



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

IRENO TIBÚRCIO CAVALCANTI NETO

**OTIMIZAÇÃO DO PESO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS METÁLICAS
UTILIZANDO ALGORITMOS GENÉTICOS**

Caruaru

2019

IRENO TIBÚRCIO CAVALCANTI NETO

**OTIMIZAÇÃO DO PESO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS METÁLICAS
UTILIZANDO ALGORITMOS GENÉTICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil e Ambiental.

Área de concentração: Estruturas e Materiais

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Giuliana Furtado Franca Bono

Caruaru

2019

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva - CRB/4 – 1223

C376o Cavalcanti Neto, Ireno Tibúrcio.
Otimização do peso de estruturas treliçadas metálicas utilizando algoritmos genéticos. / Ireno Tibúrcio Cavalcanti Neto. – 2019.
96 f.; il.: 30 cm.

Orientadora: Giuliana Furtado França Bono.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, 2019.
Inclui Referências.

1. Otimização estrutural. 2. Trelças (Construção civil). 3. Método dos elementos finitos. 4. Algoritmos genéticos. I. Bono, Giuliana Furtado França (Orientadora). II. Título.

CDD 620 (23. ed.) UFPE (CAA 2019-245)

IRENO TIBÚRCIO CAVALCANTI NETO

**OTIMIZAÇÃO DO PESO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS METÁLICAS
UTILIZANDO ALGORITMOS GENÉTICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil e Ambiental.

Aprovada em: 28 / 06 / 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Giuliana Furtado Franca Bono (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^o. Dr. Gustavo Bono (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^o. Dr. Douglas Mateus de Lima (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho aos meus familiares, que me acompanharam ao longo dessa jornada. Aos meus colegas de profissão, que ajudam a fomentar a indústria da construção civil. E por fim, aos meus gestores que me permitiram desenvolver este trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todas as graças que recebi, e venho recebendo, ao longo da minha vida.

A meus pais, Ireno Tibúrcio e Maria Betânia, que sempre se dedicaram em pró de uma boa educação para com seus filhos, viabilizando a abertura de diversas portas ao longo da minha jornada.

A minha esposa, Joyce Lira, que sempre está ao meu lado e solidariamente acabou convivendo com o ônus de uma pós-graduação desta amplitude.

Aos meus familiares e amigos de pós-graduação, que fizeram parte desta importante etapa da minha vida, contribuindo em diversos momentos para que eu obtivesse êxito em cada fase do trabalho.

Aos meus gestores, Bento Júnior e Betânia Menezes, e colegas de profissão, que foram compreensivos e viabilizaram que eu pudesse participar do mestrado.

A Prof^a Dr^a Giuliana Bono, que confiou no meu potencial e me orientou de forma a possibilitar o sucesso deste trabalho, com seu elevado senso de comprometimento e dedicação.

Segundo a Teoria Especial da Relatividade de Einstein, muitas das leis aparentemente invioláveis do universo são alteradas de acordo com o observador. Em consequência, algumas incríveis impossibilidades em um mundo aparentemente objetivo e fixo de repente se tornaram possíveis. (ACHOR, 2012, p. 74)

RESUMO

Este trabalho visa a otimização de sistemas estruturais articulados que atende as restrições de segurança e premissas de projeto impostas. Atualmente são fundamentais soluções de projeto estruturais que cumpram sua finalidade, quanto à resistência e durabilidade, e demandem recursos materiais reduzidos e estruturas exequíveis, tornando-as eficientes e de baixo custo. Este trabalho otimiza a estrutura mediante redução do peso estrutural até uma solução que não extrapole as restrições impostas (tensão axial, deslocamento nodal e flambagem global do elemento). Aborda como variável de projeto a área da seção transversal dos elementos, de domínio contínuo ou discreto. O processo de busca da solução ótima foi desenvolvido por um programa de otimização estrutural em linguagem MATLAB com interface de entrada e saída de dados no *software* comercial GiD. Para implementar as rotinas de análise e otimização estrutural são utilizados o Método dos Elementos Finitos e o método de otimização dos Algoritmos Genéticos. Para fins de validação do programa desenvolvido, exemplos práticos e conhecidos na literatura foram aplicados e os resultados analisados e comparados aos obtidos por outros autores ou pela metodologia tradicional de dimensionamento. Para os exemplos práticos foram utilizados 4 (quatro) domínios discretos para a variável de projeto, utilizando-se de perfis comerciais (C, I, U e T). O estudo comprova a robustez do algoritmo proposto, considerando que os resultados obtidos se demonstram confiáveis e de custo computacional adequado. Sendo iguais ou próximos daqueles comparados com a literatura e significativamente inferiores quando comparados com a metodologia tradicional de dimensionamento.

Palavras-chave: Otimização estrutural. Estruturas treliçadas. Método dos elementos finitos. Algoritmos genéticos.

ABSTRACT

This work aims at the optimization of articulated structural systems that attends the safety constraints and imposed project premises. Currently, structural projects solution that attend their endurance and durability requirements, and require reduced material resources and feasible structures, making them efficient and cost effective, are fundamental. This work optimizes the structure by reducing the structural weight to a solution that does not go beyond the imposed constraints (axial tension, nodal displacement and overall buckling of the element). Approaches as a design variable the cross-sectional area of the elements, continuous or discrete domains. The search process of the optimal solution was developed by a MATLAB language structural optimization program with input and output data interface in the commercial software GiD. To implement the analysis and structural optimization routines, the Finite Element Method and the Genetic Algorithm optimization method are used. For the purpose of validating the developed program, practical examples and known in the literature were applied and the results analyzed and compared to those obtained by other authors or by the traditional methodology of design. For the practical examples we used 4 (four) discrete domains for the design variable, using commercial profiles (C, I, U and T). The study confirms the robustness of the proposed algorithm, considering that the results obtained are reliable and of adequate computational cost. Equal or close to those compared to the literature and significantly lower when compared to the traditional sizing methodology.

Keywords: Structural optimization. Truss structures. Finite element methods. Genetic algorithms.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Discretização de diferentes sólidos e estruturas com elementos finitos.....	25
Figura 2 –	Deformação de uma barra sujeita a forças axiais. Sendo (i) e (j) a numeração global dos nós e (e) a do elemento.....	27
Figura 3 –	Forças e deslocamentos nos extremos de barras treliçadas planas	28
Figura 4 –	Elemento de barra.....	31
Figura 5 –	Estrutura treliçada plana	32
Quadro 1 –	Formulação do processo de otimização.....	34
Fluxograma 1 –	Fluxograma de otimização estrutural	35
Figura 6 –	Otimização dimensional de uma treliça.....	36
Figura 7 –	Otimização de forma de uma treliça.....	36
Figura 8 –	Otimização topológica de uma treliça.....	37
Quadro 2 –	Técnicas de procura.....	38
Fluxograma 2 –	Fluxograma dos Algoritmos Genéticos.....	40
Quadro 3 –	Vantagens e desvantagens dos Algoritmos Genéticos	43
Quadro 4 –	Formulação do problema de otimização proposto.....	46
Fluxograma 3 –	Fluxograma do programa implementado.....	50
Figura 9 –	Treliça plana de 18 barras.....	53
Figura 10 –	Resultados da configuração otimizada do problema 1 (Caso 1).....	56
Figura 11 –	Resultados da configuração otimizada do problema 1 (Caso 2).....	57
Figura 12 –	Treliça espacial de 25 barras	58
Figura 13 –	Resultados da configuração otimizada do problema 2 (Caso 1).	61
Figura 14 –	Resultados da configuração otimizada do problema 2 (Caso 2).	62
Figura 15 –	Treliça plana de 200 barras.....	63
Figura 16 –	Resultados da configuração otimizada do problema 3 (Caso 1-1)....	67
Figura 17 –	Resultados da configuração otimizada do problema 3 (Caso 1-2)....	67
Figura 18 –	Resultados da configuração otimizada do problema 3 (Caso 1-3)....	68
Figura 19 –	Resultados da configuração otimizada do problema 3 (Caso 2).	71
Figura 20 –	Treliça espacial de 120 barras	72
Figura 21 –	Resultados da configuração otimizada do problema 4.....	75
Figura 22 –	Treliça Pratt de 6 módulos	76
Figura 23 –	Resultados da configuração otimizada do problema 5 (Etapa 1).....	78
Figura 24 –	Resultados da configuração otimizada do problema 5 (Etapa 3 – Perfil C)	81
Figura 25 –	Treliça espacial para coberta	82

Figura 26 –	Resultados da configuração otimizada do problema 6 (Caso 1 - contínuo)	84
Figura 27 –	Resultados da configuração otimizada do problema 6 (Caso 2 – Perfil C)..	86

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Configuração do problema 1: treliça plana de 18 barras	54
Tabela 2 -	Resultados otimizados para treliça plana de 18 barras (Caso 1)	55
Tabela 3 -	Resultados otimizados para treliça plana de 18 barras (Caso 2)	57
Tabela 4 -	Configuração do problema 2: treliça espacial de 25 barras.....	59
Tabela 5 -	Resultados otimizados para treliça espacial de 25 barras (Caso 1)	60
Tabela 6 -	Resultados otimizados para treliça espacial de 25 barras (Caso 2)	62
Tabela 7 -	Agrupamento das variáveis de projeto, problema 3	64
Tabela 8 -	Configuração do problema 3: treliça plana de 200 barras	65
Tabela 9 -	Resultados otimizados para treliça plana de 200 barras (Caso 1) ...	66
Tabela 10 -	Resultados otimizados para treliça plana de 200 barras (Caso 1-3)	69
Tabela 11 -	Resultados otimizados para treliça plana de 200 barras (Caso 2-3)	70
Tabela 12 -	Configuração do problema 4: treliça espacial de 120 barras.....	73
Tabela 13 -	Resultados otimizados para treliça espacial de 120 barras.....	74
Tabela 14 -	Configuração do problema 5: Treliça Pratt de 6 módulos.....	77
Tabela 15 -	Resultados otimizados para Treliça Pratt de 6 módulos (Etapas 1 e 2)	79
Tabela 16 -	Resultados otimizados para Treliça Pratt com 6 módulos (Perfis Comerciais)	80
Tabela 17 -	Agrupamento dos elementos estruturais, problema 6	82
Tabela 18 -	Configuração do problema 6: treliça espacial para coberta.....	83
Tabela 19 -	Resultados otimizados para Treliça espacial de 200 barras (Caso 1)	85
Tabela 20 -	Resultados otimizados para Treliça espacial de 200 barras (Caso 2)	85

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal da barra
l	Comprimento da barra
γ	Peso específico do material
ε	Deformação do material
E	Módulo de Elasticidade Longitudinal do material
I	Momento de Inércia
σ	Tensão longitudinal na barra
N	Força Axial na barra
d	Deslocamento
k	Coefficiente de rigidez da barra
x, y, z	Eixos cartesianos, referencial global
F_x	Força no eixo x, referencial global
F_y	Força no eixo y, referencial global
u	Deslocamento no eixo x, referencial global
v	Deslocamento no eixo y, referencial global
x', y', z'	Eixos cartesianos, referencial local
$F_{x'}$	Força no eixo x, referencial local
$F_{y'}$	Força no eixo y, referencial local
$F_{z'}$	Força no eixo z, referencial local
u'	Deslocamento no eixo x, referencial local
v'	Deslocamento no eixo y, referencial local
w'	Deslocamento no eixo z, referencial local
\mathbf{q}	Vetor de forças
\mathbf{K}	Matriz de rigidez
\mathbf{a}	Vetor de deslocamentos
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos, referencial global
\mathbf{L}	Vetor de cossenos diretores
f_x	Componente da força nodal
P_x	Carga pontual externa
R_x	Reação nodal na direção x
R_y	Reação nodal na direção y
\mathbf{f}	Vetor de forças nodais
\mathbf{p}	Vetor de cargas pontuais externas

\mathbf{r}	Vetor de reações nodais
$f(\mathbf{x})$	Função Objetivo
\mathbf{x}	Vetor de variáveis de projeto
$h_j(\mathbf{x})$	Restrições de igualdade
$g_j(\mathbf{x})$	Restrições de desigualdade
P	Carregamento nodal
σ_{cr}	Tensão Crítica de Euler
K	Constante para formulação da Tensão Crítica de Euler

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	OBJETIVOS.....	17
1.1.1	Objetivo Geral	17
1.1.2	Objetivos Específicos	17
1.2	JUSTIFICATIVA / MOTIVAÇÃO	17
1.3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	25
2.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS.....	25
2.1.1	Formulação Direta do Elemento de Barra	26
2.1.2	Transformação de Coordenadas	28
2.1.3	Matriz de Rigidez Global	30
2.2	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....	33
2.2.1	Tipos de Otimização	35
2.2.2	Métodos de Otimização	37
2.3	MÉTODO DOS ALGORITMOS GENÉTICOS.....	39
2.4	OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS	43
3	METODOLOGIA	45
3.1	PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	45
3.2	IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA.....	47
3.3	VALIDAÇÃO DO PROGRAMA	51
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	52
4.1	TRELIÇA PLANA DE 18 BARRAS	52
4.2	TRELIÇA ESPACIAL DE 25 BARRAS.....	58
4.3	TRELIÇA PLANA DE 200 BARRAS	62
4.4	TRELIÇA ESPACIAL DE 120 BARRAS.....	71
4.5	TRELIÇA PRATT DE 6 MÓDULOS	75
4.6	TRELIÇA ESPACIAL PARA COBERTA	81
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	87
5.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	89
	REFERÊNCIAS	90
	ANEXO A – TABELA DE PERFIS CANTONEIRA (C)	93
	ANEXO B – TABELA DE PERFIS I	94
	ANEXO C – TABELA DE PERFIS U	95
	ANEXO D – TABELA DE PERFIS T	96

1 INTRODUÇÃO

A humanidade ao longo de sua existência utiliza os recursos naturais como meios de sobrevivência, qualidade de vida e geração de valor (serviços, produtos, experiências, entre outros). O aumento populacional, a globalização e o avanço tecnológico potencializaram esse uso, provocando uma preocupação universal com relação à utilização racional desses recursos. Por isso, diversos estudos, em diferentes áreas, buscam disponibilizar subsídios para um desenvolvimento sustentável.

A engenharia estrutural tem a finalidade de calcular e projetar elementos de sustentação para produtos dos mais variados setores da sociedade (pontes, barragens, edifícios, torres de transmissão, plataforma de petróleo, automóveis, aviões, navios, entre outros). Desta forma, a engenharia estrutural é responsável, direta ou indiretamente, pela utilização de diversos materiais, como concreto, aço, solo, plástico, madeira e vários recursos naturais disponíveis, objetivando a construção de uma estrutura segura e eficiente quanto a sua finalidade. Sendo assim, torna-se desafiador apresentar soluções racionais, a fim de diminuir o seu custo de produção e/ou facilitar o seu uso, como por exemplo, reduzindo o seu peso, sem comprometer a eficiência e segurança.

Geralmente, ao projetar uma estrutura, o engenheiro estrutural utiliza configurações prévias (pré-dimensionamento) e, posteriormente, através de um processo iterativo, verifica a segurança e condições de serviço da solução proposta, a qual deve-se enquadrar nos parâmetros previstos nas respectivas normas técnicas. Porém, isso não garante a solução ótima da estrutura, que pode ser obtida através de técnicas de otimização estrutural.

Os processos de otimização visam maximizar ou minimizar uma função objetivo sujeita a restrições de igualdade e/ou desigualdade. A solução ótima apresenta valores para as variáveis de projeto contidas na função objetivo, que a maximiza ou minimiza e atende as restrições impostas, mediante técnicas de derivação em relação às variáveis de projeto (métodos determinísticos) ou busca e avaliação randômica dentro do espaço amostral (métodos estocásticos).

As técnicas de otimização também podem ser classificadas em: paramétrica ou dimensional, cujo resultado ótimo propõe dimensões estruturais, como a área ótima de uma seção transversal ou a espessura ótima de uma barra; de forma ou

geométrica, em que as variáveis de projeto são coordenadas nodais da estrutura, ou seja, a solução ótima apresenta uma geometria específica; e topológica, que exclui ou inclui elementos na estrutura, interferindo em sua distribuição de material.

Dentre os diversos métodos de otimização aplicados atualmente, o criado por John Holland na década de 70, denominado Algoritmos Genéticos, merece destaque, uma vez que resolve problemas de alta complexidade, sendo utilizado em diversas áreas. Esta técnica é baseada no processo de seleção natural das espécies, de Charles Darwin, sendo algoritmos probabilísticos aplicáveis em diversos problemas de otimização.

No campo da engenharia civil, algumas estruturas possuem uma maior facilidade na implementação de técnicas de otimização, em função das suas especificidades. As estruturas treliçadas se enquadram nesse grupo, por terem maior facilidade em sua execução, em relação a outras estruturas, como as de concreto armado moldadas *in loco*, e também por possuírem elementos produzidos industrialmente, como os perfis metálicos. São soluções bastante versáteis, com resistência considerável para vencer grandes vãos, bastante utilizadas em cobertas, pontes, torres de telecomunicações e transmissão, passarelas, estruturas de contraventamento de edifícios altos, entre outras.

Ao otimizar uma estrutura treliçada, pode-se especificar como função objetivo o peso da estrutura, tendo como variável de projeto a área da seção transversal do elemento de barra. Como restrições têm-se a tensão e o deslocamento admissíveis, a flambagem, a flexibilidade, entre outros. É comum neste processo utilizar variáveis de projeto contínuas, que apesar de apresentarem uma solução ótima, muitas vezes não são soluções exequíveis, por não estarem disponíveis no mercado. A fim de resolver esse problema, é aconselhável fazer uso de variáveis de projeto discretas, adotando-se os valores usuais empregados na indústria.

Dentro deste contexto, pretende-se com este trabalho otimizar estruturas treliçadas a partir da redução do peso dos seus elementos estruturais, sem comprometer as premissas de projeto e os requisitos de segurança, resultando assim em configurações estruturais eficazes e que necessitam de menor quantitativo de materiais, reduzindo seu custo de produção e tornando-as mais eficientes.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Implementar um programa computacional para otimização paramétrica do peso de estruturas treliçadas, utilizando o método dos Algoritmos Genéticos.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Implementar um programa de otimização de estruturas treliçadas bidimensionais e tridimensionais, com emprego de Algoritmos Genéticos e o Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando o *software* MATLAB;
- Tornar o programa prático e de fácil utilização, empregando o *software* comercial GiD nas etapas de pré-processamento e pós-processamento;
- Adotar, para as variáveis de projeto, valores contínuos e/ou discretos (disponíveis comercialmente) para as áreas das seções transversais dos elementos de barra;
- Aplicar restrições de valores admissíveis para as áreas das seções transversais, tensão axial, deslocamento nodal e flambagem global;
- Efetivar a otimização de algumas estruturas treliçadas, sejam estudadas em outros trabalhos ou de aplicação prática, através do programa proposto;
- Analisar os resultados obtidos e compará-los com soluções apresentadas por outros autores ou com a metodologia de dimensionamento tradicional.

1.2 JUSTIFICATIVA / MOTIVAÇÃO

Sustentabilidade é um termo bastante utilizado na atualidade, em diversas áreas, inclusive na indústria da construção civil. As obras de engenharia civil, em sua grande maioria, consomem de maneira significativa recursos naturais, por isso é de suma importância que os profissionais responsáveis pela elaboração dos projetos obtenham soluções ótimas. A busca por essas soluções deve observar as premissas de projeto e as normas técnicas pertinentes. Uma vez encontrada a solução ótima, tem-se uma concepção estrutural segura, com uso racional dos materiais.

Além da redução do consumo de material, o processo de otimização na elaboração dos projetos de engenharia permite a redução do custo de produção das

edificações, por isso, é uma área de fundamental importância. Cabe ressaltar, que ao otimizar um elemento, pode-se não só reduzir seu custo e consumo de material, mas também tornar sua finalidade mais eficiente, a exemplo de pontes metálicas com fins militares, que reduzindo seu peso é possível facilitar as manobras de montagem dessas estruturas. Essa técnica pode ser utilizada para diversos fins, “qualquer problema em que certos parâmetros precisam ser determinados para satisfazer restrições pode ser formulado como um problema de otimização” (ARORA, 2012, p.2).

No âmbito da engenharia estrutural este conceito pode ser aplicado na elaboração de projetos de várias tipologias (pórticos, treliças, alvenaria estrutural, paredes de concreto, entre outros), com diversos materiais, como: estruturas de concreto moldado *in loco* ou pré-moldado; estruturas metálicas; estruturas mistas (aço-concreto); estruturas de madeira, entre outras.

Com a finalidade de estudar uma estrutura, cuja otimização se torna mais exequível dentro da indústria da construção civil, este trabalho trata da otimização do peso de estruturas treliçadas metálicas, por serem constituídas de elementos pré-fabricados industrializados, o que facilita o controle tecnológico do processo e conseqüentemente sua confiabilidade. Além de serem utilizadas em diversas construções como: edifícios, pontes, torres de energia e telecomunicações, galpões, estádios de futebol, cobertas, entre outras.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A engenharia civil possui uma infinidade de problemas estruturais, influenciados por diversos parâmetros, tornando-os de alta complexidade. Ao projetar uma estrutura, interferem na análise e solução do problema: os materiais utilizados, a configuração do carregamento, as condições de contorno, a finalidade da estrutura, a vida útil de projeto, o meio no qual está inserida, entre outros. Essas diversas considerações dificultam a obtenção dos resultados, principalmente quando se objetiva uma configuração estrutural ótima.

Otimizar uma solução estrutural é determiná-la buscando um objetivo específico (minimizar o peso, o custo de produção, os deslocamentos nodais, ou ainda, maximizar a rigidez estrutural, entre outros), enquanto determinadas restrições são atendidas (tensões e deslocamentos máximos admissíveis, áreas das seções transversais exequíveis, etc.). A indústria aeroespacial foi pioneira no uso de

técnicas de otimização, para qual, geralmente, minimizar o peso estrutural da aeronave é mais controlado do que as considerações de custo, contudo, em outras indústrias, como as de sistemas de engenharia civil, mecânica e automotiva, o custo pode ser a consideração primária, no entanto, o peso dos sistemas afetam o custo e a performance (HAFTKA e GÜRDAL, 1991, p.1).

Existem diversas técnicas de otimização, dentre elas, a dos Algoritmos Genéticos. Conforme descreve Goldberg (1989, p.1), são algoritmos de busca baseados na mecânica da seleção natural e da genética populacional. Eles combinam as estruturas dos sobreviventes mais aptos de uma determinada população com elementos estruturais gerados de maneira randômica. Os novos elementos podem ser provenientes do mesmo indivíduo, de outro indivíduo, ou criados de maneira aleatória. Dessa forma, todas as gerações surgem a partir de elementos estruturais dos indivíduos da geração anterior, similar ao processo de reprodução humana.

É possível otimizar uma estrutura, analisando sua dimensão, forma ou topologia, ou ainda, combinando esses três parâmetros. Deb e Gulati (2001) realizaram a otimização de treliças, considerando variáveis de projeto para as três abordagens, através dos Algoritmos Genéticos. Para a análise da dimensão da estrutura, considerou-se a área dos elementos e as coordenadas nodais foram utilizadas para a análise de sua forma, enquanto um princípio simples de exclusão de elementos foi introduzido para obter topologias diferentes. Para melhorar a eficiência do algoritmo foi desenvolvido um procedimento para classificar os nós da treliça em duas categorias: nós básicos, que são usados para suportar a treliça ou para aplicar uma carga; e nós não básicos, que não suportam a estrutura nem contém qualquer carga. Esse conceito garante a obtenção de soluções satisfatórias e evita análises pelo MEF de soluções inexecutáveis, diminuindo o custo computacional. Cinco exemplos estruturais já estudados na literatura foram testados e os resultados obtidos com essa metodologia, além de satisfatórios, foram melhores.

Wang, Zhang e Jiang (2002) apresentaram a otimização de forma para treliças sujeitas a restrições de deslocamentos. No trabalho, apresentou-se um método de mudança de nós evolutivo para a minimização do peso da treliça, no qual a variável de projeto é a coordenada dos nós da estrutura. Através da análise de sensibilidade, os nós são deslocados e a forma estrutural evolui para a configuração ideal. A

solução foi verificada através das condições de otimização de Kuhn–Tucker. O método foi validado através de sua aplicação em quatro estruturas de treliça típicas.

Croce *et al.* (2004) estudaram a otimização de estruturas de aço utilizadas para cobertas de galpões industriais através do método dos Algoritmos Genéticos, cujo procedimento avaliava a dimensão, forma e topologia da configuração estrutural que minimiza o seu peso, considerando um domínio discreto para as variáveis de projeto e restrições que garantem a segurança da solução. As variáveis de projeto possuíam apenas valores disponíveis comercialmente, aumentando a aplicabilidade da metodologia proposta. O estudo afirma que ao proceder à otimização com domínio contínuo, embora seja mais direta, resultados não disponíveis comercialmente são encontrados, e tentar implementar a solução mais próxima disponível no mercado pode tornar a configuração estrutural inviável (restrições não atendidas) ou não econômica (o peso é aumentado desnecessariamente).

A técnica usual dos Algoritmos Genéticos atribui valores pré-definidos para os parâmetros da função de penalidade, mutação e *crossover*, que são determinantes para eficiência do processo em encontrar um ótimo global. Diante disso, Togan e Daloglu (2006) realizaram um estudo no qual esses parâmetros eram atribuídos de maneira automática no algoritmo, através de uma abordagem adaptativa, variando de acordo com o valor de aptidão do indivíduo. Após os exemplos analisados, concluíram que essa abordagem aumenta a probabilidade de encontrar uma solução global e melhora o desempenho dos Algoritmos Genéticos.

Os diversos algoritmos existentes para otimização de estruturas treliçadas, geralmente, utilizam o MEF na etapa de análise estrutural, como se observa no estudo realizado por Christoforo, Marconato e Oliveira (2007). O trabalho desenvolvido pelos autores objetivou a determinação do valor ótimo das áreas das seções transversais dos elementos estruturais componentes de uma estrutura plana do tipo treliça, por intermédio do MEF aliado ao Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) para formulação da função objetivo. A função objetivo do problema é a diferença entre o vetor de forças equivalentes nodais da estrutura, pré-definido, e o vetor das forças internas que têm como variável independente a área da seção transversal dos elementos estruturais. A minimização dessa equação é realizada com uso do Método de Newton. Desta maneira, observa-se que a única restrição do problema é a força resistente dos elementos, inserida diretamente na função objetivo. Conclui-se, portanto, que há uma grande quantidade de configurações

possíveis para os problemas de otimização estrutural, através da definição das funções objetivo e de restrições, e das variáveis de projeto, que podem ser combinadas.

Os Algoritmos Genéticos usualmente são associados a outros métodos de otimização, a fim de vencer ótimos locais e melhorar seu desempenho computacional. Liu *et al.* (2008) realizaram um estudo que integra os Algoritmos Genéticos a outro processo de otimização estrutural evolutiva. A junção desses métodos resultou na Otimização Estrutural Evolutiva Genética (OEEG). Dois problemas de otimização foram estudados: otimizar a rigidez da estrutura sujeita à restrição de peso e o próprio peso sujeito à restrição de deslocamentos nodais. Três modelos estruturais foram comparados em ambos os métodos e os resultados obtidos demonstraram uma maior robustez da OEEG, apresentando resultados melhores e, principalmente, com custo computacional bastante reduzido.

Outra abordagem para reduzir o custo computacional dos Algoritmos Genéticos foi estudada por Rahamia, Kaveh e Gholipour (2008). No estudo, os autores utilizaram uma combinação dos métodos da força e energia. Esse método exclui a necessidade de encontrar a matriz de rigidez inversa e daquelas envolvidas no método das forças, operação necessária durante a análise de cada cromossomo no processo de otimização. Essas operações exigem muitas gerações, aumentam o tempo computacional e reduzem a taxa de convergência. A formulação em termos de conceitos de energia permite a aplicação eficiente dos Algoritmos Genéticos, conforme comprovado nos exemplos analisados e comparados com outras formulações.

