



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PAULO JOSÉ CAVALCANTI DE VASCONCELOS FILHO

**ANÁLISE ESTATÍSTICA DA LUZ NO ESPALHAMENTO
ESPONTÂNEO POR ÁTOMOS DE DOIS NÍVEIS FRIOS**

Recife
2019

PAULO JOSÉ CAVALCANTI DE VASCONCELOS FILHO

**ANÁLISE ESTATÍSTICA DA LUZ NO ESPALHAMENTO
ESPONTÂNEO POR ÁTOMOS DE DOIS NÍVEIS FRIOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Óptica

Orientador: Prof. Daniel Felinto Pires Barbosa

Recife
2019

Catalogação na fonte
Bibliotecária Arabelly Ascoli CRB4-2068

V331a Vasconcelos Filho, Paulo José Cavalcanti de
Análise estatística da luz no espalhamento espontâneo por
átomos de dois níveis frios / Paulo José Cavalcanti de
Vasconcelos Filho. – 2019.

89 f.: il., fig.

Orientador: Daniel Felinto Pires Barbosa
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Física. Recife, 2019.
Inclui referências e apêndices.

1. Óptica. 2. Correlação. 3. Coerência. 4. Átomos frios. I.
Barbosa, Daniel Felinto Pires (orientador). II. Título.

535.2

CDD (22. ed.)

UFPE-FQ 2019-65

PAULO JOSÉ CAVALCANTI DE VASCONCELOS FILHO

**ANÁLISE ESTATÍSTICA DA LUZ NO ESPALHAMENTO
ESPONTÂNEO POR ÁTOMOS DE DOIS NÍVEIS FRIOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 15/08/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Daniel Felinto Pires Barbosa
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Fernando Roberto de Luna Parisio Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante
Examinador Externo
Universidade Federal da Paraíba

AGRADECIMENTOS

À minha família, por me fornecer o suporte até aqui e por produzir em mim a personalidade que me trouxe até o fim deste trabalho.

À Daniel Felinto, pela sua orientação e exemplo de tranquilidade e esmero em relação à pesquisa, por compartilhar sua experiência, suas ideias e compreensão da física.

Aos colegas de laboratório, Raoni Moreira, Leandro de Andrade e Michelle Araújo, e aos colegas de laboratórios vizinhos Álvaro Mitchell e Jesus Lopez pelas conversas com café nos intervalos do trabalho. Estas contribuíram tanto para meus questionamentos científicos quanto para tornar o ambiente de trabalho mais agradável.

Aos professores do Departamento de Física que ministraram os cursos do mestrado, Arkady Shanenko, Antônio Azevedo e José Tabosa. Seus cursos ajudaram a tornar mais sólida minha formação acadêmica, aprofundando conhecimentos e consertando falhas.

Aos profissionais do departamento, em especial Alexsandra Melo, por sempre se mostrarem solícitos aos meus pedidos.

Agradeço à FACEPE pelo apoio financeiro e à UFPE por ser a instituição onde realizei todo meu trabalho até aqui.

À Deus por trazer à existência todas as coisas e nos dar a consciência para admirá-las.

*Por meio destes hórridos perigos,
Destes trabalhos graves e temores,
Alcançam os que são de fama amigos
As honras imortais e graus maiores:
Não encostados sempre nos antigos
Troncos nobres de seus antecessores;
Não nos leitos dourados, entre os finos
Animais de Moscóvia zebelinos;*

*Não com os manjares novos e esquisitos,
Não com os passeios moles e ociosos,
Não com os vários deleites e infinitos,
Que afeminam os peitos generosos,
Não com os nunca vencidos apetitos
Que a Fortuna tem sempre tão mimosos,
Que não sofre a nenhum que o passo mude
Para alguma obra heróica de virtude;*

*Mas com buscar com o seu forçoso braço
As honras, que ele chame próprias suas;
Vigiando, e vestindo o forjado aço,
Sofrendo tempestades e ondas cruas;
Vencendo os torpes frios no regaço
Do Sul e regiões de abrigo nuas;
Engolindo o corrupto mantimento,
Temperado com um árduo sofrimento;*
(CAMÕES[1])

RESUMO

Neste trabalho, investigamos o mecanismo de uma memória no espalhamento de fótons individuais por um conjunto de átomos frios bombeados para uma transição cíclica. Através do uso de funções de correlação, identificamos um tempo de vida para essa memória que é muito maior que o tempo de vida do estado excitado dos átomos e é resiliente ao processo de leitura. O trabalho de interpretação dos dados releva a necessidade de cuidado ao pressupor simplicidade à estatística dos processos envolvidos para que artefatos experimentais não se manifestem de forma relevante nos resultados finais. Por fim, propomos um modelo teórico para o mecanismo dessa memória que possibilita uma interpretação mais concreta da natureza da memória observada, atribuindo sua origem a um efeito coletivo nos graus de liberdade externos dos átomos.

Palavras-chave: Correlação. Coerência. Átomos frios. Memória. Espalhamento.

ABSTRACT

In this work, we investigate the mechanism of a memory in the scattering of individual photons by an ensemble of cold atoms pumped to a cyclic transition. Through the use of correlation functions, we identify a lifetime for this memory that is much larger than the lifetime of the excited state of the atoms and is resilient to the reading process. The task of interpretation of the results shows the necessity of care in making assumptions about the simplicity of the statistics of the relevant processes so that experimental artifacts do not manifest themselves in a relevant way in the final results. Finally, we propose a theoretical model for the mechanism of this memory that allows a more concrete interpretation of the nature of the memory we observe, assigning its origin to a collective effect in the external degrees of freedom of the atoms.

Keywords: Correlation. Coherence. Cold atoms. Memory. Scattering.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	ARMADILHA MAGNETO-ÓPTICA	13
2.1	Interação entre luz e átomo de dois níveis	13
2.2	Força de espalhamento	15
2.3	Melaço óptico	16
2.4	Armadilha magneto-óptica	17
2.5	Limitações da técnica	19
3	FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO	21
3.1	Variáveis Aleatórias	21
3.2	Processos Aleatórios	22
3.3	Estacionariedade	25
3.3.1	Processos estritamente estacionários	26
3.3.2	Processos estacionários num sentido amplo	26
3.3.3	Processos ergódicos	27
3.4	Funções de correlação	29
3.5	Funções de correlação em óptica	31
3.5.1	Algumas propriedades gerais em processos clássicos	31
3.5.2	Algumas propriedades em processos caóticos clássicos	33
3.5.3	Grau de correlação num processo com alargamento por colisão	35
3.5.4	Grau de correlação num processo com alargamento Doppler	37
3.6	Funções de correlação em mecânica quântica	39
3.6.1	Estado térmico	40
3.6.2	Estado coerente	41
3.6.3	Estado de Fock	42
4	MEDIDAS EXPERIMENTAIS DE CORRELAÇÃO EM ÓPTICA	43
4.1	Intensidade da luz caótica em medidas	43
4.2	Interferômetro de Mach-Zehnder	45
4.3	Interferômetro de Hanbury Brown-Twiss	47
5	MEMÓRIA ATÔMICA	49
5.1	O experimento	49
5.2	Análise de dados	52
5.2.1	Compensando $g^{(2)}(0) > 2$ e $g^{(2)}(\infty) \neq 1$	55

6	MODELAGEM QUÂNTICA DA MEMÓRIA NO ESPALHAMENTO DA LUZ	63
6.1	Modelagem da ação de um pulso de luz sobre a nuvem de átomos	63
6.2	Cálculo de $g^{(2)}(0)$	70
6.3	Cálculo da descoerência da memória	73
6.4	Modificação fenomenológica e comparação com experimento	81
7	CONCLUSÃO	84
	REFERÊNCIAS	85
	APÊNDICE A – TRATAMENTO DOS DADOS BRUTOS	87
	APÊNDICE B – ANÁLISE DOS DADOS EXPERIMENTAIS	89

1 INTRODUÇÃO

Um dos maiores desafios na área de informação quântica é o do desenvolvimento de protocolos que sejam escalonáveis, isto é, que possam ser implementados em escalas cada vez maiores, tornando-se mais poderosos.

Um dos elementos necessários ao escalonamento de tais protocolos é a memória. Quando o escalonamento de uma tarefa requer que certo procedimento probabilístico seja repetido com sucesso várias vezes para a construção do sistema em escala maior, se não houver memória a probabilidade de sucesso global é muito menor do que se for possível guardar os sucessos anteriores em uma memória. Isso acontece pois sem memória, todos os sucessos precisam acontecer simultaneamente.

O exemplo mais relevante dessa ideia para o presente trabalho é o protocolo DLCZ (Duan, Lukin, Cirac, Zoller, os autores do protocolo) [2] para distribuição de emaranhamento quântico entre locais distantes. Nesse protocolo, o efeito de troca de emaranhamento [3] é utilizado para conectar dois pares de *ensembles* de átomos frios emaranhados, gerando emaranhamento entre as pontas extremas de cada um dos pares. Esse procedimento pode ser repetido várias vezes, aumentando cada vez mais a distância entre os locais com emaranhamento, diferentemente do emaranhamento que pode ser obtido com propagação direta de fôtons [4]. Nesse protocolo, o elemento de memória utilizado é o tempo de vida dos estados fundamentais internos dos átomos.

Interessantemente, uma memória na nuvem de átomos frios que é resistente ao processo de leitura foi identificada no regime em que luz clássica é espalhada [5]. Sendo essa propriedade de resiliência perante o processo de leitura interessante, esse trabalho propõe-se a investigar o comportamento desta memória no regime de espalhamento espontâneo de fôtons individuais.

Ainda que a memória que estudamos tenha análogo clássico, propomos um modelo teórico quântico do seu mecanismo de funcionamento, atribuindo sua origem a um efeito coletivo. Com isso, uma perspectiva de estudo das propriedades exclusivamente quânticas do sistema é vislumbrada para a aplicação futura desta memória a protocolos de informação quântica.

Começamos o texto com o objetivo de introduzir os princípios de funcionamento da nossa fonte de átomos, no capítulo 2. Em seguida, no capítulo 3, desenvolvemos uma intuição matemática das ferramentas de análise estatística necessárias ao entendimento da investigação da memória. No capítulo 4, discutimos configurações experimentais básicas em óptica que são relacionadas a medidas de correlação. Finalmente, no capítulo 5, apresentamos o experimento realizado e discutimos como deve ser realizada uma

análise de dados que possibilite uma clara interpretação dos fenômenos envolvidos. Apresentamos um modelo teórico da memória no espalhamento de luz por átomos frios no capítulo 6, e a conclusão do trabalho no capítulo 7. Detalhes sobre o tratamento dos dados experimentais podem ser encontrados nos apêndices ao final do texto. Uma discussão mais completa do capítulo 2 pode ser encontrada em [6] e [7], do capítulo 3 em [8] e [7], e do capítulo 4 em [7] e [9].

2 ARMADILHA MAGNETO-ÓPTICA

O experimento que forneceu os dados sobre os quais realizamos a análise estatística tem como base uma nuvem de átomos de rubídio 87 frios, a uma temperatura da ordem de centenas de μK . Por isso, a presente seção será dedicada a explicar a física que permite que um sistema desse tipo seja construído. Para tanto, precisamos entender como o movimento de um átomo é alterado pela sua interação com um campo luminoso e a partir disso descrever um esquema que desacelere e prenda os átomos, formando um conjunto frio numa região do espaço.

2.1 Interação entre luz e átomo de dois níveis

Como a taxa de troca de momento entre o campo luminoso e o átomo está relacionada com a taxa com que esse átomo absorve e emite fótons, precisamos de um modelo para a interação átomo-luz [6]. Por simplicidade, supomos um átomo de dois níveis, $|1\rangle$ e $|2\rangle$, onde a energia de $|2\rangle$ é maior que a de $|1\rangle$, e um campo luminoso monocromático com frequência angular ω , dessintonizado de δ da transição $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$. Esse sistema está representado na figura 1.

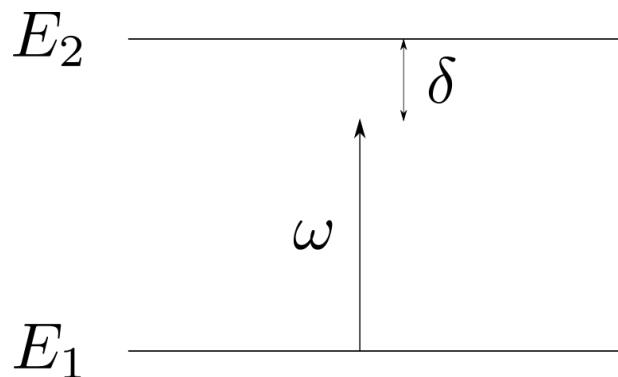


Figura 1 – Diagrama de energia do átomo de dois níveis

Se o hamiltoniano do átomo livre é H_0 , então $H_0|1\rangle = E_1|1\rangle$ e $H_0|2\rangle = E_2|2\rangle$. Se ligamos o campo eletromagnético $E(t) = E_0 \cos \omega t$, o hamiltoniano passa a ser $H = H_0 + er \cdot E_0 \cos \omega t$ e agora escrevemos o estado num tempo t como

$$|\Psi\rangle = c_1(t)e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle + c_2(t)e^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle. \quad (2.1)$$

Aplicando $\langle 1 |$ e $\langle 2 |$ na equação de Schroedinger, $H|\Psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle$, e definindo $\Omega = \langle 1 | er \cdot E_0 | 2 \rangle / \hbar$, $\omega_1 = E_1 / \hbar$, $\omega_2 = E_2 / \hbar$ e $\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$, chegamos no seguinte sistema

de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} i\dot{c}_1 &= \Omega \cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} c_2, \\ i\dot{c}_2 &= \Omega^* \cos(\omega t) e^{i\omega_0 t} c_1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Em seguida, aplicamos a chamada aproximação de onda girante. Para tanto, escrevemos os cossenos em termos de exponenciais complexas. Isso levará ao aparecimento dos termos $e^{\pm i(\omega - \omega_0)t}$ e $e^{\pm i(\omega + \omega_0)t}$. Para as altas frequências utilizadas na óptica, os termos do segundo tipo oscilam muito mais rapidamente que os do primeiro e podem ter sua média considerada desprezível. Com isso, obtém-se o novo sistema

$$\begin{aligned} i\dot{c}_1 &= c_2 e^{i(\omega - \omega_0)t} \frac{\Omega}{2}, \\ i\dot{c}_2 &= c_1 e^{-i(\omega - \omega_0)t} \frac{\Omega^*}{2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

No que se segue consideramos $\Omega = \Omega^*$, e definimos $\delta = \omega - \omega_0$. Realizamos a mudança de coordenadas para $\tilde{c}_1 = c_1 e^{-i\delta t/2}$ e $\tilde{c}_2 = c_2 e^{i\delta t/2}$, o que remove a dependência temporal explícita do sistema de equações. Com o novo sistema, podemos escrever as equações diferenciais para os termos da matriz densidade $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \rho_{11}|1\rangle\langle 1| + \rho_{22}|2\rangle\langle 2| + \tilde{\rho}_{12}e^{i\delta t}|1\rangle\langle 2| + \tilde{\rho}_{21}e^{-i\delta t}|2\rangle\langle 1|$.

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= i\frac{\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}), \\ \dot{\rho}_{22} &= -i\frac{\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}), \\ \dot{\tilde{\rho}}_{12} &= -i\delta\tilde{\rho}_{12} + i\frac{\Omega}{2}(\rho_{11} - \rho_{22}), \\ \dot{\tilde{\rho}}_{21} &= i\delta\tilde{\rho}_{21} - i\frac{\Omega}{2}(\rho_{11} - \rho_{22}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Essas equações não incluem o decaimento exponencial por princípio, então, adicionamo-o somando $\Gamma\rho_{22}$ a $\dot{\rho}_{11}$, $-\Gamma\rho_{22}$ a $\dot{\rho}_{22}$, $-\frac{\Gamma}{2}\tilde{\rho}_{12}$ a $\dot{\tilde{\rho}}_{12}$, e $-\frac{\Gamma}{2}\tilde{\rho}_{21}$ a $\dot{\tilde{\rho}}_{21}$.

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= i\frac{\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}) + \Gamma\rho_{22}, \\ \dot{\rho}_{22} &= -i\frac{\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}) - \Gamma\rho_{22}, \\ \dot{\tilde{\rho}}_{12} &= -i\delta\tilde{\rho}_{12} + i\frac{\Omega}{2}(\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{\Gamma}{2}\tilde{\rho}_{12}, \\ \dot{\tilde{\rho}}_{21} &= i\delta\tilde{\rho}_{21} - i\frac{\Omega}{2}(\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{\Gamma}{2}\tilde{\rho}_{21}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

O que nos interessa aqui é o estado após tempos muito maiores que o tempo de decaimento Γ^{-1} . Por isso, supomos um estado estacionário, isto é, $\dot{\rho}_{11} = \dot{\rho}_{22} = \dot{\tilde{\rho}}_{12} = \dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$.

$\dot{\rho}_{21} = 0$. Com isso, levando em consideração a normalização do estado, que impõe $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$, obtemos

$$\rho_{22} = \frac{\Omega^2/4}{\Gamma^2/4 + \Omega^2/2 + \delta^2}. \quad (2.6)$$

2.2 Força de espalhamento

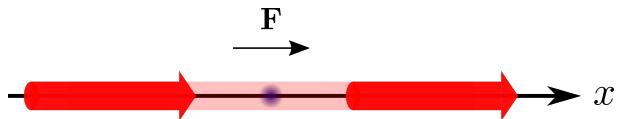


Figura 2 – Luz laser exerce força sobre átomos como resultado de sucessivas absorções dos fótons do feixe laser e das emissões espontâneas subsequentes.

Como a emissão espontânea não tem direção preferencial, se um átomo é iluminado por um feixe de luz laser, como ilustra a figura 2, ele sofrerá uma força na direção de propagação dessa luz devido aos sucessivos espalhamentos. Ao absorver um fóton do feixe que se propaga na direção $+\hat{x}$, o átomo ganha um momento $+\hbar k \hat{x}$. Em seguida, pode espontaneamente emitir um fóton de mesma energia, isto é, com mesmo momento em módulo, em alguma direção aleatória. Repetindo essa sequência muitas vezes, todos os ganhos de momento por absorção são na mesma direção, mas os espalhamentos espontâneos tenderão a se cancelar. O caminho no espaço dos momentos realizado pelo átomo pode ser exemplificado pelo esquema na figura 3.

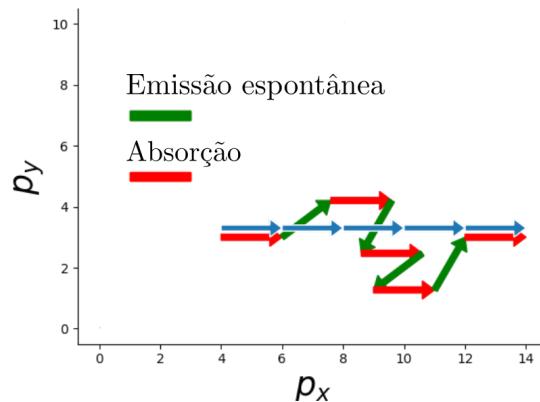


Figura 3 – Ilustração da variação do momento linear do átomo após sucessivas absorções e das emissões espontâneas de fótons

Esse raciocínio sugere a seguinte expressão para a força exercida sobre o átomo:

$$F_{\text{espalhamento}} = R\hbar k, \quad (2.7)$$

onde R é a taxa de emissão espontânea e $\hbar k$ é o momento linear dos fótons do feixe de laser incidente sobre o átomo. Como a taxa de emissão espontânea é proporcional à população no estado excitado, ρ_{22} , e também à taxa de emissão espontânea, Γ , escrevemos $R = \Gamma \rho_{22}$ e utilizamos o resultado da seção anterior para ρ_{22} .

$$F_{\text{espalhamento}}(\delta, k) = \frac{\Gamma}{2} \hbar k \frac{\Omega^2/2}{\Gamma^2/4 + \Omega^2/2 + \delta^2}, \quad (2.8)$$

onde $\delta = \omega - \omega_0$.

É importante ter em mente que essa expressão se refere apenas à força média que resulta da sequência de absorções e emissões. O átomo em cada instante de tempo pode ganhar momento em direções diferentes da direção do laser, o que adiciona uma variância em torno da média nula no ganho de momento nessas direções.

2.3 Melaço óptico

Sabemos já que um feixe de laser que se propaga na direção \hat{x} exerce uma força na direção \hat{x} sobre os átomos que ilumina. Mais interessante é o que acontece se temos 2 feixes contrapropagantes de mesma frequência. Veremos que é possível resfriar átomos com um arranjo desse tipo [10] [11].

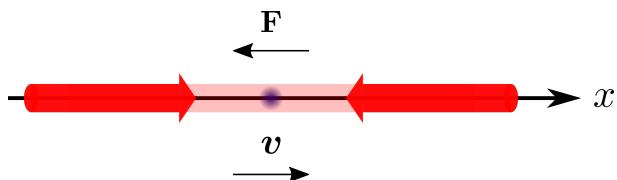


Figura 4 – Um par de feixes de laser contrapropagantes sintonizados abaixo da frequência de ressonância do átomo resulta em uma força do tipo viscosa ao longo de sua direção.

Consideramos agora que o efeito Doppler desloca a frequência do laser como percebida pelos átomos. Supomos que ambos os feixes e o movimento do átomo são paralelos ao eixo x . Se a velocidade do átomo é v , um feixe de luz que se propaga na direção $+x$ é percebido pelo átomo com uma frequência deslocada de $-kv$. Um feixe de luz na direção $-x$, por sua vez, é percebido com uma frequência deslocada de $+kv$.

Pela forma de δ , temos que $\omega \rightarrow \omega \pm kv \implies \delta \rightarrow \delta \pm kv$. Assim, a força sobre o átomo devido aos dois feixes fica:

$$F_{\text{melaço}} = F_{\text{espalhamento}}(\delta - kv, k) + F_{\text{espalhamento}}(\delta + kv, -k). \quad (2.9)$$

Expandindo $F_{\text{melaço}}$ em potências de kv até primeira ordem, obtemos o seguinte:

$$F_{\text{melaço}} \approx \frac{\hbar k^2 \Omega^2 \Gamma \delta}{(\Gamma^2/4 + \Omega^2/2 + \delta^2)^2} v. \quad (2.10)$$

Quando $\delta < 0$, essa é uma força do tipo $-|\alpha|v$ que sempre se opõe ao movimento da partícula, uma força viscosa. Se adicionarmos mais 2 pares de feixes contrapropagantes nas direções \hat{y} e \hat{z} , qualquer átomo que entre na região iluminada pelos 6 feixes tenderá a parar seu movimento. Nessa região, a luz cria uma resistência a qualquer movimento dos átomos, funcionando como um meio viscoso. Daí o nome de melaço óptico para essa técnica.

Intuitivamente, podemos entender que o efeito Doppler favorece sempre o feixe contrapropagante ao movimento do átomo desde que a frequência da luz esteja sintonizada abaixo da frequência de ressonância da transição atômica.

2.4 Armadilha magneto-óptica

Veremos agora que a influência do efeito Zeeman [12] sobre um melaço óptico pode levar ao aprisionamento de átomos, numa configuração experimental conhecida como armadilha magneto óptica (MOT, do inglês *magneto-optical trap*) [13]. Supomos que o átomo de 2 níveis que consideramos até aqui é, na verdade, um átomo com 4 níveis, sendo que um desses níveis tem energia E_1 e momento angular nulo, e os outros três são degenerados, com energia E_2 e momento angular quadrado \hbar^2 . Esse é o caso de uma transição entre níveis finos com momento angular total $J = 0$ e $J = 1$. Por conta do efeito Zeeman, os três níveis de energia mais alta se tornarão não degenerados na presença de um campo magnético.

Para campos magnéticos fracos, o deslocamento Zeeman pode ser escrito como $g\mu_B B M_J$ onde g é o fator de Landé, μ_B é o magneton de Bohr e M_J é o número quântico magnético. No nosso caso, $M_J = 0, 1, -1$ para o nível de energia superior e $M_J = 0$ para o inferior. Se gerarmos um campo magnético que na origem é nulo com gradiente constante, temos na vizinhança dela $B(x, y, z) = \frac{\partial B_x}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{z}$. Assim, os deslocamentos Zeeman em função de cada direção ficam como na figura 5 para o eixo x .

Esses deslocamentos por sua vez, tornam as transições σ^+ e σ^- diferentemente prováveis nas regiões de x, y, z positivos ou negativos. Escolhendo, então, as polarizações

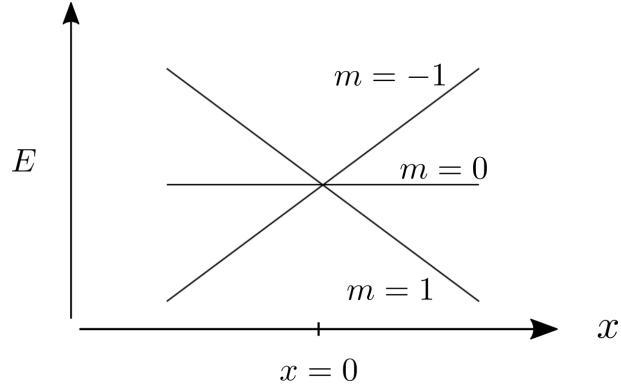


Figura 5 – Deslocamento Zeeman na vizinhança da região em que o campo magnético é nulo.

dos feixes de armadilha de acordo com a figura 6, os átomos sempre terão maior probabilidade de absorver fôtons do laser que aponta na direção da origem do que do laser que aponta para fora da origem por causa da maior proximidade da condição de ressonância. Esse desbalanço na probabilidade gerará uma força restauradora.

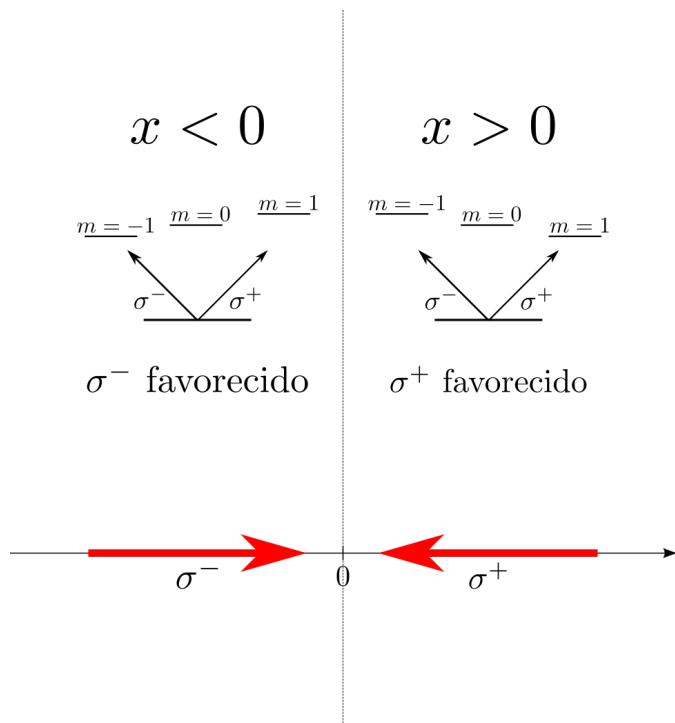


Figura 6 – Escolhendo apropriadamente a polarização dos feixes de acordo com o seu sentido de propagação, é possível favorecer sempre a força que aponta na direção da origem.

Para ver matematicamente o que acontece, consideremos duas bobinas na configuração anti-Helmholtz segundo o esquema mostrado na figura 7. Aqui, na direção z , a frequência ω_0 é alterada para $\omega_0 + g \frac{\mu_B}{\hbar} \frac{dB_z}{dz} z$. Expandindo a expressão exatamente

como fizemos para a força no melaço óptico, obtém-se que

$$F_{\text{MOT}} = \frac{\hbar k \Omega^2 \Gamma \delta}{(\Gamma^2/4 + \Omega^2/2 + \delta^2)^2} \left(k v + g \frac{\mu_B}{\hbar} \frac{\partial B_z}{\partial z} z \right). \quad (2.11)$$

Como no caso da figura de exemplo $\frac{\partial B_z}{\partial z} > 0$, essa expressão significa que há, além da força do tipo viscosa, uma força restauradora tipo $-|\beta|z$ nesse sistema. É interessante notar que dado um campo magnético nulo com gradiente constante na região de interseção dos 6 feixes de laser que formam o melaço óptico, sempre é possível escolher combinações de polarizações dos pares de laser contrapropagantes tais que a força resultante será $-|\beta|z$. Um esquema da MOT pode ser visualizado na figura 7.

