



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Mário Bezerra de Sousa Neto

Existência de soluções para um modelo de equação de onda fortemente amortecido

Recife

2019

Mário Bezerra de Sousa Neto

**Existência de soluções para um modelo de equação de onda
fortemente amortecido**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise

Orientador(a): Dr. Claudio Cuevas Henríquez

Recife

2019

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S725e Sousa Neto, Mário Bezerra de
 Existência de soluções para um modelo de equação de onda fortemente
 amortecido / Mário Bezerra de Souza Neto. – 2019.
 78 f.: il., fig., tab.

 Orientador: Claudio Cuevas Henríquez.
 Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
 Matemática, Recife, 2019.
 Inclui referências.

 1. Análise matemática. 2. Equações de ondas amortecidas. I. Cuevas
 Henríquez, Claudio (orientador). II. Título.

 515 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2019-121

MÁRIO BEZERRA DE SOUSA NETO

**EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA UM MODELO DE EQUAÇÃO DE ONDA
FORTEMENTE AMORTECIDO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 31/07/2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Claudio Rodrigo Cuevas Henríquez (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Clessius Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof^a. Dra. Joelma Azevedo de Moura (Examinador Externo)
Universidade de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado forças para essa caminhada, pois sem Ele nada disso seria possível.

Agradeço a toda a minha família a qual devo todo o apoio durante toda a minha vida, especialmente gostaria de agradecer ao meu pai Mário, minha mãe Angélica e ao meu irmão Alysson.

Um agradecimento especial a Ananda Santos por quem tenho grande admiração e por todos momentos de companheirismo e apoio.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFPE, os quais contribuíram direta ou indiretamente, com a minha formação acadêmica.

Ao meu orientador Claudio Cuevas o qual sou muito grato por todos os seus ensinamentos, paciência, conselhos e pelo incentivo aos estudos e a pesquisa.

Aos amigos e colegas do Departamento de Matemática da UFPE.

Um agradecimento especial a Joelma Azevedo por todo suporte dado no desenvolvimento desta dissertação.

Ao professor Clessius Silva, por ter aceito o convite de fazer parte da banca examinadora.

Ao coordenador da pós-graduação do DMAT UFPE o professor Miguel Loayza, por sempre se mostrar prestativo.

E, finalmente, meu agradecimento a CAPES por todo o apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, utilizando de ferramentas da Análise Funcional e da Topologia, estudamos a existência de soluções de equações de onda semilineares fortemente amortecidas, mais especificamente, tratamos sobre a existência de soluções brandas e suas propriedades de limitação, para isto, definimos inicialmente o conceito de solução branda para o nosso problema, o qual será uma função satisfazendo uma certa equação integral, assim, ao definir certos operadores em L^p por essa equação integral utilizamos o Teorema do ponto fixo de Banach para garantir a existência e unicidade de ponto fixo para tal operador e, conseqüentemente, obtemos a existência e unicidade de solução branda em L^p para o nosso problema. Além disso, também estudamos resultados diversos em existência, como a existência de soluções brandas, clássicas e fortes, para tais tópicos, cabe ressaltar alguns resultados auxiliares essenciais como a generalização do Teorema do ponto fixo de Darbo que envolve medidas de não compacidade de Kuratowski que através de tal Teorema nos garante a existência de soluções brandas, também utilizamos alguns Lemas auxiliares onde nos garante que solução branda para o nosso problema, satisfazendo certas condições, implica em solução clássica ou solução forte. Em um dos nossos resultados sobre soluções clássicas ou de soluções fortes, para garantir a existência de tal solução utilizamos o Teorema de Schauder-Tychonoff, também cabe ressaltar o Teorema de Riesz-Weyl-Kolmogorov que estabelece critérios para caracterizar subconjuntos compactos de L^p , o qual será fundamental para a aplicação do Teorema de Schauder-Tychonoff. E, por fim, concluímos com algumas aplicações dos resultados estabelecidos.

Palavras-chave: Equações de ondas amortecidas. Limitação. Existência de solução.

ABSTRACT

In this work, using tools of Functional Analysis and Topology, we study the existence of solutions of strongly damped semilinear wave equations, more specifically, we treat the existence of mild solutions and their properties of boundedness, for this, we initially defined the concept of mild solution to our problem, which will be a function satisfying a certain integral equation, thus, defining certain operators in L^p by this equation integral we use the Banach fixed point theorem to ensure the existence and uniqueness of fixed point for such operator and, consequently, we obtain the existence and uniqueness of mild solution in L^p for our problem. Moreover, we also study diverse results in existence, as the existence of mild, classic and strong solutions, for such topics, it is worth mentioning some essential ancillary results such as the generalization of Darbo's fixed point Theorem which involves measures of Kuratowski noncompactity that through such Theorem guarantees us the existence of mild solutions, we also use some auxiliary lemmas where it assures us that mild solution to our problem, meeting certain conditions, implies classic solution or strong solution. On a From our results on classical or strong solutions, to ensure the existence of such a solution, we use the Schauder-Tychonoff Theorem. We also highlight the Riesz-Weyl-Kolmogorov Theorem which establishes criteria for characterize compact subsets of L^p , which will be fundamental for the application of the Schauder-Tychonoff Theorem. And finally, we conclude with some applications of the established results.

Keywords: Damped wave equations. Boundedness. Existence of solutions.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	PRELIMINARES	11
2.1	Notações e resultados básicos	11
2.2	Medida de não compacidade	13
2.3	Semigrupos e Geradores	15
2.4	Operadores Setoriais e Semigrupos Analíticos	18
2.5	Potências fracionárias	21
2.6	Métodos Topológicos	23
3	EQUAÇÕES DE ONDA FORTEMENTE AMORTECIDAS	26
3.1	Redução a primeira ordem	26
4	PROPRIEDADES DE LIMITAÇÃO EM L^p	29
4.1	Existência de soluções brandas L^p limitadas	29
5	RESULTADOS DIVERSOS EM EXISTÊNCIA	50
5.1	Existência de soluções	51
5.1.1	Existência de soluções brandas	51
5.1.2	Existência de soluções clássicas	55
5.1.3	Existência de soluções fortes	61
6	APLICAÇÕES	70
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

Desde os primórdios nos estudos das equações diferenciais, um dos principais problemas ao tentar compreender certo modelo é determinar se tal problema possui solução. Em alguns casos, ao determinar se o modelo com tais parâmetros possui solução, a próxima etapa natural consiste em estabelecer se a solução é única ou não. Um caso interessante é o estudo das propriedades de limitação em L^p para soluções, o qual é um tópico muito importante na análise clássica. Atualmente, existem diversos trabalhos sobre propriedades de limitação em L^p , podemos citar alguns destes trabalhos (LUBINSKY; MASHELE, 2002; PENGTAO; LIZHONG, 2012; CUEVAS et al., 2013; CONSTANTIN; PELÁEZ, 2015; CHEN; MAGNIEZ; OUHABAZ, 2015; CHEN, 2016; GOLDBERG; GREEN, 2016; OTTEN, 2016; KYED; SAUER, 2017).

Nesta dissertação, estamos interessados em estudar propriedades de limitação em L^p e, além disso, a existência de soluções brandas, soluções clássicas e soluções fortes para a equação de onda semilinear fortemente amortecidas.

Este trabalho se encontra dividido em cinco capítulos. O Capítulo 2, intitulado “Preliminares”, tem por objetivo tornar o texto o mais autossuficiente. Este capítulo contém notações, definições e resultados relevantes para o desenvolvimento deste trabalho. Especificamente, faremos uma revisão sobre medida de não compacidade, semigrupos e geradores, operadores setoriais, semigrupos analíticos e potências fracionárias. Por fim, na última seção deste capítulo, enunciaremos alguns resultados clássicos da Análise Funcional e diversos resultados auxiliares.

No Capítulo 3, intitulado “Equações de ondas fortemente amortecidas”, faremos a apresentação do modelo de equações de ondas fortemente amortecidas que

será tratado neste trabalho. As equações de ondas amortecidas tem sido bastante investigadas sob diferentes contextos e hipóteses. A literatura nos oferece tópicos como existência (GEORGIEV; TODOROVA, 1994; BAHUGUNA, 1995; GAZZOLA; SQUASSINA, 2006), comportamento assintótico (WEBB, 1980; GHIDAGLIA; MARZOCCHI, 1991; MASSATT, 1987), atratores (BORINI; PATA, 1999; BRUSHCHI et al., 2006; CARVALHO; CHOLEWA, 2002a; LI; ZHOU; YIN, 2004; PATA; SQUASSINA, 2005; YANG; SUN, 2009), boa colocação (CARVALHO; CHOLEWA, 2002b), estimativas de decaimento (IKEHATA, 2001), blow-up (AVALOS; LASIESCKA, 2003; GAZZOLA; SQUASSINA, 2006; MESSAOUDI, 2001), controlabilidade (AVALOS; LASIESCKA, 2003), bootstrapping e regularidade (CARVALHO; CHOLEWA; DLOTKO, 2008), periodicidade assintótica (CUEVAS; LIZAMA; SOTO, 2003). Tais equações também podem ser encontradas em áreas da física tais como em condução de calor, mecânica dos sólidos, entre outras. Além disso, observaremos que nosso modelo pode ser reduzido a um problema de Cauchy de primeira ordem (em tempo) em certos espaços, também citaremos algumas propriedades dos operadores de ondas fortemente amortecidas que serão fundamentais para o desenvolvimento do nosso trabalho.

No Capítulo 4, cujo título é “Propriedades de Limitação em L^p ”, estudaremos a existência de soluções brandas em L^p para o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\eta A^{\frac{1}{2}}u_t + Au = f(t, u, u_t), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X^{\frac{1}{2}}, & u_t(0) = v_0 \in X, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde X é um espaço de Banach reflexivo, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador fechado densamente definido, $X^{\frac{1}{2}}$ é o espaço de potência fracionária associado a A como em (HENRY, 2006), $\eta > 0$ e f é uma função contínua adequada. Cabe ressaltar um exemplo de modelo matemático representado na forma (1.1) que é conhecido na literatura como equações de ondas fortemente amortecidas (CARVALHO; CHOLEWA, 2002a; CHEN; TRIGGIANI, 1989; CHEN; TRIGGIANI, 1990; CHEN; TRIGGIANI, 1988).

No Capítulo 5, cujo título é “Resultados diversos em existência”, estudaremos a existência de soluções brandas, clássicas e fortes para o problema (1.1). Além disso, iremos considerar tal problema reduzido de primeira ordem (em tempo) satisfazendo uma condição não local para tratar da existência de soluções brandas para o problema (1.1).

Por fim, no Capítulo 6, nomeado “Aplicações”, ilustraremos alguns exemplos de como tais resultados aqui estabelecidos podem ser aplicados.

Os resultados estabelecidos aqui para o problema (1.1) foram publicados em (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017), onde os autores investigam a existência de soluções brandas pseudo S -assintoticamente ω -periódicas, para tais equações de ondas fortemente amortecidas, definidas sobre espaços de dimensão infinita. Além disso, investigam a existência de soluções brandas em L^p , soluções clássicas (e fortes) e a estrutura topológica do conjunto solução do problema (1.1).

2 PRELIMINARES

Apresentaremos neste capítulo notações, definições e fatos relevantes que serão utilizados ao longo deste trabalho. Pretendemos com isso tornar o texto o mais autosuficiente possível. Entretanto, não faremos detalhes das demonstrações dos resultados aqui apresentados.

2.1 Notações e resultados básicos

Definição 2.1 (Norma). *Dado um espaço vetorial X sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), uma função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita de norma se, para quaisquer $x, y \in X$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$, vale:*

$$(i) \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$(ii) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

$$(iii) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Se o espaço vetorial X está munido com uma norma, dizemos que ele é um espaço normado e é denotado por $(X, \|\cdot\|)$.

Definição 2.2 (Domínio e Imagem). *Chamamos de domínio do operador T ao conjunto no qual o operador está bem definido e denotemos por $D(T)$ e a imagem por $R(X)$.*

Notação 2.3 (Espaço dos Operadores lineares limitados). *Ao conjunto $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o espaço de Banach formado pelos operadores lineares limitados de X em Y .*

Definição 2.4 (Norma Uniforme). Seja $T : X \rightarrow Y$ um operador linear limitado, a norma será definida por:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup\{\|Tx\|_Y; x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$$

Note que $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ é um espaço de Banach.

Notação 2.5 No caso em que $X = Y$ denotamos simplesmente por $\mathcal{L}(X)$ e sua norma como $\|\cdot\|$.

Seja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, T^n é chamado a n -ésima iteração de T , com $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Denotamos por $B_r(X)$ a bola fechada com centro na origem e raio r no espaço X . Afirmamos que $D(T)$, com $T \in \mathcal{L}(X)$, é um espaço de Banach $(D(T), \|\cdot\|_{D(T)})$ munido com a norma do gráfico, isto é,

$$\|x\|_{D(T)} = \|x\|_X + \|T(x)\|_X, \forall x \in X.$$

Definição 2.6 (Operador Fechado). Sejam X, Y dois espaços de Banach. Um operador linear $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ é dito fechado se, para cada sequência x_n em $D(T)$ convergindo para x em X tal que $Tx_n \rightarrow y \in Y$ quando $n \rightarrow \infty$, tem-se que $x \in D(T)$ e $Tx = y$.

Definição 2.7 (Resolvente e Espectro). Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. O conjunto resolvente de T é o subconjunto $\rho(T)$ de todos os λ em $\mathbb{C}$ tais que $\lambda I - T$ é injetor, $\overline{R(\lambda I - T)} = X$ e $(\lambda I - T) : R(\lambda I - T) \subset X \rightarrow X$ é limitado. Para $\lambda \in \rho(T)$, o operador $R(\lambda, T) := (\lambda I - T)^{-1}$ é dito operador resolvente de T . O espectro do operador T é definido por $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$.

Iremos denotar por $L^1(\Omega, \mu)$ ou simplesmente $L^1(\Omega)$, como o espaço das funções integráveis de Ω em $\mathbb{R}^n$ com norma

$$\|f\|_{L^1} = \|f\|_1 = \int_{\Omega} |f| d\mu.$$

Definição 2.8 Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$, definimos

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

com norma

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Notação: Seja $1 < p < \infty$, denotamos por q o expoente conjugado de p , isto é

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 2.9 (*Desigualdade de Hölder*) *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $p, q > 1$ expoentes conjugados. Então $fg \in L^1$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração: Ver (BREZIS, 2010, Teorema 3.4.6).

Teorema 2.10 (*Minkowski*) *Sejam $f, g \in L^p$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$\left(\int |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração: Ver (BREZIS, 2010, Teorema 3.4.7).

Definição 2.11 (*Operador Compacto*) *Sejam X, Y espaços vetoriais normados. Dizemos que um operador linear $T : X \rightarrow Y$ é compacto se T leva conjuntos limitados em X em conjuntos relativamente compactos em Y .*

Definição 2.12 (*Operador completamente contínuo*) *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : D \subset X \rightarrow Y$. Dizemos que o operador T é completamente contínuo se, é contínuo e mapeia cada subconjunto limitado de D em um subconjunto relativamente compacto de Y .*

Observação 2.13 *Se X é um espaço de Banach reflexivo, então cada operador completamente contínuo $T : X \rightarrow Y$ é um operador compacto.*

2.2 Medida de não compacidade

A definição de medida de não compacidade de subconjuntos limitados em espaços normados foi introduzida por K. Kuratowski na década de 30. Posteriormente,

na década de 50, essa definição voltou a ser utilizada devido aos avanços na teoria das equações diferenciais em espaços de Banach abstratos, na qual medidas de não compacidade se mostraram de grande utilidade para o estudo da existência de pontos fixos. A seguir definiremos tal medida e enunciaremos suas principais propriedades.

Definição 2.14 (*Medida de não compacidade*) *Sejam X espaço de Banach, A um subconjunto limitado de X e $\epsilon > 0$. Uma cobertura V_i de A é uma ϵ -cobertura se $\text{diam}(V_i) := \sup\{\|x - y\|_X; x, y \in V_i\} \leq \epsilon, \forall i$. A medida de não compacidade de Kuratowski de A é definida por*

$$\xi(A) = \inf\{\epsilon > 0; \text{ existe uma } \epsilon\text{-cobertura finita de } A\}.$$

Para uma cobertura A_i de A , composta por bolas de raio menor ou igual a ϵ , chamamos de ϵ -cobertura restrita de A . Com isto, definimos a medida de não compacidade de Hausdorff de A por

$$\tilde{\xi}(A) = \inf\{\epsilon > 0; \text{ existe uma } \epsilon\text{-cobertura restrita finita de } A\}.$$

Proposição 2.15 *Sejam A e B subconjuntos limitados de um espaço de Banach X , $\lambda \in \mathbb{C}$. Então valem*

- (i) $\xi(A) = 0$, se e somente se, $\overline{A}$ é compacto, onde $\overline{A}$ denota o fecho de A .
- (ii) $\xi(\overline{A}) = \xi(A) = \xi(\text{co}\{A\})$, onde $\text{co}\{A\}$ denota a envoltória convexa de A .
- (iii) $\xi(\lambda A) = |\lambda|\xi(A)$.
- (iv) $\xi(A) \leq \xi(B)$, se $A \subseteq B$.
- (v) $\xi(A + B) \leq \xi(A) + \xi(B)$.
- (vi) $\tilde{\xi}(A) \leq \xi(A) \leq 2\tilde{\xi}(A)$.

Como consequência dos itens (i) e (ii), temos

Corolário 2.16 *Se A é um subconjunto relativamente compacto de X , então $\overline{\text{co}\{A\}}$ é compacto.*

As demonstrações desta Proposição e do Corolário podem ser encontrados em (ARJUNAN; NADAF, 2014; CHUONG; KE, 2012; DEIMLING, 2010).