Apesar dos Algoritmos Genéticos serem bastante robustos, como se pode observar nos trabalhos anteriores, depende um intenso custo computacional. Xu *et al.* (2009) propuseram um método de reanálise adaptativa a fim de agilizar o processo para otimização de treliças. Essa técnica de reanálise é derivada, principalmente, do método de aproximações combinadas de Kirsch. Um esquema de iteração foi adotado para determinar de forma adaptativa o número de vetores base em cada geração. Três exemplos foram analisados: 10 barras; 25 barras; e 200 barras. O objetivo era identificar a solução ótima para o menor peso estrutural, satisfazendo as restrições de tensão e deslocamento. O estudo demonstrou que a reanálise adaptativa afeta muito ligeiramente a precisão dos resultados, enquanto acelera o processo de otimização, principalmente para estruturas de larga escala.

Dede, Bekiroglu e Ayvaz (2011) também utilizaram os Algoritmos Genéticos, com restrições de tensão e deslocamento, para otimização de treliças, associados a um mecanismo de redução do custo computacional. Foram aplicadas variáveis de projeto discretas e contínuas relacionadas ao peso da estrutura. Para superar o desafio de busca no extenso espaço contínuo foi introduzido um mecanismo de Abordagem de Alcance Restrito. Um número pré-determinado de iterações é realizado e a solução obtida torna-se de referência. Essa solução de referência torna-se o centro de um novo domínio, formado a partir de uma amplitude previamente configurada. O trabalho proposto foi validado através de exemplos disponíveis na literatura, com: 25 barras; 72 barras; 200 barras; e 940 barras. Os resultados comprovaram a eficiência do programa para minimização do peso de treliças e que a abordagem utilizada requer menos memória e tempo computacional.

Wang e Ohmori (2013), ao estudar estruturas de treliças submetidas a cargas acidentais, como um terremoto de elevada proporção, demonstraram a diversidade de restrições que podem ser utilizadas em um problema de otimização estrutural. As restrições garantem a segurança da solução encontrada e tornam a simulação numérica mais próxima da realidade. O método dos Algoritmos Genéticos foi implementado com variáveis de projeto topológica (posição/existência dos elementos) e dimensional (área da seção transversal). Como restrições, foram considerados os valores admissíveis dos deslocamentos e tensões de cada elemento, do ângulo entre dois elementos interligados por um nó, a fim de evitar a interferência entre eles, e da distância entre elementos, para evitar cruzamentos inviáveis quanto à exequibilidade construtiva.

Embora existam diversas técnicas de busca, como visto anteriormente, nota-se que o método dos Algoritmos Genéticos é bastante utilizado nos problemas de otimização estrutural, sendo de grande aplicabilidade prática e versátil.

Zuo, Bai e Li (2014) apresentaram a possibilidade de utilizar um método de otimização híbrido, com associação do Critério de Otimalidade e Algoritmos Genéticos, para viabilizar a solução de problemas de estruturas treliçadas planas, com restrições de frequência, que exigem um alto custo computacional e são altamente não lineares. Utiliza-se, inicialmente, o Critério de Otimalidade para um estudo de sensibilidade das variáveis, mantendo aquelas mais eficientes, e, posteriormente, aplica-se o método dos Algoritmos Genéticos, para uma busca global, empregando novamente o Critério de Otimalidade para realizar uma busca

local. Os resultados verificaram que o método híbrido aumenta a confiabilidade da solução e reduz o custo computacional.

Mroginski *et al.* (2016), propôs uma ferramenta computacional para a obtenção da solução otimizada de seções transversais de estruturas treliçadas em 3 dimensões através do emprego do método dos Algoritmos Genéticos. O objetivo do problema de otimização estrutural era minimizar o peso total da estrutura, o deslocamento de uma seção específica e a distribuição de tensões internas, caracterizando uma função multiobjetivo. A análise multiobjetivo é realizada através de uma combinação linear das duas primeiras funções, e, posteriormente, aplicação da configuração física obtida na terceira função. Os resultados obtidos mostram a robustez e aplicabilidade dos Algoritmos Genéticos para problemas de otimização estrutural.

Os Algoritmos Genéticos são uma técnica de busca estocástica, que inicia a partir de uma população inicial, na qual os indivíduos são avaliados e selecionados (através da função *fitness*), posteriormente, sofrem operações genéticas (elitismo, *crossover* e mutação), e estando o critério de parada atendido encerra-se o processo, caso contrário, a iteração se repete. Para viabilizar o processo de busca em uma área de abrangência maior do domínio da função, o operador de mutação trabalha de maneira aleatória e assim pode desfazer uma solução ótima. Para problemas de grande escala, esse processo exige um esforço computacional substancial.

Por isso, Lu e Ye (2017) propuseram um Algoritmo Genético Guiado, no qual o operador de mutação é introduzido de maneira orientada. A informação de aptidão da solução avaliada não é utilizada apenas para a função de *fitness*, novamente utiliza-se para detectar indivíduos críticos (vulneráveis à estabilidade estrutural e de rigidez excessiva). Então, a mutação é implementada apenas nesses cromossomos críticos, de modo que a estabilidade dos elementos é ligeiramente fortalecida e os elementos de rigidez excessiva são ligeiramente enfraquecidos. Este processo é chamado de mutação guiada. Os resultados obtidos no trabalho validam a robustez desse método, para o qual uma cúpula com mais de mil elementos de feixe de coluna requereu um tempo relativamente curto para obter a solução ótima. Destaca-se ainda, que as seções da cúpula otimizada foram menores com a utilização da mutação guiada, satisfazendo as demandas de diminuição de custo do processo construtivo.

Após o estudo literário realizado, fica evidente a aderência dos Algoritmos Genéticos para os problemas de otimização estrutural, por serem robustos, versáteis quanto a modelagem estrutural, possibilitarem associação com outros métodos e por apresentarem resultados melhores comparados a outras técnicas de busca. Os Algoritmos Genéticos podem ser aplicados para otimização dimensional, de forma e topológica.

Constata-se ainda a importância de utilizar variáveis de projeto com valores disponíveis comercialmente, a fim de torna as soluções encontradas exequíveis, e restrições que garantam o desempenho da estrutura, como a restrição de deslocamentos. Observa-se que estruturas treliçadas são comumente utilizadas nos estudos de otimização, em virtude de suas peculiaridades, e a análise estrutural deste tipo de sistema é normalmente realizada através do MEF. Diante do exposto, a revisão bibliográfica elaborada corrobora os objetivos deste trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Na engenharia civil existem diversas estruturas, utilizadas em vários setores, das mais simples as mais complexas. Para a elaboração dos projetos dessas estruturas é fundamental a realização de uma análise estrutural, cuja solução do problema apresenta a resposta da estrutura (esforços, tensões, deformações, deslocamentos, entre outros) a um determinado carregamento. No processo de análise, em virtude das peculiaridades geométricas, do comportamento dos materiais, das cargas atuantes e das condições de contorno, é comum não ser possível obter soluções analíticas. Uma alternativa é utilizar a simulação numérica para encontrar resultados aproximados, e então viabilizar a concepção dos projetos estruturais.

2.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS

Dentre os métodos numéricos utilizados na análise estrutural, o Método dos Elementos Finitos (MEF) se destaca por ser utilizado em diversos setores (construção civil, aeronáutica, automobilística, entre outros) e por possuir uma capacidade singular de refinamento do modelo matemático e obter resultados convergentes a solução exata. A concepção do método é reduzir problemas complexos, com domínios contínuos, a configurações mais simples, com domínios discretos, metodologia denominada de discretização (Figura 1).

Figura 1 – Discretização de diferentes sólidos e estruturas com elementos finitos.



Fonte: Adaptado de Oñate (2009).

O processo de discretização é desenvolvido a partir da disposição de pontos nodais ao longo da estrutura, interligados entre si, definindo assim, sucessivos elementos finitos. A geometria desses elementos pode ser retas, triangulares, quadrilaterais, tetraédricas, hexagonais, entre outras, e de ordem linear, quadrática, ou outra superior, de acordo com o tipo de elemento. Uma vez que o problema real é substituído por um modelo discretizado na busca da solução, seremos capazes de encontrar apenas uma solução aproximada e não a solução exata (RAO, 2011, p.3).

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000, p.1), o processo de subdividir todos os sistemas em componentes individuais ou elementos, cujo comportamento é facilmente compreendido e, em seguida, reconstruir o sistema original desses componentes para estudar seu comportamento é uma maneira natural em que o engenheiro, o cientista ou mesmo o economista procede.

O resultado final desse processo é uma malha de elementos finitos, contendo os elementos com seus respectivos nós, nos quais são obtidos os respectivos esforços e deslocamentos. A solução do problema ocorre da resolução de um sistema de equações algébricas discretas. Desta maneira, quanto melhor refinada a malha, maior a probabilidade do resultado está próximo da solução exata.

Na análise das estruturas treliçadas, o MEF pode ser desenvolvido pela Formulação Direta para elementos de barra. Nos subitens subsequentes, mostra-se a formulação segundo abordagem realizada por Oñate (2009).

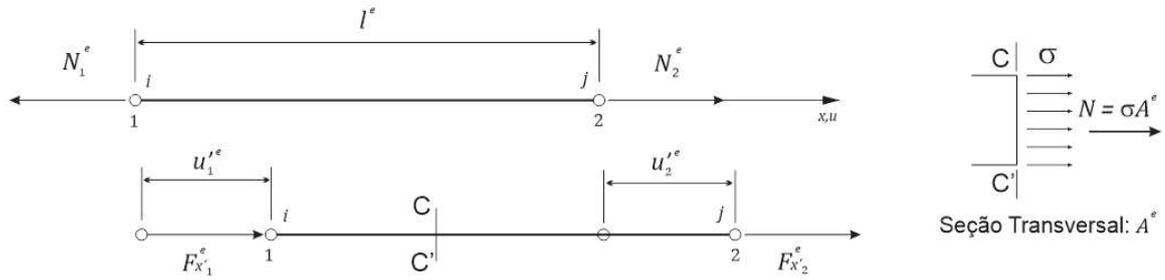
2.1.1 Formulação Direta do Elemento de Barra

As formulações para uma estrutura treliçada são obtidas a partir das equações de equilíbrio de cada barra e da estrutura como um todo. Considerando uma barra isolada e de comprimento l , submetida às forças axiais $F_{x'1}$ e $F_{x'2}$, atuando nos nós do elemento (Figura 2). O eixo local x' coincide com o eixo longitudinal da barra. Em Resistência dos Materiais a deformação específica convencional em qualquer ponto da barra é definida pelo alongamento relativo:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{u'_2 - u'_1}{l} \quad (2.1)$$

sendo u'_1 e u'_2 os deslocamentos associados à direção x' , correspondentes aos pontos nodais 1 e 2, respectivamente.

Figura 2 – Deformação de uma barra sujeita a forças axiais. Sendo i e j a numeração global dos nós e e a do elemento.



Fonte: Adaptado de Oñate (2009).

A tensão longitudinal σ está relacionada à deformação longitudinal ε pela lei de Hooke, conforme abaixo:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{u'_2 - u'_1}{l} \quad (2.2)$$

sendo E o Módulo de Elasticidade Longitudinal do Material (módulo de Young). A força axial N em cada seção é obtida multiplicando a tensão pela área da seção transversal. Essa força é transmitida para as barras adjacentes através dos nós. Para um material homogêneo, tem-se:

$$N_2 = A\sigma = (EA) \frac{u'_2 - u'_1}{l} \quad (2.3)$$

Para a barra da Figura 2, a equação de equilíbrio das forças é simplesmente:

$$F_{x'1} + F_{x'2} = 0 \quad (2.4a)$$

com

$$F_{x'2} = N_2 = (EA) \frac{u'_2 - u'_1}{l} = k(u'_2 - u'_1) \quad (2.4b)$$

$$F_{x'1} = -F_{x'2} = k(u'_1 - u'_2) = -N_1$$

sendo $k = \left(\frac{EA}{l}\right)$. A Equação 2.4b pode ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} F_{x'1} \\ F_{x'2} \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{K}\mathbf{a} \quad (2.5a)$$

onde

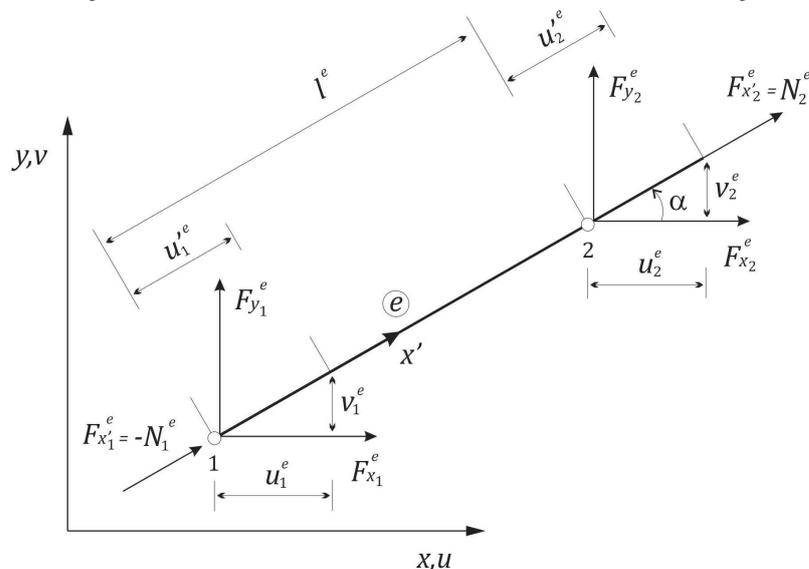
$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5b)$$

é a matriz de rigidez da barra, que depende de sua geometria (l, A) e propriedade mecânica (E). $\mathbf{a} = [u'_1 \ u'_2]^T$ e $\mathbf{q} = [F_{x'_1} \ F_{x'_2}]^T$ são os vetores de deslocamentos nodais e de forças nodais da barra, respectivamente.

2.1.2 Transformação de Coordenadas

Como extensão dos conceitos estudados no subitem anterior, pode-se formular o caso de estruturas treliçadas planas, inseridas em um sistema de coordenadas global. Neste caso, cada nó possui agora dois graus de liberdade, correspondentes aos deslocamentos ao longo dos eixos cartesianos. As Equações 2.4 que relacionam os deslocamentos nodais às forças axiais associadas ao eixo local de cada barra ainda se mantêm. No entanto, a soma das forças nodais para as diferentes barras que compartilham de uma articulação exige que as relações deslocamento-força sejam expressas em um sistema cartesiano global x, y .

Figura 3 – Forças e deslocamentos nos extremos de barras treliçadas planas.



Fonte: Adaptado de Oñate (2009).

Considerando-se que uma barra 1 – 2 inclinou um ângulo α em relação ao eixo global x , como observa-se na Figura 3. Para o nó 1 tem-se:

$$F_{x'_1} = F_{x_1} \cos\alpha + F_{y_1} \sin\alpha \quad , \quad u'_1 = u_1 \cos\alpha + v_1 \sin\alpha \quad (2.6)$$

onde as equações denotam as componentes na direção do eixo local x' . Na forma matricial, tem-se:

$$F_{x'1} = [\cos \alpha, \sin \alpha] \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \end{Bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{q}_1 \quad (2.7)$$

$$u'_{1} = [\cos \alpha, \sin \alpha] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{u}_1$$

onde \mathbf{u}_1 e \mathbf{q}_1 contêm os deslocamentos e as forças do nó 1, respectivamente, expressos no sistema cartesiano global x, y e $\mathbf{L} = [\cos \alpha, \sin \alpha]$. O vetor \mathbf{L} contém os cossenos diretores da direção x em relação ao eixo x' , onde $\sin \alpha$ pode ser expresso como $\cos \beta$.

De forma análoga pode-se determinar para o nó 2:

$$F_{x'2} = \mathbf{L}\mathbf{q}_2 \quad \text{e} \quad u'_{2} = \mathbf{L}\mathbf{u}_2 \quad (2.8a)$$

com

$$\mathbf{q}_2 = [F_{x2}, F_{y2}]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = [u_2, v_2]^T \quad (2.8b)$$

A partir da Figura 3, pode-se deduzir:

$$F_{x'1} = -F_{x'2} = k[u'_{1} - u'_{2}] \quad \text{com} \quad k = \left(\frac{EA}{l}\right) \quad (2.9)$$

Nota-se na Figura 3 que as forças nodais $F_{x'1}$ e $F_{x'2}$ coincidem, com o sinal apropriado, com as forças axiais nodais: $F_{x'1} = -N_1$ e $F_{x'2} = N_2$.

Considerando que $\mathbf{q}_i = \mathbf{L}^T F_{x'i}$, $i = 1, 2$ e utilizando as Equações 2.7, 2.8 e 2.9 são obtidas as seguintes equações:

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{L}^T k \mathbf{L} \mathbf{u}_1 - \mathbf{L}^T k \mathbf{L} \mathbf{u}_2 \quad (2.10)$$

$$\mathbf{q}_2 = -\mathbf{L}^T k \mathbf{L} \mathbf{u}_1 + \mathbf{L}^T k \mathbf{L} \mathbf{u}_2$$

Na forma matricial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.11a)$$

onde

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_{22} = -\mathbf{K}_{12} = -\mathbf{K}_{21} = \mathbf{L}^T k \mathbf{L} =$$

$$= k \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (2.11b)$$

Os princípios estudados acima podem ser aplicados para estruturas treliçadas tridimensionais. Para este tipo de estrutura, têm-se três componentes de esforços e deslocamentos em cada nó, que podem ser escritas conjuntamente como:

$$\mathbf{q}'_i = \begin{Bmatrix} F_{x'i} \\ F_{y'i} \\ F_{z'i} \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{u}'_i = \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ w'_i \end{Bmatrix} ; \quad i = 1,2 \quad (2.12)$$

sendo $F_{x'i}$, $F_{y'i}$, $F_{z'i}$ e u'_i , v'_i , w'_i , respectivamente, as componentes de forças e deslocamentos no nó i na direção local x' , y' , z' . De forma análoga, ocorre para o sistema referencial global.

O comportamento axial do elemento em estudo é idêntico ao da barra axial, formulado na Equação 2.3. Em virtude da terceira componente, têm-se agora três cossenos diretores:

$$\cos \alpha = \frac{u_2 - u_1}{l} ; \quad \cos \beta = \frac{v_2 - v_1}{l} ; \quad \cos \theta = \frac{w_2 - w_1}{l} \quad (2.13)$$

Dessa forma, a Equação 11 passa a ter a seguinte configuração:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.14a)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= \mathbf{K}_{22} = -\mathbf{K}_{12} = -\mathbf{K}_{21} = \mathbf{L}^T k \mathbf{L} = \\ &= k \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \theta \\ \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta & \cos \beta \cos \theta \\ \cos \alpha \cos \theta & \cos \beta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.14b)$$

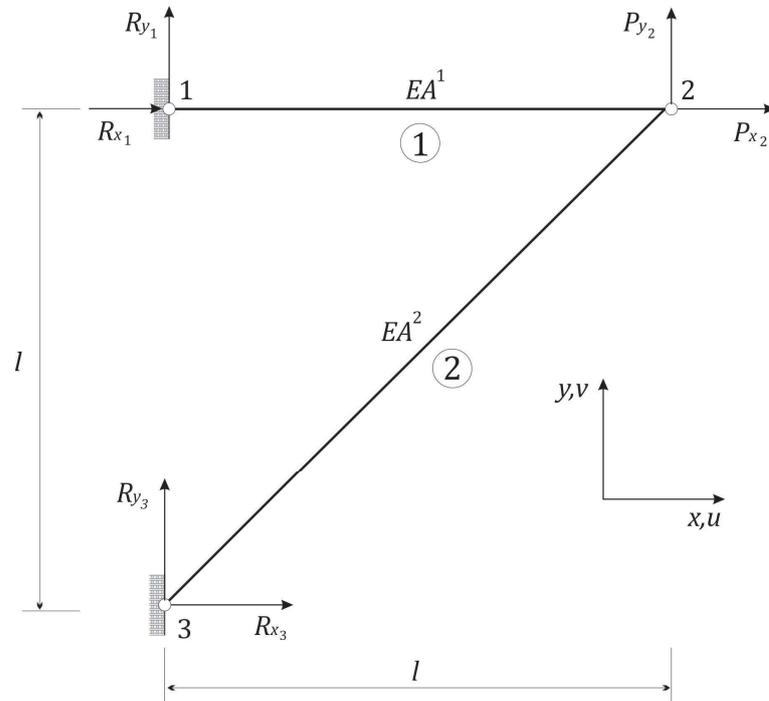
As contribuições individuais de força e rigidez de cada elemento de estruturas treliçadas podem ser adicionadas em um único vetor e em uma única matriz, respectivamente, como será apresentado no subitem posterior.

2.1.3 Matriz de Rigidez Global

No processo de análise matricial de uma estrutura treliçada, as contribuições individuais de força e rigidez de cada barra podem ser inseridas diretamente no vetor de forças nodais global e na matriz de rigidez global da estrutura, respectivamente. No caso de estruturas treliçadas planas, cada nó contribui com uma matriz de

Para fins de exemplificação, na Figura 5 apresenta-se uma estrutura treliçada plana, cuja formulação da matriz de rigidez global está apresentada na Equação 2.16.

Figura 5 – Estrutura treliçada plana.



Fonte: Adaptado de Oñate (2009).

$$\mathbf{K}^1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad ; \quad \mathbf{K}^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^2 & \mathbf{K}_{12}^2 \\ \mathbf{K}_{21}^2 & \mathbf{K}_{22}^2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{11}^2 & \mathbf{K}_{12}^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^2 & \mathbf{K}_{22}^2 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{f} \quad (2.16b)$$

Para a Equação 2.16 $\mathbf{a}_i = [u_i, v_i]^T$, $\mathbf{f}_i^e = [F_{x_i}, F_{y_i}]^T$, $\mathbf{p}_2 = [P_{x_2}, P_{y_2}]^T$, \mathbf{K}_{ij}^e como na Equação 2.11b, e $\mathbf{r}_i = [R_{x_i}, R_{y_i}]^T$ são as reações no nó i .

Efetuada a formação da matriz de rigidez global e do vetor global das forças nodais combinadas, tem-se o sistema de equações de equilíbrio da estrutura no qual devem ser introduzidas as condições de contorno para permitir a correspondente

resolução, obtendo-se o vetor de correspondência dos deslocamentos nodais na ordem da numeração global (SORIANO, 2005, p.119). Em seguida, associando o vetor de correspondência dos deslocamentos de cada barra, identificam-se os deslocamentos nodais da barra na correspondente numeração local e no referencial global, possibilitando a obtenção dos deslocamentos nodais de cada barra em seu referencial local, através da Equação 2.7a.

2.2 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Ao projetar uma estrutura, o engenheiro responsável normalmente faz uso de um processo iterativo, no qual uma configuração estrutural é pré-estabelecida (geometria, disposição e quantidade dos elementos estruturais) e a solução é avaliada quanto à segurança, desempenho e conforto, seguindo as normas técnicas pertinentes. Essa metodologia nem sempre possibilita o engenheiro estrutural encontrar a solução ótima, ou seja, além das condições de segurança e serviço, garantir o menor custo de produção ou consumo de materiais, disposições mais adequadas a sua finalidade, entre outros. Por isso, técnicas de otimização estrutural são bastante estudadas e necessárias, para possibilitar que a estrutura proposta em um projeto estrutural atenda a uma maximização ou minimização imposta ao problema.

Na formulação de um problema de otimização consideram-se a função objetivo (ou função de avaliação), o espaço de busca (ou domínio da função), as variáveis de projeto e as restrições impostas (de igualdade ou desigualdade). Podendo ser definidos como:

- Função Objetivo: função matemática que resulta os valores de um determinado parâmetro que se pretende otimizar. Por exemplo: peso de uma estrutura, ou seu custo de produção, ou ainda, deslocamento, entre outros;
- Espaço de Busca: é o espaço no qual a função objetivo será avaliada até encontrar a solução ótima ou atingir a tolerância do processo iterativo, conforme o método utilizado;
- Variáveis de Projeto: são as variáveis relacionadas à função objetivo, que determinam a solução encontrada. Por exemplo: comprimento de um elemento estrutural, largura, altura ou diâmetro de uma seção transversal,

coordenadas nodais, entre outras, podendo estas variáveis serem discretas e/ou contínuas;

- **Restrições:** condições impostas ao problema, podendo ser de igualdade e/ou desigualdade. Limitam um determinado parâmetro através das variáveis de projeto. Por exemplo: seção mínima ou máxima de um elemento estrutural, tensões e deslocamentos admissíveis do material, restrições geométricas, entre outras.

Esta formulação é apresentada no Quadro 1.

Quadro 1 – Formulação do processo de otimização.

<p><i>Minimizar/Maximizar: $f(\mathbf{x})$ (função objetivo)</i></p> <p><i>$\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}$ (espaço de busca)</i></p> <p><i>Sujeito: $h_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ (Restrições de igualdade)</i></p> <p><i>$g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p$ (Restrições de desigualdade)</i></p> <p><i>com \mathbf{x} sendo o vetor de variáveis de projeto</i></p>

Fonte: O Autor (2019).

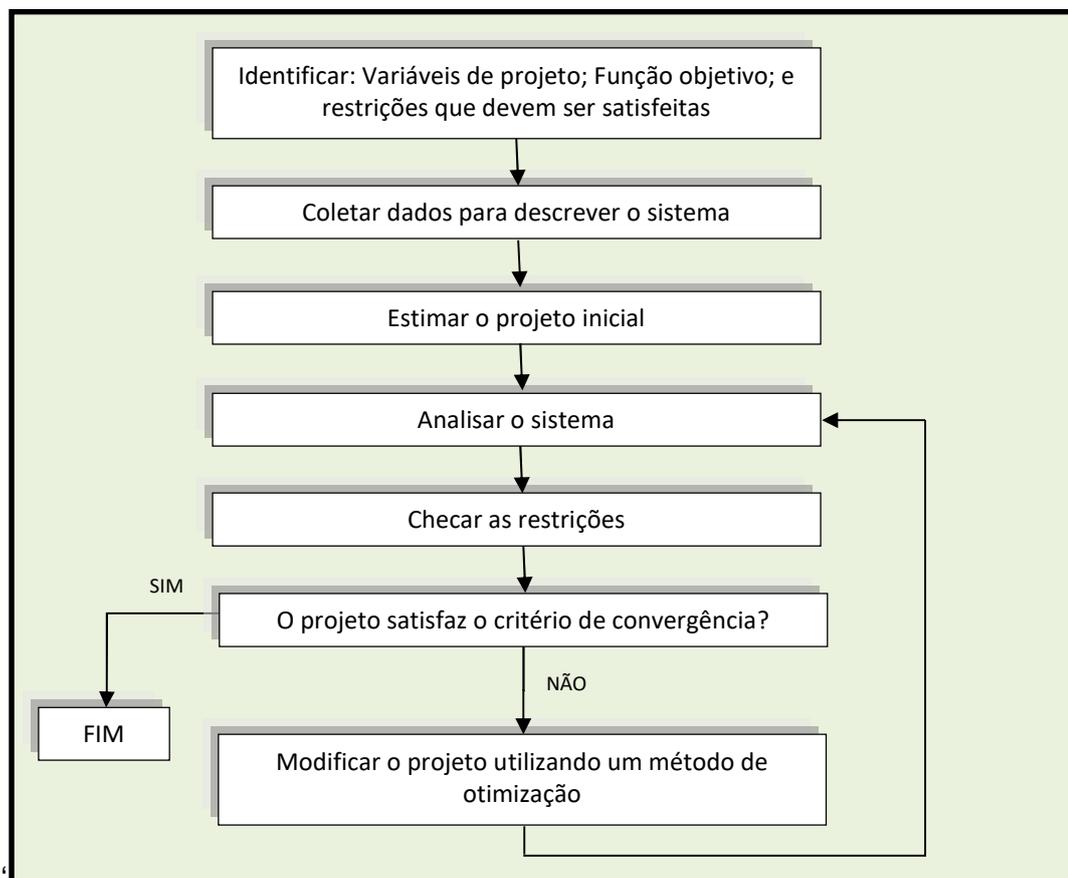
Os problemas de otimização podem ser classificados quanto: à natureza matemática das funções objetivo e restrições; à relação das variáveis com as funções objetivo e restrições; por último, à tipologia das restrições. Quando todas as funções (objetivo e restrições) são lineares, o problema é considerado linear. Quando ao menos uma dessas funções for não linear, então é classificado como não linear. As variáveis contidas na função objetivo e nas restrições podem ser classificadas como contínuas ou discretas (assume valores definidos). Com relação às restrições, o problema pode ser considerado restringido (possui restrição) ou não restringido (não possui restrição). Além das restrições de igualdade e/ou desigualdade, podem existir restrições laterais, definidas por um intervalo.

