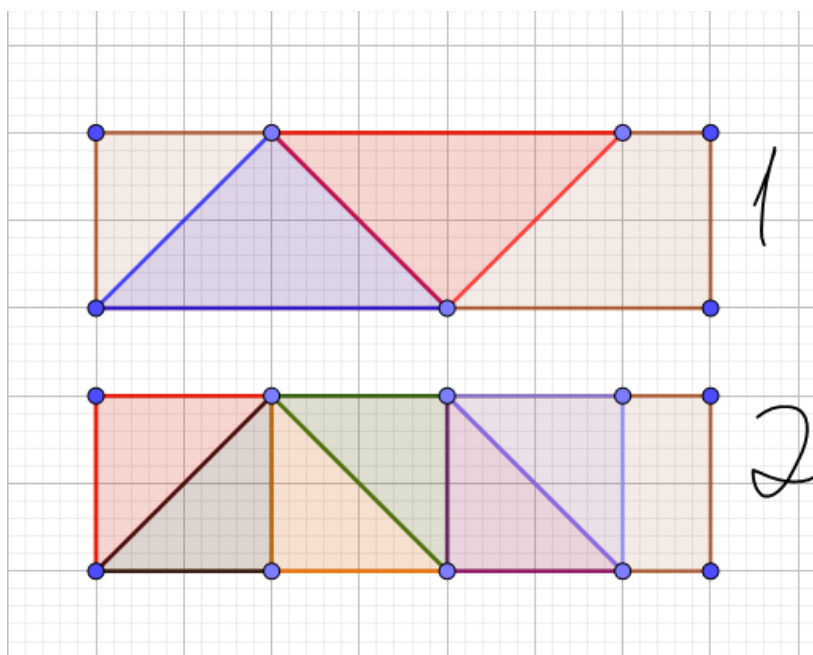


Fonte: extraído do formulário da dupla 2

Deste modo, os participantes da dupla 1 constataram que a ferramenta **Lebesgue**, além de estar com erro na contagem, não permite a compreensão de que ao realizarmos a mudança de uma superfície unitária, a unidade de área relativa a classe de equivalência de todas as figuras que possuem mesma área não se altera, o que poderia ser favorecido com o **Referencial** e contribuir para a construção do conceito de área.

Com relação ao conceito de área, entendem que esta ferramenta, assim como está posta, pode levar o usuário a não compreender a importância da composição e decomposição de áreas, e o seu lugar neste *software*. Na imagem a seguir, ilustram um exemplo sobre a confusão que pode ser gerada:

Figura 164- Exemplo dado pela dupla 2 sobre a confusão gerada pela ferramenta



Fonte: extraído do formulário da dupla 2

Após ilustrarem a imagem acima, fazem a seguinte colocação:

Dupla 1: *Como exemplo, a ferramenta do MS para determinar a quantidade de triângulo isósceles na figura 1 nos daria a imagem apresentada acima, indicando que no retângulo cabem 2 triângulos isósceles inteiros, o que não representa a área total do retângulo e desconsidera a decomposição da superfície unitária escolhida nem a equivalência entre diferentes superfícies unitárias.*

Na figura 2, para o mesmo retângulo, se considerarmos outra superfície unitária, agora um triângulo retângulo isósceles que equivale à metade da superfície unitária considerada na figura 1, a ferramenta do MS apresentaria a quantidade de 6 triângulos retângulos isósceles, sem considerar também a decomposição possível. Aqui temos um exemplo em que podemos obter a medida da área de uma mesma região com diferentes unidades de medida. Se o objetivo do MS é levar à compreensão do conceito de área de acordo com a articulação dos três quadros (Douady & Perrin- Glorian) e considerar o conceito da função medida de área de Lebesgue, a ferramenta precisa ser revista.

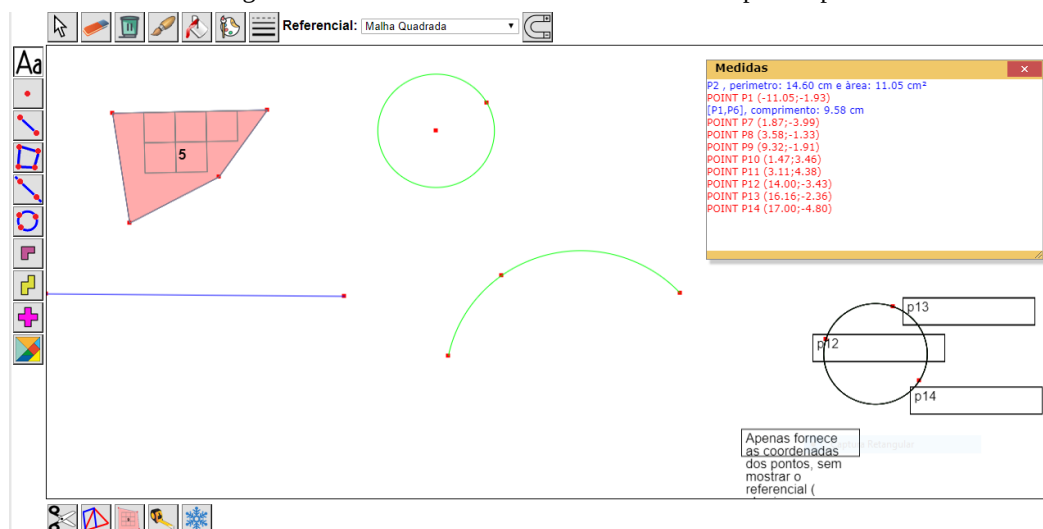
Outra questão levantada pela dupla é a utilização de uma superfície unitária quadrado, quando o software já dispõe de outras malhas, que poderiam inclusive ser utilizadas para o trabalho com a aproximação de áreas por falta ou por excesso. Neste caso, solicitam, ao final das avaliações, o ajuste da ferramenta de Lebesgue ou mesmo sua retirada do software para uma primeira versão.

A dupla 3 expressou que não compreendeu o lugar desta ferramenta no *software*, justificou essa posição pelo fato de não ter visto, na educação básica, a apresentação da abordagem de área de Lebesgue, ou ao menos com esse nome. Sugeriu ao engenheiro pesquisador uma mudança na ferramenta no sentido de ficar mais transparente o objetivo para o qual foi criada.

6.3.1.20 Magnitudes

No que diz respeito à Fita métrica (*measurement*), para a dupla 1 a ferramenta não determina a medição do comprimento de uma linha não-poligonal, nem tampouco de uma circunferência, apresenta apenas as coordenadas dos pontos. Prossegue explicando que, com a ferramenta *measurement*, é possível determinar o perímetro do quadrilátero rosa e da linha poligonal azul. No entanto, o mesmo não ocorre com as circunferências nem com o arco, como apresentamos na imagem abaixo:

Figura 165- Análise da ferramenta measurement pela dupla 1



Fonte: extraído do formulário da dupla 2

Essa dupla continuou suas análises calculando a área e o perímetro das diferentes peças dos polígonos. Sobre os resultados encontrados, faz os seguintes comentários:

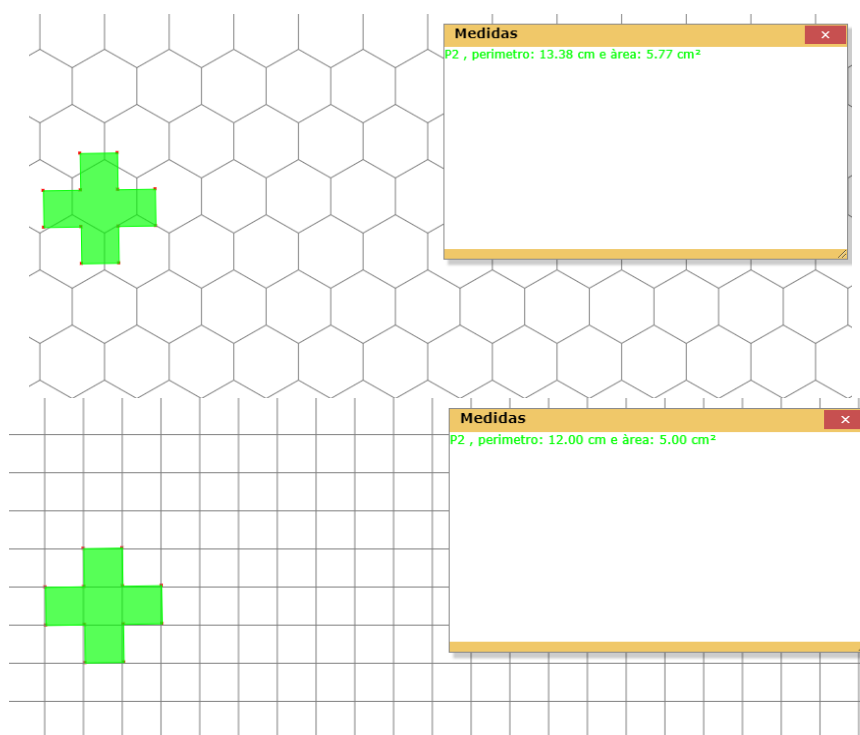
Dupla 1: Observe que, se construirmos um pentaminó sobre a malha hexagonal e clicarmos na ferramenta fita métrica, o cálculo da área e do perímetro é determinado nas unidades de medidas convencionais centímetro quadrado e centímetro, respectivamente. Outras possibilidades de unidades de medidas, tanto convencionais quanto não-convencionais não são indicadas por essa ferramenta.

Sugere que, ao clicarmos na ferramenta Fita métrica (*measurement*), essa possa trazer, nos ícones internos, a possibilidade de escolha das medições em separado da área e do

perímetro, pois da forma como aparece, segundo a dupla, não pode contribuir para que o usuário estabeleça essa diferenciação entre área e perímetro.

Outra questão apontada pela dupla está associada à escala das malhas. Segundo a análise feita, não há como saber em qual escala, por exemplo, a malha hexagonal foi construída. A dupla 1 continuou sua análise calculando a área de um pentaminó em formato de cruz nas malhas hexagonal e quadrada, como ilustramos abaixo:

Figura 166- Cálculo do pentaminó nas malhas hexagonal e quadrada



Fonte: extraído do formulário da dupla 1

Para essa dupla, ao realizarmos a mudança da malha hexagonal para malha quadrada, a mesma figura terá outros valores para a sua área e o seu perímetro, o que, segundo ela, deveria ser mantido tendo em vista estarmos utilizando a ferramenta Fita métrica, que fornece apenas as medidas em centímetro quadrado e centímetro, respectivamente.

Diante desse contexto, a dupla 1 avaliou que a ferramenta *measurement* funcionava apenas “parcialmente”, tendo em vista a necessidade da realização de vários ajustes para melhor trabalhar a abordagem de área e perímetro no *software*, solicitadas anteriormente. Para as demais, a ferramenta funcionou “adequadamente”. Entretanto, a dupla 3, assim como a anterior, fez menção à possibilidade do MS oferecer condições ao professor, por meio da ferramenta *measurement*, escolher diferentes unidades de medidas convencionais ou não para o cálculo das áreas.

6.3.1.21 Freezing (congelar)

As duplas não apresentaram dificuldades no uso do *Freezing*, pois já haviam visto sua função ligada ao “ponteiro” na explicação dada pelo engenheiro pesquisador no início das análises das ferramentas. Após experimentarem aplicando e retirando o congelamento (travamento) dos polígonos, escolheram a opção “adequadamente”. O participante “D” observa que a ferramenta não só pode ser executada em figuras poligonais, mas também nas não poligonais como, por exemplo, na circunferência, arco e segmento circular.

6.3.1.22 Síntese geral das análises realizadas pelas duplas

As duplas finalizaram com um resumo geral sobre as análises de uso do *software*. Resolvemos então listá-los abaixo:

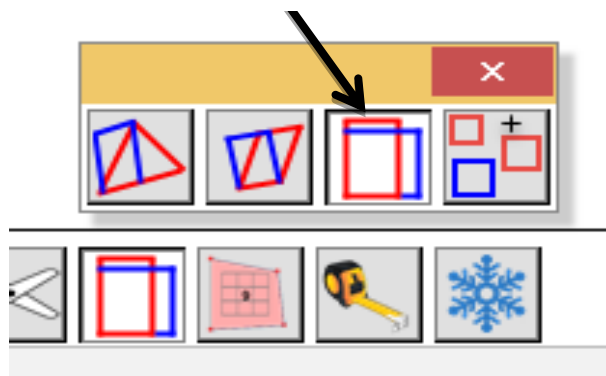
Dupla 1:

- ✓ O ícone precisa ser representativo da sua função;
- ✓ Padronizar a nomeação dos ícones para o português ou o inglês, ou seja, padronizar a língua oficial do MS. Fazer a correção dessas nomeações (Por exemplo, poliminós está sem o acento, assim como circunferência; a trena está nomeada em inglês, *measurement*, que na realidade significa medição; trena em inglês seria *measuring tape*; também no quadro das medidas, a palavra ponto aparece em inglês). Mesmo se o inglês for mantido como a língua do MS, será necessário rever a nomenclatura de todos os ícones. Por exemplo, *line* expressa uma linha qualquer entre dois pontos, seja um segmento ou uma curva, mas para se referir a uma linha reta, o correto seria utilizar *straight line*;
- ✓ Colocar instruções para cada ícone, como realizado em outros *software* como o Geogebra e Cabri.

Para dupla 2 em termos de design precisa-se melhorar:

- ✓ a imagem de apresentação da plataforma;
- ✓ o traçado das imagens de representação de cada função;
- ✓ o Retângulo *to square*: imagem confusa, modificar.

Figura 167- Ferramenta confusa



Fonte: observações dupla 2

- ✓ Apresentar nome e descrição das ferramentas em português;
- ✓ Sugestão: uma aba para selecionar eixo e outra para selecionar a malha, possibilitando maiores opções de malhas com eixo [para cenas dos próximos capítulos];
- ✓ Falta ferramenta que auxilie a visualização no sentido de ampliação e redução da tela;
- ✓ Quando cristaliza uma forma na malha poligonal, rotacionar a malha toda;
- ✓ Uma ferramenta de voltar pelo menos 3 passos da construção é fundamental, uma vez que utilizei uma ferramenta, em determinado momento, que acabou apagando parte da figura e não tinha como recuperar essa figura;
- ✓ Interessante as abas das ferramentas (as das categorias) se soltarem da interface e há a possibilidade de arrastá-las; contudo, como sugestão, coloco a necessidade de se poder arrastar mais de uma aba ao mesmo tempo, ou de poder fixar as abas da subcategoria. Para que o usuário possa utilizar o ambiente com maior facilidade e ergonomia de utilização ao deixar, já em destaque, as ferramentas que vai utilizar;
- ✓ Inserir uma ferramenta de duplicar objetos.

Os participantes da dupla 3, diferentemente dos demais, não apresentaram uma lista, mas fizeram algumas observações ao final de suas análises.

Participantes da Dupla 3: *Demoramos para perceber que existiam outras funções no mesmo botão, mas isso pode ser devido ao hábito de dar um clique apenas. Não identificamos diferença entre a linha poligonal e o polígono, ao construí-lo percebemos que um traça apenas o contorno, enquanto o outro traça o contorno e demarca, com cor diferente, a região. Sugiro que modifique a imagem da linha poligonal para um polígono com fundo branco. Sugestão de colocar algo que indique a existência de um menu embutido. O software possui muitos comandos com que, intuitivamente, sem auxílio do monitor, uma pessoa consegue realizar algumas ações.*

6.3.2 Formulário 2 (aspectos técnicos mais pontuais)

O formulário 2, denominado de “Análise de Aspectos Técnicos mais Pontuais”, (disponível no Apêndice F) tinha como objetivo, conforme já explicitamos, realizar a análise do MS no que diz respeito ao designer de sua *interface*, ferramentas, menus, entre outros.

Todas as duplas precisariam, em comum acordo, análogo à maneira de preencher o formulário anterior, assinalar uma das três colunas do formulário, escolhendo “adequadamente”, se o *software* atendesse a cada um dos aspectos elencados no formulário; “parcialmente”, se precisassem ser ajustados e/ou aprimorados; e “insatisfatoriamente”, caso não atendesse ao que fora colocado, justificando suas escolhas ao final das análises.

O quadro a seguir apresenta as escolhas realizadas pelas duplas referentes aos aspectos técnicos mais pontuais (*design* do MS). Explicitaremos a seguir as justificativas dadas por cada uma delas, antes de assinalarem as opções citadas no parágrafo anterior. Salientamos que muitas das observações explicitadas nesta subseção foram apontadas nas sugestões das duplas para as ferramentas no formulário 1.

Quadro 11- Análise de aspectos técnicos mais pontuais

	Dupla 1			Dupla 2			Dupla 3		
	(A)	(P)	(I)	(A)	(P)	(I)	(A)	(P)	(I)
Indique: (A) Adequadamente, (P) Parcialmente, (I) Insatisfatoriamente									
1 Quanto aos aspectos técnicos mais pontuais:									
1.1 Facilidade no manuseio: refere-se às características da interface que a tornam de fácil utilização pelos usuários.	x			x			x		
1.2 Amabilidade de Diálogo: refere-se às características da interface em fornecer uma forma de diálogo com o usuário que seja clara, precisa e familiar.		x			x			x	
1.3 Conforto Visual/Interface atrativa: refere-se às características que tornam a interface agradável ao usuário.	x			x			x		
1.4 Grau de compreensão sem a presença de um instrutor.		x			x			x	
1.5 Clareza das alternativas possíveis de comando.		x			x			x	
1.6 Compatibilidade com plataforma web.	x			x			x		
1.7 Ferramentas autoexplicativas.		x			x			x	
1.8 Disponibilidade de tutorial e menu ajuda.									
1.9 Navegabilidade pelo teclado.						x			x
1.10 O design do software	x			x			x		

Fonte: extraído do formulário das três duplas

Quanto à facilidade no manuseio, as duplas decidiram optar por “adequadamente”. De acordo com dupla 2, o MS segue a linha dos demais *software* de GD e é bastante simples sua manipulação, solicitando apenas para as ferramentas embutidas em um único item, algo que sinalizasse-as, pois, dessa maneira, facilitaria o diálogo entre *interface* e usuário. Essa sugestão também fora dada pelas duplas 1 e 3.

A amenidade de diálogo para as três duplas foi sinalizada como “parcialmente”, precisando ser ajustada. Como justificativa, a dupla 2 relata que optou por essa escolha em virtude das notificações do *software* estarem sem mensagens de retorno e algumas ferramentas em outros idiomas. Para a dupla 3, a ausência de um breve texto (ou *gif*) que sinalizasse para o usuário a funcionalidade das ferramentas fez com que escolhesse a opção supracitada.

O grau de compreensão sem a presença de um instrutor foi assinalado com “parcialmente” por todas as duplas. Segundo a dupla 1, foi possível utilizar, de modo geral, as ferramentas sem auxílio do instrutor, mas algumas delas por não serem intuitivas geraram dúvidas quanto a sua função, a exemplo das ferramentas *Brush*, *Fill*, *Pallete* e *Linestyle*, que por serem dependentes, não tornam seu uso intuitivo. A dupla 2 justifica sua opção pelo fato do uso de algumas ferramentas estarem confusos e até mesmo não funcionando, como, por exemplo, o ímã do **Referencial**, deixando na dúvida se há um *bug* na ferramenta ou se o usuário não está sabendo utilizar.

Com relação à clareza das alternativas possíveis de comando, para as duplas 1, 2 e 3 carece de aprimoramento. Sobre essa opção, a dupla 2 coloca que o *software*, por si só, é bem intuitivo, entretanto alguns comandos de uso das ferramentas não são claros, nem tampouco o que pode ser realizado pelo teclado. As demais justificaram que já haviam tratado desse item nas observações dadas anteriormente aos outros aspectos.

No que diz respeito à compatibilidade do MS com a plataforma *web*, foi atestado por todas as duplas como “adequadamente”. Ressaltam como interessante essa ideia em virtude de ajudar o trabalho do professor, visto que não precisará instalar para poder utilizar.

Quanto as ferramentas estarem autoexplicativas, podemos verificar, no quadro acima, que a opção escolhida pelas duplas foi “parcialmente”, e que solicitam que seja implementada, em alguma aba do *software*, um “tutorial” sobre como utilizar algumas das ferramentas.

Nesta versão de teste, não tivemos como inserir um tutorial nem tampouco um menu ajuda. A navegação pelo teclado só acontece em duas situações: para deletar os objetos construídos na interface do MS ou para nomear seus respectivos pontos.

A dupla 1 encerrou suas observações com a seguinte colocação: *Particularmente, o fator tempo é uma variável a ser considerada na interferência das nossas análises. Pesquisas que demandam um trabalho de conhecimento do ambiente, familiarização, manuseio e análise, demandam mais tempo, o que ficou comprometido diante de alguns fatores como horários dos participantes, falta de internet, falta de energia, dentre outros. O processo de instrumentalização no MS exige mais tempo, visto a quantidade de aspectos a serem observados, além das análises conceituais solicitadas. Também sentimos falta de um texto inicial explicativo do MS e a que ele se propõe para um usuário, por exemplo, um professor.*

Todas as observações realizadas nos dois formulários anteriores pelas duplas serão levadas em conta na evolução do *software*, pois o intuito dos pesquisadores é oferecer condições para que, por meio do MS, haja a construção de conhecimentos relacionada às grandezas área e perímetro.

6.3.3 Formulário 3 (análise de aspectos pedagógicos)

O quadro a seguir apresenta as opções assinaladas pelas duplas referente ao formulário 3 que diz respeito aos aspectos pedagógicos do *software*.

Quadro 12- Opções escolhidas pelas duplas

	Dupla 1			Dupla 2			Dupla 3		
Indique: (A) Adequadamente, (P) Parcialmente, (I) Insatisfatoriamente	(A)	(P)	(I)	(A)	(P)	(I)	(A)	(P)	(I)
2 Quanto aos aspectos pedagógicos:				X			X		
2.1 Capacidade de gerar concentração e motivação;				X			X		
2.2 Espaço para o desenvolvimento de competências e habilidades;				X			X		
2.3 Preservação do ritmo individual de aprendizagem;				X			X		
2.4 Geração de autonomia para que o usuário construa seu próprio conhecimento;					X		X		
2.5 Promoção de interatividade;				X			X		
2.6 Contextualização com a proposta curricular;				X			X		

Fonte: extraído do formulário das duplas

A dupla 1 decidiu não assinalar nenhuma das opções e, como justificativa, fazem a seguinte observação: *Acreditamos que, ao tornar as ferramentas mais intuitivas, o MS poderá gerar mais concentração e autonomia dos sujeitos. O desenvolvimento de competências e habilidades, contextualização da proposta curricular, ritmo de aprendizagem e autonomia dependem da situação na qual ele será utilizado, considerando o nível de ensino, a maneira como os professores irão propor seu uso a partir da proposta curricular com seus objetivos, competências, critérios de avaliação da instituição à qual estão vinculados.*

Para a dupla 2, os itens 2.1, 2.2, 2.3, 2.5 e 2.6 foram assinalados com “adequadamente”, ou seja, o *software* oferece as condições destacadas em cada item. Apenas o 2.4 é sinalizado como “parcialmente”, pois a dupla acredita que depende do planejamento da situação didática. Por exemplo, segundo ela, caso o estudante seja levado a seguir passo a passo instruções de uma tarefa, a autonomia pode ser comprometida. A dupla 3 considera que o *software* esteja adequado para todos os aspectos pedagógicos presentes no formulário 3. Apresenta ainda, ao final de suas análises, algumas habilidades abordadas na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), nas unidades temáticas de Geometria e Grandezas e Medidas, que, segundo os participantes dessa dupla, são contempladas pelo MS.

Entre as habilidades de geometria, destacam os elementos relacionados a polígonos, retas, figuras geométricas planas, entre outros. No que diz respeito às grandezas e medidas, a dupla destaca as habilidades presentes no 6º ano. São elas:

- (EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), **sem uso de fórmulas**, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
- (EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

A dupla destaca ainda o potencial do *software* para trabalhar com área e perímetro, inclusive nas situações com números irracionais. Nesse caso, o professor precisará comentar que o resultado apresentado é uma boa aproximação. Por fim, o participante “E” faz a seguinte observação: *o MS é muito mais do que explorar as grandezas geométricas área e perímetro.*

7 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

De acordo com Tibúrcio (2016), a etapa da análise a posteriori baseia-se no contraste entre as hipóteses que foram levantadas para o desenvolvimento do *software* com o que ocorreu realmente durante a experimentação. Para o autor, bem como para nós, essa análise é essencial para que o *software* seja aprimorado e aperfeiçoado. A análise a posteriori culmina na fase de validação, que é a conclusão da análise que fora realizada. Nessa etapa,

verifica-se se o conjunto (fase teórica e experimental) contribui para o ensino e a aprendizagem de conhecimentos matemáticos. Esta fase busca compreender se o software atende aos requisitos que foram levantados. Considerando as dimensões da EDI (Epistemológica, Cognitiva, Didática e Informática) e os requisitos nelas levantados, analisa-se a eficácia do software em atendimento dos requisitos que foram definidos (TIBÚRCIO, 2016, p. 58).

Nesse sentido, ainda segundo TIBÚRCIO (2016) a validação de um *software* educativo pode ser realizada a partir de uma análise teórica: as situações de uso, funcionalidades e objetivos do SE (*Software* Educativo) que foram definidos na análise *a priori* são confrontados com o que se conseguiu desenvolver na experimentação e, com as conclusões desta investigação, o *software* é implementado ou o desenvolvimento é concluído.

De acordo com Sommerville (2011), a validação tem a intenção de mostrar que um *software* se adéqua a suas especificações, ao mesmo tempo em que satisfaz os critérios do cliente. É uma avaliação do programa, em que o sistema é executado com dados de testes simulados. Assim, esse procedimento pode envolver “processos de verificação, como inspeções e revisões, em cada estágio do processo de *software*, desde a definição dos requisitos de usuários até o desenvolvimento do programa” (SOMMERVILLE, 2011, p.41).

Diante desse contexto, nesta seção, realizaremos uma discussão das respostas dadas aos questionários 1 e 2 pelos sujeitos que participaram do experimento, confrontando suas observações com os requisitos previstos e elementos das análises preliminares e *a priori*, com o propósito de verificar se o MS atende ao objetivo pensado para sua concepção (dar suporte ao professor para o ensino de área e perímetro em um ambiente informático dinâmico). Ampliaremos ainda esses achados, inserindo nas discussões algumas sugestões para o aprimoramento do MS, identificados pelo pesquisador no material das duplas.

7.1 Discussão das Respostas ao Questionário1

7.1.1 Análise de aspectos relativos ao conceito de área e perímetro

Após as análises das ferramentas e o preenchimento dos formulários discutidos no capítulo anterior, solicitamos aos participantes que respondessem a alguns questionamentos mais pontuais em relação aos conceitos de área e perímetro, trabalhados no *software*. O primeiro estava relacionado à seguinte questão:

O *Magnitude Studium* foi pensado, desde sua concepção, em dar suporte ao professor para o ensino de área e perímetro em um ambiente informático, mais precisamente um micromundo dinâmico, visto que, ao longo dos anos, pesquisas em educação matemática vêm apontando dificuldades na aprendizagem de alunos das mais variadas etapas da educação básica, referente ao conceito de área e perímetro, dentre elas: **a confusão entre área e a figura, área e sua medida e área e perímetro**. Entendemos, a partir dos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989), que alguns elementos são pertinentes no estudo do conceito de área e úteis na superação de tais dificuldades: distinguir a área da figura (já que figuras distintas podem ter mesma área), a área de uma figura de suas diferentes medidas, usar superfícies unitárias diversas para a medição da área de figuras e distinguir a área de uma figura do seu perímetro (PRATES, 2011).

Após essa reflexão, solicitamos que os integrantes de cada dupla, em comum acordo, respondessem a pergunta abaixo:

Em sua opinião, as ferramentas do Magnitude Studium oferecem condições a esse suporte? Justifique sua resposta.

7.1.1.1 Respostas dadas pela dupla 1

De acordo com a dupla 1, o MS apresenta ferramentas interessantes, como a possibilidade de construção de diferentes polígonos e a inserção dos jogos poliminós e Tangram. No entanto, para essa dupla, ao se considerar o conceito de área das autoras francesas e as dificuldades associadas a esse conceito, às quais o MS se propõe a oferecer condições para superação, ainda veem esse *software* com algumas restrições. São elas:

- **distinção entre área e figuras:** os jogos poliminós e Tangram são dois recursos interessantes para o trabalho dessa distinção, sem a interferência do quadro numérico. No entanto vejo, que o MS pode reforçar essa dificuldade quando possibilita ao usuário construir uma mesma figura e, com a rotação, obter diferentes valores para a sua área ao fazer uso da ferramenta Lebesgue. Vejo o trabalho com os jogos e o recurso das malhas ainda como superior ao MS.
- **usar diferentes superfícies unitárias para a medição de áreas de figuras:** esta dificuldade poderia ser trabalhada com o ícone Referencial. No entanto, não percebi a relação entre as malhas, de modo a favorecer esse trabalho.
- **distinção entre área e perímetro:** acredito que alguns ícones precisam ser revistos, a exemplo da Fita métrica, que já determina diretamente a área e o perímetro, com unidades de medidas convencionais já pré-estabelecidas, centímetro e centímetro quadrado. De que maneira o aluno irá distinguir as medidas encontradas? De que maneira ele poderá realizar a mudança da unidade de medida? Observe ainda que, nesses dois casos, a relação está sendo estabelecida entre o quadro geométrico e numérico, quando deveria ter a sua origem no quadro geométrico e das grandezas.

Com relação ao primeiro tópico, **distinção entre área e figura**, a dupla 1, ao analisar a ferramenta de Lebesgue, identificou que ela informa a quantidade de superfícies unitárias quadradas possíveis de colocar no interior da figura. No entanto, segundo essa dupla, ao rotacionar a figura, o número indicado de quadrados também fica diferente. Atestam, assim, que esse fator pode conduzir o aluno a certa confusão em relação à unidade de medida de área, quanto cabe de quadrados inteiros dentro da figura e à área que a figura possui.

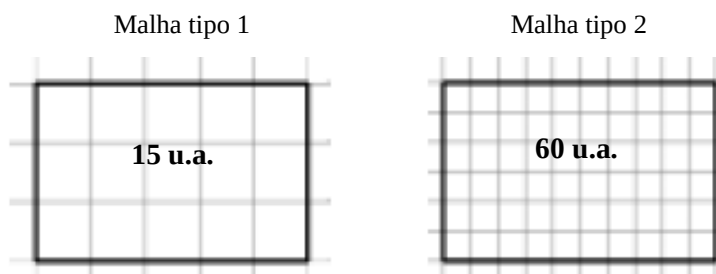
Como exemplo, citam as análises realizadas com os triminós do capítulo anterior. Ao final das respostas dadas a esta questão, os componentes da dupla 1 sugerem que a ferramenta de Lebesgue pudesse ser utilizada para o cálculo de área por falta ou excesso.

Realizamos, em nossas análises preliminares, um estudo sobre a abordagem de área em Lebesgue, que culmina nos requisitos presentes no apêndice B, no qual explicamos a ideia de área para esse matemático, como também as condições que o *software* deveria oferecer para o trabalho com tal abordagem. Neste caso, seguindo os estudos de Jacob (2015) sobre a abordagem de área em Lebesgue, admitimos que qualquer figura plana esteja contida em uma malha quadriculada, na qual cada quadradinho tem a mesma área α

$= 2^{-2K}$, em que k é um número inteiro escolhido arbitrariamente. Ou seja, podemos aumentar ou diminuir a área de cada quadradinho da forma que nos for mais conveniente, multiplicando ou dividindo por dois o comprimento dos lados de cada um deles.

Dessa maneira, ao construirmos duas figuras de mesma área, como as apresentadas a seguir, vamos apenas mudar a unidade de medida de área quadrada para $\frac{1}{2}$ da área do quadradinho da malha, contudo as áreas das duas figuras não se alteram.

Figura 168- Exemplo da dissertação de Facco (2003)



Fonte: adaptado de Facco (2003)

Para explicar a questão da área para Lebesgue, Jacob (2015) chama cada quadradinho da malha de elemento de área α e prossegue com a seguinte explicação:

Seja Q_α o conjunto de todas as figuras planas formadas por uniões (finitas ou infinitas) de elementos de área α . Sendo assim, dado $X \in Q_\alpha$, existe n inteiro positivo tal que: $X = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$; onde Q_j é um elemento α , para cada $j = 1, \dots, n$, (caso contrário, X é uma figura formada por infinitos elementos de área α). As figuras em Q_α serão chamadas de figuras discretas (JACOB, 2015, p. 31).

Como exemplo a essa definição, o autor nos apresenta a seguinte imagem:

Figura 169- Exemplo da área para Lebesgue



Fonte: (JACOB, 2015, p.26)

Segundo Jacob (2015), a imagem acima possui **$n = 334$ elementos de área $\alpha = 1 \text{ mm}^2$** . Ainda para esse autor,

é sempre possível aumentar a resolução de uma figura discreta devido à escolha que dizemos para a forma do número que representa a área de cada quadradinho. Quando a ordem da resolução aumenta de k para $k + 1$, o número de elementos de área $\alpha = 2^{-2k}$ aumenta de n para $4n$ elementos de área $\beta = \alpha/4$ (JACOB, 2015, p. 27).

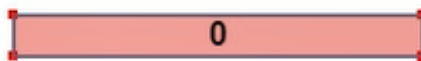
Não só poderíamos utilizar a malha quadrada, nesta situação, mas também a isométrica. Nesse caso, os elementos de área seriam triângulos equiláteros. Consideraríamos, então, o conjunto de todas as figuras discretas formadas por uniões (finitas ou infinitas) de triângulos do papel triangulado (JACOB, 2015). A partir dessa explicação, ratificamos a colocação da dupla 1 de que a ferramenta de Lebesgue poderia expressar o cálculo da área por falta ou excesso, levando em conta a escala e o tipo de malha.

Apresentamos a seguir algumas sugestões com base nos requisitos extraídos da análise preliminar para que essa ferramenta possa atender à abordagem de área como uma grandeza (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

Uma ideia para esta nova funcionalidade da ferramenta de Lebesgue seria que a cada vez que clicássemos dentro da figura, depois de ativado o ícone correspondente a essa função, pudéssemos ampliar ou reduzir a área de cada quadradinho, conforme explicitamos nos parágrafos anteriores, realizando uma mudança na unidade de medida de área não convencional (quadradinhos) de cada figura. Interpretamos que essa maneira pode contribuir para o aluno observar que, mesmo mudando a unidade de medida, a área permanece invariável.

Outra forma é escolher para a ferramenta uma grade de quadradinhos que tenha 1 mm de lado ao invés de 1cm, evitando que a medida da área do retângulo abaixo, por exemplo, fosse zero (0). A maneira como a ferramenta está interpretando a questão da medida da área para Lebesgue pode conduzir o aluno a pensar que tal figura não possui uma área, por não ser possível dissociar a possibilidade de medir, do ladrilhamento efetivo com a superfície unitária presente nessa ferramenta na versão atual do MS.

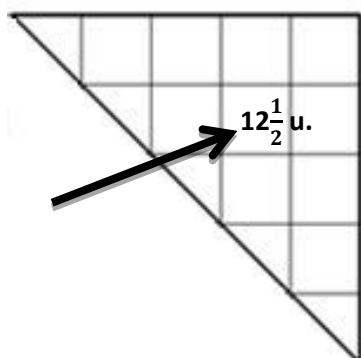
Figura 170- Área em Lebesgue



Fonte: da pesquisa

Outro fato a considerar é que a ferramenta pudesse expressar quantas unidades quadradas (elementos de áreas α) cabem aproximadamente dentro da figura, levando em conta uma grade com quadradinhos de 1mm de lado. Entretanto, o cálculo consideraria não apenas o inteiro (unidade não convencional quadradinho) que cabe exatamente dentro da figura, como acontece atualmente, mas que expusesse a área medida, tendo em vista a unidade de medida decomposta e apresentando a malha como na figura a seguir:

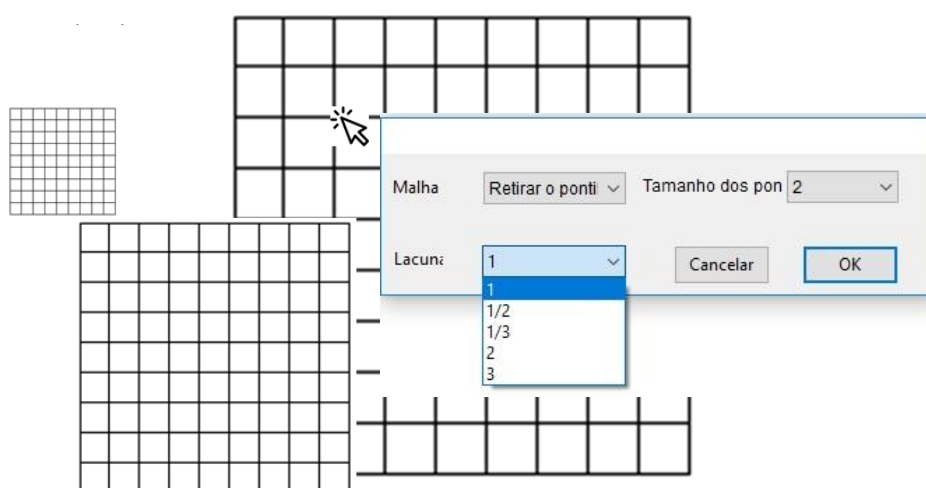
Figura 171- Área medida levando em conta a unidade quadrada não convencional



Fonte: da pesquisa

Na situação acima, tomamos como unidade de medida de área um quadrado da malha que chamamos de $1u$. A área da figura então pode ser representada por $12\frac{1}{2}u$ (descompostos). Por fim, pensamos ainda, como sugestão de funcionamento para a ferramenta de Lebesgue, em deixar a escolha da escala da malha a critério do usuário, ou seja, depois de selecionar tal ferramenta e seguidamente clicar dentro da figura com o botão esquerdo do mouse, poder realizar essa escolha, como no exemplo abaixo:

Figura 172- Escolha pelo professor



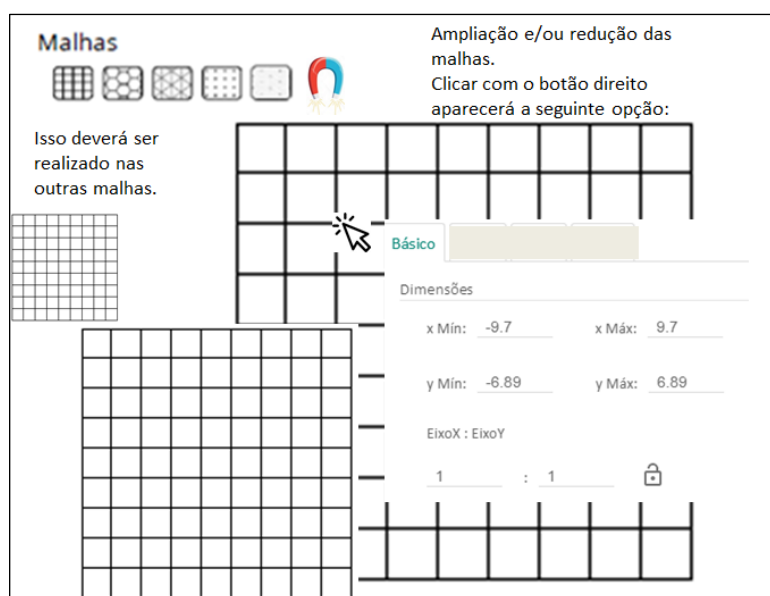
Fonte: adaptado dos requisitos da pesquisa

Dependendo da escolha pelo usuário, o *software* calcularia ou recalcularia a área da figura de forma convencional ou não.