2.3 Semigrupos e Geradores

Nesta seção apresentaremos os fatos básicos da teoria de semigrupos de operadores lineares e contínuos que são indispensáveis ao entendimento de técnicas de solução de problemas parabólicos e hiperbólicos semilineares. Começaremos com uma revisão da teoria básica com o objetivo principal de apresentar a teoria de semigrupos fortemente contínuos e semigrupos analíticos. Grande parte da nossa exposição estará concentrada na caracterização dos geradores de semigrupos lineares já que nas aplicações da teoria, em geral, conhecemos a equação diferencial e não o operador solução. A exposição apresentada nesta seção pode ser encontrada em (PAZY, 1983).

Definição 2.17 *Um semigrupo de operadores lineares em X é uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que*

$$(i) \quad T(0) = I \text{ (operador identidade); e,}$$

$$(ii) \quad T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Se além disso,

$$(iii) \quad \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \longrightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+, \text{ dizemos que o semigrupo é uniformemente contínuo.}$$

$$(iv) \quad \|T(t)x - x\|_X \longrightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+, \text{ para cada } x \in X, \text{ dizemos que o semigrupo é fortemente contínuo (ou um } C_0\text{-semigrupo).}$$

O estudo dos semigrupos de operadores lineares está associado ao estudo de problemas de Cauchy lineares da forma

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \tag{2.1}$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear (em geral ilimitado). Um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ pode ser o operador solução de (2.1), isto é, para cada $x_0 \in X$, $t \mapsto T(t)x_0$ é a solução (em algum sentido) de (2.1), sob certas condições de A .

Definição 2.18 Se $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares, seu gerador infinitesimal é o operador definido por $A : D(A) \subset X \rightarrow X$

$$Ax := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)(x) - x}{t}, \quad \forall x \in D(A),$$

onde

$$D(A) = \{x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\}$$

Agora iremos estabelecer um teorema que caracteriza o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo.

Teorema 2.19 Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado.

Diante de tal resultado, segue o seguinte Corolário com propriedades bastante utilizadas para semigrupos uniformemente contínuos.

Corolário 2.20 Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados. Então as seguintes propriedades são válidas:

(i) Existe uma constante $\beta \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{\beta t}$, $\forall t \geq 0$.

(ii) Existe um único operador linear limitado A tal que $T(t) = e^{tA}$, onde $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$.

(iii) O operador A do item (ii) é o gerador infinitesimal de $T(t)$.

Observando a Definição 2.19 é claro que um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ tem um único gerador infinitesimal. Além disso, pelo Teorema 2.20, todo operador linear limitado A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $(T(t))_{t \geq 0}$. O próximo resultado nos fornece a unicidade deste semigrupo.

Estabeleceremos agora algumas propriedades sobre C_0 -semigrupos.

Teorema 2.21 Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então são válidas as seguintes propriedades.

- (i) Para todo $x \in X$ e $t \geq 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x$.
- (ii) Para todo $x \in X$ e $t \geq s \geq 0$, $\int_s^t T(u)x du \in D(A)$ e $A \int_s^t T(u)x du = T(t)x - T(s)x$.
- (iii) Para todo $x \in D(A)$ e $t \geq 0$, $T(t)x \in D(A)$ e $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.
- (iv) Para todo $x \in D(A)$ e $t \geq s \geq 0$, $T(t)x - T(s)x = A \int_s^t T(u)x du = \int_s^t T(u)Ax du$.

Logo, pelo Teorema 2.22 temos o seguinte Corolário.

Corolário 2.22 Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, então A é um operador linear fechado e $D(A)$ é denso em X .

O próximo resultado nos garante a unicidade do semigrupo associado a um gerador infinitesimal para o caso de semigrupos fortemente contínuos.

Teorema 2.23 Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ C_0 -semigrupos com geradores infinitesimais A e B , respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$.

O resultado a seguir coleta alguns fatos importantes sobre semigrupos fortemente contínuos. Valem que

Teorema 2.24 Suponha que $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ seja um semigrupo fortemente contínuo.

- (i) Para qualquer $x \in X$, $t \rightarrow T(t)x$ é contínuo para $t \geq 0$.
- (ii) $t \rightarrow \|T(t)(x)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é semicontínua inferiormente e, portanto, mensurável.
- (iii) Seja A o gerador infinitesimal de $T(t)$, então A é densamente definido e fechado. Para $x \in D(A)$, $t \rightarrow T(t)x$ é continuamente diferenciável e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad t > 0.$$

- (iv) Para $\operatorname{Re} \lambda > \beta$, λ está no resolvente $\rho(A)$ de A , onde $\beta \in \mathbb{R}$ uma constante de modo que $(\beta, \infty) \subset \rho(A)$. e

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x dt, \quad \forall x \in X.$$

O próximo resultado que iremos enunciar é conhecido como o Teorema de Hille-Yosida que caracteriza os geradores de semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares em espaços de Banach.

Teorema 2.25 (ENGEL; NAGEL, 1999, Teorema II.3.8) *Seja $(A, D(A))$ um operador linear sobre um espaço de Banach X e sejam $\beta \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$ constantes. Então, as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) *$(A, D(A))$ é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares $(T(t))_{t \geq 0}$ que satisfaz*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}, \forall t \geq 0.$$

(ii) *A é fechado, densamente definido, $(\beta, \infty) \subset \rho(A)$ e*

$$\|(\lambda I - A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \beta)^n}, \forall \lambda > \beta, n \in \mathbb{N}.$$

(iii) *A é fechado, densamente definido e para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} \lambda > \beta$, $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$\|(\lambda I - A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \beta)^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.4 Operadores Setoriais e Semigrupos Analíticos

Naturalmente a construção e as propriedades da solução de uma equação diferencial dependem da classe de operadores considerada. Onde operadores setoriais e semigrupos analíticos são boas ferramentas utilizadas na teoria de problemas parabólicos abstratos. Para maiores considerações sobre os assuntos abordados deste capítulo, ver (HENRY, 1981).

Definamos agora uma curva no plano complexo.

Definição 2.26 *Dizemos que Ha é um caminho de Hankel, se existem $r > 0$ e $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tais que, $Ha = Ha_1 + Ha_2 - Ha_3$ em que os caminhos Ha_i são dados por*

$$Ha_1 := \{te^{i\theta}; t \in [r, \infty)\};$$

$$Ha_2 := \{re^{i\theta}; t \in [-\theta, \theta)\};$$

$$Ha_3 := \{te^{-i\theta}; t \in [r, \infty)\}.$$

Também escrevemos por $Ha = Ha(r, \theta)$ para exibir a dependência do ângulo e do raio.

Consideremos $a \in \mathbb{R}$ e $\phi \in (0, \pi)$, definimos os seguintes subconjuntos do plano complexo,

$$S_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\};$$

$$\sum_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| \leq \phi, \lambda \neq a\}. \quad (2.2)$$

Note que $-S_{a,\phi} = \sum_{-a,\pi-\phi}$.

Vamos considerar agora a possibilidade de estender o domínio do parâmetro de um semigrupo para certos setores no plano complexo que incluem o eixo real não negativo. E, para que possamos preservar a estrutura de semigrupo, o domínio onde o parâmetro complexo variar deve ser um semigrupo aditivo de números complexos.

Definição 2.27 *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado e densamente definido. Dizemos que A é um operador setorial se existem $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que o setor $S_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \subset \rho(A)$ e*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \quad \forall \lambda \in S_{a,\phi}.$$

Observe que a abertura do ângulo da seção $S_{a,\phi}$ é $2\pi - 2\phi > \pi$.

Observação 2.28

- (1) *Se A é um operador linear limitado em um espaço de Banach, então A é um operador setorial.*
- (2) *Se A é um operador auto-adjunto densamente definido em um espaço de Hilbert e A é um operador limitado inferiormente, então A é setorial.*
- (3) *Se A é setorial em X e B é setorial em Y , então $A \times B$ é setorial em $X \times Y$, onde $(A \times B)(x, y) = (Ax, By)$ para $x \in D(A)$, $y \in D(B)$.*

Definição 2.29 Seja $\sum_{0,\phi}^0$ o interior do conjunto $\sum_{0,\phi}$. Dizemos que uma família de operadores lineares limitados $\{T(t); t \in \sum_{0,\phi}^0 \cup \{0\}\}$ é um semigrupo analítico se:

- (i) A função $\sum_{0,\phi}^0 \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{B}(X)$ é analítica;
- (ii) $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$, para quaisquer $t, s \in \sum_{0,\phi}^0 \cup \{0\}$;
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x$ para todo $x \in X$ (e observe que $t \rightarrow 0$ por todos os pontos de $\sum_{0,\phi}^0$).

O gerador infinitesimal L deste semigrupo é definido por

$$Lx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T(t)(x) - x),$$

cujo domínio $D(L)$ consiste de todos $x \in X$ no qual o limite (em X) existe. Usualmente escrevemos $T(t) = e^{Lt}$.

Teorema 2.30 (HENRY, 1981, Teorema 1.3.4) Suponha que $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial, então $-A$ gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ com

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a+Ha} e^{\lambda t} (\lambda I + A)^{-1} d\lambda, \quad t > 0,$$

onde $a + Ha = a + Ha(r, \phi)$ é o deslocamento do caminho de Hankel com r pequeno ($a + Ha$ é a fronteira de $\sum_{a,\theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| \leq \phi\}$ com r pequeno). Além disso, $t \mapsto T(t)$ se estende a uma função analítica de $\sum_{0,\phi-\frac{\pi}{2}}^0$ em $\mathcal{L}(X)$ (ou a complexificação de X , se X é um espaço de Banach real) e para algum $K > 0$,

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K e^{-at}, \quad \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K t^{-1} e^{-at}, \quad \forall t > 0.$$

$$\frac{d}{dt} T(t) = -AT(t)$$

é um operador limitado para qualquer $t > 0$ e $(0, \infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua.

Observação 2.31 Também vale que se $-A$ gera um semigrupo analítico, então A é um operador setorial.

Definição 2.32 (*Semigrupo Compacto*) Um semigrupo fortemente contínuo $T(t)$ é dito compacto para $t > t_0$ se para cada $t > t_0$, $T(t)$ é um operador compacto. Além disso, $T(t)$ é dito compacto se for compacto para todo $t > 0$.

Teorema 2.33 Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ densamente definido tal que A é setorial com resolvente compacto. Então o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ gerado por $-A$ é compacto.

Demonstração: Ver (PAZY, Teorema 2.3.3).

2.5 Potências Fracionárias

As potências fracionárias de operadores setoriais desempenham um papel fundamental na teoria de existência de soluções para equações diferenciais parciais não lineares do tipo parabólico. Para mais detalhes deste tópico, bem como as demonstrações dos teoremas enunciados, ver (HENRY, 1981).

Definição 2.34 Suponha que A é um operador setorial com $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$, então para $\alpha > 0$ definimos

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) dt,$$

onde $(T(t))_{t \geq 0}$ é o C_0 -semigrupo gerado por $-A$ e $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ denota a função Gama, onde $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Exemplo 2.35

- (i) Se A é um escalar positivo ($X = \mathbb{R}$), então $A^{-\alpha}$ é definido como a potência usual $(-\alpha)$ de A .
- (ii) A^{-1} (o caso $\alpha = 1$) é a inversa de A .

Teorema 2.36 (HENRY, 1981, Teorema 1.4.2) Se A é um operador setorial em X com $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$, então para cada $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado em X . Além disso, para quaisquer $\alpha, \beta > 0$,

$$A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}.$$

Além disso, para $0 < \alpha < 1$,

$$A^{-\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda + \alpha)^{-1} d\lambda.$$

Definição 2.37 Suponha que $-A$ é um operador setorial com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, então para $\alpha > 0$ definimos por

$$A^\alpha := (A^{-\alpha})^{-1},$$

com $D(A^\alpha) := \operatorname{Im}(A^{-\alpha})$ e $A^0 := I$ (operador identidade sobre X).

Teorema 2.38 Seja A um operador setorial sobre X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Se $\alpha > 0$, então A^α é fechado e densamente definido.
- (ii) Se $\alpha \geq \beta$, então $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$.
- (iii) $A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}$ sobre $D(A^\gamma)$, onde $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.
- (iv) $A^\alpha T(t) = T(t) A^\alpha$ sobre $D(A^\alpha)$, para $t > 0$, onde $(T(t))_{t \geq 0}$ é o semigrupo gerado por $-A$.

Definição 2.39 Seja A um operador setorial sobre X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$. Para cada $\alpha \geq 0$, definimos o espaço $X^\alpha := D(A^\alpha)$, munido com a norma $\|x\|_\alpha := \|A^\alpha x\|_X$. Tais espaços são chamados espaços de potências fracionárias associadas ao operador A .

Teorema 2.40 (HENRY, 1981, Teorema 1.4.8.) Seja $-A$ um operador setorial sobre X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Para cada $\alpha \geq 0$, X^α munido com a norma $\|\cdot\|_\alpha$ é um espaço de Banach.
- (ii) $X^0 = X$ e $X^1 = D(A)$.
- (iii) Se $\alpha \geq \beta \geq 0$, então X^α é um subespaço denso de X^β e a inclusão $i : X^\alpha \rightarrow X^\beta$ é contínua.
- (iv) Se A tem operador resolvente compacto, a inclusão $X^\alpha \subset X^\beta$ é compacta sempre que $\alpha \geq \beta \geq 0$.

2.6 Métodos Topológicos

Nesta seção enunciaremos alguns resultados importantes de Análise Funcional e da Topologia. Além disso, também citaremos alguns resultados auxiliares que serão primordiais para o desenvolvimento do nosso trabalho, entre eles, cabe ressaltar o Teorema de Riesz-Weyl-Kolmogorov, que estabelece critérios para caracterizar subconjuntos compactos de L^p .

Definição 2.41 *Seja (X, d) um espaço métrico. O mapa $F : X \rightarrow X$ é dito de contração se existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que*

$$d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y), \forall x, y \in X.$$

Teorema 2.42 *(GRANAS; DUGUNDJI, 2003, Princípio de contração de Banach). Sejam (M, d) um espaço métrico completo não-vazio e $F : M \rightarrow M$ uma contração. Então F possui um único ponto fixo.*

Corolário 2.43 *(Princípio dos Iterados). Seja (M, d) um espaço métrico completo não-vazio e seja $F : M \rightarrow M$ um mapa tal que, para algum natural n , F^n é uma contração, então F possui um único ponto fixo.*

O próximo resultado que iremos enunciar é uma generalização do Teorema do ponto fixo de Darbo, ver (K. KURATOWSKI, 1930; BANAS; GOEBEL, 1980).

Lema 2.44 *(DE ANDRADE et al., 2016, Lema 3.3) Sejam B um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Banach X e $F : B \rightarrow B$ um operador contínuo tal que $F(B)$ é limitado. Para qualquer subconjunto limitado $C \subseteq B$, defina $F^1(C) = F(C)$ e $F^n(C) = F(\overline{\text{co}(F^{n-1}(C))})$, $n = 2, 3, \dots$. Se existe uma constante $0 \leq k < 1$ e um inteiro positivo n_0 tal que para qualquer subconjunto limitado $C \subseteq B$,*

$$\xi(F^{n_0}(C)) < k\xi(C),$$

então F possui um ponto fixo em B .

Lema 2.45 (DE ANDRADE et al., 2016, Lema 3.2) *Seja $B \subset C([0, 1]; X)$ um conjunto limitado e equicontínuo. Então,*

(i) *A aplicação $t \mapsto \xi(B(t))$ é contínua em $[0, 1]$.*

(ii) $\xi(B) = \sup\{\xi(B(s)); s \in [0, 1]\}$.

(iii) $\xi\left(\int_0^1 B(s)ds\right) \leq \int_0^1 \xi(B(s))ds$.

Seja $C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!m!}$, $0 \leq m \leq n$, $S_n = \sum_{j=0}^n C_j^n \epsilon^{n-j} \frac{h^j}{j!}$.

Lema 2.46 (DE ANDRADE et al., 2016, Lema 3.4). *Sejam $0 < \epsilon < 1$ e $h > 0$. Então $S_n = o(\frac{1}{n^s})$ quando $n \rightarrow \infty$, para um número real arbitrário $s > 1$.*

Teorema 2.47 (GRANAS; DUGUNDJI, 2003, Teorema do ponto fixo de Schauder). *Seja C um subconjunto convexo (não necessariamente fechado) de um espaço linear normado E . Então um mapa compacto $F : C \rightarrow C$ possui ao menos um ponto fixo.*

Teorema 2.48 (GRANAS; DUGUNDJI, 2003, Teorema do ponto fixo de Schauder-Tychonoff). *Sejam C um subconjunto convexo não vazio de um espaço topológico localmente convexo E e $F : C \rightarrow C$ um mapa compacto. Então F possui um ponto fixo.*

O próximo resultado que iremos enunciar estabelece critérios para caracterizar subconjuntos compactos de L^p , tal resultado é conhecido como Teorema de Riesz-Weyl-Kolmogorov.

Teorema 2.49 (HENRÍQUEZ, 2012, Teorema III.3.8). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mensurável no sentido de Lebesgue. Um conjunto $H \subseteq L^p(\Omega, X)$ é relativamente compacto se, e somente se, é limitado e satisfaz as seguintes condições:*

(a) *Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega} \|f(t+h) - f(t)\|^p dm(t) \leq \epsilon^p,$$

para todo $f \in H$ e $h \in \mathbb{R}^n$, com $\|h\| \leq \delta$.

(b) Para todo $\epsilon > 0$, existe um subconjunto mensurável e limitado A de Ω tal que

$$\int_{\Omega-A} \|f(t)\|^p dm(t) \leq \epsilon^p, \forall f \in H.$$

(c) Para todo subconjunto mensurável e limitado A de Ω , o conjunto

$$\left\{ \int_A f dm; f \in H \right\}$$

é relativamente compacto em X .

Lema 2.50 (DE ANDRADE et al., 2016, Lema 3.1). Seja $B \subset C([0, 1]; X)$ um conjunto limitado e equicontínuo, então $\overline{co(B)}$ é também limitado e equicontínuo.