A resolução do problema de otimização, independente do método escolhido, é obtida através de uma busca no espaço amostral (domínio da função), onde os valores da função objetivo são avaliados. A forma de busca (a partir de um ponto inicial, ou conjunto de pontos, etc.) e a condição de parada (número de iterações, variação dos resultados, número de verificações, etc.) são determinadas de acordo

com o método escolhido. Nesse processo de busca é possível encontrar tanto mínimos (ou máximos) globais, quanto locais, e este último com probabilidade maior dependendo do método.

Segundo Arora (2004, p.5), o processo de otimização estrutural força o projetista a identificar explicitamente um conjunto de variáveis de projeto, uma função objetivo a ser otimizada, e as funções de restrição para o sistema. O Fluxograma 1 sintetiza o processo de otimização estrutural proposto pela autora.

Fluxograma 1 – Fluxograma de otimização estrutural.



Fonte: Adaptado de Arora (2004, p.5).

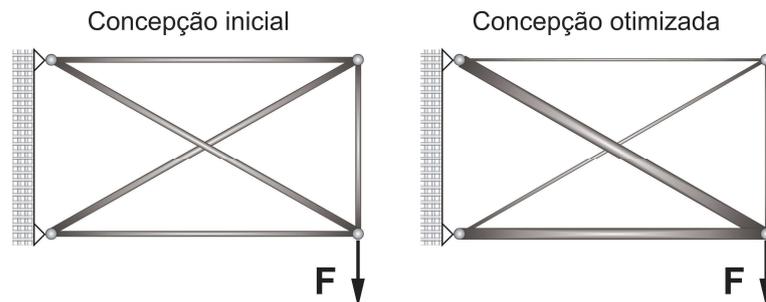
2.2.1 Tipos de Otimização

Os resultados obtidos nos problemas de otimização estrutural podem alterar a configuração da estrutura de diversas maneiras, podendo ser assim agrupadas: dimensional (ou paramétrica), de forma e topológica. Essas três tipologias podem ser combinadas.

Na otimização dimensional a disposição da estrutura é mantida (quantidade de elementos estruturais, condições de contorno, posições dos elementos estruturais,

etc.), ou seja, o domínio da função objetivo é fixo e a solução é encontrada, variando características dimensionais dos elementos, como a área, o diâmetro, a altura e largura da seção transversal de uma barra, entre outras, que representam as variáveis de projeto do problema. Na Figura 6 é possível observar a configuração final de uma estrutura treliçada após o processo de otimização dimensional, no qual a variável de projeto é a área da seção transversal dos elementos da treliça.

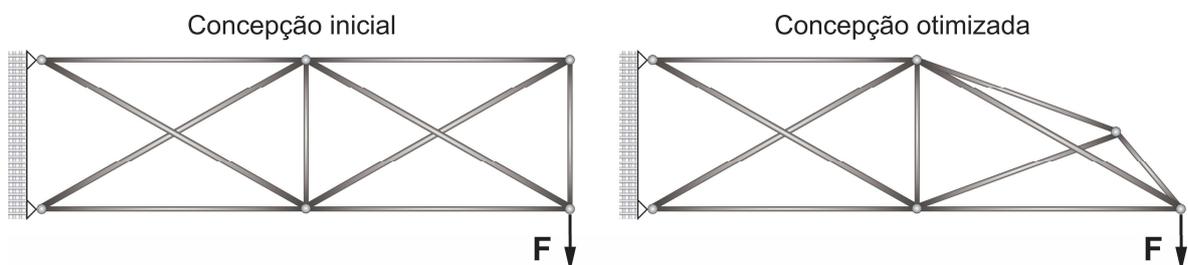
Figura 6 – Otimização dimensional de uma treliça.



Fonte: O Autor (2019).

Quando a solução ótima é obtida, alterando os contornos da estrutura, a exemplo de modificar a posição dos nós de uma estrutura treliçada (ver Figura 7), tem-se a otimização estrutural de forma. Apesar de ser mais completa, por variar o domínio do problema, encontra em muitos problemas diversos ótimos locais, o que aumenta a complexidade do processo. Por alterar a localização dos pontos nodais, e consequentemente o comprimento dos elementos, são necessárias restrições que evitem soluções hipostáticas.

Figura 7 – Otimização de forma de uma treliça.

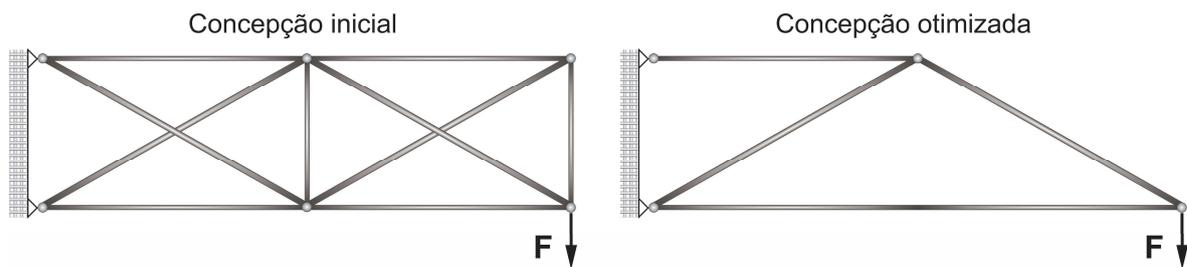


Fonte: O Autor (2019).

A otimização dimensional e de forma não consideram a remoção e/ou inclusão de material da estrutura inicial. Quando esta hipótese é utilizada, o processo de

otimização se torna topológico, cuja abordagem é mais genérica. Por causa dessa possibilidade, a otimização topológica é bastante promissora, sendo de grande aplicabilidade na indústria automotiva e aeroespacial. A remoção dos materiais ocorre à medida que o processo permite que áreas ou volumes de elementos finitos da estrutura tendam a zero, e assim sejam removidos, quando da busca da solução ótima. Ao considerar domínios discretos, como em estruturas treliçadas, ocorre a remoção e/ou acréscimo dos elementos de treliça. Segundo Zhou (1996), a otimização topológica de treliças pode ser abordada através de um algoritmo de otimização dimensional. Com a expectativa de que áreas de seções transversais de elementos não ótimos tendam a zero, então a topologia ótima será alcançada ao fim do processo. A solução ótima apresentada na Figura 8 prevê a redução do número de elementos de uma treliça.

Figura 8 – Otimização topológica de uma treliça.



Fonte: O Autor (2019).

2.2.2 Métodos de Otimização

Para viabilizar a implementação do processo de otimização, vários algoritmos foram criados ao longo dos anos. Apesar da grande quantidade e singularidade dos algoritmos existentes, é possível agrupá-los em dois métodos de procura: métodos determinísticos e métodos estocásticos.

Nos métodos determinísticos, alguns algoritmos de busca utilizam o cálculo de derivadas da função objetivo em relação às variáveis de projeto, porque para encontrar um extremo global necessitam de informações do gradiente. Com isso, se tornam métodos rápidos, com custo computacional reduzido, contudo apresentam dificuldades quando se consideram funções discretas e/ou com derivação complexa e para encontrar um extremo global. Desta maneira, são indicados para problemas unimodais contínuos. Segundo Yang (2010, p.21) quando há uma descontinuidade

na função objetivo é preferível à utilização de algoritmos que não utilizam o gradiente ou a derivada, apenas o valor da função. No método determinístico o resultado do problema é pré-determinado em função dos dados de entrada (ponto inicial), sendo este ponto o de partida da iteração seguinte, realizando assim uma busca local. Os métodos do Máximo Declive, Newton-Rapshon e Quase-Newton são exemplos de métodos determinísticos.

Os métodos estocásticos verificam os pontos da função mediante regras probabilísticas, sem necessidade de derivação, logo não avaliam todas as soluções, por isso não garantem a obtenção do melhor resultado. O resultado do problema não depende somente dos dados de entrada, mas também de outros fatores, normalmente aleatórios. Geralmente, os métodos estocásticos possuem duas fases: global e local. Na fase global a função é avaliada aleatoriamente em vários pontos da amostra. Na fase local os pontos da amostra são manipulados por buscas locais, a fim de encontrar um possível mínimo global (ARORA, 2012, p.690). Como exemplo de algoritmos estocásticos, tem-se: Enxame de Partículas; Recozimento Simulado; Colônia de Formigas, Algoritmos Genéticos, entre outros. Este último é objeto de estudo e aplicação neste trabalho.

Soares (1997, p.5) apresenta uma classificação de parte das técnicas de procura (Quadro 2).

Quadro 2 – Técnicas de procura.

Técnicas de Procura	Métodos Determinísticos	Sem Cálculo de Derivadas	Rosenbrock
		Com Cálculo de Derivadas	Máximo Declive, Newton-Rapshon e Quase-Newton
		Direções Conjugadas	BFGS, DFP e Fletcher & Reeves
		Métodos de Penalidade	Exterior, Interior e Interior estendidos
		Outros	<i>Simplex</i>
	Métodos Estocásticos	Algoritmos Evolucionários	Estratégias Evolucionárias e Algoritmos Genéticos
		Outros	Enxame de Partículas, Recozimento Simulado, Colônia de Formigas e Tabu

Fonte: Adaptado de Soares (1997).

Em suma, o método determinístico sempre retornará um mesmo valor para uma mesma configuração de entrada, enquanto o estocástico, em virtude da sua aleatoriedade, retornará valores com diferenças (pequenas) para uma mesma configuração inicial. Contudo, o sucesso de qualquer algoritmo está relacionado à sua robustez, que considera sua eficácia e eficiência. A exequibilidade do método escolhido (custo computacional viável) é importante, porém não menos importante que a obtenção da solução do problema. Quanto mais robusto o algoritmo proposto, mais confiável é sua solução.

2.3 MÉTODO DOS ALGORITMOS GENÉTICOS

Algoritmo Genético é um método de otimização estocástico (probabilístico), baseado na teoria da evolução por seleção natural de Charles Darwin, cujo princípio é que indivíduos de uma mesma espécie possuem probabilidades distintas de sobrevivência. Assim a condição genética dos mais aptos se propaga na população (genética populacional), num processo de seleção natural. Segundo Goldberg (1989, p.7), se diferenciam dos processos mais usuais de busca e otimização em quatro aspectos:

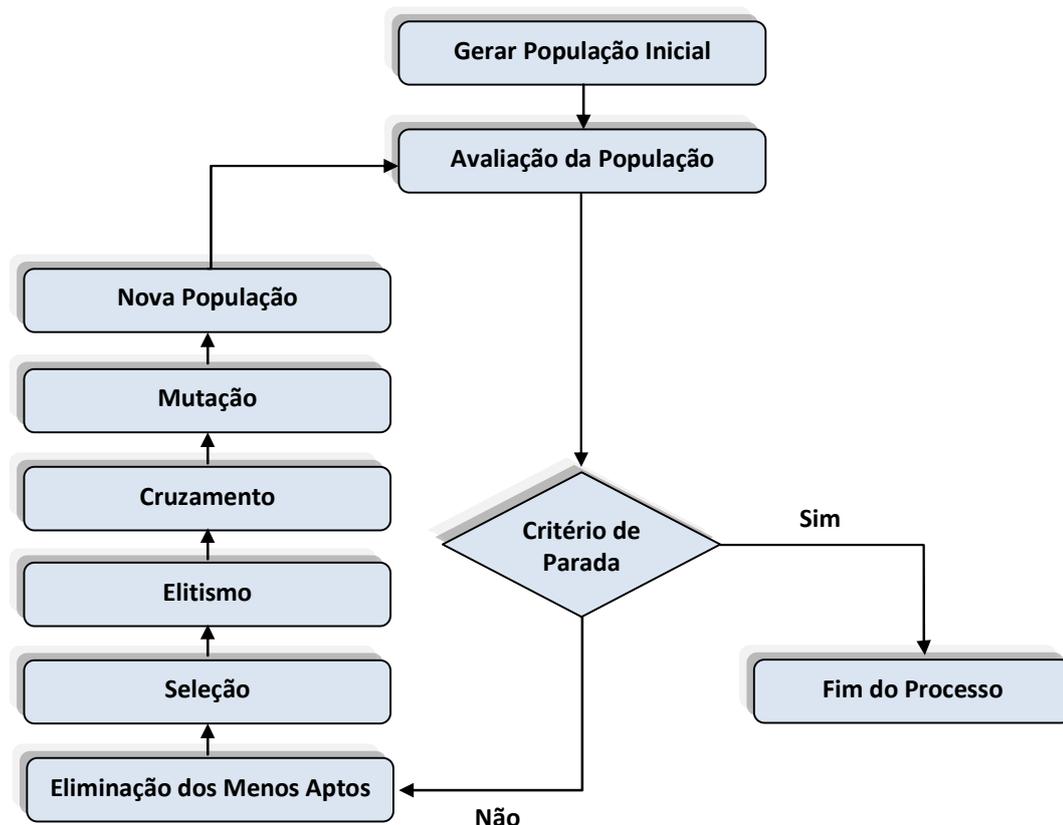
- Trabalham com a codificação de um conjunto de parâmetros, não com os próprios parâmetros;
- Buscam em uma população de pontos, não em um único ponto;
- Utilizam informações da função objetivo, não derivadas ou outras formulações auxiliares;
- Utilizam regras de transição probabilística, não determinísticas.

As quatro diferenças supracitadas contribuem para a robustez dos Algoritmos Genéticos e determinam as principais vantagens em relação a outros métodos usuais.

A metodologia, criada em 1975 por Jonh Holland, considera inicialmente a existência de uma população (espaço amostral) com um conjunto aleatório de indivíduos (possíveis soluções do problema), os quais são avaliados através da função de aptidão (fitness), e aqueles mais adaptados ao ambiente são mantidos e os demais descartados (operador de seleção). Aqueles indivíduos (soluções) mantidos sofrem modificações através de operadores genéticos (elitismo,

cruzamento ou *crossover*, e mutação), gerando descendentes para as próximas gerações, e novamente ocorre a verificação e eliminação daqueles menos adaptados. Esse processo de reprodução se repete (iterativamente) até que uma solução satisfatória seja obtida, de acordo com os parâmetros de parada pré-estabelecidos (critério de parada). Apresenta-se a seguir o fluxograma dos Algoritmos Genéticos.

Fluxograma 2 – Fluxograma dos Algoritmos Genéticos.



Fonte: O Autor (2019)

Partindo de uma população inicial, os indivíduos são avaliados quanto à sua aptidão (capacidade de sobreviver à próxima geração), ou seja, a qualidade da solução avaliada é verificada, de acordo com a função objetivo. Essa etapa de verificação considera critérios constantes na função de aptidão, que representa o genótipo do indivíduo, e repete-se a cada nova geração. Subsidiado pelas informações geradas pela função de aptidão, o operador de seleção separa os indivíduos que serão mantidos e participarão do processo reprodutivo, por meio de diferentes procedimentos. Os procedimentos de seleção podem ser:

- Seleção aleatória: onde os pais da nova população são obtidos aleatoriamente;
- Seleção por roleta ou seleção estocástica de substituição: implementada como uma roleta dividida em partes proporcionais a aptidão de cada indivíduo, cada parte coincide com a probabilidade de seleção dos respectivos indivíduos;
- Seleção por grupos ou seleção por blocos: realizada mediante divisão de n grupos, tendo cada grupo uma probabilidade de seleção;
- Seleção por torneio: a mais simples de implementar, consiste na competição entre dois ou mais indivíduos para serem um dos pais da nova população, onde o mais apto vence.

Ao término do processo, são aplicados os operadores genéticos no grupo de indivíduos selecionados que originará uma nova população (filhos). Segundo Michalewicz (1996, p.17), o intuito dos operadores genéticos é possibilitar o intercâmbio de informações entre diferentes possíveis soluções e introduzir alguma variabilidade extra na população. Pozo *et al.* (2005, p.11) sintetiza bem essa conclusão: “Os operadores genéticos são necessários para que a população se diversifique e mantenha características de adaptação adquiridas pelas gerações anteriores”.

São fundamentais para garantir uma busca ampla no domínio da função e evitar ótimos locais, sendo assim definidos:

- Elitismo: replica o indivíduo selecionado para a nova população, perpetuando soluções de boa aptidão nas próximas gerações. Mantém o indivíduo ou grupo de indivíduos mais aptos da população;
- Cruzamento ou crossover: responsável pela recombinação genética de dois indivíduos (pais) que foram mantidos. Desta forma, assim como o elitismo, permite que as próximas gerações herdem as características anteriores. Uma ou mais partes da estrutura de uma solução são trocadas com partes equivalentes de outra;
- Mutação: necessária para introduzir e manter a diversidade genética, ocorre da modificação aleatória de componentes da estrutura (cromossomo) definida para os indivíduos (soluções), conforme uma probabilidade considerada.

O elitismo e o cruzamento, por permitirem a manutenção de características de indivíduos já selecionados anteriormente, é o parâmetro predominante. Porém é necessário o processo de mutação (com uma taxa menor) para garantir a busca em qualquer ponto do espaço amostral, contornando os problemas de ótimos locais.

Os critérios de parada normalmente utilizados são: limite de gerações alcançado; tempo de processamento esgotado; estabilidade da configuração populacional; e sequência de gerações sem alteração da solução.

Esses algoritmos são muito úteis na solução dos mais variados problemas de busca e otimização. Comparados a outros métodos tem a vantagem de não possuir, por suposições, limitações no espaço de busca quanto à continuidade, existência de derivadas, etc. Além disso, no toolbox (funções pré-definidas) de otimização do *software* MATLAB existe uma opção específica para esta técnica, que permite atribuir restrições de igualdade e desigualdade (lineares e não lineares), e ainda, limites inferiores e superiores para o espaço de busca.

Contudo, é necessário cuidado ao definir os parâmetros iniciais dos Algoritmos Genéticos (população inicial, gerações, taxa dos operadores genéticos, etc.), pois podem convergir rapidamente a uma solução não desejada. Quando a busca ocorre em uma região de ótimo global a solução é confiável, porém problemas complexos (como o de estruturas) possuem diversas regiões de ótimos locais, aumentando a probabilidade de uma convergência rápida obter uma solução em um ponto local. Para evitar esse problema de convergência excessivamente rápida, a rotina deve definir a exploração em outras áreas da superfície de busca, mediante introdução aleatória de mudanças, ou mutações, em algumas das variáveis (HAUPT e HAUPT, 2004, p.60). No Quadro 3, mostram-se as vantagens e desvantagens que esse método possui.

Quadro 3 – Vantagens e desvantagens dos Algoritmos Genéticos.

ALGORITMOS GENÉTICOS
<p>VANTAGENS</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Bom desempenho numérico para uma grande quantidade de problemas. ➤ Flexíveis, quanto ao tratamento do problema, e de fácil implementação. ➤ Aplicáveis tanto para parâmetros contínuos, quanto discretos, ou ambos. ➤ Mais robustos e menos suscetíveis a ótimos locais, uma vez que os operadores genéticos são probabilísticos. ➤ Otimizam simultaneamente um grande número de variáveis de projeto. ➤ Por trabalharem com uma população, realizam buscas simultâneas em várias regiões do espaço de busca. ➤ Permitem trabalhar com restrições arbitrárias. ➤ Adequados a problemas complexos, com múltiplos mínimos e/ou máximos. ➤ Quando necessário, possibilitam o uso de computação paralela, reduzindo o tempo de processamento.
<p>DESVANTAGENS</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Para encontrar o ótimo global, quando possível, por vezes necessitam de tempo de processamento elevado. ➤ Dependendo dos parâmetros de entrada, podem convergi rapidamente para um ótimo local. ➤ Necessitam, por vezes, de um grande número de avaliações da função de aptidão. ➤ A depender da escolha das variáveis e dos operadores genéticos, um grande número de combinações é investigado.

Fonte: O Autor (2019).

2.4 OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS

A otimização de treliças é um processo integrado, que aborda simultaneamente as variáveis de dimensionamento, forma e topologia, tornando a abordagem difícil, por várias razões, dentre elas: a existência de variáveis discretas ou contínuas (CHEN; SHUI; HUANG, 2017, p.1365). É necessária a formulação de um algoritmo que analise a estrutura, a partir das possíveis soluções, e posteriormente procure o ponto ótimo, conforme os métodos e tipologias escolhidos. Neste trabalho, propõe-se a otimização dimensional de estruturas treliçadas, cuja análise estrutural é

realizada através do MEF, e o processo de busca da solução ótima com aplicação do método dos Algoritmos Genéticos.

A análise estrutural realizada pelo MEF fornece informações que subsidia o processo de otimização. Ao analisar a estrutura é possível encontrar as tensões axiais nos elementos estruturais, os deslocamentos nos nós, e conseqüentemente os parâmetros de flambagem global. Essas informações são utilizadas pelos Algoritmos Genéticos para restringir a busca da solução ótima, de acordo com os limitadores especificados nas restrições.

O método dos Algoritmos Genéticos, por ser um método estocástico, não garante a solução ótima, estando sujeito a mínimos locais. Desta forma, o analista estrutural deve realizar as devidas ponderações ao resultado encontrado, e se for o caso, realizar o processo novamente, modificando os parâmetros de entrada. Dentre os parâmetros de entrada dos Algoritmos Genéticos, tem-se: tamanho da população; fator de penalidade; taxa dos operadores genéticos; tolerância; número de gerações, entre outros.

Outra forma de aumentar a probabilidade de êxito da solução é fazer uso de técnicas de otimização híbrida, por exemplo, utilizar inicialmente os Algoritmos Genéticos, a fim de realizar uma busca global, e posteriormente realizar uma busca local com o método de Programação Não Linear (PNL), conforme estudo realizado por Silva (2015).

As estruturas treliçadas têm aplicabilidade bem ampla, sendo versáteis e de diversas configurações. Ao tratar da otimização desta tipologia estrutural, é notória a importância da minimização do seu peso, parâmetro correlacionado com seu custo de produção, volume, eficiência, etc.

Para a otimização do dimensionamento de estruturas treliçadas, as áreas da seção transversal das barras são muitas vezes variáveis discretas de projeto, ou seja, são selecionadas de uma lista de seções transversais discretas com base no padrão de produção (HO-HUU *et al.*, 2016, p.60).

Segundo Madah e Amir (2017, p.233) algumas formulações clássicas não consideram a flambagem, que engloba vários fenômenos, como a Flambagem de Euler para peças delgadas. Desta forma, o resultado obtido pode incluir barras delgadas comprimidas e configurações instáveis de barras, ou podem ser vulneráveis a flambagem global.

3 METODOLOGIA

Otimizar estruturas treliçadas através da redução do peso dos seus elementos, sem comprometer a segurança e as premissas de projeto propostas, foi o objetivo principal deste trabalho. Sendo assim, objetivou-se a implementação de um programa computacional que realizasse esse processo através de configurações estruturais fornecidas pelo usuário de forma prática. O procedimento é realizado com utilização dos *softwares* comerciais GiD e MATLAB. O primeiro é um programa de pré e pós-processamento, utilizado para subsidiar a análise estrutural e apresentação dos resultados. O MATLAB é um programa de cálculo numérico versátil e de alta performance, empregado para resolver problemas em diversas áreas. Esse programa foi utilizado para implementação de um algoritmo que realiza a análise e o dimensionamento otimizado de estruturas treliçadas.

3.1 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Para viabilizar e subsidiar este estudo, inicialmente, foi realizado um levantamento bibliográfico da literatura disponível sobre o assunto. Foi apresentada uma visão do MEF para análise de estruturas treliçadas. Posteriormente, discutiu-se a otimização estrutural, quanto a sua definição, métodos e tipologias existentes. Neste contexto, o método dos Algoritmos Genéticos foi destacado, por ser a metodologia escolhida para este trabalho. Essas atividades possibilitaram o delineamento da pesquisa. Em um momento subsequente, foi realizada a implementação do programa computacional.

O programa computacional visa encontrar a configuração ótima da estrutura para o problema apresentado pelo usuário ou apenas analisa-la. Para a opção de otimização, o algoritmo realiza um processo de otimização dimensional, cuja função objetivo é o peso da estrutura que se pretende minimizar. A variável de projeto utilizada é a área da seção transversal dos elementos, de domínio contínuo ou discreto, conforme escolha do usuário. A fim de garantir a segurança da solução, são impostas restrições para os valores admissíveis para área da seção transversal dos elementos, tensão axial máxima admissível do material, deslocamento máximo admitido nos nós e tensão axial de compressão máxima admissível para flambagem global. Sintetiza-se no Quadro 4 a formulação do problema supracitado:

Quadro 4 – Formulação do problema de otimização proposto.

PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO PROPOSTO
<p>FUNÇÃO OBJETIVO</p> <p>➤ Peso da estrutura treliçada, cujo objetivo é minimizá-lo.</p> <p><i>Minimizar:</i></p> $Peso = \sum_{i=1}^{n^{\circ}elem} \gamma_i l_i A_i$
<p>VARIÁVEIS DE PROJETO</p> <p>➤ Área da seção transversal, com valores contínuos ou discretos.</p> <p>A_i, com $i = 1, 2, 3, \dots, n^{\circ} elem$</p>
<p>RESTRICÇÕES</p> <p>➤ Intervalo admissível da área da seção transversal.</p> <p>$A_{min} \leq A_i \leq A_{máx}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n^{\circ} elem$ (domínio contínuo) ou</p> <p>$A_i = A_{adm}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n^{\circ} elem$ e $A_{adm} =$ domínio discreto</p> <p>➤ Tensão axial máxima admissível do material.</p> <p>$\sigma_i \leq \sigma^{adm}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n^{\circ} elem$</p> <p>➤ Deslocamento máximo nos nós.</p> <p>$d_i \leq d_{máx}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n^{\circ} nós$</p> <p>➤ Flambagem global.</p> <p>$\sigma_i \leq \sigma_{cr}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n^{\circ} elem$</p>

Fonte: O Autor (2019).

As restrições impostas são informadas diretamente pelo usuário, para os casos dos valores admissíveis para a área da seção transversal dos elementos, tensão axial máxima admissível do material e deslocamento máximo admissível nos nós. Para a tensão axial de compressão máxima admissível para flambagem global, a Tensão Crítica de Euler (TCE) é utilizada como parâmetro, conforme diversos trabalhos constantes na literatura (IMAI e SCHMIT, 1981; WU e CHOW, 1995; MADAH e AMIR, 2017). A formulação para essa tensão pode ser elaborada das seguintes maneiras:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{Al^2} \quad (3.1a)$$

onde E é o Módulo de Elasticidade Longitudinal do Material, I o Momento de Inércia em relação ao eixo de flambagem, A a área da seção transversal da barra e l seu comprimento (PFEIL e PFEIL, 2009, p.120); ou ainda,

$$\sigma_{cr} = \frac{KEA}{l^2} \quad (3.1b)$$

sendo K uma constante determinada em função da configuração geométrica da seção transversal (LEE e GEEM, 2004, p.789). Os valores de K utilizados neste estudo foram obtidos de exemplos da literatura utilizados para validação do programa.

A constante K relaciona o Momento de Inércia (I) à área da seção transversal do elemento (A), logo pode-se encontrar a TCE sem, necessariamente, calcular o valor de I , apenas com o valor de A , situação encontrada quando o domínio é contínuo. Por isso, apesar da implementação permitir ao usuário decidir por ambas as equações, a primeira fica restrita ao domínio discreto, cuja tabela de áreas contém os momentos de inércia.

