UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA - EDUMATEC

WELLINGTON JOSÉ DE ARRUDA MELO

CONVERSÕES ENTRE REPRESENTAÇÕES DE NÚMEROS RACIONAIS:

limites e possibilidades no uso de material manipulável

Recife
2019

WELLINGTON JOSÉ DE ARRUDA MELO

CONVERSÕES ENTRE REPRESENTAÇÕES DE NÚMEROS RACIONAIS:

limites e possibilidades no uso de material manipulável

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles

Recife

2019

Catalogação na fonte
Bibliotecária Amanda Ganimo, CRB-4/1806

M528c Melo, Wellington José de Arruda.
Conversões entre representações de números racionais: limites e possibilidades no uso de material manipulável / Wellington José de Arruda Melo. – Recife, 2019.
135 f. : il.

Orientadora: Rosinalda Aurora de Melo Teles.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2019.
Inclui Referências e Apêndices

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Números racionais. 3. Semiótica. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Teles, Rosinalda Aurora de Melo (Orientadora). II. Título.

372.7 (23. ed.) UFPE (CE2019-054)

WELLINGTON JOSÉ DE ARRUDA MELO

CONVERSÕES ENTRE REPRESENTAÇÕES DE NÚMEROS RACIONAIS:

limites e possibilidades no uso de material manipulável

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 27/03/2019

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida (Examinador Interno)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

____

Profa. Dra. Cristiane Fernandes de Souza (Examinadora Externa)
Universidade Federal da Paraíba

Dedico este trabalho às minhas princesas Letícia e Lara que, durante todo este longo processo, foram compreensivas e souberam dividir a atenção do papai com essa nova filha chamada dissertação. À minha querida esposa Adriana pelo suporte e dedicação sem os quais esse trabalho não seria possível. Amo vocês!

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, cuja graça é a causa de tudo que sou, de tudo que tenho e de tudo que realizo. Obrigado Senhor!

Sou grato à minha esposa Adriana Melo e minhas filhas Letícia Melo e Lara Melo pela paciência e por todo apoio e amor recebido nestes dois anos em que estive dedicado a esse trabalho.

Agradeço aos meus pais Josefa Suzana, uma mulher incomparável, e José Gilberto (in memorian), meu amigo inesquecível, pelo amor e dedicação que fizeram de mim o que sou. Amo vocês!

Agradeço a todos os meus familiares e, de modo particular, à minha tia Maria Gomes que, lá atrás, incentivou-me a prosseguir nos estudos e ingressar na universidade.

Meu obrigado muito especial à querida professora Rosinalda Teles, orientadora deste trabalho, pelas riquíssimas contribuições sem as quais não seria possível concluir esta pesquisa. Também pela forma gentil, atenciosa e tranqüila com que conduziu todo o processo de orientação, proporcionando-me a segurança e confiança necessária para redigir.

Agradeço aos professores Jadilson Almeida e Cristiane Sousa pelas contribuições generosas e que foram de suma importância para nortear o trabalho a partir da qualificação.

Aos demais professores do EDUMATEC/UFPE por compartilharem comigo experiências e conhecimentos cuja riqueza, certamente, melhoraram-me como profissional e como ser humano. Agradeço, também, aos meus colegas de turma e aos amigos que ganhei nestes dois anos.

Não posso deixar de agradecer aos meus amigos professores, dirigentes e demais funcionários das escolas Antônio Farias Filho e Prof. Potiguar Matos, em especial, à professora Patrícia Irene cujo incentivo e apoio foram fundamentais para o meu ingresso no Mestrado.

Enfim, sou grato a todos que de alguma forma participaram e contribuíram para essa conquista. Muito obrigado de coração!

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo analisar limites e possibilidades no uso de material manipulável em conversões entre representações de números racionais realizadas por alunos do 8º e 9º ano do ensino fundamental. O estudo tem como fundamentação a Teoria dos Registros de Representação Semiótica - TRRS que discute fenômenos relacionados à atividade cognitiva da conversão entre registros, entendida como fundamental para a apreensão conceitual do objeto matemático. Abordou-se, também, as especificidades que caracterizam o ensino e aprendizagem dos números racionais como algo desafiador, assim como a importância que os materiais manipuláveis podem assumir nesse processo. O experimento piloto foi realizado no contexto do jogo Corrida dos Racionais que propõe atividades de conversão entre representações dos racionais e a manipulação do material dourado adaptado, disco de frações, régua numérica e pastilhas plásticas nestas resoluções. A partir dos resultados do piloto, a pesquisa concentrou sua atenção no material dourado adaptado, discutindo a influência de sua utilização nos exercícios de conversão à luz da TRRS. Foram aplicados instrumentos avaliativos, de forma coletiva, sem a utilização do material manipulável e, individualmente, com o uso do concreto. Observou-se um aumento do índice de acertos dos alunos com o uso do manipulável na resolução das conversões. Percebeu-se uma diminuição das dificuldades relacionadas aos fenômenos de variação de congruência e não-congruência e heterogeneidade dos sentidos nas conversões. Notou-se a prevalência da regra de codificação associada ao material dourado adaptado nos caminhos resolutivos bem sucedidos. Discutiu-se a eficiência, do ponto de vista da TRRS, da utilização da regra de correspondência e do manipulável no que concerne a apreensão conceitual do objeto e à interiorização de representações mentais, respectivamente. O estudo indicou a importância da utilização do material manipulável, principalmente, na introdução de exercícios envolvendo as conversões entre representações semióticas do número racional, sobretudo, por oferecer aos alunos a oportunidade de explorar também as representações figurativas concretas em tais atividades.

Palavras-chave: Representações semióticas. Conversões. Números Racionais. Materiais manipuláveis. Material dourado adaptado.

ABSTRACT

This research had as objective to analyze limits and possibilities in the use of manipulatives in conversions between representations of rational numbers realized by students of the 8th and 9th. The study is based on the Theory of Registers of Semiotic Representations - TRSR that discusses phenomena related to the cognitive activity of the conversion between registers, understood as fundamental for the conceptual apprehension of the mathematical object. It also addressed the specificities that characterize the teaching and learning of rational numbers as challenging, as well as the importance that manipulative materials can play in this process. The pilot experiment was carried out in the context of the Rational Racing game, which proposes activities of conversion between representations of rational numbers and the manipulation of the adapted golden bead material, fraction discs, numerical ruler and plastic tablets in these resolutions. From the results of the pilot experiment, the research focused its attention on the adapted golden bead material, discussing the influence of its use in the conversion exercises in light of TRSR. Evaluative instruments were applied collectively, without the use of manipulatives and, individually, with its use. It was observed an increase of the students' success rate with the use of the manipulatives in the resolution of the conversions. It was noticed a decrease in the difficulties related to the phenomena of variability of congruence/non-congruence and the non-reversibility. The prevalence of the coding rule associated with the adapted golden bead material in the successful resolution paths was noted. It was discussed the efficiency, from the point of view of TRSR, of the use of the coding rule and the manipulative in what concerns the conceptual apprehension of the object and the interiorization of mental representations, respectively. The study indicated the importance of the use of the manipulatives in the introduction of exercises involving the conversions between semiotic representations of rational numbers, mainly, to offer to the students the opportunity to explore the concrete figurative representations in such activities.

Keywords: Semiotic representations. Conversions. Rational Numbers. Manipulatives. Adapted golden bead material.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino e aprendizagem dos números racionais é sempre uma tarefa desafiadora para docentes e discentes do ensino fundamental. As especificidades e várias distinções dos racionais em relação aos números naturais criam dificuldades para a compreensão dos alunos e requerem dos professores a mobilização de estratégias que facilitem uma apreensão significativa desse objeto matemático.

Nesse sentido, a motivação para o desenvolvimento dessa pesquisa partiu, inicialmente, de nossa experiência como professor dos anos iniciais numa escola da rede municipal de Recife, quando percebemos a dificuldade de compreensão apresentada pelos alunos no estudo das frações e suas correspondentes representações decimais e percentuais. Também de outra percepção, fruto das participações em encontros de formação continuada para professores, de que o trabalho com estes números exige uma atenção muito especial por parte dos docentes do ensino fundamental.

Com relação a tais dificuldades, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998), em suas orientações didáticas, apontam algumas especificidades dos racionais não conhecidas pelos alunos nos anos iniciais da escolaridade, quando seu universo de representação numérica restringe-se ao conjunto dos números naturais, e que tornam esse objeto de difícil compreensão para alguns. Citaremos algumas:

> - Se o “tamanho” da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza (8345 > 83), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece o mesmo critério;
> - A comparação entre racionais: acostumados com a relação 3 > 2, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, 1/3 < 1/2 ;
> - Cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, 1/3, 2/6, 3/9, 4/12,... são diferentes representações de um mesmo número (p.101).

Com relação a esta série de peculiaridades próprias dos números racionais, Fernandes, Bellemain, Lima e Teles (2008, p.4) defendem que se trata de “uma característica que merece atenção por parte dos educadores matemáticos e precisa ser considerada no contexto do ensino aprendizagem como geradora de rupturas e continuidades, e também como fonte de dificuldades conceituais”.

Por sua vez, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica - TRRS, desenvolvida pelo pesquisador Raymond Duval, defende a importância de se levar em consideração as várias representações de um mesmo objeto ao tratarmos sobre os processos de ensino e aprendizagem em matemática. Desse modo, a utilização dos seus variados tipos de registros e a coordenação entre eles aparece, portanto, como algo fundamental para uma eficaz apreensão do objeto matemático estudado (DUVAL, 2003).

Esta coordenação entre diferentes representações de um mesmo objeto matemático ocorre por **tratamento**, quando temos uma transformação acontecendo num mesmo tipo de registro, ou por **conversão**, quando na transformação ocorre a transição de um tipo de registro para outro (DUVAL, 2003).

Para Duval (2003), muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos estão relacionadas, principalmente, à sua capacidade de articular diferentes registros de representação e, embora esta atividade de conversão sempre exija um maior esforço cognitivo por parte do aluno, é, exatamente, neste exercício de promover transições entre um registro semiótico e outro que o aluno adquire novos conhecimentos e consegue reconhecer aspectos conceituais e propriedades do objeto matemático estudado e que se tornam mais evidentes em um ou outro registro.

Segundo o autor, sistemas de numeração, expressões algébricas, figuras geométricas, gráficos, tabelas e a própria linguagem natural, entre outros, podem ser considerados exemplos de registros de representação semiótica, pois favorecem a comunicação, a objetivação, o tratamento e são passíveis de transformação em outros registros, permitindo, assim, uma diversificação das representações de um mesmo objeto (DUVAL, 2003). Nesse sentido, podemos, por exemplo, trocar o registro do número racional 0,25 para 1/4, ou para 25% e, desse modo, estaremos apenas mudando a forma de representação sem alterar o conteúdo representado.

Temos, portanto, no campo do ensino e da aprendizagem em matemática um desafio relativo à abordagem dos números racionais, sobretudo no que tange à conversão entre os seus registros de representação, cuja suplantação passa pela identificação dos entraves que envolvem a compreensão deste objeto matemático e a elaboração de situações didáticas que auxiliem os alunos na superação de suas dificuldades.

Nesse sentido, os estudos em Educação Matemática frequentemente recomendam a utilização de materiais manipuláveis durante as aulas, pois, conforme Gitirana e Carvalho (2010, p.38) tais recursos “foram concebidos para serem manipulados pelos alunos. Só assim eles propiciam o início da construção dos conceitos e procedimentos básicos da matemática”.

Estes materiais didáticos manipuláveis concretos, como define Lorenzato (2006, p.21), têm sua contribuição destacada como “um excelente catalizador para o aluno construir o seu saber matemático”. Por sua vez, Turrioni (2004, p.78) afirma que os materiais manipuláveis podem ser muito significativos “para auxiliar ao aluno na construção de seus conhecimentos”.

Nossa pesquisa objetivou, portanto, analisar limites e possibilidades no uso do material manipulável concreto em conversões entre representações do número racional.

O interesse pelos manipuláveis e pela investigação das possíveis implicações da utilização desses materiais no ensino dos números racionais e suas diferentes representações nasceu de observações feitas a partir da utilização do jogo Corrida dos Racionais[1] que desenvolvemos no ano de 2016 com a finalidade de usar como recurso didático no ensino desse objeto matemático, numa perspectiva lúdica.

O jogo em questão, cuja utilização foi vivenciada também em vários encontros para alunos e professores, tem sua descrição no apêndice desse trabalho e possui inspiração na TRRS, privilegiando, no elenco de ações propostas durante uma partida, diversas situações de conversão entre diferentes registros do número racional a partir da utilização de materiais manipuláveis.

Esperamos que o estudo empreendido possa ter sua contribuição no campo do ensino da matemática, sobretudo se pudermos usar suas conclusões para o enriquecimento da prática docente no que tange à utilização de recursos dessa natureza durante as aulas.

Para tanto, buscamos responder questões referentes às implicações de elementos da TRRS observadas na utilização do material manipulável pelos alunos, tais como os fenômenos de variação de congruência e não congruência e a

---

[1] O jogo Corrida dos Racionais, cuja descrição encontra-se no apêndice deste texto, é um material autoral concebido para ser vivenciado durante as aulas de matemática nas turmas do Programa de Correção de Fluxo – Acelera Brasil de uma escola integrante da Rede Municipal de Ensino do Recife onde leciona o autor da pesquisa. O Programa de Correção de Fluxo – Acelera Brasil pertence ao Instituto Ayrton Senna e desde 2011 faz parte da grade curricular das escolas da rede municipal de ensino do Recife e tem por objetivo preparar estudantes com distorção entre a idade e a série para ingresso no terceiro ciclo do ensino fundamental.

heterogeneidade dos sentidos nas conversões entre representações semióticas. Investigamos como, a partir do uso do material manipulável, os estudantes desenvolviam as estratégias de resolução e quais os caminhos resolutivos prevalentes. Também analisamos o potencial da experiência com o material manipulável no que concerne à produção de internalizações e apreensões conceituais relacionadas ao objeto em estudo.

Quanto à organização do texto, iniciamos com a fundamentação teórica abordando as especificidades e dificuldades relacionadas ao ensino e aprendizagem dos números racionais, apresentando os conceitos básicos da TRRS e discutindo a utilização dos materiais didáticos manipuláveis concretos no ensino de matemática. Em seguida, apresentamos os objetivos e descrevemos todo o percurso metodológico da pesquisa: desde a definição dos manipuláveis e instrumento avaliativo utilizados no experimento piloto até a delimitação da pesquisa em torno de um único manipulável. Finalmente, trouxemos, nos capítulos finais, os resultados, sua análise à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e nossas considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Em nossa fundamentação teórica discorremos inicialmente sobre os desafios existentes no ensino dos números racionais e as especificidades relacionadas a este objeto matemático, tais como a variedade de significados e representações que podem assumir. Nos tópicos seguintes, trouxemos elementos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e abordamos a importância dos materiais manipuláveis no ensino da matemática.

2.1 O ensino dos Números Racionais

Os números racionais estão bem presentes com seus usos e significados em nosso dia-a-dia. Na vida somos submetidos a informações que envolvem expressões numéricas fracionárias, percentuais, decimais, e estar familiarizado com estas representações é fundamental para que possamos interagir socialmente de forma adequada.

Esta forte presença da ideia de número racional em situações do nosso cotidiano é evidente e podemos facilmente associar este conceito a inúmeras vivências, bem familiares para os estudantes, como, por exemplo, a leitura da receita de um bolo que indica a adição de 1/2 de xícara de chocolate em pó, a notícia do aumento de 5% no preço da gasolina ou ainda o anúncio de um produto que custa apenas R$ 1,99.

A partir da aproximação com a literatura podemos observar que, conforme Mandarino (2010, p.107), já desde os primeiros anos do ensino fundamental, “os números racionais, em suas representações fracionárias ou decimais, já são objeto de estudo e causam muita preocupação aos professores e alunos”. Tais entraves relacionados à aprendizagem dos números racionais resultam da dificuldade de alunos e professores frente aos variados significados e diversidade de formas de representação associados a estes números.

Há, no mínimo, três aspectos relacionados à aprendizagem dos números racionais que podemos citar como importantes na decisão de empreendermos estudos sobre este objeto matemático:

- Os vários significados que estes números podem assumir.
- As suas variadas representações simbólicas.

- As dificuldades observadas envolvendo o ensino e a aprendizagem deste objeto matemático.

2.1.1 Os significados dos Números Racionais

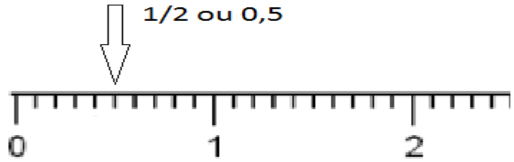
Na literatura podemos encontrar nos trabalhos de autores como Kieren (1998), Behr, Lesh, Post e Silver (1983) e Ohlsson (1989) uma variedade de significados atribuídos ao número racional. Entre estes os sentidos de **número**, **medida**, **quociente**, **operador multiplicativo**, **taxa**, **razão**, **coordenadas lineares**, **parte-todo** e interpretação **parâmetro/parâmetro**. Já os PCN (BRASIL, 1998), trazem em suas orientações didáticas para o 3º e 4º ciclo quatro significados relativos aos racionais em sua representação fracionária: **parte-todo**, **divisão**, **operador** e **razão**.

Nesta pesquisa, observamos como os alunos manipulavam os materiais concretos ao realizarem conversões entre representações do número racional e, considerando os exercícios e os manipuláveis que pretendíamos utilizar em nosso experimento piloto, entendíamos que os significados explorados seriam de **número**, **parte-todo**, **quociente** e **operador** dos números racionais. Segue-se, portanto, uma breve explicação para cada um destes quatro sentidos:

Número – refere-se à compreensão do número racional, em sua representação fracionária ou decimal, como integrante de uma sequência numérica. Ao pedir, por exemplo, que o aluno localize o número 1/2 ou 0,5 na reta numérica estamos trabalhando o sentido de número deste racional, como podemos observar na atividade exemplificada a seguir:

Figura 1: Atividade envolvendo racional com sentido de número

Indique o número racional 1/2 ou 0,5 na reta numérica

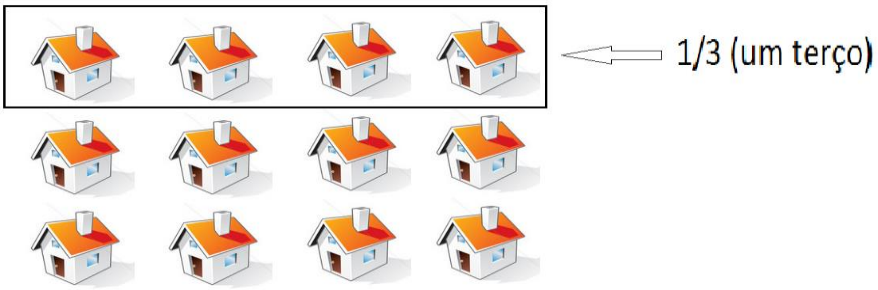


Fonte: Elaborado pelo autor

Parte-todo – neste sentido o número racional representa a fração do todo que foi dividido num dado número de partes equivalentes. Na representação fracionária, estabelece-se a relação direta do denominador e numerador com, respectivamente, a quantidade de partes iguais em que o todo foi dividido e o número de partes consideradas, como mostra o exemplo de atividade a seguir:

Figura 2: Atividade envolvendo racional com sentido de parte-todo

Num condomínio com 12 residências, 4 estão alugadas. Que fração representa a quantidade de residências alugadas no condomínio?



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quociente – refere-se à representação fracionária **a/b** como uma divisão em que **b** é diferente de zero, tal como podemos ver no exercício a seguir, elaborado para este texto:

Gilberto comprou duas pizzas e vai dividi-las igualmente para cinco pessoas. Que parte de uma pizza cada pessoa receberá?

$$2/5 = 2 \div 5 = 0{,}4 \text{ (quatro décimos)}$$

Operador – refere-se à ideia do racional como uma função que atua sobre um determinado número modificando-o, como no exemplo de exercício a seguir, elaborado para este texto:

Suzana recebeu 90 reais, mas teve que gastar 1/6 desse valor pagando algumas dívidas. Quanto Suzana gastou com suas dívidas?

$$1/6 \cdot 90 = 15 \text{ (quinze reais)}$$

2.1.2 As representações dos Números Racionais

Assim como diferentes significados, os números racionais também admitem variadas representações que podem envolver expressões da linguagem natural falada ou escrita, formas figurativas e registros numéricos.

As diferentes representações são de fundamental importância no ensino dos objetos matemáticos, pois, a partir de Duval (2003), compreendemos que a abordagem de um dado objeto matemático deve contemplar vários de seus possíveis registros, já que cada registro trará sempre uma ideia, apenas, parcial em relação ao objeto representado. Para o autor, o indivíduo cuja aprendizagem se dá a partir da diversificação dos registros de representação do objeto em estudo experimenta um forte desenvolvimento de suas capacidades cognitivas globais (DUVAL, 2003).

Quanto aos registros simbólico-numéricos, os números racionais podem ser representados em formas percentuais, decimais e fracionárias.

Algumas representações percentuais do número racional já passam a compor o universo de nossa vivência cotidiana desde muito cedo. Portanto, não é raro que muitos alunos já cheguem à escola com noções bem claras no que concerne à utilização de alguns termos tais como “cem por cento”, “cinqüenta por cento”, “zero por cento” que são usualmente empregados em nossos diálogos para designar o total, a metade e o nada, respectivamente.

Moss (2002), por exemplo, demonstrou em seu estudo que os alunos não apresentaram maiores dificuldades para relacionar 100 por cento à ideia de “tudo”, 99 por cento à ideia de “quase tudo”, 50 por cento à ideia de “exatamente metade” e 1 por cento à ideia de “quase nada”. No entanto, embora esteja tão presente no dia a dia, o conceito de porcentagem ainda demonstra ser de difícil compreensão para a maioria dos alunos.

Da mesma maneira, as representações decimais do número racional estão fortemente presentes em nossas vidas, sobretudo, nas situações relacionadas aos valores monetários. Basta uma boa olhada no supermercado para percebermos o quanto a compreensão dos chamados “números com vírgula” é importante para todos nós.

Ainda assim, a familiarização desde a infância com a representação decimal dos preços não parece ter sido capaz de resolver todos os problemas relativos à aprendizagem dos alunos.

Contudo, é inegável que o trabalho com o dinheiro pode contribuir significativamente para este ensino. Não por acaso, podemos observar no ensino de matemática, desde os primeiros anos da escolaridade, a presença de cédulas e moedas utilizadas atualmente no país, tanto nos exercícios propostos como também no material de apoio dos livros didáticos.

O dinheiro como uma referência concreta pode ajudar o aluno a estabelecer relações entre centavos e centésimos, levando-o a concluir, por exemplo, que, assim como 0,25 (vinte e cinco centavos) representam a quarta parte de 1 real, 0,25 (vinte e cinco centésimos) representam a quarta parte de 1 inteiro, ou seja, 0,25 = 1/4.

A forma como os alunos leem os números decimais também pode contribuir para a apreensão do seu sentido. Na maioria das vezes, um número como 0,25 é lido como zero vírgula vinte e cinco ao invés de vinte e cinco centésimos. Segundo Nunes e Bryant (1997), a forma linguística que pronuncia o nome das ordens traz indícios que podem auxiliar o aluno nessa compreensão.

Quanto aos registros fracionários, pode-se dizer que, embora o uso frequente das calculadoras e computadores nos dias atuais privilegie as representações decimais, não podemos, em hipótese alguma, desprezar a importância dos registros fracionários, pois estes surgem inevitavelmente nas expressões algébricas, fórmulas e cálculos relacionados a diversos objetos matemáticos em etapas mais avançadas da escolaridade e sua compreensão é fundamental para resolução, principalmente, de problemas relacionados à geometria e ao campo das grandezas e medidas.

As frações estão presentes em muitas situações da prática social. Ouvimos falar em meia xícara, um quarto do terreno, dízimo etc. Embora, não raras vezes, as pessoas ignorem o sentido de representações como 1/2, 1/4 e 1/10.

O significado mais aplicado à fração, desde os primeiros anos escolares, é o de parte de um todo. Nesse caso, a representação a/b relaciona, respectivamente, número de partes consideradas / números de partes “iguais” que foi dividido o todo ou inteiro.

O total considerado na concepção parte-todo, como já vimos, poderá ser determinado por uma quantidade contínua (superfícies de figuras planas, por exemplo) ou por uma quantidade discreta (coleção de objetos, por exemplo).

Nunes et al. (2003), salienta que a ideia por trás dessa concepção é a de partição de um todo contínuo em n partes iguais, bastando, portanto, o emprego da técnica de dupla contagem para resolver a maior parte dos exercícios dessa natureza, ou seja, acima do “traço” coloca-se o número de partes consideradas e abaixo o número total de partes.

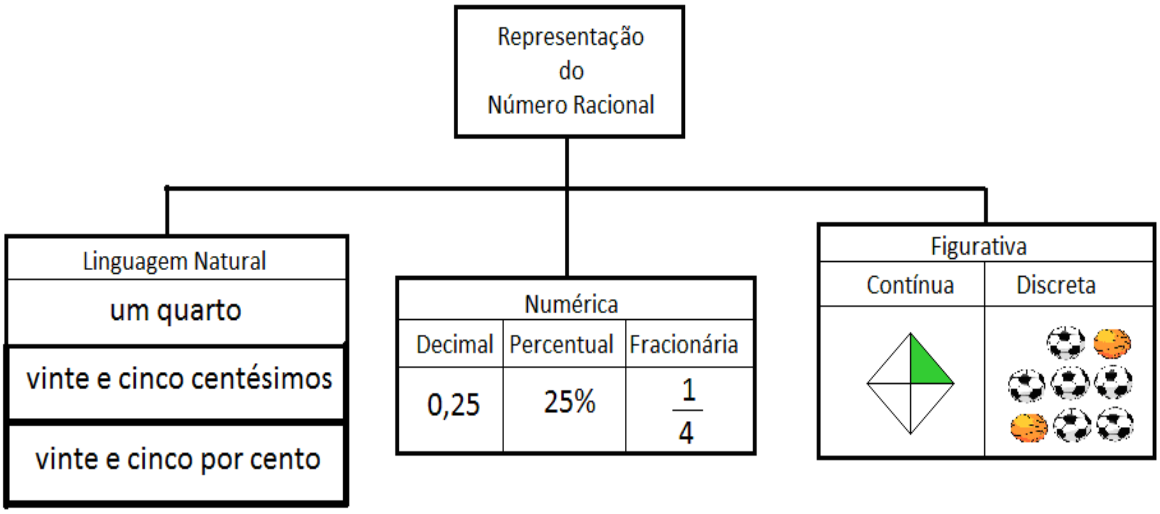
As representações chamadas figurativas podem ser de quantidades contínuas ou discretas. Por quantidades contínuas, entendem-se aquelas as quais podemos dividir o todo em um número infinito de partes iguais sem que haja qualquer prejuízo de suas propriedades, como por exemplo, a área de uma figura plana. Por sua vez, ao falarmos de quantidades discretas, estamos nos referindo àquelas cujo total não podemos dividir infinitamente, sob pena de prejuízo a suas propriedades, como por exemplo, uma turma de alunos.

Já a linguagem natural é, para Duval (2011, p.83), “o primeiro registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento”. Podemos entender as representações em linguagem natural como expressões da linguagem natural falada ou escrita que, em nosso contexto, referem-se à utilização da linguagem matemática relativa a um conhecimento sistematizado que é interpretado e expresso de forma verbal ou textual.

Temos, portanto, como exemplos de representações em linguagem natural, aquelas usadas em frases tais como “as instruções mandam pôr **um quarto** de água na mistura”, “tenho **cem por cento** de certeza!” e “já estou na **metade** do trabalho”.

Na figura 3, a seguir, apresentamos exemplos de algumas possíveis representações para o número racional **um quarto**:

Figura 3: Esquema de representações para o racional “um quarto”



Fonte: Elaborada pelo autor

Embora sejam várias as representações e os significados possíveis, segundo Kieren (1976), estas são interpretações independentes na medida em que cada uma delas evidencia aspectos diferentes do mesmo número racional. Segundo o autor, as diferentes visões sobre o mesmo objeto proporcionadas por interpretações distintas oportunizam o seu estudo por perspectivas também distintas. Nesse sentido, para Kieren (1976), a aprendizagem dos diferentes significados dos números racionais passa a ser o resultado das experiências dos alunos com as diversas maneiras de se entender o mesmo número, o que, para o autor, não acontece numa lógica de ensino baseada em cálculos.

Em relação aos obstáculos no ensino e na aprendizagem dos números racionais, pesquisas como Santos (2010) e Silva (2004) apontam como alvo de grandes dificuldades dos alunos o saber relacionar as diferentes representações de um mesmo número racional e o saber interpretar corretamente os seus vários significados.

Entre as razões que alimentam tais dificuldades está a opção pelo ensino mecanizado com ênfase curricular na utilização de algoritmos, que parece não se mostrar eficiente para a aprendizagem dos alunos. Esta ênfase nos procedimentos em detrimento da exploração de aspectos conceituais dos números racionais, na prática pedagógica dos professores, é apontada por Behr et al. (1983) como causadora do fracasso escolar no que concerne à abordagem deste objeto matemático.