Lema 2.51 (CUEVAS et al., 2017, Lema 3.5). Seja $g : [0, a] \times X \rightarrow Y$ uma função que satisfaz as seguintes condições de Carathéodory:

(Ci) $g(t, \cdot) : X \rightarrow Y$ é contínua para quase todo $t \in [0, \infty)$.

(Cii) Para cada $x \in X$, a função $g(\cdot, x) : [0, \infty) \rightarrow Y$ é fortemente mensurável.

Suponha ainda que para cada $\rho \geq 0$ existe uma função $N_\rho \in L^p([0, a])$ tal que

$$g(t, x) \leq N_\rho(t), \quad t \in [0, a],$$

para todo $x \in X$, com $\|x\|_X \leq \rho$. Assuma que para cada $\rho, \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{t_1}^{t_2} \|g(t+h, x) - g(t, x)\|^p dt \leq (t_2 - t_1)\epsilon^p,$$

para todo $t_1, t_2 \in [0, a]$, $t_1 \leq t_2$, $x \in X$, $\|x\|_X \leq \rho$ e $|h| \leq \delta$. Então

$$\int_0^a \|g(t+h, x(t)) - g(t, x(t))\|^p dt \leq a\epsilon^p,$$

para toda função $x(\cdot) \in C([0, a]; X)$ tal que $\|x\|_{C([0, a]; X)} \leq \rho$.

3 EQUAÇÕES DE ONDA FORTEMENTE AMORTECIDAS

Neste capítulo iremos fazer uma explanação do seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\eta A^{\frac{1}{2}}u_t + Au = f(t, u, u_t), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X^{\frac{1}{2}}, & u_t(0) = v_0 \in X \end{cases} \quad (3.1)$$

onde X é um espaço de Banach reflexivo, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ é um operador fechado densamente definido, $X^{\frac{1}{2}}$ é o espaço de potência fracionária associado ao operador A como visto em (HENRY, 1981), $\eta > 0$ e f é uma função contínua adequada. Com relação aos operadores de amortecimento estudados aqui, note que eles serão expressos pela primeira ordem no tempo como um múltiplo de $A^{\frac{1}{2}}u_t$. De maneira mais específica, neste capítulo iremos reduzir o problema (3.1) para um problema de Cauchy de primeira ordem (em tempo) em $X^{\frac{1}{2}} \times X$ e citarmos algumas propriedades essenciais dos operadores de ondas fortemente amortecidos $\mathcal{A}_{(1/2)}$.

Os tópicos desenvolvidos ao longo deste capítulo sobre a equação (3.1) são tratados no artigo de (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017).

3.1 Redução a primeira ordem

Observemos que o problema (3.1) pode ser reduzido a um problema de Cauchy de primeira ordem (em tempo) em $X^{\frac{1}{2}} \times X$:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \mathcal{A}_{(1/2)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = F\left(t, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right), \quad t > 0, \quad (3.2)$$

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

onde

$$\mathcal{A}_{(1/2)} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & 2\eta A^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} : D(\mathcal{A}_{(1/2)}) \subseteq X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X \text{ é definido por}$$

$$\mathcal{A}_{(1/2)} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi \\ A\phi + 2\eta A^{\frac{1}{2}}\psi \end{bmatrix}, \text{ para } \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} \in D(\mathcal{A}_{(1/2)}).$$

e

$$F\left(t, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t, u, v) \end{bmatrix}.$$

Definição 3.1 (Par admissível) *Seja X um espaço de Banach reflexivo, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado densamente definido, $\eta > 0$. Dizemos que (η, A) é um par admissível se existem $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $M > 0$ tais que $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{1+|\lambda|}$, para todo λ no setor*

$$\sum_{\psi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \psi \leq |\arg \lambda| \leq \pi\} \cup \{0\}$$

e

$$\frac{\pi}{2} > \frac{\psi}{2} + \arg(\eta + \sqrt{\eta^2 - 1}). \quad (3.4)$$

Observação 3.2 *Embora a condição (3.4) na Definição 3.1 pareça restritiva, pode ser verificada em todas as aplicações interessantes para todo $\eta \in (0, \infty)$. Infelizmente, essa condição não pode ser evitada (ver (CARVALHO; CHOLEWA; DLOTKO, 2008, Observação 1.1)). Se $\eta \in (0, 1)$, Δ_D é o Laplaciano de Dirichlet em um domínio suave limitado Ω , $p \neq 2$ e*

$$A = -e^{i(\frac{\pi}{2} - \arg(\eta - \sqrt{\eta^2 - 1}))} \Delta_D,$$

então (η, A) não é um par admissível e consequentemente $\mathcal{A}_{(1/2)}$ não gera um C_0 -semigrupo e assim (3.2) seria um problema mal colocado.

Para o desenvolvimento do nosso trabalho, é fundamental citarmos algumas propriedades do operador $\mathcal{A}_{(1/2)}$:

- (1) Se (η, A) é um par admissível, por (CARVALHO; CHOLEWA; DLOTKO, 2008, Proposição 2.1), $\mathcal{A}_{(1/2)}$ é um operador fechado com $0 \in \rho(\mathcal{A}_{(1/2)})$ e o operador $\mathcal{A}_{(1/2)}$ tem inversa dada na forma matricial por

$$\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1} = \begin{bmatrix} 2\eta A^{-\frac{1}{2}} & A^{-1} \\ -I & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X).$$

Além disso, se A tem operador resolvente compacto, então $\mathcal{A}_{(1/2)}$ também tem operador resolvente compacto.

- (2) Se (η, A) é um par admissível, por (CARVALHO; CHOLEWA; DLOTKO, 2008, Teorema 2.3), o operador $\mathcal{A}_{(1/2)}$ é setorial em $X^{\frac{1}{2}} \times X$. Dessa forma o semigrupo $\{e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}t} : t \geq 0\}$ gerado por $-\mathcal{A}_{(1/2)}$ em $X^{\frac{1}{2}} \times X$ é analítico com decaimento exponencial, isto é, existem constantes $K \geq 1$ e $C > 0$ tais que

$$\|e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}t}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq K e^{-Ct}, \quad t \geq 0. \quad (3.5)$$

Observação 3.3 Escreveremos em alguns casos $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ ao invés de $[u, v]$, para uma melhor exposição, mas ambas as notações possuem o mesmo significado.

4 PROPRIEDADES DE LIMITAÇÃO EM

L^p

Estudaremos neste capítulo a existência de soluções (brandas) L^p -limitadas. A princípio iremos definir o conceito de solução branda para o problema (3.1) e com isso utilizar de ferramentas da análise funcional, como teoremas de ponto fixo, para garantir a existência e unicidade de solução para o nosso problema proposto. Os resultados desenvolvidos neste capítulo podem ser encontrados em (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017).

4.1 Existência de soluções brandas L^p limitadas

Definição 4.1 (*Solução Branda*) *Seja $[u_0, v_0] \in X^{\frac{1}{2}} \times X$. Dizemos que $[u(\cdot), v(\cdot)] : \mathbb{R}^+ \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ é uma solução branda para (3.2)-(3.3) (ou equivalentemente para (3.1)) se satisfaz a seguinte fórmula integral:*

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(t-s)} F\left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}\right) ds \quad (4.1)$$

para todos $t, s \in \mathbb{R}^+$ com $t \geq s$.

Teorema 4.2 (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017, Teorema 1.6) *Assuma que (η, A) é um par admissível. Seja $f : \mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ uma função contínua que satisfaz a condição de Lipschitz:*

$$\|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)\|_X \leq L[\|u_1 - u_2\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_1 - v_2\|_X] \quad (4.2)$$

para todo $[u_i, v_i] \in X^{\frac{1}{2}} \times X$, $i = 1, 2$. e, para cada $t \geq 0$. Além disso, suponha que $f(\cdot, 0, 0) \in L^p(0, \infty; X)$. Se $\frac{K}{C}L < 1$, onde K e C são as constantes dadas em (3.5), então o problema (3.1) tem uma única solução L^p -branda.

Demonstração: Definimos o mapa $\mathcal{F} : L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X) \longrightarrow L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ por

$$\mathcal{F}\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right)(t) = e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(t-s)} F\left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}\right) ds, \quad (4.3)$$

onde $t \in \mathbb{R}^+$. Vamos mostrar que o mapa $\mathcal{F}$ está bem definido. Com efeito, para todo $t \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned} & \left\| e^{-\mathcal{A}_{(1/2)} \bullet} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\ & \leq \left(\int_0^\infty \left(\|e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}t}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \\ & \leq \left(\int_0^\infty (K e^{-Ct} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq K \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \left(\int_0^\infty e^{-Cpt} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \frac{K}{\sqrt[p]{Cp}} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left\| e^{-\mathcal{A}_{(1/2)} \bullet} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \frac{K}{\sqrt[p]{Cp}} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}. \quad (4.4)$$

Portanto, concluímos que

$$e^{-\mathcal{A}_{(1/2)} \bullet} [u_0, v_0] \in L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X).$$

Consideremos $[u, v] \in L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e seja $\mathcal{V}$ a função dada por

$$\mathcal{V}(t) = \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(t-s)} F\left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}\right) ds, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (4.5)$$

Vamos mostrar que

$$\|\mathcal{V}\|_{L^p(0,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)} := \left(\int_0^\infty \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

e, com isto, concluir que o mapa $\mathcal{F}$ está bem definido. Utilizando a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p \\ & \leq \left(\int_0^t \|e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(t-s)} F(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix})\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p \\ & \leq \left(\int_0^t K e^{-C(t-s)} \|F(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix})\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p \\ & = K^p \left(\int_0^t e^{-C(t-s)(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})} \|f(s, u(s), v(s))\|_X ds \right)^p \\ & = K^p \left(\int_0^t e^{-\frac{C(t-s)}{q}} e^{-\frac{C(t-s)}{p}} \|f(s, u(s), v(s))\|_X ds \right)^p \\ & \leq K^p \left[\left(\int_0^t (e^{-\frac{C(t-s)}{q}})^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t (e^{-\frac{C(t-s)}{p}} \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \\ & = K^p \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds \right). \end{aligned}$$

Daí, temos a seguinte estimativa

$$\|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p \leq \frac{K^p}{\sqrt[q]{C^p}} \int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds.$$

Integrando esta expressão acima em $[0, \infty)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}\|_{L^p(0,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)} & = \left(\int_0^\infty \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left[\int_0^\infty \frac{K^p}{\sqrt[q]{C^p}} \int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ & = \frac{K}{\sqrt[q]{C}} \left(\int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \frac{K}{\sqrt[q]{C}} \left(\int_0^\infty \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p \left(\int_s^\infty e^{-C(t-s)} dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K}{\sqrt[q]{C}} \left(\int_0^\infty \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p \left(\frac{1}{C}\right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{K}{C^{\frac{1}{q}} C^{\frac{1}{p}}} \left(\int_0^\infty \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{K}{C} \left(\int_0^\infty \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\int_0^\infty (\|f(s, u(s), v(s)) - f(s, 0, 0)\|_X + \|f(s, 0, 0)\|_X)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left[\left(\int_0^\infty \|f(s, u(s), v(s)) - f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^\infty \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&\leq \frac{K}{C} \left[\left(\int_0^\infty L^p (\|u(s)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v(s)\|_X)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p(0, \infty; X)} \right] \\
&= \frac{K}{C} \left[L \left(\int_0^\infty \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p(0, \infty; X)} \right] \\
&= \frac{K}{C} \left[L \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p(0, \infty; X)} \right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\mathcal{V}\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \frac{K}{C} \left[L \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p(0, \infty; X)} \right]. \quad (4.6)$$

Portanto, das estimativas (4.4) e (4.6), concluímos que o mapa $\mathcal{F}$ está bem definido.

Sejam $[u_i, v_i] \in L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$, $i = 1, 2$. Mostremos agora que $\mathcal{F}$ é uma $(\frac{KL}{C})$ -contração. Com efeito, comecemos notando que

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p \\
&\leq \left(\int_0^t K e^{-C(t-s)} \|f(s, u_1(s), v_1(s)) - f(s, u_2(s), v_2(s))\|_X ds \right)^p \\
&= K^p \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} L \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p \\
&= K^p L^p \left(\int_0^t e^{-\frac{C(t-s)}{q}} e^{-\frac{C(t-s)}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p \\
&\leq K^p L^p \left[\left(\int_0^t (e^{-\frac{C(t-s)}{q}})^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t (e^{-\frac{C(t-s)}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p
\end{aligned}$$

$$\leq K^p L^p \left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{p}{q}} \int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds.$$

Logo, temos a seguinte estimativa

$$\left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p \leq \frac{(KL)^p}{\sqrt[q]{C^p}} \int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds. \quad (4.7)$$

Como,

$$\left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} := \left(\int_0^\infty \left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando a estimativa (4.7) e o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\ & \leq \left(\int_0^\infty \frac{(KL)^p}{C^{\frac{p}{q}}} \int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \frac{KL}{C^{\frac{1}{q}}} \left(\int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-C(t-s)} dt \right) \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \frac{KL}{C^{\frac{1}{q}} C^{\frac{1}{p}}} \left(\int_0^\infty \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \frac{KL}{C} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)}.$$

Como, por hipótese, $\frac{KL}{C} < 1$, então segue do Princípio da Contração que $\mathcal{F}$ tem um único ponto fixo em $L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$, isto é, existe uma única solução branda $[u, v]$ de (3.1) tal que $[u, v] \in L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. ■

Teorema 4.3 (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017, Teorema 1.7) *Assuma que (η, A) é um par admissível. Seja $f : \mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ uma função contínua que satisfaz a condição de Lipschitz:*

$$\|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)\|_X \leq L(t) [\|u_1 - u_2\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_1 - v_2\|_X], \quad (4.8)$$

para todo $[u_i, v_i] \in X^{\frac{1}{2}} \times X$, $i = 1, 2$; e cada $t \geq 0$, onde $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função integrável limitada em $[N, \infty)$, para alguma constante $N > 0$, $L(\cdot) \in L^q(0, \infty)$ e que $f(\cdot, 0, 0) \in L^1(0, \infty; X)$. Se $\frac{K}{\sqrt[p]{Cp}} \|L\|_q < 1$ (onde p e q são expoentes conjugados), então o problema (3.1) admite uma única solução L^p -branda.

Demonstração: Consideremos o mapa $\mathcal{F} : L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X) \rightarrow L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ definido por (4.3). A nossa primeira etapa consiste em mostrar que o mapa $\mathcal{F}$ está bem definido. Como já provado no Teorema 4.2, temos que

$$\|e^{-\mathcal{A}(1/2)\bullet}[u_0, v_0]\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \frac{K}{\sqrt[p]{Cp}} \| [u_0, v_0] \|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}.$$

Logo, é suficiente mostrar que $\|\mathcal{V}\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} < \infty$. Notemos que a função $\mathcal{V}$, definida por (4.5), satisfaz a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} &\leq K \int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X ds \\ &\leq K \int_0^t L(s) \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds + K \int_0^t \|f(s, 0, 0)\|_X ds. \end{aligned}$$

Portanto, tem-se que

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} &\leq K \int_0^\infty L(s) \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds + K \int_0^\infty \|f(s, 0, 0)\|_X ds \\ &\leq K \left(\int_0^\infty L(s)^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + K \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^1(0, \infty; X)}. \end{aligned}$$

Dáí, obtemos a seguinte estimativa

$$\sup_{t \geq 0} \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq K \left(\|L\|_{L^q(0, \infty)} \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^1(0, \infty; X)} \right). \quad (4.9)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} &:= \left(\int_0^\infty \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[\left(\sup_{t \geq 0} \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^{p-1} \right) \left(\int_0^\infty \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} dt \right) \right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sup_{t \geq 0} \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sup_{t \geq 0} \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_0^\infty K \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X ds \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{t \geq 0} \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= K^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{t \geq 0} \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_0^\infty \|f(s, u(s), v(s))\|_X \left(\int_s^\infty e^{-C(t-s)} dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{K}{C} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{t \geq 0} \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \|f(s, u(s), v(s))\|_X ds \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Usando a estimativa (4.9), temos

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{V}\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\
&\leq \left(\frac{K}{C} \right)^{\frac{1}{p}} \left[K \left(\|L\|_{L^q(0, \infty)} \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^1(0, \infty; X)} \right) \right]^{1-\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_0^\infty \|f(s, u(s), v(s))\|_X ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\frac{K}{C^{\frac{1}{p}}} \right) \left[\left(\|L\|_{L^q(0, \infty)} \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^1(0, \infty; X)} \right) \right]^{1-\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_0^\infty (L(s) \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + \|f(s, 0, 0)\|_X ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\frac{K}{C^{\frac{1}{p}}} \right) \left[\left(\|L\|_{L^q(0, \infty)} \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^1(0, \infty; X)} \right) \right]^{1-\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left[\left(\|L\|_{L^q(0, \infty)} \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^1(0, \infty; X)} \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{K}{C^{\frac{1}{p}}} \left(\|L\|_{L^q(0, \infty)} \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^1(0, \infty; X)} \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\mathcal{V}\|_{L^p(0,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)} < \infty.$$

Portanto concluímos que o mapa $\mathcal{F}$ está bem definido. A etapa final da nossa demonstração será provar que $\mathcal{F}$ é uma contração em $L^p(0,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Sejam $[u_i, v_i] \in L^p(0,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)$, $i = 1, 2$. Começemos notando que

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p \\ & \leq \left(\int_0^t \|e^{-\mathcal{A}(1/2)(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left\| F(s, \begin{bmatrix} u_1(s) \\ v_1(s) \end{bmatrix}) - F(s, \begin{bmatrix} u_2(s) \\ v_2(s) \end{bmatrix}) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p \\ & \leq K^p \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u_1(s), v_1(s)) - f(s, u_2(s), v_2(s))\|_X ds \right)^p \\ & \leq K^p \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} L(s) \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p. \end{aligned}$$