No que diz respeito a **usar diferentes superfícies unitárias para a medição de áreas de figuras**, a dupla 1 coloca que não há uma relação entre as malhas presentes no MS. Essa dupla se refere a um *bug* no sistema que o MS está apresentando, entre a ferramenta *measurement* (fita métrica) e as malhas. Ao construirmos um polígono na tela em branco do *software* e, em seguida, determinarmos a área e o perímetro por meio da fita métrica, quando mudamos as malhas, acontece uma variação da área e do perímetro no quadro “medidas”. Solicitam ainda que seja inserida uma forma do usuário saber as escalas das malhas.

No capítulo 5 dos requisitos para o *software*, havíamos previsto uma função na qual fosse possível ajustes nas malhas, como, por exemplo, ampliar ou reduzir a distância entre os pontos, podendo ser utilizadas as teclas (+ e -) do teclado ou, com o botão direito do *mouse*, da seguinte forma: após ter sido ativada uma das malhas, o *software* deverá fornecer uma janela na qual será possível inserir as coordenadas (x, y) para o ajuste das escalas.

Figura 173- Ajustes das escalas das malhas



Fonte: da pesquisa

Como precisávamos de uma primeira versão do MS para teste, em virtude da disponibilidade dos especialistas para as análises das ferramentas e menus, alguns dos requisitos elicitados não foram inseridos nesta versão 1.0.

Por fim, a dupla escreve que não vê no MS, a partir dos ícones, a possibilidade neste momento de trabalhar a distinção entre área e perímetro. De acordo com a especialista em grandezas e medidas, a construção de linhas não poligonais deveria ser inserida para a abordagem do perímetro e, posteriormente, a distinção entre área e perímetro. Como sugestão, propõe que o MS aborde, neste primeiro momento, apenas o conceito de área, e, se a ideia é

trazer a proposta de Douady e Perrin-Glorian (1989) e a de Lebesgue com a teoria da medida, elas precisam estar articuladas, o que, no seu entendimento, não está ocorrendo.

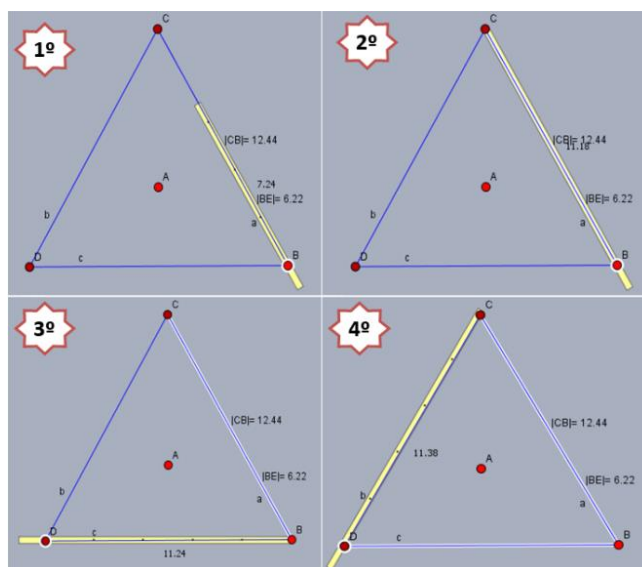
Com relação à **distinção entre área e perímetro no software**, a dupla 1 afirma a necessidade da implementação de uma ferramenta que leve o aluno a verificar o perímetro, sem exatamente ser estabelecido no primeiro momento pela fita métrica.

Para o trabalho com perímetro, inserimos no MS, já na versão para testes, a condição de destacar os lados ou parte deles (ver capítulo 5). A ideia é que o usuário (professor) pudesse utilizar os lados das figuras como unidade de medida não convencional e explorasse os conceitos de comprimento e perímetro, levando em conta tais possibilidades. Essa situação foi apresentada à referida dupla pelo engenheiro pesquisador, assim que o mesmo analisou as respostas dadas por ela ao questionário 1.

Para justificar a ideia de estabelecer o perímetro das figuras poligonais, a dupla 1 sugeriu a inserção de uma ferramenta que oferecesse condições de ser escolhida a unidade de medida desejada e permitisse ao usuário (aluno) contornar a figura por completo com alguns cliques do mouse, para então obter seu perímetro.

Em nossas análises preliminares, na dimensão informática, destacamos um procedimento bem interessante presente no *software* de GD *Cinderella* para a medição do comprimento de uma figura poligonal. Após o usuário escolher a opção “medir comprimento”, clicar com o botão esquerdo do *mouse* em um dos vértices da figura e arrastar até o outro, aparece uma espécie de fita métrica, como ilustramos nas imagens a seguir:

Figura 174- Medindo comprimento no *Cinderella*



Fonte: da pesquisa (*prints screens do Cinderella*)

Nossa ideia para atender à solicitação da dupla 1 é que o MS permita ao usuário contornar toda a figura, e, assim, obter seu perímetro. Para isso, sugerimos que o *software* forneça ao usuário a possibilidade de usar uma corda ou mesmo uma régua, trena ou fita métrica por trás de seus lados até o usuário completar o contorno. Essa opção surgiria após ele selecionar a ferramenta fita métrica, escolher a unidade de medida desejada (convencional ou não) e clicar em um dos vértices da figura. Tendo concluído esses procedimentos, automaticamente o MS apresentará, no quadro “medidas”, o perímetro da figura, conforme a unidade de medida escolhida. Dessa maneira, antes de ser realizada tal medição, o *software* não permitirá o cálculo do perímetro.

7.1.1.2 Respostas dadas pela dupla 2

Os participantes da dupla 2 decidiram dar suas respostas separadamente. De acordo com “C”, dependendo das situações de ensino modeladas pelo professor, a ferramenta pode oferecer suporte ao ensino de área e perímetro. Ainda para ele, o MS auxilia nas construções de polígonos regulares e irregulares, bem como permite o uso de malhas poligonais, decomposição/recomposição, uso de polígonos, representações de duas figuras distintas com mesma área. Essas condições mostraram-se, segundo “C”, pertinentes ao trabalho com área e perímetro em sala de aula.

Contudo, “C” observa que algumas ferramentas não estão 100% claras e seu uso resulta em maior confusão do usuário, no que diz respeito aos conceitos abordados. Outro aspecto pontuado por esse participante diz respeito à ênfase dada pelo *software* nas ferramentas para o ensino de área, não havendo muito foco no perímetro. Sugere, ao final de sua resposta, a implementação no MS de ferramentas que apresente figuras diferentes com mesmo perímetro.

O participante “D” dessa mesma dupla acredita que o MS oferece condições para o suporte explicitado na questão e traz à tona em sua resposta a seguinte justificativa:

Participante D: *Primeiramente, em relação à distinção entre a área e a figura, o software pode favorecer essa distinção quando traz uma ferramenta que fornece, mesmo que de maneira ainda aparentemente não consolidada, alguma informação em relação à área de polígonos, pois, deste modo, fica claro que a figura possui uma área, e não que é a própria área.*

Ele se refere à fita métrica e seu potencial para o cálculo da área de um determinado polígono, destacando sua pertinência pelo fato de conduzir o aluno a perceber a distinção entre a figura e sua área.

Em relação ao uso de superfícies unitárias diversas, o participante “D” descreve que isso é possibilitado por meio das diferentes malhas disponíveis no *software*, além das condições oferecidas para a construção de diferentes ladrilhos que podem servir de unidades de medida de área para a medição de várias figuras construídas no MS.

Com relação à distinção entre a área de uma figura e seu perímetro, “D” afirma que o MS apresenta um ambiente favorável para o trabalho com esses conceitos, porém depende fortemente do planejamento do professor para que essa dissociação aconteça. Segundo ele, como aparentemente não há ferramentas que remetam diretamente ao perímetro das figuras, alguns alunos podem apresentar dificuldades em dissociar área de perímetro, caso não seja feito um trabalho adequado por parte do professor, por meio do *software*. As observações dadas por esse participante coadunam com a de seu colega de dupla no que se refere à necessidade de o *software* oferecer condições mais direcionadas ao perímetro.

7.1.1.3 Respostas dadas pela dupla 3

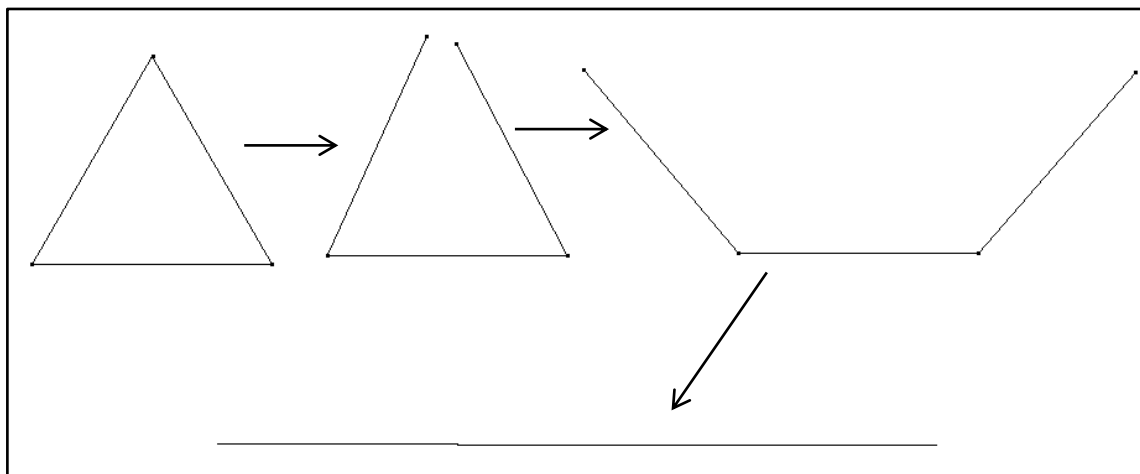
Com relação à distinção entre área e figura, para a dupla 3 é possível porque no *software* podem-se encontrar diferentes malhas e a ferramenta *measurement*. Justifica sua decisão pelo fato dessas ferramentas apresentarem figuras diferentes que tenham mesma área, seja tratando de unidade de medida não convencional (malhas) ou com unidade convencional (*measurement*).

Destaca ainda o potencial do MS na distinção entre área e medida, por contar com as peças do Tangram, dos Poliminós e outros polígonos. Explica que nesta dissociação, tem-se a possibilidade de uma mesma figura ter sua área medida por unidades de medidas diferentes, o que resulta em números (medidas) distintos para a área da mesma figura. Entretanto, para a dupla, o usuário poderá ficar limitado ao trabalho com unidades de medidas não convencionais.

Quanto à distinção entre área e perímetro, a dupla 3 explica a possibilidade de trabalhar, por meio dos poliminós, a ideia de figuras geométricas com mesma área mas que nem sempre preservam o perímetro. Ao final de suas respostas, o participante “E”, no comentário ao formulário, sugere a inserção no MS de uma ferramenta que permita ao usuário

abrir as figuras por um de seus vértices para o trabalho com comprimento e perímetro da seguinte forma:

Figura 175- Ideia para trabalhar perímetro



Fonte: da pesquisa

De maneira geral, as respostas trazidas pelas duplas apontaram diferentes potencialidades do MS para o ensino de área, mas ressaltam a necessidade do aprimoramento de várias funcionalidades de ferramentas e menus do *software*, como também a inserção de mais algumas que levem o aluno a construir o conceito de perímetro, bem como à distinção entre as grandezas supracitadas.

7.1.2 Questão 2 (situações que dão sentido a área)

A pergunta 2 do questionário entregue às duplas estava relacionada à Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996), mais especificamente às situações que dão sentido ao conceito de área: situação de comparação de área, medida de área, produção de superfície e mudança de unidade (FERREIRA, 2010). Solicitamos que lessem um pequeno texto – o qual apresentamos abaixo – e, com base nele, respondessem à seguinte questão:

Em sua opinião, o Magnitude Studium oferece condições ao professor para elaborar tarefas sobre área relacionadas aos tipos de situações supracitadas? Justifique sua resposta.

Texto apresentado antes da referida pergunta:

Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996)

O conceito de área é constituído por uma tríade $C = (S, I \text{ e } R)$, na qual “**S**” é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência), **I** é o conjunto de invariantes sobre os quais se assenta a operacionalidade dos esquemas (conceitos em ação e teoremas em ação) (o significado) e **R** é o conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante). Baseada nessa teoria, Baltar (1996) desenvolveu em sua tese de doutorado um conjunto de situações que dão sentido ao conceito de área e que fora ampliado nos estudos de Ferreira (2010), a saber:

Situação de comparação trata-se, em primeiro plano, de decidir se duas figuras pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência (ou seja, se têm mesma área) ou de estabelecer uma ordem entre as áreas de duas ou mais figuras.

Situações de medida, o resultado esperado é um número seguido de uma unidade de área e, nesse caso, o que está em foco é a passagem da grandeza ao número mediante a escolha de uma unidade.

Situações de produção são aquelas nas quais se solicita que sejam desenhadas ou descritas figuras que respeitam determinadas condições: por exemplo, traçar no papel quadriculado uma figura de área 10 cm^2 ; dada uma figura F, desenhar uma figura G, diferente de F, com mesma área; ou uma figura J com perímetro igual ao de F etc.

Situações de mudança de unidade, uma área é inicialmente representada utilizando certa unidade U e solicita-se que seja expressa a mesma área, com o uso de uma unidade diferente de U, como por exemplo, expressar em hectares a área de uma região de três quilômetros quadrados (SILVA; BELLEMAIN, 2017, p. 6).

7.1.2.1 Respostas dadas pelas duplas

De acordo com os participantes da dupla 1, ao longo dos testes realizados no MS e das três tarefas elaboradas¹²⁴, foi possível observar que o *software* possibilita produzir figuras poligonais construídas com a utilização das ferramentas de polígonos, dos poliminós e do tangram; além de permitir, por intermédio da ferramenta Fita Métrica, comparar as áreas e os perímetros das figuras poligonais, a partir da determinação das medidas das áreas e dos perímetros.

No entanto, destacam algumas limitações que foram percebidas, dentre elas: a comparação entre áreas, que se restringe a figuras poligonais; os recursos das malhas, que poderiam ser utilizados para a realização da comparação de áreas e mudança de unidade; e a

¹²⁴ As tarefas serão apresentadas nos próximos capítulos por serem os últimos materiais entregues às duplas.

construção conceitual fragilizada do que seria perímetro, visto que há uma restrição das figuras a serem construídas. Posto isso, sugerem que as devidas adaptações já apontadas nas análises anteriores possam ser levadas em conta. Dessa forma, a dupla acredita que o *software* poderá dar o suporte esperado.

7.1.2.1.1 Respostas dadas à situação de comparação

Diferente da dupla 1, as demais optaram por responder cada uma das situações separadamente. Apresentamos então o que fora escrito pelas duplas 2 e 3 em resposta à questão 2, seguido de alguns comentários dos pesquisadores.

Participante C- *Situação de comparação – sim, é possível explorar essa situação no MS devido às ferramentas triângulo para paralelogramo, que possibilita a associação de mesma área entre figuras distintas, e as demais relacionadas, como também na representação de figuras sobre a malha.*

Esse participante se refere às ferramentas do MS desenvolvidas para o trabalho com a ideia de mesma área, caracterizadas em nossos estudos como caminhos até a quadratura das figuras. Com relação a essa situação, o participante “D” acredita que pode ser explorada no *software* quando nele é permitido inserir uma malha por trás da página de construção, de modo que as superfícies unitárias da malha auxiliarão nesse tipo de comparação. Destaca a possibilidade de realizar a translação nas figuras construídas na *interface* do *software*, sobrepondo umas às outras para verificar se possuem ou não mesma área.

A dupla 3 expõe que, nas respostas dadas à questão 2, pretende refletir sobre o trabalho do professor em propor atividades relacionadas às situações supracitadas. Todavia, sem levar em conta a ferramenta *measurement* (Fita Métrica), porque com ela vem unidade padrão, e no primeiro momento, a dupla acredita no potencial do *software* em não antecipar a medida (número) para que o aluno não confunda a área de uma figura com sua medida, destacando como fator principal, neste caso, a condução na dissociação entre área e número.

Para essa dupla, o *software* tem potencialidade de propor ao aluno decidir se duas figuras pertencem ou não a uma “mesma classe de equivalência”. Afirma que embora essa nomenclatura não seja tão explorada na educação básica (fato que também está presente nos números racionais com representação fracionária), podem-se trabalhar figuras dispostas em malha e fazer tal questionamento.

No que se refere ao trabalho do professor, de acordo com a dupla 3, este será o de propor as figuras adequadas para que seja possível a realização das comparações. No caso da situação de comparação da grandeza perímetro, ele pode solicitar aos alunos construam alguns pentaminós na malha e pedir que comparem seus perímetros e suas áreas (como é a mesma, então teremos bons exemplos de figuras diferentes com mesma área).

Nesta situação, a dupla se refere às famílias dos poliminós (triminós, tetraminós, pentaminós), ou seja, todas as peças dos triminós, por exemplo, têm mesma área, são formadas por três quadrados justapostos pelos lados. O aluno, na comparação das áreas das peças do triminó, poderá verificar que, mesmo sendo diferentes, possuem mesma área. Contudo, se forem comparar as áreas dos triminós com a dos tetraminós, esse último terá área maior por ser composto por quatro superfícies unitárias quadradas.

7.1.2.1.2 Respostas dadas à situação de medida

No que diz respeito à situação de medida, o participante “C” destaca que pode ser explorada no *software* por meio da fita métrica (convencional), das diferentes malhas ou mesmo da construção inicial de um ladrilho para ser utilizado como unidade de medida não padronizada.

De acordo com “D”, os diferentes tipos de malhas reforçam a possibilidade do trabalho em sala de aula com as situações de medidas. Apresentou em sua resposta o seguinte exemplo: [...] *um certo professor pode construir na malha quadriculada uma figura, pedir para o aluno, tomando como unidade de medida um dos quadrados que a compõem, que realizasse a medição da figura e em seguida explicitasse sua área. Logo após, o professor daria o comando para os alunos mudarem no referencial da malha quadrada para outro tipo, seguidamente os alunos deveriam tomar como unidade de medida a composição das malhas e efetuar novamente a medição.*

Segundo o participante “D”, esse tipo de atividade permitida pelo MS pode conduzir os alunos a perceberem que, a depender da unidade escolhida, obterão números diferentes para expressar a medida da área de uma figura, entretanto sua área não se altera.

Para a dupla 3, as **situações de medidas** estão mais do que claras pelo fato do *software* possuir diferentes malhas. Entretanto, segundo a dupla, o MS tem uma forte limitação: não há graduação da malha. A partir desse comentário, sugere:

Sugestões da dupla 3: *graduar a malha quadriculada, porque da forma que está, com as ferramentas atuais, a unidade de medida que prevalecerá é o centímetro quadrado; inserir ferramenta de duplicação (assim posso construir um triângulo retângulo com área sendo a metade da área do quadradinho da malha) e, por meio de várias duplicações, fazer uma sobreposição de vários desses triângulos numa figura qualquer e descobrir a possível medida da área, através do processo de ladrilhamento de triângulos.*

7.1.2.1.3 Respostas dadas à situação de produção de superfície

De acordo com o participante “C”, esse tipo de situação pode ser levada em conta apenas parcialmente no *software*, uma vez que não oferece a possibilidade de se criar um polígono regular dada uma área definida, comprometendo o desenvolvimento de algumas situações de ensino que dependem de figuras com unidades de medidas determinadas. Segundo “D”, o *software* possibilita bastante a construção de situações de produção, principalmente com o auxílio das malhas. Porém, compactua com a observação do seu colega de dupla.

Diferente da anterior, a dupla 3 interpreta que é possível a criação de várias situações de produção de superfície pela dinâmica do próprio *software* para construção de figuras geométricas planas.

7.1.2.1.4 Respostas dadas à situação de mudança de unidade

Com respeito a essa situação, temos duas respostas dadas pelos participantes da dupla 2 apresentadas abaixo:

Participante C: *Situações de mudança de unidade – podem ser construídas apenas parcialmente, pode-se trabalhar com unidades de medida das malhas poligonais disponíveis, mas dado o exemplo do questionário, não há a possibilidade de mudar a unidade de medida na perspectiva de cm para mm, por exemplo.*

Participante D: *O trabalho com Situações de Mudança de Unidade pode ser feito amplamente, desde que seja bem orientado. Por exemplo, por meio dos políminós é possível fazer esse trabalho, em que a tarefa exija que a área de determinado políminó seja tomada como unidade de medida de área e, a partir de então, a área de outros políminós devam ser*

determinadas. Esse trabalho pode ser feito também por meio do uso das diferentes malhas que o software permite utilizar.

Podemos observar que tanto o participante “C” quanto o “D” destacam como positivo os diversos caminhos oferecidos pelo *software* para o trabalho com a situação de mudança de unidade não convencional. Entretanto, “C” destacou a necessidade de ser inserida no MS uma ferramenta que possibilite as mudanças das unidades convencionais, como por exemplo, de cm para mm.

A dupla 3, em sua resposta concernente a este tipo de situação, também enfatiza a limitação do MS para a mudança de unidade convencional, sugerindo a possibilidade de tal escolha pelo professor. Contudo, igualmente ao participante “D”, aponta os vários caminhos que o *software* permite explorar por meio das peças predefinidas do tangram e poliminós para a construção de situações de mudança de unidade.

Nas respostas dadas pelas duplas, identificamos as mais diferentes maneiras oferecidas pelo MS para se construir as situações que dão sentido à área como grandeza. Todavia, deixam clara a fragilidade do *software* no que diz respeito às escalas das malhas, a não possibilidade de mudança da unidade convencional, como também criar uma figura tendo sua área previamente estabelecida. As duplas solicitam ainda que possa ser ampliado o trabalho com as grandezas área e perímetro relacionado às figuras não poligonais. Sugerem, por fim, que essas observações sejam levadas em conta visando ao aprimoramento do MS para o ensino de área e perímetro.

7.1.3 Questão 3 referente à decomposição e recomposição no MS

A pergunta 3 do questionário estava relacionada à ideia da decomposição, recomposição e equidecomposição. Para respondê-la, os participantes precisariam refletir sobre o porquê da presença das ferramentas de cortes no *software*, realizando a leitura do seguinte texto:

Euclides/David Hilbert

Na barra inferior do *software* temos o ícone “tesoura”, ao clicarmos nela, abrirá um menu de contexto contendo as ferramentas de corte e colagem. A primeira da esquerda para direita permite cortar qualquer polígono. A segunda e a terceira são programadas para triangularizar os polígonos construídos e a última, nesta ordem, permite colar as figuras. As funcionalidades dessas ferramentas dão conta da **decomposição e recomposição de figuras**: (método da partição) iniciado por Euclides e estudado por Hilbert, entre outros, que consiste em para calcular a área de uma figura, tenta-se dividi-la em um número finito de partes, de tal modo que essas partes possam compor uma figura de área a qual conhecemos. (BOLTIANSKI, 1981). As ideias da triangularização nos permitem trabalhar com a **equidecomposição**. Duas figuras se chamam **equidecomponíveis** se cortando de certo modo uma delas em um número finitos de partes, pode-se, ao dispor das partes, compor com elas uma segunda figura (BOLTIANSKI, 1981) de mesma área que a primeira. Em Hilbert, temos a seguinte definição: “dois polígonos simples são chamados **equidecomponíveis** se eles podem ser decompostos em um número finito de triângulos congruentes dois a dois”.

Definição. Dois polígonos P e P' dizem-se equidecomponíveis quando existem decomposições. $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ e $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_n$ de tal modo que cada polígono P_i é congruente ao polígono P'_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Além disso, exige-se que os polígonos Z^3 , tenham seus interiores dois a dois disjuntos, o mesmo ocorrendo com os P'_i (LIMA, 1987). Se os polígonos P e P' forem equidecomponíveis e o mesmo ocorrer com os polígonos P' e P'' então P e P'' também serão equidecomponíveis. (Transitividade da relação “ P e P' são equidecomponíveis”.) (LIMA, 1987). Com efeito, seja $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$ uma decomposição de P em polígonos menores os quais, reagrupados, formam $P' = P'_1 \cup \dots \cup P'_n$, onde cada P'_i é congruente a P_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Ao recortar P' para obter P'' os polígonos P'_i são decompostos por sua vez em polígonos ainda menores. Estes podem ser reagrupados de um modo para formar P e de outro para formar P'' . Logo P e P'' são equidecomponíveis (LIMA, 1987).

Após lerem o texto Euclides/David Hilbert as duplas deveriam responder a pergunta abaixo, não apenas de forma dicotômica (Sim/ Não), mas justificar suas escolhas.

As ferramentas supracitadas dão conta do trabalho com tal abordagem de área no Magnitude Studium? Justifique sua resposta.

7.1.3.1 Respostas dadas pelas duplas

A Dupla 1, considerando os testes nas ferramentas de corte e colagem, identificou restrições para a elaboração, pelo professor, de tarefas relacionadas à decomposição e recomposição de figuras planas. Segundo ela, a decomposição foi possível de ser realizada, no entanto, não conseguiu recompor a contento. Considera, ainda, que para o usuário ter a ideia de decomposição e recomposição das figuras, seria necessário manter as peças e não uni-las; ou, pelo menos, deixar a opção de uma linha pontilhada ou não, permitindo ao usuário perceber as ações realizadas.

Sobre essa resposta e a maneira que o MS no momento está lidando com a colagem, interpretamos que as linhas das peças, ao serem recompostas, desaparecessem. Dessa forma, estaríamos obtendo uma nova figura. Mas, pensando na possibilidade do usuário decidir recortar novamente as peças e montar a figura original, a sugestão dada pela dupla pode ser mais uma opção para o aprimoramento do MS.

A dupla 2 classificou como satisfatória a maneira do *software* lidar com a decomposição, destacando como diferencial a triangularização dos polígonos com mais de três lados. Todavia, assim como a dupla 1, sugere o aprimoramento da ferramenta de colar, porque, durante o uso do *software*, foi realizada a decomposição de um polígono irregular em triângulos e quando se tentou colar a ferramenta, não funcionou.

Reflexões semelhantes foram realizadas pela dupla 3 no que diz respeito à decomposição por meio da ferramenta tesoura e recomposição com a cola. Já com relação à triangularização, temos a seguinte observação:

Dupla 3: *Embora a noção de equidecomposição utilize uma matemática avançada, pensada para o Ensino Fundamental, os casos de decomposição e recomposição são poucos, podemos contar: retângulo para triângulo; retângulo para paralelogramo; retângulo para losango. Podemos afirmar sem erro que os casos estão basicamente limitados às justificativas das expressões (fórmulas) que representam área de quadriláteros partindo do fato que área do retângulo é $A=b.h$.*

Na matemática escolar não se trabalha outras decomposições/recomposições, os cortes são precisos e bem pontuais, assim não vejo muito sentido, neste software, a ferramenta de triangular polígono.

As respostas dadas pelas duplas são bem enfáticas no que concerne ao aprimoramento da colagem, e isso foi também apontado no formulário de análise 1 por todas. Sobretudo, mais algumas sugestões foram apresentadas nas respostas da dupla 1 para o trabalho com a recomposição de figuras no MS, ou seja, sugere que ao invés de aglutinar as partes de uma figura decomposta na formação de outra, o *software* permitisse deixar as linhas demarcadas. Sobre a triangularização de polígonos com mais de três lados, há um consenso entre as duplas 1 e 2; já a 3 não acha necessário, uma vez que esse tipo de situação não é explorado na educação básica.

A ideia dos cortes realizados pelas ferramentas do MS vai além de simples decomposições corriqueiras realizadas e/ou sugeridas por livros textos utilizados na educação básica em nosso país. Nosso foco, ao pensar os vários tipos de cortes que podem ser realizados nas figuras, é oferecer caminhos ao professor para explorar diferentes situações, permitindo-lhes avançar no trabalho com a decomposição e recomposição de área de figuras planas de diferentes formas.

7.1.4 Questão 4 – análise das ferramentas para trabalhar a ideia de mesma área

Na questão 4, temos o seguinte enunciado:

4- Na barra inferior do software temos ao lado do ícone “tesoura” um menu que contém algumas ferramentas que nos permitem trabalhar com alguns das proposições do livro I de Euclides. Examine cada uma delas e em seguida expresse sua opinião sobre a potencialidade/limitação de suas interfaces para o trabalho com área numa perspectiva geométrica.

7.1.4.1 Respostas dadas pelas dupla

As duplas 1 e 2 não responderam à questão, pois segundo elas todo o comentário referente a tais ferramentas já havia sido contemplado em suas análises no formulário 1. A dupla 3 disserta que na matemática escolar não faz muito sentido encaminhar para Os Elementos de Euclides. De acordo com essa dupla, não há garantia de que Euclides, ao escrever tal obra (segundo livro mais traduzido da História da Humanidade), possuía finalidades didáticas, de ensinar matemática/geometria, enquanto que o MS tem por finalidade ensinar algo, portanto teria preocupações que não estão presentes na Teoria.

A ideia dessas ferramentas talvez não tenha ficado explícita para essa dupla, ou mesmo o enunciado pode ter conduzido a tal interpretação, pois as ferramentas triângulo para paralelogramo, paralelogramo para retângulo, e as outras do menu quadratura foram pensadas para explorar a noção de que figuras diferentes podem ter mesma área e trabalhar a ideia da quadratura de figuras. Quanto à soma de quadrados, essa diz respeito ao teorema de Pitágoras, presente na unidade temática de geometria para o 9º ano do ensino fundamental (BRASIL, 2017, p. 317).

O foco não está relacionado à exploração, pelo professor, das proposições de Euclides no sentido de exigir dos alunos provarem a igualdade das áreas das figuras de uma forma muito sofisticada por meio da axiomatização, por exemplo, se bem que isso pode ser investido em um nível de formação inicial de professores de matemática.

7.1.5 Questão 5 – medida da área em Lebesgue

A questão 5 se refere a alguns elementos (malhas) que foram inseridos no *software* cujo objetivo era permitir ser explorada a medida da área. Para isso, tratamos implicitamente da abordagem de área em Lebesgue. Nossa indagação neste momento não diz respeito à ferramenta específica do cálculo da área de Lebesgue já apresentado e discutido em capítulos anteriores, mas às diferentes malhas, porque por meio delas, tal abordagem poderia ser explorada.

5- *A área de Lebesgue de figuras discretas nada mais é que a área com a qual já estamos habituados, levando em consideração que os elementos de área α que compõem a figura possuem, no máximo, vértices e/ou lados em comum. Para trabalhar a ideia de área nesta abordagem foram inseridas diferentes malhas quadriculada e isométrica, pontilhadas ou não. E ao lado uma opção de magnetismo das figuras na malha. Em sua opinião que outros recursos poderiam ser implementados para o aprimoramento com o trabalho utilizando as malhas no MS para atender a abordagem de área de acordo com Lebesgue (1975)?*

7.1.5.1 Respostas dadas pelas duplas

De acordo com a dupla 1, a ferramenta Lebesgue já tem predeterminada que a superfície unitária coincide com a unidade de medida, o quadradinho. Não possibilita a mudança de superfície unitária. Neste sentido, entende que a abordagem do conceito de área com essa ferramenta pode estar comprometida. Ressalta a necessidade de um estudo epistemológico sobre área, medida e unidade de medida, para então serem pensados requisitos

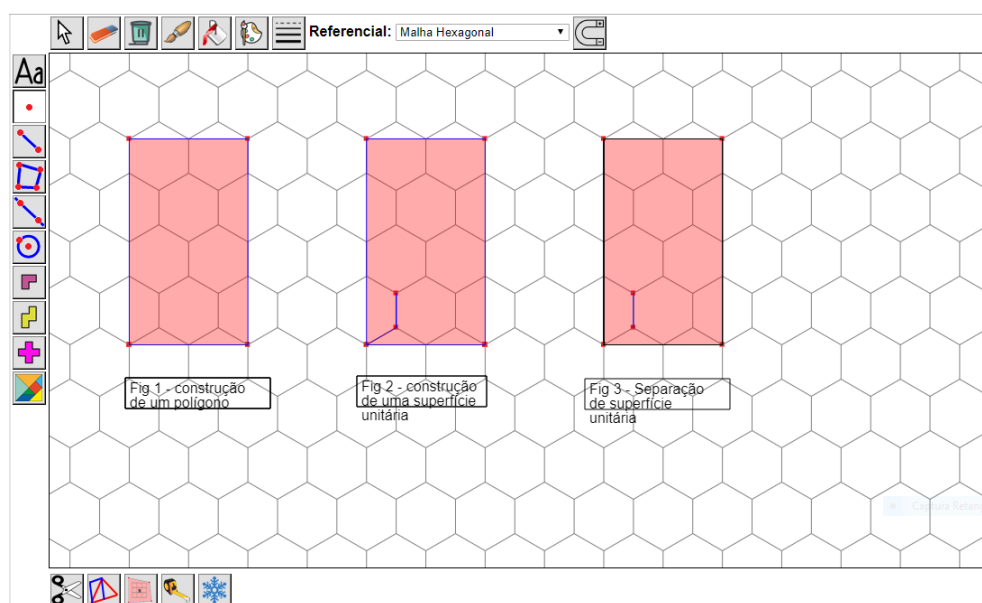
que permitam desenvolver uma ferramenta compatível com a abordagem de Lebesgue (este estudo foi realizado em nossas análises preliminares). A dupla também não conseguiu visualizar em que tal ferramenta irá contribuir com o trabalho de área enquanto grandeza, na perspectiva das pesquisadoras francesas.

Nesta parte inicial da resposta dada à questão 5, a dupla se refere à ferramenta do cálculo da área já discutida anteriormente, tendo sido apontados possíveis caminhos para seu aprimoramento com base nas análises preliminares deste nosso estudo.

Continuando sua resposta, a dupla 1 destacou que a noção de área para Lebesgue também fica comprometida pelo fato das malhas do referencial estarem muito estáticas, não podendo ser ampliadas ou reduzidas, nem tampouco oferece condições para o usuário verificar e escolher suas escalas. Aponta também o não funcionamento da ferramenta ímã e o fato das figuras ficarem presas às malhas. Vejamos um dos trechos da observação dada pela dupla 1:

Com relação às malhas, não pudemos perceber qual a sua utilidade em se tratando de Lebesgue. Observe o exemplo abaixo: um polígono qualquer é construído, em seguida o usuário escolhe uma determinada unidade de medida de área, neste caso metade de um hexágono, de modo a realizar a contagem de quantas dessas unidades serão necessárias para recobrir toda a figura.

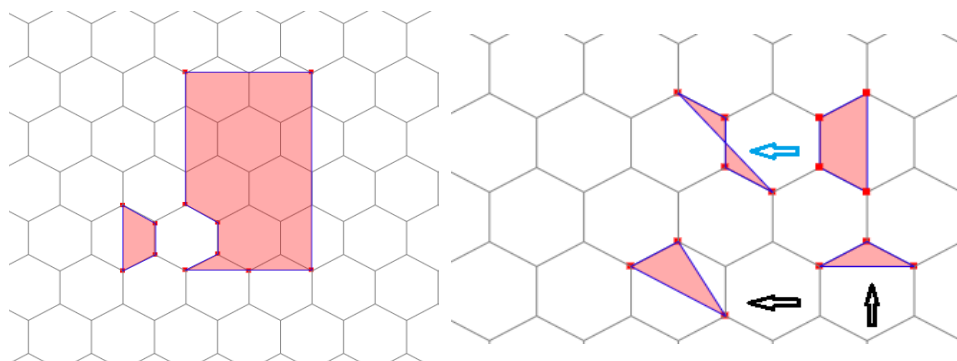
Figura 176- Observação realizada pela dupla 1



Fonte: retirada da questão 5 respondida pela da dupla 1

A unidade de medida é “deformada” ao mudar a posição, a exemplo do trapézio e do triângulo, sem a sua área ser mantida, o que não contribui para a construção do conceito de área. A fim de justificar o que fora colocado, a dupla 1 apresenta as seguintes imagens.

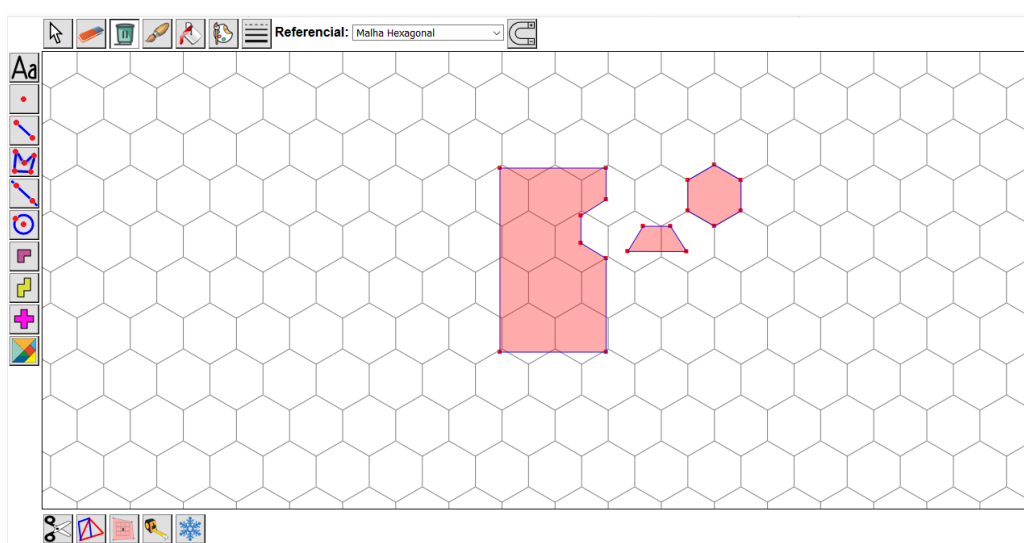
Figura 177- Protocolo da dupla 1



Fonte: retirada da questão 5 respondida pela dupla 1

Na malha hexagonal, se o objetivo do usuário for de destacar, da figura, certa parte para utilizá-la como unidade de medida de área, isso será possível. Contudo, por não oferecer condições de duplicar a figura inicial, poderá ficar difícil de construir uma tarefa de medida com essa ideia. Como tudo fica fixo na malha, se o desejo do usuário for de construir uma unidade de medida de área qualquer, não poderá arrastá-la para realizar medições nas figuras.