O ensino deve privilegiar, portanto, a observação das relações que envolvem as várias representações e sentidos relacionados ao conceito de número racional, evitando abordagens que se limitam apenas ao estudo de determinados aspectos, tais como a utilização prevalente de áreas de figuras planas para expressarem representações numéricas fracionárias com significado parte-todo, constatada por Silva (2004) e por Santos (2010) em livros didáticos.

2.2 Teoria dos Registros de Representação Semiótica-TRRS

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica - TRRS, desenvolvida pelo psicólogo e filósofo Raymond Duval (2003), postula a importância de levar em consideração as representações semióticas ao tratarmos sobre os processos de ensino e aprendizagem em matemática. A partir da TRRS compreendemos que para um bom aprendizado é importante que o aluno demonstre saber expressar um mesmo objeto matemático de diferentes maneiras, bem como migrar de uma representação para outra. Para Duval (2009, p.63), “uma aprendizagem especificamente centrada na mudança e na coordenação de diferentes registros de representação, produz efeitos espetaculares nas macro-tarefas de produção e de compreensão”. Por outro lado, “a ausência de coordenação entre diferentes registros cria muito frequentemente uma deficiência para as aprendizagens conceituais” (DUVAL, 2009, p. 63).

Ainda segundo esse autor, como a matemática é uma ciência de natureza abstrata e seus objetos são construções mentais, não há outro meio de acessá-los a não ser por suas representações semióticas. No entanto, as representações são sempre parciais em relação ao que é representado e, portanto, não devem ser vistas como sendo o próprio objeto (DUVAL, 2003).

Diante disto, Duval (2003) chama a nossa atenção para o seguinte paradoxo: Como não confundir objeto e representação se só podemos acessar o primeiro a partir do segundo?

Para superação deste impasse, o autor propõe que o ensino de matemática privilegie a abordagem de qualquer objeto matemático a partir de, ao menos, duas de suas diferentes representações semióticas, bem como explore a coordenação entre elas.

Assim, no caso dos números racionais, é importante reconhecer que 2/8, 25% e “um quarto” são representações de um mesmo objeto, muito embora nenhuma delas seja o próprio objeto. Este reconhecimento se dá ao passo que coordenamos estes diferentes registros por meio de conversões, ou seja, passamos de um tipo de representação semiótica para outro.

O termo semiótica vem do grego *semeion* que significa signos, nesse sentido podemos entender a semiótica como a ciência dos signos. De forma geral, um signo é algo que transmite uma mensagem ou representa algo para alguém e para a semiótica os signos têm fundamental importância, pois as representações semióticas utilizam variados signos em sua constituição.

Segundo Duval (2003), as representações semióticas relacionam-se a três atividades cognitivas fundamentais: a produção das representações, o tratamento e a conversão que são as transformações a elas aplicadas.

2.2.1 A produção das representações

Duval (2003) estabelece uma importante distinção entre o signo e o que chama de registro de representação semiótica. A letra B, por exemplo, é um signo (significante) cujo significado (referência) pode mudar de acordo com cada indivíduo, pois, para algumas pessoas, pode significar a primeira letra do seu nome (Bruna, Barbosa, Barros etc), enquanto que, para outras, tratar-se-á apenas da primeira consoante do alfabeto. Por outro lado, a letra B na expressão **A/B** assume como único significado o de variável para o denominador da fração, constituindo-se, apenas, como um componente desse registro de representação semiótica. Assim, um signo não pode ser tomado como um registro de representação semiótica, mas como parte dele. No quadro 1, a seguir, apresentamos alguns exemplos dessa distinção:

Quadro 1: Signo X registro de representação semiótica

SIGNO	REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA
B	A/B
2	2%
A	Ax + By + C = 0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Conhecer, produzir e coordenar os diferentes registros de representação semiótica de um determinado objeto matemático é de suma importância para quem ensina e quem aprende. Nesse sentido, a ênfase num único tipo de representação pode levar o aluno a confundir o objeto com a sua representação, confundir significante com significado (DUVAL, 2003).

Fazer a separação entre objeto e representação não é uma tarefa fácil, pois muitas vezes a representação é vista pelo aluno como sendo o próprio objeto. Quando falamos “um meio”, por exemplo, é natural que o aluno associe à representação 1/2, por ser essa a mais comum nos exercícios propostos inclusive nos livros didáticos, contudo parece estranho, para boa parte dos estudantes, associar esta mesma expressão falada à representação 0,5 que, por sua vez, é mais relacionada à “meio”, como se ambas expressões, “um meio” e “meio”, representassem objetos distintos. A utilização de variadas representações e a coordenação entre elas é, portanto, fundamental para uma eficaz apreensão do objeto matemático estudado, garantindo, segundo o autor, atividades que são fundamentais do ponto de vista cognitivo, tais como a conceitualização ou a resolução de problemas.

Duval (2013, p.16) afirma que “a distinção entre os diferentes registros permite separar os dois tipos de transformações que constituem a atividade matemática: as conversões e os tratamentos”. O autor explica que, enquanto o tratamento refere-se a uma transformação interna, ou seja, ocorre no interior de um registro de representação ou sistema, a conversão diz respeito a “uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida” (DUVAL, 2009, p.59). A seguir, apresentamos, com exemplos, estes dois tipos de transformações:

2.2.2 O Tratamento

O tratamento é a transformação de uma representação dentro de um mesmo registro semiótico. Há, portanto, envolvido nesta habilidade cognitiva um único tipo de representação, como podemos observar no exemplo de atividade apresentado na figura 4.

Figura 4: Exemplo de atividade de tratamento

Indique frações equivalentes à fração representada abaixo:

$\frac{1}{2}$ ___ ___ ___ ___ ___

Fonte: Elaborada pelo autor

Quando pedimos que os alunos apresentem outras frações equivalentes à fração 1/2, estamos mobilizando apenas o registro numérico fracionário para esta atividade. No entanto, embora tenhamos a transformação acontecendo num mesmo tipo de registro, existe um importante trabalho cognitivo em operação produzindo representações equivalentes à primeira, além da operacionalização de cálculos matemáticos na resolução do problema (DUVAL, 2003).

2.2.3 A Conversão

Como vimos, para Duval (2003) a ênfase num determinado tipo de registro semiótico em detrimento dos outros tipos de representações pode levar o indivíduo ao equívoco de confundir o próprio objeto matemático com esta sua representação. Para que isto não ocorra, exigir-se-á do aluno, mais que a habilidade de reconhecer e produzir variados registros de representação, a capacidade de transitar naturalmente entre eles.

Para realizar tais conversões o aluno mobiliza sua habilidade de transformar os registros semióticos, passando de uma representação para outra num mesmo exercício proposto e, embora seja esta a etapa mais difícil na aprendizagem, é na conversão que o indivíduo consegue promover a necessária distinção entre significado e significante, conseguindo diferenciar características que são próprias do objeto matemático estudado daquelas que pertencem a sua representação.

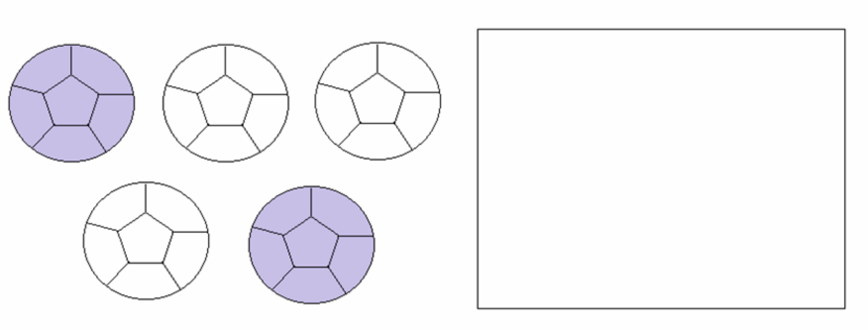
Assim, a conversão se constitui como a mais importante das três etapas relacionadas às representações e a dificuldade apresentada pelos alunos se deve ao esforço cognitivo que o indivíduo precisa empreender para migrar de uma representação a outra. É, portanto, nessa transformação externa dos registros que o indivíduo estabelece a apreensão conceitual do objeto estudado (DUVAL, 2003).

Nesta pesquisa, como já dissemos, nosso foco de observação foi na atividade cognitiva de conversão e, portanto, nosso interesse era gerar situações que levassem o aluno a efetuar estas transformações entre registros do número racional utilizando os materiais manipuláveis concretos.

Na figura 5, temos um exemplo de atividade em que o processo de conversão é exigido dos alunos para a resolução do problema.

Figura 5: Exemplo de atividade de conversão

Indique no retângulo a porcentagem de bolas pintadas na figura abaixo ?



Fonte: Elaborada pelo autor.

A atividade apresentada utiliza uma representação figurativa de um número racional e propõe que os alunos a transformem numa representação numérica percentual. Além disso, o exercício exige dos indivíduos uma demanda cognitiva que supera a comum associação de representações figurativas dessa natureza à representação numérica fracionária deduzida de forma imediata a partir da relação número de elementos destacados/ número total de elementos.

Para Duval (2003), a atividade matemática obrigatoriamente mobiliza uma diversidade de registros de representação semiótica e muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos estão relacionadas, principalmente, à sua capacidade de articular estes diferentes registros de representação.

Quando podemos externar de diversas maneiras um mesmo objeto matemático, a importância disso não está apenas no fato de poder representá-lo, mas, principalmente, porque tornamos possível o desenvolvimento da atividade matemática, (DUVAL, 2003).

A necessária utilização de vários registros é justificada por Duval (2012) a partir de três razões: os custos de tratamento, já que, em algumas situações, um certo tipo de registro oferece uma condição de tratamento mais viável ou econômica; as limitações dos registros, já que cada registro oferece sempre uma visão parcial em relação ao objeto; a necessidade de diferenciar a representação e o objeto representado.

Assim, o ensino deve sempre buscar privilegiar diferentes contextos, significados e representações na abordagem de um mesmo objeto matemático, já que "a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica" (DUVAL, 2003, p. 15).

Nesse sentido, mais que conhecer técnicas de transformação de uma representação de um número racional em outra, é necessário que o aluno saiba realizar conversões, ou seja, seja capaz de oferecer soluções com representações diferentes daquelas trazidas pelos problemas, pois "do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que conduz aos mecanismos de compreensão" (DUVAL, 2003, p. 16).

Quanto aos tipos de registros, estes podem ser discursivos e não discursivos. Os registros discursivos são aqueles cuja produção, apreensão e organização acontecem de forma linear e consecutiva (linearidade fundamentada na sucessão). Incluem-se aí, portanto, as línguas formais, sistema de numeração, escrita algébrica etc. Ao lermos uma frase ou equação, por exemplo, nós o fazemos de forma linear, ou seja, existe um início, um meio e um final, enfim, uma seqüência a observar. Já nos registros não discursivos a apreensão acontece de forma simultânea. Incluem-se, neste caso, as representações icônicas, as figuras geométricas e os gráficos cartesianos (DUVAL, 2011).

Tanto entre os registros discursivos quanto entre os registros não discursivos, existem aqueles que, segundo Duval (2011), são **multifuncionais**, nos quais os tratamentos são **não algoritmizáveis** (a linguagem natural oral ou escrita, as representações icônicas e figuras geométricas), e os **monofuncionais**, nos quais as transformações são **algoritmizáveis** (o sistema de numeração, a linguagem algébrica, os gráficos cartesianos).

2.2.4 As Unidades de Sentido

Para Duval (2011), as representações semióticas são dotadas de dados ou informações matematicamente pertinentes, as chamadas unidades de sentido. Segundo o autor, não se pode perceber as várias maneiras de representar um objeto matemático sem considerar as unidades de sentido em cada registro, pois "o reconhecimento de um mesmo objeto representado por duas representações A e B repousa sobre a correspondência das unidades de sentido de suas representações" (DUVAL, 2011, p.49).

Cada representação traz em seu conteúdo unidades de sentido que lhe são próprias e colocá-las em correspondência com as unidades de sentido de uma outra representação do mesmo objeto é a condição cognitiva para identificar a ambas como formas distintas de representá-lo. Nas palavras do autor "para reconhecer quando duas representações semióticas de naturezas diferentes representam um mesmo objeto, é preciso colocar em correspondência as unidades de sentido entre os conteúdos respectivos das duas representações" (DUVAL, 2011, p.67).

Segundo esse autor, o que é relevante do ponto de vista matemático não são as representações semióticas e sim as transformações que podem sofrer, sejam estas por tratamentos ou conversões. Contudo, estas transformações exercidas nas representações semióticas passam, em primeiro lugar, pela discriminação das unidades de sentido.

Vimos que as unidades de sentido estão diretamente relacionadas ao reconhecimento de que um dado objeto matemático pode possuir várias e distintas formas de registro. Também vimos que a identificação destas unidades de sentido no conteúdo das representações semióticas é um exercício primordial para promover as transformações nestes registros. Mas como podemos identificar as unidades de sentido no conteúdo de uma representação?

Essa identificação requer a utilização de um outro registro, pois "a mobilização de um segundo registro é necessária para poder discernir e reconhecer as unidades de sentido que são pertinentes no conteúdo das representações produzidas no primeiro registro" (DUVAL, 2011, p.100).

Assim, para o autor não basta trabalhar várias representações de forma isolada para que os alunos "vejam" as unidades de sentido já que é na coordenação das unidades de sentido em ambas as representações envolvidas que se pode percebê-las.

É, portanto, na conversão das representações que podemos perceber quais são os dados ou informações que, ao variarmos na representação inicial, produzem co-variações na representação final, ou seja, as unidades de sentido em ambos os registros. Esse reconhecimento das unidades de sentido é a primeira das duas condições preliminares e absolutamente indispensáveis diante de qualquer produção matemática (DUVAL, 2011).

Enfim, o procedimento apresentado pelo autor para discriminar as unidades de sentido numa representação passa por duas operações necessárias:

1- Efetuar uma conversão deste registro para um outro registro.

2- Produzir todas as modificações possíveis no primeiro registro e verificar se tais variações produzem ou não produzem co-variações no segundo. Assim, "o segundo registro serve como revelador das unidades de sentido matematicamente pertinentes nas representações do registro de partida" (DUVAL, 2011, p.104).

Vimos que as unidades de sentido matematicamente pertinentes só podem ser discernidas no exercício de conversão de um registro para outro. No entanto, Duval (2011) adverte que não basta fazer uma única conversão, pois isto seria insuficiente para perceber a pertinência destes dados em ambas as representações. Para o autor, então, é necessário realizar, para cada variação no registro de partida, uma conversão observando as mudanças nas unidades de sentido do registro de chegada. Nesse sentido, a visualização das unidades de sentido de uma dada representação é um exercício que requer uma série de conversões a partir dela.

No caso das representações figurais podemos realizar variações em cada elemento da figura isoladamente, mantendo todos os outros constantes. A conversão da figura para uma representação numérica, por exemplo, permite perceber o que muda nesta representação quando alteramos um valor visual da figura mantendo os outros inalterados (DUVAL, 2011).

Assim, a necessária tomada de consciência das unidades de sentido, ou seja, daquilo que é matematicamente pertinente no conteúdo da representação figural passa por este exercício de observar as variações produzidas na figura e as correspondentes co-variações na representação numérica.

A segunda condição para compreender, fazer ou apenas utilizar matemática é, para Duval (2011, p.103), “a apropriação das operações de transformações próprias de cada registro”. Esta segunda atividade a realizar diante de qualquer atividade matemática consiste, portanto, em descrever ou delinear as transformações que cada representação sofre com as operações próprias ao tipo de representação observada.

Assim, para o autor, não se trata, por exemplo, de explorar as operações em linguagem algébrica de um gráfico e sim de observar as transformações produzidas pelas variações nas unidades de sentido do próprio gráfico.

Nesse sentido, ao trabalharmos com representações figurais, os alunos devem, em primeiro lugar, “aprender a ver” as figuras e, portanto, “é preciso propor tarefas em que se exclua toda atividade de medida e de cálculo”, fazendo com que os alunos explorem a representação figural sem que, nesse primeiro momento, recorram a aspectos não figurais (DUVAL, 2011, p.92).

Para o autor, é a partir desta interiorização das operações figurais que o aluno deve efetuar enumerações, aplicação de fórmulas e propriedades geométricas, enfim, utilizar-se de representações não figurativas.

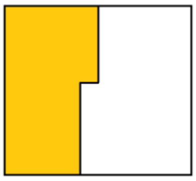
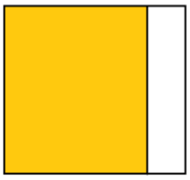
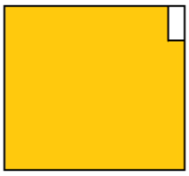
Nesse momento, definido como segunda condição necessária, é, portanto, fundamental distinguir as operações de transformação possíveis no interior do registro. No caso dos registros figurativos, então, o autor se refere aos tratamentos intrinsecamente figurais (DUVAL, 2011).

Ainda com relação a esta segunda condição, tomaremos como exemplo as representações produzidas a partir do material dourado adaptado[2], um dos materiais manipuláveis utilizados nessa pesquisa que ainda contou com o disco de frações, a régua numérica e as pastilhas plásticas. Neste manipulável, a placa representa a unidade e, portanto, pode ser tomada como um registro figurativo concreto de representações numéricas (1, 100%, 4/4 etc.), representações em linguagem natural (todo, inteiro, total etc.) ou representações figurativas (figura geométrica plana dividida em partes iguais com todas as partes pintadas, figura com coleção de objetos destacados em sua totalidade etc).

[2] O termo adaptado refere-se a pinturas e inscrições de registros numéricos realizadas na superfície das peças que compõem o material dourado montessoriano e que são melhor descritas no capítulo 4 deste texto.

No quadro 2, apresentamos algumas possíveis transformações produzidas a partir de variações no interior deste registro figurativo concreto:

Quadro 2: Variações no conteúdo do registro figural (placa do material dourado adaptado) e transformações produzidas

Variação no Conteúdo do Registro Figurativo Concreto	**Transformação Produzida**
	1- O representado corresponde à metade.
	2- O representado corresponde a pouco menos que a metade.
	3- O representado está mais próximo do total que da metade.
	4- O representado corresponde a quase o total.
	5- O representado corresponde a uma pequena parte.

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim, cada representação figurativa concreta construída com o material dourado adaptado traz consigo qualidades visuais que devem ser reconhecidas pelos alunos antes de recorrerem aos tratamentos numéricos.

Em algumas situações, os alunos demonstram uma incapacidade de “ler” a representação figural e isto pode ser ilustrado numa situação hipotética em que, por exemplo, o aluno conclui que a figura relacionada à transformação 2 do quadro é uma representação de 90%, ou de 75%, ou ainda de 50%, enfim, não seja capaz de identificar, pela figura, que o representado corresponde a menos que a metade.

Nesse sentido, a exploração da representação figural e a análise a partir das mudanças produzidas em seu interior são fundamentais para que os alunos percebam os valores qualitativos oriundos de cada variação.

2.2.5 O papel fundamental das conversões no ensino da matemática

Para Duval (2003), a ênfase dada ao aspecto matemático nos processos de ensino e aprendizagem tem relegado a conversão a um papel meramente secundário. Nesse sentido, nas palavras do autor,

> a conversão intervém somente para escolher os registros no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro (p.16).

Assim, ao olharmos o ensino e a aprendizagem apenas do ponto de vista matemático, estamos subestimando o papel fundamental, do ponto de vista cognitivo, que as conversões desempenham. Nesse contexto, Duval (2003, p.16) explica que “é por isso que a conversão não chama a atenção, como se se tratasse somente de uma atividade lateral, evidente e prévia à “verdadeira” atividade matemática”.

É, contudo, no aspecto cognitivo que a conversão surge como a mais importante das transformações de representações, pois, como vimos, é esta a atividade que “conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão” (DUVAL, 2003, p.16).

Segundo Duval (2003), esta distinção entre o ponto de vista matemático e o ponto de vista cognitivo não tem sido levado em conta em boa parte das pesquisas em didática e no ensino da matemática e, para o autor, há duas razões para que vejamos como absolutamente necessário tratar do aspecto cognitivo em nossas análises das aprendizagens e dos processos de compreensão:

1- A irredutibilidade da conversão a um tratamento

2- Os dois tipos de fenômenos característicos da conversão das representações:

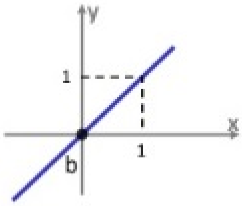
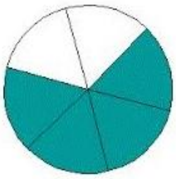
a) As variações de congruência e de não-congruência;

b) A heterogeneidade dos dois sentidos da conversão.

Para o autor, muitas vezes a conversão é realizada como uma forma de tratamento, ou seja, para converter a representação de um objeto de um registro a outro, aplicam-se regras de correspondência e faz-se uma espécie de tradução.

No quadro 3, apresentamos alguns exemplos de codificação, bem como a regra de codificação envolvida:

Quadro 3: Exemplos de codificação nas conversões

Registro A	Registro B	Regra de Codificação
Conjunto dos pontos cuja ordenada é o dobro da abscissa.	Y = 2X	Escrita literal de uma relação.
Y = X		No plano cartesiano qualquer ponto é dado pelo par de coordenadas (x,y).
	4/6	Dupla contagem: o denominador refere-se à quantas partes iguais o inteiro foi dividido e o numerador à quantas partes foram destacadas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos entender a codificação como um tipo de conversão muito limitada do ponto de vista cognitivo, pois não oportuniza aos estudantes o aprofundamento conceitual que uma conversão não condicionada a regras de codificação oferece.

Para Duval (2003, p.17), a codificação gera apenas uma visão superficial baseada numa regra de correspondência entre os registros que, por sua vez, “permite somente uma leitura pontual das representações gráficas”.

A conversão tomada como simples codificação impede o que o autor chama de “uma apreensão global e qualitativa” (DUVAL, 2003, p.17). No caso, por exemplo, das conversões envolvendo as expressões algébricas e os gráficos, é absolutamente necessária esta apreensão global e qualitativa para “extrapolar, interpolar, ou para utilizar os gráficos para fins de controle, ou de exploração, relacionados aos tratamentos algébricos” (DUVAL, 2003, p.17).

Não se pode, portanto, realizar conversões como se fossem tratamentos. É necessário nas transformações entre um tipo de registro e outro, articular as variáveis cognitivas próprias a cada registro, identificando assim as unidades de sentido no conteúdo destas representações.

Com relação aos dois tipos de fenômenos característicos das atividades de conversão, Duval (2003) explica que estes são reveladores da natureza cognitiva que é própria a qualquer atividade de conversão.

Quanto às variações de congruência e não-congruência, o autor afirma que é suficiente compararmos a representação no registro de partida com a representação no registro de chegada. Segundo Duval (2003),

> duas situações poderão ocorrer: Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência -, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência (p.19).

Podemos inferir, a partir das palavras do autor, que as regras de codificação surgem mais facilmente à medida que o grau de congruência nas conversões aumenta. Nesse sentido, também discutirmos, no contexto dessa pesquisa, se, ao utilizarmos materiais manipuláveis nas conversões entre representações do número racional, não estaríamos, por um lado, atenuando a não-congruência entre os registros, e por outro, estimulando a codificação como recurso de resolução.

Segundo Duval (2011, p.121), “A variação de congruência e não congruência é uma das maiores causas da incompreensão ou dos erros de interpretação dos enunciados do problema para os alunos”. Portanto, a grande dificuldade apresentada pelos alunos frente a exercícios de conversão entre representações do número racional pode ser também entendida a partir da evidência de que “os fenômenos de não congruência são mais numerosos que os fenômenos de congruência” (DUVAL, 2011, p.124).

Quanto às variações de congruência e não-congruência nas conversões, Duval (2012) apresenta três critérios que permitem essa identificação nas conversões a serem efetuadas:

1 - **Correspondência semântica entre as unidades de sentido das representações**: para cada unidade de sentido no registro de partida, há uma unidade de sentido correspondente no registro de chegada.

2 - **Unicidade semântica terminal**: para cada unidade de sentido no registro de partida, só há uma única unidade de sentido correspondente no registro de chegada.

3 - **Conservação da ordem das unidades de sentido**: as unidades de sentido correspondentes nos dois registros seguem também a mesma ordem em ambas as representações.

A partir dos critérios apresentados, podemos dizer que uma mudança de registros que atenda a estas três condições pode ser tomada como uma conversão de alto grau de congruência, enquanto que, nas conversões consideradas não-congruentes, tais condições deverão ser pouco ou nada observáveis.

Quanto à heterogeneidade dos sentidos, Duval (2003) observa que nem sempre a conversão é realizada pelo aluno quando invertemos as representações nos registros de partida e chegada. Segundo o autor, “a conversão das representações, que não é uma codificação, é uma operação cognitivamente não reversível” (DUVAL, 2011, p.118). É, portanto, um equívoco acreditar que ao exercitarmos a conversão num determinado sentido estaremos, a reboque, treinando a conversão no sentido inverso (DUVAL, 2003).

Outro ponto fundamental na TRRS é que, para Duval (2003), as representações semióticas servem de base para as representações mentais. Segundo o autor:

> Muitas vezes, as representações “mentais” não passam de representações semióticas interiorizadas. As representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas (p.31).

As produções externas têm a vantagem de permitir tratar e controlar um número muito mais elevado de informações que as produções internas que, por sua vez, têm como vantagem “sua maior rapidez e seus “atalhos”” (DUVAL, 2003, p.31).

Abordamos, neste tópico, alguns dos conceitos básicos da TRRS, fundamentais para auxiliar-nos na interpretação e análise dos resultados e das observações registradas durante a pesquisa, sobretudo, aqueles relativos à atividade de conversão entre representações semióticas. Também pudemos, a partir de elementos da TRRS, analisar, no universo das representações semióticas, aqueles registros produzidos a partir dos chamados materiais manipuláveis concretos, cuja utilização no ensino de matemática, discutimos a seguir.

2.3 Materiais Didáticos Manipuláveis Concretos

A história dá conta de que antigos grupos humanos se valiam de riscos feitos em bastões de madeira, marcas em paredes de cavernas, nós em cordas, ossos e até pequenas pedras para ajudar a contar os seus animais e sua pequena produção agrícola (SOARES, 2007). Pode-se dizer, portanto, que o pensamento matemático entre os primeiros homens esteve acompanhado pela utilização de objetos concretos como recursos auxiliares.

Com o aumento da produtividade e a maior complexidade exigida na contagem, instrumentos elaborados para dar suporte à atividade matemática foram surgindo, tais como o ábaco, um dos primeiros objetos confeccionados com este propósito (MENDES, FILHO e PIRES, 2011).

Contudo, o desenvolvimento dos chamados algoritmos como técnica de contagem foi, aos poucos, diminuindo a necessidade do uso de referenciais concretos para se chegar aos cálculos desejados.

Na chamada Escola Tradicional, esta forma de calcular baseada em procedimentos mecanizados e que são assimilados por exaustivas repetições assume um papel de destaque. Cabe ao professor, neste caso, a função de transmitir esse conhecimento para o aluno que, passivamente, deve assimilar as informações. A didática é caracterizada pela ênfase na memorização de informações, regras e fórmulas (MIZUKAMI, 1986). Nesse contexto, é natural que o uso de materiais manipuláveis seja visto como uma perda de tempo e um prejuízo ao silêncio e disciplina, elementos tidos como primordiais na sala de aula.

Esse modelo é criticado, já no século XVII, por Comenius (1592–1671), considerado o pai da Didática, que propõe em sua obra “Didática Magna” (1657) que “ao invés de livros mortos, por que não podemos abrir o livro vivo da natureza? Devemos apresentar a juventude às próprias coisas, ao invés das suas sombras” (PONCE, 1985, p.127).

No século XVIII, as considerações de Rousseau (1712-1778) sobre a importância do trabalho manual e a experiência direta das coisas no processo natural de desenvolvimento da criança abrem espaço para o surgimento de uma nova concepção de escola que passa a valorizar, mais que a aprendizagem de conteúdos, aspectos psicológicos e biológicos do aluno, tais como sentimentos, interesses, espontaneidade e criatividade.

Surgem as propostas de Pestalozzi (1746-1827), para quem a eficiência educativa só poderia vir da atividade dos jovens, e a fundação de seu internato cujo currículo privilegiava atividades desenvolvidas pelos alunos, tais como canto, desenho, modelagem, jogos, excursões ao ar livre e manipulação de objetos. Para Pestalozzi, as descrições deveriam preceder as definições e o conceito deveria nascer da experiência direta e das operações sobre as coisas (CASTELNUOVO, 1970).

Mais tarde, Montessori (1870-1952) e Decroly (1871-1932) reforçariam esta nova concepção de ensino desenvolvendo, inclusive, novas tecnologias e materiais concretos para o estudo de objetos matemáticos.

Piaget (1977), por sua vez, defendeu o ensino com ênfase nas experiências ativas do tipo “mãos-à-obra” associadas à reflexão consciente. Para o autor, a memorização não demonstra que o indivíduo aprendeu algo, o popular “saber de cor” não representa o saber.

As idéias de Piaget influenciaram consideravelmente as práticas escolares, pois a partir do seu trabalho pôde-se concluir que as atividades concretas têm papel fundamental na aprendizagem das crianças.