Logo, utilizando a desigualdade de Hölder e o Teorema de Fubini, obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\ & \leq \left[\int_0^\infty \left(\int_0^t K e^{-C(t-s)} L(s) \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ & \leq K \left[\int_0^\infty \left(\int_0^t |L(s)|^q ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-Cp(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ & \leq K \left(\int_0^\infty \|L\|_q^p \int_0^t e^{-Cp(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq K \|L\|_q \left(\int_0^\infty \int_s^\infty e^{-Cp(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = K \|L\|_q \left(\int_0^\infty \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p \left(\int_s^\infty e^{-Cp(t-s)} dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \frac{K \|L\|_q}{(Cp)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_0^\infty \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \frac{K}{\sqrt[p]{Cp}} \|L\|_q \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)}.$$

Como, por hipótese, $\frac{K}{\sqrt[p]{Cp}} \|L\|_q < 1$, segue que $\mathcal{F}$ é uma contração em $L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e, portanto, existe uma única solução branda $[u, v]$ para o problema (3.1) tal que $[u, v] \in L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. ■

Observação 4.4 *Sob as condições do Teorema 4.3, com $L(\cdot) \in L^p(0, \infty)$ e $f(\cdot, 0, 0) \in L^p(0, \infty; X)$, se $K(\frac{1}{C})^{1-\frac{1}{p}} \|L\|_p < 1$, então o problema (3.1) tem uma única solução L^p -branda.*

Demonstração da Observação 4.4: Consideremos o mapa $\mathcal{F} : L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X) \rightarrow L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ definido por (4.3), onde $t \in \mathbb{R}^+$. Vamos mostrar que tal mapa está bem definido. Com efeito, sendo $\mathcal{V}$ a função dada por (4.5), utilizando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p \\ & \leq K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, u(s), v(s))\|_X ds \right)^p \\ & \leq K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, u(s), v(s)) - f(s, 0, 0)\|_X + \|f(s, 0, 0)\|_X ds \right)^p \\ & = K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, u(s), v(s)) - f(s, 0, 0)\|_X ds + \int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X ds \right)^p \\ & \leq 2^p K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} L(s) \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p \\ & \quad + 2^p K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X ds \right)^p \\ & \leq 2^p K^p \left(\int_0^t e^{-\frac{C|t-s|}{q}} L(s) e^{-\frac{C|t-s|}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p \\ & \quad + 2^p K^p \left(\int_0^t e^{-\frac{C|t-s|}{q}} e^{-\frac{C|t-s|}{p}} \|f(s, 0, 0)\|_X ds \right)^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^p K^p \left[\left(\int_0^t (e^{-\frac{C|t-s|}{q}} L(s))^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t (e^{-\frac{C|t-s|}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X})^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \\
&+ 2^p K^p \left[\left(\int_0^t (e^{-\frac{C|t-s|}{q}})^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t (e^{-\frac{C|t-s|}{p}} \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \\
&\leq 2^p K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} L(s)^q ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) \\
&+ 2^p K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right) \\
&\leq 2^p K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} L(s)^q ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) \\
&+ 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right) \\
&\leq 2^p K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} L(s)^p ds \right) \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} ds \right)^{\frac{p-q}{q}} \\
&\times \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) + 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right) \\
&\leq 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}-1} \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} L(s)^p ds \right) \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) \\
&+ 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right).
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p &\leq 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}-1} \|L\|_{L^p(0, \infty)}^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) \\
&+ 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Como

$$\|\mathcal{V}\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} := \left(\int_0^\infty \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Da estimativa (4.10), utilizando o Teorema de Fubini, obtemos o seguinte

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{V}\|_{L^p(0,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)}^p \\
& \leq \int_0^\infty \left(2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}-1} \|L\|_{L^p(0,\infty)}^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^\infty \left(2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right) dt \right) \right. \\
& \leq 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}-1} \|L\|_{L^p(0,\infty)}^p \left[\int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) dt \right] \\
& \quad + 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}} \left[\int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right) dt \right] \\
& \leq 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}-1} \|L\|_{L^p(0,\infty)}^p \left(\int_0^\infty \int_s^\infty e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt ds \right) \\
& \quad + 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^\infty \int_s^\infty e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X^p dt ds \right) \\
& \leq 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}-1} \|L\|_{L^p(0,\infty)}^p \left(\int_0^\infty \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p \left(\int_s^\infty e^{-C|t-s|} dt \right) ds \right) \\
& \quad + 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^\infty \|f(s, 0, 0)\|_X^p \left(\int_s^\infty e^{-C|t-s|} dt \right) ds \right) \\
& \leq 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}} \|L\|_{L^p(0,\infty)}^p \left(\int_0^\infty \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) \\
& \quad + 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}+1} \left(\int_0^\infty \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right).
\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{V}\|_{L^p(0,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)} & \leq 2K \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{q}} \|L\|_{L^p(0,\infty)} \left(\int_0^\infty \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad + 2K \left(\frac{1}{C} \right) \left(\int_0^\infty \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{V}\|_{L^p(0,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)} & \leq 2K \left(\frac{1}{C} \right)^{1-\frac{1}{p}} \|L\|_{L^p(0,\infty)} \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\
& \quad + 2K \left(\frac{1}{C} \right) \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p(0,\infty;X)}.
\end{aligned}$$

Portanto, o mapa $\mathcal{F}$ está bem definido. Provemos agora que $\mathcal{F}$ é uma contração em $L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Sejam $[u_i, v_i] \in L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$, $i = 1, 2$, então

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p \\
& \leq K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, u_1(s), v_1(s)) - f(s, u_2(s), v_2(s))\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p \\
& \leq K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} L(s) \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p \\
& \leq K^p \left[\left(\int_0^t e^{-C|t-s|} L(s)^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \\
& = K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} L(s)^q ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) \\
& \leq K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} ds \right)^{\frac{p-q}{q}} \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} L(s)^p ds \right) \\
& \quad \times \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)
\end{aligned}$$

Daí, obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p \\
& \leq K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}-1} \|L\|_{L^p(0, \infty)}^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right).
\end{aligned}$$

Logo, pela estimativa obtida acima, segue que

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\
& \leq K \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|L\|_{L^p(0, \infty)} \left(\int_0^\infty \int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|L\|_{L^p(0, \infty)} \left(\int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-C|t-s|} dt \right) \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= K \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{p}} \|L\|_{L^p(0, \infty)} \left(\int_0^\infty \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= K \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{q}} \|L\|_{L^p(0, \infty)} \left(\int_0^\infty \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= K \left(\frac{1}{C} \right)^{1 - \frac{1}{p}} \|L\|_{L^p(0, \infty)} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)}.
\end{aligned}$$

Portanto, desta última desigualdade concluímos que $\mathcal{F}$ é uma contração em $L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e com isto, concluímos a demonstração da Observação 4.4. ■

A situação torna-se mais complicada quando $L(t)$ apresenta diferentes condições de crescimento. Para enunciar o próximo resultado, precisamos introduzir as seguintes notações:

$$\begin{aligned}
L_a &:= \sup_{t \geq a} L(t), \\
\mathcal{B}(a, L) &:= K^p a^{p-1} \|L\|_{L^p[0, a]}^p, \\
\Theta &:= \left(\frac{K}{C} \right)^2 L_a \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{(\mathcal{B}(a, L))^j}{j!} \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

onde K e C são as constantes dadas em (3.5).

Teorema 4.5 (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017, Teorema 1.8) *Assuma que (η, A) é um par admissível. Seja $f : \mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ uma função contínua com $f(\cdot, 0, 0) \in L^p(0, \infty; X)$ e que satisfaz a condição de Lipschitz (4.8), onde $L : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função integrável em cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}^+$. Suponha que existe $a > 0$ tal que $\frac{K}{C} L_a < 1$ e $\Theta < 1$, então o problema (3.1) possui uma única solução L^p -branda.*

Demonstração: Definamos o espaço de Banach:

$$L_a^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X) := \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X); u(\cdot), v(\cdot) \text{ são contínuas em } [0, a] \right\}$$

equipado com a norma:

$$\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_a := \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} + \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(a,\infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)},$$

onde

$$\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} := \sup_{0 \leq t \leq a} \left(\left\| \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right)$$

e

$$\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(a,\infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} := \left(\int_a^\infty \left\| \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Definamos o operador $\mathcal{F}$ no espaço $L_a^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ pela expressão (4.3). Levando em conta a estimativa (4.4) e do fato de que o semigrupo $\{e^{-\mathcal{A}(1/2)t}; t \geq 0\}$ é fortemente contínuo, temos que $e^{-\mathcal{A}(1/2)\bullet}[u_0, v_0] \in L_a^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Provaremos agora que $\mathcal{F}$ está bem definido. De fato, considere $[u, v] \in L_a^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e seja $\mathcal{V}$ dado pela expressão (4.5), então pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{V}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p \\ & \leq \left(\int_0^t K e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p \\ & \leq K^p \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds \right) \\ & \leq K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{V}\|_{L^p(0,\infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\ & \leq K \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = K \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \int_s^\infty e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \frac{K}{C} \left(\int_0^\infty \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \frac{K}{C} \left(\int_0^\infty (\|f(s, u(s), v(s)) - f(s, 0, 0)\|_X + \|f(s, 0, 0)\|_X)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \frac{K}{C} \left[\left(\int_0^\infty (\|f(s, u(s), v(s)) - f(s, 0, 0)\|_X^p ds) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^\infty \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{K}{C} \left[\left(\int_0^\infty L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^\infty \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&= \frac{K}{C} \left(\int_0^\infty L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \frac{K}{C} \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p(0, \infty; X)} \\
&= \frac{K}{C} \left(\int_0^a L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds + \int_a^\infty L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \frac{K}{C} \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p(0, \infty; X)} \\
&\leq \frac{K}{C} \left[\left(\int_0^a L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^\infty L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&\quad + \frac{K}{C} \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p(0, \infty; X)} \\
&\leq \frac{K}{C} \left[\left(\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{(0, a)}^p \int_0^a L(s)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(L_a^p \int_a^\infty \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&\quad + \frac{K}{C} \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p(0, \infty; X)} \\
&= \frac{K}{C} \left(\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{(0, a)} \|L\|_{L^p[0, a]} + L_a \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(a, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p(0, \infty; X)} \right).
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\mathcal{F}$ está bem definido. Nossa próxima etapa é mostrar que o operador $\mathcal{F}$ tem um único ponto fixo em $L_a^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Sejam $[u_i, v_i] \in L_a^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$, $i = 1, 2$. Notemos que

$$\begin{aligned}
&\sup_{0 \leq t \leq a} \left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\
&\leq \sup_{0 \leq t \leq a} \int_0^t K e^{-C(t-s)} \|(f(s, u_1(s), v_1(s)) - f(s, u_2(s), v_2(s)))\|_X ds \\
&\leq \sup_{0 \leq t \leq a} \int_0^t K e^{-C(t-s)} L(s) \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\
&\leq K \left(\int_0^a L(s) ds \right) \sup_{0 \leq t \leq a} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}
\end{aligned}$$

$$\leq K \|L\|_{L^1([0,a])} \sup_{0 \leq t \leq a} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}.$$

Logo, concluímos que

$$\left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \leq K \|L\|_{L^1[0,a]} \sup_{0 \leq t \leq a} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - v_1(s) \\ u_2(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \quad (4.11)$$

A seguir, estimamos $\mathcal{F}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathcal{F}^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$ e obtemos

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{F}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathcal{F}^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq K \int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| f \left(s, \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) \right) - f \left(s, \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right) \right\|_X ds \\ & \leq K \int_0^t e^{-C(t-s)} L(s) \left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\ & \leq K^2 \int_0^t e^{-C(t-s)} L(s) \left(\int_0^s e^{-C(s-\tau)} L(\tau) \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right) ds \\ & \leq K^2 \sup_{0 \leq t \leq a} \left\| \begin{bmatrix} u_1(t) - u_2(t) \\ v_1(t) - v_2(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \int_0^t L(s) \left(\int_0^s L(\tau) d\tau \right) ds \\ & = \frac{K^2}{2} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \left(\int_0^t L(s) ds \right)^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos a seguinte estimativa

$$\left\| \mathcal{F}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathcal{F}^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \leq \frac{1}{2} (K \|L\|_{L^1(0,a)})^2 \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}.$$

De maneira análoga deduzimos que

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{F}^3 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathcal{F}^3 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq K \int_0^t e^{-C(t-s)} L(s) \left\| \mathcal{F}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \mathcal{F}^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{K^3}{2} \left(\int_0^t L(s) \left(\int_0^s L(\tau) d\tau \right)^2 ds \right) \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&\leq \frac{K^3}{6} \left(\int_0^t L(s) ds \right)^3 \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\| \mathcal{F}^3 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathcal{F}^3 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \leq \frac{1}{3!} (K \|L\|_{L^1[0,a]})^3 \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}.$$

Através de um argumento indutivo, pode-se mostrar que

$$\left\| \mathcal{F}^n \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathcal{F}^n \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \leq \frac{1}{n!} (K \|L\|_{L^1[0,a]})^n \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}. \quad (4.12)$$

Consideremos agora um novo conjunto de notações:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n &:= \left(\int_0^\infty \left\| \mathcal{F}^n \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathcal{F}^n \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{x^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad n \geq 1, \\
\mathcal{J}_n &:= \\
&\left(\int_a^\infty \left(\int_0^a \left\| e^{-\mathcal{A}(1/2)(t-s)} \right\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(s) \left\| \mathcal{F}^{n-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \mathcal{F}^{n-1} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{x^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \\
\mathcal{J} &:= \left(\int_a^\infty \left(\int_a^t \left\| e^{-\mathcal{A}(1/2)(t-s)} \right\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(s) \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

A fim de obtermos uma estimativa para $\mathcal{L}_n$ estudamos as contribuições dos termos $\mathcal{J}_n$ e $\mathcal{J}$. De início procedemos a análise dos termos $\mathcal{J}_i$, $i = 1, 2$. Temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &\leq K \left(\int_a^\infty \left(\int_0^a e^{-C(t-s)} L(s) \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K \left(\int_a^\infty \left(\int_0^a e^{-C(t-s)} ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^a e^{-C(t-s)} L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^\infty \int_0^a e^{-C(t-s)} L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^a \int_a^\infty e^{-C(t-s)} L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt ds \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= K \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^a L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p \left(\int_a^\infty e^{-C(t-s)} dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^a L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \|L\|_{L^p[0,a]} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)},
\end{aligned}$$

e, assim

$$\mathcal{J}_1 \leq \frac{K}{C} \|L\|_{L^p[0,a]} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}.$$

Agora para $i = 2$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_2 &\leq K \left(\int_a^\infty \left(\int_0^a e^{-C(t-s)} L(s) \left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K \left[\int_a^\infty \left(\int_0^a e^{-C(t-s)} L(s) \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left(\int_0^s K e^{-C(t-s)} L(\tau) \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} dt \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{\sqrt[q]{C}} \left[K^p \int_a^\infty \int_0^a e^{-C(t-s)} L(s)^p \right. \\
&\quad \times \left. \left(\int_0^s e^{-C(t-s)} L(\tau) \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right)^p ds dt \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(K^p \int_0^a L(s)^p \left(\int_0^s L(\tau) d\tau \right)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(K^p \int_0^a L(s)^p \left(\int_0^s L(\tau)^p d\tau \right) \left(\int_0^s d\tau \right)^{p-1} ds \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(K^p a^{p-1} \int_0^a L(s)^p \left(\int_0^s L(\tau)^p d\tau \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}
\end{aligned}$$

que integrando por partes a expressão acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_2 &\leq \frac{K}{C} \left(\frac{K^p a^{p-1}}{2} \left(\int_0^s L(s)^p ds \right)^2 \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
 &\leq \frac{K}{C} \left(\frac{K^{2p} a^{2(p-1)}}{2} (\|L\|_{L^p[0,a]}^p)^2 \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
 &\leq \frac{K}{C} \left(\left(\frac{K^p a^{p-1} \|L\|_{L^p[0,a]}^p}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
 &\leq \frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^2}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}.
 \end{aligned}$$

De um processo indutivo, pode-se mostrar que

$$\mathcal{J}_n \leq \frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^n}{n!} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}. \quad (4.13)$$

Continuando com a nossa análise, vamos estimar o termo $\mathcal{J}$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J} &\leq K \left(\int_a^\infty \left(\int_a^t e^{-C(t-s)} L(s) \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq K \left(\frac{1}{C} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_a^\infty \int_a^t e^{-C(t-s)} L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \frac{K}{C} \sup_{t \geq a} L(t) \left(\int_a^\infty \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{J} \leq \frac{K}{C} L_a \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(a, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)}. \quad (4.14)$$

Das estimativas (4.13) e (4.14), temos que

$$\mathcal{L}_2 \leq \left(\int_a^\infty \left(\int_0^t \|e^{-\mathcal{A}(1/2)(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(s) \left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_a^\infty \left(\int_0^a \|e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\int_a^\infty \left(\int_a^t \|e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(s) \left\| \mathcal{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^2}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&+ \left(\left(\frac{KL_a}{C} \right)^p \int_0^\infty \left(\int_0^s K e^{-C(s-\tau)} L(\tau) \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^2}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&+ \left(\left(\frac{KL_a}{C} \right)^p \int_0^\infty \left(\int_0^a K e^{-C(s-\tau)} L(\tau) \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\left(\frac{KL_a}{C} \right)^p \int_0^\infty \left(\int_a^s K e^{-C(s-\tau)} L(\tau) \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^2}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} + \frac{KL_a}{C} \left(\frac{K}{C} \right) \mathcal{B}(a, L)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&+ \left(\frac{KL_a}{C} \right)^2 \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(a, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)}.
\end{aligned}$$

Para $n = 3$, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_3 \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^3}{3!} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} + \left(\frac{K}{C} \right)^2 L_a \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^2}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&+ \frac{KL_a}{C} \left(\frac{K}{C} \right)^2 \mathcal{B}(a, L)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} + \left(\frac{KL_a}{C} \right)^3 \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(a, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)}.
\end{aligned}$$

E indutivamente obtemos

$$\mathcal{L}_n \leq \frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^n}{n!} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{K}{C}\right)^2 L_a \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^j}{j!}\right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
& + \frac{K}{C} \left(\frac{KL_a}{C}\right)^{n-1} \mathcal{B}(a, L)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
& + \left(\frac{KL_a}{C}\right)^n \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(a, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)},
\end{aligned}$$

e disso podemos concluir que

$$\mathcal{L}_n \leq \left(\frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^n}{n!}\right)^{\frac{1}{p}} + \Theta + \left(\frac{KL_a}{C}\right)^{n-1} \left(\frac{K}{C} \mathcal{B}(a, L)^{\frac{1}{p}} + 1\right)\right) \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_a. \quad (4.15)$$

Seja

$$\mathcal{W}_n := \frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^n}{n!}\right)^{\frac{1}{p}} + \Theta + \left(\frac{KL_a}{C}\right)^{n-1} \left(\frac{K}{C} \mathcal{B}(a, L)^{\frac{1}{p}} + 1\right) + \frac{1}{n!} (K \|L\|_{L^1[0,a]})^n.$$

Da estimativa (4.12) combinada com (4.15) obtemos:

$$\left\| \mathcal{F}^n \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathcal{F}^n \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_a \leq (\mathcal{W}_n + \Theta) \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_a.$$

Como $\mathcal{W}_n + \Theta < 1$ para n suficientemente grande, então $\mathcal{F}^n$ é uma contração quando $n \rightarrow \infty$, aplicando o Corolário 2.43, concluímos a prova do Teorema 4.5. ■

Observação 4.6 *Defina*

$$L(s) = \left(\frac{2K^2}{C^2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{j!} \left(\frac{1}{2} s^p K^{p-2} C^2 \right)^j \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{-1}, \quad s \geq 0,$$

onde K e C são dados em (3.5). Notemos que L é não crescente e $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = 0$.