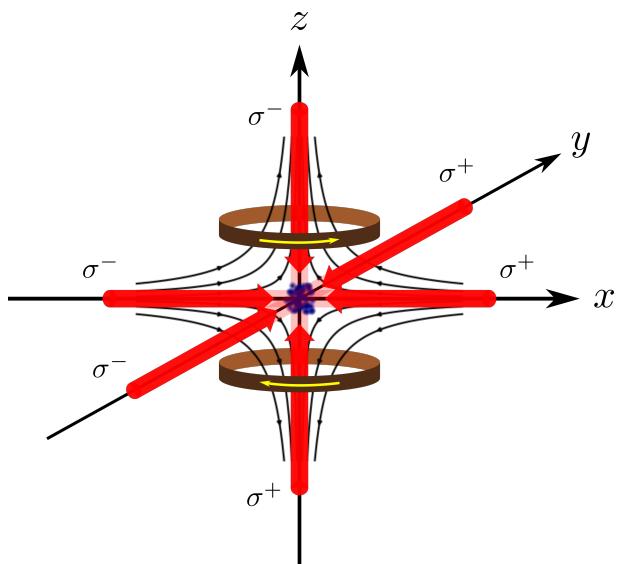


Figura 7 – Esquema de uma armadilha magneto óptica

2.5 Limitações da técnica

A abordagem simples que adotamos no presente capítulo pode passar a impressão de que átomos que entram na região da armadilha magneto-óptica, a interseção entre os 6 feixes de luz laser contrapropagantes, chegarão a velocidades cada vez mais baixas sem limitação, o que levaria a temperatura sem empecilhos até 0 K. Esse não é o caso. Por causa da natureza discreta e probabilística da interação entre os átomos e a luz, o que calculamos foi apenas um efeito médio.

Na prática, os átomos armadilhados (que foram desacelerados o suficiente pelo melaço óptico para que o desbalanço devido ao campo magnético seja capaz de prendê-los) continuam absorvendo e emitindo espontaneamente fôtons. Esse processo resulta em uma média nula, mas em uma variância diferente de zero à velocidade dos átomos.

Sucessivas absorções e emissões aleatórias criarão uma caminhada aleatória dos átomos no espaço das velocidades em torno da origem.

Esse limite inferior na média da velocidade quadrada dos átomos corresponde a uma temperatura mínima à qual o melaço óptico consegue trazer um conjunto de átomos. Esse limite é chamado de limite Doppler, e pode ser alcançado quando $\delta = -\Gamma/2$ [6]. Ele corresponde à temperatura T_D dada por

$$k_B T_D = \frac{\hbar\Gamma}{2}. \quad (2.12)$$

No entanto, em medidas experimentais da temperatura de átomos armadilhados por essa técnica, as temperaturas observadas podem facilmente ser bem menores do que a temperatura do limite Doppler [14]. A diferença entre o limite teórico que citamos e a observação experimental tem origem na nossa simplificação em utilizar átomos de 2 níveis. Átomos reais possuem níveis degenerados, que acabam contribuindo com novos mecanismos de resfriamento. Um importante mecanismo para isso é o chamado efeito Sísifo [15]. Nele, o gradiente de polarização resultante da soma dos feixes de cada par do melaço óptico faz com que sequências de absorção e emissão espontânea saindo de um nível fundamental de mais alta energia e terminando em um de mais baixa energia sejam mais prováveis que o inverso, através do deslocamento dos níveis de energia pela luz.

No nosso experimento, não alcançamos o limite de temperatura Doppler, que é para a transição que escolhemos, de $144\mu\text{K}$ [16]. Isso acontece pois nossa configuração experimental tem o objetivo de otimizar a profundidade óptica da nuvem gerada, e não a temperatura dos átomos.

3 FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO

A presente seção é dedicada a introduzir o conceito de funções de correlação. Tais funções quantificam nossa intuição de similaridade no contexto de processos aleatórios. Quando comparamos uma função consigo mesma esperamos obter o máximo de similaridade possível entre duas funções comparadas, e assim acontece com o valor da função da correlação de primeira ordem quando a aplicamos a uma função em relação a si mesma.

Para chegar às definições das funções de correlação, falaremos sobre os conceitos de variável aleatória, processo aleatório, estacionariedade e por fim sobre as referidas funções. As definições utilizadas aqui seguem a abordagem de [8], já que ela se adequa bem à interpretação do nosso procedimento experimental.

3.1 Variáveis Aleatórias

Em certos casos, em especial em sistemas quânticos, os experimentos que realizamos fornecem resultados os quais não podemos controlar. Algumas vezes essa impossibilidade tem origem no fato de que, durante a preparação do experimento, não se controla todas as variáveis relevantes para o resultado. Esse é o caso de um jogo de dados ou de um jogo de cara ou coroa. Outras vezes, no caso de sistemas quânticos, essa impossibilidade de escolha dos resultados é intrínseca à física dos processos e ocorre não importa o quanto bem nós controlemos o ambiente.

De toda forma, como é útil atribuir números aos resultados de nossos experimentos, isto é, definir variáveis que dependem dos resultados experimentais, somos levados naturalmente nesses casos à definição de variáveis aleatórias.

Variáveis aleatórias são definidas como variáveis cujos valores dependem do resultado de experimentos aleatórios e que possuem associadas a cada um de seus possíveis valores as probabilidades correspondentes aos respectivos resultados do experimento. Por exemplo, em um jogo de dados, os possíveis resultados do jogo podem ser agrupados em um conjunto como o da figura 8.

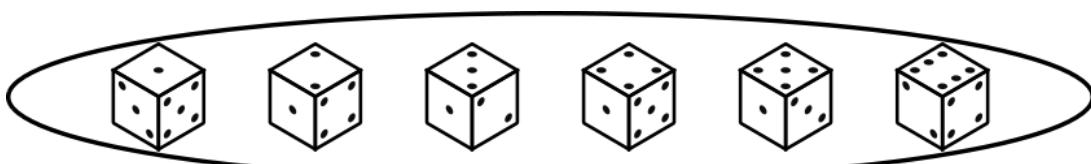


Figura 8 – Resultados possíveis do lançamento de um dado.

Se definirmos então a variável U associando a ela os resultados do experimento de acordo com a figura 9, teremos parte da nossa definição de variável aleatória satisfeita.

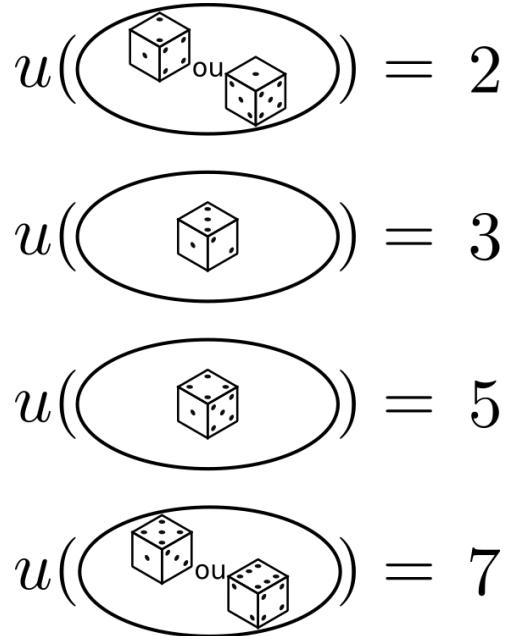


Figura 9 – Associação dos resultados de um experimento aleatório aos valores de uma variável aleatória.

Como as configurações do dado com valor 2 ou 1 voltados para cima ocorrem com probabilidade de $1/3$, o valor $u = 2$ da variável U aleatória tem associado a si a probabilidade de $1/3$. Da mesma forma, o valor de $u = 3$ tem probabilidade de $1/6$ e assim por diante. Com isso, podemos considerar a variável u como uma variável aleatória, e a ela teremos associados valores médios, variância e todas as quantidades comumente utilizadas em estatística.

3.2 Processos Aleatórios

Com o conceito de variável aleatória bem definido, é fácil entender o que é um processo aleatório. Suponhamos que ao invés de associar às configurações possíveis do dado os números 2, 3, 5 e 7 como fizemos na seção anterior, associemos 4 funções do tempo, $f_a(t)$, $f_b(t)$, $f_c(t)$ e $f_d(t)$, de acordo com a figura 10.

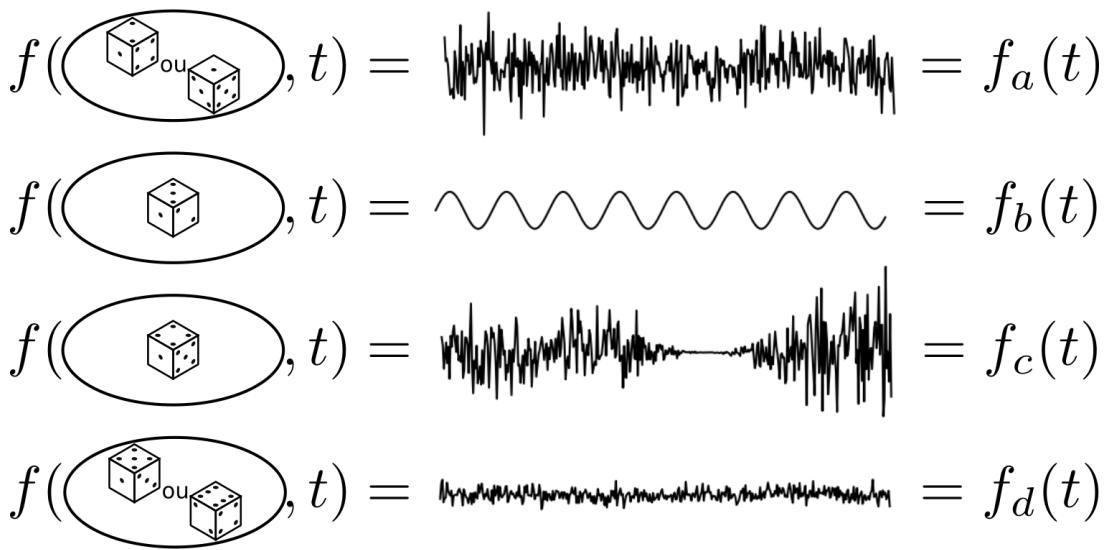


Figura 10 – Num processo aleatório, funções do tempo estão associadas aos resultados imprevisíveis do experimento aleatório.

De maneira análoga a como lidamos com as variáveis aleatórias, se há uma função $F(t)$ que, dependendo do resultado do experimento, pode assumir os valores de $f_a(t)$, $f_b(t)$, $f_c(t)$ ou $f_d(t)$ e não podemos prever qual desses casos acontecerá, dizemos que $F(t)$ é um processo aleatório.

Um ponto importante dessa descrição é notar a presença da função senóide no exemplo aqui apresentado, a função $f_b(t)$. Normalmente não consideraríamos uma função seno como sendo resultado de um processo aleatório. Aqui, no entanto, essa função faz parte de um *ensemble* de funções associado a um processo aleatório. Como não sabemos se é a função seno que será sorteada ou não, ela pode fazer parte da descrição de um processo aleatório sem que confundamos sua presença com um processo determinístico.

É importante notar ainda que esses eventos aleatórios por trás das funções que não podemos prever podem ser sequências de múltiplos eventos. Por exemplo, se utilizamos como evento aleatório duas rodadas de cara e coroa os resultados possíveis passam a ser quatro: cara cara, cara coroa, coroa cara, coroa coroa. Aos quatro eventos podem estar associadas 4 ou menos funções, e a cada uma dessas funções está associada a probabilidade de que qualquer um de seus eventos correspondentes aconteça. Uma descrição completa do processo aleatório é uma enumeração de todas as funções possíveis de serem observadas junto com suas respectivas probabilidades.

Em geral, não temos acesso à descrição completa do processo, mas é suficiente utilizar a densidade de probabilidade de primeira ou segunda ordem. Essa quantidade

pode ser entendida a partir da figura 11.

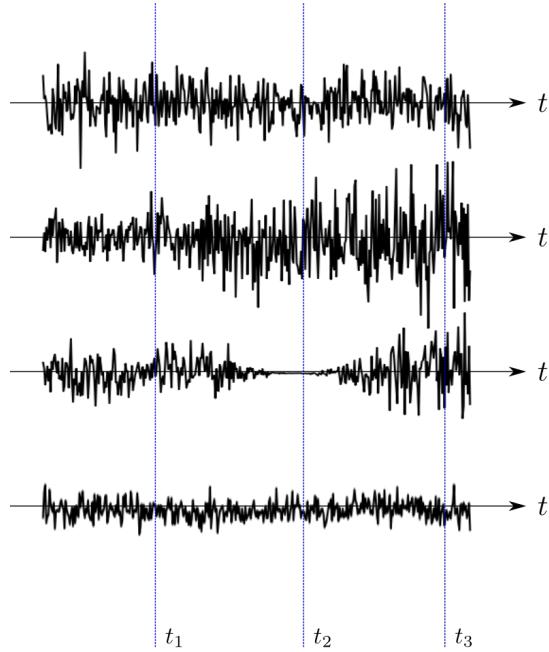


Figura 11 – Do ensemble de funções podemos visualizar o significado das distribuições de probabilidade que caracterizam o processo aleatório.

Na figura 11, podemos olhar para o ensemble de funções empilhando-as alinhadas no tempo. Olhando para a lista de todas as funções possíveis, podemos escolher um instante t_1 e perguntar-nos qual a probabilidade de uma função que tem $F(t_1) = f_1$ ser observada. A resposta para essa pergunta para qualquer instante de tempo t é a densidade de probabilidade de primeira ordem $p_F(f_1; t_1)$. A generalização dessa pergunta para mais pontos é simples. A densidade de probabilidade de segunda ordem é a probabilidade de que se observe uma função que tem $F(t_1) = f_1$ e $F(t_2) = f_2$, que escrevemos como $p_F(f_1, f_2; t_1, t_2)$. A de terceira ordem escreve-se como $p_F(f_1, f_2, f_3; t_1, t_2, t_3)$ e assim por diante.

Com essas densidades de probabilidades, podemos calcular o valor esperado da variável f no instante t_1 :

$$\langle f(t_1) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} df_1 f_1 p_F(f_1, t_1). \quad (3.1)$$

Naturalmente, se dispomos de $p_F(f_1, f_2; t_1, t_2)$, podemos calcular médias conjuntas $\overline{f(t_1)f(t_2)}$:

$$\langle f(t_1)f(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 df_2 f_1 f_2 p_F(f_1, f_2; t_1, t_2). \quad (3.2)$$

Também é possível definir médias no tempo. Estas, no entanto, correspondem a uma função de amostra em particular, e não retornam funções do tempo, mas apenas números. Escolhendo uma certa função $f_\alpha(t)$ do ensemble, temos, por exemplo:

$$\langle f_\alpha(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f_\alpha(t), \quad (3.3)$$

e

$$\langle f_\alpha(t)^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f_\alpha(t)^2. \quad (3.4)$$

É claro que é possível definir mais médias sobre esses processos. Veremos como certas definições de outras médias serão úteis mais tarde, ao discutir funções de correlação.

Médias são as quantidades com as quais geralmente lidamos. Elas são úteis porque em processos aleatórios normalmente a forma das funções do *ensemble* não pode ser descrita em forma analítica. Essa impossibilidade, por sua vez, dificulta a análise do processo. É difícil, por exemplo, comparar uma função de amostra com outra.

Como as médias no tempo são quantidades bem definidas para cada função de amostra, elas servem para caracterizar essas funções individualmente (ou o processo inteiro quando houver ergodicidade, como veremos a frente). As médias por *ensemble*, por sua vez, são bem definidas para o processo e servem para caracterizar o processo aleatório como um todo. Essa distinção entre médias temporais e médias no *ensemble* será bastante importante para o nosso trabalho de análise dos dados experimentais.

Por fim, pontuamos que normalmente, enquanto o processo de medida acontece, não temos conhecimento de qual função $f_\alpha(t)$ obteremos ao final do experimento (sabemos isso, por exemplo, no caso de encontrar o seno no primeiro exemplo aqui apresentado). Isso acontece porque geralmente não temos acesso à lista de eventos aleatórios, funções associadas a eles e suas respectivas probabilidades. Vendo desse modo, ficam claros os motivos pelos quais nunca lidamos com descrições completas dos processos aleatórios, e também a utilidade da descrição parcial em termos de densidades de probabilidade.

3.3 Estacionariedade

Para modelos físicos, certos tipos de processos aleatórios têm uma importância muito maior do que os outros. Nesta seção, descrevemos algumas classes de tais processos que são úteis à nossa análise.

3.3.1 Processos estritamente estacionários

Um processo aleatório é classificado como estritamente estacionário quando a função de densidade de probabilidade $p_F(f_1, \dots, f_n; t_1, \dots, t_n)$ não depende da origem temporal para qualquer n . Isso significa que, nesse caso:

$$p_F(f_1, \dots, f_n; t_1, \dots, t_n) = p_F(f_1, \dots, f_n; t_1 - T, \dots, t_n - T) \quad (3.5)$$

para qualquer T e qualquer n .

Uma intuição visual dessa propriedade pode ser inferida a partir da figura 12, apresentada para ilustração do que é um processo estacionário num sentido amplo, desde que tenhamos em mente que ela precisa valer para qualquer escolha de qualquer conjunto de n pontos no tempo.

A necessidade de que essa condição seja satisfeita para qualquer valor de n pode tornar essa classificação impraticável. Ainda que um processo de fato seja estritamente estacionário, como normalmente nós não dispomos da sua descrição completa e essa descrição completa equivale a conhecer $p_F(f_1, \dots, f_n; t_1, \dots, t_n)$ para todo n , é difícil ter certeza de que podemos considerar isto como sendo verdadeiro. Todavia, a hipótese de que um processo pertence a essa categoria pode simplificar a argumentação e levar a resultados compatíveis com o que é observado. Mais tarde, veremos uma classe ainda mais restritiva que a dos processos estritamente estacionários mas que é de grande utilidade.

3.3.2 Processos estacionários num sentido amplo

Quando tratamos de processos aleatórios, é comum que as quantidades mais relevantes para nossos objetivos sejam valores esperados. Isto é natural pois os valores esperados são aquelas quantidades que devem se manter iguais entre conjuntos de repetições dos experimentos. Assim, definimos um processo como estacionário num sentido amplo quando ele obedece a duas condições:

- $\langle f(t_1) \rangle$ não depende de t_1 ,
- $\langle f(t_1)f(t_2) \rangle$ depende apenas da diferença $\tau = t_2 - t_1$.

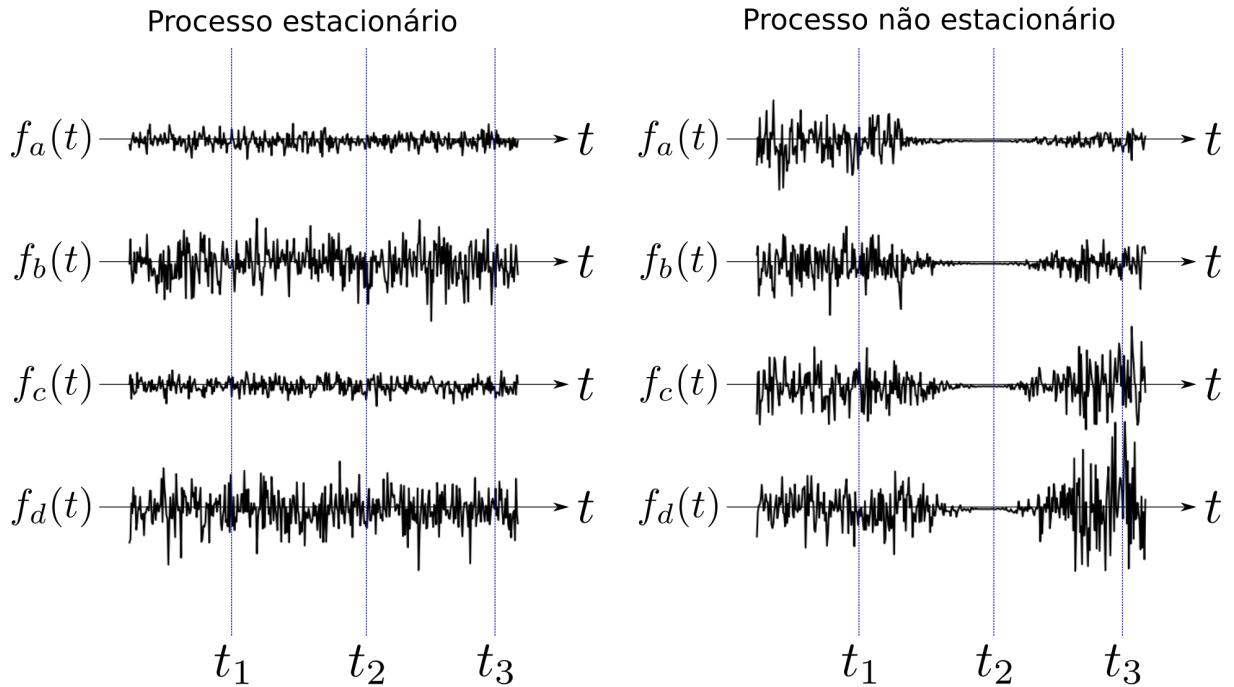


Figura 12 – Comparação entre um processo estacionário em um sentido amplo e um processo não estacionário. No processo estacionário, as distribuições de probabilidade ao longo do ensemble dado um instante t não dependem da origem temporal.

É interessante notar que essa classe é um caso particular da classe dos processos estritamente estacionários. Se relaxarmos a condição da equação 3.5 para que ela seja válida apenas para $n = 1$ e $n = 2$, então o processo obedece $p_F(f_1, t_1) = p_F(f_1 - T; t_1 - T)$ e $p_F(f_1, f_2; t_1 - T, t_2 - T)$. Com isso, escolhas apropriadas dos valores de T nas equações 3.1 e 3.2 recuperam as condições para que um processo seja estacionário num sentido amplo. Assim, vemos que os processos estritamente estacionários formam um subconjunto dos processos estacionários num sentido amplo.

3.3.3 Processos ergódicos

A última classe aqui descrita será a classe dos processos ergódicos. Esses processos são aqueles em que cada uma das funções que se pode observar numa realização dos experimentos é, em certo sentido, típica do processo. Mais especificamente, os processos ergódicos são aqueles em que a distribuição de probabilidades ao longo do tempo em qualquer função de amostra é a mesma que a distribuição em qualquer instante de tempo ao longo do *ensemble* de funções. Por isso, quando um processo é ergódico, é equivalente para a investigação se os dados são provenientes de uma longa função de amostra ou vêm de muitas funções de amostra curtas.

Para que um processo seja ergódico, é necessário que ele seja estritamente estacionário. Isso fica claro se olharmos para um processo cujas funções de amostra são todas parecidas, isto é, têm a mesma distribuição de probabilidades ao longo do tempo, mas cuja distribuição ao longo do tempo depende da origem temporal que escolhemos.

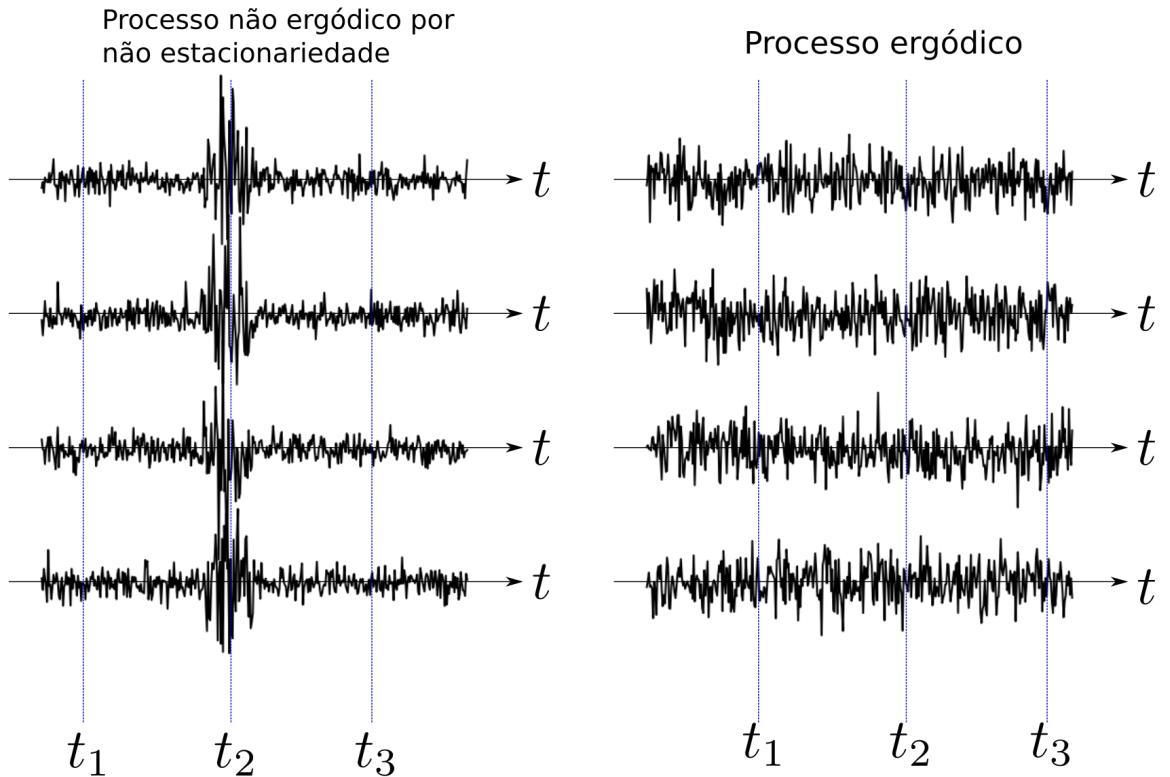


Figura 13 – Comparação entre um processo ergódico e um processo não ergódico devido a não estacionariedade. É importante ter em mente que não estacionariedade não é a única razão para não ergodicidade.

Um exemplo de um processo desse tipo é o mostrado pela figura 13. Nesse exemplo, o processo ergódico, à direita, é colocado em contraste com um processo não ergódico por não ser estacionário. A princípio se pode confundir o processo da esquerda por ergódico pois todas as funções do *ensemble* seguem a mesma distribuição no tempo, e nesse sentido elas são características do processo. No entanto, para classificarmos esse processo como ergódico, é necessário que as médias no tempo dada uma função de amostra sejam idênticas as médias por ensemble dado um tempo. Considerando isso e notando que em t_2 o processo da esquerda varia numa região de valores mais larga do que qualquer das funções de amostra ao longo do tempo, entendemos de que não se trata de um processo ergódico, e, portanto, não podemos considerar para ele que as médias no tempo caracterizam o processo como um todo.

Em física, é comum que a suposição de que se trabalha com processos ergódicos leve a conclusões consistentes com os dados observados apesar deles compreenderem

uma classe muito restrita dentro dos processos aleatórios.

Esse não é o caso do experimento analisado no presente trabalho. Neste trabalho, mostraremos que a suposição de que podemos tratar as médias temporais como médias no *ensemble* e usá-las para caracterizar o processo pode levar a artefatos nas curvas experimentais que dificultam a interpretação da física do problema.

3.4 Funções de correlação

Agora que conhecemos os tipos relevantes de processos aleatórios, resta-nos introduzir um método que nos dê informações sobre esses processos. Já mencionamos que as médias são quantidades que algo dizem sobre os processos, e não apenas sobre uma realização experimental em particular. Agora, partimos de uma percepção importante sobre as definições das médias estatísticas previamente estabelecidas.

Em álgebra linear, podemos interpretar funções como vetores e seu produto escalar pode ser definido em termos de integrais. Além disso, esses produtos escalares são abstrações da nossa intuição sobre projeções, que servem como comparações entre direções, ou vetores, diferentes. Por isso, podemos usar integrais, as médias, para definir as funções de correlação que comparam diferentes funções de amostra.

Definimos então a função de autocorrelação estatística através de uma média como as definidas acima. Primeiro, partimos de uma média temporal para comparar uma função de amostra $f_\alpha(t)$ consigo mesma em outro instante, $f_\alpha(t + \tau)$:

$$\tilde{\Gamma}_\alpha(\tau) = \langle f_\alpha(t + \tau) f_\alpha(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f_\alpha(t + \tau) f_\alpha(t). \quad (3.6)$$

De acordo com a nossa motivação, quanto maior o valor de $\tilde{\Gamma}_\alpha(\tau)$, mais o valor da função f_α em $t + \tau$ depende do valor dela mesma em t .

Essa média temporal caracteriza uma função de amostra. Apenas quando se trata de processos ergódicos, podemos usar esse tipo de média para tirar conclusões sobre o processo como um todo.

Agora podemos utilizar o outro tipo de média que definimos, a média por *ensemble*, com uma média análoga a essa média temporal, para obter informação do mesmo tipo em relação ao processo como um todo. Assim, definimos

$$\Gamma_F(t_1, t_2) = \langle f(t_1) f(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 df_2 f_1 f_2 p_F(f_1, f_2; t_1, t_2). \quad (3.7)$$

Se for o caso de f ser uma função complexa, fazemos $f_1 f_2 \rightarrow f_1^* f_2$ nas definições acima. Com isso, podemos utilizar $\Gamma_F(t_1, t_2)$ para medir o quanto o processo como um todo em t_2 depende dele mesmo em t_1 .