Piaget (1977) observou que as crianças que viam e manipulavam vários tipos de objetos apresentavam mais facilidade para representar suas idéias abstratas a partir das imagens mentais mais claras que produziam. Por outro lado, aquelas crianças cuja experiência era mais pobre não demonstravam a mesma desenvoltura do pensamento abstrato. Assim, a conclusão é que a base do pensamento abstrato dos alunos está nas suas experiências (PIAGET, 1977).

Como resultado da implementação da teoria piagetiana nas escolas tivemos a mudança substancial do papel do professor, não mais visto como a fonte do saber da qual os alunos absorviam, passivamente, o conhecimento transmitido e agora mais identificado como um facilitador da aprendizagem. A natureza do ambiente na sala de aula também foi alterada e, hoje, boa parte delas conta com a disposição de diversos tipos de materiais manipuláveis para serem usados, sobretudo, nas aulas de matemática.

Uma boa síntese dos aspectos que justificam a utilização dos materiais manipuláveis concretos no ensino da matemática é feita por Reys (1982). Ao comparar várias teorias que abordam o tema, o autor apresenta os seguintes argumentos:

- ✓ A apreensão de conceitos é a essência da aprendizagem em Matemática.
- ✓ A aprendizagem é baseada na experiência.
- ✓ A experiência baseia-se na aprendizagem sensorial.
- ✓ A aprendizagem caracteriza-se por diferentes etapas de desenvolvimento.
- ✓ A motivação potencializa a aprendizagem.
- ✓ A aprendizagem é construída do concreto para o abstrato.
- ✓ A participação ativa do aluno é fundamental para a aprendizagem.
- ✓ A formação das abstrações matemáticas é um longo processo.

É importante destacar que embora pareça claro, sobretudo na teoria de Piaget (1978) com os estágios do desenvolvimento cognitivo, o fato de que, aos poucos e especialmente na adolescência, a necessidade de recorrer ao concreto vai dando lugar a uma maior capacidade de abstração por parte dos indivíduos, isto não elimina nossa dependência dos objetos reais como auxiliares significativos para a aprendizagem de alguns conceitos em qualquer fase de nossas vidas.

Segundo Lorenzato (2006, p.18), o material didático é definido como “qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem”, enquanto que o material didático concreto pode referir-se “ao palpável, manipulável” e ainda, numa interpretação mais ampla, incluir imagens gráficas (LORENZATO, 2006, p.22).

No conjunto dos materiais didáticos manipuláveis concretos, como denomina o autor, pode-se, portanto, incluir todos aqueles objetos que tocamos, sentimos e manuseamos, ou seja, desde materiais mais simples tais como folhas de papel, massa de modelar, palitos de fósforo, bolas de isopor até aqueles elaborados com uma explícita intenção didática tais como o ábaco, o material dourado, o disco de frações, utilizados no sentido de construir de forma mais significativa o conhecimento sobre determinados conteúdos matemáticos. Lorenzato (2006) classifica esses materiais manipuláveis em dois tipos:

1) O **material manipulável estático**: material que não possibilita, através da manipulação, alterações em sua estrutura física. Esse tipo de material limita o aluno ao simples manuseio e observação visual.

2) O **material manipulável dinâmico**: material que permite, através da manipulação, mudanças em sua estrutura física. Para o autor, este tipo de material oferece mais vantagens para o aprendizado por possibilitar uma melhor percepção de propriedades relacionadas ao objeto matemático em estudo.

Para Turrioni e Perez (2006, p.61) o material manipulável concreto é de fundamental importância no ensino, pois “facilita a observação, análise, desenvolve o raciocínio lógico e crítico, sendo excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos”.

Embora a relevância dos materiais manipuláveis concretos no ensino seja uma percepção recorrente na maioria dos autores que tratam do assunto, não se pode deixar de observar que tais materiais não são eficazes por si mesmos. Como afirma Pais (2001, p.2), ao pensarmos que a aprendizagem se dará apenas porque os alunos estão interagindo de forma física com tais objetos movendo-os ou modificando-os, estaremos caindo num “empirismo desprovido de significado”.

Neste caso, o autor destaca que o princípio do “aprender fazendo”, que permeia a concepção de uso dos manipuláveis durante as aulas, é aplicado de forma equivocada, supervalorizando a manipulação pela manipulação em detrimento da imprescindível correlação entre a experiência com o material e a apropriação do conceito matemático envolvido (PAIS, 2001).

Para Passos (2006, p.78), esses manipuláveis “devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento em que um saber está sendo construído”.

Como dissemos anteriormente, o interesse por investigar a utilização de materiais manipuláveis em atividades de conversão entre diferentes representações dos números racionais nasceu de observações a partir da vivência, em sala de aula, do jogo Corrida dos Racionais.

A ideia era usar o jogo como pretexto para que os alunos promovessem conversões entre representações do número racional a partir de materiais manipuláveis. A utilização de jogos para o trabalho com objetos matemáticos, além de ser recomendada por documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais, é também visto em estudos tais como Smolle et al. (2007), Muniz (2010) e Gitirana e Carvalho (2010) como uma maneira de explorar conteúdos de forma lúdica e de estimular os alunos à mobilização de seus saberes prévios e à construção de novos conhecimentos.

Nesse sentido, o jogo Corrida dos Racionais foi pensado com o propósito de envolver os alunos em situações nas quais a manipulação do material dourado adaptado, disco de frações, régua numérica e pastilhas plásticas era uma condição necessária.

A partir das discussões apresentadas nesta fundamentação teórica, questionamos-nos como, através do uso de um material manipulável, os estudantes podem organizar seu pensamento e mobilizar os seus conhecimentos para realizar conversões entre representações de números racionais. Conforme discutido acima, a experiência com os objetos concretos, além de dar vida e significado aos conteúdos matemáticos, auxiliam na passagem para o nível abstrato. Além disso, a afirmação de que "não existe (nenhuma) *noésis sem sémiosis*, não existe ato matemático de pensamento sem transformação de representações semióticas quaisquer que sejam" (DUVAL, 2011, p.42) nos põe diante da importância fundamental que o trabalho exploratório das representações semióticas assume no ensino da matemática. Neste cenário, emerge, então, o foco de nossa pesquisa, ou seja, a investigação do uso, por estudantes, de material manipulável na resolução de problemas envolvendo conversões entre diferentes representações do número racional.

Com este foco, elaboramos o objetivo geral e os objetivos específicos do nosso estudo.

3 OBJETIVOS

3.1 Objetivo Geral

Investigar, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, limites e possibilidades no uso de material manipulável em conversões entre representações de números racionais.

3.2 Objetivos Específicos

- Analisar, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, implicações relacionadas aos fenômenos de variação de congruência e não-congruência e à heterogeneidade dos sentidos nas conversões entre representações de números racionais, utilizando material manipulável.

- Identificar, sem o uso de material manipulável, dificuldades relacionadas às variações de congruência e não-congruência e à diferença entre os sentidos da conversão entre representações de números racionais.

- Verificar como, a partir do uso de um material manipulável, os estudantes organizam o seu pensamento e desenvolvem estratégias para realizar conversões entre representações de números racionais.

- Avaliar a influência do material dourado adaptado na resolução de atividades envolvendo a conversão entre representações de números racionais.

4 METODOLOGIA

A metodologia utilizada consistiu de uma pesquisa de cunho qualitativo, entendendo que ela trabalha com o “universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos” (MINAYO, 1994, p.22)

Constituíram nosso campo de pesquisa e participantes alunos do 8° e 9° ano do ensino fundamental de escolas da rede pública municipal do Recife.

Decidimos por alunos da etapa final do ensino fundamental como sujeitos de nossa pesquisa para assegurarmo-nos de que todos os participantes tivessem, em algum momento de vida escolar, trabalhado com as representações semióticas do número racional exploradas nesse estudo.

Sabe-se que não há uma unanimidade nos documentos oficiais de ensino no que concerne ao momento de iniciar e como desenvolver o trabalho com os números racionais e suas representações. Os Parâmetros Curriculares Nacionais preconizam o início da abordagem dos racionais, em suas representações fracionárias e decimais, no 4º e 5° ano e prevêem a ampliação e consolidação de seus significados a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos, somente, no 8° e 9°ano (BRASIL, 1998). Já os Parâmetros Curriculares de Pernambuco sugerem que as representações decimais comecem a ser abordadas no 3° e 4° ano, sem a preocupação com formalizações nessa etapa. As expectativas de consolidações de aprendizagens relacionadas às representações decimais e fracionárias ficam para o 6° ano, enquanto que o trabalho com porcentagem e, consequentemente, com as representações percentuais aparecem com expectativa de consolidação de aprendizagem no 7° ano (PERNAMBUCO, 2012). Por sua vez, a Base Nacional Curricular Comum indica o início de trabalho com os racionais, no 4° ano, apresentando as representações fracionárias com ênfase no reconhecimento das frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) e as representações decimais para escrever valores do sistema monetário brasileiro. No 5º ano, o trabalho já é ampliado para as representações percentuais com cálculos de porcentagem (BRASIL, 2017).

Assim, é certo que, seja qual for o documento oficial que tomemos como referência, a expectativa para os alunos do 8° e 9° ano é que tenham consolidado conhecimentos relacionados ao objeto número racional, envolvendo suas representações numéricas fracionárias, decimais e percentuais.

Nessa pesquisa, utilizamos a observação participante, definida por Minayo (1994, p.59) como uma técnica que "se realiza através do contato direto do pesquisador com o fenômeno observado para obter informações sobre a realidade dos atores sociais em seus próprios contextos".

Aplicamos, também, entrevistas semiestruturadas para que pudéssemos registrar percepções, conclusões e decisões dos alunos não observadas durante o processo resolutivo das conversões propostas. Optamos pela entrevista semiestruturada por permitir que o entrevistado fale livremente sobre o assunto sem perder o foco do que está sendo discutido e solicitado pelo pesquisador (GIL, 1999).

Inicialmente, fizemos um experimento piloto no qual utilizamos o conjunto de manipuláveis concretos disposto no Corrida dos Racionais, bem como todas as situações de conversão trazidas pelo jogo.

Este conjunto de concretos, que chamamos de Lab[3], é formado por quatro manipuláveis: o disco de frações, a régua numérica, pastilhas plásticas e o material dourado adaptado. Estes materiais são utilizados pelos alunos jogadores como recursos auxiliares na busca coletiva pelas soluções dos exercícios e para as demonstrações das conversões propostos durante uma partida. O Lab, portanto, deve funcionar, no jogo, como um suporte para os alunos, oferecendo a possibilidade de uma experiência tátil e facilitando-lhes a visualização de uma representação concreta do objeto matemático em questão.

Assim, no que concerne ao foco dessa pesquisa, podemos dividi-la em dois momentos: no primeiro momento, observamos como os alunos realizavam as conversões utilizando quatro manipuláveis em situações oriundas do jogo Corrida dos Racionais; no segundo momento, concentramos nossa investigação num único material manipulável que foi escolhido a partir das observações realizadas no primeiro momento.

A partir da análise dos resultados do experimento piloto, escolhemos um único manipulável, o material dourado adaptado, com o qual prosseguimos a pesquisa e desenvolvemos nossa análise final.

---

[3] O Lab é uma parte integrante do jogo Corrida dos Racionais constituída pelos seguintes materiais manipuláveis: pastilhas plásticas, disco de frações, material dourado adaptado e régua numérica.

A seguir, com a finalidade de apresentar de forma mais detalhada os manipuláveis utilizados no experimento piloto, descrevemos e analisamos cada um destes concretos. Também apontamos, tomando como referência a análise dos resultados deste experimento, as conversões e suas possíveis formas de resolução.

4.1 Descrição e análise dos materiais manipuláveis utilizados no experimento piloto

Como vimos, a utilização de materiais manipuláveis pode ser um bom caminho para o ensino de um novo conceito em matemática. A partir da manipulação do concreto, os alunos podem progredir para as necessárias abstrações, quando o uso das simbologias será prevalente. A experiência com os objetos concretos, portanto, além de dar vida e significado aos conteúdos matemáticos, auxiliam na passagem para o nível abstrato.

O ensino com os manipuláveis inclui os alunos como sujeitos ativos no processo de aprendizagem que acontece pela mobilização dos vários sentidos do indivíduo através do contato e manipulação física dos materiais.

A opção, no experimento piloto, pelos quatro materiais manipuláveis que descrevemos a seguir justifica-se pelas observações feitas a partir da utilização desse conjunto de concretos no jogo Corrida dos Racionais, cuja vivência, como já dissemos, suscitou inquietações que resultaram nesse trabalho de pesquisa. .

4.1.1 Material Dourado Adaptado

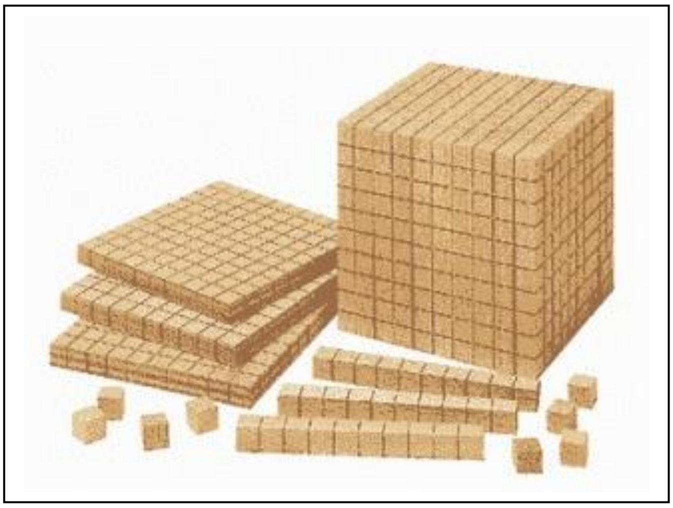
O material dourado foi um dos vários manipuláveis desenvolvidos pela médica e educadora italiana Maria Montessori no início do século XX. Montessori realizou experiências com crianças e criou materiais destinados à aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Os materiais desenvolvidos por Montessori tinham como característica comum o forte apelo à percepção visual e tátil, pois acreditava que a ação sobre os objetos é que possibilitava a aprendizagem.

Para Montessori, a experiência deveria preceder qualquer formalização conceitual já que “nada deve ser dado à criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração” (AZEVEDO, 1979, p. 27).

Podemos descrever brevemente o material dourado, apresentado na figura 6, como um conjunto de pequenas peças, geralmente produzidas em madeira, que contém pequenos cubos para representar as unidades, barras que agrupam dez destes cubos para representar as dezenas, placas que agrupam dez destas barras para representar as centenas e, algumas vezes, um cubo grande com tamanho equivalente a dez placas agrupadas para representar a unidade de milhar.

Figura 6: Material dourado de Montessori



Fonte: site EDUP- educação e psicopedagogia
disponível em: www.edupp.com.br

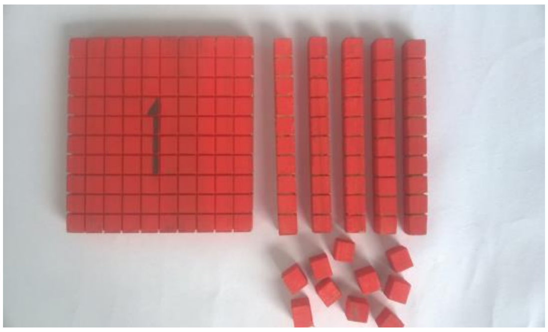
O material dourado de Montessori destina-se, principalmente, ao ensino e aprendizagem de conceitos relacionados ao sistema de numeração decimal. A compreensão do nosso sistema como uma organização de agrupamentos de dez em dez, bem como o entendimento da dinâmica de reagrupamentos de unidades realizados, sobretudo, nas operações de adição e subtração com uso dos algoritmos pode ser muito favorecidos, pois as abstrações relacionadas a estes conhecimentos passam a ter uma imagem concreta.

Chamamos o manipulável utilizado nessa pesquisa de material dourado adaptado porque, para a sua utilização no jogo Corrida dos Racionais, realizamos algumas pequenas alterações no material original que consistiram, basicamente, em algumas marcações com pinturas de diferentes cores e inscrições de registros numéricos em sua superfície.

O material dourado adaptado é composto por três conjuntos, um para cada representação simbólico-numérica. Os conjuntos referentes às representações decimais e percentuais contêm, cada um, 1 placa, 5 barras e 10 cubos pequenos, já o conjunto das representações fracionárias, além de possuir 1 placa, 10 barras e 10 cubos pequenos, também é composto por subdivisões da placa em partes equivalentes a 1/2, 1/4 e 1/5.

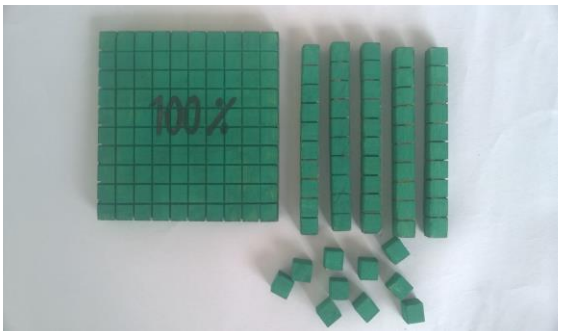
Como podemos ver nas figuras 7, 8 e 9, o conjunto vermelho refere-se à representação numérica decimal, o conjunto verde à representação numérica percentual e o conjunto amarelo à representação numérica fracionária do número racional.

Figura 7: Material dourado adaptado vermelho



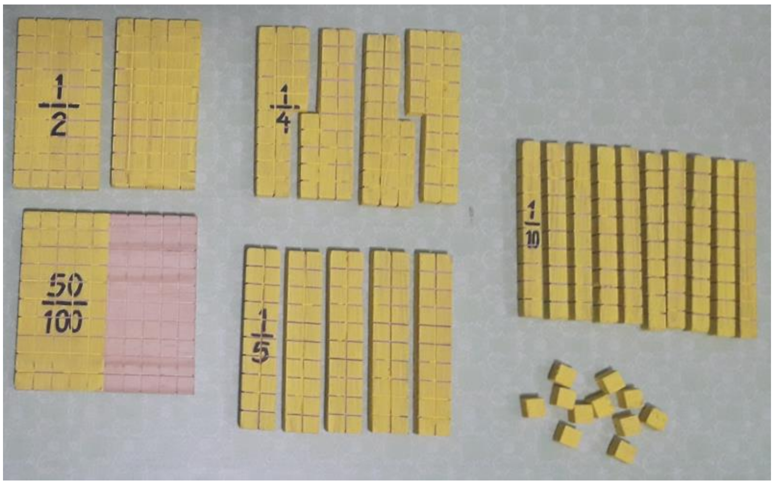
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 8: Material dourado adaptado verde



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 9: Material dourado adaptado amarelo



Fonte: Elaborada pelo autor

No material vermelho a placa representa o inteiro (1), as barras representam os décimos e os cubinhos os centésimos. De forma análoga, no material verde, a placa representa o total (100%) e as barras e cubinhos, respectivamente, 10% e 1%.

O verso de cada placa traz registros numéricos relativos à metade, décima parte e centésima parte do todo para cada representação, como podemos ver nas figuras 10 e 11:

Figura 10: Verso da placa do material dourado adaptado vermelho

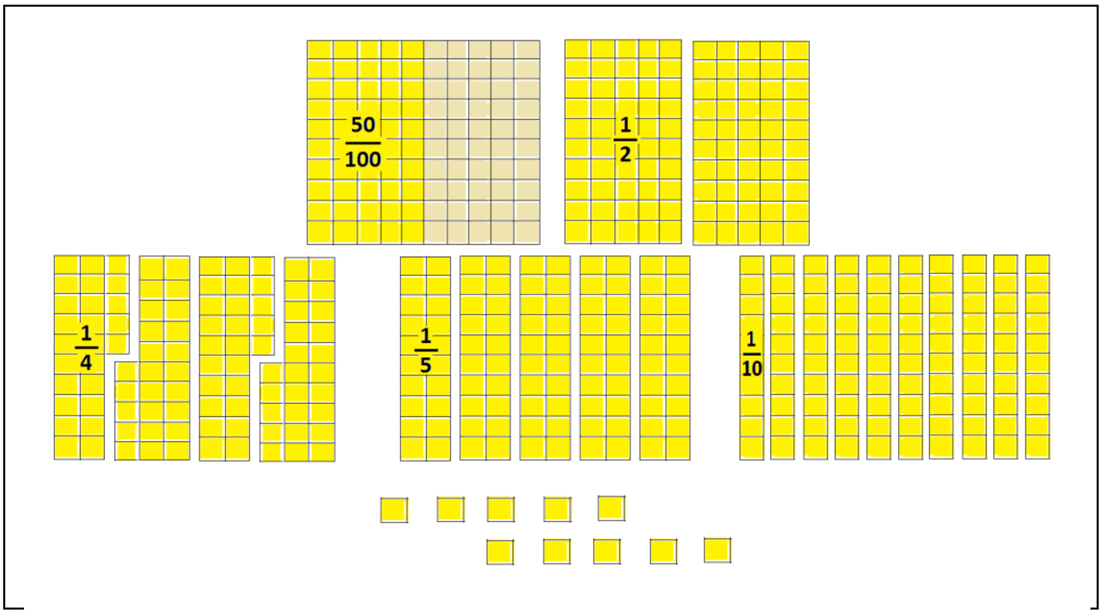
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 11: Verso da placa do material dourado adaptado verde

Fonte: Elaborada pelo autor

O material dourado amarelo, como se pode ver na figura 12, traz uma placa inteira com o registro numérico fracionário 50/100 inscrito em sua metade, blocos menores representando 1/2, 1/4 e 1/5, além das barras e os cubinhos representando, respectivamente, as frações 1/10 e 1/100.

Figura 12: Representações fracionárias no material amarelo



Fonte: Elaborada pelo autor

Como vimos anteriormente, o cubo pequeno do material dourado é usado, normalmente, para representar a unidade. Contudo, não poderemos subdividir o cubinho de madeira ao tratar de partes menores que a unidade. Por esta razão, encontramos, em algumas obras, a sugestão de considerar o cubo grande, que antes representava a unidade de milhar, como sendo a unidade. No caso do jogo em questão, a adaptação feita passa a considerar a placa como sendo a unidade, permitindo demonstrações até a casa dos centésimos.

Espera-se que cada placa funcione como uma espécie de malha quadriculada representada concretamente, na qual os alunos possam visualizar a relação da grandeza contínua (área pintada do todo) com a grandeza discreta (número de cubinhos considerados).

Acreditamos que o material favorece a aplicação de diferentes estratégias para a resolução das atividades propostas pelo jogo, dentre as quais algumas relacionadas à técnica do ladrilhamento, também conhecida como mosaico ou pavimentação do plano.

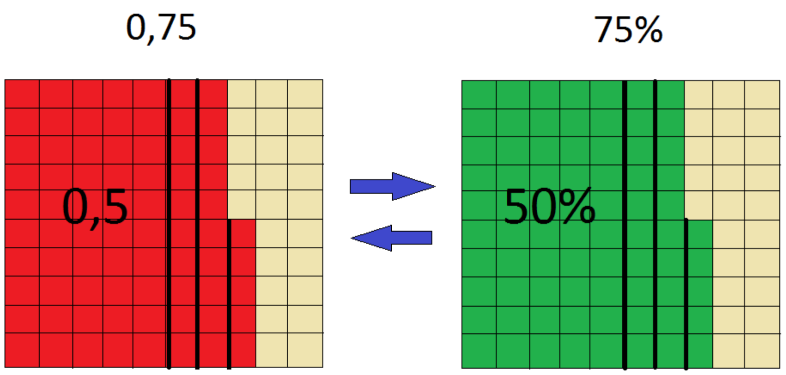
Segundo Dalcin e Alves (RPM 40, p.3), os chamados mosaicos do plano caracterizam-se pela cobertura de uma superfície plana feita por regiões poligonais sem deixar lacunas ou sobreposições. Esta “pavimentação do plano” surge como “um conjunto numerável de ladrilhos que cobrem o plano sem espaços intermediários nem sobreposições”.

Caetano et al. (2010, p. 2-4) afirmam sobre esse processo que:

> Para que um ladrilhamento possa ser considerado “bem comportado”, a primeira regra diz que os polígonos que o constituem precisam ser regulares, ou seja, é necessário que eles possuam todos os lados e ângulos internos iguais [...] Além disso, a segunda regra define que a intersecção entre os polígonos deve ser sempre um lado ou um vértice. Garantidas essas condições, a soma dos ângulos internos adjacentes a cada vértice será igual a 360°, para que não existam sobreposições e nem espaços vazios entre eles. Por fim, para que a terceira regra seja atendida, a distribuição dos ladrilhos ao redor de cada um dos vértices do ladrilhamento deverá ser sempre a mesma (IBIDEM).

Como vimos, a ideia de ladrilhamento está normalmente associada a figuras planas, ou seja, de natureza bidimensional, já o material dourado, como sabemos, é de natureza tridimensional. Contudo, ao considerar a placa do material dourado como o plano e os cubinhos como os ladrilhos, os alunos constroem, no concreto, “pavimentações” representativas de vários números racionais que os auxiliam, por exemplo, numa atividade de conversão entre um registro numérico decimal e um registro numérico percentual a partir da comparação das áreas “ladrilhadas”, como pode ser visto na figura 13.

Figura 13: Exemplo de conversão utilizando o material dourado adaptado



Fonte: Elaborada pelo autor

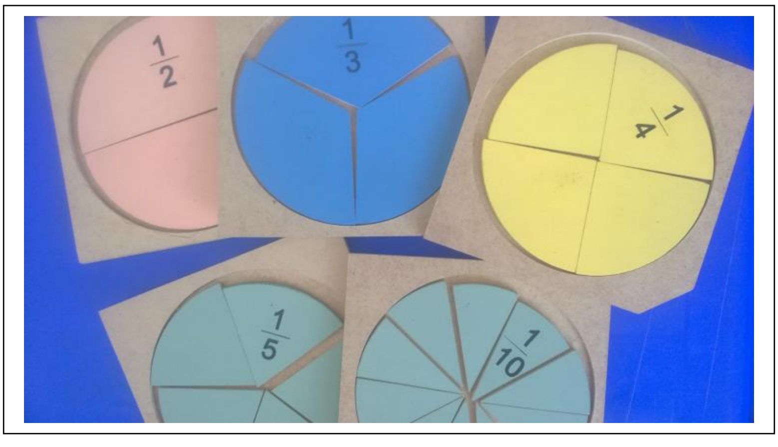
Observa-se que para compor a representação concreta de 0,75 (setenta e cinco centésimos) adicionamos duas barras de 0,10 (dez centésimos) cada e cinco cubinhos de 0,01 (um centésimo) cada à parte de 0,50 (cinqüenta centésimos) já destacada no material vermelho. O mesmo procedimento foi realizado com o material verde para a representação concreta de 75% (setenta e cinco por cento).

4.1.2 Disco de Frações

O disco de frações proporciona uma boa visualização de frações representadas a partir da ideia de um todo contínuo dividido em partes iguais. Este tipo de material também facilita a compreensão do conceito de equivalência, pois os alunos podem, facilmente, sobrepor vários discos e investigar, considerando a congruência ou incongruência das áreas ocupadas pelas partes, quais frações correspondem à mesma parte do inteiro.

Utilizamos, no experimento piloto, o conjunto de discos integrantes do jogo Corrida dos Racionais composto por cinco círculos em madeira, com cores distintas, subdivididos em duas, três, quatro, cinco e dez partes iguais para representar, respectivamente, as frações 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 e 1/10, como vemos na figura 14:

Figura 14: Discos de frações utilizados no experimento piloto



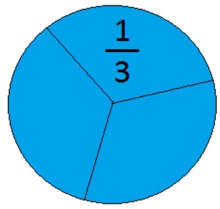
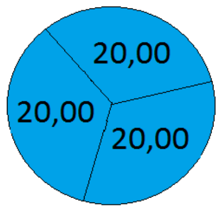
Fonte: Elaborada pelo autor

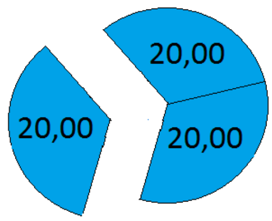
A escolha específica destes cinco discos para a composição do jogo baseou-se no fato de serem frações mais presentes nas relações cotidianas e cuja atribuição de significado pelos alunos parece ser mais favorecida. Os discos selecionados também atendem às situações nas quais os estudantes têm que realizar exercícios de conversão entre representações do número racional durante uma partida.

No contexto de uma partida do jogo Corrida dos Racionais, as situações em que os discos são comumente usados pelos alunos como apoio a suas resoluções são aquelas que demandam a mobilização do significado operador da fração.