Neste caso para obtermos as condições do Teorema 4.5 é suficiente escolhermos $a > 1$ tal que $L(a) < \frac{C}{K}$.

Observação 4.7 *Assuma que (η, A) é um par admissível. Seja $f : [0, a] \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ uma função contínua que satisfaz a condição de Lipschitz (4.8) com $L(\cdot) \in L^1[0, a]$ e $f(\cdot, 0, 0) \in L^1([0, a]; X)$. Da demonstração do Teorema 4.5 temos que o problema (3.1) admite uma, e apenas uma, solução branda em $C([0, a]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$.*

5 RESULTADOS DIVERSOS EM EXISTÊNCIA

É conhecido na Literatura que o estudo de propriedades de soluções quando a perturbação da equação não é necessariamente globalmente Lipschitz é, em geral, mais difícil, pois, nestes casos, é crucial lidarmos com Teoremas de pontos fixos mais gerais do que o Princípio da contração, mais especificamente, neste capítulo, estudaremos a existência de soluções brandas de (3.2)-(3.3) com condições não-locais e tal condição será analisada utilizando uma generalização do Teorema do ponto fixo de Darbo (ver Lema 2.44). Além disso, também estudaremos, sob certas condições, a existência de soluções clássicas e fortes para o problema (3.2)-(3.3).

Os tópicos desenvolvidos ao longo deste capítulo sobre a equação (3.1) são tratados no artigo (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017).

Consideremos o problema (3.2) satisfazendo a condição não local

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

onde $g : C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X) \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ é uma aplicação contínua e compacta. Para cada $R > 0$, denotamos por:

$$g_R := \sup \left\{ \left\| g \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} : \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq R \right\}.$$

Consideremos agora ξ como a medida de não compacidade de Kuratowski em $X^{\frac{1}{2}} \times X$, e o espaço $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$.

Vamos introduzir a seguinte condição geral:

Hipótese: (C). A função $f : \mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ satisfaz as seguintes condições de Carathéodory:

(C1) $f(t, \cdot, \cdot) : X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ é contínua para quase todo $t \in \mathbb{R}^+$.

(C2) Para cada $[u, v] \in X^{\frac{1}{2}} \times X$, a função $f(\cdot, u, v) : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ é fortemente mensurável.

Consideremos a condição:

(C3) Existe uma função contínua $m : [0, \tau] \rightarrow [0, \infty)$ e uma função contínua não decrescente $\Omega : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tal que $\|f(t, u, v)\|_X \leq m(t)\Omega(\|u\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_X)$, para quase todo $t \in [0, \tau]$ e todo $[u, v] \in X^{\frac{1}{2}} \times X$.

5.1 Existência de soluções

5.1.1 Existência de soluções brandas

Definição 5.1 Dizemos que uma função $[u(\cdot), v(\cdot)] : [0, \tau] \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ é uma solução branda para (3.2)-(5.1) se satisfazer a seguinte equação integral:

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = e^{-\mathcal{A}(1/2)t} g \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \int_0^t e^{-\mathcal{A}(1/2)(t-s)} F \left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right) ds, \quad t \in [0, \tau]. \quad (5.2)$$

Temos o seguinte resultado:

Teorema 5.2 (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017, Teorema 2.1) Suponhamos que as condições (C) e **(C3)** se verificam em $[0, \tau]$ com $m \in L^1([0, \tau]; \mathbb{R}^+)$ e que as seguintes afirmações são verdadeiras:

(C4) Existe uma função $H \in L^1([0, \tau]; \mathbb{R}^+)$ tal que para qualquer subconjunto de funções $S \subset C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$, temos

$$\xi \left(\left\{ [0, f(t, u(t), v(t))]; \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in S \right\} \right) \leq H(t)\xi(S(t)),$$

para quase todo $t \in [0, \tau]$, onde $S(t) := \left\{ \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in S \right\}$.

(C5) Existe uma constante $R > 0$ tal que $Kg_R + K\Omega(R) \int_0^\tau m(s)ds \leq R$, onde K é a constante dada em (3.5).

Então o problema (3.2)-(5.1) tem ao menos uma solução branda.

Demonstração: Consideremos o operador $\mathcal{M} : C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X) \rightarrow C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ definido por

$$\mathcal{M} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) = e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}t} g \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(t-s)} F \left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right) ds, \quad t \in [0, \tau].$$

Consideremos uma sequência $\{[u_n, v_n]\}_n$ em $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ tal que $[u_n, v_n] \rightarrow [u, v]$, quando $n \rightarrow \infty$. Como estamos assumindo que g é um mapa contínuo e que f satisfaz as condições de Carathéodory, podemos ver que a continuidade de $\mathcal{M}$ segue da estimativa:

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{M} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} (t) - \mathcal{M} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \left\| e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}t} \left(g \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} - g \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & + \left\| \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(t-s)} \left(F \left(s, \begin{bmatrix} u_n(s) \\ v_n(s) \end{bmatrix} \right) - F \left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right) \right) ds \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq K e^{-Ct} \left\| g \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} - g \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & + K \int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u_n(s), v_n(s)) - f(s, u(s), v(s))\|_X ds, \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{M} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} - \mathcal{M} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq K \left\| g \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} - g \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & + K \int_0^\tau \|f(s, u_n(s), v_n(s)) - f(s, u(s), v(s))\|_X ds. \end{aligned}$$

Além disso, para $[u, v] \in B_R(C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X))$, temos

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{M} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\ & \leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left(K e^{-Ct} \left\| g \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + K \int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X ds \right), \end{aligned}$$

e usando a definição de g_R e as condições **(C3)** e **(C5)**, obtemos que

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{M} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\ & \leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left(K e^{-Ct} g_R + K \int_0^t e^{-C(t-s)} m(s) \Omega(\|u(s)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v(s)\|_X) ds \right) \\ & \leq K g_R + K \Omega(R) \int_0^\tau m(s) ds \leq R. \end{aligned}$$

Isso nos mostra que $B_R(C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X))$ é invariante por $\mathcal{M}$ e que $\mathcal{M}(B_R(C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)))$ é um conjunto limitado. Além disso, podemos ver que $\mathcal{M}(B_R(C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)))$ é equicontínuo em $[0, \tau]$. De fato, usando o fato de que $e^{-\mathcal{A}(1/2)t}$ é um mapa contínuo em $(0, \infty)$ e a decomposição:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t+s) - \mathcal{M} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) = e^{-\mathcal{A}(1/2)(t+s)} g \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - e^{-\mathcal{A}(1/2)t} g \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ & + \int_t^{t+s} e^{-\mathcal{A}(1/2)(t+s-\xi)} F\left(\xi, \begin{bmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \end{bmatrix}\right) d\xi \\ & + \int_0^t \left(e^{-\mathcal{A}(1/2)(t+s-\xi)} - e^{-\mathcal{A}(1/2)(t-\xi)} \right) F\left(\xi, \begin{bmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \end{bmatrix}\right) d\xi. \end{aligned}$$

Isso nos mostra que $\mathcal{M}(B_R(C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X))$ é equicontínuo em $[0, \tau]$. Definamos agora o conjunto $\mathcal{B} := \overline{co(\mathcal{M}(B_R(C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)))}$, então segue diretamente do Lema 2.50 que $\mathcal{B}$ é limitado e equicontínuo. Notemos também que $\mathcal{M} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ é um operador contínuo e limitado. Com as propriedades de medida de não compacidade de um conjunto, seguindo a prova de (DE ANDRADE et al., 2016, Teorema 3.8), pelo Lema 2.45 e **(C4)** obtemos que

$$\xi(\mathcal{M}(\mathcal{B})(t)) \leq K \int_0^t \xi\left([0, f(s, \mathcal{B}(s))]\right) ds \leq K \int_0^t H(s) \xi(\mathcal{B}(s)) ds \leq K \xi(\mathcal{B}) \int_0^t H(s) ds.$$

Como $H \in L^1([0, \tau]; \mathbb{R}^+)$, para $\delta < K^{-1}$, existe $\phi \in C([0, \tau]; \mathbb{R}^+)$ tal que

$$\int_0^\tau |H(s) - \phi(s)| ds < \delta.$$

Tomando $a = K\delta$ e $b = \tau K \|\phi\|_{C([0, \tau]; \mathbb{R}^+)}$ e levando em conta que $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ é um conjunto

limitado e equicontínuo, segue que:

$$\begin{aligned}
 \xi(\mathcal{M}(\mathcal{B})(t)) &\leq K\xi(\mathcal{B}) \int_0^t H(s)ds \\
 &\leq K\xi(\mathcal{B}) \left(\int_0^t |H(s) - \phi(s)|ds + \int_0^t \phi(s)ds \right) \\
 &\leq K\xi(\mathcal{B}) \left(\delta + t\|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} \right) \\
 &\leq K\delta\xi(\mathcal{B}) + K\xi(\mathcal{B})\tau\|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} \\
 &= (a+b)\xi(\mathcal{B}).
 \end{aligned}$$

Tomando $\mathcal{M}^{(n)} = \mathcal{M}\left(\overline{co(\mathcal{M}^{(n-1)}(\mathcal{B}))}\right)$, $n = 2, 3, \dots$, podemos verificar que

$$\begin{aligned}
 \xi(\mathcal{M}^{(2)}(\mathcal{B})(t)) &= \xi(\mathcal{M}(\overline{co(\mathcal{M}(\mathcal{B}))})) \leq K \int_0^t H(s)\xi(\overline{co(\mathcal{M}(\mathcal{B})(s))})ds \\
 &= K \int_0^t H(s)\xi(\mathcal{M}(\mathcal{B})(s))ds \leq K \int_0^t H(s)(a+b)\xi(\mathcal{B}(s))ds \\
 &\leq K \int_0^t H(s)(K\delta + Ks\|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)})\xi(\mathcal{B})ds \\
 &\leq K \int_0^t |H(s) - \phi(s)|(K\delta + Ks\|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)})\xi(\mathcal{B})ds \\
 &\quad + K \int_0^t \phi(s)(K\delta + Ks\|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)})\xi(\mathcal{B})ds \\
 &\leq \xi(\mathcal{B})K\delta(a + Kt\|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)}) \\
 &\quad + K\xi(\mathcal{B}) \int_0^t \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} \left(a + Ks\|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} \right) ds \\
 &\leq \xi(\mathcal{B}) \left(K\delta(a + Kt\|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)}) \right. \\
 &\quad \left. + K\|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} \left(at + K\frac{t^2}{2}\|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} \right) \right) \\
 &= \xi(\mathcal{B}) \left(a(a + Kt\|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)}) \right. \\
 &\quad \left. + K\|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} \left(at + K\frac{t^2}{2}\|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \xi(\mathcal{M}^{(2)}(\mathcal{B})(t)) &\leq \left(a^2 + 2aK\tau\|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} + K^2\frac{\tau^2}{2}\|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} \right) \xi(\mathcal{B}) \\
 &= \left(a^2 + 2ab + \frac{b^2}{2} \right) \xi(\mathcal{B}).
 \end{aligned}$$

E, indutivamente, pode-se mostrar que

$$\xi(\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{B})) \leq \left(\sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} a^{n-j} \frac{b^j}{j!} \right) \xi(\mathcal{B}).$$

Como $0 < a < 1$ e $b > 0$, segue do Lema 2.46 que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ e $r \in (0, 1)$ tais que

$$\xi(\mathcal{M}^{(n_0)}(\mathcal{B})) \leq r\xi(\mathcal{B}).$$

Por uma generalização do Teorema do ponto fixo de Darbo (ver Lema 2.44), concluímos que $\mathcal{M}$ tem um ponto fixo em $\mathcal{B}$. ■

5.1.2 Existência de soluções clássicas

Definição 5.3 (*Solução Clássica*). Uma função $[x(\cdot), y(\cdot)] : [0, \tau] \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ é dita uma solução clássica de (3.2)-(3.3) em $[0, \tau]$ se $[x(\cdot), y(\cdot)]$ é contínua em $[0, \tau]$, continuamente diferenciável em $(0, \tau]$, $[x(t), y(t)] \in D(\mathcal{A}_{(1/2)})$, para $0 < t \leq \tau$ e as equações (3.2)-(3.3) são satisfeitas.

Modificando ligeiramente (CUEVAS et al., 2017, Lema 2.3), temos o seguinte resultado:

Lema 5.4 Assuma que $e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}t}[u_0, v_0]$ é diferenciável para $t > 0$ e seja $[z(\cdot), w(\cdot)]$ uma solução branda de (3.2)-(3.3). Seja $F : (0, \tau] \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ uma função contínua. Se uma das seguintes condições é satisfeita:

- (i) $[z(\cdot), w(\cdot)]$ é continuamente diferenciável em $(0, \tau]$.
- (ii) $[z(t), w(t)] \in D(\mathcal{A}_{(1/2)})$ para $0 < t \leq \tau$, e $\mathcal{A}_{(1/2)}[z(\cdot), w(\cdot)]$ é contínua em $(0, \tau]$.

Então $[z(\cdot), w(\cdot)]$ é uma solução clássica de (3.2)-(3.3).

O mesmo argumento usado na prova do Lema 5.4 (ver (CUEVAS et al., 2017, Lema 2.4)) nos permite estabelecer o seguinte resultado:

Lema 5.5 Assuma que $[u_0, v_0] \in D(\mathcal{A}_{(1/2)})$. Seja $G : [0, \tau] \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ uma função contínua e seja $[z(\cdot), w(\cdot)]$ uma solução branda de (3.2)-(3.3). Se $[z(\cdot), w(\cdot)]$ é

continuamente diferenciável em $(0, \tau]$, então $[z(\cdot), w(\cdot)]$ é continuamente diferenciável em $[0, \tau]$, e

$$[z(t), w(t)]_t = \mathcal{A}_{(1/2)}[z(t), w(t)] + G(t), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

onde a função G foi escrita no sentido de ser a função F como no problema reduzido em (3.2)-(3.3).

De posse disto, temos o seguinte Teorema:

Teorema 5.6 (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017, Teorema 2.2). *Assuma que $u_0 \in X$ e $v_0 \in X^{\frac{1}{2}}$. Suponha ainda que $f : [0, \tau] \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ é uma função contínua tal que $\text{Im}(f) \subseteq X^{\frac{1}{2}}$, a função $A^{\frac{1}{2}}f(\cdot, u, v)$ é mensurável para todo $[u, v] \in X^{\frac{1}{2}} \times X$ e $A^{\frac{1}{2}}f(\cdot, 0, 0)$ é integrável em $[0, \tau]$. Se existir uma constante $L \geq 0$ tal que a seguinte condição de Lipschitz é satisfeita:*

$$(C6) \quad \|A^{\frac{1}{2}}f(t, u_1, v_1) - A^{\frac{1}{2}}f(t, u_2, v_2)\|_X \leq L[\|u_1 - u_2\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_1 - v_2\|_X], \text{ para todo } [u_i, v_i] \in X^{\frac{1}{2}} \times X, \quad i = 1, 2. \text{ e cada } t \in [0, \tau].$$

Então o problema (3.2)-(3.3) tem uma única solução clássica.