Pelas características dos processos estacionários, concluímos que no caso em que há estacionariedade, essa função depende apenas de $\tau = t_2 - t_1$. Já para os processos ergódicos, as duas funções de correlação acima definidas coincidem, $\tilde{\Gamma}(\tau) = \Gamma(t_1, t_2) = \Gamma(t_2 - t_1)$. Por isso, conhecer as características dos processos que estudamos pode simplificar a análise.

Pela analogia que fizemos com o produto escalar, podemos dizer que $\Gamma_F(\tau) = \langle f(t_1), f(t_2) \rangle$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$. Logo,

$$\frac{|\Gamma(t_1, t_2)|^2}{\Gamma(t_1, t_1)\Gamma(t_2, t_2)} \leq 1. \quad (3.8)$$

Como essa quantidade à esquerda na expressão 3.8 é normalizada, ela é a quantidade verdadeiramente útil que podemos utilizar para comparar sistemas diferentes entre si quanto às suas correlações. Dessa forma, definimos o que chamaremos aqui de função de correlação de primeira ordem, $g^{(1)}(t_1, t_2)$.

$$g^{(1)}(t_1, t_2) = \frac{\langle f(t_1)f(t_2) \rangle}{[\langle |f(t_1)|^2 \rangle \langle |f(t_2)|^2 \rangle]^{1/2}}, \quad (3.9)$$

onde as médias consideradas são as médias estatísticas utilizadas na equação 3.7. Caso se trate de um processo ergódico, utilizar a média temporal que aparece na equação 3.6 leva ao mesmo resultado. Essa quantidade obedece

$$|g^{(1)}(t_1, t_2)| \leq 1. \quad (3.10)$$

Além disso, se $t_1 = t_2$,

$$g^{(1)}(t, t) = \frac{\langle f(t)^2 \rangle}{\langle |f(t)|^2 \rangle} = 1, \quad (3.11)$$

de forma que ao comparar uma função consigo mesma, obtemos o valor máximo possível.

É possível que queiramos comparar as correlações entre mais de 2 funções simultaneamente. Para isso, podemos simplesmente adicionar as funções que desejamos dentro de valores esperados como os de $g^{(1)}(t_1, t_2)$. Ao proceder por este caminho, deixamos de falar de produtos escalares, mas podemos carregar a intuição prévia para as novas definições. Tendo isso em mente, definimos o grau de correlação de ordem r , que relaciona funções medidas em $2r$ pontos do tempo:

$$g^{(r)}(t_1, \dots, t_{2r}) = \frac{\langle f(t_1) \dots f(t_{2r}) \rangle}{[\langle |f(t_1)|^2 \rangle \dots \langle |f(t_{2r})|^2 \rangle]^{1/2}}. \quad (3.12)$$

Neste trabalho, aplicaremos casos particulares dessa expressão à óptica.

3.5 Funções de correlação em óptica

Sabemos que, quando tratamos de luz, estamos lidando com campos eletromagnéticos que variam ao longo do tempo. Se o sistema de interesse for, por exemplo, um conjunto de muitos átomos cujas posições e velocidades não conhecemos, como é o caso de um gás, haverá incertezas nos detalhes do processo de emissão da luz que exigirão um tratamento estatístico. Além disso, sistemas quânticos mostrarão variações imprevisíveis que são características desse tipo de sistema.

Assim, se nos interessa caracterizar as correlações presentes nesse tipo de processo, podemos definir algumas quantidades em termos dos campos eletromagnéticos. Dessa forma, em termos do campo elétrico complexo, definimos as seguintes:

Grau de coerência temporal de primeira ordem: é a simples função de correlação de primeira ordem comparando o campo elétrico em instantes diferentes:

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle}{\sqrt{\langle |E(t)|^2 \rangle \langle |E(t + \tau)|^2 \rangle}}, \quad (3.13)$$

onde as médias são temporais, sobre t .

Grau de coerência de segunda ordem: é a generalização da função de primeira ordem para as intensidades:

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\tau) &= \frac{\langle E^*(t)E(t)E(t + \tau)E^*(t + \tau) \rangle}{\sqrt{\langle |E(t)|^2 \rangle \langle |E(t)|^2 \rangle \langle |E(t + \tau)|^2 \rangle \langle |E(t + \tau)|^2 \rangle}} \\ &= \frac{\langle I(t)I(t + \tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle \langle I(t + \tau) \rangle}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde as médias são temporais, sobre t .

3.5.1 Algumas propriedades gerais em processos clássicos

Já sabemos que a função de correlação de primeira ordem obedece em qualquer processo

$$|g^{(1)}(t_1, t_2)| \leq 1, \quad (3.15)$$

e

$$g^{(1)}(t_1, t_1) = 1. \quad (3.16)$$

Agora listamos duas propriedades gerais da função de correlação de segunda ordem quando calculadas sobre processos clássicos.

Como $(I(t_1) - I(t_2))^2 \geq 0$, então

$$2I(t_1)I(t_2) \leq I(t_1)^2 + I(t_2)^2. \quad (3.17)$$

Disso segue uma desigualdade relacionada a $g^{(2)}$:

$$\begin{aligned} [I(t_1) + \dots + I(t_N)]^2 &= \sum_{i,j} I(t_i)I(t_j) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i,j} I(t_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} I(t_j)^2 = \sum_{i,j} I(t_j)^2. \end{aligned}$$

Segue que

$$[I(t_1) + \dots + I(t_N)]^2 \leq N[I(t_1)^2 + \dots + I(t_N)^2]. \quad (3.18)$$

Dividindo ambos os lados da última desigualdade por N^2 :

$$\frac{[I(t_1) + \dots + I(t_N)]^2}{N^2} \leq \frac{I(t_1)^2 + \dots + I(t_N)^2}{N}. \quad (3.19)$$

Como não definimos quem são os t_i , o lado esquerdo dessa expressão pode ser entendido como $\langle I(t)^2 \rangle$ e o direito como $\langle I(t)^2 \rangle$, tanto para médias temporais quanto médias estatísticas. Logo,

$$\frac{\langle I(t)^2 \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} = g^{(2)}(0) \geq 1. \quad (3.20)$$

A expressão 3.17 implica em mais uma propriedade:

$$\begin{aligned} [I(t_1)I(t_1 + \tau) + \dots + I(t_N)I(t_N + \tau)]^2 &= \sum_{i,j} I(t_i)I(t_j + \tau)I(t_j)I(t_i + \tau) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i,j} I(t_i)^2 I(t_j + \tau)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} I(t_j)^2 I(t_i + \tau)^2 \\ &= \sum_{i,j} I(t_i)^2 I(t_j + \tau)^2. \end{aligned}$$

Segue que

$$[I(t_1)I(t_1 + \tau) + \dots + I(t_N)I(t_N + \tau)]^2 \leq (I(t_1)^2 + \dots + I(t_N)^2)(I(t_1 + \tau)^2 + \dots + I(t_N + \tau)^2). \quad (3.21)$$

Dividindo essa expressão por N^2 , o lado esquerdo pode ser entendido como a média $(\langle I(t)I(t + \tau) \rangle)^2$ e o direito como $\langle I(t)^2 \rangle \langle I(t + \tau)^2 \rangle$. Então, se o processo em questão for estacionário, ao dividir a inequação resultante por $\langle I(t) \rangle^2 \langle I(t + \tau) \rangle^2$, obtemos mais uma propriedade de $g^{(2)}(\tau)$:

$$\underbrace{\frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle^2}{\langle I(t) \rangle^2 \langle I(t+\tau) \rangle^2}}_{=[g^{(2)}(\tau)]^2} \leq \underbrace{\frac{\langle I(t)^2 \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}}_{=[g^{(2)}(0)]} \underbrace{\frac{\langle I(t+\tau)^2 \rangle}{\langle I(t+\tau) \rangle^2}}_{=[g^{(2)}(0)]},$$

ou

$$g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0). \quad (3.22)$$

Essas duas propriedades podem ser colocadas dentro de uma mesma expressão. Para processos estacionários e clássicos, concluímos que

$$1 \leq g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0). \quad (3.23)$$

3.5.2 Algumas propriedades em processos caóticos clássicos

Em vários casos de interesse, por exemplo gases como o que estudamos experimentalmente, o campo elétrico sobre o qual calculamos a intensidade pode ser visto como a soma de vários campos elétricos independentes mas equivalentes (com mesma amplitude). A esse tipo de processo chamaremos de processos caóticos, tendo em mente que não devemos confundir essa denominação de caótico, própria da óptica, com a utilizada em teoria do caos. Veremos nesta seção algumas propriedades das correlações na luz emitida por esse tipo de sistema, válidas para processos estacionários em sistemas desse tipo. Consideremos o campo total

$$E(t) = \sum_{i=1}^N E_i(t) \quad (3.24)$$

emitido pelos átomos. Então,

$$\begin{aligned} \langle I(t)I(t+\tau) \rangle &= \langle E^*(t)E(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau) \rangle \\ &= \langle \sum_{i,j,k,l} E_i^*(t)E_j(t)E_k^*(t+\tau)E_l(t+\tau) \rangle. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Se cada átomo emite independentemente dos outros, cada termo E_i é proporcional a uma fase aleatória $e^{i\varphi_i}$. Por isso, todos os termos em que sobre algum E_i ou E_i^* não multiplicado por seu conjugado acabarão por se cancelar pelo somatório. Isso significa que podemos considerar apenas os termos com $i = j, k = l, i \neq k$ ou $i = l, j = k, i \neq k$ ou $i = j = k = l$:

$$\begin{aligned} \langle I(t)I(t+\tau) \rangle &= \sum_i \langle E_i^*(t)E_i(t)E_i^*(t+\tau)E_i(t+\tau) \rangle + \sum_{i \neq j} \langle E_i^*(t)E_i(t)E_j^*(t+\tau)E_j(t+\tau) \rangle \\ &\quad + \sum_{i \neq j} \langle E_i^*(t)E_j(t)E_j^*(t+\tau)E_i(t+\tau) \rangle. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Como consideramos que as emissões de cada átomo são independentes e sabemos que o valor esperado do produto de duas variáveis independentes é o produto de seus valores esperados, podemos escrever

$$\langle E_i^*(t)E_i(t)E_j^*(t+\tau)E_j(t+\tau) \rangle = \langle E_i^*(t)E_i(t) \rangle \langle E_j^*(t+\tau)E_j(t+\tau) \rangle, \quad (3.27)$$

e

$$\langle E_i^*(t)E_j(t)E_j^*(t+\tau)E_i(t+\tau) \rangle = \langle E_i^*(t)E_i(t+\tau) \rangle \langle E_j(t)E_j^*(t+\tau) \rangle. \quad (3.28)$$

Pela equivalência entre as emissões dos átomos, esses valores esperados não dependem dos índices i . Escolhendo um certo i , então, temos

$$\begin{aligned} \langle I(t)I(t+\tau) \rangle &= N \langle E_i^*(t)E_i(t)E_i^*(t+\tau)E_i(t+\tau) \rangle + \\ &+ N(N-1) [\langle E_i(t)E_i^*(t) \rangle^2 + \langle E_i(t)E_i^*(t+\tau) \rangle \langle E_i^*(t)E_i(t+\tau) \rangle] \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde utilizamos o fato de que o processo é estacionário para escrever $\langle E_i(t+\tau)E_i^*(t+\tau) \rangle = \langle E_i(t)E_i^*(t) \rangle$.

Quando N é grande, $N^2 \gg N$. Como esse é o caso comum em um gás, utilizamos essa aproximação para escrever

$$\langle I(t)I(t+\tau) \rangle = N^2 [\langle E_i(t)E_i^*(t) \rangle^2 + |\langle E_i(t)E_i^*(t+\tau) \rangle|^2]. \quad (3.30)$$

Dividindo esse resultado por $N^2 \langle E_i(t)E_i^*(t) \rangle^2 = \langle I(t) \rangle^2$, obtemos o seguinte:

$$\frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} = 1 + \frac{\langle E_i(t)E_i^*(t+\tau) \rangle \langle E_i^*(t)E_i(t+\tau) \rangle}{\langle E_i(t)E_i^*(t) \rangle \langle E_i(t)E_i^*(t) \rangle},$$

ou ainda

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + |g^{(1)}(\tau)|^2. \quad (3.31)$$

Vemos que a função $g^{(2)}(\tau)$ para os casos de processos estacionários caóticos, onde o sinal é resultado da soma dos sinais de várias fontes independentes, fornece informação sobre a função $g^{(1)}(\tau)$.

Como já sabemos que $g^{(1)}(0) = 1$, também concluímos que, para esse tipo de processo,

$$g^{(2)}(0) = 2. \quad (3.32)$$

Esse segundo resultado pode ser estendido para uma função de grau de correlação de ordem r análoga a $g^{(2)}$. Quando consideramos na equação 3.12 que $f(t_{r'})$ é $E^*(t)$ quando $r' \leq r$ e $E(t)$ quando $r' > r$, temos

$$g^{(r)}(0) = \frac{\langle I(t)^r \rangle}{\langle I(t) \rangle^r}. \quad (3.33)$$

Se $E(t) = \sum_{i=1}^N E_i(t)$, então

$$\begin{aligned}
 \langle I(t)^r \rangle &= \langle \left(\sum_i E_i(t) \sum_j E_j^*(t) \right)^r \rangle \\
 &= \langle \left(\sum_{i,j} E_i(t) E_j^*(t) \right)^r \rangle \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_r} \sum_{j_1, \dots, j_r} \langle E_{i_1}(t) \dots E_{i_r}(t) E_{j_1}^*(t) \dots E_{j_r}^*(t) \rangle \\
 &\approx \sum_{i_1, \dots, i_r} \left(\underbrace{\langle E_{i_1}(t) \dots E_{i_r}(t) E_{j_1}^*(t) \dots E_{j_r}^*(t) \rangle}_{j_1=i_1, \dots, j_r=i_r} + \right. \\
 &\quad \left. \underbrace{\langle E_{i_1}(t) \dots E_{i_r}(t) E_{j_1}^*(t) \dots E_{j_r}^*(t) \rangle + \dots}_{j_1=i_2, \dots, j_r=i_r} \right) \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

onde a soma nos índices j é considerada apenas para os arranjos de j tais que para todo i_α existe algum $j_\beta = i_\alpha$, i.e., para os arranjos de j que são permutações do arranjo de i . Fazemos esta aproximação pois, pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, os termos em que sobrem fases aleatórias tenderão a se cancelar pelo somatório para N grande. Com isso, continuamos

$$\begin{aligned}
 \langle I(t)^r \rangle &= \sum_{i_1, \dots, i_r} r! \langle I_{i_1}(t) \dots I_{i_r}(t) \rangle \\
 &= r! \sum_{i_1, \dots, i_r} \langle I_{i_1}(t) \rangle \dots \langle I_{i_r}(t) \rangle \\
 &= r! \sum_{i_1, \dots, i_r} \langle I_{i_1}(t) \rangle^r \\
 &= r! N^r \langle I_{i_1}(t) \rangle^r. \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

Sabemos também que, pela independência dos campos elétricos, que $\langle I(t) \rangle^r = N^r \langle I_{i_1}(t) \rangle^r$. Portanto, disto resulta mais uma propriedade dos processos caóticos estacionários:

$$g^{(r)}(0) = r!. \tag{3.36}$$

3.5.3 Grau de correlação num processo com alargamento por colisão

Pelo que vimos na seção anterior, no contexto dos processos do nosso interesse, podemos utilizar uma teoria de primeiros princípios para $g^{(1)}(\tau)$ para que obtenhamos uma expressão para $g^{(2)}(\tau)$, a quantidade que de fato medimos experimentalmente. Assim o faremos na presente seção para o caso de um sistema onde as fases em cada campo elétrico E_i variam com o tempo por causa de colisões entre os átomos. Como as

colisões que um determinado átomo sofre ao longo do tempo são típicas para todos os outros, esse é um processo de descoerência chamado homogêneo.

Primeiro, investigamos o efeito das colisões sobre $g^{(1)}(\tau)$. Supondo que as colisões que acontecem entre os átomos são elásticas, o efeito que elas causam deve ser apenas o de adicionar ao campo elétrico emitido por cada átomo fases que dão saltos aleatórios ao longo do tempo. Essas fases podem ser funções como a mostrada na figura 14.

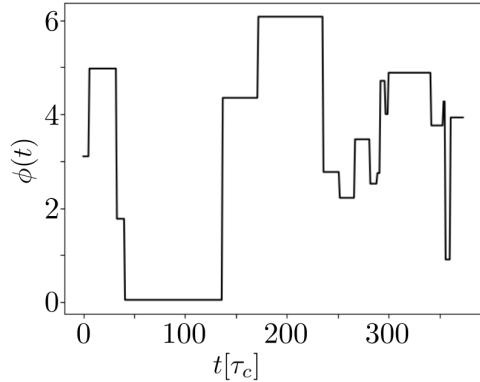


Figura 14 – A fase de cada átomo dá saltos aleatórios com o passar do tempo devido às colisões entre átomos. A distribuição de probabilidade de tempo sem dar saltos de fase é dada por $\frac{1}{\tau_c} e^{-t/\tau_c}$ com τ_c o tempo médio entre colisões.

Assim, nas nossas considerações, fazer $E_i(t) \rightarrow E_i(t)e^{i\varphi_i(t)}$, onde as fases adicionadas são descorrelacionadas com os campos E_i nos dará o efeito das colisões. Com isso, calculamos $|g^{(1)}(t)|^2$:

$$\begin{aligned}
 \langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle &= \left\langle \sum_{i,j} E_i^*(t)E_j(t+\tau) e^{i(\varphi_i(t)-\varphi_j(t+\tau))} \right\rangle \\
 &= \sum_{i,j} \langle E_i^*(t)E_j(t+\tau) \rangle \langle e^{i(\varphi_i(t)-\varphi_j(t+\tau))} \rangle \\
 &= \sum_i \langle E_i^*(t)E_i(t+\tau) \rangle \langle e^{i(\varphi_i(t)-\varphi_i(t+\tau))} \rangle + \underbrace{\sum_{i \neq j} \langle E_i^*(t)E_j(t+\tau) \rangle \langle e^{i(\varphi_i(t)-\varphi_j(t+\tau))} \rangle}_{=0 \text{ por causa da independência das fases}} \\
 &= \langle E_i^*(t)E_i(t+\tau) \rangle \sum_i \langle e^{i(\varphi_i(t)-\varphi_i(t+\tau))} \rangle. \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

Quando todos os átomos já colidiram, isto é, com $\tau \rightarrow \infty$, $\sum_i \langle e^{i(\varphi_i(t)-\varphi_i(t+\tau))} \rangle = 0$ pois trata-se de uma soma de fases aleatórias. Quando nenhum átomo colidiu, essa soma resulta em N . Daí vemos que a soma é proporcional ao número de átomos que ainda não colidiram, que decai exponencialmente segundo a mecânica estatística. Logo,

$$\langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle = \langle E_i^*(t)E_i(t+\tau) \rangle e^{-\tau/\tau_c} N, \tag{3.38}$$

onde τ_c é o tempo médio entre colisões. Sendo o processo estacionário, $\langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle$ resulta dessa expressão ao tormamos $\tau = 0$. Dessa forma, concluímos que

$$g_{\text{com colisão}}^{(1)}(\tau) = g_{\text{sem colisão}}^{(1)}(\tau)e^{-\tau/\tau_c}. \quad (3.39)$$

Este resultado mostra que o processo de colisão adiciona um decaimento exponencial à função $g^{(1)}(\tau)$. Quando τ_c é muito maior do que a escala de tempo em que o sistema perde a coerência através de outros processos, então podemos aproximar $\tau_c \rightarrow \infty$, o que recupera o processo sem colisão de acordo com a expressão calculada. No caso em que τ_c é o processo mais rápido relevante para a descoerência, obtemos

$$g_{\text{colisão}}^{(1)}(\tau) \approx g^{(1)}(0)e^{-\tau/\tau_c} = e^{-\tau/\tau_c}. \quad (3.40)$$

Se supomos uma emissão monocromática com a mesma frequência para todos os átomos, $E_i(t) = E_0 e^{-i\omega t}$. Logo, $\langle E_i^*(t)E_i(t + \tau) \rangle = \langle e^{-i\omega\tau} \rangle = e^{-i\omega\tau}$. Chegamos então ao importante resultado de que a luz clássica emitida por gases em que a principal fonte de alargamento espectral é o alargamento por colisões tem o grau de correlação de segunda ordem dado por

$$g_{\text{colisão}}^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-2\tau/\tau_c}. \quad (3.41)$$

de acordo com as expressões 3.31 e 3.39. A aparência dessa função pode ser vista na figura 15. Em particular, apontamos que esse decaimento é abrupto a partir de $\tau = 0$.

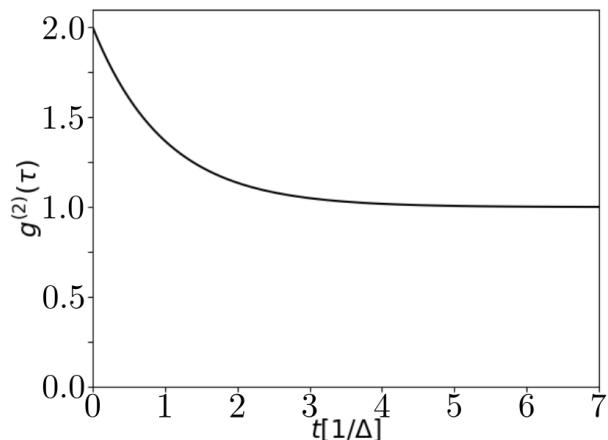


Figura 15 – Decaimento da função $g^{(2)}(\tau)$ num processo dominado por alargamento por colisão.

3.5.4 Grau de correlação num processo com alargamento Doppler

Interessados em conhecer o efeito do alargamento Doppler sobre o grau de coerência de segunda ordem, prosseguimos por um caminho análogo ao que percorremos

na seção sobre o efeito do alargamento por colisão.

Como o efeito Doppler altera as frequências emitidas por cada átomo diferentemente, seu efeito não é tão simples quanto a multiplicação de cada E_i por um fator de fase, como fizemos na seção anterior, o que caracteriza agora um processo inomogêneo. Por esse motivo, partimos já de um sistema em que cada átomo emite luz em apenas uma frequência que será deslocada de acordo com o efeito Doppler, tal que

$$E_i(t) = E_0 e^{-i\omega_i t} e^{i\varphi_i}, \quad (3.42)$$

onde ω_i varia de átomo para átomo. Com isso,

$$\begin{aligned} \langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle &= E_0^2 \sum_{i,j} \langle e^{-i[\omega_i t - \omega_j(t + \tau)]} e^{-i(\varphi_i - \varphi_j)} \rangle \\ &= E_0^2 \sum_i \langle e^{i\omega_i \tau} \rangle + \underbrace{E_0^2 \sum_{i \neq j} \langle e^{-i[\omega_i t - \omega_j(t + \tau)]} \rangle e^{i(\varphi_j - \varphi_i)}}_{=0 \text{ pelas fases independentes}} \\ &= E_0^2 \sum_i e^{i\omega_i \tau}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Precisamos calcular $\sum_i e^{i\omega_i \tau}$. Para tanto, notamos que os ω_i são frequências deslocadas de um certo ω_0 natural dos átomos de acordo com a componente da velocidade de cada um ao longo da direção de propagação do campo. Como essas velocidades são distribuídas de acordo com a distribuição de Maxwell-Boltzmann, que é uma distribuição gaussiana nas suas componentes, então ω_i também deve seguir uma distribuição gaussiana que deve ter ω_0 como média e uma largura que chamaremos de Δ , a largura Doppler.

Por isso, podemos calcular $\sum_i e^{i\omega_i \tau}$ pelo seu valor médio entre os átomos:

$$\begin{aligned} \sum_i e^{i\omega_i \tau} &= N \overline{e^{i\omega_i \tau}} \\ &= N \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega \tau} \frac{dP(\omega)}{d\omega} \\ &= N \frac{1}{(2\pi\Delta^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega \tau} e^{-(\omega_0 - \omega)^2/2\Delta^2} \\ &= N e^{-i\omega_0 \tau} e^{-\Delta^2 \tau^2/2}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Logo, $\langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle = N E_0^2 e^{-i\omega_0 \tau} e^{-\Delta^2 \tau^2/2}$. Como trata-se de um processo estacionário, também concluímos que $\langle E^*(t)E(t) \rangle = \langle E^*(t + \tau)E(t + \tau) \rangle = N E_0^2$. Portanto,

$$g^{(1)}(\tau) = e^{-i\omega_0 \tau} e^{-\Delta^2 \tau^2/2}, \quad (3.45)$$

e o grau de correlação de segunda ordem, por sua vez, fica dado por

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-\Delta^2 \tau^2}. \quad (3.46)$$

Essa função tem uma aparência como a da figura 16. Podemos diferenciar-la do que obtém-se quando o alargamento por colisão domina por duas características: quando domina o alargamento Doppler, a função cai mais rapidamente para τ mais longo, mas tem um cimento menos abrupto quanto $\tau \rightarrow 0$.

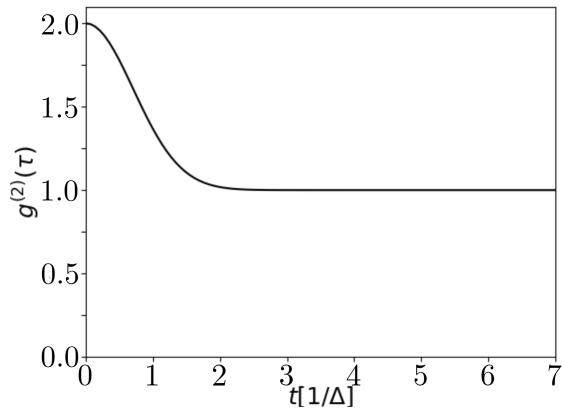


Figura 16 – Decaimento da função $g^{(2)}(\tau)$ num processo dominado por alargamento Doppler

3.6 Funções de correlação em mecânica quântica

Desenvolvida uma intuição clássica sobre o significado das funções de correlação, resta-nos estender matematicamente as expressões para o caso quântico para que apliquemos essa teoria ao nosso experimento.

Quando fazemos a quantização do campo elétrico [7][9], passamos de lidar com funções $E_k(z, t)$ para lidar com operadores $\hat{E}_k(z, t)$ escritos na forma

$$\hat{E}(z, t) = \underbrace{\left(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2} a_k e^{-i(\omega_k t - kz)}}_{=E_k^+(z, t)} + \underbrace{\left(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2} a_k^\dagger e^{i(\omega_k t - kz)}}_{=E_k^-(z, t)}, \quad (3.47)$$

e o operador de intensidade, por sua vez, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \hat{I}(z, t) &= 2\epsilon_0 c^2 \hat{E}^-(z, t) \hat{E}^+(z, t) \\ &= \eta a_k^\dagger a_k. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Assim, a intensidade no modo k é proporcional ao número esperado de fôtons nesse modo, como poderia-se suspeitar.

Com isso, é possível definir o grau de correlação de primeira ordem nos campos elétricos:

$$g^{(1)}(z_1, t_1; z_2, t_2) = \frac{\langle E^-(z_1, t_1)E^+(z_2, t_2) \rangle}{\left[\langle E^-(z_1, t_1)E^+(z_1, t_1) \rangle \langle E^-(z_2, t_2)E^+(z_2, t_2) \rangle \right]^{1/2}}. \quad (3.49)$$

Para o grau de correlação de segunda ordem, temos várias opções de escolha de ordenamento dos operadores $\hat{E}^{+/-}(z, t)$. Definimos a função $g^{(2)}$ da seguinte forma:

$$g^{(2)}(z_1, t_1; z_2, t_2) = \frac{\langle E^-(z_1, t_1)E^-(z_2, t_2)E^+(z_2, t_2)E^+(z_1, t_1) \rangle}{\langle E^-(z_1, t_1)E^+(z_1, t_1) \rangle \langle E^-(z_2, t_2)E^+(z_2, t_2) \rangle}. \quad (3.50)$$

Para nossos propósitos, interessa apenas o caso $z_1 = z_2$, de forma que podemos omitir a escrita de z . Além disso, notando que os operadores em um tempo mais tardio $t_2 > t_1$ estão no centro, e os operadores de destruição atuam nos estados antes dos operadores de criação, podemos escrever $g^{(2)}$ em termos do operador intensidade:

$$g^{(2)}(t_1, t_2) = \frac{\langle : \hat{I}(t_1)\hat{I}(t_2) : \rangle}{\langle I(t_1) \rangle \langle I(t_2) \rangle}, \quad (3.51)$$

onde $::$ indica o ordenamento normal dos operadores de criação e destruição, com tempos mais tardios ao centro e operadores de destruição à direita dos de criação.