Figura 178- Destacando uma unidade de área



Fonte: elaborada pelos autores

Nesta situação, precisaríamos de fato de uma ferramenta de duplicar a primeira imagem criada para que, antes de recortar a figura, pudéssemos ter uma cópia da mesma, em seguida recortá-la, destacar o trapézio isósceles e tentar medir a área dessa figura, tomando-o como unidade de medida não convencional.

Se a intenção do professor for criar um hexágono como o que fora apresentado na imagem, não conseguirá movê-lo, ficará grudado na malha. Daí a importância de se ter uma ferramenta com o magnetismo que desgrude as figuras criadas nas malhas. Atendidas essas condições, possivelmente seria solucionado o que foi observado pela dupla 1.

A dupla 2 reafirma o que já havia sido apontado por ela no formulário 1:

Dupla 2 - *Pensando na abordagem de área de Lebesgue, o micromundo atualmente não possibilita o mesmo, pois a ferramenta criada para tal encontra-se com alguns bugs e não apresenta clareza de uso. Para atender a abordagem de área por Lebesgue, o software precisa melhorar os bugs da ferramenta atual e possibilitar redução/ampliação do tamanho das malhas.*

A dupla 3 faz a seguinte reflexão: *Se for na educação Básica brasileira, Lebesgue não faz parte dos saberes a serem ensinados (não ao menos com esse nome), o cálculo de área de figuras discretas é feita utilizando diferentes técnicas: contagem de quadradinho da malha; configuração retangular, coisas do tipo (mas se você dizer: isso é Lebesgue). Não o conhecia como tal e os livros não estão dando o devido crédito, logo para o professor da educação básica é desnecessário. Agora, pensando no futuro professor, num aluno de licenciatura, o professor que trabalha com formação de professores deve propor tal discussão, para que o licenciando enriqueça seu conhecimento. Partindo para o ensino superior, o software precisaria de ajustes, pois a figura pode ser deformada quando mudasse a malha.*

7.1.6 Considerações sobre o capítulo

Entendemos que, diante de todas as observações realizadas pelas duplas, tanto nos formulários quanto na resposta dada à questão 5, vários ajustes precisarão ser realizados no MS na ferramenta que calcula a área para Lebesgue, mas também nas malhas presentes no menu referencial. Interpretamos que talvez tantas dúvidas não teriam surgido em relação a Lebesgue, se antes tivéssemos apresentado às duplas sua abordagem descrita em nossas análises preliminares.

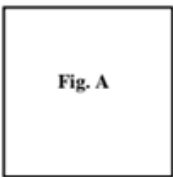
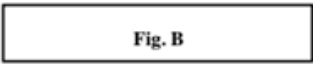
7.2 As Construções das Tarefas

Visando verificar a validação do *software* no sentido de permitir ao professor construir diferentes tarefas de área e perímetro, levando em consideração que muitos dos especialistas são professores da educação básica, pedimos que construíssem uma tarefa de área, uma de perímetro e outra que envolvesse essas duas grandezas.

Além do desenvolvimento das tarefas, as duplas deveriam colocar o objetivo da mesma, explicitar seu enunciado, descrever os procedimentos utilizados no *software* para a criação da tarefa e destacar as potencialidades e/ou limitações do MS encontradas durante a elaboração das tarefas. Por fim, ainda solicitamos que as duplas explicitassem os possíveis procedimentos que os estudantes poderiam mobilizar no *software* para responder as tarefas construídas e apontassem sugestões de qual ou quais ferramentas poderia(m) ser implementada(s) para contribuir com a resolução das tarefas propostas.

Apresentaremos, a seguir, as tarefas construídas por cada dupla e as sugestões apontadas.

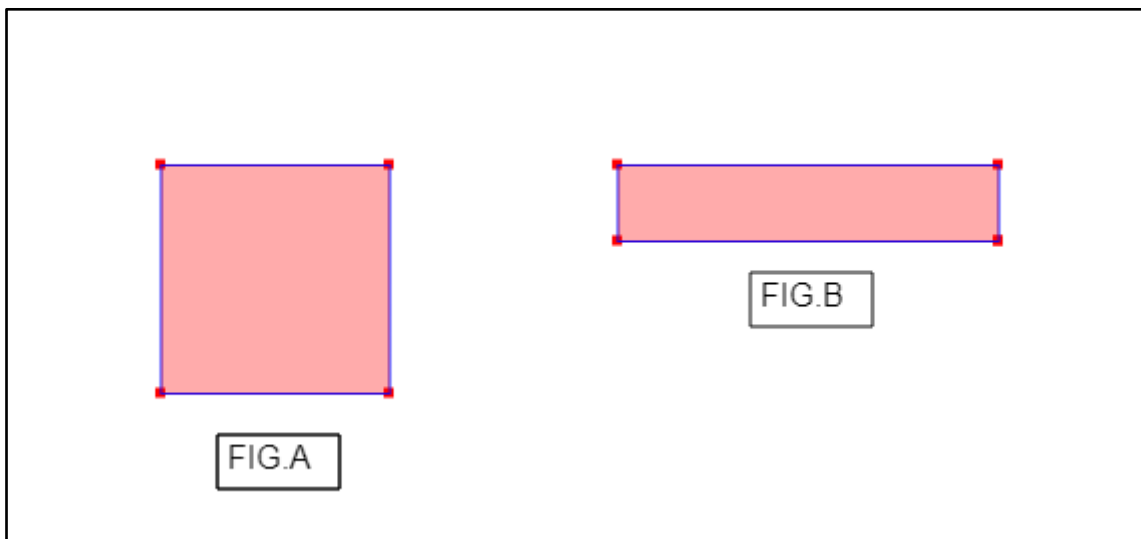
7.2.1 Tarefa 1 (área – dupla 1)¹²⁵

Objetivo da tarefa	A atividade propõe que o aluno realize a comparação de área de duas superfícies quaisquer, através de uma articulação entre o quadro geométrico, com as superfícies, e o quadro das grandezas tendo como objetivo bloquear a utilização do quadro numérico (FERREIRA, 2010, p. 66).
Título	Situação de comparação de área de duas superfícies quaisquer.
Enunciado	
ATIVIDADE 1¹³ Rosa foi a uma loja de móveis escolher um tampo de mesa. Ao chegar à loja ficou surpresa com a variedade das formas encontradas. Ajude Rosa a escolher o maior tampo de mesa, explicando como você fez em cada caso. a)  Fig. A  Fig. B Compare os tampos A e B. O que podemos dizer sobre eles? Explique como você fez:	

¹²⁵ Reproduzimos na íntegra tudo que foi colocado pela dupla 1 referente a essa tarefa de área.

7.2.1.1 Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa pela dupla 1

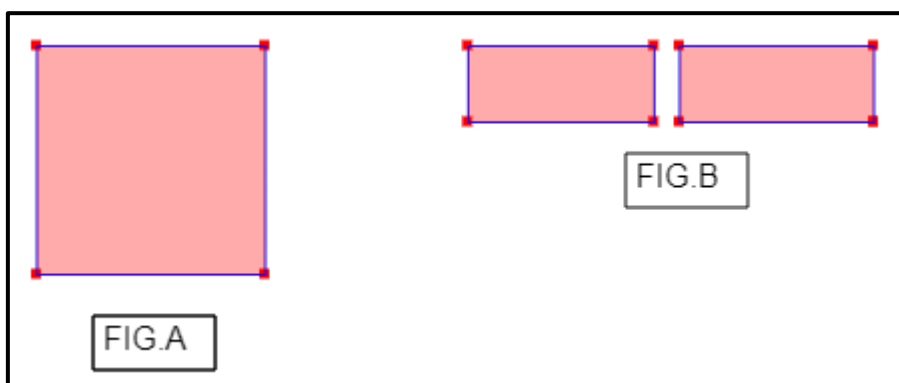
1 - Construção das figuras A e B utilizando a ferramenta de construção de polígonos.



Análise dos possíveis procedimentos que os estudantes poderiam mobilizar no software para responder à tarefa de comparação de área e as sugestões dadas pela dupla 1 para que o MS contribua com a resolução da tarefa.

1ª possibilidade: usar a decomposição e composição de figuras a partir da ferramenta tesoura. Por exemplo, realizar o corte na fig. B.

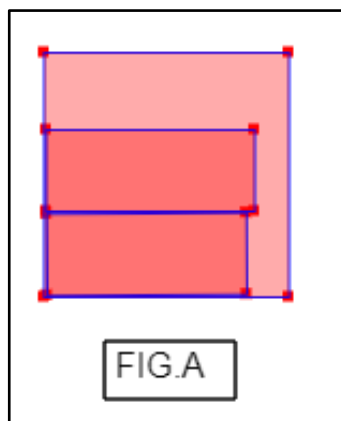
Figura 179- Decomposição



Fonte: material da dupla 1

Usar as possibilidades de mover e rotacionar as partes da peça e comparar com a área da Fig.A.

Figura 180- Sobreposição



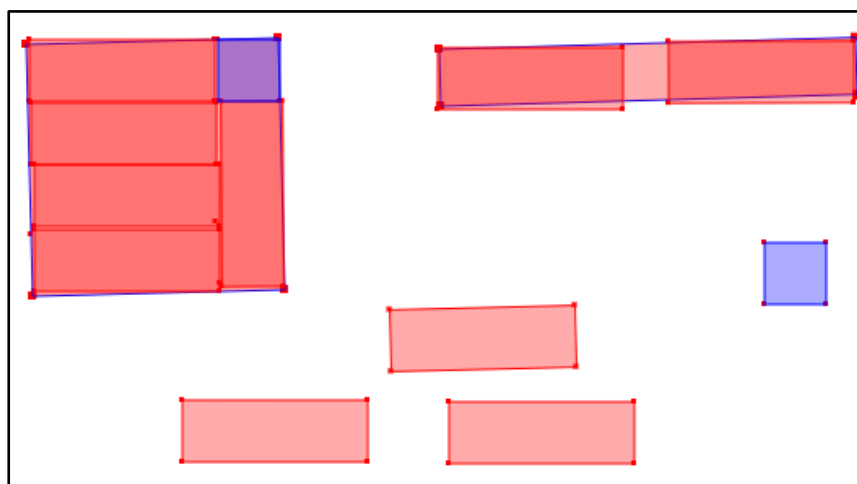
Fonte: material da dupla 1

Nesta atividade, de acordo com a dupla 1, o aluno pode comparar as áreas utilizando as ferramentas do MS, atendendo assim à solicitação da questão ao identificar que a Fig. A representa o maior tampo, uma vez que, ao comparar com a Fig. B fica evidente que essa não preenche toda a Fig. A.

2ª possibilidade: utilizar a inclusão e sobreposição de superfícies. Escolher uma das superfícies para incluir na outra. Em seguida, utilizar o recurso da tesoura para decompor as partes que não coincidirem por sobreposição.

3ª possibilidade: utilizar os poliminós para ladrilhar as superfícies. Escolher um ou mais poliminós para incluir em cada uma das superfícies e comparar as regiões a partir da contagem dos poliminós.

Figura 181- Recobrimento com o monominó e o triminó.



Fonte: material da dupla 1

Recobrimento com o monominó e o triminó.

4ª possibilidade: utilizar as malhas como suporte para realizar a contagem das superfícies unitárias consideradas.

A dupla 1 destacou, como potencialidade do MS para a realização desta tarefa de área, o fato de permitir a decomposição de figuras, como também a comparação das áreas através do ladrilhamento de outra figura. As limitações encontradas na elaboração da tarefa são a não possibilidade de construir quaisquer tipos de figuras (a atividade na íntegra envolve diferentes tipos de figuras: poligonais, não-poligonais compostas apenas por curvas e não-poligonais compostas por segmentos de reta e curvas).

A tarefa apresentada pela dupla trata-se de uma situação de comparação de área presente nos estudos de Ferreira (2010). Entretanto, não foi possível trazê-la na íntegra pela limitação do MS para trabalhar com figuras não poligonais e com a junção de uma figura poligonal a outra não poligonal. Essa impossibilidade foi apresentada as duplas pelo engenheiro pesquisador na análise do MS, antes da realização do experimento.

7.2.2 Tarefa 2 (área e perímetro – dupla 1)

Objetivo da tarefa	O objetivo desta atividade é verificar se o aluno dissocia a área do perímetro sem a presença das figuras a partir de afirmações relacionadas ao tipo da figura, sejam retângulos ou figuras quaisquer, presentes no texto através da representação linguística (FERREIRA, 2010, p. 119).
Título	Comparação de áreas e perímetros
Enunciado	
Os alunos de uma turma de sétimo ano estudavam o conteúdo áreas e perímetros. Veja o que alguns deles afirmaram: Bruna: Duas figuras de mesma área têm que ter mesmo perímetro. Daniela: O perímetro da figura aumentou, mas a área não precisa aumentar. Guilherme: Os retângulos podem ter os perímetros iguais e as áreas diferentes. Jorge: Se a área do retângulo aumentou, então é claro que o perímetro também aumentou. O que você acha do que dizem esses alunos: você concorda ou discorda? Explique porque a cada vez. Você pode usar desenhos nas suas explicações. Concordo com Bruna () Discordo de Bruna() Concordo com Daniela () Discordo de Daniela() Concordo com Guilherme () Discordo de Guilherme () Concordo com Jorge () Discordo de Jorge()	

7.2.2.1 Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa pela dupla 1

Para esta questão sugerimos que os alunos testem as afirmações de Bruna, Daniela, Guilherme e Jorge através das ferramentas de construção de polígonos e da ferramenta para calcular área e perímetro (*measurement*) e assim possam verificar e validar as afirmações apresentadas na atividade.

Como nenhum procedimento foi realizado no *software* para construir esta tarefa 2, a dupla apresentou, no quadro acima, as ferramentas que os alunos poderiam utilizar para verificar e validar as afirmações apresentadas na tarefa.

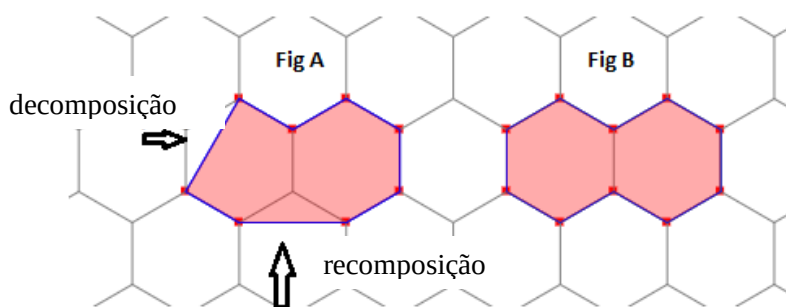
Análise dos possíveis procedimentos que os estudantes poderiam mobilizar no *software* para responder a tarefa de comparação de área e as sugestões dadas pela dupla 1 para que o MS contribua com a resolução da tarefa.

Dupla 1¹²⁶- As afirmações de Bruna e Daniela envolvem afirmações mais gerais por se tratarem de figuras quaisquer, que não são possíveis de testar com o MS. Faremos os testes de validação dessas duas afirmações com figuras poligonais.

Validação da afirmação de Bruna:

Considere duas figuras que possuem a mesma área, equivalente a dois hexágonos, mas seus perímetros são diferentes, o que nos leva a discordar da afirmação de Bruna.

Figura 182- Decomposição e recomposição



Fonte: dupla 1

¹²⁶ A partir desse momento, até o final da tarefa 2, tudo que estiver sendo exposto foi retirado do material da dupla 1 na íntegra, ou seja, o texto foi escrito pela referida dupla e não há comentários do pesquisador.

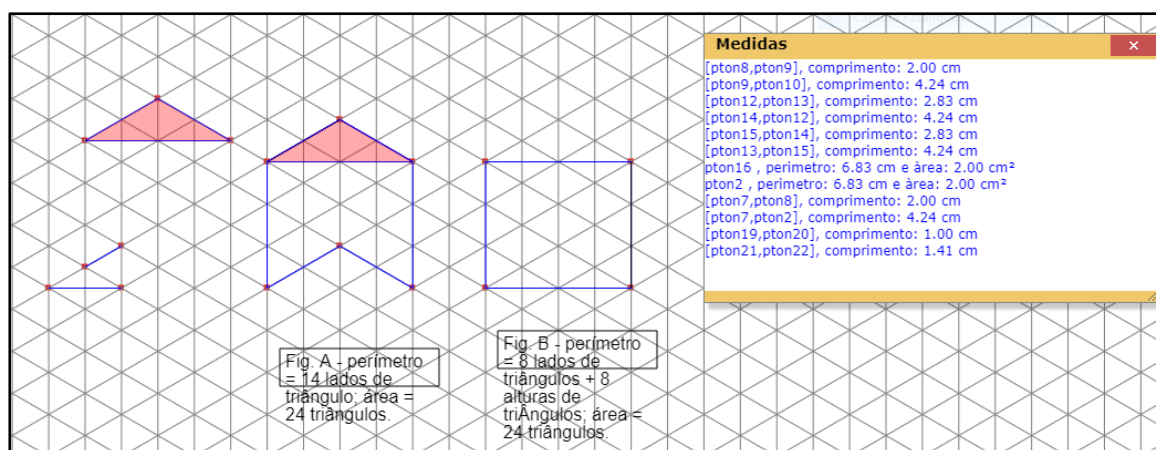
O usuário do MS pode construir duas figuras, conforme exemplo na malha hexagonal, e justificar a igualdade das áreas a partir da decomposição de uma região triangular da figura A e recompor, transformando na figura B. Observe que este procedimento já confirma a igualdade das áreas. Caso o usuário queira confirmar essa igualdade no quadro numérico, deverá utilizar no MS a ferramenta Fita métrica. No entanto, esta não funcionou para as figuras construídas.

No caso do perímetro, o usuário pode observar que a figura A tem perímetro igual a 6 lados de hexágono regular + 2 lados maiores do triângulo isósceles. Já a figura B tem perímetro igual a 10 lados de hexágono regular. A questão agora é mostrar qual a relação existente entre os 2 lados maiores do triângulo isósceles e os 4 lados do hexágono regular, ou seja, entre o lado maior do triângulo isósceles e 2 lados de hexágono regular. O usuário poderá utilizar no MS o recurso Fita métrica e verificar que o lado do hexágono regular mede 1 cm e o lado maior do triângulo isósceles mede, aproximadamente, 1,41 cm.

Validação da afirmação de Daniela:

Considere a figura A, um hexágono, construído sobre a malha isométrica. É possível determinar o seu perímetro e a sua área em função da unidade de medida triângulo, da malha, como indicado na figura abaixo. Observe que, com a figura A, é possível realizar uma decomposição e recomposição a partir do triângulo rosa, e obtermos a figura B, que possui mesma área que a figura A, mas perímetro maior que A. Ao utilizarmos a ferramenta fita métrica, é possível determinar o lado numérico, em centímetro, do lado do triângulo da malha e da sua altura, e concordarmos com a afirmação de Daniela.

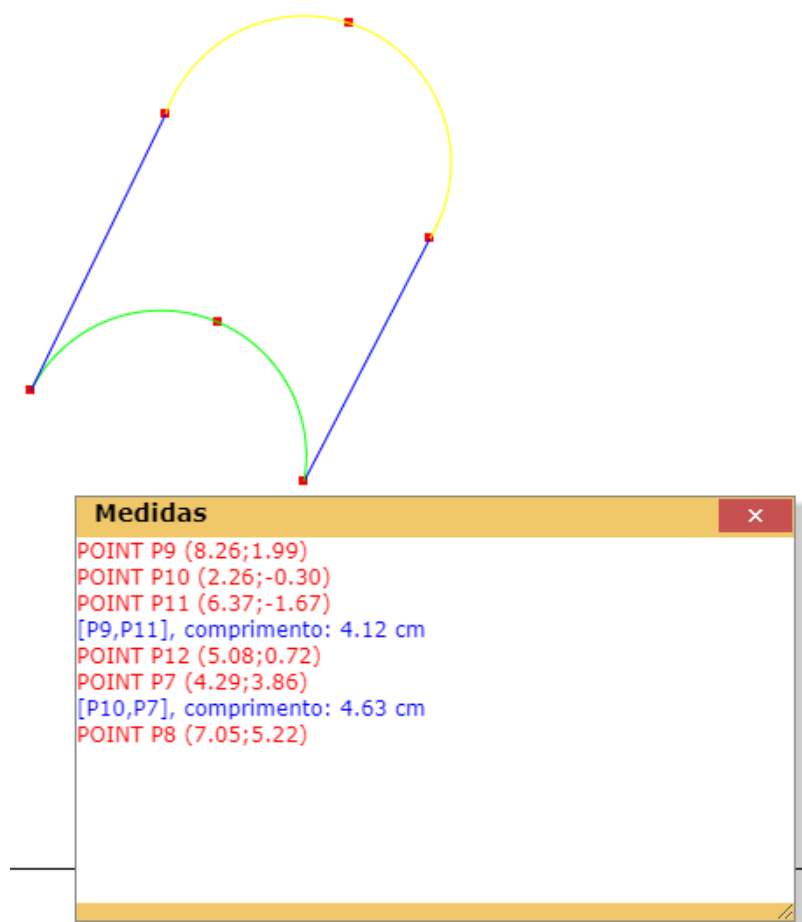
Figura 183- Medindo com a fita métrica



Fonte: da dupla 1

Apesar de possibilitar a construção de arcos e segmentos, o MS não compreende a junção desses elementos enquanto constitutivos de uma figura não-polygonal. Ao utilizar a ferramenta Fita métrica, a compreensão é da localização através dos pares ordenados dos pontos dos arcos e apenas o comprimento dos dois segmentos.

Figura 184- Tentativa de construção de uma figura poligonal com outra não poligonal

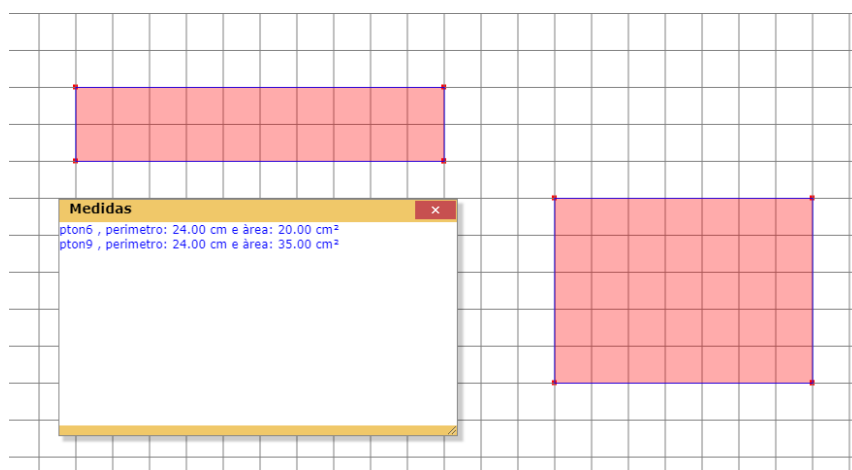


Fonte: da dupla 1

Validação da afirmação de Guilherme:

Uma estratégia de resolução seria de o aluno poder construir dois retângulos de diferentes áreas e perímetros iguais e validar, através das medidas apresentadas pelo MS, ao fazer uso da ferramenta Fita métrica.

Figura 185- Construção de retângulos na malha quadriculada

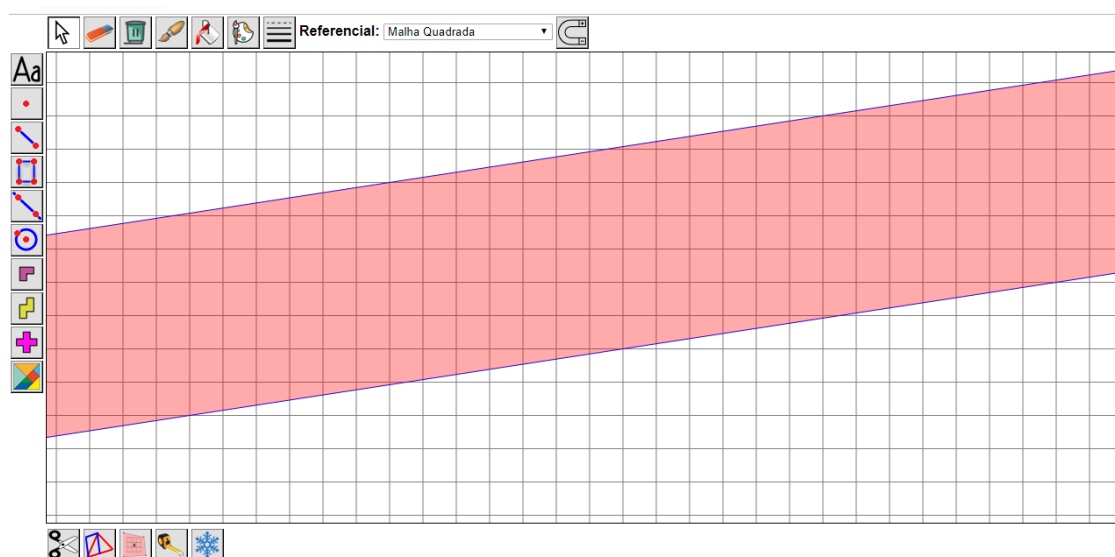


Fonte: material da dupla 1

Outra estratégia de resolução é a construção das duas figuras sobre a malha quadriculada, com os lados apoiados sobre a malha, o que possibilita a contagem dos quadradinhos para posterior comparação, a partir de uma unidade de medida não-convencional.

Bug encontrado pela dupla 2 durante testes na atividade de Guilherme

Figura 186- Bug na atividade de Guilherme



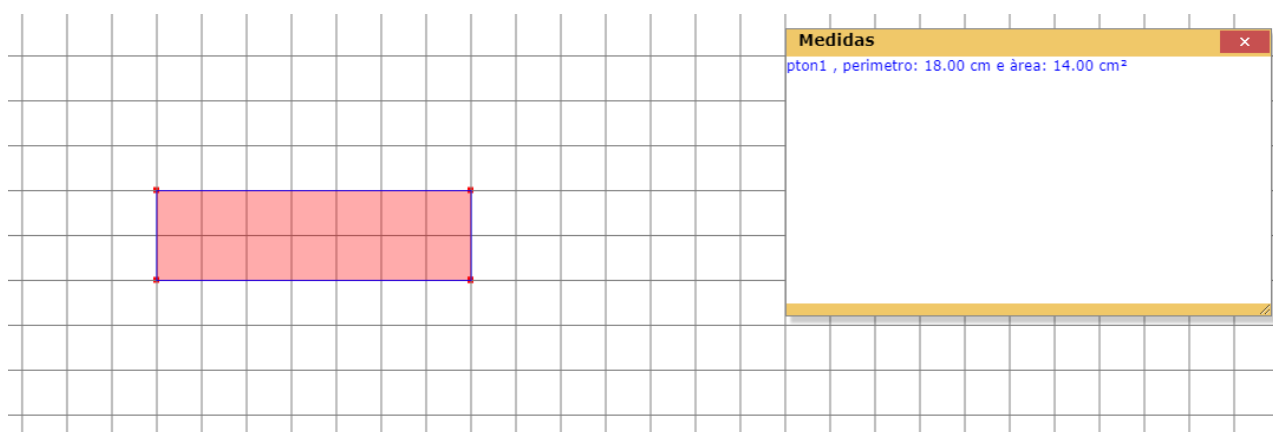
Fonte: da dupla 1

Ao tentar mover um dos vértices do retângulo, aconteceu uma transformação, conforme apresentada acima.

Validação da afirmação de Jorge

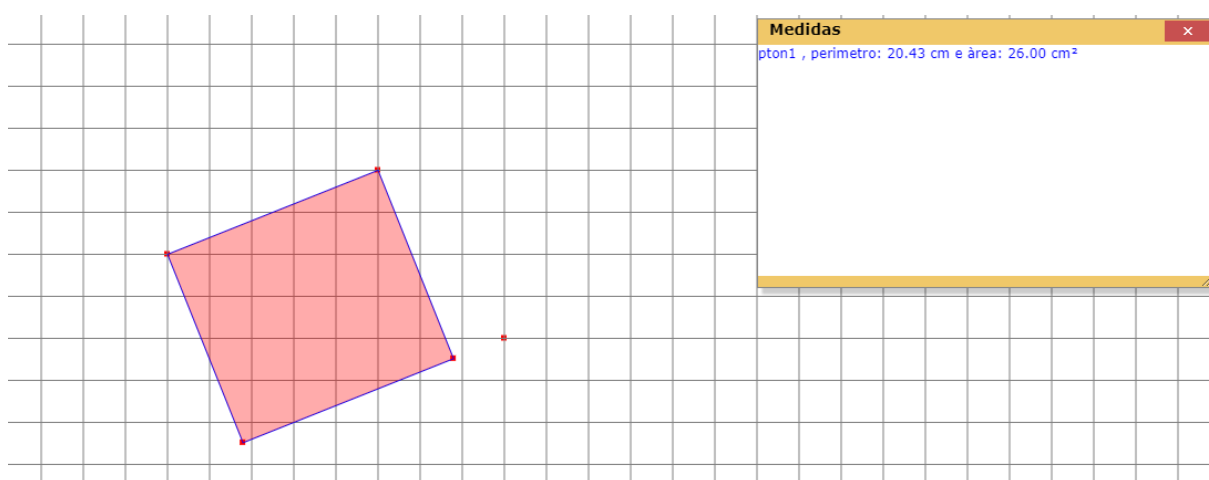
A ideia seria construir um retângulo qualquer, abrir a ferramenta *measurement* e movimentar um dos vértices do retângulo alterando sua área. Na tela de Medidas iria aparecer as mudanças na área e no perímetro.

Figura 187- Resolução 1



Fonte: da dupla 1

Figura 188- Resolução 2



Fonte: da dupla 1

Apesar¹²⁷ do MS possibilitar a realização desta atividade, a dupla percebeu que, para o trabalho com perímetro, vai sempre considerar o quadro numérico.

Como potencialidades do MS nesta tarefa, a dupla 1 relata a possibilidade de construir retângulos e figura poligonais para validar as afirmações. Quanto às limitações, destaca a não

¹²⁷ Explicação do pesquisador, a partir do que foi colocado pela dupla.

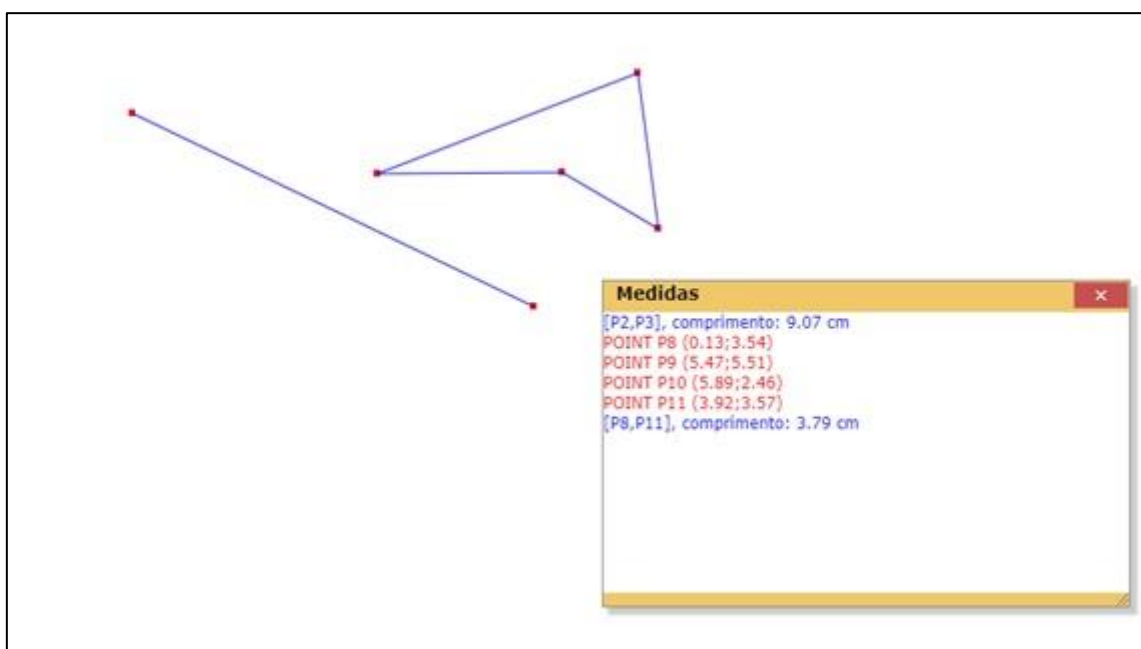
sincronização entre as medidas e a alteração da figura; o não reconhecimento do MS com relação à construção de figuras não-poligonais ou de figuras que sejam compostas por curvas e segmentos de retas; e o fato de que a validação das áreas e dos perímetros parece depender sempre do valor numérico.

7.2.3 Tarefa 3- (Perímetro- dupla 1)

Segundo a dupla 1, o MS não possibilita o desenvolvimento de uma tarefa apenas de perímetro que contribua para a construção desse conceito. Para seus participantes, ao se considerar uma tarefa de construir diferentes regiões e, com o uso da ferramenta Fita métrica, determinar o perímetro, estão realizando uma articulação entre os quadros geométrico e numérico, quando a ideia das pesquisadoras francesas é a introdução de uma abordagem sem a interferência do quadro numérico.

Observe o exemplo dado pela dupla 1 abaixo:

Figura 189- Exemplo dado pela dupla 1



Fonte: material da dupla 1

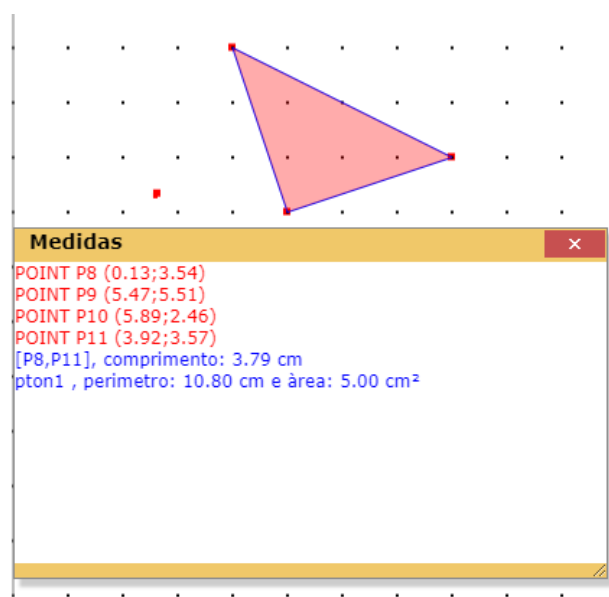
Continua sua observação relatando que, ao clicar na ferramenta fita métrica e em seguida nas linhas representadas, a linha fechada também determina um perímetro, mas é apenas compreendida como um comprimento, como aparece no quadro das Medidas. O MS, segundo a dupla, está reconhecendo tal ação como a medida do comprimento do lado entre dois pontos.

Aponta como uma limitação do MS reconhecer com a ferramenta Fita métrica, apenas as áreas e os perímetros de figuras construídas com a ferramenta de polígono. Diante desses achados, a dupla 1 sinaliza a importância do trabalho com diferentes figuras além das poligonais, pelo motivo de proporcionar aos alunos construir o conhecimento de que as figuras não poligonais também possuem área e perímetro.

Outra questão levantada pela dupla é com relação à verdadeira grandeza das medições. Expõe que, ao desenhar o segmento, o comprimento do mesmo apresentado no quadro “Medidas” anteriormente foi de 9,07 cm, enquanto que ao usar essa mesma linha, agora fechada, foi de 3,79 cm. A partir dessa análise, a dupla 1 deixa como reflexão aos desenvolvedores do *software* a seguinte pergunta: *Qual a relação estabelecida no MS no que diz respeito à verdadeira grandeza?*

Prossegue suas observações com o exemplo abaixo:

Figura 190- Explicação dada pela dupla na malha isométrica



Fonte: material da dupla 1

Sobre essa imagem, a dupla 1 explica que: *Ao construir o triângulo e usar a ferramenta Fita métrica, foi fornecido o comprimento 3,79 cm, a medida do comprimento de um dos lados do triângulo. Ao clicar no lado do triângulo e usar novamente a ferramenta Fita métrica, foi fornecido o perímetro de 10,80 cm e a área de 5 cm².*

Uma dificuldade para o usuário é que, no quadro de medidas, os pontos são identificados (P1, P2, ...) mas na imagem das figuras representadas, essa nomenclatura não aparece, o que dificulta aos usuários a identificação e localização de cada um deles.

Com relação à discussão apresentada pela dupla 1, que trata da não possibilidade de se desenvolver uma tarefa de perímetro no *software*, em virtude de suas limitações nas criações de linhas curvas e de figuras não poligonais, nossa intenção era de fato permitir tais possibilidades. Contudo, como já relatamos, em virtude do tempo para a finalização do protótipo e seus testes, tivemos que fazer algumas escolhas, mesmo prevendo que as sugestões iriam aparecer.

Em nossas análises preliminares, como também na elicitação de requisitos, destacamos a pertinência do trabalho com figuras poligonais e não poligonais e a composição desses dois tipos de figuras, de maneira a permitir aos alunos perceberem que não só as figuras poligonais possuem área e perímetro.

No momento, o MS lida apenas com o cálculo da área e do perímetro das figuras poligonais, mas não há como medir o comprimento apenas de um dos lados de qualquer polígono desenhado na tela do *software* por meio da ferramenta fita métrica. Outra situação que não ficou clara à dupla 1, e precisava ter sido exposta pelo engenheiro pesquisador antes das análises realizadas no formulário 1, é a possibilidade de nomear e renomear todos os objetos construídos no *software*. Caso isso tivesse sido apresentado, a dupla não teria talvez apontado a dificuldade do usuário localizar as diferentes figuras construídas pelo motivo de serem nomeadas automaticamente por (P1, P2,...). Pretendemos, então, na versão final do MS, levar em conta as observações apontadas pela dupla 1 já previstas em nosso estudo, como também as que não foram previstas.