Demonstração: Seja C_* o conjunto consistindo de todas as funções contínuas $[u, v] : [0, \tau] \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ tais que $u(0) = v_0$ e $v(0) = -Au_0 - 2\eta A^{\frac{1}{2}}v_0 + f(0, u_0, v_0)$. Notemos que C_* é um subconjunto fechado e convexo de $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. De fato, se $[v, w] \in \overline{C_*}$, então existe $[v_n, w_n] \in C_*$, tal que $[v_n(t), w_n(t)] \rightarrow [v(t), w(t)]$, quando $n \rightarrow \infty$ e isto é válido para todo $t \in [0, \tau]$. Logo, fazendo $t = 0$, obtemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} [v_n(0), w_n(0)] = [u(0), w(0)]$ e como $[v_n, w_n] \in C_*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o lado esquerdo da igualdade acima nos assegura que $[v_0, -Au_0 - 2\eta A^{\frac{1}{2}}v_0 + f(0, u_0, v_0)] = [u(0), v(0)]$ e, portanto, temos que $[u, v] \in C_*$ e isso mostra que C_* é fechado. Quanto a convexidade de C_* , sejam $[u, v], [z, w] \in C_*$ e $\lambda \in [0, 1]$, temos que $(1 - \lambda)[u, v] + \lambda[z, w]$ é uma função contínua de $[0, \tau]$ em $X^{\frac{1}{2}} \times X$, pois $[u, v]$ e $[z, w]$ são funções contínuas de $[0, \tau]$ em $X^{\frac{1}{2}} \times X$. Além disso, $(1 - \lambda)[u(0), v(0)] + \lambda[z(0), w(0)] = [v_0, -Au_0 - 2\eta A^{\frac{1}{2}}v_0 + f(0, u_0, v_0)]$, e portanto, podemos concluir que $(1 - \lambda)[u, v] + \lambda[z, w] \in C_*$ e assim, temos a convexidade de C_* . Definimos o mapa $\Upsilon_{(1/2)}$ em C_* pela expressão:

$$\Upsilon_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) := -\mathcal{A}_{(1/2)} e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} - \mathcal{A}_{(1/2)} \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(t-s)} \gamma_{u,v}(s) ds + \gamma_{u,v}(t) \quad (5.3)$$

onde

$$\gamma_{u,v}(t) := F\left(t, \begin{bmatrix} \int_0^t u(\tau) d\tau + u_0 \\ \int_0^t v(\tau) d\tau + v_0 \end{bmatrix}\right). \quad (5.4)$$

Fica claro, então, que o mapa $\Upsilon_{(1/2)}$ está bem definido de C_* em C_* . Vamos mostrar agora que $\Upsilon_{(1/2)}^n$ é uma $\frac{(\tau\Theta)^n}{n!}$ -contração para n suficientemente grande, onde Θ será uma constante obtida no processo. Sejam $[u_i, v_i] \in C_*$, $i = 1, 2$, temos

$$\begin{aligned} & \left\| \Upsilon_{(1/2)} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \Upsilon_{(1/2)} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq \left\| \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(t-s)} (-\mathcal{A}_{(1/2)}) (\gamma_{u_1, v_1}(s) - \gamma_{u_2, v_2}(s)) ds \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \quad + \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \|\mathcal{A}_{(1/2)}(\gamma_{u_1, v_1}(t) - \gamma_{u_2, v_2}(t))\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq \int_0^t K e^{-C(t-s)} \|(-\mathcal{A}_{(1/2)})(\gamma_{u_1, v_1}(s) - \gamma_{u_2, v_2}(s))\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\ & \quad + \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \|\mathcal{A}_{(1/2)}(\gamma_{u_1, v_1}(t) - \gamma_{u_2, v_2}(t))\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq K \int_0^t \left(L \left\| \begin{bmatrix} \left(\int_0^s u_1(\tau) + u_0 \right) - \left(\int_0^s u_2(\tau) + u_0 \right) \\ \left(\int_0^s v_1(\tau) + u_0 \right) - \left(\int_0^s v_2(\tau) + u_0 \right) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right. \\ & \quad \left. + 2\eta L \left\| \begin{bmatrix} \left(\int_0^s u_1(\tau) + u_0 \right) - \left(\int_0^s u_2(\tau) + u_0 \right) \\ \left(\int_0^s v_1(\tau) + u_0 \right) - \left(\int_0^s v_2(\tau) + u_0 \right) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right) ds \\ & \quad + \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(L \left\| \begin{bmatrix} \left(\int_0^t u_1(s) + u_0 \right) - \left(\int_0^t u_2(s) + u_0 \right) \\ \left(\int_0^t v_1(s) + u_0 \right) - \left(\int_0^t v_2(s) + u_0 \right) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right. \\ & \quad \left. + 2\eta L \left\| \begin{bmatrix} \left(\int_0^t u_1(s) + u_0 \right) - \left(\int_0^t u_2(s) + u_0 \right) \\ \left(\int_0^t v_1(s) + u_0 \right) - \left(\int_0^t v_2(s) + u_0 \right) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right) \\ & \leq KL(1 + 2\eta) \int_0^t \int_0^s \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau ds \\ & \quad + \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(1 + 2\eta) \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\ & \leq t\Theta \max_{0 \leq s \leq t} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}, \end{aligned}$$

onde $\Theta := L(1 + 2\eta)(K\tau + \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)})$. E, com um argumento indutivo, pode-se

mostrar que:

$$\left\| \Upsilon_{(\frac{1}{2})}^n \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \Upsilon_{(\frac{1}{2})}^n \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \frac{t^n \Theta^n}{n!} \max_{0 \leq s \leq t} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}.$$

Daí segue que $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}^n$ é uma $\frac{\tau^n \Theta^n}{n!}$ -contração para n suficientemente grande. Logo, concluímos que $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ admite um único ponto fixo $[u, v] \in C_*$. A seguir, definimos $[x(\cdot), y(\cdot)] : [0, \tau] \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ por $x(t) = \int_0^t u(s)ds + u_0$ e $y(t) = \int_0^t v(s)ds + v_0$ e

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(t-s)} F\left(s, \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix}\right) ds. \quad (5.5)$$

Notemos que $\begin{bmatrix} z(\cdot) \\ w(\cdot) \end{bmatrix}$ é uma solução branda para o problema de Cauchy abstrato:

$$\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}_t = -\mathcal{A}_{(1/2)} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + F\left(t, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right); \quad z(0) = u_0, \quad w(0) = v_0. \quad (5.6)$$

Fazendo uso dos Lemas 5.4 e 5.5 concluímos que $\begin{bmatrix} z(\cdot) \\ w(\cdot) \end{bmatrix}$ é uma solução clássica para (5.6) e assim obtemos

$$\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_t.$$

Portanto, $\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. E, com isto, concluímos a prova do Teorema 5.6. ■

Observação 5.7 Vale ressaltar que no Teorema 5.6 podemos trocar a condição $Im(f) \subseteq X^{\frac{1}{2}}$ por uma mais fraca. De modo mais específico, assumimos que $u_0 \in X$ e $v_0 \in X^{\frac{1}{2}}$ e que $f : [0, \tau] \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ é uma função contínua. Além disso, supomos que existe $0 < \alpha < 1$ tal que $Im(f) \subseteq X^{\frac{1-\alpha}{2}}$, a função $A^{\frac{1-\alpha}{2}} f(\cdot, 0, 0)$ é integrável em $[0, \tau]$. Se admitirmos que existe uma constante $L > 0$ tal que a seguinte condição de Lipschitz é satisfeita:

$$(C7) \quad \|A^{\frac{1-\alpha}{2}} f(t, u_1, v_1) - A^{\frac{1-\alpha}{2}} f(t, u_2, v_2)\|_X \leq L \left[\|u_1 - u_2\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_1 - v_2\|_X \right], \quad \forall [u_i, v_i] \in X^{\frac{1}{2}} \times X, \quad i = 1, 2 \text{ e cada } t \in [0, \tau],$$

então o problema (3.2)-(3.3) tem uma única solução clássica.

Demonstração: Faremos apenas um esboço da demonstração da Observação 5.7.

Definamos o mapa $\Upsilon_{(\alpha, \frac{1}{2})}$ por:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{(\alpha, \frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) &:= -\mathcal{A}_{(1/2)} e^{-\mathcal{A}_{(1/2)} t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \\ &+ \int_0^t (-\mathcal{A}_{(1/2)})^\alpha e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(t-s)} (-\mathcal{A}_{(1/2)})^{1-\alpha} \gamma_{u,v}(s) ds + \gamma_{u,v}(t). \end{aligned}$$

Notemos que existe uma constante positiva C_α tal que

$$\|(-\mathcal{A}_{(1/2)})^\alpha e^{-\mathcal{A}_{(1/2)} t}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \frac{C_\alpha}{t^\alpha}, \text{ para } 0 < t \leq \tau.$$

Podemos ver que o mapa $\Upsilon_{(\alpha, \frac{1}{2})} : C_* \rightarrow C_*$ está bem definido e, além disso, para $[u_i, v_i] \in C_*$, $i = 1, 2$, temos que

$$\begin{aligned} &\left\| \Upsilon_{(\alpha, \frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \Upsilon_{(\alpha, \frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ &\leq C_\alpha \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} \|(-\mathcal{A}_{(1/2)})^{1-\alpha} (\gamma_{u_1, v_1}(s) - \gamma_{u_2, v_2}(s))\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\ &+ \|(-\mathcal{A}_{(1/2)})^{1-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \|((-\mathcal{A}_{(1/2)})^{\alpha-1} (\gamma_{u_1, v_1}(s) - \gamma_{u_2, v_2}(s)))\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ &\leq C_\alpha L(1+2\eta) \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} \int_0^s \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau ds \\ &+ \|(-\mathcal{A}_{(1/2)})^{1-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(1+2\eta) \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\ &\leq t v_\alpha \max_{0 \leq s \leq t} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}, \end{aligned}$$

onde $v_\alpha = (1+2\eta) \left(C_\alpha L \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(3-\alpha)} \tau^{1-\alpha} + \|(-\mathcal{A}_{(1/2)})^{1-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \right)$. Portanto, podemos inferir que $\Upsilon_{(\alpha, \frac{1}{2})}^n$ é uma $\frac{(\tau v_\alpha)^n}{n!}$ -contração para n suficientemente grande e com isso vemos que o operador $\Upsilon_{(\alpha, \frac{1}{2})}$ possui um único ponto fixo $[u, v] \in C_*$. ■

O próximo resultado que iremos enunciar corresponde a um tipo de resultado para equações diferenciais neutrais devido a Henríquez et al. (ver Teorema 2.12 em

Ref. (CUEVAS et al., 2017)). Antes de enunciá-lo, vamos introduzir um novo conjunto de notações:

$$\xi_{u,v}(t) := A^{\frac{1}{2}}f\left(t, \int_0^t u(\tau)d\tau + u_0, \int_0^t v(\tau)d\tau + v_0\right); \quad (5.7)$$

$$\tilde{\gamma}_{u,v}(t) := \mathcal{A}_{(1/2)} \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(t-s)} \gamma_{u,v}(s)ds, \quad t \in [0, \tau]; \quad (5.8)$$

$$H_\rho := \left\{ \gamma_{u,v} : [u, v] \in C_*, \|[u, v]\|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \rho \right\} \quad (5.9)$$

$$\tilde{H}_\rho := \left\{ \tilde{\gamma}_{u,v} : [u, v] \in C_*, \|[u, v]\|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \rho \right\} \quad (5.10)$$

Teorema 5.8 (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017, Teorema 3.1). *Assuma que $u_0 \in X$, $v_0 \in X^{\frac{1}{2}}$, A tem operador resolvente compacto, a função $f : [0, \tau] \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ é contínua, $Im(f) \subseteq X^{\frac{1}{2}}$ e que $A^{\frac{1}{2}}f$ satisfaz as condições de Carathéodory (C) em $[0, \tau]$. Além disso, suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

(A1) *Existe uma função contínua não decrescente $W : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\|A^{\frac{1}{2}}f(t, x, y)\|_X \leq W(\|x\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|y\|_X), \text{ para todo } t \in [0, \tau] \text{ e todo } [x, y] \in X^{\frac{1}{2}} \times X.$$

(A2) *Para cada $\rho > 0$, existe uma função contínua $V_\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $V_\rho(0) = 0$ tal que*

$$\|\xi_{u,v}(t_2) - \xi_{u,v}(t_1)\|_X \leq V_\rho(t_2 - t_1), \text{ para todo } [u, v] \in C_* \text{ com } \|[u, v]\|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \rho.$$

(A3) *Existe uma constante $\tilde{\rho} > 0$ tal que $\|[u_0, v_0]\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \tilde{\rho}$ e*

$$K \|\mathcal{A}_{(1/2)}[u_0, v_0]\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + (1 + 2\eta)(K\tau + \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)})W((\tau + 1)\tilde{\rho}) \leq \tilde{\rho}.$$

Então o problema (3.2)-(3.3) tem uma solução clássica.

Demonstração: Seja $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ o mapa definido por (5.3). Usando o Teorema da convergência dominada, o fato de que $A^{\frac{1}{2}}f$ satisfaz as condições de Carathéodory e a condição **(A1)**, deduzimos que $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ é contínuo. Consideramos agora $\rho > 0$. De **(A2)**, temos que

$$\begin{aligned} \|\gamma_{u,v}(t+s) - \gamma_{u,v}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} &= \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \|\mathcal{A}_{(1/2)}(\gamma_{u,v}(t+s) - \gamma_{u,v}(t))\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ &\leq \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1 + 2\eta) \|\xi_{u,v}(t+s) - \xi_{u,v}(t)\|_X \\ &\leq \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1 + 2\eta) V_\rho((t+s) - t) \\ &= \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1 + 2\eta) V_\rho(s) \rightarrow 0, \text{ quando } s \rightarrow 0, \end{aligned}$$

o que nos mostra que H_ρ é equicontínuo. Além disso, também temos que H_ρ é um conjunto limitado de $X^{\frac{1}{2}} \times X$. De fato, dado $\gamma_{u,v} \in H_\rho$, então

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\gamma_{u,v}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left(\|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1 + 2\eta) \left\| A^{\frac{1}{2}} f\left(t, \int_0^t u(s)ds + u_0, \int_0^t v(s)ds + v_0\right) \right\|_X \right) \\ & \leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left(\|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1 + 2\eta) W\left(\int_0^t \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds + \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}\right) \right) \\ & \leq \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1 + 2\eta) W(\rho\tau + \tilde{\rho}). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{A}_{(1/2)} H_\rho(t)$ é um subconjunto limitado de $X^{\frac{1}{2}} \times X$ e $\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}$ é um operador compacto, então

$$H_\rho(t) = \mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}(\mathcal{A}_{(1/2)} H_\rho(t))$$

é relativamente compacto em $X^{\frac{1}{2}} \times X$ e do Teorema de Ascoli-Arzelá inferimos que H_ρ é relativamente compacto em $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Usando o fato de que $e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}t}$ é um operador compacto para $t > 0$, temos que o conjunto $\tilde{H}_\rho$ é também relativamente compacto em $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Portanto, podemos deduzir que $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ é um mapa completamente contínuo (ver Definição 2.12). Além disso, se $[u, v] \in B_{\tilde{\rho}}(C_*)$, de **(A3)**, vemos que

$$\begin{aligned} \left\| \Upsilon_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} & \leq K \left\| \mathcal{A}_{(1/2)} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\ & + (1 + 2\eta) (\|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} + W(\tilde{\rho}\tau + \tilde{\rho})) \\ & \leq \tilde{\rho}, \end{aligned}$$

Disso segue que $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}(B_{\tilde{\rho}}(C_*)) \subset B_{\tilde{\rho}}(C_*)$, isto é, $B_{\tilde{\rho}}(C_*)$ é invariante por $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$. E aplicando o Teorema do ponto fixo de Schauder-Tychonoff (Teorema 2.48), concluímos a demonstração. ■

5.1.3 Existência de soluções fortes

Definição 5.9 (Solução forte) Uma função contínua $[x(\cdot), y(\cdot)] : [0, \tau] \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ é dita *solução forte* de (3.2)-(3.3) se $[x(\cdot), y(\cdot)] \in W^{1,p}([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$, (3.2) é satisfeita para quase todo $t \in [0, \tau]$ e $x(0) = u_0$, $y(0) = v_0$.

Modificando ligeiramente (CUEVAS et al., 2017, Lema 2.3), temos o seguinte resultado:

Lema 5.10 *Assuma que $e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}t}[u_0, v_0]$ é diferenciável para $t > 0$, e seja $[z(\cdot), w(\cdot)]$ solução branda de (3.2)-(3.3).*

(i) *Se $\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}t}[u_0, v_0] \in L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$, $[z(t), w(t)] \in D(\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})})$ para quase todo $t \in [0, \tau]$ e $\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}[z(\cdot), w(\cdot)] \in L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$.*

Então $[z(\cdot), w(\cdot)]$ é uma solução forte de (3.2)-(3.3).

Denotemos por C_*^p o espaço métrico formado por todas funções p -integráveis $[u, v]$ de $[0, \tau]$ em $X^{\frac{1}{2}} \times X$ tais que $u(0) = v_0$ e $v(0) = -Au_0 - 2\eta A^{\frac{1}{2}}v_0 + f(0, u_0, v_0)$ munido com a métrica

$$d_p\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \left(\int_0^\tau \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) \\ v_1(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2(s) \\ v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\begin{aligned} \delta_f(u_1, v_1, u_2, v_2)(s) &= A^{\frac{1}{2}}f\left(s, \int_0^s u_1(\tau)d\tau + u_0, \int_0^s v_1(\tau)d\tau + v_0\right) \\ &\quad - A^{\frac{1}{2}}f\left(s, \int_0^s u_2(\tau)d\tau + u_0, \int_0^s v_2(\tau)d\tau + v_0\right). \end{aligned}$$

De posse disto, podemos estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 5.11 (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017, Teorema 2.3). *Assuma que $u_0 \in X$ e $v_0 \in X^{\frac{1}{2}}$, a função $f : [0, \tau] \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ é tal que $Im(f) \subseteq X^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{1}{2}}f$ satisfaz a condição de Carathéodory (C) em $[0, \tau]$ e $A^{\frac{1}{2}}f(\cdot, 0, 0)$ é p -integrável em $[0, \tau]$. Além disso suponhamos que a seguinte condição se verifica:*

(C8) *Existe uma função positiva $m \in L^p[0, \tau]$ tal que para todo $t \in [0, \tau]$ e todo $[u_i, v_i] \in C_*^p$, $i = 1, 2$, temos*

$$\int_0^t \|\delta_f(u_1, v_1, u_2, v_2)(s)\|_X^p ds \leq m(t)^p \int_0^t \left(\|u_1(s) - u_2(s)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_1(s) - v_2(s)\|_X \right)^p ds.$$

Se $(1 + 2\eta)(K\|m\|_{L^p[0, \tau]} + m(\tau)\|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)}) < 1$, então o problema (3.2)-(3.3) tem uma única solução forte em $[0, \tau]$.