Essa expressão, além de ter a forma intuitivamente conectada com o caso clássico, por poder ser escrita em termos do operador número $\hat{n} = a^\dagger a$ está diretamente conectada com as medidas de fótons individuais, que resultam em certo número de *clicks*. Com ela, podemos calcular os valores de $g^{(2)}(0)$ para diferentes estados quânticos importantes.

A seguir, nosso objetivo é exemplificar $g^{(2)}(0)$ para estados quânticos comuns na óptica, sendo aquele dado por

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle : I^2 : \rangle}{\langle I \rangle^2} = \frac{\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2}. \quad (3.52)$$

A razão pela qual escolhemos $g^{(2)}(\tau)$ como a quantidade observada no nosso experimento, em que investigamos uma memória no sistema, ficará mais clara no capítulo dedicado a ele.

3.6.1 Estado térmico

O estado térmico é definido como uma soma estatística de estados de número tal que a probabilidade de um certo número de fótons ser detectado segue uma distribuição

de Boltzmann. Utilizando a matriz densidade, ele é definido por:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{\sum e^{-n\hbar\omega/k_B T}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/k_B T} |n\rangle\langle n| \\ &= (1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/k_B T} |n\rangle\langle n|\end{aligned}\quad (3.53)$$

Com isso, o numerador e denominador de $g^{(2)}(0)$ ficam

$$\langle :I^2:\rangle = \text{Tr}(a^\dagger a^\dagger a a \rho) = (1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) e^{-n\hbar\omega/k_B T}, \quad (3.54)$$

e

$$\langle I \rangle^2 = \text{Tr}(a^\dagger a \rho)^2 = \left((1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\hbar\omega/k_B T} \right)^2. \quad (3.55)$$

As somas podem ser calculadas notando que elas representam derivadas de séries geométricas, levando-nos ao seguinte resultando:

$$g^{(2)}(0) = \frac{2(1 - e^{-\hbar\omega/k_B T})^{-2} e^{-2\hbar\omega/k_B T}}{\left((1 - e^{-\hbar\omega/k_B T})^{-1} e^{-\hbar\omega/k_B T} \right)^2} = 2. \quad (3.56)$$

Esse valor corresponde com os resultados clássicos que obtivemos sob a suposição de tratarmos de processos caóticos.

3.6.2 Estado coerente

O estado coerente é definido como autoestado do operador de destruição a . Como processos de detecção estão geralmente associados a absorção de fótons, essa definição os conecta a estados para os quais podemos associar algum valor observado, e é o estado que melhor modela lasers funcionando bem acima do limiar de amplificação. Por essa definição, o estado coerente $|v\rangle = \sum c_n |n\rangle$ obedece a $a|v\rangle = v|v\rangle$ e é dado por

$$|v\rangle = e^{-|v|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{\sqrt{n}} |n\rangle, \quad (3.57)$$

onde v pode ser qualquer número complexo, pois a não é um operador hermitiano.

Prosseguindo como fizemos com o estado térmico:

$$\langle :I^2:\rangle = \langle v | a^\dagger a^\dagger a a | v \rangle = v^4, \quad (3.58)$$

$$\langle I \rangle^2 = (\langle v | a^\dagger a | v \rangle)^2 = (v^2)^2, \quad (3.59)$$

e, portanto,

$$g^{(2)}(0) = 1. \quad (3.60)$$

Esse número difere dos exemplos clássicos exibidos aqui, mas podemos ter uma intuição clássica sobre ele notando que a probabilidade de detectar n fótons em um estado coerente é dada por

$$P(n) = |\langle n|v\rangle|^2 = e^{-|v|^2} \frac{|v|^n}{n!}, \quad (3.61)$$

e portanto corresponde a uma distribuição de Poisson.

Sabendo que a distribuição de Poisson pode ser definida como uma distribuição em que a probabilidade de um evento ocorrer num certo intervalo de tempo é independente da probabilidade de um evento ocorrer em qualquer outro intervalo, podemos interpretar esse estado como aquele em que não há correlação alguma entre a detecção de diferentes fótons. Assim, a nossa intuição clássica de que $g^{(2)}(0) = 1$ indica processos sem correlação é válida.

3.6.3 Estado de Fock

Por fim, calculamos $g^{(2)}(0)$ para um estado de Fock $|n\rangle$:

$$\langle :I^2:\rangle = \langle n|a^\dagger a^\dagger a a|n\rangle = n(n-1), \quad (3.62)$$

$$\langle I\rangle^2 = \langle n|a^\dagger a|n\rangle^2 = n, \quad (3.63)$$

e

$$g^{(2)}(0) = 1 - \frac{1}{n}, \quad (3.64)$$

onde é natural supor $n \neq 0$, já que o contrário significa que nenhum fóton foi preparado.

Aqui, vemos uma grande diferença entre sistemas quânticos e qualquer sistema clássico. Para um estado de Fock, a condição de que $g^{(2)}(\tau) \geq 1$ é violada, em particular para $n = 1$, onde $g^{(2)}(0) = 0$. Isso demonstra que existe uma diferença fundamental entre as correlações possíveis em sistemas quânticos e clássicos.

Por essa possibilidade, podemos utilizar $g^{(2)}(0)$ como um teste da natureza quântica do sistema que estudamos: quando $g^{(2)}(0) < 1$, o sistema não tem análogo clássico. É preciso ter cuidado, no entanto, com a afirmação contrária. $g^{(2)}(0) > 1$ não implica que o sistema em questão não é quântico.

4 MEDIDAS EXPERIMENTAIS DE CORRELAÇÃO EM ÓPTICA

Agora que desenvolvemos uma intuição matemática por trás das funções de correlação e conhecemos várias de suas propriedades mais gerais, passaremos a uma discussão de medidas experimentais que estão relacionadas diretamente com tais funções. O experimento que realizamos para investigar a memória no espalhamento da luz é precisamente um dos dois aparelhos experimentais discutidos nesta seção, o interferômetro de Hanbury Brown-Twiss [17].

4.1 Intensidade da luz caótica em medidas

Quando uma fonte de luz é caótica, no sentido discutido na seção 3.5.1, podemos supor duas formas principais de perda da fase entre os emissores [7].

A primeira forma de perda de fase é a em que cada emissor é uma fonte monocromática com frequência ω_0 mas com uma fase própria que varia no tempo, de forma que, na notação complexa dos campos,

$$\begin{aligned}
 E(t) &= E_1(t) + \dots + E_N(t) \\
 &= E_0 e^{-i\omega_0 t + i\varphi_1(t)} + \dots + E_0 e^{-i\omega_0 t + i\varphi_N(t)} \\
 &= E_0 e^{-i\omega_0 t} \{e^{i\varphi_1(t)} + \dots + e^{i\varphi_N(t)}\} \\
 &= E_0 e^{-i\omega_0 t} a(t) e^{i\varphi(t)},
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde escrevemos a soma de exponenciais complexas contendo as fases como um número complexo de amplitude $a(t)$ e fase global $\varphi(t)$. O campo elétrico físico é a parte real da expressão que escrevemos. Essa forma de perda de fase corresponde à dos processos com alargamento por colisão.

A segunda forma de perda de fase é a em que cada emissor é uma fonte com uma fase aleatória fixa φ_i mas com frequências ω que variam em torno de uma frequência central ω_0 , de forma que $\omega_i = \omega_0 + \delta\omega_i$. Nesse caso,

$$\begin{aligned}
 E(t) &= E_0 e^{-i\omega_1 t + i\varphi_1} + \dots + E_0 e^{-i\omega_N t + \varphi_N} \\
 &= E_0 e^{-i\omega_0 t} \{e^{-i\delta\omega_1 t + \varphi_1} + \dots + e^{-i\delta\omega_N t + \varphi_N}\} \\
 &= E_0 e^{-i\omega_0 t} a'(t) e^{\varphi'(t)},
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

de forma análoga ao primeiro caso, porém com uma soma de números complexos diferente.

A intensidade do campo, por sua vez, é dada pelo módulo do vetor de Poynting,

$$I(t) = \epsilon_0 c |\Re\{E(t)\}|^2. \quad (4.3)$$

Note que em ambos os casos descritos acima, temos

$$|\Re\{E(t)\}| \propto \cos(\omega_0 t + \varphi(t)). \quad (4.4)$$

Como os detectores normalmente não têm resolução temporal para detectar oscilações do campo elétrico nas frequências ópticas, a intensidade detectada é uma média sobre o período de oscilação dessa expressão. Como há variação na intensidade numa escala de tempo maior que a das frequências ópticas, essa média não elimina completamente a dependência temporal da intensidade. Assim, o sinal detectado é

$$\bar{I}(t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 a(t)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |E(t)|^2, \quad (4.5)$$

onde $E(t)$ está na forma complexa e o $a(t)$ vem da soma dos termos que modelam a perda da relação de fase entre os emissores.

Para ganharmos intuição sobre o efeito disso nos sinais detectados, dois exemplos serão exibidos aqui. Primeiro, supomos $\varphi(t)$ dando saltos aleatórios devido a colisões entre os átomos, como discutido na seção 3.5.3. Aqui, a intensidade varia no tempo de acordo com o módulo quadrado da soma $e^{i\varphi_1(t)} + \dots + e^{i\varphi_N(t)}$, onde os $\varphi_i(t)$ são funções como a da figura 14. Isso resulta em intensidades que variam bruscamente no tempo como o exemplo na figura 17.

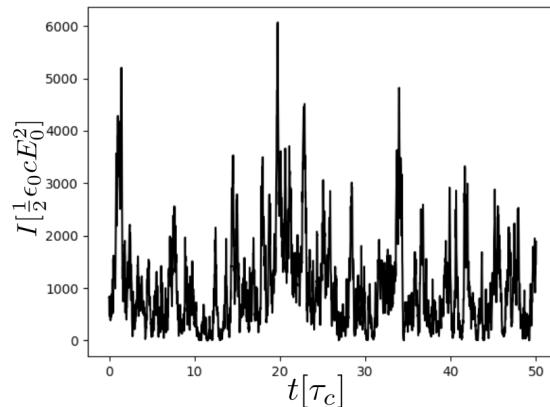


Figura 17 – Intensidade em função do tempo quando a perda de fase do processo de emissão é dominada por colisões entre os átomos. Nesta simulação, 1000 emissores foram utilizados ($N=1000$). A escala de tempo é o tempo de voo livre médio τ_c .

Quando a perda da relação de fase entre os emissores for dominada pelo efeito Doppler, isto é, quando as fases $\varphi_i(t)$ podem ser consideradas constantes φ_i , mas cada átomo emite uma frequência $\omega_i = \omega_0 + \delta\omega_i$ que varia da frequência original segundo uma distribuição gaussiana (já que a distribuição de velocidades dos átomos é uma distribuição de Maxwell), temos o ilustrado na figura 18.

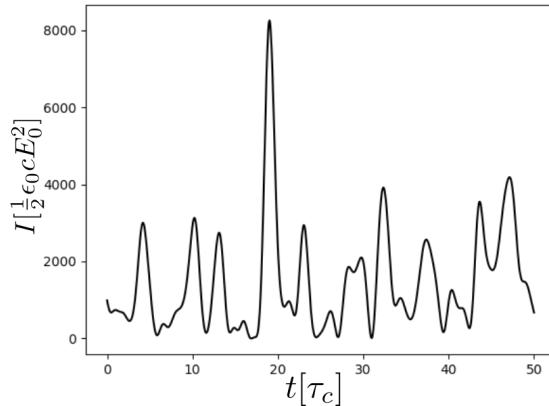


Figura 18 – Intensidade em função do tempo quando a perda de fase do processo de emissão é dominada pelo efeito Doppler. Nesta simulação, 1000 emissores foram utilizados ($N=1000$). A escala de tempo é o inverso da largura Doppler $\Delta\omega$.

De forma análoga ao caso em que o alargamento por colisão dominava, esse perfil de intensidade ao longo do tempo é devido a uma soma de fases, que agora é $e^{-i\delta\omega_i t + i\varphi_i} + \dots + e^{-i\delta\omega_N t + i\varphi_N}$.

As duas formas de alargamento, ou perda de fase, contrastam na escala de tempo de suas variações. Quando domina o alargamento Doppler, a flutuação da intensidade é suave e para intervalos de tempo curtos não se observa grande variação. Essa propriedade é refletida na queda suave de $g^{(1)}(\tau)$ perto de $\tau = 0$ desse tipo de processo, dada por uma curva gaussiana, como vimos na seção 3.5.4. Quando domina o alargamento por colisão, a intensidade varia de forma brusca e em qualquer escala de tempo podemos ver uma flutuação grande da intensidade acontecer, revelando a natureza fractal das flutuações [18]. Por isso, nesse tipo de processo, a função $g^{(1)}(\tau)$ cai abruptamente a partir de $\tau = 0$ segundo uma curva exponencial.

4.2 Interferômetro de Mach-Zehnder

O primeiro experimento de óptica que envolve funções de correlação a ser discutido aqui é um experimento de interferência. O aparato experimental do interferômetro de Mach-Zehnder está representado na figura 19.

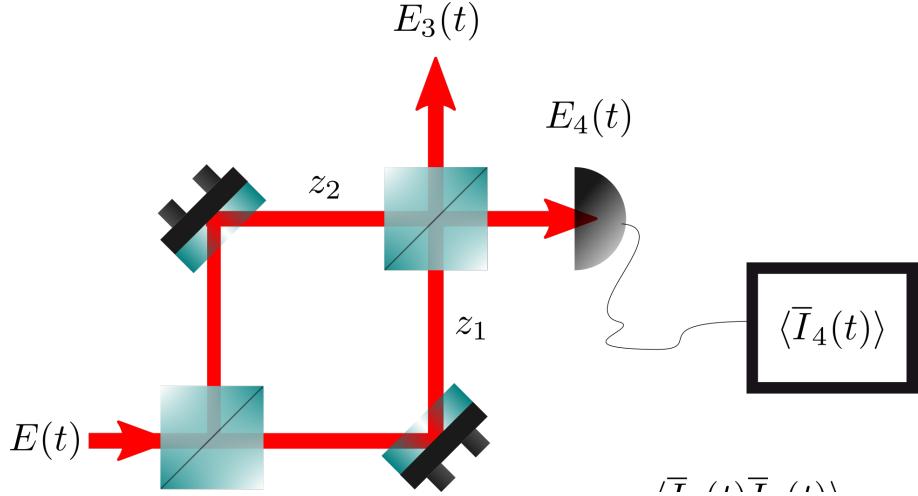


Figura 19 – Esquema experimental de um interferômetro de Mach-Zehnder. Os divisores de feixe transmitem 50% o campo elétrico e refletem os outros 50%.

Nesse experimento, o campo elétrico incidente no primeiro divisor de feixes é dividido em dois caminhos ópticos diferentes e a luz que passa por esses dois caminhos é misturada novamente pelo segundo divisor de feixes. Dessa forma, o campo elétrico $E_4(t)$ fica dado por

$$E_4(t) = \frac{E(t - z_1/c)}{2} + \frac{E(t - z_2/c)}{2}, \quad (4.6)$$

onde z_1 e z_2 são os comprimentos dos caminhos em cada braço do interferômetro.

Supondo que estamos escrevendo os campos $E_i(t)$ na forma complexa, a intensidade do campo E_4 fica dada então por

$$\begin{aligned} \bar{I}_4(t) &= \frac{1}{2} \epsilon_0 c |E_4(t)|^2 \\ &= \frac{1}{8} \epsilon_0 c \left\{ |E(t - z_1/c)|^2 + |E(t - z_2/c)|^2 + 2 \Re [E^*(t - z_1/c) E(t - z_2/c)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como, além de serem mais lentos que as frequências ópticas, os detectores costumam ser mais lentos que o tempo de colisão entre os átomos, a intensidade final detectada deve ser uma média temporal sobre um período $T \gg \tau_c$. Calculamos então a média dessa intensidade sobre esse período. Essa segunda média temporal será representada por $\langle \rangle$:

$$\langle \bar{I}_4(t) \rangle = \frac{1}{8} \epsilon_0 c \left\{ \langle |E(t - z_1/c)|^2 \rangle + \langle |E(t - z_2/c)|^2 \rangle + 2 \Re [\langle E^*(t - z_1/c) E(t - z_2/c) \rangle] \right\}. \quad (4.8)$$

Se essas médias dão o mesmo valor para todo t , já que são mais lentas que as flutuações de intensidade, temos

$$\begin{aligned}\langle \bar{I}_4(t) \rangle &= \frac{1}{2} \langle \bar{I}(t) \rangle \left\{ 1 + \Re \left[\frac{\langle E^*(t - z_1/c) E(t - z_2/c) \rangle}{\langle |E(t - z_1/c)|^2 \rangle^{1/2} \langle |E(t - z_2/c)|^2 \rangle^{1/2}} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \langle \bar{I}(t) \rangle \left\{ 1 + \Re \left[g^{(1)} \left(\frac{z_1 - z_2}{c} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \langle \bar{I}(t) \rangle \left\{ 1 + \Re \left[g^{(1)}(\tau) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Chegamos à importantíssima conclusão de que o padrão de interferência em um experimento do tipo do interferômetro de Mach-Zehnder depende do grau de correlação de primeira ordem no campo elétrico da fonte. Assim, conhecendo as propriedades estatísticas da emissão pela fonte, podemos obter informação sobre sua capacidade de produzir padrões de interferência. Da mesma forma, se conhecemos os padrões de interferência produzidos pela luz de uma fonte, obtemos informação sobre as propriedades estatísticas do processo pelo qual a luz é emitida, através do grau de correlação de primeira ordem.

4.3 Interferômetro de Hanbury Brown-Twiss

O interferômetro de Hanbury Brown-Twiss (HBT), assim como o de Mach-Zehnder pode ser usado para realizar medidas de correlação para a luz. Diferentemente do que vimos na seção anterior, no entanto, o HBT é o experimento prototípico da medida do grau de correlação de segunda ordem nos campos elétricos, $g^{(2)}(\tau)$.

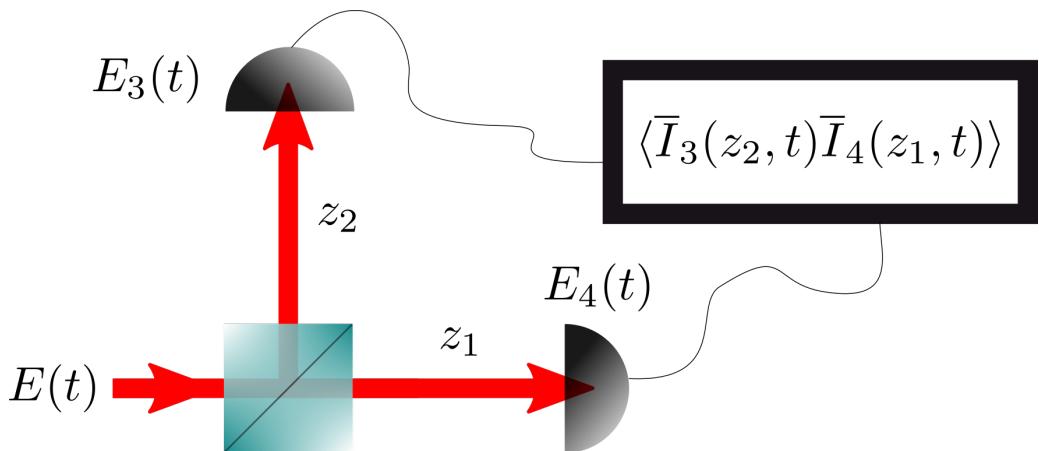


Figura 20 – Esquema experimental de um interferômetro de Hanbury Brown-Twiss. O sinal resultante é a multiplicação das intensidades em diferentes (z_i, t)

Nesse experimento, as intensidades dos campos E_3 e E_4 são detectadas e multiplicadas em um correlacionador. Classicamente, elas se relacionam à intensidade de E

por

$$\bar{I}_3(z, t) = \bar{I}_4(z, t) = \frac{1}{2}\bar{I}(z, t). \quad (4.10)$$

Assim, com $\langle \rangle$ representando uma média longa no tempo, $\langle \bar{I}_3(z, t) \rangle = \langle \bar{I}_4(z, t) \rangle = \frac{1}{2}\langle \bar{I}(z, t) \rangle$. Se o correlacionador normaliza o produto $\langle \bar{I}_3(z_2, t)\bar{I}_4(z_1, t) \rangle$, acabamos com uma medida direta do grau de correlação de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\langle \bar{I}_3(z_2, t)\bar{I}_4(z_1, t) \rangle}{\langle \bar{I}_3(z_2, t) \rangle \langle \bar{I}_4(z_1, t) \rangle} &= \frac{\langle \bar{I}(z_1, t)\bar{I}(z_2, t) \rangle}{\langle \bar{I}(z_1, t) \rangle \langle \bar{I}(z_2, t) \rangle} \\ &= \frac{\langle \bar{I}(t - z_1/c)\bar{I}(t - z_2/c) \rangle}{\langle \bar{I}(t - z_1/c) \rangle \langle \bar{I}(t - z_2/c) \rangle} \\ &= g^{(2)}(t - z_1/c, t - z_2/c) \\ &= g^{(2)}\left(\tau = \frac{z_1 - z_2}{c}\right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde o último passo vale se a estatística for estacionária.

Sabemos que para processos caóticos, a função $g^{(2)}(\tau)$ se relaciona com $g^{(1)}(\tau)$ por $g^{(2)}(\tau) = 1 + |g^{(1)}(\tau)|^2$, de forma que podemos obter com esse experimento informação do mesmo tipo que aquela fornecida pelo interferômetro de Mach Zehnder.

O fato de que o interferômetro de Hanbury Brown-Twiss utiliza dois detectores pode ser uma vantagem. Detectores reais do tipo avalanche têm uma característica que denominamos "tempo morto" [19]. Trata-se do tempo que o detector leva para recuperar-se de uma detecção e preparar-se para uma nova detecção. Como esse interferômetro divide o feixe incidente em 2 partes que serão levadas a detectores diferentes, ele pode compensar parte da informação perdida na detecção por causa do tempo morto. No regime de fôtons individuais isso é crucial, e por essa razão utilizamos esse tipo de aparato no nosso experimento de investigação da memória nos átomos frios.

Com o tempo morto, se dois fôtons chegam juntos, simultaneamente, a um detector, a detecção não consegue diferenciar a dupla de um fôton único. Isso limita as medidas, já que torna-se impossível, por exemplo, obter $g^{(2)}(0)$ sem medir coincidências temporais de duas detecções. Com o HBT, essa limitação é vencida.

Outro problema, mais grave, de medir correlações utilizando o interferômetro de Mach-Zehnder, e que é superado pelo HBT, é que o tamanho do aparato experimental necessário pode ser muito maior do que é prático realizar. Para tempos de coerência de $30\ \mu s$, por exemplo, seria necessário varrer seus braços por cerca de $30\ \mu s * c \approx 9\ km$.

Além disso, o $g^2(\tau)$ é uma quantidade muito importante para a óptica quântica [20], e pode ser utilizado, por exemplo para mostrar a natureza quântica da luz [9]. Esse fato realça a importância do HBT.

5 MEMÓRIA ATÔMICA

Vimos no capítulo introdutório que a disponibilidade de memórias quânticas é crucial para a implementação experimental de protocolos de informação quântica que pretendem alcançar escalabilidade. O exemplo mais relevante disso para este trabalho é o protocolo DLCZ, apresentado em [2], para comunicação quântica. Nesse trabalho, o objetivo dos autores é apresentar um protocolo que permita o estabelecimento prático de emaranhamento entre locais distantes, um elemento essencial para a construção de redes quânticas.

Nesse protocolo, o efeito coletivo que um conjunto de átomos é capaz de gerar e que reforça o acoplamento entre átomo e luz é usado para criar emaranhamento entre nuvens atômicas. O tempo de vida dos estados internos atômicos, por sua vez, é utilizado como a memória necessária à escalabilidade do protocolo.

No trabalho presente, investigamos o comportamento de outra memória, cuja origem identificamos em um efeito coletivo nos graus de liberdade externos, de momento linear, dos átomos. Veremos que essa memória tem tempo de vida muito maior que os estados excitados dos níveis de energia internos dos átomos e é resistente ao processo de leitura, duas características que podem ser exploradas em informação quântica.

5.1 O experimento

No experimento que analisamos, utilizamos um interferômetro de Hanbury Brown e Twiss para estudar as correlações da luz espalhada por um conjunto de átomos frios, que por sua vez é gerado por uma armadilha magneto óptica.

Nossa MOT fornece *ensembles* de átomos frios com temperaturas na faixa de centenas de μK . Utilizamos átomos de rubídio 87 bombeados para o estado $|5S_{1/2}(F=2)\rangle$. O diagrama de níveis do rubídio pode ser visto na figura 21.

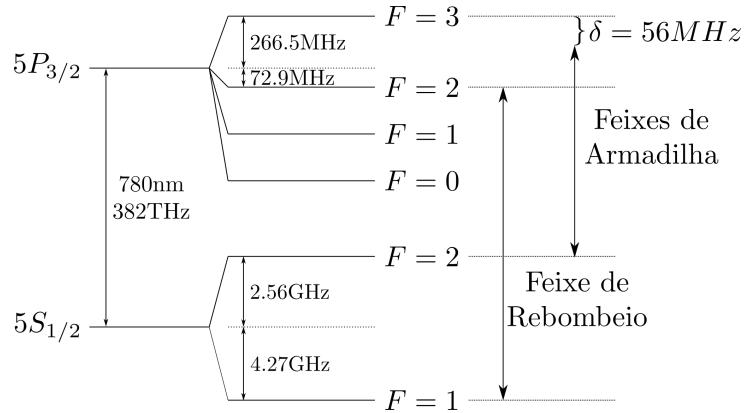


Figura 21 – Diagrama de níveis de energia do rubidio 87 [16] com as energias relevantes para a armadilhagem e resfriamento dos átomos. O feixe de rebombeio é responsável por manter toda a população no nível $|5S_{1/2}(F = 2)\rangle$. Os feixes de armadilha são os feixes da MOT como descrita no capítulo 2.

Com a nuvem de átomos frios criada, desligamos a MOT e em seguida bombeamos os átomos para o nível fundamental com $F=2$ usando um feixe de rebombeio ressonante de $|5S_{1/2}(F = 1)\rangle \rightarrow |5P_{3/2}(F = 2)\rangle$, como mostra a figura 21. Depois ligamos os detectores SPCM (do inglês *Single Photon Counting Module*) e aplicamos uma sequência de pulsos de luz circularmente polarizada σ^+ , com duração de 70 ns, e sintonizada em 56 MHz abaixo da frequência de ressonância da transição $|5S_{1/2}(F = 2, m_F = 2)\rangle \rightarrow |5S_{3/2}(F = 3, m_F = 3)\rangle$. Os pulsos estão separados por um intervalo de T , que variamos de 0.5 μ s a 2.0 μ s. Toda essa sequência experimental de ações pode ser visualizada na figura 22.

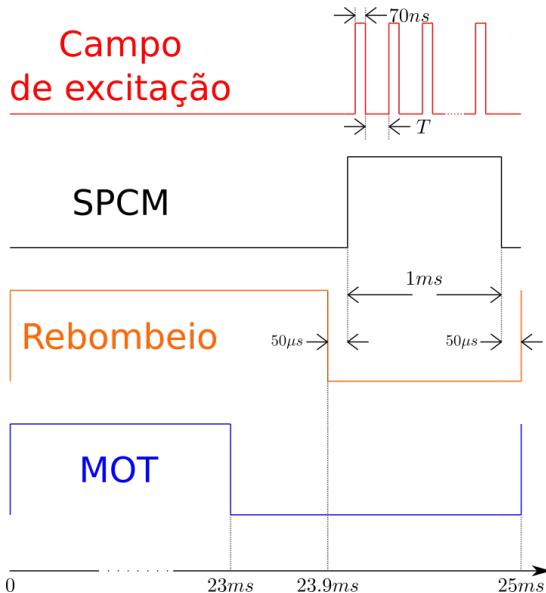


Figura 22 – Sequência de ações no experimento que analisamos. Esse ciclo se repete durante o tempo em que a medida é realizada, até que repetições suficientes para a estatística sejam realizadas. Aqui, SPCM refere-se a *Single Photon Counting Module*, módulo contador de fôtons individuais.

A escolha da polarização faz com que esses pulsos bombeiem rapidamente os átomos para o estado de m_F extremo, de forma que podemos tratar o sistema como um conjunto de átomos de 2 níveis, como mostra a figura 23.