3.2 IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA

Na etapa de implementação, o *software* GiD 14.0.1 foi utilizado para o pré-processamento da estrutura proposta, a fim de criar uma melhor interface para o programa. No GiD, o usuário pode lançar a estrutura fazendo uso das próprias ferramentas do programa ou importando um arquivo (ex.: *.dxf). Nesse momento todas as informações do problema estrutural são fornecidas (propriedades dos materiais, geometria, carregamentos, condições de contorno, deslocamentos prescritos, etc.). Com a estrutura finalizada, o usuário a calcula (comando *Calculate*) e um arquivo *.dat é disponibilizado na pasta do problema com as informações supracitadas.

As informações geradas pelo GiD subsidiam o arquivo de entrada a ser utilizado pelo algoritmo implementado no MATLAB R2014b. O arquivo de entrada (*.txt) contém as informações do problema estrutural (advindas do GiD) e as informações do problema de otimização (acrescentadas pelo usuário), conforme segue:

- Metodologia de Cálculo: definição do processo – pretende-se apenas analisar a estrutura ou realizar o processo de otimização com restrição de tensão e/ou deslocamento e/ou flambagem global;
- Tipo de variável: Contínua ou Discreta;
- Tipo de estrutura: Treliça Bidimensional ou Tridimensional;
- Quantidade de nós e coordenadas;
- Quantidade de nós restringidos e as respectivas direções;
- Quantidade de nós com deslocamento prescrito e os respectivos valores;
- Tipos de materiais utilizados e as respectivas propriedades físicas: o usuário pode atribuir mais de um tipo de material para a estrutura;
- Quantidade de seções diferentes e as respectivas propriedades geométricas: essa opção permite que o usuário agrupe os elementos, onde a quantidade de grupos corresponde ao número de variáveis de projeto;
- Valor da constante “K” para TCE, caso seja utilizada a Equação 3.1b como restrição de flambagem global;
- Quantidade de Barras;
- Matriz com nós, material e seção de cada barra;
- Quantidade de cargas nodais e matriz de valores;
- Quantidade de cargas distribuídas e matriz de valores;
- Quantidade de cargas pontuais e matriz de valores;
- Quantidade de momentos pontuais e matriz de valores;
- Intervalo de valores admissíveis para as variáveis de projeto: para o domínio discreto, informar de 1 a “n”, sendo “n” a quantidade de valores disponíveis;
- Parâmetros dos Algoritmos Genéticos (população, geração e mutação): essa informação será utilizada se o usuário optar por alterar o *options* da função Algoritmos Genéticos do MATLAB;
- Matriz de deslocamentos máximos admissíveis em cada nó.

Uma vez iniciado o programa de otimização, o usuário abre o arquivo de entrada, em **.txt*. Caso tenha optado pelo domínio discreto, imediatamente deve abrir um novo arquivo com os valores disponíveis (**.txt*). O programa já disponibiliza 4 (quatro) tabelas de perfis comerciais: cantoneira (C), I, U e T. Além dos perfis disponíveis, o usuário pode criar seu próprio arquivo com um novo conjunto discreto de áreas. As tabelas dos perfis comerciais estão disponíveis nos Anexos de A a D. Como supracitado, os elementos da estrutura ainda podem ser agrupados, tendo assim, uma variável de projeto para cada conjunto definido. Essa abordagem melhora a eficiência do algoritmo e torna as soluções mais práticas. Cabe destacar que os Algoritmos Genéticos não precisam de um ponto inicial de busca, e sim de um domínio. As áreas iniciais podem ser informadas pelo usuário para fins de comparação.

Os parâmetros utilizados para a função Algoritmos Genéticos do MATLAB são os padronizados pelo programa: tamanho da população 50 se o número de variáveis de projeto for ≤ 5 , 200 caso contrário; número de gerações $100x$ número de variáveis de projeto; e taxa de mutação 0,01. A função *options* escolhida foi utilizada anteriormente por outros alunos do programa de mestrado da UFPE (CAA), Bezerra (2017) e Nascimento (2017), demonstrou eficiência computacional e resultados muito próximos quando o mesmo exemplo é rodado no programa novamente:

```
options =
gaoptimset('Vectorized','off','Display','off','NonlinConAlgorithm','penalty
')
```

Tanto na opção de análise, quando na de otimização, o programa realiza a análise estrutural através do MEF. O MEF é uma forma aplicável e aderente à análise de estruturas treliçadas, que pode ser resumida a uma análise matricial da estrutura. Esse processo gera as informações necessárias para que as restrições sejam verificadas em cada iteração do processo de busca.

O processo de otimização com Algoritmos Genéticos está contido no *toolboxes* do MATLAB. Essa técnica de busca é menos suscetível a encontrar ótimos locais, é viável para utilização de variáveis discretas, é mais robusta e possui um bom desempenho para uma vasta quantidade de problemas. As soluções ótimas dos problemas referem-se ao conjunto de áreas das seções transversais dos elementos da estrutura treliçada que minimizem o seu peso, cuja formulação representa a

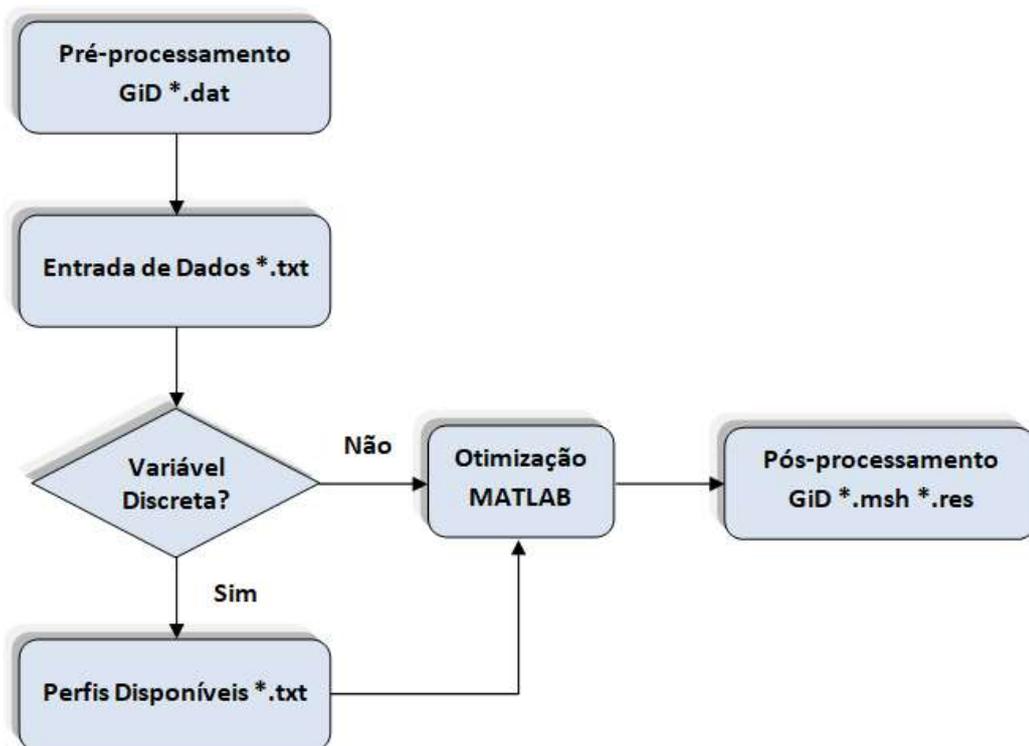
função objetivo, atendendo as restrições impostas, conforme apresentado no Quadro 4.

Os resultados obtidos são analisados na etapa de pós-processamento no GiD. O programa gera três arquivos: um arquivo em *.txt*, no qual há os dados iniciais do problema e os resultados otimizados da estrutura; um ficheiro em *.msh*, onde constam as informações da geometria da estrutura, para fins de utilização do GiD; o último, é um arquivo com extensão *.res*, que gera os resultados gráficos.

O pós-processamento efetuado pelo GiD permite ao usuário analisar os resultados graficamente. O programa plota a estrutura treliçada e as distribuições de tensões, os esforços nas barras e os deslocamentos estruturais, apresentados em uma escala de cores na própria estrutura. A visualização dessa maneira permite ao usuário analisar os resultados e eventuais inconsistências de forma rápida, sem necessitar lê o grande volume de dados gerados no arquivo *.txt*.

O fluxograma a seguir demonstra, de forma sucinta, todas as etapas do processo, desde o pré-processamento até o pós-processamento:

Fluxograma 3 – Fluxograma do programa implementado.



Fonte: O Autor (2019).

3.3 VALIDAÇÃO DO PROGRAMA

Após a implementação do programa, alguns exemplos apresentados na literatura foram testados, a fim de realizar sua validação, mediante comparação dos resultados com aqueles obtidos por outros autores. Além desses exemplos, outros casos práticos foram analisados, para comprovar a confiabilidade e aplicabilidade do produto gerado por este estudo. Esses exemplos foram solucionados utilizando-se de perfis comerciais e os valores obtidos comparados com a metodologia tradicional de dimensionamento.

Todos os resultados obtidos foram analisados com relação à configuração final da estrutura (peso, tensões e deslocamentos), ao atendimento das restrições impostas e ao custo computacional, subsidiando o desfecho desta dissertação.

O computador utilizado foi um ASUS, Processador Intel ® Core ™ i3-2365M, CPU 1.4GHz, Memória RAM 4,00 GB e Sistema Operacional Windows 10 64 bits.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O programa computacional desenvolvido auxilia o engenheiro estrutural a obter a configuração ótima da estrutura quanto à área da seção transversal, a fim de se obter o menor peso possível, desde que as restrições impostas sejam atendidas. Por possibilitar a utilização de variáveis de projeto contínuas e/ou discretas, os resultados são mais exequíveis, uma vez que permite a abordagem comercial do conjunto de áreas das seções transversais. Os elementos de treliça são dimensionados para atender as restrições de tensão, deslocamento e flambagem global.

Quatro exemplos disponíveis na literatura foram comparados com o intuito de validação do programa. Em um primeiro momento, a mesma configuração dos trabalhos objeto de comparação foi utilizada. Posteriormente, para os casos que não consideram todas as restrições, o efeito da imposição das demais foi avaliado. Para os exemplos de variáveis discretas, a abordagem contínua também foi verificada.

Por fim, dois exemplos práticos foram projetados com subsídio do programa. Foi utilizada a opção com variável discreta, onde 4 (quatro) tabelas de perfis comerciais foram utilizadas e os respectivos resultados comparados. A influência das restrições também foi analisada.

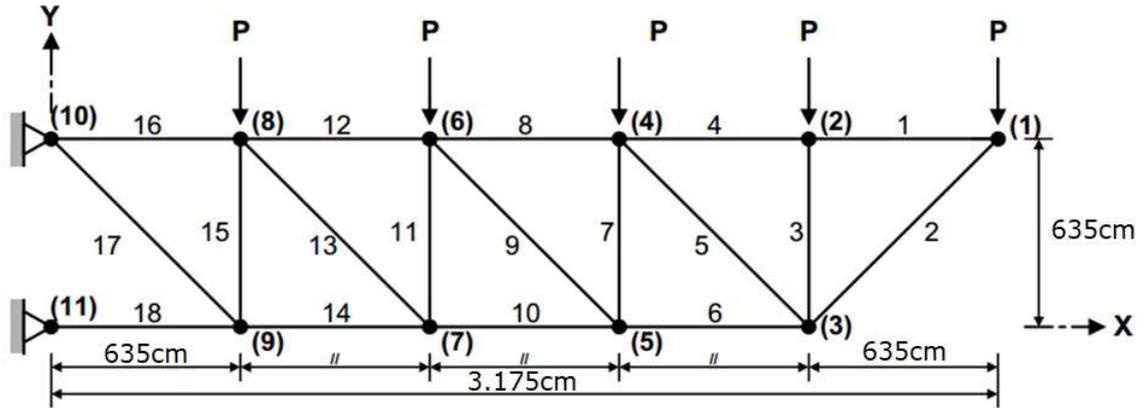
Os resultados foram demonstrados de forma gráfica através do *software* GiD, uma vez que, o programa implementado possui uma interface de pré e pós-processamento com esse *software* comercial. Os resultados apresentados para todos os exemplos foram as tensões axiais nas barras e os deslocamentos em uma das direções associadas ao referencial global da estrutura. A direção escolhida para apresentação dos resultados dos deslocamentos variou conforme a relevância na análise dos resultados.

4.1 TRELIÇA PLANA DE 18 BARRAS

O primeiro exemplo estudado refere-se a uma treliça plana de 18 (dezoito) barras e 11 (onze) nós, sujeita a carregamentos axiais na direção y , $P = -88,96 \text{ kN}$, nos nós 1, 2, 4, 6 e 8, conforme observa-se na Figura 9. Os nós 10 e 11 estão com os deslocamentos restringidos. O problema de otimização estrutural visa minimizar o

peso da estrutura a partir das áreas das seções transversais dos elementos de barra, observando as restrições impostas.

Figura 9 – Treliza plana de 18 barras.



Fonte: Adaptado de Lee e Geem (2004).

As áreas das seções transversais são agrupadas em 4 (quatro) conjuntos distintos, dessa forma tem-se como variáveis de projeto: $X_1 = A_1 = A_4 = A_8 = A_{12} = A_{16}$; $X_2 = A_2 = A_6 = A_{10} = A_{14} = A_{18}$; $X_3 = A_3 = A_7 = A_{11} = A_{15}$; e $X_4 = A_5 = A_9 = A_{13} = A_{17}$. Dois casos foram analisados, o primeiro impõe restrições de tensão, com relação às tensões máximas admissíveis de tração, $\sigma_T^{adm} = 137,90 \text{ MPa}$, e compressão, $\sigma_C^{adm} = 137,90 \text{ MPa}$, do material, e flambagem global, observando a Equação 3.1b para $K = 4$, cujo valor utilizado é igual aos dos autores que estudaram este exemplo, para fins de comparação. O segundo caso acrescenta a restrição de deslocamentos, limitando-os nas direções x e y em cada nó livre, $d_{m\acute{a}x} = \pm 12,70 \text{ cm}$. Na Tabela 1, constam as informações do problema estrutural quanto aos carregamentos, propriedades do material e limite das restrições.

Tabela 1 – Configuração do problema 1: treliça plana de 18 barras.

Parâmetros	Unidade	Valor
Carga $P(y)$	kN	$P(-88,96)$
Módulo de Elasticidade Longitudinal (E)	GPa	68,95
Peso Específico (γ)	kN/m^3	27,15
Variáveis de projeto (A)	cm^2	$X_1 = A_1 = A_4 = A_8 = A_{12} = A_{16}$ $X_2 = A_2 = A_6 = A_{10} = A_{14} = A_{18}$ $X_3 = A_3 = A_7 = A_{11} = A_{15}$ $X_4 = A_5 = A_9 = A_{13} = A_{17}$
Domínio das variáveis de projeto	cm^2	$0,6452 \leq X_i \leq 322,60 \quad i = 1,2,3,4.$
Tensão máxima admissível (σ^{adm})	MPa	+/-137,90
Deslocamento máximo admissível ($d_{máx}$)	cm	+/- 12,70
Flambagem Global (σ_{cr})	MPa	$\frac{KEA}{l^2}$, $k = 4$
Tipos de restrições		Caso 1: Tensão e flambagem global. Caso 2: Tensão, flambagem global e deslocamentos.

Fonte: O Autor (2019).

O Caso 1 (restrições de tensão e flambagem global) já foi estudado anteriormente por Imai e Schmit (1981) e Lee e Geem (2004). O primeiro trabalho utilizou um método chamado de Método Multiplicador e o segundo um método baseado no Algoritmo de Busca Harmônica. Para esse caso, os resultados obtidos pelo programa desenvolvido neste trabalho foram comparados com os demais trabalhos da literatura (ver Tabela 2). A solução ótima apresentou os seguintes valores para as variáveis de projeto: $X_1 = 64,520 \text{ cm}^2$; $X_2 = 139,692 \text{ cm}^2$; $X_3 = 80,650 \text{ cm}^2$; e $X_4 = 45,622 \text{ cm}^2$. O peso obtido para a estrutura otimizada foi de $28,616 \text{ kN}$, compatível com os demais trabalhos da literatura. As seções dos elementos do grupo 1 e 4 foram limitadas à restrição de tensão (tração), barras 16 e 17, e os demais à restrição de flambagem (compressão), barras 15 e 18, com $-55,156 \text{ MPa}$ e $-95,534 \text{ MPa}$, respectivamente. O tempo para obtenção da solução foi de 29s.

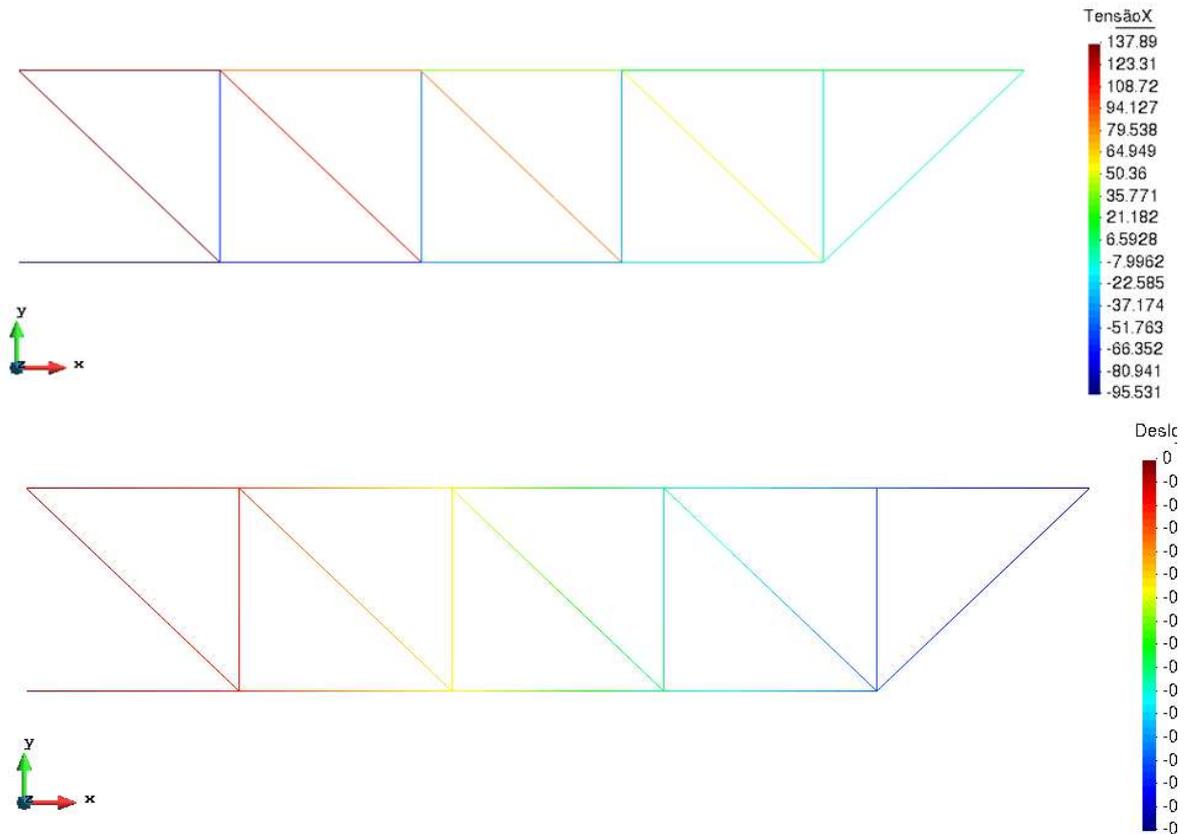
Tabela 2 – Resultados otimizados para treliça plana de 18 barras (Caso 1).

Variáveis de Projeto (área cm ²)	Imai e Schmit (1981)	Lee e Geem (2004)	Este trabalho (Caso 1)
$A_1 = A_4 = A_8 = A_{12} = A_{16}$	64,507	64,391	64,520
$A_2 = A_6 = A_{10} = A_{14} = A_{18}$	139,686	139,557	139,692
$A_3 = A_7 = A_{11} = A_{15}$	80,650	80,585	80,650
$A_5 = A_9 = A_{13} = A_{17}$	45,629	45,532	45,622
Peso total (kN)	28,614	28,577	28,616

Fonte: O Autor (2019).

Apesar de o resultado obtido ser um pouco maior que os dois valores comparados, observa-se, ao analisar as soluções, que em ambos os trabalhos os resultados violam sensivelmente as restrições, diferente da solução do presente estudo. Em Imai e Schmit (1981) a barra 16 inflige à tensão máxima admissível, com valor de 137,914 MPa. No trabalho de Lee e Geem (2004) as barras 16 e 17 infligem à tensão máxima admissível, com 138,163 MPa e 138,160 MPa, respectivamente, e as barras 15 e 18 infligem a TCE, com os valores de compressão 55,199 MPa > 55,113 MPa e 95,622 MPa > 95,446 MPa, respectivamente. Essas diferenças são da ordem de menos de 1 %, o que faz presumir as suas motivações na tolerância utilizada em cada trabalho. Neste trabalho a tolerância das restrições está na quarta casa decimal. A Figura 10 demonstra os resultados graficamente, com relação as tensões axiais nas barras (MPa) e aos deslocamentos no eixo y (m), com subsídio do GiD.

Figura 10 – Resultados, tensões axiais (MPa) e deslocamentos (m), da configuração otimizada do problema 1 (Caso 1).



Fonte: O Autor (2019).

Para o Caso 2 (restrições de tensão, flambagem global e deslocamentos), ao acrescentar a restrição de deslocamento, o peso da estrutura aumentou 77 %, em comparação a solução obtida no Caso 1, sendo $50,741 \text{ kN}$ (ver Tabela 3). As áreas encontradas no processo estocástico de busca foram: $X_1 = 159,699 \text{ cm}^2$, $X_2 = 216,950 \text{ cm}^2$, $X_3 = 80,850 \text{ cm}^2$ e $X_4 = 114,244 \text{ cm}^2$. A solução foi restringida ao deslocamento do nó 1, que obteve o deslocamento máximo admissível. No Caso 1, os nós de 1 a 5 não atenderiam a restrição de deslocamento imposta no Caso 2, por isso a diferença nos resultados. O tempo de processamento foi de 28s.

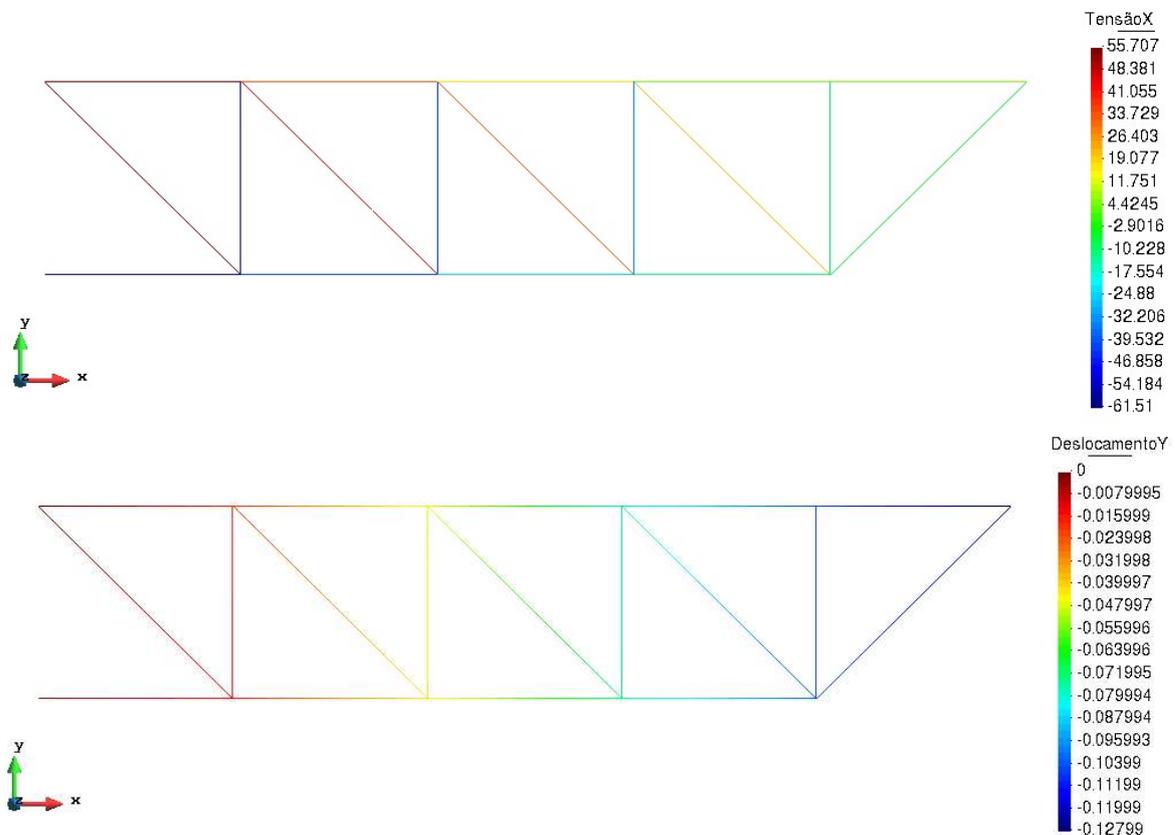
Tabela 3 – Resultados otimizados para treliça plana de 18 barras (Casos 1 e 2).

Variáveis de Projeto (área cm ²)	Este trabalho (Caso 1)	Este trabalho (Caso 2)
$A_1 = A_4 = A_8 = A_{12} = A_{16}$	64,520	159,699
$A_2 = A_6 = A_{10} = A_{14} = A_{18}$	139,692	216,950
$A_3 = A_7 = A_{11} = A_{15}$	80,650	80,850
$A_5 = A_9 = A_{13} = A_{17}$	45,622	114,244
Peso total (kN)	28,616	50,741

Fonte: O Autor (2019).

A Figura 11 apresenta graficamente a configuração otimizada do problema 1 para o Caso 2, pelo programa de pós-processamento GiD, relacionada as tensões axiais nas barras (MPa) e aos deslocamentos na direção y (m) da treliça estudada.

Figura 11 – Resultados, tensões axiais (MPa) e deslocamentos (m), da configuração otimizada do problema 1 (Caso 2).

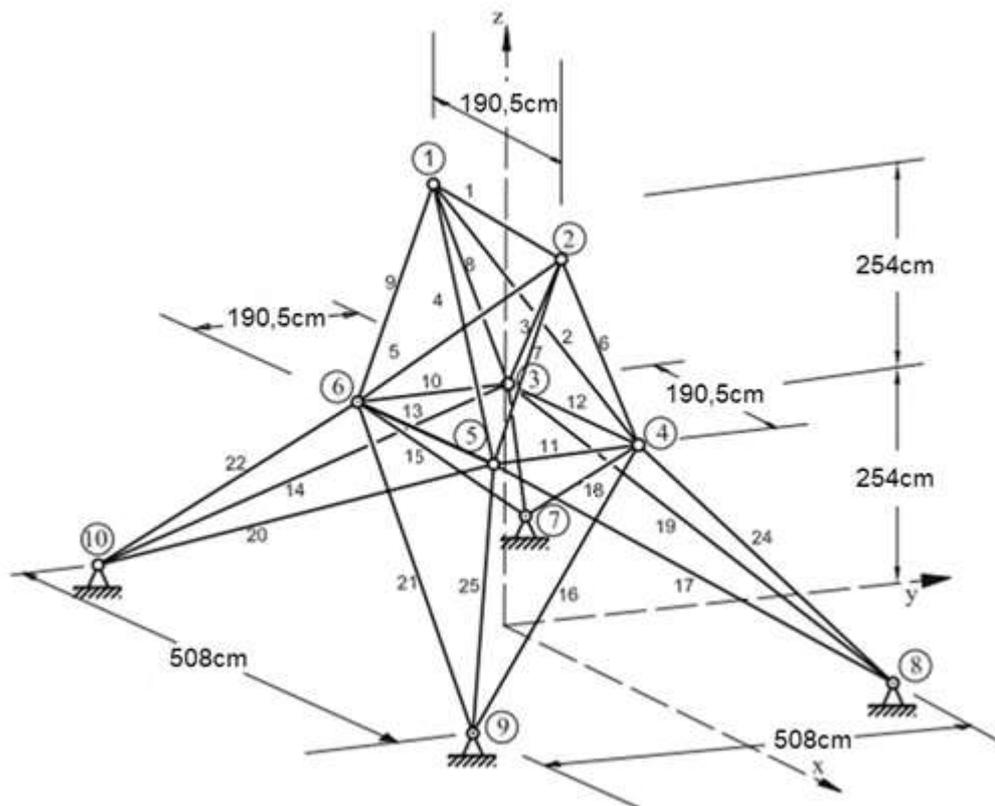


Fonte: O Autor (2019).