7.2.4 Tarefa 1- (área - dupla 2)

Objetivo da tarefa	Por meio do uso de unidades de medida de área não padronizadas e da variação de unidades de medida de área, fortalecer a compreensão de área utilizando-se a área de determinados políminós (monominós e, posteriormente, dominós) para a determinação da área de outros políminós (tetraminós e pentaminós).
Título	Qual a área?
Enunciado	
Para determinar a área de uma figura, podemos utilizar a área de uma outra figura como unidade de medida. Observem as figuras abaixo: Se utilizarmos a área da figura C como unidade medida para medir a figura D, a área de D será 5C. Agora é sua vez! Ao considerar a área da figura A como unidade de medida, qual a área das demais figuras? Ao considerar a área da figura B como unidade de medida, qual a área das demais figuras?	

7.2.4.1 Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa

Dupla 2: Para a construção da tarefa pensamos em uma proposta para trabalhar com área, elaboramos um enunciado com um exemplo de representação feito no MS. Organizamos as imagens no MS, para determinar quais as figuras que deveriam ter suas áreas determinadas encontrar o valor da área dada por meio da área de uma outra figura como unidade de medida.

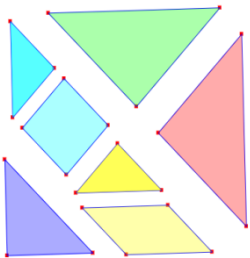
Análise dos possíveis procedimentos que os estudantes poderiam mobilizar no *software* para responder à tarefa de área elaborada pela dupla 2.

Procedimentos destacados pela dupla:

1. Os estudantes poderiam sobrepor a figura determinada como unidade de medida sob as outras para determinar a área;
2. Outro procedimento seria o visual, em que iria exigir certo grau de abstração e visão espacial. Visualmente, iriam observar quantas, da figura como unidade de medida, “caberiam” nas demais figuras.

Quanto à potencialidade do MS para a construção da tarefa, a dupla 2 destacou a possibilidade de arrastar as figuras sobre a tela do *software*. Com relação às limitações encontradas, relatou a impossibilidade de salvar o documento, o que dificulta a preparação da atividade e deixá-la pronta para sua realização; dificuldades de nomear as figuras; *bugs* na ferramenta de texto e a ausência do copiar e colar. Podemos perceber que a dupla decidiu desenvolver uma tarefa de mudança de unidade. Nitidamente, temos a presença dos políminós, que já havia sido destacada por todas as três duplas como pertinentes para esse tipo de situação.

7.2.5 Tarefa 2- (perímetro- dupla 2)

Objetivo da tarefa	Explorar o conceito de perímetro por meio das peças do Tangram
Título	Atividade de Perímetro
Enunciado	
Ordene as peças do Tangram de acordo com o seu perímetro, do menor para o maior (as que possuírem o mesmo perímetro deverão ser agrupadas), utilizando a ferramenta de corte de lado.	
	

7.2.5.1 Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa

A dupla expõe que apenas construiu um tangram na tela do MS, utilizando os procedimentos orientados pelo engenheiro pesquisador.

Análise dos possíveis procedimentos que os estudantes poderiam mobilizar no software para responder à tarefa de perímetro elaborada pela dupla 2.

Dupla 2: *Inicialmente os estudantes deverão construir um quadrado por meio da ferramenta Quadrado. Depois disso, deverão utilizar a ferramenta Tangram para obter o Tangram a partir do quadrado construído. Os alunos terão que usar a ferramenta Cortar Polígono para obter segmentos correspondentes aos lados das peças. Espera-se que os estudantes usem, como unidades de medida, os lados do triângulo pequeno, para que possam medir os perímetros das demais peças, para poder ordená-las. Entretanto, há outras maneiras de realizar a tarefa, como, por exemplo, cortar todos os lados de cada peça para poder comparar seus perímetros.*

Potencialidades do MS apontadas pela dupla 2 para a realização da tarefa:

- Uso de unidades de medida de perímetro não-convencionais;
- Variação do tamanho das peças do tangram de acordo com a construção do quadrado feito por cada estudante, possibilitando a discussão de semelhança de polígonos.
- Apesar de não ser o objetivo principal da atividade, esta atividade pode auxiliar no trabalho de dissociação entre perímetro e área, pois alguns estudantes podem perceber que figuras com perímetros diferentes podem ter a mesma área, como, por exemplo, o quadrado e o paralelogramo.

Com relação às limitações, a dupla apresenta o seguinte argumento: *O tangram poderia ser construído isoladamente, ou a partir de um segmento de reta, ou até mesmo por um quadrado construído de outra forma (“polígono” ou “quadrilátero” criado na malha quadriculada), ou mesmo deixar suas peças, como acontece com os polígonos.*

Na tarefa 2, desenvolvida pela referida dupla, temos uma situação de ordenação das peças do tangram de acordo com seus perímetros. Além das observações elencadas,

interpretamos a necessidade de inserir no MS uma ferramenta de **configuração de menus**, pois o objetivo da tarefa traçado pela dupla só poderá dar certo se a ferramenta fita métrica for bloqueada. Caso contrário, o aluno, por meio dela, já identificará o perímetro das peças. Dessa forma, o olhar para a construção do conceito possivelmente ficará comprometido.

7.2.6 Tarefa 3- (área e perímetro- dupla 2)

Objetivo da tarefa	Auxiliar na dissociação de área e perímetro, utilizando-se de pentaminós.
Título	Atividade de Perímetro
Enunciado	
Ao manipular o Magnitude Studium, a estudante Jhenyfer percebeu que todos os pentaminós são formados por cinco quadradinhos de mesma área e afirmou que, por todos possuírem a mesma área, então teriam o mesmo perímetro. Seu amigo Bernardo discordou, e disse que pode haver pentaminós com perímetros diferentes. Qual dos dois está certo? Use o <i>software</i> Magnitude Studium para descobrir.	

7.2.6.1 Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa

Dupla 2: O enunciado da atividade será apresentado aos estudantes no MS por meio da ferramenta de texto, eles deverão desenvolver a atividade no software.

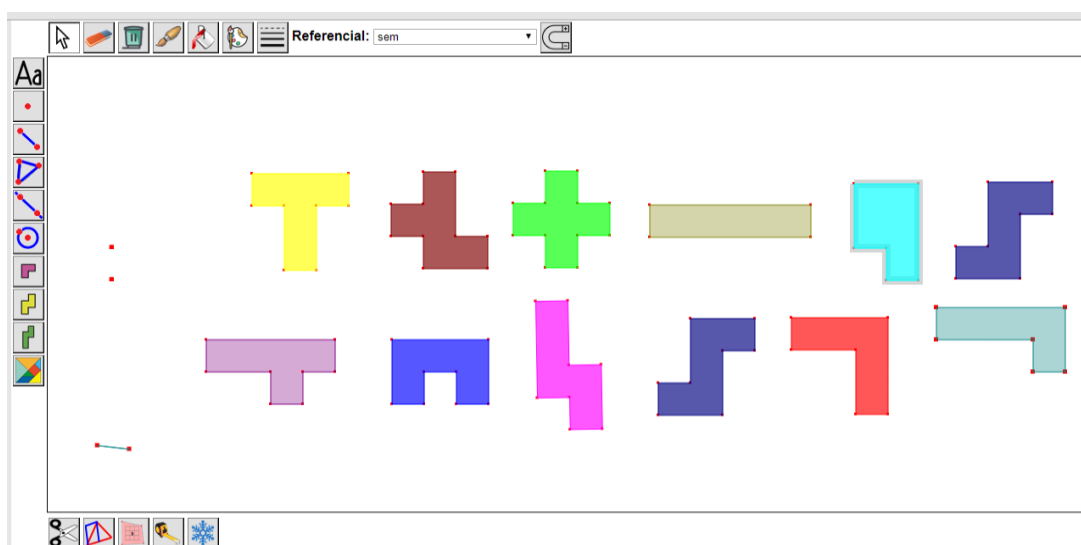
Análise dos possíveis procedimentos que os estudantes poderiam mobilizar no software para responder à tarefa de área e perímetro elaborada pela dupla 2.

Procedimentos que os estudantes deverão mobilizar, segundo a dupla 2:

1. Os alunos iriam colocar todos os pentaminós na tela e, a partir daí, iriam observar se todos possuem ou não o mesmo perímetro, uma vez que têm a mesma área.
2. Para realizar a constatação, poderiam usar a ferramenta tesoura e recortar um dos lados dos pentaminós e considerar como unidade de medida, para obter a medida dos perímetros e saber se, de fato, todos têm o mesmo perímetro.

3. Os estudantes também poderiam utilizar a malha quadriculada do MS para auxiliar nessa determinação do perímetro das figuras, já que é possível e prática a construção de poliminós que “se encaixam” na malha quadriculada.
4. Outra possibilidade de obtenção de resposta poderia ser utilizando a ferramenta de “trena” para obter o valor relacionado ao perímetro de cada pentaminó e constatar se possuem ou não o mesmo perímetro. Esta possibilidade pode ser vetada pelo professor, mesmo que momentaneamente, caso ele pretenda permitir que seus estudantes experimentem um pouco mais as demais ferramentas do MS e, deste modo, busquem soluções mais criativas e ricas, do ponto de vista da mobilização do conceito de perímetro, já que, por meio do uso direto da ferramenta trena, essa tarefa acaba ficando mais limitada.

Figura 191- Tarefa com os poliminós



Fonte: dupla 2

A dupla elenca, como potencialidade do *software* para tarefa, o dinamismo das peças dos poliminós, ou seja, a possibilidade de movê-las, aplicar rotação e reflexão. Não identificou nenhuma limitação no jogo.

Na tarefa desenvolvida pela dupla 2, que tem como objetivo auxiliar na dissociação de área e perímetro, podemos perceber nitidamente a presença, mais uma vez, dos poliminós. Esse fato nos permite refletir sobre o potencial desse jogo no MS e isso também fora destacado nas respostas dadas pelas três duplas às questões 1 e 2 das seções anteriores, com poucas observações de ajustes.

7.2.7 Tarefa 1- (área e perímetro - Dupla 3)

Objetivo da tarefa	Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.
Título	A família dos Poliminós
Enunciado	
1 - Você deve ter observado que o MS tem uma ferramenta que possibilita construirmos todos tetraminós e pentaminós. Utilizando esta ferramenta, responda: a. Todos os tetraminós possuem mesma área? Todos possuem mesmo perímetro? b. Todos os pentaminós possuem mesma área? Todos possuem mesmo perímetro? c. Existe algum pentaminós que possua mesma área que um tetraminó? Existe algum pentaminós que possua mesmo perímetro que um tetraminó? 2 - Baseado nas respostas da questão anterior, complete as sentenças com: “devem ter”; “podem ter” ou “nunca terão” (você pode repetir sua resposta). a. Figuras de perímetros iguais _____ áreas diferentes. b. Figuras que têm a mesma área _____ perímetros diferentes. c. Justifique cada resposta.	

7.2.7.1 Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa

Dupla 3: Em conversa com a dupla, durante as respostas do questionário avaliativo do MS, conversamos sobre a possibilidade do aluno construir os diferentes poliminós e procurar medir sua área e perímetro. Há possibilidade de construção sobre a malha quadriculada, fato que dispensaria uso da ferramenta measurement. Por ser uma atividade de construção com peças predefinidas, pensamos que poderíamos intensificar a ação de investigar (explorar) dos alunos, e por esse motivo, propomos os questionamentos do item 1.

Esta atividade está direcionada para um professor do 5º ano do ensino fundamental, o objetivo da atividade é explorar elementos da habilidade (EF05MA20) presente na Base Nacional Comum Curricular e descrito no objetivo da atividade.

Acreditamos que o aluno (ou melhor a dupla) possa construir a malha e depois cada poliminó. Em seguida, poderá calcular perímetro e área utilizando técnica baseada na contagem dos lados do quadradinho e contagem dos quadradinhos respectivamente.

Certamente, a dupla perceberá que os polígonos da mesma família possuem mesma área, entretanto existe em cada família um que possui perímetro diferente. Assim, após as respostas, o professor poderá conduzir uma conversa no sentido de compartilhar as respostas das duplas, assim possibilita que as respostas do segundo item sejam uma construção coletiva.

Análise dos possíveis procedimentos que os estudantes poderiam mobilizar no software para responder à tarefa de área e perímetro elaborada pela dupla 3.

A dupla 3 não disserta sobre os possíveis caminhos que o estudante poderia trilhar para resolver esta tarefa, mas realiza um comentário sobre a questão da inserção das ferramentas no software:

Dupla 3: *Em nosso caso, nenhuma ferramenta poderia ser acrescentada, pois as peças são predefinidas. Agora, observamos que todas as perguntas deste questionário estão direcionadas a um possível acréscimo e não se pergunta sobre uma possível supressão. De todas as ferramentas do software, pensando para o professor da educação básica, volto a citar a ferramenta measurement, pois em muitas discussões teóricas sobre o ensino e aprendizagem das grandezas conversamos sobre a possibilidade de “tardar” (não antecipar) a entrada das unidades de medidas, mas ao contrário é exatamente isso que esta ferramenta faz, ela dá visibilidade a unidade de medida centímetro e centímetro quadrado. Seria muito interessante ter uma opção no menu para deixá-la oculta.*

Em relação às potencialidades e limitações, a dupla destaca as seguintes:

Potencialidades: *Grandes potencialidades, pois utilizamos peças predefinidas, entretanto caberá ao aluno a construção, medição do perímetro e área, devida a anotação e observação dos resultados para encontrar os exemplos apropriados, tendo em vista que existem os casos descritos no objetivo.*

Limitações: *Para esta tarefa, nenhuma limitação, mas algo que pode ajudar ou atrapalhar (a depender do professor) é a ferramenta measurement.*

Como explicamos na tarefa sobre perímetro da dupla 2, acreditamos que para não antecipar o trabalho com as unidades de medidas convencionais ou mesmo o cálculo da área e do perímetro sem antes explorar a construção de tais conceitos, o MS poderia oferecer a condição de o professor configurar os menus e bloquear a ferramenta *measurement*, por

exemplo. Dessa maneira, o *software* evitaria certos percalços em um tipo de tarefa como esta elaborada pela dupla 3.

7.2.8 Tarefa 2- (área - dupla 3)

Objetivo da tarefa	• Estimar área de figuras planas construídas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área. • Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.
Título	Figuras e malhas
Enunciado	
1 - Você deve ter observado que o MS tem uma ferramenta que possibilita inserir malhas, utilizando esta ferramenta construa: Três retângulos com área igual a seis quadradinhos da malha. Três paralelogramos com área igual a seis quadradinhos da malha. Três triângulos com área igual a seis quadradinhos da malha.	

7.2.8.1 Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa

De acordo com a **dupla 3**: *embora considerando esta atividade simples, ela aborda duas habilidades presentes na BNCC em anos distintos, em unidades temáticas diferentes. Enquanto habilidade que trata das Grandezas e Medida está no 4º ano a que trata de Geometria está no quinto ano. Assim, temos uma possibilidade de caminhos: o professor do quinto ano pode explorar esta tarefa e assim retomar uma habilidade do ano anterior e trabalhar outra habilidade do ano letivo corrente.*

Assim como na tarefa anterior, a dupla 3 não apontou os procedimentos que os alunos possivelmente poderiam utilizar para responder à tarefa proposta, mas podemos perceber que o uso das malhas e a ferramenta polígonos deverão ser exploradas para esse fim. Definem a tarefa como simples e, por isso, a dupla não vê a necessidade do MS contemplar outras ferramentas. Aponta como potencialidades do *software* para a tarefa o modo fácil e intuitivo de se construir polígonos sobre a malha. Não destaca nenhuma limitação.

7.2.9 Tarefa 3- (perímetro - dupla 3)

Objetivo da tarefa	Analisar as mudanças que ocorrem no perímetro de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente as medidas de seus lados
Título	Figuras e malhas
Enunciado	
1 - Construa um quadrado e aplique a ferramenta <i>measurement</i>, agora clique em um dos vértices do quadrado e mova o cursor do mouse, observe que os valores do perímetro mudam. a. Por que ocorre essa mudança de valor do perímetro? b. Nessa situação, você conseguiria indicar as três grandezas cujas medidas estão mudando de valor? c. Existe relação entre tais grandezas? (Justifique sua resposta).	

7.2.9.1 Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa

A dupla acredita que esta tarefa está relacionada com a habilidade (EF06MA29) da BNCC (BRASIL, 2017): analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

Explica que, embora esta habilidade trate de área e perímetro, procuraram delimitar perguntas mais voltadas para a grandeza perímetro. O aluno constrói um quadrado, aplica a ferramenta *measurement* e move um dos vértices, o que provocará mudança na medida do comprimento do lado do quadrado e, conseqüente, mudança na sua área e perímetro.

Para esta tarefa, a dupla não vê em quê o *software* pode ser melhorado devido à simplicidade da mesma. Entretanto, aponta uma hipótese de que os alunos possam apresentar certa dificuldade em perceber o comprimento do lado como uma das três grandezas que mudam de valor e, por tal razão, indica a quantidade de grandezas que variam.

Para a dupla 3, a ferramenta *measurement* informa ao usuário de que a área e o perímetro estão variando, mas o comprimento do lado é algo mais intuitivo, da própria ação de arrastar o mouse após clicar num ponto. Outro detalhe que poderá causar dificuldade e estranheza nos alunos é o fato de não termos, de forma direta, a medida do comprimento do lado, embora possa ser obtida por meio do perímetro.

Diferente da tarefa anterior, a dupla 3 destaca o potencial da ferramenta *measurement* para a resolução desta e não apresenta nenhuma observação com relação à limitação do MS para a tarefa.

7.2.10 Conclusão do capítulo

Mesmo apresentando algumas limitações, pudemos perceber a potencialidade do MS para o desenvolvimento das diferentes tarefas construídas pelas duplas. De forma geral, temos que o uso do tangram e dos poliminós mostraram-se pertinentes para a elaboração das tarefas de área e perímetro, como também a possibilidade de arrastar as figuras sobre a tela; a aplicação de rotação e reflexão nos poliminós; a construção de polígonos; o uso da ferramenta *measurement* e a malha quadriculada. A sugestão de destaque diz respeito à solicitação da dupla 1 de ampliar o trabalho com as figuras não poligonais e a composição de uma figura poligonal com outra não poligonal.

7.3 Questionário Final

Como relatamos anteriormente, no capítulo referente ao experimento, entregamos às duplas um questionário com perguntas abertas referentes às potencialidades e limitações da primeira versão do MS para o ensino de área e perímetro, uma espécie de síntese do que eles avaliaram em relação ao *software*.

7.3.1 Respostas à pergunta 1

A pergunta 1 estava relacionada às potencialidades do MS para o ensino de área e perímetro.

A dupla 1 resolveu responder todas as perguntas de uma única vez, pois, segundo ela, nas análises realizadas durante todo o experimento já havia contemplado o que estava sendo solicitado no questionário de síntese.

Dupla 1- *Quanto às potencialidades do MS que foi experimentado por nós, ele apresenta limitações para a abordagem do conceito de área, de acordo com as fundamentações teóricas propostas. Neste momento, entendemos que o MS não contempla a abordagem do conceito de*

perímetro, o que, na nossa compreensão, deveria ser deixado para um outro momento de desenvolvimento do software.

Essa dupla, desde o início de suas análises aos formulários, ressaltou as potencialidades do *software* para o ensino de área, destacou também restrições para a abordagem de perímetro, como exposto nas tarefas do capítulo anterior.

Os participantes da dupla 2 resolveram responder separadamente:

Participante “C”: *trabalhar com decomposição e recomposição de figuras, explorar as unidades de medida de figuras quando pertencentes a uma malha poligonal, a representação do mesmo valor de área com diferentes polígonos (no caso, pode-se trabalhar apenas com um conjunto limitado de polígonos, mas ainda assim pode-se conceder bons resultados) auxiliando na compreensão da dissociação da área da figura, bem como, pode-se utilizar o software para o ensino-aprendizagem de área utilizando-se do teorema de Pick.*

Participante “D”: *O software apresenta um grande potencial para o trabalho de área como grandeza, assim como justificado nas respostas das questões que se remetiam aos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989) e da Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1996), mesmo com algumas restrições. Para o estudo de perímetro, o software também permite um trabalho bastante consistente, mas, aparentemente, depende um pouco mais do planejamento feito pelo professor, tendo em vista que não há tantas ferramentas que exploram o conceito de perímetro mais diretamente, mesmo que o software seja um ambiente favorável a esse tipo de estudo. É importante destacar que o potencial do software por meio de suas ferramentas é um pouco trazido na análise individualizada das ferramentas, no início desse questionário.*

Assim como a dupla 1, os participantes da dupla 2 ressaltam a potencialidade do MS para abordagem de área, mas com algumas limitações. Quanto ao perímetro, de acordo com o participante “D”, o *software* apresenta um ambiente favorável, todavia o professor terá que ter um esforço maior para elaborar tarefas relativas a esse conceito.

Para a dupla 3, as potencialidades do MS estão mais direcionadas às atividades de produção de figuras, comparação de áreas e medidas de área, havendo mais ferramentas para o trabalho com área do que perímetro.

7.3.2 Respostas à pergunta 2

A pergunta estava relacionada às limitações do MS para o trabalho com área e perímetro. A dupla 2 respondeu da seguinte forma:

Participante “C”: *Embora o micromundo apresente potencial para trabalhar área seguindo diferentes abordagens, algumas ferramentas prejudicam o ensino de área e perímetro devido bugs, como por exemplo, a ferramenta de colar figuras, copiar e colar figuras, as linhas poligonais que funcionam em alguns momentos e, em outros, apresenta construções diferentes do que se espera. Um outro aspecto que acaba limitando o micromundo, é a ausência de algumas ferramentas técnicas, como zoom in e zoom out, voltar passos da construção, deletar a construção completa sem precisar atualizar a página. Outro elemento a ser considerado é a ausência da possibilidade de construir polígonos dado o número de lados, construir segmentos e polígonos regulares dado uma medida pré-estabelecida.*

Segundo o participante “D”, de modo geral, as limitações se dão por questões de problemas técnicos ainda não resolvidos no *software*, que acabam gerando *bug* ou dificultando um pouco o uso das ferramentas. Sendo assim, acredita que o MS apresenta um potencial muito maior do que limitações em seu uso.

Nas respostas dadas por esses participantes, está latente que as limitações do MS não dizem respeito ao trabalho com as diferentes abordagens de área implementadas por meio das ferramentas e menus no *software*. Contudo, destacam apenas a necessidade de serem resolvidos erros de sistema (*bugs*).

A dupla 3 respondeu da seguinte maneira: *Fato que identificamos é que o software não consegue oferecer o perímetro e a área de figuras que não são poligonais. E nos casos que construímos pela ferramenta polyline não se obtêm a medida da área apenas do perímetro (com a measurement). Para um polígono construído pela polyline existem outras limitações (não conseguimos cortar e obter segmento do lado). Compreendo que essa construção é para destacar a linha poligonal e não a região delimitada pela linha, mas didaticamente não faz sentido e nem matematicamente, ter um linha poligonal com interior desprezado.*

Para essa dupla, a *polyline* (linha poligonal) precisa ser revista. Por meio de suas análises e observações a esta ferramenta, desde o início das respostas dadas aos formulários, estamos repensando elementos para o aprimoramento da mesma.

7.3.3 Respostas à pergunta 3

Na pergunta 3, solicitamos que as duplas apontassem quais ferramentas e/ou menus poderiam ser implementados para dar suporte ao professor no ensino de área e perímetro de figuras planas em um ambiente informático dinâmico.

Os participantes da dupla 2 resolveram responder essa pergunta em conjunto: *No que diz respeito aos aspectos técnicos e de ergonomia, destaca-se a necessidade de implementação de uma ferramenta para voltar partes das construções (pelo menos em 3 passos), uma ferramenta de copiar e colar as figuras para que fique mais claro o comando, ferramenta para apagar toda a construção de uma vez para que não seja necessário atualizar a página, pois caso a internet caia no processo de atualização e não volte a funcionar interferirá na situação de ensino (embora seja um aspecto que vai além do software, pode ser evitado com uma ferramenta de delete geral). Como a proposta da ferramenta é de dar suporte à área e perímetro, acredito que o software apresenta muitas ferramentas capazes de dar suporte ao ensino de área, entretanto, deixa de lado o ensino de perímetro, que poderia ser mais abordado (mas isso depende das situações de ensino relacionadas a perímetro que é o foco do software).*

Uma das ferramentas apontadas pela dupla 2 na resposta acima foi destacada desde o início de nossas análises à primeira versão do protótipo, antes dos testes com os especialistas, como sendo pertinentes ao *software*, por exemplo, o *Ctrl Z* para desfazer alguns passos das construções.

A dupla 3 não vê nenhuma necessidade, nesta etapa da pesquisa, de implementar ferramentas no *software*, apenas para uma versão futura, assim como a dupla 2, sugere o olhar de forma enfática para a abordagem do conceito de perímetro.

Podemos observar que as respostas dadas pelas duplas são amplas, não focam na inserção de ferramentas para o ensino de área, apenas apontam a necessidade do trabalho com o perímetro.

7.3.4 Respostas à pergunta 4

A pergunta 4 estava relacionada às melhorias/aprimoramentos que poderiam ser sugeridos para que o MS atendesse ainda mais ao objetivo segundo o qual foi concebido (dar suporte ao professor para o ensino de área e perímetro de figuras planas).

Para a dupla 2, precisa-se melhorar a usabilidade de algumas ferramentas (já citadas anteriormente), consertar *bugs* de construção, prover mais ferramentas para o trabalho de perímetro, apresentar clareza da forma de uso e as possibilidades de cada ferramenta, pois segundo ela, têm muitas funções que estão ocultas ao usuário. A resposta dada pela dupla 3 vai no sentido de direcionar o *software* para o trabalho com as figuras não poligonais.

7.3.5 Conclusão do capítulo

A partir das respostas dadas pelas duplas a este questionário, pudemos observar, com mais ênfase, a necessidade da implementação de ferramentas no MS que ampliem o trabalho com o perímetro de figuras planas, além das que já havíamos inserido (fita métrica e a decomposição dos lados da figura). Outro fato que nos chama a atenção em termos de usabilidade é a implementação de algumas funcionalidades, como *zoom in* e *zoom out*, voltar passos da construção, deletar a construção tudo de uma única vez. Todos esses elementos deverão ser levados em conta para a evolução do software.

Por fim, embora o experimento realizado no *MagnitudeStudium* tenha apontado a necessidade de aperfeiçoamento de alguns menus e ferramentas para o ensino e aprendizagem de área e perímetro de figuras planas, pôde-se perceber seu grande potencial em relação a outros *software* de GD, no que diz respeito a algumas de suas funcionalidades para lidar com os conceitos supracitados.

A primeira questão é que o MS foi pensado, desde a sua concepção, para dar suporte ao ensino de área e perímetro como grandezas, haja vista que nenhum dos *software* de geometria dinâmica desenvolvidos em diferentes épocas e apresentados em nossas análises preliminares propõe-se a esse objetivo, ainda que, por meio deles, possamos construir diferentes tarefas para o trabalho com as grandezas citadas. Apresentaremos então, nos próximos parágrafos, o que é possível realizar no MS diferente de outros *software* de GD mais comuns.

7.4 O Diferencial do Magnitude

7.4.1 Decomposição e recomposição

Um dos diferenciais é a possibilidade de decomposição. No MS, esse procedimento pode ser realizado de quatro maneiras diferentes. A primeira é selecionando o ícone “tesoura”, em seguida ir clicando com o botão esquerdo do *mouse* na parte da figura que se deseja

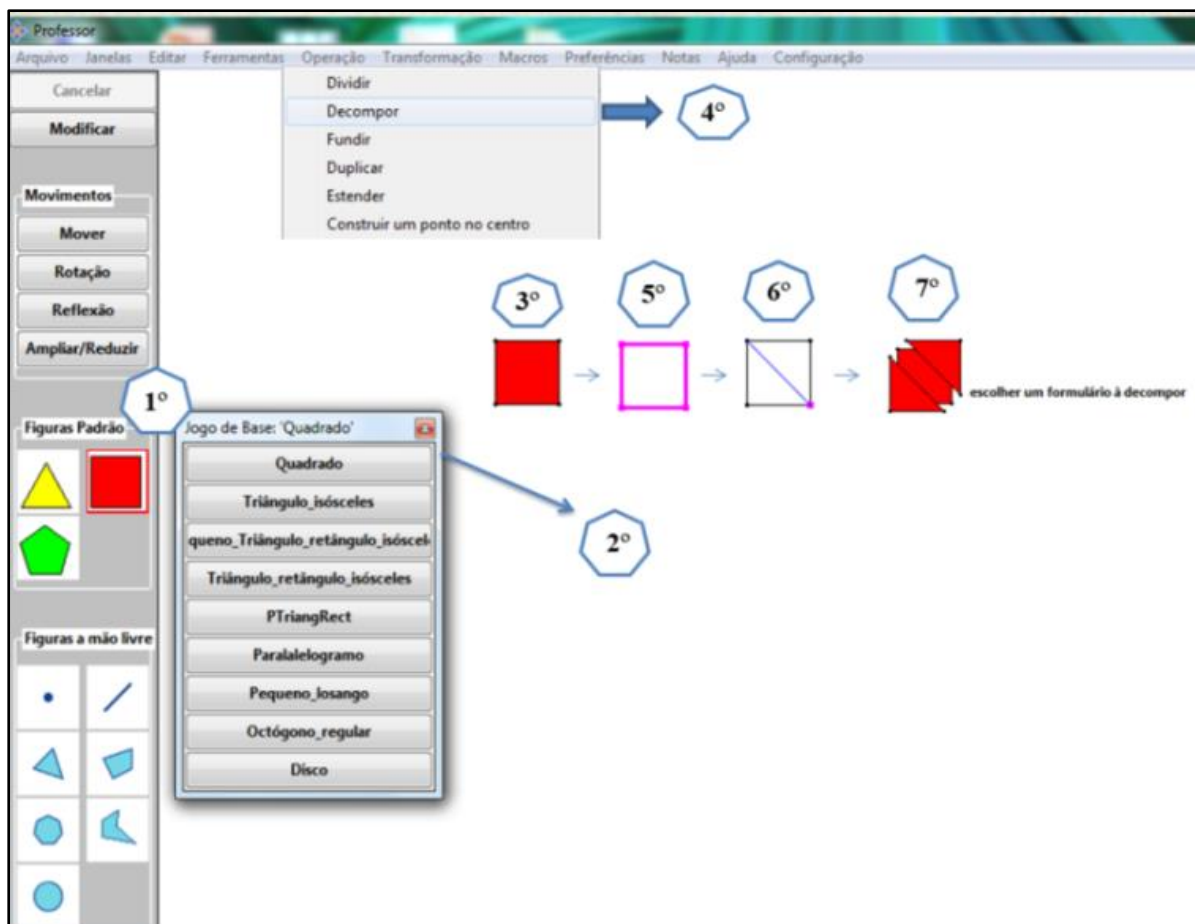
decompor, iniciando por um de seus lados ou vértice. Automaticamente, o *software* vai criando pontos para realizar, ao final, o corte. A decomposição será efetivada quando o usuário der um clique final em qualquer um dos lados ou vértices que compõem a figura.

A segunda e a terceira estão relacionadas à decomposição de polígonos em triângulos para o trabalho com a equidecomposição de figuras apresentadas no capítulo 5, referente aos “cortes”. A quarta e última diz respeito ao jogo tangram, cujo princípio é recortar um quadrado nas peças desse quebra-cabeça.

Dentre os *software* de “Geometria Dinâmica” explorados em nossas análises preliminares, apenas o *Apprenti Géomètre 2* permite algumas maneiras de decompor as figuras criadas em sua interface. Nesse *software*, a decomposição pode ser efetuada pela diagonal, vertical, horizontal, ou de diferentes formas por meio da criação e ligação de pontos sobre a figura.

Para decompor um polígono qualquer pela diagonal, é preciso construí-lo previamente na interface do *software* por meio dos menus “*Figuras Padrão*” ou “*Figuras a mão livre*”, selecionar a ferramenta “Decompor” do menu “Operação”, em seguida dar um clique em cima da figura, selecionando-a. Por último, deve escolher um dos seus vértices, pressioná-lo e ir arrastando com o botão direito do *mouse* até o outro vértice, pela diagonal. Dessa maneira, será realizada tal decomposição, como ilustramos a seguir:

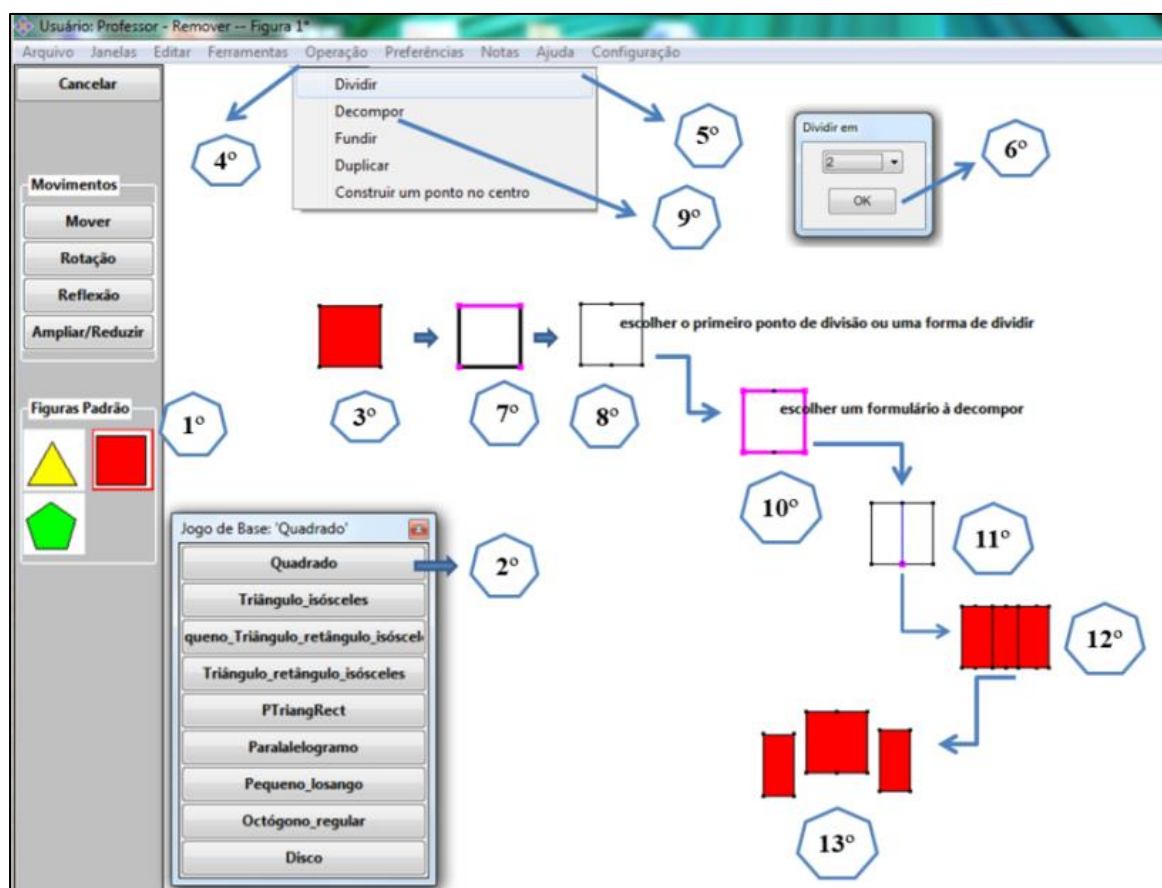
Figura 192- Decomposição no AG 2 pela diagonal



Fonte: da pesquisa

A decomposição no AG pela vertical ou horizontal, em partes congruentes ou não, exige outros procedimentos. Primeiro, o usuário terá que selecionar a ferramenta “Dividir” do menu “Operação”, escolher em quantas partes deseja dividir a figura, selecionar um dos segmentos, em seguida um outro paralelo, de forma que ele será dividido em partes congruentes. Após esses passos, deve-se selecionar a ferramenta “Decompor” e ligar os pontos de divisão pela vertical como mostramos a seguir:

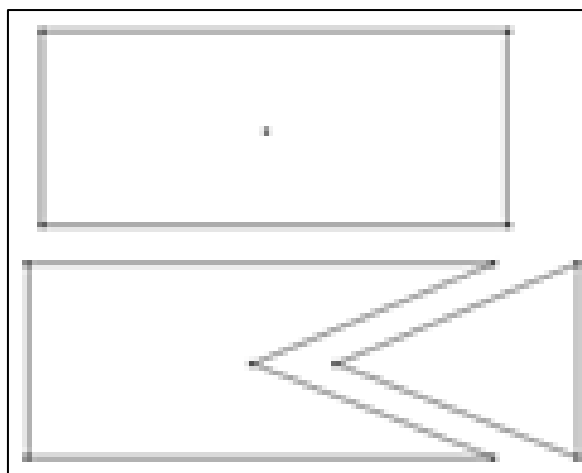
Figura 193- Decomposição de um quadrado em dois retângulos de mesma área



Fonte: da pesquisa

Procedimento análogo poderia ser realizado nos segmentos que estão na vertical para a decomposição do quadrado pela horizontal. Outra maneira de decompor é escolher a opção “Construir um ponto no centro” do menu “Operação”. Essa opção permite criar, no centro da figura, um ponto que passa a pertencer à mesma. Após a criação desse ponto central, é preciso apenas selecionar a ferramenta “Decompor”, clicar sobre a figura, escolher um dos vértices, ligar ao ponto central com o botão direito do *mouse* e concluir, arrastando até o outro vértice da figura (SILVA, 2016).