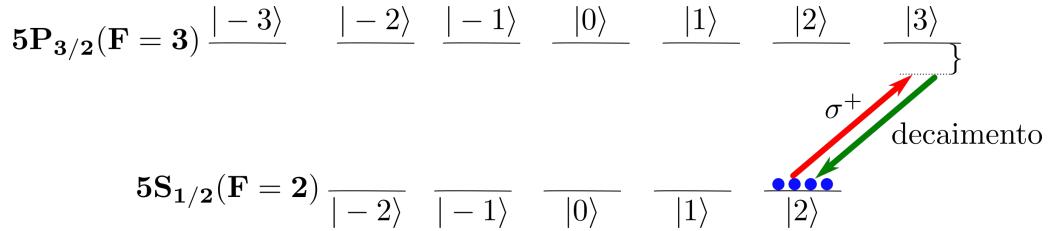


Figura 23 – A escolha da polarização do feixe de excitação faz com que os átomos sejam bombeados para o subnível Zeeman de m_F extremo.

A luz dos pulsos do feixe de excitação espalhada pela nuvem de átomos é coletada por uma fibra óptica monomodo, que seleciona apenas um modo da luz para nossa análise. A fibra conduz os fótons para um interferômetro HBT, que como sabemos é útil ao estudo das correlações da luz, e cujo divisor de feixe no nosso experimento é um divisor de feixe em fibra, FBS (do inglês *Fiber Beam Splitter*), cujas terminações levam a dois SPCM.

A intensidade do feixe de excitação é atenuada o suficiente para que trabalhemos no regime de fótons individuais. A probabilidade de detectarmos um fóton no modo espalhado, após o envio de um pulso de excitação à nuvem de átomos, é de cerca de 2%.

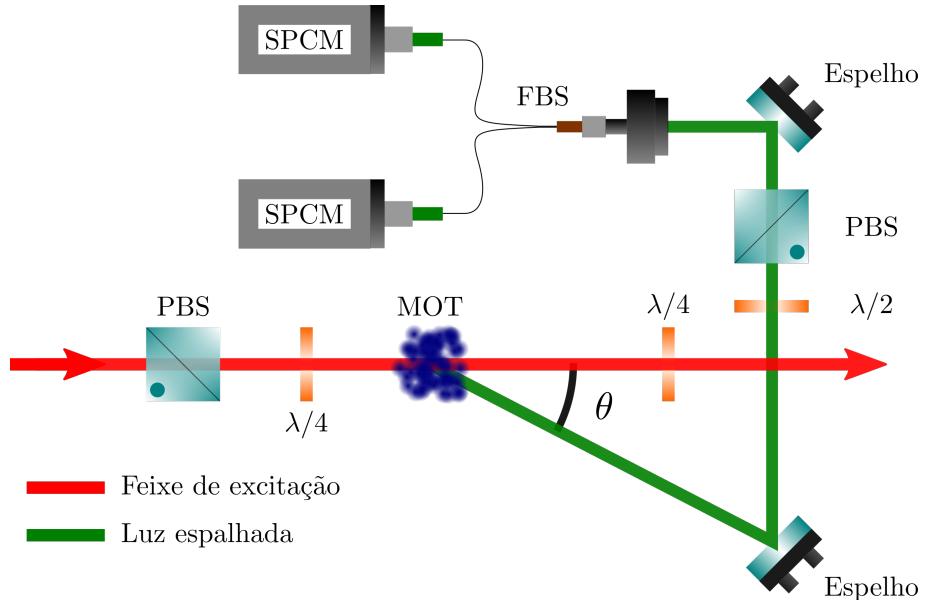


Figura 24 – Esquema do aparato experimental utilizado para estudar as correlações na luz.

O sinal analisado neste experimento foi o da intensidade da luz espalhada pela

nuvem de átomos de rubídio variando tanto parâmetros da armadilhagem (profundidade ótica e temperatura da nuvem de átomos) quanto parâmetros do feixe a ser espalhado (potência e dessintonia em relação à transição cíclica) e da detecção (ângulo de espalhamento).

5.2 Análise de dados

Sobre o sinal que detectamos segundo a seção anterior descreve, utilizamos as ferramentas de análise estatística, também previamente discutidas neste trabalho, que revelarão a existência de uma memória no comportamento do conjunto de átomos que mais tarde interpretaremos como sendo armazenada nos graus de liberdade externos, de momento linear, do sistema.

Os dados gerados pelos SPCM e o tratamento inicial que lhes damos antes de processar as quantidades físicas relevantes estão descritos no apêndice A. Como os dados têm a forma de *clicks* por tempo, precisamos calcular sobre eles uma quantidade discreta que nos dê informação sobre a memória. Isso pode ser conseguido se processarmos os dados para obter a probabilidade conjunta de duas detecções, uma no detector A e outra no detector B, separadas por um intervalo de tempo τ . Denominamos essa probabilidade por $P_{AB}(\tau)$.

Fazemos isso porque se houver algum processo que possamos chamar de memória no nosso sistema, a probabilidade conjunta de duas detecções separadas no tempo deve ser diferente do produto das probabilidades individuais, P_A e P_B , que corresponde ao caso em que os dois eventos são independentes.

Normalizando então a probabilidade $P_{AB}(\tau)$ pelo que ela corresponderia no caso sem memória, medimos

$$\frac{P_{AB}(\tau)}{P_A P_B}. \quad (5.1)$$

Quando essa quantidade assumir valores diferentes de 1 para um τ finito, entendemos que há algum tipo de memória no sistema.

Note que essa abordagem não leva em conta a origem temporal. Portanto, para que essa quantidade caracterize o sistema, é necessário que estejamos lidando com um processo estacionário.

Para o caso com probabilidades pequenas, elas devem ser aproximadamente proporcionais às intensidades dos campos. Assim, a quantidade que queremos medir

coincide com a função de correlação de segunda ordem:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t + \tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle \langle I(t + \tau) \rangle} \approx \frac{P_{AB}(\tau)}{P_A P_B}. \quad (5.2)$$

Por isso podemos utilizar as propriedades conhecidas da estatística para interpretar o resultado do experimento. Sob a suposição de estacionariedade do processo, os dados podem ser analisados de acordo com o procedimento descrito no apêndice B, resultando em curvas como as da figura 25:

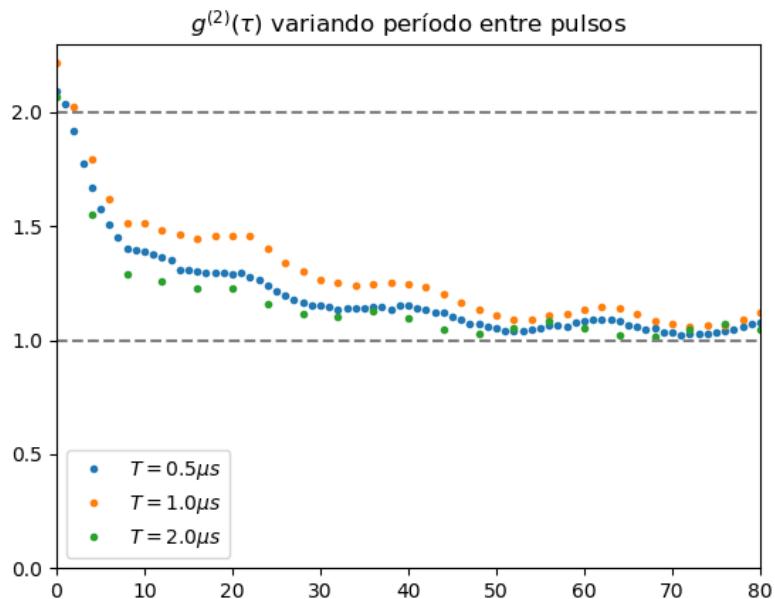


Figura 25 – Resultado experimental da função $g^{(2)}(\tau)$ supondo que o processo é estacionário

Como esperávamos, essas curvas mostram um aumento na probabilidade conjunta em relação ao produto das duas probabilidades quando τ é próximo de 0. Porém, levando em conta o que argumentamos considerando propriedades bastante gerais da função $g^{(2)}(\tau)$ no capítulo 4, encontramos dificuldades em explicar duas propriedades dessas curvas:

$$g^{(2)}(0) > 2, \quad (5.3)$$

e

$$g^{(2)}(\infty) \neq 1. \quad (5.4)$$

A primeira, é característica de processos que raramente aparecem na literatura e que não conseguimos conectar com nosso experimento. A segunda significa que o

sistema tem correlações que nunca desaparecem ou que têm tempo de vida muito maior do que a escala de tempo em que os átomos se movimentam consideravelmente na armadilha.

Olhando para a forma de $g^{(2)}(\tau)$, é possível conectar essas propriedades não esperadas com a forma como tratamos os dados.

Se supomos que o nosso sinal físico de interesse $I'(t)$ está modulado por um uma flutuação estocástica com a qual não tem correlação [21], i.e., o sinal e a modulação tem distribuições de probabilidade independentes, teríamos

$$I(t) = I'(t)m(t). \quad (5.5)$$

Então temos, como consequência, separando as médias de quantidades independentes,

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\tau) &= \frac{\langle I'(t)I'(t + \tau)m(t)m(t + \tau) \rangle}{\langle I'(t)m(t) \rangle \langle I'(t + \tau)m(t + \tau) \rangle} \\ &= \frac{\langle I'(t)I'(t + \tau) \rangle}{\langle I'(t) \rangle \langle I'(t + \tau) \rangle} \frac{\langle m(t)m(t + \tau) \rangle}{\langle m(t) \rangle \langle m(t + \tau) \rangle} \\ &= g_{I'}^{(2)}(\tau)g_m^{(2)}(\tau). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Essa situação permite que escolhendo $\tau = 0$, se $m(t)$ tiver $g_m^{(2)}(0) > 1$, o $g^{(2)}(0)$ resultante pode ser aumentado e assumir valores acima de 2 mesmo que o processo físico de interesse não seja capaz disso. De fato, a armadilha magneto óptica utilizada no nosso experimento sofre flutuações ao longo do tempo e a isso podemos atribuir a explicação do valor de $g^{(2)}(0) > 2$, como mostra a figura 26.

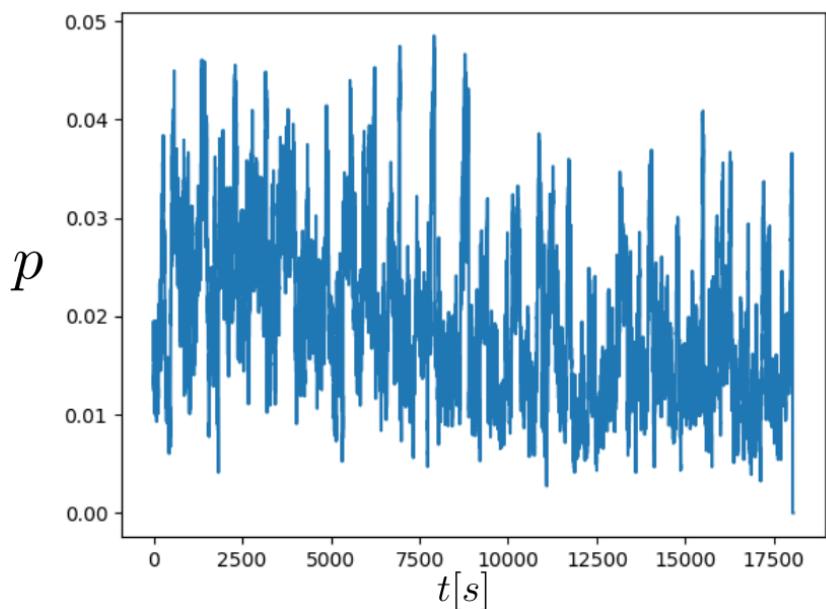


Figura 26 – Variação da probabilidade de detecção com o tempo.

Quanto ao outro problema, basta notarmos que a função $g^{(2)}(\tau)$ contém não apenas no numerador, mas também no denominador, dependência temporal. No entanto, a quantidade que medimos, $P_{AB}(\tau)/P_A P_B$ não contém essa dependência temporal. Assim, se o processo fugir da condição de estacionariedade, fatalmente perdemos a correspondência entre $g^{(2)}(\tau)$ e nossa medida, e com isso a normalização dos dados. Novamente, pudemos confirmar que isso acontece em nosso experimento como ilustra a figura 27.

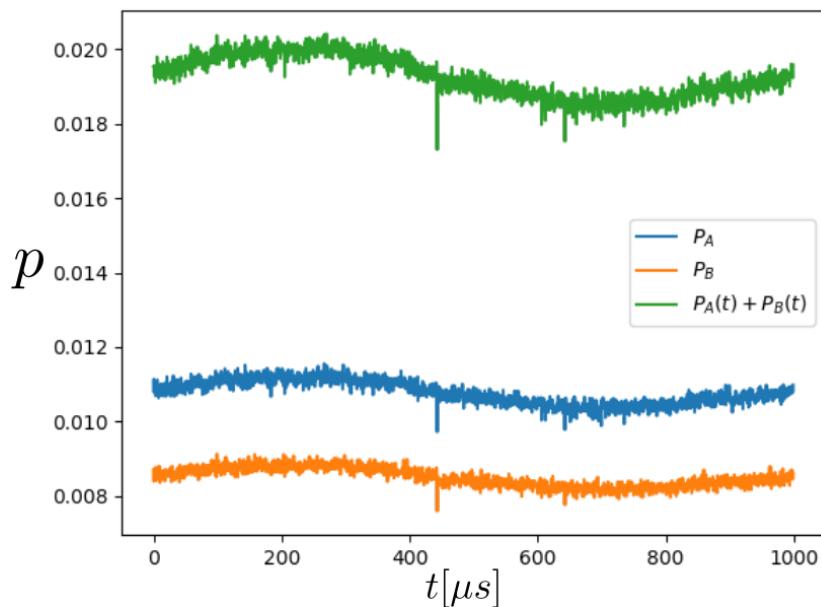


Figura 27 – Variação das probabilidades de detecção com o tempo após uma preparação da MOT.

Em conclusão desta seção, encontramos a suspeita de que os valores difíceis de explicar na função $g^{(2)}(\tau)$ podem ser devidos a uma modulação estocástica independente do processo de espalhamento da luz e a um desvio do processo da condição de estacionariedade. Na próxima seção, utilizaremos um tratamento de dados mais complexo que leva em conta essas observações.

5.2.1 Compensando $g^{(2)}(0) > 2$ e $g^{(2)}(\infty) \neq 1$

Podemos compensar o efeito da modulação estocástica ao considerar dados provenientes de intervalos de tempo mais curtos do que a escala de tempo que $m(t)$ precisa para variar apreciavelmente. Com isso, em cada um desses intervalos $m(t) =$

$m = \text{cte.}$ Daí,

$$g_m^{(2)}(\tau) = \frac{\langle m^2 \rangle}{\langle m \rangle \langle m \rangle} = 1. \quad (5.7)$$

Por isso, decidimos por cortar os dados em segmentos de 1 s de duração (o que no nosso caso foi o suficiente para mitigar o efeito de aumento do $g^{(2)}(0)$) e calcular uma função $g^{(2)}(\tau)$ para cada um desses segmentos. A escolha do período de 1 s foi feita de acordo com a figura 28. Nela, vemos que ao diminuir o tempo de integração, o valor de $g^{(2)}(0)$ vai para um patamar próximo a 2, e depois cai novamente. Não podemos utilizar os valores com tempo de integração pequeno demais pois nesse caso, perdemos estatística ao ponto de a medida perder significado. Assim, o tempo de 1 s acaba por ser o menor tempo de integração possível antes dessa perda de estatística.

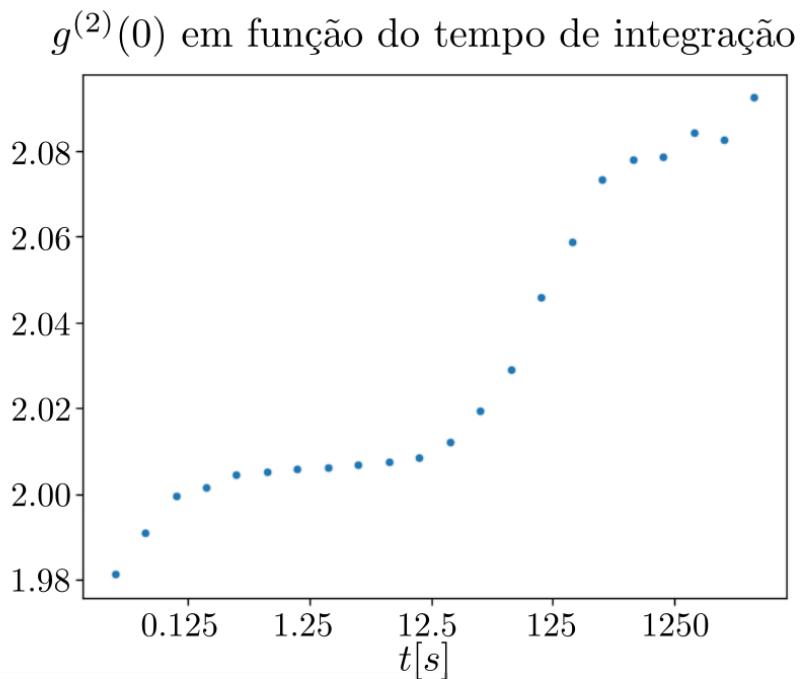


Figura 28 – Variação do valor de $g^{(2)}(0)$ quando variamos o tempo de integração das medidas.

Para recuperar a estatística final, calculamos a média entre essas várias funções, obtendo um $g^{(2)}(\tau)$ sem o efeito de $g^{(2)}(0) > 2$. Uma representação diagramática desse tratamento pode ser vista na figura 29.

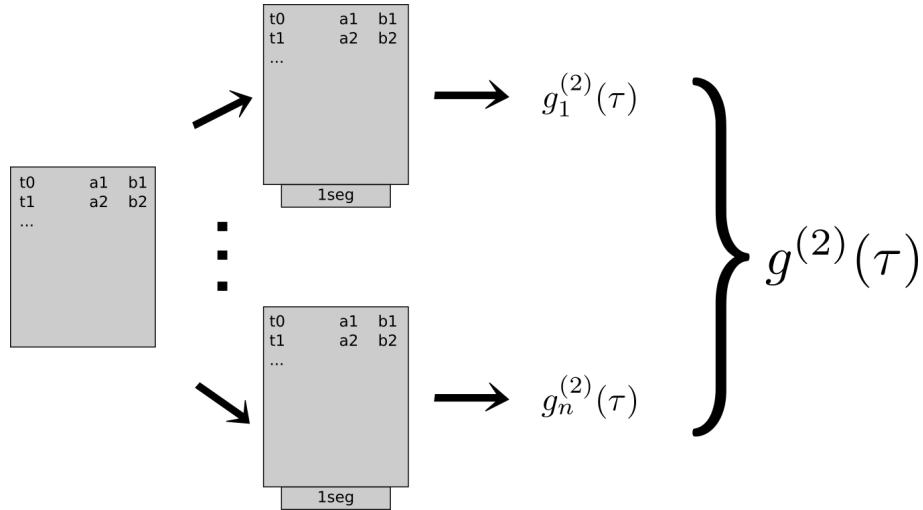


Figura 29 – Diagrama do tratamento necessário para remover o efeito de uma modulação estocástica do sinal de interesse. Para nosso experimento, o tempo de 1s já é menor do que a escala de tempo de variação da flutuação.

Precisamos ainda de uma estratégia para lidar com $g^{(2)}(\infty) > 1$. De acordo com o argumento da seção anterior, isso deve ser causado por um desvio da condição de estacionariedade, que influencia no denominador da função $g^{(2)}(\tau)$.

No capítulo 3 vimos que quando estudamos processos não estacionários, as médias no tempo não caracterizam bem o processo como um todo e precisamos recorrer a médias por ensemble. Assim, precisamos definir qual é o nosso ensemble de funções.

Se a modulação estocástica que vimos afetar $g^{(2)}(0)$ é uma flutuação da MOT, que por sua vez é preparada antes de cada trem de pulsos na sequência experimental, então podemos interpretar cada trem de N pulsos como a medida de N pontos no tempo da função $I(t)$, ou seja, cada preparação da MOT corresponderá a uma função do ensemble.

Assim, a segunda parte do tratamento que faremos consiste em separar os dados por preparação da MOT, de acordo com quantos pulsos são enviados no período de 1ms do trem de pulsos. Depois, com o ensemble de funções $I(t)$ em mãos (que no nosso experimento são funções *clicks vs tempo*) calculamos $g^{(2)}(t, t + \tau)$, com 2 pontos no tempo. Note que essa quantidade depende de 2 variáveis. Então, como queremos interpretar o resultado como sendo o comportamento da memória à medida que o tempo passa, tiramos a média na primeira das variáveis, t . Uma representação diagramática desse procedimento aparece na figura 30, e o algoritmo relacionado a esse tratamento está descrito no anexo B.

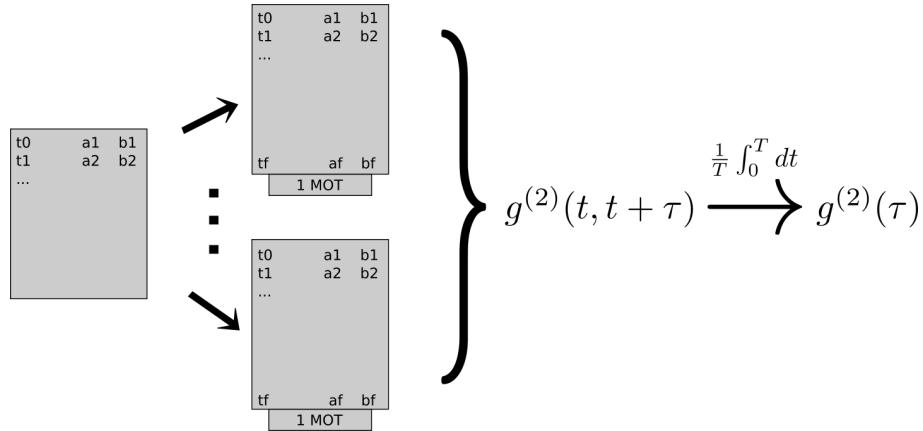


Figura 30 – Diagrama do procedimento responsável por garantir a normalização correta da função $g^{(2)}$, que leva em consideração o desvio da condição de estacionariedade do processo.

Combinando esses dois procedimentos, o que fazemos é separar cada 1s de dados em um ensemble de funções, e depois de calcular $g^{(2)}(\tau)$ como descrito na figura 30. Tiramos então a média entre os valores dos vários segundos, o que resulta na nossa função $g^{(2)}(\tau)$ final. Esse procedimento composto está representado na figura 31.

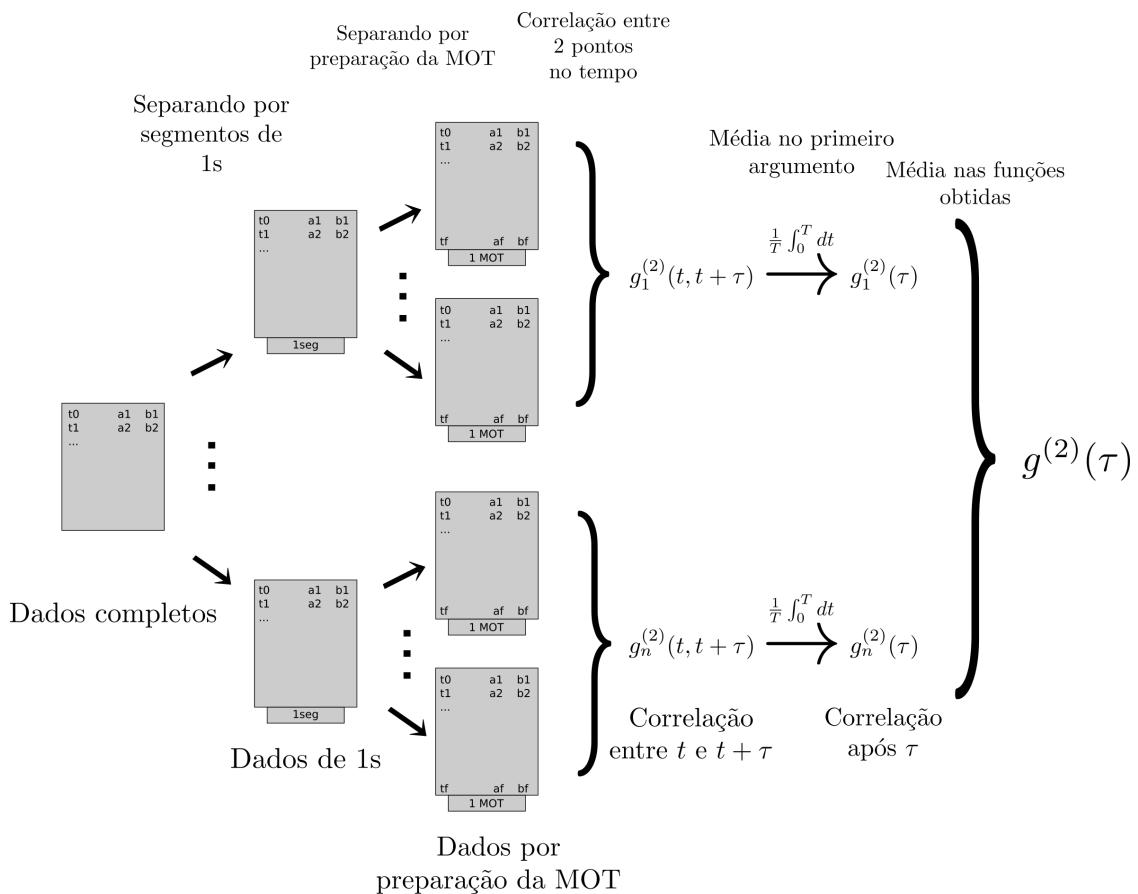


Figura 31 – Tratamento composto entre separação dos dados em segmentos de 1s e cálculo das médias utilizando médias por ensemble

Este tratamento fornece, finalmente, figuras bem comportadas, para as quais conseguimos atribuir sentido físico. Obtivemos assim gráficos que comparam o efeito de diversos parâmetros na função $g^{(2)}(\tau)$. São esses: ângulo de espalhamento em relação ao feixe de excitação, período entre pulsos, profundidade óptica da armadilha (OD, do inglês *optical depth*), probabilidade de espalhamento, dessintonia do feixe de excitação em relação à transição dos átomos, e tempo de rebombeio após o desligamento da MOT. As figuras 34 até 38 contém esses resultados.

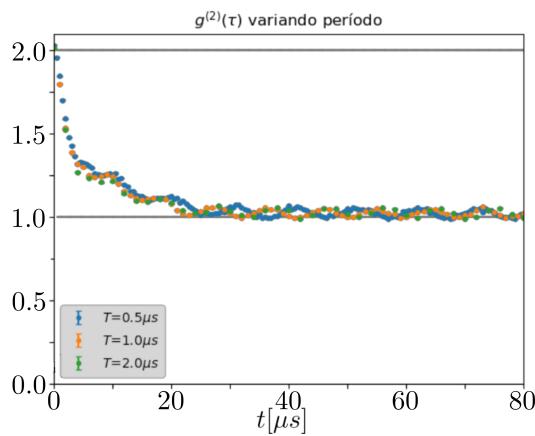


Figura 32 – $g^{(2)}(\tau)$ variando o período T entre os pulsos de excitação.

Como mostra a figura 32, o tempo de decaimento da memória que estudamos é independente do período entre os pulsos. Por isso, podemos conectar nosso resultado com a interpretação dada por [5] ao seu resultado, de que existe na nuvem atômica uma memória resistente ao processo de leitura, uma memória não volátil. De acordo com a ilustração na figura 33, cada uma das curvas na figura 32 interage com uma quantidade diferente de pulsos de excitação durante o tempo de decaimento. Essa diferença, que está no processo de leitura (o envio de pulsos de excitação para a nuvem), não altera o tempo de decaimento da memória, caracterizando a não volatilidade da memória no regime de fôtons individuais.

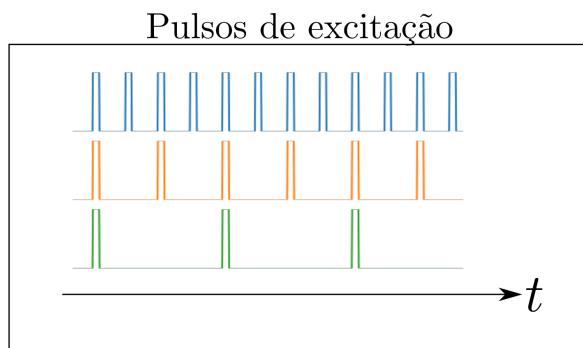


Figura 33 – Representação da diferença na aplicação dos pulsos sobre a nuvem entre as curvas da figura 32.