4.2 TRELIÇA ESPACIAL DE 25 BARRAS

O segundo exemplo é típico do estudo de otimização estrutural para treliças tridimensionais, vários trabalhos já foram validados a partir desse problema. A estrutura possui 25 (vinte e cinco) barras e 10 (dez) nós, dos quais nos nós 1, 2, 3 e 6 atuam cargas nodais. Os nós 7, 8, 9 e 10 estão com os deslocamentos restringidos. A função objetivo do problema de otimização é o peso da estrutura e as variáveis de projeto são as áreas das seções transversais, podendo ser submetida às restrições de tensão, deslocamento e flambagem global. Na Figura 12 é apresentada a estrutura analisada.

Figura 12 – Treliça espacial de 25 barras.



Fonte: Adaptado de Sonmez (2011).

As áreas das seções transversais das barras são agrupadas em 8 (oito) conjuntos distintos, dessa forma tem-se como variáveis de projeto: $X_1 = A_1$; $X_2 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5$; $X_3 = A_6 = A_7 = A_8 = A_9$; $X_4 = A_{10} = A_{11}$; $X_5 = A_{12} = A_{13}$; $X_6 = A_{14} = A_{15} = A_{16} = A_{17}$; $X_7 = A_{18} = A_{19} = A_{20} = A_{21}$; e $X_8 = A_{22} = A_{23} = A_{24} = A_{25}$. O domínio das variáveis de projeto é discreto, com 30 (trinta) valores disponíveis,

conforme apresentado na Tabela 7. Dois casos foram analisados, o primeiro impõe restrições de tensão, com relação às tensões máximas admissíveis de tração, $\sigma_T^{adm} = 275,79 \text{ MPa}$, e compressão, $\sigma_C^{adm} = 275,79 \text{ MPa}$, do material, e deslocamentos, limitando-os nas direções x, y e z em cada nó livre, $d_{m\acute{a}x} = +/- 0,889 \text{ cm}$. O segundo caso acrescenta a restrição de flambagem global, observando a Equação 3.1b para $K = 12,5$, cujo valor utilizado é igual aos dos autores que estudaram este exemplo, para fins de comparação. Na Tabela 4 constam as informações do problema estrutural quanto aos carregamentos, propriedades do material e limite das restrições.

Tabela 4 – Configuração do problema 2: treliça espacial de 25 barras.

Parâmetros	Unidade	Valor
Carga $P(x, y, z)$	kN	$P_1(4,45, -44,48, -44,48)$ $P_2(0, -44,48, -44,48)$ $P_3(2,22,0,0) P_6(2,67,0,0)$
Módulo de Elasticidade Longitudinal (E)	GPa	68,95
Peso Específico (γ)	kN/m^3	27,15
Variáveis de projeto (A)	cm^2	$X_1 = A_1; X_2 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5; X_3 = A_6 = A_7 = A_8 = A_9 =; X_4 = A_{10} = A_{11}; X_5 = A_{12} = A_{13}; X_6 = A_{14} = A_{15} = A_{16} = A_{17}; X_7 = A_{18} = A_{19} = A_{20} = A_{21}; X_8 = A_{22} = A_{23} = A_{24} = A_{25}$
Domínio das variáveis de projeto	cm^2	0,65 1,29 1,94 2,58 3,23 3,87 4,52 5,16 5,8 6,45 7,10 7,74 8,39 9,03 9,68 10,32 10,97 11,61 12,26 12,90 13,55 14,19 14,84 15,48 16,13 16,78 18,07 19,36 20,65 21,94
Tensão máxima admissível (σ^{adm})	MPa	$+/-275,79$
Deslocamento máximo admissível ($d_{m\acute{a}x}$)	cm	$+/- 0,889$
Flambagem Global (σ_{cr})	MPa	$\frac{KEA}{l^2}$, $k = 12,5$
Tipos de restrições		Caso 1: Tensão e deslocamentos. Caso 2: Tensão, deslocamentos e flambagem.

Fonte: O Autor (2019).

Entre os vários autores que estudaram o Caso 1, os resultados obtidos por Wu e Chow (1995), Dede, Bekiroglu e Ayvaz (2011) e Sonmez (2011) foram comparados com a solução obtida neste estudo (ver Tabela 5). Os dois primeiros trabalhos utilizaram os Algoritmos Genéticos e o último, o Algoritmo de Colônia de Abelhas Artificial. A solução ótima apresentou os seguintes valores para as variáveis de projeto: $X_1 = 0,645 \text{ cm}^2$, $X_2 = 3,226 \text{ cm}^2$, $X_3 = 21,937 \text{ cm}^2$, $X_4 = 0,645 \text{ cm}^2$, $X_5 = 12,259 \text{ cm}^2$, $X_6 = 6,452 \text{ cm}^2$, $X_7 = 2,581 \text{ cm}^2$ e $X_8 = 21,937 \text{ cm}^2$. O peso obtido para a estrutura otimizada foi de $2,158 \text{ kN}$, similar aos mais recentes valores obtidos nos trabalhos objeto de comparação, conforme apresentado na Tabela 8. O nó 1 limitou a solução encontrada, com relação a restrição de deslocamento. Dentre os autores que utilizaram os Algoritmos Genéticos, o resultado apresentado por Wu e Chow (1995) foi menos refinado em virtude da população inicial adotada, apenas 20, enquanto Dede, Bekiroglu e Ayvaz (2011) utilizou 200, similar a este trabalho. O tempo de processamento para obtenção da solução foi de 69s (1min 9s), maior, comparado ao exemplo anterior. Esse aumento era esperado, uma vez que o número de elementos e variáveis de projeto são consideravelmente superiores.

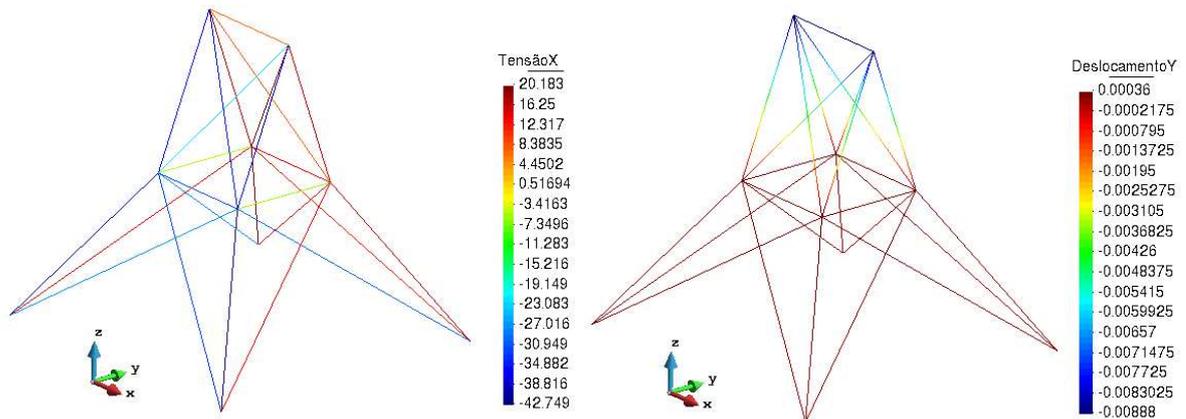
Tabela 5 – Resultados otimizados para treliça espacial de 25 barras (Caso 1).

Variáveis de Projeto (área cm^2)	Wu e Chow (1995)	Dede, Bekiroglu e Ayvaz (2011)	Sonmez (2011)	Este trabalho
A_1	0,645	0,645	0,645	0,645
$A_2 = A_3 = A_4 = A_5$	3,871	1,936	1,936	3,226
$A_6 = A_7 = A_8 = A_9$	20,646	21,937	21,937	21,937
$A_{10} = A_{11}$	1,290	0,645	0,645	0,645
$A_{12} = A_{13}$	9,678	13,549	13,549	12,259
$A_{14} = A_{15} = A_{16} = A_{17}$	6,452	6,452	6,452	6,452
$A_{18} = A_{19} = A_{20} = A_{21}$	3,871	3,226	3,226	2,581
$A_{22} = A_{23} = A_{24} = A_{25}$	21,937	21,937	21,937	21,937
Peso total (kN)	2,188	2,158	2,158	2,158

Fonte: O Autor (2019).

Na Figura 13 observa-se a configuração otimizada do Caso 1 para o problema proposto. Consta a visão gráfica das tensões axiais nas barras (MPa) e dos deslocamentos para a direção y (m).

Figura 13 – Resultados, tensões axiais (MPa) e deslocamentos (m), da configuração otimizada do problema 2 (Caso 1).



Fonte: O Autor (2019).

Para o Caso 2, ao acrescentar a restrição de flambagem global, o peso da estrutura aumentou 5,98 %, em comparação a solução obtida no Caso 1, sendo 2,287 kN. As áreas encontradas no processo de busca foram: $X_1 = 0,645 \text{ cm}^2$, $X_2 = 5,162 \text{ cm}^2$, $X_3 = 16,775 \text{ cm}^2$, $X_4 = 0,645 \text{ cm}^2$, $X_5 = 7,742 \text{ cm}^2$, $X_6 = 7,097 \text{ cm}^2$, $X_7 = 7,097 \text{ cm}^2$ e $X_8 = 21,937 \text{ cm}^2$. Na Tabela 6 constam os resultados obtidos comparados ao Caso 1 e a aqueles obtidos por Wu e Chow (1995), que também analisou o problema nessas condições. Novamente o nó 1 limitou a solução encontrada, com relação a restrição de deslocamento, e adicionalmente, a barra 21 limitou à restrição de flambagem, com tensão de $-27,493 \text{ MPa}$. O aumento da solução encontrada era esperado, uma vez que as barras 4, 15, 17, 20 e 21, no Caso 1, não atendem a TCE. Assim como um resultado maior por parte do trabalho de Wu e Chow (1995) também, por ter utilizado novamente uma população inicial de 20. O incremento da restrição de flambagem acarretou um tempo de processamento de 140s (2min 20s).

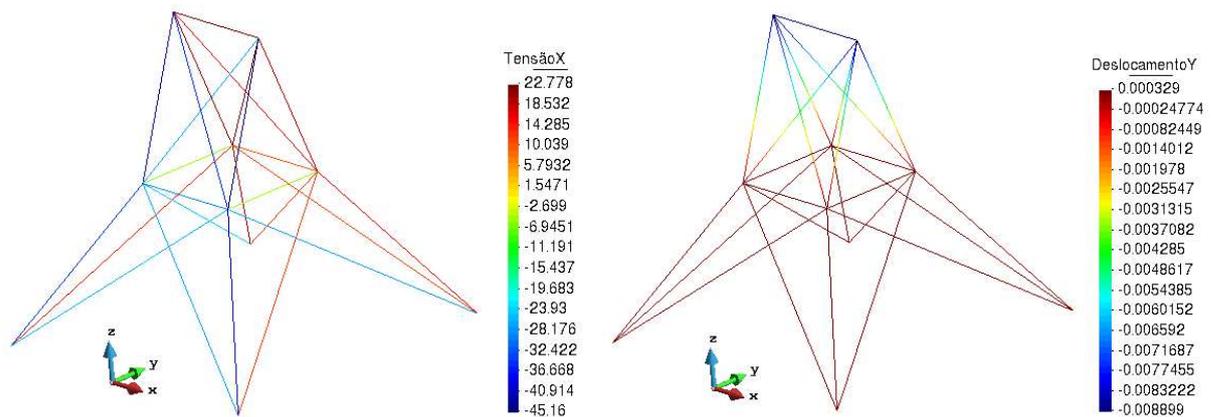
Tabela 6 – Resultados otimizados para treliça espacial de 25 barras (Caso 2).

Variáveis de Projeto (área cm ²)	Este trabalho (Caso 1)	Wu e Chow (1995)	Este trabalho
A_1	0,645	1,936	0,645
$A_2 = A_3 = A_4 = A_5$	3,226	5,807	5,162
$A_6 = A_7 = A_8 = A_9$	21,937	19,356	16,775
$A_{10} = A_{11}$	0,645	2,581	0,645
$A_{12} = A_{13}$	12,259	6,452	7,742
$A_{14} = A_{15} = A_{16} = A_{17}$	6,452	7,097	7,097
$A_{18} = A_{19} = A_{20} = A_{21}$	2,581	7,742	7,097
$A_{22} = A_{23} = A_{24} = A_{25}$	21,937	19,356	21,937
Peso total (kN)	2,158	2,337	2,287

Fonte: O Autor (2019).

Apresenta-se na Figura 14 a configuração otimizada do Caso 2 para este problema, pelo programa de pós-processamento GiD, relacionada as tensões axiais nas barras (MPa) e aos deslocamentos para a direção y (m) da treliça estudada.

Figura 14 – Resultados, tensões axiais (MPa) e deslocamentos (m), da configuração otimizada do problema 2 (Caso 2).



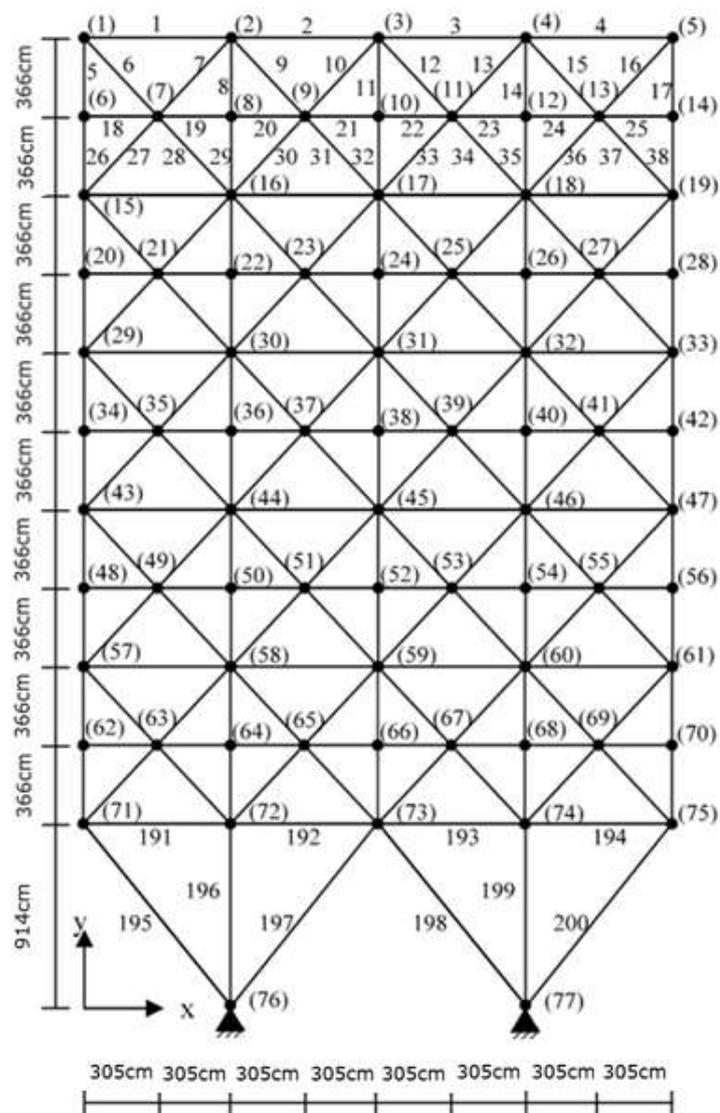
Fonte: O Autor (2019).

4.3 TRELIÇA PLANA DE 200 BARRAS

Uma torre com 200 (duzentas) barras é estudada neste terceiro exemplo. Os elementos estão distribuídos em 77 (setenta e sete) nós, destes, os nós 76 e 77

estão engastados, conforme se observa na Figura 15. 29 (vinte e nove) conjuntos de barras são utilizados, resultando assim no mesmo número de variáveis de projeto (Tabela 7). Três configurações de carregamento são abordadas. O carregamento 1 apresenta uma força $P_1 = 4,45 \text{ kN}$ na direção do eixo x , atuando nos nós 1, 6, 15, 20, 29, 34, 43, 48, 57, 62 e 71. Para o carregamento 2, uma carga $P_2 = -44,48 \text{ kN}$ na direção do eixo y atua nos nós 1, 2, ..., 6, 8, 10, 12, 14, 15, ..., 20, 22, 24, 25, ..., 73, 74, e 75. O carregamento 3 é resultante da combinação dos dois primeiros.

Figura 15 – Treliça plana de 200 barras.



Fonte: Adaptado de Dede, Bekiroglu e Ayvaz (2011).

Tabela 7 – Agrupamento das variáveis de projeto, problema 3.

Grupo	Elementos	Grupo	Elementos	Grupo	Elementos
X_1	1, 2, 3, 4	X_{11}	44, 45, 47, 48, 50, 51, 53, 54, 65, 66, 68, 69, 71, 72, 74, 75	X_{21}	120, 121, 123, 124, 126, 127, 129, 130, 141, 142, 144, 145, 147, 148, 150, 151
X_2	5, 8, 11, 14, 17	X_{12}	77, 78, 79, 80	X_{22}	153, 154, 155, 156
X_3	19, 20, 21, 22, 23, 24	X_{13}	81, 84, 87, 90, 93	X_{23}	157, 160, 163, 166, 169
X_4	18, 25, 56, 63, 94, 101, 132, 139, 170, 177	X_{14}	95, 96, 97, 98, 99, 100	X_{24}	171, 172, 173, 174, 175, 176
X_5	26, 29, 32, 35, 38	X_{15}	102, 105, 108, 111, 114	X_{25}	178, 181, 184, 187, 190
X_6	6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 27, 28, 30, 31, 33, 34, 36, 37	X_{16}	82, 83, 85, 86, 88, 89, 91, 92, 103, 104, 106, 107, 109, 110, 112, 113	X_{26}	158, 159, 161, 162, 164, 165, 167, 168, 179, 180, 182, 183, 185, 186, 188, 189
X_7	39, 40, 41, 42	X_{17}	115, 116, 117, 118	X_{27}	191, 192, 193, 194
X_8	43, 46, 49, 52, 55	X_{18}	119, 122, 125, 128, 131	X_{28}	195, 197, 198, 200
X_9	57, 58, 59, 60, 61, 62	X_{19}	133, 134, 135, 136, 137, 138	X_{29}	196, 199
X_{10}	64, 67, 70, 73, 76	X_{20}	140, 143, 146, 149, 152		

Fonte: O Autor (2019).

O problema é abordado de duas maneiras. No Caso 1, o domínio das variáveis de projeto é contínuo e há apenas restrição de tensão, $\sigma^{adm} = +/- 69 \text{ MPa}$. No Caso 2, o domínio das variáveis de projeto é discreto, com 30 (trinta) valores disponíveis, e restrições de deslocamentos são adicionadas, $d_{m\acute{a}x} = +/- 1,27 \text{ cm}$. As alterações efetuadas para o Caso 2 tomaram como referência o estudo desenvolvido por Dede, Bekiroglu e Ayvaz (2011). A Tabela 8 resume o problema para as duas situações.

Tabela 8 – Configuração do problema 3: treliça plana de 200 barras.

Parâmetros	Unidade	Valor
Carregamento 1 $P(x)$	kN	$P_1(4,45)$ atuante nos nós: 1, 6, 15, 20, 29, 34, 43, 48, 57, 62 e 71
Carregamento 2 $P(y)$	kN	$P_2(-44,48)$ atuante nos nós: 1, 2, ..., 6, 8, 10, 12, 14, 15, ..., 20, 22, 24, 25, ..., 73, 74, e 75
Carregamento 3	kN	Carregamento 1 + Carregamento 2
Módulo de Elasticidade Longitudinal (E)	GPa	206,84
Peso Específico (γ)	kN/m^3	76,84
Variáveis de projeto (A)	cm^2	Tabela 10
Domínio das variáveis de projeto – Caso 1	cm^2	$0,6452 \leq X_i \leq 322,60 \quad i = 1,2,3, \dots 29.$
Domínio das variáveis de projeto – Caso 2	cm^2	0,65 2,24 2,84 3,48 6,16 6,98 7,58 8,60 9,6 11,38 13,82 17,40 18,07 20,20 23,00 24,60 38,40 42,40 46,40 55,00 60,00 70,00 86,01 92,20 110,78 123,75 152,78 181,17 217,43
Tensão máxima admissível (σ^{adm})	MPa	+/-69
Deslocamento máximo admissível ($d_{m\acute{a}x}$)	cm	+/- 1,27
Tipos de restrições		Caso 1: Tensão. Caso 2: Tensão e deslocamentos.

Fonte: O Autor (2019).

Em virtude da utilização de 29 (vinte e nove) variáveis de projeto, além de ser uma estrutura com 200 (duzentas) barras, esse problema demandou um custo computacional considerável, em comparação aos exemplos anteriores, para obtenção da solução ótima do Caso 1. O tempo de processamento para o carregamento 3 foi de 8.714s (2h 25min 14s). Para o carregamento 1 as barras 18, 56, 72, 94, 110, 132, 148, 170, 192 e 196 atingiram a tensão máxima admissível. No carregamento 2, as barras limitantes foram 74, 90, 111, 128, 149, 166, 187, 188 e 199. O carregamento 3 resultou a tensão máxima admissível nas barras 28, 73, 90, 111, 175, 176, 180 e 199. Na Tabela 9, constam os resultados do Caso 1 para as três configurações de carregamento. Nota-se que o incremento de carga na estrutura, aumenta significativamente os resultados. O Carregamento 3 resultou em um incremento de peso de 943,52% em comparação ao Carregamento 1 e de 11,88% em comparação ao Carregamento 2.

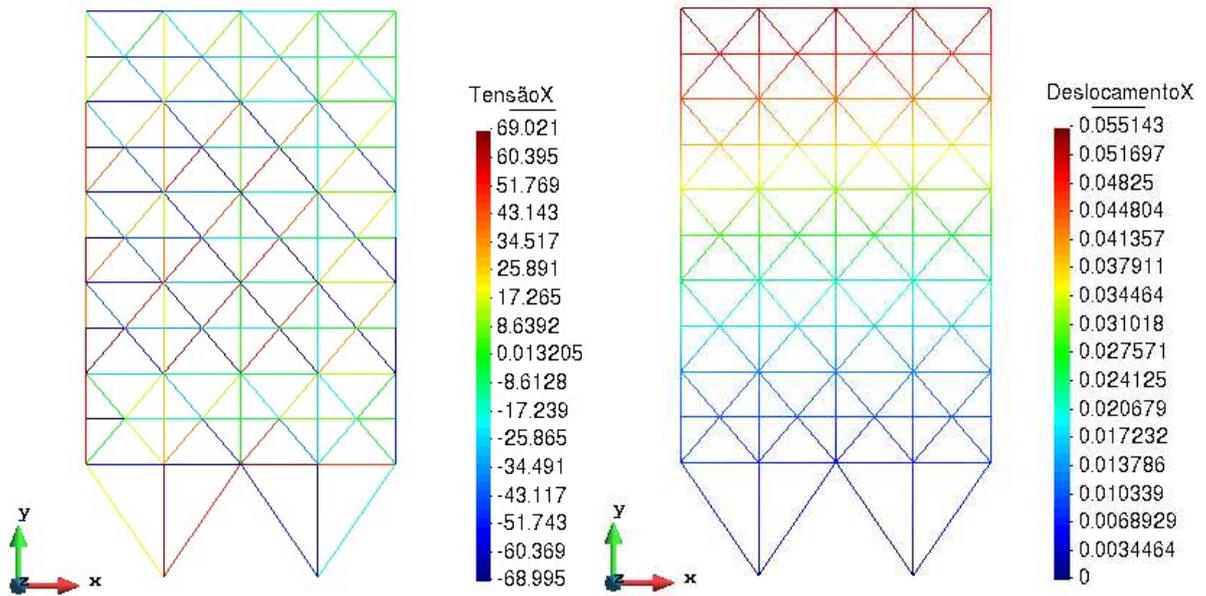
Tabela 9 – Resultados otimizados para treliça plana de 200 barras (Caso 1).

Grupo (área cm²)	Carregamento 1	Carregamento 2	Carregamento 3
X_1	0,647	0,648	1,429
X_2	0,650	13,081	7,840
X_3	0,706	1,624	1,360
X_4	0,645	0,652	0,649
X_5	0,646	12,819	13,807
X_6	0,646	0,645	1,100
X_7	0,646	1,221	44,737
X_8	0,646	20,618	39,629
X_9	0,646	2,634	0,653
X_{10}	0,645	27,366	27,835
X_{11}	0,676	5,596	5,678
X_{12}	0,712	0,831	4,671
X_{13}	2,936	40,334	38,117
X_{14}	0,815	5,544	11,191
X_{15}	1,180	46,787	44,557
X_{16}	1,020	6,452	13,399
X_{17}	0,657	6,609	13,908
X_{18}	3,760	60,969	111,633
X_{19}	0,647	0,672	2,124
X_{20}	2,157	67,417	76,203
X_{21}	1,162	6,818	10,813
X_{22}	3,517	49,834	1,742
X_{23}	3,807	88,819	101,666
X_{24}	9,774	4,791	1,691
X_{25}	3,734	95,285	110,250
X_{26}	4,865	26,761	11,262
X_{27}	3,472	32,041	39,041
X_{28}	13,262	69,760	83,620
X_{29}	4,493	131,527	127,207
Peso total (kN)	16,692	155,694	174,184

Fonte: O Autor (2019).

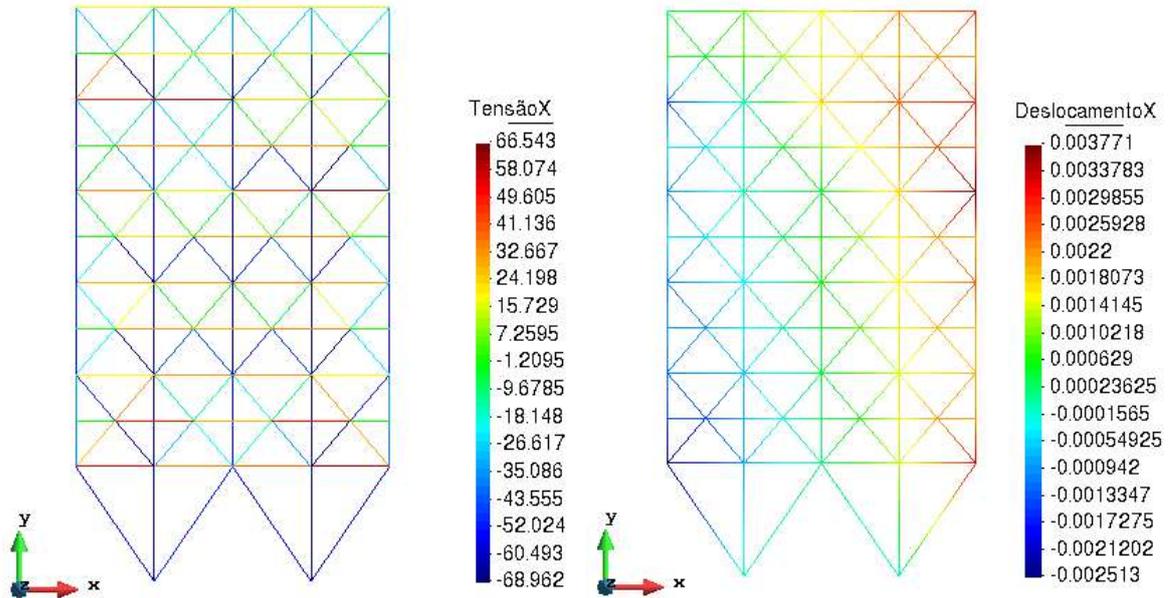
As Figuras 16 a 18 apresentam a configuração otimizada do Caso 1 para os 3 (três) carregamentos. A representação gráfica foi obtida com o GiD, relacionando as tensões axiais nas barras (MPa) e os deslocamentos para a direção x (m) da treliça estudada.