Demonstração: Consideramos o operador $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ em C_*^p definido por (5.3). Vamos mostrar que tal operador está bem definido em C_*^p . De fato, temos que

$$\left\| \mathcal{A}_{(1/2)} e^{-\mathcal{A}_{(1/2)} t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq K e^{-Ct} (\|v_0\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|Au_0 + 2\eta A^{\frac{1}{2}} v_0\|_X).$$

Daí,

$$\left(\int_0^\tau \left\| \mathcal{A}_{(1/2)} e^{-\mathcal{A}_{(1/2)} t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Também temos que,

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\tau \left\| \mathcal{A}_{(1/2)} \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(t-s)} \gamma_{u,v}(s) ds \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq K(1+2\eta) \left(\int_0^\tau \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|\xi_{u,v}(s)\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq K(1+2\eta) \left(\int_0^\tau \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} (\|\xi_{u,v}(s) - A^{\frac{1}{2}} f(s, 0, 0)\|_X \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \|A^{\frac{1}{2}} f(s, 0, 0)\|_X) ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq K(1+2\eta) \left(\int_0^\tau \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|\delta_f(u, v, 0, 0)(s)\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad + K(1+2\eta) \left(\int_0^\tau \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|A^{\frac{1}{2}} f(s, 0, 0)\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = K(1+2\eta) \left(\int_0^\tau \left(\int_0^t e^{\frac{-C(t-s)}{p}} e^{\frac{-C(t-s)}{q}} \|\delta_f(u, v, 0, 0)(s)\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad + K(1+2\eta) \left(\int_0^\tau \left(\int_0^t e^{\frac{-C(t-s)}{p}} e^{\frac{-C(t-s)}{q}} \|A^{\frac{1}{2}} f(s, 0, 0)\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq K(1+2\eta) \left[\int_0^\tau \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|\delta_f(u, v, 0, 0)\|_X^p ds \right) dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ & \quad + K(1+2\eta) \left[\int_0^\tau \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|A^{\frac{1}{2}} f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right) dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ & \leq K(1+2\eta) \left(\frac{1}{C} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\tau \int_0^t e^{-C(t-s)} \|\delta_f(u, v, 0, 0)\|_X^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad + K(1+2\eta) \left(\frac{1}{C} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\tau \int_0^t e^{-C(t-s)} \|A^{\frac{1}{2}} f(s, 0, 0)\|_X^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K(1+2\eta)\left(\frac{1}{C}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^\tau \int_s^\tau m(t)^p \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ K(1+2\eta)\left(\frac{1}{C}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^\tau \int_s^\tau \|A^{\frac{1}{2}}f(s, 0, 0)\|_X^p dt ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K(1+2\eta)\left(\frac{1}{C}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\|m\|_{L^p[0,\tau]} \| [u, v] \|_{L^p([0,\tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \tau^{\frac{1}{p}} \|A^{\frac{1}{2}}f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p([0,\tau]; X)}\right).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\tau \|\gamma_{u,v}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1+2\eta) \left(\int_0^\tau \|\xi_{u,v}(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1+2\eta) \left[\left(\int_0^\tau \|\xi_{u,v}(t) - A^{\frac{1}{2}}f(t, 0, 0)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^\tau \|A^{\frac{1}{2}}f(t, 0, 0)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&\leq \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1+2\eta) \left[\left(m(\tau)^p \int_0^\tau \left\| \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \left. + \|A^{\frac{1}{2}}f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p([0,\tau]; X)} \right] \\
&= \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1+2\eta) \left[m(\tau) \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p([0,\tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|A^{\frac{1}{2}}f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p([0,\tau]; X)} \right].
\end{aligned}$$

Estas estimativas acima nos mostram que o mapa $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ está bem definido em C_*^p .

Nossa próxima etapa consiste em mostrar que o mapa $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ é uma contração em C_*^p .

Com efeito, tomando agora $[u_i, v_i] \in C_*^p$, $i = 1, 2$; obtemos que

$$\begin{aligned}
&\left\| \Upsilon_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \Upsilon_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p([0,\tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\
&\leq \left(\int_0^\tau \left\| \mathcal{A}_{(1/2)} \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(t-s)} (\gamma_{u_1, v_1}(s) - \gamma_{u_2, v_2}(s)) ds \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\int_0^\tau \|\gamma_{u_1, v_1}(t) - \gamma_{u_2, v_2}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K \left(\int_0^\tau \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|\mathcal{A}_{(1/2)} (\gamma_{u_1, v_1}(s) - \gamma_{u_2, v_2}(s))\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\int_0^\tau \|\gamma_{u_1, v_1}(t) - \gamma_{u_2, v_2}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K(1+2\eta) \left(\int_0^\tau \int_0^t \|\delta_f(u_1, v_1, u_2, v_2)(s)\|_X^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ (1+2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(\int_0^\tau \|\delta_f(u_1, v_1, u_2, v_2)(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K(1+2\eta) \left(\int_0^\tau m(t)^p \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}(\tau) - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}(\tau) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ (1+2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(m(t)^p \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}(s) - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}(s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (1+2\eta) \left(K\|m\|_{L^p[0,\tau]} + m(\tau) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \right) \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p([0,\tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)}.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ é uma contração em C_*^p . Sejam $[x(\cdot), y(\cdot)]$ e $[z(\cdot), w(\cdot)]$ funções dadas em (5.5). Como $\mathcal{A}_{(1/2)}[z(\cdot), w(\cdot)]$ é uma função p -integrável, usando o Lema 5.10, chegamos a conclusão que $[x(t), y(t)] = [z(t), w(t)]$ é uma solução forte do problema (3.2)-(3.3). ■

O próximo resultado que iremos apresentar também corresponde a um tipo de resultado para equações diferenciais neutrais devido a Henríquez et al. (ver Teorema 3.6 em Ref. (CUEVAS et al., 2017)).

Teorema 5.12 (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017, Teorema 2.4) *Assuma que $u_0 \in X$ e $v_0 \in X^{\frac{1}{2}}$, A tem operador resolvente compacto, a função $f : [0, \tau] \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ é tal que $Im(f) \subseteq X^{\frac{1}{2}}$ e que a aplicação $A^{\frac{1}{2}}f$ satisfaz as condições de Carathéodory (C) em $[0, \tau]$. Além disso, as seguintes condições são satisfeitas:*

(C9) *Existe uma constante $N \geq 0$ e uma função positiva $W \in L^p([0, \tau])$ tal que $\|A^{\frac{1}{2}}f(t, u, v)\|_X \leq W(t) + N[\|u\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_X]$, para todo $[u, v] \in X^{\frac{1}{2}} \times X$ e cada $t \in [0, \tau]$.*

(C10) *Para cada $\rho, \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\int_{t_1}^{t_2} \|A^{\frac{1}{2}}f(t+h, u, v) - A^{\frac{1}{2}}f(t, u, v)\|_X^p dt \leq (t_2 - t_1)\epsilon^p, \quad (5.11)$$

para todo $t_1, t_2 \in [0, \tau]$, $t_1 \leq t_2$, $[u, v] \in X^{\frac{1}{2}} \times X$ com $\|[u, v]\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \rho$ e $|h| < \delta$. (Em (5.11) consideramos $f(s, u, v) = 0$ quando $s \notin [0, \tau]$).

(C11) Para cada número positivo ρ existe uma função contínua $V_\rho : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ com $V_\rho(0) = 0$ tal que

$$\begin{aligned} V_\rho(|h|)^p &\geq \int_0^\tau \left\| A^{\frac{1}{2}} f\left(s, \int_0^{s+h} u(\tau) d\tau + u_0, \int_0^{s+h} v(\tau) d\tau + v_0\right) \right. \\ &\quad \left. - A^{\frac{1}{2}} f\left(s, \int_0^s u(\tau) d\tau + u_0, \int_0^s v(\tau) d\tau + v_0\right) \right\|_X^p ds, \end{aligned}$$

para todo $[u, v] \in C_*^p$ com $\|[u, v]\|_{L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \rho$. (Consideramos $u(s) = v(s) = 0$, se $s \notin [0, \tau]$).

(C12) Existe uma constante $\tilde{\rho} > 0$ tal que $\|[u_0, v_0]\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \tilde{\rho}$ e

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &\geq \frac{K}{(Cp)^{\frac{1}{p}}} \left((1 + 2\eta) \|A^{\frac{1}{2}} v_0\|_X + \|Au_0\|_X \right) \\ &\quad + (1 + 2\eta) \left(\frac{4k(p-1)}{Cp} \tau^{\frac{1}{p}} + \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \right) \left(\|W\|_{L^p[0, \tau]} + N(\tau + \tau^{\frac{1}{p}}) \tilde{\rho} \right). \end{aligned}$$

Então o problema (3.2)-(3.3) admite uma solução forte em $[0, \tau]$.

Demonstração: A princípio, iremos introduzir as seguintes notações:

$$\begin{aligned} H_\rho &:= \{ \gamma_{u,v} : [u, v] \in C_*^p, \|[u, v]\|_{L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \rho \}, \\ \tilde{H}_\rho &:= \{ \tilde{\gamma}_{u,v} : [u, v] \in C_*^p, \|[u, v]\|_{L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \rho \}, \end{aligned}$$

onde $\rho > 0$, $\gamma_{u,v}$ e $\tilde{\gamma}_{u,v}$ são as funções dadas em (5.4) e (5.8), respectivamente. Consideramos o mapa $\Upsilon_{(\frac{1}{2})} : C_*^p \rightarrow C_*^p$ definido por (5.3). E das demonstrações anteriores fica claro que $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ está bem definido em C_*^p . Dado $\rho > 0$, afirmo que H_ρ é um conjunto relativamente compacto em $L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Para provar tal afirmação, iremos utilizar o Teorema de Riesz-Weyl-Kolmogorov (Teorema 2.49). Considere $[u, v] \in C_*^p$ com $\|[u, v]\|_{L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \rho$. Usando **(C9)**, obtemos

$$\begin{aligned} &\|\gamma_{u,v}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ &\leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \|A^{\frac{1}{2}} f(t, \int_0^t u(s) ds + u_0, \int_0^t v(s) ds + v_0)\|_X \\ &\leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\ &\quad \times \left(W(t) + N \left(\int_0^t \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds + \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\
&\times \left(W(t) + N \left(\left(\int_0^t ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{q}} + \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right) \right) \\
&\leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\
&\times \left(W(t) + N \left(\left(\int_0^\tau ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\tau \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{q}} + \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right) \right) \\
&\leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\
&\times \left(W(t) + N \left(\tau^{\frac{1}{q}} \| [u, v] \|_{L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \| [u_0, v_0] \|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right) \right) \\
&\leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(W(t) + N \left(\tau^{\frac{1}{q}} \rho + \| [u_0, v_0] \|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right) \right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\gamma_{u,v}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(W(t) + N \left(\tau^{\frac{1}{q}} \rho + \| [u_0, v_0] \|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right) \right) \quad (5.12)$$

De (5.12), segue que

$$\sup_{L^p} H_\rho \leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(\|W\|_{L^p[0, \tau]} + N \left(\tau \rho + \tau^{\frac{1}{p}} \| [u_0, v_0] \|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right) \right). \quad (5.13)$$

E tal estimativa nos mostra que H_ρ é um conjunto limitado em $L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$.

Seja $\epsilon > 0$ dado em **(C10)**, usando a condição **(C11)**, o Lema 2.51 e tomando $|h|$ suficientemente pequeno, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\tau \|\gamma_{u,v}(t+h) - \gamma_{u,v}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(\int_0^\tau \|\xi_{u,v}(t+h) - \xi_{u,v}(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\
&\times \left(\int_0^\tau \left\| \xi_{u,v}(t+h) - A^{\frac{1}{2}} f(t, \int_0^{t+h} u(\tau) d\tau + u_0, \int_0^{t+h} v(\tau) d\tau + v_0) \right\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\
&\times \left(\int_0^\tau \left\| A^{\frac{1}{2}} f(t, \int_0^{t+h} u(\tau) d\tau + u_0, \int_0^{t+h} v(\tau) d\tau + v_0) - \xi_{u,v}(t) \right\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(\int_0^\tau \left\| A^{\frac{1}{2}} f(t+h, \int_0^{t+h} u(\tau) d\tau + u_0, \int_0^{t+h} v(\tau) d\tau + v_0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - A^{\frac{1}{2}} f(t, \int_0^{t+h} u(\tau) d\tau + u_0, \int_0^{t+h} v(\tau) d\tau + v_0) \right\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(\int_0^\tau \left\| A^{\frac{1}{2}} f(t, \int_0^{t+h} u(\tau) d\tau + u_0, \int_0^{t+h} v(\tau) d\tau + v_0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - A^{\frac{1}{2}} f(t, \int_0^t u(\tau) d\tau + u_0, \int_0^t v(\tau) d\tau + v_0) \right\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\left(\int_0^\tau \|\gamma_{u,v}(t+h) - \gamma_{u,v}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (\tau^{\frac{1}{p}} \epsilon + V_\rho(|h|)) \quad (5.14)$$

Seja $\lambda \in \rho(\mathcal{A}_{(1/2)})$. Como $R(\lambda, \mathcal{A}_{(1/2)})$ é um operador compacto e

$$\begin{aligned}
\int_0^t \gamma_{u,v}(s) ds &= R(\lambda, \mathcal{A}_{(1/2)}) (\lambda I - \mathcal{A}_{(1/2)}) \int_0^t \gamma_{u,v}(s) ds \\
&= \lambda R(\lambda, \mathcal{A}_{(1/2)}) \int_0^t \gamma_{u,v}(s) ds - R(\lambda, \mathcal{A}_{(1/2)}) \int_0^t \mathcal{A}_{(1/2)} \gamma_{u,v}(s) ds,
\end{aligned}$$

temos que $\{ \int_0^t \gamma_{u,v}(s) ds; \gamma_{u,v} \in H_\rho \}$ é relativamente compacto em $X^{\frac{1}{2}} \times X$, $\forall t \in [0, \tau]$. Dessa propriedade, juntamente com (5.12), (5.13) e (5.14), podemos verificar que as H_ρ satisfaz todas as condições do Teorema de Riesz-Weyl-Kolmogorov, o que implica que H_ρ é um conjunto relativamente compacto em $L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Agora, levando em conta a condição **(C11)** e o fato de que $e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}t}$ é um operador compacto para $t > 0$, vemos que $\tilde{H}_\rho$ é um conjunto relativamente compacto em $L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Com isso, motramos que o mapa $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ é completamente contínuo. Seja $[u, v] \in C_*^p$ com $\|[u, v]\|_{L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \tilde{\rho}$ e q o expoente conjugado de p , temos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{A}_{(1/2)} e^{-\mathcal{A}_{(1/2)} \bullet} [u_0, v_0]\|_{L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} = \left(\int_0^\tau \|\mathcal{A}_{(1/2)} e^{-\mathcal{A}_{(1/2)} t} [u_0, v_0]\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K \left(\int_0^\tau e^{-Cpt} \|\mathcal{A}_{(1/2)} [u_0, v_0]\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{K}{\sqrt[p]{Cp}} ((1 + 2\eta) \|A^{\frac{1}{2}} v_0\|_X + \|Au_0\|_X).
\end{aligned}$$

Também temos que

$$\|\gamma_{u,v}\|_{L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} := \left(\int_0^\tau \|\gamma_{u,v}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(\int_0^\tau \|\mathcal{A}_{(1/2)} \gamma_{u,v}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (\|W\|_{L^p[0,\tau]} + N(\tau + \tau^{\frac{1}{p}} \tilde{\rho})).
\end{aligned}$$

E, por fim, temos que:

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathcal{A}_{(1/2)} \int_0^\bullet e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}(\bullet-s)} \gamma_{u,v}(s) ds \right\|_{L^p([0,\tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\
&\leq K(1 + 2\eta) \left(\int_0^\tau \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|\xi_{u,v}(s)\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K(1 + 2\eta)}{Cq} \left(\tau \|W\|_{L^p[0,\tau]}^p + (2N\tilde{\rho})^p \int_0^\tau \left(\frac{t^p}{p} + t \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K(1 + 2\eta)}{Cq} \left(\tau^{\frac{1}{p}} \|W\|_{L^p[0,\tau]} + 2N \left(\frac{1}{(p(p+1))^{\frac{1}{p}}} \tau^{1+\frac{1}{p}} + \frac{1}{\sqrt[p]{2}} \tau^{\frac{2}{p}} \right) \tilde{\rho} \right).
\end{aligned}$$

Das estimativas precedentes e da condição **(C12)**, concluímos que $B_{\tilde{\rho}}(C_*^p)$ é invariante sob $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$. Dessa forma, aplicando o Teorema do ponto fixo de Schauder-Tychonoff, chegamos a conclusão da existência de um ponto fixo $[u, v] \in B_{\tilde{\rho}}(C_*^p)$ para o operador $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$, e concluímos a prova do Teorema 5.12. ■

6 APLICAÇÕES

Neste capítulo iremos considerar algumas aplicações dos resultados estabelecidos dos capítulos anteriores. Em todas as aplicações, consideraremos Ω como sendo um domínio (aberto e conexo) suave limitado em $\mathbb{R}^N$.