Podemos também variar o ângulo de espalhamento dos fôtons que detectamos. Ao fazê-lo, obtemos as curvas da figura 34. Elas mostram uma dependência do tempo de decaimento com o ângulo, sendo esse o primeiro parâmetro que vemos modificar o tempo de vida da memória. Essa dependência, porém, se dá apenas após um certo tempo que é igual para as três curvas, revelando a existência de duas escalas de tempo diferentes na dinâmica dessa memória.

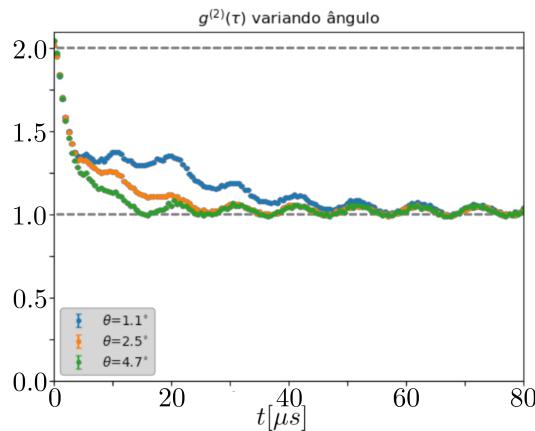


Figura 34 – $g^{(2)}(\tau)$ variando o ângulo θ entre o modo da luz espalhada e o modo do feixe de excitação.

Ao variar a dessintonia do feixe de excitação em relação à transição atômica, a profundidade óptica da nuvem atômica ou a probabilidade de detecção de um fóton espalhado, vemos variar a forma como se relacionam as duas escalas de tempo do processo, como mostram as figuras 35, 36 e 37. Essa dependência das escalas de tempo com os parâmetros não é muito simples, mas poderemos escrever ao final do tratamento teórico uma expressão capaz de ajustar os dados.

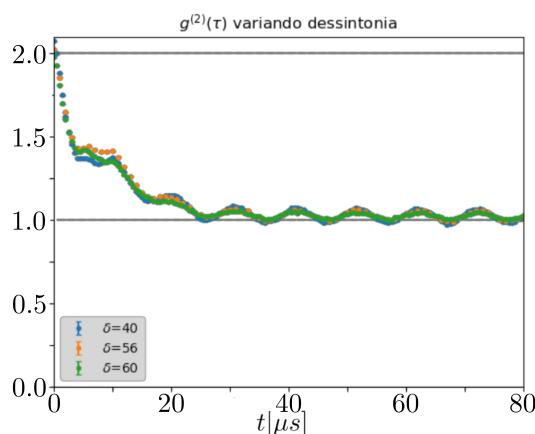


Figura 35 – $g^{(2)}(\tau)$ variando a dessintonia do feixe de excitação em relação à transição atômica.

Há uma diferença importante entre variar o período entre pulsos, ângulo de detecção e dessintonia, ou variar profundidade óptica e probabilidade de detecção de um fóton espalhado. Para os três primeiros parâmetros, estamos variando apenas parâmetros externos ao ensemble atômico. Para os dois últimos, a variação dos parâmetros não altera a detecção, mas a própria característica da nuvem de átomos. Para a profundidade óptica isso é claro pois trata-se de um parâmetro de algum meio material, sempre. Para a probabilidade isso acontece pois essa variação se dá com a potência do feixe de excitação, que por sua vez pode perturbar a temperatura da nuvem. Essa observação será importante para o ajuste de parâmetros ao fim do tratamento teórico.

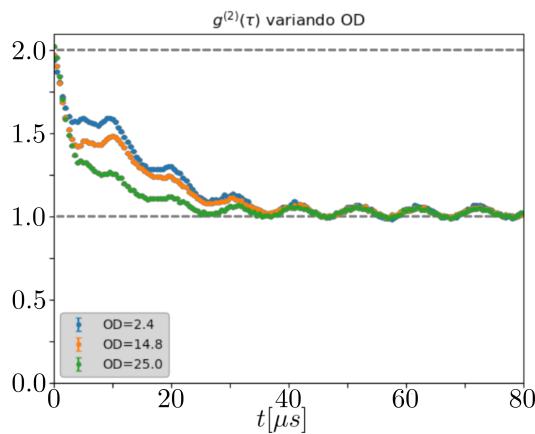


Figura 36 – $g^{(2)}(\tau)$ variando a profundidade óptica da nuvem atômica gerada pela MOT.

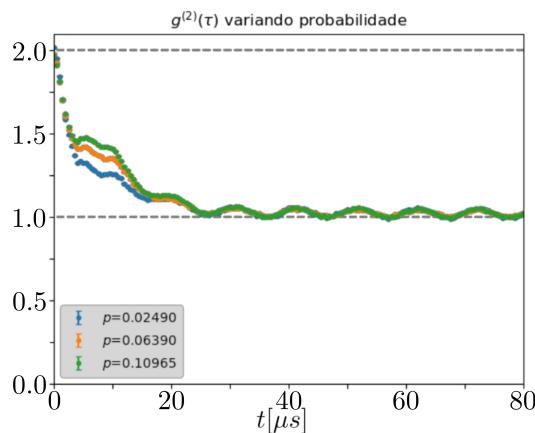


Figura 37 – $g^{(2)}(\tau)$ variando a probabilidade de detecção de um fóton espalhado.

Em todas as figuras, vemos a existência da memória com tempo de decaimento de cerca de $10 \mu s$, muito maior que o tempo de vida do estado excitado do rubídio, que é de 26 ns . Esse tempo de decaimento é consistente com o tempo de vida dos estados de momento dos átomos. Como só temos um estado fundamental, associaremos

a origem da memória aos níveis de energia externos, de momento linear, do átomo. Essa interpretação ganhará mais força com a teoria desenvolvida no próximo capítulo.

Outro ponto importante a notar é que as figuras revelam a existência de duas escalas de tempo de decaimento. A primeira escala é mais rápida, perto de $\tau = 0$, e a outra lenta, em seguida. A origem dessa mudança de comportamento ainda não está bem explicada, porém, nossa teoria modificada com uma motivação fenomenológica é capaz de ajustar bem as curvas. Ainda assim, suspeitamos de que ela tenha origem num campo magnético residual após o desligamento da MOT. Isso é indicado pela figura 38, onde a utilização de um tempo de rebombeio mais curto, de apenas $70\mu\text{s}$, influencia o decaimento da memória na escala de tempo inicial. Isso pode ser dado por um campo magnético quadrupolar transitente após o desligamento do campo magnético da MOT, que degrada o bombeamento dos átomos.

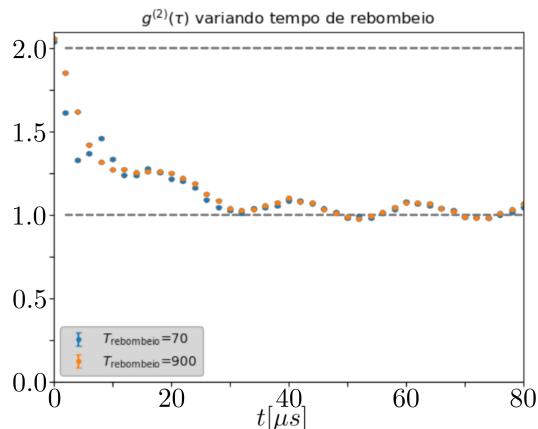


Figura 38 – $g^{(2)}(\tau)$ variando o tempo de rebombeio após o desligamento da MOT. Note que essa figura apresenta uma escala de tempo menor que as das anteriores. Além disso, a probabilidade de detecção utilizada aqui foi de 4%.

Uma das características da memória que vemos aqui será crucial para nossa modelagem teórica no capítulo seguinte. Na figura em que variamos o período T entre os pulsos aplicados à nuvem, vê-se que o tempo de decaimento da memória não depende de T . Essa característica, que chamamos de não volatilidade, é consistente com o que se observou em [5] e permitirá que modelemos a descoerência da memória considerando apenas 2 pulsos, responsáveis por fornecer os fôtons do click em A e do click em B. Prosseguimos assim para a modelagem teórica no próximo capítulo.

6 MODELAGEM QUÂNTICA DA MEMÓRIA NO ESPALHAMENTO DA LUZ

Para a modelagem teórica da memória que observamos, consideramos um hamiltoniano na forma

$$H = \underbrace{\sum_{j=1}^N \hat{p}_j^2/2m + \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k}_{=H_0} + \underbrace{\sum_k \sum_{j=1}^N \left[-i\hbar\Omega_k e^{-i(k_e-k)\cdot r_j} e^{i\omega_e t} a_k + H.c. \right]}_{=V}, \quad (6.1)$$

onde $\Omega_k = \frac{\Omega_e g_k}{2\Delta}$, Ω_e é a frequência de Rabi do campo de excitação, g_k a constante de acoplamento entre átomo e modo k da luz, Δ a dessintonia entre o campo de excitação e frequência da transição dos átomos, ω_e a frequência do campo de excitação, k_e é o vetor de onda do feixe de excitação, a_k o operador de destruição do modo k , r_j o operador posição do átomo j , e \hat{p}_j é o operador momento do átomo j .

Aqui, H_0 é o hamiltoniano do átomo livre mais os modos quantizados do campo da luz espalhada (vácuo) e V é o hamiltoniano que modela a interação do átomo com o campo eletromagnético de excitação clássica mais o vácuo. Esse hamiltoniano segue da aproximação de seguimento adiabático para o sistema de 2 níveis, o que remove o nível excitado e nos dá um processo em que o átomo começa e termina o espalhamento no mesmo nível de energia interno.

O hamiltoniano de interação pode ser interpretado como gerador da transferência de momento linear dos fôtons para os átomos e vice-versa, pela destruição de fôtons no modo k pelo operador a_k e adição do momento desse fóton ao átomo j pelo operador $e^{-i(k_e-k)\cdot r_j}$.

O objetivo deste capítulo é modelar o efeito de um pulso de excitação sobre o sistema e com isso obter uma previsão teórica para a quantidade de interesse, o $g^{(2)}(\tau)$.

6.1 Modelagem da ação de um pulso de luz sobre a nuvem de átomos

Podemos interpretar diretamente o hamiltoniano de interação, pois o operador a_k destrói um fóton do modo k e o operador $e^{-i(k_e-k)\cdot r_j}$ é um operador translação no espaço dos momentos que subtrai a diferença de momento, entre o fóton do campo de excitação adicionado e o fóton do campo da luz espalhada, ao átomo j que espalhou esse

fóton. Esse hamiltoniano modela, assim, a conservação de momento no espalhamento do fóton que detectamos.

Se supomos que logo antes de um pulso de luz passar pela nuvem de átomos o estado que descreve o conjunto é dado por uma certa distribuição de momentos, podemos escrevê-lo como

$$|0\rangle_a = |p_1\rangle \dots |p_N\rangle. \quad (6.2)$$

Para calcular o estado logo após o pulso, é conveniente usar a representação de interação [12], definida pela transformação unitária dada pelo operador $e^{iH_0 t/\hbar}$. Nesse cálculo, a origem temporal fica definida como o instante em que o pulso chega na região onde estão os átomos. Pela transformação definida acima, a equação de Schroedinger fica:

$$[H_0 + V]|\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle \rightarrow e^{iH_0 t/\hbar}[H_0 + V]|\Psi(t)\rangle = e^{iH_0 t/\hbar}i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle \quad (6.3)$$

Com mais alguma manipulação, essa equação é simplificada para:

$$\begin{aligned} e^{iH_0 t/\hbar}[H_0 + V]e^{-iH_0 t/\hbar}e^{iH_0 t/\hbar}|\Psi(t)\rangle &= e^{iH_0 t/\hbar}i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\{e^{-iH_0 t/\hbar}e^{iH_0 t/\hbar}|\Psi(t)\rangle\} \\ \implies [H_0 + V_I(t)]|\Psi_I(t)\rangle &= H_0|\Psi_I(t)\rangle + i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi_I(t)\rangle \\ \implies V_I(t)|\Psi_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi_I(t)\rangle. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Na equação acima, $|\Psi_I(t)\rangle = e^{iH_0 t/\hbar}|\Psi(t)\rangle$ e $V_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar}V e^{-iH_0 t/\hbar}$. Com isso, se $V_I(t)$ puder ser escrito de forma conveniente, podemos resolver essa equação mais simples, análoga a equação de Schroedinger original. De fato, isso é possível e assim prosseguimos nessa direção.

Considerando que $[p_j, a_k] = [p_j, a_k^\dagger] = 0$, escrevemos

$$\begin{aligned} V_I &= e^{iH_0 t/\hbar}V e^{-iH_0 t/\hbar} \\ &= \sum_k \sum_{j=1}^N \left[-i\hbar \Omega_k e^{i\omega_e t} e^{i \sum_{j'=1}^N \hat{p}_{j'}^2 t / 2m\hbar} e^{-i(k_e - k) \cdot r_j} e^{-i \sum_{j''=1}^N \hat{p}_{j''}^2 t / 2m\hbar} \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{i \sum_{k'} \hbar \omega_{k'} a_{k'}^\dagger a_{k'} t / \hbar} a_k e^{-i \sum_{k''} \hbar \omega_{k''} t / \hbar} + H.c. \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Como $[a_k^\dagger a_k, a_k] = [n_k, a_k] = -a_k \delta_{k'k}$, simplificamos:

$$e^{i \sum_{k'} \hbar \omega_{k'} n_{k'} t / \hbar} a_k e^{-i \sum_{k''} \hbar \omega_{k''} n_{k''} t / \hbar} = e^{i \omega_k n_k t} a_k e^{-i \omega_k n_k t}. \quad (6.6)$$

Pela formula de Baker-Campbell-Hausdorff [12], para quaisquer dois operadores X e Y , temos

$$e^{sX}Y e^{-sY} = Y + \frac{s}{1!}[X, Y] + \frac{s^2}{2!}[X, [X, Y]] + \dots \quad . \quad (6.7)$$

No nosso caso, com $Y = a_k$, $X = n_k$ e $s = i\omega_k t$, podemos facilmente calcular os comutadores:

$$[n_k, a_k] = -a_k, \quad (6.8)$$

$$[n_k, [n_k, a_k]] = (-1)^2 a_k, \quad (6.9)$$

e

$$\underbrace{[n_k, [n_k, \dots [n_k, a_k] \dots]]}_{m \text{ vezes}} = (-1)^m a_k. \quad (6.10)$$

Logo,

$$\begin{aligned} e^{i\omega_k n_k t} a_k e^{-i\omega_k n_k t} &= a_k + \frac{(-1)i\omega_k t}{1!} a_k + \frac{(-1)^2 (i\omega_k)^2}{2!} a_k + \dots \\ &= \left[1 + \frac{-i\omega_k t}{1!} + \frac{(-i\omega_k t)^2}{2!} + \dots \right] a_k \\ &= e^{-i\omega_k t} a_k. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Como também sabemos que para dois operadores A e B quaisquer $(ABA^\dagger)^\dagger = (A^\dagger)^\dagger (AB)^\dagger = AB^\dagger A^\dagger$, também podemos escrever para o termo hermitiano conjugado

$$\begin{aligned} e^{i \sum_{k'} \omega_{k'} t} a_{k'}^\dagger e^{-i \sum_{k''} \omega_{k''} t} &= (e^{-i\omega_k t} a_k)^\dagger \\ &= e^{i\omega_k t} a_k^\dagger. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Com isso, o hamiltoniano de interação V_I fica um pouco mais simples:

$$\begin{aligned} V_I &= \sum_k \sum_{j=1}^N \left[-i\hbar \Omega_k a_k e^{-i(\omega_k - \omega_e)t} e^{i \sum_{j'=1}^N \hat{p}_{j'}^2 t / 2m\hbar} e^{-i(\mathbf{k}_e - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j} e^{-i \sum_{j''=1}^N \hat{p}_{j''}^2 t / 2m\hbar} + H.c. \right] \\ &= \sum_k \sum_{j=1}^N \left[-i\hbar \Omega_k a_k e^{i\Delta\omega t} e^{i \sum_{j'=1}^N \hat{p}_{j'}^2 t / 2m\hbar} e^{-i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} e^{-i \sum_{j''=1}^N \hat{p}_{j''}^2 t / 2m\hbar} + H.c. \right], \end{aligned} \quad (6.13)$$

onde $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_e - \mathbf{k}$ e $\Delta\omega = \omega_k - \omega_e$.

O próximo passo é inserir a relação de completeza $\int d^3\mathbf{p}_j |\mathbf{p}_j\rangle\langle\mathbf{p}_j| = 1$ na equação acima.

$$\begin{aligned}
 e^{i\sum_{j'=1}^N \hat{p}_{j'}^2 t / 2m\hbar} e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}_j} e^{-i\sum_{j''=1}^N \hat{p}_{j''}^2 t / 2m\hbar} &= \int d^3\mathbf{p}_j |\mathbf{p}_j\rangle\langle\mathbf{p}_j| e^{i\sum_{j'=1}^N \hat{p}_{j'}^2 t / 2m\hbar} \times \\
 &\quad \times e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}_j} e^{-i\sum_{j''=1}^N \hat{p}_{j''}^2 t / 2m\hbar} \int d^3\mathbf{p}'_j |\mathbf{p}'_j\rangle\langle\mathbf{p}'_j| \\
 &= \int d^3\mathbf{p}_j d^3\mathbf{p}'_j |\mathbf{p}_j\rangle\langle\mathbf{p}_j| e^{i(p_j^2 - p_j'^2)t / 2m\hbar} e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}_j} |\mathbf{p}'_j\rangle\langle\mathbf{p}'_j| \\
 &= \int d^3\mathbf{p}_j d^3\mathbf{p}'_j e^{i(p_j^2 - p_j'^2)t / 2m\hbar} |\mathbf{p}_j\rangle\langle\mathbf{p}_j| |\mathbf{p}'_j - \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{p}'_j| \\
 &= \int d^3\mathbf{p}_j e^{i[p_j^2 - (p_j + \hbar\Delta\mathbf{k})^2]t / 2m\hbar} |\mathbf{p}_j\rangle\langle\mathbf{p}_j + \hbar\Delta\mathbf{k}| \\
 &= \int d^3\mathbf{p}_j e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_j t / m} e^{-i\hbar\Delta\mathbf{k}^2 t / 2m} |\mathbf{p}_j\rangle\langle\mathbf{p}_j + \hbar\Delta\mathbf{k}| \\
 &= \int d^3\mathbf{p}_j e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_j t / m} e^{i\hbar\Delta\mathbf{k}^2 t / 2m} |\mathbf{p}_j - \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{p}_j|
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Para pequenos ângulos de espalhamento e $t \leq t_p = 70\text{ns}$, as exponenciais dependentes do tempo acima são aproximadamente constantes em torno de 1, já que seus argumentos são muito pequenos. Mais tarde precisaremos calcular o valor médio dessas exponenciais mesmas para a circunstância do nosso experimento e esse cálculo justificará com mais força essa aproximação. Fazendo então

$$\int d^3\mathbf{p}_j e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_j t / m} e^{i\hbar\Delta\mathbf{k}t / 2m} |\mathbf{p}_j - \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{p}_j| \approx \int d^3\mathbf{p}_j |\mathbf{p}_j - \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{p}_j|, \tag{6.15}$$

o hamiltoniano de interação fica muitíssimo mais simples. A seguir, além da expressão acima, consideramos que essa aproximação implica que, $e^{i\Delta\omega_k t} \approx 1$ e também que $\Omega_k \approx \Omega$ não depende de \mathbf{k} para os modos do nosso interesse:

$$V_I = \sum_k \sum_{j=1}^N \int d^3\mathbf{p}_j \left[-i\hbar\Omega a_k |\mathbf{p}_j - \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{p}_j| + \text{H.c.} \right]. \tag{6.16}$$

Essa forma independente do tempo facilita muito a solução do problema. Pela forma da equação 6.4, se V_I não depende do tempo, a solução é dada simplesmente por $|\Psi_I(t)\rangle = e^{-iV_I t / \hbar} |\Psi_I(0)\rangle$. Como, pela definição da transformação realizada em 6.4, $|\Psi_I(0)\rangle = |\Psi(0)\rangle$, concluímos que $|\Psi_I(t)\rangle = e^{-iV_I t / \hbar} |\Psi(0)\rangle$ será nossa solução.

Podemos ainda fazer mais uma aproximação. Se o campo de excitação for fraco o suficiente, os eventos de espalhamento para outros ângulos que não aqueles que acoplam

com a fibra óptica que conduz a luz aos detectores podem ser considerados desprezíveis para a estatística observada. Assim, separamos a soma sobre os vários modos como $\sum_k = \sum'_k + \sum''_k$ onde \sum'_k é a soma sobre os modos que podem ser detectados e \sum''_k sobre o restante. Desprezamos \sum''_k e definimos

$$a_s = \sum'_k a_k, \quad (6.17)$$

o operador de aniquilação de fótons no modo da fibra óptica coletora. Com isso,

$$V_I = \sum_{j=1}^N \int d^3 p_j \left[-i\hbar\Omega a_s |p_j - \hbar\Delta k\rangle\langle p_j| + H.c. \right]. \quad (6.18)$$

Na equação acima, o vetor $p_j - \hbar\Delta k$ deve ser entendido como o momento do átomo j após espalhar um fóton para o modo da fibra óptica. Como todos os fótons espalhados têm a mesma frequência, que não é alterada pelo espalhamento, e os ângulos de espalhamento estão numa faixa muito estreita definida pela fibra óptica, ainda faz sentido escrever Δk depois de nos livrarmos da soma em k tratando-o como uma certa constante. É importante notar também que não podemos aproximar $|p_j - \hbar\Delta k\rangle$ por $|p_j\rangle$ pois aqui não trata-se apenas de um fator numérico. Se cometemos esse erro, perdemos a informação de que a interação com o feixe de excitação coloca a nuvem de átomos em um estado de superposição, que pode levar a efeitos importantes de interferência (o que de fato acontece, como veremos).

A forma da equação 6.18 é sugestiva. O operador no espaço dos momentos que aparece entre colchetes cria um impulso no átomo j , que cede o momento ao fóton espalhado. Como sucessivas aplicações de V_I adicionarão ou removerão impulso a passos iguais sempre na mesma direção, vemos aparecer uma estrutura que parece com a dos operadores de criação e aniquilação. Motivados por isso, definimos

$$a_a = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \int d^3 p_j |p_j - \hbar\Delta k\rangle\langle p_j|, \quad (6.19)$$

e também

$$\begin{aligned} a_a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \int d^3 p_j |p_j\rangle\langle p_j - \hbar\Delta k| \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \int d^3 p_j |p + \hbar\Delta k\rangle\langle p_j|. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Aplicando a_a^\dagger ao estado definido pela equação 6.2, obtemos uma superposição de estados, cada um com apenas um átomo com impulso devido a espalhamento:

$$a_a^\dagger |0\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N |\mathbf{p}_1\rangle \dots |\mathbf{p}_j + \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle \dots |\mathbf{p}_N\rangle. \quad (6.21)$$

O significado disso é que o ensemble espalhou um fóton através de um átomo, mas sem especificar qual dos átomos foi responsável pelo espalhamento. Como veremos a frente, essa superposição é responsável pelo efeito coletivo que dá o valor de $g^2(\tau)$.

Generalizando a definição, fazemos

$$|n\rangle_a = \frac{(a_a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle_a. \quad (6.22)$$

Há aqui uma sutileza a se notar. Quando o operador a_a atua sobre um átomo que já possui um impulso, esse impulso é destruído. No entanto, quando a_a atua sobre um átomo que não ganhou impulso por espalhamento, ele cria um estado com impulso na direção contrária. Para que o átomo receba impulso na direção contrária, é necessário que ele tenha espalhado um fóton num modo diferente daqueles que acoplam com a fibra óptica. Como nós já desprezamos os termos que correspondem a esse espalhamento, precisamos desprezar a atuação de a_a sobre átomos sem impulsos.

$$a_a |0\rangle_a = 0. \quad (6.23)$$

Dessa forma, ficamos com todas as propriedades de operadores de criação e aniquilação para a_a^\dagger e a_a :

$$a_a^\dagger |n\rangle_a = \sqrt{n+1} |n+1\rangle_a, \quad (6.24)$$

$$a_a |n\rangle_a = \sqrt{n} |n-1\rangle_a \quad (6.25)$$

que, no espaço dos estados gerados pelos $|n\rangle_a$, implicam em

$$[a_a, a_a^\dagger] = 1. \quad (6.26)$$

Considerando tudo isso, escrevemos o hamiltoniano de interação para nosso problema.

$$V_I = i\hbar\Omega [a_s^\dagger a_a^\dagger - a_s a_a]. \quad (6.27)$$

Resta calcular $e^{-iV_I t / \hbar}$ com $t = t_p$, o tempo de duração de um pulso. Como

$$e^{-iV_I t_p} = e^{\Omega t_p (a_s^\dagger a_a^\dagger - a_s a_a)}, \quad (6.28)$$

usando o teorema do desemaranhamento [22] [23], podemos escrever $e^{-iV_I t_p}$ no ordenamento normal:

$$e^{\Omega t_p (a_s^\dagger a_a^\dagger - a_s a_a)} = e^{\Gamma a_s^\dagger a_a^\dagger} e^{-g(\hat{n}_s + \hat{n}_a + 1)} e^{-\Gamma a_s a_a}, \quad (6.29)$$

onde $\Gamma = \tanh(\Omega t_p)$ e $g = \ln[\cosh(\Omega t_p)]$. Tendo em mente que $e^{\hat{A}} = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}^j / j!$,

$$\begin{aligned} e^{-\Gamma a_s a_a} |0\rangle_s |0\rangle_a &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\Gamma a_s a_a)^j}{j!} |0\rangle_s |0\rangle_a \\ &= |0\rangle_s |0\rangle_a, \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} e^{-g(\hat{n}_s + \hat{n}_a + 1)} e^{-\Gamma a_s a_a} |0\rangle_s |0\rangle_a &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-g)^j (\hat{n}_s + \hat{n}_a + 1)^j}{j!} |0\rangle_s |0\rangle_a \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-g)^j}{j!} |0\rangle_s |0\rangle_a \\ &= e^{-g} |0\rangle_s |0\rangle_a, \end{aligned} \quad (6.31)$$

e

$$\begin{aligned} e^{\Gamma a_s^\dagger a_a^\dagger} e^{-g(\hat{n}_s + \hat{n}_a + 1)} e^{-\Gamma a_s a_a} &= e^{-g} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma^j (a_s^\dagger a_a^\dagger)^j}{j!} |0\rangle_s |0\rangle_a \\ &= e^{-g} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\Gamma^j \left(\frac{(a_s^\dagger)^j}{\sqrt{j!}} |0\rangle_s \right) \left(\frac{(a_a^\dagger)^j}{\sqrt{j!}} |0\rangle_a \right) \right] \\ &= e^{-g} \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma^j |j\rangle_s |j\rangle_a \\ &= \frac{1}{\cosh \Omega t_p} \sum_{j=1}^{\infty} [\tanh(\Omega t_p)]^j |j\rangle_s |j\rangle_a. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Definindo $p = [\tanh(\Omega t_p)]^2$, para Ωt_p pequeno p fica sendo aproximadamente a probabilidade da nuvem espalhar um fóton. Já que $\cosh(\Omega t_p) = 1/\text{sech}(\Omega t_p) = 1/\sqrt{1 - (\tanh \Omega t_p)^2}$,

$$|\Psi_I(t_p)\rangle = \sqrt{1-p} \sum_{j=1}^{\infty} p^{j/2} |j\rangle_s |j\rangle_a. \quad (6.33)$$

Este é o estado do sistema logo após um pulso de luz, na representação de interação. Nesse ponto, já podemos calcular o valor de $g^{(2)}(0)$.