Figura 16 – Resultados, tensões axiais (MPa) e deslocamentos (m), da configuração otimizada do problema 3 (Caso 1-1).



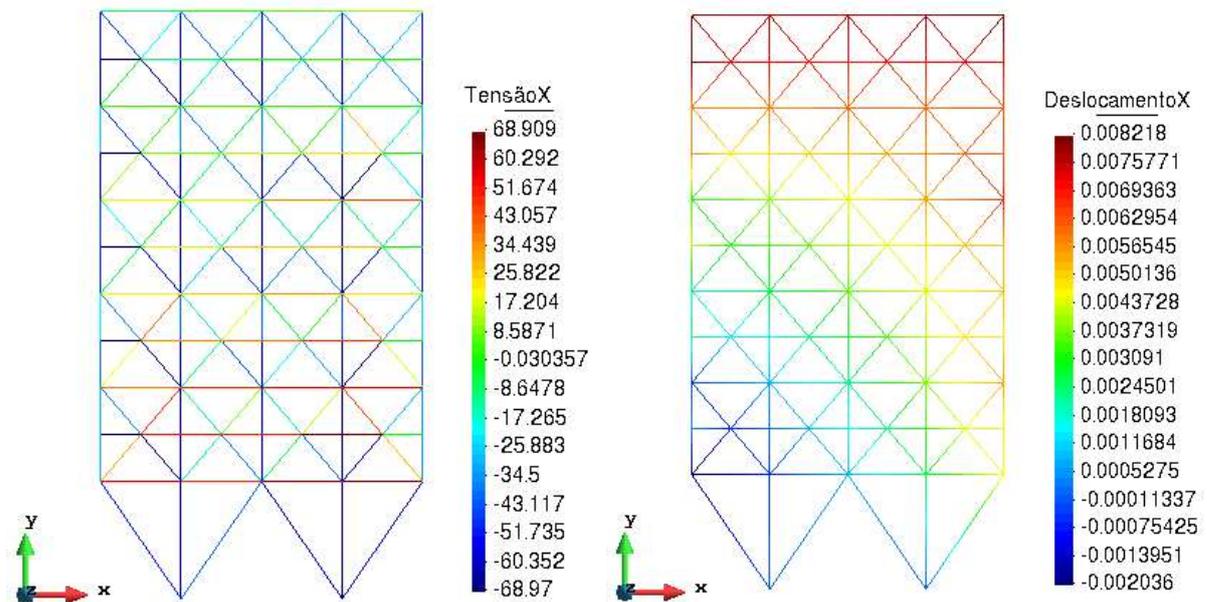
Fonte: O Autor (2019).

Figura 17 – Resultados, tensões axiais (MPa) e deslocamentos (m), da configuração otimizada do problema 3 (Caso 1-2).



Fonte: O Autor (2019).

Figura 18 – Resultados, tensões axiais (MPa) e deslocamentos (m), da configuração otimizada do problema 3 (Caso 1-3).



Fonte: O Autor (2019).

O Caso 1 também foi estudado anteriormente por Lee e Geem (2004), Togan e Daloglu (2008) e Xu *et al.* (2009). Lee e Geem (2004) utilizaram o Algoritmo de Busca Harmônica e os demais utilizaram Algoritmos Genéticos. Os resultados obtidos neste trabalho para o carregamento 3 foram comparados aos da literatura (ver Tabela 10). O peso ótimo obtido foi de 174,184 kN . Embora maior que os três trabalhos comparados da literatura, nenhuma barra inflige a restrição de tensão, diferente dos demais.

Ao analisar os valores obtidos por Xu *et al.* (2009), observa-se que a solução, a depender da tolerância utilizada pelo usuário, atende as restrições, apenas a barra 199 ultrapassa a tensão admissível ligeiramente, $\sigma_{199} = -69,24 MPa$, maior 0,42 %. Com relação aos outros trabalhos, conforme consta em Xu *et al.* (2009), as barras 74, 104 e 142 violam severamente a restrição de tensão. Seus valores no estudo de Lee e Geem (2004) são $-113,0 MPa$, $-111,6 MPa$ e $-107,5 MPa$, respectivamente, e em Togan e Daloglu (2008), $-104,7 MPa$, $-90,3 MPa$ e $-91,6 MPa$.

Tabela 10 – Resultados otimizados para treliça plana de 200 barras (Caso 1-3).

Grupo (área cm ²)	Lee e Geem (2004)	Togan e Daloglu (2008)	Xu <i>et al.</i> (2009)	Este trabalho
X_1	0,808	2,239	1,852	1,429
X_2	6,553	6,975	7,755	7,840
X_3	0,690	0,645	0,968	1,360
X_4	0,707	0,645	1,458	0,649
X_5	12,497	13,820	15,311	13,807
X_6	1,733	2,239	2,613	1,100
X_7	0,672	0,645	0,645	44,737
X_8	19,182	23,001	22,066	39,629
X_9	0,845	2,239	0,684	0,653
X_{10}	26,989	31,002	27,195	27,835
X_{11}	2,560	2,839	4,742	5,678
X_{12}	2,849	2,839	4,213	4,671
X_{13}	33,468	38,402	47,313	38,117
X_{14}	1,234	2,239	0,736	11,191
X_{15}	40,267	42,403	53,345	44,557
X_{16}	4,513	6,155	6,407	13,399
X_{17}	0,747	2,239	2,774	13,908
X_{18}	50,095	55,003	63,113	111,633
X_{19}	0,645	0,645	1,187	2,124
X_{20}	56,958	60,004	68,778	76,203
X_{21}	4,507	6,155	8,059	10,813
X_{22}	10,041	11,381	29,189	1,742
X_{23}	70,847	85,812	88,457	101,666
X_{24}	0,850	2,239	2,568	1,691
X_{25}	78,387	85,812	94,328	110,250
X_{26}	10,564	13,820	25,240	11,262
X_{27}	32,281	31,002	51,261	39,041
X_{28}	60,355	60,004	115,491	83,620
X_{29}	97,373	110,781	116,717	127,207
Peso total (kN)	113,240	127,021	169,566	174,184

Fonte: O Autor (2019).

Após a análise realizada, foi alterado o domínio das variáveis de projeto, para um discreto, e restrições de deslocamentos foram adicionadas, resultando no Caso 2. Foi realizada apenas a abordagem do carregamento 3. O resultado ótimo obtido foi um peso estrutural de 200,526 kN, 15,12 % maior que o Caso 1 (ver Tabela 11). O nó 5 apresentou o deslocamento máximo admissível, enquanto nenhuma barra

atingiu a tensão máxima admissível. Observou-se que ao determinar um domínio discreto para as variáveis de projeto o custo computacional para solucionar o problema reduz de maneira bastante relevante. O tempo de processamento passou de 8.714s (2h 25min 14s) para 1.029s (17min 9s).

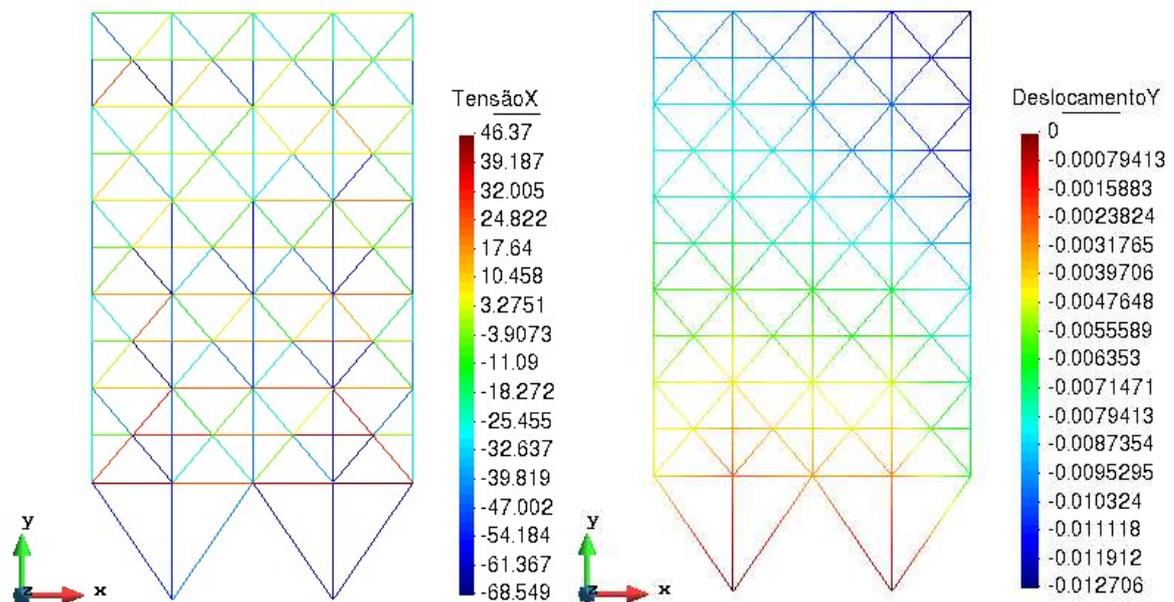
Tabela 11 – Resultados otimizados para treliça plana de 200 barras (Caso 2-3).

Grupo (área cm ²)	Este trabalho (Caso 1)	Este trabalho	Grupo (área cm ²)	Este trabalho (Caso 1)	Este trabalho
X_1	1,429	2,839	X_{16}	13,399	9,601
X_2	7,840	20,201	X_{17}	13,908	7,575
X_3	1,360	7,575	X_{18}	111,633	92,199
X_4	0,649	7,575	X_{19}	2,124	3,478
X_5	13,807	18,066	X_{20}	76,203	86,005
X_6	1,100	0,645	X_{21}	10,813	8,601
X_7	44,737	17,401	X_{22}	1,742	42,403
X_8	39,629	46,403	X_{23}	101,666	123,749
X_9	0,653	17,401	X_{24}	1,691	6,155
X_{10}	27,835	60,004	X_{25}	110,250	123,749
X_{11}	5,678	6,975	X_{26}	11,262	23,001
X_{12}	4,671	6,155	X_{27}	39,041	42,403
X_{13}	38,117	42,403	X_{28}	83,620	70,004
X_{14}	11,191	23,001	X_{29}	127,207	152,783
X_{15}	44,557	55,003	Peso total (kN)	174,184	200,526

Fonte: O Autor (2019).

A Figura a seguir demonstra os resultados do Caso 2 por meio do pós-processamento do GiD. A demonstração gráfica indica as tensões axiais nas barras (MPa) e os deslocamentos na direção y (m) da estrutura.

Figura 19 – Resultados, tensões axiais (MPa) e deslocamentos (m), da configuração otimizada do problema 3 (Caso 2).

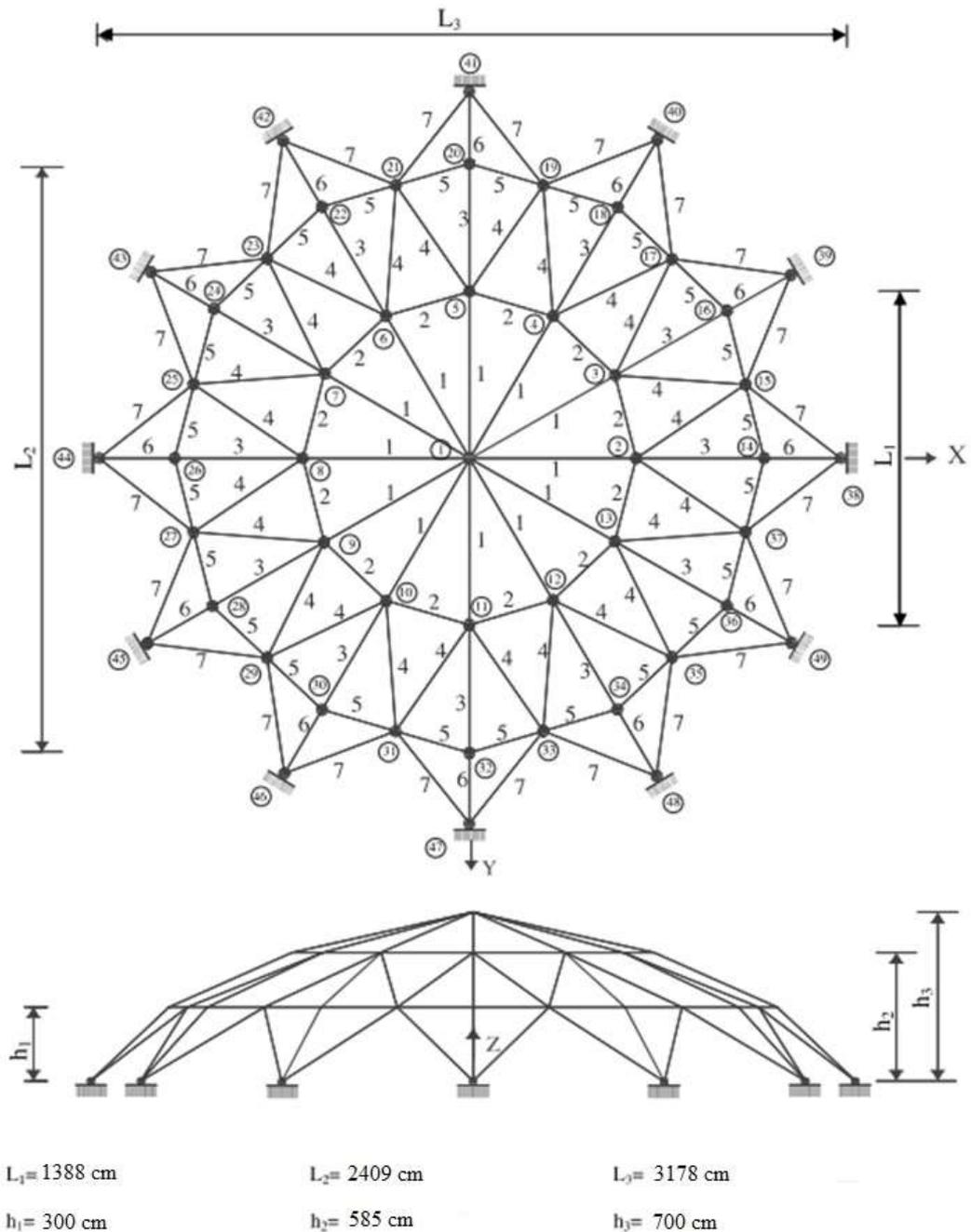


Fonte: O Autor (2019).

4.4 TRELIÇA ESPACIAL DE 120 BARRAS

O quarto exemplo apresenta um domo metálico de 120 (cento e vinte) barras (Figura 20). As barras da estrutura estão distribuídas em 49 (quarenta e nove) nós, estando os nós de 38 a 49 engastados, sendo assim, com deslocamentos restringidos. Nos nós livres há carregamentos na direção do eixo z , no sentido negativo. No nó 1 a carga pontual é $P_1 = -60,00 \text{ kN}$, nos nós de 2 a 13 $P_2 = -30,00 \text{ kN}$, e nos nós de 14 a 37 $P_3 = -10,00 \text{ kN}$. O problema de otimização foi abordado sujeito às restrições de tensão, deslocamento e flambagem global, no qual as variáveis de projeto são as áreas das seções transversais dos elementos.

Figura 20 – Treliça espacial de 120 barras.



Fonte: Adaptado de Togan e Daloglu (2008).

Os 120 elementos do domo foram separados em 7 (sete) grupos, com áreas das seções transversais independentes. As 7 (sete) variáveis de projeto foram distribuídas da seguinte maneira: $X_1 = A_1 \dots A_{12}$; $X_2 = A_{13} \dots A_{24}$; $X_3 = A_{25} \dots A_{36}$; $X_4 = A_{37} \dots A_{60}$; $X_5 = A_{61} \dots A_{84}$; $X_6 = A_{85} \dots A_{96}$; e $X_7 = A_{97} \dots A_{120}$. Os possíveis valores para as variáveis de projeto tomaram como base as áreas e propriedades geométricas das seções tubulares fornecidas pela AISC-ASD (*American Institute of*

Steel Construction – Allowable Strength Design). Os valores limite das restrições são: $\sigma^{adm} = 240,00 \text{ MPa}$ (60 % da resistência do aço adotado), para tensão; $d_{m\acute{a}x} = \pm 0,50 \text{ cm}$ nas direções x, y , para deslocamento; e a restrição de flambagem global limita a compressão à TCE, conforme Equação 3.1a. Essas informações estão sintetizadas na Tabela 12.

Tabela 12 – Configuração do problema 4: treliça espacial de 120 barras.

Parâmetros	Unidade	Valor
Carga $P(z)$	kN	$P_1(-60,00) P_2(-30,00) P_3(-10,00)$
Módulo de Elasticidade Longitudinal (E)	GPa	210
Peso Específico (γ)	kN/m^3	78,20
Variáveis de projeto (A)	cm^2	$X_1 = A_1 \dots A_{12}; X_2 = A_{13} \dots A_{24}; X_3 = A_{25} \dots A_{36}; X_4 = A_{37} \dots A_{60}; X_5 = A_{61} \dots A_{84}; X_6 = A_{85} \dots A_{96}; X_7 = A_{97} \dots A_{120}$
Domínio das variáveis de projeto	cm^2	1,61 2,15 3,19 4,32 5,16 6,90 10,97 14,39 17,29 20,45 27,74
Tensão máxima admissível (σ^{adm})	MPa	240,00
Deslocamento máximo admissível ($d_{m\acute{a}x}$)	cm	$\pm 0,50$
Flambagem Global (σ_{cr})	MPa	$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{Al^2}$
Tipos de restrições		Tensão, deslocamentos e flambagem.

Fonte: O Autor (2019).

Esse problema foi estudado em 2004 por Lee e Geem, utilizando o Algoritmo de Busca Harmônica. A partir desse estudo, Togan e Daloglu (2008) também o analisou através dos Algoritmos Genéticos. Os resultados obtidos neste trabalho constam na Tabela 16, comparados aos obtidos nos artigos supracitados. As áreas das seções transversais que apresentaram a solução ótima são: $X_1 = 14,387 \text{ cm}^2$; $X_2 = 10,968 \text{ cm}^2$; $X_3 = 14,387 \text{ cm}^2$; $X_4 = 10,968 \text{ cm}^2$; $X_5 = 1,613 \text{ cm}^2$; $X_6 = 10,968 \text{ cm}^2$; e $X_7 = 10,968 \text{ cm}^2$. Essa configuração resulta um peso estrutural de $54,049 \text{ kN}$, 38,94 % menor que o obtido por Lee e Geem (2004) e 33,61 % menor que o obtido por Togan e Daloglu (2008), conforme observado na Tabela 13. O tempo de processamento para encontrar a solução ótima foi de 174s (2min 54s).

Tabela 13 – Resultados otimizados para treliça espacial de 120 barras.

Variáveis de Projeto (área cm ²)	Lee e Geem (2004)	Togan e Daloglu (2008)	Este trabalho
$A_1 \dots A_{12}$	21,266	17,290	14,387
$A_{13} \dots A_{24}$	17,994	14,387	10,968
$A_{25} \dots A_{36}$	24,982	27,742	14,387
$A_{37} \dots A_{60}$	16,581	14,387	10,968
$A_{61} \dots A_{84}$	7,413	5,155	1,613
$A_{85} \dots A_{96}$	21,492	20,452	10,968
$A_{97} \dots A_{120}$	17,943	17,290	10,968
Peso total (kN)	88,525	81,407	54,049

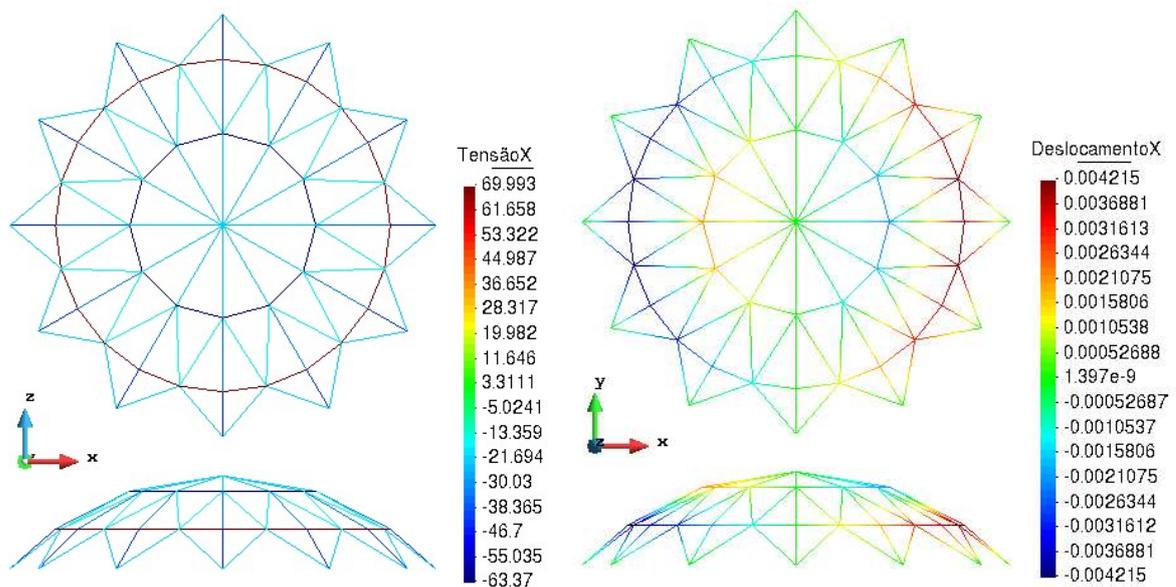
Fonte: O Autor (2019).

As restrições de deslocamento, e principalmente, a de flambagem global, delimitaram os resultados deste trabalho. Apenas as barras do tipo 5 (vê Figura 20) estão submetidas a tração, as demais estão comprimidas. Os nós 15, 25, 27 e 37 apresentaram o maior deslocamento na direção x , no valor de $0,42\text{cm}$. Na direção y os valores foram menores. Na direção z houve deslocamentos maiores, nós 2 a 13 com $1,08\text{cm}$, contudo essa direção não foi restringida.

As diferenças encontradas com relação aos trabalhos de Togan e Daloglu (2008) e Lee e Geem (2004), possivelmente, decorrem do fato desses autores terem utilizados a AISC-ASD como referência para restrição de flambagem global. Lee e Geem (2004), além de aplicarem outro método (Algoritmo de Busca Harmônica), utilizaram variáveis de projeto contínuas.

A Figura 21 apresenta graficamente a configuração otimizada do problema 4, através do pós-processamento do GiD. Demonstra as tensões axiais nas barras (MPa) e os deslocamentos para a direção $x(m)$ da treliça estudada.

Figura 21 – Resultados, tensões axiais (MPa) e deslocamentos (m), da configuração otimizada do problema 4.

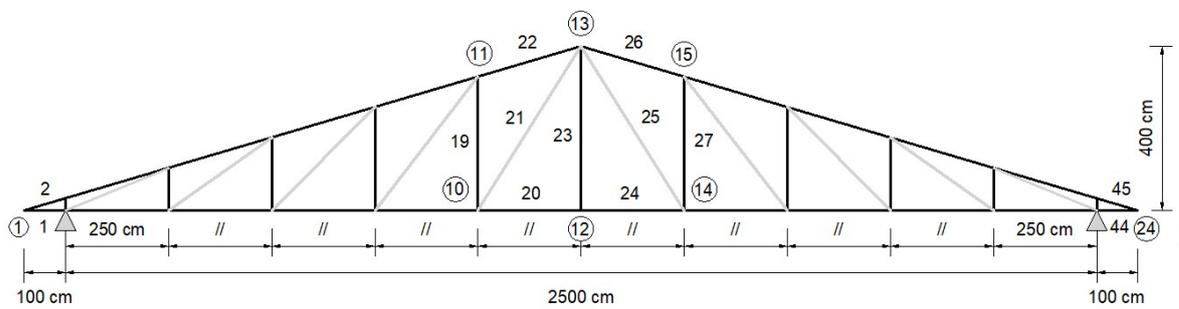


Fonte: O Autor (2019).

4.5 TRELIÇA PRATT DE 6 MÓDULOS

Após os 4 (quatro) exemplos estudados anteriormente na literatura, para fins de validação do algoritmo, utilizou-se o programa para alguns casos práticos. Este quinto problema aborda uma Treliça Pratt de 6 módulos, utilizada geralmente como tesoura em estruturas de cobertura com grandes vãos (Figura 22). Neste exemplo, a estrutura vence um vão de 25 m e possui um beiral de 1 m em ambos os lados. Os nós do banzo superior estão sujeitos a carregamentos na direção do eixo y , no sentido negativo. Os nós que limitam o beiral estão sujeitos a uma carga $P_1 = -1,25\text{ kN}$, os alinhados verticalmente aos apoios a uma carga $P_2 = -3,75\text{ kN}$ e os demais nós do banzo superior a uma carga $P_3 = -5,00\text{ kN}$. Essa configuração estrutural foi apresentada pelo o autor. O objetivo da análise foi dimensionar a estrutura, utilizando perfis metálicos comerciais, a fim de se obter o menor peso possível, submetendo a solução às restrições de tensão, deslocamento e flambagem global.

Figura 22 – Treliça Pratt de 6 módulos.



Fonte: O Autor (2019).

A análise realizada foi desenvolvida em 3 (três) etapas. A primeira etapa foi a otimização da estrutura apenas com uma variável de projeto contínua, sujeita as restrições de tensão e deslocamento. Após se obter a solução, os elementos foram agrupados, conforme a tensão (tração ou compressão) e função na tesoura (banzo inferior, montante, diagonal e banzo superior). Foram determinados 8 (oito) grupos e novamente a busca pela solução ótima foi realizada. As mesmas condições foram empregadas, porém, agora, com 8 (oito) variáveis de projeto. Confirmado o comportamento da estrutura e constatada uma redução significativa do seu peso nessa segunda etapa, uma terceira abordagem foi realizada. A última análise, além de considerar o agrupamento dos elementos, utilizou domínios discretos para as variáveis de projeto, 4 (quatro) tabelas comerciais foram utilizadas (Anexos A a D), para os perfis C, I, U e T. Uma vez conhecida a geometria das seções transversais das barras, a restrição de flambagem global foi adicionada.

Conforme o catálogo de Barras e Perfis Gerdau (2019), a tensão de escoamento do material é $\sigma_{esc} = 250,00 \text{ MPa}$, para este trabalho, adotada como tensão admissível. O peso específico médio das ligas metálicas é $\gamma = 77 \text{ kN/m}^3$. O deslocamento máximo admissível adotado foi $d_{m\acute{a}x} = +/ - 2,00 \text{ cm}$, nas direções x, y , e o valor da compressão nos elementos foi limitado à TCE, conforme Equação 3.1a. A Tabela 14 apresenta as informações do problema de dimensionamento.