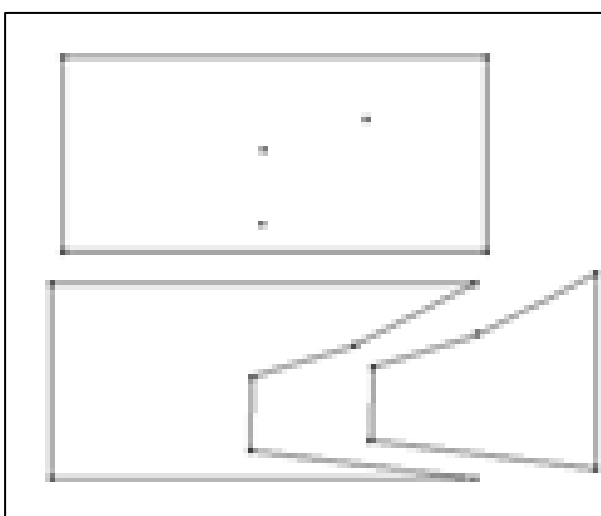
Figura 194- Decomposição por meio da criação de um ponto central



Fonte: (SILVA, 2016, p. 271)

Existe ainda outra possibilidade de decompor por meio da criação de pontos livres no interior da figura, como ilustramos abaixo. No retângulo, foram criados três pontos de corte sobre a figura, por meio do menu “Figura a mão livre”. Assim, ao selecionarmos a ferramenta “Decompor” e clicarmos sobre a figura, será preciso apenas escolher um dos vértices e, com o botão direito do mouse, ligá-lo aos demais pontos criados. Entretanto, a decomposição só se efetuará se a ligação dos pontos terminar em outro vértice da figura (SILVA, 2016).

Figura 195- Decomposição livre pela ligação de pontos



Fonte: (SILVA, 2016, p. 271)

Os procedimentos citados podem exigir do usuário um nível mais profundo de familiarização com o *software* para realizar as decomposições nas diferentes figuras. No MS,

mesmo seguindo algumas das características do AG2, pode-se perceber que a maneira de decompor apresenta-se mais econômica, não exigindo do usuário conhecimento acentuado do *software*. Mesmo que o MS tenha apresentado uma maneira mais simples de decompor as figuras, ainda precisaremos avançar no sentido de permitir que uma parte do interior da figura possa ser recortada, além da decomposição da figura em partes congruentes, como explicitamos no capítulo 4, referente aos requisitos.

Com relação à colagem (composição de figuras), só é possível no *Apprenti Géomètre 2* se os vértices e um dos lados das partes de uma figura decomposta coincidirem com os vértices e lado da outra figura, caso contrário a colagem não é realizada. No MS, tentamos superar essa questão. O usuário pode realizar a recomposição de figuras da maneira que achar conveniente, entretanto, alguns ajustes ainda precisam ser realizados para evitar alguns *bugs* no sistema.

7.4.2 As Malhas

No *Magnitude Studium* temos um menu denominado de Referencial. Nele, podemos encontrar diferentes tipos de malhas (quadriculada, isométrica, hexagonal, e pontilhadas [quadrada, isométrica e hexagonal]), além da opção eixo e eixo e malha pontilhada quadrada. Nos demais *software* de geometria, como, por exemplo, no *Apprenti Géomètre 2*, só temos a pontilhada isométrica e a quadrada; no Geogebra clássico, apenas a malha quadrada e no Cabri a pontilhada quadrada e a isométrica.

Nesse sentido, o MS apresenta uma pluralidade de malhas em detrimento aos *software* supracitados, fator que pode oferecer condições ao professor de explorar as mais variadas situações que dão sentido à área como grandeza, explorada nas dimensões cognitiva e didática do nosso estudo.

7.4.3 O Tangram e os Poliminós

Outro destaque do MS, em relação aos demais *software* de geometria analisados na dimensão informática da nossa pesquisa, diz respeito à construção do tangram. No MS, o usuário poderá escolher quadrados de diferentes áreas e recortá-los dinamicamente. Suas peças podem ser decompostas, recompostas e coloridas com diferentes níveis de transparências. Nelas também podem ser aplicadas as transformações isométricas do plano (translação, rotação e reflexão).

Nos demais *software* de geometria, o usuário terá que construir o tangram utilizando as ferramentas de régua e o compasso virtuais. No Geogebra, por exemplo, há várias maneiras de se construir esse jogo, como fora apresentado em nossa dimensão informática, mas os passos para isso não são tão econômicos como acontece no MS. No *Cabri Géomètre 2* e no Régua e Compasso, um procedimento análogo ao do Geogebra pode ser realizado para a construção do tangram.

No AG 2, temos o tangram predefinido, ou seja, suas peças podem ser encontradas separadamente no menu denominado de preferências, localizado na barra superior do *software*. Podem ser decompostas, recompostas (levando em conta as restrições da decomposição e composição) e aplicadas as transformações isométricas do plano. Todavia, esse jogo fica muito embutido nos menus de contexto do *software*, não sendo facilmente identificado por um usuário que não esteja familiarizado com o mesmo. Não há possibilidade de construir um tangram com diferentes áreas como acontece nos *software* Geogebra, Cabri e Régua e Compasso, nem tampouco se pode definir um quadrado com diferentes áreas para então recortá-lo como acontece no MS.

Com exceção do MS e AG 2, os demais *software* de GD apresentados anteriormente não implementam em seus menus os poliminós. Todas as 21 peças desse jogo precisarão ser construídas se o objetivo do usuário for explorar a abordagem de área e perímetro por meio desse jogo em um ambiente informático. No MS, como também no AG 2, a família dos poliminós (monominó, dominó, triminó, tetraminó e dominó) podem ser exploradas livremente e aplicadas as mesmas ações como nas peças do tangram.

O diferencial do MS para o AG 2, no que diz respeito a esse quebra cabeça, está no fato do usuário poder colorir com diferentes níveis de transparências as peças (isso pode contribuir com algumas variáveis didáticas para o trabalho com área apresentadas no capítulo 3 da nossa pesquisa). Outro fator é a possibilidade de definir a unidade de medida dos quadrados que formam as peças dos poliminós, discutidas no capítulo 5, referente à primeira versão do protótipo.

Vale salientar que tanto o tangram quanto os poliminós no MS foram avaliados satisfatoriamente pelo fato de permitirem construir diferentes tarefas de área e perímetro de figuras planas, nas análises realizadas pelas duplas de especialistas (sujeitos da nossa pesquisa).

7.4.4 As ferramentas para trabalhar a ideia da quadratura de figuras

Em nenhum dos *software* de GD explorados em nosso estudo temos como possibilidade trabalhar a ideia de igualdade de áreas como ocorre com as ferramentas do menu quadratura. Na transformação, por exemplo, de um triângulo para um paralelogramo, de um paralelogramo para um retângulo ou de um retângulo para um quadrado, podemos criar tais figuras de forma que, ao arrastarmos o vértice de uma, a área e o perímetro da outra possam ser conservados em relação às modificações que estão sendo realizadas. Permite ainda os passos para a quadratura de um triângulo.

A soma de quadrado nos permite explorar o teorema de Pitágoras de forma bem simples: ao desenharmos dois quadrados, podemos justapor um dos lados, clicar na soma de quadrados e, em seguida, no lado de um deles e após no do outro, obtendo, então, um quadrado que é a soma da área desses dois. Nos demais *software* de geometria teremos um custo maior para criar tais situações, não sendo tão econômicas.

7.4.5 Rotação e reflexão nas figuras

Outro diferencial do MS em relação aos demais *software* é a rotação e reflexão que podem ser aplicadas às figuras, mantendo invariáveis seus atributos, como a área e o perímetro, por exemplo. No MS, para aplicar tais procedimentos, o usuário precisará apenas desenhar qualquer polígono, travá-lo por meio da ferramenta *freezing* e, em seguida, rotacionar um dos vértices com o botão esquerdo do mouse ou realizar a reflexão dando um clique duplo em um dos lados das figuras.

Em outros *software* de geometria, como o *Cabri*, esse tipo de isometria é aplicado da seguinte forma: escolhe-se a ferramenta rotação, na caixa de ferramenta transformar, seleciona-se o objeto para girar, o ponto de rotação e o valor angular de rotação, ferramenta que rotaciona um objeto de um valor angular específico em relação a um ponto¹²⁸.

Com relação à reflexão (simetria axial), o usuário deve selecionar a ferramenta denominada de **Simetria axial**, localizada na caixa de ferramentas transformar, em seguida clicar sobre o objeto para refletir, escolher uma reta, segmento, semirreta, vetor, eixo ou lado de um polígono para refletir o objeto. Acreditamos que os passos realizados no MS são mais simples para um usuário que não tenha tanta experiência com o uso de *software* de GD.

¹²⁸Esse trecho foi retirado da fase informática da nossa pesquisa.

Esses são apenas alguns diferenciais do MS em relação aos demais *software* de geometria estudados em nosso texto. Ressaltamos ainda a necessidade da realização de uma comparação mais profunda, em um estudo futuro, entre cada um deles.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante alguns anos, temos nos debruçado a investigar os fenômenos relativos ao campo das grandezas e medidas, mais enfaticamente à abordagem didática do conceito de área como grandeza geométrica (BALDINI, 2004; CREM, 2007^a; SILVA, 2015, 2016, 2017). Esses estudos vêm enfatizando potencialidades do uso de recursos tecnológicos informáticos como forma de contribuir para superação das dificuldades no ensino e aprendizagem do conceito de área, que têm se mostrado persistentes ao longo dos anos (BALTAR, 1996; BELLEMAIN; SILVA, 2017; FACCO, 2003; FERREIRA, 2010; GOBBI, 2012; PESSOA, 2010; SECCO, 2007; SILVA, 2017).

Em relação à contribuição dos recursos tecnológicos informáticos para o ensino e aprendizagem de área, nossa dissertação de mestrado (SILVA, 2016) explorou um *software* de geometria ainda não estudado por pesquisas nacionais, o *Apprenti Géomètre 2* (AG 2), que permite, entre outras ações, a decomposição e recomposição de figuras planas. Em nosso estudo, para responder a um conjunto de tarefas sobre área, as estratégias de ação mobilizadas pelos estudantes que utilizaram o AG 2, em detrimento das estratégias dos alunos que usaram apenas papel e lápis, permitiram-nos verificar, no primeiro grupo, uma possível superação das concepções geométricas de área.

No entanto, identificamos algumas limitações e lacunas neste *software* para o estudo de área, em uma perspectiva conceitual. Apesar do AG 2 ter se revelado pertinente por oferecer condições para que os alunos percebam que a área de uma figura é “invariante por decomposição e recomposição”, não é possível nesse *software* perceber, por exemplo, a possibilidade de manter a área medida (a medida da área junto com a unidade) e, ao alterar os invariantes geométricos, poder observar o que vai acontecendo.

Existem restrições quanto ao uso das malhas pontilhadas (quadriculadas e isométricas), limitações nas ferramentas que permitem a decomposição e recomposição (fusão) de figuras e o AG 2 não trabalha com unidades de medidas convencionais. Ademais, a construção de ladrilhos restringe-se aos modelos que já constam nos menus do *software*, e, por isso, caso o usuário deseje criar outros, o *Apprenti Géomètre 2* apresentará um erro no

sistema e encerrará o programa automaticamente, sem oferecer uma opção de salvar a tarefa que estava sendo realizada.

Pensamos, então, em um caminho para dar suporte ao professor quanto à construção, à aplicação e à gestão de situações para a ampliação do trabalho não apenas com área de figuras planas em sala de aula, mas também com perímetro, por meio de um novo *software* de geometria, em uma versão que não fosse complexa em ferramentas.

Para isso, traçamos como **objetivo geral**: conceber, desenvolver e validar um micromundo como elemento de suporte ao professor para o ensino de área e perímetro, utilizando-se do modelo de desenvolvimento de *Software* Educativo proposto na EDI. Para alcançarmos esse objetivo, elencamos três **específicos**: realizar um levantamento dos aspectos epistemológicos, didáticos, cognitivos e informáticos a respeito do conceito de área e perímetro; verificar os requisitos necessários ao *software*, considerando a dimensão computacional de aspectos epistemológicos, didáticos e pedagógicos para engenharia; prototipar, desenvolver e validar a versão inicial do micromundo, utilizando-se do modelo de desenvolvimento de SE estabelecido na EDI.

Nossa escolha pelo tipo de *software* “micromundo” se deu pelo fato de ser um sistema de aquisição que determina as ações possíveis do usuário, ou seja, além dos comandos e aquisição de dados, esse sistema pode igualmente modelizar a interpretação das intenções do usuário em função do contexto dessas ações (BELLEMAIN, 2002).

A prototipação do *software* adotou um modelo de processo de *software* desenvolvido com base na Engenharia Didático-Informática (EDI) (TIBÚRCIO, 2016), que alia aspectos da Engenharia Didática estudada por Michèle Artigue (1996) e da Engenharia de *Software* presente em Sommerville (2011) e Pressman (1995). Este processo é constituído por cinco fases: análises preliminares, análise de requisitos, análise a priori e prototipação, experimentação, análise à posteriori e validação.

Na primeira fase, o conceito de área foi situado em relação aos aspectos cognitivos, epistemológicos, didáticos e informáticos que a constituem. Considerados esses fatores, realizamos uma breve explicitação da noção de área com base nos Elementos de Euclides (BICUDO, 2009), em David Hilbert (1971) e nos estudos de Henri-Léon Lebesgue (1975), seguida da abordagem de área como grandeza proposta por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989) que definem o recorte de área em nossa pesquisa.

Também foram apresentados nesta fase: as concepções dos alunos sobre área; o ensino de área como grandeza e os seus efeitos por meio de diferentes recursos não informáticos.

Trazemos ainda como suporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1996) e seus colaboradores.

Ancorados nessa teoria, os estudos das situações que dão sentido à área como grandeza propostos por Baltar (1996) e por Ferreira (2010) levam a considerar, na construção do conceito de área, quatro grandes classes de situações: comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície. Essas situações nos permitiram refletir sobre quais tipos de requisitos poderiam ser implementados no novo micromundo, denominado de *Magnitude Studium* (MS), para o trabalho de área como uma grandeza.

Na dimensão informática, realizamos análises em vários micromundos, tutoriais e simulações, que tratam do conceito de área e/ou perímetro. Para isso, elencamos três pontos centrais de acordo com o foco da nossa pesquisa: recursos para o trabalho com área (ferramentas e menus específicos); ferramentas de planejamento (configuração de menus, macroconstruções e histórico das construções) e aspectos técnicos. Nesta fase, também discutimos, de forma mais enfática, questões cognitivas e didáticas acerca do conceito de perímetro, com base nos estudos de Barbosa (2002), Brito (2003) e Brito e Bellemain (2004).

Com relação a aspectos técnicos, foram considerados: compatibilidade; portabilidade, exigências para instalação; interface atrativa; facilidade no manuseio; ferramentas autoexplicativas; disponibilidade de tutorial e menu ajuda e navegabilidade. Essas análises nos permitiram listar requisitos para o novo micromundo, apresentados em um dos capítulos da parte metodológica da pesquisa, que diz respeito à Elicitação e à Análise de Requisitos, no qual os resultados das Análises Preliminares foram traduzidos em requisitos do sistema.

Na Análise a priori e Prototipação, que dizem respeito ao desenvolvimento do protótipo, considerando-se as situações de uso a serem abordadas, expusemos alguns layouts iniciais com as possíveis ferramentas para serem implementadas no MS. Em seguida, apresentamos a primeira versão do protótipo com a explicação das funcionalidades dos menus e ferramentas. Deixamos claro que apenas alguns requisitos dos elicitados foram atendidos no protótipo em virtude do tempo para a finalização de sua primeira versão e a realização dos testes.

Na fase de experimentação, discutimos como o protótipo foi testado por especialistas em grandezas e medidas e em informática e educação matemática. Os resultados dessa fase culminaram na Análise a Posteriori e Validação, as quais indicam que o protótipo atendeu parcialmente ao objetivo especificado na sua concepção.

As análises dos especialistas destacaram a fragilidade do *software* com relação à construção conceitual do perímetro, visto que há uma restrição das figuras a serem

construídas (figuras não poligonais e a composição de figuras poligonais com não poligonais); e o fato da ferramenta fita métrica expressar o cálculo do perímetro diretamente, sem oferecer condições para que o aluno contorne a figura. Apesar disso, os resultados das análises deixam clara a potencialidade do MS para o trabalho da abordagem de área como uma grandeza, mesmo com alguns *bugs* nas malhas, na ferramenta de colagem e o não suporte dado para a mudança de unidade convencional. Assim, os professores-avaliadores acreditam que o MS neste momento, dá conta, de forma mais enfática, da abordagem de área.

Várias sugestões foram dadas pelas duplas para a evolução do MS. Em termos de *design*, precisam ser melhorados¹²⁹:

- a imagem de apresentação do *software* na plataforma;
- as imagens dos ícones para que fiquem mais intuitivos;
- o traçado das imagens de representação de cada função;
- a necessidade de apresentaçãodo nome e da descrição das ferramentas em português;
- a importância da sinalização de que, dentro dos botões dos ícones, existem outras ferramentas.

Essas sugestões foram consensuais entre as duplas. Já no que diz respeito aos aspectos técnicos e de ergonomia, destaca-se a necessidade de serem implementadas:

- ferramenta para voltar partes das construções (pelo menos em 3 passos);
- ferramenta de copiar e colar as figuras;
- ferramenta para apagar toda a construção de uma vez para que não seja necessário atualizar a página;

- ferramentas que permitam o *zoom in* e *zoom out*;

Ainda com relação aos termos de uso, faz-se pertinente:

- Separar as funções de cada ferramenta de edição de imagem (desvinculá-las);
- Criar ferramentas que permitam construir polígonos dado o número de lados;
- Permitir escolher as escalas das malhas;
- Permitir desgrudar as figuras das malhas;
- Permitir o funcionamento da ferramenta imã;
- Permitir escolher a unidade de medida convencional na fita métrica;

¹²⁹ As sugestões dadas pelas duplas aos formulários e questionários, as quais apresentamos resumidamente neste capítulo, nos permitiram refletir sobre a necessidade de uma evolução dessa primeira versão do *software*. Idealizamos então, para uma possível evolução do MS, um *layout* que se encontra disponível no Apêndice L.

- Permitir que o aluno contorne a figura com o mouse para estabelecer o perímetro;
- Aprimorar a ferramenta de colagem em virtude dos *bugs* que estão aparecendo;
- Inserir as peças do tangram no seu ícone;
- Aprimorar a ferramenta de construção de polígonos regulares;
- Permitir a colagem de uma figura poligonal com outra não poligonal;
- Oferecer mais ferramentas que permitam a construção de figuras não poligonais;
- Poder medir a área e o perímetro das figuras não poligonais por meio da fita métrica;
- Corrigir a ferramenta que expressa o cálculo da área em Lebesgue;
- Inserir o ponto de intersecção entre objetos;
- Oferecer, na colagem, condições ao usuário de escolher se na composição de duas figuras ele quer que a linha fique demarcada ou não;
- Inserir no menu quadratura (figuras de mesma área) a opção de desvincular as figuras, permitindo que qualquer uma das duas possam ser decompostas sem que a outra desapareça da tela;
- Criar um botão com um mini tutorial para explicar como utilizar algumas ferramentas que não estão muito intuitivas segundo as duplas, tais como, o corte do tangram, o menu quadratura, a escolha da unidade de medida dos polígonos, a colagem e aplicação de rotação e reflexão.

Além das ferramentas apontadas pelas duplas, que precisam ser aprimoradas e/ou inseridas para tornar o MS mais intuitivo e de fácil manipulação, avançando na contribuição do ensino e aprendizagem dos conceitos de área e perímetro, destacamos a necessidade da inserção, em uma versão futura, de ferramentas e menus que dizem respeito a um suporte ao planejamento didático do professor em ambiente informático, como, por exemplo, a **configuração de menus**.

Quando nos referimos a esse suporte, estamos propondo, em uma pesquisa futura, explorar ferramentas que ofereçam condições às tomadas de decisões do professor em relação a seu planejamento didático. Ou seja, quando um professor leva à sala de aula determinados software para explorar algum conteúdo matemático, eles muitas vezes vão apresentar uma riqueza de ferramentas, comandos e menus que podem atrapalhar o objetivo da aula, pois os alunos vão querer explorar diferentes caminhos que podem não estar de acordo com o planejamento didático, conduzindo-os para longe do objetivo de aprendizagem traçado.

Quando o professor tem a chance de **delimitar os menus** que quer deixar acessíveis para o aluno, ele pode ter a intenção de forçar o desenvolvimento de certa técnica, ou seja,

determinada estratégia de resolução de uma dada tarefa cujo objetivo pode ser de permitir o desenvolvimento de algumas estratégias bloqueando outras. Assim, em termos de planejamento, a **delimitação de menus** mostra-se pertinente em um *software* de matemática.

Outro elemento que chamamos a atenção para um suporte ao planejamento são às “macroconstruções”, que funcionam como um “arquivamento” de construções geométricas implementadas como um ícone no *software* e utilizadas em diferentes tarefas.

Há vários elementos que podem ser pensados para esse suporte, como, por exemplo, a delimitação de casas decimais; o tipo de unidade de medida convencional que se pretende explorar em determinada tarefa de área e/ou perímetro; a decisão do que vai aparecer na tela do *software* em função dos objetivos traçados, se uma calculadora, uma janela gráfica, a gravação do histórico dos alunos etc.

Nesse sentido, entendemos que tudo que é deixado de escolha para a tomada de decisão do professor no ambiente informático relacionado à configuração do mesmo pode ser caracterizado como suporte ao planejamento didático.

Um diferencial para a inserção em uma versão futura do MS é trazer os elementos elencados no parágrafo anterior de forma mais intuitiva, pois tais ferramentas em vários *software* de geometria dinâmica explorados em nosso estudo ficam muito embutidas, escondidas dentro de menus, e, por vezes, a configuração delas é tão difícil e pouco familiar ao professor da educação básica, que ele pode não perceber as suas utilidades.

Acreditamos que muitas das observações realizadas pelas duplas, principalmente na ferramenta Fita Métrica, poderiam ter sido satisfatórias caso o professor tivesse a oportunidade de bloquear algumas ações dos alunos tendo em vista o objetivo traçado previamente para a atividade planejada. Ou seja, não antecipando, por exemplo, o trabalho com a medida, algo que pode surgir com a ferramenta Fita Métrica, em um primeiro momento no estudo da área e do perímetro.

Ressaltamos também a importância de ser explorada, em outro momento, a potencialidade do encaixe dos artefatos tangram e poliminós dentro de um artefato maior, o próprio MS, oferecendo condições de escolhas para o trabalho com área e perímetro. Temos então, dois níveis de situações nos quais se pode planejar o ensino de um determinado objeto matemático, em que o *software* é um dos elementos e cada uma dessas ferramentas é um elemento dentro de um sistema maior.

8.1 Observações Referentes a nossa Pesquisa

Grande parte das sugestões dadas pelas duplas de aprimoramento do MS foi prevista em nossa pesquisa nos capítulos 4 e 5, correspondentes aos Requisitos do Sistema e às Análises a priori e Prototipação (reciprocamente). Entretanto, como já discutimos, precisávamos de uma versão inicial (protótipo) do MS para a realização dos testes com os especialistas, ficando inviável, no tempo curto do programador, atender tudo que foi previsto.

Todavia, podemos observar que o fato de termos disponibilizado as funcionalidades do protótipo, mesmo parcialmente e com alguns desfuncionamentos, provocou várias reflexões, o que talvez não tivesse ocorrido em um *software* mais simples. Nesse sentido, interpretamos que isso valida os requisitos que a engenharia produziu sobre o *software*.

O esboço proposto pelo *Magnitude Studium* provocou discussões muito mais ricas, embora ainda precisássemos ter desenvolvido outros elementos. Interpretamos que o material produzido e coletado no experimento foi de grande valia para a evolução do *software*.

As duplas relataram uma fragilidade do experimento em relação ao tempo que tiveram para realizar e finalizar as análises de todas as ferramentas e menus, pois acharam muita coisa para avaliar em um curto período de tempo. Contudo, mesmo com tal observação, tivemos uma riqueza de dados que nos permitiram refletir sobre diversos aspectos de aprimoramento para o MS.

Talvez, em uma pesquisa futura, fosse solicitado aos especialistas que analisassem outros *software* de geometria, seguindo o modelo do experimento, no sentido de expressarem sua opinião sobre as potencialidades e limitações destes *software* para o ensino de área e perímetro. Uma outra situação era perguntar aos especialistas uma possível idealização do que deveria ter em um *software* para dar suporte ao professor no ensino de área e perímetro.

Sugerimos ainda um experimento com outros professores da educação básica que não estivessem inseridos no contexto das pesquisas em grandezas e medidas, nem tampouco em tecnologia e educação matemática, para analisar a opinião deles em relação ao *software*. Poderia ser solicitado aos mesmos que construíssem, por exemplo, algumas tarefas sobre área e perímetro. Essa proposta teria por objetivo identificar se o *software* é acessível a profissionais que não têm tanto/ou nenhum domínio na área de grandezas e medidas, e em informática e educação matemática. Assim, acreditamos que mais alguns elementos surgiriam para tornar o MS mais autoexplicativo e intuitivo, a fim de atingir um grande público e favorecer seu uso.

Elencamos mais algumas perspectivas para novas investigações:

- Aprofundar o estudo dos aportes do uso de diversos recursos informáticos para a construção do sentido de área e perímetro como grandeza;
- Analisar os dados da pesquisa, sob a ótica dos recursos (ADLER, 2000), utilizando outros aportes teóricos, como a Abordagem Instrumental (RABARDEL, 1995) ou a Teoria da Orquestração Instrumental (TROUCHE, 2005);
- Elaborar e experimentar uma engenharia didática ancorada na pluralidade de recursos presentes no MS para a construção do sentido de área e perímetro como grandeza;
- Investigar a prática dos professores dos anos iniciais do ensino fundamental quanto ao uso do MS, no ensino de área e perímetro;
- Elaborar e aplicar um conjunto de tarefas sobre área e perímetro para serem respondidas no MS por estudantes da educação básica, com o objetivo de identificar as potencialidades e limitações desse *software* para o estudo desses conceitos.

Uma pesquisa futura poderia ainda se debruçar em como ocorre a transposição informática dos recursos identificados ao longo da nossa pesquisa, que podem ser considerados um suporte para o professor no desenvolvimento de situações de ensino de área e perímetro de figuras planas para ambientes informáticos, ou seja, trazer uma reflexão sobre a transposição informática (BALACHEFF, 1994) que busca entender como se dá a construção do conhecimento por meio de tecnologias digitais. Esses são alguns pontos que destacamos para possíveis pesquisas futuras.

Finalizando nossas considerações, acreditamos, assim como a pesquisadora Kenski (2007), que as tecnologias informáticas quando bem utilizadas, provocam a alteração dos comportamentos de professores e alunos, levando-os ao melhor conhecimento e maior aprofundamento do conteúdo estudado. A mesma autora afirma ainda que os usos de *software* diferenciados transformam a realidade da aula tradicional, dinamizam o espaço de ensino e aprendizagem, onde, anteriormente, predominavam a lousa, o giz, o livro e a voz do professor.

REFERÊNCIAS

- ADLER, J. Conceptualising resources as a theme for teacher education. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 3, n. 3, p. 205-224, 2000.
- ALENCAR, M. S. de. **A Matemática da Medição**. 2008. Disponível em <http://www.difusaocientifica.com.br/artigos/Matematica_Medicao.pdf>. Acesso em 25 de dezembro de 2018.
- ALMEIDA, R. de C. M. de. **Demonstrações em geometria plana em livros-texto no Brasil a partir do século XIX**. 2008. 273 f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
- ALMOULOUD, S. Ag.; COUTINHO, C. de Q. e Silva. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd**. Disponível em <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62>>. Acesso em 14 de abril de 2019.
- ANWANDTER-CUELLAR, N. **Place et rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques numérique, fonctionnel et géométrique et de leurs interrelations dans l'enseignement au collège em France**. Tese de doutorado HPDS (Histoire Philosophie et Didactique des Sciences). Montpellier: Université Montpellier 2, 2012.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4. p. 193-217.
- BALACHEFF, N. Didactique et intelligence artificielle. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**. Vol. 14, n°. 12, 1994, p. 9-42.
- BALACHEFF, N. Apprendre la preuve. In: J. Sallantin et J.J. Szczeciniarz (Editors), **La preuve à la lumière de l'intelligence artificielle**, Paris, PUF. 1999.
- BALDINI, L. A. **Construção do conceito de área e perímetro: uma sequência didática com auxílio de software de geometria dinâmica**. 2004. 179f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.
- BALDIN, Y. Y.; VILLAGRA, G. A. L. **Atividades com Cabri Géomètre**. São Carlos: EDUFSCar, 2002.
- BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège**. 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática), Université Joseph Fourier, Grenoble, França, 1996.
- BARBOSA, P. R. **Efeitos de uma sequência de atividades relativas aos conceitos de comprimento e perímetro no 2º ciclo Ensino Fundamental**. 214 f. Dissertação (Mestrado em Educação), UFPE, Recife, 2002.

BARCELOS, G. T.; BATISTA, S. C. F.; HORA, H.; Rapkiewicz, C. E. **Avaliar é Preciso:** o Caso de Software educacionais para Matemática no Ensino Médio. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/242093525_Avaliar_e_Preciso_o_caso_de_softwa_re_educacionais_para_Matematica_no_Ensino_Medio>. Acesso em 5 de agosto de 2018.

BARROS, A.; SILVA, A. D. P. R. O Apprenti Géomètre como recurso para o ensino de área de figuras planas. In: XIV Congresso Internacional de Tecnologia na Educação, 2016, Olinda -PE. **Anais** do XIV Congresso Internacional de Tecnologia na Educação. Recife: SESC/SENAC, 2016. p. 01.

BATISTA, S. C. F. **SoftMat:** Avaliação e Disponibilização de Software Educacionais para Aprendizagem de Matemática no Ensino Médio. 2004. Dissertação (Mestrado em Ciências de Engenharia). Campos dos Goytacazes, RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense – UENF.

BELLEMAIN, F. A transposição informática na engenharia de software educativos. Livro de resumos – SIPEM – I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. **Anais...** Serra Negra – SP, 2000.

BELLEMAIN, F. O Paradigma Micromundo. In: Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática HTEM, 2002, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: UFRJ, 2002, p. 51-62.

BELLEMAIN, F.; CORREIA, A. M. **Geometria dinâmica:** fundamentos epistemológicos. In: 4º Congreso Nacional e 1º Encuentro Internacional de Profesores e Investigadores del Área de Expresión Gráfica, 2004, Rosario. Actas del EGRAFIA 2004. Rosario: EGRAFIA, 2004. v. 1.

BELLEMAIN, F. G. R. Analyse d'environnements de geometrie dynamique collaborative du point de vue de l'orchestration instrumental. **Nuances**, v. 25, p. 16-32, 2014. Disponível em <<http://dx.doi.org/10.14572/nuances.v25i2.2936>>. Acesso em 24 de dezembro de 2018.

BELLEMAIN, F. G. R.; RAMOS C. S.; dos SANTOS, R. T. Engenharia de Software Educativos, o caso do Bingo dos Racionais. In: VI SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Pirenópolis. **Anais do VI SIPEM**. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2015. v. 1. p. 1-12.

BELLEMAIN, F.; RODRIGUES, A.; SILVA, A. R. da. LEMATEC STUDIUM: um recurso para o desenvolvimento de material didático digital. In: VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática, 2017. Garanhuns- Pernambuco, Brasil. **Anais eletrônicos...**, Pernambuco: LEMATEC, 2017. Disponível em <http://epem.sbempe.com.br/anais/2017/PDFs/CC01233648411_060206.pdf>. Acesso em 28 de dezembro de 2018.

BELLEMAIN, P. M. B. Estudo de situações-problema relativas ao conceito de área. In: X ENDIPE-ENCONTRO DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 2000, Rio de Janeiro. Ensinar e aprender: sujeitos, saberes, tempos e espaços. **Anais...** Rio de Janeiro, 2000. CD-ROM.

BELLEMAIN, P. M. B. ; BITTAR, M. **O ensino da geometria e a teoria dos Campos Conceituais**. 2000. Disponível em <<http://www.cefetes.br/gwadocpub/PosGraduacao/Especializa%C3%A7%C3%A3o%20em%20educa%C3%A7%C3%A3o%20EJA/Publica%C3%A7%C3%B5es/anped2002/bellemainminicurso19.pdf>> Acesso em 2 de fevereiro de 2016.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. Análises prévias à concepção de uma engenharia de formação continuada para professores de matemática do ensino fundamental. In: Reunião Anual da ANPED – Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Educação. **Anais...** Caxambu, 2000.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental**. Ed. Geral: John A. Fossa. Natal: SBHMat, 2002.

BENITTI, F. B. V.; SEARA, E. F. R.; SCHLINDWEIN; L. M. **Processo de Desenvolvimento de Software Educacional**: proposta e experimentação. 2005. Disponível em <<http://www.seer.ufrgs.br/renote/article/viewFile/13849/8025>>. Acesso em 08/10/2016.

BICUDO, I. **Os elementos/Euclides**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

BOLTIANSKI, V. G. Figuras equivalentes y equicompuestas. 1981. Disponível em <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/185324>> Acesso em 1º de fevereiro de 2019.

BORBA, M. de C. Softwares e internet na sala de aula de matemática. In: ENEM: Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais eletrônicos...**, Bahia-Salvador, 2010. Disponível em < <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/marceloxenen.PDF>>. Acesso em 26 de junho de 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, p. 20-26, 37-64, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: < <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: dezembro de 2018.

BRITO, A. F. de. **Um estudo sobre a influência do uso de materiais manipulativos na construção do conceito de comprimento como grandeza no 2º ciclo do Ensino Fundamental**. 2003. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação), UFPE, Recife, 2003.

BRITO, A. F. de.; BELLEMAIN, P. M. B. Influência do uso de materiais manipulativos na construção da grandeza comprimento. 2004. In: VIII ENEM: Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo. **Anais eletrônicos...** Recife, 2004. Disponível em: <<http://www.sbemrasil.org.br/files/viii/pdf/01/CC00073428450.pdf>>. Acesso em 12 de dezembro de 2018.

CABRI-GEOMETRY II. **Software de geometria dinâmica**. Disponível em <<http://www-cabri.imag.fr>>. Acesso em 10 de agosto de 2018.

CARVALHO, C. V. A. **Software TRIÂNGULOS**. 2012. Disponível em: <<https://sites.google.com/site/softwaretriangulos/>>. Acesso em: 9 de agosto de 2018.

COULON, F. **OpenEuclide**. Disponível em <<http://coulon.publi.free.fr/openeuclide/>>. Acesso em novembro de 2018.

COUTO, R. **Mediações didáticas da tutoria online da geometria analítica: uma análise à luz da orquestração instrumental e das representações semióticas**. 2015. 172f. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. UFPE, Recife, 2015.

CREM, **Conception d'un CD-Rom pour l'enseignement des mathématiques à l'école primaire Cahier des charges Du logiciel de dessin**. Nivelles, Bélgica, Ministère de la Communauté Française, 2002.

CREM, Apprenti Géomètre. **Impact du logiciel Apprenti Géomètre sur certains apprentissages**. Tome 1. Nivelles, Bélgica, Ministère de la Communauté Française, 2007a.

CREM, Apprenti Géomètre. **Impact du logiciel Apprenti Géomètre sur certains apprentissages**. Tome 2. Nivelles, Bélgica, Ministère de la Communauté Française, 2007b.

CREM, Apprenti Géomètre. **Guide utilisateur du logiciel**. 2017. Disponível em <<http://api.crem.be/medias/logiciels/1/Guide%20utilisateur.pdf>> Acesso em 15 de setembro de 2015.

DEWEY, J. **Como Pensamos- Como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo**: uma reexposição. Tradução e notas de Haydée de Camargo Campos. Atualidades Pedagógicas. 3ª edição. V. 2 São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959, p. 292.

DOUADY, R. **Un exemple d'ingénierie didactique où sont à l'œuvre jeux cadres et dialectique outil-objet**. Séminaires de didactique de mathématiques, Année, IRMAR de Rennes 1, 1983.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**.v.20, n.4, p. 387-424, 1989.

DUARTE, J. H. **Análise de Situações Didáticas para a Construção do Conceito de Área, como Grandeza, no Ensino Fundamental**. 2002. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v.5. IREM de Strasbourg, 1993, p. 37-65.

FACCO, S. R. **Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem**. 2003. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2003.

FANTI et al. **Explorando poliedros convexos no Ensino Médio com o software Poly**. 2007. Disponível em <http://www.sbmec.org.br/eventos/cnmac/xxxiii_cnmac/pdf/628.pdf> . Acesso em 12/10/2016.

FERREIRA, L. de F. D. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental**: estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais. 2010. 191f. Dissertação (Mestrado em Educação) . Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

FERREIRA, L. de F. D. **Um estudo sobre a transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental**: o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro. 2018. 386 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2018.

FERREIRA, L. de F. D.; BELLEMAIN, P. M. B. **Estratégias utilizadas por alunos do 6º ano em questões da OBEMEP sobre as grandezas comprimento e área**. 2013. Disponível em: <http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2899_1501_ID.pdf>. Acesso em 23 de fevereiro de 2016.

FILHO, M. A. S. de M. **Engenharia Didática**. 2015. Disponível em <<https://reer.emnuvens.com.br/reer/article/view/11>> . Acesso em 13 de abril de 2019.

FRANCHI, A. et al. **Geometria no 1º Grau**: da composição e da decomposição de figuras as fórmulas de área. São Paulo: CLR Balieiro, 1992. (Coleção ensinando-aprendendo, aprendendo-ensinando; vol. 7).

GALVIS-PANQUEVA, A. H. Software Educativo Multimídia: Aspectos Críticos no seu Ciclo de Vida. **Revista Brasileira de Informática na Educação**. Comissão Especial de Informática na Educação da Sociedade Brasileira de Computação, Florianópolis, SC, Setembro, p. 9-18, 1997.

GITIRANA, V. et al. **Jogos com Sucata na Educação Matemática**. 1ª. ed. Recife: Editora Universitária da UFPE, 2013.

GITIRANA, V. et al. **Repensando multiplicação e divisão contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. 1. Ed. São Paulo: PROEM, 2014.

GOBBI, J. A. **Do livro didático ao software geogebra**: a engenharia didática no estudo de figuras planas na 6ª série/7º ano do ensino fundamental. 2012. 135f. Dissertação (Curso de Mestrado profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática)-Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2012.

GOMES, A. S. et al. **Avaliação de software educativo para o ensino de matemática**. WIE'2002. Florianópolis (SC). Disponível em <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.70.5764&rep=rep1&type=pdf>> . Acesso em 20 de abril de 2019.

GUEUDET, G. ; TROUCHE, L. Du travail documentaire des enseignants: genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. **Education et didactique**, Rennes, v. 2, n. 3, p. 7-33. 2008.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 262 f. Tese (Doutorado)- Programa de Pós-Graduação em informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GREMILLION, D.; KEYTON, M. **Cabri géomètre II**: guia de utilização para windows. 1998. Disponível em <http://miltonborba.org/CD/Software/PROGRAMAS/Cabri/Ajuda/CABRI_GEOMETRY-II.pdf> .Acesso em 03 de setembro de 2018.