6.2 Cálculo de $g^{(2)}(0)$

Como $g^{(2)}(\tau)$ é escrito na representação de Heisenberg como

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle : I_s(t + \tau) I_s(t) : \rangle}{\langle : I(t + \tau) : \rangle \langle : I_s(t) : \rangle}, \quad (6.34)$$

podemos facilmente escrevê-lo com $\tau = 0$ em termos da nossa função de onda logo após o término do pulso na representação de interação.

$$\begin{aligned} g^{(2)}(0) &= \frac{\langle \Psi_H | : I_s I_s :_H (t_p) | \Psi_H \rangle}{\left(\langle \Psi_H | : I_s :_H (t_p) | \Psi_H \rangle \right)^2} \\ &= \frac{\langle \Psi(t_p) | : I_s I_s : | \Psi(t_p) \rangle}{\left(\langle \Psi(t_p) | I_s | \Psi(t_p) \rangle \right)^2} \\ &= \frac{\langle \Psi(t_p) | e^{-iH_0 t_p / \hbar} e^{iH_0 t_p / \hbar} : I_s I_s : e^{-iH_0 t_p / \hbar} e^{iH_0 t_p / \hbar} | \Psi(t_p) \rangle}{\left(\langle \Psi(t_p) | e^{-iH_0 t_p / \hbar} e^{iH_0 t_p / \hbar} : I_s : e^{-iH_0 t_p / \hbar} e^{iH_0 t_p / \hbar} | \Psi(t_p) \rangle \right)^2} \\ &= \frac{\langle \Psi_I(t_p) | : I_s I_s :_I (t_p) | \Psi_I(t_p) \rangle}{\left(\langle \Psi_I(t_p) | : I_s :_I | \Psi_I(t_p) \rangle \right)^2} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Agora escrevemos $: I_s I_s :_I$ e $: I_s :_I$, que estão na representação de interação, sabendo que na representação de Schroedinger, $: I_s I_s := a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s$ e $: I_s := a_s^\dagger a_s$:

$$\begin{aligned} : I_s :_I &= e^{iH_0 t / \hbar} : I_s : e^{-iH_0 t / \hbar} \\ &= e^{iH_0 t / \hbar} \eta a_s^\dagger a_s e^{-iH_0 t / \hbar} \\ &= \eta e^{i \sum_k \hbar \omega_k \hat{n}_k} a_s^\dagger a_s e^{-i \sum_k \hbar \omega_k \hat{n}_k} \\ &= \eta e^{i \hbar \omega_s \hat{n}_s} a_s^\dagger a_s e^{-i \hbar \omega_s \hat{n}_s} \\ &= \eta a_s^\dagger a_s, \end{aligned} \quad (6.36)$$

já que pelas aproximações, $\sum_k \hbar \omega_k a_k = \hbar \omega_s a_s$, se k não compõe a_s então $[a_k^\dagger, a_s] = 0$, e $\hat{n}_s = a_s^\dagger a_s$. Segue que

$$\begin{aligned} : I_s I_s :_I &= e^{iH_0 t / \hbar} \eta a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s e^{-iH_0 t / \hbar} \\ &= e^{i \hbar \omega_s \hat{n}_s} a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s e^{-i \hbar \omega_s \hat{n}_s}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Mas como $[\hat{n}_s, a_s^\dagger] = a_s^\dagger \implies \hat{n}_s a_s^\dagger = a_s^\dagger + a_s^\dagger \hat{n}_s$ e $[\hat{n}_s, a_s] = -a_s \implies \hat{n}_s a_s = -a_s + a_s \hat{n}_s$, então

$$\begin{aligned}
\hat{n}_s a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s &= (a_s^\dagger + a_s^\dagger \hat{n}_s) a_s^\dagger a_s a_s \\
&= a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s + a_s^\dagger (a_s^\dagger + a_s^\dagger \hat{n}_s) a_s a_s \\
&= 2a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s + a_s^\dagger a_s^\dagger (-a_s + a_s \hat{n}_s) a_s \\
&= a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s - a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s + a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s \hat{n}_s \\
&= a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s \hat{n}_s,
\end{aligned}$$

logo,

$$\hat{n}_s a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s - a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s \hat{n}_s = [\hat{n}, a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s] = 0. \quad (6.38)$$

Portanto,

$$:I_s I_s :_I = \eta a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s. \quad (6.39)$$

Com isso, escrevemos $g^{(2)}(0)$:

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \Psi_I(t_p) | a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s | \Psi_I(t_p) \rangle}{\left(\langle \Psi_I(t_p) | a_s^\dagger a_s | \Psi_I(t_p) \rangle \right)^2}. \quad (6.40)$$

Como $\langle \Psi_I(t_p) | a_s^\dagger a_s^\dagger = (a_s a_s | \Psi_I(t_p) \rangle)^\dagger$, calculamos $a_s a_s | \Psi_I(t_p) \rangle$ para em seguida obter o numerador de $g^{(2)}(0)$:

$$\begin{aligned}
a_s a_s | \Psi_I(t_p) \rangle &= a_s a_s \sqrt{1-p} \sum_{j=0}^{\infty} p^{j/2} |j\rangle_s |j\rangle_a \\
&= a_s \sqrt{1-p} \sum_{j=1}^{\infty} p^{j/2} \sqrt{j} |j-1\rangle_s |j\rangle_a \\
&= \sqrt{1-p} \sum_{j=2}^{\infty} p^{j/2} \sqrt{j(j-1)} |j-2\rangle_s |j\rangle_a.
\end{aligned} \quad (6.41)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi_I(t_p) | a_s^\dagger a_s^\dagger a_s a_s | \Psi_I(t_p) \rangle &= (1-p) \sum_{j=2}^{\infty} p^j j(j-1) \\
 &= (1-p) \sum_{j=0}^{\infty} p^j j(j-1) \\
 &= (1-p) \sum_{j=0}^{\infty} p^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} p^j \\
 &= (1-p) p^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \sum_{j=0}^{\infty} p^j \\
 &= (1-p) p^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \frac{1}{1-p} \\
 &= \frac{2p^2}{(1-p)^2}.
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

E, de forma análoga,

$$\begin{aligned}
 a_s | \Psi_I(t_p) \rangle &= a_s \sqrt{1-p} \sum_{j=0}^{\infty} p^{j/2} |j\rangle_s |j\rangle_a \\
 &= \sqrt{1-p} \sum_{j=0}^{\infty} p^{j/2} \sqrt{j} |j\rangle_s |j\rangle_a \\
 \implies \langle \Psi_I(t_p) | a_s^\dagger a_s | \Psi_I(t_p) \rangle &= (1-p) \sum_{j=0}^{\infty} j p^j \\
 &= (1-p) p \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{1-p} \\
 &= \frac{p}{1-p}.
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Finalmente, obtemos o resultado:

$$\begin{aligned}
 g^{(2)}(0) &= \frac{2p^2}{(1-p)^2} \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 \\
 &= 2.
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

Esse valor concorda bem com todas as figuras produzidas pela análise de dados e mostra, com isso, que essa abordagem teórica de fato capta algo da essência do experimento.

Pelo que discutimos ao decidir utilizar $g^{(2)}(\tau)$ para caracterizar a memória do sistema, se o valor dessa função não é igual a 1, identificamos a existência de uma correlação que interpretamos como memória. Além disso, o fato de que o valor de $g^{(2)}(0)$ segundo nossa teoria deve ser 2 independentemente do tempo do pulso já indica algo

sobre a natureza não volátil, isto é, independente do processo de leitura, dessa memória. Aqui, chamamos de processo de leitura a excitação da nuvem atômica por um pulso do laser, de forma análoga ao que é considerado em [5]. Se desconsiderarmos o processo de descoerência, a aplicação de um segundo pulso ao sistema é equivalente a multiplicar por 2 o tempo do pulso, o que não altera a o valor de $g^{(2)}(0)$.

6.3 Cálculo da descoerência da memória

Para calcular $g^{(2)}(\tau)$ recorremos novamente à sua expressão em termos da matriz densidade. Olhando para seu numerador, uma manipulação da expressão em termos da matriz densidade nos leva a uma expressão simples em termos da função de onda $|\Psi_I(t_p)\rangle$ que calculamos previamente. Consideraremos a seguir que o operador evolução temporal entre quaisquer dois instantes de tempo t_1 e t_2 é dado por $U(t_1, t_2)$, chamamos $e^{iH_0 t} = T$, e quando um operador estiver dependente do tempo assumimos que ele está na representação de Heisenberg (omitindo o subscrito H).

$$\begin{aligned}
 \langle : \hat{I}_s(t + \tau) \hat{I}_s(t) : \rangle &= \text{Tr} [: a_s^\dagger(t + \tau) a_s(t + \tau) a_s^\dagger(t) a_s(t) : \rho(0)] \\
 &= \text{Tr} [U^\dagger(0, t) a_s^\dagger U(0, t) U^\dagger(0, t + \tau) a_s^\dagger U(0, t + \tau) \times \\
 &\quad \times U^\dagger(0, t + \tau) a_s U(0, t + \tau) U^\dagger(0, t) a_s U(0, t) \rho(0)] \\
 &= \text{Tr} [U^\dagger(0, t) a_s^\dagger \underbrace{U(0, t) U^\dagger(0, t + \tau)}_{=U(0,t)U^\dagger(0,t)U^\dagger(t,t+\tau)} a_s \times \\
 &\quad \times \underbrace{U(0, t + \tau) U^\dagger(0, t)}_{=U(t,t+\tau)U(0,t)U^\dagger(0,t)} a_s U(0, t) \rho(0)] \tag{6.45} \\
 &= \text{Tr} [U^\dagger(0, t) a_s^\dagger U^\dagger(t, t + \tau) a_s^\dagger a_s U(t, t + \tau) a_s U(0, t) \rho(0)]
 \end{aligned}$$

Usando a propriedade do traço de que $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{C}\hat{A})$, continuamos

$$\begin{aligned}
 \langle : \hat{I}_s(t + \tau) \hat{I}_s(t) : \rangle &= \text{Tr} [a_s^\dagger a_s U(t, t + \tau) a_s \underbrace{U(0, t) \rho(0) U^\dagger(0, t)}_{=\rho(t)} a_s^\dagger U^\dagger(t, t + \tau)] \\
 &= \text{Tr} [a_s^\dagger a_s U(t, t + \tau) T^{-1} \underbrace{T a_s T^{-1}}_{=a_s e^{-i\omega_s t}} \underbrace{T \rho(t) T^{-1}}_{=\rho_I(t)} \underbrace{T a_s^\dagger T^{-1}}_{=a_s^\dagger e^{i\omega_s t}} T U^\dagger(t, t + \tau)] \\
 &= \text{Tr} [a_s^\dagger a_s U(t, t + \tau) T^{-1} a_s \rho_I(t) a_s^\dagger T U^\dagger(t, t + \tau)]. \tag{6.46}
 \end{aligned}$$

No nosso experimento, a não volatilidade, i.e., a independência do tempo de vida da memória com o período T entre pulsos, significa que a descoerência da memória não depende da quantidade de pulsos que atingiram a nuvem atômica entre o click A

e o click B. Assim, podemos desprezar esses pulsos não detectados e considerar que a evolução temporal entre os 2 pulsos que fornecem os fótons detectados é dada pelo hamiltoniano livre H_0 . Como $g^{(2)}(\tau)$ envolve a detecção de 2 fótons, um logo após o término de um primeiro pulso e outro logo após o término de um segundo, escolhemos $t = t_p$. Com essa escolha, $U(t, t + \tau)$ modela a evolução entre o fim do primeiro pulso e o fim do segundo. Dessa forma, podemos escrever $U(t, t + \tau) = U_{\text{pulso}} e^{-iH_0\tau/\hbar}$. O termo mais à direita modela a evolução livre entre os dois pulsos e o termo à esquerda modela a influência do segundo pulso sobre o conjunto de átomos. Logo,

$$\begin{aligned}
 \langle : \hat{I}_s(t + \tau) \hat{I}_s(t) : \rangle &= \text{Tr} [a_s^\dagger a_s U_{\text{pulso}} e^{-iH_0\tau/\hbar} e^{-iH_0t_p} a_s \rho_I(t_p) a_s^\dagger e^{iH_0t_p/\hbar} e^{iH_0\tau/\hbar} U_{\text{pulso}}^\dagger] \\
 &\approx \text{Tr} [a_s^\dagger a_s U_{\text{pulso}} e^{-iH_0\tau/\hbar} a_s \rho_I(t_p) a_s^\dagger e^{iH_0\tau/\hbar} U_{\text{pulso}}^\dagger] \\
 &= \text{Tr} \left[e^{-iH_0t_p/\hbar} \underbrace{a_s^\dagger a_s e^{-iH_0t_p/\hbar}}_{=a_s^\dagger a_s} e^{iH_0t_p/\hbar} U_{\text{pulso}} \times \right. \\
 &\quad \times \left. e^{-iH_0(\tau+t_p)/\hbar} a_s \rho_I(t_p) a_s^\dagger e^{iH_0(\tau+t_p)/\hbar} U_{\text{pulso}}^\dagger \right] \\
 &= \text{Tr} \left[a_s^\dagger a_s e^{iH_0t_p/\hbar} U_{\text{pulso}} \underbrace{e^{-iH_0(\tau+t_p)/\hbar} a_s \rho_I(t_p) a_s^\dagger e^{iH_0(\tau+t_p)/\hbar}}_{\equiv \rho'(0)} U_{\text{pulso}}^\dagger e^{-iH_0t_p/\hbar} \right]. \tag{6.47}
 \end{aligned}$$

Na última linha da expressão acima, $\rho'(0)$ pode ser interpretado como um certo estado da representação de Schroedinger. Com isso, automaticamente sua transformação por $e^{iH_0t_p/\hbar} U_{\text{pulso}}$ deve ser interpretada como o estado ρ' após aplicação de um pulso, na representação de interação. Por isso,

$$\begin{aligned}
 e^{iH_0t_p/\hbar} U_{\text{pulso}} \rho'(0) U_{\text{pulso}}^\dagger e^{-iH_0t_p/\hbar} &= e^{-iV_I t_p/\hbar} \rho'_I(0) e^{iV_I t_p/\hbar} \\
 &= e^{-iV_I t_p/\hbar} e^{iH_0t_p/\hbar} \rho'(0) e^{-iH_0t_p/\hbar} e^{iV_I t_p/\hbar} \\
 &= e^{-iV_I t_p/\hbar} e^{-iH_0\tau/\hbar} a_s \rho_I(t_p) a_s^\dagger e^{iH_0\tau/\hbar} e^{iV_I t_p/\hbar}.
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

Logo,

$$\langle : \hat{I}_s(t + \tau) \hat{I}_s(t) : \rangle = \text{Tr} (a_s^\dagger a_s e^{-iV_I t_p/\hbar} e^{-iH_0\tau/\hbar} a_s \rho_I(t_p) a_s^\dagger e^{iH_0\tau/\hbar} e^{iV_I t_p/\hbar}). \tag{6.49}$$

No nosso caso, temos um estado puro $\rho_I(t_p) = |\Psi_I(t_p)\rangle\langle\Psi_I(t_p)|$. Com essa substituição, escrevemos o traço em termos da função de onda:

$$\langle : \hat{I}_s(t + \tau) \hat{I}_s(t) : \rangle = \langle \Psi_I(t_p) | a_s^\dagger e^{iH_0\tau/\hbar} e^{iV_I t_p/\hbar} \hat{n}_s e^{-iV_I t_p} e^{-iH_0\tau/\hbar} a_s | \Psi_I(t_p) \rangle. \tag{6.50}$$

A interpretação dessa expressão é direta: como $\hat{I}_s(t + \tau)\hat{I}_s(t)$ corresponde a duas detecções, uma ocorrendo em t e outra em $t + \tau$, então o estado logo após o espalhamento do primeiro fóton é alterado pelo operador detecção a_s , modelando a detecção desse fóton, depois evolui livremente durante τ . Depois da evolução livre, mais um pulso altera o estado pelo operador $e^{-iV_I t_p}$ e então sobre o estado final, calculamos o valor esperado do número de fótons espalhados no segundo pulso.

Para o que se segue, será suficiente aproximar o estado $|\Psi_I(t_p)\rangle$ e o operador $e^{-iV_I t_p}$:

$$\begin{aligned}
 |\Psi_I(t_p)\rangle &= e^{-iV_I t_p / \hbar} |0\rangle_s |0\rangle_a \\
 &= e^{\Omega t_p (a_s^\dagger a_a^\dagger - a_s a_a)} |0\rangle_s |0\rangle_a \\
 &\approx [1 + \Omega t_p (a_s^\dagger a_a^\dagger - a_s a_a)] |0\rangle_s |0\rangle_a \\
 &= |0\rangle_s |0\rangle_a + \Omega t_p |1\rangle_s |1\rangle_a.
 \end{aligned} \tag{6.51}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 e^{-iH_0\tau/\hbar} a_s |\Psi_I(t_p)\rangle &\approx \Omega t_p e^{-iH_0\tau/\hbar} |0\rangle_s |1\rangle_a \\
 &= \Omega t_p e^{-i \sum_k \omega_k \hat{n}_k \tau} e^{-i \sum_{j=1}^N \hat{p}_j^2 \tau / 2m\hbar} |0\rangle_s |1\rangle_a \\
 &= \Omega t_p |0\rangle_s (e^{-i \sum_{j=1}^N \hat{p}_j^2 \tau / 2m\hbar} |1\rangle_a).
 \end{aligned} \tag{6.52}$$

Pelas definições no início da teoria,

$$\begin{aligned}
 e^{-i \sum_{j=1}^N \hat{p}_j^2 \tau / 2m\hbar} |1\rangle_a &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i \sum_{j'=1}^N \hat{p}_{j'}^2 \tau / 2m\hbar} |\mathbf{p}_1\rangle \dots |\mathbf{p}_j + \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle \dots |\mathbf{p}_N\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i[\mathbf{p}_1^2 + \dots + (\mathbf{p}_j + \hbar\Delta\mathbf{k})^2 + \dots + \mathbf{p}_N^2]\tau / 2m\hbar} |\mathbf{p}_1\rangle \dots |\mathbf{p}_j + \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle \dots |\mathbf{p}_N\rangle.
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

Então vê-se que a evolução livre leva os estados para fora do espaço gerado pelos $|n\rangle_a$. Somos obrigados a retornar, por isso, para a base dos estados de momento. Por conveniência de notação, definimos $g(j) \equiv e^{-i[\mathbf{p}_1^2 + \dots + (\mathbf{p}_j + \hbar\Delta\mathbf{k})^2 + \dots + \mathbf{p}_N^2]\tau / 2m\hbar}$. Assim,

aplicamos $e^{-iV_I t_p / \hbar}$ mais uma vez:

$$\begin{aligned}
 e^{-iV_I t_p / \hbar} e^{-iH_0 \tau / \hbar} a_s |\Psi_I(t_p)\rangle &\approx \Omega t_p e^{-iV_I t_p / \hbar} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N g(j) |0\rangle_s |\mathbf{p}_1\rangle \dots |\mathbf{p}_j + \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle \dots |\mathbf{p}_N\rangle \\
 &\approx \frac{\Omega t_p}{\sqrt{N}} (1 + \Omega t_p (a_s^\dagger a_a^\dagger - a_s a_a)) \sum_{j=1}^N g(j) |0\rangle_s |\mathbf{p}_1\rangle \dots |\mathbf{p}_j + \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle \dots |\mathbf{p}_N\rangle \\
 &= \frac{\Omega t_p}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N g(j) |0\rangle_s |\mathbf{p}_1\rangle \dots |\mathbf{p}_j + \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle \dots |\mathbf{p}_N\rangle + \\
 &\quad + \frac{(\Omega t_p)^2}{N} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N g(j) |1\rangle_s |\mathbf{p}_1\rangle \dots |\mathbf{p}_j + \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle \dots |\mathbf{p}_l + \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle \dots |\mathbf{p}_N\rangle.
 \end{aligned} \tag{6.54}$$

A expressão acima já será usada para escrever o numerador de $g^{(2)}(\tau)$. Aplicando \hat{n}_s , apenas o segundo termo sobrevive:

$$\hat{n}_s e^{-iV_I t_p / \hbar} e^{-iH_0 \tau / \hbar} a_s |\Psi_I(t_p)\rangle \approx \frac{(\Omega t_p)^2}{N} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N g(j) |1\rangle_s |\mathbf{p}_1\rangle \dots |\mathbf{p}_j + \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle \dots |\mathbf{p}_l + \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle \dots |\mathbf{p}_N\rangle \tag{6.55}$$

Qualquer soma da forma acima satisfaz $\sum_{i,j} A(i, j) = \sum_{i=j} A(i, j) + \sum_{i < j} A(i, j) + \sum_{i > j} A(i, j)$. Como $\sum_{i > j} A(i, j) = \sum_{i < j} A(j, i)$, a soma original se torna

$$\sum_{i,j} A(i, j) = \sum_{i < j} [A(i, j) + A(j, i)], \tag{6.56}$$

logo

$$\begin{aligned}
 \hat{n}_s e^{-iV_I t_p / \hbar} e^{-iH_0 \tau / \hbar} a_s |\Psi_I(t_p)\rangle &= \frac{(\Omega t_p)^2}{N} \left\{ \sum_{j=1}^N g(j) |1\rangle_s |\mathbf{p}_1\rangle \dots |\mathbf{p}_j + 2\hbar\Delta\mathbf{k}\rangle \dots |\mathbf{p}_N\rangle + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j < l} [g(j) + g(l)] |1\rangle_s |\mathbf{p}_1\rangle \dots |\mathbf{p}_j + \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle \dots |\mathbf{p}_l + \hbar\Delta\mathbf{k}\rangle \dots |\mathbf{p}_N\rangle \right\}
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

Então, pela ortonormalidade dos estados de momento $|\mathbf{p}_1\rangle\dots|\mathbf{p}_N\rangle$,

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi_I(t_p) | a_s^\dagger e^{iH_0\tau/\hbar} e^{iV_I t_p/\hbar} \hat{n}_s e^{-iV_I t_p/\hbar} e^{-iH_0\tau/\hbar} a_s | \Psi_I(t_p) \rangle &\approx \\
 &\approx \frac{(\Omega t_p)^4}{N^2} \left\{ \sum_{j,j'} g(j) g^*(j') \delta_{jj'} \sum_{j < l} \sum_{j' < l'} [g(j) + g(l)] [g^*(j') g^*(l')] \delta_{jj'} \delta_{ll'} \right\} \\
 &= \frac{(\Omega t_p)^4}{N^2} \left(\underbrace{\sum_j |g(j)|^2}_{=\sum_{j=1}^N 1=N} + \underbrace{\sum_{j < l} |g(j) + g(l)|^2}_{=\frac{1}{2} \sum_{j,l;j \neq l} |g(j) + g(l)|^2} \right) \\
 &= \frac{(\Omega t_p)^4}{N} + \frac{(\Omega t_p)^4}{2N^2} \sum_{j,l;j \neq l} |g(j) + g(l)|^2
 \end{aligned} \tag{6.58}$$

Agora precisamos do valor de $\sum_{j,l;j \neq l} |g(j) + g(l)|^2$. Pela definição de $g(j)$, temos que:

$$\begin{aligned}
 |g(j) + g(l)|^2 &= |e^{-i(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_N)\tau/2m\hbar} (e^{-i(\mathbf{p}_j \cdot \Delta\mathbf{k}\tau/m + \hbar^2\Delta k^2\tau/2m\hbar)} + e^{-i(\mathbf{p}_l \cdot \Delta\mathbf{k}\tau/m + \hbar^2\Delta k^2\tau/2m\hbar)})|^2 \\
 &= |e^{-i\mathbf{p}_j \cdot \Delta\mathbf{k}\tau/m} + e^{-i\mathbf{p}_l \cdot \Delta\mathbf{k}\tau/m}|^2 \\
 &= 2 + e^{-i(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) \cdot \Delta\mathbf{k}\tau/m} + e^{i(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) \cdot \Delta\mathbf{k}\tau/m}.
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
 \sum_{j,l;j \neq l} |g(j) + g(l)|^2 &= \sum_{j,l;j \neq l} 2 + \sum_{j,l;j \neq l} e^{-i(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) \cdot \Delta\mathbf{k}\tau/m} + \sum_{j,l;j \neq l} e^{i(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) \cdot \Delta\mathbf{k}\tau/m} \\
 &= 2(N^2 - N) + \sum_{j,l;j \neq l} e^{-i(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) \cdot \Delta\mathbf{k}\tau/m} + \sum_{j,l;j \neq l} e^{i(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) \cdot \Delta\mathbf{k}\tau/m}.
 \end{aligned} \tag{6.60}$$

Podemos usar o fato de que $|\mathbf{p}_1\rangle\dots|\mathbf{p}_N\rangle$ segue uma distribuição de Maxwell para aproximar um valor para as duas somas:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j,l;j \neq l} e^{-i(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) \cdot \Delta\mathbf{k}\tau/m} &\underset{\text{se } N \text{ é grande}}{\approx} \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{p}_j \cdot \Delta\mathbf{k}\tau/m} \sum_{l=1}^N e^{i\mathbf{p}_l \cdot \Delta\mathbf{k}\tau/m} \\
 &= \left(\sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{p}_j \cdot \Delta\mathbf{k}\tau/m} \right)^2 \\
 &= \left(\sum_{\mathbf{p}_j} \tilde{N}(\mathbf{p}_j) e^{-i\mathbf{p}_j \cdot \Delta\mathbf{k}\tau/m} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{6.61}$$

Onde $\tilde{N}(\mathbf{p}_j)$ é o número de átomos com momento \mathbf{p}_j . Então, sendo $f(\mathbf{p})$ a fração de átomos com momento \mathbf{p} , e N o número total de átomos, e em seguida usando a distribuição de Maxwell dos momentos $f_p(\mathbf{p})$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j,l;j \neq l} e^{-i(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) \cdot \Delta \mathbf{k} \tau / m} &= \left[\sum_{\mathbf{p}_j} N f(\mathbf{p}_j) e^{-i \mathbf{p}_j \cdot \Delta \mathbf{k} \tau / m} \right]^2 \\
 &\approx \left[\int d^3 \mathbf{p} N f_p(\mathbf{p}) e^{-i \mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{k} \tau / m} \right]^2 \\
 &= \left[\int d^3 \mathbf{p} N \left(\frac{1}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2} e^{-p^2 / 2m k_B T} e^{-i \mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{k} \tau / m} \right]^2 \\
 &= \left[\frac{1}{2\pi m k_B T} \right]^3 \left[N \int dp_x e^{-p_x^2 / 2m k_B T} e^{-i p_x \Delta k_x \tau / m} \times \right. \\
 &\quad \times \left. \int dp_y e^{-p_y^2 / 2m k_B T} e^{-i p_y \Delta k_y \tau / m} \times \int dp_z e^{-p_z^2 / 2m k_B T} e^{-i p_z \Delta k_z \tau / m} \right]^2. \tag{6.62}
 \end{aligned}$$

Por uma tabela de transformadas de Fourier, $\int dx e^{-\alpha x^2} e^{-ivx} = \sqrt{\pi/\alpha} e^{-v^2/4\alpha}$. Com isso, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{j,l;j \neq l} e^{-i(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) \cdot \Delta \mathbf{k} \tau / m} &\approx \left[\frac{1}{2\pi m k_B T} \right]^3 \left[N \left(2\pi m k_B T \right)^{3/2} e^{-k_B T \Delta k_x^2 \tau^2 / 2m} e^{-k_B T \Delta k_y^2 \tau^2 / 2m} e^{-k_B T \Delta k_z^2 \tau^2 / 2m} \right]^2 \\
 &= N^2 e^{-\frac{k_B T}{m} \Delta k^2 \tau^2}. \tag{6.63}
 \end{aligned}$$

Como esse resultado não depende do sinal de $\Delta \mathbf{k}$, sabemos também que

$$\sum_{j,l;j \neq l} e^{i(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) \cdot \Delta \mathbf{k} \tau / m} \approx N^2 e^{-\frac{k_B T}{m} \Delta k^2 \tau^2}, \tag{6.64}$$

e portanto,

$$\sum_{j,l;j \neq l} |g(j) + g(l)|^2 \approx 2(N^2 - N) + 2N^2 e^{-\frac{k_B T}{m} \Delta k^2 \tau^2}. \tag{6.65}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi_I(t_p) | a_s^\dagger e^{iH_0 \tau / \hbar} e^{iV_I t_p / \hbar} \hat{n}_s e^{-iV_I t_p / \hbar} e^{-iH_0 \tau / \hbar} a_s | \Psi_I(t_p) \rangle &\approx \\
 &\approx \frac{(\Omega t_p)^4}{N} + \frac{(\Omega t_p)^4}{2N^2} \left(2N^2 - 2N + 2N^2 e^{-\frac{k_B T}{m} \Delta k^2 \tau^2} \right) \tag{6.66} \\
 &= (\Omega t_p)^4 (1 + e^{-\frac{k_B T}{m} \Delta k^2 \tau^2}),
 \end{aligned}$$

que é o valor do numerador da expressão de $g^{(2)}(\tau)$. Resta calcular o denominador, o que faremos de forma análoga ao que fizemos com o numerador. Dessa vez, no entanto, a medida envolve o espalhamento de apenas um pulso. Por isso, haverá o efeito de só um pulso incluído nos operadores de evolução temporal.

$$\begin{aligned}
 \langle : \hat{I}_s(t + \tau) : \rangle &= \text{Tr}(a_s^\dagger(t + \tau)a_s(t + \tau)\rho(0)) \\
 &= \text{Tr}(U^\dagger(0, t + \tau)a_s^\dagger U(0, t + \tau)U^\dagger(0, t + \tau)a_s U(0, t + \tau)\rho(0)) \\
 &= \text{Tr}(\hat{n}_s U_{\text{pulso}} U(t_p, t_p + \tau)\rho(0)U^\dagger(t_p, t_p + \tau)U_{\text{pulso}}^\dagger) \\
 &= \text{Tr}(\hat{n}_s U_{\text{pulso}} e^{-iH_0(\tau+t_p)}\rho(0)e^{iH_0(t_p+\tau)/\hbar}U_{\text{pulso}}) \\
 &= \text{Tr}(\hat{n}_s e^{-iV_I t_p}\rho(0)e^{iV_I t_p}) \\
 &= \langle 0|_s \langle 0|_a e^{iV_I t_p/\hbar} \hat{n}_s e^{-iV_I t_p/\hbar} |0\rangle_s |0\rangle_a
 \end{aligned} \tag{6.67}$$

Aproximando até ordem de Ωt_p ,

$$e^{-iV_I t_p/\hbar} = |0\rangle_s |0\rangle_a + \Omega t_p |1\rangle_s |1\rangle_a \tag{6.68}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \langle 0|_s \langle 0|_a e^{iV_I t_p/\hbar} \hat{n}_s e^{-iV_I t_p/\hbar} |0\rangle_s |0\rangle_a &\approx \left(\langle 0|_s \langle 0|_a + \Omega t_p \langle 1|_s \langle 1|_a \right) \left(\Omega t_p |1\rangle_s |1\rangle_a \right) \\
 &\approx (\Omega t_p)^2,
 \end{aligned} \tag{6.69}$$

independentemente de τ . Com isso, concluímos que

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-\frac{k_B T}{m} \Delta k^2 \tau^2}. \tag{6.70}$$

Como pode ser observado na figura 39, este resultado mostra o decaimento da função de correlação de segunda ordem de 2 para 1, bem próximo do comportamento real. Algumas propriedades dos dados experimentais, no entanto, não podem ser explicadas por esse modelo. As oscilações com frequência bem definida que vemos modular a função $g^{(2)}(\tau)$ (não confundir com a modulação da intensidade espalhada cuja influência foi eliminada pela análise do capítulo anterior) e a primeira escala de tempo do decaimento, próximo de $\tau = 0$, não são explicadas por ele. Uma discussão sobre a origem dessa primeira escala de tempo encontra-se ao final do capítulo 5. Na próxima seção, propomos uma modificação fenomenológica sobre esse resultado de forma a obter um melhor ajuste dos dados.