Descrevemos no quadro 4 um possível percurso metodológico adotado pelos alunos para uma situação do jogo em que estes precisam calcular 1/3 de R$ 60,00 que utiliza a ideia de parte-todo, mas que também expressa um caráter operatório na resolução:

Quadro 4: Possível percurso resolutivo para uma situação proposta pelo jogo Corrida dos Racionais utilizando o disco de frações

<table>
<tr><th>Etapas</th><th>Ação</th><th>Significado da fração</th><th>Ilustração</th></tr>
<tr><td>1º</td><td>Escolha do disco que representa o inteiro dividido em três partes iguais.</td><td>Parte-todo</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2º</td><td>Distribuição equitativa do todo (60,00) entre as partes do disco (divisão do todo pelo denominador da fração).</td><td rowspan="2">Operador</td><td>

60 ÷ 3 = 20</td></tr>
<tr><td>3º</td><td>Soma das partes consideradas (multiplicação do quantitativo de cada parte pelo numerador).</td><td>

20 x 1 = 20</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor

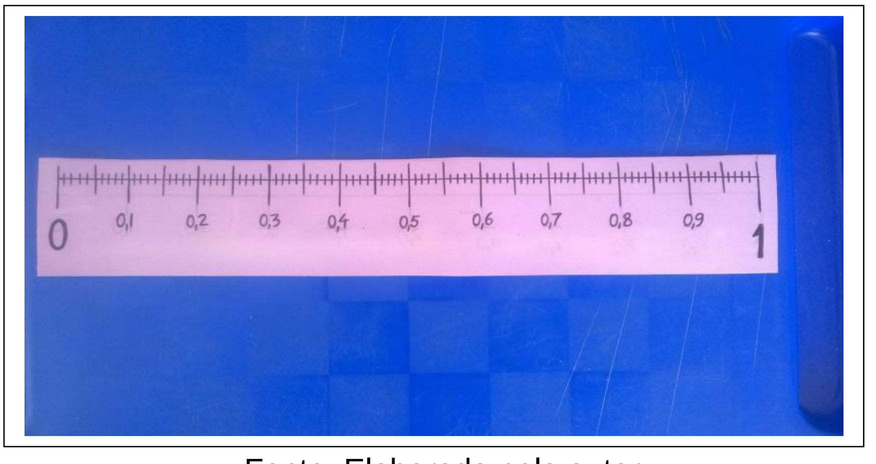
Percebe-se que a resolução prevista implica uma conversão inicial de uma representação numérica fracionária para uma representação figurativa de quantidade contínua expressa pelo material concreto.

4.1.3 Régua Numérica

A reta numérica é um excelente recurso utilizado nas aulas de matemática para auxiliar na compreensão e visualização do racional como um número, seja qual for a representação envolvida. Ao identificar, por exemplo, o ponto da reta, no intervalo entre os números 0 e 1, que corresponde à 1/3, o aluno poderá perceber tal registro como representação de um determinado número. Em outras palavras, podemos dizer que a identificação dos racionais na reta numérica pode levar os alunos à percepção de que, embora existam diferentes registros, estes podem fazer referência a um único número e que tem sua própria posição na seqüência numérica. A reta, portanto, auxilia no entendimento das frações como números.

A régua numérica utilizada no jogo Corrida dos Racionais é uma representação concreta de uma reta numérica com intervalo entre 0 e 1, subdividido em 100 partes equivalentes. Os segmentos referentes às décimas partes estão destacados com registros na representação numérica decimal como vemos na figura 15:

Figura 15: Régua numérica.



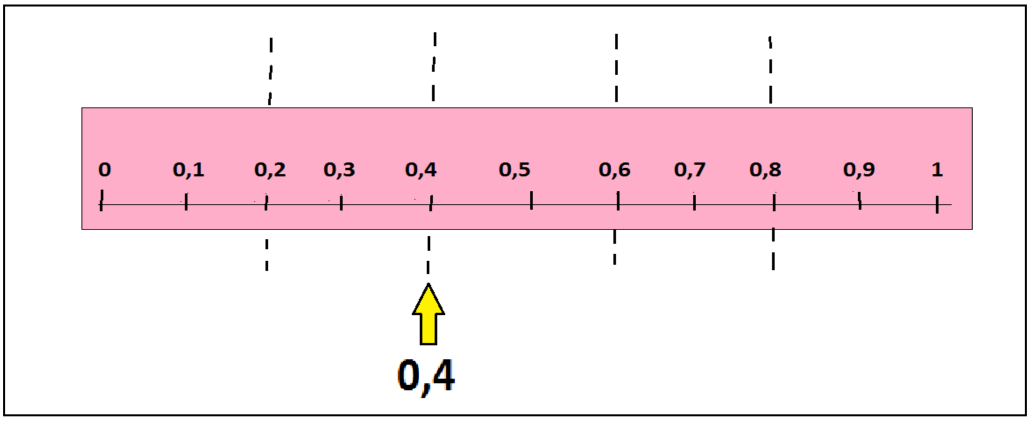
Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando no segmento de reta figuram duas ou mais unidades, é natural que alguns alunos, equivocadamente, considerem como o inteiro a totalidade deste segmento, ao invés do intervalo correspondente a uma unidade. Assim, a exemplo do que ocorre com o material dourado adaptado e o disco de frações citados anteriormente, a régua numérica utilizada no jogo evidencia a unidade como referência e, portanto, limita toda a sua sequência numérica ao intervalo entre zero e um.

A vivência do jogo Corrida dos Racionais demonstrou que a mobilização do significado parte-todo utilizando a régua numérica pode surgir como estratégia resolutiva para algumas atividades de conversão.

Para realizar a conversão, por exemplo, do registro numérico fracionário 2/5 para o registro numérico decimal, os alunos podem usar a estratégia de considerar o intervalo entre os números 0 e 1 como sendo o todo, subdividi-lo em 5 partes iguais e observar que decimal corresponde ao limite entre a segunda e a terceira parte como ilustra a figura 16:

Figura 16: Possível estratégia resolutiva para uma atividade de conversão utilizando a régua numérica



Fonte: Elaborada pelo autor

4.1.4 Pastilhas plásticas

As pastilhas plásticas complementam o conjunto de concretos do jogo Corrida dos Racionais e são utilizadas, principalmente, em situações durante uma partida que demandam conversões envolvendo representações de grandezas discretas.

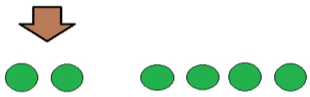
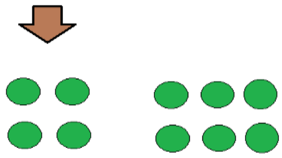
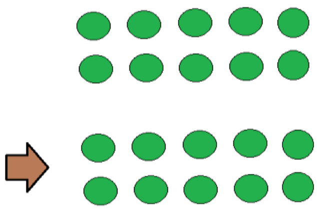
Figura 17: Pastilhas plásticas

Fonte: Elaborada pelo autor

Algumas situações do jogo requerem dos alunos a realização de conversões do registro simbólico-numérico para representações elaboradas a partir das pastilhas plásticas.

Temos nestes casos, portanto, conversões cujas representações finais são figurativas de quantidades discretas elaboradas concretamente com as pastilhas. No quadro 5, vemos alguns exemplos de como os alunos constroem tais representações durante uma partida:

Quadro 5: Exemplos de representações com as pastilhas plásticas

Número	Representação
1/3	
40%	
0,5	

Fonte: Elaborado pelo autor

Nesta pesquisa, tomamos as demonstrações a partir das pastilhas por representações figurativas concretas dos números 1/3, 40% e 0,5. Consideram-se, portanto, nos exemplos dados, conversões do tipo *registro numérico → registro figurativo de quantidade discreta.*

4.2 Análise a priori das conversões e algumas possíveis formas de resolução evidenciadas no experimento piloto

O foco desta pesquisa, como já dissemos, é a investigação de como os alunos interagiram com o material manipulável na resolução de problemas envolvendo conversões entre diferentes representações do número racional. Neste sentido, os materiais manipuláveis e as atividades que utilizamos no experimento piloto vieram das experiências com o jogo Corrida dos Racionais, cuja jogabilidade produz situações nas quais os alunos precisam realizar demonstrações de conversões a partir destes concretos.

No quadro 6, apresentamos as atividades de conversão entre representações do número racional propostas no jogo Corrida dos Racionais, alguns possíveis caminhos resolutivos para cada manipulável, bem como os conhecimentos que podem ser mobilizados pelos alunos.

Quadro 6 : Conversões, possíveis caminhos resolutivos e os conhecimentos mobilizados no contexto do jogo Corrida dos Racionais

DISCO DE FRAÇÕES		
CONVERSÃO	**POSSÍVEL CAMINHO RESOLUTIVO**	**CONHECIMENTOS MOBILIZADOS**
Figurativa (contínua) ↓ Numérica fracionária	Verificar se a figura foi dividida em partes iguais, escolher um disco de frações que foi dividido ou que possa ser dividido no mesmo número de partes, destacar no disco de frações o número de partes que corresponde às partes pintadas na figura. A representação numérica fracionária será dada por número de partes destacadas / número total de partes.	Compreensão da ideia de fração como parte-todo. Compreensão da ideia de que frações equivalentes representam a mesma parte de um todo.
Figurativa (discreta) ↓ Numérica fracionária	Verificar em quantas partes iguais pode ser dividido o total de elementos da figura de modo que uma ou mais destas partes sejam totalmente ocupadas pelos elementos destacados. Contar o número de partes em que foi dividido o total de elementos e o número de partes ocupadas pelos elementos destacados. Escolher um disco de frações que foi dividido ou que possa ser dividido no mesmo número total de partes, evidenciar no disco de frações o número de partes que corresponde às partes ocupadas pelos elementos destacados. A representação numérica fracionária será dada por número de partes destacadas / número total de partes.	Compreensão da Ideia de fração como parte-todo. Compreensão da ideia de que frações equivalentes representam a mesma parte de um todo.
Numérica fracionária	Escolher um disco de frações que foi dividido ou que possa ser dividido no mesmo número de partes indicadas no	Compreensão da Ideia de fração como parte-todo.

↓ Figurativa (contínua)	denominador, destacar no disco de frações o número de partes indicadas pelo numerador. A representação figurativa de quantidade contínua será dada por esta apresentação do concreto.	Compreensão da ideia de que frações equivalentes representam a mesma parte de um todo.
Numérica decimal ↓ Numérica fracionária	Para representar partes decimais, escolher um disco de frações que foi dividido em dez partes e destacar o número de partes referente ao número de décimos. Pode-se usar a equivalência para tomar discos com outras divisões. A representação numérica fracionária será dada por número de partes destacadas / número total de partes.	Compreensão da Ideia de fração como parte-todo. Compreensão da ideia de que frações equivalentes representam a mesma parte de um todo.
Numérica percentual ↓ Numérica fracionária	Escolher o disco de frações que foi dividido em dez partes e considerar cada parte como sendo 10%. Destacar no disco de frações um número de partes cuja soma equivale ao percentual em questão. A representação numérica fracionária será dada por número de partes destacadas / número total de partes.	Compreensão da Ideia de fração como parte-todo. Compreensão da ideia de que frações equivalentes representam a mesma parte de um todo.
Numérica fracionária ↓ Figurativa	Tomar o disco de frações que está dividido no número de partes indicado pelo denominador ou um de seus múltiplos. Considerar o disco todo como o valor* dado e calcular quanto deste valor cabe a cada uma das partes através da divisão todo/partes. Por fim, considerar apenas o número de partes indicado pelo numerador e efetuar a soma delas.	Compreensão da ideia de fração como operador. Compreensão da ideia de que frações equivalentes representam a mesma parte de um todo.
MATERIAL DOURADO ADAPTADO		
Figurativa (contínua) ↓ Numérica decimal	Contar em quantas partes iguais foi dividida a figura. Considerando a placa do material dourado adaptado como o inteiro, dividi-la no mesmo número de partes. Destacar as partes que correspondem ao número de partes pintadas na figura. Considerar as barras como décimos e os cubinhos como centésimos. A representação numérica decimal será dada pela soma das barras (décimos) e cubinhos (centésimos) das partes destacadas.	Compreensão da Ideia de fração como parte-todo. Compreensão da ideia de que frações equivalentes representam a mesma parte de um todo.
Figurativa (discreta)	Verificar em quantas partes iguais pode ser dividido o total de elementos da figura	Compreensão da ideia de fração como parte-

↓ Numérica decimal	de modo que uma ou mais destas partes sejam totalmente ocupadas pelos elementos destacados. Contar o número de partes em que foi dividido o total de elementos e o número de partes ocupadas pelos elementos destacados. Considerando a placa do material dourado adaptado como o inteiro, dividi-la no mesmo número de partes. Destacar as partes que correspondem ao número de partes pintadas na figura. Considerar as barras como décimos e os cubinhos como centésimos. A representação numérica decimal será dada pela soma das barras (décimos) e cubinhos (centésimos) das partes destacadas.	todo. Compreensão da ideia de que frações equivalentes representam a mesma parte de um todo.
Numérica Fracionária ↓ Numérica decimal	Considerando a placa do material dourado adaptado como o inteiro, dividi-la no mesmo número de partes indicadas no denominador, destacando o número de partes indicadas pelo numerador. Considerar as barras como décimos e os cubinhos como centésimos. A representação numérica decimal será dada pela soma das barras (décimos) e cubinhos (centésimos) das partes destacadas.	Compreensão da Ideia de fração como parte-todo. Compreensão da ideia de que frações equivalentes representam a mesma parte de um todo.
Numérica decimal ↓ Figurativa (discreta)	Para representar partes decimais, considerar a placa do material dourado adaptado como o inteiro, dividi-la em dez partes iguais, destacando o número de partes referente ao número de décimos. A representação figurativa de quantidade discreta será dada por esta apresentação do concreto.	Compreensão da ideia de fração como parte-todo.
Numérica percentual ↓ Numérica decimal	Considerar a placa do material dourado adaptado como sendo 100%, dividi-la em partes de 10% (barras) e ou 1% (cubinhos), destacar o número de partes referentes ao percentual que se quer representar. Considerar, agora, as barras como décimos e os cubinhos como centésimos. A representação numérica decimal será dada pela soma das barras (décimos) e cubinhos (centésimos) das partes destacadas.	Compreensão da Ideia de fração como parte-todo.
Figurativa (contínua) ↓	Contar em quantas partes iguais foi dividida a figura. Considerando a placa do material dourado adaptado como sendo 100%, dividi-la no mesmo número	Compreensão da Ideia de fração como parte-todo. Compreensão da ideia de que frações

Numérica percentual	de partes. Destacar as partes que correspondem ao número de partes pintadas na figura. Considerar as barras como sendo 10% e os cubinhos como sendo 1% do todo. A representação numérica percentual será dada pela soma das barras (10%) e cubinhos (1%) das partes destacadas.	equivalentes representam a mesma parte de um todo.
Figurativa (discreta) ↓ Numérica percentual	Verificar em quantas partes iguais pode ser dividido o total de elementos da figura de modo que uma ou mais destas partes sejam totalmente ocupadas pelos elementos destacados. Contar o número de partes em que foi dividido o total de elementos e o número de partes ocupadas pelos elementos destacados. Considerando a placa do material dourado adaptado como sendo 100%, dividi-la no mesmo número de partes. Destacar as partes que correspondem ao número de partes pintadas na figura. Considerar as barras como sendo 10% e os cubinhos como sendo 1% do todo. A representação numérica percentual será dada pela soma das barras (10%) e cubinhos (1%) das partes destacadas.	Compreensão da ideia de fração como parte-todo. Compreensão da ideia de que frações equivalentes representam a mesma parte de um todo.
Numérica Fracionária ↓ Numérica percentual	Considerando a placa do material dourado adaptado como sendo 100%, dividi-la no mesmo número de partes indicadas no denominador, destacando o número de partes indicadas pelo numerador. Considerar as barras como sendo 10% e os cubinhos como sendo 1%. A representação numérica percentual será dada pela soma das barras (10%) e cubinhos (1%) das partes destacadas.	Compreensão da Ideia de fração como parte-todo. Compreensão da ideia de que frações equivalentes representam a mesma parte de um todo.
Numérica Percentual ↓ Figurativa (discreta)	Considerar a placa do material dourado adaptado como sendo 100%, cada barra como sendo 10% e cada cubinho como sendo 1%. Destacar o número de barras e ou cubinhos cuja soma seja equivalente ao percentual em questão. A representação figurativa de quantidade discreta será dada por esta apresentação do concreto.	Compreensão da ideia de fração como parte-todo.
Numérica decimal ↓	Considerar a placa do material dourado adaptado como sendo o inteiro. Considerar as barras como décimos e os cubinhos como centésimos. Destacar o	Compreensão da Ideia de fração como parte-todo.

Numérica percentual	número de barras (décimos) e cubinhos (centésimos) cuja soma seja equivalente ao número decimal em questão.Considerar, agora, as barras como sendo 10% e os cubinhos como sendo 1%. A representação numérica percentual será dada pela soma das barras (10%) e ou cubinhos (1%) das partes destacadas.	
Numérica decimal ↓ Figurativa	Tomar a placa do material dourado como sendo o valor* total dado. Considerando as barras como décimos e os cubinhos como centésimos, destacar a quantidade de barras e ou cubinhos que equivalem à representação decimal em questão. Por fim, verificar quanto do valor monetário total refere-se à parte destacada.	Compreensão da ideia de fração como operador. Compreensão da ideia de décimo como uma parte do inteiro que foi dividido em dez partes iguais e centésimo como uma parte do inteiro que foi dividido em cem partes iguais.
Numérica percentual ↓ Figurativa	Tomar a placa do material dourado como sendo o valor* total dado. Considerando cada barra como 10% e cada cubinho como 1%, destacar a quantidade de barras e ou cubinhos que equivalem à representação percentual em questão. Por fim, verificar quanto do valor monetário total refere-se à parte destacada.	Compreensão da ideia de fração como operador. Compreensão da ideia de 10% como uma parte do inteiro que foi dividido em dez partes iguais e de 1% como uma parte do inteiro que foi dividido em cem partes iguais.
PASTILHAS PLÁSTICAS		
Figurativa (contínua) ↓ Numérica fracionária	Contar em quantas partes iguais foi dividida a figura, escolher uma certa quantidade de pastilhas dividindo-as, igualmente, no mesmo número de partes, destacando as partes que correspondem ao número de partes pintadas na figura. A representação numérica fracionária será dada por número de pastilhas nas partes destacadas / número total de pastilhas.	Compreensão da Ideia de fração como parte-todo. Compreensão da ideia de que frações equivalentes representam a mesma parte de um todo.
Figurativa (discreta) ↓ Numérica fracionária	Verificar em quantas partes iguais pode ser dividido o total de elementos da figura de modo que uma ou mais destas partes sejam totalmente ocupadas pelos elementos destacados. Contar o número de partes em que foi dividido o total de elementos e o número de partes ocupadas pelos elementos destacados.	Compreensão da Ideia de fração como parte-todo. Compreensão da ideia de que frações equivalentes representam a mesma parte de um todo.

	Escolher uma certa quantidade de pastilhas dividindo-as, igualmente, no mesmo número total de partes, evidenciando as partes que correspondem ao número de partes ocupadas pelos elementos destacados. A representação numérica fracionária será dada por número de pastilhas nas partes destacadas / número total de pastilhas.	
Numérica fracionária ↓ Figurativa (discreta)	Escolher uma certa quantidade de pastilhas dividindo-as, igualmente, no mesmo número de partes indicado no denominador, destacando o número de partes indicado pelo numerador. A representação figurativa de quantidade discreta será dada por esta apresentação do concreto.	Compreensão da Ideia de fração como parte-todo. Compreensão da ideia de que frações equivalentes representam a mesma parte de um todo.
Numérica decimal ↓ Numérica fracionária	Para representar partes decimais, escolher dez pastilhas e considerar este total como sendo o inteiro. Destacar o número de pastilhas referente ao número de décimos. Pode-se usar a equivalência para tomar, como inteiro, outras quantidades de pastilhas. A representação numérica fracionária será dada por número de pastilhas destacadas / número total de pastilhas.	Compreensão da Ideia de fração como parte-todo. Compreensão da ideia de que frações equivalentes representam a mesma parte de um todo.
Numérica percentual ↓ Numérica fracionária	Tomar dez pastilhas e considerar cada uma como sendo 10%. Destacar o número de pastilhas cuja soma equivale ao percentual que se quer demonstrar. A representação numérica fracionária será dada por número de pastilhas destacadas / número total de pastilhas.	Compreensão da Ideia de fração como parte-todo.
	RÉGUA NUMÉRICA	
Figurativa (contínua) ↓ Numérica decimal	Dividir o intervalo entre 0 e 1 da régua numérica pelo mesmo número de partes iguais em que está dividida a figura. Observar quantas partes estão destacadas na figura. Partindo do zero, considerar o mesmo número de partes na reta numérica. A representação numérica decimal será dada pelo número da régua numérica que limita estas partes.	Compreensão da ideia de fração como número.
Figurativa (discreta) ↓	Verificar em quantas partes iguais pode ser dividido o total de elementos da figura de modo que uma ou mais destas partes sejam totalmente ocupadas pelos	Compreensão da ideia de fração como número.

Numérica decimal	elementos destacados. destacados. Dividir o intervalo entre 0 e 1 da régua numérica pelo mesmo número de partes em que foram divididos os elementos da figura. Observar quantas partes correspondem aos elementos destacadas na figura. Partindo do zero, considerar o mesmo número de partes na régua numérica. A representação numérica decimal será dada pelo número da régua numérica que limita estas partes.	
Numérica fracionária ↓ Numérica decimal	Dividir o intervalo entre 0 e 1 da régua numérica pelo número de partes indicado pelo denominador da fração. Partindo do zero, considerar na régua numérica o número de partes indicado pelo numerador da fração. A representação numérica decimal será dada pelo número da régua numérica que limita estas partes.	Compreensão da ideia de fração como número.
Numérica percentual ↓ Numérica decimal	Considerar o intervalo entre 0 e 1 da reta como sendo o intervalo entre 0% e 100%. Observar qual o ponto da régua numérica que corresponde ao percentual em questão.	Compreensão da ideia de fração como número.
Figurativa (contínua) ↓ Numérica decimal	Efetuar a divisão numerador/denominador da fração representada e indicar o resultado na régua numérica.	Compreensão da Ideia de fração como quociente.
Figurativa (discreta) ↓ Numérica decimal	Verificar em quantas partes iguais pode ser dividido o total de elementos da figura de modo que uma ou mais destas partes sejam totalmente ocupadas pelos elementos destacados. Contar o número de partes em que foi dividido o total de elementos e o número de partes ocupadas pelos elementos destacados, os quais serão, respectivamente, denominador e numerador da fração. Efetuar a divisão numerador/denominador da fração representada e indicar o resultado na régua numérica.	Compreensão da Ideia de fração como quociente.
Numérica fracionária	Efetuar a divisão numerador/denominador da fração representada e indicar o resultado na	Compreensão da Ideia de fração como quociente.

↓ Numérica decimal	régua numérica.	

* O valor mencionado na descrição do possível caminho resolutivo refere-se ao valor monetário nas atividades do tipo “calcular 30% de 80,00”. Estas atividades surgem durante o jogo e sempre demandam uma conversão do tipo simbólico-numérica → figurativa concreta na demonstração com o manipulável.

Fonte: Elaborado pelo autor

As atividades propostas asseguravam que as conversões entre representações figurativas e numéricas dos números racionais fossem realizadas pelos alunos através da manipulação dos quatro materiais manipuláveis dispostos no experimento piloto.

Nesse sentido, as demonstrações solicitadas aos alunos tinham como propósito que o disco de frações, o material dourado adaptado, as pastilhas plásticas e a régua numérica funcionassem como um meio utilizável pelos estudantes para promover estas transformações e que servissem para proporcionar uma imagem concreta do processo, revelando os conhecimentos trazidos pelos alunos e as estratégias de resolução empregadas.

Portanto, os erros, assim como os acertos observados, certamente evidenciariam elementos importantes nessa investigação. A partir de Cury (2008), podemos dizer que o erro pode ser muito mais revelador sobre os conhecimentos do aluno e sobre a maneira como ele pensa do que o próprio acerto.

Dessa forma, ao estudarmos como os alunos lidam com o material concreto durante as conversões envolvendo diferentes registros do número racional, acreditamos que, assim como as estratégias mal sucedidas, os procedimentos bem sucedidos e justificados têm muito a nos dizer sobre a maneira como os estudantes organizam o seu pensamento e mobilizam os seus conhecimentos.

A seguir apresentamos os resultados obtidos num experimento piloto com um grupo de cinco alunos. Além de apontar alguns resultados importantes, o mesmo serviu como estratégia metodológica para selecionarmos um dos materiais e, a partir dele, aprofundarmos o nosso estudo visando identificar limites e possibilidades no uso de material manipulável em conversões entre representações de números racionais, ou seja, investigar como, a partir do uso de um manipulável, os estudantes organizam o seu pensamento e mobilizam os seus conhecimentos para realizar tais conversões.

5 EXPERIMENTO PILOTO

Realizamos o experimento piloto a fim de verificarmos como os alunos utilizavam o material manipulável disponibilizado em exercícios de conversão entre representações do número racional e, para tanto, exploramos as atividades propostas pelo jogo Corrida dos Racionais com cinco alunos, dois dos quais cursavam o 9º ano do ensino fundamental e três que já estavam no ensino médio, com idades entre 14 e 18 anos.

Com o objetivo de otimizar nosso tempo e obter um registro mais detalhado das ações dos alunos, optamos por não jogar, mas apenas usar os exercícios que poderiam surgir durante uma partida. Dessa forma, pudemos ir direto àquilo que interessava para nossa observação, a saber, as atividades de conversão entre representações dos números racionais.

Escolhemos 21 (vinte e uma) atividades de conversão possíveis durante uma partida com o jogo Corrida dos Racionais. A seleção foi baseada nos seguintes critérios:

- As situações deveriam contemplar todos os tipos de registros de representações presentes no jogo, ou seja, os registros numéricos decimais, percentuais e fracionários e os registros figurativos de quantidades contínuas e discretas.

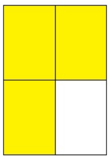
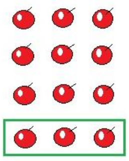
- As situações deveriam abranger todos os tipos de conversões propostas no jogo.

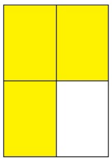
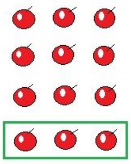
- As situações deveriam demandar a utilização de todos os quatro materiais manipuláveis concretos dispostos no jogo.

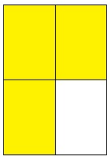
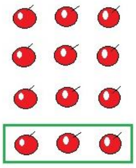
No quadro a seguir, apresentamos as 21 atividades selecionadas a partir do jogo Corrida dos Racionais para este experimento piloto, bem como as conversões propostas, os sentidos destas conversões e os manipuláveis a serem utilizados:

Quadro 7: Seleção das atividades, a partir do jogo Corrida dos Racionais, para o experimento piloto

N°	**Atividade**	**Conversão e sentido**	**Manipuláveis a utilizar**
1	Calcular 0,3 de 80,00 e demonstrar com o material concreto a sua escolha.	Numérica decimal ↓ Figurativa concreta	Livre escolha
2	Calcular 50% de 30,00 e demonstrar	Numérica	

	com o material concreto a sua escolha.	percentual ↓ Figurativa concreta	Livre escolha
3	Calcular 3/5 de 50,00 e demonstrar com o material concreto a sua escolha.	Numérica fracionária ↓ Figurativa concreta	Livre escolha
4	Calcular 3/10 de 80,00 e demonstrar com o material concreto a sua escolha.	Numérica fracionária ↓ Figurativa concreta	Livre escolha
5	Calcular 0,5 de 30,00 e demonstrar com o material concreto a sua escolha.	Numérica decimal ↓ Figurativa concreta	Livre escolha
6	Calcular 60% de 50,00 e demonstrar com o material concreto a sua escolha.	Numérica percentual ↓ Figurativa concreta	Livre escolha
7	Calcular 30% de 80,00 e demonstrar com o material concreto a sua escolha.	Numérica percentual ↓ Figurativa concreta	Livre escolha
8	Calcular 0,6 de 50,00 e demonstrar com o material concreto a sua escolha.	Numérica decimal ↓ Figurativa concreta	Livre escolha
9	Calcular 1/2 de 30,00 e demonstrar com o material concreto a sua escolha.	Numérica fracionária ↓ Figurativa concreta	Livre escolha
10	Converter a representação figurativa de quantidade contínua abaixo em representação numérica fracionária, demonstrar com o disco de frações e depois com as pastilhas plásticas. 	Figurativa ↓ Numérica fracionária	Disco de frações Pastilhas plásticas
11	Converter a representação figurativa de quantidade discreta abaixo em representação numérica fracionária, demonstrar com o disco de frações e depois com as pastilhas plásticas. 	Figurativa ↓ Numérica fracionária	Disco de frações Pastilhas plásticas
12	Converter a representação numérica percentual abaixo em representação	Numérica	Disco de

	numérica fracionária, demonstrar com o disco de frações e depois com as pastilhas plásticas. 70%	percentual ↓ Numérica fracionária	frações Pastilhas plásticas
13	Converter a representação numérica decimal abaixo em representação numérica fracionária, demonstrar com o disco de frações e depois com as pastilhas plásticas. 0,5	Numérica decimal ↓ Numérica fracionária	Disco de frações Pastilhas plásticas
14	Converter a representação figurativa de quantidade contínua abaixo em representação numérica percentual e demonstrar com o material dourado adaptado  .	Figurativa ↓ Numérica percentual	Material dourado adaptado
15	Converter a representação figurativa de quantidade discreta abaixo em representação numérica percentual e demonstrar com o material dourado adaptado. 	Figurativa ↓ Numérica percentual	Material dourado adaptado
16	Converter a representação numérica fracionária abaixo em representação numérica percentual e demonstrar com o material dourado adaptado. $\frac{1}{4}$	Numérica fracionária ↓ Numérica percentual	Material dourado adaptado
17	Converter a representação numérica decimal abaixo em representação numérica percentual e demonstrar com o material dourado adaptado. 0,5	Numérica decimal ↓ Numérica percentual	Material dourado adaptado
18	Converter a representação figurativa de quantidade contínua abaixo em representação numérica decimal, demonstrar com o material dourado adaptado e depois com a régua	Figurativa ↓ Numérica decimal	Material dourado adaptado

	numérica. 		Régua numérica
19	Converter a representação figurativa de quantidade discreta abaixo em representação numérica decimal, demonstrar com o material dourado adaptado e depois com a régua numérica. 	Figurativa ↓ Numérica decimal	Material dourado adaptado Régua numérica
20	Converter a representação numérica fracionária abaixo em representação numérica decimal, demonstrar com o material dourado adaptado e depois com a régua numérica. $\frac{1}{4}$	Numérica fracionária ↓ Numérica decimal	Material dourado adaptado Régua numérica
21	Converter a representação numérica percentual abaixo em representação numérica decimal, demonstrar com o material dourado adaptado e depois com a régua numérica. 70%	Numérica percentual ↓ Numérica decimal	Material dourado adaptado Régua numérica

Fonte: Elaborado pelo autor

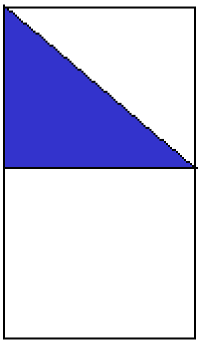
Como já dissemos, optamos por utilizar no experimento piloto atividades oriundas de situações que podem surgir durante uma partida do jogo Corrida dos Racionais e, nesse contexto, os materiais manipuláveis ali dispostos são usados pelos alunos como apoio na resolução das conversões propostas e para comprovar, a partir de demonstrações, a veracidade de suas respostas. No caso dos alunos que conseguiam resolver algumas conversões mentalmente, as demonstrações com o material manipulável também serviram para revelar se tais resoluções baseavam-se em apreensões conceituais acerca do objeto ou se eram fruto apenas da aplicação de alguma técnica aprendida.