Exemplo 6.1 *Suponhamos que $z_1, z_2 \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $a, b \in C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, $\nu, \mu \in \mathbb{R}$, e $\delta > 0$. Consideramos a seguinte equação diferencial parcial:*

$$u_{tt} + \nu b(t)u_t + \Delta^2 u - \delta \Delta u_t = \mu a(t)(z_1(\nabla \cdot u) + z_2(\Delta u)), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (6.1)$$

$$u = \Delta u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \quad (6.2)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (6.3)$$

onde $z_i, i = 1, 2$ satisfaz a seguinte condição de crescimento:

$$|z_i(s_1) - z_i(s_2)| \leq C_{z_i}|s_1 - s_2|, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \quad (6.4)$$

com $C_{z_i}, i = 1, 2$, constantes positivas. Iremos mostrar que o problema (6.1)-(6.3) possui uma única solução L^p -branda. Para modelar este problema na forma abstrata dada por (3.1), façamos $\eta = \frac{\delta}{2}$, $p > \frac{N}{2}$ e o operador A definido em $L^p(\Omega)$ por $Au = \Delta_D^2 u$ (onde Δ_D é o Laplaciano de Dirichlet em Ω) no domínio

$$D(\Delta_D^2) = \{\phi \in H_p^4(\Omega) : \phi = \Delta \phi = 0 \text{ em } \partial\Omega\}, \quad (6.5)$$

onde $H_p^4 = W^{4,p}(\Omega)$. Com essa especificação para o problema (6.1)-(6.3), obtemos uma formulação abstrata (3.1).

$$u_{tt} + 2\eta A^{\frac{1}{2}} u_t + Au = \mu a(t)(z_1(\nabla \cdot u) + z_2(\Delta u)) - \nu b(t)u_t = f(t, u, u_t). \quad (6.6)$$

Como $A^{\frac{1}{2}} = -\Delta_D$, podemos escolher um ângulo ψ para o setor

$$\sum_{\frac{\psi}{2}} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{\psi}{2} \leq |\arg \lambda| \leq \pi, \text{ onde } \psi \in (0, \frac{\pi}{2}) \right\}, \quad (6.7)$$

tão pequeno quanto necessário e além disso, (η, A) é um par admissível para qualquer $\eta > 0$ (ver (CARVALHO; CHOLEWA; DLTOKO, 2008, Exemplo 4.3)). De (CARVALHO; CHOLEWA; DLOTKO, 2008, Seção 3) obtemos que $[L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}} = \{ \phi \in H_p^2(\Omega) : \phi = \Delta \phi = 0 \text{ em } \partial\Omega \}$. Definimos $f : \mathbb{R}^+ \times [L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}} \times L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ por:

$$f(t, \varphi_1, \varphi_2) = \mu a(t) (z_1^e(\nabla \cdot \varphi_1) + z_2^e(\Delta \varphi_1)) - \nu b(t) \varphi_2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \varphi_1 \in [L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}}, \varphi_2 \in L^p(\Omega), \quad (6.8)$$

onde θ^e é o operador Nemytskii associado a θ . Para $\phi, \phi_0 \in [L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}}$ e $\psi, \psi_0 \in L^p(\Omega)$, temos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} & \|f(t, \varphi, \psi)\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq |\mu| |a(t)| (\|z_1^e(\nabla \cdot \varphi)\|_{L^p(\Omega)} + \|z_2^e(\Delta \varphi)\|_{L^p(\Omega)}) + |\nu| |b(t)| \|\psi\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq |\mu| |a(t)| \left((C_{z_1} + C_{z_2}) \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)} + (|z_1(0)| + |z_2(0)|) |\Omega|^{\frac{1}{p}} \right) \\ & \quad + |\nu| |b(t)| \|\psi\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Notemos que (6.9) implica que f está bem definida. A continuidade da f pode ser obtida através da seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} & \|f(t, \varphi, \psi) - f(t_0, \varphi_0, \psi_0)\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq |\mu| |a(t) - a(t_0)| \left((C_{z_1} + C_{z_2}) \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)} + (|z_1(0)| + |z_2(0)|) |\Omega|^{\frac{1}{p}} \right) \\ & \quad + |\mu| |a(t_0)| (C_{z_1} + C_{z_2}) \|\varphi - \varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)} + |\nu| |b(t) - b(t_0)| \|\psi\|_{L^p(\Omega)} \\ & \quad + |\nu| |b(t)| \|\psi - \psi_0\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Além disso, para $\varphi_i \in [L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}}$, $\psi_i \in L^p(\Omega)$, $i = 1, 2$, temos que:

$$\begin{aligned} & \|f(t, \varphi_1, \psi_1) - f(t, \varphi_2, \psi_2)\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq |\mu| \|a\|_{C_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})} (C_{z_1} + C_{z_2}) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H_p^2(\Omega)} \\ & \quad + |\nu| \|b\|_{C_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})} \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Se assumimos que $a(\cdot) \in L^p(\mathbb{R}^+) \cup C_b(\mathbb{R}^+)$ e que $|\mu|$ e $|\nu|$ são constantes suficientemente pequenas. Então pelo Teorema 4.2, concluímos que (6.1)-(6.3) possui uma única solução L^p -branda.

Exemplo 6.2 Suponha que $a, b \in L^1(\mathbb{R}^+) \cup C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, $\nu \in \mathbb{R}$ e $\delta, L > 0$. Consideramos o problema:

$$u_{tt} + \nu b(t)u_t + \Delta^2 u - \delta \Delta u_t = a(t)g(u, \nabla \cdot u), \quad x \in \Omega, t \geq 0, \quad (6.12)$$

com condições iniciais (6.2)-(6.3). De maneira similar, modelamos esse problema como no exemplo anterior. Assim, tomamos $\eta = \frac{\delta}{2}$, consideramos o operador A definido como em (6.5)-(6.7), $u_0 \in D(-\Delta_D)$, $v_0 \in L^p(\Omega)$, e assumimos que $|g(u, w) - g(\tilde{u}, \tilde{v})| \leq L[|u - \tilde{u}| + |w - \tilde{w}|]$, $u, \tilde{u}, w, \tilde{w} \in \mathbb{R}^N$. Seja $f(t, \varphi, \psi)$ a perturbação associada a equação (6.12). Para $\varphi, \varphi_0 \in [L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}}$ e $\psi, \psi_0 \in L^p(\Omega)$, temos as seguintes estimativas:

$$\|f(t, \varphi, \psi)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|a\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})} (L\|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)} + |g(0, 0)| |\Omega|^{\frac{1}{p}}) + |\nu| \|b\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})} \|\psi\|_{L^p(\Omega)}. \quad (6.13)$$

Onde (6.13) nos diz que f está bem definida e a continuidade da f pode ser obtida através da seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} & \|f(t, \varphi, \psi) - f(t_0, \varphi_0, \psi_0)\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq |a(t) - a(t_0)| (L\|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)} + |g(0, 0)| |\Omega|^{\frac{1}{p}}) \\ & \quad + L|a(t_0)| \|\varphi - \varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)} + |\nu| |b(t) - b(t_0)| \|\psi\|_{L^p(\Omega)} \\ & \quad + |\nu| |b(t_0)| \|\psi - \psi_0\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Além disso, temos a seguinte estimativa

$$\|f(t, \varphi, \psi) - f(t, \varphi_0, \psi_0)\|_{L^p(\Omega)} \leq (L|a(t)| + |\nu| |b(t)|) (\|\varphi - \varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)} + \|\psi - \psi_0\|_{L^p(\Omega)}).$$

Se assumimos que p e q são expoentes conjugados, $a(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^q(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+)$, $b \in L^q(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+)$ e L e $|\nu|$ são suficientemente pequenos, então as hipóteses do Teorema 4.3 seguem. Assim concluímos que existe uma única solução branda em L^p para a equação (6.12), com condições iniciais (6.2)-(6.3).

Exemplo 6.3 Consideremos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & u_{tt}(t, \xi) + 2\eta(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u_t(t, \xi) - \Delta u(t, \xi) \\ &= \int_{\Omega} P(\xi, x) f_0(\nabla \cdot u(t, x), u_t(t, x)) dx + f_1(t, \xi) \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$u(t, \xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Omega, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (6.15)$$

$$u(0, \xi) = u_0(\xi), \quad u_t(0, \xi) = v_0(\xi), \quad \xi \in \Omega. \quad (6.16)$$

onde $\eta > 0$, $P : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_1 : [0, \tau] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções que satisfazem hipóteses convenientes, as quais serão especificadas mais a frente. Descrevemos aqui soluções fortes para (6.14)-(6.16). Para modelar este problema na forma abstrata, tomamos $A = -\Delta_D$ em $L^p(\Omega)$, $p > N$, com domínio $D(A) = W^{2,p} \cap W^{1,p}(\Omega)$, $u_0 \in D(A)$ e $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $P : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $P(x, \xi) = 0$, $\forall x \in \partial\Omega$ e $\xi \in \Omega$. Também consideramos que f satisfaz a seguinte condição de Lipschitz:

$$|f_0(x_1, y_1) - f_0(x_2, y_2)| \leq L(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|),$$

onde $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, para alguma constante $L \geq 0$ e que $f_1 : [0, \tau] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável tal que $\int_0^\tau \int_{\Omega} |f_1(t, \xi)|^p d\xi dt < \infty$, $\int_0^\tau \int_{\Omega} |\partial_{\xi_i} f_1(t, \xi)|^p d\xi dt < \infty$, $i = 1, \dots, N$, e $f_1(t, \xi) = 0$ para todo $\xi \in \Omega$ e $t \in [0, \tau]$. De (CARVALHO; CHOLEWA, 2007), obtemos $[L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}} = W_0^{1,p}(\Omega)$, $\mathcal{A}_{(1/2)}$ é invertível, $\mathcal{A}_{(1/2)}$ tem operador resolvente compacto e $-\mathcal{A}_{(1/2)}$ gera em $W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ um C_0 -semigrupo analítico, o qual é compacto e decai assintoticamente. A seguir definimos uma função $f : [0, \tau] \times W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ por

$$f(t, \varphi_1, \varphi_2)(\xi) = \int_{\Omega} P(x, \xi) f_0(\nabla \cdot \varphi_1(x), \varphi_2(x)) dx + f_1(t, \xi),$$

$t \in [0, \tau]$, $\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\varphi_2 \in L^p(\Omega)$. Pode-se mostrar que $\text{Im}(f) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso,

$$\begin{aligned} & \|f(t, \varphi_1, \varphi_2)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ & \leq L \sup_{(x, \xi) \in \Omega \times \Omega} \left[|P(\xi, x)| + \sum_{i=1}^N |\partial_{\xi_i} P(\xi, x)| \right] \cdot |\Omega| \left(\|\varphi_1\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|\varphi_2\|_{L^p(\Omega)} \right) \\ & + \tilde{K} + \|f_1(t, \cdot)\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

para alguma constante $\tilde{K} \geq 0$ dependendo de P , Ω e f_0 . Com isso, vemos que a estimativa **(C9)** é verificada. Por outro lado, como $f(t+h, \varphi_1, \varphi_2) - f(t, \varphi_1, \varphi_2) = f_1(t+h, \cdot) - f_1(t, \cdot)$ segue que a condição **(C10)** está satisfeita. Fixando agora $\rho \geq 0$ e tomando $[u, v] \in C_*^p$ com $\|[u, v]\|_{L^p([0, \tau]; W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega))} \leq \rho$, obtemos

$$\begin{aligned} & \left\| f\left(t, \int_0^{t+h} u(\tau) d\tau + u_0, \int_0^{t+h} v(\tau) d\tau + v_0\right) - f\left(t, \int_0^t u(\tau) d\tau + u_0, \int_0^t v(\tau) d\tau + v_0\right) \right\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ & \leq \rho L \sup_{(x, \xi) \in \Omega \times \Omega} \left(\|P(x, \xi)\| + \sum_{i=1}^N |\partial_{\xi_i} P(\xi, x)| \right) |\Omega|^{1-\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

o qual nos mostra que a condição **(C11)** segue. Finalmente se escolhermos L (respectivamente, $\tilde{\rho}$) suficientemente pequeno (respectivamente, grande), obtemos **(C12)**. Sendo as hipóteses do Teorema 5.12 satisfeitas, concluímos a existência de uma solução forte para o problema (6.14)-(6.16).

REFERÊNCIAS

- [1] ADAMS, R. A. Sobolev spaces. 1975. [S.l.]: Academic Press, New York, 1975.
- [2] AMANN, H. Linear and Quasilinear Parabolic Problems: Volume I: Abstract Linear Theory. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1995. v. 1.
- [3] ANDRADE, F. et al. Lp-boundedness and topological structure of solutions for flexible structural systems. Mathematical Methods in the Applied Sciences, Wiley Online Library, v. 38, n. 18, p. 5139-5159, 2015.
- [4] ARJUNAN, M. M.; NADAF, N. Existence and controllability results for damped second order impulsive functional differential systems with state-dependent delay. Opuscula Mathematica, AGH University of Science and Technology Press, v. 34, n. 3, p. 503-522, 2014.
- [5] AVALOS, G.; LASIECKA, I. Optimal blow-up rates for the minimal energy null control of the strongly damped abstract wave equation. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, Scuola normale superiore, v. 2, n. 3, p. 601-616, 2003.
- [6] AZEVEDO J.; CUEVAS C.; SOTO H. Qualitative theory for strongly damped wave equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences. v. 40, n. 18, p. 6944-6975.

- [7] BAHUGUNA, D. Strongly damped semilinear equations. *International Journal of Stochastic Analysis*, Hindawi Publishing Corporation, v. 8, n. 4, p. 397-404, 1995.
- [8] BANAS J.; GOEBEL K., *Measure of noncompactness in Banach Spaces*. [S.l]: New York, M. Dekker, 1980.
- [9] BORINI, S.; PATA, V. Uniform attractors for a strongly damped wave equation with linear memory. *Asymptotic Analysis*, IOS press, v. 20, n. 3-4, p. 263-277, 1999.
- [10] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.
- [11] CARVALHO, A.; CHOLEWA, J.; DLOTKO, T. Strongly damped wave problems: bootstrapping and regularity of solutions. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 244, n. 9, p. 2310-2333, 2008.
- [12] CARVALHO, A.; CHOLEWA, J.; Attractors for strongly damped wave equations with critical nonlinearities. *Pacific Journal of Mathematics*, Mathematical Sciences Publishers, v. 207, n. 2, p. 287-310, 2002.
- [13] CARVALHO, A.; CHOLEWA, J.; Local well posedness for strongly damped wave equations with critical nonlinearities. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Cambridge University Press, v. 66, n. 3, p. 443-463, 2002.
- [14] CARVALHO, A.; CHOLEWA, J. Strongly damped wave equations in $W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Supplement*, p. 230-239, 2007.
- [15] CHEN, S.; TRIGGIANI, R. Proof of two conjectures by G. Chen and D.L. Russell on structural damping for elastic systems: The case $\alpha = \frac{1}{2}$. *Lectures Notes in Math*, Springer-Verlag, v. 1354, p. 234-256, 1988.
- [16] CHEN, S.; TRIGGIANI, R. Characterization of domains of fractional powers of certain operators arising in elastic systems, and applications. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 88, n. 2, p. 279-293, 1990.

- [17] CHEN, S.; TRIGGIANI, R. Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems: : The case $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. Pacific Journal of Mathematics, Mathematical Sciences Publishers, v. 136, n. 1, p. 15-55, 1989.
- [18] CUEVAS, C. et al. Existence of solutions for a class of abstract neutral differential equations. Discrete and Continuous Dynamical Systems, AMER INST MATHEMATICAL SCIENCES-AIMS PO BOX 2604, SPRINGFIELD, MO 65801-2604 USA, v. 37, n. 5, p. 2455-2482, 2017.
- [19] CUEVAS, C.; HENRÍQUEZ, H. R.; SOTO, H. Asymptotically periodic solutions of fractional differential equations. Applied Mathematics and Computation, Elsevier, v. 236, p. 524-545, 2014.
- [20] CUEVAS, C.; LIZAMA, C.; SOTO, H. Asymptotic periodicity for strongly damped wave equations. Abstract and Applied Analysis, v. 2013, 2013.
- [21] DE ANDRADE, B. et al. Asymptotic Periodicity for flexible structural systems and applications. Acta Applicandae Mathematicae, Springer, v. 143, n. 1, p. 105-164, 2016.
- [22] DEIMLING, K. Nonlinear functional analysis. [S.l.]: Courier Corporation, 2010.
- [23] ENGEL, K.J.; NAGEL, R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999. v. 194.
- [24] GAZZOLA, F.; SQUASSINA, M. Global solutions and finite time blow up for damped semilinear wave equations. In: ELSEVIER. Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis. [S.l.], 2006. v. 23, n. 2, p. 185-207.
- [25] GEORGIEV, V.; TODOROVA, G. Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms. Journal of differential equations, Elsevier, v. 109, n. 2, p. 295-308, 1994.
- [26] GRANAS, A.; DUGUNDJI, J. Fixed point theory. [S.l.]: Springer-Verlag, 2003.

- [27] HENRY, D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. [S.l.]: Springer, 2006. v. 840.
- [28] IKEHATA, R. Decay estimates of solutions for the wave equations with strong damping terms in unbounded domains. Mathematical methods in the Applied Sciences, Wiley Online Library, v. 24, n. 9, p. 659-670, 2001.
- [29] KURATOWSKI, K. Sur les espaces complets, Fund. Math. [S.l.]: Fund. Math. 15, p. 301-309, 1930.
- [30] LI, H.; ZHOU, S.; YIN, F. Global periodic attractor for strongly damped wave equations with time-periodic driving force. Journal of Mathematical Physics, AIP, v. 45, n. 9, p. 3462-3467, 2004.
- [31] MASSATT, P. Limiting behavior for strongly damped nonlinear wave equations. Journal of Differential Equations, Elsevier, v. 48, n. 3, p. 334-349, 1983.
- [32] MESSAOUDI, S. A. Blow up in a nonlinearly damped wave equation. Mathematische Nachrichten, Berlin, Akademie-Verlag., v. 231, n. 1, p. 1-7, 2001.
- [33] PATA, V.; SQUASSINA, M. On the strongly damped wave equation. Communications in Mathematical Physics, Springer, v. 253, n. 3, p. 511-533, 2005.
- [34] PAZY, A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 44.
- [35] WEBB, G. Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation. Canad. J. Math, v. 32, n. 3, p. 631-643, 1980.
- [36] YANG, M.; SUN, C. Dynamics of strongly damped wave equations in locally uniform spaces: Attractors and asymptotic regularity. Transactions of the American Mathematical Society, v. 361, n. 2, p. 1069-1101, 2009.