Olhando para o estado logo após a detecção de um fóton, vemos que ele corresponde a uma distribuição de átomos modulada espacialmente, formando uma grade de densidade atômica na região da nuvem. A densidade de probabilidade de

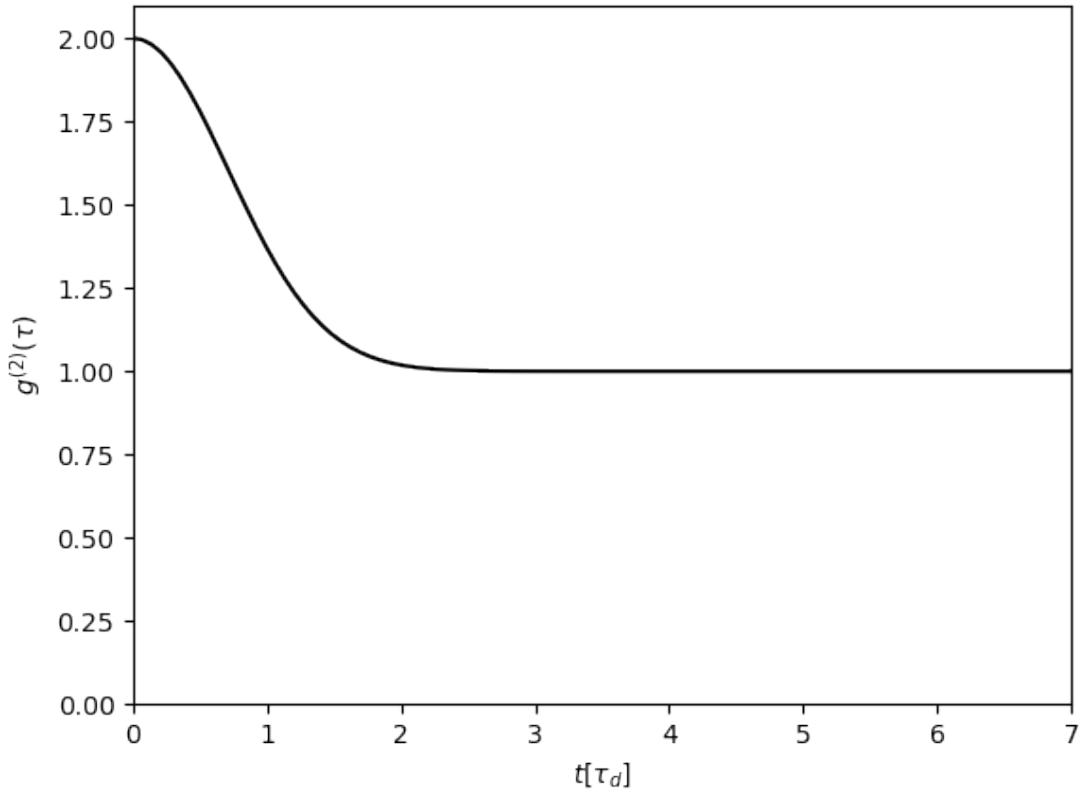


Figura 39 – Previsão da teoria para a função $g^{(2)}(\tau)$ no nosso experimento. A escala de tempo está em unidades de tempo de decaimento $\tau_d = (\frac{k_B T}{m} \Delta k^2)^{-1/2}$.

encontrar algum átomo na posição (x, y) dada pela função de onda de $|1\rangle_a$ pode ser escrita aproximadamente como

$$\rho(x) = A_0 + A_1 \cos(\Delta k_x x + \Delta k_y y), \quad (6.71)$$

o que corresponde a uma densidade modulada espacialmente por um cosseno. Isso pode ser visualizado na figura 40. Assim, nosso tratamento quântico pode ter sua interpretação conectada com a interpretação dada ao experimento de [5]. Nela, a memória existe pois o sistema age como uma grade de difração, e o tempo de decaimento lento pode ser interpretado classicamente como o tempo que esta grade leva para se desfazer segundo o movimento dos átomos, sem colisões. Com isso além do tratamento quântico, útil à informação quântica, dispomos de uma intuição clássica sobre os mecanismos participando do processo.

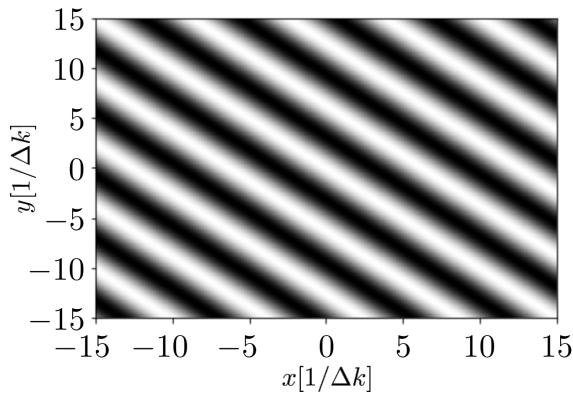


Figura 40 – Representação da densidade de átomos da função de onda de $|1\rangle_a$, que domina o estado do sistema logo após a detecção de um fóton.

6.4 Modificação fenomenológica e comparação com experimento

Para dar conta das duas escalas temporais observadas, podemos supor que um subconjunto dos átomos perde suas relações de fase de forma homogênea [24][25] e apresenta, além do decaimento gaussiano predito pela nossa teoria, um decaimento exponencial na função de correlação. Se isso acontece com uma fração ϵ dos átomos, e o tempo do decaimento homogêneo é t_h , a expressão para $g^{(2)}(\tau)$ fica escrita como

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \left[(1 - \epsilon) e^{-\frac{k_B T}{m} \Delta k^2 \tau^2} + \epsilon e^{-\frac{k_B T}{m} \Delta k^2 \tau^2} e^{-\tau/t_h} \right]. \quad (6.72)$$

Com isso, temos 2 parâmetros livres além da temperatura T para ajuste das curvas experimentais, ϵ e t_h . Os ajustes podem ser vistos nas figuras 41 até 45.

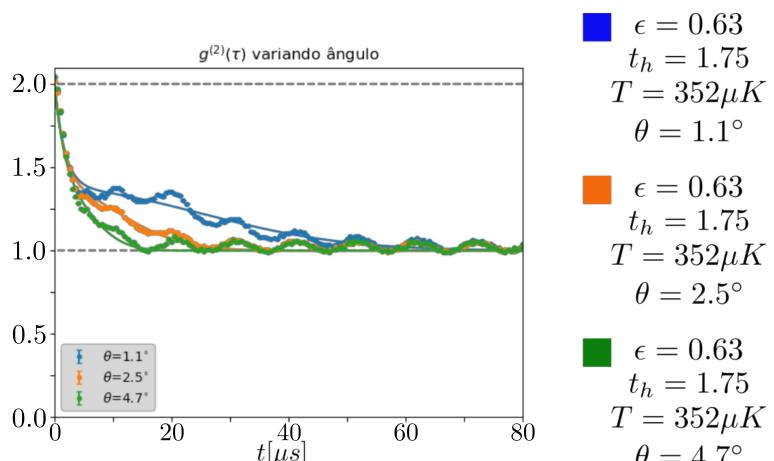


Figura 41 – Ajustes teóricos da função $g^{(2)}(\tau)$ variando o ângulo θ entre o modo da luz espalhada e o modo do feixe de excitação.

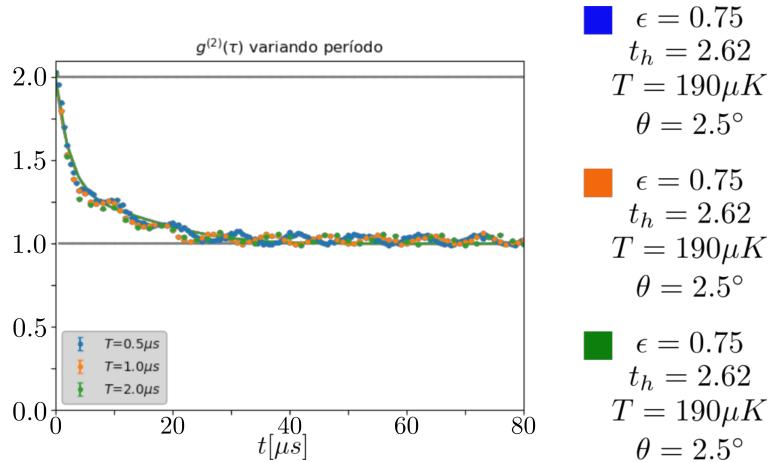


Figura 42 – Ajustes teóricos da função $g^{(2)}(\tau)$ variando o período T entre os pulsos de excitação.

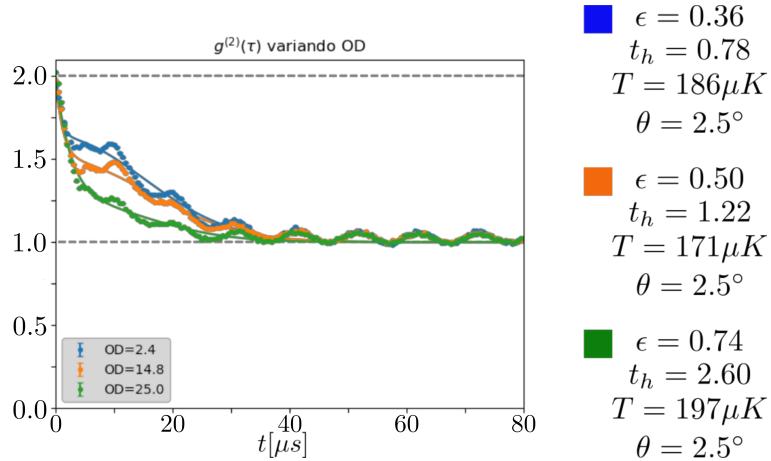


Figura 43 – Ajustes teóricos da função $g^{(2)}(\tau)$ variando a profundidade óptica (OD, do inglês *optical depth*) da nuvem atômica gerada pela MOT.

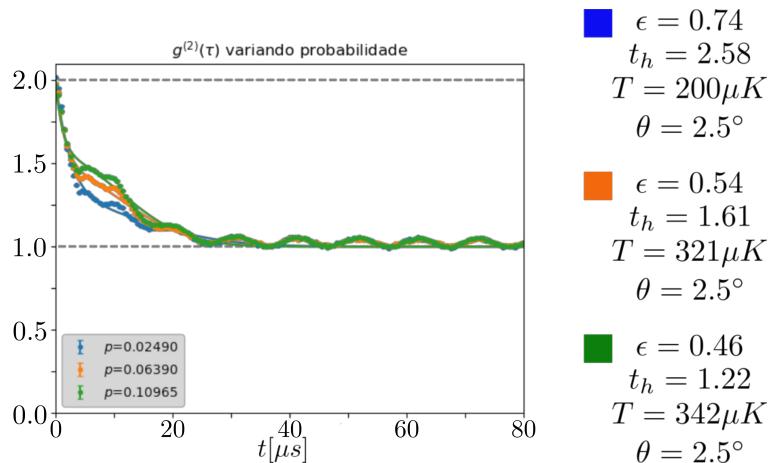


Figura 44 – Ajustes teóricos da função $g^{(2)}(\tau)$ variando a probabilidade de detecção de um fóton espalhado.

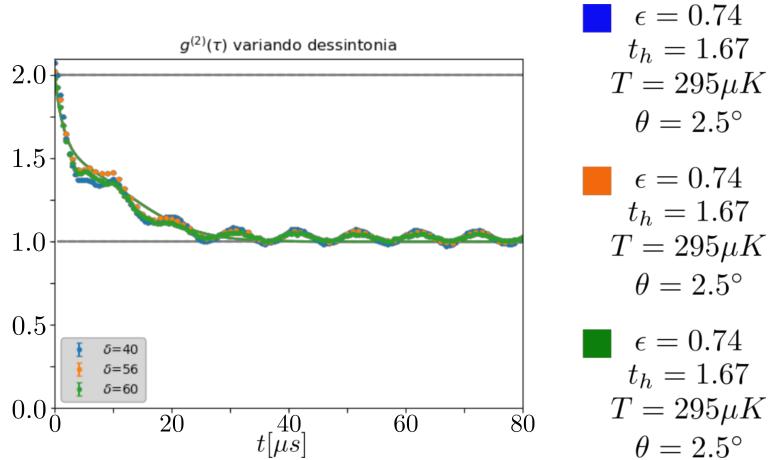


Figura 45 – Ajustes teóricos da função $g^{(2)}(\tau)$ variando a dessintonia do feixe de excitação em relação à transição atômica.

Nas figuras variando período e dessintonia, todas as curvas foram ajustadas por apenas um conjunto de parâmetros, dados pelas curvas com $T = 0.5\mu s$ e $\delta = 56\text{MHz}$, respectivamente. Isso foi feito pois não esperamos que esses dois parâmetros influenciem os resultados.

Na figura em que variamos o ângulo de espalhamento, deixamos livre apenas o parâmetro de ângulo para variar entre as curvas, sendo todos os outros ajustados pela curva de $\theta = 1.1^\circ$. O motivo é que toda a configuração experimental exceto o ângulo de detecção foi o mesmo para as três curvas.

Por fim, nas figuras variando profundidade óptica e probabilidade de espalhamento, todos os parâmetros exceto ângulo estão livres para variar. Para a profundidade óptica da armadilha magneto óptica isso se justifica porque, ao alterá-la, esperamos que todas as características da nuvem atômica mudem, desde seu tamanho (o que pode afetar ϵ e t_h se esses estiverem relacionados com uma imperfeição espacial no cancelamento do campo magnético, por exemplo) até a temperatura dos átomos. Para a probabilidade de espalhamento a justificativa se dá porque se esta for muito alta, a sequência de pulsos do feixe de excitação pode esquentar a nuvem atômica, mudando suas características.

Considerando o bom ajuste dos dados pela teoria em sua parte mais lenta, podemos concluir que a origem da memória resiliente ao processo de leitura presente no conjunto de átomos frios está no efeito coletivo causado pela superposição entre autoestados de momento linear da nuvem em que diferentes átomos foram responsáveis pelo espalhamento do fóton detectado. Além disso, imperfeições no aparato experimental podem ser incluídas no modelo a partir da introdução dos parâmetros ajustáveis ϵ e t_h .

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, partindo do reconhecimento da importância do entendimento de memórias quânticas para protocolos de informação quântica, especialmente memórias em ensembles de átomos frios, investigamos o mecanismo de uma memória no espalhamento de luz por um sistema desse tipo. Experimentalmente esta investigação pode ser feita utilizando configurações bem conhecidas. Para nós, o uso de um interferômetro de Hanbury Brown-Twiss foi bem recompensado.

Apesar de ser possível verificar rapidamente por uma análise simples dos dados experimentais que de fato há memória no sistema, e que essa memória armazena informação sobre com quais modos da luz os átomos interagiram, essa análise pode trazer problemas interpretativos.

A partir de um entendimento mais sutil sobre quais são as pressuposições sobre o tipo de estatística envolvida no processo que são embutidas na análise dos dados, é possível identificar possíveis origens dos aspectos mais difíceis de explicar dos dados. Além de ser possível explicar a origem de tais aspectos não esperados dos resultados através da análise estatística, também pode ser possível utilizar esse conhecimento para propor novas formas de processamento dos dados que filtram o que não interessa no resultado final.

Possuindo os resultados provenientes da análise de dados adequada, pudemos rastrear a origem da memória nos átomos a um efeito coletivo do ensemble de átomos. A função de onda após a detecção de um fóton em um certo modo é uma superposição de autoestados de momento em que diferentes átomos foram o átomo responsável por espalhar o fóton detectado. Esse estado que pode ser interpretado como consequência da indistinguibilidade entre caminhos diferentes que levam à detecção do fóton, é o estado responsável pelo desvio da função $g^{(2)}(0)$ para valores acima de 1, o que vimos resultar em uma memória.

A previsão teórica fornecida pelo nosso tratamento, no entanto, não leva em conta todas as imperfeições ou processos relevantes ao processo inteiro, mas apenas modela o decaimento geral da memória. Ainda assim, com uma modificação nessa previsão de acordo com um argumento fenomenológico, podemos obter um bom acordo entre o experimento e a teoria, completando o resultado deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- 1 L. de CAMÕES. Os Lusíadas. L&PM, 2008.
- 2 L.-M. DUAN, M. D. Lukin, J. I. Cirac, & P. Zoller. Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics. *Nature*, v. **414**, 413, (2001).
- 3 M. ZUKOWSKI, A. Zeilinger, M. A. Horne, & A. Ekert, "Event-ready-detectors" Bell experiment via entanglement swapping, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4287, (1993).
- 4 SANGOUARD, N. et al. Quantum repeaters based on atomic ensembles and linear optics. *Rev. Mod. Phys.*, **83**, n. 1, 2011.
- 5 A. J. F. de ALMEIDA, M.-A. MAYNARD, C. BANERJEE, D. FELINTO, F. GOLDBARF, & J. W. R. TABOSA, Nonvolatile optical memory via recoil-induced resonance in a pure two-level system, *Phys. Rev. A* **94**, 063834, 2016.
- 6 FOOT, C. J. *Atomic physics*. Oxford University Press, 2005.
- 7 R. LOUDON, *The quantum theory of light*. 3d Edition. OUP Oxford, 2000.
- 8 J. W. GOODMAN, *Statistical Optics*. Wiley, 2000.
- 9 L. MANDEL, E. WOLF, *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press, 1995.
- 10 HÄNSCH, T. W., SCHAWLOW, A. L., Cooling of gases by laser radiation. *Opt. Commun.*, **13**, 1, 1975.
- 11 CHU, S., BJORKHOLM, J., CABLE, A., & ASHKIN, A., Three-Dimensional Viscous Confinement and Cooling of Atoms by Resonance Radiation Pressure, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 314, 1985.
- 12 J.J. SAKURAI & J. NAPOLITANO, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, 2nd Edition, 2011.
- 13 E. L. RAAB, M. PRENTISS, A. CABLE, S. CHU, & D. E. Pritchard, Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2631, 1987.
- 14 P. LETT, R. WATTS, C. WESTBROOK, W. PHILLIPS, P. GOULD, & H. METCALF, Observation of Atoms Laser Cooled bellow the Doppler Limit, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 169, 1988.
- 15 J. DALIBARD & C. COHEN-TANNOUDJI, Laser Cooling Below the Doppler Limit by Polarization Gradients - Simple Theoretical Models, *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2023, 1989.

- 16 STECK, D. A. Rubidium 87 D Line Data. 2015.
- 17 BROWN, R. H.; TWISS, R. Q., Correlation between photons in two coherent beams of light. *Nature*, v. 177, n. 4497, 1956.
- 18 M. HARRIS, G.N. PEARSON, C.A. HILL, J.M. VAUGHAN, The fractal character of Gaussian-Lorentzian light, *Opt. Comm.* **116**, 15-19, 1995.
- 19 Datasheet do Módulo Contador de Fótons Excelitas Technologies SPCM-AQRH-14-FC. Numéro de série 26830.
- 20 R. J. GLAUBER, The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, **130**, 1963.
- 21 BAIN, A.J. & SQUIRE, A., Super-Gaussian field statistics in broadband laser emission, *Opt. Comm.* **135**, 157-163, 1997.
- 22 D. F. WALLS and G. J. MILBURN, *Quantum Optics*. Springer, 2008.
- 23 M. J. COLLET, Exact density-matrix calculations for simple open systems *Phys. Rev. A*, **38**, 2233
- 24 S. BALI, D. HOFFMANN, J. SIMÁN, & T. WALKER, Measurements of intensity correlations of scattered light from laser-cooled atoms *Phys. Rev. A*, **53**, 3469
- 25 Kazuyuki NAKAYAMA, Yutaka YOSHIKAWA, Hisatoshi MATSUMOTO, Yoshio TORII, & Takahiro KUGA, Precise intensity correlation measurement for atomic resonance fluorescence from optical molasses, *Opt. Express* **18**, 6604-6612 (2010)

APÊNDICE A – TRATAMENTO DOS DADOS BRUTOS

A placa contadora gera, para nossos dados que correspondem a observações durante períodos de cerca de 3 horas, arquivos de tamanho relativamente grande, em torno de 2 GB. Esse tamanho exagerado pode aumentar a dificuldade computacional da análise. Felizmente, como estamos num regime de baixíssima intensidade, e a probabilidade de detecção de luz após aplicação de cada pulso vai a cerca de 2%, a maior parte da informação escrita pela placa contadora é redundante. Esquematicamente, temos na prática arquivos de dados no seguinte formato:

Início de uma nova contagem
Detecção no detector A, um tempo T1 desde o último início de contagem
Início de uma nova contagem
Início de uma nova contagem
Início de uma nova contagem
Detecção no detector A, um tempo T2 desde o último início de contagem
Detecção no detector B, um tempo T3 desde o último início de contagem
Início de uma nova contagem

e assim por diante. Nós interpretamos como um instante cada janela temporal entre dois inícios de contagem (isto é, duas detecções dentro da mesma contagem são interpretadas como simultâneas). Por isso, é possível comprimir a sequência de anotações acima para:

Contagens desde a última detecção	Número de detecções em A	Número de detecções em B
1	1	0
3	1	1
1	0	0

Uma compressão desse tipo, em que escrevemos apenas os números da última tabela leva o tamanho dos arquivos de cerca de 2 GB para cerca de 200 MB, devido a grande quantidade de linhas “início de contagem” repetidas no arquivo original, tornando-os facilmente analisáveis pelo computador.

O formato dos dados que utilizamos para análise, porém, está na forma “clicks vs tempo”. Assim, para que esses dados comprimidos estejam nessa forma, basta que o valor da coluna que conta as varreduras acumule o total de varreduras desde a primeira linha. Com isso, os dados ficam na seguinte forma:

Varreduras desde o início do experimento	Número de detecções em A	Número de detecções em B
1	1	0
4	1	1
5	0	0

Os dados nessa forma são representados nos diagramas que ilustram o processo de análise dos dados por figuras como a [46](#).

t0	a1	b1
t1	a2	b2
...		

Figura 46 – Representação diagramática dos dados após tratamento de compressão e formatação. Essa representação aparece nos diagramas de análise de dados

APÊNDICE B – ANÁLISE DOS DADOS EXPERIMENTAIS

$g^{(2)}(\tau)$ supondo estatística estacionária

A primeira forma, mais simples, que podemos pensar para obter $g^{(2)}(\tau)$ de dados na forma da tabela no apêndice A começa pela interpretação da expressão para $g^{(2)}$ em termos de probabilidades de detecção:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle : \hat{I}(\tau) \hat{I}(0) : \rangle}{\langle : \hat{I}(\tau) : \rangle \langle : \hat{I}(0) : \rangle} = \frac{P(A(\tau), B(0))}{P(A(\tau))P(B(0))} = \frac{N_{A,B}(\tau, 0)}{N_A N_B} N_s,$$

onde $N_{A,B}(\tau, 0)$ é a quantidade de detecções em A após um tempo τ depois de uma detecção em B, N_A é o número de detecções em A, N_B o número de detecções em B, e N_s o número total de inícios de contagem de detecções na tiragem de dados. Para o último passo, o de escrever as probabilidades em termos de números de clicks, supomos que as probabilidades não dependem da origem temporal, o que significa supor que lidamos com uma estatística estacionária. Falando em termos do arquivo de dados comprimido, isso significa que cada linha pode funcionar como um ponto de partida para a contagem de $N_{A,B}$. Assim, um programa que, sobre o arquivo de dados na forma da tabela A, siga o seguinte algoritmo será capaz de obter o gráfico de $g^{(2)}(\tau)$ para um intervalo $[0, \tau_{\max}]$:

Primeiro passo Escolher uma nova linha i :

1. Somar o número de inícios de contagem contabilizados na linha i a N_s
2. Se há detecção em A na linha i , somar 1 em N_A
3. Se há detecção em B na linha i , somar 1 em N_B
4. Se há detecção em A e em B na linha i , somar 1 em $N_{A,B}(0, 0)$

Segundo passo Para cada $j \in \{1, \tau_{\max}/(\text{tempo entre pulsos})\}$:

1. Se existe a linha $i + j$ e há detecção em A ou em B na linha $i + j$, somar 1 em $N_{A,B}(j * (\text{tempo entre pulsos}), 0)$

Terceiro passo Se o final do arquivo não tiver sido alcançado, voltar ao primeiro passo.

Quarto passo Calcular $g^{(2)}(\tau)$ para cada τ utilizando os números de contagens obtidos.

$g^{(2)}(\tau)$ através de média por ensemble

Para realizar médias por ensemble, de acordo com a discussão do capítulo 3, é preciso separar os dados em uma série de funções do tempo. Para isso, definimos como o início de cada uma delas a preparação de cada MOT. Se o trem de pulsos consiste de 2000 pulsos (no nosso experimento, utilizamos 1999, 999 e 499 pulsos, mas para este exemplo utilizaremos 2000), um evento que ocorreu t_i pulsos após o início do experimento conta como um click da $t_i/2000$ -ésima função de amostra, onde / indica a parte inteira da divisão. Pela definição da origem temporal, também segue que o click ocorreu um tempo $t_i \% 2000$ desde o início dessa função, onde % indica o resto da divisão.

Assim, ao varrer os dados somando clicks no detector A ou B em $t = t_i \% 2000$, estamos contando $N_A(t)$ e $N_B(t)$. Contando clicks em A e B em t_A e t_B desde que $t_A/2000 = t_B/2000$ (isto é, ambos pertencem à mesma preparação da MOT), estamos contando $N_{AB}(t_A, t_B)$. Com esses números e o número total de funções dado por $t_f = \max\{t_i\}$ dividido pela quantidade de pulsos por preparação da MOT, temos o número de funções de amostra. Logo, obtemos a função $g^{(2)}(t_1, t_2)$ fazendo

$$g^{(2)}(t_1, t_2) = \frac{N_{AB}(t_1, t_2)}{N_A(t_1)N_B(t_2)} \times (t_f/2000) \quad (\text{B.1})$$

O algoritmo para calcular os N_A , N_B e N_{AB} a partir dos dados fica:

Passo zero Fazer $t_f = 0$

Primeiro passo Escolher uma nova linha i :

1. Se $t_i > t_f$, fazer $t_f := t_i$
2. Se há detecção em A na linha i , somar 1 em $N_A(t_i \% 2000)$
3. Se há detecção em B na linha i , somar 1 em $N_B(t_i \% 2000)$
4. Se há detecção em A e em B na linha i , somar 1 em $N_{A,B}((t_i \% 2000), (t_i \% 2000))$

Segundo passo Se houve detecção em A, para cada $j \in (i, i + 2000]$:

1. Se existe a linha $i + j$, e há detecção em B na linha $i + j$, e $t_j/2000 = t_i/2000$ somar 1 em $N_{A,B}(t_i \% 2000, t_j \% 2000)$

Terceiro passo Se nem todas as linhas tiverem sido escolhidas como linha i , voltar ao primeiro passo

Quarto passo Calcular $g^{(2)}(t_1, t_2)$ utilizando os números de contagens obtidos