As atividades exploravam representações que abrangiam registros figurativos de quantidades contínuas e discretas, bem como registros numéricos fracionários, decimais e percentuais.

Os dois registros figurativos utilizados nas questões também foram retirados do jogo e referiam-se à ideia de fração como parte-todo. Pela aplicação da técnica de dupla contagem, esperava-se que os alunos identificassem o registro figurativo de quantidade contínua e o registro figurativo de quantidade discreta como representações de 3/4 e 3/12 ou 1/4, respectivamente.

Quanto ao registro figurativo de quantidade contínua, nota-se que a escolha da figura (um retângulo dividido em quatro partes iguais) não favorecia a compreensão de que ao falarmos de partes iguais, no âmbito das frações de grandezas contínuas, referimo-nos à congruência de suas áreas. Os registros também não confrontavam os alunos com o fato de que a técnica de dupla contagem não é suficiente e pode induzir ao erro em situações que trazem figuras como a apresentada a seguir.

Figura 18: Registro figurativo de quantidade contínua



Fonte: Elaborada pelo autor

Neste caso, o registro figurativo pode ser, equivocadamente, identificado como uma representações de 1/3 se o aluno relacionar o denominador e o numerador da fração ao número de partes em que foi dividido o todo e o número de partes destacadas, respectivamente, e desprezar a condição de que tais partes devem ser equivalentes.

Contudo, embora reconheçamos a pertinência de representações figurativas desse tipo para estas aprendizagens, não nos pareceu a melhor opção considerando o foco de nossa pesquisa.

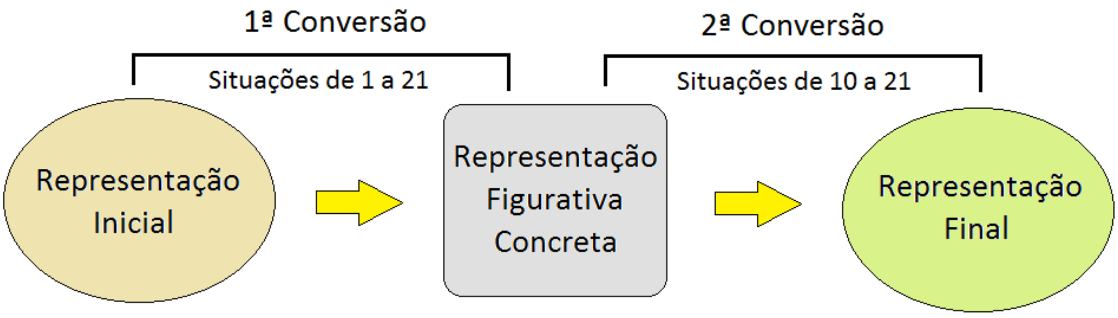
Em relação ao registro figurativo de quantidade discreta utilizado no experimento é importante destacar que, ao trabalharmos coleções de objetos com o significado parte-todo da fração, estamos também mobilizando o seu sentido operatório, já que esta atua no número total de elementos e obtém um novo número de elementos como resultado. A figura, em questão, representa um conjunto com doze frutas e sua escolha teve por objetivo facilitar as possíveis conversões para outros registros de representação considerando os materiais manipuláveis do experimento.

Como vemos, nas proposições de 1 a 9, os exercícios não demandam uma conversão como resposta, contudo neste caso observamos a conversão caracterizada pela mudança de um registro numérico simbólico para um registro figurativo concreto a partir de um dos materiais manipuláveis que o aluno escolhia.

Nas atividades de 10 a 21, os estudantes realizavam duas conversões durante o processo de resolução e demonstração com o manipulável. Na primeira, tínhamos a conversão de uma representação inicial, figurativa ou numérica, para uma representação figurativa concreta a partir de um material manipulável. A segunda conversão acontecia na passagem da representação concreta montada pelo aluno para a representação final, que seria a resposta da atividade.

No esquema a seguir, ilustrado na figura 19, procuramos sintetizar os "caminhos" da conversão nas situações de 1 a 21:

Figura 19: Caminhos das conversões nas situações de 1 a 21



Fonte: Elaborada pelo autor

Ainda com relação às situações de 1 a 9, concentramos as atividades, propositalmente, nos valores de 30,00, 50,00 e 80,00, de modo que para cada valor tínhamos exercícios envolvendo as três representações numéricas (decimal, percentual e fracionária).

A opção por não diversificar as quantias foi feita com a intenção de garantir que as eventuais dificuldades apresentadas pelos alunos pudessem ser relacionadas às representações envolvidas e não aos valores utilizados.

As 21 atividades de conversão foram apresentadas aos alunos individualmente. No primeiro momento, os estudantes respondiam sem a utilização dos manipuláveis concretos. Em seguida, apresentávamos os quatro materiais (disco de frações, pastilhas plásticas, material dourado adaptado e régua numérica), exemplificando ao menos uma forma de utilização, e pedíamos que estes manipuláveis fossem utilizados para demonstrar a validação de suas respostas ou para ajuda-los na resolução do problema.

Todas as respostas sem o uso do material manipulável, bem como a forma como os alunos utilizaram-no para refazer ou validar suas resoluções foram registradas através de texto escrito pelo professor observador.

5.1 Análise do experimento piloto e indicativos para delimitação do objeto de estudo

Ao todo foram 105 resoluções analisadas a partir das 21 situações de conversão propostas para cada aluno. Na tabela a seguir apresentamos alguns resultados observados no experimento piloto relacionados à utilização dos materiais manipuláveis nas situações de conversão entre representações dos números racionais:

Tabela 1: Resultados observados no experimento piloto

Resultado	Ocorrência	Percentual
Aluno acertou sem utilizar o material e validou sua resposta com o material.	61	58%
Aluno errou sem utilizar o material e corrigiu sua resposta com o material.	19	18%

Aluno errou sem utilizar o material, reconheceu a resposta como incorreta com o material, mas não a corrigiu.	7	7%
Aluno errou sem utilizar o material e “validou” sua resposta incorreta com o material.	9	8%
Aluno errou sem utilizar o material e não conseguiu realizar qualquer demonstração.	9	8%

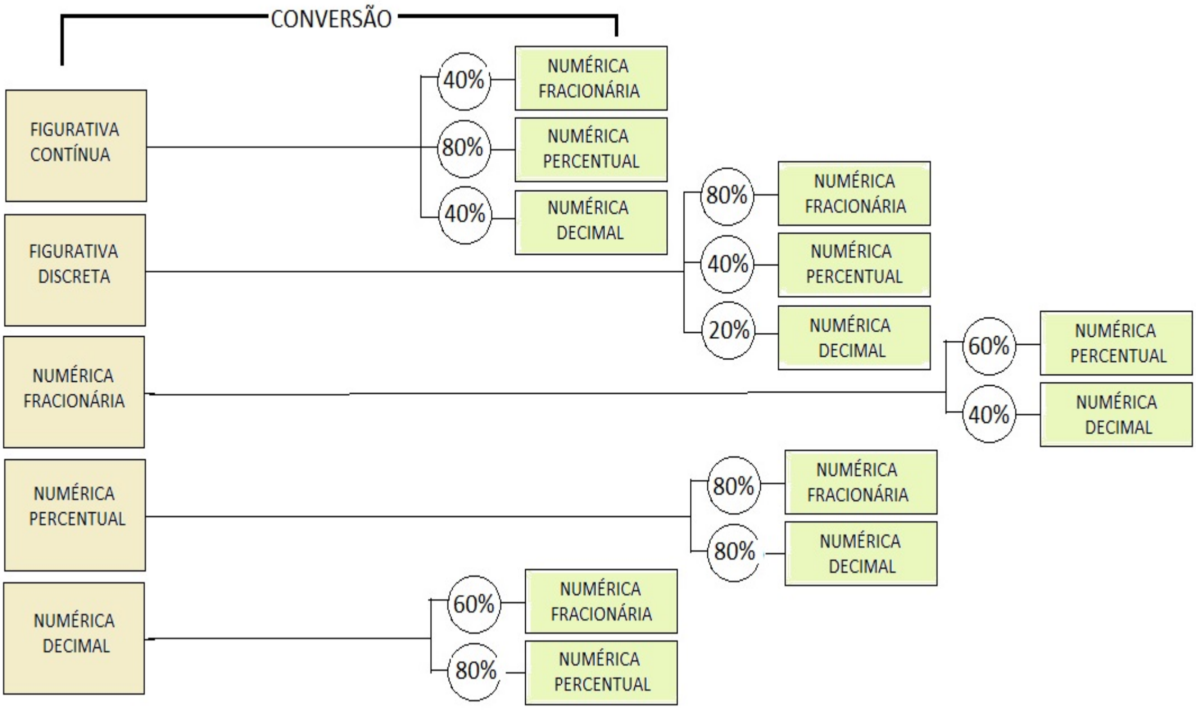
Fonte: Elaborada pelo autor

Os resultados do experimento piloto sugeriram que o uso dos materiais manipuláveis auxiliaram na resolução das atividades de conversão entre representações dos racionais propostas para os alunos. Dentre as 44 respostas erradas dadas sem a utilização do material, 26 foram identificadas como incorretas pelos próprios estudantes durante as suas demonstrações com os manipuláveis e 19 destas foram refeitas corretamente.

Por outro lado, em 18 oportunidades, os alunos não souberam como utilizar os materiais dispostos ou acabaram utilizando-os para “validar”, através de demonstrações equivocadas, suas respostas incorretas, corroborando com Pais (2001) que nos adverte acerca do erro de supor a aprendizagem dos alunos apenas pelo mero contato físico destes com tais objetos. Observamos, nestes casos, o indicativo de que, quando usados de forma errônea e sem a devida orientação, os materiais manipuláveis concretos podem até reforçar enganos cometidos pelos estudantes. No entanto, a dificuldade dos alunos pareceu estar mais relacionada à falta de conhecimento dos conceitos matemáticos envolvidos do que ao próprio manipulável, já que também não houve acertos sem a sua utilização.

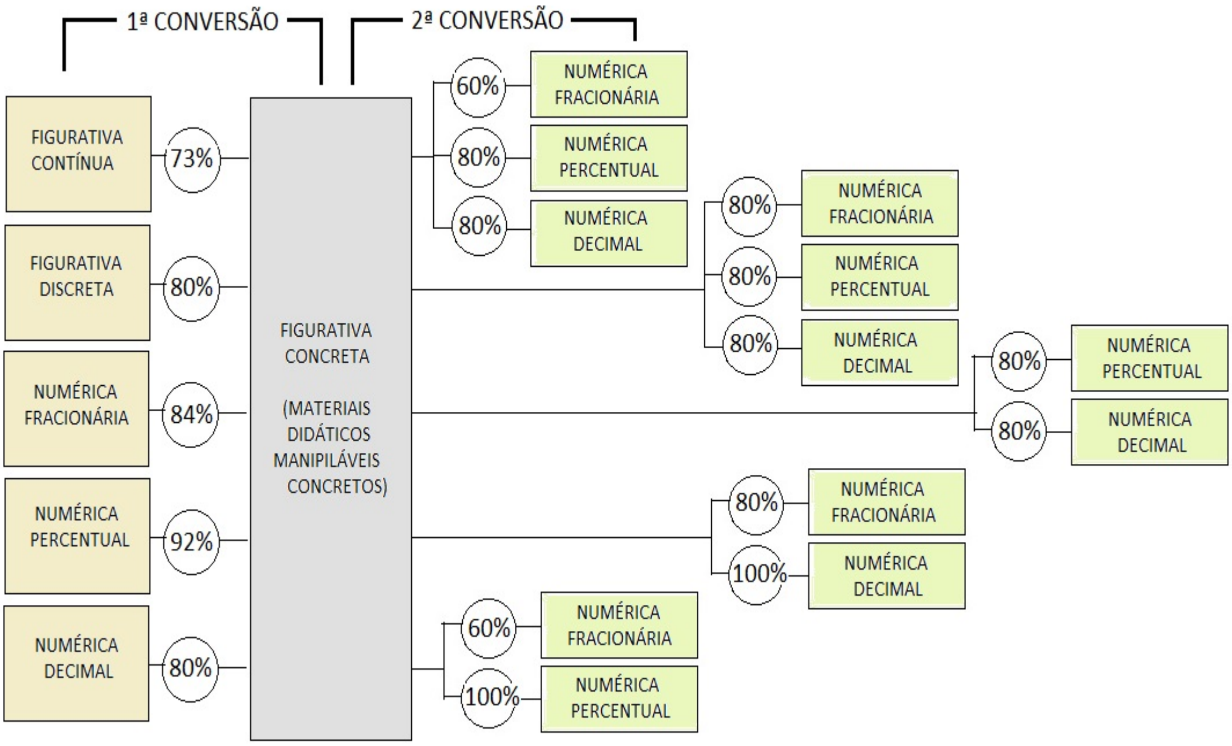
Nos esquemas mostrados nas figuras 20 e 21, buscamos apresentar o índice de acertos em cada conversão proposta, num primeiro momento sem a utilização do material manipulável e em seguida com a sua utilização.

Figura 20: Conversões e índice de acertos sem utilização do material manipulável



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 21: Conversões e índice de acertos com utilização do material manipulável



Fonte: Elaborado pelo autor

Percebe-se que das 12 conversões propostas, 8 apresentaram melhora no índice de acertos quando os alunos, em vez de realizarem uma conversão dada por *representação inicial → representação final,* promoveram uma dupla conversão dada por *representação inicial → representação no material manipulável* e *representação no material manipulável → representação final.*

Observou-se, também, que os alunos apresentaram diferentes desempenhos mesmo quando a situação proposta era a mesma e apenas alterava-se a representação numérica envolvida. Por exemplo, dos 5 alunos participantes do experimento piloto, todos resolveram corretamente a situação onde deveriam calcular 50% de 30,00, 4 conseguiram calcular 1/2 de 30,00 e apenas 2 chegaram à solução de 0,5 de 30,00.

Segundo Duval (2011), isto ocorre porque os alunos, frequentemente, detêm o conhecimento a cerca de uma determinada representação do objeto matemático (semiose) o que lhes permite resolver atividades que envolvem aquele tipo de registro, contudo isto não assegura que estes detenham o conceito do objeto (noesis). Como vimos, para o autor, os tipos de registros ou representações são apenas parciais em relação ao objeto e, portanto, a apreensão do conceito só pode acontecer a partir da integração de dois ou mais registros e suas respectivas especificidades (DUVAL, 2011).

Quanto ao uso de cada material, apresentamos a tabela 2 com o índice de acertos e as estratégias de resolução mais utilizadas pelos alunos:

Tabela 2: Índice de acertos e de estratégias mais utilizadas pelos alunos para cada um dos materiais manipuláveis

Material	Índice de Acertos	Estratégias mais utilizadas	Ocorrência
Material dourado adaptado	82%	Considerar a placa como o todo da representação inicial. Destacar o número de partes referentes ao problema de conversão proposto. Montar a segunda placa de acordo com a primeira e, considerando-a como o todo da representação final, calcular a parte destacada em relação a este todo.	50%
		Considerar a placa como o todo. Destacar o número de partes de modo a obter uma equivalência em relação à parte destacada na representação figurativa envolvida no problema. Considerar a placa agora como o	32%

		todo da representação final e calcular a parte destacada em relação a este todo.	
		Considerar a placa como o todo da representação inicial. Destacar o número de partes referentes ao problema de conversão proposto. Considerar a placa agora como o todo da representação final e calcular a parte destacada em relação a este todo.	18%
Régua numérica	82%	Considerar a régua numérica, no intervalo entre 0 e 1, como o todo da representação inicial. Destacar o número de partes referentes ao problema de conversão proposto. Somar as partes destacadas.	47%
		Dividir a régua numérica, no intervalo entre 0 e 1, em segmentos de acordo com o número de partes iguais observadas na representação figurativa. Somar o número de segmentos correspondente ao número de partes destacadas na figura.	37%
		Outras	16%
Disco de frações	74%	Considerar o disco como o todo da representação inicial. Destacar o número de partes referentes ao problema de conversão proposto. Considerar o disco como o todo da representação final e calcular a parte destacada em relação a este todo.	54%
		Considerar o disco como o todo da representação inicial. Destacar o número de partes de modo a obter uma equivalência em relação à parte destacada na representação figurativa envolvida no problema. Considerar o disco como o todo da representação final e calcular a parte destacada em relação a este todo.	23%
		Considerar o disco como o todo da representação inicial. Destacar o número de partes referentes ao problema de conversão proposto. Concluir pela observação, em relação ao todo, da equivalência de proporção entre a área ocupada por estas partes e determinada parte de outro manipulável tomado para a representação final.	23%
Pastilhas plásticas	62%	Tomar quantidade de pastilhas de acordo com o problema proposto e considerar como o todo da representação inicial. Destacar o número de pastilhas de modo a obter uma equivalência em relação à parte destacada na representação figurativa envolvida no problema. Considerar a quantidade de	47%

		pastilhas tomadas como o todo da representação final e calcular a parte destacada em relação a este todo.	
		Tomar quantidade de pastilhas de acordo com o problema proposto e considerar como o todo da representação inicial. Destacar o número de pastilhas referentes ao problema de conversão proposto. Concluir pela observação, em relação ao todo, da equivalência de proporção entre a quantidade de pastilhas destacadas e uma determinada parte de outro manipulável tomado para a representação final.	33%
		Tomar quantidade de pastilhas de acordo com o problema proposto e considerar como o todo da representação inicial. Destacar o número de pastilhas referentes ao problema de conversão proposto. Considerar todas as pastilhas tomadas como o todo da representação final e calcular o valor de uma pastilha em relação a este todo. Somar as pastilhas destacadas.	13%
		Outras	7%

Fonte: Elaborada pelo autor

A primeira importante observação no que concerne às estratégias utilizadas pelos alunos no experimento piloto é que não houve o surgimento de caminhos resolutivos muito diferentes daqueles demonstrados pelo pesquisador ao apresentar aos alunos cada um dos quatro manipuláveis envolvidos.

Ao utilizarem o material dourado adaptado, por exemplo, os alunos buscaram reproduzir, com pequenas variações, o caminho exemplificado inicialmente pelo pesquisador, ou seja, considerar a placa como sendo o todo, o inteiro ou a unidade, destacar em sua superfície a parte correspondente à representação inicial do exercício de conversão proposto utilizando as barras e os cubinhos e tomando por referência os registros numéricos em seu verso, reproduzir esta parte destacada na superfície da placa da representação final e, finalmente, calcular a representação final também tomando por referência os registros numéricos no seu verso.

Uma pequena variação observada em relação ao método apresentado pelo pesquisador foi que, em algumas situações, os alunos optaram por usar apenas uma e não duas placas. Nestes casos, a mesma placa era tomada, ora como o todo da representação inicial, ora como o todo da representação final do exercício de conversão proposto.

Esta pouca variedade de estratégias nos pareceu bastante razoável haja vista alguns limites impostos pelo próprio experimento piloto, tais como o pouco tempo de interação dos alunos com estes materiais.

Portanto, pode-se dizer que a estratégia mais adotada pelos alunos, que responderam corretamente as situações de conversão propostas, baseou-se, fundamentalmente, nas informações dadas pelo pesquisador ao apresentar-lhes os manipuláveis que deveriam utilizar e consistiu basicamente em identificar o todo e procurar deduzir, a partir deste todo, o valor das partes destacadas conforme o problema. Nesse sentido, pudemos perceber que houve uma mobilização predominante do sentido parte-todo da fração nos procedimentos de resolução destes exercícios.

A prevalência do significado parte-todo ficou evidenciada até mesmo nas situações de conversão envolvendo a passagem de um registro numérico fracionário para um registro numérico decimal, nas quais apenas 2 alunos optaram pela mobilização do significado quociente da fração, dividindo o numerador pelo denominador para chegar à representação decimal sem o uso do manipulável. Por outro lado, dos outros 3 que não conseguiram, a priori, chegar à resolução do problema, 2 conseguiram responder corretamente utilizando os manipuláveis com a mobilização do significado parte-todo e a estratégia descrita no parágrafo anterior. O mesmo ocorreu nas situações de 1 a 9, em que os exercícios indicavam um caráter operatório.

Tais resultados parecem indicar que os materiais manipuláveis utilizados, ao serem apresentados aos alunos pelo pesquisador, sugerem um “como utilizar” que é transformado numa regra a ser obedecida ao realizar a correspondência entre as representações envolvidas no exercício de conversão. Nesse sentido, supomos que cada manipulável utilizado esteve associado àquilo que Duval (2003) chamou de regra de correspondência.

Como vimos na fundamentação teórica, as regras de correspondência são aplicadas para transformar um tipo de registro em outro, fazendo com que a conversão realizada aproxime-se de uma simples codificação (DUVAL, 2003).

Neste ponto de nossa pesquisa, destacamos, então, duas percepções relacionadas ao uso dos manipuláveis no experimento piloto que sugeriram, a nosso ver, algumas limitações: a mobilização prevalente do significado parte-todo em detrimento dos demais sentidos do número racional nas estratégias de resolução, já que os concretos utilizados enfatizam a visualização da fração sem perder a referência do inteiro, e a associação de regras de correspondência o que, do ponto de vista cognitivo, não seria o ideal nos exercícios de conversão (DUVAL, 2003).

Na realização e na análise dos resultados obtidos no experimento piloto, obtivemos resultados importantes relacionados ao uso do material pelos estudantes e também de suas estratégias nestes usos, como já descrito acima. No entanto, também apontaram algumas limitações, tanto em relação aos materiais, quanto ao método para coleta de dados.

Neste sentido, optamos por aprofundar nossa pesquisa sobre conversões entre representações de números racionais a partir de material manipulável utilizando o material dourado adaptado, pois o estudo piloto revelou maior familiaridade dos estudantes com este, assim minimizamos a variável “familiaridade com o material” e podemos aprofundar no aspecto relacionado especificamente às conversões. Outra hipótese que respalda a opção por aprofundar o estudo com este material, é o fato esperado que a divisão merológica (DUVAL, 2011) seja bastante explorada nos tratamentos exercidos pelos alunos nas representações figurativas concretas elaboradas a partir do material dourado adaptado.

6 O MATERIAL DOURADO ADAPTADO EM FOCO

Como vimos, no que concerne à utilização dos materiais manipuláveis, os dados do experimento piloto revelaram uma melhor adaptação dos alunos a um dos quatro materiais envolvidos nessa etapa da pesquisa e à regra de correspondência a ele associado.

Assim, visando uma profundidade na análise da utilização de manipuláveis por parte dos alunos ao promoverem conversões entre diferentes registros do número racional, concentramos, na última etapa da pesquisa, nossa observação apenas no material dourado adaptado.

Para Duval (2011, p.67), algumas representações semióticas podem ser classificadas como representações mistas, pois “resultam da superposição ou da fusão de dois tipos de representações”. O autor cita como exemplo as retas com marcações de unidades tais como a reta numérica, onde observamos o registro gráfico (reta) e o numérico (números) na mesma representação.

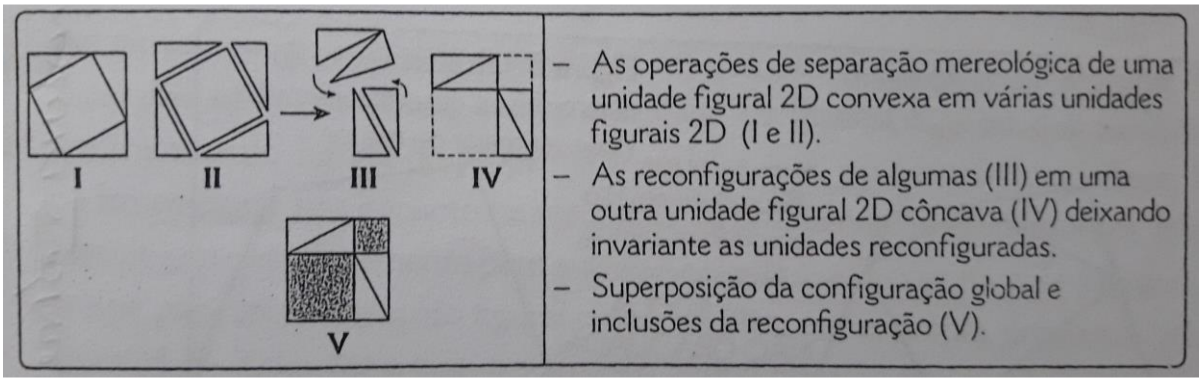
Nesse sentido, consideramos o material dourado adaptado como um tipo de representação mista, já que, inscritas nas superfícies dos conjuntos vermelho, verde e amarelo, temos, respectivamente, os registros numéricos decimais, percentuais e fracionários. Nesta pesquisa, optamos por chamar de **representações figurativas concretas** as representações mistas elaboradas pelos alunos a partir do material dourado adaptado.

Com Duval (2011), entendemos que os tratamentos efetuados nas representações devem ocorrer a partir de operações que são próprias do tipo de registro em questão, ou seja, no caso das representações figurativas concretas, estaríamos falando das transformações que resultam da manipulação física de suas unidades figurais concretas e que são base para a observação das repercussões de tais mudanças em relação ao todo figural concreto.

Dentre os tipos de operações figurais próprias das figuras em geometria, Duval (2011, p.88) apresenta-nos as divisões merológicas “que se apoiam diretamente na percepção e que transformam unidades figurais 2D/2D (ou objetos 3D/3D) em outras de mesma dimensão”. Para o autor, este tipo de operação figural carrega “a particularidade de poder ser realizada por manipulações sobre objetos materiais”.

Na figura 22, Duval (2011) apresenta-nos um exemplo de um tratamento puramente figural a partir da divisão merológica:

Figura 22: Exemplo de tratamento figural



Fonte: Duval (2011)

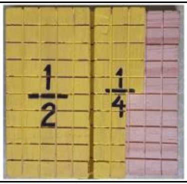
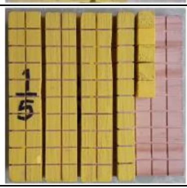
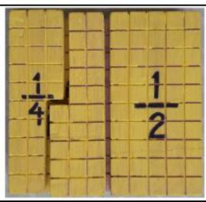
Era esperado que a divisão merológica fosse bastante explorada nos tratamentos exercidos pelos alunos nas representações figurativas concretas elaboradas a partir do material dourado adaptado, pois, segundo Duval (2011, p.88), tal tipo de operação figural consiste em dividir uma determinada forma (em nosso caso, a placa do material dourado) “em unidades figurais de mesma dimensão e sua reconfiguração em outra figura cujo contorno global é ou não o mesmo”.

Para Duval (2011), o exercício desses tratamentos é fundamental para que o indivíduo seja capaz de identificar as unidades de sentido no interior do registro, ou seja, possa perceber quais destas transformações realizadas na representação de partida são capazes de produzir co-variações na representação de chegada, enfim, quais as informações matematicamente pertinentes no interior da representação a ser convertida.

No quadro 8, exemplificamos algumas possíveis transformações operadas no conjunto amarelo do material dourado adaptado, tomado como representação figurativa concreta de partida, e suas implicações no registro numérico percentual correspondente, tomado como representação de chegada.

Como vimos na fundamentação desse trabalho, segundo Duval (2011), este exercício de efetuar diversos tratamentos no registro inicial observando a correspondência de tais variações no registro final é o que nos permite identificar quais os dados que representam unidades de sentido no interior dos registros.