GRIGOROVSKI, F. S. de A.; CARVALHO, C. V. A. **Uma proposta para o uso do software sopolígonos para o ensino de polígonos regulares**. Disponível em <https://www.researchgate.net/publication/259461566_Uma_proposta_para_o_uso_do_softw_are_SOPOLIGONOS_para_o_ensino_de_Poligonos_Regulares>. Acesso em 25 de julho de 2018.

HILBERT, D. **Grundlagen der Geometrie**. Teubner, Leipzig/Berlín. Versão em inglês: Foundations of Geometry, trad. E.J. Townsend (com algumas adições feita por Hilbert para a edição francesa de 1899). Open Court, La Salle, Illinois, 1962.

HILBERT, D. **Foundations of geometry**. Tradução por Leo Unger. United States of America: Open Court Publishing Company, 1971. Versão inglesa.

HOFFMANN, D. S. **Relato de Experiência: a geometria e o cabri géomètre na licenciatura em matemática da UFRGS**. Disponível em <http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/pacotes/Hoffmann_Gravina.pdf>. Acesso em 28 de julho de 2018.

HOHENWARTER, M. **Geogebra 5**. Disponível em <http://www.geogebra.org/cms/pt_BR>. Acesso em 12 de setembro de 2018.

IMENES, L.; LELLIS, M. **Matemática para todos**. 5ª à 8ª série. Editora Scipione. São Paulo, 2008.

JACOB, F. C. **Uma Construção do conceito de Área para Figuras Planas**. 2015. 51 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2015.

KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologias**: o novo ritmo da informação. Coleção: Papirus Educação. Campinas-SP. Editora: Papirus. 2007

KUSIAK, R. S.; PRESTES, R. F.; SCHMIDT, D.; FRANZI, N, R. F. A utilização do software geogebra no ensino da geometria plana: uma experiência PIBID. **Anais do 1º Seminário Nacional de Inclusão Digital –SENID**. Passo Fundo, RS: 2012.

LABORDE, C. et al. Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future p. 275–304. **Rotterdam: Sense**. 2006.

LEBESGUE H. **La mesure des grandeurs**. Librairie A. Blanchard, Paris, 1975.

LIMA, E. L. **Polígonos Equidecomponíveis**. 1987. Disponível em <<http://rpm.org.br/cdrpm/11/5.htm>>. Acesso em 23 de dezembro de 2018.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, P. F. Considerações sobre o conceito de área. In: **Anais da Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife, 1995.

LIMA, P. F.; CARVALHO, J. B. P. F. DE. Geometria. In: CARVALHO, J. B. P. F. DE. (Org.). **Matemática: Ensino Fundamental**. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, 2010. p. 248.

LYRA, A. R. de L. et al. **Ambiente Virtual para Análise de Software Educativo**. WIE', 2003. Campinas (SP). Disponível em <<http://www.br-ie.org/pub/index.php/wie/article/view/792/778>> . Acesso em 20 de abril de 2019.

MACHADO, J. P. de A. **A significação dos conceitos de perímetro e área, na ótica do pensamento reflexivo, trabalhando em ambientes de geometria dinâmica**. 2011. 165 f. Dissertação (Mestrado)- Programa de Mestrado Profissional em Educação matemática. Universidade federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Ouro Preto, 2011.

MANETTA, M. A. **Desafío de los poliminós no Geogebra**. Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/tgQb5yPD>>. Acesso em 12 de setembro de 2018.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Banco Internacional de Objetos Educacionais do Ministério da educação**: Disponível em <<http://objetoseducacionais.mec.gov.br/#/ne/SU5GQU5USUw>>, Acesso em 23, de julho de 2018.

MELO, M.A.P. **Um estudo de conhecimentos de alunos de 5º a 8º série do ensino fundamental sobre os conceitos de área e perímetro**. 2003. 125 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Pós- graduação em Ensino das Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2003.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. 2013. Disponível em <<https://pt.scribd.com/document/227246992/Introducao-a-Historia-Da-Matematica>>. Acesso em 12 de janeiro de 2019.

MONTEIRO, C. E. F. Recursos no ensino e aprendizagem de matemática em contextos de educação do campo. In: ENEM: Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo. **Anais eletrônicos...** São Paulo, 2016. Disponível em <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/8389_4320_ID.pdf>. Acesso em 21 de dezembro de 2018.

MOREIRA, M. D. D. **Revisitando Euclides para o Ensino de Áreas: uma Proposta para as Licenciaturas**. 2010. 165 p. Dissertação (Mestrado). Programa de Ensino de Matemática, UFRJ/IM, Rio de Janeiro, 2010.

NOSS, R.; HOYLES, C. **Windows on mathematical meanings, learning cultures and computers**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 1996. Disponível em <<https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=VclPmvPRbSAC&oi=fnd&pg=PR9&dq=Windows+on+mathematical+meanings,+learning+cultures+and+computers&ots=whJTta4LxS&sig=lHXszO-6MJO4pUDquIgCe6lpCBE#v=onepage&q=Windows%20on%20mathematical%20meanings%20C%20learning%20cultures%20and%20computers&f=false>>. Acesso em 31 de maio de 2019.

OSTENNE, D'Emmanuel. **Le logiciel Déclic**. Disponível em <<http://emmanuel.ostenne.free.fr/declic.htm>>. Acesso em 23 de dezembro de 2018.

PAIS, Luis Carlos. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Régua e compasso, versão 1.1.0: geometria dinâmica** / Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. Diretoria de Tecnologias Educacionais. – Curitiba: SEED – Pr., 2010.

PERROT, G. et al. **Módulos para o ensino-aprendizagem em geometria: relatório da primeira experimentação do primeiro módulo em Pernambuco**. In: Seminário do Pró-Matemática, 5, 1998, Recife. Projeto. Brasília: MEC/SEF, 1998.

PESSOA, G. S. **Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada: influência de algumas variáveis**. 2010.141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica)- Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, 2010.

PORTAL CIÊNCIA A MÃO. **Manual área de um triângulo**. 2018. Disponível em: <<http://www.cienciaao.usp.br/dados/tex/areadeumtriangulo.manual.pdf>>. Acesso em 25 de julho de 2018.

PORTAL DO HYPATIAMAT. **Áreas I**. Disponível em <<https://www.hypatiamat.com/>>. Acesso em 12 de dezembro de 2018.

PORTAL DO LEMATEC. **Home**. Disponível em: <<http://www.lematec.no-ip.org/>>. Acesso em: 27 de dezembro de 2016.

PORTAL, IGEOM. **Home**. Disponível em <<http://www.matematica.br/geom/manual/pt/exercicios.html?lang=pt>> . Acesso em dezembro de 2018.

PORTAL DO PHET. **Construtor de áreas**. Disponível em: <<https://phet.colorado.edu/services/downloadServlet?filename=%2Factivities%2F4791%2Fphet-contribution-4791-8403.pdf>>. Acesso em 10 de agosto de 2018.

PORTAL TARGETWARE. **Cabri géomètre**. Disponível em: <<https://software.com.br/p/cabri-geometre>>. Acesso em setembro de 2018.

PORTAL DO TECHTUDO. **O Adobe Flash Player**. 2018. Disponível em: <<http://www.techtudo.com.br/tudo-sobre/adobe-flash-player.html>>. Acesso em 23 de julho de 2018.

PORTAL DO TRACENPOCHE. **Home**. Disponível em: <<http://tracenpoche.sesamath.net/>>. Acesso em 15 de dezembro.

PORTAL DO SÉSAMATH . **Home**. Disponível em: <<http://www.sesamath.net/>>. Acesso em 12 de dezembro de 2018.

PRATES, U. e S. **A atividade orientadora de ensino como mediação no desenvolvimento de um jogo computacional**. 2011. 141 f. Dissertação (Mestrado)- Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), São Carlos/São Paulo, 2011.

PRESSIAT, A. La place des grandeurs dans la construction des mathématiques. 2008. Disponível em <<https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA09054-2.pdf>>. Acesso em junho de 2019.

PRESSMAN, R. S. **Engenharia de Software**. Trad. Santos, J. C. B dos. 3ª Ed. São Paulo, SP: Pearson Education do Brasil. 1995.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains**. Paris: Armand Colin, 1995. Disponível em <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462/document>>. Acesso em 06/07/2017 .

RAMOS, C. S. **Princípios da engenharia de Software educativo com base na engenharia didática: uma prototipação do Bingo dos Racionais**. 111 p. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife, 2015.

RICHTER-GEBERT, J.; KORTENKAMP, U. **Cinderella**. Disponível em <<https://www.cinderella.de/tiki-index.php>>. Acesso em 12 de dezembro de 2018.

ROQUE, T. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROUCHE, N.; SKILBECQ, Ph. **Apprenti Géomètre : un nouveau logiciel** Première partie: le kit standard. 2003 a. Disponível em<<https://www.apmep.fr/Apprenti-Geometre-un-nouveau>>. Acesso em 5 de agosto de 2018.

ROUCHE, N.; SKILBECQ, Ph. **Apprenti Géomètre : un nouveau logiciel** Deuxième partie: le kit libre. 2003 b. Disponível em<<https://www.apmep.fr/Apprenti-Geometre-un-nouveau>>. Acesso em 5 de agosto de 2018.

SANGIACOMO, L. et al. **Explorando geometria elementar com o dinamismo do Cabri-Géomètre**. São Paulo: PROEM, 1999.

SANTANA, E. R. **O Problema da Quadratura do Círculo: uma Abordagem Histórica Sob a Perspectiva Atual**. 2015. 85 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas). Amazonas, UFA. 2015.

SANTANA, W. M. G. de. **O uso de recursos didáticos no ensino do conceito de área: uma análise de livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental**. 2006. 192 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

SANTANA, W. M. G. de.; SILVA, A. D. P. R. da.; BARROS, A. L. Área como grandeza geométrica: um estudo por meio do *Apprenti Géomètre 2*. In: ENEM: Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo. **Anais eletrônicos...** São Paulo, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7637_3323_ID.pdf>. Acesso em 26 de junho de 2017.

SECCO, A. **Conceito de área: da composição e decomposição de figuras até as fórmulas**. 2007. 198 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2007.

SILVA, A. D. Da composição e da decomposição de figuras planas à construção do conceito de área: um estudo por meio do *Apprenti Géomètre 2*. In: EBRAPEM: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática, XVIII., 2014, Recife. **Anais eletrônicos...** Recife, 2014. Disponível em: <<http://www.lematec.no-ip.org/CDS/XVIII/EBRAPEM/PDFs/GD2/andersonsilva2.pdf>> Acesso em 14 de janeiro de 2015.

SILVA, A. D. Área de figuras planas com o *Apprenti Géomètre 2*: análise de uma atividade. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIV., 2015. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. **Anais...** Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, 2015.

SILVA, A. D. P. R. da. **Ensino e aprendizagem de área como grandeza geométrica: um estudo por meio dos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no *Apprenti Géomètre 2* no 6º ano do ensino fundamental**. 2016. 315 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica)- Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

SILVA, A. D. P. R.; BELLEMAIN, P. M. B. A comparação de áreas de figuras planas em diferentes ambientes: papel e lápis, materiais manipulativos e no *Apprenti Géomètre 2*. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.8, Nº 3, 2017.

SILVA, A. D. P. R. et al. O *Apprenti Géomètre* como recurso para o ensino de área de figuras planas: uma experiência com professores em formação. In: XIV Congresso Internacional de Tecnologia na Educação, 2017, Olinda -PE. **Anais do XV Congresso Internacional de Tecnologia na Educação**. RECIFE: SESC/SENAC, 2017. p. 01. Disponível em <<http://demo.cubo9.com.br/senac/pdf/poster/072.pdf>> . Acesso em 12 de julho de 2018.

SILVA, A. R. **Concepção de um suporte para a elaboração de webdocumentos destinados ao ensino da geometria: o caso das curvas cônicas**. 2018. 168 f. (Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco, 2018.

SILVA, C. T. J. da. **A engenharia didático-informática na prototipação de um software para abordar o conceito de taxa de variação**. 2016. 163 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC). Recife, UFPE. 2016.

SIQUEIRA, J. E. M. **Equações quadráticas**: articulando suas formas algébricas e geométrica via um aplicativo ad hoc. 2009. 160 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2009.

SIQUEIRA, J. E.; BELLEMAIN, F. **Dynamic Multirepresentational resource for conics**. 2018. Disponível em < <https://resources-2018.sciencesconf.org/resource/page/id/8> >. Acesso em 12 de setembro de 2018.

SOMMERVILLE, I. **Software Engineering**. 9ª Edição. Editora Pearson: Boston, 2011.

TELES, R. A. de M. **Imbricações entre os campos conceituais das grandezas geométrica e suas medidas, da álgebra e das funções**: um estudo sobre as fórmulas de área no ensino fundamental. 2007. 294 f. Tese (Doutorado em Educação). Centro de Educação, UFPE, Recife, 2007.

TIBÚRCIO, R. S. **Processo de desenvolvimento de software educativo**: um estudo da prototipação de um software para o ensino de função. 2016. 112 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Edumatec). Recife, UFPE. 2016.

TIBÚRCIO, R. S. **Modelo de Processo de Software**. LEMATEC Studium/Ateliê de Software, 2018. Disponível em < <https://docs.google.com/presentation/d/1R4EGrpz2G7URBtAGd62Fei7nT-Vn7HLY6TY7YmfPe4/edit#slide=id.p> > Acesso em 27 de dezembro de 2018.

TCHOUNIKINE, P. **Platon-1**: quelques Dimensions pour l'analyse des travaux de recherche em conception d'EIAH. Rapport de l'Action Spécifique. Fondements théoriques et méthodologiques de la conception des EIAH. Département STIC du CNRS. 2004. p. 19.

TCHOUNIKINE, P. **Précis de recherche en ingénierie des EIAH**. 2009. Disponível em < <http://membres-liglab.imag.fr/tchounikine/Articles/PrecisV1.pdf> >. Acesso em 10 de agosto de 2018.

TCHOUNIKINE, P. **Computer Science and Educational Software Design**: A Resource for Multidisciplinary Work in Technology Enhanced Learning. Ed. Springer. 2011.

TEIXEIRA, H. **O que é Transdisciplinaridade?** 2015. Disponível em < <http://www.helioteixeira.org/ciencias-da-aprendizagem/o-que-etransdisciplinaridade/> >. Acesso em 12 de setembro de 2018.

TROUCHE, L. Construction et conduit des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. **Recherches em Didactique des Mathématiques**. v. 25, p. 91-138, 2005.

VAZ, B. R. L. **O Papel dos Diagramas na Geometria Euclideana**. 2010. 235 f. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Filosofia, Rio de Janeiro, 2010. Disponível em < https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/Busca_etds.php?strSecao=especifico&nrSeq=17190@1 >. Acesso em 13 de janeiro de 2019.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUN, JEAN. **Didáctica das Matemáticas**. Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget – Horizontes Pedagógicos, p. 155-191, 1996.

VILLELA, K.; TRAVASSOS, G. H. Definição e construção de ambientes de desenvolvimento de software orientados a organização. **Simpósio Brasileiro de Qualidade de Software**, 2004.

ZULATTO, R. B. A. **Professores de matemática que utilizam software de geometria dinâmica**: suas características e perspectivas. 2002. 119 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Paulista, SP, 2002.

APÊNDICE A- CONVERSAS COM A ESTAGIÁRIA

[20:27, 16/6/2018]: Me ajuda aqui por favor, eu salvei ontem uns desenhos aqui no apprenti, mas agora que eu vou abrir não abre de jeito nenhum :(

[20:27, 16/6/2018]: Diz a mensagem de rotina não implementada

[21:01, 16/6/2018]: Descobri que ele tá com *bug* na operação de decompor

[21:01, 16/6/2018]: Uma figura sem operação de decompor ele abre normalmente.

[21:06, 16/6/2018] Anderson: Deve ser a ação

[21:06, 16/6/2018] Anderson: Quando você faz algo

[21:06, 16/6/2018] Anderson: Diferente do que ele foi projetado e salva

[21:06, 16/6/2018] Anderson: Ele não abre

[21:07, 16/6/2018] Anderson: Aconteceu isso comigo

[21:07, 16/6/2018] Anderson: Tira um print

[21:07, 16/6/2018] Anderson: Da tela e me envia

[21:07, 16/6/2018] Anderson: Do desenho

[21:08, 16/6/2018] Eu tava com tudo feito, aí salvei e fechei. Quando fui abrir nada de abrir. Vou enviar o arquivo que salvei pra vc ver

[21:08, 16/6/2018] Posso enviar por e-mail?

[21:10, 16/6/2018] Não atualiza tua versão

[21:10, 16/6/2018] Vai que a tua abre

[21:11, 16/6/2018] Anderson: Pode

[21:11, 16/6/2018] Anderson: Certo

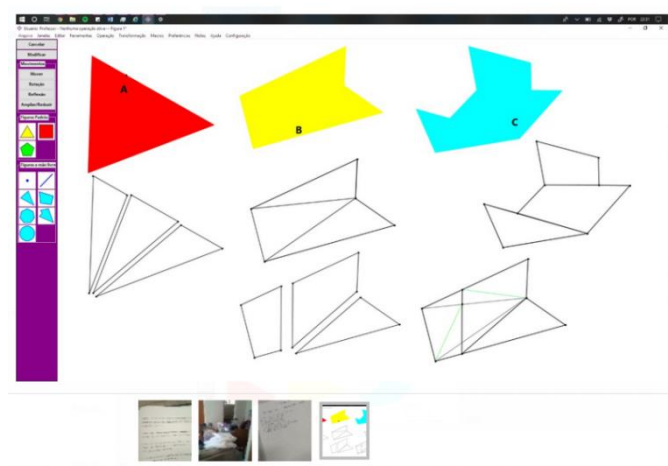
[21:11, 16/6/2018] Qual teu Gmail?

[21:12, 16/6/2018] Achei aqui

[21:15, 16/6/2018] Anderson: Certo

As figuras a seguir foram construídas pela estagiária no AG2:

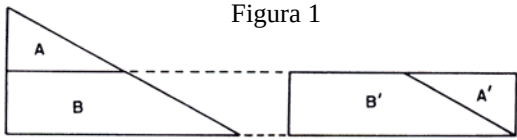
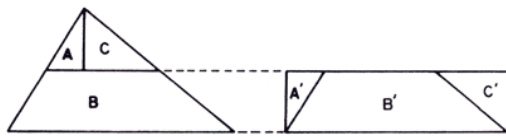
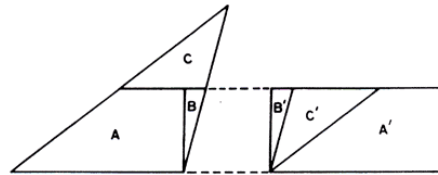
Figura 196- Decomposições no AG2

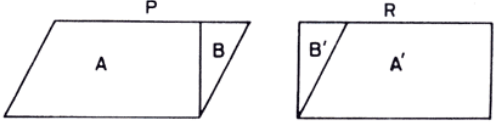
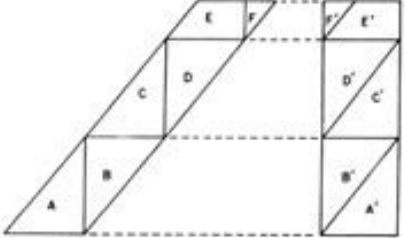
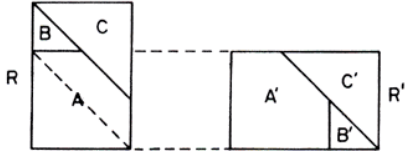
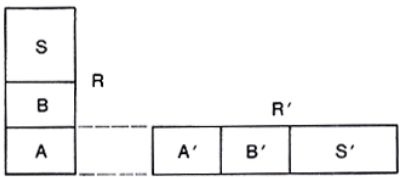


Fonte: do estudo da estagiária

[21:27, 16/6/2018] Beleza
[08:13, 17/6/2018] Anderson: A figura c não pode se fundir.
[08:13, 17/6/2018] Anderson: A e B
[08:13, 17/6/2018] Anderson: Sim
[08:14, 17/6/2018] Anderson: Ou seja as partes
[08:15, 17/6/2018] Anderson: Vc conseguiu depois dessa construção
[08:15, 17/6/2018] Anderson: Abrir ?
[08:16, 17/6/2018] Anderson: Se não , é
[08:16, 17/6/2018] Anderson: Por causa
[08:16, 17/6/2018] Anderson: Do tipo de figuras
[08:16, 17/6/2018] Anderson: Construída a c
[08:16, 17/6/2018] Anderson: Por exemplo
[08:27, 17/6/2018] Anderson: XXXXXX
[08:27, 17/6/2018] Anderson: Descreve pra mim o significado da construção
[08:27, 17/6/2018] Anderson: Para que
[08:27, 17/6/2018] Anderson: Uma pequena descrição de como seria essa atividade
[08:36, 17/6/2018] Na verdade Anderson, se eu fizer um quadrado depois usar decomposição e salvar ele não abre depois
[08:36, 17/6/2018] Já testei
[08:36, 17/6/2018] Se eu fizer apensar um quadradinho ele abre
[08:38, 17/6/2018] O alunos deve fazer uma figura A, depois montar a figura B com a decomposição de A.
[08:39, 17/6/2018] Em seguida dele pega B "limpa" sem os traços das partes de A. E decompõe B para formar C
[08:40, 17/6/2018] Daí ele deve ser capaz de provar que A e C tb são equidecomponíveis. Fazendo uma sobreposição

APÊNDICE B- REQUISITOS PARA O NOVO MICROMUNDO

REQUISITOS PARA O NOVO MICROMUNDO A PARTIR DE ELEMENTOS DA ANÁLISE PRELIMINAR		
DAS ANÁLISES PRELIMINARES	EXPLICAÇÃO TEÓRICA	EXEMPLOS: o software deve permitir fazer
Teoria de Euclides/David Hilbert Decomposição e recomposição de figuras: (método da partição) iniciado por Euclides e estudado por Hilbert, entre outros: consistem em para calcular a área, tenta-se dividir uma figura em um número finito de partes, de tal modo que essas partes possam compor uma figura de área a qual conhecemos. (BOLTIANSKI, 1981). Equidecomposição: Duas figuras se chamam equidecomponíveis se cortando de certo modo uma delas em um número finitos de partes, pode-se, ao dispor das partes, compor com elas uma segunda figura (BOLTIANSKI, 1981). Definição. Dois polígonos P e P' dizem-se equidecomponíveis quando existem decomposições. $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ e $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_n$ de tal modo que cada polígono P_i é congruente ao polígono P'_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Além disso, exige-se que os polígonos Z^3, tenham seus interiores dois a dois disjuntos, o mesmo ocorrendo com os P'_i. (LIMA, 1987).	Três situações, em que a área de um triângulo é igual à área de um retângulo com a mesma base e altura igual à metade da altura do triângulo. Fig. 1. <i>A paralela à base, traçada pelo ponto médio da altura, decompõe o triângulo em duas partes (o triângulo A e o trapézio B), as quais são reposicionadas em B' e A' para formarem um retângulo com base igual à do triângulo e altura metade (LIMA, 1987).</i> Fig. 2. <i>Primeiro, corta-se o triângulo com uma paralela à base, traçada pelo ponto médio de um dos lados inclinados. Depois, corta-se o pequeno triângulo superior ao longo da altura. O triângulo original fica decomposto no trapézio B e dois triângulos retângulos A e C, os quais são facilmente reposicionados, em B', A' e C, para formar um retângulo, com base igual à do triângulo dado e altura metade (LIMA, 1987).</i> Fig. 3. <i>(A altura do triângulo incide sobre o prolongamento da base.) Decompõe-se o triângulo em três partes A, B, C, que são recolocadas em A', B' e C para formar o retângulo procurado.</i>	Decomposições e recomposições como as apresentadas abaixo: Figura 1  Figura 2  Figura 3 

	Todo paralelogramo é equidecomponível com um retângulo que tem a mesma base e a mesma altura. <i>Fig. 4. O paralelogramo P e o retângulo R, com bases e alturas iguais, admitem as decomposições $P = A \cup B$ e $R = A' \cup B'$, onde A é congruente a A' e B é congruente a B.</i>	Figura 4 
Se os polígonos P e P' forem equidecomponíveis e o mesmo ocorrer com os polígonos P' e P'', então P e P'' também serão equidecomponíveis. (Transitividade da relação "P e P' são equidecomponíveis".) (LIMA, 1987). Com efeito, seja $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$ uma decomposição de P em polígonos menores os quais, reagrupados, formam $P' = P'_1 \cup \dots \cup P'_n$, onde cada P'_i é congruente a P_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Ao recortar P' para obter P'', os polígonos P'_i são decompostos por sua vez em polígonos ainda menores. Estes podem ser reagrupados de um modo para formar P e de outro para formar P''. Logo P e P'' são equidecomponíveis. (LIMA, 1987). Suponhamos que o triângulo T da figura 1 e o triângulo T' da figura 2 tenham a mesma base e a mesma altura. Então, se R é o retângulo que tem essa base e metade dessa altura, vimos que T e R são equidecomponíveis, o mesmo ocorrendo com R e T'. Para ver diretamente que T e T' são equidecomponíveis, superpomos as duas decomposições de R dadas nas figuras 1 e 2. (LIMA, 1987).	<i>Fig. 5. Se nenhuma altura do paralelogramo estiver contida em seu interior, a partir de uma extremidade da base traça-se um ziguezague em ângulos retos, o qual decompõe o paralelogramo na forma $P = A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F$. Por meio de translações paralelas à base, obtém-se o retângulo $R = A' \cup B' \cup C' \cup D' \cup E' \cup F'$.</i> <i>Fig. 6. As linhas pontilhadas indicam como se obteve a decomposição $R = A \cup B \cup C$. A altura do pentágono A é igual à altura de R'. Para obter o lado inclinado de A, traçamos, a partir do vértice superior esquerdo de R, um segmento paralelo à diagonal pontilhada. Como R e R' têm áreas iguais, tem-se $R' = A' \cup B' \cup C$, sem superposições.</i> <i>Fig. 7. Temos $R = A \cup B \cup S$ e $R' = A' \cup B' \cup S'$, onde A' é congruente a A e B' é congruente a B. Se R e R' tiverem a mesma área, S e S' também terão. Agora a altura de S é menos de 2 vezes a altura de S', de modo que podemos aplicar a estes dois retângulos o processo da figura 6.</i>	Figura 5  Figura 6  Figura 7 

Se “P” é equidecomponível com um retângulo R de base b. Analogamente, P' equidecomponível com um retângulo R' de mesma base b. Como P e P' têm áreas iguais, o mesmo acontece com os retângulos R e R'. Sendo as bases desses retângulos iguais, segue-se que suas alturas também o são. Consequentemente, R e R' são equidecomponíveis. Por transitividade, resulta que P e P' são equidecomponíveis. (LIMA, 1987).

Digamos que os polígonos P e P' são TR-equidecomponíveis quando admitem decomposições $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$ e $P' = P'_1 \cup \dots \cup P'_n$ tais que para $i = 1, \dots, n$, pode-se obter P'_i a partir de P_i, por meio de uma *translação* ou de uma *rotação de 180°* (com centro num ponto qualquer do plano).

Por exemplo, nas figuras 1, 2 e 3 o triângulo à esquerda é TR-equidecomponível com o retângulo à direita: os trapézios são transladados, os triângulos são girados de 180° e depois transladados.

Nas figuras 4, 5, 6 e 7 os paralelogramos (em 4 e 5) ou retângulos (em 6 e 7) à esquerda são TR-equidecomponíveis com os retângulos à direita. Na realidade, nesses quatro casos, só se usaram translações; logo, tem-se um caso ainda mais restrito de equidecomponibilidade. Diz-se, neste caso, que esses polígonos são T-equidecomponíveis (LIMA, 1987).

Se uma figura A é equidecomposta em uma figura B, e a figura B é equidecomposta com a figura C, as figuras A e C também são equidecompostas (BOLTIANSKI, 1981).

Superpondo as duas decomposições de R, uma dada na figura 1 e outra na figura 2, acima obtemos quatro polígonos, numerados 1, 2, 3 e 4, os quais podem ser reposicionados para formar o triângulo T e o triângulo T'. Portanto, T e T' são equidecomponíveis.

Todo retângulo R é TR-equidecomponível com outro retângulo R' cuja base é paralela a uma reta dada r.

Demonstração: Um segmento de reta paralelo a r fornece uma decomposição $R = A \cup B$, como na figura 9. Transladando o triângulo A para a outra extremidade de R, obtemos o paralelogramo $P = A' \cup B$, o qual é TR-equidecomponível com R. Como vimos nas figuras 4, 5, 6 e 7, o paralelogramo P é TR-equidecomponível com um retângulo R', cuja base tem comprimento b e é paralela à reta r. (LIMA, 1987)

Figura 8

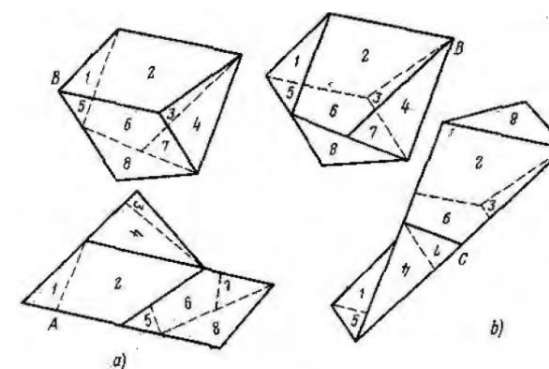
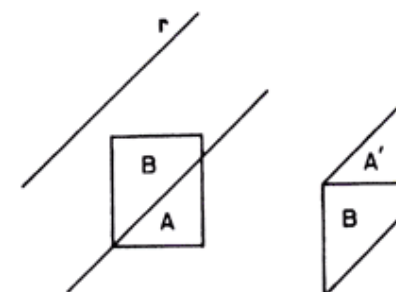


Figura 9



Teoria de Lebesgue (1975)

“Seja $Q\alpha$ o conjunto de todas as figuras planas formadas por uniões (finitas ou infinitas) de elementos de área α . Sendo assim, dado $X \in Q\alpha$, existe n inteiro positivo tal que: $X = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$; onde Q_j é um elemento α , para cada $j = 1, \dots, n$, (caso contrário, X é uma figura formada por infinitos elementos de área α). As figuras em $Q\alpha$ serão chamadas de figuras discretas”.

A cada $X \in Q\alpha$, podemos associar o número positivo $\lambda_1(X)$ definido por:

$$\lambda_1(X) = \begin{cases} n\alpha, & \text{Se } X = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n; \\ +\infty, & \text{se } X \text{ é formada por infinitos elementos de área } \alpha; \end{cases}$$

A função $\lambda_1 : Q\alpha (0; +\infty]$ assim obtida é a área de Lebesgue das figuras discretas. (JACOB, 2015, p. 31).

1- A área de Lebesgue de figuras discretas nada mais é que a área com a qual já estamos habituados, levando em consideração que os elementos de área α que compõem a figura possuem, no máximo, vértices e/ou lados em comum;

2- A união de figuras discretas em $Q\alpha$ é uma figura discreta em $Q\alpha$. Reciprocamente, qualquer figura discreta em $Q\alpha$, formada por dois ou mais elementos de área $Q\alpha$, pode ser decomposta em uma união de duas figuras discretas em $Q\alpha$;

3- Se $X; Y \in Q\alpha$ e $X \subset Y$, então $\lambda_1(X) \leq \lambda_1(Y)$. Isso significa que λ_1 é “crescente” e damos o nome de monotonicidade a essa característica da área de Lebesgue das figuras discretas;

4- Se $X; Y \in Q\alpha$ e $X \cap Y$ é uma lado, um vértice ou vazia, então $\lambda_1(X \cup Y) = \lambda_1(X) + \lambda_1(Y)$. Essa propriedade chama-se aditividade;

5- Em geral, vale a subaditividade, ou seja, $\lambda_1(X \cup Y) \leq \lambda_1(X) + \lambda_1(Y)$ para quaisquer $X; Y \in Q\alpha$;

6- Sendo $\sqrt{\alpha} = 2^{-k}$ e fixado $X \in Q\alpha$, temos que dado β distinto de α , com $\sqrt{\beta} = 2^{-L}$, $L > K$ inteiro, o valor de $\lambda_1(X)$ é o mesmo para X visto como uma figura discreta em $Q\alpha$ ou em $Q\beta$. Quando $\beta < \alpha$, dizemos que $Q\beta$ tem uma resolução maior que a de $Q\alpha$. K e L são as resoluções das ordens de $Q\alpha$ e $Q\beta$ respectivamente. Resumindo, a área de uma

Permitir a ampliação e/ou redução da malha quadriculada, isométrica, hexagonal, pontilhadas ou não. Ampliar e/ou reduzir figuras junto com as malhas.

Exemplos de malhas:

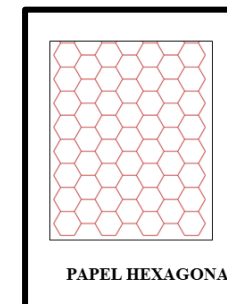
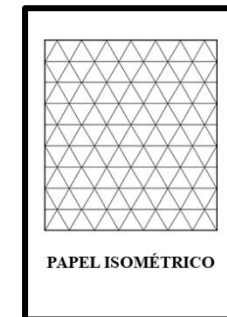
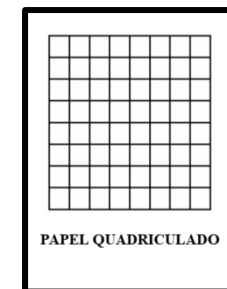


figura discreta não varia com o aumento da resolução utilizada;

7- É sempre possível aumentar a resolução de uma figura discreta devido à escolha que dizemos para a forma do número que representa a área de cada quadradinho. Quando a ordem da resolução aumenta de k para $k + 1$, o número de elementos de área $\alpha = 2^{-2k}$ aumenta de n para $4n$ elementos de área $\beta = \alpha/4$.

8- Poderíamos usar um papel triangulado ou hexagonal na construção de figuras discretas. Nesse caso, os elementos de área seriam triângulos equiláteros e no caso da hexagonal, hexágonos regulares, considerariamos, então, o conjunto de todas as figuras discretas formadas por uniões (finitas ou infinitas) de triângulos do papel triangulado ou de hexágonos no hexagonal. (JACOB, 2015, p. 31-32).

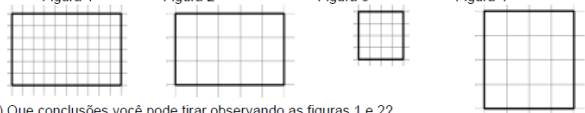
Exemplos de atividades:

Facco (2003, p. 67, 70):

3)

a) Utilizando a área da superfície do quadradinho de cada figura como unidade de medida, verifique quantas unidades de medida de área tem cada figura.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4



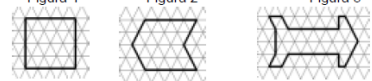
b) Que conclusões você pode tirar observando as figuras 1 e 2?

c) Que conclusões você pode tirar observando as figuras 3 e 4?

4)

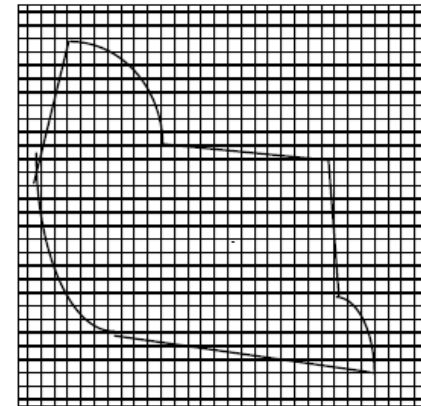
a) Utilizando a área da superfície do triângulo da malha como unidade de medida, verifique quantas unidades de medida de área contém cada figura abaixo.

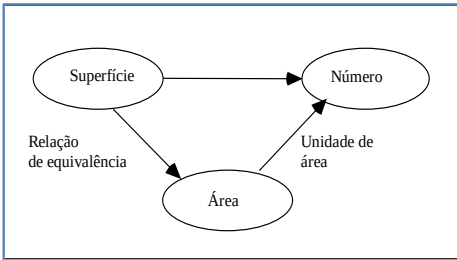
Figura 1 Figura 2 Figura 3



b) Anote aqui suas observações desta atividade.

Perrin-Glorian (2016, p.5):



Área como Grandeza (Douady e Perrin-Glorian 1989). A abordagem de área como grandeza autônoma favorece a construção de relações entre conhecimentos geométricos e numéricos na resolução de problemas de área. A distinção e articulação em três quadros, a saber: o geométrico, o numérico e o das grandezas para a construção do conceito de área como grandeza.	Figura 11- Relações entre os quadros  Fonte: Bellemain e Lima (2002, p. 41)	• Permitir que sejam construídas diferentes figuras planas e que suas áreas possam ser comparadas por decomposição e recomposição, sobreposição. • Permitir que as áreas das figuras sejam medidas e representadas pelo par $n^{\circ} + \text{unidade de medida}$; • Permitir que tomadas unidades de medidas não convencionais possam ser utilizadas para medir a área de diferentes figuras planas.
Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996) O conceito de área é constituído por uma tríade $C = (S, I \text{ e } R)$, na qual “S” é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência), I é o conjunto de invariantes sobre os quais se assenta a operacionalidade dos esquemas (conceitos em ação e teoremas em ação) (o significado) e R é o conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante).	Situações que dão sentido à área Nas situações de comparação, trata-se em primeiro plano de decidir se duas figuras pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência (ou seja, se têm mesma área) ou de estabelecer uma ordem entre as áreas de duas ou mais figuras. Nas situações de medida, o resultado esperado é um número seguido de uma unidade de área e, nesse caso, o que está em foco é a passagem da grandeza ao número mediante a escolha de uma unidade. As situações de produção são aquelas nas quais se solicita que sejam desenhadas ou descritas figuras que respeitam determinadas condições: por exemplo, traçar no papel quadriculado uma figura de área 10 cm^2; dada uma figura F, desenhar uma figura G, diferente de F, com mesma área; ou uma figura J com perímetro	Para o trabalho com essas situações o <i>software</i> deverá permitir: • A construção de diferentes figuras com régua e compasso dinâmicos virtuais ou com ferramentas em que as figuras estejam predefinidas, assim como a possibilidade de rotacionar, mover e realizar reflexões de forma dinâmica em cada uma delas; • Possibilidade de decompor, recompor, justapor, duplicar diferentes figuras e dividi-las em partes iguais; • Possibilidade de definir unidade de medidas não convencionais para medir área de figuras criadas em diferentes malhas (quadriculada, isométrica, hexagonal), pontilhada ou não; • As figuras criadas nas malhas podem ser decompostas, recompostas e podem sofrer transformações isométricas do plano.

	igual ao de F etc. Nas situações de mudança de unidade, uma área é inicialmente representada utilizando certa unidade U e solicita-se que seja expressa a mesma área, com o uso de uma unidade diferente de U, como por exemplo, expressar em hectares a área de uma região de três quilômetros quadrados (SILVA, BELLEMAIN, 2017, p. 6).	
Suporte ao planejamento do professor Em nosso caso trata-se de oferecer condições para que, em um ambiente informático, o professor gerencie uma determinada situação matemática construída previamente. Assim, para esse fim, poderá estabelecer quais menus poderão estar disponíveis ao aluno, quais ferramentas poderão ser criadas e quais elementos para o trabalho com área e perímetro estarão disponíveis ao aluno, em dada situação matemática, para favorecer a aprendizagem desses conceitos.	Suportes ao planejamento do professor • Configuração de menus; • Macroconstrução; • Histórico das construções; • Decisão de quais unidades de medidas convencionais poderão ser utilizadas.	Para esse suporte o <i>software</i> deverá permitir: A configuração de menus e ferramentas que poderão estar acessíveis ou não a uma determinada atividade; A construção de novas ferramentas; O acompanhamento das construções realizadas pelos alunos; A escolha da opção de qual unidade de medida quer trabalhar, os múltiplos e submúltiplos do metro para o perímetro e o comprimento, e os múltiplos e submúltiplos do m^2 para as áreas das figuras planas.