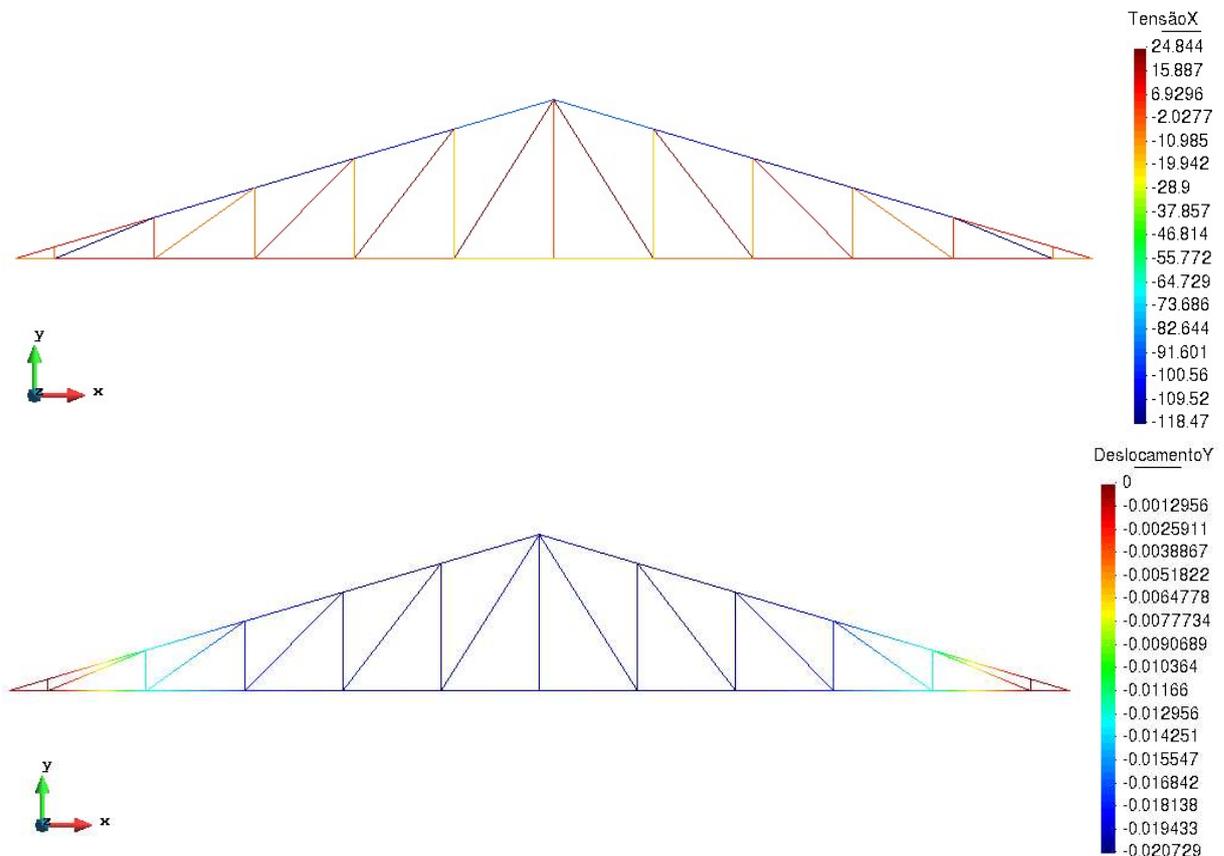
Tabela 14 – Configuração do problema 5: Treliça Pratt de 6 módulos.

Parâmetros	Unidade	Valor
Carga $P(y)$	kN	$P_1(-1,25) P_2(-3,75) P_3(-5,00)$
Módulo de Elasticidade Longitudinal (E)	GPa	200
Peso Específico (γ)	kN/m^3	77
Variáveis de projeto – Etapa 1 (A)	cm^2	$X = A$
Variáveis de projeto – Etapas 2 e 3 (A)	cm^2	$X_1 = A_1, A_{16}, A_{20}, A_{24}, A_{28}, A_{44}$ $X_2 = A_4, A_8, A_{12}, A_{32}, A_{36}, A_{40}$ $X_3 = A_2, A_6, A_{42}, A_{45}$ $X_4 = A_{10}, A_{14}, A_{18}, A_{22}, A_{26}, A_{30}, A_{34}, A_{38}$ $X_5 = A_3, A_{11}, A_{15}, A_{19}, A_{27}, A_{31}, A_{35}, A_{43}$ $X_6 = A_7, A_{23}, A_{39}$ $X_7 = A_5, A_9, A_{37}, A_{41}$ $X_8 = A_{13}, A_{17}, A_{21}, A_{25}, A_{29}, A_{33}$
Domínio das variáveis de projeto – Etapa 1	cm^2	$0,50 \leq X_1 \leq 75,00$
Domínio das variáveis de projeto – Etapa 2	cm^2	$0,50 \leq X_i \leq 75,00 \quad i = 1,2,3, \dots 8.$
Domínio das variáveis de projeto – Etapa 3	cm^2	Anexos A a D
Tensão máxima admissível (σ^{adm})	MPa	$+/-250,00$
Deslocamento máximo admissível ($d_{m\acute{a}x}$)	cm	$+/- 2,00$
Flambagem Global (σ_{cr})	MPa	$\frac{\pi^2 EI}{Al^2}$
Tipos de restrições		Etapas 1 e 2: Tensão e deslocamentos. Etapa 3: Tensão, deslocamentos e flambagem.

Fonte: O Autor (2019).

A Etapa 1 do dimensionamento apresentou um peso ótimo de $4,562 kN$, para área das seções transversais de $X = 5,232 cm^2$. Os nós adjacentes ao nó central do banzo superior (11 e 15) obtiveram o deslocamento máximo na direção y , limitando o resultado. O tempo de processamento foi de 44s. A Figura 23 apresenta a configuração da estrutura otimizada e o comportamento das barras, quanto às tensões axiais (MPa) e aos deslocamentos na direção y (m).

Figura 23 – Resultados, tensões axiais (MPa) e deslocamentos (m), da configuração otimizada do problema 5 (Etapa 1).



Fonte: O Autor (2019).

Após os primeiros resultados, os elementos foram agrupados em 8 (oito) conjuntos. O processo de busca da solução ótima com 8 (oito) variáveis de projeto apresentou um resultado 47,44 % menor. Diferente da primeira etapa, na qual apenas um valor de área é considerado para todos os elementos, agrupá-los conforme o comportamento e função na estrutura permite a obtenção de resultados mais refinados. O peso ótimo de 2,397 kN foi obtido para as áreas: $X_1 = 0,845 \text{ cm}^2$; $X_2 = 0,870 \text{ cm}^2$; $X_3 = 0,723 \text{ cm}^2$; $X_4 = 6,746 \text{ cm}^2$; $X_5 = 2,053 \text{ cm}^2$; $X_6 = 1,174 \text{ cm}^2$; $X_7 = 5,057 \text{ cm}^2$ e $X_8 = 1,793 \text{ cm}^2$. Ao agrupar os elementos, os nós 9 e 17 passaram a apresentar o maior deslocamento e limitar o resultado. A alteração de 1 (uma) para 8 (oito) variáveis de projeto aumentou o tempo de processamento para 279s (4min 39s). Na Tabela 15 constam os resultados obtidos nas Etapas 1 e 2.

Tabela 15 – Resultados otimizados para Treliza Pratt de 6 módulos (Etapas 1 e 2).

Variáveis de Projeto (área cm ²)	Este Trabalho (Etapa 1)	Este Trabalho (Etapa 2)
$A_1 = A_{16} = A_{20} = A_{24} = A_{28} = A_{44}$	5,232	0,845
$A_4 = A_8 = A_{12} = A_{32} = A_{36} = A_{40}$	5,232	0,870
$A_2 = A_6 = A_{42} = A_{45}$	5,232	0,723
$A_{10} = A_{14} = A_{18} = A_{22} = A_{26} = A_{30} = A_{34} = A_{38}$	5,232	6,746
$A_3 = A_{11} = A_{15} = A_{19} = A_{27} = A_{31} = A_{35} = A_{43}$	5,232	2,053
$A_7 = A_{23} = A_{39}$	5,232	1,174
$A_5 = A_9 = A_{37} = A_{41}$	5,232	5,057
$A_{13} = A_{17} = A_{21} = A_{25} = A_{29} = A_{33}$	5,232	1,793
Peso total (kN)	4,562	2,397

Fonte: O Autor (2019).

Com a finalidade de tornar os resultados exequíveis, a etapa final do dimensionamento passou a considerar um domínio discreto, para os perfis comerciais C, I, U e T, além de atribuir a restrição de flambagem global. Conforme se observa na Tabela 16, para esta estrutura, o Perfil C apresentou resultados melhores, com peso de 3,751 kN. Os valores disponíveis para os Perfis I e U apresentaram resultados superdimensionados, comparados com o Perfil C, com aumento do peso em 161,16 % e 132,20 %, respectivamente. O resultado do Perfil T foi subdimensionado, pois 10 barras infringiram à restrição de flambagem global, já que não há seções maiores disponíveis, e mesmo assim, com peso superior ao Perfil C (+10,64 %). Infringiram a TCE as barras 5, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38 e 41, com as seguintes tensões (compressão) comparadas a TCE: $\sigma_{5=41} = 102,455 \text{ MPa} > 31,311 \text{ MPa}$; $\sigma_{10=38} = 91,429 \text{ MPa} > 33,737 \text{ MPa}$; $\sigma_{14=34} = 95,758 \text{ MPa} > 33,737 \text{ MPa}$; $\sigma_{18=30} = 88,985 \text{ MPa} > 33,737 \text{ MPa}$ e $\sigma_{22=2} = 78,678 \text{ MPa} > 33,737 \text{ MPa}$. A utilização do domínio discreto diminuiu o tempo de processamento. A busca para o Perfil C, por exemplo, necessitou de 59s e foi limitada a restrição de deslocamento nos mesmos nós da Etapa 2 (9 e 17).

Tabela 16 – Resultados otimizados para Treliça Pratt com 6 módulos (Perfis Comerciais).

Variáveis de Projeto (área cm ²)	Perfil C	Perfil I	Perfil U	Perfil T *
$A_1 = A_{16} = A_{20} = A_{24} = A_{28} = A_{44}$	4,45	10,80	7,78	6,05
$A_4 = A_8 = A_{12} = A_{32} = A_{36} = A_{40}$	0,90	10,80	7,78	2,79
$A_2 = A_6 = A_{42} = A_{45}$	0,70	10,80	7,78	1,54
$A_{10} = A_{14} = A_{18} = A_{22} = A_{26} = A_{30} = A_{34} = A_{38}$	8,76	12,32	15,50	6,05
$A_3 = A_{11} = A_{15} = A_{19} = A_{27} = A_{31} = A_{35} = A_{43}$	5,52	10,80	7,78	6,05
$A_7 = A_{23} = A_{39}$	0,70	10,80	7,78	1,34
$A_5 = A_9 = A_{37} = A_{41}$	11,16	12,32	15,50	6,05
$A_{13} = A_{17} = A_{21} = A_{25} = A_{29} = A_{33}$	0,70	10,80	7,78	4,61
Peso total (kN)	3,751	9,796	8,710	4,150

* Não atende a restrição de flambagem global (elementos 5, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38 e 41).

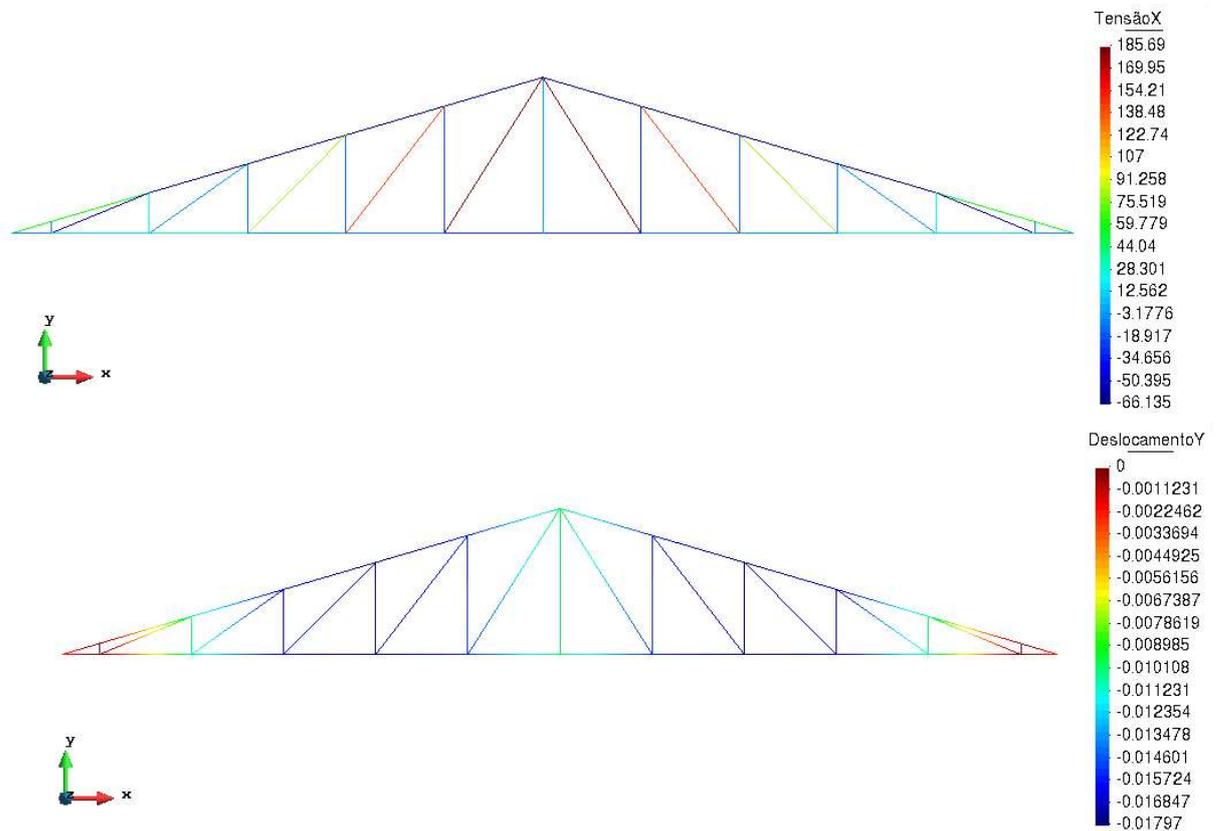
Fonte: O Autor (2019).

A metodologia tradicional de dimensionamento, inicialmente, analisa a estrutura treliçada. Após a análise, os esforços nas barras são identificados e aquelas que apresentam o maior valor (tração e compressão) são dimensionadas individualmente. No processo de dimensionamento também é verificado se o perfil escolhido atende a flambagem global nas barras comprimidas. Determinado o perfil para essas barras, de maneira geral, a solução é encontrada replicando esse perfil aos demais elementos da treliça. Ao realizar esse procedimento para o Perfil C, no caso da Treliça Pratt, a seção encontrada foi de $11,16 \text{ cm}^2$, resultando em um peso estrutural de $9,730 \text{ kN}$. Ou seja, o uso do programa reduziu o peso da estrutura em 61%. Neste trabalho, para fins de comparação, quando o dimensionamento é realizado pela metodologia tradicional, são utilizados os mesmos parâmetros do exemplo em estudo.

Na metodologia tradicional, o engenheiro calculista pode melhorar esse resultado agrupando os elementos da estrutura e efetuando o procedimento supracitado para cada grupo. Embora isso possa reduzir o peso da treliça, é um método de tentativa e erro, diferente da metodologia de otimização proposta, cujo programa faz todo o processo de busca da solução ótima. A Figura a seguir

apresenta os resultados da Etapa 3 para o Perfil C, com indicação das tensões axiais nas barras (MPa) e dos deslocamentos na direção y (m).

Figura 24 – Resultados, tensões axiais (MPa) e deslocamentos (m), da configuração otimizada do problema 5 (Etapa 3 – Perfil C).

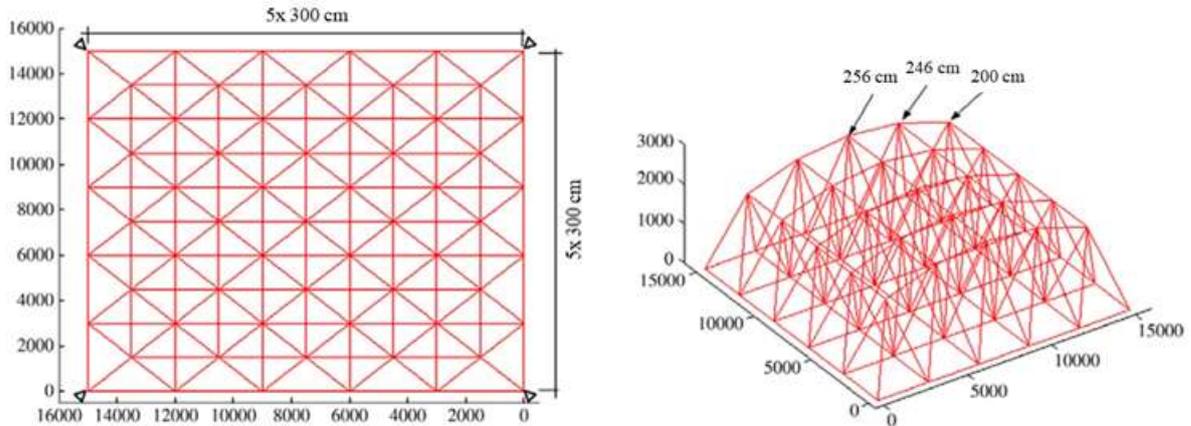


Fonte: O Autor (2019).

4.6 TRELIÇA ESPACIAL PARA COBERTA

Este próximo exemplo trata de uma treliça espacial, cuja tipologia estrutural aplica-se a sustentação de cobertas. A treliça possui 200 elementos e 61 nós e vence um vão de 15 m (Figura 25). Todos os nós do banzo superior estão sujeitos a uma carga na direção do eixo z , no sentido negativo, no valor de $P = -13,50 \text{ kN}$. Esse problema tomou como base a estrutura estudada por Togan e Daloglu (2006). Tem como objetivo obter as áreas das seções transversais dos elementos da estrutura que minimizam o seu peso, atendendo as restrições impostas.

Figura 25 – Treliça espacial para cobertura.



Fonte: Adaptado de Togan e Daloglu (2006).

Para realizar o estudo, primeiro os elementos foram compilados em 3 (três) grupos, conforme sua função na estrutura: banzo inferior, diagonais e banzo superior (Tabela 17). Duas situações foram analisadas. O Caso 1 considerou apenas restrições de tensão e deslocamento, com uma abordagem contínua e outra discreta das variáveis de projeto. Para garantir a segurança e a obtenção de valores disponíveis comercialmente, o Caso 2 acrescentou a restrição de flambagem global e a utilização de apenas variáveis discretas. Foram utilizados 4 (quatro) domínios discretos, conforme as tabelas comerciais disponibilizadas nos Anexos A a D, para os perfis C, I, U e T.

Tabela 17 – Agrupamento dos elementos estruturais, problema 6.

Grupo	Elementos
Banzo inferior - X_1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 196, 197, 198, 199, 200
Diagonais - X_2	12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191
Banzo superior - X_3	32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 192, 193, 194, 195

Fonte: O Autor (2019).

Na Tabela 18 constam as informações do problema. As propriedades físicas do material são as mesmas do exemplo anterior, por estarem sendo analisados os mesmo perfis metálicos.

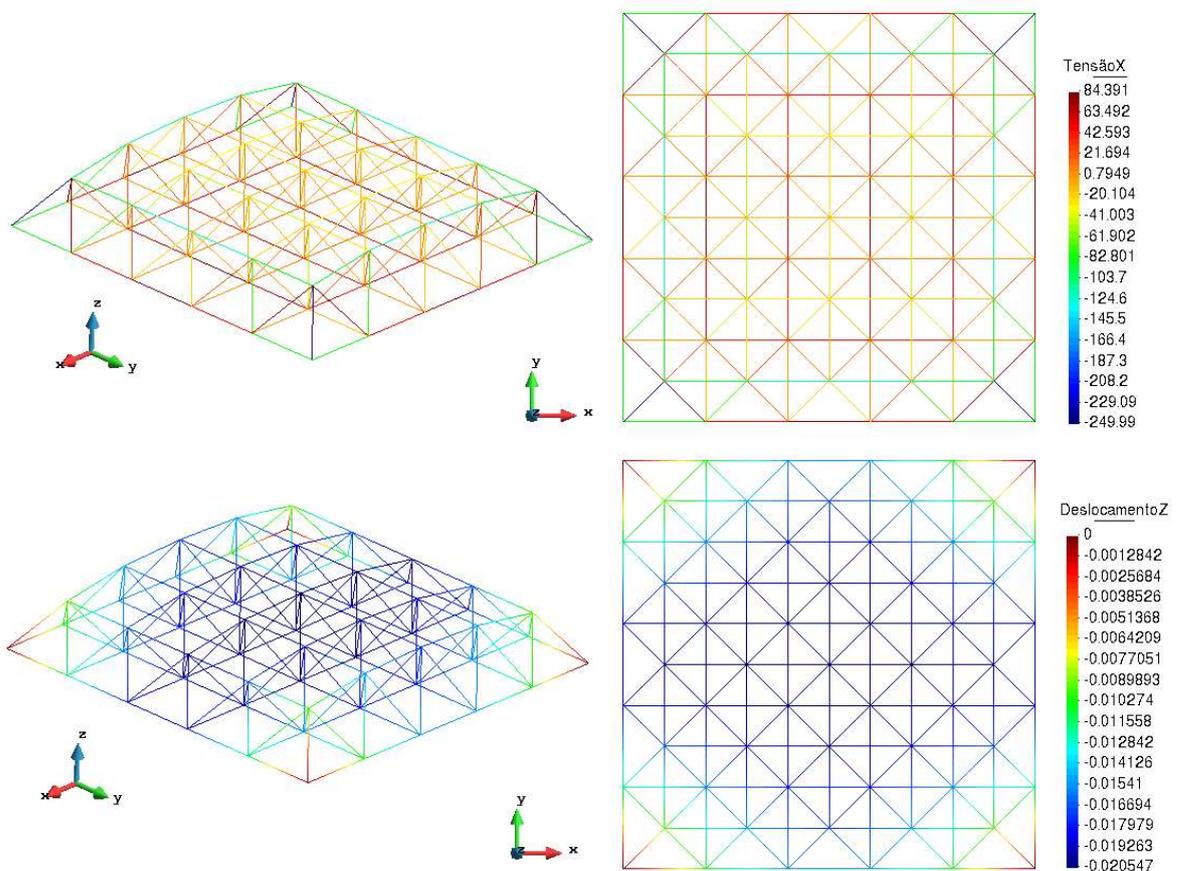
Tabela 18 – Configuração do problema 6: treliça espacial para coberta.

Parâmetros	Unidade	Valor
Carga $P(z)$	kN	$P(-13,50)$
Módulo de Elasticidade Longitudinal (E)	GPa	200
Peso Específico (γ)	kN/m^3	77
Variáveis de projeto (A)	cm^2	Tabela 20
Domínio das variáveis de projeto – contínuo	cm^2	$0,50 \leq X_1 \leq 75,00$
Domínio das variáveis de projeto – discreto	cm^2	Anexos A a D
Tensão máxima admissível (σ^{adm})	MPa	$+/-250,00$
Deslocamento máximo admissível ($d_{máx}$)	cm	$+/- 2,00$
Flambagem Global (σ_{cr})	MPa	$\frac{\pi^2 EI}{Al^2}$
Tipos de restrições		Caso 1: Tensão e deslocamentos. Caso 2: Tensão, deslocamentos e flambagem.

Fonte: O Autor (2019).

A otimização do Caso 1 para o domínio contínuo resultou em um peso ótimo da estrutura de $23,028 kN$, para os seguintes valores das variáveis de projeto: $X_1 = 2,854 cm^2$; $X_2 = 4,920 cm^2$; e $X_3 = 7,783 cm^2$. A solução atingiu o deslocamento máximo admissível no nó central do banzo superior e as 4 (quatro) barras diagonais do extremo da estrutura atingiram a tensão máxima admissível. O tempo de processamento foi de 199s (3min 19s). O comportamento da estrutura otimizada está demonstrado na Figura 26. Observam-se as tensões axiais nas barras (MPa) e os deslocamentos na direção z (m) na treliça.

Figura 26 – Resultados, tensões axiais (MPa) e deslocamentos (m), da configuração otimizada do problema 6 (Caso 1 - contínuo).



Fonte: O Autor (2019).

Após a utilização do programa com o domínio contínuo, foram realizadas buscas com os 4 (quatro) domínios discretos. Considerando os perfis utilizados, o Perfil C apresentou o melhor resultado. O processo de busca encontrou para esse perfil um peso estrutural de $24,638 \text{ kN}$, para as áreas das seções transversais de $X_1 = 2,84 \text{ cm}^2$, $X_2 = 5,22 \text{ cm}^2$ e $X_3 = 8,76 \text{ cm}^2$. Comparado à solução contínua, esse resultado discreto acarretou um incremento de apenas 7 % no peso da estrutura e uma redução para 99s no tempo de processamento. Novamente o nó central atingiu o deslocamento máximo admissível e as 4 (quatro) barras diagonais do extremo da estrutura limitaram o resultado com relação à tensão máxima admissível. Comparados ao Perfil C, o Perfil T apresentou um resultado ligeiramente maior (+1,08%) e os demais apresentaram valores significativamente maiores, por não possuírem perfis com seções menores (Perfil I +107,04 % e Perfil U +49,15 %). Na tabela a seguir observam-se os resultados, para os domínios contínuo e discreto, do Caso 1.

Tabela 19 – Resultados otimizados para Treliça espacial de 200 barras (Caso 1).

Variáveis de Projeto (área cm ²)	Domínio contínuo	Perfil C	Perfil I	Perfil U	Perfil T
X_1	2,854	2,84	10,80	7,78	3,40
X_2	4,920	5,22	10,80	7,78	6,05
X_3	7,783	8,76	10,80	7,78	6,05
Peso total (kN)	23,028	24,638	51,011	36,747	24,903

Fonte: O Autor (2019).

Para o Caso 2, passou-se a considerar também a restrição de flambagem global e apenas os perfis comerciais, a fim de tornar os resultados mais exequíveis. O incremento da restrição de flambagem global acarretou em um aumento considerável dos resultados, passando a ser a restrição limitante. O Perfil C novamente apresentou os melhores resultados e o Perfil T não encontrou uma solução satisfatória, pois alguns elementos não atenderam a restrição de flambagem global, por não existir no domínio utilizado perfis com seções maiores (Tabela 20). A melhor solução (Perfil C) apresentou um peso estrutural ótimo de 61,052 kN, 147,80 % superior ao valor obtido sem a restrição de flambagem global. As áreas das seções transversais determinadas para essa solução foram: $X_1 = 8,76 \text{ cm}^2$; $X_2 = 16,00 \text{ cm}^2$; e $X_3 = 11,16 \text{ cm}^2$. O resultado foi limitado à restrição de flambagem global em 4 (quatro) barras horizontais e 4 (quatro) barras diagonais do banzo superior. Os Perfis I e U resultaram em valores 34,98 % e 41,44 % maiores que o Perfil C, respectivamente. O tempo de processamento foi de 101s (1min 41s).

Tabela 20 – Resultados otimizados para treliça espacial de 200 barras (Caso 2).

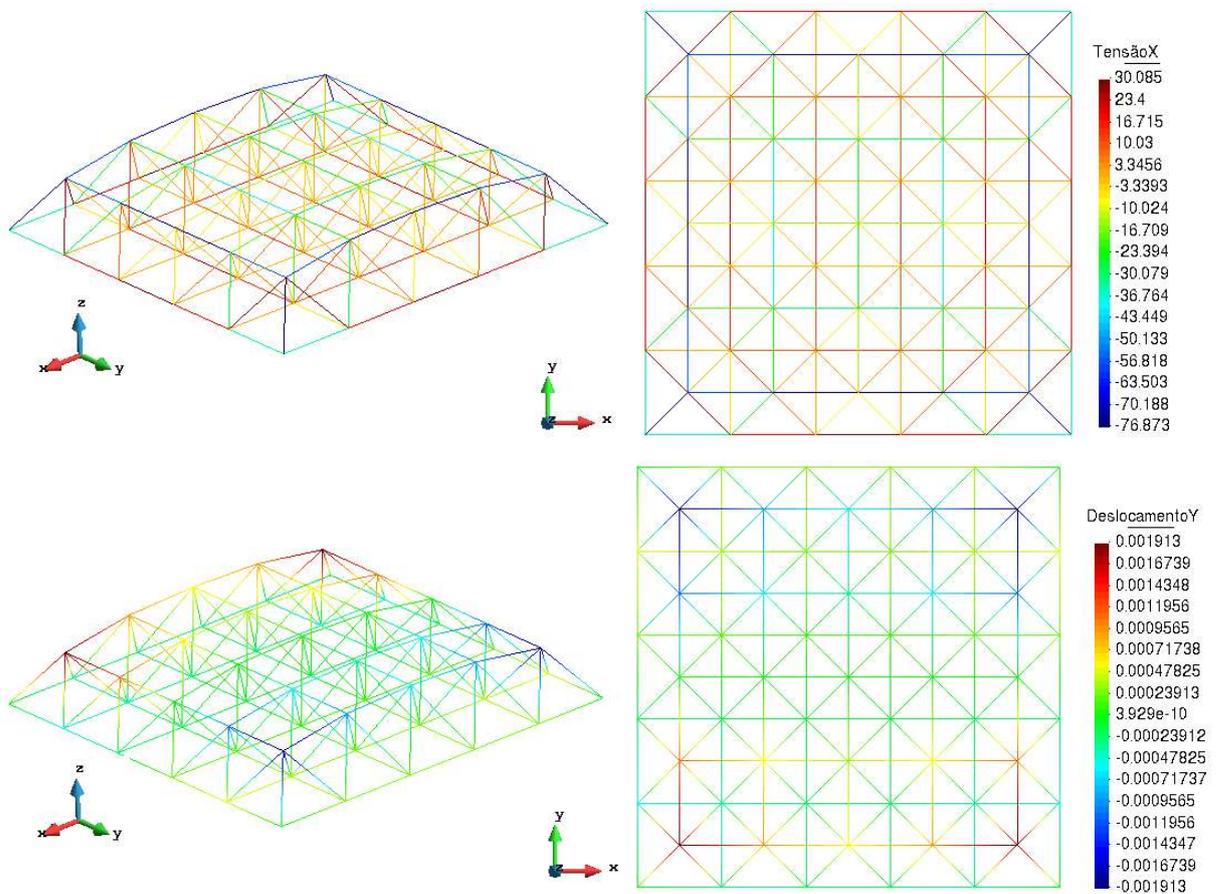
Variáveis de Projeto (área cm ²)	Perfil C	Perfil I	Perfil U	Perfil T *
X_1	8,76	10,80	10,10	6,05
X_2	16,00	23,24	21,68	6,05
X_3	11,16	12,32	21,68	6,05
Peso total (kN)	61,052	82,406	86,351	28,576

* Não atende a restrição de flambagem global (58 barras extrapolam o limite).