Quadro 8: Exemplos de variações com o conjunto amarelo do material dourado adaptado e suas implicações no registro numérico percentual correspondente

	Representação inicial	**Transformação (tratamento)**	**Informação variada**	**Representação final**
1		———	———	75%
2			Número de partes destacadas.	75%
3			Número de partes destacadas.	75%
4			Forma da parte destacada.	75%
5			Área destacada em relação ao todo.	80%
6			Área destacada em relação ao todo.	50%
7			Área destacada em relação ao todo.	100%

Fonte: Elaborado pelo autor

Como pudemos observar, a linha 1 do quadro traz um exemplo de conversão com o registro inicial expresso na representação figurativa concreta e a sua correspondente representação de chegada expressa no registro simbólico numérico percentual.

Nas linhas 2 e 3 do quadro, temos tratamentos figurais concretos cujas transformações basearam-se na variação do número de partes destacadas, sem a implicação, contudo, de quaisquer co-variações no registro numérico de chegada.

Na linha 4, o tratamento figural alterou a forma da parte destacada na figura e, mais uma vez, não houve mudança no registro de chegada.

Já nas linhas 5, 6 e 7 do quadro, vemos que os tratamentos figurais concretos produziram transformações a partir da variação da área ocupada pelas partes destacadas em relação ao todo e, consequentemente, co-variações no registro numérico de chegada.

Assim, podemos afirmar que, no caso da representação figurativa concreta produzida a partir do material manipulável adotado nessa pesquisa, o número de partes destacadas, bem como a forma da parte destacada não se constituem enquanto unidades de sentido no interior desta representação, ou seja, não são informações matematicamente pertinentes no conteúdo do registro (DUVAL, 2011).

Por outro lado, a área ocupada pelas partes destacadas em relação ao todo no registro inicial surge como dado crucial nos tratamentos, pois produz, a partir de sua variação, as correspondentes co-variações no registro final.

Ao identificarem como unidade de sentido a área destacada ao invés do número de partes destacadas, os alunos podem evitar equívocos como, por exemplo, aqueles relacionados à aplicação errônea da técnica de dupla contagem, quando se observa o denominador da fração, como representante do número de partes em que foi dividido o inteiro, e o numerador da fração, por sua vez, como representante do número de partes destacadas, sem, contudo, levar em consideração as diferentes áreas destas partes.

Temos, portanto, segundo Duval (2011, p.103), “as duas condições preliminares e absolutamente indispensáveis para que alguém possa compreender e fazer qualquer coisa em matemática”:

1- Reconhecer as unidades de sentido, ou seja, os dados ou informações matematicamente pertinentes no interior da representação semiótica.

2- Apropriar-se das operações de transformação dessas unidades de sentido e que são próprias desse tipo de registro.

Assim, entendemos que as possíveis contribuições que o material dourado adaptado, ou qualquer outro manipulável, pode dar no sentido de auxiliar os alunos na realização de conversões entre representações do número racional dependem, sobretudo, da sua eficiência, no que concerne à facilitação da apreensão de tais habilidades destacadas pelo autor.

No capítulo a seguir, apresentamos o instrumento avaliativo utilizado nesta etapa de delimitação da pesquisa a um único material manipulável, analisamos as questões propostas e possíveis caminhos resolutivos a partir do material dourado adaptado.

7 O INSTRUMENTO AVALIATIVO

No instrumento elaborado para a aplicação com os alunos participantes da pesquisa, buscamos seguir algumas orientações dadas por Duval (2003) ao tratar de seqüências de atividades cujo objetivo seja a articulação entre dois registros em relação à representação de um objeto matemático, a saber:

- As tarefas devem contemplar os dois sentidos da conversão;
- Para cada sentido, as tarefas devem incluir casos de congruência e não-congruência;
- As tarefas devem envolver conversões entre registros monofuncionais, bem como conversões de registros multifuncionais para registros monofuncionais.

Para Duval (2003), os registros multifuncionais referem-se àqueles não-algoritmizáveis, a saber, a linguagem natural (representação discursiva) e as figuras geométricas planas ou espaciais (representação não-discursiva). Já os registros monofuncionais referem-se àqueles algoritmizáveis, a saber, os sistemas de escritas numéricas e algébricas e o cálculo (representação discursiva), bem como os gráficos cartesianos (representação não-discursiva).

O instrumento constou de quinze questões com quatro alternativas de resposta para cada uma delas, explorando conversões em ambos os sentidos e envolvendo representações numéricas, figurativas e em linguagem natural.

7.1 Análise a priori das questões do instrumento avaliativo

Com a aplicação do instrumento avaliativo, buscamos analisar como os alunos desenvolviam o seu caminho resolutivo, num primeiro momento, sem o apoio do material dourado adaptado e, a posteriori, com o uso desse manipulável. Observamos as possíveis dificuldades relacionadas àqueles que, segundo Duval (2003), são os dois tipos de fenômenos característicos das conversões: as variações de congruência e não-congruência e a diferença entre os sentidos da conversão, ou seja, a heterogeneidade entre a conversão fracionária→decimal e a decimal→fracionária, por exemplo.

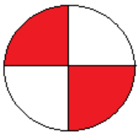
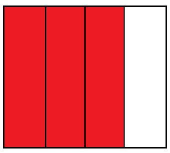
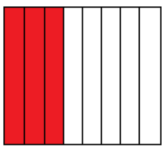
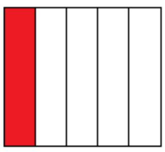
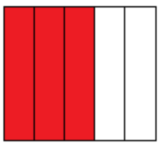
No quadro 9, buscamos apresentar as questões escolhidas para o instrumento, bem como seus objetivos do ponto de vista da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

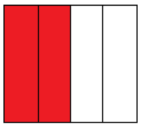
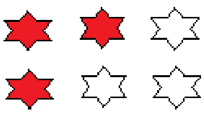
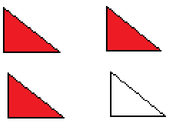
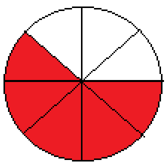
Quadro 9: Questões do instrumento avaliativo e seus objetivos à luz da TRRS

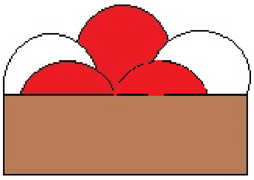
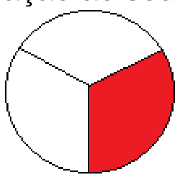
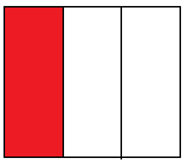
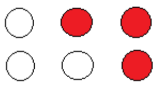
<table>
<tr><th>Questões</th><th>Objetivos</th></tr>
<tr><td>1- Qual alternativa representa a fração $\frac{1}{4}$ em número decimal ?

a) 0,41 b) 0,25 c) 0,14 d) 0,75</td><td rowspan="2">- Observar a conversão entre registros simbólico-numéricos fracionários e decimais.
- Analisar implicações relacionadas à mudança de sentido na conversão.
- Analisar implicações relacionadas às variações de congruência e não-congruência nas conversões.
- Observar os tratamentos realizados em cada tipo de registro.
- Observar a identificação de unidades de sentido no interior das representações.</td></tr>
<tr><td>2- Qual alternativa representa o número 0,6 na forma de fração ?

a) $\frac{6}{10}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>3- O número decimal 0,05 pode ser escrito por extenso como:

a) cinco décimos
b) cinco centésimos
c) cinco milésimos
d) cinco inteiros</td><td>- Observar a conversão entre o registro numérico decimal e a linguagem natural.
- Analisar implicações relacionadas às variações de congruência e não-congruência.
- Observar a identificação de unidades de sentido no interior das representações.</td></tr>
<tr><td>4- A parte pintada da figura abaixo representa que fração do total?

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{2}{4}$ d) $\frac{2}{2}$</td><td rowspan="2">- Observar a conversão entre o registro figurativo de quantidade contínua e o simbólico-numérico fracionário.
- Analisar implicações relacionadas à mudança de sentido na conversão.
- Analisar implicações relacionadas às variações de congruência e não-congruência nas conversões.
- Observar os tratamentos realizados em cada tipo de registro.
- Observar a identificação de unidades de sentido no interior das representações.</td></tr>
<tr><td>5- A fração $\frac{3}{5}$ pode ser representada por qual das figuras?
a)  b) 
c)  d) </td></tr>
<tr><td>6- Qual a alternativa que representa 30% na forma de fração?</td><td>- Observar a conversão entre registros simbólico-numéricos percentuais e</td></tr>
</table>

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{10}$	fracionários. - Analisar implicações relacionadas à mudança de sentido na conversão. - Analisar implicações relacionadas às variações de congruência e não-congruência nas conversões. - Observar os tratamentos realizados em cada tipo de registro. - Observar a identificação de unidades de sentido no interior das representações.
7- Como podemos representar $\frac{1}{2}$ na forma percentual? a) 20% b) 50% c) 21% d) 12%	
8- Qual alternativa representa o número 0,65 na forma percentual? a) 6% b) 60% c) 50% d) 65%	- Observar a conversão entre registros simbólico-numéricos decimais e percentuais. - Analisar implicações relacionadas à mudança de sentido na conversão. - Analisar implicações relacionadas às variações de congruência e não-congruência nas conversões. - Observar os tratamentos realizados em cada tipo de registro. - Observar a identificação de unidades de sentido no interior das representações.
9- Qual das alternativas representa 10%? a) 0,1 b) 1,0 c) 10,1 d) 10,0	
10- Qual das alternativas representa "vinte e cinco centésimos"? a) 25,0 b) 20% c) $\frac{1}{4}$ d) 	- Analisar implicações relacionadas às variações de congruência e não-congruência na conversão. - Observar os tratamentos realizados. - Observar a identificação de unidades de sentido no interior das representações.
11- Qual das figuras pode ser uma representação de 75% ? a)  b)  c)  d) 	- Observar a conversão entre registros simbólico-numéricos e figurativos. - Analisar implicações relacionadas à mudança de sentido na conversão. - Analisar implicações relacionadas às variações de congruência e não-congruência nas conversões. - Observar os tratamentos realizados em cada tipo de registro. - Observar a identificação de unidades de
12- Qual das alternativas representa a quantidade de bolas brancas na caixa em relação ao total ?	

<table>
<tr>
<td>
a) 0,4 b) $\frac{1}{2}$ c) 25% d) $\frac{2}{3}$</td>
<td>sentido no interior das representações.</td>
</tr>
<tr>
<td>13- Qual das alternativas está mais próxima da parte pintada da figura em relação ao seu todo?

a) $\frac{1}{4}$ b) 0,33 c) 30%
d) três décimos</td>
<td rowspan="3">- Observar possíveis apreensões para além dos limites impostos pelo material manipulável utilizado.
- Analisar implicações relacionadas às variações de congruência e não-congruência nas conversões.
- Observar os tratamentos realizados em cada tipo de registro.
- Observar a identificação de unidades de sentido no interior das representações.</td>
</tr>
<tr>
<td>14- Qual das alternativas pode representar a parte destacada na figura ?

a) $\frac{2}{6}$ b) 40% c) 0,5
d) </td>
</tr>
<tr>
<td>15- Qual das alternativas está mais próxima do número $\frac{1}{6}$?
a) 1,6 b) 0,16 c) 0,1 d) 0,2</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor

Os exercícios do instrumento avaliativo buscaram contemplar tanto os registros monofuncionais (escritas numéricas e algébricas) quanto os registros multifuncionais (linguagem natural e figuras) nas conversões (DUVAL, 2003). Para tanto, as questões 1, 2, 6, 7, 8, 9 e 15 propunham conversões que envolviam apenas os registros simbólico-numéricos fracionário, decimal e percentual, as questões 4, 5, 10, 11, 12, 13 e 14 utilizavam registros figurativos nos enunciados ou entre as alternativas, enquanto que os registros em linguagem natural apareciam nas questões 3 e 10.

Buscamos também abranger questões a partir das quais pudéssemos observar as implicações relacionadas aos fenômenos de variação de congruência e não-congruência e à heterogeneidade dos sentidos nas conversões (DUVAL, 2003).

Quanto às estratégias de resolução sem o uso do material dourado adaptado, consideramos, a partir do experimento piloto, que os alunos poderiam recorrer à mobilização de significados como quociente e parte-todo da fração em suas resoluções.

Assim, nas questões 1 e 15, o significado quociente da fração poderia ser utilizado e, desse modo, os alunos efetuariam a divisão do numerador pelo denominador chegando à alternativa “b” como resposta em ambos os exercícios. Na questão 2, os alunos poderiam desenvolver o mesmo procedimento utilizando as frações nas alternativas para encontrar a representação decimal do enunciado. Da mesma forma, os alunos que reconhecessem as figuras das questões 12 e 13 como representações de 2/5 e 1/3 também poderiam efetuar a divisão numerador/denominador para identificar, respectivamente, as letras “a” e “b” como respostas corretas.

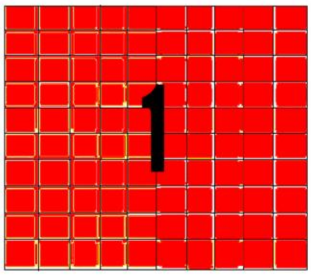
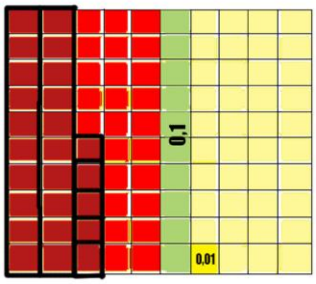
O significado parte-todo poderia ser mobilizado, sobretudo, na resolução das questões 4, 5 e 14, sendo necessário, nesta última, o reconhecimento de que as frações 1/3 e 2/6 são equivalentes. Nestas questões, os alunos poderiam aplicar a técnica de dupla-contagem relacionando o número de partes em que foi dividida a figura e o número de partes pintadas ao denominador e numerador da fração, respectivamente.

Esperávamos, também, que as variações de congruência e não-congruência entre as questões do instrumento avaliativo pudessem, ora auxiliar os alunos a encontrar a alternativa correta, ora conduzi-los a equívocos. Como vimos na fundamentação deste trabalho, para Duval (2003), as situações em que se diz que há congruência são aquelas nas quais a representação de chegada transparece na representação de partida. Assim, por exemplo, se por um lado a questão 2 apresentava uma variação de congruência, já que existiam dois algarismos (0 e 6) presentes em ambos os registros, o que poderia conduzir os alunos à indicação da alternativa “a” como a correta, por outro, acreditávamos que alguns dos possíveis equívocos cometidos pelos alunos na questão 1 seriam motivados, exatamente, pela conclusão de que os registros 1/4, 0,14 e 0,41, por contarem com os mesmos algarismos (1 e 4) em seu interior, representariam o mesmo número racional.

Com o uso do material dourado adaptado pudemos, a partir do que foi observado no experimento piloto, antever, ao menos, dois caminhos resolutivos que poderiam ser utilizados para todas as conversões envolvendo representações simbólico-numéricas e figurativas propostas no instrumento avaliativo.

Nos quadros 10 e 11, descrevemos estas estratégias de resolução, que aqui chamamos de caminho A e caminho B, tomando como exemplo a questão 1 que propunha a conversão de 1/4 para a representação numérica decimal:

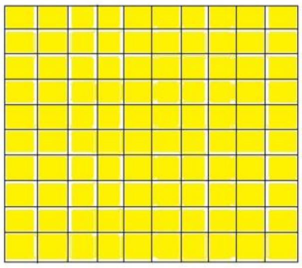
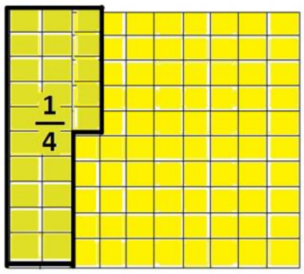
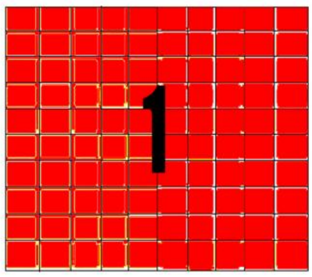
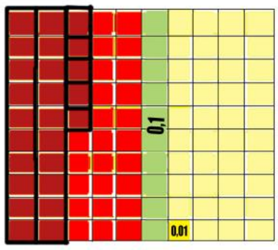
Quadro 10: Caminho A - possível caminho resolutivo para a questão 1 com o material dourado adaptado

Caminho A		
1°	Tomar a placa referente ao todo da representação final na conversão proposta (placa vermelha do registro numérico decimal).	
2°	No verso da placa, destacar o número de partes de acordo com a representação inicial (numérica fracionária).	
3°	Calcular a parte destacada em relação a este todo.	0,1 + 0,1 + 0,05 = 0,25

Fonte: Elaborado pelo autor

No caminho A, os alunos já demonstram reconhecer qual parte em relação ao todo está expressa na representação inicial da conversão proposta. No exemplo em questão, demonstram o reconhecimento da fração no sentido parte-todo e identificam que a representação 1/4 refere-se a uma parte de um todo dividido em quatro partes iguais. Assim, decidem tomar a placa referente à representação final da conversão proposta (placa vermelha das representações decimais) e dividi-la em quatro partes iguais. A partir daí, basta destacar a parte ou as partes de acordo com a fração em questão, neste caso uma parte apenas, e calcular a parte destacada em relação ao todo, tomando por referência as indicações numéricas gravadas no material.

Quadro 11: Caminho B - possível caminho resolutivo para a questão 1 com o material dourado adaptado

Caminho B		
1°	Tomar a placa referente ao todo da representação inicial na conversão proposta (placa amarela do registro numérico fracionário).	
2°	Destacar o número de partes de acordo com a representação inicial (numérica fracionária).	
3°	Tomar a placa referente ao todo da representação final (placa vermelha do registro numérico decimal).	
4°	Montar a segunda placa de acordo com a primeira de modo que ambas possuam a mesma área destacada em relação ao todo.	
5º	Calcular a parte destacada em relação a este todo.	0,1 + 0,1 + 0,05 = 0,25

Fonte: Elaborado pelo autor

No caminho B, os alunos utilizam as duas placas referentes às representações envolvidas no exercício de conversão, neste caso, a placa amarela das representações fracionárias e a placa vermelha das representações decimais. A primeira placa é montada de acordo com o registro inicial e a segunda é manipulada de modo que a parte destacada tenha a mesma área que a primeira em relação ao todo. Assegurada a equivalência das áreas, resta calcular, na segunda placa, a parte destacada em relação ao todo, tomando por referência as indicações numéricas gravadas no material.

Observa-se que ambos os caminhos derivam, contudo, de uma mesma regra de correspondência associada ao próprio material, a saber, **se placas de representações diferentes têm partes destacadas equivalentes, então tais partes representam o mesmo número racional**.

Nas questões 3 e 10, tínhamos conversões envolvendo registros em linguagem natural. Nestes casos, acreditávamos que a visualização das partes em relação ao todo proporcionada pelo material dourado adaptado poderia auxiliar os alunos no reconhecimento de que os décimos são décimas partes de um todo, ou ainda, são partes de um todo dividido em dez partes iguais e assim, de modo análogo, com os centésimos.

8 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O instrumento avaliativo, descrito no capítulo 7, foi aplicado, inicialmente sem a utilização do material manipulável, na primeira semana do mês de outubro de 2018. Nesse momento, participaram dez alunos, com idades entre 13 e 14 anos, sendo seis estudantes do 9° ano e quatro do 8º ano do ensino fundamental da rede pública municipal do Recife.

Na tabela 3, trouxemos o desempenho dos alunos, destacando as questões respondidas corretamente, bem como o índice individual de acertos. Chamamos o primeiro aluno na ordem alfabética de A1, o segundo de A2, e assim por diante. As questões foram representadas pela letra Q e os acertos indicados pela letra C:

Tabela 3: Desempenho dos alunos sem o manipulável

	Q1	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	**Q6**	**Q7**	**Q8**	**Q9**	**Q10**	**Q11**	**Q12**	**Q13**	**Q14**	**Q15**	
A1	C	C		C	C	C		C	C	C			C		C	67%
A2		C		C		C	C								C	33%
A3		C		C	C	C		C	C						C	47%
A4		C		C	C	C		C						C		40%
A5	C	C	C	C	C											33%
A6		C		C	C	C	C	C	C	C	C					60%
A7	C	C		C	C	C		C					C		C	53%
A8	C			C	C	C		C								33%
A9		C	C	C	C	C		C					C			47%
A10		C	C	C	C	C		C						C		47%

Fonte: Elaborada pelo autor

Os resultados parecem ratificar que os alunos, de fato, apresentam grandes dificuldades quando estão diante de uma atividade de conversão. Embora seja um grupo totalmente oriundo dos anos finais do ensino fundamental, apenas três alunos acertaram mais que a metade das questões propostas. Sob a perspectiva da TRRS tal dificuldade era previsível já que “a conversão das representações semióticas é a primeira fonte de dificuldade à compreensão em matemática” (DUVAL, 2012, p.276).

Observa-se que as questões Q2, Q4, Q5, Q6 e Q8 foram as que apresentaram maior número de acertos. Pode-se dizer que este aproveitamento se deve muito ao fenômeno de congruência percebido nas conversões ali propostas.

Vimos que, para Duval (2003, p.19), o fenômeno da congruência ocorre numa dada conversão quando "a representação terminal transparece na representação de saída". Nesse sentido, a transparência nas questões Q2, Q6 e Q8, envolvendo, respectivamente, as conversões 0,6 → 6/10, 30% → 3/10 e 0,65 → 65%, caracteriza-se pela existência de, pelo menos, dois algarismos comuns a ambos os registros. Já nas questões Q4 e Q5, a congruência entre as representações figurativas de quantidades contínuas e as simbólico-numéricas fracionárias aproxima as conversões envolvidas de "uma situação de simples codificação" (DUVAL, 2003, p. 19). Neste caso, a técnica de dupla-contagem parece ter sido utilizada como regra de codificação para estabelecer a correspondência entre os denominadores e numeradores das frações e o número de partes em que foram divididas as figuras e de partes pintadas, respectivamente.

Alguns equívocos também foram cometidos a partir do que poderíamos chamar de uma "falsa congruência", o aluno A10, por exemplo, na resolução da Q15, afirmou que a resposta era 1,6, pois estava "parecido" com 1/6 presente no enunciado.

Entre aquelas que apresentaram o menor número de acertos estão as questões Q7, Q10, Q11 e sem acerto algum, a Q12. Acreditamos que este fraco desempenho dos alunos esteja associado à não-congruência das conversões nestes exercícios. O caso da Q7, com apenas dois acertos observados, parece destacar muito bem a grande dificuldade que os alunos têm de realizar uma conversão dessa natureza. Segundo Duval (2011), isto ocorre porque:

> Em face das representações semióticas, de qualquer registro que seja, os alunos ficam sem argumentos se as conversões a realizar não são congruentes e se os tratamentos a efetuar não são uma aplicação automática de algoritmos de cálculo. Tudo se passa como se ao alunos não tivessem nenhuma possibilidade de reconhecer o que é representado, nem as primeiras transformações que eles poderiam efetuar (p. 102).

Assim, a maioria dos estudantes não conseguiu reconhecer 1/2 e 50% como representações do mesmo número racional, pois não havia uma regra de correspondência ou codificação a ser, imediatamente, aplicada. Isto revela uma carência dos alunos no que concerne a aspectos conceituais relacionados ao objeto estudado, pois a simples relação destes registros com a ideia de “metade”, por exemplo, já seria suficiente para tornar a conversão muito simples.

As implicações de não-congruência resultaram em apenas dois acertos na Q10, que propunha a conversão “vinte e cinco centésimos” → 1/4, e um acerto na Q11, que explorava a mudança do registro numérico 75% para o registro figurativo composto por um conjunto de quatro pequenos triângulos com três destes em destaque.

A Q12 trazia em seu enunciado a figura de uma caixa com cinco bolas, sendo duas brancas e três pretas, e pedia que os alunos indicassem entre as alternativas qual aquela que representava a quantidade de bolas brancas em relação ao total. Nenhum aluno indicou a representação 0,4 como a correta, fazendo da Q12 a única questão, entre as quinze do instrumento avaliativo, sem acertos observados. É importante destacar que seis dos dez participantes marcaram a representação 2/3, isto sugere que alguns alunos viram nesta representação fracionária uma forma de relacionar *número de bolas brancas / número de bolas pretas*, o que para um uma questão do tipo “qual a razão entre o número de bolas brancas e bolas pretas na caixa?” seria considerado um acerto. Outro ponto interessante é que, embora entre as alternativas da questão tivéssemos as representações 0,4 e 25%, oito alunos concentraram suas respostas nas representações 1/2 e 2/3, o que, a nosso ver, também sugere a influência da forte relação que existe, no ensino de frações, entre as representações figurativas e as representações numéricas fracionárias.

8.1 Análise da influência do material dourado adaptado na resolução das atividades envolvendo a conversão entre representações de números racionais

Buscando identificar limites e possibilidades no uso de material manipulável em conversões entre representações de números racionais, aplicamos novamente o instrumento avaliativo, dessa vez com a utilização do material dourado adaptado, na última semana de novembro de 2018. Participaram desta etapa os cinco alunos com os menores percentuais de acertos no primeiro teste. Exceção feita ao aluno A8, que não conseguimos reencontrar, e foi substituído pelo A3.

A aplicação do instrumento foi feita individualmente. No primeiro momento, o manipulável era apresentado ao aluno, bem como a sua utilização nos exercícios de conversão entre representações semióticas do número racional. Neste caso, estamos falando de demonstrar como usar o material dourado adaptado nestas conversões a partir da regra de correspondência a ele associada, ou seja, se placas de representações diferentes têm partes destacadas equivalentes, então tais partes representam o mesmo número racional. A tabela 4 traz os desempenhos observados nesse momento:

Tabela 4: Desempenho dos alunos com o manipulável

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	
A2	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C				80%
A3	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C			C	C	C	87%
A4	C	C		C	C	C	C	C	C					C	C	67%
A5	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C		C		C	87%
A10	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C				80%

Fonte: Elaborado pelo autor

Como já indicava a análise do experimento piloto, houve uma melhora significativa nos índices de acertos com a utilização do manipulável, o que sugere uma influência positiva da utilização deste concreto no desempenho dos alunos frente aos exercícios de conversão propostos.

Nas primeiras dez questões do instrumento avaliativo observamos um aproveitamento quase que total dos alunos. Vemos nesse dado uma importante indicação de que a regra de correspondência entre as representações aplicada com o material dourado adaptado foi de grande valia para encontrar a alternativa correta em cada exercício de conversão.

O caminho resolutivo B, descrito no capítulo anterior, foi o mais adotado pelos alunos que não tiveram muita dificuldade para montar a representação inicial, trazida pelo enunciado da questão, utilizando a placa correspondente àquele tipo de registro, montar a placa correspondente ao tipo de registro das alternativas, de modo que a parte destacada nesta segunda placa fosse equivalente à da primeira, e, finalmente, chegar à representação final calculando a parte destacada na segunda placa em relação ao seu todo, utilizando, para tanto, as referências inscritas em seu verso.

Após se apropriarem dos valores dos cubinhos, dos valores das barras e observando as referências numéricas inscritas no verso de cada placa, os alunos conseguiam montar a representação figurativa concreta correspondente à representação inicial da conversão proposta na questão. Contudo, a partir da montagem da segunda placa, houve pequenas variações quanto às estratégias utilizadas para se chegar ao valor da representação final somando as barras e cubinhos utilizados: os alunos A10 e A5 usaram o algoritmo da adição, os alunos A2 e A4 optaram por contar, apontando com o dedo, o número de barras e ou cubinhos, enquanto que o aluno A3 procurava realizar o cálculo mentalmente.

Observamos que as referências com registros simbólico-numéricos inscritos nas placas foram importantes para que as montagens das representações no concreto fossem realizadas como percebemos na fala do aluno A4, ao montar a representação correspondente ao registro 0,6 do enunciado de Q2: “como já tem 0,5 aqui”, referindo-se à marcação no verso da placa vermelha, “precisa de mais uma dessa”, referindo-se à barra. Já o aluno A5, após a montagem da segunda placa, respondendo à questão Q8, afirmou: “aqui já tem cinquenta por cento”, referindo-se à marcação no verso da placa verde, “mais dez por cento dá sessenta”, acrescentando uma barra nesse momento, “mais cinco dá sessenta e cinco por cento”, acrescentando mais cinco cubinhos nesse momento.

A não obtenção da totalidade de acertos entre as questões Q1 e Q10 deveu-se a dois erros cometidos pelo aluno A4 nas questões Q3 e Q10 cuja presença das representações em linguagem natural “cinco centésimos” e “vinte e cinco centésimos”, respectivamente, dificultam uma aplicação direta da regra de correspondência com o manipulável, pois exige, a priori, a habilidade de relacionar este tipo de representação com os registros simbólico-numéricos inscritos no material, como ocorreu com os alunos A2 e A5 que, quando indagados a respeito do porquê de concluírem que 0,05 é o mesmo que “cinco centésimos” na Q3, responderam: “porque tem dois números depois da vírgula”.

Na Q10, além da presença da linguagem natural como já frisamos, tínhamos registro numérico decimal, percentual, fracionário e figurativo entre as alternativas. Mesmo com tal variedade de registros, até então não observada nas questões anteriores, quatro dos cinco alunos participantes marcaram a alternativa correta.