APÊNDICE C- REQUISITOS DE ALGUNS SOFTWARE DE GD

Software	Elementos	Descrição
Apprenti Géomètre 2	Ferramentas de: Decomposição (algumas ideias); Fusão; Divisão (algumas ideias); Duplicar; Mover; Rotação; Reflexão; Tangram (algumas ideias); Poliminós; Malha Pontilhada (quadrada e isométrica); Ladrilhos pré-definidos (alguns modelos); Menu Figuras a mão livre (algumas figuras); Configuração de menus (algumas ideias). Copiar e Colar; Apagar objeto; Modificar.	A ideia da decomposição, recomposição (fusão), duplicação, divisão da figura em partes iguais, deverá seguir o modelo da forma que é realizada no AG 2 com certa ampliação descrita no capítulo referente aos requisitos; A possibilidade de mover, aplicar rotação e reflexão deverá seguir também os princípios do AG 2; As peças do tangram e poliminós devem se comportar como as do AG 2, entretanto teremos a opção de um tangram completo como explicitado no capítulo de requisitos; Os ladrilhos predefinidos seguem o modelo do AG 2, só que em outra lógica, como descrito nos requisitos; O comportamento da malha pontilhada quadrada e da isométrica deve ser como no AG 2, entretanto teremos as malhas quadriculadas, isométrica e hexagonal, as quais poderão ser apenas utilizadas como referência para a construção de figuras quando a função magnetismo que será criada não estiver ativada; A ideia de configuração de menus, também ampliada como fora descrito nos requisitos;

		O menu figuras livres desse <i>software</i> deverá ser aproveitado com algumas restrições que serão explicitadas ao programador; A ideia de apagar objeto completo, e copiar e colar pelas opções do teclado o objeto escolhido.
Cabri Géomètre	Ferramentas de: Medir área; Medir perímetro; Medir comprimento; Construção de objetos geométricos (ponto, ponto sobre objeto, ponto de intersecção, ponto médio, reta, reta paralela, reta perpendicular, segmento, semirreta, circunferência e arco, mediatriz e bissetriz, compasso, lugar geométrico); Simetria axial e central, rotação e translação, homotetia; Ângulo e marcar ângulo; Caixa preta; Macroconstrução.	Seguir os procedimentos para medir a área, o perímetro e o comprimento como é realizado no <i>Cabri</i>; Permitir por meio de ferramentas de construção dinâmica as figuras da geometria elementar que podem ser traçadas com a ajuda de uma régua e de um compasso; Permitir a aplicação das transformações isométrica do plano como realizadas no <i>Cabri</i>; Permitir marcar ângulo; Utilizar a ideia de caixa preta e da criação de macro construções em seus objetos iniciais e finais;
Geogebra	Ferramentas de: Malha quadriculada e suas opções de ajustes; Opção de magnetismo; Colorir com níveis de gradação à figura; Janela de operações após clicar com o botão esquerdo em um dos objetos da figura, às opções de exibir objeto, exibir rótulo, renomear e apagar. Polígono rígido; Polígono regular.	Um botão que ao ser ativado a malha apareça na tela em branco do <i>software</i> e que ao ser clicado novamente ela não mais apareça, assim como as opções de ajustes dos quadradinhos; Um botão de magnetismo que ao ser ativado permite que as figuras que serão construídas na malha sejam ajustadas a mesma automaticamente; Uma opção de colorir em níveis de gradação, ou seja, após construir na área de trabalho do <i>software</i> qualquer objeto, o mesmo possa ser

		colorido em níveis de gradação por diferentes cores; Ao se clicar nos objetos que constituem uma figura geométrica com o botão esquerdo do mouse, ter a possibilidade de colorir em níveis de gradação, de exibir objeto, exibir rótulo, renomear e apagar; Com relação ao polígono rígido, ter a possibilidade e de criar figuras poligonais livres, em que com dois cliques no ponto inicial da figura possa completar a construção fechando o polígono, esse poderá ser movido, rotacionado, aplicar reflexões diretamente; Polígono regular, desenhar um segmento e escolher a quantidade de lados, o <i>software</i> fornecerá o polígono regular desejado, esse poderá ser movido, rotacionado, aplicar reflexões diretamente.
Cinderella	Ferramenta de: Criação de ferramentas; Medir distância.	Após ter sido construída uma figura, por exemplo, pode-se selecionar os elementos geométricos que a constituem e em seguida clicar na opção Criar ferramenta para que a mesma siga para a barra de ferramenta. (Uma ideia de macroconstrução). Da ferramenta “medir distância” a possibilidade de aparecer por traz do segmento que estará sendo medido, uma espécie de fita métrica.

APÊNDICE D- PERFIL DO PARTICIPANTE

PERFIL DO PARTICIPANTE

Nome:
Formação inicial:
Maior titulação:
Qual etapa da educação atua:
Quanto tempo de atuação na área da educação:

Quanto ao uso de recursos tecnológicos informáticos em suas aulas:

1- Costuma utilizar software matemático em suas aulas ? () Sim () Não Justifique sua resposta:
2- Qual ou quais o(s) tipo(s) de software(s) você já utilizou em suas aulas: Micromundo () Simulações () Jogos Digitais () Tutoriais () Programação () Multimídia () Exercício e Prática () Outro: _____
3- Qual ou quais conteúdo(s) foi/foram trabalhados por meio do(s) software(s) utilizado(s) ? _____ _____ _____ _____ _____
4- Relate-nos um pouco da sua experiência e os resultados obtidos por meio dela. _____ _____ _____ _____ _____ _____

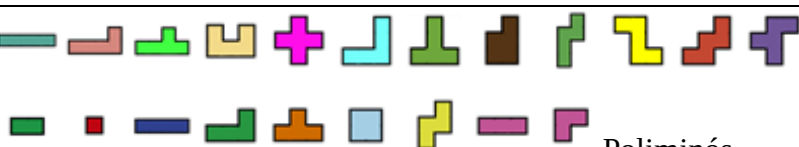
APÊNDICE E- ANÁLISE DE ASPECTOS TÉCNICOS

Formulário Avaliativo do Micromundo *Magnitude Studium*

ANÁLISE DE ASPECTOS TÉCNICOS

Indique: (A) Adequadamente, (P) Parcialmente, (I) Insatisfatoriamente	(A)	(P)	(I)
Funcionamento das seguintes ferramentas:			
 Ponteiro (move um objeto criado na interface e desabilita funções das ferramentas ativadas, aplica as transformações isométricas do plano nas figuras (translação, rotação e reflexão)), após serem travadas por meio da ferramenta freezing (cristalizar).			
 Borracha (esconde um objeto e o faz aparecer na tela novamente)			
 Lixeira (exclui os objetos construídos interface do software);			
 Caixa de texto (oferece opção de escrever textos dentro dela)			
 Brush (pincel) (permite colorir o contorno dos objetos, tais como vértices e lados das figuras);			
 Fill (latinha de tinta) (função de preencher as figuras com diferentes cores);			
 Palette (oferece uma paleta de cores e níveis de gradação para o preenchimento das figuras);			
 Linestyle (permite escolher o estilo de linha desejado para as bordas das figuras);			

Referencial: Malha Quadrada Referencial (oferece diferentes opções, tais como: eixo, eixo e malha, malha (quadriculada, isométrica e hexagonal) e malha pontilhada (quadrada, isométrica e hexagonal));			
Imã: ativa ou desativa o magnetismo nas malhas.			
Ponto			
Ponto médio			
Segmento			
Linha Poligonal			
Triângulo			
Quadrilátero			
Paralelogramo			
Quadrado			
Retângulo			

	Polígono qualquer			
	Polígono Regular			
	Reta			
	Paralela			
	Perpendicular			
	Perpendicular Bissetor			
	Bissetor			
	Circunferência por dois pontos			
	Circunferência por três pontos			
	Arco			
	Segmento Circular			
				
Poliminós				

	Tangram			
	Decomposição			
	Decomposição em triângulos (tipo 1)			
	Decomposição em triângulos (tipo 2)			
	Colagem			
	Triângulo para paralelogramo			
	Paralelogramo para retângulo			
	Retângulo para retângulo			
	Soma de quadrados			
	Medida da área em Lebesgue			
	Magnitudes			
	Cristalizar (trava ou destrava um polígono construído)			

Justificativa de cada item do quadro anterior

(Espaço livre para observações em que se pode inserir *print screen* da interface do software apontado sugestões para o aprimoramento das funcionalidades dos menus e ferramentas.)

TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS (VERGNAUD, 1996)

O conceito de área é constituído por uma tríade $C = (S, I \text{ e } R)$, na qual “**S**” é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência), **I** é o conjunto de invariantes sobre os quais se assenta a operacionalidade dos esquemas (conceitos em ação e teoremas em ação) (o significado) e **R** é o conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante). Baseada nessa teoria, Baltar (1996) desenvolveu em sua tese de doutorado um conjunto de situações que dão sentido ao conceito de área e que fora ampliado nos estudos de Ferreira (2010), a saber:

Situação de comparação trata-se em primeiro plano de decidir se duas figuras pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência (ou seja, se têm mesma área) ou de estabelecer uma ordem entre as áreas de duas ou mais figuras.

Situações de medida, o resultado esperado é um número seguido de uma unidade de área e, nesse caso, o que está em foco é a passagem da grandeza ao número mediante a escolha de uma unidade.

Situações de produção são aquelas nas quais se solicita que sejam desenhadas ou descritas figuras que respeitam determinadas condições: por exemplo, traçar no papel quadriculado uma figura de área 10 cm^2 ; dada uma figura F, desenhar uma figura G, diferente de F, com mesma área; ou uma figura J com perímetro igual ao de F etc.

Situações de mudança de unidade, uma área é inicialmente representada utilizando certa unidade U e solicita-se que seja expressa a mesma área, com o uso de uma unidade diferente de U, como por exemplo, expressar em hectares a área de uma região de três quilômetros quadrados (SILVA, BELLEMAIN, 2017, p. 6).

- 2- Em sua opinião o *Magnitude Studium* oferece condições ao professor para elaborar tarefas sobre área relacionadas aos tipos de situações supracitados? Justifique sua resposta.

[illegible]

- 4- Na barra inferior do *software* temos ao lado do ícone “tesoura” um menu que contém algumas ferramentas que nos permitem trabalhar com alguns das proposições do livro I de Euclides. Examine cada uma delas e em seguida expresse sua opinião sobre a potencialidade/limitação de suas interfaces para o trabalho com área numa perspectiva geométrica.

[illegible]

- 5- A área de Lebesgue de figuras discretas nada mais é que a área com a qual já estamos habituados, levando em consideração que os elementos de área α que compõem a figura possuem, no máximo, vértices e/ou lados em comum. Para trabalhar a ideia de área nesta abordagem foram inseridas diferentes malhas quadriculada, isométrica, hexagonal, pontilhadas ou não. E ao lado uma opção de magnetismo das figuras na malha. Em sua opinião que outros recursos poderiam ser implementados para o aprimoramento com o trabalho utilizando as malhas no MS para atender a abordagem de área de acordo com Lebesgue (1975)?

[illegible]

APÊNDICE I- FORMULÁRIOS PARA AS TAREFAS DE ÁREA E PERÍMETRO

Tarefa 1 – ÁREA

Nomes dos participantes	
Objetivo da tarefa	

Título	
Enunciado	

Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa

Potencialidades do MS para a elaboração da tarefa	Limitações encontradas na elaboração da tarefa

Análise dos possíveis procedimentos que os estudantes poderiam mobilizar no software para responder a tarefa. Aponte qual ou quais ferramenta (s) poderia(m) ser implementada(s) para contribuir com a resolução da tarefa proposta no MS.

Tarefa 2 – PERÍMETRO

Nomes dos participantes	
Objetivo da tarefa	

Título	
Enunciado	

Descrição dos procedimentos realizados para construção da tarefa

Potencialidades do MS para a elaboração da tarefa	Limitações encontradas na elaboração da tarefa

Análise dos possíveis procedimentos que os estudantes poderiam mobilizar no software para responder a tarefa. Aponte qual ou quais ferramenta (s) poderia(m) ser implementada(s) para contribuir com a resolução da tarefa proposta no MS.

Análise dos possíveis procedimentos que os estudantes poderiam mobilizar no software para responder a tarefa. Aponte qual ou quais ferramenta (s) poderia(m) ser implementada(s) para contribuir com a resolução da tarefa proposta no MS.

APÊNDICE J- TERMO DE CONSENTIMENTO

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Prezado(a) Participante,

Gostaríamos de convidá-lo a participar de nosso estudo cujo objetivo é conceber, desenvolver e validar um micromundo como elemento de suporte ao professor para o ensino de área e perímetro. Para alcançarmos o objetivo supracitado estamos utilizando uma metodologia de desenvolvimento de software constituída por cinco fases: análises preliminares, análise de requisitos, análise à priori e prototipação, experimentação, análise à posteriori e validação. Na fase de experimentação que culmina na de validação precisamos da participação de especialistas em diversas áreas (informática, grandezas e medidas, designer) para realizar os testes no protótipo e verificar se atende o objetivo final para o qual se destina que é a construção do conhecimento de área e perímetro de figuras planas. Trata-se de uma Tese de doutorado, desenvolvida por Anderson Douglas P. R. da Silva e orientada pelo Prof. Dr. Franck Bellemain do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco.

A qualquer momento da realização desse estudo o participante envolvido poderá receber os esclarecimentos adicionais que julgar necessários. Qualquer participante escolhido poderá recusar-se a participar ou retirar-se da pesquisa em qualquer fase da mesma, sem nenhum tipo de penalidade, constrangimento ou prejuízo aos mesmos. O sigilo das informações será preservado através de adequada codificação dos instrumentos de coleta de dados. Especificamente, nenhum nome, identificação de pessoas ou de locais interessa a esse estudo. Todos os registros efetuados no decorrer desta investigação serão usados para fins unicamente acadêmico-científicos e apresentados na tese, não sendo utilizados para qualquer fim comercial.

Em caso de concordância com as considerações expostas, solicitamos que assine este “Termo de Consentimento Livre e Esclarecido” no local indicado abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e nos comprometemos com a disponibilização à instituição dos resultados obtidos nesta pesquisa, tornando-os acessíveis a todos os participantes.

Anderson Douglas P. R da Silva
Pesquisador (a)

Prof. Dr. Franck Bellemain
Orientador (a)
EDUMATEC/UFPE

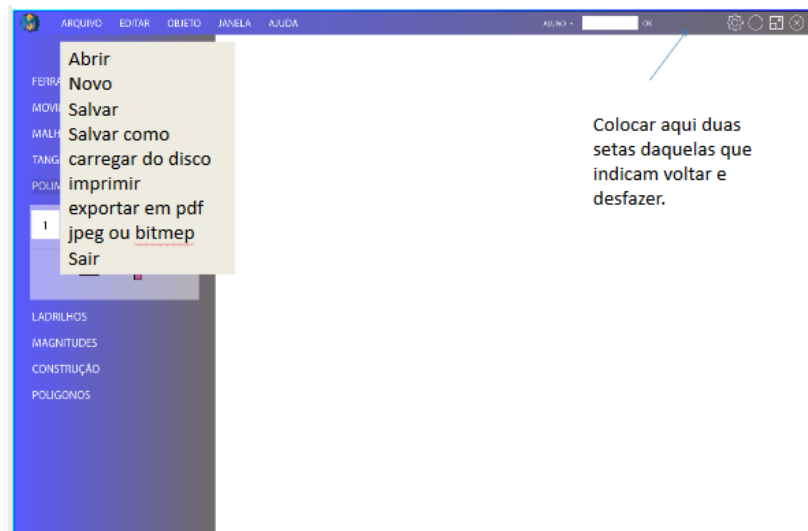
Eu, _____, assino o termo de consentimento, após esclarecimento e concordância com os objetivos e condições da realização da pesquisa “PROTOTIPAÇÃO, DESENVOLVIMENTO E VALIDAÇÃO DE UM MICROMUNDO COM SUPORTES PARA O ENSINO DE ÁREA E PERÍMETRO”, permitindo, também, que os resultados gerais deste estudo sejam divulgados na tese supracitada.

Recife, ____ de _____ de 2019.

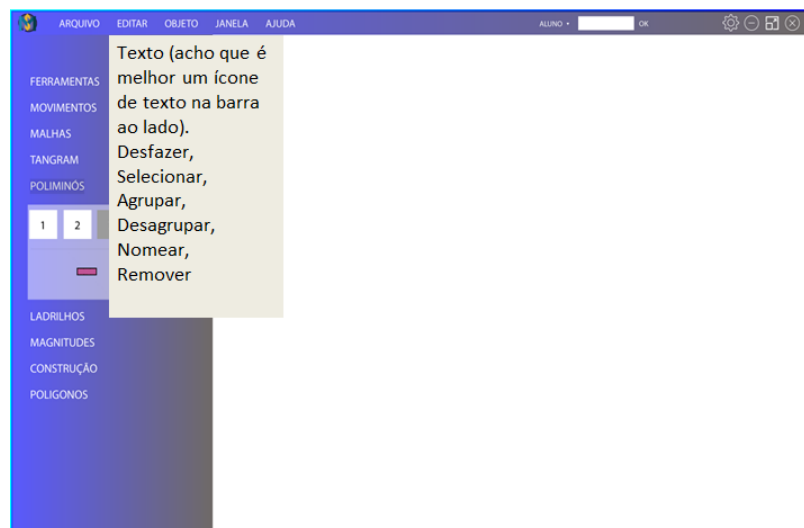
Assinatura do Participante

APÊNDICE K- REQUISITOS EM TELAS

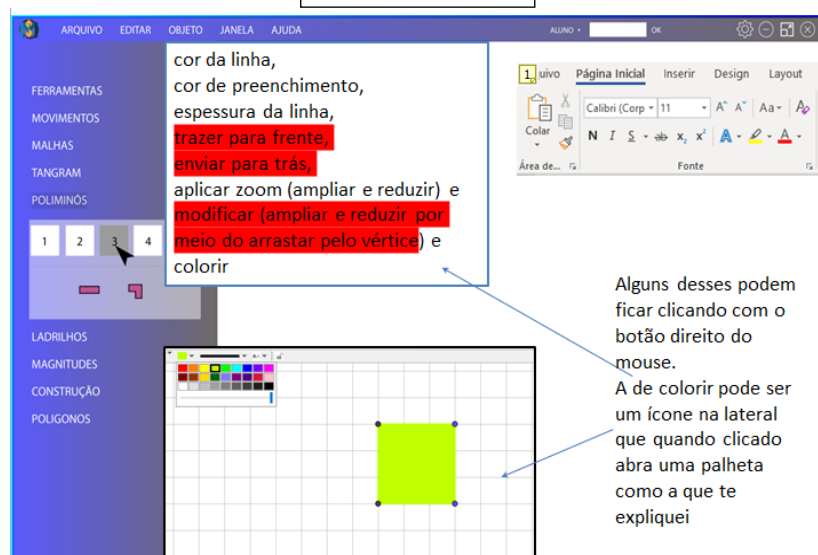
Menu Arquivo



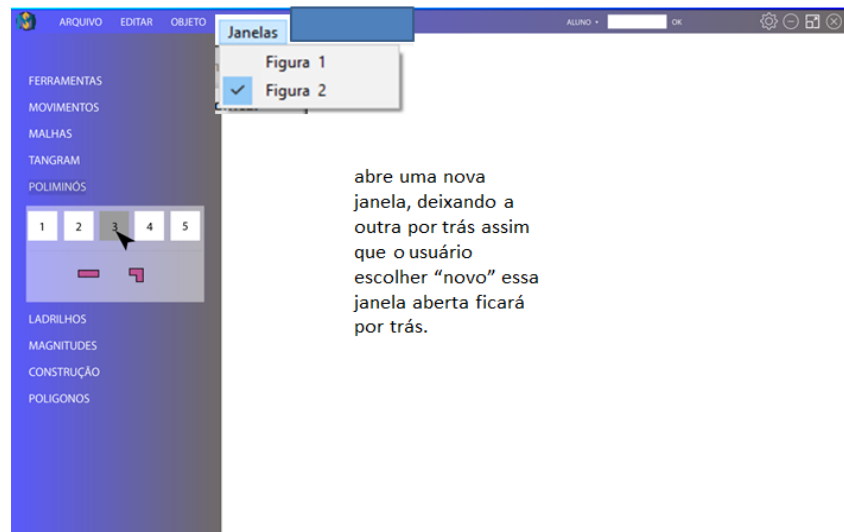
Menu Editar



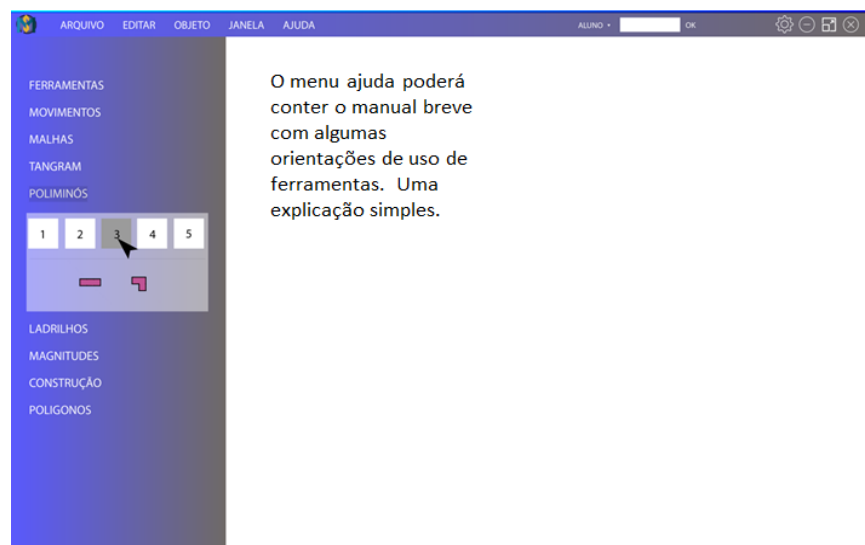
Menu Objeto



Menu Janela



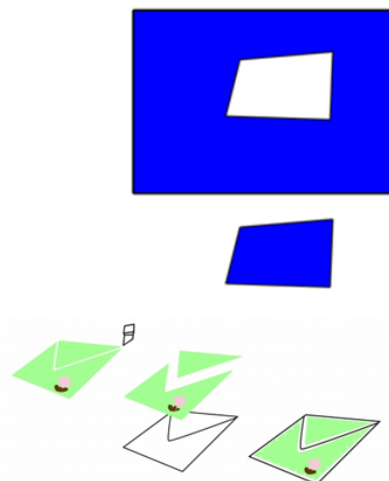
Menu Ajuda



Menu Aluno

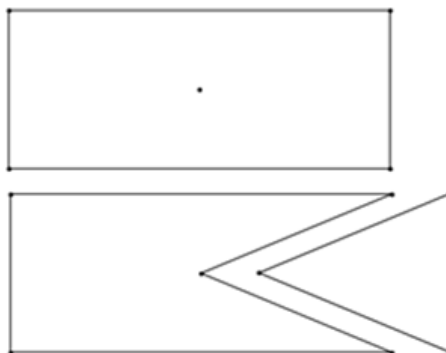


Ferramenta corte livre: essa ferramenta permitirá que o usuário faça qualquer recorte no interior do polígono da seguinte forma:

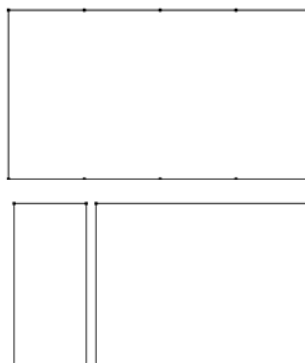
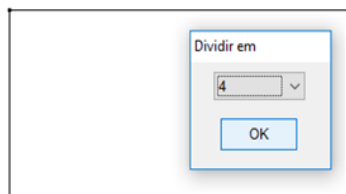


Essa ferramenta deve aparecer junto das de decomposição e outra como o nome de ponto central.

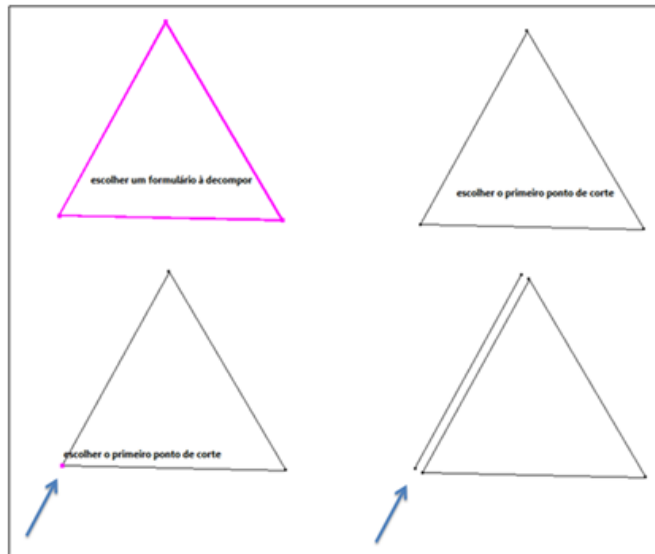
Ferramenta de ponto no centro da figura: a função dela é marcar o centro, assim após essa ação o usuário poderá decompor da maneira que apresentamos abaixo:



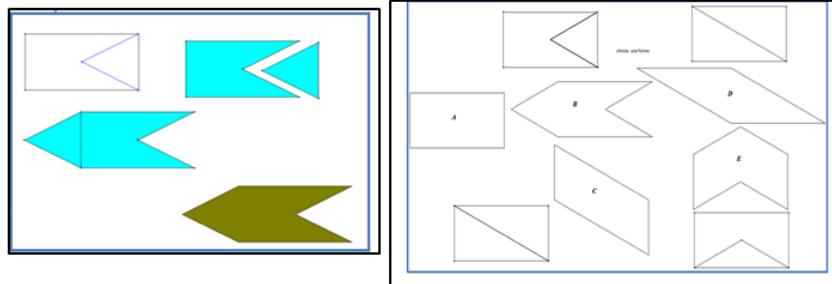
Ferramenta de divisão em partes congruentes: Quanto às decomposições pela vertical e horizontal é preciso primeiro, com o botão de decomposição ativado, clicar em um dos segmentos da figura, uma janela com os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, surgirá na tela, o usuário poderá escolher um desses, e automaticamente o software dividirá o segmento proporcionalmente em até 10 partes, deve fazer o mesmo procedimento no outro vértice e em seguida ligar os pontos, para que as figuras sejam decompostas. Outra ideia é construir os pontos médios e liberar a decomposição ao ligarmos esses pontos nos segmentos da figuras.



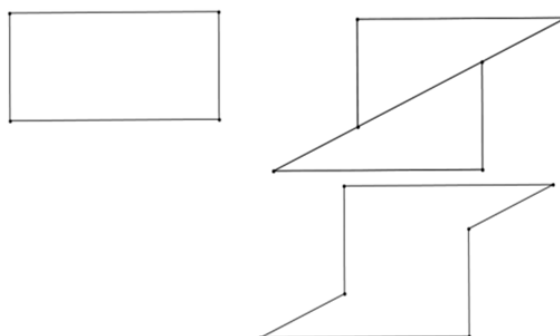
Uma ferramenta que permita decompor um os lados da figura para o trabalho com unidade de medida de comprimento



Recomposição: justapor duas figuras coincidindo arestas com aresta e vértice com vértice, clicar em uma depois na outra e unir sem ficar marcas

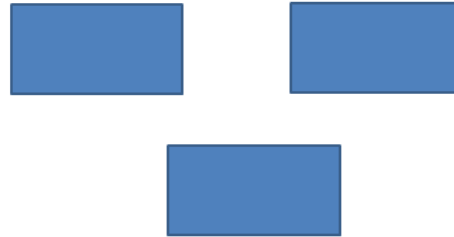


Fusão: se unir as figura por qualquer parte, clicar em uma delas e em seguida na outra teremos Uma única figura sem marcação.



Duplicação: *clica na figura e arrastar , assim teremos várias figuras iguais às primeiras.*

Tipo um ctrl c e ctrl v.



MOVIMENTOS



1º o cursor do mouse que indicar o arrastar;

2º rotação;

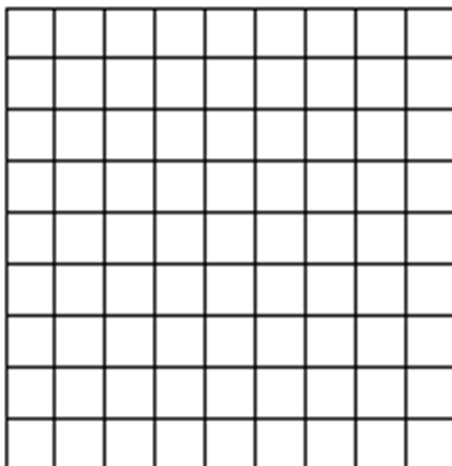
3º e 4º reflexão;

5º Ampliar e reduzir as figuras.

Malhas



Clicar no ícone referente a malha e ela aparecer na tela do software



Malhas



Malha quadrada

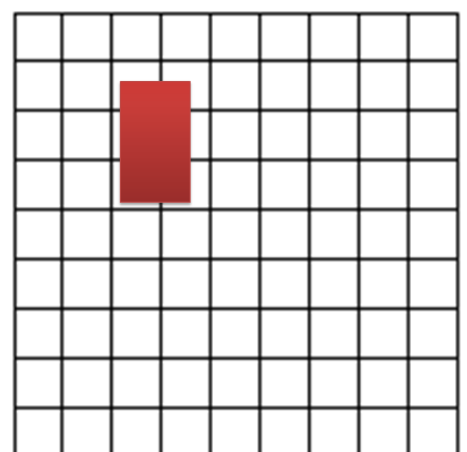
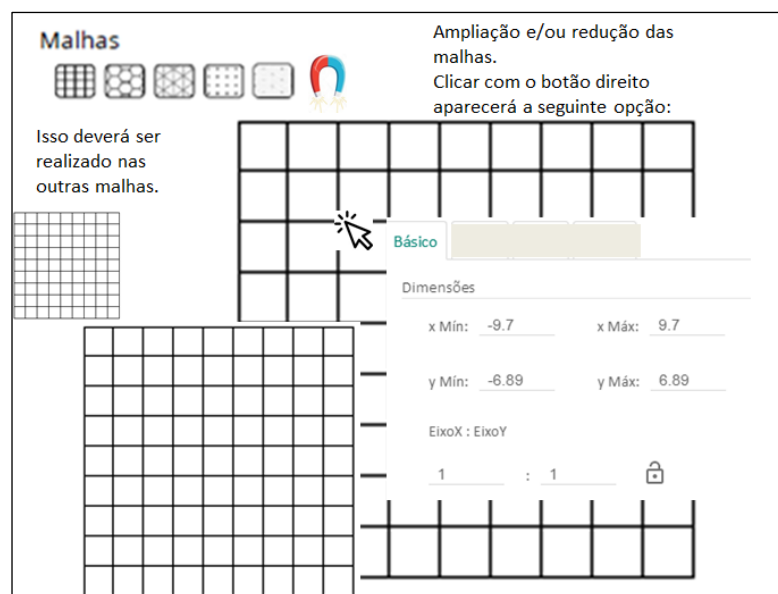
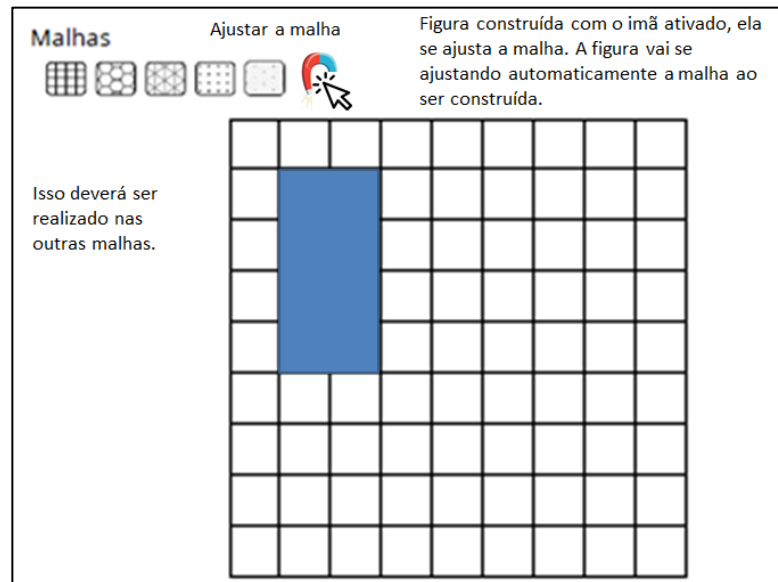
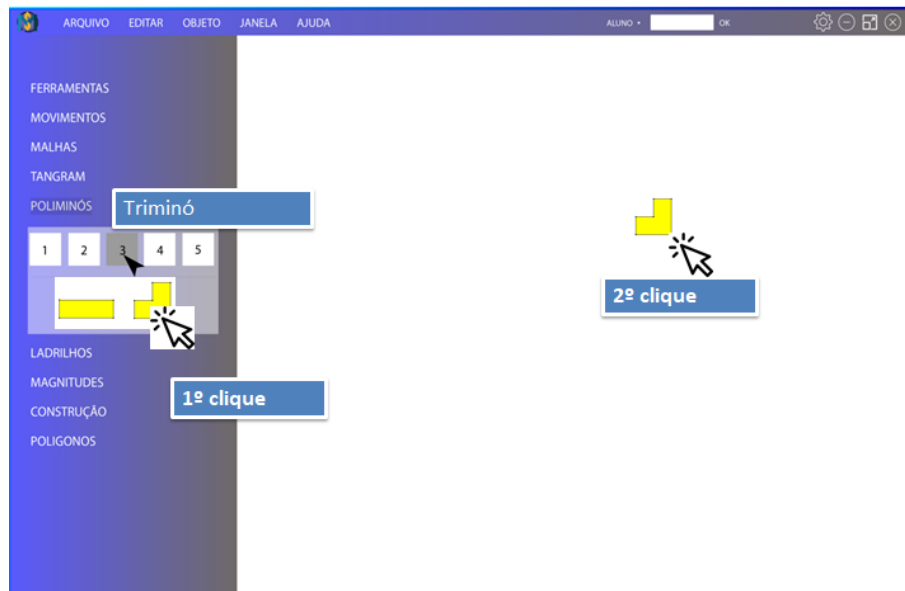


Figura construída com o ímã desativado, ela não se ajustará a malha automaticamente.





Magnitudes

Uma caixa deverá abrir com os múltiplos e submúltiplos do metro para perímetro e comprimento e os múltiplos e submúltiplos do metro quadrado para área como apresentamos abaixo:

km² hm² dam² m² dm² cm² mm²

Ao ser escolhida a unidade e clicado na figura aparecerá a área relativa a unidade escolhida.

Área de ABC = 10 m²

Esses são os ladrilhos que devem estar pré-definidos no software para o trabalho com unidades de medidas não convencionais:

Quadriláteros

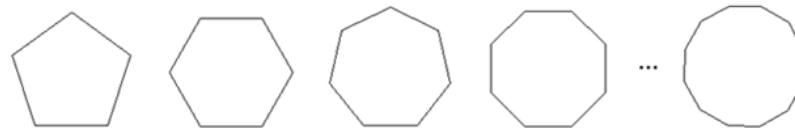
Triláteros

Ao passar o mouse os nomes das figuras deverão aparecer:

Esses triângulos são formados por decomposições do quadrado acima.

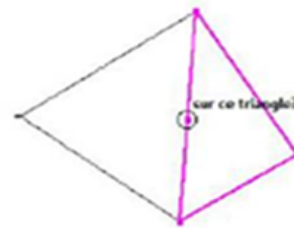
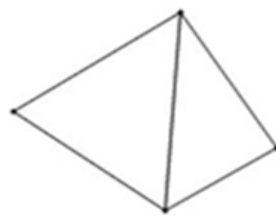
Esses triângulos são formados por decomposições do triângulo equilátero amarelo.

Mais polígonos regulares



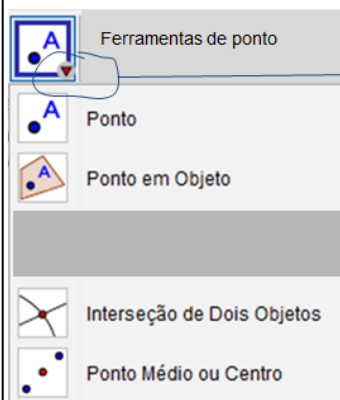
Esses também devem fazer parte dos ladrilhos pré-definidos.

Magnetismo nas figuras: vértices e lados.