Fonte: O Autor (2019).

O resultado obtido para o Perfil C, comparado à metodologia tradicional de dimensionamento, utilizando os mesmos parâmetros, apresentou uma redução de 19% no peso da estrutura. Sem utilização do algoritmo proposto, o peso estrutural seria de $75,572 \text{ kN}$, para uma seção de $16,00 \text{ cm}^2$. A Figura 27 apresenta os resultados do Perfil C para este último caso, quanto às tensões axiais nas barras (MPa) e aos deslocamentos na direção y (m).

Figura 27 – Resultados, tensões axiais (MPa) e deslocamentos (m), da configuração otimizada do problema 6 (Caso 2 – Perfil C).



Fonte: O Autor (2019).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados provenientes deste estudo demonstram a praticidade e confiabilidade do programa de otimização de estruturas treliçadas proposto. O engenheiro estrutural, com subsídio da metodologia desenvolvida, consegue viabilizar um projeto de uma estrutura com o mínimo peso possível de material nos elementos de barra, sem comprometer as restrições impostas e concepções estruturais predefinidas. Um projeto dimensionado conforme a metodologia tradicional, quando elaborado com aplicação do processo de otimização proposto, reduz significativamente o peso dos seus elementos de barra, e conseqüentemente seu custo de produção, tornando-o mais eficiente, sem comprometer sua eficácia.

O algoritmo proposto permite o usuário utilizar restrições de tensão, deslocamento e flambagem global. Os exemplos utilizados para validar o programa demonstraram que negligenciar algumas dessas restrições acarreta na obtenção de soluções estruturais, por vezes, subdimensionados. Diferenças significativas foram identificadas em alguns exemplos, ao deixar de impor restrições de deslocamento e/ou flambagem global. Essas diferenças podem vir a comprometer o uso e segurança da solução adotada. No exemplo da treliça plana de 18 barras, ao adicionar a restrição de deslocamento (Caso 2), o peso da estrutura aumentou em 77 %, ou seja, a solução estrutural anterior (Caso 1) estava subdimensionada. O mesmo ocorreu no exemplo da treliça espacial para coberta. O incremento da restrição de flambagem global (Caso 2) resultou para o Perfil C uma solução de peso duas vezes e meio maior que a do Caso 1.

Os resultados obtidos ora foram limitados por uma restrição, ora por mais de uma delas, a depender da posição do elemento/nó em relação ao carregamento proposto. No Caso 1 da treliça plana de 18 barras, tanto a restrição de tensão axial (tração), quanto à flambagem global (compressão), limitaram os resultados ao longo da estrutura. Ao adicionar a restrição de deslocamento (Caso 2), essa passou a limitar os resultados.

Tanto na análise dos exemplos de validação, quanto dos práticos, foi observado que agrupar os elementos da estrutura, utilizando mais variáveis de projeto, reduz bastante o peso da solução estrutural encontrada. Os exemplos práticos demonstraram que realizar essa abordagem, de acordo com a função e/ou comportamento dos elementos na estrutura, resulta em ótimas soluções. Alterar de 1

(um) grupo para 8 (oito) os elementos da Treliça Pratt, por exemplo, acarretou em uma redução de 47 % do peso estrutural da solução ótima.

Em contrapartida, um número maior de variáveis de projeto aumenta bastante o custo computacional para obtenção da solução ótima. Ainda na Treliça Pratt, a utilização de 8 (oito) variáveis de projeto, ao invés de 1 (uma), alterou o tempo de processamento de 44s para 279s (4min 39s). Esse fato se torna ainda mais evidente ao comparar o tempo de processamento para obtenção da solução ótima da treliça plana de 200 barras (Caso 2), a treliça espacial de 120 barras. Ambos os problemas utilizam um domínio discreto. O primeiro, apesar de conter 200 barras, não possui restrição de flambagem, enquanto a treliça espacial considera todas. A diferença maior está no número de variáveis de projeto. Enquanto um utilizou 29 (vinte e nove) e o tempo de processamento foi de 1.029s (17min 9s), o outro, ao utilizar apenas 7 (sete) variáveis de projeto, necessitou de 174s (2min 54s).

A fim de garantir a exequibilidade das soluções, o programa desenvolvido possibilita ao usuário fazer uso tanto de variáveis de projeto contínuas quanto discretas. Os resultados deste trabalho não apresentaram uma diferença significativa entre aqueles obtidos de um domínio contínuo e aqueles obtidos a partir de um domínio discreto. No Caso 1 da treliça espacial para coberta, a mudança do domínio contínuo para o discreto, causou um aumento de apenas 7 % no peso da estrutura e uma redução do tempo de processamento de 50 %.

Como observado, o uso de um domínio discreto diminui de maneira significativa o custo computacional do processo, além de resultar em soluções mais exequíveis. Essa conclusão é notória no exemplo da treliça plana de 200 barras. No Caso 1 (carregamento 3), de domínio contínuo, o custo computacional foi de 8.714s (2h 25min 14s). Mesmo adicionando mais uma restrição, de deslocamento, o fato de passar a utilizar um domínio discreto (Caso 2) reduziu o tempo de processamento em 88 %.

Ao fim da validação do algoritmo, foram realizadas análises com 4 (quatro) perfis comerciais – C, I, U e T. Os domínios discretos determinados para cada perfil basearam-se nas tabelas disponíveis no mercado. Em virtude de suas características, o perfil cantoneira apresentou os melhores resultados para todos os exemplos analisados (estruturas metálicas para suporte de cobertas). Para o caso da Treliça Pratt, considerando as soluções exequíveis, pois o Perfil T não atendeu todas as restrições, o Perfil C teve um resultado 57 % menor que o segundo melhor

resultado (Perfil U). Na treliça espacial para cobertura (Caso 2) o Perfil T infligiu à restrição de flambagem global e o Perfil C, novamente, apresentou a melhor solução, 29 % menor que a solução do Perfil U, segundo melhor resultado.

O perfil cantoneira se sobressaiu ao demais por dispor de uma ampla gama de bitolas, que o torna bastante flexível. O dimensionamento dos exemplos práticos com esse perfil, através do programa proposto, apresentou uma redução de 61 % para a Treliça Pratt e 19 % para a treliça espacial para cobertura no peso da estrutura, comparado ao dimensionamento pela metodologia tradicional.

Todo o trabalho desenvolvido resultou em um programa de otimização estrutural exequível, eficiente e de fácil utilização, por utilizar processos validados pela academia e possuir uma interface com *softwares* comerciais. E principalmente, permite ao engenheiro calculista obter resultados significativamente melhores, comparados à metodologia tradicional de dimensionamento.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O programa desenvolvido é restrito a estruturas treliças (2D e 3D) e algumas lacunas podem ser estudadas futuramente para torná-lo mais completo. Diante disto, segue abaixo algumas sugestões de trabalhos futuros:

- Implementar uma interface gráfica para o programa desenvolvido no MATLAB, que facilita ainda mais a sua utilização por meio de campos e botões;
- Implementar otimização de forma, variando a posição dos nós;
- Implementar opções de ligação entre os elementos da estrutura metálica e suas respectivas restrições (ligação por parafusos ou por solda);
- Considerar como variáveis de projeto as dimensões da seção, observando os furos presentes (área líquida);
- Observar a Norma Brasileira ABNT NBR 14762:2010 - Dimensionamento de estruturas de aço - perfis formados a frio - na definição das restrições;
- Implementar a otimização de pórticos planos e tridimensionais;
- Analisar mais grupos de perfis metálicos para diferentes estruturas.

REFERÊNCIAS

- ACHOR, Shawn. **O jeito Harvard de ser feliz**. Editora Saraiva, 2012.
- ARORA, Jasbir S. **Introduction to Optimum Design**. 3rd ed. Waltham, Elsevier, 2012.
- BEZERRA, Lays Aguiar. **Emprego de algoritmos genéticos para otimização de vigas de concreto armado**. 2017. 120 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental), Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Caruaru, 2017.
- CHEN, Shen-yan, SHUI, Xiao-fang, HUANG, Hai. Improved genetic algorithm with two-level approximation using shape sensitivities for truss layout optimization. **Struct Multidisc Optim**, Springer, 55, 2017. p. 1365–1382.
- CHRISTOFORO, A. L., MARCONATO, S. A. S., OLIVEIRA, R. Z. G. de. Otimização numérica da área das seções transversais dos elementos componentes de estruturas planas do tipo treliça. **Rev. Bras. Biom.**, São Paulo, v. 25, n. 3, 2007. p. 57-69.
- CROCE, Eduardo S., FERREIRA, Elaine G., LEMONGE, Afonso C.C., FONSECA, Leonardo G., BARBOSA, Helio J.C. A genetic algorithm for structural optimization of steel truss roofs. In: Iberian Latin American Congress on Computational Methods, 25., 2004, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2004.
- DEB, Kalyanmoy, GULATI, Surendra. Design of truss-structures for minimum weight using genetic algorithms. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, 37, 2001. p. 447-465.
- DEDE, T.; BEKIROGLU, S.; AYVAZ, Y. Weight minimization of trusses with genetic algorithm. **Applied Soft Computing**, v. 11, 2011, p. 2565–2575.
- GERDAU. **Catálogo de Barras e Perfis Gerdau**. 2019. Disponível em: <<https://www2.gerdau.com.br/catalogos-e-manuais>>. Acesso em: 16 jan. 2019.
- GOLDBERG, David E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning**. Reading, Addison-Wesley Pub. Co., 1989. 412 p.
- HAFTKA, Raphael T., GÜRDAL, Zafer. **Elements of Structural Optimization**. 3rd ed. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- HAUPT, Randy L., HAUPT, Sue Ellen. **Practical genetic algorithms**. 2nd ed. Hoboken, John Wiley & Sons, 2004.
- HO-HUU, V., NGUYEN-THOI, T., VO-DUY, T., NGUYEN-TRANG, T. An adaptive elitist differential evolution for optimization of truss structures with discrete design variables. **Computers and Structures**, Elsevier, 165, 2016. p. 59-75.
- IMAI, K., & SCHMIT, L. A. Configuration optimization of trusses. **Journal Structure Division ASCE**, v. 107, 1981. p. 745-756.

LEE, K.S., GEEM, Z.W. A new structural optimization method based on the harmony search algorithm. **Computers and Structures**, Elsevier, 82, 2004. p. 781-798.

LIU, Xia, YI, Wei-Jian, LIB, Q.S., SHENA, Pu-Sheng. Genetic evolutionary structural optimization. **Journal of Constructional Steel Research**, Elsevier, 64, 2008. p. 305-311.

LU, Mingfei, YE, Jihong. Guided genetic algorithm for dome optimization against instability with discrete variables. **Journal of Constructional Steel Research**, Elsevier, 139, 2017. p. 149-156.

MADAH, Hazem, AMIR, Oded. Truss optimization with buckling considerations using geometrically nonlinear beam modeling. **Computers and Structures**, Elsevier, 192, 2017. p. 233-247.

MICHALEWICZ, Zbigniew. **Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs**. 3rd ed. Charlotte, Springer, 1996. 387 p.

MROGINSKI, Javier Luis, BENEYTO, Pablo Alejandro, GUTIERREZ, Guillermo J, RADO, Ariel Di. A selective genetic algorithm for multiobjective optimization of cross sections in 3D trussed structures based on a spatial sensitivity analysis. **Multidiscipline Modeling in Materials and Structures**, Emerald, v. 12, n. 2, 2016. p. 423-435.

NASCIMENTO, K. M. B. **Dimensionamento otimizado de pilares de concreto armado utilizando algoritmo genético**. 2017. 98 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental), Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Caruaru, 2017.

OÑATE, Eugenio. **Structural Analysis with the Finite Element Method**. Linear Statics. v. 1. Basis and Solids, 2009.

PFEIL, Walter, PFEIL, Michèle. **Estruturas de aço: dimensionamento prático**. 8.ed., Rio de Janeiro, LTC, 2009.

POZO, A., CAVALHEIRO, A. F., ISHIDA, C., SPINOSA, E., RODRIGUES, E. M. **Computação Evolutiva**. 2005. 61 p. Apostila (Grupo de Pesquisas em Computação Evolutiva), Departamento de Informática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005. 346 p.

RAO, Singiresu S. **The Finite Element Method in Engineering**. 5th ed. Burlington, Elsevier, 2011.

RAHAMIA, H., KAVEH, A., GHOLIPOUR, Y. Sizing, geometry and topology optimization of trusses via force method and genetic algorithm. **Engineering Structures**, Elsevier, 30, 2008. p. 2360-2369.

SILVA, Francielly Elizabeth de Castro. **Otimização dimensional, de forma e topológica de estruturas treliçadas utilizando um algoritmo híbrido**. 2015. 141 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

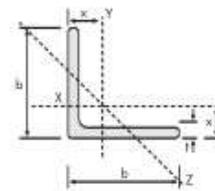
- SOARES, G. L. **Algoritmos Genéticos: Estudo, Novas Técnicas e Aplicações**. 1997. 135 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1997. Disponível em: <<https://www.yumpu.com/pt/document/view/18799217/algoritmos-geneticos-estudo-novas-tecnicas-e-aplicacoes>>. Acesso em: 16 out. 2017.
- SONMEZ, M. Discrete optimum design of truss structures using artificial bee colony algorithm. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 43, 2011. p. 85-97.
- SORIANO, H. L. **Análise de Estruturas – Formulação Matricial e Implementação Computacional**. Rio de Janeiro, Editora Ciência Moderna, 2005.
- TOGAN, Vedat, DALOGLU, Ayse T. An improved genetic algorithm with initial population strategy and self-adaptive member grouping. **Computers and Structures**, Elsevier, 86, 2008. p. 1204-1218.
- TOGAN, Vedat, DALOGLU, Ayse T. Optimization of 3d trusses with adaptive approach in genetic algorithms. **Engineering Structures**, Elsevier, 28, 2006. p. 1019-1027.
- WANG, H., OHMORI, H. Elasto-plastic analysis based truss optimization using Genetic Algorithm. **Engineering Structures**, Elsevier, 50, 2013. p. 1-12.
- WANG, D., ZHANG, W. H., JIANG, J. S. Truss shape optimization with multiple displacement constraints. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, 191, 2002. p. 3597-3612.
- WU, Shyue-Jian, CHOW, Pei-Tse. Integrated discrete and configuration optimization of trusses using genetic algorithms. **Computers and Structures**, Pergamon, v. 55, 1995. p. 695-702.
- XU, T.; ZUO, W.; XU, T.; SONG, G.; LI, R. An adaptive reanalysis method for genetic algorithm with application to fast truss optimization. **Acta Mechanica Sinica**, Springer, v. 26, 2009. p. 225-234.
- YANG, Xin-She. **Engineering Optimization An Introduction with Metaheuristic Applications**. Hoboken, John Wiley & Sons, 2010.
- ZHOU, M. Difficulties in truss topology optimization with stress and local buckling constraints. **Structural Optimization**, v. 11, 1996, p. 134-136.
- ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**. 5th ed. Oxford, Butterworth-Heinemann, v.1, 2000.
- ZUO, Wenjie, BAI, Jiantao, LI, Bin. A hybrid OC–GA approach for fast and global truss optimization with frequency constraints. **Applied Soft Computing**, Elsevier, 14, 2014. p. 528-535.

ANEXO A - TABELA DE PERFIS CANTONEIRA (C)



CANTONEIRA DE ABAS IGUAIS GERDAU

Cantoneira em Polegadas											
b		Peso Nominal		t		Área	$I_x=I_y$	$W_x=W_y$	$r_x=r_y$	r_z min.	x
pol	mm	kgfm	pol	mm	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm	cm	cm	
5/8"	15,880	0,57		2,50							
3/4"	19,050	0,71		2,50							
1/2"	12,700	0,55	1/8"	3,18	0,70	0,10	0,11	0,37	0,25	0,43	
5/8"	15,880	0,71	1/8"	3,18	0,90	0,20	0,19	0,47	0,32	0,51	
3/4"	19,050	0,87	1/8"	3,18	1,11	0,36	0,27	0,57	0,38	0,59	
7/8"	22,200	1,04	1/8"	3,18	1,32	0,58	0,38	0,66	0,46	0,66	
1"	25,400	1,19	1/8"	3,18	1,48	0,83	0,49	0,79	0,48	0,76	
		1,73	3/16"	4,76	2,19	1,25	0,66	0,76	0,48	0,81	
		2,22	1/4"	6,35	2,84	1,86	0,98	0,76	0,48	0,86	
1.1/4"	31,750	1,50	1/8"	3,18	1,93	1,67	0,82	0,97	0,64	0,89	
		2,20	3/16"	4,76	2,77	2,50	1,15	0,97	0,61	0,97	
		2,86	1/4"	6,35	3,62	3,33	1,47	0,94	0,61	1,02	
1.1/2"	38,100	1,83	1/8"	3,18	2,32	3,33	1,15	1,17	0,76	1,07	
		2,68	3/16"	4,76	3,42	4,58	1,64	1,17	0,74	1,12	
		3,48	1/4"	6,35	4,45	5,83	2,13	1,15	0,74	1,19	
1.3/4"	44,450	2,14	1/8"	3,18	2,71	5,41	1,64	1,40	0,89	1,22	
		3,15	3/16"	4,76	4,00	7,50	2,30	1,37	0,89	1,30	
		4,12	1/4"	6,35	5,22	9,57	3,13	1,35	0,86	1,35	
2"	50,800	2,46	1/8"	3,18	3,10	7,91	2,13	1,60	1,02	1,40	
		3,63	3/16"	4,76	4,58	11,70	3,13	1,58	1,02	1,45	
		4,74	1/4"	6,35	6,06	14,60	4,10	1,55	0,99	1,50	
		5,83	5/16"	7,94	7,42	17,50	4,91	1,53	0,99	1,55	
2.1/2"	63,500	6,99	3/8"	9,52	8,76	20,00	5,73	1,50	0,99	1,63	
		4,57	3/16"	4,76	5,80	23,00	4,91	1,98	1,24	1,75	
		6,10	1/4"	6,35	7,67	29,00	6,40	1,96	1,24	1,83	
		7,44	5/16"	7,94	9,48	35,00	7,87	1,93	1,24	1,88	
3"	76,200	8,78	3/8"	9,52	11,16	41,00	9,35	1,91	1,22	1,93	
		5,52	3/16"	4,76	7,03	40,00	7,21	2,39	1,50	2,08	
		7,29	1/4"	6,35	9,29	50,00	9,50	2,36	1,50	2,13	
		9,07	5/16"	7,94	11,48	62,00	11,60	2,34	1,50	2,21	
3.1/2"	88,900	10,71	3/8"	9,52	13,61	75,00	13,60	2,31	1,47	2,26	
		14,00	1/2"	12,70	17,74	91,00	18,00	2,29	1,47	2,36	
		8,56	1/4"	6,35	10,90	83,70	13,00	2,77	1,76	2,46	
		10,59	5/16"	7,94	13,50	102,00	16,00	2,75	1,75	2,52	
4"	101,600	12,58	3/8"	9,52	16,00	121,00	19,20	2,75	1,75	2,58	
		9,81	1/4"	6,35	12,51	125,00	16,40	3,17	2,00	2,77	
		12,19	5/16"	7,94	15,48	154,00	21,30	3,15	2,00	2,84	
		14,57	3/8"	9,52	18,45	183,00	24,60	3,12	2,00	2,90	
5"	127,000	16,80	7/16"	11,11	21,35	208,00	29,50	3,12	1,98	2,95	
		19,03	1/2"	12,70	24,19	233,00	32,80	3,10	1,98	3,00	
		12,34	1/4"	6,35	15,73	251,63	27,09	4,00	2,53	3,41	
		15,31	5/16"	7,94	19,50	308,00	33,40	3,97	2,53	3,47	
6"	152,400	18,30	3/8"	9,52	23,29	362,00	39,50	3,94	2,51	3,53	
		24,10	1/2"	12,70	30,64	470,00	52,50	3,91	2,49	3,63	
		29,80	5/8"	15,88	37,80	566,00	64,00	3,86	2,46	3,76	
		23,52	7/16"	11,11	26,96	416,68	45,71	3,93	2,50	3,58	
8"	203,200	22,20	3/8"	9,52	28,10	641,00	57,40	4,78	3,02	4,17	
		29,20	1/2"	12,70	37,09	828,00	75,40	4,72	3,00	4,27	
		36,00	5/8"	15,88	45,86	1007,00	93,50	4,67	2,97	4,39	
		42,70	3/4"	19,05	54,44	1173,00	109,90	4,65	2,97	4,52	
8"	203,200	48,70	5/8"	15,88	62,90	2472,40	168,90	6,31	4,01	5,66	
		57,90	3/4"	19,05	73,81	2901,10	199,90	6,27	3,99	5,79	

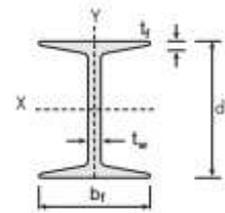


OBS.: As barras são fornecidas com tolerância de comprimento -0+10 cm.

ANEXO B - TABELA DE PERFIS I



PERFIL I GERDAU

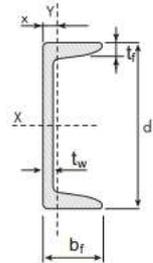


Bitola	Peso	ALMA		MESA		Área	EIXO X			EIXO Y			
		Nominal	d	t _w	b _f		t _f	I	W	r	I	W	r
pol	kg/m	mm	mm	mm	mm	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm
3"	8,48	76,20	4,32	59,18	6,60	10,80	105,10	27,60	3,12	18,90	6,40	1,33	1,45
	9,68	76,20	6,38	61,24	6,60	12,32	115,00	30,18	3,06	45,60	11,48	1,92	1,98
4"	11,46	101,60	4,90	67,60	7,44	14,50	252,00	49,70	4,17	31,70	9,40	1,48	1,68
	12,65	101,60	6,43	69,20	7,44	16,11	266,00	52,40	4,06	34,30	9,90	1,46	1,83
5"	14,88	127,00	5,44	76,30	8,28	18,80	511,00	80,40	5,21	50,20	13,20	1,63	1,88
	18,24	127,00	8,81	79,70	8,28	23,24	570,00	89,80	4,95	58,60	14,70	1,59	1,92
6"	18,60	152,40	5,89	84,63	9,12	23,60	919,00	120,60	6,24	75,70	17,90	1,79	2,08
	22,00	152,40	8,71	87,50	9,12	27,97	1003,00	131,70	5,99	84,90	19,40	1,74	2,26

OBS.: As barras são fornecidas com tolerância de comprimento -0+10 cm.

ANEXO C - TABELA DE PERFIS U

PERFIL U GERDAU

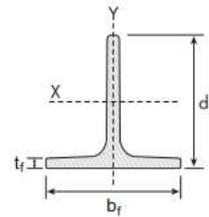


Bitola	Peso	ALMA		ABA		area	EIXO X			EIXO Y			x
		Nominal	d	t_w	b_f		t_f	I	W	r	I	W	
pol	kg/m	mm	mm	mm	mm	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm
3"	6,10	76,20	4,32	35,81	6,93	7,78	68,90	18,10	2,98	8,20	3,32	1,03	1,11
	7,44		6,55	38,05	6,93	9,48	77,20	20,30	2,85	10,30	3,82	1,04	1,11
4"	8,04	101,60	4,67	40,23	7,52	10,10	159,50	31,40	3,97	13,10	4,61	1,14	1,16
	9,30		6,27	41,83	7,52	11,90	174,40	34,30	3,84	15,50	5,10	1,14	1,15
6"	12,20	152,40	5,08	48,77	8,71	15,50	546,00	71,70	5,94	28,80	8,16	1,36	1,30
	15,62		7,98	51,66	8,71	19,90	632,00	82,90	5,63	36,00	9,24	1,34	1,27
8"	17,10	203,20	5,59	57,40	9,50	21,68	1344,30	132,70	7,87	54,10	12,94	1,42	1,47
	20,50		7,70	59,51	9,50	25,93	1490,00	147,50	7,59	62,40	14,09	1,42	1,42
10"	22,77	254,00	6,10	66,04	11,10	29,00	2800,00	221,00	9,84	95,00	19,00	1,81	1,61
	29,76		9,63	69,57	11,10	37,90	3290,00	259,00	9,31	117,00	21,60	1,76	1,54
12"	30,80	305,00	7,20	74,00	12,70	39,30	5370,00	352,00	11,70	161,00	28,30	2,03	1,77
	37,00		9,80	77,00	12,70	47,40	6010,00	394,00	11,30	186,00	30,90	1,98	1,71

OBS.: As barras são fornecidas com tolerância de comprimento -0+10 cm.

ANEXO D - TABELA DE PERFIS T

PERFIL T GERDAU



Bitola	Mesa d=b _f	Espessura t _f =t _w	Peso Nominal	Área	Eixo X			Eixo Y			x
					I	W	r	I	W	r	
pol	mm	mm	kg/m	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm
3/4" serr	19,05	2,50	0,69								
5/8 x 1/8"	15,88	3,18	0,71	0,90	0,20	0,19	0,47	0,11	0,14	0,35	0,51
3/4 x 1/8"	19,05	3,18	0,86	1,13	0,36	0,27	0,57	0,19	0,20	0,41	0,59
7/8 x 1/8"	22,22	3,18	0,99	1,34	0,59	0,38	0,67	0,33	0,27	0,48	0,67
1 x 1/8"	25,40	3,18	1,18	1,54	0,90	0,50	0,77	0,44	0,35	0,54	0,75
1.1/4 x 1/8"	31,75	3,18	1,50	1,92	1,84	0,81	0,98	0,86	0,54	0,67	0,91
1.1/2 x 1/8"	38,10	3,18	1,82	2,32	3,24	1,18	1,18	1,47	0,77	0,80	1,07
1.1/4 x 3/16"	31,75	4,76	2,16	2,79	2,56	1,16	0,96	1,29	0,82	0,68	0,97
1.1/2 x 3/16"	38,10	4,76	2,65	3,40	4,56	1,70	1,16	2,22	1,17	0,81	1,13
2 x 3/16"	50,80	4,76	3,62	4,61	11,33	3,12	1,57	5,24	2,06	1,07	1,45
2 x 1/4"	50,80	6,35	4,74	6,05	14,47	4,04	1,55	7,03	2,77	1,08	1,50

OBS.: As barras são fornecidas com tolerância de comprimento -0+10 cm.