É importante citar, ainda com relação à Q10, a experiência dos alunos A5 e A10 que conseguiram montar, na placa vermelha, a representação concreta a partir da representação “vinte e cinco centésimos” do enunciado, mas não souberam como dar seqüência ao caminho resolutivo, pois não havia um tipo único de registro entre as alternativas para direcionar a escolha da segunda placa. Nesse momento, o pesquisador sugeriu que verificassem uma alternativa de cada vez. Seguindo essa orientação, os alunos excluíram as alternativas “b” e “d”, alegando que as partes destacadas não eram do mesmo “tamanho”, e indicaram a alternativa “c”, com a representação 1/4, como a correta e com a justificativa de que as partes destacadas em ambas as placas eram “iguais”. Já os alunos A2 e A3 relacionaram, de imediato, a parte destacada na representação concreta com a peça que representa 1/4 no conjunto amarelo do material dourado adaptado.

Percebe-se no caminho resolutivo apresentado com o manipulável aos alunos a importância fundamental da regra de correspondência, ou seja, se placas de representações diferentes têm partes destacadas equivalentes, então tais partes representam o mesmo número racional. Portanto, podemos concluir que a utilização do manipulável e, consequentemente, desta regra foi preponderante para o crescimento dos índices de acertos nestas dez primeiras questões do instrumento avaliativo.

No entanto, é preciso muita cautela ao considerarmos este “êxito” dos alunos na resolução das conversões propostas nestes exercícios, pois, segundo Duval (2003, p.27), “aquilo que de um ponto de vista matemático pode ser considerado um acerto (ou um erro) elementar não tem nenhum valor do ponto de vista cognitivo”, em outras palavras, “um sucesso matemático não corresponde a um sucesso cognitivo”.

Assim, para estas questões do instrumento avaliativo, podemos apenas concluir que, do ponto de vista matemático, a utilização do manipulável se mostrou bastante eficiente como apoio à resolução das conversões, contudo, do ponto de vista cognitivo, ainda não se pode dizer que o uso do material dourado adaptado tenha contribuído de algum modo.

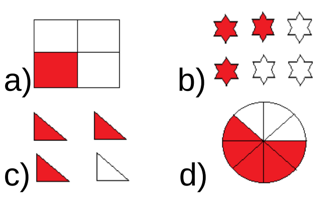
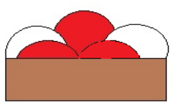
Isto porque, para Duval (2012, p.273), a “codificação”, ou seja, a “transcrição de uma representação em outro sistema semiótico diferente daquele em que é dado inicialmente” é caracterizada pela utilização de regras de correspondência que resultam numa série de substituições. Como vimos, na fundamentação deste trabalho, tais mudanças de registros, baseadas na codificação, são pobres do ponto vista cognitivo, pois não precisam, necessariamente, estar acompanhadas de nenhuma apreensão conceitual referente ao objeto matemático envolvido (DUVAL, 2012).

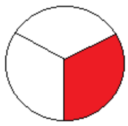
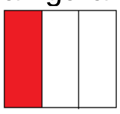
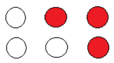
Neste trabalho, entendemos que o caminho resolutivo apresentado com o material dourado adaptado está baseado naquilo que Duval (2012) chama de codificação, muito embora, a montagem das representações figurativas concretas seja, a nosso ver, de uma complexidade bem maior que a aplicação da técnica de dupla-contagem, por exemplo.

Portanto, ao analisarmos a utilização do material dourado adaptado e a regra de correspondência associada a este manipulável, precisamos ter bastante cuidado para não confundirmos sua eficiência matemática com sua eficiência cognitiva.

Nas cinco questões finais percebemos uma queda de desempenho dos alunos. Podemos relacionar essa diminuição de acertos nas conversões propostas ao fato de que, a partir de Q11, os exercícios requerem conhecimentos e habilidades para além da simples aplicação da regra de correspondência associada ao material dourado adaptado como podemos ver nas análises do quadro 12:

Quadro 12: Análise das questões Q11 a Q15

Questão	**Análise**
Qual das figuras pode ser uma representação de 75% ?  	A representação figurativa correta entre as alternativas dadas não coincide visualmente com a representação figurativa concreta produzida com o manipulável a partir da representação numérica do enunciado. Neste caso, os alunos deveriam ser capazes de identificar o registro figural de quantidade contínua no material dourado adaptado e o registro figural de quantidade discreta da alternativa “c” como representações do mesmo número racional.
Qual das alternativas representa a quantidade de bolas brancas na caixa em relação ao total ?  a) 0,4 b) $\frac{1}{2}$ c) 25% d) $\frac{2}{3}$	A representação figurativa de quantidade discreta no enunciado do exercício demanda que os alunos sejam capazes de produzir uma representação de quantidade contínua equivalente com o material dourado adaptado para que possam utilizar a regra de correspondência associada ao manipulável. Além do mais, as alternativas trazem representações numéricas decimais, fracionárias e percentuais, o que dificulta a escolha imediata da placa correspondente à

	representação final da conversão como ocorria nas questões anteriores.
Qual das alternativas está mais próxima da parte pintada da figura em relação ao seu todo?  a) $\frac{1}{4}$ b) 0,33 c) 30% d) três décimos	Estas questões trazem em seus enunciados representações de números racionais que não podem ser reproduzidas com o material dourado adaptado em face de suas limitações. Tratam-se de representações que implicam a divisão do inteiro em três e seis partes iguais, o que não pode ser feito com o manipulável disposto. Nestes casos, um dos caminhos para auxiliar na resolução seria verificar as alternativas possíveis de serem representadas com o manipulável e buscar deduzir visualmente se tais partes destacadas nas representações figurativas concretas seriam equivalentes àquelas destacadas nas representações figurativas destes enunciados.
Qual das alternativas pode representar a parte destacada na figura ?  a) $\frac{2}{6}$ b) 40% c) 0,5 d) 	
Qual das alternativas está mais próxima do número $\frac{1}{6}$? a)1,6 b) 0,16 c) 0,1 d) 0,2	

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao criticar a ênfase nas atividades de tratamento em detrimento das atividades de conversão no ensino, Duval (2012) explica que:

> é evidente que esta ausência, que não leva em conta a coordenação de registros, não é por acaso ou por negligência. A falta quase completa de regras que pudessem contribuir para a atividade cognitiva de conversão poderia ser suficiente para explicar (p. 285).

Assim, a utilização de manipuláveis como o material dourado adaptado na mediação entre diferentes registros de um número racional, se por um lado, favorece o surgimento de regras de correspondência que serão utilizadas pelos alunos, o que para a TRSS não é o ideal, por outro, pode, diante dessa “falta quase completa de regras”, romper com a imobilidade dos alunos diante de atividades de conversão, oferecendo-lhes um caminho e colocando-os em movimento (DUVAL, 2012, p. 285).

Ao aplicar o caminho resolutivo com o manipulável na questão Q11, como vimos na análise do quadro 12, os alunos precisariam ter a capacidade de relacionar o registro figurativo de quantidade contínua, elaborado com o manipulável a partir da representação 75%, com o registro figurativo de quantidade discreta da alternativa correta, letra “d”. Neste caso, três dos cinco alunos participantes conseguiram estabelecer esta relação respondendo corretamente a questão. O aluno A2, por exemplo, relacionou os quatro elementos da representação figurativa da alternativa “d” com as quatro peças do conjunto amarelo que representa um inteiro dividido em quatro partes iguais. Daí percebeu que três destas peças se sobrepunham perfeitamente na parte destacada da representação figurativa concreta feita a partir do registro numérico do enunciado, concluindo, portanto que se tratavam de partes equivalentes.

Na questão Q12, a exemplo do que ocorria na Q11, os alunos também teriam que relacionar diferentes registros figurativos para utilizar o manipulável na resolução. Dessa vez, contudo, a representação figurativa de quantidade discreta (uma caixa com cinco bolas, sendo três pretas e duas brancas) já aparecia no enunciado, fazendo com que os alunos não conseguissem sequer iniciar o caminho resolutivo, adotado até então, com o material dourado adaptado. Esse entrave foi superado quando o pesquisador pediu que os alunos tentassem representar, com o manipulável, o total de bolas presentes na caixa, destacando o número de bolas brancas. Nesse momento, os alunos A2, A3, A5 e A10 conseguiram montar a representação solicitada utilizando o conjunto de placas amarelas, usadas para os registros numéricos fracionários. Contudo, apenas os alunos A2 e A10 chegaram à resposta, adotando a sugestão do pesquisador, feita desde a questão Q10, de verificar uma alternativa de cada vez, já que havia diferentes tipos de registros entre as opções para a representação final. Uma observação importante é que os três alunos que erraram esta conversão marcaram a representação 2/3 como resposta, o que sugere uma confusão envolvendo os significados razão e parte-todo da fração. A questão implica a mobilização do significado parte-todo, já que pede o número racional que representa a quantidade de bolas brancas em relação ao total de bolas na caixa e tem como resposta correta 0,4, contudo, ao indicarem 2/3 como a solução, os alunos parecem estar mobilizando o significado razão da fração, ou seja, para cada duas bolas brancas, temos três bolas pretas na caixa. Esta sugestão é, ao nosso ver, reforçada pela fala do aluno A3 ao afirmar que “a parte de bola branca é dois e de bola preta é três”.

É importante destacar que na primeira aplicação do instrumento avaliativo, sem o uso do manipulável, nenhum destes cinco alunos respondeu corretamente as questões Q11 e Q12. Isto parece demonstrar que, pelo menos nestas duas questões, a tarefa de relacionar registros figurativos, aqui considerando as montagens no concreto como representações figurativas, apresentou-se mais viável para os alunos que a tarefa de relacionar o registro numérico com o figurativo e vice-versa.

Nas questões Q10, Q11 e Q12 nós tínhamos características que dificultavam o emprego do caminho resolutivo com o manipulável, até então utilizado sem maiores problemas nas primeiras questões do instrumento avaliativo. Nas três últimas conversões do instrumento surgiram novos elementos que, como vimos no quadro 12, impunham dificuldades para a própria utilização do material dourado adaptado, pois supunham a divisão do inteiro em três partes iguais nas questões Q13 e Q14 e seis partes iguais na Q15, o que não podia ser feito a partir de nenhum dos três conjuntos pertencentes ao manipulável, ou seja, o verde dos registros percentuais, o vermelho dos registros decimais e o amarelo dos registros fracionários.

Desse modo, a exemplo do que ocorrera na Q12, os alunos não conseguiam iniciar o caminho resolutivo e sequer realizavam o primeiro passo do procedimento, ou seja, a montagem da primeira placa a partir da representação exposta no enunciado da questão. Nesse momento, a orientação do pesquisador foi que os alunos pensassem em outras possibilidades de utilização para o material, buscando extrair dele observações que pudessem ajudá-los na resolução destas conversões.

A ideia para estas questões, como dissemos no quadro 9, era buscar identificar possíveis apreensões dos alunos relacionadas ao número racional para além dos limites impostos pelo uso do material dourado adaptado. Assim, mesmo considerando o pouco tempo de trabalho do aluno com o manipulável na resolução destas conversões, talvez pudéssemos observar alguns indicativos de competências, fruto de internalizações importantes nascidas dessa curta experiência com o concreto, tais como a capacidade de dimensionar a parte em função do todo, o que permite-lhe dizer se dada fração é muito, é pouco, quase tudo, quase nada, pouco mais que a metade, pouco menos que a metade etc, de fazer comparações entre partes de um mesmo todo, compreendendo-as como maiores, menores, equivalentes etc e de identificar equivalências, por exemplo.

O aluno A10, ao tentar resolver a Q13, optou por montar no manipulável cada uma das alternativas e chegou à conclusão de que “três décimos” seria a alternativa mais próxima da parte destacada da figura, presente no enunciado, em relação ao seu todo. Mesmo sem ter obtido sucesso na identificação da resposta correta, já que o registro figural é um círculo dividido em três partes iguais com uma destas partes destacada, o aluno, claramente, busca utilizar a percepção visual para comparar a dimensão da parte em relação ao todo na primeira representação com a dimensão da parte em relação ao todo na segunda representação, procurando, a partir desta sua observação, identificá-las como representações do mesmo número racional. Os alunos A3 e A5 desenvolveram a mesma estratégia e acertaram, marcando a alternativa 0,33. O primeiro justificou afirmando que “é como se tivesse três partes dessa”, referindo-se à parte destacada na representação montada no concreto, enquanto que o segundo justificou dizendo que “são do mesmo tamanho”, referindo-se às partes destacadas em ambas representações.

Vimos que, para Duval (2011), o reconhecimento das unidades de sentido no interior das representações é de suma importância no exercício das conversões e ocorre quando identificamos quais informações que, ao variar no primeiro registro, produzem co-variações no segundo registro.

Acreditamos que o procedimento adotado pelos alunos A10 e A5, descrito anteriormente, sugere que os alunos perceberam a informação “área destacada em relação ao todo” como uma unidade de sentido no interior das representações figurativas, ou seja, um dado matematicamente pertinente no conteúdo deste tipo de registro. Por outro lado, parecem compreender que a forma dos inteiros representados, um círculo e um quadrado, bem como o número de partes em que estes estão divididos não são informações relevantes para o reconhecimento de tais registros como representações de um mesmo racional.

No entanto, já na questão seguinte, A10 e A5 marcaram a alternativa 0,5 como correta, quando a representação do enunciado da Q14 trazia a figura de um quadrado dividido em três partes iguais com uma das partes em destaque. Indagados pelo pesquisador sobre o porquê de sua resposta, ambos responderam que se parecia com a referência de 0,5 na placa vermelha do material dourado adaptado (ver figura 10 no capítulo 4). Nesse momento, os alunos se equivocaram, pois desprezaram a área destacada em relação ao todo e se detiveram em informações não matematicamente pertinentes nos registros figurativos como a suposta semelhança das formas. Em outras palavras, A10 e A5 concentraram sua atenção no fato de que, ambas as representações, eram quadrados com uma parte retangular destacada e não consideraram algo visualmente evidente nos registros, ou seja, a diferença entre a metade e um terço.

Durante a resolução da Q11, o aluno A5 montou a representação numérica 75% do enunciado, mas hesitou bastante, concentrando-se no número de partes e elementos destacados nas representações das alternativas, tentando estabelecer uma relação com o número de partes do manipulável usadas na montagem. Depois de um bom tempo, mudou o foco de sua observação, atentando, dessa vez, para a área destacada em relação ao todo, no caso das representações figurativas de quantidades contìnuas, e para o número de elementos destacados em relação ao total, no caso das representações figurativas de quantidades discretas, e afirmando que não poderiam ser as alternativas “a” e “b” cujas partes destacadas eram “menos da metade”, quando a representação no concreto sugeria uma parte maior que a metade.

Compreende-se, portanto, que, embora tenhamos alguns indícios de que o manipulável pode auxiliar os alunos na discriminação destas informações, este reconhecimento das unidades de sentido no interior das representações requer um trabalho contínuo e mais duradouro, pois, como afirma Duval (2011):

> uma única conversão não é suficiente para reconhecer as unidades de sentido, ou para justificar a pertinência das correspondências e não correspondências entre a representação de partida e a representação de chegada. É preciso fazer variar, de maneira sistemática o conteúdo da representação de partida e efetuar uma nova conversão para cada variação feita (p. 108).

Podemos dizer, portanto, que é no exercício contínuo de promover tratamentos no registro inicial e realizar conversões para cada variação feita que o aluno vai reconhecendo os dados que são matematicamente pertinentes no interior das representações. Nesse sentido, talvez a vivência proporcionada pela pesquisa não tenha sido suficiente para fomentar tal competência nos alunos, embora possa demonstrar aqui e ali indícios de que o manipulável pode contribuir nesse reconhecimento.

Para Duval (2011), contudo, cada registro deve ser explorado com tratamentos que lhe sejam específicos. Os tratamentos envolvendo registros figurativos, portanto, devem ser, sobretudo, figurativos. Assim, entendemos que, ao manipular o material dourado adaptado produzindo as várias representações figurativas concretas, os alunos exploram tratamentos que são próprios desse tipo de registro, ou seja, realizam montagens sobrepondo, juntando, incluindo ou retirando partes com base na placa que é a referência do todo, inteiro ou unidade.

Ao tratar da importância da utilização dos registros figurais com a exploração de tratamentos que lhes são próprios, Duval (2012, p.287) destaca que tais atividades “ensinam a ver, isto é, permitem descobrir, mobilizar e controlar a produtividade heurística das figuras”. Assim, a apreensão operatória, que resulta dos tratamentos puramente figurativos, é que permite aos alunos a habilidade de “ver” as figuras e extrair delas informações matemáticas relevantes antes mesmo de quaisquer tratamentos numéricos ou algébricos (DUVAL, 2012).

A dificuldade que os alunos têm de ver, isto é, fazer interpretações a partir do registro figurativo, ficou evidente em algumas situações como na experiência do aluno A4 que respondeu corretamente a Q7 utilizando o caminho resolutivo com o manipulável, mas que, ao ser indagado pelo pesquisador, hesitou bastante para responder se aquela representação figurativa concreta montada a partir da fração 1/2, presente no enunciado da questão, significava mais que a metade, menos que a metade ou exatamente a metade. A questão A11 e a dificuldade que alguns alunos tiveram para relacionar uma representação figurativa de quantidade contínua com uma representação figurativa de quantidade discreta, já discutida anteriormente, também parece indicar tal dificuldade.

O bom uso da observação e visualização atenta nessa mesma questão, contudo, fez com que o aluno A10 a respondesse corretamente. Ao ser questionado pelo pesquisador o aluno explicou que excluiu de imediato as alternativas “a” e “b”, pois suas partes destacadas eram “menores” que a parte destacada na representação concreta montada a partir do registro numérico do enunciado, e que ficou na dúvida entre as alternativas “c” e “d”, mas acabou escolhendo a “c”, pois sua parte destacada era “mais parecida” com a da representação no manipulável. Percebe-se, pela primeira explicação do aluno, que ao usar a expressão “mais parecida" refere-se à área destacada em relação ao todo e não à forma das figuras, já que, como vimos, tratam-se de representações bem distintas nesse aspecto.

O aluno A3 também soube utilizar a leitura correta das representações figurais para resolver a Q14, como podemos ver, a seguir, na descrição das falas e ações do estudante relacionadas a cada uma das alternativas:

- Alternativa D: "Não é, porque tem três pintadas e três não, e, aqui, (apontando para a figura no enunciado da questão) não dá!".
- Alternativa C: "Não é, porque passa". Referindo-se à representação que montou com o manipulável a partir do registro numérico da alternativa e cuja parte destacada percebeu que era maior que a parte destacada na representação figurativa do enunciado.
- Alternativa B: "Não é, porque não é do mesmo tamanho do desenho". Também referindo-se à representação montada a partir da representação numérica da alternativa e cuja parte destacada concluiu não ser equivalente à destacada na representação do enunciado.

Finalmente, por eliminação e face à impossibilidade de montar a representação 2/6 da alternativa "a" com o manipulável, marcou esta alternativa como correta e acertou.

Quanto à percepção de equivalências, algumas observações sugerem que o caminho resolutivo adotado com o material dourado adaptado e sua regra de correspondência associada, que parte do princípio de que partes destacadas com áreas iguais em inteiros com áreas também iguais são equivalentes e, portanto, representam o mesmo número racional, tenha auxiliado os estudantes nesse sentido. Na questão Q2, por exemplo, os alunos A10 e A5 montaram a segunda placa utilizando as peças do conjunto amarelo do manipulável que representa um inteiro dividido em cinco partes iguais, o que sugeria a representação 3/5 como resposta. No primeiro momento, os alunos hesitaram, pois não encontraram tal registro em nenhuma das alternativas, em seguida, tomaram as peças representativas de um inteiro dividido em dez partes iguais e perceberam que seis destas partes eram equivalentes a três das partes usadas anteriormente, marcando a alternativa 6/10 como a correta.

Para Duval (2003, p.31), a ideia de que existe uma oposição entre a compreensão conceitual ou puramente mental e as produções semióticas externas é enganosa, já que "muitas vezes, as representações "mentais" não passam de representações semióticas interiorizadas". Nesse sentido, cabe considerarmos algumas observações, em nossa análise, que possam indicar possíveis internalizações produzidas pela experiência dos alunos com o manipulável. O aluno A3, por exemplo, face à impossibilidade de representar, a partir do manipulável, o registro 1/6, presente no enunciado da questão Q15, afirmou: "acho que é 0,16". Ao ser indagado pelo pesquisador sobre o porquê de tal conclusão, montou a representação 0,16 no material dourado adaptado e disse, referindo-se à parte destacada no concreto: "é mais ou menos seis partes dessa aqui". É interessante notar que o aluno parece ter feito estimativas baseadas nas referências oferecidas pelo manipulável sem a necessidade de utilizar o caminho resolutivo associado a ele. Embora, não possamos afirmar que tal procedimento teve a influência de referências internalizadas a partir dessa curta experiência com o material concreto, não se pode desprezar essa possibilidade, já que "as representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas" (DUVAL, 2003, p.31).

Segundo Duval (2011, p.118), o fato de um aluno realizar uma conversão entre dois tipos de registro num sentido, não significa que será capaz de fazê-lo no sentido inverso. Isto porque, nas palavras do autor, os dois sentidos de uma conversão são tão diferentes quanto "subir ou descer um caminho íngreme na montanha".

Como podemos ver no quadro 13, em algumas conversões, na primeira aplicação do instrumento avaliativo (sem a utilização do manipulável), a dificuldade relacionada à heterogeneidade dos sentidos ficou bem evidente, enquanto que, na segunda aplicação (com o material manipulável), os resultados sugeriram que a troca de sentido nestas conversões não trouxe maiores dificuldades aos alunos:

Quadro 13: Percentual de acertos observados por sentido de conversão sem o manipulável e com o manipulável

Conversão	**Acertos sem o manipulável**	**Acertos com o manipulável**
Numérica fracionária → Numérica decimal	40%	100%
Numérica decimal → Numérica fracionária	90%	100%
Figurativa → Numérica fracionária	100%	100%
Numérica fracionária → Figurativa	90%	100%

Numérica percentual → Numérica fracionária	90%	100%
Numérica fracionária → Numérica percentual	20%	100%
Numérica decimal → Numérica percentual	80%	100%
Numérica percentual → Numérica decimal	30%	100%

Fonte: Elaborado pelo autor

Sem o material manipulável percebemos variações bem acentuadas no número de acertos dos alunos a partir da mudança de sentido nas conversões, ou seja, a troca do tipo de registro da representação inicial pelo da representação final e vice-versa. Isto ocorre porque o aluno não sabe o que fazer ao perceber que o método empregado com sucesso para realizar uma conversão entre representações perde sua aplicabilidade ao trocarmos o registro de partida pelo de chegada (DUVAL, 2011).

Os resultados demonstraram que a mediação do material dourado adaptado parece atenuar as dificuldades causadas pela mudança de sentido e, consequentemente, pela variação de congruência e não-congruência nestas conversões. Isto pode ser explicado pela utilização, no caminho resolutivo, da regra de codificação associada ao manipulável que pode ser aplicada a estas conversões não importando o sentido em que estejam.

Em síntese, a aplicação do instrumento avaliativo com e sem o uso do material dourado adaptado, possibilitou identificar limites e possibilidades no uso deste material no processo de realização de conversões entre representações de números racionais.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa indicou que, embora o uso do manipulável nos exercícios de conversão entre representações semióticas do número racional apresente limites, tais como a ênfase no significado parte-todo, em detrimento de outros sentidos da fração, e o uso de regras de correspondência (codificação) no caminho resolutivo, há evidências de que a inserção do concreto como mediador nestas atividades, além de pôr os alunos em movimento no sentido das resoluções, oportunizou a fomentação de habilidades indispensáveis à atividade matemática, tais como o reconhecimento das unidades de sentido no interior das representações e o tratamento dos registros a partir de operações que lhe são próprias.

Pudemos verificar que o uso do manipulável também reduziu as dificuldades produzidas pelo fenômeno de congruência / não-congruência e heterogeneidade dos sentidos na conversão a partir da aplicação de um caminho resolutivo específico.

Para além do bom desempenho do ponto de vista matemático, há indícios que sugerem ganhos também do ponto de vista cognitivo, sobretudo, a partir de possíveis interiorizações produzidas pela interação dos alunos com o manipulável.

A afirmação de que "não existe (nenhuma) *noésis sem sémiosis*, não existe ato matemático de pensamento sem transformação de representações semióticas quaisquer que sejam" (DUVAL, 2011, p.42) nos põe diante da importância fundamental que o trabalho exploratório das representações semióticas assume no ensino da matemática. Nesse sentido, podemos dizer que não aprendemos sobre um objeto para que possamos lidar com suas representações e sim lidamos com suas representações para poder conhecê-lo, em outras palavras, o aluno não aprende para representar, ele representa para aprender.

Na TRRS, vimos que a possibilidade de apreensão conceitual de qualquer objeto matemático se dá a partir da coordenação de diferentes registros de representação semiótica, sejam figurativos, numéricos, linguísticos etc (DUVAL, 2003).

A necessidade de explorar a pluralidade de representações vem do fato de que nenhuma representação isolada dá conta do todo do objeto, já que as representações são sempre parciais em relação ao que representa, pois "é enganosa a ideia de que todos os registros de representações de um mesmo objeto tenham igual conteúdo ou que se deixem perceber uns nos outros" (DUVAL, 2003, p.31). Seja qual for a representação semiótica escolhida, esta imporá sempre “uma seleção de elementos significativos ou informacionais do conteúdo que representa” (DUVAL, 2012, p.280).

Ao utilizarmos os materiais manipuláveis no ensino dos números racionais, incluímos um outro tipo de registro, que, no âmbito desta pesquisa, chamamos de representações figurativas concretas, tornando acessível aos alunos, portanto, a percepção de outros elementos relacionados ao objeto matemático em questão.

Escolhemos o exercício da conversão entre representações semióticas para a observação e análise da utilização das representações figurativas concretas produzidas com o manipulável por entender, a partir da TRRS, que este tipo de transformação é o primeiro e grande obstáculo à compreensão em matemática, mas, por outro lado, com relação à aprendizagem, “desempenha um papel essencial na conceitualização” (DUVAL, 2012, p.277).

As observações a partir dos instrumentos avaliativos aplicados, tanto no experimento piloto, quanto na etapa final da pesquisa, alinharam-se àquilo que Duval (2012, p.284) afirma que pode acontecer com os alunos diante de uma conversão não-congruente, ou seja, “criar um problema diante do qual o sujeito se sente desarmado e a possibilidade de conversão não vem mais à mente”. A coordenação de diferentes representações não é realizada de forma rápida e espontânea como se os obstáculos relacionados ao fenômeno de não congruência não existissem (DUVAL, 2012).

A utilização do manipulável ofereceu um caminho inicial e permitiu que alunos com desempenho muito baixo na primeira aplicação do instrumento avaliativo, pudessem responder corretamente a maior parte das questões. Os resultados sugerem que, ao introduzirmos o material dourado adaptado e, consequentemente, a regra de codificação a ele associada, houve uma diminuição das dificuldades impostas pela mudança de sentido e variações de congruência e não-congruência nas conversões.

Quanto ao reconhecimento das unidades de sentido, algumas observações sugeriram, como vimos na análise dos resultados, que o material manipulável foi importante para ajudar os alunos a, no âmbito das representações figurativas, identificar como não pertinentes alguns dados tais como o número de partes destacadas e a forma destas partes na figura, bem como reconhecer a área destacada em relação ao todo como informação matematicamente pertinente neste tipo de representação.

Contudo, o caminho resolutivo para realizar as conversões, apresentado junto com o material dourado adaptado aos alunos, parece-nos estar baseado naquilo que Duval (2003) chamou de regra de correspondência ou codificação. Porém, acreditamos que a complexidade envolvida na montagem das placas e as observações proporcionadas pelas representações figurativas concretas podem justificar futuros estudos que, mais que os indícios percebidos e discutidos nesta pesquisa, possam apontar a relevância de recursos dessa natureza na apreensão conceitual dos objetos matemáticos.

Quando neste trabalho falamos daquilo que chamamos de dupla conversão, ou seja, a passagem do registro inicial para o registro figurativo concreto e, em seguida, a passagem desta representação no material manipulável para o registro final, não estamos querendo determinar o número de transformações que acontecem, pois em quaisquer que sejam as conversões realizadas, sempre haverá representações intermediárias, ou seja, aquilo que poderíamos chamar de conversão direta, ou dupla, na verdade, não passa de uma ilusão (DUVAL, 2012). Nesse sentido, a inclusão do material manipulável apenas abre possibilidades também para a produção externa das representações concretas, mas não define o número de conversões internas e representações que ocorrem, de fato, nesse processo.

Como vimos, as representações semióticas não cumprem um papel meramente comunicativo, mas são primordiais no próprio desenvolvimento das representações mentais, já que estas dependem, sobretudo, “de uma interiorização de representações semióticas” (DUVAL, 2012, p. 269). Assim, é plausível considerar a possibilidade de que, ao interagir com as representações figurativas concretas proporcionadas pelo manipulável, os alunos possam interiorizar representações mentais que lhes serão fundamentais para a atividade cognitiva do pensamento e, de modo particular, no exercício das conversões entre representações semióticas do número racional.

Enfim, entendemos que as representações figurativas concretas, como vimos no caso do material dourado adaptado, podem cumprir uma importante função enquanto representações auxiliares e, portanto, de transição, no exercício das conversões. Contudo, acreditamos que tal abordagem no ensino da matemática será bem sucedida se tais representações “são abandonadas pelos próprios alunos logo que eles compreendem, pois sua utilização lhes parece um procedimento longo e custoso” (DUVAL, 2011, p. 130).