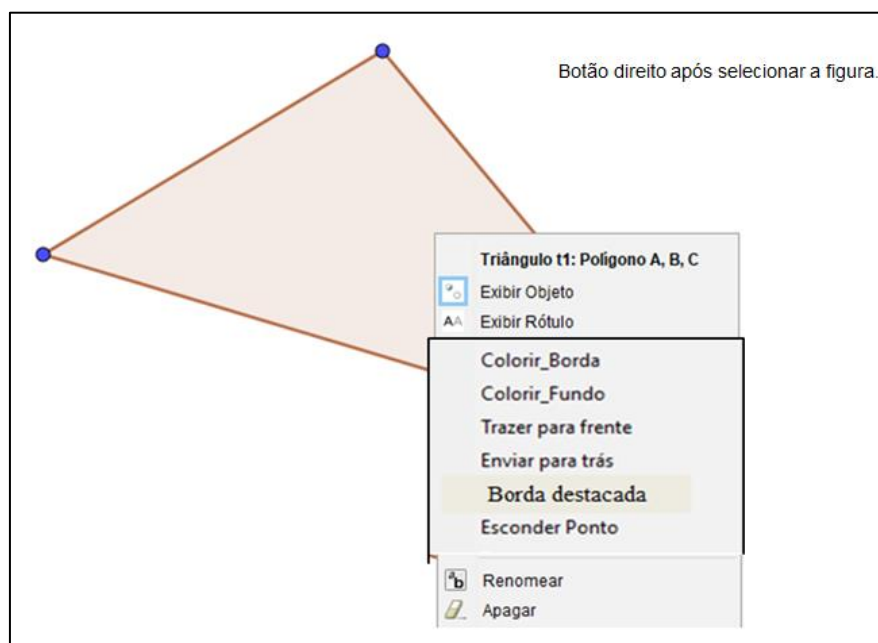
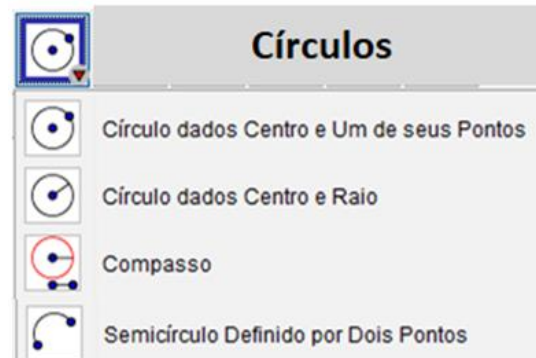
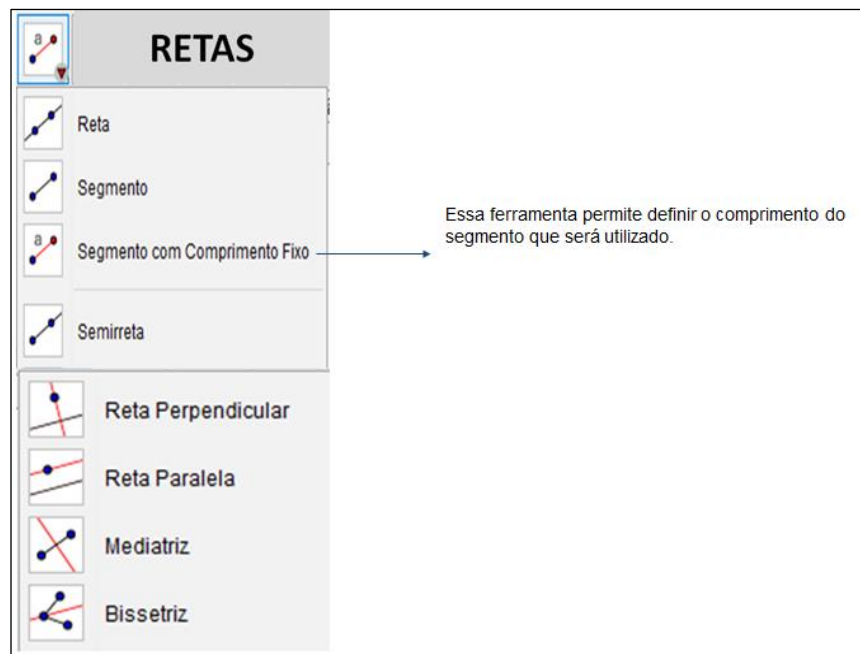


Ao serem aproximadas as figuras devem ter certo magnetismo que permitam coincidir lado a lado.

Ferramentas de construção



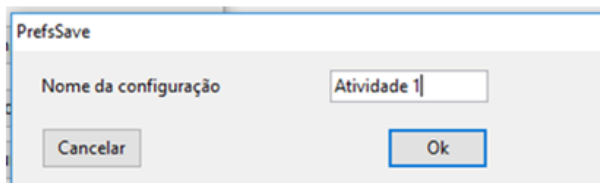
Para indicar que dentro deste menu tem várias ferramentas .



Configuração de menus.

Ao ser acionado o menu “Configuração” na barra superior do *Magnitude Studium*, aparecerá além das ferramentas macro construção, a opção “Personalizar” a qual deverá oferecer ao professor a possibilidade de configurar os menus e ferramentas que poderão ficar acessíveis ao aluno de acordo com o planejamento do professor previamente estabelecido com o foco direcionado ao que ele pretende alcançar na atividade de área e/ou perímetro da seguinte forma:

- 1- Todos os menus e ferramentas do software deverão aparecer em uma janela;
- 2- O usuário (professor) ao clicar sobre o ícone da ferramenta, automaticamente ele deixará de aparecer no software;
- 3- Nesta mesma janela deverá conter um botão denominado de “Salvar a Configuração”, após acionado, a seguinte janela aparecerá:

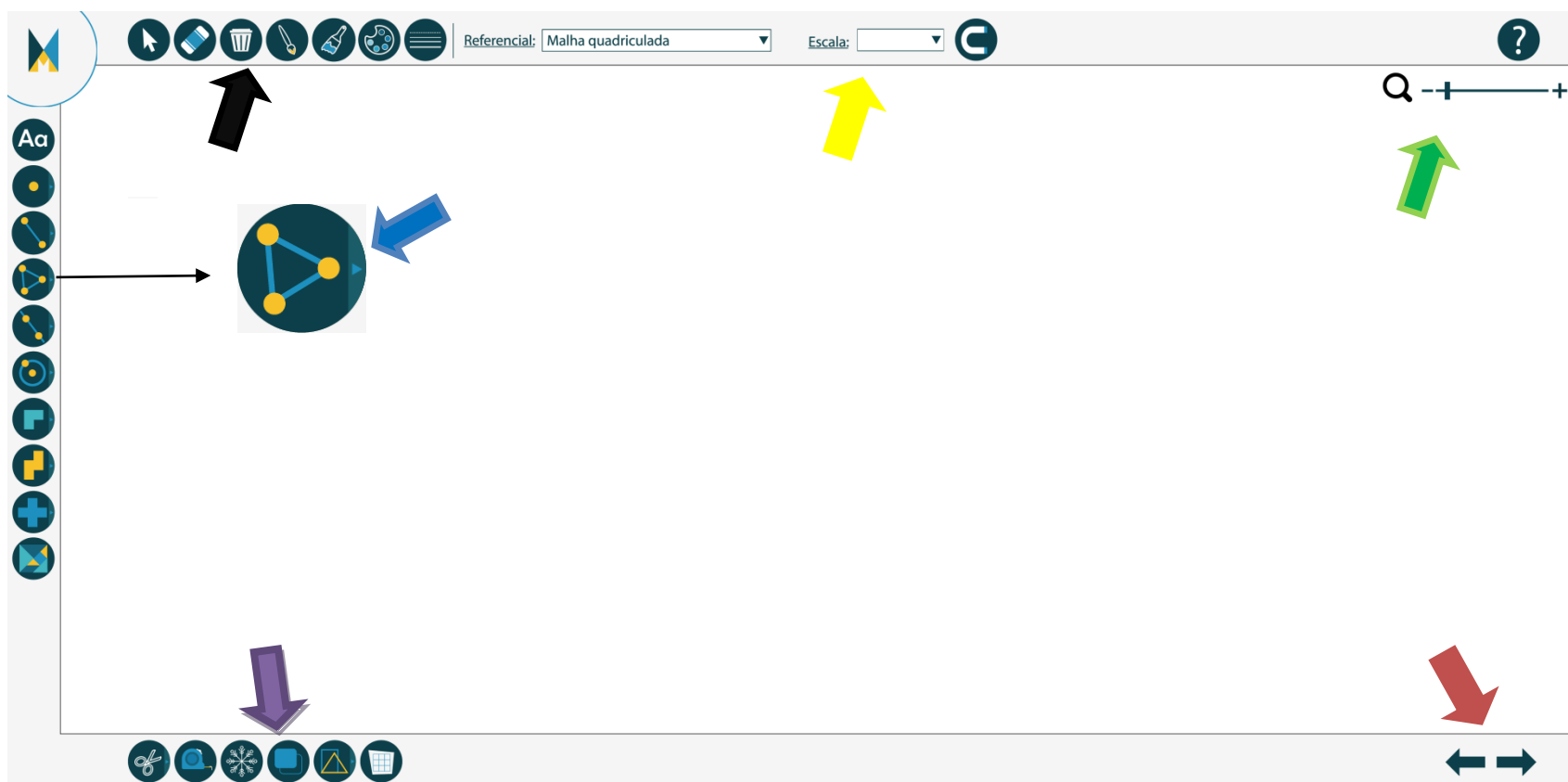


The image shows a small dialog box titled "PrefsSave". It contains a text input field with the label "Nome da configuração" and the text "Atividade 1" entered. Below the input field are two buttons: "Cancelar" and "Ok".

APÊNDICE L- MODELO DE UM NOVO LAYOUT PARA O MS

MODELO DE LAYOUT

As sugestões dadas pelas duplas aos formulários e questionários as quais apresentamos resumidamente nas considerações finais nos permitiram refletir sobre a necessidade de uma evolução dessa primeira versão do *software*. Idealizamos então para uma possível evolução do MS um layout contendo as solicitações da dupla:



Podemos observar alguns dos elementos sugeridos pelas duplas de especialistas no *layout* acima:

ferramenta para voltar partes das construções (pelo menos em 3 passos) (setas ir e voltar indicada pela seta vermelha no *layout*);

ferramenta de copiar e colar as figuras (ferramenta duplicar no menu inferior indicada pela seta roxa no *layout*);

ferramenta para apagar toda a construção de uma vez para que não seja necessário atualizar a página (a lixeira tem que ser programada para atender esse requisito);

ferramentas que permita o *zoom in* e *zoom out* (lupa superior indicada pela seta verde no *layout*);

ferramenta que permita escolher as escalas das malhas (opção ao lado do referencial indicado pela seta amarela);

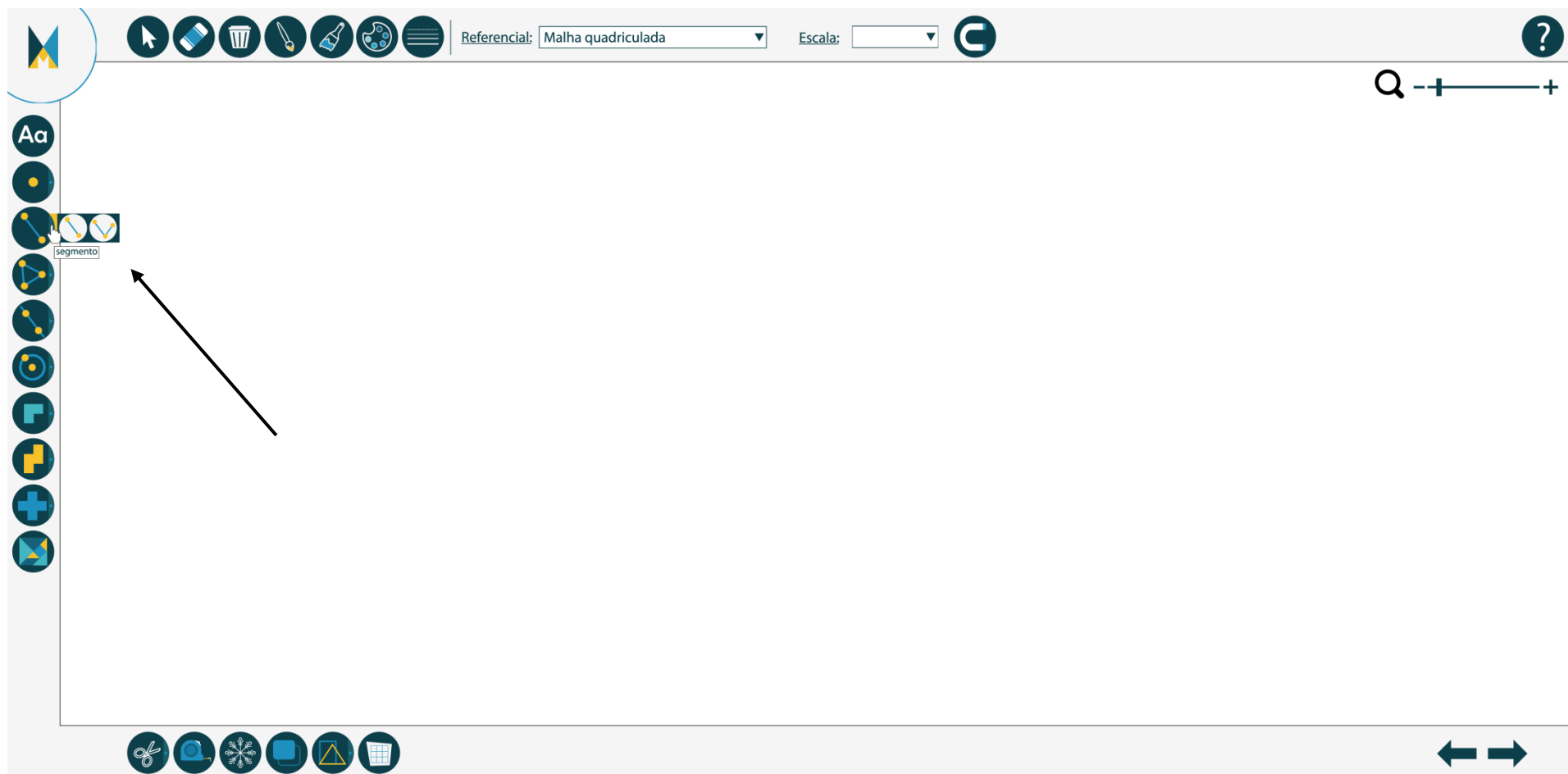
ferramenta que permita soltar os polígonos contruídos nas malhas (ativação do ímã);

indicação que dentro do menu há outras ferramentas (destaque indicado pela seta azul);

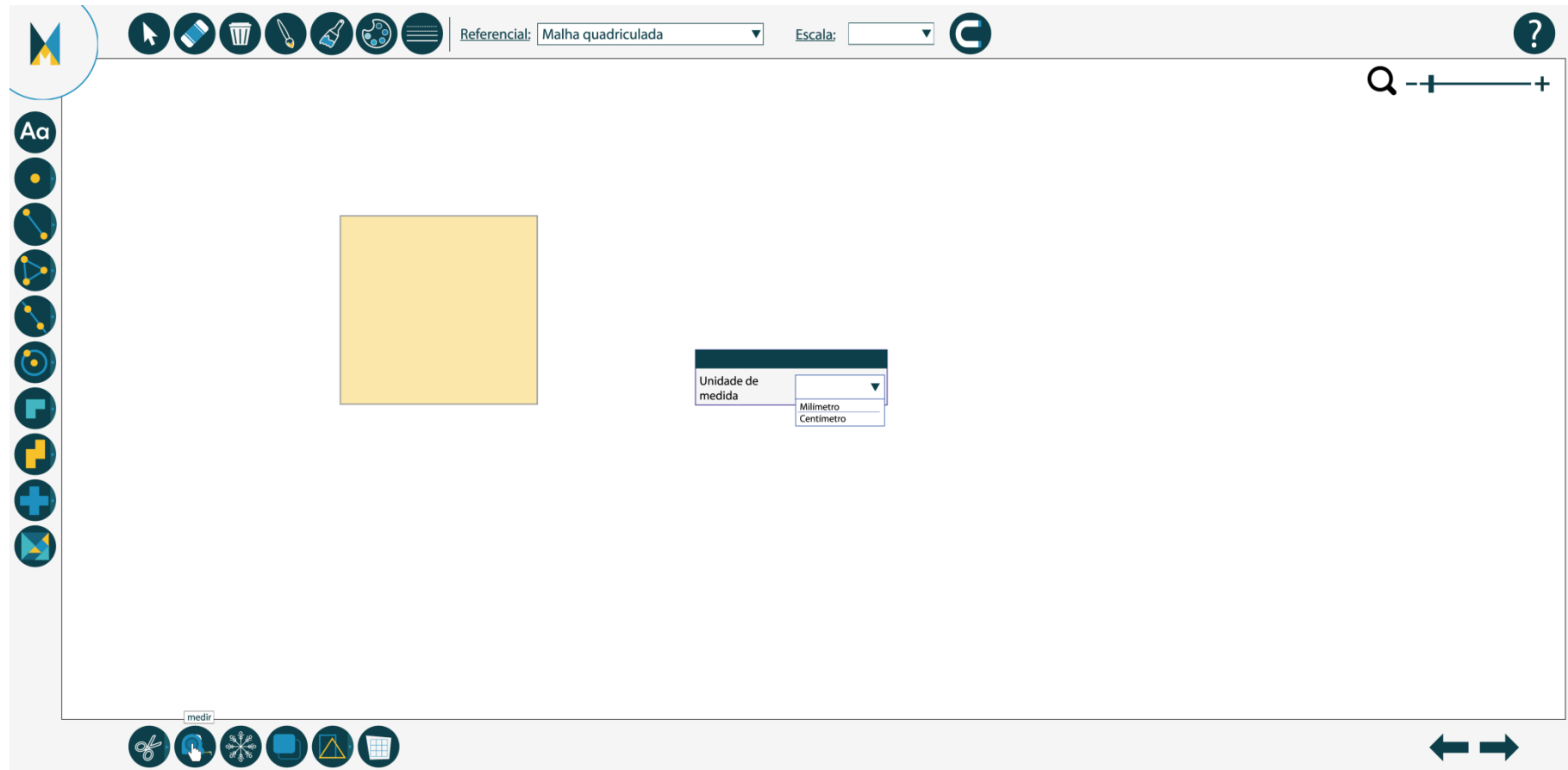
ferramenta de duplicar objeto (indicado pela seta rocha no *layout*);

O mini tutorial deverá aparecer assim que o usuário clicar na interrogação localizada na barra superior do *software* (canto direito).

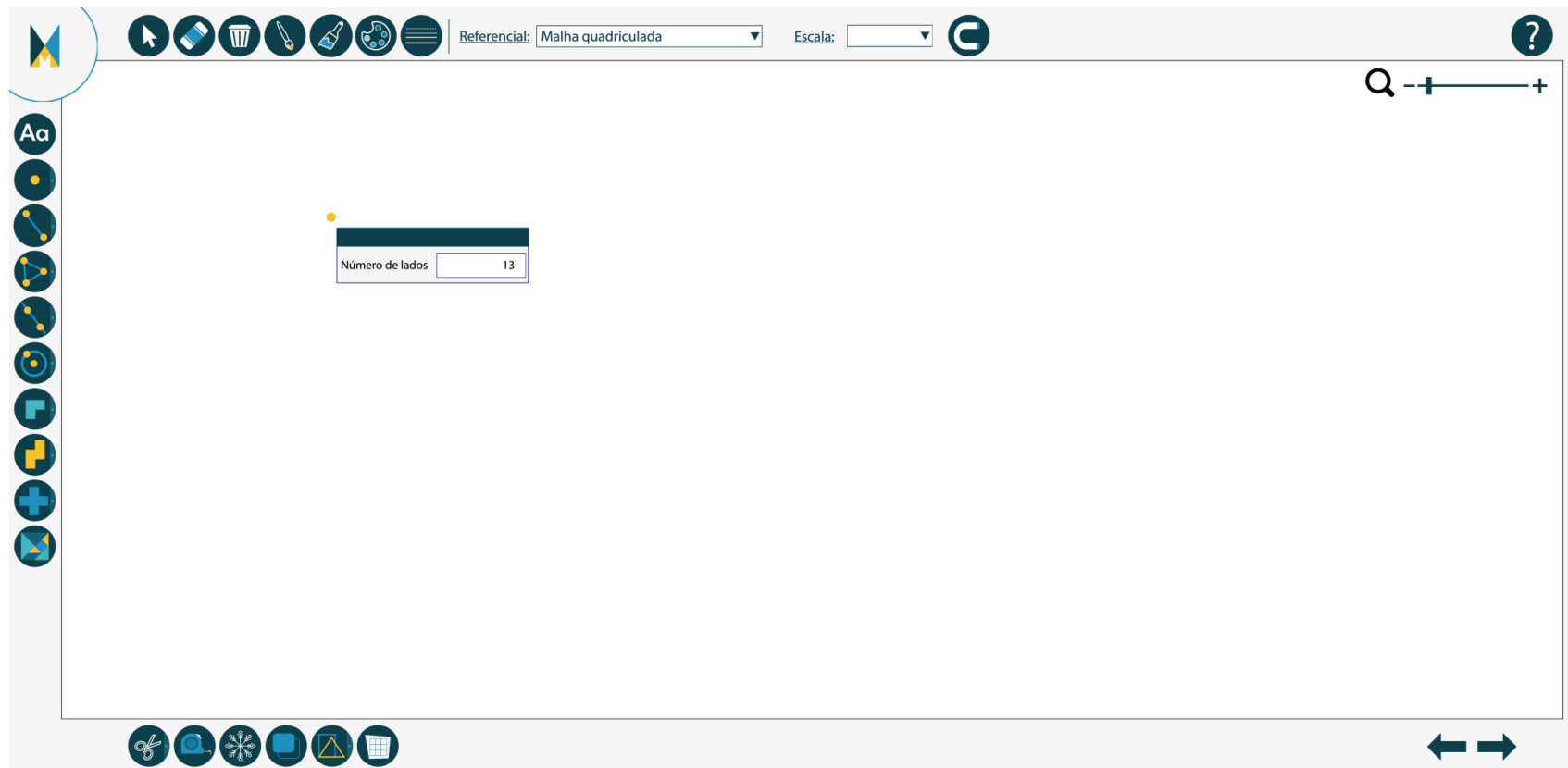
O *layout* apresentado anterioremtne aproxima-se das sugestões dadas pelas duplas com relação aos aspectos ergonômicos do *software*. Na próxima tela, sinalizamos como o *software* deverá responder ao usuário quando o mesmo clicar em um menu de contexto.



Ao ser clicado na setinha contida no ícone, as demais ferramentas aparecerão. Podemos perceber também que a descrição da ferramenta está em português. Na tela a seguir apresentamos como o *software* deverá foncer a condição de escolher as unidades de medidas convencionais.



Após construir um polígono, o usuário deverá clicar na fita métrica, depois na figura criada. Assim, aparecerá então uma caixa de diálogo em que poderá ser escolhida a unidade de medida convencional desejada. Na última tela que idealizamos, apresentamos como possivelmente deveá ser a opção de construir os polígonos regulares.



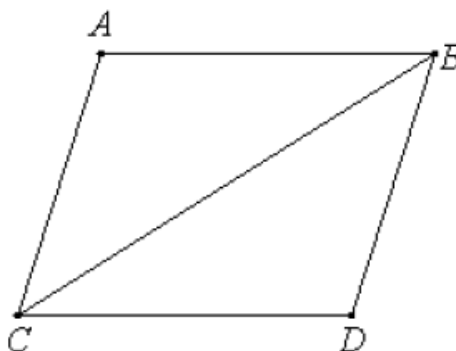
Após clicar na ferramenta polígono regular, na tela em branco, o usuário deverá construir um dos lados do polígono. O *software* então, oferecerá uma caixa de diálogo perguntado de quantos lados deverá ter o polígono, o usuário escolherá, e após essa definição, automaticamente ele será criado.

APÊNDICE M- PROPOSIÇÕES DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Apresentação das proposições dos Elementos de Euclides exploradas nos estudos Epistemológicos de Área com base na tradução de Irineu Bicudo (2009).

Proposição 34: Das áreas paralelogrâmicas, tanto os lados quanto os ângulos opostos são iguais entre si, e a diagonal corta-as em duas.

Figura 197- Representação geométrica da proposição 34 livro I

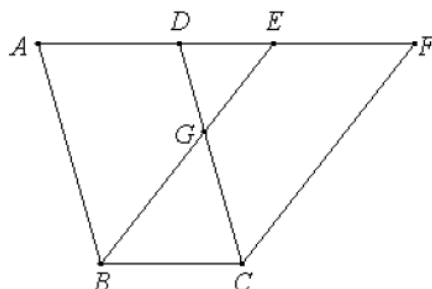


Fonte: Moreira (2010, p. 163)

Demonstração: Sejam a área paralelogrâmica ACDB, e a diagonal dela BC; digo que tanto os lados quanto os ângulos opostos do paralelogramo ACDB são iguais entre si, e a diagonal BC corta-o em dois. Pois, como a AB é paralela à CD, e a reta BC caiu sobre elas, os ângulos sob ABC, BCD, alternos, são iguais entre si. De novo, como a AC é paralela à BD e a BC caiu sobre elas, os ângulos sob ACB, CBD, alternos, são iguais entre si. Então, os ABC, BCD são dois triângulos, tendo os dois ângulos sob ABC, BCA iguais aos dois sob BCD, CDB, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, o BC comum deles, junto aos ângulos iguais; portanto, também terão os lados restantes iguais aos restantes, cada um a cada um, e o ângulo restante igual ao ângulo restante; portanto, por um lado, o lado AB é igual ao CD, e, por outro lado, o AC ao BD, e ainda o ângulo sob BAC é igual ao sob CBD. E, como, por um lado, o ângulo sob ABC é igual ao sob BCD, e, por outro lado, o sob CBD ao sob ACB, portanto, o sob ABD todo é igual ao sob ACD todo. Mas foi provado também o sob BAC igual ao sob CBD. Portanto, das áreas paralelogrâmicas, tanto os lados quanto os ângulos opostos são iguais entre si. Digo, então, que também a diagonal corta-a em duas. Pois, como a AB é igual à CD, e a BC é comum, então, as duas AB, BC são iguais às duas CD, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob ABC é igual ao ângulo sob BCD. Portanto, também a base AC é igual à DB. [Portanto,] também o triângulo ABC é igual ao triângulo BCD. Portanto, a diagonal BC corta o paralelogramo ABCD em dois; o que era preciso provar (BICUDO, 2009, p. 123).

Proposição 35: “Os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si.” (BICUDO, 2009, p. 124).

Figura 198- Representação geométrica da proposição 35 livro I

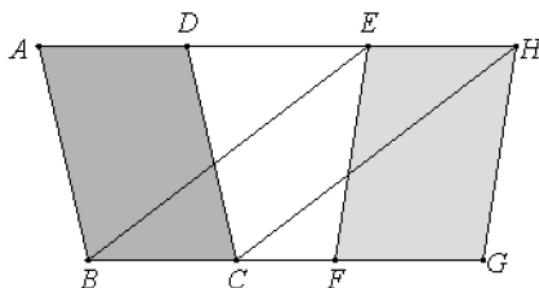


Fonte: Moreira (2010, p. 163)

Demonstração: Sejam os paralelogramos ABCD, EBCF, sobre a mesma base BC e nas mesmas paralelas AF, BC; digo que o ABCD é igual ao paralelogramo EBCF. Pois, como o ABCD é um paralelogramo, a AD é igual à BC. Pelas mesmas coisas, então, também a EF é igual à BC; desse modo, também a AD é igual à EF; e a DE é comum; portanto, a AE toda é igual à DF toda. Mas também a AB é igual à DC; então, as duas EA, AB são iguais às duas FD, DC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob FDC é igual ao sob EAB, o exterior, ao interior; portanto, a base EB é igual à base FC, e o triângulo EAB será igual ao triângulo DFC; fique subtraído o DGE comum; portanto, o trapézio ABGD restante é igual ao trapézio EGCF restante; fique adicionado o triângulo GBC comum; portanto, o paralelogramo ABCD todo é igual ao paralelogramo EBCF todo. Portanto, os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si; o que era preciso provar (BICUDO, 2009, p. 124).

Proposição 36: os paralelogramos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si.

Figura 199- Proposição 36



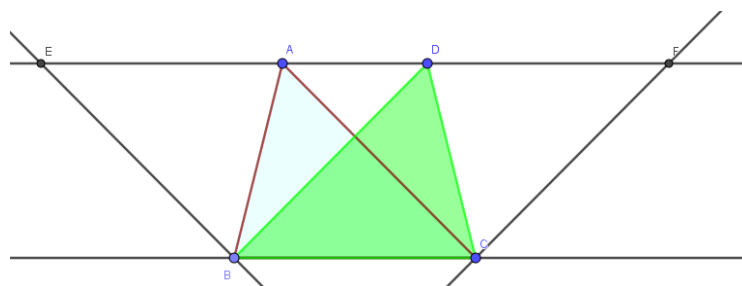
Fonte: Moreira (2010, p. 164)

Demonstração: Sejam os paralelogramos ABCD, EFGH, que estão sobre as bases iguais BC, FG e nas mesmas paralelas AH, BG; digo que o paralelogramo ABCD é igual ao paralelogramo EFGH. Fiquem, pois, ligadas as BE, CH. E, como a BC é igual à FG, mas a FG é igual à EH, portanto, também a BC é igual à EH. Mas também são paralelas. E as EB, HC ligam-nas; mas as que ligam as tanto iguais quanto paralelas, no mesmo lado, são tanto iguais quanto paralelas; [portanto, também as EB, HC são tanto iguais quanto paralelas]. Portanto, o EBCH é um paralelogramo. E é igual ao ABCD; pois, tanto tem a mesma base BC que ele quanto

está nas mesmas paralelas BC, AH com ele. Pelas mesmas coisas, então, também o EFGH é igual ao mesmo EBCH; desse modo, também o paralelogramo ABCD é igual ao EFGH. Portanto, os paralelogramos, que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas, são iguais entre si; o que era preciso provar. (BICUDO, 2009, p. 125).

Proposição 37: Os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si.

Figura 200- Representação geométrica da proposição 37 do livro 1

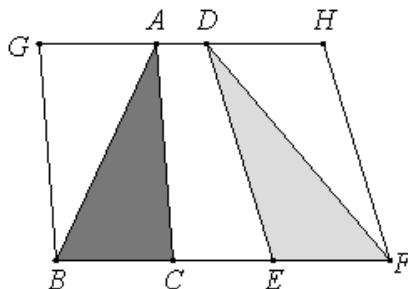


Fonte: da pesquisa baseado em Bicudo (2009)

Demonstração: Sejam os triângulos ABC, DBC sobre a mesma base BC e nas mesmas paralelas AD, BC; digo que o triângulo ABC é igual ao triângulo DBC. Fique prolongada a AD em cada um dos lados até os E, F, e, por um lado, pelo B, fique traçada a BE paralela à CA, e, por outro lado, pelo C, fique traçada a CF paralela à BD. Portanto, cada um dos EBCA, DBCF é um paralelogramo; e são iguais; pois, estão tanto sobre a mesma base BC quanto nas mesmas paralelas BC, EF; e, por um lado, o triângulo ABC é metade do paralelogramo EBCA; pois, a diagonal AB corta-o em dois; e, por outro lado, o triângulo DBC é metade do paralelogramo DBCF; pois, a diagonal DC corta-o em dois [e as metades das coisas iguais são iguais entre si]. Portanto, o triângulo ABC é igual ao triângulo DBC. Portanto, os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si; o que era preciso provar. (BICUDO, 2009, p. 125).

Proposição 38: Os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si.

Figura 201- Representação geométrica da Proposição 38 do livro I.



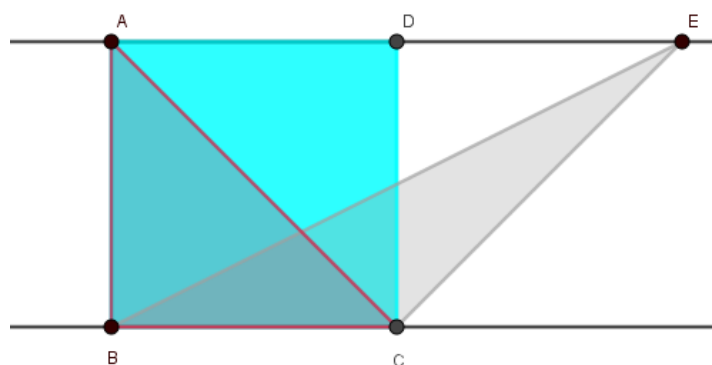
Fonte: Moreira (2010, p. 165)

Demonstração: Sejam os triângulos ABC, DEF sobre as bases iguais BC, EF e nas mesmas paralelas BF, AD; digo que o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF.

Fique, pois, prolongada a AD, em cada um dos lados, até os G, H, e, por um lado, pelo B, fique traçada a BG paralela à CA, e, por outro lado, pelo F, fique traçada a FH paralela à DE. Portanto, cada um dos GBCA, DEFH é um paralelogramo; e o GBCA é igual ao DEFG; pois, estão tanto sobre as bases iguais BC, EF quanto nas mesmas paralelas BF, GH; e, por um lado, o triângulo ABC é metade do paralelogramo GBCA. Pois, a diagonal AB corta-o em dois; e, por outro lado, o triângulo FED é metade do paralelogramo DEFH; pois, a diagonal DF corta-o em dois; [mas as metades das coisas iguais são iguais entre si]. Portanto, o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF. Portanto, os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si; o que era preciso provar (BICUDO, 2009, p 126.).

Proposição 41: Caso um paralelogramo tenha tanto a mesma base que um triângulo quanto esteja nas mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo.

Figura 202- Representação geométrica da proposição 41 do livro I

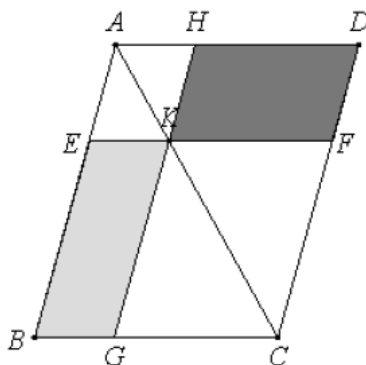


Fonte: da pesquisa, baseado em Bicudo (2009)

Demonstração: Tenha, pois, o paralelogramo ABCD tanto a mesma base BC que o triângulo EBC quanto esteja nas mesmas paralelas BC, AE; digo que o paralelogramo ABCD é o dobro do triângulo BEC. Fique, pois, ligada a AC. Então, o triângulo ABC é igual ao triângulo EBC; pois, está tanto sobre a mesma base BC que ele quanto nas mesmas paralelas BC, AE. Mas o paralelogramo ABCD é o dobro do triângulo ABC; pois, a diagonal AC corta-o em dois; desse modo, o paralelogramo ABCD também é o dobro do triângulo EBC. Portanto, caso um paralelogramo tenha tanto a mesma base que um triângulo quanto esteja nas mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo; o que era preciso provar. (BICUDO, 2009, p. 128).

Proposição 43: Os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de todo paralelogramo, são iguais entre si.

Figura 203- Representação geométrica da proposição 43 do livro I

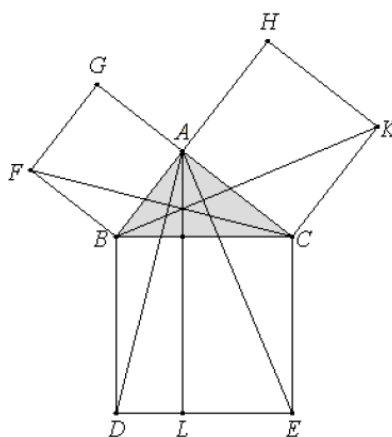


Fonte: Moreira (2010, p. 156)

Demonstração: Sejam o paralelogramo ABCD, e a diagonal AC dele, e, por um lado, sejam EH, FG à volta da AC, e, por outro lado, os ditos complementos BK, KD; digo que o complemento BK é igual ao complemento KD. Pois, como o ABCD é um paralelogramo, e a AC é uma diagonal dele, o triângulo ABC é igual ao triângulo ACD. De novo, como o EH é um paralelogramo, e a AK é uma diagonal dele, o triângulo AEK é igual ao triângulo AHK. Pelas mesmas coisas, então, também o triângulo KFC é igual ao KGC. Como, de fato, por um lado, o triângulo AEK é igual ao triângulo AHK, e, por outro lado, o KFC, ao KGC, o triângulo AEK, com o KGC, é igual ao triângulo AHK, com o KFC; mas também o triângulo ABC todo é igual ao ADC todo; portanto, o complemento BK restante é igual ao complemento KD restante. Portanto, os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de toda a área paralelogramática, são iguais entre si; o que era preciso provar. (BICUDO, 2009, p. 129)

Proposição 47: Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.

Figura 204- Representação geométrica da proposição 48 do livro I



Fonte: Moreira (2010, p.114)

Demonstração: Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto; digo que o quadrado sobre a BC é igual aos quadrados sobre as BA, AC. Fiquem, pois, descritos, por um lado o quadrado BDEC sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC sobre as BA, AC, e, pelo A, fique traçada a AL paralela a qualquer uma das BD, CE; e fiquem ligadas às AD, FC. E, como cada um dos ângulos sob BAC, BAG é reto, então, as duas retas AC, AG, não postas no mesmo lado, fazem relativamente a alguma reta, a BA, e no ponto A sobre ela, os ângulos adjacentes iguais a dois retos; portanto, a CA está sobre uma reta com a AG. Pelas mesmas coisas, então, também a BA está sobre uma reta com a AH. E, como o ângulo sob DBC é igual ao sob FBA; pois, cada um é reto; fique adicionado o sob ABC comum; portanto, o sob DBA todo é igual ao sob FBC todo. E como, por um lado, a DB é igual à BC, e, por outro lado, a FB, à BA, então, as duas DB, BA são iguais às duas FB, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob DBA é igual ao ângulo sob FBC; portanto, a base AD [é] igual à base FC, e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC; e, por um lado, o paralelogramo BL [é] o dobro do triângulo ABD; pois, tanto têm a mesma base BD quanto estão nas mesmas paralelas BD, AL; e, por outro lado, o quadrado GB é o dobro do triângulo FBC; pois, de novo, tanto têm a mesma base FB quanto estão nas mesmas paralelas FB, GC. [Mas os dobros das coisas iguais são iguais entre si;], portanto, também o paralelogramo BL é igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, então, sendo ligadas às AE, BK, será provado também o paralelogramo CL igual ao quadrado HC; portanto, o quadrado BDEC todo é igual aos quadrados GB, HC. E, por um lado, o quadrado BDEC foi descrito sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC, sobre as BA, AC. Portanto, o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC. Portanto, nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o [ângulo] reto; o que era preciso provar (BICUDO, 2009).