O manipulável, portanto, deve ser visto como um valioso recurso didático, podendo ser utilizado como um ponto de partida no ensino dos objetos matemáticos e sempre buscando fomentar a interiorização de representações que enriqueçam a capacidade de abstração dos alunos. Nesse sentido, os alunos devem, na seqüência, ser capazes de criar suas próprias estratégias resolutivas, o que, do ponto de vista cognitivo, é o que se espera.

A pesquisa empreendida foi para o pesquisador uma oportunidade ímpar de crescimento pessoal e de enriquecimento inestimável de sua formação como professor. A motivação nascida da percepção dos desafios que permeiam o ensino dos números racionais e suas representações associada ao olhar da Teoria dos Registros de Representação Semiótica sobre o tema transformaram a vivência de um simples jogo, produzido inicialmente para ser utilizado no âmbito particular de uma sala de aula, num trabalho de pesquisa cujos resultados e conclusões esperamos que possam ter sua contribuição no campo da Educação Matemática, sobretudo, no que concerne à exploração da potencialidade didática dos materiais manipuláveis durante as aulas.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, E. D. M. Apresentação do trabalho matemático pelo sistema montessoriano. In: **Revista de Educação e Matemática**, n. 3, 1979 (p. 26-27).

BEHR, M. J; LESH, R.; POST, T. e SILVER, E. (1983). Rational number concepts**.** In: LESH, R. & LANDAU, M. (Ed.), **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, p. 91-126.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais :** Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. Secretária de Educação Básica. **Base Nacional Curricular Comum:** educação é a base. Brasília: MEC; SEB, 2017.

CAETANO, P. A. S e outros. Ladrilhamento do plano: ângulos internos e ladrilhos de três em três: desafio do ladrilhamento: matemática na prática. In: **Curso de Especialização para Professores do Ensino Médio de Matemática:** módulo I: a sala de aula em foco. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=21085>. Acesso em 02. set. 2017.

CASTELNUOVO, E. **Didatica de la Matemática Moderna**. México: Trillas, 1970.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. Coleção Tendências em Educação Matemática.

DALCIN, M; ALVES, S. Mosaicos no Plano. In: **Revista do Professor de Matemática**, n. 40. S.I: SBM, S. d. Disponível em <http://www.rpm.org.br/conheca/40/1/mosaico.htm> Acesso em set. 2017.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática**: Registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus Editora, 2003, p.11-33.

__________.**Semiósis e pensamento humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. 1. Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. (Fascículo I).

__________**Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**/**organização Tânia M. M. Campos; (tradução Marlene Alves Dias) Raymond Duval. São Paulo: PROEM, 2011**.**

___________ Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** – Revemat, Florianópolis, v.7, n.2, p.266-297, 2012. Disponível em: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

__________. Entrevista: Raymound Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática** - RPEM, Campo Mourão, v.2, n.3, jul-dez. 2013. Entrevista concedida a FREITAS, J. L. M. de; REZENDE, V.

FERNANDES, N. R.; BELLEMAIN, P.M.B.; LIMA, J.M.F.; TELES, R.A.M. . Número racional e seus diferentes significados, **Anais do 2º SIPEMAT**, pp.1-22, 2008. Disponível em http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/SIPEMAT08/artigos/CO-134.pdf Acesso em: 01/08/2016.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999

GITIRANA, V; CARVALHO, J. A matemática do contexto e o contexto na matemática. In: João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho (Coord.), **Coleção Explorando o Ensino, Matemática**, v.17, Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010, p.69-90.

______. A metodologia de ensino e aprendizagem nos livros didáticos de matemática. In: João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho (Coord.), **Coleção Explorando o Ensino, Matemática**, v.17, Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.

KIEREN, T. E. Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal developmente. In: J. Hiebert and M. Behr (eds): **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1998.

_______. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, Richard A.; BRADBARD, David A. **Number and mensurament:** papers from a research workshop. Georgia: ERIC, 1976.

LORENZATO, S. A. Laboratório de ensino de matemática e materiais didático manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio (org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

MANDARINO, M. C. F. “Números e operações”, *in* João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho (Coord.), **Coleção Explorando o Ensino, Matemática**, v.17, Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010, p. 97-134.

MENDES, I. A.; FILHO, A. S.; PIRES, M. A. L. M. Ábaco. In: MENDES, Iran Abreu (Org.). **Práticas matemáticas em atividades didáticas para os anos iniciais**. São Paulo: Livraria da Física, 2011. (77-94).

MINAYO, M. C. **Pesquisa Social:** Teoria, método e criatividade. 21 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1994.

MIZUKAMI, M. G. N. **Ensino:** as abordagens do processo. São Paulo: EPU, 1986.

MOSS, J. (2002). Percents and Proportion at the center: Altering the teaching sequence for rational number. In Litwiller, B. e Bright, G. (eds): **Making sense of frations, ratios, and proportions**. NCTM, 2002 Yearbook, Reston, VA: NCTM.

MUNIZ, C. A. **Brincar e jogar:** enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. Coleção Tendências em Educação Matemática.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Tradução de: Sandra Costa.Porto Alegre: Artes medicas, 1997.

NUNES, T., BRYANT, P., PRETZLIK, U. & HURRY, J. **The effect of situations on children's understanding of fractions.** Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford, June, 2003.

OHLSSON, S. Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of fractions and Related Concepts. In: HERBERT, J. e BEHR, M. **Numbers concepts and operations in the middle grades**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, p. 53-92, 1989.

PAIS, L. C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria**, 2001. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf. Acesso em: 01/08/2016.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio.** /Secretaria de Educação-Recife: SE. 2012.

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança:** imitação, jogo e sonho imagem e representação. 3ª ed.Rio de Janeiro: Zahar, 1978.
_________**O Desenvolvimento do Pensamento**. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1977.

REYS. R. Considerations for teaching using manipulative materials. In: **Teaching made aids for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1982.

PONCE, A. **Educação e luta de classes**. São Paulo: Cortez, 1985.

SANTOS, L. S. **Análise dos efeitos didáticos emergentes de uma seqüência de atividades na aprendizagem do significado parte/todo do número racional.** Dissertação. Universidade Federal Rural de Pernambuco - Programa de Pós Graduação em Ensino das Ciências. Recife, 2010.

SILVA, M. F. F. **Frações e grandezas geométricas:** um estudo exploratório da abordagem em livros didáticos. Dissertação. Universidade Federal de Pernambuco – Programa de Pós Graduação em Educação. Recife, 2004.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANE, E. **Cadernos do Mathema:** jogos de matemática de 6º ao 9º ano. Porto Alegre: ATMED, 2007.

SOARES, K. M. **Fundamentos e história da matemática**. Indaial: Asselvi, 2007.

TURRIONI, A. M. S. **O laboratório de educação matemática na formação inicial de professores**. Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro, 2004.

TURRIONI, A. M. S.; PEREZ, G. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In: LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 57-76.

APÊNDICE A - O JOGO CORRIDA DOS RACIONAIS

Neste apêndice, apresentamos uma descrição mais pormenorizada e também analisamos o jogo Corrida dos Racionais por considerar que, embora não seja o foco de nossa pesquisa, a elaboração de tal material aliada a sua vivência foram de fundamental importância para o desenvolvimento desse trabalho, pois despertaram inquietações que, a posteriori, traduziram-se em objeto de estudo.

Trata-se de um material inspirado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica Duval (2003) e elaborado com a intenção de ser um recurso lúdico utilizado na abordagem dos números racionais e suas diferentes representações numa turma do Programa de Correção de Fluxo – Acelera Brasil, durante o ano letivo de 2016, na Escola Municipal Antônio Farias Filho, em Recife. Desde então, a versão inicial do jogo sofreu várias readequações e modificações em função dos estudos teóricos desenvolvidos sobre os números racionais e a TRRS.

Nos tópicos a seguir, apresentamos uma descrição do jogo Corrida dos Racionais, bem como sua dinâmica e forma de jogar:

Composição do material

Quanto a sua composição, o jogo Corrida dos Racionais dispõe de um painel medindo 0,8m x 1,4m. O painel serve de base para o jogo e conta com uma trilha fechada, oval e subdividida em 16 casas, sendo 9 delas referentes aos três tipos de representação numérica dos números racionais (decimal, fracionária e percentual). As dimensões do painel permitem o espaço para que toda a turma seja posicionada no seu entorno, facilitando a visualização das jogadas, demonstrações e resoluções dos problemas propostos.

Figura 23:Painel base para o jogo Corrida dos Racionais

Fonte: Elaborado pelo autor

Os problemas ou operações propostas para a resolução das equipes estão distribuídas entre 24 cartas, sendo 8 cartas destinadas a cada uma das representações numéricas dos números racionais (decimais, fracionárias e percentuais).

Figura 24: Cartas das Representações

Fonte: Elaborada pelo autor

As situações nas quais os alunos são desafiados a resolverem problemas envolvendo tratamentos e conversões das representações semióticas dos racionais utilizando materiais manipuláveis concretos nascem da interação entre as cartas especiais e a roleta das representações.

Figura 25: Cartas Especiais e Roleta das Representações

Fonte: Elaborada pelo autor

As equipes recebem uma quantia em dinheiro de brinquedo para realizarem a dinâmica de recebimentos e pagamentos desenvolvida durante toda a partida. As 16 cartas indicativas de voltas concluídas, 4 copos de diferentes cores para distinguir as equipes e 1 dado completam esta parte do material.

Figura 26: Dinheiro de brinquedo, cartas de voltas concluídas e o dado

Fonte: Elaborada pelo autor.

A parte do material que cumpre um importante papel apoiando a mediação do professor no sentido da compreensão dos alunos a respeito dos conceitos relacionados aos números racionais é o que chamamos de Lab. Trata-se de um conjunto de materiais concretos manipuláveis que conta com pastilhas plásticas, material dourado adaptado, discos de frações e uma régua numérica e que serve de suporte para a realização das tarefas envolvendo situações de conversões propostas durante uma partida.

Figura 27: Material do Lab

.Fonte: Elaborada pelo autor

Como jogar

Os participantes podem ser divididos em até 4 equipes e um mediador, ou seja, todos os alunos da turma podem jogar ao mesmo tempo e serem mediados pelo seu professor. Uma vez definidas as equipes, cada uma recebe a quantia de 300 reais, em dinheiro de brinquedo, para iniciar a partida. A quantia é distribuída, por equipe, da seguinte maneira: 4 notas de 1 real, 3 notas de 2 reais, 4 notas de 5 reais, 3 notas de 10 reais, 2 notas de 20 reais, 2 notas de 50 reais e 1 nota de 100 reais. O mediador fica com o restante do dinheiro e será responsável pelos pagamentos e recebimentos efetuados durante a partida.

Os copos indicadores das equipes são posicionados na casa de partida, as cartas são empilhadas separadamente de acordo com sua representação e dispostas voltadas para baixo sobre o painel, de modo que as equipes não vejam o problema proposto até que retirem uma carta no momento oportuno. Define-se a ordem de jogada entre os participantes, cada equipe, em sua jogada, caminha a quantidade de casas sorteada no lançamento do dado e a dinâmica do jogo segue a lógica comum à maioria dos jogos de trilha.

Figura 28: Disposição do material do jogo Corrida dos Racionais

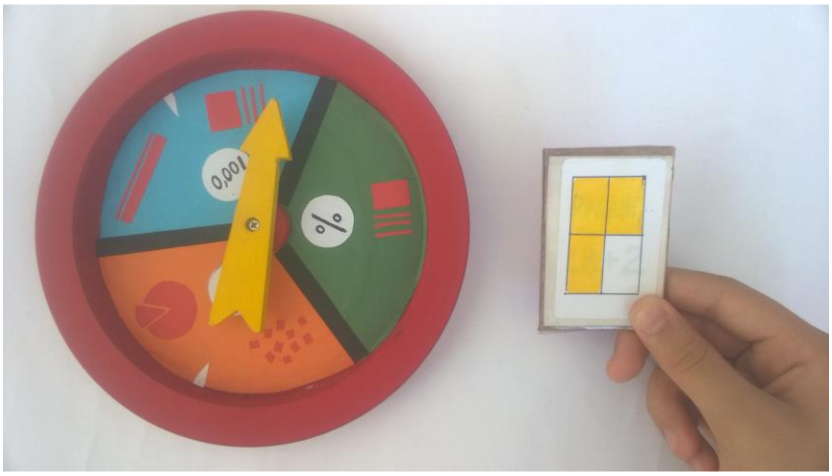
Fonte: Elaborada pelo autor

Ao parar numa casa referente a uma das três representações, a equipe retirará uma carta da pilha correspondente àquela representação e deverá resolver a questão proposta, que virá sempre acompanhada da palavra “pague” ou “receba”. Por exemplo, se a equipe parar na casa de representação fracionária (indicada com o símbolo a/b) e a carta retirada for “receba 1/3 de 60”, receberá do mediador 20 reais, se acertar, ou 10 reais (a metade), se errar. Do mesmo modo, se a carta retirada for “pague 1/5 de 100”, pagará 20 reais ao mediador, se acertar, ou 40 reais (o dobro), se errar.

As casas indicadas com o símbolo Q proporcionam situações especiais onde, após retirarem a carta da pilha correspondente e girarem a roleta das representações, as equipes terão de resolver problemas de conversão, por exemplo, “que porcentagem representa 1/2 ?”. Nesse caso, as equipes recebem 50 reais por acerto ou pagam 50 reais por erro. A roleta indicará, ainda, o material manipulável concreto (material dourado adaptado, pastilhas plásticas, discos de frações ou reta numérica) que deve ser usado para realizar a demonstração desta conversão.

A situação hipotética representada na figura 29 estabelece uma situação em que a equipe parou numa das casas especiais (Q) e precisará realizar um exercício de conversão, transformando a parte do inteiro ilustrada na representação figurativa da carta retirada em uma representação numérica decimal, sorteada na Roleta das Representações. Para tanto, os alunos devem utilizar o manipulável indicado, ou seja, o material dourado adaptado, que servirá como uma demonstração concreta do processo de transformação realizado até se chegar à resposta pretendida, neste caso 0,75.

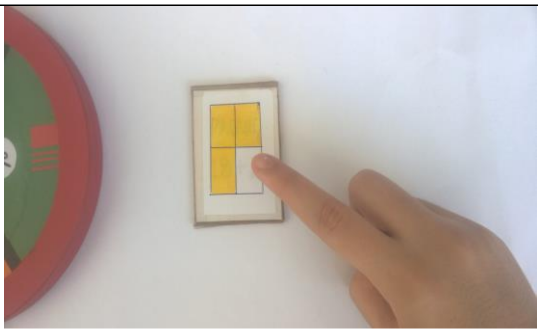
Figura 29: Situação hipotética durante o jogo, exercício de conversão

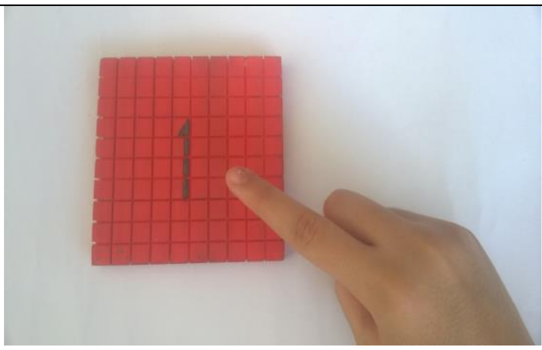
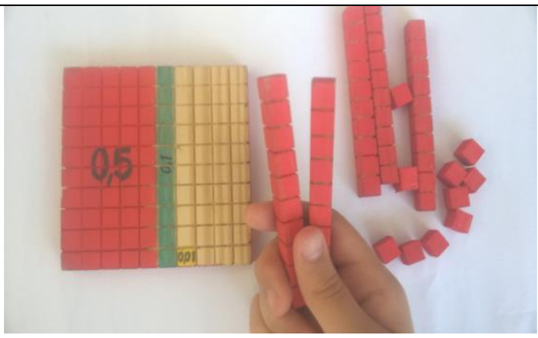
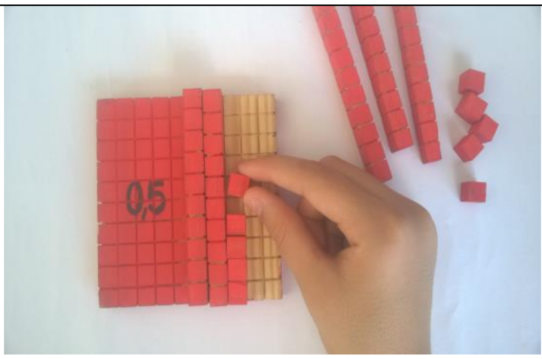


Fonte: Elaborada pelo autor.

No quadro 14, buscamos apresentar uma possível estratégia de resolução para a situação exemplificada anteriormente. Os alunos precisam realizar a conversão de uma representação figurativa de quantidade contínua para uma representação numérica decimal do número racional usando o material dourado adaptado como meio de demonstração da transformação feita:

Quadro 14: Possível estratégia de resolução para situação hipotética numa partida do jogo Corrida dos Racionais

Passos	**Ilustração**	**Descrição**
1º		Verificar se a representação figurativa do número racional está dividida em partes iguais. Observar em quantas partes o todo foi dividido e quantas partes foram destacadas.

2º		Considerar a placa do material dourado adaptado como o inteiro (equivalente ao todo da representação figurativa).
3º		Usar o verso da placa dividindo-a no mesmo número de partes em que foi dividida a representação figurativa.
4º		Destacar as partes que correspondem ao mesmo número de partes destacadas (pintadas) na representação figural. Considerar as barras como décimos (0,1) e os cubinhos como centésimos (0,01).
5º		Finalmente, somar as barras (décimos) e cubinhos (centésimos) das partes destacadas para obter a representação numérica decimal, neste caso 0,75 (setenta e cinco centésimos).

Fonte: Elaborado pelo autor

As casas de abastecimento e troca de pneus custam às equipes 20 e 30 reais, respectivamente. A parada obrigatória impede a equipe de jogar por uma rodada. A cada passagem pelo ponto de partida do circuito, a equipe recebe uma carta indicativa de volta concluída.

Figura 30: Casa de troca de pneus

Fonte: Elaborada pelo autor

A primeira, segunda e terceira equipe a concluir as quatro voltas no circuito recebem respectivamente 150, 100 e 50 reais. A equipe que, ao final, tiver conseguido o maior valor em dinheiro será a vencedora.

Figura 31: Alunos do Programa de Correção de Fluxo na prática do jogo Corrida dos Racionais

Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante que as equipes disponham do tempo necessário, combinado previamente, para discutir, entre seus integrantes e com a mediação do professor, as estratégias de resolução para cada atividade proposta.

Descrição e análise das cartas de representações e cartas espaciais

O jogo Corrida dos Racionais busca explorar, através de atividades relacionadas às chamadas cartas de representações, os registros numéricos fracionários, decimais e percentuais do número racional.

Os exercícios propostos nestas cartas sugerem a mobilização do significado operador da fração para a sua resolução, ou seja, o número racional em questão, na representação fracionária, decimal ou percentual, atuará como uma função sobre um determinado valor monetário modificando-o.

Cartas de Representação Percentual

As situações propostas nas cartas de representações numéricas percentuais envolvem a ação transformadora deste racional sobre um inteiro representado por um valor monetário, o que caracteriza a concepção de operador sendo mobilizada.

O quadro 15 traz as atividades das cartas de representações numéricas percentuais propostas durante o jogo:

Quadro 15: Cartas de representações numéricas percentuais

Representação: %	**Cartas**	**Exercícios propostos**
	1	Pague 30% de 80,00
	2	Pague 20% de 10,00
	3	Pague 10% de 50,00
	4	Pague 25% de 100,00
	5	Receba 50% de 30,00
	6	Receba 60% de 50,00
	7	Receba 100% de 60,00
	8	Receba 75% de 80,00

Fonte: Elaborado pelo autor

Os valores percentuais, bem como os valores monetários foram escolhidos levando-se em conta as limitações e adequações dos materiais concretos manipuláveis que compõem o lab.

Cartas de Representação Decimal

As cartas de representações numéricas decimais trazem situações que também demandam a mobilização do significado operador. Nesse sentido, os alunos podem optar por uma conversão da representação decimal para a fracionária como estratégia de resolução.

O quadro 16 traz as atividades das cartas de representações numéricas decimais propostas durante o jogo:

Quadro 16: Cartas de representações numéricas decimais

Representação: 0,001	**Cartas**	**Exercícios propostos**
	1	Pague 0,3 de 80,00
	2	Pague 0,5 de 30,00
	3	Pague 0,6 de 50,00
	4	Pague 0,2 de 10,00
	5	Receba 1,0 de 60,00
	6	Receba 0,1 de 50,00
	7	Receba 0,75 de 80,00
	8	Receba 0,25 de 100,00

Fonte: Elaborado pelo autor

Os números decimais, bem como os valores monetários foram escolhidos levando-se em conta as limitações e adequações dos materiais concretos manipuláveis que compõem o lab.

Cartas de Representação Fracionária

Assim como ocorre com as percentuais e decimais, as cartas de representações numéricas fracionárias trazem situações que demandam a mobilização do significado operador. No entanto, a concepção parte-todo também poderá ser mobilizada como estratégia de resolução em algumas situações.

O quadro 17 traz as atividades das cartas de representações numéricas fracionárias propostas durante o jogo:

Quadro 17: Cartas de representações numéricas fracionárias

Representação: a/b	**Cartas**	**Exercícios propostos**
	1	Pague 3/10 de 80,00
	2	Pague 1/2 de 30,00
	3	Pague 1/4 de 100,00
	4	Pague 1/5 de 10,00
	5	Receba 3/5 de 50,00
	6	Receba 3/3 de 60,00
	7	Receba 3/4 de 80,00
	8	Receba 1/10 de 50,00

Fonte: Elaborado pelo autor

As frações, bem como os valores monetários foram escolhidos levando-se em conta as limitações e adequações dos materiais concretos manipuláveis que compõem o lab.

Cartas Especiais

Além das representações numéricas, as cartas especiais utilizam também representações figurativas de quantidades contínuas e quantidades discretas e, junto com a roleta das representações, propõem exercícios de conversão entre vários e distintos registros do número racional.

No quadro 18, temos as representações do número racional contempladas nas cartas especiais:

Quadro 18: Cartas especiais do jogo Corrida dos Racionais

Especiais: Q	**Cartas**	**Representações**	**Descrição**
	1		1/2 em representação figural de quantidade contínua

	2		3/4 em representação figural de quantidade contínua
	3		6/6 (o inteiro) em representação figural de quantidade discreta
	4		3/12 em representação figural de quantidade discreta
	5		1/4 - representação numérica fracionária
	6		0,5 - representação numérica decimal
	7		70% - representação numérica percentual
	8		100% - representação numérica percentual

Fonte: Elaborado pelo autor

O jogo busca oferecer um conjunto de situações onde tanto as representações figurativas, sejam elas de quantidades contínuas ou de quantidades discretas, quanto as representações numéricas fracionárias, decimais ou percentuais são exploradas nas várias conversões possíveis entre elas.

As conversões propostas privilegiam as transformações em ambos os sentidos, ou seja, em alguns momentos os alunos terão que realizar uma conversão do tipo *numérica fracionária* → *numérica percentual* e em outras situações o desafio será a transformação *numérica percentual* → *numérica fracionárial*.

O quadro 19 apresenta uma síntese das conversões propostas pelo jogo, destacando os possíveis significados atribuídos à fração na resolução de cada uma delas, o sentido e as representações envolvidas, bem como o material manipulável utilizado. Quanto ao sentido em que as transformações ocorrem, os símbolos → e ↔

servem para designar, respectivamente, sentido único e ambos os sentidos de conversão.

Quadro 19: Significados da fração, sentido das conversões e os manipuláveis do jogo

Significado	Conversão	Manipulável
Parte-todo	Figurativa contínua ⟷ Numérica fracionária	Disco de frações Pastilhas plásticas
	Figurativa contínua ⟶ Numérica decimal	Material dourado
	Figurativa contínua ⟶ Numérica percentual	Material dourado
	Figurativa discreta ⟷ Numérica fracionária	Disco de frações Pastilhas plásticas
	Figurativa discreta ⟷ Numérica decimal	Material dourado
	Figurativa discreta ⟷ Numérica percentual	Material dourado
	Numérica fracionária ⟷ Numérica decimal	Disco de frações Material dourado
	Numérica percentual ⟷ Numérica fracionária	Disco de frações Material dourado Pastilhas plásticas
	Numérica percentual ⟷ Numérica decimal	Material dourado
Operador	Numérica fracionária ⟶ Figurativa	Disco de frações
	Numérica decimal ⟶ Figurativa	Material dourado
	Numérica percentual ⟶ Figurativa	Material dourado
	Figurativa contínua ⟶ Numérica decimal	Régua numérica

Número	Figurativa discreta ⟶ Numérica decimal	Régua numérica
	Numérica fracionária ⟶ Numérica decimal	Régua numérica
	Numérica percentual ⟶ Numérica decimal	Régua numérica
Quociente	Figurativa contínua ⟶ Numérica decimal	Régua numérica
	Figurativa discreta ⟶ Numérica decimal	Régua numérica
	Numérica fracionária ⟶ Numérica decimal	Régua numérica

Fonte: Elaborado pelo autor

O quadro demonstra que o material explora conversões envolvendo representações figurativas, tanto de quantidades contínuas quanto de quantidades discretas, representações numéricas fracionárias, decimais e percentuais. A linguagem natural também é utilizada no jogo, já que sua dinâmica requer dos alunos e do professor mediador a expressão verbal das representações durante a partida.

APÊNDICE B – INSTRUMENTO AVALIATIVO

Nome:____________________________________ **Idade:**________
Escolaridade:_______

INSTRUMENTO AVALIATIVO

1- Qual alternativa representa a fração $\frac{1}{4}$ em número decimal ?

a) 0,41 b) 0,25 c) 0,14 d) 0,75

2- Qual alternativa representa o número 0,6 na forma de fração ?

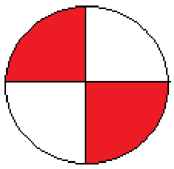
a) $\frac{6}{10}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{2}$

3- O número decimal 0,05 pode ser escrito por extenso como:

a) cinco décimos b) cinco centésimos c) cinco milésimos

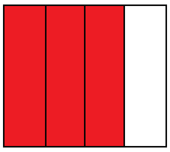
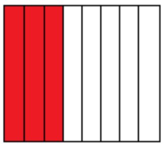
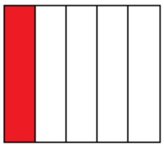
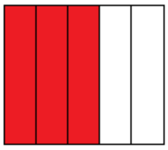
d) cinco inteiros

4- A parte pintada da figura abaixo representa que fração do total?



a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{2}{4}$ d) $\frac{2}{2}$

5 – A fração $\frac{3}{5}$ pode ser representada por qual das figuras?

a)  b)  c)  d) 

6- Qual a alternativa que representa 30% na forma de fração?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{10}$

7- Como podemos representar $\frac{1}{2}$ na forma percentual?

a) 20% b) 50% c) 21% d) 12%

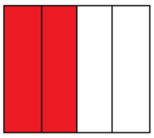
8- Qual alternativa representa o número 0,65 na forma percentual?

a) 6% b) 60% c) 50% d) 65%

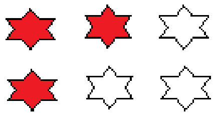
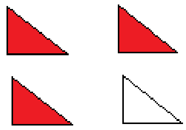
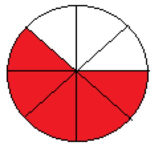
9- Qual das alternativas representa 10%?

a) 0,1 b) 1,0 c) 10,1 d) 10,0

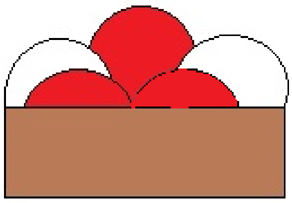
10- Qual das alternativas representa “vinte e cinco centésimos”?

a) 25,0 b) 20% c) $\frac{1}{4}$ d) 

11-Qual das figuras pode ser uma representação de 75% ?

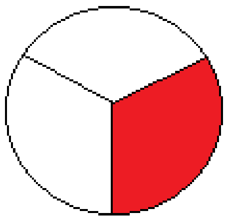
a)  b)  c)  d) 

12-Qual das alternativas representa a quantidade de bolas brancas na caixa em relação ao total ?



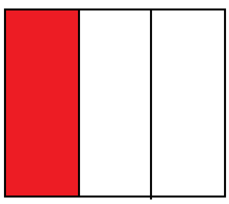
a) 0,4 b) $\frac{1}{2}$ c) 25% d) $\frac{2}{3}$

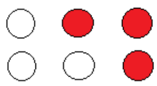
13-Qual das alternativas está mais próxima da parte pintada da figura em relação ao seu todo?



a) $\frac{1}{4}$ b) 0,33 c) 30% d) três décimos

14-Qual das alternativas pode representar a parte destacada na figura ?



a) $\frac{2}{6}$ b) 40% c) 0,5 d) 

15-Qual das alternativas está mais próxima do número $\frac{1}{6}$?

a) 1,6 b) 0,16 c) 0,1 d) 0,2